



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Aplicaciones de la teoría de Tomita Takesaki en teoría cuántica de campos

Tesis presentada para optar por el título de Doctor de la
Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

Lic. Gabriel Alexis Palau

Director de tesis: Dr. Alan Garbarz

Consejero de estudios: Dr. Rafael Ferraro

Lugar de trabajo: Departamento de Física, FCEyN, UBA

Lugar y fecha de defensa: Buenos Aires, Argentina, 2 de Marzo del 2026

Resumen

La teoría modular de Tomita-Takesaki es una herramienta matemática notable a la hora de poner un marco riguroso a la formulación de la teoría de campos. En la presente tesis abordaremos el estudio de tres tópicos desde la perspectiva que ella provee. Nuestro marco teórico será el de la teoría cuántica de campos algebraica, en donde, según veremos, a cada región del espaciotiempo se le asocia un álgebra de observables.

El primero de ellos, la dualidad de Haag, es una propiedad satisfecha por ciertas teorías de campos, que establece que el conmutante del álgebra de observables localizados en una región del espacio-tiempo es exactamente el álgebra asociada a la región causalmente desconectada. Esta condición tiene implicaciones directas sobre las medidas de entrelazamiento, y fue demostrada por primera vez para el campo escalar libre en diamantes causales por Araki en 1964. Posteriormente, Eckmann y Osterwalder utilizaron la teoría modular de Tomita-Takesaki para dar una demostración directa de esta propiedad. En esta tesis presentaremos los resultados de Araki de manera rigurosa y accesible, mostrando cómo se enuncia la dualidad de Haag en las formulaciones de Segal y Weyl, tanto en la primera como en la segunda cuantización. Esto nos permite comprender el marco de la prueba de Eckmann y Osterwalder. Nuestra contribución principal radica en una simplificación de dicha prueba, utilizando el adjunto S^* del operador de Tomita S , en lugar de introducir varios operadores auxiliares.

Luego pasamos al estudio de un estado termal. Para el mismo realizamos varios cálculos innovadores. Por ejemplo, la entropía relativa de Araki asociada a un intervalo acotado $I = (a, b)$ entre un estado termal y una excitación coherente de éste en el modelo de corriente $U(1)$ bosónica, también conocido como el bosón quiral (derivada del mismo). Revisamos algunos resultados recientes sobre la entropía de subespacios estándar y sobre la entropía relativa de estados no puros, como los estados termales. Con antelación, Bostelmann, Cadamuro y Del Vecchio obtuvieron la entropía relativa a temperatura finita para el intervalo no acotado $(-\infty, t)$, utilizando resultados previos de Borchers y Yngvason. Nosotros encontramos una rotación unitaria que nos permite aprovechar todas las simetrías de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, obteniendo así el grupo modular, el hamiltoniano modular y la entropía relativa S de un intervalo acotado a temperatura finita. Esta entropía relativa implica tanto una cota tipo Bekenstein como una cota similar a la QNEC, aunque viola $S'' \geq 0$ (derivada respecto a la longitud del intervalo, con su centro fijo). Extendemos estos resultados al caso del bosón libre sin masa en $1 + 1$ dimensiones, obteniendo cotas

análogas.

Para finalizar, y dado que el cálculo de la entropía relativa al que acabamos de hacer referencia requirió develar la evolución modular asociada al estado termal en regiones tipo diamante en $1 + 1$ dimensiones, nos abocamos al estudio de la conjugación modular asociada a estados KMS sobre regiones de tipo wedge de Rindler, y su relación con la conjugación modular del estado de vacío. Con esto terminaremos por determinar ambos operadores modulares asociados a los estados KMS geométricos, y además nos permite entender más cabalmente lo que usualmente se suele llamar el “second world.”

Abstract

Applications of Tomita–Takesaki Theory in Quantum Field Theory

Tomita–Takesaki modular theory is a remarkable mathematical tool for providing a rigorous framework for the formulation of quantum field theory. In this thesis, we address the study of three topics from the perspective it offers. Our theoretical framework will be that of algebraic quantum field theory, where, as we shall see, an algebra of observables is associated with each region of spacetime.

The first of these topics, Haag duality, is a property satisfied by certain quantum field theories, which states that the commutant of the algebra of observables localized in a spacetime region is exactly the algebra associated with the causally disconnected region. This condition has direct implications for measures of entanglement and was first proven for the free scalar field in causal diamonds by Araki in 1964. Subsequently, Eckmann and Osterwalder used Tomita–Takesaki modular theory to give a direct proof of this property. In this thesis, we present Araki’s results in a rigorous and accessible manner, showing how Haag duality is formulated in both the Segal and Weyl frameworks, in both first and second quantization. This allows us to understand the framework of the proof by Eckmann and Osterwalder. Our main contribution lies in a simplification of this proof, using the adjoint S^* of the Tomita operator S , instead of introducing several auxiliary operators.

We then turn to the study of a thermal state, for which we perform several novel calculations. For example, we compute Araki’s relative entropy associated with a bounded interval $I = (a, b)$ between a thermal state and a coherent excitation thereof in the $U(1)$ bosonic current model, also known as the chiral boson (its derivative). We review some recent results on the entropy of standard subspaces and on the relative entropy of non-pure states, such as thermal states. Previously, Bostelmann, Cadamuro, and Del Vecchio obtained the relative entropy at finite temperature for the unbounded interval $(-\infty, t)$, using earlier results by Borchers and

Yngvason. We find a unitary rotation that allows us to exploit all the symmetries of $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, thereby obtaining the modular group, the modular Hamiltonian, and the relative entropy S for a bounded interval at finite temperature. This relative entropy implies both a Bekenstein-type bound and a bound similar to the QNEC, although it violates $S'' \geq 0$ (where the derivative is taken with respect to the length of the interval, with its center fixed). We extend these results to the case of the free massless boson in $1 + 1$ dimensions, obtaining analogous bounds.

Finally, since the computation of the relative entropy mentioned above required uncovering the modular evolution associated with the thermal state in diamond-shaped regions in $1 + 1$ dimensions, we study the modular conjugation associated with KMS states on Rindler wedge regions, and its relation to the modular conjugation of the vacuum state. In doing so, we fully determine both modular operators associated with geometric KMS states, and this also allows for a clearer understanding of what is usually referred to as the “second world.”

Índice general

Índice de Símbolos	VIII
1. Introducción	2
1.1. Los límites del Teorema de Stone-von Neumann	3
1.2. El nacimiento de la AQFT	8
1.2.1. Observables y von Neumann álgebras	8
1.2.2. Estados y construcción GNS	15
1.2.3. Estados KMS	19
1.2.4. Entropías en teoría de cuántica campos	23
1.3. Teoría de Tomita-Takesaki	28
1.3.1. Operadores modulares	28
1.3.2. Operadores modulares relativos	30
1.4. Contribuciones de la tesis	32
2. Cuantizaciones del escalar libre	36
2.1. Primera cuantización	36
2.1.1. El espacio de una partícula $\mathcal{H}$	36
2.1.2. Espacios de funciones de testeo	39
2.1.3. CCR álgebras en forma abstracta	43
2.1.4. Construcción explícita de los espacios de 1-partícula	44
2.2. Segunda cuantización	49
2.2.1. El espacio de Fock sobre $\mathcal{H}$	49
2.2.2. Representación del álgebra de las CCR	50
3. Dualidad de Haag para el campo escalar libre	53
3.1. Dualidad de Haag	53
3.1.1. Primer cuantización	53

3.1.2.	Segunda cuantización	57
3.2.	Una simplificación de la demostración de Araki	59
3.2.1.	La dualidad en diamantes y Wedges	59
3.2.2.	Demostración de la dualidad de Haag	62
3.2.3.	Un contraejemplo de la dualidad	72
4.	Entropía de excitaciones coherentes	77
4.1.	Estructura modular del álgebra de Weyl y purificación de estados	78
4.1.1.	Purificación de ω	83
4.2.	La corriente $U(1)$ del bosón quirial	84
4.2.1.	El estado de vacío	85
4.2.2.	El estado termal	89
4.3.	El bosón libre sin masa en $1 + 1$ dimensiones a temperatura finita	95
4.3.1.	Flujo modular y Hamiltoniano modular	97
4.3.2.	Entropías relativas y cotas	98
4.4.	Conclusiones	100
5.	Conjugación modular del estado KMS	102
5.1.	Construcción del estado termal geométrico	103
5.1.1.	La net conforme en el plano	105
5.2.	Relación entre el termal ω y el vacío	107
5.2.1.	Los operadores modulares en la representación GNS	109
5.3.	Purificaciones del estado termal global y local	117
5.3.1.	Purificación de ω_β con el vector de vacío $ \Omega\rangle$	117
5.3.2.	Purificación de $\omega_\beta _{\mathcal{A}_r}$ con la representación del vacío $ \Omega\rangle$	118
5.3.3.	Purificación de $\omega_\beta _{\mathcal{A}_O}$ con la representación del vacío	120
5.3.4.	Purificación estándar	123
6.	Conclusiones	129
7.	Apéndice	133
7.1.	Un ejemplo de la acción de β	133
7.2.	Más sobre las condiciones iniciales de la ecuación de Klein-Gordon	134
7.3.	Posición genérica de subespacios	137
7.4.	El cono positivo	138

Índice de Símbolos

β	Temperatura inversa
$\diamond(\mathcal{O})$	Dominio de dependencia de la región $\mathcal{O}$, también llamado desarrollo causal o diamante.
$\Gamma(\mathcal{H})$	Espacio de Fock sobre $\mathcal{H}$
$\mathcal{B}(H)$	Operadores acotados sobre H según la norma uniforme
$\mathcal{H}$	Espacio de Hilbert complejo de una partícula
$\mathcal{K}$	Espacio de Hilbert real de una partícula
β	Estructura compleja sobre el espacio $\mathcal{K}$
$A(\mathcal{O})$	Álgebra de operadores asociada a la región $\mathcal{O}$
A_S	Net de von Neumann álgebras en la forma de Segal.
A_W	Net de von Neumann álgebras en la forma de Weyl.
H_φ	Espacio de Hilbert construido vía la GNS de φ
K	Espacio de Hilbert de funciones pares en la coordenada temporal
R_S	Mapa de la segunda cuantización en la forma de Segal.
R_W	Mapa de la segunda cuantización en la forma de Weyl.
S_R, S_I	Mapas de la primera cuantización en la forma de Weyl.
S_S	Mapa de la primera cuantización en la forma de Segal.

Agradecimientos

Fueron varios años en los que la gente a quien debo agradecer, me acompañó y me formó, incluso antes de mi admisión a la carrera de doctorado ya Mauricio y Alan me estaban enseñando los temas que les apasionan en el contexto de un curso extracurricular de matemáticas para la física. No tengo más que agradecimientos para ellos y el resto del grupo, Guillem, David, Goya, absolutamente todos ellos siempre estuvieron dispuestos y se hicieron un tiempo para charlar y transmitir lo que ellos saben. En estos años, ellos han sabido llevar adelante y mantener un grupo de investigación activo en el que semanalmente todos los años se llevaron adelante los seminarios del grupo, lo cual significó algo muy valioso para mi.

También quiero agradecer a la totalidad del jurado: Dra. Marina Huerta, Dr. Román Sasyk y Dr. Markus Fröb, por disponerse a leer el trabajo e incluso con las demoras que surgieron. También al Dr. Esteban Calzetta y al Dr. Raúl Arias por disponerse a ser jurados ante cualquier eventualidad.

No puedo dejar a fuera de esto al DHEP que es un grupo genial de compañeros con lo que fue un placer compartir estos años.

Asimismo debo también agradecer más en general a la UBA, no solo por formarme, sino también por brindarme los elementos, mediante la beca UBA, para poder abocarme de manera casi exclusiva a ello.

Luego, a quienes me acompañaron más de cerca en estos años y tuvieron que sobrellevar más de una vez las vicisitudes horarias que un doctorado puede acarrear: Elim y Emmy.

Capítulo 1

Introducción

“ Attempting a mathematical treatment of quantum fields may be a bit like trying to run a cross-country mile in 4 minutes. One of the main obstacles is the psychological one arising from the prevailing opinion that it can't really be done. ”

Irving Segal, 1953, in the review of the book “Mathematical aspects of the quantum theory of fields”, by K. O. Friedrichs.

Comenzaremos con un capítulo introductorio en el cual pueda exponer el asidero que se fue generando a lo largo de los años para el advenimiento de lo que hoy llamamos *teoría cuántica algebraica de campos* (en adelante AQFT por sus siglas en inglés, también llamada *local quantum physics*). Tal asidero tuvo lugar debido a varias situaciones atípicas que se presentan sobre todo en *teoría cuántica de campos* (QFT a partir de ahora) al contrastarse con lo que venía siendo la formulación estándar de la *mecánica cuántica* (QM en adelante), entre tales situaciones haremos una somera presentación de las que creemos más influyentes: la existencia de *representaciones*¹ no equivalentes para los observables de la teoría, la imposibilidad de asociar una matriz de densidad a un estado arbitrario de la teoría, la imposibilidad de tomar trazas de operadores y las divergencias ultravioletas asociadas con la entropía de von Neumann y consecuentemente la de entrelazamiento. Como veremos, estas cuestiones encuentran una respuesta en el marco de la AQFT. Para finalizar destacaremos las contribuciones de la presente tesis que conciernen tanto a la dualidad de Haag como a los operadores modulares asociados a un estado termal y la entropía relativa entre un estado termal y una excitación del mismo. Este primer capítulo tendrá por propósito por un lado introducir las nociones básicas de AQFT (en las primeras

¹Pensemos en las representaciones como una asignación de nuestros observables a operadores lineales que actúan sobre algún espacio de Hilbert (que deberá satisfacer ciertos requerimientos).

dos secciones, que podrán ser omitidas por los lectores entendidos en el tema) y por otro en la tercer y última sección comentar brevemente los principales resultados de la tesis que luego se desarrollaran en detalle en los capítulos posteriores.

1.1. Los límites del Teorema de Stone-von Neumann

Desde 1927 cuando Werner Heisenberg dio a conocer las *relaciones de conmutación canónicas* (en adelante CCR) entre posición q y momento p de una partícula con un grado de libertad (ver [1], nos permitimos tomar $\hbar = 1$)

$$[p, q] = -i \quad (1.1.1)$$

estuvo claro que no sería posible asociar a q y p operadores que actúen sobre un espacio de dimensión finita puesto que de ser así tomando traza sobre las CCR obtendríamos una contradicción. Con esto se vislumbra la necesidad de ser cuidadosos con ciertos aspectos tales como la asociación entre cantidades físicas como posición y momento y operadores, la dimensionalidad del espacio en el que uno se dispone a trabajar (representar tales operadores) y hasta de la existencia de una traza finita en tal espacio. A lo largo de los años estas cuestiones fueron abordadas de distintas formas.

En su trabajo Heisenberg utiliza la *mecánica matricial*, es decir que representa a la posición y el momento como matrices de tamaño infinito (en consonancia con lo mencionado más arriba), y seis meses después de que enviara dicho trabajo a Zeitschrift für Physik, Erwin Schrödinger envía otro a Annalen der Physik [2], en el cual se vale de una representación de q y p como operadores actuando sobre el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{q}f(x) = xf(x) \quad (1.1.2)$$

$$\hat{p}f(x) = -if'(x)$$

está claro que si pretendemos que $\hat{q}f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces f no puede ser cualquier función de $L^2(\mathbb{R})$, lo cual nos da la pauta de que $\hat{q}$ es un operador que no está definido en todo $L^2(\mathbb{R})$ y es de hecho no acotado al igual que sucede con $\hat{p}$. De hecho cualquier representación de q y p se realizará mediante operadores no acotados, pues de (1.1.1) se desprende $[p, q^n] = -inq^{n-1}$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) y de aquí vía la desigualdad triangular $n\|q\|^{n-1} = n\|q^{n-1}\| \leq 2\|p\|\|q\|^n$, implicando que o bien q es (representado por un) no acotado, o lo es p . Recordemos que $\|q\|^{n-1} = \|q^{n-1}\|$ es válido para q autoadjunto². En breve veremos que de hecho ambos q y p deben ser representados por operadores no acotados. Y dado que los operadores no acotados suponen sutilezas matemáticas que en el caso de operadores acotados pueden pasarse por alto es deseable no tratar con ellos, razón por la cual suponemos que Hermann Weyl se dispuso en

²En realidad q y p son esencialmente autoadjuntos, pero aquí estamos pensando en sus extensiones autoadjuntas, lo mismo aplica cada vez que digamos que son autoadjuntos.

1928 a reescribir la ecuación (1.1.1) en una versión para operadores acotados (ver el capítulo IV, §14 de su libro [3])

$$\hat{U}(a)\hat{V}(b) = e^{-iab}\hat{V}(b)\hat{U}(a), \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R} \quad (1.1.3)$$

siendo $\hat{U}(a) = e^{ia\hat{q}}$ y $\hat{V}(b) = e^{ib\hat{p}}$ dos grupos uniparamétricos de operadores unitarios (ya que $\hat{q}$ y $\hat{p}$ son autoadjuntos el teorema de Stone nos asegura que $\hat{U}(a)$ y $\hat{V}(b)$ serán unitarios y por ende acotados) asociados a la posición y el momento respectivamente³. Notar que (1.1.3) se desprende de inmediato de (1.1.1) solo usando la formula de Baker–Campbell–Hausdorff. De hecho dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede ver que si consideramos $\hat{q}$ y $\hat{p}$ los utilizados por Schrödinger (1.1.2), entonces $\hat{U}(a)$ y $\hat{V}(b)$ actuarán como

$$\hat{U}(a)f(x) = e^{-iax}f(x) \quad (1.1.4)$$

$$\hat{V}(b)f(x) = f(x - b).$$

Alternativamente podemos definir los operadores unitarios⁴

$$\hat{W}(\gamma) = e^{i\frac{1}{2}ab}\hat{U}(a)\hat{V}(b) = e^{-i\frac{1}{2}ab}\hat{V}(b)\hat{U}(a) \text{ para todo } \gamma = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1.5)$$

con esta definición $\hat{W}^\dagger(\gamma) = \hat{W}(-\gamma)$ y las CCR toman la forma:

$$\hat{W}(\gamma_1)\hat{W}(\gamma_2) = e^{i(a_2b_1 - a_1b_2)}\hat{W}(\gamma_1 + \gamma_2) \quad (1.1.6)$$

esperamos que los subíndices de a y b se sobreentiendan. Llamaremos a esta representación la de Segal⁵. Notemos que la expresión $a_2b_1 - a_1b_2$ define una forma simpléctica en $\mathbb{R}^2$, incluso podemos generalizar esta representación cambiando $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^{2n}$ con $n \in \mathbb{N}$ indicando los grados de libertad de nuestro sistema físico

$$\hat{W}(\gamma_1)\hat{W}(\gamma_2) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(\gamma_1, \gamma_2)}\hat{W}(\gamma_1 + \gamma_2), \quad (1.1.7)$$

esta vez con γ_1 y γ_2 en $\mathbb{R}^{2n}$ y $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ una forma simpléctica. La generalización de (1.1.3) a n grados de libertad se realiza mediante n grupos uniparamétricos asociados a n posiciones y otros n asociados a los momentos, satisfaciendo

$$\hat{U}_i(a)\hat{V}_j(b) = \hat{V}_j(b)\hat{U}_i(a) \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i \neq j \quad (1.1.8)$$

$$\hat{U}_i(a)\hat{V}_i(b) = e^{-iab}\hat{V}_i(b)\hat{U}_i(a) \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R},$$

³Weyl usa U para el operador asociado al momento y V para el asociado a la posición, aquí (al igual que en varias referencias) usaremos la notación contraria.

⁴Decidimos llamarlos $\hat{W}$ (como se suele hacer) a pesar de que en su trabajo [4] von Neumann los nota S .

⁵Para establecer un lenguaje más preciso, diremos que (1.1.1) son las CCR en la forma de Heisenberg, (1.1.2) es la realización de Schrödinger, (1.1.3) son las CCR en la forma de Weyl, (1.1.4) es la exponenciación de la realización de Schrödinger y (1.1.6) son las CCR en la forma de Segal cuya versión para n grados de libertad es (1.1.7).

con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si bien en [3] Weyl enuncia dos resultados relevantes, como el hecho de que los operadores q y p pueden efectivamente exponenciarse a grupos uniparamétricos de transformaciones unitarias y la fuerte afirmación de que toda representación de U_i y V_j satisfaciendo (1.1.8) será unitariamente equivalente a la de Schrödinger. Es el propio Marshall Stone en su trabajo [5] publicado en 1930, quien afirma que Weyl no se interesó en demostrar ninguno de ellos, y al mismo tiempo enuncia en forma precisa ambos teoremas. Luego con éxito demuestra el primero de ellos concerniente a los grupos uniparamétricos de transformaciones unitarias.

Respecto al segundo resultado, lo enuncia con precisión: cualquier representación *irreducible*⁶ de operadores q y p satisfaciendo (1.1.1) como operadores actuando en un espacio de Hilbert H (no necesariamente $L^2(\mathbb{R})$) es unitariamente equivalente a la representación de Schrödinger dada por (1.1.2), es decir que si $\tilde{q}$ y $\tilde{p}$ son los que actúan sobre H , habrá un mapa unitario $S : H \mapsto L^2(\mathbb{R})$ que cumple

$$S\tilde{q}S^{-1}f = \hat{q}f \quad (1.1.9)$$

$$S\tilde{p}S^{-1}f = \hat{p}f.$$

Pero Stone solo presenta un breve párrafo que da una idea de demostración, en el que señala que considerar los operadores

$$T_k = Q_k P_k Q_k - P_k, \quad S_k = (Q_k - i) / (Q_k + i)$$

podría resultar de utilidad en la construcción del mapa S (cuya construcción delega a un trabajo previo de von Neumann) y además señala como un punto difícil demostrar que los T_k son autoadjuntos sin hacer mención a como efectivamente se puede probar.

Al año siguiente John von Neumann publica [4] mencionando en la primer sección, que el propio Stone le había confirmado que no estaba al tanto de avances respecto a su idea de demostración. También hace mención a un intento de demostración de Jordan (en [6]), sobre éste menciona que el tratamiento que se le da a las series de potencias de operadores no es del todo riguroso ya que se basa en suposiciones respecto a la convergencia.

Lo primero que hace von Neumann en su trabajo es destacar que el problema de ver si dos operadores q y p satisfaciendo (1.1.1) son o no equivalentes a los de Schrödinger está mal planteado desde el principio ya que la propia igualdad carece de sentido dado que el dominio de definición del miembro izquierdo no es la totalidad del espacio de Hilbert mientras que el miembro derecho, al ser un múltiplo de la identidad, no tiene problemas de dominio. Argumenta entonces que una buena manera de plantear el problema es poniendo las relaciones de conmutación en la forma de Weyl y de hecho luego pasa a definir los operadores para ponerla en la forma de Segal⁷, es decir como en (1.1.6).

⁶Representación irreducible es aquella en la que no hay un subespacio propio de H (el Hilbert sobre el que se actúa) invariante por la acción de los representantes de q y p .

⁷von Neumann nota $S(a, b)$ a estos operadores en lugar de $\hat{W}(a, b)$.

Luego de poner el problema en la forma apropiada, se dispone a demostrar varios resultados técnicos como por ejemplo la buena definición de operadores auxiliares del estilo

$$A = \iint e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}\beta^2} \hat{W}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

que eventualmente le son útiles para demostrar la existencia de un conjunto denso de puntos $f_{a,b}$ (este denso se construye partiendo de los autovectores de A) sobre el que los $\hat{W}(c, d)$ actúan de una forma particular (ver ecuación (1.1.10) más adelante) y con ellos logra establecer un mapa unitario en correspondencia con cualquier otra representación $\hat{W}'(c', d')$ y conjunto denso de puntos $f'_{a', b'}$ satisfaciendo las mismas particularidades respecto a $\hat{W}'(c', d')$ que las satisfechas por los $f_{a,b}$ respecto de $\hat{W}(c, d)$. Además por cuestiones de densidad puede ver que su mapa no solo está bien definido globalmente sino que además es unitario. Por último construye tal conjunto denso para el caso concreto de la representación de $\hat{W}(a, b)$ que se deriva de la representación de Schrodinger,

$$f_{a,b}(q) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(q+a)^2 + ib(q+\frac{a}{2})},$$

sobre los que la acción se traduce en

$$\hat{W}(d, c) f_{a,b} = e^{\frac{i}{2}(bc-ad)} f_{a+c, b+d}. \quad (1.1.10)$$

Este bagaje adoptó la forma de lo que hoy en día llamamos el teorema de Stone-von Neumann que en esencia establece que toda representación irreducible y *débil continua*⁸ de las CCR en la forma de (1.1.7) o (1.1.8) es unitariamente equivalente a cualquier otra y en particular a la que surge de exponenciar los q y p en la representación de Schrödinger (1.1.4) (el teorema está enunciado en el Theorem VIII.14 de [7], pero se demuestra luego en Theorem XI.84). Como corolario de este teorema podemos afirmar que cualquier representación “decente” de q y p viene dada por operadores ambos no acotados, ya que los representantes de Schrödinger lo son.

El teorema de Stone-von Neumann nos garantiza que, siempre que estemos bajo ciertas hipótesis, algunas más técnicas como irreducibilidad o continuidad débil y otras no tanto como la finitud de los grados de libertad $n \in \mathbb{N}$, podemos asegurar que la representación que le asignemos a los grados de libertad del sistema es equivalente a la de Weyl, esto es mucho decir ya que ésta última tiene una interpretación física directa. Es inmediato de la formulación en variables canónicas, que la teoría cuántica de campos ostenta un número infinito de grados de libertad, no obstante durante largo tiempo hubo un sentimiento generalizado de que éste teorema de unicidad se debía cumplir aún relajando la condición de finitud sobre los mismos. Pero en 1953 Kurt Friedrichs publica [8], donde presenta dos representaciones no equivalentes de las CCR para los observables de una teoría de campos, para esto construye una representación en la que el observable “número de partículas” no existe, a diferencia de la representación usual

⁸Una representación $\mathfrak{R} : \mathbb{R} \rightarrow B(H)$ se dice débil continua si es un mapa continuo con la topología débil en $B(H)$. Definiremos dicha topología en el transcurso de la tesis.

sobre el espacio de Fock (que veremos en detalle en la sección 2.2.1). Así Friedrichs pone límites al rango de aplicabilidad del teorema de Stone-von Neumann, luego solo un año después (de la mano de Gårding y Wightman en [9]) se ve que de hecho hay infinitas representaciones no equivalentes de las CCR, dejando en claro que habrá que indagar sobre la relevancia física de tales representaciones. Ya veremos en 2.2.1 que para poder construir una de entre tantas representaciones posibles, además de las CCR deberemos especificar de alguna forma el Hilbert en cuestión, esto se puede hacer de diversas formas, a veces se hace pidiendo la existencia de un *vector de vacío*, que es un vector invariante por los representantes del grupo de Poincaré. Nosotros en cambio seguiremos la construcción de Araki de tal espacio en donde igualmente queda claro que cierto vector satisface la propiedad de invarianza.

Para mostrar que la existencia de representaciones no equivalentes no es meramente un tecnicismo necesario por cuestiones estrictamente matemáticas, quiero comentar dos ejemplos que me parecen relevantes. El primero de ellos se encuentra en la sección II.1.1 del libro [10] de Rudolf Haag⁹ y es la teoría interactuante $\lambda\varphi^4$, allí él afirma que si comparamos dos teorías con distintas constantes de acoplamiento $\lambda \neq \lambda'$ entonces ambas tendrán representaciones de las CCR no equivalentes (teorema de Haag), además destaca el hecho de que las relaciones de conmutación no fijan en manera alguna el espacio de Hilbert en el que se representan. Quitando así, según mi entender, a dichos espacios del protagonismo que ostentaban en QM.

El segundo ejemplo es el del campo escalar libre masivo. En concreto en el libro de Reed y Simon (ver Theorem X.46 en [7]) se afirma que si $\varphi_m(\cdot)$ y $\pi_m(\cdot)$ son el campo y su momento conjugado a tiempo fijo para un campo escalar libre y de masa m , entonces si $m_1 \neq m_2$ las representaciones de las CCR en la forma de Weyl $\{e^{i\varphi_{m_1}(\cdot)}, e^{i\pi_{m_1}(\cdot)}\}$ y $\{e^{i\varphi_{m_2}(\cdot)}, e^{i\pi_{m_2}(\cdot)}\}$ no son equivalentes. Resumiendo, la idea de la demostración radica en el hecho de que de existir tal operador unitario T que vía conjugación mapee una representación en la otra

$$Te^{i\varphi_{m_1}(f)}T^{-1} = e^{i\varphi_{m_2}(f)}$$

$$Te^{i\pi_{m_1}(f)}T^{-1} = e^{i\pi_{m_2}(f)}$$

para toda f función de testeo¹⁰, se puede ver vía un lema (que de hecho se puede pensar como corolario de la dualidad de Haag¹¹) que el mismo debe satisfacer

$$TG_{m_1}(R, a)T^{-1} = G_{m_2}(R, a)$$

en donde G_m son representaciones del grupo euclídeo que fija el plano $t = 0$. Y esto llega a mayores cuando de esta última igualdad se puede deducir primero que $T\Omega = k\Omega$ (siendo Ω el

⁹Uno de los principales fundadores de la AQFT, en su artículo [11] propone una teoría basada en una asignación de álgebras a regiones del espaciotiempo, tema que desarrollaremos en 1.2.

¹⁰Aquí Reed y Simon consideran funciones en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

¹¹Si bien aún no introducimos la dualidad de Haag, el lema al que se hace referencia indica que si un operador conmuta con todos los $e^{i\varphi_m(f)}$ y los $e^{i\pi_m(f)}$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ en entonces dicho operador es un múltiplo de la identidad.

vector de vacío y $k \in \mathbb{C}$) y de aquí que los propagadores asociados a distintas masas son iguales (considerados como distribuciones temperadas sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$) ya que

$$(\Omega, \varphi_{m_1}(f)\varphi_{m_1}(g)\Omega) = (\Omega, T\varphi_{m_1}(f)T^{-1}T\varphi_{m_1}(g)T^{-1}\Omega) = (\Omega, \varphi_{m_2}(f)\varphi_{m_2}(g)\Omega)$$

pero sabemos que estas distribuciones no son iguales. Como se desprende del hecho de que los núcleos de convolución asociados dependen de la masa

$$\Delta_m^{(+)}(x-y) := (\Omega, \varphi_m(x)\varphi_m(y)\Omega) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) d^4p$$

donde $p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Resulta claro entonces que distribuciones temperadas asociadas a diferentes masas deben ser distintas. Volveremos sobre el núcleo $\Delta_m^{(+)}$ en el capítulo 2.

Por otra parte veremos en breve como en el marco de AQFT la construcción de Gelfand-Naimark-Segal (construcción GNS a partir de ahora) nos proporciona una basta cantidad de representaciones asociadas a *estados*, que como mencionamos en el contexto de QFT no hay razón para que sean equivalentes.

1.2. El nacimiento de la AQFT

En esta sección se dará una brevísima introducción al formalismo de la AQFT (para más detalles ver [10]). Con el foco puesto en la dinámica dada por las relaciones de conmutación entre observables de una dada teoría de campos y ya no en un espacio de Hilbert en particular es que nace la AQFT. La misma se desarrolla de la mano de varios matemáticos y físicos entre los que se encuentran, aparte de los ya mencionados: Huzihiro Araki, Irving Segal y Daniel Kastler. Justamente fue éste último quien junto a Haag publica el paper [12] en el que presentan lo que luego se vino a llamar los axiomas de Haag-Kastler, una serie de axiomas que vienen a definir lo que es una AQFT. Pero mucho antes en Junio de 1957, en la conferencia “Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs” en Lille Francia, Haag ya había presentado en público ante entre otros, Wightmann, Segal, Friedrichs y el propio Kastler la noción de *net de álgebras locales*. Dicha net es la asignación de un álgebra para cada región del espaciotiempo y mostró que la misma puede reproducir la estructura usual de partículas de una QFT. En aquel entonces uno de los primeros éxitos fue la formulación de la teoría de *scattering* de partículas en este nuevo marco teórico que era la AQFT, dicha construcción se vino a llamar Haag-Ruelle scattering theory (ver [13] y [14]).

1.2.1. Observables y von Neumann álgebras

Dadas la observaciones hechas al respecto de la falta de protagonismo del espacio de Hilbert en el planteo de una dada teoría, la AQFT se centra en las relaciones de conmutación y las representaciones de los observables que estas involucran u otros observables que un físico podría

medir en un dado laboratorio en cierta región del espaciotiempo. La idea básica es que en cada región del espacio (o del espaciotiempo, dependiendo de como haya sido construida la net, veremos ejemplos de ambos tipos en el capítulo 3) uno es capaz de medir una serie de observables que pueden ser representados mediante operadores al igual que es usual hacer en QM solo que ahora dichas representaciones se realizarán como operadores que actúan sobre espacios de Hilbert de dimensión infinita (en el caso de infinitos grados de libertad) o meramente como elementos de una C^* -álgebra (que enseguida definiremos). Así en esencia la AQFT asocia a cada región del espacio (o espaciotiempo) un conjunto de operadores que constituirán un álgebra cuyos elementos autoadjuntos se entenderán como los observables que se pueden medir en dicha región.

Esta asignación de regiones a álgebras es lo que se denomina la *net de von Neumann álgebras*, luego a cada abierto $\mathcal{O}$ del espaciotiempo se le asignará un álgebra $A(\mathcal{O})$. Aquí dependiendo del autor o del año puede variar el tipo de álgebras a considerar, las mismas son en general C^* -álgebras o von Neumann álgebras tanto en sus versiones abstractas como concretas¹².

Por ejemplo Araki consideró $A(\mathcal{O})$ como álgebras de von Neumann concretas¹³ (ver [15]), mientras que Segal por su parte presentó trabajos en los que $A(\mathcal{O})$ era una C^* -álgebras (que enseguida definiremos) tanto abstractas como concretas (ver [16]).

Para no sobrecargar la notación presentaremos las definiciones de C^* -álgebras concretas y de von Neumann álgebras concretas y referiremos al lector a la bibliografía para indagar en sus contrapartes abstractas (ver por ejemplo [10] capítulo III). Dado un espacio de Hilbert complejo H , llamaremos como es usual $\mathcal{B}(H)$ al álgebra de operadores acotados según la norma

$$\|A\|_{\mathcal{B}(H)} := \sup_{h \in H} \frac{\|Ah\|_H}{\|h\|_H}. \quad (1.2.1)$$

Una C^* -álgebra concreta es una $*$ -subálgebra¹⁴ de $\mathcal{B}(H)$ que es cerrada con la distancia inducida por la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}$. La topología de las C^* -álgebras concretas tal vez no sea la más apropiada para los observables. Uno de los problemas que acarrea la no separabilidad es la imposibilidad de obtener representaciones irreducibles de U y V como en la ecuación (2.1.20) que sean ambas débil continuas. Es pertinente adoptar para nuestra $*$ -álgebra de observables una topología más chica (es decir con menor cantidad de conjuntos abiertos) de manera que en dicha topología la $*$ -álgebra en cuestión resulte separable.

Consideremos entonces una topología dada por seminormas¹⁵ en lugar de normas. Definimos

¹²Se dicen concretas a las subálgebras de $\mathcal{B}(H)$ (operadores acotados sobre algún Hilbert), en oposición a *abstractas* que se resguarda para aquellas álgebras que en principio no se piensan como subálgebras de operadores, tanto las C^* -álgebras como las von Neumann álgebras se presentan en ambas versiones.

¹³Esto es lo que se suele hacer cuando se representa un álgebra abstracta vía construcción GNS de un estado, ver más adelante 1.2.2.

¹⁴Una $*$ -álgebra es un álgebra asociativa sobre un cuerpo, equipada con una operación de involución (denotada comúnmente por $*$), que satisface $(a^*)^* = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$ para cualesquiera a, b en el álgebra.

¹⁵Una seminorma en un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una función $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las

la familia de seminormas $p_{h,k}(A) := |\langle h, Ak \rangle_H|$ y mediante ellas la *topología débil* como la más chica para la cual $p_{h,k} : \mathcal{B}(H) \mapsto [0, \infty)$ son continuas en el origen. La razón por la que la topología débil es física es que la herramienta que un físico tiene a disposición para decidir si un observable A se parece a (o está cerca de) otro B es la medición de sus elementos de matriz mediante experimentos. Claro está que solo puede realizar finitas de estas mediciones, y además con un cierto error. De esta forma el físico dirá que A y B son cercanos si ambos están en un entorno básico “chico” de la topología débil (pensamos un entorno como chico si se construyó con muchas mediciones independientes) o mejor aún, uno dirá que una *red* de observables $A_{\lambda \in \Lambda} \rightarrow A$ (siendo Λ un *conjunto dirigido*¹⁶) si para toda medición de elementos de matriz, no podemos distinguir A_λ y A para λ “grande”, es decir si $p_{h,k}(A - A_\lambda) \rightarrow 0$ para todo $h, k \in H$. Notemos que un abierto débil es también un abierto en la topología usual inducida por la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}$.

Como ya mencionamos el álgebra $A(\mathcal{O})$ se piensa como el álgebra de observables que se pueden medir en la región $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{M}^{d+1}$. En general en esta tesis trabajaremos con C^* -álgebras en el sentido abstracto¹⁷ y a la hora de representarlas lo haremos mediante álgebras de von Neumann concretas,

Definición 1.2.1 (álgebra de von Neumann concreta). *Un álgebra de von Neumann concreta N es una $*$ -subálgebra de operadores en $\mathcal{B}(H)$ que contiene al operador identidad y es cerrada en la topología débil.*

Dado entonces que como mencionamos la topología débil es más chica que la inducida por la norma, las von Neumann álgebras son también C^* -álgebras.

Se puede encontrar una discusión sobre qué tipo de álgebras han de considerarse en física en el capítulo III.3 del libro de Haag [10], aquí la evitaremos.

Como es sabido, para evitar problemas con los campos $\phi(x)$, como el hecho de que $\phi(x)|0\rangle$ tenga norma infinita, el procedimiento habitual es suavizarlos con *funciones de testeo* con dominio en $\mathbb{M}^{d+1}$ lo suficientemente suaves, obteniendo un *campo esmereado* $\phi(f)$. Es así como los campos $\phi(x)$ se entienden como distribuciones $\phi(x)(f) := \phi(f)$ vía integración contra f . De hecho $\phi(f)$ es un operador y $|0\rangle$ pertenece a su dominio. Luego decimos que ϕ es una distribución a valores en operadores. Al ser los operadores del estilo $\phi(f)$ no acotados, suele no trabajarse directamente con ellos, sino con ciertos operadores acotados asociados a ellos. En nuestro caso trabajaremos casi exclusivamente con exponenciales de los campos esmereados, ver por ejemplo

siguientes propiedades para todo $x, y \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$: No negatividad $p(x) \geq 0$, homogeneidad $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ y desigualdad triangular $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Difiere de una norma solo por permitir que $p(x) = 0$ para algunos $x \neq 0$.

¹⁶Un conjunto Λ se dice dirigido si está equipado con una relación reflexiva, transitiva y además, para todo par de elementos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe un elemento $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda$ y $\lambda_2 \leq \lambda$.

¹⁷Una C^* -álgebra abstracta A es una $*$ -álgebra, dotada de una norma $\|\cdot\|$ bajo la cual A es completa y satisface $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todos $a, b \in A$ y cuya involución cumple $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$.

la ecuación (3.1.14). Esto nos evitará en gran medida tratar con las sutilezas relativas a los dominios de operadores no acotados.

Entenderemos por net de von Neumann álgebras una asignación que a cada abierto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{M}^{d+1}$ del espaciotiempo de Minkowski¹⁸ o incluso a abiertos relativos a una dada superficie de Cauchy¹⁹ les asigna una C^* -álgebra $A(\mathcal{O})$ satisfaciendo los siguientes axiomas (de Haag-Kastler)

- a) *Isotonía:* Si $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ entonces $A(\mathcal{O}_1) \subseteq A(\mathcal{O}_2)$ como es de esperar, dado que todos aquellos observables que se pueden medir en $\mathcal{O}_1$ también se podrán medir en $\mathcal{O}_2$.
- b) *Aditividad:* El álgebra asociada a una unión de regiones debe satisfacer

$$A(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) = A(\mathcal{O}_1) \vee A(\mathcal{O}_2),$$

siendo $N \vee M$ el álgebra de von Neumann más chica que contiene a N y M .

- c) *Grupo de Poincaré:* La componente conexa de la identidad del grupo de Poincaré tiene una representación α que actúa sobre la net de álgebras respetando

$$\alpha(L)(A(\mathcal{O})) = A(L(\mathcal{O})),$$

en el caso de que la net esté constituida por álgebras concretas comúnmente $\alpha(L)$ actúa por conjugación con un operador unitario $U(L)$ sobre el mismo espacio de Hilbert H en el que actúan los observables.

- d) *Localidad:* Si $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son regiones espacialmente separadas de Minkowski, entonces

$$[A(\mathcal{O}_1), A(\mathcal{O}_2)] = 0,$$

ya que la medición de un observable en $\mathcal{O}_1$ no puede afectar a la medición de otro en $\mathcal{O}_2$ ambos se pueden diagonalizar simultáneamente y deben conmutar.

Si pensamos en la motivación física que le dimos a la net entendiendo a sus elementos autoadjuntos como los observables que un observador puede medir en una dada región, estos axiomas se tornan bastante lógicos, por ejemplo es natural que en una región del espaciotiempo alguien pueda medir cualquier observables no solo de toda esa región sino también de cualquier subregión contenida en ella, resultando así el axioma de isotonía. De la misma forma el axioma de localidad se desprende de que es posible medir completamente observables que no guardan relación causal, etcétera.

Hasta ahora los axiomas no especifican nada respecto a la dinámica presente en nuestro sistema, para eso se debe añadir el llamado *time-slice axiom* que llamaremos axioma de corte temporal, que afirma

¹⁸Hay también formulaciones de AQFT en espaciotiempos curvos, pero no nos abocaremos a ellas en la tesis.

¹⁹Formalizaremos esto con más precisión en el siguiente capítulo (y los posteriores), hay diferentes nets para abiertos y abiertos relativos, también hay que hacer diferencias entre abiertos acotados y no acotados en $\mathbb{M}^{d+1}$, entendiendo a las álgebras de estos últimos como el C^* -límite inductivo de las primeras.

- e) *Corte temporal*: Si $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ y $\mathcal{O}_1$ contiene una *superficie de Cauchy*²⁰ de $\mathcal{O}_2$, entonces las álgebras de ambas regiones deben coincidir,

$$A(\mathcal{O}_1) = A(\mathcal{O}_2).$$

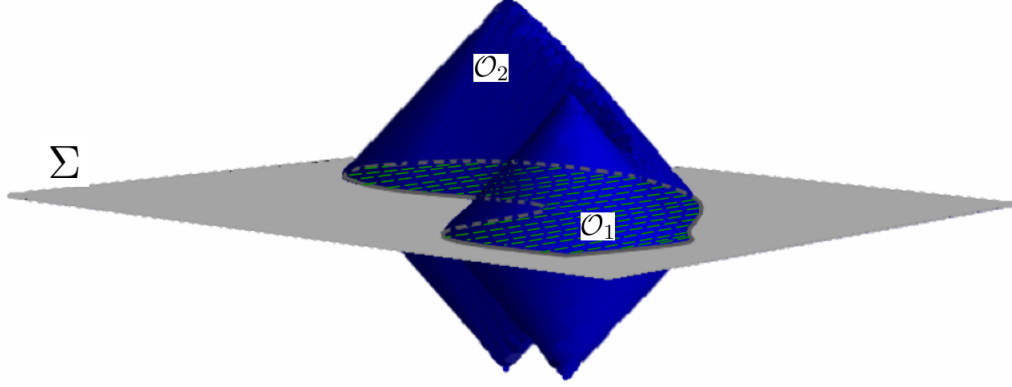


Figura 1.1: Aquí Σ es una superficie a tiempo fijo, $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ y de hecho $\mathcal{O}_2$ es el dominio de dependencia de $\mathcal{O}_1 \subseteq \Sigma$ (definición en el párrafo siguiente a la figura) de forma que este es una superficie de Cauchy para $\mathcal{O}_2$, en estas condiciones el axioma de corte temporal establece que las álgebras de ambas regiones deben coincidir.

El dominio de dependencia (o desarrollo causal) de una región B a tiempo fijo, será llamado cono o diamante sobre B y lo notaremos por $\diamond(B)$ ²¹

$$\diamond(B) = \{x \in \mathbb{M}^4 | (x - y)^2 < 0 \ \forall y \in B^c\}.$$

En el gráfico $\mathcal{O}_2 = \diamond(\mathcal{O}_1)$.

En ciertas teorías como por ejemplo para el campo escalar libre (campo de Klein-Gordon), el axioma de corte temporal puede demostrarse directamente a partir de los axiomas previos y de las propiedades del propagador causal. Esto se debe a que la propagación de las soluciones de las ecuaciones de movimiento está completamente determinada por las condiciones iniciales en una superficie a tiempo fijo. Veremos este ejemplo en detalle en el capítulo 2.

Para más detalles sobre los axiomas de Haag-Kastler ver [10] o [17] y para generalidades de von Neumann álgebras ver también [10] o [18]. No obstante para lograr cierto nivel de autocontención vamos a enunciar el teorema del doble conmutante de von Neumann que será utilizado en el capítulo 3. Dado $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ un subconjunto, definimos su conmutante como

$$S' = \{A' \in \mathcal{B}(H) : A'A = AA' \ \forall A \in S\},$$

y usaremos la notación $S'' = (S')'$. Algunas propiedades básicas del conmutante son:

²⁰Una superficie de Cauchy para $\mathcal{O}$ es una superficie Σ de codimensión 1 tal que cada curva temporal en $\mathcal{O}$ puede ser extendida a una curva temporal que intersecta a Σ en exactamente un punto.

²¹Utilizaremos la signatura $(+, -, -, -)$, de manera que $x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$.

- Si $S \subseteq T$ entonces $T' \subseteq S'$.
- $S \subseteq S'' = S^{(2n)}$ y $S' = S^{(2n-1)}$ si $n \geq 1$.
- Si S es autoadjunto (es decir que para todo $A \in S$, $A^\dagger \in S$ también), entonces S' también lo es.
- Para cualquier S , S' es una subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ cerrada en la topología débil y $1 \in S'$.

De acá se deduce el teorema ya mencionado

Teorema 1.2.1 (del doble conmutante). *Sea $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ un subconjunto autoadjunto, entonces M'' es el álgebra de von Neumann más chica que contiene a M .*

Un álgebra de von Neumann M se dice un factor si su centro es trivial, esto es $M \cap M' = \{\lambda \mathbf{1}\}$ solo consta de múltiplos de la identidad. Además las álgebras de von Neumann se clasifican en tipos I, II o III que definiremos en breve. Huzihiro Araki y Edward Woods mostraron en [19] que las álgebras de observables de interés en esta tesis son de hecho factores, y lograron clasificarlas en de tipo I si el álgebra en cuestión es álgebra global asociada con el estado de vacío en Minowski y de tipo III si es un álgebra local (ver también [15] para esto último).

De hecho veamos que es esperable que las álgebras que utilizamos en física sean factores (lo que no es trivial es decidir a cual de los tipos que en breve definiremos corresponden). Si bien la definición precisa de las álgebras puede ser un poco engorrosa debido a tecnicismos de índole matemático como la completación en la topología débil, o la exponenciación de operadores, podemos esencialmente pensar al álgebra asociada con una región $\mathcal{O}$ como el álgebra de operadores $\phi(f)$ con f de soporte compacto en $\mathcal{O}$. Evidentemente los múltiplos del operador identidad deberán conmutar con todos los elementos de $A(\mathcal{O})$ pero, ¿hay más elementos en $A(\mathcal{O})$ que conmuten con todos los elementos de $A(\mathcal{O})$?

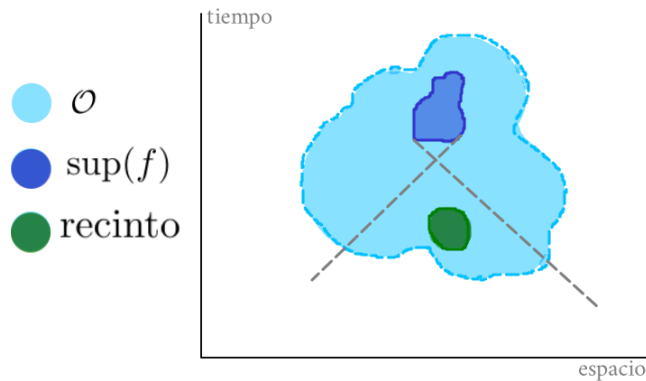


Figura 1.2: Aquí se exhibe (en 1+1 dimensiones) el recinto en cuyo interior está soportada g , los campos $\phi(f)$ y $\phi(g)$ no conmutarán en general.

Notemos que si $\phi(f) \in A(\mathcal{O})$ al ser su soporte compacto dentro de un abierto $\mathcal{O}$ (ver figura 1.2), podremos encontrar otro recinto compacto dentro de $\mathcal{O}$ que esté temporalmente separado de $\text{sup}(f)$, así es esperable que tomando una función g soportada en tal recinto se cumpla que $\phi(f)$ y $\phi(g)$ no conmuten (recordemos que el axioma de localidad es valido para regiones especialmente separadas). Para que conmuten debería tratarse de una teoría muy particular,²² pero esto sería una excepción y no la regla. De modo que en la enorme mayoría de los casos es esperable que un $\phi(f)$ arbitrario en $A(\mathcal{O})$ no conmute con todos los elementos de $A(\mathcal{O})$, es decir $\phi(f) \notin A(\mathcal{O}) \cap A(\mathcal{O})'$. Este es un indicio físico de porque los factores son importantes, pospondremos por un momento la razón matemática.

Para clasificar los factores en tipo I, II y III lo primero es notar que en un factor M se puede establecer una relación de orden entre proyectores: diremos que P_1 y P_2 en M serán equivalentes módulo M y notaremos $P_1 \sim_M P_2$ si existe un operador $V \in M$ tal que

$$P_1 = V^*V \quad y \quad P_2 = VV^* \quad (1.2.2)$$

y dicho operador V mapea isometricamente la imagen $\text{Im}(P_1)$ sobre $\text{Im}(P_2)$ y se anula sobre el complemento ortogonal de $\text{Im}(P_1)$. Diremos que dos proyecciones en M cumplen $P_1 < P_2$ cuando $P_1 \not\sim_M P_2$ pero hay una proyección $\tilde{P}_2 \in M$ tal que $\text{Im}(\tilde{P}_2) \subseteq \text{Im}(P_2)$ y $P_1 \sim_M \tilde{P}_2$.

Una proyección $P \in M$ se dice minimal cuando es no nula y no existe una proyección $Q \in M$ tal que $Q < P$, así mismo se dice infinita si posee una subproyección propia equivalente a si misma módulo M , de lo contrario se dice finita. Notar que una proyección P puede ser finita y tener rango infinito.

La relación así definida es una relación de orden que satisface tricotomía y en base a ella se puede finalmente establecer la clasificación de factores en

Tipo I: Un factor M se dice de tipo I si posee proyecciones *minimales* (no nulas) respecto a la relación de orden $<$ definida arriba.

Tipo II: Un factor M se dice de tipo II si contiene una proyección *finita*, pero no contiene proyecciones minimales;

Tipo III: Un factor M se dice de tipo III si no es de tipo I ni de tipo II.

Ya habiendo clasificado la totalidad de los factores, será claro que el hecho de que toda álgebra de von Neumann sea suma²³ de factores es una razón matemática de peso para que

²²Por ejemplo para teorías que respeten invarianza conforme, el conmutador debería anular no solo en puntos espacialmente separados, sino también en puntos temporalmente separados, dado que existen transformaciones conformes que mapean unos puntos en los otros. En este caso el soporte del conmutador estaría restringido al cono de luz.

²³Más preciso que suma es decir integral directa de von Neumann álgebras, noción que fue definida por von Neumann en [20].

el estudio de los mismos sea importante en cualquier contexto en el que se trabaje con von Neumann álgebras

Los factores de tipo I fueron clasificados exhaustivamente por Murray y von Neumann (ver [21]): para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, existe un único (salvo isomorfismos) factor de tipo I_n , a saber, $\mathcal{B}(H)$, donde H es un espacio de Hilbert de dimensión n . Los factores de tipo II pueden subdividirse además de acuerdo a si la proyección identidad Id es finita (tipo II_1) o infinita (tipo II_∞). Los factores de tipo III pueden subdividirse en tipos III_λ con $\lambda \in [0, 1]$, esta última subclasificación depende de la teoría modular de Tomita-Takesaki y no será abordada aquí. Además toda álgebra de von Neumann es suma directa de factores de tipos I, II y III. En [15] Araki demostró que las álgebras locales de observables asociadas al vacío del campo escalar libre en un abierto acotado del espaciotiempo de Minkowski son factores de tipo III, lo cual como veremos nos obliga a generalizar ciertos conceptos de mucho interés como entropías o los propios estados. Mientras que las álgebras globales son de tipo I si están asociadas al vacío del campo escalar libre en Minkowski y de tipo III si son asociadas al estado termal.

En una von Neumann álgebra M se define una traza tr como una función que toma valores positivos sobre operadores positivos (con codominio $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) y que cumple

$$\begin{aligned} tr(\lambda A) &= \lambda tr(A) \quad \text{si } \lambda > 0 \\ tr(A + B) &= tr(A) + tr(B) \\ tr(UAU^{-1}) &= tr(A) \quad \text{para todo } U \in M \text{ unitario} \end{aligned}$$

para todo $A, B \in M$. La existencia o no de una traza sobre una von Neumann álgebra está supeditada al tipo de la misma. En general en un factor las trazas quedan definidas por las propiedades arriba mencionadas a menos de una constante multiplicativa. En las álgebras de tipo III todos los elementos no nulos tienen traza infinita, en las de tipo I se suele utilizar la constante multiplicativa de manera que las proyecciones minimales tengan traza 1 en cambio en las álgebras de tipo II_1 la traza se normaliza de manera que $tr(\mathbf{1}) = 1$. En las álgebras de tipo I_n (con $n \in \mathbb{N}$) y II_1 solo hay elementos de traza finita, en cambio en las álgebras de tipo I_∞ y II_∞ podemos encontrar tanto elementos de traza finita como infinita. En particular diremos que un álgebra de von Neumann es semifinita si posee una traza que adopta valores tanto finitos para ciertos proyectores pero vale infinito sobre el elemento neutro del álgebra, estas serán las álgebras de tipo I_∞ y II_∞ .

1.2.2. Estados y construcción GNS

En QM llamamos estado puro a uno definido por medio de un vector en el espacio de Hilbert asociado al sistema, dicho estado puro nos proporciona valores de expectación para los distintos observables de una manera directa vía el formalismo del bracket. Luego tenemos estados mixtos que no son representados por vectores, sino que son una mezcla estadística de ellos. Pero

pretendemos y de hecho es posible también, extraer de ellos un valor de expectación para cada observable. Así podemos pensar que un estado es una asignación de valores medios para cada observables de cierto sistema. Podemos pensarlo como una distribución de probabilidad para los distintos observables que uno pueda medir en un sistema dado. El mismo asigna en forma lineal a cada uno de estos observables un valor; el valor de expectación proveniente de la distribución de probabilidad en cuestión.

Básicamente un estado sobre un sistema con álgebra de operadores A será una función lineal $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple $\omega(aa^\dagger) \geq 0$ para todo $a \in A$ y $\omega(1) = 1$.

En QM dado un sistema con finitos grados de libertad, un cierto estado φ de un dado sistema siempre está en correspondencia $\varphi \mapsto \rho_\varphi$ uno a uno con una matriz de densidad (matrices positivas autoadjuntas y cuya traza está normalizada a 1). Dado que en QM en dimensión finita el álgebra de observables A se puede pensar como la subálgebra del álgebra de matrices operadores autoadjuntos sobre H , siendo H un espacio de Hilbert de dimensión finita. Se deduce que ρ_φ pertenecerá al álgebra de observables independientemente del estado φ . La mencionada correspondencia entre estados y matrices de densidad se realiza a través de la traza $Tr : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$, dado un estado φ que a cada observable $A \in \mathcal{B}(H)$ le asigna su valor medio, el operador densidad asociado a φ es definido por la igualdad

$$\varphi(A) = Tr(\rho_\varphi A) \text{ para todo observable } A \in \mathcal{B}(H), \quad (1.2.3)$$

o sea aquel que reproduce los valores medios del estado en cuestión. Los estados puros y mixtos se pueden caracterizar en términos de dicha matriz de densidad, φ se dice puro si $\rho_\varphi^2 = \rho_\varphi$ (esto equivale a tener un estado vector, es decir que ρ_φ sea un proyector unidimensional, o a $Tr(\rho_\varphi^2) = 1$) y mixto o impuro si $\rho_\varphi^2 \neq \rho_\varphi$ (o $Tr(\rho_\varphi^2) < 1$). En el dado caso de que nuestro espacio de Hilbert factorize en la forma $H = H_L \otimes H_R$, y supongamos que H_L codifica los grados de libertad de un cierto subsistema L , podemos considerar el álgebras de operadores asociada a dicho subsistema $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H_L) \otimes 1_R$ y su conmutante $\mathcal{A}' = 1_L \otimes \mathcal{B}(H_R)$. Dado un estado global φ (es decir definido sobre $\mathcal{B}(H)$) consideremos su restricción al subsistema L o mejor dicho a su álgebra asociada $\mathcal{A}$, dicha restricción también tendrá vía $Tr|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ una matriz de densidad asociada $\rho_{\varphi, \mathcal{A}}$ denominada matriz de densidad reducida, la cual satisface $\rho_{\varphi, \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ y reproduce los valores de expectación

$$\varphi(A) = Tr(\rho_\varphi A) = Tr|_{\mathcal{A}}(\rho_{\varphi, \mathcal{A}} A) \text{ para todo } A \in \mathcal{A}, \quad (1.2.4)$$

como es sabido la matriz de densidad reducida a $\mathcal{A}$ se puede obtener de la matriz de densidad global ρ_φ tomando traza parcial sobre una base de H_R . Cabe destacar que un álgebra de von Neumann genérica no tiene por qué admitir una descomposición tensorial como la aquí exhibida y en el caso de las álgebras de tipo III de hecho sabemos que no se pueden factorizar en esta forma.

Volveremos sobre estas cuestiones en la siguiente sección 1.2.4 para relacionarlas con la

entropía de entrelazamiento, pero ahora vamos a virar para introducir la definición de estados en AQFT. Consideremos $A(\mathbb{M})$ el álgebra asociada a todo Minkowski²⁴

Definición 1.2.2. *Un estado global es un funcional $\varphi : A(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{C}$, que satisface $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(A^*A) \geq 0$ para todo $A \in A(\mathbb{M})$.*

La norma utilizada en la definición es la norma de $\varphi : A(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{C}$ como operador $\mathbb{C}$ -lineal entre espacios normados. Además φ se dice real si $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$, y uno se va a permitir hablar de la restricción de un estado global a una cierta subálgebra o región del espaciotiempo $\mathcal{O}$ para indicar

$$\varphi|_{A(\mathcal{O})}(A) = \varphi(A) \text{ para todo } A \in A(\mathcal{O}), \quad (1.2.5)$$

es decir que $\varphi|_{A(\mathcal{O})} : A(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}$. Más en general, dada una $*$ -álgebra $\mathcal{A}$ se define

Definición 1.2.3. *Un estado φ sobre $\mathcal{A}$ es un funcional $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, que satisface $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(A^*A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Decimos que un estado es *puro* cuando no es combinación lineal convexa no trivial de dos estados distintos entre sí, definición que viene a generalizar la ya mencionada en el caso de estados definidos mediante matrices de densidad.

Si bien la AQFT no toma como objeto fundamental un espacio de Hilbert (cuyos vectores son estados) como sí lo hace la formulación estándar de la mecánica cuántica, sí es verdad que dado un estado definido sobre una $*$ -álgebra de observables $\mathcal{A}$ podemos asociarle un espacio de Hilbert sobre el cual dicho estado será representado vectorialmente y sobre el que $\mathcal{A}$ se representa mediante operadores actuando sobre él. A continuación se dan las ideas principales de dicha construcción que se puede encontrar en por ejemplo [10] o [18].

Construcción de Gelfand-Naimark-Segal

Supongamos entonces que φ es un estado sobre una $*$ -álgebra $\mathcal{A}$, notemos que $\mathcal{A}$ es en particular un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y de hecho se puede definir el siguiente producto interno sobre él

$$\langle A, B \rangle_\varphi := \varphi(A^*B) \quad \text{para todo } A, B \in \mathcal{A} \quad (1.2.6)$$

Notemos que dado que φ es positivo por ser un estado el producto interno será semidefinido positivo, pero no necesariamente es positivo-definido, ya que podría haber elementos no nulos $A \in \mathcal{A}$ tales que $\varphi(A^*A) = 0$. Por lo tanto, debemos identificar un subconjunto particular de $\mathcal{A}$, que precisamente describe los elementos “nulos” bajo este producto interno.

Definimos el *ideal de Gelfand* asociado al estado φ como el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{A}$ que tienen norma cero con respecto a φ :

²⁴Matemáticamente podemos pensar en ella como el C^* -límite inductivo de la net $A(\mathcal{O})$ con $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{M}$ los abiertos acotados.

$$\mathcal{N}_\varphi = \{A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A^*A) = 0\} \quad (1.2.7)$$

$\mathcal{N}_\varphi$ es un ideal bilatero, satisface que $A \in \mathcal{N}_\varphi$ implica $BA \in \mathcal{N}_\varphi$ y $AB \in \mathcal{N}_\varphi$ para todo $B \in \mathcal{A}$ ²⁵. Ahora, consideramos el espacio cociente $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi$, que contiene clases de equivalencia de la forma $[A] = A + \mathcal{N}_\varphi$. Sobre este espacio cociente, definimos un producto interno positivo-definido a través de la siguiente relación:

$$\langle [A], [B] \rangle = \langle A, B \rangle_\varphi \quad \text{siendo } A \in [A] \text{ y } B \in [B] \text{ representantes.} \quad (1.2.8)$$

Es fácil ver que el producto interno está bien definido en el sentido que no depende de los representantes en las clases de equivalencia y ahora sí es definido positivo.

La completación de $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi$ con respecto a la norma inducida por este producto interno es el espacio de Hilbert que buscamos, suele notarse H_φ . De esta forma, obtenemos un espacio de Hilbert que surge de la representación de la $*$ -álgebra $\mathcal{A}$ mediante el estado φ .

Finalmente, construimos una representación cíclica del álgebra $\mathcal{A}$ sobre este espacio de Hilbert. Definimos un operador π_φ para cada $A \in \mathcal{A}$ que actúa en H_φ de la siguiente manera:

$$\pi_\varphi(A)[B] = [AB] \quad \text{para todo } B \in \mathcal{A}$$

Es fácil verificar que esta acción está bien definida, es decir, que si $[B] = [B']$, entonces $[AB] = [AB']$. Además, es claro que π_φ es un homomorfismo de $*$ -álgebras. De esta manera, π_φ es una representación de $\mathcal{A}$ sobre el espacio de Hilbert H_φ . Además $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ tiene un vector *cíclico*²⁶ $\Omega_\varphi = [I]$ (la clase de equivalencia del elemento identidad $I \in \mathcal{A}$) que cumple

$$\varphi(A) = \langle \Omega_\varphi, \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi \rangle \quad (1.2.9)$$

que es básicamente la expresión usual de valor de expectación que usamos en cuántica.

Hay variedad de resultados importantes en relación con dicha construcción. Por citar alguno

Teorema 1.2.2. *La representación GNS $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ inducida por un estado φ es una representación irreducible de $\mathcal{A}$ si y solo si φ es puro.*

La GNS también nos da una forma de determinar si un estado es *fiel* (asigna valor distinto de cero a cualquier elemento positivo no nulo del álgebra) pues un estado fiel φ es aquel cuya representación GNS es inyectiva, es decir $\mathcal{N}_\varphi = 0$.

Hay también un fuerte resultado de unicidad relativo a la representación GNS de un estado. Dada un álgebra de von Neumann M y un estado φ , la construcción de GNS proporciona

²⁵El ideal $\mathcal{N}_\varphi$ es bilateral ya que, para cualquier $A \in \mathcal{N}_\varphi$ y $B \in \mathcal{A}$, la desigualdad de Schwarz para el estado φ implica que $|\varphi(B^*A^*AB)|^2 \leq \varphi(B^*B)\varphi(A^*A)$. Como $\varphi(A^*A) = 0$, se deduce que $\varphi(B^*A^*AB) = 0$, por lo que $BA, AB \in \mathcal{N}_\varphi$.

²⁶Esto quiere decir que $\{\pi_\varphi(A)\Omega_\varphi \mid A \in \mathcal{A}\}$ es denso en H_φ

una representación $(\pi_\varphi, H_\varphi, \Omega_\varphi)$ tal que $\varphi(a) = \langle \Omega_\varphi, \pi_\varphi(a) \Omega_\varphi \rangle$ para todo $a \in M$. Este triplete es único a menos de equivalencia unitaria: si (π', H', Ω') es otro triplete cumpliendo $\varphi(a) = \langle \Omega', \pi'(a) \Omega' \rangle$ entonces, entonces existe un unitario $U : H_\varphi \rightarrow H'$ tal que $U\Omega = \Omega'_\varphi$ y $U\pi_\varphi(a) = \pi'(a)U$ para todo $a \in M$.

La construcción GNS nos permite dada una C^* -álgebra $\mathcal{A}$ asociarle diferentes von Neumann álgebras indexadas por los distintos estados sobre la C^* -álgebra y construidas vía representación GNS, así si por ejemplo φ y ω son dos estados sobre $\mathcal{A}$, entonces tenemos dos von Neumann álgebras dadas por $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ y $\pi_\omega(\mathcal{A})''$, y de hecho ambas pueden ser de distinto tipo. Sin ir más lejos, como adelantamos en el caso del campo escalar libre la C^* -álgebra global se representará como un álgebra de von Neumann de tipo I si consideramos el estado de vacío, mientras que para un estado termal será de tipo III.

1.2.3. Estados KMS

A continuación definiremos y presentaremos una breve reseña sobre estados KMS, parte de lo aquí expuesto se puede encontrar por ejemplo en capítulo 5 de [10].

En QM, un estado termal suele definirse vía una matriz de densidad de la forma

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \quad (1.2.10)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema, β es la temperatura inversa y $Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$ es la función de partición, que normaliza a 1 la traza de ρ .

Típicamente, la función de partición crece exponencialmente con el volumen del sistema, ya que su logaritmo, la energía libre, es una cantidad extensiva. Por lo tanto, en el límite de volumen infinito (el límite en el que se espera reproducir la termodinámica), la función de partición diverge, lo que implica que $e^{-\beta H}$ deja de ser de traza finita y, en consecuencia, la matriz de densidad térmica no está bien definida.

Por supuesto, el hecho de que el hamiltoniano no sea acotado no impide que podamos hacer predicciones sobre el límite de volumen infinito. La manera usual de proceder es comenzar con un volumen finito, calcular los valores de expectación para luego tomar el límite de volumen infinito. Este límite no existe para todos los observables: por ejemplo, la energía y otras cantidades extensivas divergen²⁷. Sin embargo, para los observables localizados en regiones acotadas, el límite suele existir. Esto da lugar a un estado algebraico ω en el álgebra de todos los operadores localizados en regiones acotadas, el cual no puede expresarse en términos de una matriz de densidad. Pero dado que cualquier estado algebraico es continuo en la clausura uniforme de del álgebra sobre la que está definido, podemos extender ω a la clausura uniforme del álgebra aso-

²⁷El hamiltoniano generalmente no es un operador acotado. Como resultado, en muchos casos, las funciones de él definidas no están bien definidas en el límite termodinámico.

ciada a todas las regiones acotadas, la cual es una C^* -álgebra usualmente denominada álgebra cuasilocal.

Para abordar esta dificultad en el contexto de la AQFT, se introduce la condición KMS (Kubo–Martin–Schwinger) como una caracterización alternativa de los estados termales. Un marco adecuado para definir estos estados es, una C^* -álgebra A equipada con un grupo uniparamétrico de automorfismos continuos α_t con la topología uniforme, a esta dupla se la llama C^* -sistema dinámico. Un marco alternativo es el de los llamados W^* -sistemas dinámicos, constituidos por un álgebra de von Neumann A , y un grupo uniparamétrico de automorfismos α_t que sea continuo en la topología débil.

Se dice que un estado ω de A satisface la condición KMS a temperatura inversa β con respecto a α si, para todo $a, b \in A$, existe una función $F_{a,b}$ acotada en la banda $0 \leq \text{Im } z \leq \beta$, analítica en su interior y continua en su frontera, tal que

$$F_{a,b}(t) = \omega(a\alpha_t(b)), \quad F_{a,b}(t + i\beta) = \omega(\alpha_t(b)a), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (1.2.11)$$

Habrá por tanto dos acepciones para estado KMS respecto a α , una para C^* -sistemas dinámicos y otra para W^* -sistemas dinámicos. Cual de ellas aplique dependerá de si la dupla (A, α) es uno u otro sistema.

Esta condición está inspirada en los estados termales tales y como los definimos en QM, ya que la matriz de densidad t rmal (1.2.10) satisface la condición KMS con respecto al grupo de traslaciones temporales $\alpha_t(X) = e^{itH} X e^{-itH}$. Por lo general uno est  interesado en un grupo de automorfismos que manifieste las traslaciones temporales, pero hay trabajos de estados KMS respecto a grupos uniparamétricos de rotaciones u otros (aunque la definición no est  en principio inspirada en ellos). En el caso en que la matriz de densidad t rmal est  bien definida, el estado algebraico correspondiente en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cumple la condición KMS y no existen otras matrices de densidad con esta propiedad.

Dado que la definición KMS no hace referencia explícita a matrices de densidad, proporciona un marco más general para describir estados térmicos, especialmente en álgebras de tipo III, donde las trazas y matrices de densidad no son herramientas adecuadas. En general si el par (A, α) , es un sistema dinámico, diremos que un estado ω sobre A es estacionario si es invariante bajo la evolución, es decir, si $\omega(\alpha_t(a)) = \omega(a)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se desprende de inmediato de la condición de borde (1.2.11) tomando $a = \mathbf{1}$ y $t = 0$, que $F_{\mathbf{1},b}(z)$ es una función analítica acotada en la cinta $0 < \text{Im}(z) < \beta$ y periódica en la componente imaginaria. Luego usando el teorema de Liouville resulta que $F_{\mathbf{1},b}(z)$ es constante, y en particular $F_{\mathbf{1},b}(t) = F_{\mathbf{1},b}(t)$, es decir $\omega(\alpha_t(b)) = \omega(b)$ para todo $b \in A$, por lo tanto los estados KMS son estacionarios.

Veamos que, si la matriz de densidad está bien definida, entonces el estado que ella define en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisface la condición KMS con respecto a las traslaciones temporales.

Consideremos primero un operador A que sea una combinación lineal finita de operadores

de la forma $|m\rangle\langle n|$, con $|m\rangle$ e $|n\rangle$ autovectores del hamiltoniano. La función $t \mapsto \alpha_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$ se extiende a una función analítica $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, y por lo tanto la función

$$F_{XA}(z) = \frac{1}{Z} \operatorname{tr}(e^{-\beta H} X e^{izH} A e^{-izH})$$

siendo X un operador acotado arbitrario, es analítica en todo $\mathbb{C}$ y en particular en una franja de interés.

Además, satisface claramente la condición de contorno (1.2.11), y está acotada en cualquier región donde $\operatorname{Im} z$ está acotada, ya que

$$|F_{XA}(z)| \leq \|X e^{izH} A e^{-izH}\| \leq \|X\| \|e^{izH} A e^{-izH}\| = \|X\| \|e^{-(\operatorname{Im} z)H} A e^{(\operatorname{Im} z)H}\|.$$

En particular, está acotada en la franja $\operatorname{Im} z \in [0, \beta]$, y por lo tanto satisface todas las propiedades requeridas por la condición KMS. De hecho, por el teorema de las tres líneas de Hadamard²⁸, la analiticidad y acotación, junto con la condición de contorno (1.2.11), implican

$$|F_{XA}(z)| \leq \sqrt{\omega(\{X, X^\dagger\}) \omega(\{A, A^\dagger\})} \quad (1.2.12)$$

para z en la franja, donde $\{ \}$ denota el anticonmutador. Ahora, para cualquier operador acotado Y , el operador $Y_N = P_N Y P_N$, donde P_N denota la proyección sobre el subespacio generado por los primeros N autovectores de H , es del tipo considerado arriba (una combinación lineal finita de operadores de la forma $|m\rangle\langle n|$), y las sucesiones $\{Y_N\}$ y $\{Y_N^\dagger\}$ convergen fuertemente a Y y $Y^\dagger$ respectivamente. La cota (1.2.12), junto con las propiedades de continuidad de los estados *normales*²⁹, implica que la sucesión $\{F_{XY_N}\}$ es uniformemente de Cauchy, y por lo tanto converge uniformemente. Y lo hace a una función que está acotada en la franja, es analítica en su interior y continua en su frontera. Además, esta función satisface la condición de contorno (1.2.11) para los operadores X y Y , por las propiedades de continuidad de los estados normales, así que la condición KMS está satisfecha para pares arbitrarios de operadores.

Veamos ahora que la afirmación recíproca también se cumple, es decir, que si un estado normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver nuevamente la nota al pie 29) satisface la condición KMS con respecto a las traslaciones temporales, entonces la matriz de densidad correspondiente es la ρ del termal

²⁸El teorema de las tres Líneas de Hadamard establece que si una función $f(z)$ es holomorfa y acotada en la banda abierta $S = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$, y continua en su clausura, entonces la función $M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$ es log-convexa en $[a, b]$. Es decir, para todo $x \in [a, b]$ y $\theta \in [0, 1]$ con $x = (1 - \theta)a + \theta b$, se cumple la desigualdad:

$$M(x) \leq M(a)^{1-\theta} M(b)^\theta.$$

El teorema es invariante bajo transformaciones conformes: la rotación $w = iz$ transforma la franja horizontal $z : 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \beta$ en la vertical $w : -\beta \leq \operatorname{Re}(w) \leq 0$, donde el teorema aplica directamente. La convexidad de $\log M$ se preserva bajo esta transformación lineal, justificando su uso en este contexto.

²⁹En la siguiente sección 1.2.4 definiremos estados normales, pero nos adelantamos diciendo que son aquellos que tienen una matriz de densidad asociada. O equivalentemente son continuos en la topología débil en la bola unitaria.

(ver ecuación (1.2.10)). Con tal fin, notemos que de la condición KMS, se desprende que si b es invariante bajo α (o sea $\alpha_t(b) = b$), entonces $\omega(ab) = \omega(ba)$. Si el álgebra es $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y ω es normal, esto implica que la matriz de densidad asociada ρ conmuta con todos los operadores invariantes bajo α . Tomando α como el grupo de traslaciones temporales, obtenemos en particular que ρ conmuta con H , y por tanto existe una base común a ambos operadores. Aplicando la condición KMS a los operadores $|m\rangle\langle n|$ y $|n\rangle\langle m|$, donde $|m\rangle$ y $|n\rangle$ son elementos arbitrarios de esta base, se obtiene finalmente que ρ tiene la forma usual asociada a estados termales en QM.

Además puede verse que todo estado normal y fiel sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisface la condición KMS a temperatura unitaria con respecto a algún grupo uniparamétrico de automorfismos. De hecho, la matriz de densidad ρ asociada a un estado fiel y normal es inyectiva, y por lo tanto puede expresarse en la forma $\rho = e^{-\beta H}/Z$ para algún hamiltoniano H . La condición KMS se satisface entonces respecto del grupo de automorfismos generado por este hamiltoniano, definido por

$$\alpha_t(X) = \rho^{-\frac{it}{\beta}} X \rho^{\frac{it}{\beta}}.$$

De hecho, no existen otros grupos de automorfismos que satisfagan la condición KMS sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Todos los automorfismos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son internos, es decir, de la forma $\alpha(X) = UXU^\dagger$ para algún unitario U , determinado salvo una fase global. Si α_t es un grupo uniparamétrico de automorfismos, es posible elegir las fases para que U_t también forme un grupo uniparamétrico. Si un estado cumple la condición KMS respecto de α , entonces como vimos será invariante bajo α , lo que implica que U_t conmuta con la matriz de densidad ρ . Como consecuencia, U_t pertenece al doble conmutante $\{\rho\}''$, que es el álgebra generada por funciones acotadas de ρ . Así, U_t es una función de ρ , y sus vectores propios coinciden. Además la propiedad de grupo impone que los valores propios de U_t tengan la forma e^{iEt} . De aquí, aplicando la condición KMS a operadores del tipo $|m\rangle\langle n|$, con $|m\rangle$, $|n\rangle$ vectores propios de ρ , se concluye que

$$U_t = \rho^{-it}.$$

Dicho resultado es pasible de generalizarse al caso de álgebras de von Neumann arbitrarias. Es decir, para todo estado normal y fiel ω sobre una álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$, existe un único grupo uniparamétrico de automorfismos de $\mathcal{A}$ con respecto al cual ω satisface la condición KMS a una dada temperatura inversa β .

Este grupo se denomina el *grupo modular*, o *flujo modular*, de ω (a temperatura inversa β). Es importante observar que lo que se traslada del caso $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a álgebras más generales no es la forma explícita del grupo, sino la existencia y unicidad de un grupo de automorfismos con determinadas propiedades. En el caso de factores de tipo I, la forma es similar³⁰: por ejemplo, $\alpha_t(X_1 \otimes \mathbf{1}_2) = \rho_1^{-it} X_1 \rho_1^{it} \otimes \mathbf{1}_2$, donde ρ_1 denota la matriz de densidad reducida obtenida al tomar la traza parcial de la matriz de densidad global. Para otras álgebras, sin embargo, el grupo modular puede tener una estructura considerablemente más compleja.

³⁰Esto no es sorprendente, ya que un factor de tipo I es isomorfo a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Parte del presente trabajo trata de determinar dicha evolución modular para cierto tipo de estados normales asociados a ciertas regiones, como se verá en el capítulo 4. Además en dicho capítulo veremos como formular la noción de estados KMS en el contexto del espacio de una partícula, es decir en la primera cuantización.

1.2.4. Entropías en teoría de cuántica campos

En teoría de la información clásica se define la entropía de Shannon asociada a una X variable aleatoria discreta como la cantidad³¹

$$-\sum_i p_i \log p_i,$$

siendo p_i las probabilidades asociadas a la variable aleatoria X . Dicha entropía es una medida de la incerteza de dicha variable, siendo 0 si algún $p_i = 1$ y mayor en caso contrario³². Podemos justificar la interpretación en terminos de la incerteza de la siguiente forma: primero podemos asociar a un evento con probabilidad p de suceder, la noción de *sorpresas*, no estaría mal definirla como $1/p_i$ ya que de esta forma cuanto menor sea la probabilidad de que el evento ocurra mayor sorpresa le asociaremos a su ocurrencia. La desventaja que tiene esta noción de sorpresa es que no es aditiva para eventos independientes. Para obtener una función con esta propiedad sin perder la interpretación podemos aplicar una función creciente a nuestra “sorpresa” de modo que convierta productos en sumas, el logaritmo parece servir. Así podemos definir la sorpresa de un evento con probabilidad p como $\log\left(\frac{1}{p}\right) = -\log(p)$. Luego la entropía de Shannon de una variable aleatoria X , termina siendo la esperanza de la sorpresa aplicada a X . Luego una X con alta entropía de Shannon se corresponderá con una variable más sorpresiva o incierta y de lo contrario será una variable poco sorpresiva o menos incierta, es decir que asignará valor cercano a 1 a alguno de sus valores.

La versión mecánica cuántica de esta medida de información es la entropía de von Neumann que se asocia con un determinado estado vía su matriz de densidad ρ como

$$S_{vN}(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log(\rho)),$$

y si el estado es puro la misma se anula. Decimos que esta entropía generaliza la de Shannon ya que en el caso de considerar una matriz densidad ρ diagonal, la Tr se traduce en una suma de probabilidades y en consecuencia las definiciones son coincidentes.

En QM es de interés la entropía de entrelazamiento, dicha entropía surge al estudiar la restricción de un estado φ definido globalmente (es decir sobre $A(\mathbb{M})$ si pensamos en Minkowski) a un subsistema con álgebra $\mathcal{A}$. Dicha restricción $\varphi|_{\mathcal{A}}$ posee una entropía de entrelazamiento debida justamente a su entrelazamiento con el complemento del sistema de interés. Si las álgebras

³¹Similarmente se puede definir para variables continuas.

³²Adoptamos como es de esperar la convención $0 \log(0) = 0$.

de observables son de tipo I (caso QM) entonces tanto el estado global φ como su restricción $\varphi|_{\mathcal{A}}$ poseen sendos operadores de densidad asociados $\rho_{\varphi} \in \mathcal{B}(H)$ y $\rho_{\varphi, \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ (siendo $\mathcal{A}$ el álgebra correspondiente al subsistema), en este caso definimos la entropía de entrelazamiento del estado φ restringido al subsistema $\mathcal{A}$ como la entropía de von Neumann del estado restringido, es decir

$$S_{EE}(\varphi|_{\mathcal{A}}) := S_{vN}(\rho_{\varphi, \mathcal{A}}) \quad (1.2.13)$$

también llamada entropía de entrelazamiento del subsistema $\mathcal{A}$ (en el estado φ). Para ser más claros en cuanto a su interpretación pongamos esto en términos de regiones del espaciotiempo.

En general se asocia la entropía de entrelazamiento (en un determinado estado) con una cierta región del espacio de Minkowski, específicamente podemos pensar en un abierto relativo R a una superficie a tiempo fijo Σ y llamemos $\diamond(R)$ a su dominio de dependencia. Consideremos la subálgebra $\mathcal{A} = A(\diamond(R))$ ³³ del espacio de observables y un estado global φ del sistema. Entonces la entropía de entrelazamiento asociada a R se define como la entropía de von Neumann de la matriz de densidad reducida asociada a $\varphi|_{\mathcal{A}}$ (que notábamos $\rho_{\varphi, \mathcal{A}}$), o sea

$$S_{EE}(R) := S_{vN}(\rho_{\varphi, \mathcal{A}}). \quad (1.2.14)$$

Si el estado global φ con el que empezamos es puro, entonces ésta entropía puede interpretarse como una medida del entrelazamiento entre los grados de libertad dentro de la región $R \subseteq \Sigma$ y los que están en su complemento relativo a Σ , llamémoslo R^c . Esperamos que el lector sepa disculpar el leve abuso de notación al aplicar la entropía S_{EE} primero a la restricción de un estado y luego a una región a tiempo fijo.

Es esperable que en teoría de campos la cantidad $S_{EE}(R)$ sea infinita ya que los grados de libertad tanto de dentro como fuera de la región de interés son infinitos, veremos esto en breve (ecuación (1.2.19)). Además dada la clasificación de álgebras en tipos de inmediato empiezan a surgir algunos interrogantes: ¿Y si mi estado φ no tiene una matriz de densidad asociada?, ¿y si la tiene pero su restricción $\varphi|_{\mathcal{A}}$ no?, y si estos operadores de densidad existen, ¿qué traza uso en la ecuación (1.2.14), la global o la asociada a mi álgebra?

Respecto a la primer pregunta podemos decir que cuando se trata de estados globales en el contexto de AQFT hay estados con matriz de densidad asociada (esto puede ser así ya que el álgebra global no es de tipo III en general), dichos estados se denominan normales y pueden ser caracterizados de manera equivalentes como estados continuos en la topología débil en la bola unitaria $\{a \in \mathcal{A}, \|a\| \leq 1\}$. Pero a diferencia de lo que pasa en QM, éstos ya no son todos los estados posibles, hay estados globales que no vienen definidos por matrices de densidad.

Sucede que en el contexto de álgebras locales en Minkowski éstas preguntas tienen sentido, ya que las mismas son de tipo III (al menos para el campo escalar libre) y en dichas álgebras la traza solo puede valer 0 o ∞ impidiendo así a sus operadores adoptar el rol de operador de

³³ $A(\diamond(R))$ es el álgebra asociada vía la net del dominio de dependencia de la región espacial R .

densidad asociado a cualquier estado definido sobre el álgebra ya que un operador que se precie de tal debe tener traza 1. Así vemos que si hay un operador de densidad asociado a $\varphi|_{\mathcal{A}}$ el mismo no puede pertenecer a $\mathcal{A}$.

Este es el estado de las cosas. Pero es interesante notar que las álgebras de tipo II parecen asociarse a regiones de teorías con gravedad, lo cual renovó el interés (ver por ejemplo [22] o [23]). Las álgebras de tipo II a diferencia de las de tipo III sí admiten matrices de densidad ya que las mismas albergan proyectores finitos y funciones trazas menos constreñidas que pueden en particular tomar el valor 1. Más aún si consideramos un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo II entonces hay una suerte de matriz de densidad $\rho_{\varphi, \mathcal{A}}$ afiliada al álgebra en cuestión asociada a $\varphi|_{\mathcal{A}}$. En [24] Roberto Longo y Edward Witten analizan una extensión de la noción de entropía de entrelazamiento introducida por Segal en 1960, la misma está bien definida cuando el álgebra de observables es un álgebra de von Neumann semifinita. Si el álgebra es finita (o sea tipo I_n con $n \in \mathbb{N}$ o tipo II_1) entonces existe un único estado τ tipo traza, normal y fiel, de manera que podemos extender nuestra noción de operador de densidad asociado a un estado de manera casi igual que para álgebras de tipo I_n con $n \in \mathbb{N}$ a tipo II_1 ya que dado un estado φ normal y fiel sobre $\mathcal{A}$, existe un único operador positivo y no singular $\rho_{\varphi, \mathcal{A}}$ afiliado³⁴ a $\mathcal{A}$ que cumple

$$\varphi(A) = \tau(\rho_{\varphi, \mathcal{A}} A) \text{ para todo } A \in \mathcal{A}. \quad (1.2.15)$$

En estos términos la definición de Segal es

$$S_{\tau}(\varphi) = -\tau(\rho_{\varphi, \mathcal{A}} \log(\rho_{\varphi, \mathcal{A}})), \quad (1.2.16)$$

y en álgebras de tipo I_n con $n \in \mathbb{N}$ la relación entre las entropías de Segal y de entrelazamiento es

$$S_{\tau}(\varphi) = S_{EE}(\Sigma_{\mathcal{A}}) - \log(n), \quad (1.2.17)$$

que se desprende básicamente de $n\tau = Tr$. Esta generalización es válida incluso para álgebras de von Neumann semifinitas, de modo que ahora abarcamos álgebras de tipo I_{∞} y tipo II_{∞} . En esta caso dado un estado τ tipo traza, normal, fiel y semifinito sobre $\mathcal{A}$ y φ como antes entonces podemos afirmar que existe $\rho_{\varphi, \mathcal{A}}$ nuevamente afiliado a $\mathcal{A}$ y cumpliendo la ecuación (1.2.15). No obstante para álgebras de tipo I_{∞} y II_{∞} el estado τ ya mencionado no es único, sino único a menos de un reescalo, con todas las entropías de Segal definidas según tales reescalos son fácilmente vinculables

$$S_{\lambda\tau}(\varphi) = S_{\tau}(\varphi) + \log(\lambda) \text{ para todo } \lambda > 0. \quad (1.2.18)$$

Lo cierto es que en teoría de campos las álgebras constituyentes de la net son de tipo III (ver [15]) y las mismas no admiten estados de tipo traza, ni siquiera semifinitas, este hecho da de baja nuestra correspondencia entre estados y operadores de densidad ya sea en el álgebra

³⁴Un operador T se dice *afiliado* a un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ si cumple que $UTU^* = T$ para todo operador unitario $U \in \mathcal{M}'$. Equivalentemente, T conmuta con todos los proyectores de $\mathcal{M}'$.

de observables o bien afiliados a ella, lo cual tampoco permite aspirar a definir una entropía ya sea de entrelazamiento o su generalización en la forma de Segal.

Además, dado φ un estado en $\mathcal{A}$ de tipo II como arriba, existe una sucesión de operadores de densidad en $\mathcal{A}$ que tienden a $\rho_{\varphi, \mathcal{A}}$ (una formulación precisa de tal aserción se encuentra en [25] capítulo V.2). Por último si el álgebra $\mathcal{A}$ es de tipo III, como de hecho lo es para el caso $A(\diamond(\Sigma_{\mathcal{A}}))$, no tengo operadores de densidad en el álgebra y por ende no puedo definir la entropía de entrelazamiento en la forma usual ni tampoco puedo conseguir una sucesión de operadores de densidad en el álgebra que aproximen a un dado estado.

Hay no obstante una forma de tratar la entropía de entrelazamiento, el método del “*cut off*”. Esencialmente dado un sistema físico continuo, considera una malla discreta sobre él con una separación ε entre puntos consecutivos, de modo de tratar con un sistema discreto a fin de poder valerse de matrices de densidad y poder calcular la entropía de entrelazamiento como si el álgebra en cuestión fuese de tipo I_n . Resultando así en general que (pensando que $\mathcal{A}$ es el álgebra asociada al dominio de dependencia de cierta región espacial d -dimensional $\Sigma_{\mathcal{A}}$, cosa que indicaremos por $\mathcal{A} = A(\diamond(\Sigma_{\mathcal{A}}))$)

$$S(\Sigma_{\mathcal{A}}) = \frac{g_{d-2}(\partial\Sigma_{\mathcal{A}})}{\varepsilon^{d-2}} + \dots + \frac{g_1(\partial\Sigma_{\mathcal{A}})}{\varepsilon} + g_0(\partial\Sigma_{\mathcal{A}}) \log(\varepsilon) + S_0(\Sigma_{\mathcal{A}}), \quad (1.2.19)$$

los coeficientes g son integrales sobre el $\partial\Sigma_{\mathcal{A}}$ y son independientes del estado φ , mientras que S_0 es finito, depende del estado y de la región. Uno quisiera “pasar al continuo” tomando el límite de ε tendiendo a cero, pero se ve que en tal situación la entropía diverge y no está bien definida en consonancia con todo lo ya mencionado cuando tratamos su definición desde la perspectiva de AQFT y vimos que las trazas en álgebras de tipo III son infinitas. Cabe destacar que el método del cut off ha dado lugar al entendimiento de cuestiones como teoremas de irreversibilidad del grupo de renormalización en dimensión $1+1$ (ver [26]). No obstante su estructura de divergencias, sí es interesante el hecho de que debido a las propiedades mencionadas de los coeficientes g , las divergencias se anulan si comparamos las entropías de distintos estados en una misma región. Esto nos lleva directamente a la noción de entropía relativa entre estados, que luego definiremos. Otra forma de anular las divergencias es comparando un mismo estado en dos regiones distintas, esto es básicamente lo que hacemos cuando definimos información mutua.

Estas medidas de información (entropía relativa e información mutua) encuentran una buena definición en QFT y en particular en esta tesis nos avocaremos al estudio de la entropía relativa entre dos estados muy particulares que serán introducidos en el capítulo 4. La entropía relativa por ejemplo ha sido utilizada por Horacio Casini en [27] para darle sentido a la cota de Bekenstein en QFT y demostrarla apelando a la propiedad de positividad de dicha entropía. No obstante en su trabajo la entropía relativa provenía de la diferencia de dos entropías de entrelazamiento que eran calculadas tomando traza a una matriz de densidad como en (1.2.14), es decir que se trabajaba con el método del cut off. Luego varios años después la cota de Be-

keinsten fue demostrada por Longo y Feng Xu en [28] sin apelar al método del cut off, sino tomando como concepto primario la entropía relativa y eventualmente definiendo la entropía de entrelazamiento a partir de ella (ver por ejemplo en [29]) sin necesidad de requerir estados tipo traza

$$S_{EE}(\varphi) = \sup \left\{ \sum_i \lambda_i S(\varphi_i \| \varphi) : \varphi = \sum_i \lambda_i \varphi_i \right\}, \quad (1.2.20)$$

donde el supremo se toma sobre todas las posibles descomposiciones de φ en el espacio de estados y $S(\varphi_i \| \varphi)$ indica la entropía relativa entre φ_i y φ .

Para cerrar la presente sección introducimos brevemente el concepto de entropía relativa, la misma como acabamos de mencionar admite una buena definición en teoría de campos. La noción de entropía relativa en teoría de campos es el resultado de generalización tras generalización de una noción proveniente en primer instancia de la teoría de probabilidades. Para darnos una idea básica de qué mide, pensemos en una variable aleatoria discreta X con n posibles resultados, y denotemos por p_i a la probabilidad de que $X = x_i$. Así mismo notemos q_i a la probabilidad que *cierto modelo* (o teoría) otorga al evento $X = x_i$.

Al realizar N mediciones del valor de X , los resultados observados serán (a menos de una permutación)

$$\{\text{mediciones}\} = \underbrace{\{x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots\}}_{N \text{ Observaciones}}$$

donde cada x_i aparece aproximadamente $p_i N$ veces.

La probabilidad que la teoría le otorga a dichas N observaciones es

$$P_{\text{teoría}}(\{\text{mediciones}\}) = \prod_{i=1}^n q_i^{p_i N} \frac{N!}{\prod_{i=1}^n (p_i N)!} \approx 2^{-N \sum_{i=1}^n p_i (\log p_i - \log q_i)}$$

en la última igualdad se utilizó la formula de Stirling suponiendo que N es grande. La *divergencia de Kullback-Leibler* (también llamada entropía relativa) entre las distribuciones $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$ se define como

$$S(\{p_i\} \| \{q_i\}) := \sum_i p_i (\log p_i - \log q_i)$$

Al observar el exponente de $P_{\text{teoría}}(\{\text{mediciones}\})$ para valores grandes de N , se deduce que si $NS(\{p_i\} \| \{q_i\}) \gg 1$, la teoría $\{q_i\}$ no es consistente con la distribución real $\{p_i\}$.

En QM este concepto de entropía relativa se generaliza a estados dados vía matriz de densidad. Sean ρ y χ dos matrices de densidad asociadas a estados cuánticos, entonces se define la entropía relativa entre dichos estados como

$$S(\chi \| \rho) := \text{Tr} \chi (\log \chi - \log \rho) \quad (1.2.21)$$

Cuando los estados están relacionados clásicamente (es decir, cuando $[\rho, \chi] = 0$), la expresión anterior se reduce a la de la teoría de probabilidad. La generalización aparece para estados tales que $[\rho, \chi] \neq 0$, por ejemplo para los estados de qubit $\rho = \frac{1}{2}(1 + \sigma_x)$ y $\chi = \frac{1}{2}(1 + \sigma_y)$, los cuales no conmutan ya que $[\rho, \chi] = 2i\sigma_z$ (donde σ_x, σ_y y σ_z son las matrices de Pauli).

En QFT hay infinitos grados de libertad y como ya mencionamos hay problemas para asociar matrices de densidad a los estados e incluso para definir una traza. Estamos interesados en álgebras de von Neumann de tipo III y por lo tanto es necesaria todavía otra generalización. Dicha generalización es debida a Araki, será brevemente mencionada al final del capítulo o en más detalle en el capítulo 4.

1.3. Teoría de Tomita-Takesaki

La teoría de *Tomita-Takesaki* es un marco matemático para el estudio de las álgebras de von Neumann. En particular describe cómo un estado puede inducir una estructura sobre dichas álgebras, y una noción algebraica de temperatura. Se basa en la observación de que, al representar una álgebra vía la construcción de GNS de cierto estado, surge una descomposición natural en términos de dos operadores, que de momento notaremos Δ y J , los cuales codifican información relevante del estado y su correspondiente álgebra.

Un resultado central de la teoría es que el operador modular Δ genera un flujo uniparamétrico de automorfismos α_t , conocido como *flujo modular*, que describe una evolución interna en álgebra inducida por la GNS de un dado estado. Este flujo, como veremos, es crucial, ya que proporciona una forma de definir estados termales a través de la condición de KMS, tal y como lo hicimos en la sección precedente con el grupo uniparamétrico de traslaciones temporales.

1.3.1. Operadores modulares

Veamos entonces cómo se definen los mencionados operadores modulares. Como mencionamos en la sección 1.2.2, dado un estado y una región del espaciotiempo le podemos asignar un álgebra de von Neumann. Sea entonces M un álgebra de von Neumann (que estará en general asociada a un estado y una región) actuando sobre un espacio de Hilbert H que contiene un vector Ω cíclico y separante para M . Definimos el operador $S_{0\Omega}$ sobre un subconjunto de H de la siguiente manera:

$$S_{0\Omega}A\Omega = A^*\Omega, \quad \text{para todo } A \in M.$$

Notemos que, debido a la ciclicidad de Ω , dicho operador está definido sobre un conjunto denso del espacio de Hilbert. Y gracias a que Ω es separante para M , el operador goza de buena definición, es decir que si $A\Omega = B\Omega$ para dos operadores $A, B \in M$, entonces, $S_{0\Omega}A\Omega = S_{0\Omega}B\Omega$. Más aún, $S_{0\Omega}$ se puede extender a un operador antilineal bien definido y cerrado que

denotaremos S_Ω ³⁵, claramente éste último también estará definido sobre un denso de H . Además $S_\Omega^2 = I$ en su dominio de definición y $S_\Omega\Omega = \Omega$.

Considerando la descomposición polar del operador S_Ω ,

$$S_\Omega = J_\Omega \Delta_\Omega^{1/2} = \Delta_\Omega^{-1/2} J_\Omega,$$

nos valemos de dos operadores: Δ_Ω un operador positivo y autoadjunto y J_Ω un antiunitario. Δ_Ω se denomina el operador modular y J_Ω la conjugación modular (o involución modular), ambos se dicen asociados al par (M, Ω) . Notemos que J_Ω^2 es el operador identidad y que $J_\Omega = J_\Omega^*$ ³⁶. En vistas de la descomposición polar, podemos determinar que $\Delta_\Omega = S_\Omega^* S_\Omega$, y dado que Δ_Ω es autoadjunto y definido positivo, por cálculo funcional su raíz cuadrada está bien definida.

Además, Δ_Ω^{it} es un operador unitario para todo $t \in \mathbb{R}$, y el conjunto $\{\Delta_\Omega^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$ forma un grupo unitario continuo respecto a la topología fuerte de operadores.

Usualmente se nota M' al conjunto de todos los operadores lineales acotados en H que conmutan con todos los elementos de M . Uno de los resultados más útiles de la teoría de Tomita-Takesaki (y que de hecho utilizaremos en el capítulo 3) establece que

Teorema 1.3.1. *Sea M una álgebra de von Neumann con un vector Ω cíclico y separante. Entonces $J_\Omega\Omega = \Omega = \Delta_\Omega\Omega$ y se cumplen las siguientes igualdades:*

$$J_\Omega M J_\Omega = M' \quad y \quad \Delta_\Omega^{it} M \Delta_\Omega^{-it} = M, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Además si definimos $F_{0\Omega} A' \Omega = A'^* \Omega$, para todo $A' \in M'$, y llamamos F a su clausura, entonces se cumple

$$\Delta_\Omega = F_\Omega S_\Omega, \quad \Delta_\Omega^{-1} = S_\Omega F_\Omega, \quad F_\Omega = J_\Omega \Delta_\Omega^{-1/2}.$$

Es decir, en estas condiciones se tiene que $F_\Omega = S_\Omega^*$ y por lo tanto S_Ω^* es el operador de Tomita de M' si S_Ω es el de M . Una vez más remitimos al lector a [18] para la demostración del teorema.

El teorema previo es de gran importancia por varios motivos. No solamente lo utilizaremos en la demostración de la dualidad de Haag (ver siguiente sección 1.4 o directamente el capítulo 3), sino que también nos provee de un grupo uniparamétrico de automorfismos. Con el mismo se puede constituir un sistema algebraico dinámico, tal y como fue mencionado en la sección 1.2.3. Volveremos a entrar en detalles sobre dicho grupo uniparamétrico en la sección 4.1.

³⁵Un operador es cerrado cuando su gráfico lo es. Para ver que $S_{0\Omega}$ admite una extensión cerrada que además es única remitimos al lector a [18].

³⁶Recordemos que para operadores antilineales el adjunto A^* de un operador A satisface

$$(A^*x; y) = \overline{(x; Ay)} \quad \forall y \in \text{dom}(A) \text{ y } \forall x \in \text{dom}(A^*).$$

Concretamente, si nos remitimos al Theorem 5.3.10 en [30]. Dada M un álgebra de von Neumann y ω un estado normal y fiel, el grupo uniparamétrico de automorfismos modulares de M (continuo en la topología débil) dado por la conjugación $\alpha_t(A) := \Delta_\omega^{it} A \Delta_\omega^{-it}$ hace de (M, α_t) un W^* -sistema dinámico para el cual ω es un estado KMS respecto a α .

Al grupo uniparamétrico α , se le llama grupo modular asociado a (M, ω) . El grupo modular será clave a la hora de construir un estado KMS concreto en el capítulo 5. Allí será de suma utilidad el conocer el grupo modular asociado al vacío en cierta región del espaciotiempo, para poder también determinar el asociado a un estado termal definido en otra región.

Volviendo al operador F_Ω , será útil el hecho de que sus operadores modulares están relacionados con los de S_Ω . El teorema 1.3.1 nos indica que $F_\Omega = J_\Omega \Delta_\Omega^{-\frac{1}{2}}$, y si comparamos esto con la descomposición polar del propio F_Ω : $F_\Omega = J'_\Omega (\Delta'_\Omega)^{\frac{1}{2}}$ (aquí primamos a los operadores modulares asociados a F_Ω), obtenemos por unicidad de la descomposición polar

$$J'_\Omega = J_\Omega \quad \text{y} \quad \Delta'_\Omega = \Delta_\Omega^{-1}$$

Por último, de $S_\Omega^2 = I$, se deduce $\Delta_\Omega^{-\frac{1}{2}} = J_\Omega \Delta_\Omega^{\frac{1}{2}} J_\Omega$, que elevando al cuadrado y usando $J_\Omega^2 = I$, resulta en $\Delta_\Omega^{-1} = J_\Omega \Delta_\Omega J_\Omega$. De aquí podemos concluir que si h es una función real $h(\Delta_\Omega^{-1}) = J_\Omega h(\Delta_\Omega) J_\Omega$.

Sea ahora $f = f_1 + if_2$ una función compleja, entonces

$$\begin{aligned} \bar{f}(\Delta_\Omega^{-1}) &= f_1(\Delta_\Omega^{-1}) - if_2(\Delta_\Omega^{-1}) = J_\Omega f_1(\Delta_\Omega) J_\Omega - i J_\Omega f_2(\Delta_\Omega) J_\Omega \\ &= (J_\Omega f_1(\Delta_\Omega) - i J_\Omega f_2(\Delta_\Omega)) J_\Omega = (J_\Omega f_1(\Delta_\Omega) J_\Omega + J_\Omega i f_2(\Delta_\Omega)) J_\Omega \\ &= J_\Omega (f_1(\Delta_\Omega) + i f_2(\Delta_\Omega)) J_\Omega = J_\Omega f(\Delta_\Omega) J_\Omega. \end{aligned}$$

En la segunda línea se usó el hecho de que J_Ω es antilineal. Si aplicamos este resultado a la función $f(x) = x^{is}$, con $s \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_\Omega^{is} = J_\Omega \Delta_\Omega^{is} J_\Omega. \quad (1.3.1)$$

Es decir, Δ_Ω^{is} conmuta con J_Ω . Hecho que en el caso finito dimensional es más directo de ver, dado que Δ_Ω^{is} es posible de escribirse en términos de las matrices de densidad reducidas del estado Ω (ver por ejemplo capítulo 4 de [31]).

1.3.2. Operadores modulares relativos

Por otra parte también existe una noción de operadores modulares relativos. Dedicaremos esta breve sección a introducirlos. Si consideramos un segundo estado $\Phi \in H$ que no necesariamente sea cíclico ni separante para el álgebra M , se puede definir un operador.

$$S_{\Omega|\Phi} a \Omega = a^* \Phi \quad \forall a \in M. \quad (1.3.2)$$

Una vez más, este operador está definido sobre un denso, dada la ciclicidad de Ω respecto a M . Como sucedía en el caso no relativo, el operador $S_{\Omega|\Phi}$ es cerrable, notaremos de igual forma a su clausura.

Similarmente al caso del operador de Tomita S_Ω , asociaremos al operador de Tomita relativo $S_{\Omega|\Phi}$, dos operadores, vía su descomposición polar $S_{\Omega|\Phi} = J_{\Omega|\Phi} \Delta_{\Omega|\Phi}^{\frac{1}{2}}$, siendo $\Delta_{\Omega|\Phi}$ un operador positivo y autoadjunto y $J_{\Omega|\Phi}$ una isometría parcial (única si pedimos que se anule en $\text{Ker}(S_{\Omega|\Phi})$).

Si Φ fuese a su vez cíclico y separante para M , también se podrá definir $S_{\Phi|\Omega}$, en tal caso $S_{\Omega|\Phi}$ y $S_{\Phi|\Omega}$ son mutuamente inversos sobre aquellos vectores que tenga sentido la composición de ambos mapas. Esto se deduce de la ecuación (1.3.2) al aplicar $S_{\Phi|\Omega}$. Además, en tal caso $J_{\Omega|\Phi}$ sería un operador unitario.

Al igual que antes podemos definir $S'_{\Omega|\Phi}$ como el operador tal que $S'_{\Omega|\Phi} a' |\Omega\rangle = a'^* |\Phi\rangle$ para $a' \in M'$.

Más aún, de las siguientes igualdades (en las que $a \in M$ y $a' \in M'$) se desprende una relación de importancia entre ambos operadores,

$$\begin{aligned} \left(S'_{\Omega|\Phi} a' |\Omega\rangle ; a |\Omega\rangle \right) &= (a'^* |\Phi\rangle ; a |\Omega\rangle) = (|\Phi\rangle ; a' a |\Omega\rangle) \\ &= (|\Phi\rangle ; a a' |\Omega\rangle) = (a^* |\Phi\rangle ; a' |\Omega\rangle) = \overline{(a' |\Omega\rangle ; a^* |\Phi\rangle)} \\ &= \overline{(a' |\Omega\rangle ; S_{\Omega|\Phi} a |\Omega\rangle)}, \end{aligned}$$

esto muestra que $S_{\Omega|\Phi}^* = S'_{\Omega|\Phi}$ sobre su dominio común. Notar que, esta última demostración también deja constancia de que $S_\Omega^* = S'_\Omega$ si tomamos Φ como Ω (observese que $S_{\Omega|\Omega} = S_\Omega$).

Volviendo a la definición $S_{\Omega|\Phi} a \Omega = a^* \Phi$, si se diera el caso de que Φ no sea separante para M , podría suceder que haya un operador no nulo a tal que $a^* \Phi = 0$. En tal caso $a \Omega$ estaría en el núcleo de $S_{\Omega|\Phi}$. Entonces, esta vez al momento de aplicar el teorema de la descomposición polar ya no habrá unicidad para el operador $J_{\Omega|\Phi}$ (a menos que le pidamos otras condiciones como que su dominio sea $(\ker S_{\Omega|\Phi})^\perp$, no obstante estos tecnicismos no serán de interés en la presente tesis).

Es interesante notar que la definición de $S_{\Omega|\Phi}$ tiene sentido aún si Ω y Φ no están en el mismo espacio de Hilbert H , pero evidentemente sí es necesario que el álgebra de von Neumann en cuestión actúe sobre ambos espacios de Hilbert a los que cada uno de los vectores pertenezcan.

La teoría de Tomita-Takesaki es muy basta, si de mencionar propiedades se tratara, podríamos llenar páginas y páginas, pero no pretendemos aquí hacer un análisis exhaustivo ni muchísimo menos, solo introducir las nociones que nos serán de utilidad en lo que sigue.

1.4. Contribuciones de la tesis

En la presente tesis se logró aplicar exitosamente la teoría de Tomita-Takesaki trabajando en el marco teórico de la AQFT. A continuación mencionaremos brevemente los tres principales resultados de misma.

1. La dualidad de Haag establece que dado un estado φ y una subregión R de Minkowski³⁷, la von Neumann álgebra de observables correspondiente al complemento causal de R (que notaremos por R') es **exactamente** el conmutante del álgebra de observables asociada a R . Dicha afirmación es ligera pero sustancialmente distinta al axioma de localidad. Este axioma afirma que³⁸:

$$\mathcal{A}_\varphi(R') \subseteq \mathcal{A}_\varphi(R)',$$

pero en contraste con esto, la dualidad de Haag se satisface cuando además

$$\mathcal{A}_\varphi(R') = \mathcal{A}_\varphi(R)'. \quad (1.4.1)$$

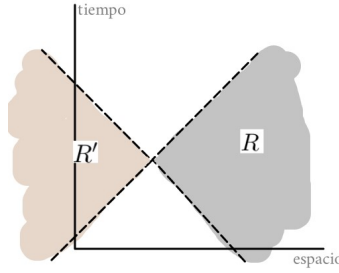


Figura 1.3: La dualidad de Haag establece que las álgebras de von Neumann correspondientes a las dos regiones de la figura, que son wedges y complementos causales mutuos han de ser una igual al conmutante de la otra.

Fue Araki quien en 1964 publicó [15] demostrando que, si consideramos φ como el estado de vacío del campo escalar libre masivo en $3+1$ dimensiones, la dualidad de Haag se satisface para cierto tipo de regiones (las llamadas diamantes, luego entraremos en detalles). La cuestión radica en que la demostración de Araki está segmentada en dos publicaciones. La primera de ellas [32], en la cual define y enuncia varias propiedades para un mapa que asocia álgebras de von Neumann a subespacios (o pares de subespacios) de un Hilbert. Allí enuncia y demuestra una versión parcial de la dualidad de Haag formulada en términos de dicho mapa. En un trabajo posterior [15], define un otro mapa que a ciertas regiones del espaciotiempo les asocia subespacios, nuevamente define y demuestra una versión parcial

³⁷Puede que otro espaciotiempo dependiendo del nivel de generalidad en que haya sido enunciada.

³⁸En lo que sigue alivianaremos un poco la notación, comenzaremos a notar $\mathcal{A}_\varphi(S)$ al álgebra que en la sección 1.2.2 llamábamos $\pi_\varphi(A(S))''$, siendo S un abierto cualquiera.

de la dualidad de Haag para dicho mapa. Si bien su demostración es rigurosa y es completa, nosotros pretendemos hacer algunos aportes. El primero de ellos, consiste en dejar en claro los detalles por los cuales la versión de la dualidad de Haag dada por la ecuación (1.4.1) se desprende de las dos versiones parciales de la dualidad dadas por Araki. Esto no envuelve una dificultad extrema, pero si que contribuye a al entendimiento global de la dualidad en la forma que usualmente se la conoce.

Por otra parte, también logramos obtener una demostración alternativa a la versión dada por Araki en su primer trabajo (es decir su versión parcial de la dualidad para el mapa de subespacios a álgebras). Para esto, seguimos en parte el trabajo de Eckmann y Osterwalder [33], en el cual se demuestra la dualidad para dicho mapa usando la teoría de Tomita-Takesaki. El aporte de esta tesis en cuanto a la dualidad de Haag (que se desarrollará en los capítulos 2 y 3) es por un lado presentar una versión innovadora y simplificada respecto a la presentada en [33]. La simplificación se debe a la utilización del adjunto del operador de Tomita S (dejaremos para el capítulo 3 la definición precisa), en lugar de a varios operadores auxiliares como lo hacen Eckmann y Osterwalder. En concreto, nos ocupamos de conectar los trabajos [32], [15] y [33] de manera que se entienda claramente porque las versiones de la dualidad que cada uno de ellos presentan terminan demostrando lo que entendemos como dualidad de Haag para la net de una AQFT. Por último, también decidimos presentar un contraejemplo a la dualidad de Haag, es decir una región que no la satisfaga (por supuesto no será un diamante), el mismo si bien está presente en el trabajo original de Araki [15], no lo está con el detalle aquí presente ya que allí también decidimos modificar algunas demostraciones, hacerlas más detalladas y agregar gráficos.

2. También en el capítulo 2 volveremos en más detalle sobre la noción de estado KMS y de entropía relativa que como dijimos es una medida de la distinguibilidad entre dos estados. Recordemos que en QM, para dos matrices de densidad ρ y σ , se define como

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma). \quad (1.4.2)$$

Si el espacio de Hilbert del sistema se factoriza como producto de dos, se pueden reducir cada una de las matrices de densidad a una de las particiones y calcular la entropía relativa entre las matrices de densidad reducidas. El análogo en QFT es reducir los estados a una región del espacio-tiempo, es decir tratar con estados locales. Intuitivamente, cuanto más pequeña sea esta región, menos operadores se tienen para caracterizar los estados y, por lo tanto, la entropía relativa disminuye. Sin embargo, las regiones acotadas genéricas del espacio-tiempo, como los diamantes causales, se asocian con álgebras de von Neumann de Tipo III, y estas álgebras como vimos en la sección 1.2.1 no poseen operadores con traza finita, y según vimos en la sección 1.2.4 tampoco matrices de densidad. No obstante, la definición de la entropía relativa (1.4.2) puede extenderse adecuadamente como veremos

en el capítulo 4 siguiendo [34]. Adelantándonos un poco a eso mismo, dados dos estados³⁹ ω y ω' del álgebra de von Neumann $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ asociada a alguna región del espaciotiempo $\mathcal{O}$, representados ambos en un espacio de Hilbert por Ω y Ω' , la entropía relativa de Araki es

$$S_{\mathcal{O}}(\omega||\omega') = -(\Omega, \log \Delta_{\Omega', \Omega} \Omega), \quad (1.4.3)$$

donde $\Delta_{\Omega', \Omega}$ es el operador modular relativo introducido en la sección previa. El mismo codifica la relación entre ambos estados (ahondaremos en él en el capítulo 3). Esto contrasta marcadamente con la entropía de entrelazamiento, que necesariamente diverge debido al comportamiento ultravioleta genérico de las correlaciones a través del borde de la región correspondiente (ver [35]).

La entropía relativa de Araki (1.4.3) puede ser difícil de calcular en casos generales. Recientemente se ha calculado en varias situaciones específicas para estados coherentes actuando sobre el vacío de la QFT de un escalar libre: en el wedge de Rindler [36–38], en un diamante causal en dimensiones espaciales mayores que 2 [39], y posteriormente en el caso bidimensional [40]. Además, en el modelo bosónico de vacío con corriente U(1) (es decir, un bosón sin masa en un rayo de luz), se calculó la entropía relativa de estados coherentes para una semirrecta en [41] y se utilizó para obtener la expresión análoga para regiones (no acotadas) del plano nulo en un escalar libre en [42]. Para resultados similares en teorías conformes de campos fermiónicas libres, véase [43]. Para teorías con interacción, hasta donde sabemos, los únicos resultados disponibles corresponden a estados coherentes en CFTs quirales [44, 45], mientras que para QFT libres en espacios curvos, véase [46]. En particular para la entropía relativa entre el vacío de un campo escalar masivo y una excitación del mismo ver [47].

Todos los cálculos anteriores comparan el estado de vacío con una excitación coherente del mismo (excepto [46]). Recientemente, en [48], entre otros resultados, se calculó la entropía relativa para una semirrecta en el modelo térmico de corriente U(1). Es decir, un estado KMS de temperatura inversa β se comparó con una excitación coherente del mismo, restringido a una semirrecta. El hecho de que la entropía relativa se haya calculado en una semirrecta es un punto importante, ya que por argumentos generales su operador modular ya había sido obtenido en [49] considerando el subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ generado solo por dilataciones y traslaciones. Incluso en el caso de vacío, se puede ver que para obtener el operador modular de un intervalo acotado es necesario utilizar el grupo completo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ de transformaciones conformes de la teoría quiral de bosones (esto lo discutiremos en detalle en el capítulo 4).

Nosotros presentaremos el cálculo de la entropía relativa de estados coherentes en un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ para el modelo térmico de corriente U(1) y el bosón libre sin masa a temperatura finita en 1 + 1 dimensiones restringido a un diamante causal. Destacamos

³⁹En realidad deben ser estados normales y fieles.

que gracias a la metodología utilizada podremos establecer dos cotas rigurosas para cada teoría, sin necesidad de regularizar cantidades infinitas: una cota tipo Bekenstein, es decir una cota para la entropía en términos del tamaño de la región y energía del estado y, por otra parte, una violación controlada de la Condición Cuántica de Energía Nula (QNEC, de aquí en adelante por sus siglas en inglés), que ya había sido anticipada en [48] en ciertos casos.

3. El estudio de la entropía relativa nos obligó a determinar el Hamiltoniano modular asociado a un estado KMS en regiones de tipo diamante en $1+1$ dimensiones. Éste es una suerte de Hamiltoniano que determina la evolución del estado dentro del diamante en cuestión y codifica la misma información que el flujo modular o el operador modular de dicho estado. Además, para completar el estudio de los operadores de la teoría de Tomita-Takesaki relativos al estado termal, nos avocamos en el capítulo 5 al estudio del operador de conjugación modular J asociado al estado termal restringido en una región tipo wedge de Rindler. Si bien dispone de una expresión formal, no queda claro a partir de la literatura cómo se debe interpretar y aplicar en concreto sobre un operador, ya que la escritura formal conlleva la evaluación de los campos en argumentos complejos (en la literatura suele denominarse a esto el *second word*, ver por ejemplo [50]). Nosotros logramos reproducir tal expresión formal utilizando la construcción GNS para el estado termal y a la vez darle sentido precisando como actúan cada uno de sus elementos de matriz sobre un conjunto denso. También discutiremos la forma de J en distintas purificaciones.

Capítulo 2

Cuantizaciones del escalar libre

“ *First quantization is a mystery, but second quantization is a functor* ”

Edward Nelson, 1932-2014, Irving Segal doctoral student.

Recordemos del capítulo 1 que hay varias formas de representar las CCR, entre ellas destacan las de Weyl y de Segal. En particular, partiendo de la ecuación de movimiento del campo escalar libre, Araki en [32] y [15] usa el espacio de Fock como espacio sobre el cual representar las formulaciones de Segal y Weyl de las CCR. En este capítulo presentaremos tales representaciones.

2.1. Primera cuantización

2.1.1. El espacio de una partícula $\mathcal{H}$

El campo escalar libre de masa $m > 0$ satisface la ecuación de Klein-Gordon¹

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.1.1)$$

Transformando Fourier esta ecuación (ver (2.1.5) más adelante)

$$(-p^2 + m^2)\mathcal{F}(\phi)(p) = 0,$$

lo cual implica que $\mathcal{F}(\phi)(p)$ está soportado en la unión de los hiperboloides $\{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = m^2\}$ y dado que ϕ es real $\mathcal{F}(\phi)(-p) = \mathcal{F}(\phi)(p)^*$. Luego ϕ queda definido por el valor de $\mathcal{F}(\phi)$ en el hiperboloide de masa positiva $H_m := \{p^2 = m^2 | p^0 > 0\}$. Motivados en esto y siguiendo

¹Consideraremos la signatura $(+, -, -, -)$ para el espaciotiempo de Minkowski, de manera que $\square = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2$ y $p \cdot x = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$.

la linea en [51], podemos decir que si $u : H_m \cup -H_m \rightarrow \mathbb{C}$ satisface $u(-p) = u(p)^*$, podemos construir una solución a la ecuación (2.1.1).

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p^0) u(p) d^4p \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) u(p) d^4p - \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) u(p) d^4p \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ipx} u(p) \frac{1}{2\omega_p} d^3p - \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ipx} u(p)^* \frac{1}{2\omega_p} d^3p \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-ipx} u(p) + e^{ipx} u(p)^*) \frac{1}{2\omega_p} d^3p
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

entendiendo a partir del tercer renglón que $p = (\omega_p, \vec{p})$, siendo $\omega_p := \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, y realizando la integral en $\mathbb{R}^3$ sobre las coordenadas de $\vec{p}$. Al calcular la norma de $\phi(x)$ se ve que la misma depende de la convergencia de la integral de la función $u(p)$, pudiendo la misma diverger. De este modo notamos que es preferible entender la expresión (2.1.2) como una distribución $\phi(u)$ que será *solución débil*² de (2.1.1).

Las soluciones débiles de la forma $\phi(u)$ estarán bien definidas siempre que

$$u \in \{a : H_m \cup -H_m \mapsto \mathbb{C} / \quad a(-p) = a(p)^* \text{ y } \int_{\mathbb{R}^4} |a(p)|^2 \delta(p^2 - m^2) d^4p < \infty\} \simeq L^2 \left(\mathbb{R}^3, \frac{d^3p}{\omega_p} \right),$$

ya que en tal caso la $\phi(u)$ será finito.

Además si $u = \mathcal{F}(h)|_{H_m \cup -H_m}$ con $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ (una función de Schwartz real), entonces

$$F_h(x) := \phi(u) = \phi(\mathcal{F}(h)|_{H_m \cup -H_m}) = \int_{\mathbb{R}^4} \Delta(x - y) h(y) dy \tag{2.1.3}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p^0) \mathcal{F}(h)(p) d^4p, \tag{2.1.4}$$

donde Δ es el propagador causal³. Notemos que si la transformada de Fourier de h se anula cuando la restringimos al hiperboloide H_m , entonces la solución asociada es la trivial. Además si h es suave y de soporte compacto entonces la solución asociada es suave (o sea que es promovida de solución débil a solución a secas, ver Theorem 1 en [52])

En resumen, para cada $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ tenemos una forma de asociarle solución débil de la ecuación de Klein-Gordon, pasando por una función auxiliar $\mathcal{F}(h)|_{H_m \cup -H_m}$ definida en $H_m \cup -H_m$. Notemos que así podemos entender⁴ a $\phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ como una distribución temperada que es solución débil de (2.1.1). Dada $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ se satisface $\phi((\square + m^2)h) = 0$

²Una solución débil de (2.1.1) es una distribución ϕ (temperada para nosotros) tal que $\phi((\square + m^2)f) = 0$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.

³Hay varias formas de definirlo, una es tomar la última igualdad de (2.1.3). Otra es definirlo como $2\text{Re}\Delta^{(+)}$, ver más adelante (2.1.6).

⁴Cometiendo un claro abuso de notación voy a llamar $\phi(\cdot)$ a lo que debería llamar $\phi(\mathcal{F}(\cdot)|_{H_m \cup -H_m})$.

ya que transformando Fourier se tiene:

$$\mathcal{F}[(\square + m^2)h] = (-p^2 + m^2)\mathcal{F}(h) = 0 \text{ en } H_m \cup -H_m.$$

En lo que sigue construimos lo que usualmente se llama espacio de una partícula $\mathcal{H}$.

Consideremos el espacio de las funciones de Schwartz reales⁵ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. Definimos su transformada de Fourier como,

$$\mathcal{F}(f)(p) := (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^4} dx f(x) e^{ip \cdot x} \quad (2.1.5)$$

Podemos definir una forma simétrica semi-definida positiva en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ que toma valores en $\mathbb{C}$

$$(h_1, h_2)_S = 2i \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} h_1(x) \Delta^{(+)}(x - y) h_2(y) dx dy, \quad (2.1.6)$$

donde $\Delta^{(+)}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) d^4p$. Esta forma no es más que el producto invariante de Lorentz en el hiperboloide de masa H_m . Lo cual se deduce de

$$\begin{aligned} (h_1, h_2)_S &= 2 \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}(h_1)^*(p) \mathcal{F}(h_2)(p) \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) d^4p \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}(h_1)^*(\omega(\vec{p}), \vec{p}) \mathcal{F}(h_2)(\omega(\vec{p}), \vec{p}) \frac{d^3p}{\omega(\vec{p})}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

donde $\omega(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} =: \omega_p$. Hay un conjunto de funciones tales que $(h, h)_S = 0$, estas son las funciones cuya transformada Fourier se anula sobre H_m . Las denotaremos por $\mathcal{S}_0$. Para obtener un espacio de Hilbert debemos tener un producto definido positivo y para esto hemos de cocientar nuestro espacio por $\mathcal{S}_0$. En $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0$ se puede definir una multiplicación por i ⁶ como $ih := h'$ si $\mathcal{F}(h')|_{H_m} = i\mathcal{F}(h)|_{H_m}$, con h y h' funciones de Schwartz reales sobre $\mathbb{R}^4$. Se puede ver en [53] que esta definición no depende de la elección de los representantes escogidos, para ver un ejemplo de cómo actúa dicha multiplicación sobre una gaussiana, diríjase al apéndice 7.1.

Así definida, la multiplicación por i convierte $(,)_S$ en un producto interno complejo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0$. Si luego completamos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0$ respecto a la norma inducida por tal producto interno, terminamos con un espacio de Hilbert complejo que es el espacio de una partícula que denotaremos

$$\mathcal{H} := \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0}. \quad (2.1.8)$$

Entendemos a este espacio equipado con la multiplicación con i ya definida (extendida) y denotamos al producto $(,)_\mathcal{H}$.

⁵Sobre las que podemos representar con $U(a, \Lambda)$ de $\text{ISO}(3, 1)$ actuando $[U(a, \Lambda)f](x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, o equivalentemente $[U(a, \Lambda)\mathcal{F}(f)](p) = e^{ip \cdot a} \mathcal{F}(f)(\Lambda^{-1}p)$. Con el producto interno complejo de (2.1.8), las representaciones se vuelven unitarias.

⁶Esto es darle una estructura compleja a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0$.

La forma de relacionar $\mathcal{H}$ con las funciones de cuadrado integrable sobre el hiperboloide H_m es la siguiente. El mapa $E : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \rightarrow L^2\left(\mathbb{R}^3, \frac{d^3p}{\omega_p}\right)$ dado por $E(h) = \mathcal{F}(h)|_{H_m}$ tiene imagen densa (ver [54], capítulo X) y $\text{Ker}(E) = \mathcal{S}_0$, luego E pasa al cociente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0$ como un mapa inyectivo. Con lo cual

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0} \simeq L^2\left(\mathbb{R}^3, \frac{d^3p}{\omega_p}\right),$$

notemos que las estructuras complejas son compatibles dada la definición de i en $\mathcal{H}$. Como ya mencionamos antes, pero ahora en estos términos, dada $[h] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})/\mathcal{S}_0$ la podemos pensar como un elemento de $L^2\left(\mathbb{R}^3, \frac{d^3p}{\omega_p}\right)$, y vía $\phi(E(h))F_h$ como solución débil de la ecuación de Klein-Gordon.

2.1.2. Espacios de funciones de testeo

Previo a definir CCR-álgebras, vamos a introducir dos espacios de Hilbert reales sobre los que se modelan. Ambos espacios de Hilbert se pondrán en correspondencia con el espacio de Hilbert complejo de una partícula $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$. El primer espacio de Hilbert se notará por $\mathcal{K}$, sus elementos son funciones reales con dominio en el espaciotiempo que luego se usarán para construir campos suavizados sobre regiones del espaciotiempo. El segundo espacio en cuestión será notado K , y como veremos en la sección 2.1.4 está íntimamente relacionado con las condiciones iniciales del campo a $t = 0$. Heurísticamente $\mathcal{H}$ es la semilla de lo que serán las soluciones de Klein-Gordon, mientras que K por su parte cumple el mismo rol pero para las condiciones iniciales del campo.

El espacio de Hilbert real de una partícula de Segal $\mathcal{K}$

Comenzando por el espacio de Hilbert complejo⁷ $\mathcal{H}$ visto como generado por funciones de Schwartz reales módulo $\mathcal{S}_0$, se puede definir⁸ un espacio de Hilbert real $\mathcal{K}$ junto con una estructura compleja β , o sea un operador que actúa sobre $\mathcal{K}$ y satisface:

$$\beta^* = -\beta \quad \beta^2 = -1. \quad (2.1.9)$$

Consideremos a $\mathcal{H}$ como espacio vectorial real con producto interno dado por $\text{Re}\{(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}\}$. Notemos que $\mathcal{H}$ es completo respecto a dicho producto. Luego llamemos $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ como espacios vectoriales reales y usemos en $\mathcal{K}$ el producto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{K}} = \text{Re}\{(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}\}$. Además notemos que dado $h \in \mathcal{H}$, en el espacio de Hilbert real $\mathcal{K}$ los elementos h y ih son linealmente independientes,

⁷Lo que sigue es una construcción general de un espacio de Hilbert real con estructura compleja β a partir de un espacio de Hilbert complejo arbitrario. Pero, para hacer contacto con lo que discutimos anteriormente, tenemos en mente el espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$.

⁸En [15], primero se define un espacio de Hilbert real $\hat{\mathcal{H}}$ de la misma manera en que lo hacemos para $\mathcal{K}$ y la estructura compleja es dada por i , tomada de $\mathcal{H}$. Luego se definen $\mathcal{K}$ y β como lo hacemos nosotros, y al final $(\hat{\mathcal{H}}, i)$ es isomorfo a $(\mathcal{K}, \beta)$. Nosotros no vamos a hacer esta distinción.

cuando como elementos de $\mathcal{H}$ claramente no lo son (dado que $\mathcal{H}$ es un Hilbert complejo). Como dijimos

$$(h_1, h_2)_{\mathcal{K}} := \operatorname{Re}\{(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}\} \quad (2.1.10)$$

y β se define por

$$(h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}} := -\operatorname{Im}\{(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}\}. \quad (2.1.11)$$

Para ver que $\beta^2 = -1$, notemos que β es un operador en $\mathcal{K}$ que mapea h a ih , pues $(h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}} = -\operatorname{Im}\{(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}\} = \operatorname{Re}\{i(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}\} = \operatorname{Re}\{(h_1, ih_2)_{\mathcal{H}}\} = (h_1, ih_2)_{\mathcal{K}}$, para todo h_1 y h_2 . Con lo cual, β se puede identificar con la multiplicación por el escalar i en $\mathcal{H}$. Entonces $\beta^2 h = \beta ih = i^2 h = -h$. También se puede ver que β^* , el adjunto de β , es $-\beta$: $(-\beta h_1, h_2)_{\mathcal{K}} = -(\beta h_1, h_2)_{\mathcal{K}} = -\operatorname{Im}\{(h_2, h_1)_{\mathcal{H}}\} = \operatorname{Im}\{(h_2, h_1)_{\mathcal{H}}\} = \operatorname{Im}\{\overline{(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}}\} = -\operatorname{Im}\{(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}\} = (h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}}$. En concreto, $\beta^{-1} = -\beta = \beta^*$. El rol del operador β es el de distinguir entre “posición y velocidad” como veremos luego.

La parte imaginaria del producto interno en $\mathcal{H}$ nos proporciona una estructura simpléctica σ en $\mathcal{K}$

$$\sigma(h_1, h_2) := \operatorname{Im}(h_1, h_2)_{\mathcal{H}} = -(h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}}. \quad (2.1.12)$$

De manera que cuando hablemos de $\mathcal{K}$ estaremos hablando de un espacio de Hilbert real y simpléctico cuyo producto interno denotaremos $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{K}}$, dotado además de un operador β que satisface (2.1.9) y se relaciona con σ mediante (2.1.12).

También hay que notar que dado $(\mathcal{K}, \beta)$ un espacio de Hilbert real con un operador β satisfaciendo (2.1.9), es posible definir un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Como conjuntos $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Y basándonos en (2.1.10) y (2.1.11) definimos

$$(h_1, h_2)_{\mathcal{H}} := (h_1, h_2)_{\mathcal{K}} - i(h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}}. \quad (2.1.13)$$

Las propiedades definitorias de β se usan para probar que la ecuación de arriba define un producto interno en $\mathcal{H}$. Para mostrar esto primero debemos definir una acción $\mathbb{C} \curvearrowright \mathcal{H}$, por $(a + bi)h := ah + b\beta h$.

Veamos entonces que (2.1.13) es sesquilineal. Saca escalares reales afuera ya que el producto interno en $\mathcal{K}$ es $\mathbb{R}$ -bilineal. Veamos qué sucede con la multiplicación por i en el argumento del producto interno de $\mathcal{H}$,

$$(ih_1, h_2)_{\mathcal{H}} = (\beta h_1, h_2)_{\mathcal{K}} - i(\beta h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}} \quad (2.1.14)$$

$$= (h_1, -\beta h_2)_{\mathcal{K}} - i(h_1, h_2)_{\mathcal{K}} \quad (2.1.15)$$

$$= (-i)[(h_1, h_2)_{\mathcal{K}} - i(h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}}] = (-i)(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}, \quad (2.1.16)$$

donde (2.1.9) y $\mathbb{R}$ -bilinealidad se usó. El comportamiento de la multiplicación por i es el que uno espera. De la misma manera uno puede ver que (2.1.13) es $\mathbb{C}$ -lineal en el segundo argumento.

El espacio de Hilbert real K de Weyl de condiciones iniciales

El espacio de Hilbert real K es un subespacio de $K \subseteq \mathcal{K}$ que satisface $\mathcal{K} = K \oplus_{\mathbb{R}} \beta K$ (y también $\mathcal{H} = K + iK$ es su complejificación). Por supuesto esto no nos proporciona un único K , para ver los detalles de cómo constriuir K ver [32].

En lugar de eso aquí haremos una conexión explícita entre K y el espacio de Hilbert real de Segal $\mathcal{K}$, en concreto la definición es

$$K := \overline{\{[h] \in \mathcal{K} \mid h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \text{ es par en } x^0\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}}}$$

Veremos que βK consiste de (la completación de) el subespacio de funciones impares en x^0 , y $H = K + \beta K$. Incluso más, se puede demostrar que $K \perp_{\mathcal{K}} \beta K$, y entonces $\mathcal{K} = K \oplus_{\mathbb{R}} \beta K$, algo que será crucial a la hora de demostrar la dualidad de Haag. Como subespacios de $\mathcal{K}$, tanto K como βK heredan el producto interno de $\mathcal{K}$.

Comencemos por algunas afirmaciones básicas. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ podemos escribirla de manera única como suma de una función par y una función impar en x^0 , $f = f_+ + f_-$, siendo

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x^0, \vec{x}) + f(-x^0, \vec{x})), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x^0, \vec{x}) - f(-x^0, \vec{x})),$$

En términos de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f_+)(p) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(f)(p^0, \vec{p}) + \mathcal{F}(f)(p^0, -\vec{p})^*), \quad \mathcal{F}(f_-)(p) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(f)(p^0, \vec{p}) - \mathcal{F}(f)(p^0, -\vec{p})^*). \quad (2.1.17)$$

Por otra parte, el operador β es simple en el espacio de momentos. Recordemos que

$$\mathcal{F}(\beta f)(p) = i\mathcal{F}(f)(p) \text{ para } p \in H_m \text{ o}$$

$$\mathcal{F}(\beta f)(p) = i\mathcal{F}(f)(p)\eta(p^0),$$

con $\eta(p^0)$ una función par, suave y real tal que $\eta(p^0) = 1$ si $p^0 \geq m$. Notemos que si $p \in H_m$ en la segunda linea recuperamos la definición de β . Volveremos sobre esto en la sección 2.1.4. Si consideramos una función par f en x^0 , es decir una función en $K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, y teniendo en cuenta (2.1.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\beta f)(p) &= i\mathcal{F}(f)(p)\eta(p^0) = i\eta(p^0)\frac{1}{2}(\mathcal{F}(f)(p^0, \vec{p}) + \mathcal{F}(f)(p^0, -\vec{p})^*) \\ &= \frac{1}{2}(i\eta(p^0)\mathcal{F}(f)(p^0, \vec{p}) - (i\eta(p^0)\mathcal{F}(f)(p^0, -\vec{p})^*)^*) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{F}(\beta f)(p^0, \vec{p}) - \mathcal{F}(\beta f)(p^0, -\vec{p})^*), \end{aligned}$$

donde usamos que $\eta(p^0)$ es real.

Un elemento genérico $[f] \in K$ es el límite de una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ de funciones pares en x^0 , luego como β es acotado, $\beta[f] = \lim_n \beta f_n$. Pero como vimos $\{\beta f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones impares en x^0 , entonces se tiene que $\beta K \subseteq \overline{\{[f] \in \mathcal{K} \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \text{ impar en } x^0\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}}}$.

De igual manera podemos ver que $\{[f] \in \mathcal{K} \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \text{ impar } x^0\} \subseteq \beta K$. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ e impar en x^0 ,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(p) &= \frac{1}{2}(\mathcal{F}(f)(p^0, \vec{p}) - \mathcal{F}(f)(p^0, -\vec{p})^*) \\ &= -\frac{1}{2}(\mathcal{F}(\beta^2 f)(p^0, \vec{p}) - \mathcal{F}(\beta^2 f)(p^0, -\vec{p})^*) \\ &= -\frac{i}{2}\eta(p^0)(\mathcal{F}(\beta f)(p^0, \vec{p}) + \mathcal{F}(\beta f)(p^0, -\vec{p})^*) \\ &= i\eta(p^0)\mathcal{F}((-\beta f)_+)(p) = \mathcal{F}(\beta(-\beta f)_+)(p)\end{aligned}$$

lo que muestra que $f \in \beta K$. Pero recordemos que β es un operador cerrado ya que su inversa es acotada, entonces βK es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$ con lo cual aún clausurando todavía persiste la inclusión $\{[f] \in \mathcal{K} \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \text{ impar en } x^0\} \subseteq \beta K$ y se tiene $\overline{\{[f] \in \mathcal{K} \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \text{ impar en } x^0\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}}} \subseteq \beta K$. Luego

$$\begin{aligned}K &= \overline{\{[h] \in \mathcal{K} \mid h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \text{ par en } x^0\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}}} \\ \beta K &= \overline{\{[f] \in \mathcal{K} \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \text{ impar en } x^0\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}}}.\end{aligned}$$

De aquí en más usaremos entonces K y βK para referirnos a funciones pares e impares en x^0 respectivamente junto con sus límites.

Veamos que $K \perp_{\mathcal{K}} \beta K$, es una afirmación simple pero fundamental de aquí en adelante. Comencemos por reescribir el producto interno de $\mathcal{K}$ de una forma más conveniente

$$\begin{aligned}(h_1, h_2)_{\mathcal{K}} &= \text{Re}\{(h_1, h_2)_S\} = \text{Im}\{i(h_1, h_2)_S\} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} h_1(x)\Delta_1(x-y)h_2(y)dxdy,\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

donde definimos $\Delta_1 = 2 \text{Im}\{\Delta^{(+)}\}$. Δ_1 pudiendo expresarse en la forma,

$$\begin{aligned}\Delta_1(z) &= 2 \text{Im}\{\Delta^{(+)}(z)\} = -\frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^4} \cos(pz)\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)d^4p \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\cos(\omega_p z^0 - \vec{p} \cdot \vec{z})}{\omega_p} d^3p.\end{aligned}$$

Entonces el producto interno h_1 y h_2 es

$$\begin{aligned}(h_1, h_2)_{\mathcal{K}} &= -\int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} h_1(x)\Delta_1(x-y)h_2(y)dxdy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} h_1(x) \cos(\omega_p(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) h_2(y) dxdy \right] \frac{d^3p}{\omega_p}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} h_1(x) \cos(\omega_p(x^0 - y^0)) \cos(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) h_2(y) dxdy \right] \frac{d^3p}{\omega_p},\end{aligned}$$

que separando el factor $\cos(\omega_p(x^0 - y^0))$ en dos términos, que como puede verse se anularán ya que o bien la integral en x^0 o bien la de y^0 se anula si h_1 es una función par en x^0 y h_2 es una función impar en x^0 . Luego $(h_1, h_2)_{\mathcal{K}} = 0$ para $h_1 \in K$ y $h_2 \in \beta K$ se sigue de la continuidad del producto interno.

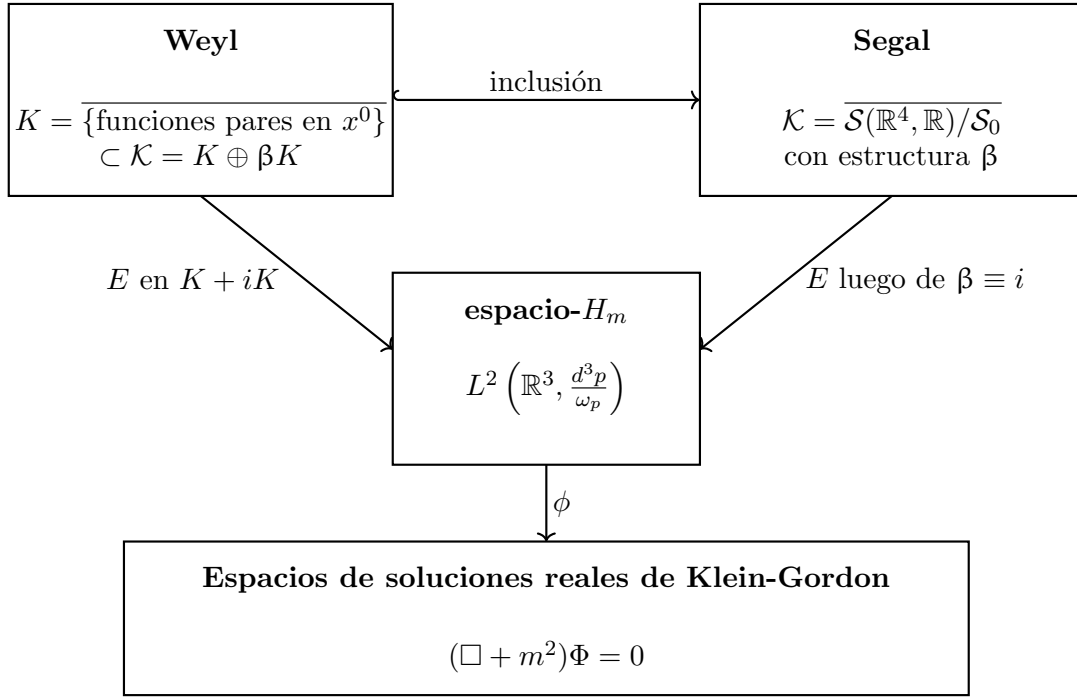


Figura 2.1: El esquema resume la relación entre los espacios de una partícula o espacios de funciones de testeo y las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. El mapa $E : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \rightarrow L_2\left(\mathbb{R}^3, \frac{d^3p}{\omega_p}\right)$ es dado por $E(h) = \mathcal{F}(h)|_{H_m}$ mientras que ϕ fue definida en la ecuación (2.1.3).

2.1.3. CCR álgebras en forma abstracta

El CCR-álgebra en la forma de Segal se construye en base a un espacio vectorial real $(\mathcal{K}, \beta)$, siendo β una estructura compleja en $\mathcal{K}$. En esta construcción el álgebra termina siendo la $*$ -álgebra generada por los elementos $\{W(h) : \text{para todo } h \in \mathcal{K}\}$, con la involución dada por $W(f)^* = W(-f)$ y satisfaciendo la versión de Segal de las CCR (ver ecuación (1.1.7))

$$W(f)W(g) = e^{\frac{i}{2}(f, \beta g)_{\mathcal{K}}} W(f+g) = W(f+g)e^{-\frac{i}{2}\sigma(f, g)}, \quad (2.1.19)$$

para todo $f, g \in \mathcal{K}$. Notar que aquí $\sigma(f, g) = -(f, \beta g)_{\mathcal{K}}$ es una forma simpléctica de modo que en la bibliografía a veces se parte de $(\mathcal{K}, \beta)$ y otras de $(\mathcal{K}, \sigma)$, es decir directamente de la forma simpléctica. Nótese también que el elemento neutro del álgebra viene dado por $W(0) = 1_S$. Por ahora entendemos $W(f)$ como meros elementos abstractos de la CCR-álgebra en la forma de Segal y como tales no actúan sobre ningún espacio de Hilbert. En la siguiente sección nos ocuparemos de construir dicha representación, pero antes hagamos lo propio con el álgebra de las CCR en la forma de Weyl.

La CCR álgebra en la forma de Weyl sobre K , es una $*$ -álgebra generada por los elementos $\{U(f), V(g) : \text{para todo } f, g \in K\}$, con una involución dada por

$$U(f)^* = U(-f) \quad V(g)^* = V(-g),$$

satisfaciendo $U(0) = V(0) = 1_W$ junto con las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} U(f_1 + f_2) &= U(f_1)U(f_2) \\ V(g_1 + g_2) &= V(g_1)V(g_2) \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

$$U(f_1)V(g_1)U(f_2)V(g_2) = U(f_1 + f_2)V(g_1 + g_2)e^{i(f_2, g_1)_K},$$

con 1_W nuevamente el neutro del álgebra.

Cabe destacar que dichas $*$ -álgebras son isomorfas, con isomorfismo dado por

$$\kappa : W(h) \longmapsto e^{\frac{i}{2}(f, g)_K} U(f)V(g), \tag{2.1.21}$$

con f y g en K , definidas por la relación $h = f + \beta g$, y (2.1.21) se extiende por $\mathbb{C}$ -linealidad. Veremos que las relaciones de conmutación implican que κ deba respetar el producto de elementos de la forma $W(h_1)W(h_2)$, mientras que para productos de forma general hay que usar $\mathbb{C}$ -linealidad. Sean entonces $h_1, h_2 \in K$, entonces existen $f_1, g_1, f_2, g_2 \in K$ tales que $h_1 = f_1 + \beta g_1$ y $h_2 = f_2 + \beta g_2$ y claramente $h_1 + h_2 = (f_1 + f_2) + \beta(g_1 + g_2)$. Entonces si usamos ambas (2.1.19) y (2.1.20), junto con el hecho de que $K \perp_K \beta K$ y la unitariedad de β se puede chequear por cálculo directo que $\kappa(W(h_1)W(h_2)) = \kappa(W(h_1))\kappa(W(h_2))$. Incluso también κ respeta la involución, $\kappa(W(h)^*) = \kappa(W(h))^*$. Lo que muestra que κ es un isomorfismo de $*$ -álgebras. El hecho de que κ manda el 1_S a 1_W es inmediato. Es posible añadir más estructura a ambas álgebras, por ejemplo una norma usando el radio espectral de los elementos del álgebra (ver [10]) y ver que el isomorfismo sigue existiendo ahora como isomorfismo de C^* -álgebras, pero no entraremos en estos detalles aquí.

Lo que sigue es presentar una representación de estas álgebras como operadores actuando sobre un espacio de Hilbert y con tal fin en la sección 2.2.1 nos dedicaremos a construir dicho espacio. Pero primero introduciremos dos construcciones concretas de los espacios de funciones de testeo y como ya anticipamos, veremos los detalles de la relación entre K y las condiciones iniciales.

2.1.4. Construcción explícita de los espacios de 1-partícula

Espacio de funciones de testeo de Segal

Estamos interesados en funciones reales sobre el espaciotiempo, en particular en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ (módulo $\mathcal{S}_0$) junto con una estructura compleja β , que ya fue introducida en forma abstracta. En particular β es una estructura compleja compatible con el producto interno. Dicho producto interno es determinado por el valor de las transformadas de Fourier evaluadas en el hiperboloide de masa H_m . Esto motiva la definición de β como una multiplicación por i en el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre H_m . Más precisamente, si $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(\beta h)(p) = i\mathcal{F}(h)(p) \quad \text{con } p \in H_m. \tag{2.1.22}$$

Notemos que la igualdad ha de satisfacerse solo en el hiperboloide. Referimos al lector interesado a [53] para ver una expresión más explícita de βh , siendo $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. Allí también se demuestra que la definición de β pasa bien al cociente por $\mathcal{S}_0$ e incluso en el apéndice de tal referencia se puede encontrar un ejemplo concreto de la aplicación de β sobre una función particular h en el que podemos corroborar varias de las propiedades que venimos desarrollando, como por ejemplo que $\beta h \perp_{\mathcal{K}} h$.

Espacio de funciones de testeo de Weyl y condiciones iniciales

Estamos listos para definir los espacios de testeo de condiciones iniciales $\mathfrak{F}_\varphi$ y $\mathfrak{F}_\pi$, que son esenciales tanto para el estudio de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon como para la primera cuantización en la forma de Weyl. Comencemos con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, ya que estamos explorando el espacio de funciones en un tiempo fijo. Este espacio es denso en $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, con el producto interno estándar. Definimos la transformada de Fourier (tridimensional)⁹.

$$\mathcal{F}(f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} d^3x,$$

y los operadores ω^α como multiplicación por $\omega_p^\alpha = \left(\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \right)^\alpha$ (en el espacio de momentos),

$$\mathcal{F}(\omega^\alpha f)(\vec{p}) = \omega_p^\alpha \mathcal{F}(f)(\vec{p}),$$

siendo $\alpha \in \mathbb{Q}$.

En realidad, es posible y deseable considerar diferentes productos internos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, como se hará evidente cuando establezcamos la conexión con K y βK . Definamos, entonces,

$$\begin{aligned} (f_1, f_2)_\varphi &:= (\omega^{-\frac{1}{2}} f_1, \omega^{-\frac{1}{2}} f_2)_{L^2} \\ (g_1, g_2)_\pi &:= (\omega^{\frac{1}{2}} g_1, \omega^{\frac{1}{2}} g_2)_{L^2}. \end{aligned}$$

Las completaciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ bajo estos productos internos se denotan $\mathfrak{F}_\varphi$ y $\mathfrak{F}_\pi$, respectivamente. Coloquialmente podríamos decir que $\mathfrak{F}_\varphi$ es el espacio de funciones cuya transformada de Fourier dividida por $\omega^{\frac{1}{2}}$ está en L^2 con la medida de Lebesgue estándar, mientras que $\mathfrak{F}_\pi$ es el espacio de funciones cuya transformada de Fourier multiplicada por $\omega^{\frac{1}{2}}$ está en L^2 , también con la medida de Lebesgue estándar; es decir, su decrecimiento debe ser más rápido de lo necesario para que estén en L^2 . Más precisamente:

$$\mathfrak{F}_\pi \subset L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}_\varphi$$

con las inclusiones¹⁰

$$j_1 : \mathfrak{F}_\pi \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \quad j_2 : L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$$

⁹Utilizaremos tanto la transformada de Fourier tridimensional como la cuatridimensional, mediante un abuso de notación, ambas se denotarán por $\mathcal{F}$. Esperamos que sea claro por el contexto cuál estamos utilizando.

¹⁰Estas aplicaciones son continuas, ya que $\|f\|_\pi^2 = (\omega^{\frac{1}{2}} f, \omega^{\frac{1}{2}} f)_{L^2} = (\omega^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(f), \omega^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(f))_{L^2} \geq m \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2 = m \|f\|_{L^2}^2$. Entonces, $\|j_1\| \leq m^{-\frac{1}{2}}$. De manera similar, se puede ver que $\|j_2\| \leq m^{-\frac{1}{2}}$.

La aplicación $\omega^{\frac{1}{2}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se puede extender a $\omega^{\frac{1}{2}} : \mathfrak{F}_\pi \rightarrow L^2$ y a $\omega^{\frac{1}{2}} : L^2 \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$, siendo ambas extensiones sobreyectivas¹¹

¿Cómo relacionamos los espacios K y βK de funciones pares e impares en x^0 con los espacios recién definidos? La conexión entre estos espacios proviene de isomorfismos isométricos que relacionan K con $\mathfrak{F}_\varphi$, y βK con $\mathfrak{F}_\pi$. Denotamos estas aplicaciones como δ_0 y δ_1 ,

$$\delta_0 : K \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi, \quad \delta_1 : \beta K \rightarrow \mathfrak{F}_\pi.$$

Están definidas por (para $f \in K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ y $g \in \beta K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$),

$$\mathcal{F}(\delta_0 f)(\vec{p}) = \mathcal{F}(f)(\omega_p, \vec{p}) \quad \mathcal{F}(\delta_1 g)(\vec{p}) = (i\omega_p)^{-1} \mathcal{F}(g)(\omega_p, \vec{p}).$$

Aquí como aclaramos previamente en la nota al pie de página, abusamos un poco de la notación utilizando la transformada de Fourier tridimensional en los miembros izquierdos y la cuatridimensional en los derechos. Estas aplicaciones se extienden a K y βK por continuidad (veremos que preservan la norma para los elementos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$). Una pregunta natural es cómo el operador β induce aplicaciones entre $\mathfrak{F}_\varphi$ y $\mathfrak{F}_\pi$. Podemos recurrir a los siguientes diagramas conmutativos que definen $\bar{\beta}_{\varphi, \pi}$ y $\bar{\beta}_{\pi, \varphi}$.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\beta} & \beta K \\ \delta_0 \downarrow & & \downarrow \delta_1 \\ \mathfrak{F}_\varphi & \xrightarrow{\quad \bar{\beta}_{\varphi, \pi} \quad} & \mathfrak{F}_\pi \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \beta K & \xrightarrow{\beta} & K \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_0 \\ \mathfrak{F}_\pi & \xrightarrow{\quad \bar{\beta}_{\pi, \varphi} \quad} & \mathfrak{F}_\varphi \end{array}$$

Esto es, $\bar{\beta}_{\varphi, \pi} = \delta_1 \circ \beta \circ \delta_0^{-1}$ y $\bar{\beta}_{\pi, \varphi} = \delta_0 \circ \beta \circ \delta_1^{-1}$.

Para ver que δ_0 y δ_1 son isometrías, comencemos por notar la forma que adopta la norma $\|h\|_{\mathcal{K}}^2$ para $h \in \mathcal{K} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. De la definición $\Delta_1 = 2 \operatorname{Im}\{\Delta^{(+)}\}$ y las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.18), se desprende

$$\|h\|_{\mathcal{K}}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}(h)(\omega_p, \vec{p})|^2 \frac{d^3 p}{\omega_p}.$$

Por otro lado, podemos calcular $\|\delta_0 f\|_{\varphi}^2$ para $f \in K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ y $\|\delta_1 g\|_{\pi}^2$ para $g \in \beta K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$,

¹¹Demostremos primero que $\omega^{1/2} : L^2 \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$ es sobreyectiva. Para cualquier $f \in \mathfrak{F}_\varphi$, $f = \omega^{1/2}(\omega^{-1/2}f)$, por lo que necesitamos mostrar que $\omega^{-1/2}f \in L^2$. Esto es sencillo: $\|\omega^{-1/2}f\|_{L^2}^2 = (\omega^{-1/2}f, \omega^{-1/2}f)_{L^2} = (f, f)_\varphi = \|f\|_\varphi^2 < \infty$. De manera similar, se puede demostrar que $\omega^{1/2} : \mathfrak{F}_\pi \rightarrow L^2$ es sobreyectiva.

y verificar que coinciden con las normas de f y g en $\mathcal{K}$, respectivamente. En efecto,

$$\begin{aligned} \|\delta_0 f\|_\varphi^2 &= (\delta_0 f, \delta_0 f)_\varphi = (\omega^{-\frac{1}{2}} \delta_0 f, \omega^{-\frac{1}{2}} \delta_0 f)_{L^2} = (\mathcal{F}(\omega^{-\frac{1}{2}} \delta_0 f), \mathcal{F}(\omega^{-\frac{1}{2}} \delta_0 f))_{L^2} \\ &= (\omega_p^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\delta_0 f)(\vec{p}), \omega_p^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\delta_0 f)(\vec{p}))_{L^2} = (\omega_p^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(f)(\omega_p, \vec{p}), \omega_p^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(f)(\omega_p, \vec{p}))_{L^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}(f)(\omega_p, \vec{p})|^2 \frac{d^3 p}{\omega_p} = \|f\|_{\mathcal{K}}^2. \end{aligned}$$

Análogamente para δ_1 ,

$$\begin{aligned} \|\delta_1 g\|_\pi^2 &= (\delta_1 g, \delta_1 g)_\pi = (\omega^{\frac{1}{2}} \delta_1 g, \omega^{\frac{1}{2}} \delta_1 g)_{L^2} = (\mathcal{F}(\omega^{\frac{1}{2}} \delta_1 g), \mathcal{F}(\omega^{\frac{1}{2}} \delta_1 g))_{L^2} \\ &= (\omega_p^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\delta_1 g)(\vec{p}), \omega_p^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\delta_1 g)(\vec{p}))_{L^2} = (\omega_p^{\frac{1}{2}} \frac{1}{i\omega_p} \mathcal{F}(g)(\omega_p, \vec{p}), \omega_p^{\frac{1}{2}} \frac{1}{i\omega_p} \mathcal{F}(g)(\omega_p, \vec{p}))_{L^2} \\ &= (\omega_p^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(g)(\omega_p, \vec{p}), \omega_p^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(g)(\omega_p, \vec{p}))_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}(g)(\omega_p, \vec{p})|^2 \frac{d^3 p}{\omega_p} = \|g\|_{\beta K}^2. \end{aligned}$$

Luego, $\delta_0|_{K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})} : K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y $\delta_1|_{\beta K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})} : \beta K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{F}_\pi \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ son isometrías y por tanto mapas inyectivos.

También podemos ver que $\delta_0|_{K \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^4)} : K \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $\delta_1|_{\beta K \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^4)} : \beta K \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathfrak{F}_\pi \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ son mapas sobreyectivos. Esbozamos la prueba aquí y dejamos los detalles técnicos para el apéndice 7.2. Consideremos dos funciones $f \in \mathfrak{F}_\varphi \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $g \in \mathfrak{F}_\pi \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, entonces la solución única $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ al problema de valor inicial de Klein-Gordon (ver la ecuación (2.1.3) y el corolario 1.1 en [52]) está dada por:

$$\phi(E(h))(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \Delta(x-y) h(y) dy = \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2) \operatorname{sgn}(p^0) \mathcal{F}(h)(p) d^4 p,$$

siendo $\Delta = 2 \operatorname{Re}\{\Delta^{(+)}\}$ es el propagador y $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ que satisface $\delta_1 h_- = f$ y $-\delta_0 h_+ = g$, donde $h_\pm$ son las partes par e impar de h en x^0 , como se definió previamente. Para ver los detalles al respecto lo remitimos al apéndice 7.2 en donde mostramos:

$$\phi(E(h))(0, \vec{x}) = (\delta_1 h_-)(\vec{x}) - \frac{\partial \phi(E(h))}{\partial x^0}(0, \vec{x}) = (\delta_0 h_+)(\vec{x}), \quad (2.1.23)$$

Pero por otro lado

$$\phi(E(h))(0, \vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \frac{\partial \phi(E(h))}{\partial x^0}(0, \vec{x}) = g(\vec{x}),$$

luego como anticipamos $\delta_0(-h_+) = g$ y $\delta_1(h_-) = f$.

Más aún, analicemos más profundamente $\delta_0 : K \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$. Si tomamos un $g \in \mathfrak{F}_\varphi$ arbitrario, existe una sucesión $g_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathfrak{F}_\varphi \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $g_n \rightarrow g$ en la topología de $\mathfrak{F}_\varphi$, pero como ya vimos, para cada g_n existe un $h_n \in K \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ tal que $\delta_0(h_n) = g_n$. Entonces, $\delta_0(h_n)$ es una sucesión de Cauchy y h_n también, por lo que tiene un límite $h \in \mathcal{K}$. Así, $\delta_0|_{K \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^4)} : K \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ se puede extender por continuidad a uno $\delta_0 : K \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$ tal que

$\delta_0(h) = g$. El mismo argumento puede aplicarse a $\delta_1 : \beta K \rightarrow \mathfrak{F}_\pi$, obteniendo su sobreyectividad. Por lo tanto, ambas aplicaciones $\delta_0 : K \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$ y $\delta_1 : \beta K \rightarrow \mathfrak{F}_\pi$ son isometrías biyectivas.

Ahora nos gustaría trasladar el mapa β a los espacios de condiciones iniciales $\mathfrak{F}_\varphi$ y $\mathfrak{F}_\pi$. Basándonos en la subsección anterior, al identificar K y βK con $\mathfrak{F}_\varphi$ y $\mathfrak{F}_\pi$ respectivamente, podemos pensar en el espacio de una partícula como $\mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi$, y β debería etiquetarse como $\bar{\beta}_{\varphi,\pi}$ o $\bar{\beta}_{\pi,\varphi}$ dependiendo de dónde viva el elemento al cual se le aplica. Más precisamente, podemos escribir los elementos de $\mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi$ como vectores columna y considerar $\bar{\beta} : \mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi$ dada por la matriz

$$\bar{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\beta}_{\pi,\varphi} \\ \bar{\beta}_{\varphi,\pi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Y se puede ver por cálculo directo que $\bar{\beta}^2 = - \begin{pmatrix} 1_{\mathfrak{F}_\varphi} & 0 \\ 0 & 1_{\mathfrak{F}_\pi} \end{pmatrix}$. Ya que,

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{\pi,\varphi} \circ \bar{\beta}_{\varphi,\pi} &= (\delta_0 \circ \beta \circ \delta_1^{-1}) \circ (\delta_1 \circ \beta \circ \delta_0^{-1}) \\ &= \delta_0 \circ \beta \circ 1_{\beta K} \circ \beta \circ \delta_0^{-1} = \delta_0 \circ \beta^2 \circ \delta_0^{-1} \\ &= \delta_0 \circ (-1_K) \circ \delta_0^{-1} = -1_{\mathfrak{F}_\varphi}. \end{aligned}$$

Y similarmente se ve que $\bar{\beta}_{\varphi,\pi} \circ \bar{\beta}_{\pi,\varphi} = -1_{\mathfrak{F}_\pi}$.

Para ver $\bar{\beta}^* = -\bar{\beta}$ es suficiente ver que $(\bar{\beta}_{\varphi,\pi})^* = -\bar{\beta}_{\pi,\varphi}$ y $(\bar{\beta}_{\pi,\varphi})^* = -\bar{\beta}_{\varphi,\pi}$. Mostremos una de estas relaciones considerando nuevamente los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\beta} & \beta K \\ \delta_0 \downarrow & & \downarrow \delta_1 \\ \mathfrak{F}_\varphi & \xrightarrow[\bar{\beta}_{\varphi,\pi}]{} & \mathfrak{F}_\pi \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \beta K & \xrightarrow{\beta} & K \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_0 \\ \mathfrak{F}_\pi & \xrightarrow[\bar{\beta}_{\pi,\varphi}]{} & \mathfrak{F}_\varphi \end{array}$$

y para $g \in \mathfrak{F}_\varphi$ y $f \in \mathfrak{F}_\pi$ se tiene

$$\begin{aligned} (\bar{\beta}_{\varphi,\pi} g, f)_\pi &= (\delta_1^{-1} \bar{\beta}_{\varphi,\pi} g, \delta_1^{-1} f)_\pi = (\beta \delta_0^{-1} g, \delta_1^{-1} f)_\pi \\ &= (\delta_0^{-1} g, \beta^* \delta_1^{-1} f)_\pi = (\delta_0^{-1} g, -\beta \delta_1^{-1} f)_\pi \\ &= (\delta_0^{-1} g, -\delta_0^{-1} \bar{\beta}_{\pi,\varphi} f)_\pi = (g, -\bar{\beta}_{\pi,\varphi} f)_\varphi. \end{aligned}$$

Nótese que hemos utilizado el hecho de que ambos δ son isometrías y que $\beta^* = -\beta$. De manera similar, $(\bar{\beta}_{\pi,\varphi})^* = -\bar{\beta}_{\varphi,\pi}$, lo que prueba que (2.1.9) se cumple para $\bar{\beta}$. Entonces, en notación matricial tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\beta} \begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi} &= \left(\begin{pmatrix} 0 & \bar{\beta}_{\pi, \varphi} \\ \bar{\beta}_{\varphi, \pi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi} = \left(\begin{pmatrix} \bar{\beta}_{\pi, \varphi} f_1 \\ \bar{\beta}_{\varphi, \pi} g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi} \\
&= (\bar{\beta}_{\pi, \varphi} f_1, g_2)_\varphi + (\bar{\beta}_{\varphi, \pi} g_1, f_2)_\pi = (f_1, -\bar{\beta}_{\varphi, \pi} g_2)_\pi + (g_1, -\bar{\beta}_{\pi, \varphi} f_2)_\varphi \\
&= \left(\begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\beta}_{\pi, \varphi} \\ -\bar{\beta}_{\varphi, \pi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi} = \left(\begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, -\bar{\beta} \begin{pmatrix} g_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{F}_\varphi \oplus \mathfrak{F}_\pi}
\end{aligned}$$

Más adelante, necesitaremos ver cómo actúa $\bar{\beta}$ sobre un elemento en $\mathfrak{F}_\varphi$ o $\mathfrak{F}_\pi$ en mayor detalle. Consideremos una vez más el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
K & \xrightarrow{\beta} & \beta K \\
\delta_0 \downarrow & & \downarrow \delta_1 \\
\mathfrak{F}_\varphi & \xrightarrow[\bar{\beta}_{\varphi, \pi}]{} & \mathfrak{F}_\pi
\end{array}$$

Sea $f \in K \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ y recordemos que βf en el espacio de momentos está dado por $\mathcal{F}(\beta f)(p) = i\mathcal{F}(f)(p)\eta(p^0)$ (ver los comentarios después de (2.1.22)). Usando también δ_0 y δ_1 en el espacio de momentos (2.1.4), obtenemos una expresión para $\bar{\beta}_{\varphi, \pi}$ en el espacio de momentos, mapeando $\mathcal{F}(\delta_0 f)(\vec{p})$ a $\mathcal{F}(\delta_1 \beta f)(\vec{p})$. Es decir,

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{\varphi, \pi}(\mathcal{F}(\delta_0 f)(\vec{p})) &= \mathcal{F}(\delta_1 \beta f)(\vec{p}) = (i\omega_p)^{-1} \mathcal{F}(\beta f)(\omega_p, \vec{p}) \\
\implies \bar{\beta}_{\varphi, \pi}(\mathcal{F}(f)(\omega_p, \vec{p})) &= \omega_p^{-1} \mathcal{F}(f)(\omega_p, \vec{p}),
\end{aligned}$$

Esto significa que $\bar{\beta}_{\varphi, \pi}(h) = \omega_p^{-1} h$ con $h \in \mathfrak{F}_\varphi \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Además, aplicando $\bar{\beta}_{\pi, \varphi}$ a esta igualdad se obtiene $-h = \bar{\beta}_{\pi, \varphi}(\omega_p^{-1} h)$, o $\bar{\beta}_{\pi, \varphi}(f) = -\omega_p f$ con $f \in \mathfrak{F}_\pi \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Luego, extendemos esto por continuidad a $\mathfrak{F}_\varphi$ y $\mathfrak{F}_\pi$.

2.2. Segunda cuantización

2.2.1. El espacio de Fock sobre $\mathcal{H}$

A partir de $\mathcal{H}$ construiremos el espacio de Fock, que denotaremos $\Gamma(\mathcal{H})$. Se define por $\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\odot n}$, donde $\odot$ denota el producto tensorial totalmente simétrico (es decir, $\mathcal{H}^{\odot n} = \text{Sym}(\mathcal{H}^{\otimes n})$). Dado $h \in \mathcal{H}$, podemos construir operadores $a(h)$ y $a(h)^*$ en $\Gamma(\mathcal{H})$ que actúan mediante

$$a(h)(h_1 \odot \cdots \odot h_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (h, h_j)_{\mathcal{H}} h_1 \odot \cdots \hat{h}_j \cdots \odot h_n \quad (2.2.1)$$

$$a^*(h)(h_1 \odot \cdots \odot h_n) = \sqrt{n+1} h \odot h_1 \odot \cdots \odot h_n, \quad (2.2.2)$$

tomando el producto interno en $\mathcal{H}$ antilineal en el primer argumento y usando que $\hat{h}_j$ significa “saltar la función h_j ”. Nótese que sobre la unión de los estados de número de ocupación finita, satisfacen la conocida versión de los CCR (ver la Figura 2.2 a continuación),

$$[a(f), a^*(g)](\alpha) = (f, g)_{\mathcal{H}} \alpha, \quad (2.2.3)$$

para todo $\alpha \in \cup_{N=0}^{\infty} \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}^{\odot n}$. Notemos que $\cup_{N=0}^{\infty} \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}^{\odot n} \subseteq \Gamma(\mathcal{H})$ es una inclusión densa.

Por supuesto, $a(h)$ es el llamado operador de aniquilación y $a^*(h)$ el operador de creación. Usando estos operadores y el espacio de Fock $\Gamma(\mathcal{H})$, podemos proceder a construir las representaciones de las álgebras CCR en forma de Segal y Weyl. Regresaremos a los operadores de creación y aniquilación en la sección 3.1.2.

Nótese que lo que hemos descrito es el espacio de Fock de vacío, ya que el operador de traslación temporal unitaria $U(\Delta t \delta_0^\mu)$ actúa como $e^{ip^0 \Delta t}$ y sabemos que la transformada de Fourier de una función de testeo está soportada en el hiperboloide $\mathcal{H}_m$, por lo que el generador P^0 tiene espectro positivo.

2.2.2. Representación del álgebra de las CCR

En resumen, la representación de Segal W_F toma un elemento h en el espacio de Hilbert real $\mathcal{K}$ y da un operador unitario $W_F(h)$ que actúa sobre el espacio de Hilbert complejo $\Gamma(\mathcal{H})$, satisfaciendo las relaciones (2.1.19). Para construir tal representación, definimos el campo $\chi(h)$ para cada $h \in \mathcal{K}$ como (la clausura de) una combinación de operadores de creación y aniquilación introducidos en la subsección anterior¹².

$$\chi(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{(a^*(h) + a(h))},$$

pero esta vez, como a y a^* tienen sus argumentos en $\mathcal{K}$ en lugar de en $\mathcal{H}$ (recordemos que $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ como espacios vectoriales reales), la ecuación (2.2.3) debe ser reemplazada por

$$[a(h_1), a^*(h_2)](\alpha) = ((h_1, h_2)_{\mathcal{K}} - i(h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}}) \alpha \quad (2.2.4)$$

para todo $\alpha \in \cup_{N=0}^{\infty} \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}^{\odot n}$, de acuerdo con (2.1.13). Definimos $W_F(h) = e^{i\chi(h)}$ y utilizando esta versión de la conmutación entre los operadores de creación y aniquilación, es inmediato obtener

$$W_F(h_1)W_F(h_2) = W_F(h_1 + h_2)e^{\frac{i}{2}(h_1, \beta h_2)_{\mathcal{K}}} = W_F(h_1 + h_2)e^{-\frac{i}{2}\sigma(h_1, h_2)}. \quad (2.2.5)$$

Notaremos π_S al mapa de la representación de Segal de las CCR, el mismo está dado por:

$$\pi_S : W(h) \longmapsto W_F(h).$$

¹²Esto es lo que usualmente se entiende como el operador de campo escalar suavizado $\int_{\mathbb{R}^4} d^4x, h(x)\Phi(x)$.

También tenemos que $W_F(0) = 1$ y $W_F(h)^* = W_F(-h)$. Esta representación proporciona una C^* -álgebra unitaria concreta. Un hecho importante es que, aunque los operadores $\chi(h)$ son no acotados, son autoadjuntos y los operadores $W_F(h) = e^{i\chi(h)}$ son unitarios (ver [55]).

Existe otra forma de encontrar un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ en el cual podemos representar el álgebra de CCR en la forma de Segal (o de Weyl), y esta es la construcción ya mencionada en la sección 1.2.2. Si el estado está dado por la expresión $\omega(W(h)) = e^{-\frac{1}{4}(h,h)\kappa}$ ¹³, se puede ver que el espacio de Hilbert complejo así construido, $\mathcal{H}$, es unitariamente equivalente a $\Gamma(\mathcal{H})$. Es decir que existe un mapa unitario $U : \mathcal{H} \rightarrow \Gamma(\mathcal{H})$ tal que $U\pi_\omega(a)U^{-1} = \pi_S(a)$ para todo a en el álgebra CCR. Es por esto que, para nuestros propósitos, basta con construir $\Gamma(\mathcal{H})$.

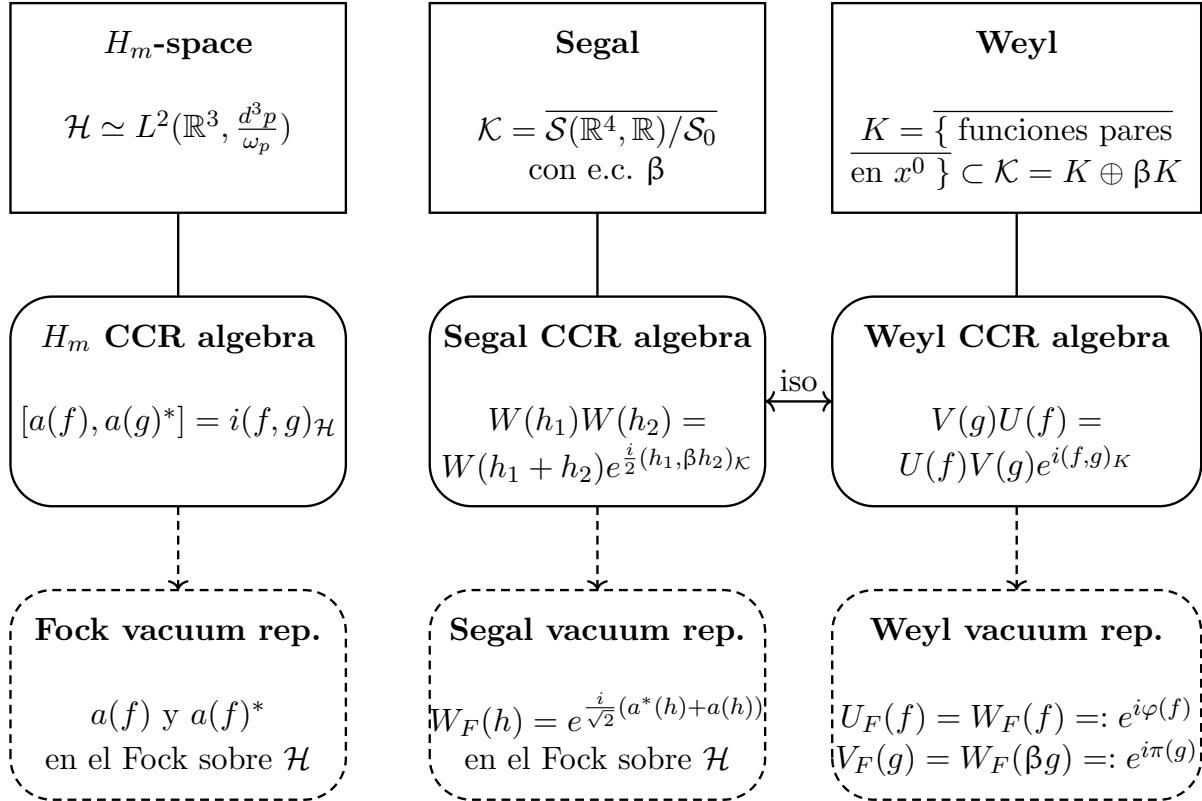


Figura 2.2: El diagrama muestra que a partir de los diferentes espacios de Hilbert de una partícula $(\mathcal{H}, \mathcal{K}, K)$ podemos construir álgebras que exhiben diferentes versiones de las CCR. Estas proporcionarán formulaciones alternativas de la llamada segunda cuantización. El álgebra generada por 1, $a(f)$ y $a(f)^*$ es una $*$ -álgebra unitaria. Las versiones de Segal y Weyl de las CCR son C^* -álgebras isomorfas. La última fila indica un paso adicional, donde se introduce un estado (el estado vacío aquí) y mediante la construcción de GNS se obtiene una representación en el espacio de Fock de $\mathcal{H}$ [32].

El álgebra CCR de Weyl también tiene una representación como operadores acotados en

¹³En general, para un estado Gaussiano sobre una CCR-álgebra, siempre existe una representación cíclica sobre un Fock y por ende una escritura del estilo.

$\Gamma(\mathcal{H})$. Obviamente, estamos buscando operadores $U_F(f)$ y $V_F(g)$ para $f, g \in K$ que satisfacen las relaciones (2.1.20). Primero definimos operadores no acotados $\varphi_0(f)$ y $\pi_0(g)$ para $f, g \in K$ como combinaciones lineales de los operadores de creación y aniquilación¹⁴ sobre $\Gamma(\mathcal{H})$. Estas combinaciones lineales son cerrables y sus clausuras son operadores autoadjuntos¹⁵ (es decir, $\varphi_0(f)$ y $\pi_0(g)$ son *esencialmente autoadjuntos*). De forma explícita, trabajando con $K \subseteq \mathcal{K} = \mathcal{H}$ (una vez más como espacios vectoriales reales).

$$\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{a^*(f) + a(f)} \quad (2.2.6)$$

$$\pi(g) = \frac{i}{\sqrt{2}} \overline{a^*(g) - a(g)}. \quad (2.2.7)$$

con $f, g \in K$ ¹⁶. Nuevamente, es evidente que la relación de conmutación para los operadores de creación y aniquilación (2.2.3) implica

$$[\varphi(h_1), \pi(h_2)](\alpha) = i(h_1, h_2)_K \alpha \text{ con } h_1, h_2 \in K \subseteq \mathcal{K} = \mathcal{H}, \quad (2.2.8)$$

para todo $\alpha \in \cup_{N=0}^{\infty} \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}^{\odot n}$. Definiendo $U_F(f) = e^{i\varphi(f)}$ y $V_F(g) = e^{i\pi(g)}$ y usando las relaciones de conmutación para $\varphi(f)$ y $\pi(g)$ es directo ver que las relaciones en la ecuación (2.1.20) se satisfacen también para U_F y V_F . Más aún, al igual que para la representación de Segal, los operadores $U_F(f)$ y $V_F(g)$ son unitarios.

Además, antes teníamos un $*$ -isomorfismo κ entre las CCR-álgebras en las formas de Segal y de Weyl, pero a nivel de representaciones tenemos una igualdad: las representaciones de las álgebras CCR en las formas de Segal y Weyl están relacionadas por

$$W_F(h) = e^{\frac{i}{2}(f,g)_K} U_F(f) V_F(g), \quad (2.2.9)$$

siendo $h = f + \beta g$. Acá es evidente el rol de β asesorando a W_F en la discriminación entre las funciones de testeo asociadas a U_F y a V_F (básicamente distinguiendo entre posición y momento dentro de $\mathcal{K}$). Si escribimos (2.2.9) exhibiendo los operadores χ , φ y π , y utilizamos la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), obtenemos

$$\chi(f + \beta g) = \varphi(f) + \pi(g). \quad (2.2.10)$$

¹⁴Nuevamente, estos operadores se entienden formalmente como el operador del campo escalar y su operador de momento conjugado: $\int_{\mathbb{R}^4} d^4x f(x) \varphi(x)$ y $\int_{\mathbb{R}^4} d^4x g(x) \pi(x)$, respectivamente. En la sección siguiente veremos que están etiquetados de manera equivalente por funciones en un tiempo fijo.

¹⁵Ver por ejemplo, [54], Teorema X.41.

¹⁶Es importante señalar que estos operadores de creación y aniquilación, alimentados por funciones en K , están relacionados con aquellos en la representación de Fock de las CCR en cuyo argumento había funciones en $\mathcal{H}$ ver ecuaciones (2.2.1) (el espacio de una partícula). Cabe destacar que estos últimos son las extensiones (lineales y antilineales) de los primeros cuando se considera $\mathcal{H}$ como la complexificación de K , es decir, $K + iK$.

Capítulo 3

Dualidad de Haag para el campo escalar libre

“ *Duality means that one can make all local algebras maximal.* ”

Rudolf Haag, *Local Quantum Physics*, 1996

3.1. Dualidad de Haag

3.1.1. Primer cuantización

Como mencionamos, el instrumento fundamental de la AQFT, es la net de álgebras sobre regiones del espaciotiempo. Esto significa que a cada región abierta¹ del espaciotiempo se le asigna un álgebra de observables. La construcción de dicha net a veces se presenta como un proceso en dos pasos, conocido como primera cuantización y segunda cuantización. En la primera cuantización, a cada región del espaciotiempo se le asigna un subespacio vectorial real cerrado (contenido en algún espacio de 1 partícula). Denotaremos este mapa como S , tal que $S(\mathcal{O}) \subset \mathcal{K}$, donde $\mathcal{O}$ es una región abierta del espaciotiempo. La segunda cuantización es la construcción de un mapa que asigna a cada subespacio $S(\mathcal{O})$ una subálgebra $R(\mathcal{O})$ de la representación de un álgebra CCR como operadores acotados, tal y como vimos en la Sección (2.2.2). Además dependiendo de en que formulación se considere, habrá ciertas variaciones a la hora de definir los mapas de cuantización. Esto se hará evidente en la Sección 3.1.2.

¹En principio se consideran regiones abiertas acotadas, luego por aditividad podemos asociar álgebras a uniones arbitrarias de este tipo de regiones. En particular se podrá, vía límite inductivo de C^* -álgebras, asociar una C^* a cada región abierta del espaciotiempo. Este procedimiento es el que mencionamos en la sección 1.2.3.

Sin ir más lejos, ya en la formulación de Weyl el mapa S no asigna subespacios reales cerrados a regiones abiertas del espaciotiempo, sino que cada B abierto relativo a una región *spacelike* Σ , el mapa S le asigna un par de subespacios reales cerrados. La relación entre ambos enfoques se establecerá una vez que definamos los mapas de primera cuantización para Segal y Weyl, lo cual haremos a continuación.

Definiremos ahora el mapa de primera cuantización S para la formulación de Weyl. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^3$ una región medible de un corte Σ a tiempo fijo de $\mathbb{R}^4$. Definimos

$$S_R(B) := \overline{j_2 L^2(B)}^{\|\cdot\|_\varphi}, \quad S_I(B) := \bar{\beta} j_1^{-1} (L^2(B)), \quad (3.1.1)$$

donde R e I denotan las partes “real” e “imaginaria”, respectivamente. Aquí, $j_1 : \mathfrak{F}_\pi \rightarrow L^2$ y $j_2 : L^2 \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$ son las inclusiones continuas de (2.1.4), y $L^2(B) \subseteq L^2(\mathbb{R}^3)$ es el subespacio cerrado de funciones de $L^2(\mathbb{R}^3)$ que se anulan fuera de B . Luego, como j_1 es continua, $j_1^{-1} (L^2(B))$ es cerrado en $\mathfrak{F}_\pi$, y dado que $\bar{\beta}$ es unitaria, $S_I(B)$ también es cerrado en $\mathfrak{F}_\varphi$. Cabe destacar que tanto S_R como S_I pertenecen a $\mathfrak{F}_\varphi$, y entonces tenemos el mapa de la primera cuantización de Weyl:

$$B \mapsto S_R(B) \oplus_{\mathbb{R}} S_I(B) \subset \mathfrak{F}_\varphi \oplus_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}_\varphi \simeq K \oplus_{\mathbb{R}} K. \quad (3.1.2)$$

Por otro lado, el mapa de primera cuantización en la presentación de Segal se define por

$$\mathcal{O} \mapsto S_S(\mathcal{O}) := \overline{\{[f] \in \mathcal{K} \mid f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}), \text{ supp}(f) \subseteq \mathcal{O}\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}}} \subseteq \mathcal{K}, \quad (3.1.3)$$

para cada abierto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$.

De aquí en más

$$\mathcal{O}' = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid (x - y)^2 < 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{O}\}, \quad (3.1.4)$$

denotará el *complemento causal* de la región $\mathcal{O}$ y B^c denotará el complemento de la clausura de B dentro de la misma superficie a tiempo fijo. Definamos ahora el *desarrollo causal* de B como

$$\diamond(B) = \{x \in \mathbb{M}^4 \mid (x - y)^2 < 0 \ \forall \ y \in B^c\}. \quad (3.1.5)$$

Inmediatamente tenemos que $\diamond(B)' = \diamond(B^c)$, usando que $(B^c)^c = B$. Ahora podemos relacionar ambos mapas de primera cuantización (3.1.1) y (3.1.3), lo cual se deduce de los isomorfismos biyectivos δ_0 y δ_1 descritos en detalle en la sección anterior:

$$S_S(\diamond(B)) \simeq S_R(B) \oplus_{\mathbb{R}} \bar{\beta} S_I(B) \quad (3.1.6)$$

Recordemos que $\mathcal{K} = K \oplus \beta K$, luego para aplicar el isomorfismo arriba mencionado a un elemento de $\mathcal{K}$, bastará con escribirlo como suma de un elemento en K y otro en βK (lo cual se puede hacer de una única manera) y luego aplicarles δ_0 y δ_1 respectivamente (por supuesto la imagen de δ_1 cae en $\mathfrak{F}_\pi$, pero recordemos que $\mathfrak{F}_\pi \subseteq \mathfrak{F}_\varphi \simeq K$, donde el último isomorfismo es vía δ_0).

A continuación nos ocupamos de demostrar que los mapas de primera cuantización en las presentaciones de Weyl (3.1.2) y de Segal (3.1.3) satisfacen una propiedad de dualidad. Esta propiedad, en la formulación de Weyl, es el punto de partida de la prueba de la dualidad de Haag en [33]. Comenzamos con la descripción de esta dualidad en la formulación de Weyl y su demostración, y luego hacemos lo propio en la formulación de Segal, mostrando que en consonancia con la ecuación (3.1.6) la misma se satisface en una formulación si y solo si se satisface en la otra.

Dualidad en la forma de Weyl

Podemos establecer varias propiedades importantes para los mapas (3.1.1). Por ejemplo, la *isotonía* establece que si $B_1 \subseteq B_2$, entonces $S_R(B_1) \subseteq S_R(B_2)$ y $S_I(B_1) \subseteq S_I(B_2)$. Otra propiedad relevante es la llamada *aditividad*, que se expresa como $\overline{\bigoplus S_R(B_\lambda)}^{\|\cdot\|_\varphi} = S_R(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda)$ (ver lema 2 en [15]). Sin embargo, aquí nos interesa principalmente la propiedad de *dualidad*, la cual se expresa en el siguiente teorema

Teorema 3.1.1. *La asignación de subespacios a regiones $B \subseteq \mathbb{R}^3$ a tiempo fijo dada por (3.1.1) satisface la dualidad de Haag en la forma de Weyl, esto es:*

$$\boxed{S_I(B)^{\perp_\varphi} = S_R(B^c), \quad S_R(B)^{\perp_\varphi} = S_I(B^c)} \quad (3.1.7)$$

Demostración. Primero notemos que $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(B) \oplus L^2(B^c)$, ya que $L^2(B) = L^2(B^c)^{\perp_{L^2}}$. A partir de aquí $\perp$ significará $\perp_\varphi$. Luego,

$$\begin{aligned} j_1^{-1}(L^2(B)) &= \{g \in \mathfrak{F}_\pi \mid (f, g)_{L^2} = 0 \ \forall f \in L^2(B^c)\} \\ &= \{g \in \mathfrak{F}_\pi \mid (j_2 f, \omega g)_\varphi = 0 \ \forall f \in L^2(B^c)\} \\ &= \{g \in \mathfrak{F}_\pi \mid (j_2 f, \bar{\beta}_{\pi, \varphi} g)_\varphi = 0 \ \forall f \in L^2(B^c)\}. \end{aligned}$$

Lo cual significa que si $g \in j_1^{-1}(L^2(B))$ entonces $\bar{\beta}_{\pi, \varphi} g \in \left[\overline{j_2 L^2(B^c)}^{\|\cdot\|_\varphi}\right]^\perp$, en donde hemos completado $j_2 L^2(B^c)$ usando la continuidad del producto interno. En otras palabras, se tiene $\bar{\beta}_{\pi, \varphi} j_1^{-1}(L^2(B)) \subseteq \left[\overline{j_2 L^2(B^c)}^{\|\cdot\|_\varphi}\right]^\perp$. Por otra parte, si $g \in \mathfrak{F}_\varphi$ tal que $g \in \left[j_2 L^2(B^c)\right]^\perp$, luego por definición $(j_2 f, g)_\varphi = 0$ para todo $f \in L^2(B^c)$. Condición que se puede expresar como $(j_2 f, \bar{\beta}_{\pi, \varphi} \bar{\beta}_{\varphi, \pi} g)_\varphi = 0$ para todo $f \in L^2(B^c)$, y por las relaciones de arriba se tiene que $\bar{\beta}_{\varphi, \pi} g \in j_1^{-1}(L^2(B))$, y luego $\left[\overline{j_2 L^2(B^c)}^{\|\cdot\|_\varphi}\right]^\perp \subseteq \bar{\beta}_{\pi, \varphi} j_1^{-1}(L^2(B))$. Hemos mostrado que $\left[\overline{j_2 L^2(B^c)}^{\|\cdot\|_\varphi}\right]^\perp = \bar{\beta}_{\pi, \varphi} j_1^{-1}(L^2(B))$. Recordando las definiciones (3.1.1) e intercambiando B y B^c , se tiene

$$S_R(B)^{\perp} = S_I(B^c)$$

Esta es una de las relaciones que queríamos probar. La restante se obtiene tomando el complemento ortogonal (notando que $(S_R^\perp)^\perp = S_R$ dado que S_R es cerrado) y volviendo a intercambiar B con B^c . $\square$

El teorema anterior establece que la dualidad de Haag se satisface en el contexto de la primera cuantización. Se ha demostrado en la formulación de Weyl, pero se puede traducir, como explicaremos en la siguiente subsección, a la formulación de Segal.

Dualidad en la forma de Segal

Dado un subespacio real cerrado S de $\mathcal{K}$, definamos su complemento simpléctico $S' \subset \mathcal{K}$, que también es un subespacio real de $\mathcal{K}$, como se puede ver utilizando la $\mathbb{R}$ -linealidad del producto interno de $\mathcal{K}$ en el primer argumento:

$$S' = \{h \in \mathcal{K} \mid \sigma(h, f) = 0, \quad \forall f \in S\}. \quad (3.1.8)$$

Si $g \in S' \subseteq \mathcal{K}$, entonces por (2.1.12), $(g, \beta f)_{\mathcal{K}} = 0$, lo que implica que $(\beta g, f)_{\mathcal{K}} = 0$. Es decir, $\beta g \in S^{\perp_{\mathcal{K}}}$. Razonando de manera inversa,

$$S^{\perp_{\mathcal{K}}} = \beta S'. \quad (3.1.9)$$

Además, debido a que el producto interno en K es la restricción del de $\mathcal{K}$, tenemos que para $S \subset K$

$$S^{\perp_K} = \beta S' \cap K, \quad (3.1.10)$$

Dentro de la presentación de Segal, la dualidad para el primer mapa se enuncia como

$$\boxed{S'_S(\mathcal{O}) = S_S(\mathcal{O}')}$$

para cualquier $\mathcal{O} = \diamond(B)$ con B un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$.

Gracias a (3.1.9) podemos reescribirla como

$$\beta \left(S_S(\mathcal{O})^{\perp_{\mathcal{K}}} \right) = S_S(\mathcal{O}') \quad (3.1.11)$$

Lema 3.1.1. *La propiedad de dualidad en el contexto de la primera cuantización se cumple en la forma de Segal si y solo si se cumple en la forma de Weyl.*

Demostración. Supongamos primero que (3.1.11) se cumple y veamos que (3.1.7) se cumple también. Primero notemos que un subespacio $S \subseteq \mathcal{K} = K \oplus_{\mathbb{R}} \beta K$ define dos subespacios en K , $P_K(S)$ y $\beta P_{\beta K}(S)$ (donde P son proyectores, la notación es sugerente). De esta manera, la partición genera un mapa ε de subespacios de $\mathcal{K}$ a un par de subespacios de $K \simeq \mathfrak{F}_{\varphi}$ (vía δ_0),

$$\varepsilon(S_S) := (P_K(S_S), \beta P_{\beta K}(S_S)) \simeq (S_R, S_I)$$

Ahora, la dualidad para subespacios de K en la presentación de Weyl proviene de aplicar el mapa ε a (3.1.11) y tener en cuenta (3.1.6). En efecto, para algún $\mathcal{O} = \diamond(B)$,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\beta S_S(\mathcal{O})^{\perp\kappa}) &= \varepsilon(S_S(\mathcal{O}')) \\ (P_K \beta S_S(\mathcal{O})^{\perp\kappa}, \beta P_{\beta K} \beta S_S(\mathcal{O})^{\perp\kappa}) &\simeq (S_R(B^c), S_I(B^c)) \\ (P_K \beta S_S(\mathcal{O})^{\perp\kappa}, P_K S_S(\mathcal{O})^{\perp\kappa}) &\simeq (S_R(B^c), S_I(B^c)) \\ (S_I(B)^{\perp\kappa}, S_R(B)^{\perp\kappa}) &= (S_R(B^c), S_I(B^c)).\end{aligned}$$

Usamos el hecho² de que $P_K(\beta S) = \beta P_{\beta K}(S)$ (es decir, $(\beta S)_R = (S)_I$) en la tercera línea, y ambos $P_K S^{\perp\kappa} = (P_K S)^{\perp\kappa}$ y $(\beta S^{\perp\kappa})^{\perp\kappa} = \beta S$ en la última línea.

Recíprocamente, usando (3.1.6), podemos obtener la versión de Segal de la dualidad desde la versión de Weyl de la siguiente manera³

$$\begin{aligned}S_S(\diamond(B))' &= \beta S_S(\diamond(B))^{\perp\kappa} \simeq \beta [S_R(B) + \beta S_I(B)]^{\perp\kappa} \\ &= \beta [S_R(B)^{\perp\kappa} \cap (\beta S_I(B))^{\perp\kappa}] = \beta [S_R(B)^{\perp\kappa} \cap \beta S_I(B)^{\perp\kappa}] \\ &= S_I(B)^{\perp\kappa} \cap \beta S_R(B)^{\perp\kappa} = [S_I(B)^{\perp\kappa} \oplus \beta K] \cap \beta [S_R(B)^{\perp\kappa} \oplus \beta K] \\ &= [S_I(B)^{\perp\kappa} \oplus \beta K] \cap [K \oplus \beta S_R(B)^{\perp\kappa}] = (S_I(B)^{\perp\kappa} \cap K) \oplus \beta (K \cap S_R(B)^{\perp\kappa}) \\ &= S_I(B)^{\perp\kappa} \oplus \beta S_R(B)^{\perp\kappa} = S_R(B^c) \oplus \beta S_I(B^c) \simeq S_S(\diamond(B^c)) = S_S(\diamond(B))',\end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que $(\beta S)^{\perp\kappa} = \beta S^{\perp\kappa}$, la dualidad en la forma de Weyl y en $\simeq$ se utilizó la ecuación (3.1.6). $\square$

Observación 3.1.1. Hemos demostrado en el Teorema (3.1.1) que la dualidad se cumple en la forma de Weyl, por lo que por el lema anterior también se cumple en la forma de Segal.

3.1.2. Segunda cuantización

Habiendo definido en la Sección anterior el mapa de primera cuantización S que asigna subespacios vectoriales reales a regiones del espaciotiempo, es momento de introducir la segunda cuantización. Esto significa definir un mapa R que asigne a cada subespacio vectorial una álgebra de von Neumann. En lugar de seguir [15], ahora seguiremos [33]. La razón de esta elección es que este último hace uso del poder de la teoría modular de Tomita-Takesaki, lo que resulta en una prueba más directa de la dualidad de Haag. Además, hemos realizado una modificación en la prueba en [33] con el fin de que sea aún más simple.

²Esto es así ya que dado $h = \alpha_R + \beta \alpha_I \in S$ con $\alpha's \in K$, aplicando β : $\beta h = \beta \alpha_R + \beta^2 \alpha_I = \beta \alpha_R - \alpha_I$. De esta forma $P_K(\beta h) = -\alpha_I$ así como $\beta P_{\beta K}(h) = \beta \beta \alpha_I = -\alpha_I$.

³Identificamos K y $\mathfrak{F}_\varphi$, $\mathcal{K}$ con $\mathfrak{F}_\varphi \oplus_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}_\pi$, y β con $\bar{\beta}$ para hacer las expresiones más legibles.

En [33], los autores trabajan exclusivamente en el contexto de Weyl, y haremos lo mismo la mayor parte del tiempo. Sin embargo, es posible sin mucho esfuerzo traducir los resultados de las siguientes subsecciones al contexto de Segal. Haremos algunos comentarios al respecto a lo largo del texto.

Forma de Weyl

Recordemos que, de acuerdo con la Sección anterior, el mapa S en la presentación de Weyl en realidad asigna dos subespacios de $\mathfrak{F}_\varphi \simeq K$ para cada región de tipo espacio B . Entonces, el mapa de segunda cuantización R_W debe tomar dos subespacios K_1 y K_2 de K y dar una subálgebra de von Neumann $R_W(K_1, K_2)$ de la representación del álgebra de CCR de Weyl dada en la sección 2.2.2. Para ser más precisos, $R_W(K_1, K_2)$ está generada por $U_F(f) = e^{i\varphi(f)}$ y $V_F(g) = e^{i\pi(g)}$, con f y g en K_1 y K_2 respectivamente, obedeciendo las relaciones (2.1.20). Como se puede adivinar, dados K_1 y K_2 , definimos

$$R_W(K_1, K_2) = \{e^{i\varphi(f)}e^{i\pi(g)} \mid f \in K_1, g \in K_2\}'' . \quad (3.1.12)$$

El doble conmutante asegura que $R_W(K_1, K_2)$ es un álgebra de von Neumann, ya que el bi-conmutante de un conjunto autoadjunto es automáticamente un álgebra de von Neumann. Recordemos que las álgebras de von Neumann concretas son cerradas tanto débil como fuertemente como subálgebras de los operadores lineales acotados en un espacio de Hilbert.

Describamos con más precisión cómo se introducen $\varphi(f)$ y $\pi(g)$. La parte real del espacio de Fock complejo $\Gamma(\mathcal{H})$ (denotada por $\mathcal{F}_r$) consiste en combinaciones lineales reales de productos simétricos entre elementos tales que su segundo componente de $\mathcal{H}$ (pensado como una complexificación de K) es cero. Es decir

$$\mathcal{F}_r = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_r^{(n)},$$

donde $\mathcal{F}_r^{(0)} = \mathbb{R}$ y

$$\mathcal{F}_r^{(n)} := \bigodot_{i=1}^n K$$

para $n \geq 1$. Aquí $\odot$ significa el producto tensorial simetrizado. Luego, podemos recuperar nuestro espacio de Hilbert de Fock complejo de la subsección 2.2.1 como la complexificación de $\mathcal{F}_r$, $\Gamma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_r + i\mathcal{F}_r$. Denotamos $\mathcal{F}^{(n)} := \mathcal{F}_r^{(n)} + i\mathcal{F}_r^{(n)}$, por lo que, por ejemplo, $\mathcal{F}^{(1)} \simeq \mathcal{H}$. Luego, como de costumbre, se introducen los operadores de creación y aniquilación como se explicó en la subsección 2.2.2.

Ahora, denotemos por Ω al $1 \in \mathcal{F}^{(0)}$, es decir, el vector vacío. Entonces, para $f, g \in K = \mathcal{F}_r^{(1)}$, usando las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.7) tenemos

$$\varphi(f)\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}f \quad i\pi(g)\Omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}g. \quad (3.1.13)$$

Para construir el mapa de segunda cuantización, necesitamos exponenciar $\varphi(f)$ y $\pi(g)$. Sin embargo, hay que tener cuidado ya que sus dominios son solo un subconjunto denso en $\Gamma(\mathcal{H})$. Usando el análisis funcional de operadores autoadjuntos no acotados, podemos afirmar que el operador $U_F(t) = e^{it\varphi(f)}$ está acotado, con $t \in \mathbb{R}$, ya que $\varphi(f)$ es autoadjunto (ver nota al pie 15). Más aún, $U_F(t)$ es un grupo unitario fuertemente continuo que actúa sobre el espacio de Hilbert complejo $\Gamma(\mathcal{H})$ y, por el teorema de Stone, existe un único operador autoadjunto que genera tal grupo. Este es precisamente $\varphi(f)$. Lo mismo ocurre con $e^{i\pi(g)}$. En resumen, tenemos la realización concreta (3.1.12) como un álgebra de operadores acotados en el espacio de Fock complejo $\Gamma(\mathcal{H})$.

Forma de Segal

Una construcción análoga se puede hacer utilizando la representación W_F del álgebra CCR de Segal como en la Sección 2.2.2. El mapa de segunda cuantización es

$$R_S(Y) = \left\{ e^{i\chi(h)} \mid h \in Y \right\}'' , \quad (3.1.14)$$

donde Y es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$ y χ está relacionada con φ y π como en (2.2.10). Al igual que el mapa de primera cuantización (3.1.3), este también satisface la propiedad de isotonía: $R_S(Y_1) \subseteq R_S(Y_2)$ si $Y_1 \subseteq Y_2$, y la propiedad de aditividad: $R_S\left(\overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda}\right) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_S(Y_\lambda)\right)''$ (ver teorema 1 en [32]). Nótese que $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_S(Y_\lambda)\right)''$ es la menor álgebra de von Neumann que contiene cada $R_S(Y_\lambda)$. Estas propiedades también se pueden expresar en términos de las subálgebras de CCR de Weyl representadas $R_W(K_1, K_2)$ previamente definidas.

Es fácil ver a partir de (2.2.9) y las definiciones (3.1.12) y (3.1.14) que

$$R_W(K_1, K_2) = R_S(K_1 \oplus_{\mathbb{R}} \beta K_2), \quad K_1, K_2 \subset K. \quad (3.1.15)$$

3.2. Una simplificación de la demostración de Araki

Ya habiendo construido las nets en la primera y segunda cuantización, es decir estos mapas que a cada región del espaciotiempo le asocian un subespacio (o par de subespacios) y luego que a cada subespacio (o par) le asocian un álgebra, estamos en condiciones de componerlos para formar una net que satisfaga los axiomas de Haag-Kastler. Haremos esto, pasaremos a demostrar la dualidad de Haag para el caso de regiones de tipo diamante y para finalizar el capítulo daremos un ejemplo de una región para la cual no se satisface la dualidad.

3.2.1. La dualidad en diamantes y Wedges

Consideremos $B \subset \mathbb{R}^3$ y su complemento $B^c \subset \mathbb{R}^3$. Queremos demostrar que

$$(R_W \circ S_W)(B^c) = (R_W \circ S_W)(B)' \quad (\text{dualidad de Haag en la forma de Weyl}). \quad (3.2.1)$$

Es decir, que $R_W(S_R(B^c), S_I(B^c)) = R_W(S_R(B), S_I(B))'$, lo cual, por el Teorema 3.1.1, es equivalente a

$$R_W(S_I(B)^{\perp\kappa}, S_R(B)^{\perp\kappa}) = R_W(S_R(B), S_I(B))'. \quad (3.2.2)$$

Por lo tanto, nuestro objetivo es demostrar que $R_W(K_2^{\perp\kappa}, K_1^{\perp\kappa}) = R_W(K_1, K_2)'$, para $K_1, K_2 \subseteq K$ provenientes de un mapa de primera cuantización. De hecho, a partir de la definición del segundo mapa (3.1.12), es inmediato, usando el CCR (2.1.20), ver que $R_W(K_2^{\perp\kappa}, K_1^{\perp\kappa}) \subseteq R_W(K_1, K_2)'$, conocida como la propiedad de localidad. Resta entonces la demostración de la inclusión opuesta $R_W(K_1, K_2)' \subseteq R_W(K_2^{\perp\kappa}, K_1^{\perp\kappa})$ que daremos en la siguiente subsección utilizando la teoría modular de Tomita-Takesaki. Cabe destacar que la expresión análoga en la forma de Segal es

$$R_S(H') = R_S(H)'. \quad (3.2.3)$$

Antes de demostrar $R_W(K_1, K_2)' \subseteq R_W(K_2^{\perp\kappa}, K_1^{\perp\kappa})$, introduzcamos las nets en las formas de Weyl y Segal. Sea A_W el mapa que asocia cualquier conjunto abierto relativo $B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 | x^0 = 0\}$ a un álgebra de von Neumann mediante la composición $A_W = R_W \circ S_W$, definiendo la net

$$A_W(B) = \{e^{i\varphi(f)} e^{i\pi(g)} \mid f \in S_R(B), g \in S_I(B)\}'' ,$$

donde el subíndice W representa subálgebras de la representación del álgebra CCR de Weyl, y $S_R(B)$ y $S_I(B)$ son como en (3.1.1). De manera análoga, para la formulación de Segal tenemos

$$A_S(\mathcal{O}) = \{e^{i\chi(h)} \mid h \in S_S(\mathcal{O})\}'' ,$$

Notemos que la primera considera regiones a tiempo fijo, mientras que la segunda toma regiones del espacio-tiempo. Queremos relacionar ambas nets. Al igual que en la sección anterior, consideramos una región B a tiempo fijo (digamos $x^0 = 0$) y su dominio de dependencia $\diamond(B)$ como en (3.1.5)⁴. El siguiente lema es un resultado clave, donde, por única vez, se requiere alguna condición de diferenciabilidad para la frontera de B ,

Lema 3.2.1 (Proposición 3.3.2 en [56] o [15] sección 6). *Sea $B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 | x^0 = 0\}$ una región medible con frontera diferenciable a trozos y tal que $\text{int}(\overline{B}) = B$. Entonces $A_W(B) = A_S(\diamond(B))$.*

No presentaremos aquí una demostración pormenorizada de dicho lema, ya que la misma se puede encontrar en ambas referencia (en detalle en [56]). No obstante comentaremos someramente ciertos hechos. En la demostración, es clave asociar, a cada región $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{M}^4$ un álgebra $\hat{A}_S(\mathcal{O})$ vía límite proyectivo, es decir:

$$\hat{A}_S(\mathcal{R}) = \bigcap_{\overline{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{O}} A_S(\mathcal{O}),$$

⁴Si B es acotado, pensemos en una bola, entonces $\diamond(B)$ es el diamante causal de la bola circunscrita en B , mientras que si B no es acotado, pensemos en un semiespacio $\diamond(B)$ es una cuña limitada por dos hiperplanos nulos [56].

siendo $\mathcal{R}$ una región arbitraria del espaciotiempo y $\mathcal{O}$ abiertos del espaciotiempo. Araki demuestra que independientemente de la hipótesis de suavidad sobre el borde de B , si es una región a tiempo fijo, es válida:

$$A_W(B) \subseteq \hat{A}_S(B) \subseteq \hat{A}_S(\diamond(B)). \quad (3.2.4)$$

Pero lo que no es siempre cierto es $A_W(B) \subseteq A_S(\diamond(B))$, para que ésta última sea válida basta con que el borde de B sea suave a trozos, ya que la misma se desprende de:

$$\mathcal{D}_R(B) = \overline{\bigcup_{\overline{B}_\alpha \subseteq B} \mathcal{D}_R(B_\alpha)},$$

siendo $\mathcal{D}_R(B)$ el conjunto de funciones diferenciables de soporte compacto en B , y dicha igualdad se cumple bajo la condición de suavidad sobre el borde de B . Esta parte de la demostración radica en el hecho de que el álgebra de Weyl de una dada región es el álgebra inductiva de sus subregiones propias⁵.

Otro tanto sucede a la hora de demostrar la contención recíproca $A_S(\diamond(B)) \subseteq A_W(B)$, en donde ahora la hipótesis que cobra relevancia es la de $\text{int}(\overline{B}) = B$, sin la cual dicha contención podría no satisfacerse.

Ahora, retomando nuestra línea y asumiendo por un momento que $R_W(K_1, K_2)' = R_W(K_2^{\perp\kappa}, K_1^{\perp\kappa})$ es válido, podemos concluir que la dualidad de Haag se cumple para regiones $\diamond(B)$ que satisfacen la hipótesis del lema anterior, dado que

$$\begin{aligned} A_S(\diamond(B))' &= A_W(B)' = R_W(S_R(B), S_I(B))' \\ &= R_W(S_I(B)^{\perp\varphi}, S_R(B)^{\perp\varphi}) = R_W(S_R(B^c), S_I(B^c)) \\ &= A_W(B^c) = A_S(\diamond(B^c)) = A_S(\diamond(B))'. \end{aligned}$$

En la segunda línea se utilizó la dualidad para el segundo mapa en la representación de Weyl, y en el siguiente paso se usó el Teorema 3.1.1.

Observación 3.2.1. *La dualidad de Haag también se cumple en casos más generales. Primero, notemos que se cumple en cualquier otra región $g \cdot \diamond(B)$, la transformada de $\diamond(B)$ bajo un elemento del grupo de Poincaré $g = (a, \Lambda)$. Esto se debe a la covarianza de Poincaré de la red de álgebras, es decir, $A(g \cdot \mathcal{O}) = U_g A(\mathcal{O}) U_g^{-1}$, con U_g la representación unitaria sobre el espacio de Fock mediante la exponenciación de la representación unitaria irreducible que actúa sobre el espacio de 1-partícula $U(a, \Lambda)$, dada en la nota al pie 5. De hecho, llamando $\mathcal{O} = \diamond(B)$, tenemos*

$$\begin{aligned} A(g \cdot \mathcal{O}) &= U_g A(\mathcal{O}) U_g^{-1} = U_g A(\mathcal{O}')' U_g^{-1} \\ &= (U_g A(\mathcal{O}') U_g^{-1})' = (A(g \cdot \mathcal{O}'))' \\ &= A((g \cdot \mathcal{O})')' \end{aligned}$$

⁵En concreto esto quiere decir que $A_W(B) = \left(\bigcup_{\overline{B}_\alpha \subseteq B} A_W(B_\alpha) \right)''$.

Segundo, también se cumple para cualquier conjunto abierto relativo no vacío B dentro de una superficie de Cauchy Σ del espacio-tiempo de Minkowski. Esto se debe a que no hay nada particularmente excepcional en la superficie de Cauchy $t = 0$, y el operador de Klein-Gordon es un operador hiperbólico de Green y, por lo tanto, existe una solución única asociada a cualquier par de condiciones iniciales (con las propiedades de regularidad ya descritas) definidas sobre una superficie de Cauchy arbitraria Σ . Muchos de los pasos anteriores simplemente cambian por evaluación en Σ en lugar de en $t = 0$, y la derivada respecto a t se sustituye por una derivada normal ortogonal a Σ . Además, se puede reemplazar la definición previa (3.1.5) de $\diamond(B)$ por el completado causal de B , $\diamond(B) := B''$, sin referencia a la superficie de Cauchy $x^0 = 0$ y considerando B como un conjunto abierto relativo no vacío en Σ . Para más detalles, ver [57].

En general, no hay razón para que la dualidad de Haag se cumpla en otros tipos de regiones. En [15] se presenta un contraejemplo que explicaremos en detalle en la sección 3.2.3.

3.2.2. Demostración de la dualidad de Haag

Como ya mencionamos, en lugar de probar la inclusión $R_W(K_1, K_2)' \subseteq R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)$ como en [15], podemos considerar el enfoque de [33]. La idea es que el conmutante de un álgebra de von Neumann M actuando sobre el espacio de Hilbert $\Gamma(\mathcal{H})$ (en realidad, cualquier espacio de Hilbert) puede obtenerse directamente mediante la teoría modular.

Si existe un vector cíclico y separante⁶ Ω para M , entonces también es cíclico y separante para M' [55]. Consideremos el siguiente operador anti-lineal

$$S_0 A \Omega = A^* \Omega, \quad A \in M, \quad (3.2.5)$$

que está definido en un conjunto denso ya que Ω es cíclico. Además, S_0 es cerrable (porque Ω es separante para M) y su clausura S se llama operador de Tomita⁷. El dominio de S está dado por

$$D = \{x \in \Gamma(\mathcal{H}) : \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M\Omega \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ y } S_0 x_n \text{ tiene un límite}\}.$$

El operador de Tomita S es invertible y, por lo tanto, tiene una única descomposición polar

$$S = J \Delta^{1/2} \quad (3.2.6)$$

donde J es antiunitario y $\Delta = S^* S$ es positivo y autoadjunto. Estos se denominan conjugación modular y operador modular, respectivamente. Destaquemos algunas de sus propiedades,

⁶Un vector Ω es *cíclico* para M , un álgebra de von Neumann en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, si $M\Omega$ es denso en $\mathcal{H}$. Además, Ω es *separante* para M si para cualquier $A \in M$ se cumple que $A\Omega = 0$ implica $A = 0$.

⁷Esperamos que no haya confusión entre el operador de Tomita S y los mapas de primera cuantización estudiados en las secciones anteriores.

primero tomando $A = 1_M$ en la ecuación (3.2.5), se tiene $S\Omega = \Omega$. Segundo, de $S^2 = 1_M$ obtenemos $J\Delta^{1/2}J\Delta^{1/2} = 1_M$ o $\Delta^{-1/2} = J\Delta^{1/2}J$, por lo que

$$J^2(J^{-1}\Delta^{1/2}J) = \Delta^{-1/2} = 1_M\Delta^{-1/2},$$

luego, debido a la positividad de $J^{-1}\Delta^{1/2}J$ y la unicidad de la descomposición polar, llegamos a $J^2 = 1_M$. El dominio de S^* es

$$D' = \{x \in \Gamma(\mathcal{H}) : \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M'\Omega \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ y } F_0 x_n \text{ tiene un límite}\}$$

donde F_0 es el operador cerrable definido por (ver [18], Proposición 2.3.1.)

$$F_0 A \Omega = A^* \Omega, \quad A \in R'. \quad (3.2.7)$$

Ahora estamos listos para enunciar un resultado importante de Tomita y Takesaki que utilizaremos.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Tomita-Takesaki, Theorema 10.1 de [58], o Teorema. 2.5.14 de [55]). *Sea M un álgebra de von Neumann en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que admite un vector cíclico y separante Ω . Entonces, las siguientes dos relaciones se cumplen:*

$$M' = J M J,$$

$$\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

El vector vacío Ω es cíclico para las álgebras $R_W(\mathcal{S}_R(B), \mathcal{S}_I(B))$: El Teorema de Reeh-Schlieder asegura que, Ω es cíclico para el álgebra de Segal $A_S(\mathcal{O})$ [59], y en nuestro caso estamos interesados en que $\mathcal{O}$ sea un “diamante” $\diamond(B)$ sobre B , en cuyo caso, por el Lema 3.2.1, tenemos $A_S(\diamond(B)) = A_W(B)$ y entonces Ω es cíclico para $R_W(\mathcal{S}_R(B), \mathcal{S}_I(B))$. Además, se sabe que si un vector es cíclico para un álgebra, entonces es separante para su conmutante⁸. En resumen, Ω es cíclico y separante para cualquier $R_W(K_1, K_2)$ con el par (K_1, K_2) proveniente del primer mapeo de cuantización de Weyl (de ahora en adelante asumimos siempre esto). Por lo tanto, el Teorema de Tomita-Takesaki (3.2.1) se aplica a nuestra situación y, en particular, tenemos

$$R_W(K_1, K_2)' = J R_W(K_1, K_2) J.$$

⁸En nuestro caso, Ω también es cíclico, para $R_W(K_2^\perp, K_1^\perp) \subseteq R_W(K_1, K_2)'$, y entonces podemos tomar cualquier $A \in R_W(K_1, K_2)$ tal que $A\Omega = 0$, cualquier $B \in R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)$, y escribir

$$A(B\Omega) = BA\Omega = 0,$$

lo que implica que $A = 0$ ya que anula un conjunto denso en $\Gamma(\mathcal{H})$.

Sea $\hat{J} = J|_{\mathcal{F}_r^{(1)}} = J|_K$ la restricción de J al espacio real de una partícula, entonces un paso importante es demostrar que $\hat{J}K_1 \subseteq K_2^\perp$ y $\hat{J}K_2 \subseteq K_1^\perp$. Esto, a su vez, implicará (según veremos):

$$\begin{aligned} J e^{i\varphi(f)} J &= e^{i\varphi(\hat{J}f)} \\ J e^{i\pi(g)} J &= e^{i\pi(\hat{J}g)}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

a partir de lo cual podemos deducir $R_W(K_1, K_2)' \subseteq R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)$ como sigue. Como ya mencionamos, un elemento $X \in R_W(K_1, K_2)'$ puede escribirse como $X = JYJ$, donde $Y \in R_W(K_1, K_2)$, y como las álgebras de von Neumann son cerradas en la topología débil⁹, $Y = w - \lim_n Y_n$ y $X = w - \lim_n JY_nJ$, donde $Y_n \in \text{gen} \left\{ e^{i\varphi(f)} e^{i\pi(g)} \mid f \in K_1, g \in K_2 \right\}$. Pero cada uno de estos Y_n es una suma finita de elementos $e^{i\varphi(f_{k_n})} e^{i\pi(g_{k_n})}$, lo que significa que hay elementos $f_{k_n} \in K_1$ y $g_{k_n} \in K_2$ tales que

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=0}^{N_n} a_{k_n} e^{i\varphi(f_{k_n})} e^{i\pi(g_{k_n})}, \\ JY_nJ &= \sum_{k=0}^{N_n} a_{k_n} J e^{i\varphi(f_{k_n})} J J e^{i\pi(g_{k_n})} J \\ &= \sum_{k=0}^{N_n} a_{k_n} e^{i\varphi(\hat{J}f_{k_n})} e^{i\pi(\hat{J}g_{k_n})}, \end{aligned}$$

que claramente pertenecen a $R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)$. Además, como las álgebras de von Neumann son cerradas en la topología débil, se sigue que $X = JYJ \in R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)$. Esto demuestra que (3.2.8) implica la dualidad de Haag.

Sin embargo, para obtener una fórmula explícita para $\hat{J}$, en [33] se introducen varios operadores auxiliares (ver ecuación 5 de dicha referencia). En cambio, para construir J solo trabajaremos con S y S^* , dado que se cumple

$$J = S(S^*S)^{-1/2}. \quad (3.2.9)$$

Comencemos con el siguiente lema, que es una extensión del Lema 4 de [33].

Lema 3.2.2. *Sean D y D' los dominios (densos) de S y S^* respectivamente, y $E^{(k)}$ las proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{F}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces J , S y S^* conmutan con las proyecciones,*

$$\begin{aligned} E^{(k)} J &= J E^{(k)} \\ E^{(k)} S &\subseteq S E^{(k)} \\ E^{(k)} S^* &\subseteq S^* E^{(k)} \end{aligned}$$

⁹Notaremos $w - \lim_n Z_n$ al límite débil de la sucesión Z_n

Más aún, la restricción de S a $E^{(k)}D$ es un operador cerrado y densamente definido en $\mathcal{F}^{(k)}$, con dominio $E^{(k)}D = D \cap \mathcal{F}^{(k)}$ que deja invariante $D \cap \mathcal{F}_r^{(k)}$ (el cual es también invariante por J). De manera análoga, la restricción de S^* a $E^{(k)}D'$ es un operador cerrado y densamente definido en $\mathcal{F}^{(k)}$, con dominio $E^{(k)}D' = D' \cap \mathcal{F}^{(k)}$ y deja invariante $D' \cap \mathcal{F}_r^{(k)}$.

Demostración. Teniendo en cuenta que $E^{(k)}$ y J son operadores acotados, los dominios de los operadores $E^{(k)}J$ y $JE^{(k)}$ son todo el espacio de Fock $\Gamma(\mathcal{H})$, mientras que el dominio de $E^{(k)}S$ es D . Sin embargo, el dominio de $SE^{(k)}$ son aquellos vectores en el espacio de Fock tales que su componente k está en D , lo cual es un conjunto más grande¹⁰, y de manera similar para S^* pero con D' .

La parte de este lema que se refiere a S y J se prueba en [33]. En contraste, las afirmaciones relativas a S^* son nuevas y merecen una explicación. S^* , siendo el adjunto de S , satisface

$$\overline{(S\Psi, \Phi)}_{\Gamma(\mathcal{H})} = (\Psi, S^*\Phi)_{\Gamma(\mathcal{H})}$$

para todo $\Phi \in D'$ y $\Psi \in D$. Siguiendo esta notación, es posible demostrar que $E^{(k)}\Phi \in D'$ y que $E^{(k)}S^* = S^*E^{(k)}|_{D'}$,

$$\begin{aligned} (S\Psi, E^{(k)}\Phi)_{\Gamma(\mathcal{H})} &= (E^{(k)}S\Psi, \Phi)_{\Gamma(\mathcal{H})} \\ &= (SE^{(k)}\Psi, \Phi)_{\Gamma(\mathcal{H})} \\ &= (S^*\Phi, E^{(k)}\Psi)_{\Gamma(\mathcal{H})} \\ &= (E^{(k)}S^*\Phi, \Psi)_{\Gamma(\mathcal{H})}. \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado la ortogonalidad de $E^{(k)}$ y que $E^{(k)}S \subseteq SE^{(k)}$.

Si $\Phi \in \mathcal{F}^{(1)}$, entonces existen $\Phi_R, \Phi_I \in \mathcal{F}_r$ tales que $\Phi = \Phi_R + i\Phi_I$, y notamos $\bar{\Phi} := \Phi_R - i\Phi_I$ y $\text{Im}\{\Phi\} := \frac{1}{2i}(\Phi - \bar{\Phi})$. Cabe notar que un vector $\Phi \in \mathcal{F}^{(1)}$ está en $\mathcal{F}_r$ si y solo si $\text{Im}\{\Phi\} = 0$. Para ver que S^* deja invariante $\mathcal{F}_r^{(1)}$, es decir, que $\text{Im}\{S^*\Phi\} = 0$ para $\Phi \in \mathcal{F}_r^{(1)} \cap D'$, podemos proceder de la siguiente manera. Teniendo en cuenta que $\overline{(S\Psi, \Phi)}_{\Gamma(\mathcal{H})} = (\bar{\Psi}, \bar{\Phi})_{\Gamma(\mathcal{H})}$, y la definición de S^* , se cumplen las siguientes dos ecuaciones,

$$\begin{aligned} \overline{(S\Psi, \Phi)}_{\Gamma(\mathcal{H})} &= (\Psi, S^*\Phi)_{\Gamma(\mathcal{H})}, \\ (S\bar{\Psi}, \Phi)_{\Gamma(\mathcal{H})} &= (\Psi, \bar{S^*\Phi})_{\Gamma(\mathcal{H})}, \end{aligned}$$

para $\Psi \in \mathcal{F}^{(1)} \cap D$ y $\Phi \in \mathcal{F}^{(1)} \cap D'$. De ahora en adelante, asumimos además que $\Phi \in \mathcal{F}_r^{(1)} \cap D'$, es decir, que $\bar{\Phi} = \Phi$. Restando la segunda de la primera, obtenemos

$$\overline{(S\Psi, \Phi)}_{\Gamma(\mathcal{H})} - (S\bar{\Psi}, \Phi)_{\Gamma(\mathcal{H})} = 2i(\Psi, \text{Im}\{S^*\Phi\})_{\Gamma(\mathcal{H})}. \quad (3.2.10)$$

¹⁰Es posible tener un vector $x \in \Gamma(\mathcal{H})$ tal que $x \notin D$ pero $E^{(k)}x \in D$, entonces podemos aplicarle S . Por eso en el lema tenemos inclusiones y no igualdades.

Consideremos los dos casos por separado. Primero supongamos que $\Psi \in \mathcal{F}_r^{(1)} \cap D$, es decir, que es puramente real: $\Psi = \bar{\Psi}$. Entonces el lado izquierdo de (3.2.10) se lee $(2i \operatorname{Im}\{S\Psi\}, \Phi)$, lo cual es cero, ya que sabemos que S deja invariante $\mathcal{F}_r^{(1)}$ por el Lema 4 de [33], lo que implica que $\operatorname{Im}\{S^*\Phi\} \perp (\mathcal{F}_r^{(1)} \cap D)$. Ahora supongamos que $\Psi = i\chi$, con $\chi \in \mathcal{F}_r^{(1)} \cap D$. Entonces el lado izquierdo de (3.2.10) se lee $i(S\chi, \Phi - \bar{\Phi}) = 0$, donde hemos usado que S es antilineal y que $\bar{\Phi} = \Phi$. Esto implica que $\operatorname{Im}\{S^*\Phi\} \perp (i\mathcal{F}_r^{(1)} \cap D)$, y tomando en cuenta el primer caso, concluimos que $\operatorname{Im}\{S^*\Phi\}$ es ortogonal al conjunto denso $\mathcal{F}^{(1)} \cap D$ y, por lo tanto, se anula como queríamos probar. No utilizaremos ni probaremos el caso $k > 1$, pero sigue de manera similar a los argumentos usados para $k = 1$. $\square$

Si examinamos más a fondo el dominio de S restringido al espacio real de una partícula $\mathcal{F}_r^{(1)} \simeq K$ veremos que S puede actuar sobre estados de una partícula, aunque no sean *a priori* de la forma $A\Omega$, con $A \in R_W(K_1, K_2)$. Para eso será útil el siguiente lema:

Lema 3.2.3. *Si K_1 y K_2 están en posición genérica (es decir, $K_1 \cap K_2 = K_1 \cap K_2^\perp = K_2 \cap K_1^\perp = K_1^\perp \cap K_2^\perp = \{0\}$), entonces $K_1 + K_2 \subseteq D \cap \mathcal{F}_r^{(1)}$, de modo que S puede actuar sobre estos vectores.*

Demostración. Para ver esto, tomemos un estado genérico de una partícula

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 + if_2 + ig_1 - g_2), \quad f_i \in K_1, \quad g_i \in K_2 \\ &= (\varphi(f_1) + i\varphi(f_2) + \pi(g_1) + i\pi(g_2)) \Omega \end{aligned}$$

Se puede escribir como el límite (en la topología de norma de $\Gamma(\mathcal{H})$, ver [60], Proposición 10.14)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \left[-i(e^{\lambda i(\varphi(f_1) + \pi(g_1))} - 1) + (e^{\lambda i(\varphi(f_2) + \pi(g_2))} - 1) \right] \Omega$$

de estados en el dominio de S . Además, el límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} S \left[-i(e^{\lambda i(\varphi(f_1) + \pi(g_1))} - 1) + (e^{\lambda i(\varphi(f_2) + \pi(g_2))} - 1) \right] \Omega$$

existe y da como resultado $(\varphi(f_1) - i\varphi(f_2) + \pi(g_1) - i\pi(g_2)) \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 - if_2 + ig_1 + g_2)$. Entonces, como S es cerrado, obtenemos

$$S(f_1 + if_2 + ig_1 - g_2) = f_1 - if_2 + ig_1 + g_2. \quad (3.2.11)$$

Esto muestra explícitamente cómo S actúa sobre los estados de una partícula y también que $K_1 + K_2 \subseteq D \cap \mathcal{F}_r^{(1)}$. Aún más, dado que $(K_1 + K_2)^\perp = K_1^\perp \cap K_2^\perp = 0$ (debido a la propiedad de posición genérica), tenemos que $K_1 + K_2$ es en realidad denso en $\mathcal{F}_r^{(1)}$ y, por lo tanto, es denso en el dominio de S restringido al espacio de una partícula. En [33] los autores afirman que $K_1 + K_2 = D \cap \mathcal{F}_r^{(1)}$, sin embargo, no vemos cómo probar $D \cap \mathcal{F}_r^{(1)} \subseteq K_1 + K_2$. En cualquier caso, a nuestros fines será suficiente con lo que hemos afirmado arriba. $\square$

El hecho de que K_1 y K_2 estén en posición genérica se asumió en la prueba del Lema 4 en [33], y aquí mostramos en el Apéndice 7.3, siguiendo [15], que K_1 y K_2 están efectivamente en posición genérica si se dan por los primeros mapas de cuantización¹¹ $S_R(B)$ y $S_I(B)$.

El siguiente teorema, que se aplica a espacios de Hilbert reales o complejos, a veces referido como el teorema de las dos proyecciones de Halmos, es un resultado clave para tener un mayor control sobre J ya que nos permite escribir las restricciones a $\mathcal{F}_r^{(1)} \simeq K$ de S y S^* en “forma matricial”.

Teorema 3.2.2 (Enunciado como en el Lema 5 de [33]). *Sea K un espacio de Hilbert y K_1 y K_2 dos subespacios cerrados de K en posición genérica. Entonces, existe otro espacio de Hilbert $\mathcal{K}_*$ y una contracción positiva T sobre él, con $\ker T = \ker(1-T) = 0$, tal que el par $\{K_1, K_2\}$ es unitariamente equivalente al par $\{\Gamma(T), \Gamma(-T)\}$, lo que significa que existe un mapa unitario (u ortogonal) $U : K \rightarrow \mathcal{K}_* \oplus_{(\mathbb{R})} \mathcal{K}_*$ que mapea K_1 al gráfico de T y K_2 al gráfico de $-T$. Aquí $\Gamma(T)$ denota el grafo de T (esperamos sepan disculpar el solapamiento con la notación del espacio de Fock).*

Para la demostración de este teorema, véase [61] (en particular el Teorema 1 de dicho texto) o [62], teorema 2.4, donde se puede ver que es posible identificar K con $\mathcal{K}_* \oplus_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_*$ y que T puede ser elegido como autoadjunto. Una contracción es un operador lineal con norma menor o igual a 1.

Aplicemos el teorema de Halmos al caso que nos ocupa. Llamando U al mapa ortogonal que lleva K_1 a $\Gamma(T)$ y K_2 a $\Gamma(-T)$, entonces dado $f \in K_1$ y $g \in K_2$, existen $h, h' \in \mathcal{K}_*$ tales que

$$U(f) = \begin{pmatrix} h \\ Th \end{pmatrix}, \quad U(g) = \begin{pmatrix} h' \\ -Th' \end{pmatrix}.$$

La recíproca también se cumple (ya que U es inversible), es decir, para cualquier elemento de la forma mostrada en el lado derecho de las ecuaciones anteriores, existen únicos $f \in K_1$ y $g \in K_2$ tales que se cumplan estas ecuaciones. Aún más, podemos ver que $K_1^\perp$ y $K_2^\perp$ también se identifican con elementos de $\mathcal{K}_* \oplus_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_*$. Tomemos $x, y \in \mathcal{K}_*$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma(T)^\perp &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ T(h) \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{K}_* \oplus_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_*} = 0, \quad \forall h \in \mathcal{K}_* \\ &\Leftrightarrow (x, h)_{\mathcal{K}_*} = (-y, T(h))_{\mathcal{K}_*}, \quad \forall h \in \mathcal{K}_* \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma(T^*) = \Gamma(T), \end{aligned}$$

¹¹El hecho de que K_1 y K_2 estén en posición genérica implica inmediatamente que $S = K_1 + \beta K_2$ es un subespacio separante, esto significa que $S \cap \beta S = \emptyset$. Además, se puede demostrar que $S = K_1 + \beta K_2$ es cíclico (es decir, $S + \beta S$ es denso en $\mathcal{K}$) mediante la dualidad en la formulación de Weyl y la propiedad de posición genérica. Sospechamos que esto se puede demostrar incluso sin invocar la dualidad en la formulación de Weyl. Un subespacio real cerrado S que sea cíclico y separante se llama *estándar*.

donde en la última línea usamos el hecho de que T puede ser elegido como autoadjunto, y esto implica que $x = -T(y)$. Entonces, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma(T)^\perp$ si y solo si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T(y) \\ y \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, tenemos las siguientes identificaciones

$$(UK_1)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -Ty \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathcal{K}_* \right\}, \quad (UK_2)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} Ty \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathcal{K}_* \right\} \quad (3.2.12)$$

Llamemos $\hat{S}$ a la restricción de S a $D \cap \mathcal{F}_r^{(1)}$. Considerando $f \in K_1$ y $g \in K_2$, usando (3.2.11) podemos escribir

$$\hat{S}(f) = f, \quad \hat{S}(g) = -g.$$

Estas expresiones pueden ser utilizadas para definir $\tilde{S}$, que está inducida sobre $\Gamma(T)$ por S como $\tilde{S} = U\hat{S}U^{-1}$. Por lo tanto, para cualquier $h \in \mathcal{K}_*$,

$$\begin{aligned} \tilde{S} \begin{pmatrix} h \\ Th \end{pmatrix} &= \tilde{S}U(f) = U\hat{S}(f) = U(f) = \begin{pmatrix} h \\ Th \end{pmatrix} \\ \tilde{S} \begin{pmatrix} h \\ -Th \end{pmatrix} &= \tilde{S}U(g) = U\hat{S}(g) = U(-g) = - \begin{pmatrix} h \\ -Th \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De lo cual deducimos, por combinaciones lineales,

$$\tilde{S} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Th \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} \begin{pmatrix} 0 \\ Th \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos permite identificar

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & T^{-1} \\ T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y luego} \quad \tilde{S}^* = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora consideramos la descomposición polar de S , $S = J(S^*S)^{\frac{1}{2}}$, y la restringimos a $K_1 + K_2$ usando el lemma 3.2.2. Es decir, $\tilde{S} = \tilde{J}(\tilde{S}^*\tilde{S})^{\frac{1}{2}}$, donde $\tilde{J} = U\hat{J}U^{-1}$. De manera explícita, usando (3.2.2),

$$\begin{pmatrix} 0 & T^{-1} \\ T & 0 \end{pmatrix} = \tilde{J} \left[\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^{-1} \\ T & 0 \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} \implies \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual coincide con la expresión en [33] (no hay distinción entre $\tilde{J}$ y $\hat{J}$ en esa referencia). Entonces,

$$\tilde{J} \begin{pmatrix} h \\ Th \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Th \\ h \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{J} \begin{pmatrix} h \\ -Th \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Th \\ h \end{pmatrix}. \quad (3.2.13)$$

De aquí y de (3.2.12) reconocemos que $\hat{J}$ actúa sobre K_1 enviándolo a $K_2^\perp$:

$$\hat{J}(f) = U^{-1}\tilde{J}U(f) = U^{-1}\tilde{J} \begin{pmatrix} h \\ Th \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} Th \\ h \end{pmatrix} \in K_2^\perp.$$

De manera análoga podemos mostrar que $\hat{J}$ mapea K_2 a $K_1^\perp$. En resumen, acabamos de demostrar el siguiente lema:

Lema 3.2.4. *Si $K_1, K_2 \subseteq K$ están en posición genérica, entonces*

$$\hat{J}K_1 = K_2^\perp, \quad \hat{J}K_2 = K_1^\perp. \quad (3.2.14)$$

Ya completamos la primer paso de la demostración, ahora nos apartamos de los cálculos técnicos de [33], de esta forma evitaremos introducir operadores no acotados adicionales, pero llegaremos a la misma conclusión. A partir de ahora seguimos de cerca esa referencia, aclarando algunos detalles relevantes.

Queremos demostrar el siguiente lema intermedio, que afirma algo más fuerte que (3.2.14), ya que en términos generales sostiene que es válido para los campos $\varphi(f)$ y $\pi(g)$, y no solo para J actuando sobre los vectores de una partícula.

Lema 3.2.5. *Sea $f \in K_1$ y $g \in K_2$. Entonces*

$$J\varphi(f)J = \varphi(\hat{J}f), \quad J\pi(g)J = \pi(\hat{J}g),$$

con $\hat{J}f \in K_2^\perp$ y $\hat{J}g \in K_1^\perp$.

Antes de demostrar este lema, enunciemos y probemos el siguiente corolario importante, que, según la discusión después de (3.2.8), es suficiente para afirmar que la dualidad de Haag se cumple.

Corolario 3.2.1. *Con las condiciones del lema anterior:*

$$Je^{i\varphi(f)}J = e^{i\varphi(\hat{J}f)},$$

$$Je^{i\pi(g)}J = e^{i\pi(\hat{J}g)}.$$

Demostración. Supongamos por un momento la validez del lema 3.2.5 para demostrar el corolario. Sea $A \in R_W(K_1, K_2)$, entonces, por el Teorema de Tomita-Takesaki, para todo $f \in K_1$ se tiene

$$Je^{i\varphi(f)}JA\Omega = AJe^{i\varphi(f)}J\Omega,$$

y entonces,

$$\begin{aligned} Je^{i\varphi(f)}JA\Omega &= AJ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi(f))^n}{n!} J\Omega = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iJ\varphi(f)J)^n}{n!} \Omega \\ &= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi(\hat{J}f))^n}{n!} \Omega = Ae^{i\varphi(\hat{J}f)}\Omega = e^{i\varphi(\hat{J}f)}A\Omega, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $e^{i\varphi(\hat{J}f)} \in R_W(K_2^\perp, K_1^\perp) \subseteq R_W(K_1, K_2)'$ por localidad. Así, $Je^{i\varphi(f)}J = e^{i\varphi(\hat{J}f)}$ en un conjunto denso, y por continuidad, en todo $\Gamma(\mathcal{H})$. De manera análoga, se demuestra lo mismo para $\pi(g)$. $\square$

Como ya mencionamos anteriormente, la dualidad de Haag se deduce de este corolario. Pasemos ahora a demostrar el lema 3.2.5.

Demostración. Del hecho de que $S\Omega = \Omega$ y $J^2 = 1$ se tiene que $\Delta^{1/2}\Omega = J\Omega$. Como J conmuta con $E^{(0)}$ por el Lema 3.2.2 y notando que Δ es positiva, se sigue¹² que $J\Omega = \Omega$. Entonces, si $f \in K_1$ y $g \in K_2$,

$$J\varphi(f)J\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{J}f = \varphi(\hat{J}f)\Omega, \quad (3.2.15)$$

$$J\pi(g)J\Omega = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{J}g = \pi(\hat{J}g)\Omega, \quad (3.2.16)$$

donde $\hat{J}f \in K_2^\perp$ y $\hat{J}g \in K_1^\perp$ como ya observamos en (3.2.14).

Ahora mostremos que de hecho $J\varphi(f)J = \varphi(\hat{J}f)$. Sea $f \in K_1$ y $U(t) = e^{it\varphi(f)}$ un grupo uniparamétrico en $R_W(K_1, K_2)$, entonces para cualquier $B \in R_W(K_1, K_2)'$ se cumple que $BU(t) = U(t)B$ y para todo $\Psi \in \text{Dom}(\varphi(f))$ tenemos

$$\varphi(f)\Psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)\Psi - \Psi}{t}$$

en la topología de norma de $\Gamma(\mathcal{H})$ [60] (este sí es el espacio de Fock). Luego podemos considerar $BU(t)\Psi = U(t)B\Psi$ y tomar la derivada en $t = 0$, obteniendo $B\varphi(f)\Psi = \varphi(f)B\Psi$ para todo $\Psi \in \text{Dom}(\varphi(f))$, es decir, $B\varphi(f) \subseteq \varphi(f)B$. Aclaremos estos últimos pasos:

$$\begin{aligned} B\varphi(f)\Psi &= B \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)\Psi - \Psi}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{BU(t)\Psi - B\Psi}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)B\Psi - B\Psi}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{U(t) - 1}{t} B\Psi \\ &= \varphi(f)B\Psi \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que B es acotado, en la tercera línea usamos que $B \in R_W(K_1, K_2)'$, y en la quinta línea usamos que, dado que el límite en la cuarta línea existe (el lado izquierdo), entonces $B\Psi$ debe estar en el dominio de $\varphi(f)$ y, además, el límite en la cuarta línea es igual a $\varphi(f)B\Psi$ (Proposición 10.14 de [60]). Hemos demostrado que $B\text{Dom}(\varphi(f)) \subseteq \text{Dom}(\varphi(f))$ y $\varphi(f)B = B\varphi(f)$ sobre $\text{Dom}(\varphi(f))$. Cuando esto sucede para cualquier $B \in R_W(K_1, K_2)'$, se dice que el operador no acotado $\varphi(f)$ está *afiliado a* $R_W(K_1, K_2)$ [55].

¹²Otra forma de verlo es la siguiente: es un hecho que S^* es el operador de Tomita del conmutante $R_W(K_1, K_2)'$ (ver [55]), que está bien definido ya que Ω es un vector cíclico y separante para $R_W(K_1, K_2)$, lo que implica que también lo es para su conmutante $R_W(K_1, K_2)'$. Entonces, $S^*\Omega = \Omega$ y $J\Omega = S(S^*S)^{-1/2}\Omega = \Omega$.

Podemos entonces escribir $B = JAJ$ para algún $A \in R_W(K_1, K_2)$, que por el Teorema de Tomita-Takesaki pertenece a $R_W(K_1, K_2)'$, y luego obtenemos

$$JAJ\varphi(f) \subseteq \varphi(f)JAJ, \quad (3.2.17)$$

de donde

$$\begin{aligned} J\varphi(f)JA\Omega &= J\varphi(f)JAJ^2\Omega \\ &= J\varphi(f)(JAJ)\Omega \\ &= J(JAJ)\varphi(f)\Omega \\ &= AJ\varphi(f)J\Omega \\ &= A\varphi(\hat{J}f)\Omega \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

donde hemos usado repetidamente $J^2 = 1$, $J\Omega = \Omega$, y en la última línea usamos (3.2.15). Note que $\hat{J}f$ pertenece a $K_2^\perp$ por (3.2.14), y que $A \in R_W(K_1, K_2) \subseteq R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)'$ por localización. Repitiendo los mismos argumentos anteriores, podemos decir que $\varphi(\hat{J}f)$ está afiliado a $R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)$, y en particular $A\varphi(\hat{J}f) \subset \varphi(\hat{J}f)A$. Entonces, (3.2.18) establece que $J\varphi(f)JA\Omega = \varphi(\hat{J}f)A\Omega$, lo cual es equivalente a

$$J\varphi(f)J|_{R_W(K_1, K_2)\Omega} = \varphi(\hat{J}f)|_{R_W(K_1, K_2)\Omega} \quad (3.2.19)$$

Ahora necesitamos mostrar que se pueden quitar las restricciones en ambos lados para obtener la igualdad deseada y finalizar la demostración. La idea para hacerlo es tomar clausura a ambos lados de esta ecuación, pero esto es delicado. En [33] los autores no dan muchos detalles y creemos que este es un paso crucial, por lo tanto pasamos a detallar nuestro argumento.

Comenzamos con el lado derecho. El objetivo es mostrar que $R_W(K_1, K_2)\Omega$ es un *core*¹³ para $\varphi(\hat{J}f)$. Esto es equivalente a mostrar que $\varphi(\hat{J}f)|_{R_W(K_1, K_2)\Omega}$ es esencialmente autoadjunto, ya que en tal caso su clausura sería entonces una extensión autoadjunta, que por la unicidad de las extensiones autoadjuntas para operadores esencialmente autoadjuntos debe ser $\varphi(\hat{J}f)$. Debido a esto, queremos mostrar que $R_W(K_1, K_2)\Omega$ es un conjunto (total¹⁴) de vectores analíticos¹⁵ lo cual, por el teorema de Nelson (Teorema X.39 en [54]), implica que $\varphi(\hat{J}f)|_{R_W(K_1, K_2)\Omega}$ es esencialmente autoadjunto. Entonces, consideremos $U(t\hat{J}f)R_W(K_1, K_2)\Omega$, con $t \in \mathbb{R}$, y veamos a dónde llegamos,

¹³El *core* de un operador X es un subespacio denso $\mathcal{D} \subseteq \text{Dom}(X)$ tal que el operador X está determinado unívocamente por su acción en $\mathcal{D}$. Es decir, si Y es otro operador en $\mathcal{H}$ que coincide con X en $\mathcal{D}$, entonces $Y = X$.

¹⁴Un conjunto total de vectores asociados a un operador X es un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \text{Dom}(X)$ tal que el conjunto $\{X\psi : \psi \in \mathcal{D}\}$ es denso en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

¹⁵Un vector analítico para algún operador A es un vector Ψ tal que $\sum_{n \geq 0} \|A^n \Psi\| \frac{t^n}{n!} < \infty$ para algún $t > 0$. Usaremos que Ω es un vector analítico para $\varphi(f)$, y esto es cierto porque en realidad cualquier vector de partículas finitas es analítico, como se muestra en el Teorema X.41 de [54].

$$\begin{aligned}
U(t\hat{J}f)R_W(K_1, K_2)\Omega &= R_W(K_1, K_2)U(t\hat{J}f)\Omega \\
&= R_W(K_1, K_2) \sum_{n \geq 0} \frac{(it\varphi(\hat{J}f))^n}{n!} \Omega \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \varphi(\hat{J}f)R_W(K_1, K_2)\varphi(\hat{J}f)^{n-1}\Omega \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{(it\varphi(\hat{J}f))^n}{n!} R_W(K_1, K_2)\Omega
\end{aligned}$$

donde en la primera línea usamos que $U(t\hat{J}f)$ pertenece a $R_W(K_1, K_2)'$, en la segunda línea que Ω es un vector analítico para $\varphi(\hat{J}f)$, en la tercera línea que $\varphi(\hat{J}f)$ está afiliado a $R_W(K_2^\perp, K_1^\perp)$ y en la última línea simplemente repetimos el paso anterior. Este resultado dice, en primer lugar, que tiene sentido aplicar $\varphi(\hat{J}f)$ n veces a cualquier elemento de $R_W(K_1, K_2)$ y, en segundo lugar y lo más importante, que la serie converge para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Es decir, si $\Psi \in R_W(K_1, K_2)\Omega$,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(i\varphi(\hat{J}f))^n \Psi}{n!} t^n = U(t\hat{J}f)\Psi \in \mathcal{F}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.2.20)$$

La convergencia de esta serie de potencias para cualquier t implica que el radio de convergencia es ∞ , y luego realmente converge de manera uniforme y absoluta¹⁶, lo que significa que Ψ es un vector analítico para $\varphi(\hat{J}f)$. Esto completa el argumento para mostrar que el cierre de $\varphi(\hat{J}f)|_{R_W(K_1, K_2)\Omega}$ en el lado derecho de (3.2.19) es precisamente $\varphi(\hat{J}f)$.

Con el análisis anterior completado, es más fácil mostrar cuál es el cierre del lado izquierdo de (3.2.19). Primero, note que dado que $\varphi(f)$ es autoadjunto y lo es también J , entonces $J\varphi(f)J$ también es autoadjunto y es, obviamente, una extensión del lado izquierdo. Pero ahora sabemos que el cierre de $J\varphi(f)J|_{R_W(K_1, K_2)\Omega}$ es $\varphi(\hat{J}f)$, que es autoadjunto. Entonces, $\varphi(\hat{J}f)$ también es una extensión autoadjunta de $\varphi(\hat{J}f)|_{R_W(K_1, K_2)\Omega}$, y por unicidad de las extensiones autoadjuntas para operadores esencialmente autoadjuntos, debe ser que $J\varphi(f)J = \varphi(\hat{J}f)$. El mismo razonamiento se puede aplicar a $\pi(g)$. $\square$

3.2.3. Un contraejemplo de la dualidad

El contraejemplo que presentamos para la dualidad de Haag debe estar necesariamente relacionado con una región que no sea el desarrollo causal $\diamond(B)$ de una región B en una superficie de Cauchy. Fue originalmente construido en [15].

¹⁶Ver Teorema 2 en la Sección 2.4 del Capítulo 2 en [63]. Estamos adaptando la prueba de allí a nuestro caso, tomando la norma de Hilbert en su lugar.

Primero establecemos algunos hechos que serán útiles a continuación. El primero de ellos es que el mapa de segunda cuantización es un mapa inyectivo. Para fijar ideas, considérela en la forma de Segal como en (3.1.14). Si $H_1 \subseteq H_2$, entonces es claro que $R_S(H_1) \subseteq R_S(H_2)$ (isotonía). Ahora probamos el recíproco de la isotonía. Será útil escribir la CCR en la forma de Segal (2.2.5) como

$$[W(\eta), W(\mu)] = W(\eta)W(\mu) \left(1 - e^{i(\mu, \beta\eta)\kappa}\right). \quad (3.2.21)$$

Para demostrar que $H_1 \not\subseteq H_2$ implica $R_S(H_1) \not\subseteq R_S(H_2)$, supongamos que $H_1 \not\subseteq H_2$. Entonces, $H_2^\perp \not\subseteq H_1^\perp$ y existe un elemento $h_2 \in H_2^\perp$ tal que $h_2 \notin H_1^\perp$. Luego, al tomar un $h_1 \in H_1$ tal que $(h_2, h_1)_\mathcal{K} \neq 0$ y usar la ecuación (3.2.21) con $\eta = \beta h_2$ y $\mu = \lambda h_1$, es posible encontrar un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $[W(\beta h_2), W(\lambda h_1)] \neq 0$. Por lo tanto, $W(\beta h_2) \notin R_S(H_1)'$. Por otro lado, aplicando nuevamente la ecuación (3.2.21) tomando $\eta = \beta h_2$ y $\mu \in H_2$, obtenemos de $(\mu, h_2) = 0$ que $W(\beta h_2) \in R_S(H_2)'$. Ahora supongamos que, de hecho, $R_S(H_1) \subseteq R_S(H_2)$, lo que implica $R_S(H_2)' \subseteq R_S(H_1)'$. Pero esto es una contradicción con lo que acabamos de mostrar: $W(\beta h_2) \in R_S(H_2)'$ y $W(\beta h_2) \notin R_S(H_1)'$. Por lo tanto, dos subespacios H_1, H_2 de $\mathcal{K}$ satisfacen $R_S(H_1) = R_S(H_2)$ si y solo si $H_1 = H_2$.

La siguiente fórmula también será útil. Para derivarla, recordemos el producto interno en $\mathcal{K}$ (2.1.6) y la definición de β (2.1.11). Dados $h_1, h_2 \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} (h_1, \beta h_2)_\mathcal{K} &= -\operatorname{Im}\{(h_1, h_2)_\mathcal{H}\} = -\operatorname{Im}\left\{2i \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} h_1(x) \Delta^{(+)}(x-y) h_2(y) dx dy\right\} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} h_1(x) 2\operatorname{Re}\left\{\Delta^{(+)}(x-y)\right\} h_2(y) dy dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} h_1(x) \Delta(x-y) h_2(y) dy dx = -\int_{\mathbb{R}^4} h_1(x) F_{h_2}(x) dx, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

donde usamos el propagador causal $\Delta = 2\operatorname{Re}\{\Delta^{(+)}\}$ y la ecuación (2.1.2).

Como mencionamos, el contraejemplo que presentamos para la dualidad de Haag debe estar necesariamente relacionado con una región que no sea un diamante causal ni una *wedge*. La región propuesta es

$$B = \diamond(T_1) \cup \diamond(T_2),$$

donde llamamos T_1 al intervalo abierto en el eje del tiempo (t_1, t_2) , donde $t_2 > t_1 > 0$, $T_2 := -T_1$, y $\diamond(T_i) = T_i''$ (el complemento causal del complemento causal, es decir, la completación causal causal, como se define en (3.1.4)). Entonces, la región B es la unión de dos diamantes separados por un tiempo, y su complemento causal B' se muestra en la Figura 3.1.

Definimos $\diamond(T)$ como antes pero con $T = (-t_2, t_2)$, nuevamente un intervalo sobre el eje del tiempo. Es fácil ver que $B' = \diamond(T)'$, ver Figura 3.2. Dado que $\diamond(T)$ es un diamante causal, sabemos que la dualidad de Haag se cumple y $A_S(\diamond(T)) = A_S(\diamond(T)')' = A_S(B')'$. Entonces, para probar que la dualidad de Haag falla para la región B , basta con demostrar

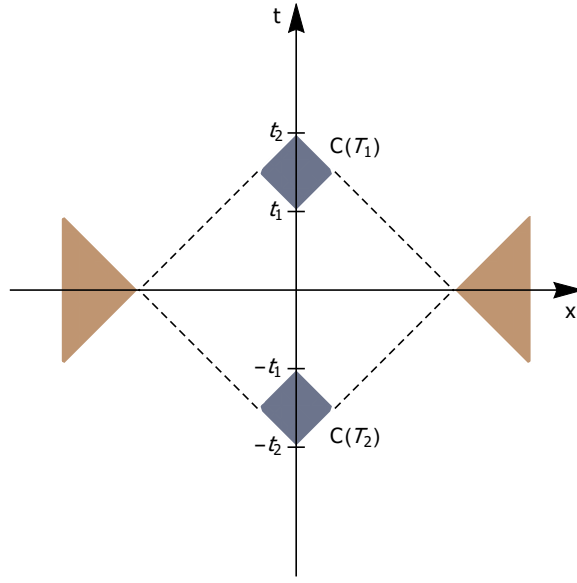


Figura 3.1: Diagrama de la región $B = \diamond(T_1) \cup \diamond(T_2)$ y su complemento causal B' en marrón.

que $A_S(\diamond(T)) \neq A_S(B)$. Pero, a partir de la observación anterior sobre la propiedad de inyectividad del mapa de segunda cuantización, esto es equivalente a $S_S(\diamond(T)) \neq S_S(B)$. Para demostrar esto, construimos una función que no pertenece a $S_S(\diamond(T))^\perp$ pero pertenece a $S_S(B)^\perp = S_S(\diamond(T_1) \cup \diamond(T_2))^\perp$.

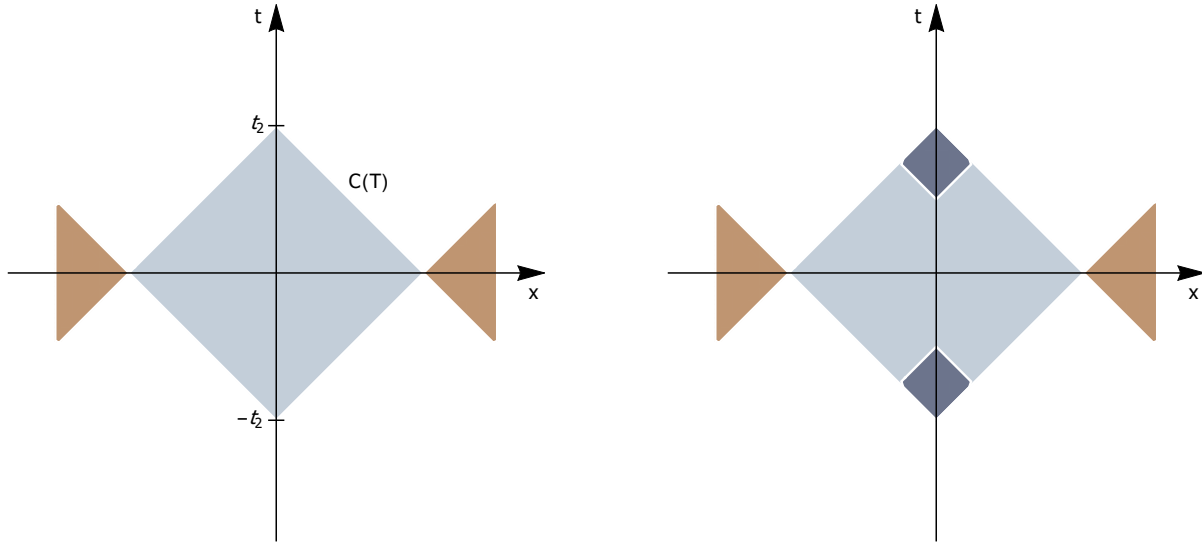


Figura 3.2: A la izquierda, un diagrama que muestra la región $\diamond(T)$, el diamante causal de $(-t_2, t_2)$, y su complemento causal en marrón. A la derecha, $\diamond(T_1)$ y $\diamond(T_2)$ están incluidos, y el complemento causal es el mismo para B y $\diamond(T)$.

El primer paso es observar la ecuación bidimensional

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - m^2 \phi = 0 \quad (3.2.23)$$

que puede considerarse como una ecuación de Klein-Gordon donde los roles de x y t están invertidos y la masa es puramente imaginaria. Este tipo de ecuación fue estudiado en detalle por Robinett en [64], donde mostró que la causalidad aún se cumple. Es decir, para unos datos iniciales dados $\phi(t, 0)$ y $\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, 0)$, funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, existe una solución única $\phi(t, x)$, también infinitamente diferenciable, que además satisface $\phi(t, x) = 0$ para cualquier (t, x) tal que $x^2 < (t - t')^2$ para todo $t' \in \text{supp}(\phi(t, 0)) \cup \text{supp}(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, 0))$. Luego, al tomar condiciones iniciales diferenciables cuyo soporte está contenido en el intervalo $(-t_1, t_1)$ del eje temporal, obtenemos una solución diferenciable $\phi_0(t, x)$ cuyo soporte no interseca $\diamond(T_1)$ ni $\diamond(T_2)$, como se muestra esquemáticamente en la Figura 3.3.

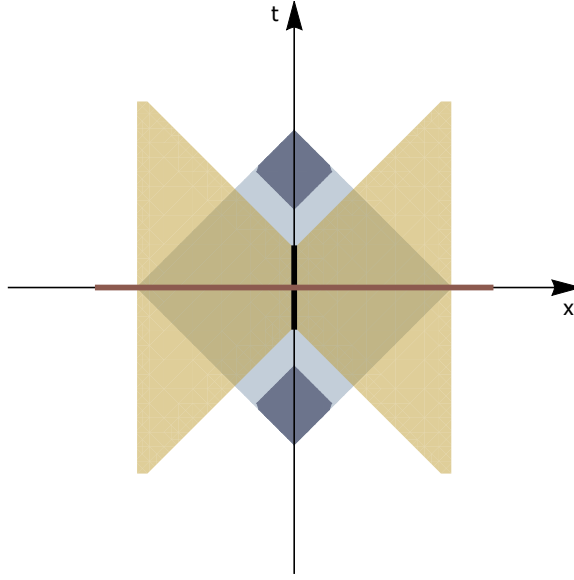


Figura 3.3: Las condiciones iniciales de ϕ_0 están soportadas en la gruesa línea negra en el eje temporal. Su soporte está representado como la región beige y no interseca B . La línea horizontal gruesa de color arcilla representa el soporte compacto de las condiciones iniciales de G .

Ahora definimos las condiciones iniciales para el problema habitual de Klein-Gordon en cuatro dimensiones

$$g_1(\vec{x}) = \phi_0(0, x_1)h_1(\vec{x}), \quad g_2(\vec{x}) = \frac{\partial\phi_0}{\partial t}(0, x_1)h_1(\vec{x}), \quad (3.2.24)$$

donde $h_1(\vec{x})$ es una función infinitamente diferenciable con soporte compacto tal que $h_1(\vec{x}) = 1$ si $|\vec{x}| \leq t_2$. Luego consideramos el problema de valores iniciales

$$(\square + m^2)G(x) = 0, \quad G(0, \vec{x}) = g_1(\vec{x}), \quad \frac{\partial G}{\partial x^0}(0, \vec{x}) = g_2(\vec{x}). \quad (3.2.25)$$

Por unicidad de la solución en $\diamond(T)$ y dado que $\phi_0(x^0, x^1)$ satisface (3.2.25), entonces $G(x) = \phi_0(x^0, x^1)$ en $\diamond(T)$. Además, G proviene de aplicar el propagador causal Δ a una función g en $\mathcal{K}$, como se muestra a continuación.

Sabemos por el apéndice 7.2, considerando una ligera variación de la ecuación (7.2.4) (cambiando el tiempo cero por un tiempo arbitrario y siguiendo los mismos pasos que para su deducción), que para cualquier $s \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \Delta(x-y) \phi_s(y) dy \quad (3.2.26)$$

$$\text{donde } \phi_s(y) = -\delta(y^0 - s) \frac{\partial G}{\partial y^0}(s, \vec{y}) - \delta'(y^0 - s) G(s, \vec{y}). \quad (3.2.27)$$

Luego, tomando una $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \chi(s) ds = 1$, podemos reescribir G de una manera útil

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi(s) G(x) ds = \int_{\mathbb{R}} \chi(s) \left(\int_{\mathbb{R}^4} \Delta(x-y) \phi_s(y) dy \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \Delta(x-y) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi(s) \phi_s(y) ds \right) dy = F_g(x), \end{aligned}$$

donde

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} \chi(s) \phi_s(y) ds. \quad (3.2.28)$$

Afirmamos que g está en $\mathcal{K}$, incluso más, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$. Esto sigue del hecho de que, dado que g_1 y g_2 tienen soporte compacto, nuestra solución G es espacialmente compacta (lo que significa que, dado $s \in \mathbb{R}$, los soportes de $G(s, \vec{y})$ y $\frac{\partial G}{\partial y^0}(s, \vec{y})$ son conjuntos compactos de $\mathbb{R}^3$, ver [17] para más detalles). Veámoslo explícitamente,

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{\mathbb{R}} \chi(s) \phi_s(y) ds \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \chi(s) \delta(y^0 - s) \frac{\partial G}{\partial y^0}(s, \vec{y}) + \chi(s) \delta'(y^0 - s) G(s, \vec{y}) ds \\ &= \chi'(y^0) G(y) \end{aligned}$$

donde en la última línea usamos la derivada débil. Escrito de esta manera, es obvio que g es una función suave y también que tiene soporte compacto, ya que χ tiene soporte compacto y G es espacialmente compacta.

Anteriormente mencionamos que estamos buscando una función que no pertenezca a $\mathbf{S}_S(\diamond(T))^\perp$ pero que pertenezca a $\mathbf{S}_S(B)^\perp = \mathbf{S}_S(\diamond(T_1) \cup \diamond(T_2))^\perp$. Afirmamos que esta función es βg porque, dado $f \in \mathbf{S}_S(\diamond(T_1) \cup \diamond(T_2))$,

$$(f, \beta g)_\mathcal{K} = \int_{\mathbb{R}^4} f(x) F_g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^4} f(x) G(x) dx = 0,$$

donde usamos la ecuación (3.2.22) y el hecho de que $G(x)$ se anula en $\diamond(T_1) \cup \diamond(T_2)$. Por otro lado, mediante un cálculo similar, $\beta g \notin \mathbf{S}_S(\diamond(T))^\perp$.

Capítulo 4

Entropía de excitaciones coherentes

“ You should call it entropy, for two reasons. In the first place your uncertainty function has been used in statistical mechanics under that name, so it already has a name. In the second place, and more important, nobody knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage. ”

John von Neumann, *en una conversación con Claude Shannon*, ~1941

En este capítulo presentaremos dos cálculos, el primero de ellos es una revisión de cómo calcular la entropía relativa entre dos excitaciones del estado de vacío del bosón quirral, localizadas en cierto intervalo que puede o no ser acotado. El segundo resultado es análogo, pero esta vez la entropía relativa será entre excitaciones coherentes del *estado termal*, aquí nuestro resultado es válido aún para intervalos acotados, pudiendo generalizar el resultado en [48] válido solo para semirrectas. Nuestro resultado es consistente con trabajos previos al respecto, por ejemplo en [65] obtienen el mismo Hamiltoniano modular para el estado termal localizado en un intervalo acotado. Allí ellos aplican el método de pasar al plano complejo y compactificar la componente imaginaria imponiendo un periodo β . Como se verá en breve, nuestro método difiere del de ellos y además para el posterior cálculo de la entropía relativa tampoco utilizamos el método del cut off, sino que obtenemos la misma sin necesidad de tomar ningún límite.

Además el enfoque de la teoría de Tomita-Takesaki nos permitirá hallar de manera relativamente directa varias cotas relevantes para la entropía, como la de Bekenstein o la QNEC tanto para el estado de vacío como para el termal. Por último extenderemos a dimensión 1+1 todos los resultados.

Para abordar dichos cálculo desde el punto de vista de la teoría de Tomita-Takesaki es menester introducir primero los objetos de relevancia, y exhibir una fórmula para la entropía relativa en términos de ellos. Luego de hacer esto, pasaremos a contar un método de purificación

que será la piedra angular para (en cierta forma que precisaremos) poder aplicar al estado termal resultados a existentes para el estado de vacío.

4.1. Estructura modular del álgebra de Weyl y purificación de estados

Ya vimos en la introducción que una forma de enunciar las CCR es a través de una estructura simpléctica, como se muestra en la ecuación (1.1.7). Esta idea también se retomó en la ecuación (2.2.5), donde se utilizó la forma simpléctica σ definida en la ecuación (2.1.12) sobre el espacio de una partícula. La misma no solo facilita la escritura de las CCR, sino también como veremos la de la definición de estados KMS a nivel del espacio de una partícula.

De aquí en adelante, dado un espacio simpléctico $(\mathcal{K}, \sigma)$ siendo $\mathcal{K}$ un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, obtenemos un álgebra CCR con las relaciones

$$W(f)W(g) = e^{-i\sigma(f,g)}W(f+g), \quad W(f)^* = W(-f) \quad (4.1.1)$$

donde $f, g \in \mathcal{K}$. Nos referiremos a esta álgebra como $\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma)$.

Veamos ahora cómo se formula la condición KMS en el espacio de una partícula. El espacio real de una partícula $\mathcal{K}$ tiene asociada una forma simpléctica σ que como ya mencionamos es la parte imaginaria del producto interno de $\mathcal{H}$. Podemos pensar en muñir a $\mathcal{K}$ de una forma $\mathbb{R}$ -bilineal, simétrica y definida positiva τ que satisfaga

$$\sigma(f, g)^2 \leq \tau(f, f)\tau(g, g). \quad (4.1.2)$$

Dicho τ bien podría ser la parte real del producto interno de $\mathcal{H}$, es decir el producto en $\mathcal{K}$, pero no necesariamente tiene que serlo. Cualquier τ que satisfaga (4.1.2), define un estado *quasifree* (ver [66]) mediante

$$\omega(W(h)) := e^{-\frac{1}{2}\tau(h,h)} \quad (4.1.3)$$

completándose la definición vía $\mathbb{C}$ -linealidad y continuidad a otro tipo de operadores. Si en la ecuación (4.1.3) cambiamos τ por otra forma $\mathbb{R}$ -bilineal, simétrica y definida positiva que cumpla la condición (4.1.2) obtendremos otro estado quasifree y de hecho la correspondencia es uno a uno, en particular el estado quasifree correspondiente a $\tau(h_1, h_2) = \text{Re}(h_1, h_2)_{\mathcal{K}}$ es el estado de vacío.

La función de 2 puntos del estado cuasifree definido por (4.1.3) es $w_2(f, g) = \tau(f, g) + i\sigma(f, g)$. Sin embargo, dicho estado puede no ser puro. Es puro si y solo si w_2 es un producto interno complejo. Más precisamente, a partir de (4.1.2) se puede demostrar que existe una contracción D tal que

$$\sigma(f, g) = \tau(f, Dg). \quad (4.1.4)$$

Debido a la no degeneración de σ , D es invertible y su descomposición polar es $D = C|D|$. Aquí, C es una estructura compleja y el estado ω es puro si y solo si w_2 es un producto interno complejo, es decir, bilineal con respecto a la estructura compleja C . Esto es equivalente a la afirmación de que ω es puro si y solo si $|D| = 1$ (ver [67] para más detalles).

Pospondremos la construcción de una purificación de un estado no puro hasta el final de esta sección.

Diremos que $(\mathcal{K}, \tau, \sigma)$ es una estructura dinámica de una partícula si existe un grupo uniparamétrico de operadores unitarios¹ $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sobre $\mathcal{H}$ tal que $\alpha_t W(h) = W(U_t h)$.

Para estados quasifree si consideramos la condición de borde de la KMS:

$$\omega(a\alpha_{t+i\beta}(b)) = \omega(\alpha_t(b)a) \quad (4.1.5)$$

y la aplicamos a operadores $a = W(h_1)$ y $b = W(h_2)$ con $h_i \in \mathcal{K}$ entonces así, el miembro izquierdo de la igualdad quedaría:

$$\begin{aligned} \omega(W(h_1)\alpha_{t+i\beta}(W(h_2))) &= \omega(W(h_1)W(U_{t+i\beta}h_2)) = \omega\left(e^{-\frac{i}{2}\sigma(h_1, U_{t+i\beta}h_2)}W(h_1 + U_{t+i\beta}h_2)\right) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(h_1, U_{t+i\beta}h_2)}\omega(W(h_1 + U_{t+i\beta}h_2)) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(h_1, U_{t+i\beta}h_2) - \frac{1}{2}\tau(h_1 + U_{t+i\beta}h_2, h_1 + U_{t+i\beta}h_2)} \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(h_1, U_{t+i\beta}h_2) - \frac{1}{2}[\tau(h_1, h_1) + 2\tau(h_1, U_{t+i\beta}h_2) + \tau(U_{t+i\beta}h_2, U_{t+i\beta}h_2)]}. \end{aligned}$$

Se ha hecho uso de que el estado es quasifree, de la relaciones CCR, la $\mathbb{C}$ -linealidad de los estados, etc. Procediendo de igual manera en el miembro derecho de la ecuación (4.1.5) obtenemos

$$\omega(\alpha_t(W(h_2))W(h_1)) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(U_t h_2, h_1) - \frac{1}{2}[\tau(h_1, h_1) + 2\tau(U_t h_2, h_1) + \tau(h_2, h_2)]}.$$

Llamaremos condición KMS en el espacio de una partícula a una condición suficiente para que la KMS se de al nivel ya descrito en la segunda cuantización, diremos entonces que

Definición 4.1.1. *Un estado quasifree ω definido sobre el álgebra de von Neumann de operadores $W(h)$ con $h \in (\mathcal{K}, \tau, \sigma)$ se define por*

$$\omega(W(h)) = e^{-\frac{1}{2}\tau(h, h)}$$

extendiendo por $\mathbb{C}$ -linealidad y continuidad débil y diremos que satisface la condición KMS- β de una partícula si cumple que para todo $h_1, h_2 \in \mathcal{K}$ existe una función continua $f_{h_1, h_2} : \mathbb{R} \times i[0, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en el interior de la banda y satisfaciendo la condición de borde

$$f_{h_1, h_2}(t) = \omega_2(h_1, U_t h_2) \quad y \quad f_{h_1, h_2}(t + i\beta) = \omega_2(U_t h_2, h_1) \quad (4.1.6)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Donde $\omega_2(,) = \tau(,) + i\sigma(,)$.

¹Unitarios respecto al producto interno en $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ (como conjuntos) dado por $\tau + i\sigma$, que no necesariamente coincide con el producto interno complejo en $\mathcal{H}$. Notemos que tales operadores U_t deberán respetar por un lado τ y por otro σ , es decir $\tau(h_1, h_2) = \tau(U_t h_1, U_t h_2)$ e igualmente para σ (nos referiremos a esto último diciendo que U_t es un symplectomorfismo).

Utilizando que $\omega_2(h_1, h_2) = \tau(h_1, h_2) + i\sigma(h_1, h_2)$ nos damos cuenta que de la condición KMS de una partícula se desprenden:

$$\tau(h_1, U_{t+i\beta}h_2) = \tau(U_th_2, h_1)$$

$$\sigma(h_1, U_{t+i\beta}h_2) = \sigma(U_th_2, h_1)$$

y en particular

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2}\sigma(h_1, U_{t+i\beta}h_2) - \frac{1}{2}[\tau(h_1, h_1) + 2\tau(h_1, U_{t+i\beta}h_2) + \tau(U_{t+i\beta}h_2, U_{t+i\beta}h_2)] \\ & = -\frac{i}{2}\sigma(U_th_2, h_1) + 2k\pi i - \frac{1}{2}[\tau(h_1, h_1) + 2\tau(U_th_2, h_1) + \tau(h_2, h_2)] \end{aligned}$$

de donde se desprende (y de las cuentas previas a la definición 4.1.1) que la condición de borde dada por la ecuación (4.1.5) se debe satisfacer para estados quasifree y de hecho se satisface la condición KMS a nivel de segunda cuantización para el estado ω pudiendo demostrarse también la analiticidad de F apelando a la de f . Más aún la relación exacta entre ambas es

$$F_{W(h_1), W(h_2)}(z) = \omega(W(h_1))\omega(W(h_2))e^{-f_{h_1, h_2}(z)} \quad (4.1.7)$$

los detalles al respecto se encuentran por ejemplo en [68].

Entropía relativa en la segunda cuantización

Suponemos que tenemos un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle f, g \rangle = w_2(f, g)$. En otras palabras, asumimos por ahora que el estado es puro. Llamemos a su espacio de Fock (bosónico) $\Gamma(\mathcal{H})$. Tenemos una representación del álgebra $\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma)$ en el espacio de Fock $\Gamma(\mathcal{H})$. De hecho, $W(f)$ actúa en $\Gamma(\mathcal{H})$ como $V(f)$:

$$V(f)e^0 = e^{-\frac{1}{2}\langle f, f \rangle}e^f, \quad f \in \mathcal{H} \quad (4.1.8)$$

con

$$e^f := 1 \oplus f \oplus \frac{1}{\sqrt{2!}}f \otimes f \oplus \dots \quad (4.1.9)$$

Si U es un operador unitario sobre $\mathcal{H}$, es posible extender su acción más allá del espacio de una partícula $\mathcal{H}$ a todo el álgebra de operadores $\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma)$. Dicha extensión se suele denotar $\Gamma(U)$ (o e^U) y está definida sobre todo $\Gamma(\mathcal{H})$

$$\Gamma(U) = 1 \oplus U \oplus (U \otimes U) \oplus (U \otimes U \otimes U) \oplus \dots \quad (4.1.10)$$

Nótese que $e^U e^h = e^{Uh}$. En ocasiones abusando de la notación definiremos operadores unitarios U sobre el espacio de una partícula y luego diremos que los aplicaremos a elementos del álgebra cualquiera sea su grado, con esto en realidad nos referiremos a la aplicación de $\Gamma(U)$.

Llamando $\Omega := e^0$ el vector de vacío

$$(\Omega, V(f)\Omega) = e^{-\frac{1}{2}\langle f, f \rangle} = \omega(W(f)). \quad (4.1.11)$$

Esto muestra que $(V, \Gamma(\mathcal{H}), \Omega)$ es una representación de estado ω , y como es cíclica (ver más adelante), es unitariamente equivalente a la GNS.

Podemos definir las álgebras locales asociadas a un subespacio real-lineal dado $H \subset \mathcal{H}$:

$$R(H) := \{V(f); \quad f \in H\}'' \quad (4.1.12)$$

Resulta que Ω es cíclico (respectivamente separante) para $R(H)$ si y solo si H es cíclico (respectivamente separante). H es cíclico si $\overline{H + iH} = \mathcal{H}$ mientras que es separante si $H \cap iH = 0$. Si además H es también cerrado, se llama un subespacio *estándar*.

El operador de Tomita S asociado a $R(H)$ (y Ω) se define por (la clausura de)

$$SV(f)\Omega = V(f)^*\Omega, \quad V(f) \in R(H) \quad (4.1.13)$$

El operador de Tomita *relativo* $S_{\Omega', \Omega}$ asociado a $R(H)$ se define por (la clausura de)

$$S_{\Omega', \Omega}V(f)\Omega = V(f)^*\Omega' \quad (4.1.14)$$

con descomposición polar

$$S_{\Omega', \Omega} = J_{\Omega', \Omega} \Delta_{\Omega', \Omega}^{1/2}. \quad (4.1.15)$$

Para álgebras del estilo $R(H)$ y estados cíclicos y separantes ω y ω' , la entropía relativa de Araki (ver [69]) se define como

$$S_A(\omega || \omega') = -\langle \Omega, \log \Delta_{\Omega', \Omega} \Omega \rangle, \quad (4.1.16)$$

siendo $|\Omega\rangle$ y $|\Omega'\rangle$ dos vectores cíclicos y separantes asociados a ω y ω' respectivamente. Dicha definición generaliza la noción de entropía relativa existente para estados dados por matrices de densidad. Además la misma es pasible de escribirse en la forma:

$$S_{\Omega', \Omega} = i \left. \frac{d}{dt} \langle \Omega, \Delta_{\Omega', \Omega}^{it} \Omega \rangle \right|_{t=0},$$

ver por ejemplo [37], proposición 4.1.

Algunas de las propiedades más relevantes de esta entropía relativa son (ver [35] o [29]):

- **No negatividad:** $S_{\mathcal{R}}(\omega || \psi) \geq 0$, y $S_{\mathcal{R}}(\omega || \psi) = 0$ si y solo si $\omega = \psi$ en la región $\mathcal{R}$.
- **Asimetría:** En general, $S_{\mathcal{R}}(\omega || \psi) \neq S_{\mathcal{R}}(\psi || \omega)$, lo cual refleja la ausencia de simetría.
- **Aditividad:** Si la región $\mathcal{R}$ se puede descomponer en dos subregiones disjuntas $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, y los estados ω y ψ son independientes² en esas subregiones, entonces la entropía relativa total es la suma de las entropías relativas en cada subregión:

$$S_{\mathcal{R}}(\omega || \psi) = S_{\mathcal{R}_1}(\omega || \psi) + S_{\mathcal{R}_2}(\omega || \psi).$$

²Entendemos por estados independientes en dos subregiones a aquellos estados que sean producto tensorial de estados definidos sobre las álgebras correspondientes a cada una de las regiones

- **Monotonía:** La entropía relativa es monótona respecto a la región $\mathcal{R}$. Es decir, si $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, entonces $S_{\mathcal{R}_1}(\omega||\psi) \leq S_{\mathcal{R}_2}(\omega||\psi)$. Esto refleja que al ampliar la región, la “discrepancia” entre los estados aumenta ya que se cuenta con más operadores para poder distinguirlos.

Entropía relativa entre estados coherentes en la primera cuantización

La entropía relativa entre estados genéricos es difícil de calcular, sin embargo se simplifica considerablemente para estados coherentes³, dichos estados vienen a generalizar la noción de estado coherente de QM:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle.$$

Es decir son excitaciones de un dado estado vía un operador unitario, por ejemplo $\Omega' = V(f)\Omega$, y llamaremos al estado algebraico correspondiente ω_f . Para ver esto, primero necesitamos introducir una teoría modular para $H \subset \mathcal{H}$, con H estándar, siguiendo [70].

El operador de Tomita análogo se define por la clausura de $S_H(f + ig) = f - ig$ y su descomposición polar es

$$S_H = J_H \Delta_H^{1/2} \quad (4.1.17)$$

Entonces, la entropía de un vector $f \in H$ con respecto a H se define por

$$S_H(f) := -\langle f, \log \Delta_H f \rangle \quad (4.1.18)$$

De hecho, en [37] se generalizó para $f \in \mathcal{H} \cap \text{Dom}(K_H)$,

$$S_H(f) := -\langle f, P_H \log \Delta_H f \rangle = \sigma(f, P_H i K_H f), \quad (4.1.19)$$

donde

$$K_H := -\log \Delta_H = i \frac{d}{du} \Delta_H^{iu} \Big|_{u=0}, \quad (4.1.20)$$

es el Hamiltoniano modular de 1-partícula y donde $P_H : H + H' \rightarrow H$, aquí P_H es la denominada *proyección de corte*, $P_H : H \oplus H' \rightarrow H$ y $P_H(h + h') = h$ para todo $h \in H$ y $h' \in H'$ el complemento simpléctico de H y es $\mathbb{R}$ -lineal, además asumimos que H es *factorial*, es decir, $H \cap H' = \{0\}$. Siendo H' el complemento simpléctico de H . En dicho trabajo se demostró que la entropía relativa de Araki (4.1.16), entre un estado coherente $V(f)\Omega$ y un estado *puro* Ω , es nada menos que la entropía del vector $f \in \mathcal{H} \cap \text{Dom}(K_H)$:

$$S(\omega_f||\omega) = \sigma(f, P_H i K_H f) = S_H(f) \quad (4.1.21)$$

Para su demostración, ver por ejemplo [71] o [37]. Notemos que ahora podríamos calcular la entropía relativa trabajando exclusivamente a nivel del espacio de Hilbert de 1-partícula $\mathcal{H}$.

³La entropía relativa entre estados coherentes satisface $S(\omega_f||\omega_g) = S(\omega_{f-g}||\omega)$, así que no hay pérdida de generalidad en asumir que un estado no es excitado por una unitaria de Weyl.

4.1.1. Purificación de ω

Dado que estamos interesados en calcular la entropía relativa en el caso en que ω es un estado térmico, y dado que (4.1.21) es válida para estados puros, necesitamos trabajar con una purificación de ω . Esto se puede lograr mediante un procedimiento⁴ que recordaremos ahora mismo siguiendo [48] (véase también [67]).

A partir de (4.1.4), podemos obtener⁵ una estructura compleja en $\mathcal{K}^\oplus := \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$:

$$i^\oplus = \begin{pmatrix} -D & C\sqrt{1+D^2} \\ C\sqrt{1+D^2} & D \end{pmatrix} \quad (4.1.22)$$

Llamemos $\mathcal{H}^\oplus$ a la complexificación de $\mathcal{K}^\oplus$ vía dicha estructura compleja. El producto interno complejo está dado por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle^\oplus = \tau^\oplus(\cdot, \cdot) + i\sigma^\oplus(\cdot, \cdot), \quad (4.1.23)$$

donde $\tau^\oplus := \tau \oplus \tau$ y $\sigma^\oplus(\cdot, \cdot) = \tau^\oplus(\cdot, -i^\oplus \cdot)$. Este producto interno se reduce a w_2 en $\mathcal{K} \simeq \mathcal{K} \oplus 0$:

$$\langle f \oplus 0, g \oplus 0 \rangle^\oplus = \tau(f, g) + i\sigma(f, g) = w_2(f, g). \quad (4.1.24)$$

Además, tenemos

$$\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma) \subset \text{CCR}(\mathcal{K}^\oplus, \sigma^\oplus) \quad (4.1.25)$$

De manera similar, para subespacios cerrados $H \subset \mathcal{K}$:

$$\text{CCR}(H, \sigma) \subset \text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma) \quad (4.1.26)$$

Y, lo más importante, sobre el álgebra $\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma)$ se cumple

$$\omega^\oplus(W(f \oplus 0)) = e^{-\frac{1}{2}\tau^\oplus(f \oplus 0, f \oplus 0)} = \omega(W(f)) \quad (4.1.27)$$

lo que justifica por qué el estado puro $\omega^\oplus$ del álgebra $\text{CCR}(\mathcal{K}^\oplus, \sigma^\oplus)$ es una purificación de ω .

La entropía relativa para estados no puros asociados a $R(H)$, con $H \simeq H \oplus 0$ el subespacio estándar y factorial de $\mathcal{H}^\oplus$, viene dada por [48]

$$S_{R(H)}(\omega_f || \omega) = \sigma^\oplus(f, P_H i^\oplus K_H f), \quad f \in \mathcal{K} \oplus 0 \cap \text{Dom}(K_H). \quad (4.1.28)$$

De hecho en [48] obtienen una expresión más general para subespacios que no necesariamente sean estándar. Pero nosotros prescindiremos de ella, ya que para el modelo $U(1)$ el subespacio asociado al intervalo acotado es estándar y factorial, como mostraremos. Nótese que en (4.1.28) el hamiltoniano modular K_H está asociado al operador modular que actúa sobre el espacio ampliado $\mathcal{H}^\oplus$, y P_H es el proyector de corte sobre $H \oplus 0$.

⁴Purificaciones hay infinitas. Acá presentamos una que parece canónica en CCR-álgebras.

⁵Suponemos que $\mathcal{K}$ es completo con respecto a τ y que σ es no degenerada.

4.2. La corriente $U(1)$ del bosón quiral

Nos interesaremos en particular en el caso del bosón quiral libre. Recordemos que en dimensión $1 + 1$ para $\phi_E(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (\tau_x, x^1) \in \mathbb{R}^2$) la función de dos puntos euclídea viene dada por

$$\langle \phi_E(\mathbf{x}), \phi_E(\mathbf{y}) \rangle = -\frac{1}{\pi} \log(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2) + c$$

con c constante (ver [72] sección 2.3.4).

Volviendo al tiempo Lorentziano $\tau_x \rightarrow ix^0$ nos queda la función de dos puntos en coordenadas de Minkowski

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = -\frac{1}{\pi} \log(-(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2)$$

que en coordenadas nulas $x^\pm = x^0 \pm x^1$ se puede escribir como

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = -\frac{1}{\pi} \log((x^+ - y^+)(x^- - y^-)) = -\frac{1}{\pi} \log(x^+ - y^+) - \frac{1}{\pi} \log(x^- - y^-)$$

que derivando a fin de regularizar las divergencias infrarrojas nos lleva a

$$\langle \partial_+ \phi(x), \partial_+ \phi(y) \rangle = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(x^+ - y^+)^2},$$

y análogamente para las derivadas respecto a la otra coordenada nula. Además recordemos que en coordenadas nulas en $1 + 1$ dimensiones el campo escalar libre se descompone en $\phi(x) = \phi_+(x^+) + \phi_-(x^-)$ lo cual implica que las funciones de dos puntos de las derivadas de cada uno de estos sumandos son

$$\langle \phi'_+(x^+), \phi'_+(y^+) \rangle = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(x^+ - y^+)^2},$$

y otra análoga para la restante coordenada nula. Esto se corresponde con la función de correlación de un campo de dimensión conforme 1. Luego consideraremos la *corriente* usualmente denotada $\phi'(x)$ cuya función de dos puntos en su versión para campos esmereados es

$$\langle \phi'(f), \phi'(g) \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{f(x)g(y)}{(x - y - i\varepsilon)^2}, \quad (4.2.1)$$

donde se utilizó una prescripción de $\varepsilon \rightarrow 0$ para regularizar la integral. Luego en su versión regularizada y esmereada, la teoría clásica se define mediante el espacio funciones reales con soporte compacto $\mathcal{K} = C_c^\infty(\mathbb{R})$ y estructura simpléctica

$$\sigma(f, g) = \text{Im}\{\langle \phi'(f), \phi'(g) \rangle\} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx \quad (4.2.2)$$

Como vimos al inicio del capítulo, tenemos un álgebra $\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma)$ asociada a $(\mathcal{K}, \sigma)$. Para proceder, necesitamos definir un estado quasifree mediante una forma bilineal simétrica y positiva τ . Comenzamos con el estado de vacío, que denotaremos por ω , y luego pasamos a un estado termal ω_β . Ya que como vimos el campo se factoriza en dos componentes quirales que notaremos $\phi'_+(x^+)$ y $\phi'_-(x^-)$ ambas con la misma función de dos puntos, trataremos de momento con la

teoría en $1 + 0$ dimensiones, es decir sobre la *línea nula*, para luego retomar y generalizar los resultados a dimensión espaciotemporal 2.

El grupo conforme local del espaciotiempo de Minkowski en dimensión $1 + 1$ es infinito dimensional (ver [72]). Vía el mapa de Cayley

$$z^\pm = \frac{1 + ix^\pm}{1 - ix^\pm}$$

podemos ir de la línea nula al círculo unitario y pensar en el grupo conforme como los difeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ que preservan orientación $\text{Diff}_+(\mathbb{S}^1)$.

En teorías conformes, las representaciones unitarias de energía positiva del grupo $\text{Diff}_+(\mathbb{S}^1)$ son necesariamente proyectivas (ver [73], [74] o [75]), esto impide la existencia de un estado invariante bajo la acción de todo el grupo conforme. Como consecuencia, el estado de vacío para una QFT en dos dimensiones es invariante solo ante un producto de dos grupos de Möbius, $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subseteq \text{Diff}_+(\mathbb{S}^1)$, siendo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ el grupo conforme global. Además, el grupo conforme en dimensión dos coincide con $\text{SO}(2, 2)_0/\mathbb{Z}_2$, que es el grupo conforme en dimensión $D > 2$ (si consideramos $D = 2$).

4.2.1. El estado de vacío

El estado de vacío se define por

$$\tau(f, g) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{f(x)g(y)}{(x - y)^2} = (f, \mathfrak{H}g')_{L^2} \quad (4.2.3)$$

Donde $\mathfrak{H}$ es la transformada de Hilbert y PV el valor principal de la integral. El vacío es puro ya que $D = -\mathfrak{H}$, la cual es unitaria o, de manera equivalente, $D = -i\text{sgn}(p)$ en el espacio de momentos⁶. Si aplicamos la complexificación descrita en la sección anterior a $\mathcal{K}$ obtenemos el producto interno complejo

$$\langle f, g \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{f(x)g(y)}{(x - y - i\epsilon)^2} = (f, \mathfrak{H}g')_{L^2} + i\sigma(f, g) \quad (4.2.4)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}(p)^* \hat{g}(p) p dp \quad (4.2.5)$$

lo cual permite establecer un isomorfismo $\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}_+, p dp)$. Éste es el espacio de Hilbert de 1 partícula en el vacío. Trabajaremos mayormente en el espacio de coordenadas (de posición, y no tanto en el espacio de momentos).

Como ya mencionamos un papel importante en éste trabajo lo juega la simetría $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ del modelo. La representación unitaria de este grupo sobre $\mathcal{H}$ está dada por

$$U(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x) \quad (4.2.6)$$

⁶Definimos la transformada de Fourier como $\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{ixp} f(x)$. Con esta convención, la transformada de Hilbert en el espacio de momento es $i\text{sgn}(p)$. Más importante aún, el generador de traslaciones unitarias (4.2.9) es positivo.

donde un elemento del grupo g actúa sobre la coordenada x mediante transformaciones lineales fraccionarias:

$$g \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}). \quad (4.2.7)$$

Contamos con tres subgrupos uniparamétricos relacionados con la descomposición KAN (también llamada de Iwasawa) de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \delta(s) = \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}, \quad \tau(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.8)$$

a los cuales nos referiremos respectivamente como subgrupos de rotación, dilatación y traslación. Por ejemplo, el subgrupo dilatación-traslación actúa de la siguiente manera sobre el espacio de una partícula⁷:

$$U(\tau(t))f(x) = f(x - t), \quad U(\delta(s))f(x) = f(e^{-s}x) \quad (4.2.9)$$

Observe que el generador de traslaciones P , definido por $U(\tau(t)) = e^{itP}$, es positivo⁸. Esto se puede ver en el espacio de momentos si utilizamos la convención ya establecida para la transformada de Fourier.

Ahora podemos discutir la teoría modular de subespacios estándar de $\mathcal{H}$. Consideremos los subespacios $H(I) = \overline{C_c^\infty(a, b)} \subset \mathcal{H}$, los cuales son estándar y factoriales (recordemos del capítulo 2 que H se dice factorial si $H \cap H' = \{0\}$, para ver que $H(I)$ lo es ver [70]). Dado que la representación anterior tiene P positivo, la evolución modular en $H(\mathbb{R}_+)$ es (Teorema 3.3.1 de [70])

$$\Delta_{(0, \infty)}^{iu} = U(\delta(-2\pi u)), \quad u \in \mathbb{R} \quad (4.2.10)$$

Ver también la ecuación (5.3.25) en el capítulo siguiente 5 para una deducción bastante directa y explícita de esta evolución modular. Esto se demuestra comprobando que $F(u) := \langle g, \Delta_{(0, \infty)}^{iu} f \rangle$ admite una continuación analítica a la banda $-1 < \text{Im}(u) < 0$ y que se satisface la propiedad KMS a temperatura -1 :

$$\langle \Delta_{(0, \infty)}^{iu} f, g \rangle = \langle g, \Delta_{(0, \infty)}^{i(u-i)} f \rangle \quad (4.2.11)$$

Por covarianza, $U(g)H(I) = H(g \cdot I)$, por lo que se tiene

$$\Delta_I^{iu} = U(\bar{g})^{-1} \Delta_{(0, \infty)}^{iu} U(\bar{g}), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \bar{g} \cdot I = \mathbb{R}_+ \quad (4.2.12)$$

Tengase en cuenta que $\bar{g}$ está definido módulo la multiplicación por una dilatación a la izquierda, pero esto no afecta a Δ_I^{iu} .

⁷Recordemos que tal acción se puede extender vía (4.1.10) al álgebra de operadores. Notaremos tal extensión de la misma forma, es decir, solo por U .

⁸En ciertas referencias las representaciones que nosotros notamos $U(\tau(t))$ y $U(\delta(s))$, se notan $Ad(U(\tau(t)))$ y $Ad(U(\delta(s)))$ y se llaman las representaciones adjuntas.

El intervalo $(-\infty, t)$

Por ejemplo, considerando $\bar{g}$ como una rotación de π seguida de una traslación de t ,

$$\Delta_{(-\infty, t)}^{iu} f(x) = f(e^{-2\pi u}(x - t) + t). \quad (4.2.13)$$

Podemos entonces calcular el hamiltoniano modular:

$$K_{(-\infty, t)} = i \frac{d}{du} \Delta_{(-\infty, t)}^{iu} \Big|_{u=0} = 2\pi i (t - x) \frac{d}{dx} \quad (4.2.14)$$

Y a partir de aquí, la entropía relativa de un estado y su excitación coherente se desprende de la ecuación (4.1.21)

$$S_{R((-\infty, t))}(\omega_f || \omega) = S_{(-\infty, t)}(f) = 2\pi \int_{-\infty}^t (t - x) f'(x)^2 dx \quad (4.2.15)$$

Aquí no es necesario que f esté localizado en el intervalo $(-\infty, t)$ [48].

El intervalo (a, b)

Podemos repetir el procedimiento anterior para un intervalo $I = (a, b)$. El primer paso es encontrar $\bar{g}$ tal que $\bar{g} \cdot I = \mathbb{R}_-$. La idea es proyectar I al círculo, formando un arco (θ_a, θ_b) . Luego, empleamos dos simetrías (ver Figura 4.1). La primera consiste en una rotación que mapea I en $(-\infty, b')$, lo cual se logra notando que en el círculo esto equivale a una rotación de magnitud $-\pi - \theta_a$. Posteriormente, $(-\infty, b')$ es mapeado a $\mathbb{R}_-$ mediante una traslación de magnitud b' . Notemos que las traslaciones fijan el infinito.

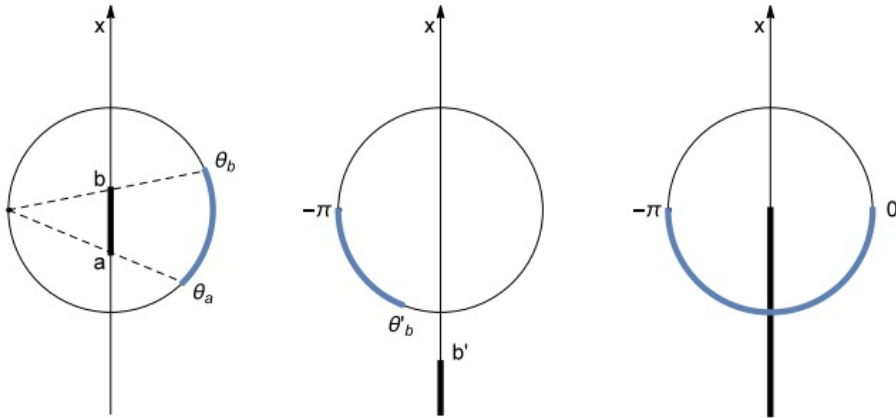


Figura 4.1: A la izquierda, un intervalo genérico (a, b) proyectado al círculo. Primero se mapea a $(-\infty, b')$ mediante una rotación de magnitud $-\pi - \theta_a$, como se muestra en el diagrama del medio. Luego, se mapea mediante una traslación por b' a $\mathbb{R}_-$, a la derecha.

Habiendo obtenido dicha transformación $\bar{g}$, podemos calcular la evolución modular usando (4.2.12),

$$\Delta_{(a, b)}^{iu} f(x) = f\left(\frac{ae^{-2\pi u}(b - x) + b(x - a)}{e^{-2\pi u}(b - x) + x - a}\right). \quad (4.2.16)$$

En este caso el hamiltoniano modular es

$$K_{(a,b)} = \frac{2\pi i(x-a)(b-x)}{b-a} \frac{d}{dx}. \quad (4.2.17)$$

El último ingrediente para calcular la entropía relativa es el proyector de corte P_I asociado al intervalo $I = (a, b)$. Siguiendo la prueba de la Proposición 4.2 en [48], se puede ver que $P_I K_I f(x) = \chi_I(x) K_I f(x)$, donde χ_I es la función característica del intervalo.

Proposición 4.2.1. *Sea $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, entonces se cumple que $P_I K_I f(x) = \chi_I(x) K_I f(x)$.*

Demostración. Dado $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, definimos las funciones $g(x) = \chi_I(x) K_I f(x)$ y $g_c(x) = \chi_{I^c}(x) K_I f(x)$, que son funciones diferenciables por partes, por lo que sus transformadas de Fourier decaen al menos como p^{-2} para p grande. Además,

$$\|g\|_\tau^2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty |\hat{g}(p)|^2 p dp \right\} < \infty,$$

por lo que $g \in \mathcal{H}$ y también $g_c \in \mathcal{H}$. Además, $\sigma(g_c, \varphi) = 0$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(I)$ porque $\operatorname{supp}(g_c) \subseteq I_c$. Entonces, por continuidad de σ (con respecto a la topología inducida por τ), se tiene que $g_c \in H(I)'$. De manera similar, se puede ver que $g \in H(I)$. Como $H(I)$ es factorial, se concluye que $P_I K_I f(x) = P_I(g(x) + g_c(x)) = g(x) = \chi_I(x) K_I f(x)$, lo que completa la demostración. $\square$

Finalmente, la entropía relativa es

$$S_{R(I)}(\omega_f || \omega) = S_I(f) = 2\pi \int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} f'(x)^2 dx. \quad (4.2.18)$$

Es invariante bajo traslaciones, en el sentido de que $S_I(f) = S_{\tau \cdot I}(f \circ \tau^{-1})$. También es inmediato ver que, manteniendo fijo el centro $c = (a+b)/2$ del intervalo, es creciente respecto a la longitud $L = (b-a)$: $\frac{d}{dL} S_{I(L)}(f) > 0$, como es de esperar se satisface monotonicidad.

Más aún, la entropía relativa (4.2.18) satisface una cota tipo Bekenstein⁹

$$S_I(f) \leq \pi \frac{L}{2} \int_a^b f'(x)^2 dx =: \pi \frac{L}{2} E(f), \quad (4.2.19)$$

y una cota tipo QNEC¹⁰:

$$\begin{aligned} S_I'' &:= \frac{d^2}{dL^2} S_{I(L)}(f) = \frac{\pi}{2} (f'(b)^2 + f'(a)^2) - \frac{4\pi}{L^3} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f'(x)^2 dx \\ &\geq -\frac{4\pi}{L^3} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f'(x)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

⁹ Aquí $E(f) := \int_a^b f'(x)^2 dx$ es la energía de una partícula asociada al intervalo de $f \in \mathcal{H}$.

¹⁰ Esta cota (para el intervalo centrado en 0) es la de la Proposición 3.7 de [48], donde la cantidad relevante $T_f(s, L)$ es $2\pi \int_{-\min\{s, \frac{L}{2}\}}^{\min\{s, \frac{L}{2}\}} \frac{(x + \frac{L}{2})(\frac{L}{2} - x)}{L} f'(x)^2 dx$. Es directo ver que T_f satisface la hipótesis de suavidad C^1 de la proposición.

La QNEC, expresada en términos de la entropía relativa, establece que $S''(\lambda) > 0$, en donde λ es una etiqueta continua para regiones del espaciotiempo cada vez mayores, es decir $\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathcal{O}_{\lambda'}$ si $\lambda \leq \lambda'$. Sin embargo, en (4.2.20) observamos una violación del QNEC, lo que ya se anticipaba en [48]. De hecho (4.2.20) nos dice que, para obtener una violación significativa del QNEC, es necesario concentrar una cantidad considerable de energía cerca de los bordes del intervalo (además, esta cota negativa puede saturarse). De manera análoga, la cota tipo Bekenstein (4.2.19) implica que será posible distinguir mejor a un estado coherente del vacío cuanto más energía se concentre en dicho intervalo.

4.2.2. El estado termal

A continuación trabajaremos con el estado termal sobre la línea nula cuya existencia se demostrará luego en el capítulo 5. De hecho este estado termal es el estado KMS geométrico de [76, 77]¹¹. El espacio simpléctico subyacente sigue siendo $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \sigma)$ con (4.2.2). El estado térmico se define por la forma bilineal

$$\tau_\beta(f, g) = -\pi PV \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{f(x)g(y)}{\beta^2 \sinh^2\left(\frac{\pi}{\beta}(x-y)\right)} \quad (4.2.21)$$

Esto da la función de dos puntos (ver [49]),

$$w_2^{(\beta)}(f, g) = -\pi \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)g(y)}{\beta^2 \sinh^2\left(\frac{\pi}{\beta}(x-y) - i\epsilon\right)} dx dy. \quad (4.2.22)$$

Dicha función de dos puntos es invariante bajo traslaciones y satisface la condición KMS con respecto a las traslaciones. El espacio de Hilbert real $\mathcal{K} = L^2\left(\mathbb{R}_+, \frac{pdp}{1-e^{-\beta p}}\right)$ se obtiene tras completar $C_c^\infty(\mathbb{R})$ con τ_β [48].

Dado que el estado no es puro, primero procedemos a “purificarlo”. En espacio de momentos, $D = -i(1 - e^{-\beta p})$, lo cual utilizamos para construir $i^\oplus$ (como se da en (4.1.22)) y luego $\mathcal{H}^\oplus$, la complexificación de $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$.

Hay operadores que actúan como el grupo de dilato-traslaciones¹² en las semirrectas. Por ejemplo, en $H(\mathbb{R}_-)$ estos operadores vienen dados por

$$\begin{aligned} U_\beta(\delta(s))f(x) &= f\left(-\frac{\beta}{2\pi} \log\left(1 + e^{-s}\left(e^{-\frac{2\pi x}{\beta}} - 1\right)\right)\right), \\ U_\beta(\tau(t))f(x) &= f\left(x - \frac{\beta}{2\pi} \log\left(1 + \frac{2\pi t}{\beta} e^{\frac{2\pi x}{\beta}}\right)\right), \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

los cuales satisfacen

$$U_\beta(\delta(s))U_\beta(\tau(t))U_\beta(\delta(-s)) = U_\beta(\tau(e^s t)).$$

¹¹Agradecemos a Yoh Tanimoto por señalar esto.

¹²No estamos afirmando que estos operadores formen una representación en $\mathcal{K}$. Por ejemplo, existen valores de los parámetros para los cuales los logaritmos no están definidos y la función se define como cero. No será necesario considerar este aspecto.

Un resultado similar es valido en dimensión $1 + 1$. En dimensiones mayores, hay estudios de los grupos de traslación y dilatación en forma abstracta en [49] y se pretende de hecho dar una representación que para dimensiones bajas coincide con la aquí exhibida. En dicho trabajo los autores apelan a la noción técnica de *half sided modular inclusions* (inclusiones modulares en adelante), de momento no es necesario para nosotros entrar en tales tecnicismos. Por lo que a esta tesis compete, basta con conocer su acción en 1 y $1 + 1$ dimensiones, siendo ésta última como veremos no más que una mera extensión de la primera mediada por la utilización de coordenadas nulas.

En concreto el operador modular asociado a $H(\mathbb{R}_+)$ se exhibe en la ecuación (5.3.25) del siguiente capítulo. Dicha ecuación se halla sin apelar a ningún razonamiento que involucre inclusiones modulares, tal deducción es valida en dimensiones 1 y $1 + 1$ (que son las dimensiones en las que trabajaremos). Caso contrario, si bien la evolución modular sigue siendo del mismo estilo, los argumentos utilizados en el capítulo 5 dejan de ser validos, y forma correcta de deducir la evolución modular sigue siendo la expuesta en [49] (ver por ejemplo el teorema 2.1 allí presente).

Estos operadores dejan $w_2^{(\beta)}$ invariante, lo que implica que

$$U_\beta^\oplus(f \oplus 0 + i^\oplus g \oplus 0) := U_\beta f \oplus 0 + i^\oplus U_\beta g \oplus 0, \quad f, g \in \mathcal{K}, \quad (4.2.24)$$

son unitarios en $\mathcal{H}^\oplus$ (mostraremos esto más adelante). Debido a esto, el operador modular asociado a $H(\mathbb{R}_-)$ está dado por¹³ [48],

$$\Delta_{H(\mathbb{R}_-)}^{iu} = U_\beta^\oplus(\delta(2\pi u)). \quad (4.2.25)$$

Nótese que esto se reduce a (4.2.13) en el límite $\beta \rightarrow \infty$.

El intervalo $(-\infty, t)$

A partir de esta última expresión, y conjugando con la traslación (de vacío) $U(t)$ como en (4.2.12), se puede calcular el Hamiltoniano modular asociado a $(-\infty, t)$,

$$K_{H((-\infty, t))} f(x) = \beta i^\oplus \left(1 - e^{\frac{2\pi}{\beta}(x-t)}\right) f'(x), \quad (4.2.26)$$

y la entropía relativa

$$S_{R((-\infty, t))}(\omega_f || \omega) = \beta \int_{-\infty}^t \left(1 - e^{\frac{2\pi}{\beta}(x-t)}\right) f'(x)^2 dx. \quad (4.2.27)$$

Esta fue calculada por primera vez en [48]. Nótese que en la Proposición 5.6 de dicha referencia se muestra que el subespacio $H((-\infty, t))$ es tanto estándar como factorial, por lo que la entropía relativa se puede calcular con (4.1.21).

¹³Tenemos una diferencia de signo con respecto a [48] en el parámetro dentro de la dilatación δ . Esto se traduce en una diferencia de signo en el Hamiltoniano modular, pero la entropía relativa coincide con la ecuación (5.22) de dicha referencia.

Si en la ecuación (4.2.26) se toma límite con $t \rightarrow \infty$, obtenemos como Hamiltoniano modular asociado al estado termal en $\mathbb{R}$

$$K_{H(\mathbb{R})}f(x) = \beta i^{\oplus} f'(x), \quad (4.2.28)$$

El intervalo (a, b)

Ahora queremos abordar el cálculo de la entropía relativa para el intervalo acotado $I = (a, b)$, que en [48] no es precisado. La estrategia es análoga al caso del vacío de la subsección anterior, pero hay tres aspectos que vale la pena mencionar. Primero, se debe demostrar que los subespacios $H(I)$ son estándar y factoriales (lo haremos al final). Segundo, la asignación $I \mapsto H(I)$ ya no es covariante bajo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, es decir, $U_{\beta}(g)H(I) \neq H(g \cdot I)$. Sin embargo, solo necesitamos encontrar un $\bar{g}$ tal que

$$U_{\beta}(\bar{g})H(I) = H(\mathbb{R}_-), \quad (4.2.29)$$

para luego conjugar con este unitario el operador modular de la recta real negativa (4.2.25) (de manera completamente análoga a (4.2.12)). De forma explícita,

$$\Delta_I^{iu} = U(\bar{g})^{-1} \Delta_{(-\infty, 0)}^{iu} U(\bar{g}), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (4.2.30)$$

Tercero, no es inmediato generalizar el intento de construir $\bar{g}$ como en el caso del vacío (ver Figura 4.1), ya que la rotación unitaria ya no está disponible (la rotación en el vacío no deja invariante $w_2^{(\beta)}$). En [49], los autores encuentran las dilataciones y traslaciones unitarias (4.2.23), pero no así rotaciones. Necesitamos encontrar un operador unitario que actúe como una rotación, es decir, que *no fije* el punto en el infinito (en la representación de la recta real). Proponemos que existe una función $\alpha(\theta, x)$ tal que

$$U_{\beta}(r(\theta))f(x) = f(\alpha(\theta, x)). \quad (4.2.31)$$

Esto significa que $\alpha(\theta, x)$ debe cumplir las siguientes tres condiciones:

1. Identidad: $\alpha(0, x) = x$
2. grupo uniparamétrico: $\alpha(\theta_1, \alpha(\theta_2, x)) = \alpha(\theta_1 + \theta_2, x)$
3. $w_2^{(\beta)}$ -compatibilidad: $\frac{\partial \alpha(\theta, x)}{\partial x} \frac{\partial \alpha(\theta, y)}{\partial y} \sinh \left(\frac{\pi}{\beta} (\alpha(\theta, x) - \alpha(\theta, y)) \right)^{-2} = \sinh \left(\frac{\pi}{\beta} (x - y) \right)^{-2}$

Por supuesto, $\alpha(\theta, x)$ depende también de β . La tercera condición, junto con (4.2.24), asegura

que el operador $U_\beta^\oplus$ inducido por $U_\beta(r(\theta))$ es unitario. Veamos por qué,

$$\begin{aligned}
& \langle U_\beta^\oplus(f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0), U_\beta^\oplus(f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle^\oplus \\
&= \langle U_\beta(r(\theta))f_1 \oplus 0 + i^\oplus U_\beta(r(\theta))g_1 \oplus 0, \\
&U_\beta(r(\theta))f_2 \oplus 0 + i^\oplus U_\beta(r(\theta))g_2 \oplus 0 \rangle^\oplus \\
&= w_2^{(\beta)}(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) + w_2^{(\beta)}(g_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), g_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&+ \tau_\beta(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), -Dg_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) + i\tau_\beta(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), g_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&+ \tau_\beta(-Dg_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) - i\tau_\beta(g_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&= w_2^{(\beta)}(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) + w_2^{(\beta)}(g_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), g_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&- \sigma(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), g_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) + i\tau_\beta(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), g_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&+ \sigma(g_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) - i\tau_\beta(g_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&= w_2^{(\beta)}(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) + w_2^{(\beta)}(g_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), g_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&+ iw_2^{(\beta)}(f_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), g_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) - iw_2^{(\beta)}(g_1 \circ \alpha(\theta, \cdot), f_2 \circ \alpha(\theta, \cdot)) \\
&= w_2^{(\beta)}(f_1, f_2) + w_2^{(\beta)}(g_1, g_2) + iw_2^{(\beta)}(f_1, g_2) - iw_2^{(\beta)}(g_1, f_2) \\
&= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0 \rangle^\oplus, \tag{4.2.32}
\end{aligned}$$

donde en la quinta igualdad usamos la condición de $w_2^{(\beta)}$ -compatibilidad. Para encontrar $\alpha(\theta, x)$, hay una pista proveniente de las reglas de producto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ (dicha pista proviene de la descomposición de Iwasawa del miembro izquierdo de la igualdad):

$$\delta(s)r(\theta)\delta(-s) = r\left(2\arctan(e^{-s}\lambda)\right)\delta\left(\log\left[\frac{1+e^{-2s}\lambda^2}{1+\lambda^2}\right]\right)\tau\left(\frac{2\sinh(s)\lambda}{1+e^{-2s}\lambda^2}\right)$$

donde $\lambda = \tan \frac{\theta}{2}$. Esto se traduce, mediante (4.2.23) y (4.2.31), en una ecuación funcional:

$$(e^s + e^{-s}\lambda^2)\left(e^{\frac{2\pi}{\beta}\alpha(\theta, \phi(s, x))} - 1\right) = (1 + \lambda^2)\left(e^{\frac{2\pi}{\beta}\alpha(2\arctan(e^{-s}\lambda), x)} - 1\right) - \frac{4\pi}{\beta}\sinh(s)\lambda \tag{4.2.33}$$

con

$$\phi(s, x) = \frac{\beta}{2\pi}\log\left(1 + e^{-s}(e^{\frac{2\pi x}{\beta}} - 1)\right) \tag{4.2.34}$$

Es conveniente trabajar con $A(\lambda, x)$ definido por:

$$\alpha(\theta, x) = \frac{\beta}{2\pi}\log[1 + A(\lambda, x)] \tag{4.2.35}$$

Derivando respecto a s y estableciendo $s = 0$, obtenemos una PDE

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}A(\lambda, x) + \frac{\beta}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}x}\right)\partial_x A(\lambda, x) = \lambda\partial_\lambda A(\lambda, x) + \frac{4\pi}{\beta}\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}, \tag{4.2.36}$$

que tiene infinitas soluciones de la forma

$$A(\lambda, x) = \frac{2\pi}{\beta}\left[-\lambda + \frac{1 + \lambda^2}{\lambda}B\left(\lambda\left(e^{\frac{2\pi}{\beta}x} - 1\right)\right)\right], \tag{4.2.37}$$

para cualquier función B . De $\alpha(0, x) = x$ obtenemos

$$B(z) \sim \frac{\beta}{2\pi} z, \quad z \rightarrow 0. \quad (4.2.38)$$

De esto y la condición 2 anterior (propiedad de grupo) evaluada en $x = 0$, obtenemos

$$B(z) = \frac{z}{z + \frac{2\pi}{\beta}} \quad (4.2.39)$$

Ahora, al reemplazar esta forma de B en (4.2.37) y teniendo en cuenta (4.2.31) y (4.2.35), $U_\beta(r(\theta)) f = f(\alpha(\theta, \cdot))$ se puede mostrar que es compatible con $w_2^{(\beta)}$ (condición 3 anterior) donde

$$\alpha(\theta, x) = \frac{\beta}{2\pi} \log [1 + A(\lambda, x)], \quad A(\lambda, x) = \frac{2\pi}{\beta} \frac{e^{\frac{2\pi}{\beta}x} - 1 - \frac{2\pi}{\beta}\lambda}{\lambda(e^{\frac{2\pi}{\beta}x} - 1) + \frac{2\pi}{\beta}}. \quad (4.2.40)$$

Veamos esto, primero reescribimos la condición de compatibilidad de $w_2^{(\beta)}$,

$$\sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta} (\alpha(\theta, x) - \alpha(\theta, y)) \right) = \frac{\partial \alpha(\theta, x)}{\partial x} \frac{\partial \alpha(\theta, y)}{\partial y} \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta} (x - y) \right).$$

Un cálculo directo (usando $e^{\frac{\pi}{\beta}\alpha(\theta, x)} = (1 + A(\lambda, x))^{\frac{1}{2}}$) de la raíz cuadrada del lado izquierdo da

$$\sinh \left(\frac{\pi}{\beta} (\alpha(\theta, x) - \alpha(\theta, y)) \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + A(\lambda, x))^{\frac{1}{2}}}{(1 + A(\lambda, y))^{\frac{1}{2}}} - \frac{(1 + A(\lambda, y))^{\frac{1}{2}}}{(1 + A(\lambda, x))^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Elevando al cuadrado esta expresión y con (4.2.40),

$$\begin{aligned} \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta} (\alpha(\theta, x) - \alpha(\theta, y)) \right) &= \frac{1}{4} \left[\frac{1 + A(\lambda, x)}{1 + A(\lambda, y)} - \frac{1 + A(\lambda, y)}{1 + A(\lambda, x)} - 2 \right] \\ &= Y(\lambda, x) Y(\lambda, y) \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta} (x - y) \right) \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

donde

$$Y(\lambda, x) = \frac{4\pi^2 \beta (\lambda^2 + 1) e^{\frac{2\pi x}{\beta}}}{\left(\beta \lambda \left(e^{\frac{2\pi x}{\beta}} - 1 \right) + 2\pi \right) \left(\beta (\beta \lambda + 2\pi) e^{\frac{2\pi x}{\beta}} - (\beta^2 + 4\pi^2) \lambda \right)}.$$

Pero resulta que un cálculo directo da

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\theta, x) = Y(\lambda, x)$$

lo que significa que la condición de compatibilidad de $w_2^{(\beta)}$ se cumple.

Habiendo encontrado una rotación unitaria, podemos implementar la primera transformación de la Figura 4.1 con $U_\beta(r(\tilde{\theta}))$ donde

$$\tilde{\theta} = 2 \arctan \left(-\frac{2\pi}{\beta} \frac{e^{\frac{2\pi a}{\beta}}}{e^{\frac{2\pi a}{\beta}} - \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 - 1} \right), \quad (4.2.42)$$

y teniendo en cuenta que el correspondiente unitario $U_\beta^\oplus(r(\theta))$ en $\mathcal{H}^\oplus$ está definida por (4.2.24). Esta rotación envía a a $-\infty$ y b a $b' = \alpha(\tilde{\theta}, b)$, por lo que mapea $H(I)$ a $H((-\infty, b'))$. Luego, mediante una traslación unitaria del vacío $U(-b')$, $H((-\infty, b'))$ se mapea a $H(\mathbb{R}_-)$ como se desea. La unidad $U(\bar{g})$ es la composición de estas dos transformaciones unitarias.

Desde (4.2.30), la evolución modular en $H(I) \oplus 0$ es

$$\Delta_{(a,b)}^{iu} f(x) \oplus 0 = f \left[\frac{\beta}{2\pi} \log \left(\frac{\sinh(\pi u) e^{\frac{\pi}{\beta}(a+b-x)} - \sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(b-a) + \pi u\right) e^{\frac{\pi x}{\beta}}}{-\sinh(\pi u) e^{-\frac{\pi}{\beta}(a+b-x)} + \sinh\left(-\frac{\pi}{\beta}(b-a) + \pi u\right) e^{-\frac{\pi x}{\beta}}} \right) \right] \oplus 0 \quad (4.2.43)$$

Al diferenciar, el Hamiltoniano modular es

$$K_{(a,b)} f(x) \oplus 0 = 2\beta i^\oplus \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(x-a)\right) \sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(b-x)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(b-a)\right)} f'(x) \oplus 0 \quad (4.2.44)$$

Coincide con (4.2.26) en el límite $a \rightarrow -\infty$ y con (4.2.17) para $\beta \rightarrow \infty$. Al igual que en el caso del vacío, se puede ver que $P_I K_I f(x) = \chi_I(x) K_I f(x)$. La demostración es similar a la que mostramos anteriormente; la única diferencia es que en este caso tenemos que ver que g tiene norma finita respecto a τ_β , pero el mismo argumento funciona. Dado que $f \in C^\infty c(\mathbb{R})$, definimos nuevamente las funciones $g(x) = \chi_I(x) K_I f(x)$ y $g_c(x) = \chi_{I^c}(x) K_I f(x)$, las cuales son funciones diferenciables por tramos, por lo que su transformada de Fourier es acotada y decae al menos como p^{-2} para grandes p . Entonces,

$$\|g\|_\tau^2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{|\hat{g}(p)|^2 p}{1 - e^{-\beta p}} dp \right\} < \infty.$$

Finalmente, la entropía relativa está dada por

$$S_{R(I)}(\omega_f || \omega) = 2\beta \int_a^b \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(x-a)\right) \sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(b-x)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(b-a)\right)} f'(x)^2 dx \quad (4.2.45)$$

lo cual es nuestro resultado principal de este capítulo. Esta entropía relativa coincide, con un factor, con el Hamiltoniano modular en la teoría con corte (ecuación (4.2) en [65]). Esto puede entenderse formalmente al notar que la entropía relativa puede relacionarse con una diferencia de valores medios del Hamiltoniano modular K y una diferencia de entropías de entrelazamiento,

$$S(\omega_2 || \omega_1) = (\langle K_1 \rangle_2 - \langle K_1 \rangle_1) - (S_2 - S_1). \quad (4.2.46)$$

En nuestro caso, el último paréntesis es cero, ya que un estado es una aplicación unitaria del otro (en la representación vectorial). Esto explica la conexión de (4.2.45) con el Hamiltoniano modular de [65]. Dado que los argumentos de [65] son de validez general dentro de las CFTs, y teniendo en cuenta la discusión anterior, es razonable esperar que en general (4.2.45) se cumpla con $f'(x)^2$ reemplazado por la densidad de energía clásica $T_{00}(x)$ de la teoría. Confirmaremos esta expectativa en la siguiente sección para la QFT escalar sin masa en 1+1 dimensiones.

De manera idéntica al caso del vacío (4.2.18), la entropía relativa (4.2.45) es invariante por traslación y tiene derivada positiva con respecto a la longitud L del intervalo, manteniendo el centro $(a+b)/2$ fijo. También existe un límite tipo Bekenstein

$$S_{(a,b)}(f) \leq \pi \frac{L}{2} \left(\frac{\tanh\left(\frac{\pi L}{2}\right)}{\frac{\pi L}{2}} \right) \int_a^b f'(x)^2 dx \leq \pi \frac{L}{2} \int_a^b f'(x)^2 dx, \quad (4.2.47)$$

y un límite tipo QNEC¹⁴

$$\frac{d^2}{dL^2} S_{I(L)}(f) \geq -\frac{\pi^2}{\beta \sinh^3(L\frac{\pi}{\beta})} \int_a^b \left[\left(\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}L\right) - 1 \right)^2 + 2 \sinh^2\left(\frac{\pi}{\beta}(x)\right) \left(1 + \cosh^2\left(\frac{\pi}{\beta}L\right) \right) \right] f'(x)^2 dx \quad (4.2.48)$$

donde $c = (a+b)/2$. Discutiremos esta expresión más adelante.

Antes de concluir esta sección, tenemos que mostrar que $H(I)$ es estándar y factorial, para que la maquinaria que hemos estado utilizando, y en particular (4.1.21), sea válida. Lo haremos en la siguiente Proposición.

Proposición 4.2.2. *$H(I)$ es estándar y factorial*

Demostración. La condición de separabilidad $H(I) \cap i^\oplus H(I) = 0$ sigue exactamente como en la Proposición 5.6 de [48] (o con la lógica de lo que sigue). La ciclicidad, $(H(I) + i^\oplus H(I))^\perp = 0$, puede demostrarse usando la rotación unitaria (4.2.31). Dado cualquier $H((a,b))$ existe un subespacio asociado $H_{b'} := H((-\infty, b')) = U_\beta^\oplus(r(\tilde{\theta}))H(I)$ obtenido mediante una rotación en $\tilde{\theta}$ dada por (4.2.42) y explicada después de esa ecuación. El subespacio $H_{b'}$ es, por la Proposición 5.6 de [48], estándar y factorial. Es inmediato mostrar que $0 = (H_{b'} + i^\oplus H_{b'})^\perp = U_\beta^\oplus(r(\tilde{\theta}))(H(I) + i^\oplus H(I))^\perp$, lo que implica que $H(I)$ es cíclico. De manera similar, concluimos que $H(I)$ es factorial, ya que $0 = H_{b'} \cap H_{b'}' = U_\beta^\oplus(r(\tilde{\theta}))(H(I) \cap H(I)')$. $\square$

4.3. El bosón libre sin masa en $1+1$ dimensiones a temperatura finita

En esta sección aprovechamos las cantidades que hemos calculado para el bosón quiral y combinamos ambas quiralidades con el fin de obtener el flujo modular, el hamiltoniano modular y la entropía relativa en el intervalo (a,b) para el bosón libre sin masa en dos dimensiones, Φ .

En primer lugar, definimos $x^\pm = t \pm x$, y los corrientes quirales (no suavizadas) de la sección anterior como $j^\pm(x^\pm) = \partial_\pm \phi^\pm(x^\pm)$ (más adelante daremos más detalles). En esta sección usaremos los símbolos $\pm$ para denotar copias de los objetos quirales (con la excepción de la

¹⁴De nuevo, esto es lo mismo que el resultado de la Proposición 3.7 de [48], esta vez $T_f(s,L)$ es $2\beta \int_{-\min\{s, \frac{L}{2}\}}^{\min\{s, \frac{L}{2}\}} \frac{\sinh \frac{\pi}{\beta}(x + \frac{L}{2}) \sinh \frac{\pi}{\beta}(\frac{L}{2} - x)}{\sinh \frac{\pi L}{\beta}} f'(x)^2 dx$. Es fácil ver que tal T_f satisface la hipótesis de suavidad de la Proposición.

estructura simpléctica σ y la forma bilineal τ). Por ejemplo, $\mathcal{H}$ ahora se refiere a un espacio de Hilbert del modelo bidimensional, mientras que $\mathcal{H}_\pm$ son los espacios de Hilbert del caso quiral.

El espacio simpléctico del bosón sin masa en dos dimensiones es¹⁵ [40]

$$\mathcal{K} = C_c^\infty(\mathbb{R}) \oplus \dot{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \quad (4.3.1)$$

con estructura simpléctica

$$\sigma_{2D}((f_1, g_1), (f_2, g_2)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx (g_1(x)f_2(x) - f_1(x)g_2(x)) \quad (4.3.2)$$

Aquí, el par $(f, g) \in \mathcal{K}$ debe interpretarse como las condiciones iniciales $\Phi(0, x) = f(x)$, $\dot{\Phi}(0, x) = g(x)$ de una solución $\Phi(t, x)$ de la ecuación de Klein-Gordon. En general,

$$\Phi(t, x) = \phi_+(x^+) + \phi_-(x^-), \quad \phi^\pm \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \quad (4.3.3)$$

Luego, la estructura simpléctica (4.3.2) puede escribirse como

$$\sigma_{2D}((f_1, g_1), (f_2, g_2)) = - \int_{\mathbb{R}} dx (\phi_1^+(x)\phi_2^{+'}(x) + \phi_1^-(x)\phi_2^{-'}(x)) \quad (4.3.4)$$

La ausencia de mezcla entre las quiralidades implica que existe un isomorfismo simpléctico¹⁶ χ que mapea $(\mathcal{K}, \sigma_{2D})$ en $(\mathcal{K}_- \oplus \mathcal{K}_+, -(\sigma \oplus \sigma))$, con inversa dada por

$$\chi^{-1} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_+(x) + \phi_-(-x) \\ \phi_+'(x) + \phi_-'(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

A su vez, esto implica que el álgebra $\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma_{2D})$ es equivalente al producto tensorial

$$\text{CCR}(\mathcal{K}_-, -\sigma) \otimes \text{CCR}(\mathcal{K}_+, -\sigma),$$

con σ como en (4.2.2). Más precisamente, identificamos estas álgebras CCR mediante

$$W(\phi_-(x)) \otimes W(\phi_+(x)) \mapsto W((\phi_+(x) + \phi_-(-x), \phi_+'(x) + \phi_-'(-x))) \quad (4.3.6)$$

De hecho, esto constituye un $*$ -isomorfismo entre las álgebras. El cambio de signo en la estructura simpléctica σ con respecto a la sección anterior requiere un cambio de signo en la estructura compleja¹⁷, y estos dos signos terminan compensándose en la entropía relativa¹⁸ (4.1.21).

Dada una forma bilineal simétrica positiva τ_{2D} en $\mathcal{K}$ y su correspondiente estado cuasi-libre en $\text{CCR}(\mathcal{K}, \sigma_{2D})$, mediante los isomorfismos mencionados anteriormente obtenemos un estado

¹⁵Aquí definimos $f \in \dot{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $\hat{f}(0) = 0$. Esto es necesario para evitar el conocido problema infrarrojo del campo sin masa en dos dimensiones [78].

¹⁶Se expresa más fácilmente en el espacio de Fourier: $\hat{\phi}_\pm(\pm p) = \frac{1}{2}(\hat{f}(p) \pm \frac{i}{p}\hat{g}(p))$.

¹⁷Para ver esto, nótese que τ es independiente de este cambio de signo, ya que debe ser positiva. Por lo tanto, a partir de la ecuación que define la estructura compleja $\tau(\cdot, D\cdot) = \sigma(\cdot, \cdot)$, se observa que un cambio de signo en σ se traduce en un cambio de signo en D y, por lo tanto, en la estructura compleja.

¹⁸El hamiltoniano modular de una partícula K no se ve afectado por este cambio de signo, ya que S no se ve afectado según su definición, y tampoco S^* , por lo que $\Delta = S^*S$ permanece invariante.

cuasi-libre de producto en $\text{CCR}(\mathcal{K}_+, \sigma) \otimes \text{CCR}(\mathcal{K}_-, \sigma)$ con la misma τ para cada copia quiral. Por lo tanto, el espacio de Hilbert de una partícula en el vacío es

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_+ \quad (4.3.7)$$

donde $\mathcal{H}_\pm$ son copias del espacio de Hilbert del bosón quiral $L^2(\mathbb{R}_+, pdp)$. El isomorfismo (4.3.5) es anti-lineal, ya que en el espacio de momentos (o en el espacio de coordenadas, utilizando propiedades de la transformada de Hilbert $\mathfrak{H}$) se puede demostrar directamente que

$$\chi^{-1}i_1 = -i_2\chi^{-1}, \quad (4.3.8)$$

donde i_1 es la estructura compleja del bosón quiral e i_2 es la estructura compleja en [39, 40]

$$i_2 := \begin{pmatrix} 0 & |p|^{-1} \\ -|p| & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.9)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tau_{2D}(\Phi, \Psi) &= \sigma_{2D}(\Phi, i_2\Psi) \\ &= -\sigma(\phi_+, (\chi i_2\Psi)_+) - \sigma(\phi_-, (\chi i_2\Psi)_-) \\ &= -\tau(\phi_+, -i_1(\chi i_2\Psi)_+) - \tau(\phi_-, -i_1(\chi i_2\Psi)_-) \\ &= \tau(\phi_+, i_1(\chi i_2\Psi)_+) + \tau(\phi_-, i_1(\chi i_2\Psi)_-) \\ &= \tau(\phi_+, \psi_+) + \tau(\phi_-, \psi_-) \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

De manera análoga, para el estado térmico tenemos

$$\mathcal{H}^\oplus \simeq \mathcal{H}_-^\oplus \oplus \mathcal{H}_+^\oplus \quad (4.3.11)$$

con $\mathcal{H}_\pm^\oplus$ siendo dos copias del espacio de Hilbert purificado que construimos en la sección anterior (que llamamos $\mathcal{H}^\oplus$, esperamos que no haya confusión). Los espacios de Fock están relacionados como

$$\Gamma(\mathcal{H}^\oplus) \simeq \Gamma(\mathcal{H}_-^\oplus) \otimes \Gamma(\mathcal{H}_+^\oplus) \quad (4.3.12)$$

De ahora en adelante identificamos todos estos espacios mediante los isomorfismos apropiados.

4.3.1. Flujo modular y Hamiltoniano modular

Consideremos un diamante causal con base (a, b) en la superficie de tiempo cero. Su correspondiente subespacio estándar es $H(\diamond)$ de pares $(f, g) \in \mathcal{K}$ con soporte en el intervalo (a, b) o, equivalentemente, campos de Klein-Gordon Φ con condiciones iniciales dadas por (f, g) . Nótese que dicho diamante se describe en coordenadas nulas como $(x^-, x^+) \in ((-b, -a), (a, b))$. Las cuñas derechas se obtienen en el límite $b \rightarrow \infty$, y de manera similar, tomando $a \rightarrow -\infty$ se obtienen las cuñas izquierdas.

A nivel de una partícula, tenemos

$$K_{H(\diamond)} \simeq K_{H((-b,-a))} \oplus K_{H((a,b))}. \quad (4.3.13)$$

Esto se sigue del hecho de que para $\Phi, \Psi \in H(\diamond)$

$$\begin{aligned} S_{H(\diamond)}(\Phi + i\Psi) &= \Phi - i\Psi \\ &= \phi_+ - i\psi^+ + \phi_- - i\psi^- \\ &= S_{H((-b,-a))}(\phi_- + i\psi^-) + S_{H((a,b))}(\phi_+ + i\psi^+) \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

lo que implica que $S_{H(\diamond)} \simeq S_{H((-b,-a))} \oplus S_{H((a,b))}$ y, por lo tanto, $\Delta_{H(\diamond)} \simeq \Delta_{H((-b,-a))} \oplus \Delta_{H((a,b))}$. La evolución modular en el diamante es

$$\Delta_{H(\diamond)}^{iu} \simeq \Delta_{H((-b,-a))}^{iu} \oplus \Delta_{H((a,b))}^{iu} \quad (4.3.15)$$

que explícitamente se escribe como

$$\left[\Delta_{H(\diamond)}^{iu} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] (x) = \begin{pmatrix} [\Delta_{H((-b,-a))}^{iu} \phi_-](-x) + [\Delta_{H((a,b))}^{iu} \phi_+](x) \\ [\Delta_{H((-b,-a))}^{iu} \phi_-]'(-x) + [\Delta_{H((a,b))}^{iu} \phi_+]'(x) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.16)$$

donde $\phi_{\pm}$ deben interpretarse en términos de (f, g) usando el isomorfismo χ , y la evolución de cada quiralidad está dada en (4.2.43). Una presentación más intuitiva del flujo modular es mostrar la transformación geométrica de las coordenadas (t, x) dentro del diamante, como se ilustra en la Figura 4.2.

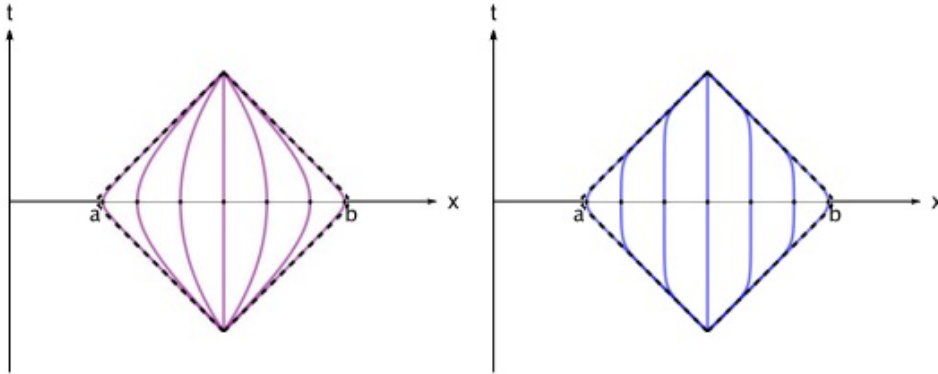


Figura 4.2: Flujo modular para baja temperatura (izquierda) y alta temperatura (derecha)

4.3.2. Entropías relativas y cotas

La entropía relativa en dos dimensiones es la suma de las entropías relativas de las copias quirales, lo cual se sigue de (4.3.4) y (4.3.13). Antes de obtener una expresión explícita de las entropías relativas en distintos casos, primero encontramos los Hamiltonianos modulares.

El wedge de Rindler

En una cuña derecha $W_R(a)$ con base (a, ∞) , dados (4.3.5) y (4.3.13), el correspondiente Hamiltoniano modular del vacío actúa sobre las condiciones iniciales como

$$\begin{aligned}
K_{H(W_R(a))} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (K_{H((-\infty, -a))} \phi_-)(-x) + (K_{H((a, \infty))} \phi_+)(x) \\ (K_{H((-\infty, -a))} \phi_-)'(-x) + (K_{H((a, \infty))} \phi_+)'(x) \end{pmatrix} \\
&= -2\pi i \begin{pmatrix} (-a+x)\phi'_-(-x) + (x-a)\phi'_+(x) \\ ((-a-x)\phi'_-)'(-x) + ((x-a)\phi'_+)'(x) \end{pmatrix} \\
&= -2\pi i \begin{pmatrix} (-a+x)\phi'_-(-x) + (x-a)\phi'_+(x) \\ ((a-x)\phi'_-(-x) + (x-a)\phi'_+(x))' \end{pmatrix} \\
&= -2\pi i \begin{pmatrix} (x-a)g(x) \\ ((x-a)f'(x))' \end{pmatrix} \tag{4.3.17}
\end{aligned}$$

Donde en la segunda línea hicimos uso de la antilinealidad entre los espacios quirales $\mathcal{H}_\pm$ y $\mathcal{H}$. Entonces,

$$K_{H(W_R(a))} = -2\pi i \begin{pmatrix} 0 & x-a \\ \frac{d}{dx}(x-a)\frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.18}$$

Sustituyendo este Hamiltoniano modular en (4.1.21),

$$S_{H(W_R(a))}((f, g)) = 2\pi \int_a^\infty (x-a)T_{00}(x)dx, \tag{4.3.19}$$

con

$$T_{00}(x) = \frac{1}{2}(f'(x)^2 + g(x)^2) \tag{4.3.20}$$

siendo la densidad de energía clásica en $t=0$ del campo de Klein-Gordon Φ . Este es el mismo resultado que en [36], con una traslación por a .

De manera similar, para el estado térmico tenemos

$$K_{H(W_R(a))}^{(\beta)} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\beta i^\oplus \begin{pmatrix} \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}(x-a)}\right)g(x) \\ \left[\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}(x-a)}\right)f'(x)\right]' \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.21}$$

Donde hemos utilizado (4.2.26) y (4.2.44) en el límite $b \rightarrow \infty$. La entropía relativa en la cuña a temperatura finita es entonces,

$$S_{H(W_R(a))}^{(\beta)}((f, g)) = \beta \int_a^\infty \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}(x-a)}\right) T_{00}(x)dx \tag{4.3.22}$$

Nótese que esta expresión es válida incluso para condiciones iniciales soportadas fuera de $x > a$, ya que el proyector de corte en (4.1.21) restringe la integral a la cuña [39]. La única restricción sobre las condiciones iniciales (f, g) es que pertenezcan al dominio del Hamiltoniano modular (4.3.21).

El intervalo

Repitiendo los cálculos previos para el intervalo en $t = 0$, (a, b) , obtenemos para el vacío,

$$K_{H((a,b))} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = -2\pi i \left(\begin{pmatrix} \frac{(b-x)(x-a)}{b-a} g(x) \\ \left[\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} f'(x) \right]' \end{pmatrix} \right). \quad (4.3.23)$$

La entropía relativa en el vacío de un estado coherente es

$$S_{H((a,b))}((f, g)) = 2\pi \int_a^b \frac{(b-x)(x-a)}{b-a} T_{00}(x) dx \quad (4.3.24)$$

Por otro lado, a temperatura finita tenemos,

$$K_{H((a,b))}^\beta \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\beta i^\oplus \left(\begin{pmatrix} \frac{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(x-a)) \sinh(\frac{\pi}{\beta}(b-x))}{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(b-a))} g(x) \\ \left[\frac{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(x-a)) \sinh(\frac{\pi}{\beta}(b-x))}{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(b-a))} f'(x) \right]' \end{pmatrix} \right) \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.25)$$

La entropía relativa de un estado coherente en la representación del estado térmico es,

$$S_{H((a,b))}^{(\beta)}((f, g)) = 2\beta \int_a^b \frac{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(x-a)) \sinh(\frac{\pi}{\beta}(b-x))}{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(b-a))} T_{00}(x) dx \quad (4.3.26)$$

Esta expresión confirma, al menos para este modelo, la expectativa de que en una CFT la entropía relativa de estados coherentes en un intervalo finito tiene esta forma, donde la dependencia del modelo entra solo en T_{00} . Debido a esto, las cotas obtenidas previamente para el modelo quiral también se cumplen en este caso. La cota tipo Bekenstein se expresa como,

$$\begin{aligned} S_{(a,b)}((f, g)) &\leq \pi \frac{L}{2} \left(\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{\beta} \frac{L}{2}\right)}{\frac{\pi}{\beta} \frac{L}{2}} \right) \int_a^b T_{00}(x) dx \\ &\leq \pi \frac{L}{2} \int_a^b T_{00}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Mientras que la cota tipo QNEC es,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dL^2} S_{I(L)}((f, g)) &\geq -\frac{\pi^2}{\beta \sinh^3(L \frac{\pi}{\beta})} \\ &\times \int_a^b \left[\left(\cosh\left(\frac{\pi}{\beta} L\right) - 1 \right)^2 + 2 \sinh^2\left(\frac{\pi}{\beta}(x-c)\right) \left(1 + \cosh^2\left(\frac{\pi}{\beta} L\right) \right) \right] T_{00}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

4.4. Conclusiones

Hemos extendido la entropía relativa en $\mathbb{R}_-$ con $T \geq 0$ de [48] a un intervalo acotado (ver (4.2.45)). Para lograr esto, encontramos un operador unitario en el espacio de Hilbert térmico que implementa una rotación. Dicho operador podría resultar útil para otros cálculos relacionados.

A partir de la entropía relativa (4.2.45), se pueden observar una cota tipo Bekenstein y una cota tipo QNEC. Sin embargo, hay una violación de la condición QNEC $S'' > 0$, y todo esto concuerda con [48]. En el caso del vacío, dado un valor de energía E , podemos encontrar una familia de funciones $f_n \in H(I)$ tal que $S''_I(f_n)$, dado en (4.2.20), tiende a cero (basta con concentrar la densidad de energía cada vez más cerca del centro del intervalo), lo que permite que la violación de la condición QNEC sea tan pequeña como se desee. Por el contrario, en el caso térmico esto no es posible, ya que siempre existe una cota para la violación de la QNEC dada por

$$S''_I(f_n) \rightarrow -\frac{\pi^2}{\beta \sinh^3(L\frac{\pi}{\beta})} \left(\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}L\right) - 1 \right)^2 E < 0$$

independientemente de cómo se distribuya la densidad de energía (ver (4.2.48)).

Los cálculos en el contexto de una corriente térmica $U(1)$ dejaron un camino claro para analizar el caso de un estado térmico del bosón libre sin masa en $1 + 1$ dimensiones restringido a un diamante causal. En la última sección obtuvimos el Hamiltoniano modular (4.3.25) y la entropía relativa (4.3.26) a temperatura finita en $1 + 1$ dimensiones, con cotas análogas a las del caso quiral.

Capítulo 5

Conjugación modular del estado KMS

“ *The modular objects associated with the vacuum state and algebras of observables localized in certain wedge-shaped regions in Minkowski space have geometric content* ”

Stephen J. Summers, *Tomita–Takesaki Modular Theory*, 2003

En el presente capítulo seguiremos tratando con el estado termal. Construiremos de manera explícita un estado termal de manera geométrica. Luego nos abocaremos a determinar otro de sus operadores modulares. En el capítulo previo nos valimos de la ecuación (4.2.25) de [49] para escribir el operador modular asociado al estado termal en una semirrecta de la línea nula x^+ o x^- . Resultado que luego extendimos a intervalos acotados en dimensión 1 y diamantes en dimensión $1 + 1$ (extendiendo lo mencionado en [49]). Como mencionemos allí, en dimensiones bajas hay una forma más directa de determinar el operador modular asociado al estado termal, y en el presente capítulo nos disponemos a exhibir tal forma. No obstante el punto central será la determinación, de manera rigurosa, de la conjugación modular asociada al estado termal en una región de tipo Wedge de Rindler y en regiones acotadas de tipo diamante. Más aún, exhibiremos la forma que ésta adquiere en el caso del campo escalar libre sin masa, tanto en el wedge de Rindler como en regiones acotadas.

5.1. Construcción del estado termal geométrico

A continuación presentamos una construcción explícita de un estado KMS. Con tal fin, consideremos una aplicación suave

$$\sigma : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2 \quad (5.1.1)$$

bajo ciertas condiciones esta puede inducir un $*$ -homomorfismo (ver por ejemplo la proposición 2.4. en [79]) entre las respectivas álgebras de operadores,

$$\alpha : A(\mathcal{O}_1) \rightarrow A(\mathcal{O}_2) \quad (5.1.2)$$

esto es

$$\alpha \circ A(\mathcal{O}) = A \circ \sigma(\mathcal{O}), \quad \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \quad (5.1.3)$$

Por ejemplo, en un campo primario de una CFT, si $x \in \mathcal{O}_1$ (ver por ejemplo [72], capítulo 4),

$$A(\mathcal{O}_2) \ni \phi_\sigma(x) := \alpha(\phi(x)) = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|^{h_+/2} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|^{h_-/2} \phi(\sigma(x)), \quad (5.1.4)$$

aquí, h_+ y h_- son los pesos conformes del campo primario ϕ bajo transformaciones de $x^\pm = x^0 \pm x^1$.

Entonces si Ω es un estado global (o incluso un estado definido sobre $A(\mathcal{O}_2)$), podemos definir un estado inducido ω_α en $A(\mathcal{O}_1)$ mediante

$$\omega_\alpha(a) := \Omega(\alpha(a)). \quad (5.1.5)$$

Como caso particular destacado, si $\mathcal{O}_1 = \mathbb{M}^{1+1}$ el espacio de Minkowski 1 + 1 dimensional y $\mathcal{O}_2 = W_R = \{x \in \mathbb{M}^{1+1} / x^1 > |x^0|\}$ su wedge de Rindler derecho, entonces $\Omega|_{A(\mathcal{O}_2)}$ es un estado KMS con respecto al grupo uniparametrico de transformaciones generadas por los boost de Lorentz. Este es el famoso resultado de Bisognano y Wichmann ver [80] y [81]. Para ver que induce sobre $\mathbb{M}^{1+1}$, consideremos el mapa $\sigma : \mathbb{M}^{1+1} \rightarrow W_R$ dado por¹

$$\sigma(x^0, x^1) = \left(e^{\frac{2\pi}{\beta}x^+}, -e^{-\frac{2\pi}{\beta}x^-} \right) \quad (5.1.6)$$

y la acción del subgrupo de boosts y traslaciones sobre $\mathbb{M}^{1+1}$,

$$\tau(t)(x^0, x^1, x^\perp) = (x^0 + t, x^1, x^\perp), \quad \delta(s)(x_+, x_-, x^\perp) = (e^s x^+, e^{-s} x^-, x^\perp). \quad (5.1.7)$$

Es inmediato que

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau(s)(x^0, x^1) &= \left(e^{\frac{2\pi}{\beta}(x^+ + s)}, -e^{-\frac{2\pi}{\beta}(x^- + s)} \right) \\ &= \left(e^{\frac{2\pi}{\beta}s} e^{\frac{2\pi}{\beta}x^+}, -e^{-\frac{2\pi}{\beta}s} e^{\frac{2\pi}{\beta}x^-} \right) = \delta\left(\frac{2\pi}{\beta}s\right) \circ \sigma(x^0, x^1), \end{aligned}$$

¹Recordamos nuestra convención para coordenadas nulas: $x^+ = x^0 + x^1$ y $x^- = x^0 - x^1$.

es decir, $\sigma \circ \tau(s) = \delta\left(\frac{2\pi}{\beta}s\right) \circ \sigma$. Luego, definiendo análogamente a las ecuaciones (4.2.9), una representación de las traslaciones y boosts, es decir,

$$U(\tau(t))f(x^0, x^1) = f \circ \tau(-t)(x^0, x^1), \quad U(\delta(s))g(x^0, x^1) = g \circ \delta(-s)(x^0, x^1), \quad (5.1.8)$$

es directo ver que se satisface la siguiente relación de conmutación, en la que $f \in \mathcal{H}$ (el espacio de una partícula) y α es el $*$ -homomorfismo dado por la ecuación (5.1.2),

$$\begin{aligned} (\alpha \circ U(\tau(t)))f &= (U(\tau(t))f) \circ \sigma = f \circ \sigma \circ \tau(-t) \\ &= f \circ \delta\left(-\frac{2\pi}{\beta}t\right) \circ \sigma = \alpha\left(f \circ \delta\left(-\frac{2\pi}{\beta}t\right)\right) = U\left(\delta\left(\frac{2\pi}{\beta}t\right)\right)(\alpha \circ f) \\ &= \left(U\left(\delta\left(\frac{2\pi}{\beta}t\right)\right) \circ \alpha\right)f. \end{aligned}$$

Escribamos este resultado en la forma

$$\alpha \circ U(\tau(\beta t)) = U(\delta(2\pi t)) \circ \alpha, \quad (5.1.9)$$

que utilizaremos en breve para construir un estado KMS global respecto a las traslaciones. La ecuación (5.1.9) se mantiene a nivel del álgebra (si trabajamos con la representación de Fock). Recordemos que todo unitario sobre el espacio de una partícula admite una extensión vía (4.1.10) al álgebra de operadores que actúan sobre el espacio de Fock correspondiente. Notaremos tal extensión de la misma forma, es decir, solo por U . No obstante cabe destacar que la relación (5.1.9) se satisface a nivel álgebra y no es necesario ni el espacio de una partícula, ni el Fock para decir que la misma es válida, es decir que dichas representaciones son contingentes a este respecto.

Como mencionamos, por el resultado de Bisognano-Wichmann [81] es sabido que el estado de vacío restringido al wedge de Rindler derecho es un estado KMS con respecto al grupo uniparamétrico de los boosts en el plano apropiado. Por lo tanto de la ecuación (5.1.9), se deduce que la condición KMS para el vacío respecto a los boosts en el wedge de Rindler, implica la condición KMS para el estado global ω_α definido en (5.1.5) respecto al grupo uniparamétrico de traslaciones temporales.

Seamos más precisos en este punto, veamos de manera explícita que la condición KMS² se cumple para el estado ω_α . Debido a Bisognano-Wichmann sabemos³ que dados $a, b \in A(W_R)$ existe una función $F_{a,b}^\Omega(t) = \Omega(aU(\delta(-2\pi t))(b))$ definida en principio para $t \in \mathbb{R}$, pero admitiendo una extensión $F_{a,b}^\Omega(z)$ continua en la clausura de la banda $0 < \text{Im}\{z\} < \beta$ y analítica en su interior, con condición de borde $F_{a,b}^\Omega(t + i\beta) = \Omega(U(\delta(-2\pi t))(b)a)$.

²Utilizaremos un argumento basado en la extensión de la ecuación (5.1.9) a nivel álgebra de operadores (como se verá aplicaremos U a un operador $b \in A(W_R)$ en lugar de a una f en el espacio de una partícula), pero esto no es estrictamente necesario. Como se vio en el capítulo previo, específicamente en la definición 4.1.1, es posible definir KMS a nivel de una partícula y trabajar con f en lugar de F , y ambos resultados serían comparables vía la ecuación (4.1.7).

³Aquí notaremos Ω a $\Omega|_{W_R}$ para no sobrecargar la notación.

Para aligerar aún más la notación, de ahora en adelante, utilizaremos $\omega := \omega_\alpha$. Definimos para $a, b \in A(\mathbb{M})$ y t real la función $F_{a,b}^\omega(t) = \omega(aU(\tau(-\beta t))(b))$ y observemos que

I. $F_{a,b}^\omega(t)$ posee una extensión analítica a $F_{a,b}^\omega(z)$ en la banda $0 < \text{Im}\{z\} < \beta$, pues:

$$\begin{aligned} F_{a,b}^\omega(t) &= \omega(aU(\tau(-\beta t))(b)) = \Omega \circ \alpha(aU(\tau(-\beta t))(b)) = \Omega(\alpha(a)\alpha \circ U(\tau(-\beta t))(b)) \\ &= \Omega(\alpha(a)(U(-\delta(2\pi t)) \circ \alpha)(b)) = F_{\alpha(a),\alpha(b)}^\Omega(t), \end{aligned}$$

y esta última expresión como sabemos admite un extensión analítica. En la cadena de igualdades de arriba se utilizó la propia definición de ω , el hecho de que α es un $*$ -homomorfismo de álgebras y por último la ecuación (5.1.9).

II. Evaluando $F_{a,b}^\omega(z)$ en el borde superior de la mencionada banda

$$\begin{aligned} F_{a,b}^\omega(t + i\beta) &= F_{\alpha(a),\alpha(b)}^\Omega(t + i\beta) = \Omega((U(\delta(-2\pi t)) \circ \alpha)(b)\alpha(a)) = \Omega((\alpha \circ U(-\tau(\beta t)))(b)\alpha(a)) \\ &= \Omega \circ \alpha(U(\tau(-\beta t))(b)a) = \omega(U(\tau(-\beta t))(b)a), \end{aligned}$$

que es la condición de borde requerida para afirmar que ω es un estado KMS globalmente definido respecto a las traslaciones temporales. Más aún, de aquí se deduce que $\Delta_\omega^{it} = U(\tau(-\beta t))$.

Se logró construir un estado KMS globalmente definido (respecto a las traslaciones temporales), a partir del vacío de Rindler. Notemos que de $\Delta_\omega^{it} = U(\tau(-\beta t))$ se desprende el Hamiltoniano modular correspondiente a dicho estado termal global ω ,

$$K_{H(\mathbb{R})}f(x) = i \frac{d}{dt} U(\tau(-\beta t))f(x)|_{t=0} = i \frac{d}{dt} f(x + \beta t)|_{t=0} = i\beta f'(x),$$

que es coherente con nuestro resultado del capítulo previo, véase la ecuación (4.2.28).

5.1.1. La net conforme en el plano

Consideremos el conjunto de conos dobles $\mathcal{O}$ en el espacio-tiempo de Minkowski bidimensional. Una net de Haag-Kastler es una net de álgebras de von Neumann $\mathcal{A}_\mathcal{O}$ en $B(\mathcal{H})$ sobre un espacio de Hilbert fijo $\mathcal{H}$, con una representación unitaria (continua en la topología fuerte) U del grupo de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$ y un vector de vacío $|\Omega\rangle$, tal que se cumplen los siguientes axiomas:

Isotonía: si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{O}_2}$

Localidad: si $\mathcal{O}_1$ está separado espacialmente de $\mathcal{O}_2$, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{A}'_{\mathcal{O}_2}$

Covarianza de Poincaré: $U(g)\mathcal{A}_\mathcal{O}U(g)^* = \mathcal{A}_{g\mathcal{O}}$ con $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$

Positividad de la energía: el espectro conjunto del subgrupo de traslaciones en U está contenido en el cono de luz futuro cerrado $\bar{V}_+ = \{(p_0, p_1) \in \mathbb{R}^{1,1}, p_0 \geq |p_1|\}$

Existencia del vector de vacío: Existe un vector unitario único (salvo fase) $|\Omega\rangle$ en $\mathcal{H}$ que es invariante bajo la acción de U , y cíclico para el álgebra generada por la unión de todas las $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$.

Aditividad: si $\mathcal{O} = \cup_i \mathcal{O}_i$, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{O}} = \bigvee_i \mathcal{A}_{\mathcal{O}_i}$

De estas condiciones, obtenemos la propiedad de Reeh-Schlieder (ya mencionada en el capítulo 3, ver [59]):

Reeh-Schlieder: El vector $|\Omega\rangle$ es cíclico y separante para cada $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$.

La propiedad de Bisognano-Wichmann establece:

Bisognano-Wichmann: El grupo modular Δ^{it} de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}_{\mathbb{R}}}$ con respecto a $|\Omega\rangle$ es igual a $U(\Lambda(-2\pi t))$, donde $\Lambda(t)$ denota el boost

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Aunque esta propiedad no está garantizada por los axiomas anteriores, si U se extiende al grupo de Möbius actuando covariante sobre la net extendida al cilindro de Einstein, entonces la net es una net covariante de Möbius en el círculo y se satisface la propiedad de Bisognano-Wichmann. Dado que estamos interesados en teorías de campo conformes más allá del grupo conforme global, tenemos que exigir covarianza por difeomorfismos completos en las coordenadas nulas $x^0 \pm x^1$. En otras palabras, consideramos las componentes quirales de la net de Möbius, y definimos una net conforme en el círculo para luego restringirla a la recta real donde pertenecen las coordenadas de tipo luz. Una net conforme (quiral) en el círculo es igual a la net descrita anteriormente, pero: en lugar de conos dobles tenemos intervalos $I \subset S^1$, el grupo de Poincaré es reemplazado por el grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ actuando mediante transformaciones de Möbius en el círculo, la positividad de la energía es con respecto al generador de rotaciones de S^1 , la aditividad no es un axioma sino una consecuencia (ver [82]), y tenemos covarianza por difeomorfismos locales,

Covarianza conforme: La representación U se extiende a una representación unitaria proyectiva de $\text{Diff}(S^1)$ tal que para cualquier intervalo I y $a \in \mathcal{A}_I$ se cumple que,

$$U(g)\mathcal{A}_I U(g)^* = \mathcal{A}_{gI}, \quad g \in \text{Diff}(S^1)$$

$$U(g)aU(g)^* = a, \quad \text{supp}(g) \in I'$$

El círculo puede verse como la compactificación de la recta real mediante la transformada de Cayley, y la net conforme en el círculo puede restringirse a la recta real $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Además, la

positividad de la energía con respecto a las rotaciones del círculo es equivalente a la positividad de la energía con respecto a las traslaciones en la recta real [83].

Así tenemos el marco para estudiar el operador de conjugación modular del estado térmico ω_β sobre una net conforme quiral en la recta real $\mathcal{A}_\mathbb{R}$. Nótese que, trivialmente, el estado de vacío está purificado por el vector $|\Omega\rangle$ con $\pi_\Omega = \text{id}$ en cada $\mathcal{A}_I$. Así que de ahora en adelante no haremos explícito π_Ω y simplemente escribiremos $\pi_\Omega(a)$ como a incluso si hablamos de la representación de vacío.

5.2. Relación entre el termal ω y el vacío

Si Ω es el estado de vacío sobre $\mathcal{O}_2$, podemos definir el estado termal geométrico ω como en la ecuación (5.1.5), es decir como un estado definido sobre el álgebra correspondiente a la región $\mathcal{O}_1$ vía el pullback $\omega = \Omega \circ \alpha$. Recordemos que

$$\alpha : A(\mathcal{O}_1) \rightarrow A(\mathcal{O}_2)$$

y sea Ω un estado definido en $A(\mathcal{O}_2)$. Consideremos primero la representación cíclica sobre un dado espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}$ un vector asociado a Ω . Análogamente consideramos $|\Psi\rangle$ y $\mathcal{H}_\omega$ al vector y el espacio de Hilbert de cierta representación cíclica de ω .

Si α es sobreyectiva, y además $\mathcal{O}_2$ tiene complemento causal no vacío, es lícito definir el operador $U_\sigma : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ por (en breve especificaremos D)

$$\boxed{U_\sigma \alpha(a) |\Omega\rangle = \pi(a) |\Psi\rangle}, \quad (5.2.1)$$

ya que en tales condiciones todo elemento de $A(\mathcal{O}_2)$ es de la forma $\alpha(a)$ con $a \in A(\mathcal{O}_1)$ y además $|\Omega\rangle$ es un vector cíclico y separante para $A(\mathcal{O}_2)$. Más aún (ver teorema 2.3.6 en [55]), para este operador se cumple la siguiente

Proposición 5.2.1. *Sea U_σ el operador previamente definido, entonces*

1. $U_\sigma : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_\omega$ es una transformación lineal isométrica con dominio $D = \{\alpha(a) |\Omega\rangle; a \in A(\mathcal{O}_1)\}$.
2. $U_\sigma^* : D_\omega \subseteq \mathcal{H}_\omega \mapsto \mathcal{H}$ es el adjunto de U_σ , que satisface:

- a) su dominio es $D_\omega = \{\pi(a) |\Psi\rangle; a \in A(\mathcal{O}_1)\}$ y $U_\sigma^* U_\sigma \alpha(a) |\Omega\rangle = \alpha(a) |\Omega\rangle$.
- b) es una transformación lineal isométrica.
- c) es cerrado.

En resumen, U_σ^* es un operador cerrado y densamente definido tal que $U_\sigma^* U_\sigma \alpha(a) |\Omega\rangle = 1$.

3.

$$U_\sigma \alpha(a) U_\sigma^* = \pi(a) \quad (5.2.2)$$

en el subespacio denso $\pi(A(\mathcal{O}_2)) |\Psi\rangle$, para todo $a \in A(\mathcal{O}_1)$.

Demostración. Demostremos en orden cada una de las afirmaciones,

1. Veamos que es isométrico. Para esto no usamos más que la definición de U_σ y el hecho de que π y α son homomorfismos. Sean $a, b \in A(\mathcal{O}_1)$,

$$\begin{aligned}
 (U_\sigma \alpha(b)|\Omega\rangle, U_\sigma \alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}_\omega} &= (\pi(b)|\Psi\rangle, \pi(a)|\Psi\rangle)_{\mathcal{H}_\omega} \\
 &= (|\Psi\rangle, \pi(b^*a)|\Psi\rangle)_{\mathcal{H}_\omega} = \omega(b^*a) \\
 &= (|\Omega\rangle, \alpha(b^*a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}} = (|\Omega\rangle, \alpha(b^*)\alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}} \\
 &= (|\Omega\rangle, \alpha(b)^*\alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}} = (\alpha(b)|\Omega\rangle, \alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}}
 \end{aligned}$$

2. Como probamos que $(U_\sigma \alpha(b)|\Omega\rangle, U_\sigma \alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}_\omega} = (\alpha(b)|\Omega\rangle, \alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}}$, se sigue que $U_\sigma \alpha(a)|\Omega\rangle$ pertenece al dominio de U_σ^* . Además,

$$U_\sigma^* U_\sigma \alpha(a)|\Omega\rangle = U_\sigma^* \pi(a)|\Psi\rangle = \alpha(a)|\Omega\rangle \quad (5.2.3)$$

o en resumen $U_\sigma^* U_\sigma = 1$ (en el dominio de U_σ). Ahora veamos que U_σ^* es un isometría:

$$\begin{aligned}
 (U_\sigma^* \pi(b)|\Psi\rangle, U_\sigma^* \pi(a)|\Psi\rangle)_{\mathcal{H}} &= (\alpha(b)|\Omega\rangle, \alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}} \\
 &= (U_\sigma \alpha(b)|\Omega\rangle, U_\sigma \alpha(a)|\Omega\rangle)_{\mathcal{H}_\omega} = (\pi(b)|\Psi\rangle, \pi(a)|\Psi\rangle)_{\mathcal{H}_\omega}
 \end{aligned}$$

3. Para demostrar que $U_\sigma \alpha(a) U_\sigma^* = \pi(a)$, usaremos que $U_\sigma^* U_\sigma = 1$ sobre un dominio denso:

$$\begin{aligned}
 U_\sigma \alpha(a) U_\sigma^* U_\sigma \alpha(b)|\Omega\rangle &= U_\sigma \alpha(ab)|\Omega\rangle \\
 &= \pi(ab)|\Psi\rangle = \pi(a)\pi(b)|\Psi\rangle = \pi(a)U_\sigma \alpha(b)|\Omega\rangle
 \end{aligned}$$

Dado que los elementos $U_\sigma \alpha(b)|\Omega\rangle = \pi(b)|\Psi\rangle$ forman un subconjunto denso, se concluye que $U_\sigma \alpha(a) U_\sigma^* = \pi(a)$ en $\pi(A(\mathcal{O}_2))|\Psi\rangle$.

□

Esta proposición proporciona una forma de mapear el GNS de Ω al GNS de ω mediante Ad_{U_σ} .

Corolario 5.2.1. Como U_σ^* es una isometría densamente definida, $(U_\sigma^*)^*$ existe y satisface $(U_\sigma^*)^* U_\sigma^* = 1$. Además, por el Th. 5.10 de [84], U_σ es cerrable y su clausura es precisamente $(U_\sigma^*)^*$, por lo que a partir de ahora tomamos U_σ cerrado y tenemos

$$U_\sigma U_\sigma^* = 1 = U_\sigma^* U_\sigma$$

Corolario 5.2.2. Dado que cualquier operador cerrado, densamente definido y acotado puede extenderse a todo el espacio de Hilbert, podemos considerar a U_σ y su adjunto extendidos a todo el espacio de Hilbert. En otras palabras, U_σ es unitario.

En general, dada una net cualquiera de álgebras de von Neumann correspondientes al estado de vacío Ω , supongamos que éstas actúan sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (ahora no necesariamente el Hilbert de la GNS del vacío). Podemos realizar la misma construcción de un estado térmico geométrico ω sobre $A(\mathcal{O}_1)$ vía pullback con el mapa α . Arribaríamos así a las mismas conclusiones previas para el caso en que $\mathcal{H}$ era el espacio de Hilbert correspondiente a la GNS del estado de vacío, incluso aunque ahora no lo sea; la ecuación (5.2.1) y la proposición 5.2.1 seguirían siendo válidas.

Más aún, por el Teorema 5.10 en [84], sabemos que, dado que $D(U_\sigma)$ es denso, $D(U_\sigma^*)$ es denso si y solo si U_σ es cerrable (y ya sabemos que $D(U_\sigma^*)$ es denso). Además,

$$\overline{U_\sigma} = (U_\sigma^*)^* \quad (5.2.4)$$

También sabemos, por el mismo teorema, que U_σ^* es cerrado, y dado que además es acotado y está densamente definido, por lo tanto su dominio es todo el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ por el Corolario 5.2.2. Por lo tanto, $U_\sigma^* : \mathcal{H}_\omega \rightarrow \mathcal{H}$ es una isometría y se cumple que

$$\overline{U_\sigma} U_\sigma^* = 1.$$

5.2.1. Los operadores modulares en la representación GNS

En la presente sección nos dispondremos a hallar los operadores modulares de la teoría de Tomita-Takesaki para el estado termal en cierta región $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$. Para empezar queremos encontrar

$$J := J_{|\Psi\rangle, A(\mathcal{O})}. \quad (5.2.5)$$

Podríamos tener $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$. En particular estamos interesados en el caso

$$\mathcal{O} = \text{traslación tipo-espacio/nula de } W_R \subset W_R = \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 = \text{Minkowski}, \quad (5.2.6)$$

como sería el caso si consideramos el σ dado por la ecuación (5.1.6). De manera similar, en una CFT 1D sobre un rayo de luz:

$$\mathcal{O} = (t, \infty) \subset (0, \infty) = \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 = \mathbb{R} \quad \forall t > 0. \quad (5.2.7)$$

Nótese que asumir $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ implica que α es sobreyectiva (por isotonía).

En lo que sigue, obtendremos J a partir de la involución modular J_2 de Ω restringida a $A(\mathcal{O}_2)$. Por ejemplo, en una CFT 1D o CFT 2D, sabemos que J_2 es simplemente el operador paridad.

Uno podría pensar que J también es el operador paridad. Pero esto no puede suceder, dado que como sabemos, por la teoría de Tomita-Takesaki J debe mapear $\pi(A(\mathcal{O}))$ a su conmutante $\pi(A(\mathcal{O}))'$, el cual es más grande que $\pi(A(\mathcal{O}'))$. Podemos pensar en esto último de la siguiente forma. Si apelamos a la purificación más usual para el estado termal, en ella se duplica el espacio

de Hilbert asociado al vacío, obteniendo $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ a fin de representar al estado termal mediante el vector:

$$|\Psi\rangle = \sum_n e^{-\beta E_n/2} |E_n\rangle \otimes |E_n\rangle. \quad (5.2.8)$$

Aquí $|E_n\rangle$ son los autoestados del Hamiltoniano.

Los observables del sistema original son de la forma $\pi(a) = a \otimes \mathbf{1}$, mientras que los de la copia son $\mathbf{1} \otimes b$. Claramente se satisface $[a \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes b] = 0$, de modo que el conmutante de $\pi(A(\mathcal{O}))$ no se reduce solo a $\pi(A(\mathcal{O}'))$, sino que también involucra operadores que actúan de manera no trivial sobre la “segunda copia” del espacio de Hilbert.

Se deduce entonces que para el estado termal, la conjugación modular involucra ambos espacios de Hilbert, a diferencia del caso del vacío, y por lo tanto no puede ser meramente un operador de paridad. Al menos si nos disponemos a trabajar en esta purificación.

A fin de determinar J , continuaremos utilizando las construcciones GNS de ambos estados tal y como lo hicimos en la sección previa.

El operador de Tomita S_Ψ y la conjugación J_Ψ en $\mathbf{A}(\mathcal{O})$

Denotaremos $S_{\mathcal{O},|\Psi\rangle}$ a $S_{A(\mathcal{O}),|\Psi\rangle}$. Por definición,

$$S_{\mathcal{O},|\Psi\rangle} \pi(a)|\Psi\rangle = \pi(a^*)|\Psi\rangle \quad (5.2.9)$$

$$S_{\sigma(\mathcal{O}),|\Omega\rangle} \alpha(a)|\Omega\rangle = \alpha(a^*)|\Omega\rangle, \quad a \in \mathbf{A}(\mathcal{O}) \subset \mathbf{A}(\mathcal{O}_1) \quad (5.2.10)$$

dato que α es un *-homomorfismo. De esta manera, usando la ecuación (5.2.1) y la unitariedad del operador U_σ , se tiene

$$\begin{aligned} U_\sigma S_{\sigma(\mathcal{O}),|\Omega\rangle} U_\sigma^* \pi(a)|\Psi\rangle &= U_\sigma S_{\sigma(\mathcal{O}),|\Omega\rangle} U_\sigma^* U_\sigma \alpha(a)|\Omega\rangle \\ &= U_\sigma S_{\sigma(\mathcal{O}),|\Omega\rangle} \alpha(a)|\Omega\rangle \\ &= U_\sigma \alpha(a)^* |\Omega\rangle = U_\sigma \alpha(a^*) |\Omega\rangle \\ &= \pi(a^*) |\Psi\rangle = \pi(a)^* |\Psi\rangle \end{aligned}$$

lo que, por la ciclicidad de $|\Psi\rangle$ para el álgebra $\pi(A(\mathcal{O}_1))$, implica que (tras tomar clausura)

$$\boxed{S_{\mathcal{O},|\Psi\rangle} = U_\sigma S_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} U_\sigma^*} \quad (5.2.11)$$

y por ende también

$$\boxed{J_{\mathcal{O},|\Psi\rangle} = U_\sigma J_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} U_\sigma^*} \quad (5.2.12)$$

Ambas relaciones son sumamente útiles, ya que vinculan los operadores modulares de un estado en cierta región con los del otro en la región transformada.

Como caso particular analicemos el caso en el que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2 = \mathbb{R}_+ \subset \mathcal{O}_1 = \mathbb{R}$, entonces $\sigma_+(x^+) = e^{\frac{2\pi}{\beta}x^+}$ y $\sigma_+(\mathcal{O}) = (1, \infty)$. En breve quedará claro el porque de la utilización del

índice $+$. Por lo tanto, $J_{\sigma_+(\mathcal{O}),\Omega}$ es simplemente la involución modular del estado de vacío $|\Omega\rangle$ restringida a $(1, \infty)$, la cual se obtiene a partir de $J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle}$, el operador de paridad, de la siguiente manera: si $\tau(t)$ es la traslación en t , entonces $(1, \infty) = \tau(1)\mathbb{R}_+$, por lo que

$$J_{\sigma_+(\mathbb{R}_+),|\Omega\rangle} = J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} = U(\tau(1))J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle}U(\tau(-1)) \quad (5.2.13)$$

donde $U(\tau(t))$ es la representación unitaria de las traslaciones en $\mathcal{H}$. De aquí fácilmente se desprende la acción de $J_{(1,\infty),|\Omega\rangle}$ por conjugación

$$\begin{aligned} J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} \phi(x^+) J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} &= U(\tau(1))J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle}U(\tau(-1)) \phi(x^+) U(\tau(1))J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle}U(\tau(-1)) \\ &= U(\tau(1))J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle} \phi(x^+ - 1) J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle}U(\tau(-1)) \\ &= U(\tau(1))\phi(1 - x^+)U(\tau(-1)) \\ &= \phi(2 - x^+). \end{aligned}$$

Utilizando (5.2.12) y (5.2.13) concluimos

$$J_{\mathbb{R}_+,|\Psi\rangle} = U_\sigma U(\tau(1))J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle}U(\tau(-1))U_\sigma^*. \quad (5.2.14)$$

Con esto y las ecuaciones (5.1.4) y (5.2.1) deducimos la acción de la conjugación modular del estado termal vía conjugación sobre los representantes de los campos en su propia representación GNS (recordemos de (5.1.4) la acción de α sobre campos primarios),

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R}_+,|\Psi\rangle} \pi(\phi(x^+)) J_{\mathbb{R}_+,|\Psi\rangle} &= U_{\sigma_+} J_{\sigma_+(\mathbb{R}_+),|\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \pi(\phi(x^+)) U_{\sigma_+} J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \\ &= U_{\sigma_+} J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \pi(\phi(x^+)) U_{\sigma_+} J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \\ &= U_{\sigma_+} J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} \alpha(\phi(x^+)) J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \\ &= U_{\sigma_+} J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} \left| \frac{\partial \sigma_+(x^+)}{\partial x^+} \right|^{\frac{h_+}{2}} \phi(\sigma_+(x^+)) J_{(1,\infty),|\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \\ &= U_{\sigma_+} \left| \frac{\partial(2 - \sigma_+(x^+))}{\partial x^+} \right|^{\frac{h_+}{2}} \phi(2 - \sigma_+(x^+)) U_{\sigma_+}^*. \end{aligned}$$

Si x cumple $2 - \sigma_+(x) > 0$, entonces,

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R}_+,|\Psi\rangle} \pi(\phi(x^+)) J_{\mathbb{R}_+,|\Psi\rangle} &= U_{\sigma_+} \left| \frac{\partial}{\partial x^+} (\sigma_+(\sigma_+^{-1}(2 - \sigma_+(x^+))) \right|^{\frac{h_+}{2}} \phi(\sigma_+(\sigma_+^{-1}(2 - \sigma_+(x^+))) U_{\sigma_+}^* \\ &= U_{\sigma_+} \alpha(\phi(\sigma_+^{-1}(2 - \sigma_+(x^+)))) U_{\sigma_+}^* \\ &= \pi[\phi(\sigma_+^{-1}(2 - \sigma_+(x^+)))] \\ &= \pi \left[\phi \left(\frac{\beta}{2\pi} \log(2 - \sigma_+(x^+)) \right) \right] \end{aligned}$$

Si esta condición no se cumple, $\text{Ad}(U_{\sigma_+})$ no puede aplicarse tan directamente, y si uno insiste en usarla como antes, aparece un argumento negativo dentro del log de $\sigma_+^{-1}(x) = \frac{\beta}{2\pi} \log(x)$. De esta manera es como el número complejo i hace su aparición en la literatura y la misma se refiere a él como el “shadow world” (por ejemplo en [85] o más recientemente en [50]). Nosotros evitaremos este tipo de manipulación ya que en principio es meramente formal.

Para poder aplicar $\text{Ad}(U_{\sigma_+})$ cuando $\phi(2 - \sigma_+(x^+))$ pertenece al álgebra asociada a $\mathbb{R}_-$, procedemos de la siguiente manera, usando que $\sigma_+(x^+) - 2 > 0$

$$\begin{aligned}
J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} \pi(\phi(x^+)) J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} &= U_{\sigma_+} \left| \frac{\partial}{\partial x^+} (2 - \sigma_+(x^+)) \right|^{\frac{h_+}{2}} \phi(2 - \sigma_+(x^+)) U_{\sigma_+}^* \\
&= U_{\sigma_+} J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} \left| \frac{\partial}{\partial x^+} (\sigma_+(x^+) - 2) \right|^{\frac{h_+}{2}} \phi(\sigma_+(x^+) - 2) J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \\
&= U_{\sigma_+} J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* U_{\sigma_+} \left| \frac{\partial}{\partial x^+} (\sigma_+(x^+) - 2) \right|^{\frac{h_+}{2}} \phi(\sigma_+(x^+) - 2) U_{\sigma_+}^* U_{\sigma_+} J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} U_{\sigma_+}^* \\
&= J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} U_{\sigma_+} \left| \frac{\partial}{\partial x^+} (\sigma_+(x^+) - 2) \right|^{\frac{h_+}{2}} \phi(\sigma_+(x^+) - 2) U_{\sigma_+}^* J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} \\
&= J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} U_{\sigma_+} \alpha(\phi(\sigma_+^{-1}(\sigma_+(x^+) - 2))) U_{\sigma_+}^* J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} \\
&= J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} \pi[\phi(\sigma_+^{-1}(\sigma_+(x^+) - 2))] J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle}.
\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado que la acción de $J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle}$ por conjugación es la inversión del argumento del campo, que U_{σ_+} es unitario y la igualdad (5.2.12).

Así obtenemos la acción por conjugación $\text{Ad}(U_{\sigma})$ sobre el álgebra de la semirrecta negativa, en términos de la involución modular térmica sobre toda la recta real $J_{\mathbb{R}, |\Psi\rangle}$. Por lo tanto, en la quiralidad positiva, se cumple:

$$J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} \pi(\phi(x^+)) J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} = \begin{cases} \pi \left(\phi \left(\frac{\beta}{2\pi} \log(2 - \sigma(x^+)) \right) \right), & 2 - \sigma(x^+) > 0 \\ J_{\mathbb{R}, |\Psi\rangle} \pi \left(\phi \left(\frac{\beta}{2\pi} \log |2 - \sigma(x^+)| \right) \right) J_{\mathbb{R}, |\Psi\rangle}, & 2 - \sigma(x^+) < 0 \end{cases} \quad (5.2.15)$$

Será clave entonces, entender cómo actúa $J_{\mathbb{R}, |\Psi\rangle}$ por conjugación, cosa que haremos en la siguiente sección, ver por ejemplo ecuación (5.3.35) y los comentarios del párrafo que le siguen a ella.

Estas expresiones para la conjugación modular del estado termal y su acción por conjugación sobre $\mathbb{R}_+$ tienen una aplicación directa en $1 + 1$ dimensiones. La teoría del campo escalar libre sin masa exhibe una estructura algebraica que satisface las CCR, y además sus soluciones se factorizan en modos que se propagan hacia la izquierda y hacia la derecha. Dicho comportamiento es inmediato a partir de $\square\phi = 0$, y se refleja en la forma general de las soluciones

clásicas del campo:

$$\phi(x^0, x^1) = \phi_+(x^0 + x^1) + \phi_-(x^0 - x^1),$$

donde ϕ_+ y ϕ_- representan las componentes quirales derecha e izquierda, respectivamente (como ya utilizamos en el capítulo previo 4). A nivel de la red de álgebras, esta descomposición permite que las álgebras asociadas a regiones de tipo “diamante” factorizen como producto tensorial de dos álgebras cuyos operadores conmutan entre sí. En particular para el bosón quiral estas observaciones aplican solo al caso no masivo. Esto nos permite determinar la manera correcta de actuar vía conjugación con el operador de conjugación modular (valga la redundancia) asociado al wedge de Rindler derecho W_R sobre un campo asociado al bosón quiral no masivo.

En general si π es una purificación cualquiera (o sea una representación cíclica del álgebra de las CCR's tal que el thermal es representado por un vector cíclico) y $\phi(x)$ a un operador genérico en el espacio de Hilbert asociado del vacío de Minkowski 1+1 dimensional, se tiene:

$$\begin{aligned} J_{W_R, |\Psi\rangle} \pi(\phi(x)) J_{W_R, |\Psi\rangle} &= U_\sigma J_{\sigma(W_R), |\Omega\rangle} U_\sigma^* \pi(\phi(x)) U_\sigma J_{\sigma(W_R), |\Omega\rangle} U_\sigma^* \\ &= U_\sigma J_{\sigma(W_R), |\Omega\rangle} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|^{h_+/2} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|^{h_-/2} \phi(\sigma(x)) J_{\sigma(W_R), |\Omega\rangle} U_\sigma^*, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

donde usamos que $U_\sigma^* \pi(a) U_\sigma = \alpha(a) = \phi_\sigma(x)$ y la ecuación (5.1.4). Además, dado que la teoría del escalar no masivo en 1 + 1 dimensiones factoriza en quiralidades, se puede analizar separadamente $x^+ = x^0 + x^1$ y $x^- = x^0 - x^1$. Cometeremos un leve abuso de notación al seguir llamando ϕ para cada una de las quiralidades del campo (y ya no ϕ_- y ϕ_+).

Dado que W_R , se escribe como $\mathbb{R}_+$ en la coordenada x^+ y $\mathbb{R}_-$ en la coordenada x^- , analicemos por separado cada semirrecta, véase la figura 5.1.

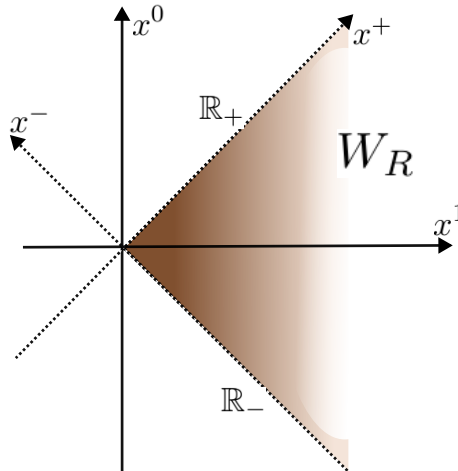


Figura 5.1: En la figura se ve como el wedge de Rindler derecho, es el producto cartesiano de $\mathbb{R}_-$ en la línea nula x^- y $\mathbb{R}_+$ en la línea nula x^+ .

En el rayo nulo x^+ , consideramos (como ya lo hicimos) $\sigma_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $\sigma_+(x^+) = e^{\frac{2\pi}{\beta}x^+}$. Mientras que para la otra línea nula nos interesa la semirrecta $\mathbb{R}_-$ y por lo tanto tomaremos, $\sigma_-(x^-) = -e^{-\frac{2\pi}{\beta}x^-}$.

Procediendo de manera análoga a como hicimos antes, obtenemos:

$$J_{\mathbb{R}_-,|\Psi\rangle} \pi(\phi(x^-)) J_{\mathbb{R}_-,|\Psi\rangle} = \begin{cases} \pi \left(\phi \left(-\frac{\beta}{2\pi} \log(2 + \sigma(x^-)) \right) \right), & 2 + \sigma(x^-) > 0 \\ J_{\mathbb{R},|\Psi\rangle} \pi \left(\phi \left(-\frac{\beta}{2\pi} \log |2 + \sigma(x^-)| \right) \right) J_{\mathbb{R},|\Psi\rangle}, & 2 + \sigma(x^-) < 0 \end{cases} \quad (5.2.17)$$

Con las ecuaciones (5.2.15) y (5.2.17) queda definida la acción por conjugación del operador J_Ψ a menos de especificar π (la representación) y Ψ el vector cíclico y dependiendo del punto del espaciotiempo podría requerirse conocer $J_{\mathbb{R},|\Psi\rangle}$ en dicha representación. De momento mencionamos que π era una representación GNS, lo cierto es que puede ser cualquier representación cíclica de vector cíclico $|\Psi\rangle$.

En la siguiente sección estudiaremos diferentes purificaciones (representaciones con distintos vectores cíclicos) y surgirán ecuaciones análogas a las (5.2.15) y (5.2.17) en ese contexto específico y para regiones de tipo cuña de Rindler. Entonces quedarán especificados todos los elementos, es decir, π (la purificación), Ψ el vector cíclico y también la acción de $J_{\mathcal{O},|\Psi\rangle}$ en dicha región y purificación en particular. Véase por ejemplo la ecuación (5.3.16), en la cual π es la identidad, el vector cíclico $|\Psi\rangle$ es un cierto vector perteneciente al *cono positivo* (que definiremos luego) del vector de vacío $|\Omega\rangle$ y como veremos $J_{W_R,|\Psi\rangle} = J_{W_R,|\Omega\rangle}$.

Más aún, si (a, b) es un intervalo acotado de la recta real, podemos determinar $J_{(a,b),|\Psi\rangle}$. Con tal fin, nos valemos de una transformación conforme γ que mapea el intervalo $(\sigma(a), \sigma(b))$ a $\mathbb{R}_+$ de manera biyectiva (siendo σ la ya mencionada $\sigma(x) = e^{\frac{2\pi}{\beta}x}$). Incluso es posible escribir γ como $\tau(t) \circ r(\theta)$ sin necesidad de apelar a las dilataciones, para esto basta tomar los parámetros apropiados. En nuestro caso serán:

$$t = \frac{1 + \sigma(a)\sigma(b)}{\sigma(b) - 1} \quad \text{y} \quad \theta = 2 \operatorname{arccot}(\sigma(b)). \quad (5.2.18)$$

Así, al igual que hace un momento determinamos $J_{(1,\infty),|\Omega\rangle}$ apelando a $J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle}$, ahora podemos hacer lo propio para determinar $J_{(\sigma(a),\sigma(b)),|\Omega\rangle}$

$$J_{(\sigma(a),\sigma(b)),|\Omega\rangle} = U(r(-\theta) \circ \tau(-t)) J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle} U(\tau(t) \circ \tau(\theta)), \quad (5.2.19)$$

siendo U la representación en el espacio de una partícula del vacío de las transformaciones conformes dadas por (4.2.8). Esta ecuación es análoga a (5.2.13). De ella y la ecuación (5.2.12) se desprende que

$$J_{(a,b),|\Psi\rangle} = U_\sigma U(r(-\theta)) U(\tau(-t)) J_{\mathbb{R}_+,|\Omega\rangle} U(\tau(t)) U(\tau(\theta)) U_\sigma^*. \quad (5.2.20)$$

Luego, en la sección 5.3.4, veremos como actúa ésta conjugación modular sobre un elemento $f \oplus 0$ en la purificación estándar.

Verifiquemos que efectivamente el operador $J_{\mathcal{O},|\Psi\rangle}$ definido como en (5.2.12) efectivamente, mapea $\pi(A(\mathcal{O}))$ a $\pi(A(\mathcal{O}))'$ por conjugación, como de hecho sabemos que sucede para J_Ω . Entonces, recordando la ecuación (5.2.2) se tiene

$$\begin{aligned}
J_{\mathcal{O},|\Psi\rangle}\pi(A(\mathcal{O}))J_{\mathcal{O},|\Psi\rangle} &= U_\sigma J_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} U_\sigma^* \pi(A(\mathcal{O})) U_\sigma J_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} U_\sigma^* \\
&= U_\sigma J_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} \alpha(A(\mathcal{O})) J_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} U_\sigma^* = U_\sigma J_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} A(\sigma(\mathcal{O})) J_{\sigma(\mathcal{O}),\Omega} U_\sigma^* \\
&= U_\sigma A(\sigma(\mathcal{O}))' U_\sigma^* = U_\sigma \alpha(A(\mathcal{O}))' U_\sigma^* \\
&= (U_\sigma \alpha(A(\mathcal{O})) U_\sigma^*)' = \pi(A(\mathcal{O}))'
\end{aligned}$$

donde se utilizó dos veces la ecuación (5.2.2) y en la penúltima ecuación usamos que $UA'U^* = (UAU^*)'$ si U es unitario, es decir, si $UU^* = U^*U = 1$.

De la cadena de igualdades, se desprende que U_σ es responsable de incluir más operadores en el álgebra conmutante $\pi(A(\mathcal{O}))'$ que solo aquellos en $\pi(A(\mathcal{O}))$.

La involución modular del estado termal en su representación GNS

Sigamos analizando el estado KMS geométrico respecto al grupo uniparametrico $U(\tau(t))$. Con el fin de aliviaran un poco la notación y dado que en lo que queda de esta sección no volverá a aparecer la representación de vacío, nos permitiremos notar $\pi(a) = a$ (igual que antes hacíamos con π_Ω) y $|\Psi\rangle = \mathbf{1}$, entonces $S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}\pi(a)|\Psi\rangle = \pi(a^*)|\Psi\rangle$ se notará en la representación GNS

$$S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}a = a^*.$$

El adjunto $S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^*$ satisface, para b en su dominio,

$$\omega(a^* S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^* b) = (a, S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^* b) = (b, S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle} a) = (b, a^*) = \omega(b^* a^*),$$

donde $(,)$ es el producto interno en el Hilbert de la GNS del termal (ver ecuación (1.2.6) en la introducción). Esto junto con la condición KMS, implica que

$$(a, S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^* b) = \omega(a^* U(\tau(i\beta))b^*) = (a, U(\tau(i\beta))b^*)$$

por lo que se tiene

$$S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^* a = U(\tau(i\beta))a^* \tag{5.2.21}$$

donde a es tal que $U(t)a^*$ admite una extensión analítica hasta $\text{Im}(t) = i\beta$. Definimos

$$T(z) := U(\tau(z))$$

y continuamos con la búsqueda de $J_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}$. Utilizando la notación recién introducida como T y le expresión dada para $S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^*$ en la ecuación (5.2.21),

$$\Delta_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle} a = S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^* S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle} a = S_{\mathcal{O}_1,|\Psi\rangle}^* a^* = T(i\beta)a$$

y dado que $T(z)$ debería ser un grupo unitario de un parámetro (al menos para $\text{Im}(z) \in [0, \beta]$),

$$\Delta_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle}^{\pm 1/2} a = T\left(\pm \frac{i\beta}{2}\right) a$$

Finalmente, dado que $S = \Delta^{-1/2} J$,

$$J_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle} a = \Delta_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle}^{1/2} S_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle} a = T\left(\frac{i\beta}{2}\right) a^*. \quad (5.2.22)$$

Pero para que este operador tenga sentido, más allá de su expresión formal, es pertinente hacer algunos comentarios más en relación a la ecuación (5.2.21). Según se mencionó, al momento solo sabemos como actúa $S_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle}$ sobre algunos elementos particulares del álgebra, resta entonces convencernos de que esto es suficiente para saber como actúa $S_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle}$ sobre los restantes. Con tal fin, supongamos que ω es un estado normal y fiel sobre una álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ (como de hecho lo es el estado termal geométrico ω cuando se restringe a regiones locales, lo que se denomina “localmente normal”, ver por ejemplo [77]), y sea $U(\tau(\cdot))$ el grupo modular correspondiente. Se puede demostrar que la aplicación $t \mapsto U(\tau(t))(a)$ es continua en la topología fuerte.

Diremos que un elemento a es *analítico con respecto a* $U(\tau(\cdot))$ si la aplicación $t \mapsto U(\tau(t))(a)$ se extiende a una función analítica $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$, la cual denotaremos por $z \mapsto U(\tau(z))(a)$. Nótese que la identidad es analítica, y que las combinaciones lineales y productos de operadores analíticos también lo son.

Además, si a es analítico, entonces la función $f(z) = [U(\tau(\bar{z}))(a)]^*$ es analítica y satisface $f(t) = U(\tau(\bar{t}))(a^*)$ para $t \in \mathbb{R}$, por lo que a^* también es analítico (con $U(\tau(z))(a^*) = [U(\tau(\bar{z}))(a)]^*$). Por lo tanto, los operadores analíticos forman una $*$ -subálgebra $\mathcal{A}_\tau \subseteq \mathcal{A}$ (véase por ejemplo la sección 2.5 en [18])

Esta subálgebra es densa en $\mathcal{A}$ en la topología fuerte, más aún lo es *densa por sucesiones*⁴: todo $a \in \mathcal{A}$ es el límite fuerte de una sucesión $\{a_n\} \subset \mathcal{A}_\tau$. De hecho, basta tomar

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt U(\tau(t))(a) e^{-nt^2}. \quad (5.2.23)$$

Nuevamente referimos al lector a [18] o la sección 2.5.3 en [55]. Allí nos encontraremos con la definición precisa de este tipo de integral de operadores:

Teorema 5.2.1 (Proposición 2.5.18 y Corolario 2.5.23 en [55]). *Sea $t \mapsto U(\tau(t))$ un grupo uniparamétrico de isometrías, continuo en la topología fuerte, además sea μ una medida de Borel de variación acotada sobre $\mathbb{R}$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$, existe un $B \in \mathcal{A}$ tal que*

$$\eta(B) = \int \eta(\tau_t(A)) d\mu(t) \quad \text{para todo } \eta \in \mathcal{A}^*.$$

Este resultado nos avala a introducir la siguiente definición

⁴Todo $a \in \mathcal{A}$ es el límite fuerte de una sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathcal{A}_\alpha$.

Definición 5.2.1. Si A y B están relacionados como en el teorema 5.2.1, entonces utilizaremos la notación

$$B = \int U(\tau(t))(A) d\mu(t).$$

Notación que de hecho ya fue utilizada en la ecuación (5.2.23).

Para ver que los elementos a_n son analíticos respecto a $U(\tau(\cdot))$, notemos primero que la siguiente función

$$f_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt U(\tau(t))(a) e^{-n(t-z)^2}, \quad (5.2.24)$$

está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$, ya que $e^{-n(t-z)^2}$ como función de t está en $L_1(\mathbb{R})$. Además si evaluamos en z real, digamos $z = s \in \mathbb{R}$, cambiamos variables y utilizamos la propiedad de grupo de $U(\tau(\cdot))$, obtenemos

$$f_n(s) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt U(\tau(t))(a) e^{-n(t-s)^2} = U(\tau(s))(a_n). \quad (5.2.25)$$

Con lo cual todos los $U(\tau(s))(a_n)$ se extienden a funciones bien definidas en el plano complejo. Resta demostrar que dichas funciones son analíticas. Pero dado $\eta \in \mathcal{A}^*$,

$$\eta(f_n(z)) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(U(\tau(t))(a)) e^{-n(t-z)^2}. \quad (5.2.26)$$

Pero $|\eta(U(\tau(t))(a))| \leq \|\eta\| \|A\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y en consecuencia $\eta(f_n(z))$ es analítica por el teorema de convergencia dominada, que nos permitirá derivar $f_n(z)$ haciéndolo directamente dentro de la integral. Para ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en la topología fuerte ir a [55].

Esto nos permite definir el operador $J_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle}$ no solo sobre elementos analíticos como en la ecuación (5.2.22), sino también extendiendo por continuidad, sobre elementos cualesquiera del álgebra $A(\mathcal{O}_1)$. Y ya que ambos, dominio e imagen de $J_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle}$ tal y como lo definimos en la ecuación (5.2.22) son densos, resultará que la extensión por continuidad de $J_{\mathcal{O}_1, |\Psi\rangle}$ es un operador antiunitario, que es ni más ni menos que la conjugación modular del estado termal geométrico restringido a la región $\mathcal{O}_1$.

5.3. Purificaciones del estado termal global y local

Ya construído el estado termal geométrico, discutiremos ahora sus posibles purificaciones y cómo se expresa el operador conjugación modular en cada una de ellas. Anteriormente en (5.1.5) lo definimos algebraicamente y discutimos $J_{\mathcal{O}, \omega_\beta}$ en la representación GNS. Ahora discutiremos otras posibles representaciones cíclicas el y el J correspondiente.

5.3.1. Purificación de ω_β con el vector de vacío $|\Omega\rangle$

Como vimos al comienzo de este capítulo, tenemos una forma de definir un estado termal ω_β básicamente como el vacío restringido al wedge de Rindler derecho W_R . Podemos utilizar esto

para purificar ω_β usando la representación GNS de $\Omega|_{W_R}$ (la identidad), es decir, consideramos el triplete $(\pi_\beta, \mathcal{H}, |\Omega\rangle)$ con:

$$\pi_\beta(\phi(x)) := \alpha(\phi(x)). \quad (5.3.1)$$

Siendo $\alpha : \mathbb{M} \rightarrow W_R$ el $*$ -morfismo inducido por un σ como el de la sección 5.1. Entonces, para cualquier campo $\phi(x)$ localizado en cualquier lugar del espacio-tiempo de Minkowski,

$$\langle \Omega | \pi_\beta(\phi(x)) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \alpha(\phi(x)) | \Omega \rangle = \Omega(\alpha(\phi(x))) = \omega_\beta(\phi(x)) \quad (5.3.2)$$

Por el teorema de Reeh-Schlieder sabemos que Ω es cíclico y separante para $\mathcal{A}_{W_R}$, así que esta es una representación cíclica para ω_β y $A(W_R) = \alpha(A(\mathbb{M}))$.

Por Bisognano-Wichmann [81] también conocemos la conjugación modular del vacío $J_{|\Omega\rangle, \mathcal{A}_{W_R}}$ restringida al álgebra de observables $\mathcal{A}_{W_R}$ del wedge de Rindler W_R :

$$J_{\mathcal{A}_{W_R}, |\Omega\rangle} \phi(x) J_{\mathcal{A}_{W_R}, |\Omega\rangle} = \phi(I_0(x)) = \phi(-x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (5.3.3)$$

Aquí $I_0(x)$ es la inversión con respecto al origen. Dado que la evolución modular y la conjugación modular están definidas únicamente por un álgebra de von Neumann y un vector cíclico y separante, podemos afirmar que la conjugación modular $J_{A(\mathbb{M}), \beta}$, del vector representante de ω_β (el vector de vacío $|\Omega\rangle$) sobre todo el álgebra de observables, es $J_{\mathcal{A}_{W_R}, |\Omega\rangle}$:

$$J_{A(\mathbb{M}), \beta} \pi_\beta(\phi(x)) J_{A(\mathbb{M}), \beta} = \pi_\beta[\phi(I_0(x))] = (\alpha \circ \phi \circ I_0)(x) = |\sigma'(x)|^{h+} \phi(-\sigma(x)) \quad (5.3.4)$$

Este resultado se desprende de las ecuaciones (5.2.2) (tomado π_β como π , en cuyo caso la conjugación por U_σ deja los elementos intactos) y (5.2.12).

Nótese que $\phi(-\sigma(x))$ pertenece al álgebra de la recta real negativa, o volviendo al espacio-tiempo de Minkowski bidimensional, al álgebra del wedge de Rindler izquierdo W_L . Podemos reescribir esta expresión para el campo suavizado $\phi(f)$ por alguna función f con soporte compacto arbitrario:

$$J_{A(\mathbb{M}), \beta} \pi_\beta(\phi(f)) J_{A(\mathbb{M}), \beta} = |\sigma'|^{h+} \phi(f \circ \sigma^{-1} \circ I_0) \quad (5.3.5)$$

Nótese que $f \circ \sigma^{-1}$ tiene soporte en la recta real positiva, y por lo tanto $\phi(f \circ \sigma^{-1} \circ I_0)$ pertenece al álgebra de la recta real negativa. En otras palabras, este campo no es igual a algún $\phi(g \circ \sigma^{-1})$ para alguna función apropiada g y por lo tanto no pertenece a la representación π_β . El conmutante del álgebra generada por $\pi_\beta(\phi(f))$ vive fuera de la representación, y no debería sorprender: no hay campos fuera de Minkowski. Sin embargo, el conmutante no es vacío ya que *existen operadores* que conmutan con el álgebra generada por $\pi_\beta(\phi(f))$, estos son los campos del vacío suavizados con funciones con soporte en la recta real negativa (en 2D en el wedge izquierdo W_L).

5.3.2. Purificación de $\omega_\beta|_{\mathcal{A}_r}$ con la representación del vacío $|\Omega\rangle$

Al restringir el estado termal a un wedge derecho W_r (una traslación del wedge de Rindler estándar W_R), dejamos espacio para otros campos del tipo $\pi_\beta(\phi(f))$ localizados fuera de W_r .

En particular, esperamos que el conmutante de $\mathcal{A}_{W_r}$, $\mathcal{A}'_{W_r}$, contenga elementos como $\pi_\beta(\phi(f))$ con f con soporte dentro de W'_r , el complemento causal de W_r . Estamos llamando W_r al wedge derecho con borde en $x = r$, en el cual la quiralidad positiva corresponde a $x^+ > r$ (y $x^- < r$ para la otra quiralidad). Para evitar saturar la notación, escribiremos $\mathcal{A}_r$ para el álgebra asociada con el intervalo (r, ∞) en el modelo quiral. Con esta notación, $\mathcal{A}_0$ es el álgebra de la recta real positiva. Podríamos considerar el álgebra local asociada a un doble cono grande en lugar de $\mathcal{A}_r$, y la idea sería exactamente la misma, así que nos quedamos con las cuñas o semirrectas en $0 + 1$.

Para estudiar esto, podemos tomar la purificación anterior mediante la representación cíclica (5.3.1), y luego restringir esta representación a $\mathcal{A}_{W_r}$, o podemos primero restringir el estado algebraico ω_β , obtener $\omega_\beta|_{\mathcal{A}_{W_r}}$, y luego elegir alguna purificación (que puede o no coincidir con la anterior). En este último caso, de hecho podemos usar la representación de vacío, lo que haremos más adelante. Por ahora, tomemos (5.3.1) y restrinjámosla a campos $\phi(x)$ tales que $x > r$, para algún $r \in \mathbb{R}$ finito. La diferencia con el caso anterior donde consideramos el álgebra de la recta real, es que ahora σ mapea (r, ∞) a $(\sigma(r), \infty)$, así que no tenemos a mano el resultado de Bisognano y Wichmann válido para $\mathbb{R}_+$. Por supuesto, es simple adaptarlo, trasladando $(\sigma(r), \infty)$ a la recta real positiva, aplicando I_0 , y trasladando de vuelta a $(\sigma(r), \infty)$. La afirmación (análogamente a lo que vimos en la ecuación (5.2.13)) es que

$$J_{\mathcal{A}_{\sigma(r)}, |\Omega\rangle} = U(\tau(\sigma(r))) J_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}_+}, |\Omega\rangle} U(\tau(\sigma(r)))^* \quad (5.3.6)$$

lo cual sigue de la definición del operador de Tomita S (para cada álgebra local) y la covarianza de la net de álgebras. Entonces tenemos

$$J_{\mathcal{A}_r, \beta} = J_{\mathcal{A}_{\sigma(r)}, |\Omega\rangle} = U(\tau(\sigma(r))) J_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}_+}, |\Omega\rangle} U(\tau(\sigma(r)))^* \quad (5.3.7)$$

Explícitamente,

$$J_{\mathcal{A}_{\sigma(r)}, |\Omega\rangle} \phi(x) J_{\mathcal{A}_{\sigma(r)}, |\Omega\rangle} = \phi(2\sigma(r) - x), \quad x \in (\sigma(r), \infty). \quad (5.3.8)$$

Como era de esperar, $2\sigma(r) - x$ es una reflexión con respecto a $x = \sigma(r)$, que llamaremos $I_{\sigma(r)}$. Esto significa que $\phi(2\sigma(r) - x)$ pertenece a $\mathcal{A}'_{\sigma(r)} = \mathcal{A}_{(-\infty, \sigma(r))}$. Nótese que si $2\sigma(r) - x > 0$, el campo $\phi(2\sigma(r) - x)$ es de la forma $\pi_\beta(\phi(y))$, con $y = \sigma^{-1}(2\sigma(r) - x)$, así que pertenece a la representación π_β . Esto es diferente de la situación anterior de la conjugación modular del álgebra global, donde no había espacio en la representación π_β para el conmutante de $\mathcal{A}_{\mathbb{R}_+}$. Al restringirnos a algún álgebra local más pequeña como $\mathcal{A}_r$, el conmutante $\pi_\beta(\mathcal{A}_r)' = \mathcal{A}'_{\sigma(r)} = \mathcal{A}_{(-\infty, \sigma(r))}$ es más grande que antes y algunos de sus elementos pertenecen a $\pi_\beta(\mathcal{A}(\mathbb{M})) = \mathcal{A}_0$.

Para un campo suavizado, tenemos ahora

$$J_{\mathcal{A}_r, \beta} \pi_\beta(\phi(f)) J_{\mathcal{A}_r, \beta} = |\sigma'|^{h_+} \phi(f \circ \sigma^{-1} \circ \tau(\sigma(r)) \circ I_0 \circ \tau(-\sigma(r))), \quad \text{supp}(f) \subset (r, \infty) \quad (5.3.9)$$

Como se esperaba, obtenemos un campo transformado suavizado sobre una función con soporte en $(-\infty, \sigma(r))$. El “second world” puede aparecer si uno insiste en que todos los campos como

(5.3.9) todavía están en la imagen de π_β , es decir, que el lado derecho de (5.3.9) sea de la forma $\phi(g \circ \sigma^{-1})$, para alguna función con soporte compacto g . Sin embargo, por la discusión anterior, sabemos que sólo cuando el campo $\phi(f)$ está localizado dentro del intervalo $(r, \sigma^{-1}(2\sigma(r)))$ esto puede suceder, de lo contrario la (representación del) campo transformado por la conjugación modular “se escapa” a la recta real negativa y no hay forma de que sea de la forma $\phi(g \circ \sigma^{-1}) = \pi_\beta(g)$, que sólo puede estar localizado en la recta real positiva. Es cuando insistimos en que el campo transformado coincida con $\phi(g \circ \sigma^{-1})$ que hay algún problema y $g \circ \sigma^{-1}$ será evaluado en un número negativo. Esta es la raíz de los números complejos que a veces aparecen en la literatura como $\phi(ix)$ (ver por ejemplo [86]).

Otra forma en que el “second world” puede aparecer es en una purificación donde duplicamos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, como en álgebras de tipo I, y esto es lo que hacemos en la sección 5.3.4 para el caso especial de un campo libre. Pero primero, discutamos otra forma de purificar ω_β restringido a algún álgebra local. Ya hemos hecho esto usando (5.3.1) restringida a un álgebra local, pero ahora queremos usar otra purificación, una donde la representación es la identidad, es decir, la del vacío. La desventaja es que el vector representante ya no es el vector de vacío $|\Omega\rangle$.

5.3.3. Purificación de $\omega_\beta|_{\mathcal{A}_\mathcal{O}}$ con la representación del vacío

Primero algunas observaciones técnicas: necesitaremos que los estados KMS sean localmente normales para usar un resultado sobre la conjugación modular en el contexto de conos naturales. La normalidad local significa que el estado restringido al álgebra local $\mathcal{A}_\mathcal{O}$ es normal, es decir, puede escribirse como una matriz densidad actuando en cierto espacio de Hilbert. No conocemos ningún resultado que garantice la normalidad local de un estado KMS con cierta generalidad para una net de álgebras de von Neumann locales. Sin embargo, si la net está generada por álgebras de von Neumann locales con la *split property*, por [87], se sigue la normalidad local de los estados KMS⁵. La *split property* es automática para nets conformes en el círculo [88]. Podemos entonces obtener una net conforme en 2D con la *split property* tomando el producto de dos nets conformes quirales con la *split property*. Estamos asumiendo entonces que los modelos bajo consideración satisfacen la propiedad de split (por ejemplo la net de corriente $U(1)$ que describe un bosón quiral o la net Vir_c generada por tensores de energía-momento, ver [77, 79] para más detalles).

Queremos purificar el estado térmico en las álgebras de von Neumann locales del vacío. En otras palabras, queremos que la representación cíclica sea la identidad. Para ser más precisos, consideremos algún doble cono suficientemente grande $\mathcal{O}_0$ y llamemos a su álgebra de vacío $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$, de modo que el estado de vacío $|\Omega\rangle$ es un vector cíclico y separante para $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$. Consideremos

⁵Agradecemos a Yoh Tanimoto por su correspondencia sobre estos puntos técnicos.

entonces el cono natural correspondiente $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_0}$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{O}_0} = \left\{ \Delta^{1/4} a |\Omega\rangle; \quad a \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}, a \geq 0 \right\}. \quad (5.3.10)$$

Luego consideramos la restricción de ω_β a $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$. Por la propiedad 8 de la Proposición en el Apéndice 7.4, para un estado KMS (localmente normal) ω_β restringido a $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$, $\omega_\beta|_{\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}}$, tenemos un estado vectorial $\Psi_{\mathcal{O}_0}$ en $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_0}$ tal que

$$\langle \Psi_{\mathcal{O}_0} | a | \Psi_{\mathcal{O}_0} \rangle = \omega_\beta|_{\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}}(a), \quad a \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}_0} \quad (5.3.11)$$

Así hemos logrado una purificación cíclica de $\omega_\beta|_{\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}}$ en el espacio de Hilbert de la representación de vacío con representación dada por la identidad (la representación es cíclica porque el estado es fiel sobre $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$ ⁶ lo que implica que cualquier vector representante es separante, lo que por la propiedad 6 del apéndice implica cíclico). Aún más, el representante vectorial pertenece al cono $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_0}$ asociado con el álgebra $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$. En resumen, la representación es $(\mathcal{H}, \pi = \pi_\Omega = \text{id}, \Psi_{\mathcal{O}_0} \in \mathcal{P}_{\mathcal{O}_0})$. Con respecto a la purificación de la subsección anterior, hemos simplificado en cierta medida la representación cambiando $\pi_\beta = \alpha$ por π_Ω que es la identidad, con el precio a pagar de que ahora el vector representante ya no es el vector de vacío $|\Omega\rangle$ sino algún vector $\Psi_{\mathcal{O}_0} \in \mathcal{P}_{\mathcal{O}_0}$.

Ahora, para calcular la conjugación modular asociada a algún álgebra más pequeña $\mathcal{A}_I \subset \mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$, procedemos de manera similar a como lo hicimos en la sección anterior. Primero que nada, consideremos una componente quiral de modo que tenemos una net conforme en el círculo restringida a la recta real. Así que cambiamos la notación de acuerdo con las líneas anteriores: ahora tenemos un intervalo suficientemente grande I_0 y repitiendo todo el razonamiento anterior, la representación cíclica del estado térmico local es $(\mathcal{H}, \pi_\Omega = \text{id}, \Psi_{I_0} \in \mathcal{P}_{I_0})$. Estamos buscando la conjugación modular $J_{I,\beta}$ asociada a $\omega_\beta|_{I_0}$ y el álgebra $\mathcal{A}_I \subseteq \mathcal{A}_{I_0}$, con $I \subseteq I_0$.

Como ya mencionamos al inicio del capítulo (ver ecuación (5.2.1)), con las consideraciones de $\pi = \text{id}$ y $\alpha = \pi_\beta$, existe un unitario U_{I_0} que satisface

$$U_{I_0} \pi_\beta(a) U_{I_0}^* = a, \quad a \in \mathcal{A}_{I_0}, \quad (5.3.12)$$

utilizando el mapa U_{I_0} podemos mapear un dominio denso de una representación cíclica a la otra,

$$U_{I_0} \pi_\beta(a) U_{I_0}^* b | \Psi_{I_0} \rangle = U_{I_0} \pi_\beta(a) \pi_\beta(b) | \Omega \rangle = ab | \Psi_{I_0} \rangle. \quad (5.3.13)$$

Nótese que para un álgebra local $\mathcal{A}_I \subseteq \mathcal{A}_{I_0}$ el estado reducido $\omega_\beta|_{\mathcal{A}_I}$ todavía está representado por $|\Psi_{I_0}\rangle$:

$$\omega_\beta|_{\mathcal{A}_I}(a) = (|\Psi_{I_0}\rangle, a |\Psi_{I_0}\rangle), \quad a \in \mathcal{A}_I \quad (5.3.14)$$

pero esto es todo lo que podemos decir, ya que no sabemos cómo relacionar conos e inclusiones de subálgebras. En cualquier caso, tener la representación cíclica $(\mathcal{H}, \pi_\Omega = \text{id}, \Psi_{I_0} \in \mathcal{P}_{I_0})$

⁶Cualquier estado KMS es fiel sobre $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$ si el álgebra cuasi-local está generada por factores: esto es porque en cada factor la representación GNS del estado ω_β es fiel (es decir, inyectiva). Esto y la propiedad separante del vector GNS, que se sigue por un argumento como en el Corolario 5.3.9 de [89], da un estado fiel sobre $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}$.

y (5.3.14), junto con el unitario U_{I_0} será suficiente para nuestros propósitos, dado que nos permitirá establecer una igualdad de operadores sobre un subespacio denso.

El hecho de que $|\Psi_{I_0}\rangle$ es cíclico incluso para el álgebra más chica $\mathcal{A}_I$ se desprende básicamente de que el vacío lo es para $\alpha(\mathcal{A}_I)$ por Reeh-Schlieder y de la unitariedad de U_{I_0} . Notemos que dado un $a \in \mathcal{A}_I$, tenemos

$$a |\Psi_{I_0}\rangle = U_{I_0} \pi_\beta(a) |\Omega\rangle = U_{I_0} \alpha(a) |\Omega\rangle,$$

que a partir de lo comentado arriba implica la ciclicidad de $|\Psi_{I_0}\rangle$ para el álgebra $\mathcal{A}_I$.

Si en particular consideramos como el álgebra $\mathcal{A}_{I_0}$ a la de la cuña de Rindler W_R y $\mathcal{A}_I$ a la de una de sus traslaciones W_r (como en la sección previa), y notemoslas como antes $\mathcal{A}_r \subseteq \mathcal{A}_0$. Como recién, tendremos un mapa unitario U_r satisfaciendo (nuevamente ver (5.2.1), con las consideraciones pertinentes)

$$J_{W_r, |\Psi_{\mathcal{A}_0}\rangle} = U_r J_{\sigma(W_r), \Omega} U_r^*, \quad (5.3.15)$$

dicho U_r será inducido por un mapa $\sigma : W_R \rightarrow W_r$. Siguiendo el mismo razonamiento que en la sección anterior, pero con la purificación $\pi = \text{id}$ y vector cíclico $|\Psi_{\mathcal{A}_0}\rangle$ (que como en el caso de I_0 , lo tomo perteneciente al cono positivo del vacío), obtenemos la acción de la conjugación modular $J_{W_R, \beta}$ sobre el campo $\phi(x)$:

$$J_{W_r, \beta} \phi(x) J_{W_r, \beta} = \begin{cases} \phi(\sigma^{-1} \circ I_q \circ \sigma(x)), & \text{si } I_q \circ \sigma(x) \in \sigma(W_R), \\ J_{W_R, \beta} \phi(\sigma^{-1}(I_1 \circ I_q \circ \sigma(x))) J_{W_R, \beta}, & \text{si } I_q \circ \sigma(x) \in \sigma(W_R)'. \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Aquí, I_q es la reflexión respecto al vértice del wedge $\sigma(W_r)$ en $x^1 = q$:

$$I_q : (x^0, x^1) \mapsto (-x^0, 2q - x^1), \quad (5.3.17)$$

y I_1 es la reflexión análoga respecto al vértice de $\sigma(W_R)$, o sea en $x^1 = 1$ ya que $\sigma(W_R) = W_1$ (ver figura 5.2).

Finalmente, gracias a la propiedad 7 de la Proposición en el Apéndice 7.4, sabemos que $J_{W_{R_0}, \Psi} = J_{W_{R_0}, \Omega}$. Denotando por I_0 la reflexión respecto al borde de W_R , podemos simplificar la expresión anterior, obteniendo el resultado central:

$$J_{W_r, \beta} \phi(x) J_{W_r, \beta} = \begin{cases} \phi(\sigma^{-1} \circ I_q \circ \sigma(x)), & \text{si } I_q \circ \sigma(x) \in \sigma(W_R), \\ \phi(I_0 \circ \sigma^{-1} \circ I_1 \circ I_q \circ \sigma(x)), & \text{si } I_q \circ \sigma(x) \in \sigma(W_R)'. \end{cases} \quad (5.3.18)$$

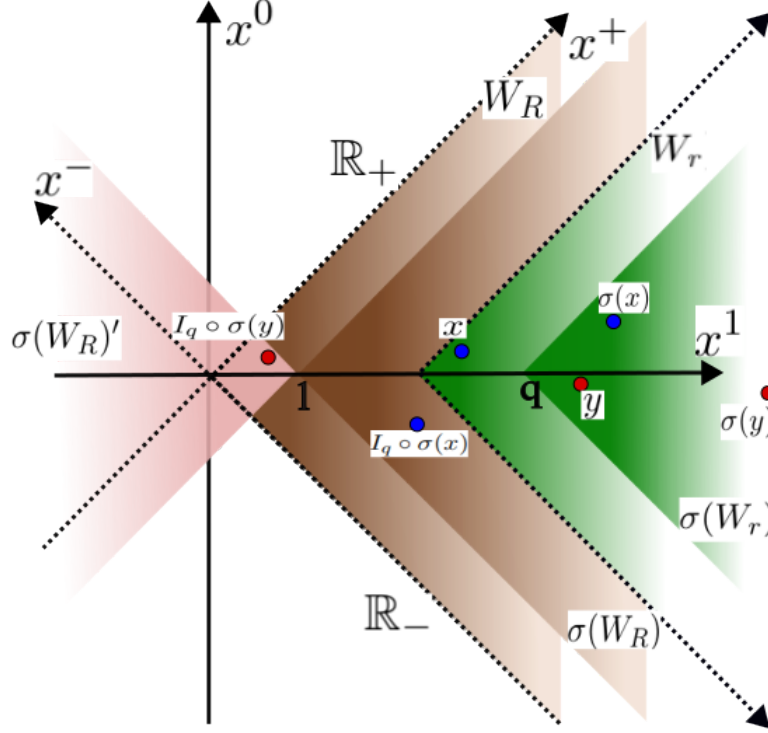


Figura 5.2: En la figura se exhiben ambas cuñas de Rindler $W_r \subseteq W_R$, y sus respectivas imágenes vía σ . Dados $x, y \in W_r$, σ los mapea a $\sigma(W_r)$. Luego se pueden dar dos casos, que la reflexión I_q de estas imágenes pertenezca a $\sigma(W_R)$ o que esté en $\sigma(W_R)'$.

5.3.4. Purificación estándar

En el espacio de Hilbert de una partícula identificamos $\Phi(f) = \int dx \Phi(x)f(x)$ simplemente con $f(x)$, una función con soporte compacto en $\mathbb{R}$. El grupo conforme actúa como

$$U(g)f(x) = f(g^{-1}.x), \quad g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \quad (5.3.19)$$

Tenemos $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\sigma(x) = e^{\frac{2\pi}{\beta}x}. \quad (5.3.20)$$

Como $\alpha \circ A = A \circ \sigma$, se tiene que si $W(f)$ es una unitaria de Weyl en la representación del vacío,

$$\alpha(W(f)) = W(f \circ \sigma^{-1}), \quad \text{supp}(f) \subset \mathbb{R}, \quad \text{supp}(f \circ \sigma^{-1}) \subset \mathbb{R}_+ \quad (5.3.21)$$

El espacio de Hilbert térmico $\mathcal{H}_\beta$ se obtiene a partir del espacio de Hilbert del vacío $\mathcal{H}$ como

$$(f, g)_{\mathcal{H}_\beta} = (f \circ \sigma^{-1}, g \circ \sigma^{-1})_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (5.3.22)$$

lo cual puede entenderse, como antes, notando que la precomposición con σ^{-1} restringe el producto interno del vacío a la semirrecta positiva. Desde ya, esta expresión puede verificarse

de manera explícita, la idea es utilizar el cambio de variables $z = \sigma^{-1}(x)$ en el producto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ de manera que surja en la integral un termino $\frac{\sigma'(z_x)\sigma'(z_y)}{(\sigma(z_x)-\sigma(z_y))^2}$ que luego deviene en un $\sinh[\frac{\pi}{\beta}(z_x - z_y)]$ dividiendo, tal y como se tiene en $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_\beta}$, ver (4.2.22).

Ahora, en la purificación estándar tenemos $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{H}_\beta \oplus \mathcal{H}_\beta$, siempre a nivel de una partícula. Estamos usando el hecho que el espacio de Fock $F(\mathcal{H}_\omega) = F(\mathcal{H}_\beta \oplus \mathcal{H}_\beta)$ es isomorfo al producto de espacios de Fock $F(\mathcal{H}_\beta) \otimes F(\mathcal{H}_\beta)$. Esto implica que a partir de (5.2.1) obtenemos

$$U_\sigma f \circ \sigma^{-1} = f \oplus 0, \quad \text{supp}(f) \subseteq \mathbb{R} \quad (5.3.23)$$

Notar que $\text{supp}(f \circ \sigma^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$, así que sólo sabemos cómo actúa U_σ sobre (la representación del vacío de) $A(\mathbb{R}_+)$. Esto será importante en breve. También podemos escribir

$$U_\sigma^*(f \oplus 0) = f \circ \sigma^{-1}, \quad \text{supp}(f) \subseteq \mathbb{R} \quad (5.3.24)$$

Veamos que la evolución modular $\Delta_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle}^{is}$ puede obtenerse fácilmente con la ayuda de U_σ , usando (5.2.11) y (5.3.24).

$$\begin{aligned} (U_\sigma \Delta_{\sigma(\mathbb{R}_+), |\Omega\rangle}^{is} U_\sigma^*) f \oplus 0 &= U_\sigma \Delta_{\sigma(\mathbb{R}_+), |\Omega\rangle}^{is} f \circ \sigma^{-1} \\ &= U_\sigma U(\tau(1)) \Delta_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle}^{is} U(\tau(-1)) f \circ \sigma^{-1} \\ &= U_\sigma U(\tau(1)) U(\delta(-2\pi s)) U(\tau(-1)) f \circ \sigma^{-1} \\ &= U_\sigma f \circ \sigma^{-1} \circ \tau(1) \circ \delta(2\pi s) \circ \tau(-1) \end{aligned}$$

La función $\tilde{f} = f \circ \sigma^{-1} \circ \tau(1) \circ \delta(2\pi s) \circ \tau(-1)$ satisface $\text{supp}(\tilde{f}) \subset (1, \infty) \subset \mathbb{R}_+$, así que sabemos cómo actuar sobre ella con U_σ . Por lo tanto,

$$\Delta_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle}^{is} f(x) \oplus 0 = f \left[\frac{\beta}{2\pi} \log \left(1 + e^{2\pi s} \left(e^{\frac{2\pi x}{\beta}} - 1 \right) \right) \right] \oplus 0 \quad (5.3.25)$$

que es el resultado correcto.

Por otro lado, el cálculo de $J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle}$ no es tan directo, y de forma similar a lo anterior llegamos a

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} f \oplus 0 &= (U_\sigma J_{\sigma(\mathbb{R}_+), |\Omega\rangle} U_\sigma^*) f \oplus 0 = U_\sigma J_{\sigma(\mathbb{R}_+), |\Omega\rangle} f \circ \sigma^{-1} \\ &= U_\sigma U(\tau(1)) J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} U(\tau(-1)) f \circ \sigma^{-1} = U_\sigma f \circ \sigma^{-1} \circ \tau(1) \circ I \circ \tau(-1) \\ &= "U_\sigma f \circ \sigma^{-1} \circ \tau(1) \circ I \circ \tau(-1) \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \end{aligned}$$

En breve haremos mención a las comillas sobre la última igualdad, aquí I denota inversión $x \mapsto -x$. Esta vez la función $\tilde{f} = f \circ \sigma^{-1} \circ \tau(1) \circ I \circ \tau(-1)$ tiene soporte en $(-\infty, 2)$, para cualquier f con soporte en $\mathbb{R}$. Así que vemos que, a menos que el soporte de f esté restringido a $(-\infty, \frac{\beta}{2\pi} \log 2)$, no sabemos cómo actuar con U_σ . Si ocurre que $\text{supp}(f) \subset (-\infty, \frac{\beta}{2\pi} \log 2)$,

obtenemos la **acción geométrica** conocida de la involución modular, ya que en este caso el último renglón de la cadena de igualdades de arriba es válido y

$$J_{\mathbb{R}_+, |\Psi\rangle} f(x) \oplus 0 = f \left[\frac{\beta}{2\pi} \log \left(2 - e^{\frac{2\pi x}{\beta}} \right) \right] \oplus 0, \quad \text{supp}(f) \subset (-\infty, \frac{\beta}{2\pi} \log 2) \quad (5.3.26)$$

Notar que si se desprecian ingenuamente los soportes, puede aparecer un número complejo dentro del argumento de f , de manera similar a lo que ocurre en la literatura y que a veces se denomina “second world” o “shadow world” [50]. Esto no es otra cosa que la segunda copia en esta purificación. Trabajemos ahora en detalle cómo actúa U_σ sobre una función f en el caso en que el soporte de f pertenece a $\mathbb{R}_-$. En tal situación, podemos proceder de forma similar a lo que hicimos en la representación de GNS:

$$\begin{aligned} U_\sigma f &= U_\sigma f \circ I \circ I = U_\sigma J_{\mathbb{R}_+, \Omega} f \circ I \\ &= U_\sigma J_{\mathbb{R}_+, \Omega} U_\sigma^* U_\sigma f \circ I \\ &= U_\sigma J_{\sigma(\mathbb{R}), \Omega} U_\sigma^* f \circ I \circ \sigma \oplus 0 \\ &= J_{\mathbb{R}, \Psi} f \circ I \circ \sigma \oplus 0, \quad (\text{supp}(f) \subset \mathbb{R}_-) \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

así que necesitamos entender la involución modular del vector de estado térmico $|\Psi\rangle$ sobre el álgebra global.

Y nuevamente podemos hacer el análisis correspondiente para un intervalo (a, b) apelado a la ecuación (5.2.20), la (5.3.23), (5.3.24) y la forma en que las representaciones unitarias actúan sobre el espacio de una partícula,

$$\begin{aligned} J_{(a,b), |\Psi\rangle} f(x) \oplus 0 &= U_\sigma U(r(-\theta)) U(\tau(-t)) J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} U(\tau(t)) U(r(\theta)) U_\sigma^* f \oplus 0 \\ &= U_\sigma U(r(-\theta)) U(\tau(-t)) J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} U(\tau(t)) U(r(\theta)) f \circ \sigma^{-1}(x) \\ &= U_\sigma U(r(-\theta)) U(\tau(-t)) J_{\mathbb{R}_+, |\Omega\rangle} f \circ \sigma^{-1} \circ r(-\theta) \circ \tau(-t)(x) \\ &= U_\sigma U(r(-\theta)) U(\tau(-t)) f \circ \sigma^{-1} \circ r(-\theta) \circ \tau(-t) \circ I(x) \\ &= U_\sigma f \circ \sigma^{-1} \circ r(-\theta) \circ \tau(-t) \circ I \circ \tau(t) \circ r(\theta)(x) \\ &= f \circ \sigma^{-1} \circ r(-\theta) \circ \tau(-t) \circ I \circ \tau(t) \circ r(\theta) \circ \sigma(x) \oplus 0 \\ &=: f(j_{(a,b), |\Psi\rangle}(x)) \oplus 0, \end{aligned}$$

entiéndase la última igualdad como definición de $j_{(a,b), |\Psi\rangle}(x) = \sigma^{-1} \circ r(-\theta) \circ \tau(-t) \circ I \circ \tau(t) \circ r(\theta) \circ \sigma(x)$. Está claro que $\text{supp}(f)$ deberá satisfacer ciertas condiciones para que efectivamente $J_{(a,b), |\Psi\rangle}$ actúe sobre $f(x) \oplus 0$ de la manera que se indicó arriba. En efecto, sin mayores inconvenientes puede verse que (utilizamos $m = \frac{a+b}{2}$ y $L = b - a$ para obtener una notación más compacta)

$$j_{(a,b), |\Psi\rangle}(x) = \frac{\beta}{2\pi} \log \left[\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\beta} L\right) e^{\frac{2\pi}{\beta} x} - e^{\frac{2\pi}{\beta} m}}{e^{\frac{2\pi}{\beta} (x-m)} - \cosh\left(\frac{\pi}{\beta} L\right)} \right], \quad (5.3.28)$$

de manera que para que $j_{(a,b),|\Psi\rangle}(x)$ esté bien definida al argumento del logaritmo ha de ser positivo, lo cual se da solo si

$$x > m + \frac{\beta}{2\pi} \log \left(\cosh \left(\frac{\pi L}{\beta} \right) \right) = b_\beta \quad \text{ó} \quad x < m - \frac{\beta}{2\pi} \log \left(\cosh \left(\frac{\pi L}{\beta} \right) \right) = a_\beta.$$

Es decir que la acción presentada para $J_{(a,b),|\Psi\rangle} f(x) \oplus 0$ está bien definida siempre que $\text{supp}(f) \subseteq (-\infty, a_\beta) \cup (b_\beta, \infty)$ y de lo contrario habrá que proceder de manera similar a como lo hicimos en la ecuación (5.3.27). Vemos entonces que para que la acción de $J_{|\Psi\rangle}$ quede completa sobre cualquier función de testeo, es necesario determinar la acción de $J_{\mathbb{R},|\Psi\rangle}$.

Procedemos a estudiar la involución modular $J_{\mathbb{R},\Psi}$ del estado térmico global por medio de sus elementos de matriz sobre el espacio denso⁷ $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}) \oplus 0 + i^\oplus C_0^\infty(\mathbb{R}) \oplus 0$.

$$\begin{aligned} \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, J_{\mathbb{R},\Psi} (f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus &= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, \Delta_{\mathbb{R},\Psi}^{1/2} S_{\mathbb{R},\Psi} (f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \\ &= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, \Delta_{\mathbb{R},\Psi}^{1/2} (f_2 \oplus 0 - i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \end{aligned}$$

Así que necesitamos calcular los elementos de matriz de $\Delta_{\mathbb{R},\Psi}^{1/2}$, lo cual hacemos mirando $\Delta_{\mathbb{R},\Psi}$, usando el mismo razonamiento que antes en la Sección 5.2.1,

$$\begin{aligned} \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, \Delta_{\mathbb{R},\Psi} (f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus &= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, S_{\mathbb{R},\Psi}^* S_{\mathbb{R},\Psi} (f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \\ &= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, S_{\mathbb{R},\Psi}^* (f_2 \oplus 0 - i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \\ &= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, T(i\beta) f_2 \oplus 0 \rangle_\oplus \\ &\quad + i \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, T(i\beta) g_2 \oplus 0 \rangle_\oplus \end{aligned}$$

donde usamos la propiedad KMS $\omega_\beta(f, T(i\beta)g) = \omega_\beta(g, f)$ y $\langle f_1 \oplus 0, T(i\beta) f_2 \oplus 0 \rangle_\oplus$ significa la extensión analítica $t \rightarrow i\beta$ de $\omega_\beta(f_1, T(t) f_2)$. En este punto, el operador $T(i\beta)$ no está definido, solo lo está la extensión analítica de estas funciones complejas dadas f y g con soporte compacto. Podemos ser más explícitos: la extensión analítica de la función de 2 puntos $\omega_\beta(f, T(t)g)$ del estado termal es:

$$\omega_\beta(f, T(z)g) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{f(x)g(y)}{\frac{\beta^2}{\pi^2} \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta} (x - y - z) - i\epsilon \right)}, \quad \text{Im } z \in [0, \beta) \quad (5.3.29)$$

Recordando que el unitario $T_\oplus(t)$ actúa como $T_\oplus(t)(f \oplus 0 + i^\oplus g \oplus 0) = T(t)f \oplus 0 + i^\oplus T(t)g \oplus 0$,

$$\begin{aligned} \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, \Delta_{\mathbb{R},\Psi} (f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus &= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, T(i\beta) f_2 \oplus 0 + i^\oplus T(i\beta) g_2 \oplus 0 \rangle_\oplus \\ &= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, T_\oplus(i\beta) (f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \end{aligned}$$

Una vez más, el operador $T_\oplus(i\beta)$ aún no tiene sentido, pero la expresión anterior representa la continuación analítica $t \rightarrow i\beta$ como antes. Sin embargo, ahora podemos argumentar lo siguiente:

⁷Este procedimiento es análogo a lo que hicimos al momento de definir $J_{\mathbb{R},\Psi}$ sobre los elementos analíticos de una dada $*$ -álgebra. Esta vez hacemos lo propio a nivel del espacio de 1 partícula.

para cada z con $\text{Im } z \in [0, \beta)$, existe una forma sesquilineal densamente definida Q_z sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^\oplus$, definida por

$$Q_z(f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) := \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, T_\oplus(z)(f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \quad (5.3.30)$$

Debido a la linealidad (y antilinealidad), es suficiente estudiar Q_z en vectores de la forma $f \oplus 0$. Para ver que está acotada, hasta donde sabemos la manera más sencilla es pasar al espacio de Fourier, donde la función térmica de 2 puntos es

$$\omega_\beta(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp p \frac{\hat{f}(p)^* \hat{g}(p)}{1 - e^{-\beta p + i\epsilon}}. \quad (5.3.31)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} |Q_z(f \oplus 0, f \oplus 0)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp p \frac{\hat{f}(p)^* \hat{f}(p) e^{ipz}}{1 - e^{-\beta p + i\epsilon}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp p \frac{\hat{f}(p)^* \hat{f}(p)}{1 - e^{-\beta p + i\epsilon}} \right| = \|f \oplus 0\|_\oplus^2, \quad \text{Im } z > 0 \end{aligned}$$

lo cual muestra que la forma cuadrática asociada está acotada en un dominio denso⁸. Así, podemos asegurar, gracias a un teorema bien conocido (ver Teo. 1.7 en [90]), que existe un operador lineal acotado $\mathcal{Q}_z$ en $\mathcal{H}^\oplus$ que representa a Q_z , en el sentido de que

$$Q_z(f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) = \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, \mathcal{Q}_z(f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \quad (5.3.32)$$

y a partir de ahora llamaremos $T_\oplus(z)$ a dicho operador, para respetar la notación anterior. Aunque en el espacio de coordenadas no parece sencillo escribir explícitamente cómo actúa este operador, en el espacio de Fourier (positivo) no es otra cosa que

$$T_\oplus(z) \hat{f}(p) \oplus 0 = e^{izp} \hat{f}(p) \oplus 0 \quad (5.3.33)$$

Hemos demostrado que, al menos en el conjunto denso $\mathcal{D}$,

$$\Delta_{\mathbb{R}, \Psi} = T_\oplus(i\beta), \quad (\text{en } \mathcal{D}) \quad (5.3.34)$$

Ahora queremos argumentar que $\Delta_{\mathbb{R}, \Psi}^{1/2} = T_\oplus(i\beta/2)$. Como la raíz cuadrada positiva de un operador autoadjunto positivo es única, por (5.3.33) tenemos que $T_\oplus(i\beta/2)^2 = T_\oplus(i\beta)$ y que $T_\oplus(i\beta/2)$ es positivo, con lo cual concluimos que $\Delta_{\mathbb{R}, \Psi}^{1/2} = T_\oplus(i\beta/2)$. Volvamos al elemento de

⁸Además, las identidades de polarización nos dicen que si la forma cuadrática asociada está acotada en un dominio denso $\mathcal{D}$, entonces también lo está la forma sesquilineal original $Q_z : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Podemos extender fácilmente sus secciones a todo el espacio de Hilbert en dos pasos. Primero, si tomamos un v fijo en $\mathcal{D}$, $Q_z(v, \cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es un operador lineal acotado definido densamente, por lo tanto se puede extender a todo H como un operador acotado. Lo mismo aplica a la otra sección, aunque esta vez extendemos operadores antilineales. Entonces, podemos pensar a Q_z como una forma sesquilineal acotada definida en todo el espacio $\mathcal{H}^\oplus$.

matriz de $J_{\mathbb{R},\Psi}$:

$$\begin{aligned}
& \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, J_{\mathbb{R},\Psi} (f_2 \oplus 0 + i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \\
&= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, T_\oplus(i\beta/2) (f_2 \oplus 0 - i^\oplus g_2 \oplus 0) \rangle_\oplus \\
&= \langle f_1 \oplus 0 + i^\oplus g_1 \oplus 0, T(i\beta/2)f_2 \oplus 0 - i^\oplus T(i\beta/2)g_2 \oplus 0 \rangle_\oplus \\
&= \omega_\beta(f_1, T(i\beta/2)f_2) - \omega_\beta(g_1, T(i\beta/2)g_2) \\
&\quad - i(\omega_\beta(f_1, T(i\beta/2)g_2) + \omega_\beta(g_1, T(i\beta/2)f_2))
\end{aligned} \tag{5.3.35}$$

Esto nos da los elementos de matriz de $J_{\mathbb{R},\Psi}$ sobre el conjunto denso $\mathcal{D}$ de funciones suaves con soporte compacto (utilizando (5.3.29)). Más aún, por las mismas razones que antes, esto define una forma cuadrática acotada que está representada por un operador acotado (antilineal), que no es otro que $J_{\mathbb{R},\Psi}$.

Notemos que, sobre el espacio original formado por elementos de la forma $f \oplus 0$, los elementos de matriz son reales. Esto se debe a que en

$$\omega_\beta(f_1, T(i\beta/2)f_2) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{f_1(x)f_2(y)}{\frac{\beta^2}{\pi^2} \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta}(x - y - i\frac{\beta}{2}) - i\epsilon \right)} \tag{5.3.36}$$

el z en el $\sinh$ si miramos la ecuación (5.3.29) es puramente imaginario. Por lo tanto, se tiene que

$$\sigma_\oplus(f_1 \oplus 0, J_{\mathbb{R},\Psi} f_2 \oplus 0) = \text{Im} \langle f_1 \oplus 0, J_{\mathbb{R},\Psi} f_2 \oplus 0 \rangle_\oplus = 0 \tag{5.3.37}$$

lo cual significa que $J_{\mathbb{R},\Psi}$ envía $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \oplus 0$ a su complementario simpléctico $(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \oplus 0)'$, como debe ser.

También podemos notar que $J_{\mathbb{R},\Psi}$ efectivamente mezcla copias: supongamos que no lo hace, es decir, que para todo f con soporte compacto se tiene $J_{\mathbb{R},\Psi} f \oplus 0 = g \oplus 0$, entonces para todo h con soporte compacto se cumple que

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma_\oplus(h \oplus 0, J_{\mathbb{R},\Psi} f \oplus 0) \\
&= \sigma_\oplus(h \oplus 0, g \oplus 0) \\
&= \sigma(h, g) \Rightarrow g = 0
\end{aligned}$$

lo cual contradice el hecho de que $J_{\mathbb{R},\Psi}$ es una involución. Así que, en efecto, $J_{\mathbb{R},\Psi}$ envía $f \oplus 0$ a algún $g \oplus h$ con h distinto de cero.

Capítulo 6

Conclusiones

La presente tesis constituye un esfuerzo por estudiar de manera rigurosa, dentro del marco de la AQFT, diversas estructuras físicas y matemáticas, haciendo uso de la teoría de Tomita-Takesaki. Más allá de la formulación abstracta, el trabajo permite obtener resultados concretos que evidencian lo propicio de tal marco para abordar problemas fundamentales, como la dualidad de Haag, los operadores modulares de estados térmicos y el cálculo de entropía relativa. A lo largo de los distintos capítulos se lograron avances tanto conceptuales como técnicos.

El trabajo se inicia con un capítulo introductorio que sienta las bases conceptuales y matemáticas de la tesis. En las primeras secciones se contextualiza el surgimiento de la AQFT a partir de problemas y limitaciones inherentes a la formulación estandar de la QFT, en contraste con la QM. Se discuten situaciones atípicas que motivaron este desarrollo, como la existencia de representaciones unitariamente no equivalentes de los observables, la imposibilidad de definir matrices de densidad para estados arbitrarios, la carencia de una traza bien definida para operadores y las divergencias ultravioletas que afectan a la entropía de von Neumann y, por extensión, a la entropía de entrelazamiento. Estas cuestiones ponen de manifiesto la necesidad de un marco formal más robusto, que la AQFT proporciona, permitiendo tratar de manera consistente y unificada problemas que de restringirnos a la formulación estándar de la QFT, solo son abordados con técnicas de cut off, el truco de réplicas o similares.

En el segundo capítulo se presentan las herramientas matemáticas fundamentales para la tesis, estableciendo el marco formal necesario para los resultados posteriores. Se introducen los espacios de Hilbert de una partícula y las distintas formulaciones de las CCR, incluyendo las álgebras de Weyl, Segal, así como la construcción del espacio de Fock o construcción GNS. Este andamiaje permite comprender cómo cada formulación captura aspectos complementarios de la cuantización bosónica, por ejemplo en una de ellas salta a la vista la utilización de las condiciones iniciales del campo sobre una superficie a tiempo fijo, mientras que en la otra no. Y cómo los conceptos de estados y observables se trasladan de la primera cuantización al nivel de Fock. A partir de estas estructuras, se presentan las representaciones concretas de las CCR

en el contexto del campo escalar libre, siguiendo el enfoque de Araki, que utiliza el espacio de Fock para representar las formulaciones de Segal y Weyl. Se introducen además conceptos clave como la dualidad de Haag, la condición KMS y la entropía relativa, tanto a nivel del espacio de una partícula como en la segunda cuantización. Este capítulo proporciona así un marco unificado que anticipa los resultados centrales de la tesis y prepara al lector para los capítulos posteriores, donde se desarrollan en detalle las propiedades modulares de los estados termales y sus implicancias en la teoría cuántica de campos.

En el capítulo 3 de esta tesis se desarrolla un estudio exhaustivo de la dualidad de Haag para el campo escalar libre, abordando sus fundamentos teóricos, sus demostraciones y sus limitaciones. La investigación se estructura en dos ejes principales: la reformulación y simplificación de la demostración clásica de Araki, y el análisis de la validez de la dualidad en distintos tipos de regiones del espaciotiempo, específicamente en diamantes y wedges. A través de una revisión detallada de los mapas de primera y segunda cuantización, se establece un marco unificado que conecta los trabajos de Araki con aportes propios basados en la teoría de Tomita-Takesaki.

Una de las contribuciones centrales de este capítulo reside en la simplificación de la demostración de Araki sobre la dualidad de Haag. Frente a la segmentación original en múltiples trabajos y el uso de operadores auxiliares, aquí se propone una prueba alternativa que aprovecha de manera directa las propiedades del operador de Tomita S y su adjunto. Este enfoque, toma ciertos elementos del trabajo de Eckmann y Osterwalder pero es sustancialmente depurada, elimina redundancias y ofrece una visión más económica y conceptualmente clara de por qué se satisface la igualdad $\mathcal{A}_\varphi(R') = \mathcal{A}_\varphi(R)'$ para regiones tipo diamante en el campo libre. Asimismo, se explicitan los vínculos entre las versiones “parciales” de la dualidad presentadas por Araki y la forma canónica utilizada en la AQFT contemporánea, cerrando así posibles ambigüedades interpretativas. Finalmente, se presenta un contraejemplo que ilustra los límites de la dualidad de Haag cuando se consideran regiones que no cumplen ciertas condiciones geométricas. Este contraejemplo, aunque basado en ideas esbozadas por Araki, se desarrolla aquí con mayor grado de detalles y se acompaña de figuras que facilitan su comprensión. La existencia de tal contraejemplo no solo matiza el alcance universal de la dualidad, sino que también enfatiza la dependencia crítica de la misma respecto de la estructura causal del espaciotiempo y la naturaleza del estado considerado.

En el capítulo 4 se estudia la entropía relativa de Araki en el contexto de excitaciones coherentes de estados bosónicos, con foco en el estado de vacío y el estado termal para el bosón libre no masivo en $1 + 1$ dimensiones. El principal aporte de este capítulo consiste en la obtención de una expresión explícita y cerrada para la entropía relativa entre una excitación coherente y el estado de referencia (ya sea vacío o termal) localizada en un intervalo acotado, generalizando resultados previos de la literatura que se restringían a semirrectas. Este cálculo se realiza mediante el aprovechamiento directo de la estructura modular (teoría de Tomita-Takesaki) del álgebra de observables, evitando por completo el uso de regularizaciones basadas

en *cut-offs* o métodos de continuación analítica en el plano complejo.

Una de las contribuciones centrales es la demostración de que, para el estado térmico a temperatura inversa β , la entropía relativa $S_{R(I)}(\omega_f||\omega)$ asociada a una excitación coherente generada por una función suave f viene dada por la expresión local e integral

$$S_{R(I)}(\omega_f||\omega) = 2\beta \int_a^b \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(x-a)\right) \sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(b-x)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(b-a)\right)} (f'(x))^2 dx. \quad (6.0.1)$$

Este resultado es consistente con la interpretación de la entropía relativa como una medida de la energía de la excitación, ponderada por una función de peso que captura la estructura causal y térmica de la región. A partir de esta fórmula exacta, se derivan de manera rigurosa varias cotas físicamente relevantes. En primer lugar, se recupera una cota de tipo Bekenstein que limita la entropía por la energía multiplicada por el tamaño de la región, ver (4.3.27). En segundo lugar, se demuestra *una versión* de la Quantum Null Energy Condition (QNEC) en la ecuación (4.3.28), validando así, desde un enfoque puramente algebraico, principios fundamentales de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo.

Finalmente, el capítulo extiende estos resultados al caso del bosón libre sin masa en $1+1$ dimensiones, mostrando la universalidad de las expresiones obtenidas y su conexión con la densidad de la energía clásica $T_{00}(x)$. El enfoque algebraico adoptado, basado en la purificación de estados y la teoría modular, simplifica y unifica cálculos previos.

En el capítulo 5 se aborda la construcción geométrica explícita de un estado KMS y la determinación rigurosa de sus operadores modulares, con especial énfasis en la conjugación modular. El estudio se centra en dos escenarios de particular relevancia: el wedge de Rindler y regiones acotadas de tipo diamante en $1+1$ dimensiones. La principal contribución de este capítulo radica en la obtención de una expresión precisa para la acción de la conjugación modular J asociada al estado térmico, superando el tratamiento meramente formal del "shadow world" presente en parte de la literatura.

Se demuestra que la acción de la conjugación modular $J_{W_R,|\Psi\rangle}$ sobre los campos en la representación GNS del estado térmico viene dada, para la quiralidad x^+ , por la expresión

$$J_{\mathbb{R}_+,|\Psi\rangle} \pi(\phi(x^+)) J_{\mathbb{R}_+,|\Psi\rangle} = \begin{cases} \pi\left(\phi\left(\frac{\beta}{2\pi} \log(2 - \sigma(x^+))\right)\right), & 2 - \sigma(x^+) > 0 \\ J_{\mathbb{R},|\Psi\rangle} \pi\left(\phi\left(\frac{\beta}{2\pi} \log|2 - \sigma(x^+)|\right)\right) J_{\mathbb{R},|\Psi\rangle}, & 2 - \sigma(x^+) < 0 \end{cases} \quad (6.0.2)$$

En dicha expresión, según vimos, la representación π es arbitraria, y luego estudiamos como casos particulares cuando $\pi = \alpha$ (el inducido por σ), $\pi = \text{id}$ y por último π a valores en el espacio de Fock. Y de hecho calculamos $J_{\mathbb{R},|\Psi\rangle}$, tanto para el caso en que $\pi = \alpha$ como para el caso que toma valores en el Fock. Este resultado se deriva de una combinación de técnicas que incluyen la teoría de Tomita-Takesaki, la construcción de una isometría U_σ que relaciona las representaciones del vacío y del estado térmico, y el uso de transformaciones conformes

específicas ($\sigma_+(x^+) = e^{\frac{2\pi}{\beta}x^+}$) que permiten mapear el problema a uno geoméricamente más simple.

Un dato crucial es que J necesariamente mezcla las dos copias del espacio de Hilbert cuando se trabaja en la purificación estándar de tal estado, enviando funciones de soporte compacto en una copia a elementos no triviales que tienen componentes en ambas copias. Este comportamiento, lejos de ser una mera peculiaridad técnica, refleja la estructura del *thermofield double* inherente a los estados KMS y su conexión con la física de horizontes en el espacio-tiempo de Rindler. Los resultados de este capítulo no solo complementan y generalizan los del capítulo anterior, también esperamos proporcionen las herramientas algebraicas necesarias para explorar la estructura modular de estados térmicos en teorías más generales.

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Un ejemplo de la acción de β

Como se explica en el cuerpo de la tesis, podemos definir β sobre $\mathcal{K}$ mediante su acción sobre $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ como $g(x) = (\beta f)(x)$ con,

$$\mathcal{F}(g)(p) = i\mathcal{F}(f)(p)\eta(p^0),$$

donde $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ es impar y tal que $\eta(p^0) = 1$ para $|p^0| \geq m$. Ahora mostremos con un ejemplo sencillo cómo es g . Consideremos una función gaussiana $f(x^0, \vec{x}) = e^{-(x^0)^2 - \vec{x}^2}$, entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= (\beta f)(x^0, \vec{x}) = -2 \int_0^\infty \eta(p^0) \left[\int_{-\infty}^\infty f(x^{0'}, \vec{x}) \sin(p^0(x^{0'} - x^0)) dx^{0'} \right] dp^0 \\ &= 2 \int_0^\infty \eta(p^0) \sqrt{\pi} e^{-\frac{(p^0)^2}{4} - \vec{x}^2} \sin(p^0 x^0) dp^0 \\ &= 2\sqrt{\pi} e^{-\vec{x}^2} \int_0^\infty \eta(p^0) e^{-\frac{(p^0)^2}{4}} \sin(p^0 x^0) dp^0 \\ &= 2\sqrt{\pi} e^{-\vec{x}^2} \left[\int_0^m \eta(p^0) e^{-\frac{(p^0)^2}{4}} \sin(p^0 x^0) dp^0 + \int_m^\infty e^{-\frac{(p^0)^2}{4}} \sin(p^0 x^0) dp^0 \right]. \end{aligned}$$

En general, η es lo suficientemente complicada como para que la primera integral no pueda expresarse de una forma familiar. En su lugar, podemos considerar un procedimiento de límite para tomar η como $\eta(p^0) = \theta(p^0 - m)$, para $p^0 \geq 0$, y de este modo deshacernos de la primera integral anterior. Por supuesto, dicha η no es suave. Para superar este problema, tomamos una sucesión de funciones acotadas y suaves $\eta_n(p^0)$ que se anulen en el intervalo $[0, m - \frac{1}{n}]$ y que sean iguales a 1 para $p^0 \geq m$ (y que se extiendan a la recta real negativa mediante la propiedad de ser impar). Nótese que para una de estas funciones,

$$\int_0^m \eta_n(p^0) e^{-\frac{(p^0)^2}{4}} \sin(p^0 x^0) dp^0 = \int_{m-\frac{1}{n}}^m \eta_n(p^0) e^{-\frac{(p^0)^2}{4}} \sin(p^0 x^0) dp^0,$$

que tiende a cero porque el integrando está acotado. Entonces, sustituyendo estas funciones η_n en la expresión para $(\beta f)(x^0, x)$ anterior y tomando el límite,

$$(\beta f)(x^0, x) = 2\sqrt{\pi}e^{-x^2} \int_m^\infty e^{-\frac{(p^0)^2}{4}} \sin(p^0 x^0) dp^0 \quad (7.1.1)$$

$$= i\pi e^{-((x^0)^2 + x^2)} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}(m - 2ix^0)\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}(m + 2ix^0)\right) \right], \quad (7.1.2)$$

donde erf es la función error. Debido a la propiedad $\operatorname{erf}(z^*) = \operatorname{erf}(z)^*$, el resultado es de hecho real, como se esperaba.

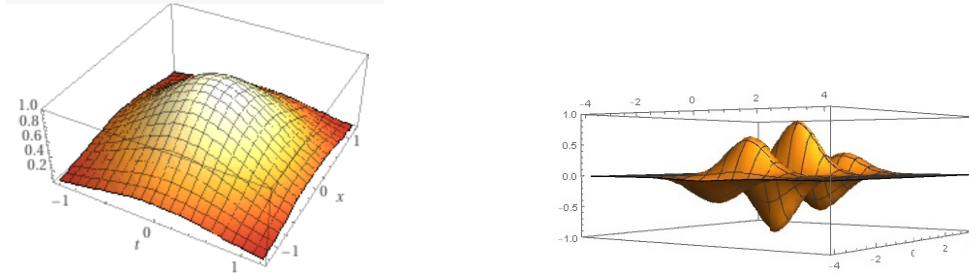


Figura 7.1: A la izquierda, la función gaussiana $f(t, x)$. A la derecha, $g = \beta f$.

En este ejemplo se ve explícitamente que, partiendo de f , que es una función par en x^0 , obtenemos βf , que es impar (véanse las Figuras 7.1 y 7.2). Esta es en realidad una característica general, como se explica en la Subsección 2.1.2. Solo para dar una intuición cualitativa adicional, mostramos a continuación en la Figura 7.2 una vista “lejana” de βf , donde es evidente el decaimiento rápido, consistente con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, y una vista lateral donde también es evidente el comportamiento impar en $x^0 = t$.

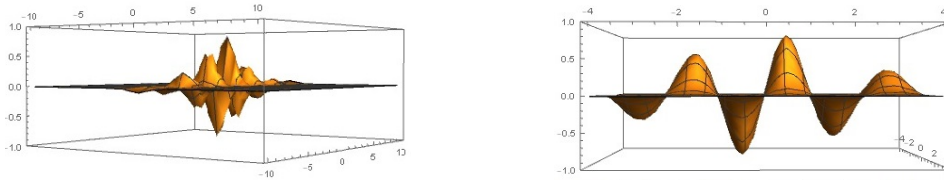


Figura 7.2: A la izquierda, una vista “lejana” de βf . A la derecha, una vista lateral de βf desde la cual se vislumbran rasgos de imparidad.

7.2. Más sobre las condiciones iniciales de la ecuación de Klein-Gordon

Dadas la función real $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset \mathfrak{F}_\pi$ y $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset \mathfrak{F}_\varphi$, en lo que sigue vamos a buscar $h \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ tal que $\phi(E(h))$ sea una función suave que resuelva el siguiente sistema:

$$\text{Problema de valor inicial de KG: } \begin{cases} (\square + m^2)\phi(E(h))(x) = 0 \\ \phi(E(h))(0, \vec{x}) = f(\vec{x}) \\ \frac{\partial \phi(E(h))}{\partial x^0}(0, \vec{x}) = g(\vec{x}) \end{cases} \quad (7.2.1)$$

Seguimos a [52], donde en el Corolario 1.1 se establece la relación entre las condiciones iniciales y la solución. Sospechando que E en dicha referencia solo puede diferir en un signo global con el operador Δ que hemos estado usando, creemos que $h(x)$ debería ser $-\rho'_0(f)(x) + \rho'_1(g)(x)$. Antes de mostrar que ésta es la solución, describamos brevemente los mapas ρ_0 y ρ_1 y sus correspondientes *pull-backs* ρ'_0 y ρ'_1 .

Sea $\rho_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ la restricción a $x^0 = 0$ y $\rho_1 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ la derivada respecto a x^0 evaluada sobre la hipersuperficie $x^0 = 0$. Los pull-backs de estos mapas actúan por precomposición en el espacio de distribuciones temperadas $\rho'_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)' \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)'$, es decir, $\rho'_0(v) = v \circ \rho_0$ para cualquier $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)'$. De manera similar para ρ'_1 . Podemos ver las condiciones iniciales como elementos del espacio dual $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)'$, ya que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)'$.

Dado $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ y la condición inicial g en (7.2.1),

$$(\rho'_0(g))(h) = (g \circ \rho_0)(h) = g(h|_{x^0=0}) = \int g(\vec{x})h(0, \vec{x})d^3x = \int h(x)\delta(x^0)g(\vec{x})d^4x,$$

de donde leemos que $\rho'_0(g)(x) = \delta(x^0)g(\vec{x})$. De manera similar, con la otra condición inicial y ρ'_1 ,

$$(\rho'_1(f))(h) = (f \circ \rho_1)(h) = f\left(\frac{\partial h}{\partial x^0}(0, \vec{x})\right) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x})\frac{\partial h}{\partial x^0}(0, \vec{x})d^3x, \quad (7.2.2)$$

así que vemos que $\rho'_1(f) = -\delta'(x^0)f(\vec{x})$, donde $'$ significa derivada débil. Ahora definimos la distribución

$$p(x) = -\delta(x^0)g(\vec{x}) - \delta'(x^0)f(\vec{x}), \quad (7.2.3)$$

y seguimos los pasos de la sección 3.2.3, construyendo p_s como en la ecuación (3.2.27) y definiendo una función suave

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}} \chi(s)p_s(x)ds, \quad (7.2.4)$$

como en la ecuación (3.2.28) para obtener nuestra solución $\phi(E(h))(x)$, con h una función suave.

Podemos ahora demostrar que $\phi(E(h))$ es la solución de (7.2.1) dada por (2.1.2) con h como en (7.2.4). Que sea una solución es inmediato, ya que estamos propagando con el propagador

causal de Klein-Gordon Δ . Evaluemos entonces $\phi(E(h))$ en $x^0 = 0$,

$$\begin{aligned}
\phi(E(h))(0, \vec{x}) &= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \delta(p^2 - m^2) \operatorname{sgn}(p^0) \mathcal{F}(h)(p) d^4 p \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \mathcal{F}(h)(p) d^4 p + \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \delta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) \mathcal{F}(h)(p) d^4 p, \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \mathcal{F}(h)(\omega_p, \vec{p}) \frac{d^3 p}{2\omega_p} + \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \mathcal{F}(h)(-\omega_p, \vec{p}) \frac{d^3 p}{2\omega_p} \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{\mathcal{F}(h)(\omega_p, \vec{p}) - \mathcal{F}(h)^*(\omega_p, -\vec{p})}{2} \frac{d^3 p}{\omega_p} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{1}{i\omega_p} \mathcal{F}(h_-)(\omega_p, \vec{p}) d^3 p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \mathcal{F}(\delta_1 h_-)(\vec{p}) d^3 p \\
&= \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(\delta_1 h_-)(\vec{x}) = \delta_1 h_-(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Al mismo tiempo, esto debería ser igual a la condición inicial $f(\vec{x})$. Solo para verificar que todo funciona correctamente, mostremos esto explícitamente:

$$\begin{aligned}
\phi(E(h))(0, \vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sin(\omega_p(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) \frac{d^3 p}{\omega_p} h(y) d^4 y \Big|_{x^0=0} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \sin(\omega_p y^0) \cos(\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})) \frac{h(y)}{\omega_p} d^3 p d^4 y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \sin(\omega_p y^0) \cos(\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})) \frac{-\delta(y^0)g(\vec{y}) - \delta'(y^0)f(\vec{y})}{\omega_p} d^3 p d^4 y \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \sin(\omega_p y^0) \cos(\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})) \frac{\delta'(y^0)f(\vec{y})}{\omega_p} d^3 p d^4 y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \cancel{\omega_p} \cos(\omega_p y^0) \cos(\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})) \frac{\delta(y^0)f(\vec{y})}{\cancel{\omega_p}} d^3 p d^4 y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \cos(\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})) f(\vec{y}) d^3 p d^3 y \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} f(\vec{y}) d^3 p d^3 y \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}(f)] (\vec{x}) \right\} = \operatorname{Re} [f(\vec{x})] = f(\vec{x})
\end{aligned}$$

En la segunda línea descartamos una integral porque es impar en $\vec{p}$. Esto confirma que $\delta_1 h_- = f$.

Un cálculo prácticamente idéntico muestra que $\delta_0(-h_+) = g$.

7.3. Posición genérica de subespacios

El objetivo de este apéndice es demostrar que los subespacios de $\mathfrak{F}_\varphi$ definidos en el mapa de primera cuantización (3.1.1) están en posición genérica, es decir, que:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R(B) \cap \mathbf{S}_I(B) &= \{0\}, \\ \mathbf{S}_R(B) \cap \mathbf{S}_I(B)^\perp &= \{0\}, \\ \mathbf{S}_R(B)^\perp \cap \mathbf{S}_I(B) &= \{0\}, \\ \mathbf{S}_R(B)^\perp \cap \mathbf{S}_I(B)^\perp &= \{0\}. \end{aligned}$$

Para demostrar las segundas y terceras líneas, basta con probar que $\mathbf{S}_R(B)^\perp \vee \mathbf{S}_I(B) = \mathfrak{F}_\varphi$ y $\mathbf{S}_R(B) \vee \mathbf{S}_I(B)^\perp = \mathfrak{F}_\varphi$ (donde $A \vee B = \overline{A+B}$). La primera se deduce al notar que $\mathbf{S}_R(B)^\perp \vee \mathbf{S}_I(B) = \mathbf{S}_I(B^c) \vee \mathbf{S}_I(B)$ gracias al Teorema 3.1.1, y luego, por la definición de $\mathbf{S}_I$, se concluye que $\mathbf{S}_R(B)^\perp \vee \mathbf{S}_I(B) = \bar{\beta}(j_1^{-1}(L^2(B^c)) \vee j_1^{-1}(L^2(B))) = \bar{\beta}j_1^{-1}(L^2(\mathbb{R}^3)) = \bar{\beta}\mathfrak{F}_\pi = \mathfrak{F}_\varphi$. En cuanto a $\mathbf{S}_R(B) \vee \mathbf{S}_I(B)^\perp = \mathfrak{F}_\varphi$, se puede demostrar de manera análoga utilizando la otra relación en el Teorema 3.1.1. Para las dos intersecciones restantes, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 7.3.1 (Lema 5 en [15]). *Si $f \in \mathbf{S}_R(B)$ no es cero, entonces $\bar{\beta}f$ nunca se anula en toda la vecindad de ningún punto en $(\text{supp}(f))^c$.*

Para demostrar esto, consideremos la función $F(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{z} - \omega_p z^0)} \mathcal{F}(f)(\vec{p}) \omega_p^{-1} d^3 p$.

Para $x \in \mathbb{R}^4$, esta es una solución de la ecuación de Klein-Gordon $(\square_x + m^2)F(x) = 0$ con condiciones iniciales $F(0, \vec{x}) = (\bar{\beta}f)(\vec{x})$ y $\frac{\partial F}{\partial x^0}(0, \vec{x}) = -if(\vec{x})$. Además, $F(z)$ es analítica para $\text{Im } z$ en el cono de luz pasado, ya que el integrando es analítico y la integral converge. Ahora, consideremos un punto $\vec{y} \in \text{supp}(f)^c$ y asumamos que $\bar{\beta}f$ se anula en alguna vecindad tridimensional real de $\vec{y}$. Entonces, dado que f también se anula allí, la solución de la ecuación de Klein-Gordon $F(x)$ se anula en una vecindad cuatridimensional real de $(0, \vec{y})$. Por el teorema de identidad, $F(z)$ se anula idénticamente, implicando que $f(x) = 0$.

Ahora podemos demostrar que $\mathbf{S}_R(B) \cap \mathbf{S}_I(B) = \{0\}$. Esto es equivalente a $\bar{\beta}\mathbf{S}_R(B) \cap \bar{\beta}\mathbf{S}_I(B) = \{0\}$, ya que $\bar{\beta}$ es unitaria. Consideremos entonces un $g \in \bar{\beta}\mathbf{S}_R(B) \cap \bar{\beta}\mathbf{S}_I(B)$. Como $g \in \bar{\beta}\mathbf{S}_I(B) = j_1^{-1}L_2(B)$, g debe anularse en todo B^c , pero al mismo tiempo, por el lema anterior y el hecho de que $g \in \bar{\beta}\mathbf{S}_R(B)$, g no puede ser cero en toda la vecindad de ningún punto en B^c a menos que se anule idénticamente. Por lo tanto, $\bar{\beta}\mathbf{S}_R(B) \cap \bar{\beta}\mathbf{S}_I(B) = \{0\}$. En cuanto a la igualdad restante $\mathbf{S}_R(B)^\perp \cap \mathbf{S}_I(B)^\perp = \{0\}$, podemos aplicar el Teorema 3.1.1 para escribirla como $\mathbf{S}_I(B^c) \cap \mathbf{S}_R(B^c) = \{0\}$, que es equivalente a la primera, que acabamos de demostrar, solo hay que intercambiar B con B^c .

7.4. El cono positivo

En el marco de la teoría de álgebras de operadores, la construcción del cono positivo natural es una herramienta fundamental que establece un vínculo profundo entre la estructura algebraica de un álgebra de von Neumann y la estructura geométrica del espacio de Hilbert en el que actúa. Este objeto es central para la teoría modular y tiene aplicaciones de especial importancia para nosotros en el capítulo 5.

Sea A un álgebra de von Neumann que actúa de manera cíclica y separante sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con vector cíclico y separante Ω . La construcción modular de Tomita-Takesaki nos provee de un operador modular Δ y una conjugación modular J .

El **cono positivo natural** $\mathcal{P}$ se define como la clausura del conjunto de vectores obtenidos al aplicar ciertos operadores modulares al vector de referencia:

$$\mathcal{P} = \overline{\{aJaJ\Omega; \quad a \in A\}}. \quad (7.4.1)$$

Esta definición, aunque abstracta, captura de manera canónica todos los “vectores positivos” asociados al par (A, Ω) .

El cono $\mathcal{P}$ satisface una serie de propiedades notables que lo convierten en un objeto extremadamente rico y útil.

Proposición 7.4.1 (ver [91]). *Sea A una álgebra de von Neumann y Ω un vector cíclico y separante. Entonces se cumple:*

1. $\mathcal{P} = \overline{\{\Delta^{1/4}a\Omega; \quad a \in A_+\}}$
2. $\Delta^{it}\mathcal{P} = \mathcal{P}, \quad t \in \mathbb{R}$
3. $J\Phi = \Phi, \quad \Phi \in \mathcal{P}$
4. $aJaJ\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$
5. $\mathcal{P}$ es un cono propio y autodual cuya envolvente lineal es $\mathcal{H}$, es decir, $\text{span}(\mathcal{P}) = \mathcal{H}$
6. Si $\Phi \in \mathcal{P}$, entonces Φ es cíclico para A si y solo si es separante para A
7. Si Φ es cíclico para A (y por lo tanto separante), entonces la conjugación modular y el cono natural asociados a (A, Φ) coinciden con J y $\mathcal{P}$
8. Para todo estado normal ϕ sobre A , existe un único vector $\Phi_\phi \in \mathcal{P}$ tal que $\phi(a) = \langle \Phi_\phi | a | \Phi_\phi \rangle$ para todo $a \in A$

Esta última es quizás la propiedad más importante. Establece una biyección entre los estados normales del álgebra A y los vectores en el cono $\mathcal{P}$. Esto generaliza el Teorema de Representación

de Riesz, permitiendo representar estados algebraicos abstractos como vectores concretos en el espacio de Hilbert de una manera canónica y única.

La existencia del cono positivo natural $\mathcal{P}$ proporciona una geometría de orden canónica en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que está intrínsecamente alineada con la estructura algebraica de A . La propiedad de unicidad (punto 7) implica que, aunque la construcción depende de la elección inicial de Ω , los objetos resultantes J y $\mathcal{P}$ son en realidad independientes de esta elección, siempre que el nuevo vector esté en el cono definido por el primero.

Bibliografía

- [1] W. Heisenberg, “Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 43, no. 3, pp. 172–198, 1927.
- [2] E. Schrödinger, “Quantisierung als eigenwertproblem,” *Annalen der physik*, vol. 385, no. 13, pp. 437–490, 1926.
- [3] H. Weyl, “Gruppentheorie und quantenmechanik. 1931,” *Leipzig, Nachdruck Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt*, 1977.
- [4] J. v. Neumann, “Die eindeutigkeit der schrödingerschen operatoren,” *Mathematische Annalen*, vol. 104, no. 1, pp. 570–578, 1931.
- [5] M. H. Stone, “Linear transformations in hilbert space: Iii. operational methods and group theory,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 16, no. 2, pp. 172–175, 1930.
- [6] P. Jordan, “Über kanonische transformationen in der quantenmechanik,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 37, pp. 383–386, 1926.
- [7] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*, vol. 1. Gulf Professional Publishing, 1980.
- [8] K. Friedrichs and N. Y. U. N. C. I. O. M. SCIENCES, “Mathematical aspects of the quantum theory of fields. fields modified by linear homogeneous forces,” 1953.
- [9] L. Gårding and A. Wightman, “Representations of the commutation relations,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 40, no. 7, pp. 622–626, 1954.
- [10] R. Haag, *Local quantum physics*, vol. 2. Springer Berlin, 1996.
- [11] R. Haag, “Discussion des “axiomes” et des propriétés axiomatiques d’une théorie des champs locale avec particules composées,” *Colloques Internationaux du CNRS, Lille*, 1957.
- [12] R. Haag and D. Kastler, “An algebraic approach to quantum field theory,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 5, no. 7, pp. 848–861, 1964.
- [13] R. Haag, “Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions,” *Physical Review*, vol. 112, no. 2, p. 669, 1958.

- [14] D. Ruelle, “On asymptotic condition in quantum field theory,” *Helvetica Physica Acta*, vol. 35, no. 3, p. 147, 1962.
- [15] H. Araki, “Von neumann algebras of local observables for free scalar field,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 5, no. 1, pp. 1–13, 1964.
- [16] I. E. Segal, “Postulates for general quantum mechanics,” *Annals of Mathematics*, vol. 48, no. 4, pp. 930–948, 1947.
- [17] R. Brunetti, C. Dappiaggi, K. Fredenhagen, and J. Yngvason, eds., *Advances in algebraic quantum field theory*. Mathematical Physics Studies, Springer, 2015.
- [18] V. S. Sunder, *An invitation to von Neumann algebras*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] H. Araki and E. J. Woods, “A classification of factors,” *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 51–130, 1968.
- [20] J. Von Neumann, “On rings of operators. reduction theory,” *Annals of Mathematics*, vol. 50, no. 2, pp. 401–485, 1949.
- [21] F. J. Murray and J. v. Neumann, “On rings of operators,” *Annals of Mathematics*, vol. 37, no. 1, pp. 116–229, 1936.
- [22] E. Witten, “Gravity and the crossed product,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 10, pp. 1–28, 2022.
- [23] V. Chandrasekaran, R. Longo, G. Penington, and E. Witten, “An algebra of observables for de Sitter space,” *JHEP*, vol. 02, p. 082, 2023.
- [24] R. Longo and E. Witten, “A note on continuous entropy,” *arXiv preprint arXiv:2202.03357*, 2022.
- [25] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I*. Springer.
- [26] H. Casini and M. Huerta, “A c-theorem for entanglement entropy,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, no. 25, p. 7031, 2007.
- [27] H. Casini, “Relative entropy and the bekenstein bound,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 25, no. 20, p. 205021, 2008.
- [28] R. Longo and F. Xu, “Comment on the bekenstein bound,” *Journal of Geometry and Physics*, vol. 130, pp. 113–120, 2018.
- [29] M. Ohya and D. Petz, *Quantum entropy and its use*. Springer Science & Business Media, 2004.

- [30] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. Vol. 2: Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.* 1996.
- [31] E. Witten, “Aps medal for exceptional achievement in research: Invited article on entanglement properties of quantum field theory,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, p. 045003, Oct 2018.
- [32] H. Araki, “A lattice of von neumann algebras associated with the quantum theory of a free bose field,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 11, pp. 1343–1362, 1963.
- [33] J.-P. Eckmann and K. Osterwalder, “An application of tomita’s theory of modular hilbert algebras: Duality for free bose fields,” *Journal of Functional Analysis*, vol. 13, no. 1, pp. 1–12, 1973.
- [34] H. Araki, “Relative hamiltonian for faithful normal states of a von neumann algebra,” *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, vol. 9, pp. 165–209, 1973.
- [35] E. Witten, “Aps medal for exceptional achievement in research: Invited article on entanglement properties of quantum field theory,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 90, Oct. 2018.
- [36] R. Longo, “Entropy of Coherent Excitations,” *Lett. Math. Phys.*, vol. 109, no. 12, pp. 2587–2600, 2019.
- [37] F. Ciolli, R. Longo, and G. Ruzzi, “The information in a wave,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 379, no. 3, pp. 979–1000, 2019.
- [38] H. Casini, S. Grillo, and D. Pontello, “Relative entropy for coherent states from Araki formula,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 12, p. 125020, 2019.
- [39] R. Longo and G. Morsella, “The massive modular Hamiltonian,”
- [40] R. Longo, “Modular Structure of the Weyl Algebra,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 392, no. 1, pp. 145–183, 2022.
- [41] R. Longo, “Entropy distribution of localised states,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 373, no. 2, pp. 473–505, 2019.
- [42] V. Morinelli, Y. Tanimoto, and B. Wegener, “Modular operator for null plane algebras in free fields,”
- [43] R. Longo and F. Xu, “Relative Entropy in CFT,” *Adv. Math.*, vol. 337, pp. 139–170, 2018.
- [44] S. Hollands, “Relative entropy for coherent states in chiral CFT,”
- [45] L. Panebianco, “A formula for the relative entropy in chiral CFT,”

- [46] F. Ciolli, R. Longo, A. Ranallo, and G. Ruzzi, “Relative entropy and curved spacetimes,” *J. Geom. Phys.*, vol. 172, p. 104416, 2022.
- [47] M. Fröb, A. Much, and K. Papadopoulos, “Relative entropy in de sitter is a noether charge,” *arXiv preprint arXiv:2310.12185*, 2023.
- [48] H. Bostelmann, D. Cadamuro, and S. Del Vecchio, “Relative Entropy of Coherent States on General CCR Algebras,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 389, no. 1, pp. 661–691, 2022.
- [49] H. J. Borchers and J. Yngvason, “Modular groups of quantum fields in thermal states,” *J. Math. Phys.*, vol. 40, pp. 601–624, 1999.
- [50] M. Mintchev and E. Tonni, “Modular conjugations in 2d conformal field theory and holographic bit threads,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, 2022.
- [51] J. Palmer, “Symplectic groups and the klein-gordon field,” *Journal of Functional Analysis*, vol. 27, no. 3, pp. 308–336, 1978.
- [52] J. Dimock, “Algebras of local observables on a manifold,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 77, no. 3, pp. 219–228, 1980.
- [53] A. Garbarz and G. Palau, “A note on haag duality,” *Nuclear Physics B*, vol. 980, p. 115797, 2022.
- [54] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, vol. 2. Academic Press, 1975.
- [55] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [56] S. S. Horuzhy, *Introduction to algebraic quantum field theory*, vol. 19. Springer Science & Business Media, 2012.
- [57] P. Camassa, “Relative haag duality for the free field in fock representation,” in *Annales Henri Poincare*, vol. 8, pp. 1433–1459, Springer, 2007.
- [58] M. Takesaki, *Tomita’s Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1970.
- [59] H. Reeh and S. Schlieder, “Bemerkungen zur unitäräquivalenz von lorentzinvarianten feldern,” *Nuovo Cim.*, vol. 22, no. 5, pp. 1051–1068, 1961.
- [60] B. C. Hall, *Quantum theory for mathematicians*. Springer, 2013.
- [61] P. R. Halmos, “Two subspaces,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 144, pp. 381–389, 1969.

- [62] M. Rieffel and A. Van Daele, “A bounded operator approach to tomita-takesaki theory,” *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 69, no. 1, pp. 187–221, 1977.
- [63] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 2 ed., 1966.
- [64] L. Robinett, “Do tachyons travel more slowly than light?,” *Physical Review D*, vol. 18, no. 10, p. 3610, 1978.
- [65] T. Hartman and N. Afkhami-Jeddi, “Speed limits for entanglement,” *arXiv preprint arXiv:1512.02695*, 2015.
- [66] B. S. Kay and R. M. Wald, “Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Nonsingular, Quasifree States on Space-Times with a Bifurcate Killing Horizon,” *Phys. Rept.*, vol. 207, pp. 49–136, 1991.
- [67] D. Petz, *An Invitation to the algebra of canonical commutation relations*, vol. A2 of *Leuven notes in mathematical and theoretical physics*. Leuven, Belgium: Leuven Univ. Pr., 1990.
- [68] “On quasi-equivalence of quasi-free kms states restricted to an unbounded subregion of the rindler spacetime,”
- [69] H. Araki, “Relative entropy of states of von neumann algebras,” *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 11, no. 3, pp. 809–833, 1975.
- [70] R. Longo, “Real Hilbert subspaces, modular theory, $SL(2, \mathbb{R})$ and CFT,” *In Von Neumann algebras in Sibiu: Conference Proceedings, pages 33–91. Theta, Bucharest, 2008*.
- [71] R. Longo, “Entropy of coherent excitations,” *Letters in Mathematical Physics*, vol. 109, no. 12, pp. 2587–2600, 2019.
- [72] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal field theory*. Graduate texts in contemporary physics, New York, NY: Springer, 1997.
- [73] M. Luescher and G. Mack, “Global conformal invariance in quantum field theory,” 1975.
- [74] K.-H. Rehren, “Algebraic conformal quantum field theory in perspective,” in *Advances in algebraic quantum field theory*, pp. 331–364, Springer, 2015.
- [75] B. Schroer and J. Swieca, “Conformal transformations for quantized fields,” *Physical Review D*, vol. 10, no. 2, p. 480, 1974.
- [76] R. Longo and Y. Tanimoto, “Rotational KMS states and type I conformal nets,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 357, no. 1, pp. 249–266, 2018.
- [77] P. Camassa, R. Longo, Y. Tanimoto, and M. Weiner, “Thermal States in Conformal QFT. II,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 315, pp. 771–802, 2012.

- [78] R. Streater and A. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*. 1989.
- [79] P. Camassa, R. Longo, Y. Tanimoto, and M. Weiner, “Thermal States in Conformal QFT. I,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 309, p. 5, 2012.
- [80] J. J. Bisognano and E. H. Wichmann, “On the Duality Condition for a Hermitian Scalar Field,” *J. Math. Phys.*, vol. 16, pp. 985–1007, 1975.
- [81] J. J. Bisognano and E. H. Wichmann, “On the Duality Condition for Quantum Fields,” *J. Math. Phys.*, vol. 17, pp. 303–321, 1976.
- [82] Y. Tanimoto, “Construction of wedge-local nets of observables through Longo-Witten endomorphisms,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 314, pp. 443–469, 2012.
- [83] R. Longo, “Real Hilbert subspaces, modular theory, $SL(2, \mathbb{R})$ and CFT,” *Von Neumann algebras in Sibiu: Conference Proceedings*, p. 33–91, 2008.
- [84] V. Moretti, *Spectral Theory and Quantum Mechanics: With an Introduction to the Algebraic Formulation*. UNITEXT, Springer Milan, 2013.
- [85] B. Schroer and H.-W. Wiesbrock, “Looking beyond the thermal horizon: hidden symmetries in chiral models,” *Reviews in Mathematical Physics*, vol. 12, no. 03, pp. 461–473, 2000.
- [86] N. Abate and M. Koifman, “Modular conjugation for the chiral fermion in multicomponent regions on the torus,” *Physical Review D*, vol. 108, no. 8, p. 085003, 2023.
- [87] M. Takesaki and M. Winnink, “Local normality in quantum statistical mechanics,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 30, no. 2, pp. 129–152, 1973.
- [88] V. Morinelli, Y. Tanimoto, and M. Weiner, “Conformal covariance and the split property,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 357, no. 1, pp. 379–406, 2018.
- [89] O. Bratteli and D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II: Equilibrium States Models in Quantum Statistical Mechanics*. Theoretical and Mathematical Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [90] V. Koshmanenko, *Singular quadratic forms in perturbation theory*, vol. 474. Springer Science & Business Media, 2012.
- [91] S. J. Summers, “Tomita-takesaki modular theory,” 2005.