UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Foliaciones, estructuras de Poisson y residuos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Darío Martín Aza

Director de tesis: Dr. Federico Quallbrunn.

Director adjunto de tesis: Dr. Matías del Hoyo

Consejero de estudios: Dr. Fernando Cukierman.

Buenos Aires, ———.

Foliaciones, estructuras de Poisson y residuos

Esta tesis se enmarca entre las teorías de foliaciones y de variedades Poisson en el contexto de la geometría holomorfa. A toda variedad de Poisson se le corresponde su foliación simpléctica. En esta tesis estudiamos invariantes de las variedades Poisson e invariantes de las foliaciones llamados residuos. Estudiaremos y presentaremos los ya conocidos residuos de Baum-Bott para foliaciones singulares y los residuos que Gualtieri y Pym le asociaron a módulos sobre variedades Poisson para luego establecer ciertos resultados de comparación entre algunos de ellos.

Palabras clave: foliaciones singulares, residuos de Baum-Bott, estructuras de Poisson, módulos Poisson.

Foliations, Poisson structures and residues

This thesis is to be framed in between the theories of foliations and Poisson manifolds in the context of holomorphic geometry. Every Poisson manifold has its corresponding symplectic foliation. In this thesis we study invariants of Poisson manifolds and invariants of foliations called residues. We will study and present the already well known Baum-Bott residues for singular foliations and the residues that Gualtieri and Pym associated with modules over Poisson manifolds in order to establish certain results of comparison between some of them.

Keywords: singular foliations, Baum-Bott residues, Poisson structures, Poisson modules.

Agradecimientos

Con la increible emoción de encontrarme en la etapa final del proceso de mi doctorado pienso en toda la gente que me ayudó a llegar hasta acá y descubro que sería imposible agradecerles a todos debidamente. Definitivamente esta tesis es un logro colectivo de diferentes comunidades que me condujeron seguir en la matemática y a enfocarme en este trabajo a lo largo de estos años.

Quiero comenzar agradeciendo a Federico y Matías que me dirigieron y me enseñaron todo lo que se encuentra escrito en estas páginas y mucho más. Con dos estilos de dirección muy diferentes, me empujaron para llegar hasta este punto. Gracias por ayudarme a encontrar mi camino dentro de la matemática y mi propia voz. Los primeros lectores y testigos de estas ideas fueron siempre ellos dos. Gracias por escucharme y por acompañarme tantos años y en tantos momentos difíciles del proceso.

En segundo lugar agradezco al jurado de esta tesis y a los jurados suplentes que fueron designados. Gracias por dedicar de su tiempo a la lectura de estas páginas y por la increiblemente buena predisposición.

Agradezco a otros referentes de la matemática que he tenido y que me han ayudado y apoyado estos años: Fernando Cukierman, Alicia Dickenstein (que también se encuentra en el jurado), Arturo Pianzola y Gabriel Larotonda. A todos ellos muchas gracias por todo lo que me enseñaron y el enorme tiempo que invirtieron en mi.

A mi familia y amigos dentro y fuera de la facultad, que atestiguaron este trabajo desde sus distintos ángulos. Entre mi familia, principalmente a mis padres y mi hermano Favio. Dentro de mis amigos de la facultad quiero agradecer principalmente a Santiago, Gonzalo, Martín, Pablo, Mariano, Sebastián y Juan que son junto a quienes aprendí matemática y enfrenté este doctorado. Dentro de mis amigos fuera de la matemática, agradezco principalmente a Camila, Ailén y mis amigos de la escuela. Es evidente que estoy manteniendo esta lista extremadamente breve: quienes no estén acá explícitamente siéntanse igualmente abrazados.

Al sistema de educación pública de Argentina y en particular a la UBA. Hoy más que nunca tengo que señalar que he sido formado en instituciones públicas de excelente calidad desde el nivel inicial hasta el universitario y que desde la educación pública es posible llegar en Argentina a los más altos grados académicos.

Índice general

1 Introducción 1

2 Foliaciones holomorfas 3
2.1. Preliminares sobre variedades complejas 3
2.2. Foliaciones regulares 8
2.3. Subhaces de un haz localmente libre 10
2.4. Foliaciones singulares 13
2.5. Foliaciones y formas diferenciales 15

3 Residuos de Baum-Bott para foliaciones 20
3.1. Clases características de fibrados vectoriales 20
3.2. Clases de Chern de haces coherentes 23
3.3. El teorema de anulación de Bott 25
3.4. Los residuos de Baum-Bott 27
3.5. Un algoritmo para el cálculo de residuos de grado mínimo 31
3.6. Residuos de grado superior 33
3.7. Apéndice. 36

4 Variedades de Poisson complejas 39
4.1. Variedades de Poisson y la foliación simpléctica 39
4.2. Ejemplos de estructuras Poisson en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ 42
4.3. Módulos Poisson y fibrados de línea Poisson 44
4.4. Residuos de Gualtieri y Pym 47

5 Los teoremas de comparación para residuos 49
5.1. Singularidades de foliaciones de tipo Kupka 49
5.2. Residuos de Baum-Bott y de Gualtieri-Pym 52
5.3. Algunos resultados parciales más en el caso de foliaciones simplécticas de codimensión uno 57

Bibliografía 60

1. Introducción

Esta tesis está dedicada al estudio de residuos de variedades de Poisson holomorfas y sus foliaciones simplécticas. Una variedad de Poisson holomorfa es una variedad holomorfa X junto con un bivector global $\pi \in H^0(X, \Lambda^2 T_X)$ que satisface la condición de integrabilidad $[\pi, \pi] = 0$. Las variedades de Poisson surgen de forma natural como modelos matemáticos para la mecánica clásica en física, y las variedades de Poisson holomorfas son sus contrapartes en el ámbito complejo. En el trabajo [GP13], los autores construyeron multivectores soportados en los lugares de degeneración de una variedad de Poisson dada, los cuales denominaron *residuos*. La motivación principal detrás de la introducción de estos residuos fue una famosa conjetura de Bondal sobre las dimensiones de los lugares de degeneración de una variedad de Poisson holomorfa. Por otro lado, toda variedad de Poisson trae una foliación natural del espacio subyacente, conocida como la foliación simplectica de la variedad de Poisson. En el trabajo [BB72], los autores construyeron clases de homología soportadas en el lugar singular de una foliación, que también fueron nombradas residuos. El objetivo principal de esta tesis es estudiar y relacionar estas dos construcciones diferentes. La pregunta de si estos residuos compartían algunas propiedades ya fue brindada por los autores de [GP13] en su trabajo original (ver la observación 6.3). En esta tesis estudiaremos foliaciones holomorfas singulares y variedades de Poisson holomorfas, desarrollando ambas teorías de residuos para abordar esta cuestión.

Un dato interesante a discutir es la naturaleza de las foliaciones simplécticas que surgen de variedades de Poisson. En la literatura sobre teoría de foliaciones en variedades holomorfas, suelen considerarse principalmente foliaciones saturadas: esas foliaciones generalmente se estudian mediante formas diferenciales y sistemas de Pfaff integrables. Un hecho interesante acerca de las foliaciones simplécticas asociadas a variedades de Poisson es que generalmente son no saturadas. La saturación de la foliación simpléctica de una variedad de Poisson y la propia foliación difieren habitualmente en información relevante, como es el caso del campo modular de una variedad de Poisson. El campo modular siempre se encuentra en la saturación de la foliación simplectica, pero usualmente no es un campo hamiltoniano y por ende no está en la foliación simpléctica. Tras aclarar este punto, desarrollamos la teoría de residuos de Baum-Bott para una foliación holomorfa singular saturada. Ofrecemos una perspectiva diferente sobre estos residuos, la cual también nos permite obtener el siguiente resultado respecto a estos residuos.

Proposición 1.0.1. *Sea X una variedad compleja de dimensión n y $\mathscr{F}$ una foliación holomorfa singular saturada en X. Sea φ un polinomio simétrico homogéneo de grado $l > n - k$, tal que $\varphi = \phi \cdot \xi$ con ϕ y ξ polinomios simétricos homogéneos, y $s = \deg(\phi) > n - k$. Entonces:*

$$Res^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) = Res^{BB}_{\phi}(\mathscr{F}) \cdot \xi(N_{\mathscr{F}})$$

donde $Res^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) \in H^{2l}(X, U, \mathbb{C})$, con U el conjunto regular de $\mathscr{F}$, y la acción de $H^\bullet(X, \mathbb{C})$ en $H^\bullet(X, U, \mathbb{C})$ está dada por

$$(\omega, \eta) \cdot \nu = (\omega \wedge \nu, \eta \wedge i^*(\nu))$$

para $\omega \in \Omega^{2s}(X, \mathbb{C})$, $\eta \in \Omega^{2s-1}(U, \mathbb{C})$

Por último, pasamos al estudio de las variedades de Poisson holomorfas y desarrollamos la teoría de residuos de Poisson de Gualtieri y Pym para compararla con los residuos de la foliación simpléctica de Baum y Bott. El principal resultado de esta tesis es el siguiente teorema:

Teorema 1.0.2. *Sea* (X, π) *una variedad de Poisson compleja de rango* r *que no es genéricamente simpléctica y sin contenido. Sea* Z *una componente irreducible y reducida de* $D_{2r-2}(\pi)$ *de dimensión 2r-1. Entonces* $Res^{GP}_{r-1}(\omega_X)|_Z = 0$ *si y solo si* $\langle Res^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z\rangle = 0$.

La tesis está organizada de la siguiente manera: el capítulo 2 incluye una introducción a las foliaciones holomorfas singulares y un análisis de la diferencia entre foliaciones saturadas y no saturadas. El capítulo 3 trata los residuos de Baum-Bott de foliaciones singulares. Proporcionamos un análisis de algunas de sus propiedades, así como un apéndice que aborda la definición de residuos de Baum-Bott en variedades complejas no compactas. El cuarto capítulo introduce las variedades de Poisson holomorfas y los correspondientes residuos de Gualtieri-Pym. Finalmente, el capítulo 5 incluye los principales resultados de comparación y ejemplos relacionados con residuos en variedades de Poisson.

2. Foliaciones holomorfas

2.1. Preliminares sobre variedades complejas

En esta sección recopilamos información sobre variedades complejas, campos vectoriales holomorfos, la diferencial de De Rham holomorfa, el corchete de Lie de campos vectoriales holomorfos, fibrados vectoriales complejos, espacios analíticos y haces coherentes. Una referencia completa para los temas mencionados es [GH94] o [Voi07].

Una **variedad compleja** X de dimensión n es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ que admite un cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ con funciones de coordenadas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ tales que las composiciones $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son holomorfas. Un **morfismo holomorfo** entre dos variedades complejas X e Y es una función $f : X \to Y$ tal que la composición $\psi_\beta \circ f \circ (\varphi_\alpha)^{-1}$ es holomorfa para cada par de funciones coordenadas de X e Y. Dada $f : X \to Y$ una función holomorfa entre variedades holomorfas su **jacobiano** en un punto $p \in X$ es la matriz

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p)\right)_{i,j}$$

donde $(f_1, \dots, f_r)$ son las coordenadas que definen en los entornos de coordenadas de $p \in X$ y $f(p) \in Y$ de la función $\psi_\beta \circ f \circ (\varphi_\alpha)^{-1}$.

Dada X una variedad compleja una **subvariedad analítica** de X es un subconjunto cerrado $Y \subseteq X$ tal que para cada punto $x \in X$ existe un entorno abierto $x \in U \subseteq X$ tal que $Y \cap U$ es el conjunto de ceros de un número finito de funciones holomorfas $\{f_1, \dots, f_k\}$ con valores en $\mathbb{C}$. Decimos que un punto $x \in Y$ es un **punto regular** si las funciones anteriores pueden tomarse de modo que su matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p)\right)_{i,j}$ tenga rango k. Si cada punto de Y es regular, decimos que $Y \subseteq X$ es una **subvariedad regular** de X. Los **puntos singulares** de Y son los puntos no regulares. El teorema de la función implícita holomorfa implica que si $Y \subseteq X$ es una subvariedad regular holomorfa de X, entonces Y tiene la estructura de una variedad holomorfa. Una referencia para este teorema es [GH94, page 19].

Ejemplo 2.1.1. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es una variedad compleja de dimensión n. En cada subconjunto abierto afín $U_i \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ definido por la ecuación $x_i \neq 0$, tenemos la función de coordenadas.

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) &\to \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{aligned}$$

Y estas funciones proporcionan a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ una estructura de variedad compleja. Los ceros de familias de polinomios homogéneos definen subvariedades analíticas de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, denominadas **variedades proyectivas**. La mayor parte de esta tesis se centrará en variedades proyectivas.

Ejemplo 2.1.2. El subconjunto de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ definido por los ceros del polinomio homogéneo $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2 + x_2x_3$ forma una variedad proyectiva de dimensión 2 dentro de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Las variedades proyectivas definidas por los ceros de un polinomio cuadrático como este se denominan cuádricas.

Decimos que una variedad analítica X es **irreducible** si no puede escribirse como la unión de dos subvariedades analíticas propias. Cualquier subvariedad analítica X puede descomponerse en sus **componentes irreducibles** que son sus subvariedades analíticas irreducibles maximales.

Sea X una variedad holomorfa. Denotaremos por $\mathscr{O}_X$ su haz de funciones holomorfas con valores en $\mathbb{C}$. Un haz de $\mathscr{O}_X$ módulos es un haz $\mathscr{E}$ sobre X que asigna a cada conjunto abierto $U \subseteq X$ un módulo $\mathscr{E}(U)$ sobre el anillo $\mathscr{O}_X(U)$ de funciones holomorfas en U. Un haz $\mathscr{S}$ de $\mathscr{O}_X-$módulos se llama **de tipo finito** si para cada $p \in X$ existe un entorno abierto U de p y un epimorfismo $\mathscr{O}_X(U)^r \to \mathscr{S}(U)$. Un haz de $\mathscr{O}_X-$módulos de tipo finito es libre si es isomorfo a $\mathscr{O}_X^r$ para algún número natural r. Un haz $\mathscr{S}$ de tipo finito es **localmente libre** si para cada punto $p \in X$ existe un entorno abierto $p \in U$ tal que $\mathscr{S}|_U$ es libre. Dado que solo trabajaremos con haces de tipo finito, nuestros haces localmente libres serán localmente isomorfos a $\mathscr{O}_X^r$ para algún número natural r, al que llamamos su **rango**. Un haz de $\mathscr{O}_X$ módulos $\mathscr{E}$ es **coherente** si es **localmente finitamente presentado** lo que significa que para cada elemento $x \in X$ hay un subconjunto abierto $x \in U \subseteq X$ y un morfismo de haces $\phi : \mathscr{O}_U^l \to \mathscr{O}_U^r$ tal que $\operatorname{coker}(\phi) \simeq \mathscr{E}$. Los haces coherentes forman una categoría abeliana que incluye a todos los haces localmente libres de rango finito. Para una introducción completa a los haces coherentes en variedades analíticas, referimos al apéndice en [GR84].

Proposición 2.1.3. *Sea X un espacio analítico complejo. Los haces coherentes de $\mathscr{O}_X-$módulos satisfacen las siguientes propiedades.*

1. *El haz $\mathscr{O}_X$ es coherente.*
2. *Si $0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2 \to \mathscr{E}_3 \to 0$ es una sucesión exacta de haces de $\mathscr{O}_X-$módulos y dos de los tres haces son coherentes, entonces los tres haces son coherentes.*
3. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo de variedades analíticas y $\mathscr{S}$ es un haz coherente sobre X, entonces el haz imagen directa $f_*(\mathscr{S})$ definido por $f_*(\mathscr{S})(U) = \mathscr{S}(f^{-1}(U))$ es un haz coherente sobre Y.*

Ejemplo 2.1.4. Consideremos una variedad compleja X y sea $Y \subseteq X$ una subvariedad analítica. Sea $U \subseteq X$ un subconjunto abierto. El ideal de funciones

$$I_Y(U) = \{f \in \mathscr{O}_X(U) | f(x) = 0 \text{ para todo } x \in Y\}$$

define un haz coherente de $\mathscr{O}_X-$módulos sobre X. En efecto, si $i : Y \to X$ es la inclusión, tenemos que la sucesión

$$0 \to I_Y \to \mathscr{O}_X \to i_*(\mathscr{O}_Y) \to 0$$

es una sucesión exacta de haces sobre X. Como dos de estos haces son coherentes, el tercero debe serlo también.

Se dice que un fibrado vectorial complejo diferenciable $\pi : E \to X$ sobre una variedad compleja X es un **fibrado vectorial holomorfo** si existen estructuras de variedades complejas en X y E tales que π es holomorfo y existen trivializaciones

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$$

tales que los τ_i son biholomorfismos. Considerando dos subconjuntos trivializantes abiertos U, V obtenemos $\tau_{ij} = \tau_j \circ (\tau_i)^{-1} : U \cap V \times \mathbb{C}^r \to U \cap V \times \mathbb{C}^r$ y esta función satisface que $\tau_{ij}(x, y) = (x, F_{UV}(x)y)$ para alguna transformación lineal $F_{UV}(x) \in GL_r(\mathbb{C})$. La colección $(F_{UV})_{U,V}$ de funciones $F_{UV} : U \cap V \to GL_r(\mathbb{C})$ se denomina cociclo del fibrado vectorial. Un fibrado vectorial complejo $E \to X$ sobre una variedad compleja X es holomorfo si permite un cociclo de matrices de transición con coeficientes holomorfos. De esta manera, un fibrado vectorial holomorfo está representado por un cociclo de funciones holomorfas $(F_{UV})_{UV}$ donde $F_{UV} : U \cap V \to GL_r(\mathbb{C})$. También es cierto que cualquier cociclo de funciones holomorfas como el anterior es la matriz de transición de un fibrado vectorial holomorfo. Un **morfismo de fibrados vectoriales holomorfos** entre los fibrados vectoriales $E_1 \to X_1$ y $E_2 \to X_2$ es un par de funciones holomorfas $f : E_1 \to E_2$ y $g : x_1 \to X_2$ que satisfacen que $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$ y que la restricción de f a cada fibra de π_1 es $\mathbb{C}-$lineal. Denotamos por $\mathrm{Hom}_{VB}(E_1, E_2)$ el conjunto de morfismos de fibrados vectoriales entre E_1 y E_2.

Si $\pi : E \to X$ es un fibrado vectorial, un morfismo $\sigma : X \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$ se denomina **sección holomorfa** de E. Denotamos por $\Gamma(U, E)$ el $\mathscr{O}_X$-módulo de las secciones holomorfas de E sobre el subconjunto abierto $U \subseteq X$. Las secciones de un fibrado vectorial holomorfo forman un haz de $\mathscr{O}_X-$módulos que es localmente libre. Además, cada haz localmente libre de $\mathscr{O}_X$ módulos puede realizarse como el haz de secciones de un fibrado vectorial holomorfo sobre X. Esto puede verse de la siguiente manera: dado un haz localmente libre de $\mathscr{O}_X-$módulos $\mathscr{S}$ podemos elegir dos subconjuntos abiertos diferentes U, V con intersección no vacía de X, tales que $\mathscr{S}(U)$ y $\mathscr{S}(V)$ sean libres con base $\{s_1, \dots s_r\}$ y $\{\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_r}\}$ respectivamente. Entonces los elementos $\widetilde{s_i}|_{U\cap V} \in \mathscr{S}(U \cap V)$ deben ser combinaciones lineales de los elementos base $\{s_1, \dots, s_r\}$ y por lo tanto hay elementos $F_{ij} \in \mathscr{O}_X(U \cap V)$ que satisfacen $\sum_{i=1}^{r} F_{ij} s_j = \widetilde{s_i}$. Las funciones $(F_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ forman una matriz F_{UV} con entradas en $\mathscr{O}_X(U \cap V)$ y por lo tanto una función holomorfa $F_{UV} : U \cap V \to Gl_r(\mathbb{C})$. El conjunto de estas funciones (para U, V subconjuntos abiertos de X que trivializan $\mathscr{S}$) forma un cociclo de matrices de transición holomorfas y, por lo tanto, define un fibrado vectorial holomorfo. En este trabajo, identificaremos cualquier fibrado vectorial holomorfo con su haz de secciones. Para una discusión detallada de los resultados mencionados en este párrafo, véase [Vak25, Sección 13.1].

Ejemplo 2.1.5. Si X es una variedad compleja, el fibrado vectorial $\mathbb{C}^r \times X \to X$ se denomina fibrado vectorial trivial sobre X de rango r. El haz de secciones de $\mathbb{C}^r \times X$ sobre X se identifica con $\mathscr{O}_X^r$.

Ejemplo 2.1.6. Sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ podemos considerar el fibrado lineal tautológico dado al considerar como el espacio total

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1} | y \in x \text{ donde } x \text{ se ve como una línea en } \mathbb{C}^{n+1}\}.$$

Este espacio tiene una proyección natural $E \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ dada al proyectar a la primera coordenada y es una subvariedad compleja de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Usualmente denotaremos el haz de secciones de este fibrado lineal sobre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ como $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(-1)$.

Si X es una variedad compleja de dimensión n entonces podemos considerar a X como variedad diferenciable de dimensión $2n$. De esta manera producimos su fibrado tangente real $T_{\mathbb{R}}X$. Denotaremos por τ su complejización $\tau = T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$. El fibrado vectorial complejo τ tiene rango $2n$ y no es holomorfo. La función J_p en $T_{\mathbb{R},p}X$ inducida al multiplicar por i en $T_{\mathbb{R},p}X$ en cada punto $p \in X$ se extiende a una función $\mathbb{C}-$lineal $J_p : \tau_p \to \tau_p$ que se pega en un morfismo global de fibrados vectoriales complejos $J : \tau \to \tau$ que satisface la propiedad de que $J^2 = -id_\tau$. Este morfismo descompone τ en la suma directa de los dos espacios propios de J para cada valor propio i y $-i$,

$$\tau \simeq T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}$$

y estos dos espacios se denominan fibrados tangentes **holomorfos** y **antiholomorfos** de X respectivamente. $T_X^{1,0}$ y $T_X^{0,1}$ son fibrados vectoriales complejos diferenciables sobre X, pero $T_X^{1,0}$ también es un fibrado vectorial holomorfo. Localmente, si $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ son coordenadas locales de X y $z_i = x_i + iy_i$, tenemos coordenadas locales $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ para X como variedad diferenciable. En este contexto, la función J está dada por $J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}$ y $J(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}$. El fibrado tangente holomorfo se genera en cada punto $p \in X$ por los elementos $\{\frac{\partial}{\partial z_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}|_p\}$, donde

$$\frac{\partial}{\partial z_i}|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p - i\frac{\partial}{\partial y_i}|_p \in \tau_p.$$

El haz de secciones holomorfas de $T_X^{1,0}$ se denomina haz de campos vectoriales holomorfos en X. El corchete de Lie de campos vectoriales en una variedad diferenciable X se extiende $\mathbb{C}-$linealmente hasta la complejización τ. Además, el corchete entre dos campos vectoriales holomorfos es a su vez holomorfo y, por lo tanto, el fibrado tangente holomorfo hereda este corchete.

Observación 2.1.7. Si X es una variedad diferenciable de dimensión par, podemos examinar cuándo admite una estructura de variedad compleja. Decimos que una variedad diferenciable X tiene una estructura **casi compleja** si presenta un endomorfismo lineal $J : T_X \to T_X$ tal que $J^2 = -Id$. La variedad diferenciable subyacente a una variedad compleja X siempre presenta una estructura casi compleja J, inducida por la multiplicación por i, ya que los espacios tangentes reales admiten una estructura de espacio vectorial complejo. Llamamos a una estructura casi compleja (X, J) **integrable** si existe una estructura de variedad compleja en X que induce J. El teorema de Newlander-Nirenberg caracteriza cuándo X admite una estructura de variedad holomorfa mediante el corchete de Lie en el fibrado tangente holomorfo. Más precisamente, el teorema establece que (X, J) es integrable si y solo si $T_X^{1,0}$ está cerrado bajo el corchete de Lie de los campos vectoriales. Se puede encontrar una referencia a este teorema en [Voi07, página 50].

Escribiremos $\mathscr{A}_X^1(\mathbb{C})$ para las 1-formas diferenciales en X con valores en $\mathbb{C}$ que es el fibrado vectorial dual de τ:

$$\mathscr{A}_X^1(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{VB}(\tau, \mathbb{C}_X)$$

donde $\mathbb{C}_X$ es el fibrado lineal trivial sobre X con fibra $\mathbb{C}$ y los morfismos anteriores son $\mathbb{R}-$morfismos lineales de fibrados vectoriales reales. Como de costumbre, también escribiremos $\mathscr{A}_X^i(\mathbb{C}) = \Lambda^i(\mathscr{A}_X^1)$.. El producto wedge habitual y la diferencial convierten $\mathscr{A}_X^\bullet(\mathbb{C})$ en un álgebra diferencial graduada. La descomposición $\tau \simeq T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}$ induce

una descomposición similar en el espacio de formas diferenciales uno y en sus potencias externas.

$$\mathscr{A}_X^1(\mathbb{C}) \simeq \mathscr{A}_X^{1,0} \oplus \mathscr{A}_X^{0,1}$$
$$\mathscr{A}_X^i(\mathbb{C}) \simeq \sum_{p+q=i} \mathscr{A}_X^{p,q}$$

Las secciones de $\mathscr{A}_X^{p,q}$ admiten como generadores en coordenadas locales holomorfas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ las formas diferenciales $dz_I \wedge d\overline{z_J} = dz_1 \wedge \ldots dz_{i_p} \wedge d\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots d\overline{z_{j_q}}$ donde $I = \{i_1, \ldots i_p\}$ y $J = \{j_1, \ldots j_q\}$ son conjuntos de índices ordenados de cardinales p y q respectivamente y $dz_j = dx_j + i dy_j, d\overline{z_j} = dx_j - i dy_j$ para las coordenadas locales reales $x_1, y_1 x, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ correspondientes a las coordenadas locales holomorfas anteriores. En particular, una sección de $\mathscr{A}_X^{p,q}$ tiene localmente la forma $\alpha = \sum \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$ para algunas funciones diferenciables $\alpha_{I,J} : X \to \mathbb{C}$ y la diferencial de De Rham puede calcularse localmente como

$$d\alpha = \sum d\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

donde la diferencial de una función diferenciable $f : X \to \mathbb{C}$ viene dada por la fórmula

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) dz_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) d\overline{z}_j.$$

También existe la siguiente fórmula que relaciona la diferencial de De Rham y el corchete de Lie:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_i (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots \hat{X_i}, \ldots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X_i}, \ldots, \hat{X_j}, \ldots X_{k+1}) \end{aligned}$$

donde X_i son elementos de τ y $\omega \in \mathscr{A}_X^k(\mathbb{C})$. Llamamos a las secciones holomorfas de $\mathscr{A}_X^{1,0}$ formas holomorfas en X y denotamos Ω_X^1 el haz asociado, que se denominará haz cotangente holomorfo. De igual manera, llamaremos Ω_X^p al haz de secciones holomorfas de $\mathscr{A}_X^{p,0}$ y a sus secciones las llamaremos $p-$formas holomorfas. Si $\dim(X) = n$, el fibrado de línea Ω_X^n se denomina fibrado canónico de X. La diferencial de De Rham descrita anteriormente cuando se aplica a una sección α de $\mathscr{A}_X^{p,q}$ devuelve una sección $d\alpha \in \mathscr{A}_X^{p+1,q} \oplus \mathscr{A}_X^{p,q+1}$. Las proyecciones a cada factor producen dos diferenciales diferentes

$$\partial : \mathscr{A}_X^{p,q} \to \mathscr{A}_X^{p+1,q}$$

y

$$\overline{\partial} : \mathscr{A}_X^{p,q} \to \mathscr{A}_X^{p,q+1}.$$

Estos dos diferenciales satisfacen las siguientes propiedades

1. Si α es una sección holomorfa de Ω_X^p, entonces $\partial(\alpha)$ es una sección holomorfa de Ω_X^{p+1} y, por lo tanto, existe un complejo

$$0 \to \Omega_X^0 \to \Omega_X^1 \to \Omega_X^2 \to \cdots \to \Omega_X^n \to 0$$

   Llamamos a este complejo el **complejo de De Rham holomorfo** de X.

2. Para α, una sección diferenciable de $\mathscr{A}_X^{p,0}$, entonces $\overline{\partial}(\alpha) = 0$ si y solo si α es una sección holomorfa del haz. $\mathscr{A}_X^{p,0}$. Además, cualquier fibrado vectorial holomorfo $E \to X$ tiene asociado un **operador de Dolbeault** $\overline{\partial}_E : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \mathscr{A}_X^{0,1}(\mathbb{C}))$ que también se extiende a un complejo

$$E \to E \otimes \mathscr{A}_X^{0,1}(\mathbb{C}) \to \dots E \otimes \mathscr{A}_X^{0,n}(\mathbb{C})$$

y satisface que $\overline{\partial}_E(\alpha) = 0$ si y solo si α es una sección holomorfa de E.

2.2. Foliaciones regulares

En esta segunda sección trabajaremos las foliaciones regulares. Estudiaremos distribuciones regulares tanto desde el punto de vista de las formas diferenciales como de los campos vectoriales y concluiremos la sección con el enunciado del teorema de Frobenius. A lo largo de la sección, X es una variedad compleja, T_X es su fibrado tangente holomorfo y Ω_X^1 es su fibrado cotangente holomorfo. Denotaremos por $\mathscr{O}_X$ el haz de funciones holomorfas en X.

Una **distribución holomorfa regular** en una variedad compleja X es un subfibrado vectorial $\mathscr{D} \subseteq T_X$ del fibrado tangente holomorfo. Una distribución regular es equivalente al dato de una sucesión exacta de fibrados vectoriales

$$0 \to \mathscr{D} \to T_X \to T_X/\mathscr{D} \to 0.$$

Esta sucesión exacta puede ser dualizada para obtener una sucesión equivalente que está dada por un subfibrado vectorial del fibrado cotangente

$$0 \to E \to \Omega_X^1 \to \Omega_X^1/E \to 0$$

donde $E \simeq (T_X/\mathscr{D})^*$ es el subfibrado vectorial del fibrado cotangente holomorfo dado por el anulador de $\mathscr{D}$ dentro de Ω_X^1. Nos interesará particularmente esta dualidad. Esta observación nos proporciona una correspondencia uno a uno como la descrita a continuación

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Distribuciones holomorfas regulares}\\ \text{de rango } r\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Ideales } I \subseteq \Omega_X^\bullet \text{ localmente generados}\\ \text{en grado 1 por } n-r \text{ 1-formas}\\ \text{linealmente independientes}\end{array}\right\}$$

Una distribución holomorfa regular $\mathscr{D} \subseteq T_X$ en una variedad compleja X es **integrable** si $\mathscr{D}$ es cerrada bajo el corchete de Lie de campos vectoriales. También llamamos a esta condición **involutividad**. Debido a que el diferencial de Rham holomorfo d satisface la fórmula siguiente

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = &\sum_i (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots \hat{X_i}, \dots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X_i}, \dots, \hat{X_j}, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

la condición de que $\mathscr{D}$ sea involutiva es equivalente a que $E \simeq (T_X/\mathscr{D})^*$ genere un ideal en $\Omega_X^\bullet$ cerrado bajo el diferencial de de Rham. Dado un ideal $I \subseteq \Omega_X^\bullet$, decimos que I es un **ideal diferencial** de $\Omega_X^\bullet$ si $dI \subseteq I$. Estas consideraciones nos proporcionan la siguiente correspondencia:

Proposición 2.2.1. *Existe una correspondencia uno a uno entre*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{distribuciones holomorfas integrables} \\ \textit{regulares de rango } r \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{ideales diferenciales } I \subseteq \Omega_X^\bullet \\ \textit{generados localmente en grado uno} \\ \textit{por } n - r \textit{ 1-formas independientes} \end{array} \right\}.$$

Finalmente, el teorema de Frobenius identifica estas dos nociones equivalentes con la de foliación regular en X.

Definición 2.2.2. Una **foliación holomorfa regular** en X de dimensión k es una descomposición de $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$ en subvariedades conexas holomorfas disjointas llamadas hojas, de modo que para cada punto $p \in X$ existe un entorno $p \in U \subseteq X$ y un biholomorfismo $\varphi : U \to V_k \times V_{n-k} \subseteq \mathbb{C}^n$, donde $V_k \subseteq \mathbb{C}^k$ y $V_{n-k} \subseteq \mathbb{C}^{n-k}$ son conjuntos abiertos tales que para todo $z \in V_{n-k}$ la preimagen $\varphi^{-1}(V_k \times \{z\})$ es un subconjunto abierto de la hoja L_α, de modo que $p \in L_\alpha$. Decimos que estos biholomorfismos son cartas adaptadas a la foliación $\mathscr{F}$.

Toda foliación de dimensión k en X induce una distribución integrable de rango k en X considerando en cada punto x el espacio tangente a la hoja que pasa por x. El siguiente teorema muestra que estos conceptos son en realidad equivalentes.

Teorema 2.2.3. *(Frobenius) Sea X una variedad holomorfa y $\mathscr{F} \subseteq T_X$ una distribución holomorfa regular. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *La distribución $\mathscr{F}$ es integrable.*
2. *La distribución $\mathscr{F}$ es inducida por una foliación holomorfa regular en X.*

Demostración. Para una demostración, véase [Mal72] capítulo II sección 5. □

A la luz de la discusión previa, una foliación regular en una variedad compleja puede definirse ya sea mediante una distribución integrable regular, un ideal diferencial de $\Omega_X^\bullet$ generado por un haz localmente libre en grado 1, o mediante una descomposición del espacio de hojas como en la definición 2.2.2.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos la variedad compleja $\mathbb{C}^2$ con coordenadas (z_1, z_2) y el campo vectorial holomorfo $X = \partial_1$. X define una foliación por rectas $L_a = \{z_2 = a\}$ en $\mathbb{C}^2$. El ideal diferencial asociado a esta foliación es el ideal $I = \langle dz_2 \rangle$.

Observación 2.2.5. Las foliaciones regulares de codimensión uno pueden representarse de cualquiera de las siguientes maneras:

1. Una descomposición en hojas como en la definición 2.2.2 dada por subvariedades de codimensión 1.
2. Un subfibrado vectorial integrable $\mathscr{F}$ de T_X de codimensión 1.
3. Una forma diferencial de grado uno, $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$, nunca nula y tal que $\omega \wedge d\omega$ se anula identicamente.

La única equivalencia que no hemos discutido aún es la última. Según las equivalencias ya establecidas, una foliación regular de codimensión uno es equivalente a un ideal diferencial $I \subseteq \Omega_X^\bullet$ generado por un subhaz de línea de Ω_X^1. llamamos a ese haz línea L^{-1}. La inclusión $0 \to L^{-1} \to \Omega_X^1$ puede identificarse con la elección de una sección global $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$. Localmente, la elección de tal ω equivale a dar 1-formas ω_i en un cubrimiento $(U_i)_{i\in I}$ de X de modo que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ para algún cociclo de funciones no nulas $(g_{ij})_{ij}$ que define al haz L. La distribución está, en este caso, dada por el anulador de la forma ω, y el hecho de que ω no se anule corresponde a que el mapa $L^{-1} \to \Omega_X^1$ tenga rango constante (y, por tanto, que L^{-1} sea un subfibrado vectorial). Dos secciones globales ω_1 y $\omega_2 = f\omega_1$, con $f \in \Gamma(\mathscr{O}_X)$, generan el mismo subfibrado en Ω_X^1, por lo que en realidad buscamos una clase $\omega \in \mathbb{P}(H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L))$. La condición de integrabilidad $\omega \wedge d\omega = 0$ equivale a que el ideal I esté cerrado bajo el diferencial de de Rham. En efecto, dado que ω nunca se anula, en cada punto $p \in X$ existe una base de $\Omega_{X,p}^1$ comenzando con ω_p. Por ello, $(d\omega \wedge \omega)_p = 0$ exactamente cuando $(d\omega)_p = \omega_p \wedge \xi_p$ para alguna otra forma diferencial holomorfa ξ. Por consiguiente, $\omega \wedge d\omega = 0$ si y solo si localmente $d\omega = \omega \wedge \xi$, que es lo mismo que el que $I = (\omega)$ sea un ideal diferencial en $\Omega_X^\bullet$.

Observación 2.2.6. Una foliación de dimensión 1 puede representarse mediante una descomposición de hojas por curvas, un ideal $I \subseteq \Omega_X^\bullet$ generado por un haz localmente libre de rango $n-1$ en grado 1 o una campo vectorial holomorfo torcido no nulo $X \in H^0(X, T_X \otimes L)$.. En este caso, la condición de integrabilidad es trivial.

Ejemplo 2.2.7. No existen foliaciones regulares de codimensión 1 en los espacios proyectivos $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, como se verá en 3.3.5. Este ejemplo ilustra que las foliaciones regulares en la geometría compleja son escasas. Por ello, a menudo es necesario abordar la noción más general de foliaciones singulares, que se estudiará en la sección 2.4.

2.3. Subhaces de un haz localmente libre

Una amplia gama de variedades complejas interesantes no admiten foliaciones holomorfas regulares: por ejemplo, el espacio proyectivo complejo. Por lo tanto, cobra importancia estudiar las foliaciones que admiten singularidades. Al definir y trabajar las foliaciones singulares, la correspondencia de 2.2.1 no funciona tan bien como en el caso regular. Antes de profundizar en las definiciones y ejemplos principales, en esta sección repasamos algunos aspectos técnicos sobre subhaces, singularidades y saturaciones de subhaces que necesitaremos en el futuro. A lo largo de esta sección, X denotará una variedad compleja.

Dado un haz coherente $\mathscr{F}$ sobre X, decimos que un punto $p \in X$ es **singular** si $\mathscr{F}$ no es localmente libre en ningún entorno de x. Escribimos $S(\mathscr{F}) \subset X$ para el **lugar singular** de $\mathscr{F}$ que consiste de sus puntos singulares. Resulta que $S(\mathscr{F})$ no es solo un subconjunto sino un subespacio analítico, pues podemos escribirlo localmente como el conjunto de ceros de algunas funciones determinantales (véase [OSS11, Lema 1.1.4]). Si $\mathscr{F} \subset E$ es un subhaz de un haz localmente libre, definimos su **lugar singular** por $\mathrm{Sing}(E, \mathscr{F}) = S(E/\mathscr{F})$. Escribiremos $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ siempre que se pueda dar por entendida la inclusión $\mathscr{F} \subset E$ aunque las nociones aquí definidas dependen de la inclusión.

Proposición 2.3.1. *Sea* E *un haz localmente libre y* $\mathscr{F} \subseteq E$ *un subhaz coherente de* E*, entonces* $S(\mathscr{F}) \subseteq Sing(\mathscr{F})$.

Demostración. Consideremos un punto p que no está en $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ y queremos comprobar que no está en $S(\mathscr{F})$. Sea U el entorno abierto de p donde $E/\mathscr{F}$ es libre. Tenemos una sucesión exacta corta de haces coherentes

$$0 \to \mathscr{F}|_U \to E|_U \to (E/\mathscr{F})|_U \to 0$$

y esta sucesión se parte, ya que el haz de la derecha es libre. Como esta sucesión se parte, $\mathscr{F}|_U$ es un sumando directo de E y, por lo tanto, un módulo proyectivo de $\mathscr{O}_X$, lo que implica que es localmente libre. □

Observación 2.3.2. Nótese que la inclusión inversa $\mathrm{Sing}(\mathscr{F}) \subseteq S(\mathscr{F})$ puede no ser válida, como se puede observar al considerar la inclusión $0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}} \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ dada por $f \mapsto z \cdot f$. Mediante este morfismo, $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ es un subhaz localmente libre de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$, pero su conúcleo no es libre en ninguna vecindad de $0 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.3.3. Dado un campo vectorial holomorfo torcido $X \in H^0(X, T_X \otimes L)$, se define un subhaz $L^{-1} \to T_X$. Como L^{-1} es localmente libre en cada punto, tenemos que $S(L^{-1}) = \emptyset$, pero $\mathrm{Sing}\,(L^{-1})$ consiste en los puntos donde el campo vectorial X se anula, que en general no es vacío.

Sea E un haz localmente libre sobre X. Dado un subhaz coherente $\mathscr{F} \subset E$, definimos su **saturación** $\mathscr{F}^{sat} \subset E$ como el haz dado por $\mathscr{F}^{sat}(U) = \mathscr{F}(U \setminus \mathrm{Sing}\,(\mathscr{F}))$, y decimos que $\mathscr{F}$ está **saturado** si $\mathscr{F} = \mathscr{F}^{sat}$. Se puede observar que si un subhaz $\mathscr{F} \subset E$ está saturado, entonces es un haz reflexivo. De hecho, dado que $\mathscr{F}$ es un subhaz de un haz localmente libre, está libre de torsión y, por lo tanto, la función natural $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^{**}$ es inyectiva. Por lo tanto, el cociente $\mathscr{F}^{**}/\mathscr{F}$ es un subhaz de $E/\mathscr{F}$ libre de torsión. Como $\mathscr{F}^{**}/\mathscr{F}$ siempre es torsión, tenemos que $\mathscr{F}^{**} \simeq \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ es reflexivo.

Un haz coherente A sobre X es **libre de torsión** si, dados $f \in O_X(U)$ y $s \in A(U)$ tales que $fs = 0$, entonces $f = 0$ o $s = 0$. Resulta que si A es un haz libre de torsión, entonces $\mathrm{codim}(S(A)) \geq 2$., véase [OSS11, Cor. 1.1.8]. Los haces saturados y libres de torsión están íntimamente relacionados, como se describe en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4. *Sea* $\mathscr{F} \subseteq E$ *una inclusión de haces con* E *localmente libre.* $\mathscr{F}$ *es un subhaz saturado si y solo si el haz cociente* $E/\mathscr{F}$ *es un haz libre de torsión.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathscr{F}$ es un subhaz saturado con el conjunto singular $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ y tomemos una sección $s \in \Gamma(U, E/\mathscr{F})$ tal que $fs = 0$ para una función $f \in \mathscr{O}_X(U)$ distinta de cero. Como $E/\mathscr{F}$ es localmente libre fuera del lugar geométrico singular $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$, y los haces localmente libres son libres de torsión, obtenemos que $fs|_{U-\mathrm{Sing}(\mathscr{F})} = 0$ implica que $s|_{U-\mathrm{Sing}(\mathscr{F})} = 0$ y luego $\mathrm{supp}(s) \subseteq \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$. Ahora podemos tomar un punto $p \in \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ y un entorno abierto V de p dentro de U tal que $s = [v] \in E(V)/\mathscr{F}(V)$ con $v \in E(V)$. En este conjunto abierto tenemos que $v|_{V-\mathrm{Sing}(\mathscr{F})} \in \mathscr{F}(V - \mathrm{Sing}(\mathscr{F}))$ y como $\mathscr{F}$ es un subhaz saturado obtenemos que $v \in \mathscr{F}(V)$. Como esto es válido para todo $p \in \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$, tenemos que $s = 0$.

Supongamos ahora que tenemos $E/\mathscr{F}$ libre de torsión y escogemos una sección v de E en un conjunto abierto U tal que $v|_{U-\mathrm{Sing}(\mathscr{F})} \in \mathscr{F}(U - \mathrm{Sing}(\mathscr{F}))$. Sabemos que el conjunto singular $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$ es de codimensión al menos 2. Debido a esto, existe

una función holomorfa no nula en U tal que $\mathrm{Sing}(\mathscr{F}) \subseteq \{f = 0\}$ y luego tomando la clase de v en $E/\mathscr{F}$ vemos que $f[v] = 0 \in E/\mathscr{F}(U)$. Como $E/\mathscr{F}(U)$ es libre de torsión obtenemos que $[v] = 0$ y por lo tanto que $v \in \mathscr{F}(U)$,, lo que demuestra que $\mathscr{F}$ está saturado. □

Corolario 2.3.5. *Si $\mathscr{F} \subset E$ es un subhaz saturado de un haz localmente libre E, entonces $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ tiene codimensión al menos 2 en X.*

Observación 2.3.6. Fuera del lugar singular de un subhaz coherente $\mathscr{F}$ tenemos que $\mathscr{F}$ coincide por definición con su saturación y por lo tanto el lugar singular de $\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}$ está contenido en el lugar singular de $\mathscr{F}$. Sin embargo, la otra inclusión no es válida en general. Por ejemplo, considérese la variedad compleja $\mathbb{C}^2$ y el subhaz $\mathscr{F} = \langle z_1 \partial_{z_1} \rangle$ de $T_{\mathbb{C}^2}$ donde $\partial_{z_1} \in T_{\mathbb{C}^2}$ es el campo vectorial no nulo en $\mathbb{C}^2$ obtenido como la derivación con respecto a la primera coordenada z_1. En este caso, $\mathrm{Sing}(\mathscr{F}) = \{z_1 = 0\}$ es de codimensión 1 y, por lo tanto, el lugar geométrico singular de $\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}$ es estrictamente menor que $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$.

Ejemplo 2.3.7. Sea $X \in H^0(T_X \otimes L)$ un campo vectorial twisteado en una variedad compleja X y $L^{-1} \to T_X$ la inclusión de L^{-1} como subhaz de T_X inducida por X como en 2.3.3. En este caso, el subhaz está saturado precisamente cuando X tiene ceros de codimensión al menos 2 en X. De hecho, basta con observar que si X tiene ceros de codimensión al menos 2, define un subhaz saturado de T_X. Sea $S = \mathrm{Zeros}(X)$ y $U \subseteq X$ un subconjunto abierto. Como $X \in H^0(X, T_X \otimes L)$ podemos representar X por $(U_i)_{i\in I}$ una cobertura abierta de X y una familia de campos vectoriales X_i en cada U_i tales que $X_i = \lambda_{ij} X_j$ en cada $U_{ij} = U_i \cap U_j$ con $\lambda_{ij} \in \mathscr{O}_X(U_{ij})^*$ funciones no nulas tales que $(\lambda_{ij})_{ij}$ es el ciclo que representa a L como un elemento en $H^0(X, \mathscr{O}_X^*)$. En estas condiciones, podemos elegir un $i \in I$ y un campo vectorial $V \in T_X(U \cap U_i \setminus S)$ tal que $V = fX_i|_{U\cap U_i \setminus S}$ sea un múltiplo de X_i en $U \cap U_i \setminus S$. Como T_X es un haz localmente libre, se satisface que la restricción $T_X(U) \to T_X(U \setminus Y)$ es biyectiva para cada subvariedad analítica cerrada codimensionada 2 de U. En particular, solo hay una extensión de V a $U \cap U_i$ y esta extensión es fX_i. Esto muestra que las secciones del subhaz generado por X en $U \setminus S$ se extienden únicamente a secciones del subhaz generado por X en todo el subconjunto abierto U y, por lo tanto, X define un subhaz saturado de T_X.

Dado un subhaz $\mathscr{F} \subset E$ de un haz localmente libre, su anulador $\mathscr{F}^\circ \subset E^*$ está dado por las secciones $\phi \in E^*$ tales que $\phi(s) = 0$ para todo $s \in \mathscr{F}$, y está claramente saturado por definición: si $\phi(s) = 0$ fuera de $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ entonces $\phi(s) = 0$. Bajo la identificación canónica $E \cong (E^*)^*$, tenemos $\mathscr{F}^{\mathrm{sat}} = (\mathscr{F}^\circ)^\circ$, pues claramente concuerdan fuera de $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ y ambos son haces saturados. Por lo tanto, la operación de tomar el anulador se limita a una correspondencia biunívoca entre subhaces saturados de E y de E^*. Los subhaces no saturados no pueden estar en la imagen de esta operación de dualización. Toda esta información se puede visualizar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{ Subhaces de } E \ \} & & \{ \text{ Subhaces de } E^* \ \} \\ \uparrow & \nearrow\!\!\searrow & \uparrow \\ \{ \text{ Subhaces saturados de } E \ \} & \xleftrightarrow{\cong} & \{ \text{ Subhaces saturados de } E^* \ \} \end{array}$$

Nuestro objetivo en la siguiente sección será describir esta dualidad entre subhaces saturados de E y E^* en el contexto de las foliaciones.

2.4. Foliaciones singulares

En esta sección estudiaremos uno de los principales objetos de estudio de esta tesis: las foliaciones singulares. Bajo nuestra convención, una foliación singular estará dada por un subhaz coherente de T_X involutivo. Explicaremos a continuación las definiciones básicas relacionadas con esto, algunos ejemplos y lo vincularemos con la descomposición usual en hojas. También haremos foco en la dualidad entre foliaciones en este sentido y subhaces coherentes del haz cotangente Ω^1_X.

Recordemos que X es una variedad compleja. Por una **distribución singular** $D \subset T_X$ entendemos simplemente un subhaz coherente, que puede no ser saturado. Una **foliación singular** $\mathscr{F} \subset T_X$ es una distribución singular que es cerrada bajo el corchete de Lie de campos vectoriales. Se dice que una foliación es **saturada** si lo es también como subhaz, y su lugar singular $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ es en ese caso el de dicho subhaz. El **haz normal** $N_{\mathscr{F}}$ es el cociente $T_X/\mathscr{F}$.

Ejemplo 2.4.1. Consideremos el subhaz del fibrado tangente holomorfo de $\mathbb{C}^3$ generado por los campos vectoriales holomorfos $\{x_1(-2x_2\partial_2 - x_3\partial_3), x_2(2x_1\partial_1 + 2x_3\partial_3), x_3(x_1\partial_1 - 2x_2\partial_2)\}$. Este subhaz es involutivo y define una foliación holomorfa de rango 2. Sus singularidades están dadas por la subvariedad analítica

$$S = \{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_1 = x_3 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\}.$$

Esta foliación no está saturada aunque su subvariedad singular tiene codimensión 2. La saturación está dada por el subhaz

$$\mathscr{F}^{\mathrm{sat}} = \langle -2x_2\partial_2 - x_3\partial_3, \quad 2x_1\partial_1 + 2x_3\partial_3, \quad x_1\partial_1 - 2x_2\partial_2 \rangle.$$

Lema 2.4.2. *Sea X una variedad compleja y $Z \subseteq X$ una subvariedad analítica de codimensión al menos 2. Sea $\mathscr{F}$ una foliación regular sobre $X - Z$. Entonces existe una única foliación singular saturada sobre X que se restringe a $\mathscr{F}$ en $X - Z$.*

Demostración. Sean X, Z y $\mathscr{F}$ como en el enunciado. Entonces, $i_*(\mathscr{F})$ es un subhaz coherente sobre X (2.1.3). Además, $i_*(\mathscr{F})(U) = \mathscr{F}(U \setminus Z) \subseteq T_{X\setminus Z}(U \setminus Z)$, pero dado que Z tiene codimensión 2, cada campo vectorial en $U \setminus Z$ se extiende de forma única a un campo en U. Debido a esto, la restricción $T_X(U) \to T_{X\setminus Z}(U \setminus Z)$ es un isomorfismo y $i_*(\mathscr{F})$ es isomorfo al subhaz de T_X que llamaremos $\mathscr{G}$, definido por

$$\mathscr{G}(U) = \{v \in T_X(U) \mid v|_{U\setminus Z} \in \mathscr{F}(U \setminus Z)\}.$$

Dado que $\mathscr{F}$ define una distribución regular en $X \setminus Z$, tenemos que $\mathrm{Sing}(\mathscr{G}) \subseteq Z$, por lo que $\mathscr{G}$ es un subhaz de T_X con singularidades en un conjunto $S \subseteq Z$. El subhaz $\mathscr{G}$ es saturado como subhaz de T_X, ya que cualquier sección de $\mathscr{G}$ definida en $U \setminus Z$ se extiende de forma única a una sección en toda U, para cada subconjunto abierto de U. También, $\mathscr{G}$ es integrable, pues para cualesquiera par de vectores $v, w \in \mathcal{G}(U)$ tenemos que $[v, w]|_{U\setminus Z} = [z|_{U\setminus Z}, w|_{U\setminus Z}] \in \mathscr{F}(U \setminus Z)$ dado que F es integrable y entonces $[v, w] \in \mathcal{G}(U)$. Esto prueba que $\mathcal{G}$ define una foliación singular saturada en X. Por último, como las secciones de $T_{X\setminus Z}$ se extienden de manera única a secciones de T_X en cada abierto de X no pueden haber dos extensiones saturadas de $\mathscr{F}$ a subhaces de T_X. □

Sea X una variedad compleja y consideremos ahora el conjunto de pares $\{(Z, \mathscr{F})\}$, donde $Z \subseteq X$ es una subvariedad analítica de codimensión al menos 2, y $\mathscr{F}$ es una foliación regular en $X \setminus Z$. Podemos definir la siguiente relación de equivalencia en este conjunto:

$$(Z, \mathscr{F}) \sim (Z', \mathscr{F}') \quad \iff \quad \mathscr{F}\big|_{X\setminus(Z\cup Z')} = \mathscr{F}'\big|_{X\setminus(Z\cup Z')}.$$

El siguiente lema proporciona una forma alternativa y equivalente de definir foliaciones singulares saturadas como foliaciones regulares en un subconjunto abierto de X.

Lema 2.4.3. *Sea X una variedad compleja. Existe una biyección entre las clases de equivalencia de la relación de equivalencia definida anteriormente y el conjunto de foliaciones singulares saturadas en X.*

Demostración. Debido al lema 2.4.2, cada par $(Z, \mathscr{F})$, donde $Z \subseteq X$ es una subvariedad analítica de codimensión al menos 2, y $\mathscr{F}$ es una foliación regular en $X \setminus Z$, induce una foliación singular saturada en X. Debemos demostrar que dos pares $(Z, \mathscr{F})$ y $(Z', \mathscr{F}')$ inducen la misma foliación singular saturada siempre que

$$\mathscr{F}\big|_{X\setminus(Z\cup Z')} = \mathscr{F}'\big|_{X\setminus(Z\cup Z')}.$$

Sea $\mathscr{G}$ la foliación singular saturada en X inducida por $\mathscr{F}$, y $\mathscr{G}'$ la inducida por $\mathscr{F}'$. Dado que

$$\mathscr{G}\big|_{X\setminus(Z\cup Z')} = \mathscr{F}\big|_{X\setminus(Z\cup Z')} = \mathscr{F}'\big|_{X\setminus(Z\cup Z')} = \mathscr{G}'\big|_{X\setminus(Z\cup Z')},$$

se concluye que $\mathscr{G}$ y $\mathscr{G}'$ restringen a la misma foliación regular en $X \setminus (Z \cup Z')$. Sea $w \in \mathscr{G}(U) = \{v \in T_X(U) \mid v|_{X\setminus Z} \in \mathscr{F}(U \setminus Z)\}$. Sabemos que

$$w|_{X\setminus(Z\cup Z')} \in \mathscr{F}(U \setminus (Z \cup Z')) = \mathscr{F}'(U \setminus (Z \cup Z')).$$

Dado que $\mathscr{F}'$ es un haz localmente libre sobre $U \setminus Z'$, también es *normal*, lo que significa que para cada subconjunto cerrado $Y \subseteq U$ de codimensión ≥ 2, la restricción

$$\mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}'(U \setminus Y)$$

es biyectiva ([Har80, Prop. 1.6]). Por lo tanto, dado que Z tiene codimensión al menos 2, $w|_{X\setminus(Z\cup Z')}$ se extiende de forma única a una sección de $\mathscr{F}'$ en $U \setminus Z'$. Esto implica que

$$w|_{X\setminus Z'} \in \mathscr{F}'(U \setminus Z'),$$

por lo que $w \in \mathscr{G}'(U)$. En consecuencia, $\mathscr{G}(U) = \mathscr{G}'(U)$, y las foliaciones singulares saturadas inducidas por $(Z, \mathscr{F})$ y $(Z', \mathscr{F}')$ coinciden.

Por supuesto, cualquier foliación singular saturada $\mathscr{F}$ sobre X se restringe a una foliación regular en $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$. . Nos queda nada más mostrar que estos dos procedimientos son inversos el uno del otro. Sea $(Z, \mathscr{F})$ un par como en el enunciado. La foliación singular saturada inducida $\mathcal{G}$ se va a restringir a $\mathscr{F}$ sobre $X \setminus Z$ lo cual prueba que es regular fuera de Z. Entonces $S = \mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \subseteq Z$. Tenemos que mostrar que $(Z, \mathscr{F}) \sim (S, \mathcal{G}|_{X\setminus S})$ pero esto es claro porque $Z \cup S = Z$ y $\mathcal{G}|_{X\setminus Z} = \mathscr{F}$. Esto termina la demostración. □

Observación 2.4.4. El lema anterior nos permite definir una foliación singular saturada como una foliación regular $\mathscr{F}$ definida fuera de una subvariedad analítica de codimensión 2 en X. Sin embargo, debe notarse que al definir una foliación de esta forma, es posible que la foliación singular inducida en toda la variedad X tenga singularidades que estén estrictamente contenidas en Z.

En particular, si tenemos una foliación singular $\mathscr{F}$, entonces existe una descomposición en hojas en $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$, y viceversa: dado un subconjunto $Z \subset X$, una subvariedad analítica cerrada de codimensión 2, y una descomposición en hojas en $X \setminus Z$, se puede obtener una foliación singular saturada en X. Además de las hojas de dimensión máxima, también es posible definir hojas en el lugar singular. Concretamente, dado que $\mathscr{F} \subset TX$ es una foliación singular (no necesariamente saturada), X posee una partición única $\mathscr{L} = \{L_\alpha\}$ en subvariedades conexas e integrales de X, véase [Nag66, Thm. 1].

Dado $\mathscr{F} \subset TX$ una foliación singular, su anulador es un ideal diferencial $I \subset \Omega_X$ generado en grado 1 por $I_1 = \mathscr{F}^\circ$. El subhaz I_1 es un subhaz saturado de Ω^1_X, aunque puede que no sea localmente libre. Sea $I \subset \Omega_X$ el ideal generado por I_1, que será un ideal diferencial ya que $\mathscr{F}$ es involutiva. Sabemos que si I_1 es localmente libre, entonces, por la sección anterior, I proviene de una foliación regular. En general, si I_1 es solo un subhaz coherente, entonces $\mathscr{F} = I_1^\circ$ es una foliación singular saturada, y además, $I_1 = \mathscr{F}^\circ$ si y solo si I_1 es saturado.

Nótese que no toda foliación singular puede recuperarse como el haz anulador de un subhaz de Ω^1_X; solo las saturadas pueden obtenerse de este modo. Por lo tanto, al incorporar la integrabilidad en el diagrama de la sección anterior, se tienen los siguientes tres conceptos diferentes, pero estrechamente relacionados:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ Foliaciones singulares } \mathscr{F} \} & & \{\text{Ideales diferenciales generados por 1-formas }\} \\ \uparrow & \nearrow\!\!\searrow & \uparrow \\ \{\text{ Foliaciones singulares saturadas } \mathscr{F} \} & \xleftrightarrow{\cong} & \left\{ \begin{array}{c} \text{ideales diferenciales generados} \\ \text{por } I_1 \text{ saturado y coherente} \end{array} \right\} \end{array}$$

La mayor parte de la literatura en teoría de foliaciones trabaja con foliaciones saturadas, donde la dualidad previamente discutida permite que se trabaje indistintamente con la foliación definida por campos de vectores o por formas sin ninguna ambiguedad. En esta tesis, sin embargo, estaremos interesados en foliaciones no saturadas dado que la foliación simpléctica de una variedad de Poisson que será nuestro principal objeto de estudio en los próximos capítulos es generalmente una foliación no saturada.

2.5. Foliaciones y formas diferenciales

En la sección anterior vimos que una foliación singular saturada puede estar dada por un subhaz de T_X o por un subhaz de Ω^1_X. Aquí veremos que podemos considerar las foliaciones saturadas como dadas por el anulador de una única forma p twisteada y mostraremos cómo comprender el lugar singular de la foliación a partir de dicha forma. Comenzamos con un lema simple en el caso regular.

Lema 2.5.1. *Sea $\mathscr{F}$ una foliación regular en una variedad compleja X de codimensión p. Entonces existe un fibrado de línea L sobre X y una p-forma diferencial twisteada no nula*

$\omega \in H^0(X, \Omega^p_X \otimes L)$ *tal que* $\mathscr{F}(U) = Ann(\omega)(U) = \{Z \in T_X(U) | \ i_Z(\omega) = 0 \in \Omega^{p-1}_X(U)\}$ *y* ω *es localmente descomponible.*

Demostración. Comenzamos considerando el morfismo $\pi : T_X \to N_{\mathscr{F}}$ y el morfismo inducido $\Lambda\pi : \Lambda^p T_X \to \Lambda^p N_{\mathscr{F}}$ dados por $\Lambda\pi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \pi(v_1) \wedge \cdots \wedge \pi(v_p)$. Sea $L = \Lambda^p N_{\mathscr{F}}$ que es un fibrado de línea sobre X y consideremos la transpuesta de $\Lambda\pi$ que define una función $0 \to L^* \to \Omega^p_X$ que corresponde a una sección global $\omega \in H^0(X, \Omega^p_X \otimes L)$. Por construcción, si $I_1 = (N_{\mathscr{F}})^* \subseteq \Omega^1_X$ y U es un subconjunto abierto de X donde I_1 es libre con base $\{\omega_1, \dots \omega_p\}$ entonces $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p$ lo que muestra que ω es localmente descomponible. También tenemos que, $Z \in \text{Ann}(\omega)(U) \iff \omega(Z \wedge Z_2 \wedge \cdots \wedge Z_p) = 0$ para todos los campos vectoriales $Z_2, \dots Z_p \in T_X(U)$ lo cual sucede si y solo si $\omega_1(Z) = \omega_2(Z) = \dots \omega_p(Z) = 0 \iff Z \in \text{Ann}(I_1) = \mathscr{F}$. Finalmente, ω no se anula ya que $\ker(\omega_x) = F_x$ siempre es un subespacio de dimensión $n - p$ dentro de $T_{X,x}$. □

La proposición anterior muestra que una foliación regular puede describirse como el haz anulador de una p-forma diferencial twisteada. Llamaremos $\Lambda^p(N_{\mathscr{F}}) = L$ al **grado** de la foliación $\mathscr{F}$.

Definición 2.5.2. Sea $\omega \in H^0(X, \Omega^p_X \otimes L)$ una forma diferencial twisteada y $S = \text{Zeros}(\omega) \subseteq X$. Decimos que ω es localmente descomponible de su lugar singular (LDS) si para cada $x \in X \setminus S$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ y un conjunto de 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Omega^1_X(U)$ tales que $\omega|_U = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p$. Se dice que una p-forma LDS ω es integrable si para cada subconjunto abierto U como el anterior las formas $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ generan un ideal diferencial de $\Omega^\bullet_X(U)$.

Proposición 2.5.3. *Sea* $\mathscr{F}$ *una foliación singular saturada en una variedad compleja* X *de codimensión* p*. Entonces existen un fibrado de línea* L *y una p-forma diferencial twisteada* $\omega \in H^0(X, \Omega^p_X \otimes L)$ *tal que* $\mathscr{F}(U) = Ann(\omega)(U)$ *y* ω *es LDS e integrable.*

Demostración. Procedemos de la misma forma que en el caso regular. Para esto, consideramos la función de proyección $\pi : T_X \to N_{\mathscr{F}}$ y el morfismo inducido $\Lambda\pi : \Lambda^p T_X \to \Lambda^p N_{\mathscr{F}}$. Al dualizar este morfismo obtenemos una función $(\Lambda^p N_{\mathscr{F}})^* \to \Omega^p_X$ y por lo tanto una sección ω de $\Omega^p_X \otimes L$ donde $L = ((\Lambda^p N_{\mathscr{F}})^*)^*$. Observe que como $(\Lambda^p N_{\mathscr{F}})^*$ es el dual de un haz coherente, es reflexivo y como los haces reflexivos de rango uno son localmente libres, es un fibrado de línea ([OSS11] capítulo 2, lema 1.1.15) y en particular $L = ((\Lambda^p N_{\mathscr{F}})^*)^*$ es un fibrado de línea. Observamos que ω se anula exactamente en los puntos donde $N_{\mathscr{F}}$ no es de rango p, que es el lugar singular de $\mathscr{F}$. Dado que $\mathscr{F}$ es regular fuera de su lugar singular, por el lema anterior obtenemos que ω es una forma LDS y, dado que $\mathscr{F}$ es una distribución singular saturada integrable, ω es integrable. Finalmente, dado que $\text{Ann}(\omega)$ es un subhaz saturado de T_X que coincide con $\mathscr{F}$ fuera del lugar singular de $\mathscr{F}$, debe coincidir con la saturación de $\mathscr{F}$. Por lo tanto, $\text{Ann}(\omega) = \mathscr{F}$. □

Observación 2.5.4. La forma twisteada ω que obtenemos mediante el proceso anterior tendrá localmente la forma $\omega = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p$ para algunas 1-formas twisteadas η_i y la condición de integrabilidad en la forma es la siguiente:

$$d\eta_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-k} \eta_j = 0 \qquad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n-k\}.$$

Si la foliación $\mathscr{F}$ es de codimensión 1, la condición de integrabilidad en la forma ω es la siguiente:

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

Además de las condiciones de integrabilidad en la p-forma torcida ω obtenida mediante este proceso, existen algunas condiciones que se derivan de su descomponibilidad local como producto de wedge de 1-formas, conocidas como condiciones de Plücker. Estas condiciones pueden usarse para describir cuándo una p-forma es una forma LDS. Para más información sobre la integrabilidad y las condiciones de Plücker, véase [MQ, Sec. 2]. Para más detalles sobre las formas LDS y las formas integrables de LDS, véase [dM00].

Definición 2.5.5. Sea X una variedad compleja. Decimos que una 1-forma holomorfa twisteada no nula $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X \otimes L)$ **tiene contenido** si existe otra 1-forma holomorfa twisteada $\omega' \in \Gamma(X, \Omega^1_X \otimes L')$ con $L' \neq L$ y una sección global s del fibrado de línea $L \otimes (L')^{-1}$ tal que $\omega = s\omega'$.

Si $\omega = s\omega'$ es una forma con contenido, entonces los haces anuladores de ω y ω' son los mismos. Además, dada una foliación saturada de codimensión 1, descrita como el haz anulador de una 1-forma holomorfa torcida ω sin contenido, el conjunto de singularidades S se da como el conjunto de ceros $\{\omega = 0\}$. Este conjunto de ceros también puede usarse como criterio para detectar formas holomorfas torcidas con contenido, como se observa en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.6. *Sea X una variedad compleja compacta. Una 1-forma holomorfa twisteada ω tiene contenido si y solo si su conjunto de ceros es de codimensión 1.*

Demostración. Si $\omega = s\omega'$ tiene contenido, entonces es evidente que zeros(ω) contiene zeros(s), que es una subvariedad analítica de codimensión uno, ya que X es una variedad compleja compacta y s es una sección de un fibrado de línea no trivial. Para demostrar la otra implicación, supongamos que $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X \otimes L)$ tiene ceros de codimensión uno. Dado que $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X \otimes L)$, existe un cubrimiento $\{U_i\}$ por subconjuntos abiertos de X tal que, en cada uno de estos subconjuntos abiertos, tenemos la forma ω_i y en las intersecciones $\omega_j = g_{ij}\omega_i$ para g_{ij}, el cociclo que define L. En cada uno de estos subconjuntos abiertos, escribimos $\omega_i = \omega|_{U_i} = a_{i1}dx_1 + \ldots a_{in}dx_n$ para coordenadas holomorfas $(x_1, \ldots x_n)$ en U_i. Como zeros(ω) tiene codimensión uno, existe una función holomorfa h_i en cada U_i tal que zeros$(h_i) \subseteq$ zeros(ω). En particular, cada a_{ij} se anula a lo largo de la subvariedad zeros(h_i) y, por lo tanto, $a_{ij} = h_i b_{ij}$. Ahora considere las 1-formas holomorfas $\eta_i = \sum_j b_{ij}dx_j$ en cada subconjunto abierto U_i y las funciones h_i que satisfacen que $\omega_i = h_i\eta_i$. Como ω era una 1-forma global holomorfa torcida, tenemos que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ en cada intersección de los subconjuntos afines abiertos y que $(g_{ij}) \in H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$ es un cociclo de funciones que representan el fibrado de línea L. Por lo tanto, tenemos que $\eta_i = \frac{h_i}{h_j}\lambda_{ij}\eta_j = f_{ij}\eta_j$ y entonces $(\eta_i)_i$ son formas holomorfas en cada subconjunto abierto $\{U_i\}$ tales que $\eta_i = f_{ij}\eta_j$ para un cociclo (f_{ij}) que representa otro fibrado de línea L', lo que significa que $(\eta)_i$ define una sección global de $\Omega^1_X \otimes L'$.

La igualdad $\omega_i = h_i\eta_i$ se convierte globalmente en la igualdad $\omega = s\eta$ y tenemos que ω tiene contenido. □

Ejemplo 2.5.7. Consideremos la foliación descrita por el subhaz anulador de la 1-forma integrable en $\mathbb{C}^3$

$$\omega = xdx + y^3z^2(1+yz)dy + (-\frac{1}{4}y^4 + \frac{2}{5}zy^5)dz.$$

Entonces, el lugar singular de ω viene dado por el espacio analítico

$$S = \{x = y^3 = 0\} \cup \{x = y^4 = z = 0\}$$

que es una recta no reducida con un punto embebido. El haz anulador de esta forma nos proporciona un ejemplo de un subhaz saturado de T_X tal que su lugar singular es un espacio analítico no reducido.

Ejemplo 2.5.8. En el espacio proyectivo, los posibles grados de una foliación de codimensión 1 dada están indexados por números enteros positivos. Se sabe que una 1-forma integrable $\omega \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ puede levantarse a una 1-forma $\widetilde{\omega} \in \Gamma(\mathbb{C}^{n+1}, \Omega^1_{\mathbb{C}^{n+1}})$ con coeficientes dados por polinomios homogéneos de grado $d-1$. La 1-forma $\widetilde{\omega}$ es invariante por el flujo del campo vectorial de Euler, ya que desciende a una 1-forma en $\mathbb{P}^n$ y satisface la misma condición de integrabilidad que es la ecuación $\omega \wedge d\omega = 0$. Bajo esta identificación, las hojas de la foliación inducida por ω son las proyecciones a $\mathbb{P}^n$ de las hojas inducidas en $\mathbb{C}^{n+1}$ por $\widetilde{\omega}$. Debido a estas consideraciones, el espacio de foliaciones de codimensión 1 y grado d en $\mathbb{P}^n$ puede identificarse con la variedad proyectiva dada por

$$\widetilde{\mathscr{F}}(n,d) = \{\omega \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))) \quad | \quad \omega \wedge d\omega = 0\}$$

Hay un morfismo

$$G : \bigcup_{1\leq k\leq d} \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d-k))) \times \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(k))) \to \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)))$$

definido por la asignación $G(\omega, s) = s \cdot \omega$. La imagen de este mapa está dada por las 1-formas con contenido. Como el dominio de G es compacto, las 1-formas con contenido forman un subconjunto cerrado de $\widetilde{\mathscr{F}}(n,d)$. Debido a esto, las foliaciones de grado d saturado forman una variedad cuasiproyectiva $\mathscr{F}(n,d)$ que se conoce como el **espacio de móduli de foliaciones** de grado d y codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$.

$$\mathscr{F}(n,d) = \{\omega \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))) \quad | \quad \omega \wedge d\omega = 0 \quad \text{codim}(\text{Zeros}(\omega)) \geq 2\}$$

El espacio de móduli de foliaciones en $\mathbb{P}^3$ de grado 4 y codimensión 1 fue estudiado por Cerveau y Lins Neto en [CLN96] y tiene 6 componentes irreducibles.

Ejemplo 2.5.9. (Foliaciones logarítmicas y racionales) Dados enteros positivos n, d y una partición de d como $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ para λ_i enteros positivos, las foliaciones

logarítmicas de tipo $L(\lambda_1, \dots \lambda_k)$ sobre $\mathbb{P}^n$ son las representadas por una 1-forma sin contenido $\widetilde{\omega}$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que

$$\widetilde{\omega} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_1 f_2 \dots \widehat{f_i} \dots f_k df_i$$

para algunos números complejos $(a_1, \dots a_k)$ tales que $\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i = 0$ y para algunos polinomios homogéneos f_i, cada uno de grado λ_i. Por ejemplo, una foliación logarítmica de grado 4 en $\mathbb{P}^3$ de tipo $L(1,1,2)$ corresponde a una forma $\widetilde{\omega} = a_1 f_2 f_3 df_1 + a_2 f_1 f_3 df_2 + a_3 f_1 f_2 df_3$ para algunos polinomios f_1, f_2 de grado 1, f_3 de grado 2, y algunos números complejos a_1, a_2, a_3 tales que $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$. Las foliaciones logarítmicas que corresponden a una partición de d usando solo $k = 2$ enteros se llaman **foliaciones racionales**

3. Residuos de Baum-Bott para foliaciones

En este capítulo describiremos la construcción de residuos de Baum y Bott en la homología singular del lugar singular de una foliación saturada. Estos residuos se asocian a las clases características del haz normal de la foliación, por lo que comenzamos con una revisión de la teoría de clases características de Chern-Weil.

3.1. Clases características de fibrados vectoriales

En esta sección discutiremos las clases de Chern de fibrados vectoriales complejos. Sea X una variedad compleja y $E \to X$ un fibrado vectorial complejo. Denotaremos por $L \to X$ un fibrado de línea holomorfo sobre X. Recordemos que todo fibrado de línea holomorfo define un elemento de $H^1(X, \mathscr{O}_X^\times) = \mathrm{Pic}(X)$.

Definición 3.1.1. La sucesión exacta larga en cohomología asociada a la sucesión exacta corta de haces sobre X

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X^\times \to 0$$

nos proporciona una función $c_1 : H^1(X, \mathscr{O}_X^\times) \to H^2(X, \mathbb{Z})$. La imagen $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ es la **primera clase de Chern** de L.

Para explicar la construcción de clases Chern de grados más altos primero recordamos que en cualquier variedad compleja X de dimensión n el fibrado tangente holomorfo tiene un fibrado vectorial subyacente $\mathscr{C}^\infty$ de dimensión $2n$ que denotamos por $T_{\mathbb{R}}X$. Denotamos por $\tau = T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$ la complexificación de $T_{\mathbb{R}}X$ y definimos $\mathscr{A}_X^i$ como el haz de $\mathscr{C}^\infty$ i-formas diferenciales que toman valores en $\mathbb{C}$, lo que significa $\mathscr{A}_X^i = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})}(\tau, \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{C}))$. Una **conexión** en E es una función $\mathscr{C}^\infty$

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \mathscr{A}_X^1)$$

que es $\mathbb{C}-$lineal y satisface

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

Podemos extender las conexiones a las funciones $d_\nabla : \mathscr{A}_X^i \otimes \Gamma(E) \to \mathscr{A}_X^{i+1} \otimes \Gamma(E)$ considerando

$$d_\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^{|\omega|}\omega\nabla s$$

y de esta manera obtenemos que d_∇^2 es un mapa $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{C})-$lineal que es inducido por una sección del haz $\mathscr{A}_X^2 \otimes \mathrm{End}(E)$. A esta sección la llamamos la **matriz de curvatura** de ∇. Una conexión es **playa** si su curvatura es nula.

En un subconjunto abierto de X que es una trivialización de E la matriz de curvatura de ∇ tiene la siguiente presentación: elija un marco $\{e_1, \ldots, e_r\}$ para E y sea

$\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij} \otimes e_j$. Entonces,

$$d^2_\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^{r} (d\theta_{ij} - \sum_{k=1}^{r} \theta_{ik} \wedge \theta_{kj}) \otimes e_j = \sum_j k_{ij} \otimes e_j.$$

La matriz de curvatura está representada en este subconjunto abierto por la matriz de tamaño $r \times r$ de 2-formas $(k_{ij})_{ij}$. Tras cambiar la trivialización elegida, observamos que la matriz de curvatura cambia su representante por conjugación. Por ello, los coeficientes del polinomio característico de $(k_{ij})_{ij}$ son 2i-formas bien definidas en todo X, ya que son independientes de la trivialización elegida, al ser invariantes por conjugación. Entonces escribimos

$$\det(t(k_{ij}) + Id) = 1 + t\sigma_1(\nabla) + t^2\sigma_2(\nabla) + \dots t^n\sigma_n(\nabla)$$

donde $\sigma_i(\nabla) \in \Gamma(X, \mathscr{A}_X^{2i})$ son 2i-formas bien definidas que solo dependen de la elección de conexión en E.

Teorema 3.1.2. *Las formas $\sigma_i(\nabla)$ descriptas arriba son 2i—formas en X bien definidas y la clase de cohomología $[\sigma_i(\nabla)] \in H^{2i}_{dR}(X, \mathbb{C})$ es independiente de la conexión ∇ elegida.*

Demostración. Para una prueba detallada ver [GH94], página 403. □

Definición 3.1.3. Definimos la i—ésima **clase de Chern** del fibrado vectorial $E \to X$ como la clase de cohomología

$$c_i(E) = \frac{\sqrt{-1}^i}{(2\pi)^i}[\sigma_i(\nabla)] \in H^{2i}(X, \mathbb{C}).$$

La clase

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots c_r(E)$$

se llama la **clase total de Chern** de E.

Al teorema de arriba nos referiremos como el teorema de Chern-Weil. Las clases $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{C})$ satisfacen las siguientes propiedades

1. $c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$ para toda $f : X \to Y$

2. $c_i(E) = 0$ si $i >$ rango(E).

3. $c(E_1)c(E_3) = c(E_2)$ siempre que

   $$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$$

   sea una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales.

4. $c_1(L)$ coincide con la primera clase de Chern de fibrados de línea definida en 3.1.1.

Debido al factor $\frac{\sqrt{-1}^i}{(2\pi)^i}$ introducido en la definición de las clases de Chern resulta que las clases $c_i(E)$ en realidad se encuentran en la imagen de $H^{2i}(X,\mathbb{Z}) \to H^{2i}(X,\mathbb{C})$. Estas clases coinciden con muchas otras definiciones de clases de Chern y, de hecho, existe una única secuencia de funciones $c_1, c_2, c_3, \ldots$ que asigna a cada fibrado vectorial complejo $E \to X$ sobre cualquier variedad compleja X una clase $c_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ y satisface las cuatro propiedades anteriores. Para más información sobre este enfoque axiomático de las clases de Chern basado en sus propiedades, véase [Gro68].

Dado $E \to X$ un fibrado vectorial complejo de rango r sobre una variedad compleja X de dimensión n, podemos asignar un anillo característico a E dentro de $H^\bullet(X,\mathbb{C})$ utilizando sus clases de Chern. Para cada polinomio homogéneo simétrico φ de grado $l \leq n$ en las variables $X_1, X_2, \ldots, X_r$, expresamos $\varphi = \widetilde{\varphi}(s_1, s_2, \ldots, s_l)$ como un polinomio sobre los primeros l polinomios simétricos elementales $\{s_1, \ldots, s_l\}$ en las variables $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$. Luego, definimos la **clase característica** $\varphi(E) \in H^{2l}(X,\mathbb{Z})$ como

$$\varphi(E) = \widetilde{\varphi}(c_1(E), c_2(E), \ldots, c_l(E)),$$

donde las clases $c_i(E)$ son las clases de Chern del fibrado E definidas arriba. El teorema de Chern-Weil nos permite producir formas diferenciales que representan cada clase característica eligiendo una conexión en E. Para esto, si φ es un polinomio homogéneo simétrico de grado l y $\varphi = \widetilde{\varphi}(s_1, \ldots, s_l)$ representamos $\varphi(E)$ por la $2l$-forma

$$\varphi(\nabla) = \frac{\sqrt{-1}^l}{(2\pi)^l}\widetilde{\varphi}(\sigma_1(\nabla), \ldots, \sigma_l(\nabla)) \in \Gamma(\mathscr{A}_X^{2l})$$

para una conexión ∇ en E. Esta es una $2l-$forma cerrada tal que su clase de cohomología es la clase característica $\varphi(E)$ en $H^{2l}(X,\mathbb{C})$.

La demostración del teorema de Chern Weil también nos proporciona $(2i-1)-$formas bien definidas $\sigma_i(\nabla, \widetilde{\nabla})$ para cada par de conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ en E. Estas formas son tales que

$$d\sigma_i(\nabla, \widetilde{\nabla}) = \sigma_i(\nabla) - \sigma_i(\widetilde{\nabla}).$$

Llamamos a estas formas las **formas de diferencia** entre el par de conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ y además definimos formas de diferencia $\varphi(\nabla, \widetilde{\nabla})$ para cada polinomio homogéneo simétrico que satisfacen la relación

$$d\varphi(\nabla, \widetilde{\nabla}) = \varphi(\nabla) - \varphi(\widetilde{\nabla})$$

. La definición de estas formas de diferencia es la siguiente: consideremos la variedad $[0,1] \times X$ con la proyección $\pi : [0,1] \times X \to X$, que manda (t,x) a x. Las conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ proveen a $\pi^*(E)$ de dos conexiones dadas por los pullbacks $\pi^*(\nabla)$ y $\pi^*(\widetilde{\nabla})$ que simplemente denotaremos como ∇ y $\widetilde{\nabla}$. Debido a esto, podemos formar la conexión $t\nabla + (1-t)\widetilde{\nabla}$. La integración a lo largo de la fibra define una transformación lineal $\int_{[0,1]}$ que denotamos como

$$\pi_* : \mathscr{A}^\bullet_{[0,1]\times X} \to \mathscr{A}_X^{\bullet-1}$$

. Para la definición y las propiedades de esta función, consulte [BT89] página 61. La forma de diferencia se define entonces como

$$\varphi(\nabla, \widetilde{\nabla}) = \pi_*\varphi(t\nabla + (1-t)\widetilde{\nabla})$$

y el hecho de que $d\varphi(\nabla, \widetilde{\nabla}) = \varphi(\nabla) - \varphi(\widetilde{\nabla})$ se deduce de una aplicación del teorema de Stokes. Las formas de diferencia entre dos conexiones satisfacen la siguiente proposición.

Proposición 3.1.4. *1. Si $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$ son conexiones en un fibrado vectorial E entonces las formas de diferencia satisfacen*

$$\varphi(\nabla_1, \nabla_2) - \varphi(\nabla_3, \nabla_2) = \varphi(\nabla_1, \nabla_3).$$

2. Si ∇_1, ∇_2 son conexiones en un fibrado vectorial E entonces la forma de diferencia entre ellas satisface que

$$\varphi(\nabla_1, \nabla_2) = -\varphi(\nabla_2, \nabla_1).$$

Demostración. Comenzamos mostrando que

$$\begin{aligned}
\varphi(\nabla_1, \nabla_2) - \varphi(\nabla_3, \nabla_2) &= \int_{[0,1]} \varphi(t\nabla_1 + (1-t)\nabla_2) - \varphi(t\nabla_3 + (1-t)\nabla_2) \\
&= \int_{[0,1]} d\varphi(t\nabla_1 + (1-t)\nabla_2, t\nabla_3 + (1-t)\nabla_2)dt \\
&= \int_{[0,1]} d \int_{[0,1]} \varphi(s(t\nabla_1 + (1-t)\nabla_2) + (1-s)(t\nabla_3 + (1-t)\nabla_2))dsdt \\
&= \varphi(\nabla_1, \nabla_3)
\end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de Stokes en el último paso. Esto prueba la primera afirmación. Para probar la segunda tenemos que

$$\varphi(\nabla_2, \nabla_1) = \int_{[0,1]} \varphi(t\nabla_2 + (1-t)\nabla_1)dt$$

y a través del cambio de variables $t = 1 - s$ obtenemos

$$\varphi(\nabla_2, \nabla_1) = -\int_{[0,1]} \varphi(s\nabla_1 + (1-s)\nabla_2)ds = -\varphi(\nabla_1, \nabla_2)$$

□

3.2. Clases de Chern de haces coherentes

En esta sección, desarrollaremos la definición de clases de Chern para haces coherentes de $\mathcal{O}_X$—módulos. Sea X una variedad compleja y $F(X)$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de haces coherentes en X. A cada sucesión exacta $0 \to \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2 \to \mathscr{S}_3 \to 0$ de haces coherentes, asignamos el elemento $Q(\mathscr{S}_\bullet) = \mathscr{S}_2 - \mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_3 \in F(X)$. El **grupo de clases de haces coherentes** en X se define como el cociente

$$K(X) \simeq F(X)/\langle Q(\mathscr{S}\bullet)\rangle_{\mathscr{S}_\bullet \text{ secuencia corta exacta de haces coherentes}}.$$

Una asignación de un elemento de un grupo abeliano G a cada haz coherente sobre X se llama **aditiva** si siempre que $0 \to \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2 \to \mathscr{S}_3 \to 0$ es exacta, entonces $\gamma(\mathscr{S}_2) =$

$\gamma(\mathscr{S}_1)+\gamma(\mathscr{S}_3)$. El grupo de clases $K(X)$ es universal en el siguiente sentido: toda función aditiva γ a un grupo abeliano G se factoriza por una función $\widetilde{\gamma} : K(X) \to G$. La clase de Chern total es una función aditiva del conjunto de haces coherentes en X a $H^\bullet(X, \mathbb{Z})$ y, por lo tanto, se factoriza a través del grupo de clases.

Si X es una variedad cuasiproyectiva, entonces cualquier haz coherente $\mathscr{S}$ sobre X admite una resolución finita mediante haces localmente libres que pueden identificarse con fibrados vectoriales sobre X [BS58, Lema 10 y su corolario]. Debido a esto, existe una biyección entre el grupo de clases de haces coherentes sobre X y el grupo de clases de fibrados vectoriales sobre X [BS58, Teorema 2]. Usando esta biyección, podemos definir clases de Chern de haces coherentes de $\mathscr{O}_X-$módulos utilizando clases de Chern de fibrados vectoriales. Tomemos una resolución por haces localmente libres

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathscr{S}$$

y definamos la **clase de Chern total del haz coherente** $\mathscr{S}$ como

$$c(\mathscr{S}) = c(E_1).c(E_2)^{-1}.c(E_3).c(E_4)^{-1}.\ldots.c(E_n)^{(-1)^{n-1}},$$

donde las clases de Chern de los haces E_i son sus clases de Chern como fibrados vectoriales, tal como se las definió en la sección anterior. El resultado de esta construcción es independiente de la elección de la resolución. De esta manera, obtenemos clases características $\varphi(\mathscr{S})$ para haces coherentes sobre X de la misma manera que en el caso mencionado anteriormente de los fibrados vectoriales.

Observación 3.2.1. Observamos que si la variedad compleja X no es proyectiva, puede que no exista una resolución mediante haces localmente libres de $\mathscr{O}_X$ módulos de $\mathscr{S}$ sobre X. Sin embargo, siempre existirá dicha resolución al considerar el haz $\mathscr{S}$ como un haz de módulos sobre el haz $An_{X,\mathbb{C}}$ de funciones analíticas reales sobre X con valores sobre $\mathbb{C}$. Al considerar dicha resolución, las clases de Chern de $\mathscr{S}$ pueden definirse de la misma manera que antes. Para los detalles de las clases de Chern de haces coherentes sobre una variedad compleja no cuasiproyectiva, el lector puede consultar [BB72, Sección 6]. Durante el resto del texto asumiremos que nuestros haces coherentes admiten una resolución finita por haces localmente libres: el lector puede decidir asumir de ahora en adelante que nuestras resoluciones utilizadas para construir clases de Chern son resoluciones por haces de módulos sobre $An_{X,\mathbb{C}}$ o que la variedad compleja X es cuasiproyectiva.

A continuación, explicamos la construcción de Chern-Weil de formas diferenciales para haces coherentes. Si dotamos a todos los fibrados vectoriales de una resolución del haz $\mathscr{S}$ de conexiones, podemos obtener un representante de la clase Chern de $\mathscr{S}$ en cohomología de de Rham de la siguiente manera. Se dice que una familia de conexiones en una sucesión de fibrados vectoriales es compatible con la sucesión

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1$$

cuando los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{\nabla_i} & E_i \otimes \mathscr{A}_X^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{i-1} & \xrightarrow{\nabla_{i-1}} & E_{i-1} \otimes \mathscr{A}_X^1 \end{array}$$

y en este caso resulta que dado un polinomio simétrico homogéneo φ de grado l y al escribir $\widetilde{\varphi}$ como el polinomio que define φ sobre los polinomios simétricos elementales, entonces $\varphi(\mathscr{S})$ se puede representar por la forma $\varphi(\nabla_\bullet)$ donde, si establecemos K_i como la curvatura de la conexión ∇_i y descomponemos

$$\prod_{i=1}^{n} \det(1+K_i)^{(-1)^{i-1}} = 1+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n$$

con cada $\omega_j \in \Omega^{2j}(X)$, entonces

$$\varphi(\nabla_\bullet) := \frac{\sqrt{-1}^l}{(2\pi)^l}\widetilde{\varphi}(\omega_1,\ldots,\omega_n).$$

Esta construcción de formas diferenciales es compatible con la descrita anteriormente para haces localmente libres en el siguiente sentido.

Proposición 3.2.2. *Sea* $0 \to E_q \to E_{q-1} \to \cdots \to E_0 \to E_{-1} \to 0$ *una sucesión exacta de haces localmente libres y* $(D_q, D_{q-1}, \ldots, D_0, D_{-1})$ *una familia de conexiones compatibles con la sucesión exacta. Entonces, si denotamos* $D_\bullet$ *a la familia de conexiones* D_i *con* $i \in \{1,\ldots q\}$*, tenemos que*

$$\varphi(D_{-1}) = \varphi(D_\bullet)$$

para cualquier polinomio simétrico φ*.*

Demostración. Para una prueba ver [BB72, Lema 4.22]. □

Al igual que en el caso de los fibrados vectoriales, dados dos conjuntos diferentes $(\nabla_n,\ldots,\nabla_1)$ y $(\widetilde{\nabla}_n,\ldots,\widetilde{\nabla}_1)$ de conexiones compatibles con una resolución $0 \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathscr{S}$ por fibrados vectoriales se puede producir una **forma de diferencia** $\varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet)$ de la misma manera que en el caso de un solo fibrado vectorial. Es decir, consideramos la variedad $[0,1]\times X$ y las conexiones dadas por las combinaciones lineales $D_i = t\nabla_i + (1-t)\nabla_i$ en cada $[0,1]\times E_i \to [0,1]\times X$ y definimos

$$\varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet) = \pi_*(\varphi(D_\bullet)).$$

Esta forma diferencial también satisface $\varphi(\nabla_\bullet) - \varphi(\widetilde{\nabla}_\bullet) = d\varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet)$ y propiedades análogas a las de la proposición 3.1.4.

3.3. El teorema de anulación de Bott

En esta sección, desarrollaremos la herramienta más importante para construir residuos de foliaciones singulares: el teorema de anulación de Bott. Comenzaremos con algunos preliminares que involucran conexiones parciales. Recordamos de la sección anterior que todas las conexiones consideradas aquí son $\mathscr{C}^\infty$ en el sentido de que son aplicaciones $\mathbb{C}-$lineales $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \mathscr{A}^1_X)$.

Definición 3.3.1. Sea $E \to X$ un fibrado vectorial y $\mathscr{F} \subseteq \tau$ un subfibrado. Una **conexión parcial** a lo largo de $\mathscr{F}$ es una función $\mathbb{C}$-lineal $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \mathscr{F}^*)$ que satisface la regla de Leibniz.

$$\nabla(fs) = \rho(df) \otimes s + f\nabla(s)$$

donde $\rho : \tau* \to \mathscr{F}^*$ es la proyección natural. Si $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G} \subseteq \tau$ decimos que una conexión parcial ∇ a lo largo de $\mathscr{G}$ extiende una conexión parcial ∇' a lo largo de $\mathscr{F}$ si $\nabla' = i \circ \nabla$ con $i : E \otimes \mathscr{G}^* \to E \otimes \mathscr{F}^*$ la inclusión natural.

Ejemplo 3.3.2. La complexificación τ del haz tangente $\mathscr{C}^\infty$ tiene dos subhaces dentro de $T_X^{1,0}$ y $T_X^{0,1}$ que son ambos fibrados vectoriales complejos $\mathscr{C}^\infty$ de rango n y se definen como los espacios de autovectores de los autovalores i y $-i$ respectivamente del operador $J : \tau \to \tau$ inducido por la multiplicación compleja por $i \in \mathbb{C}$. Dado cualquier fibrado vectorial holomorfo $E \to X$ existe un operador $\overline{\partial} : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes (T_X^{0,1})^*) = \Gamma(E \otimes \mathscr{A}_X^{0,1})$ que es una conexión parcial a lo largo de $T_X^{0,1}$. Las secciones de E en el núcleo de $\overline{\partial}$ son precisamente las secciones holomorfas de E.

En la definición anterior, podemos considerar el caso especial de una foliación holomorfa $\mathscr{F} \subseteq T_X$. Dado que el haz tangente holomorfo se encuentra dentro de τ representado como las secciones holomorfas del subhaz $T_X^{1,0} \subseteq \tau$ de campos de vectores de tipo $(1, 0)$, podemos considerar conexiones parciales a lo largo de $\mathscr{F}$ o incluso a lo largo de $\mathscr{F} \oplus T_X^{0,1} \subseteq \tau$.

Sean $\mathscr{F} \subseteq T_X$ una foliación holomorfa en X y E un fibrado vectorial holomorfo en X. Una conexión parcial a lo largo de $\mathscr{F} \oplus T_X^{0,1}$ en E que extiende la conexión parcial $\overline{\partial}$ a lo largo de $T_X^{0,1}$ se denomina conexión **de tipo (1, 0)**.

Definición 3.3.3. Dada X una variedad compleja de dimensión n y $\mathscr{F}$ una foliación regular en X de dimensión k denotamos por $N_\mathscr{F} = T_X/\mathscr{F}$ al fibrado normal de la foliación. $N_\mathscr{F}$ viene equipado con una conexión parcial a lo largo de las hojas de $\mathscr{F}$ llamada **conexión de Bott**, que se define como el $\mathbb{C}$-morfismo

$$D_{\text{Bott}} : N_\mathscr{F} \to N_\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^*$$

dado por

$$D_{\text{Bott}}(\overline{w})(v) = \overline{[v, w]}$$

para $v \in \mathscr{F}$ y $\overline{w} \in N_\mathscr{F}$. Una conexión ∇ en $N_\mathscr{F}$ se llama **básica** si es una conexión de tipo $(1, 0)$ que extiende la conexión de Bott.

La conexión de Bott no es solo una conexión parcial a lo largo de las hojas de $\mathscr{F}$, sino que también es **playa**. Para una conexión parcial ∇, decimos que ∇ es playa si la composición $\nabla \circ \nabla$ se anula como una función $\nabla \circ \nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \Lambda^2 \mathscr{F})$. De la misma manera que admitir una conexión playa implica que el fibrado vectorial tiene clases de Chern que se anulan, admitir una conexión parcial playa implica que algunas de sus clases de Chern se anulan. Este es el contenido del teorema de anulación de Bott.

Teorema 3.3.4. *Sea X una variedad compleja de dimensión n y $\mathscr{F} \subseteq T_X$ una foliación regular holomorfa de dimensión k. Si ∇ es una conexión básica en $N_\mathscr{F}$ entonces $\varphi(\nabla) = 0$ para todos los polinomios simétricos homogéneos tales que $\deg(\varphi) > n - k$.*

Para más detalles sobre este teorema y una demostración, véase [BB72, proposition 3.27] o la discusión original en [Bot70]. El teorema del anulación y la existencia de co-

nexiones básicas implican que, dada una foliación regular $\mathscr{F}$ en una variedad compleja X, las clases características $\varphi(N_{\mathscr{F}})$ se anulan siempre que $\deg(\varphi) > n - k$.

Ejemplo 3.3.5. Podemos usar el teorema de anulación de Bott para demostrar que los espacios proyectivos no admiten foliaciones no triviales de codimensión 1, como se menciona en 2.2.7. En efecto, sea $\mathscr{F}$ una tal foliación. Debido al teorema de anulación de Bott, cualquier foliación regular de este tipo debería satisfacer que $(c_1)^2(N_{\mathscr{F}}) = 0$. Sin embargo, dado que el anillo de cohomología de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es isomorfo a $\mathbb{C}[X]/(x^{n+1})$ y $c_1(N_{\mathscr{F}})$ es un elemento de grado 2 en $H^*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$, tenemos que $c_1(N_{\mathscr{F}}) = 0$. Al mismo tiempo, la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{F} \to T_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \to N_{\mathscr{F}} \to 0$$

nos muestra que $c_n(T_{\mathscr{P}^n_{\mathbb{C}}}) = c_1(N_{\mathscr{F}})c_{n-1}(\mathscr{F})$ debido a que $N_{\mathscr{F}}$ tiene clases de Chern nulas en grado superior ya que es un fibrado de línea y $\mathscr{F}$ tiene clase de Chern nula n-ésima ya que es un fibrado vectorial de rango $n-1$. Por lo tanto, $c_n(T_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}) = 0$ que se sabe que es falso.

Terminamos esta sección con una proposición sobre conexiones básicas que será útil durante el resto del capítulo.

Proposición 3.3.6. *Sea X una variedad compleja de dimensión n y $\mathscr{F}$ una foliación regular de rango k. Si ∇_1 y ∇_2 son dos conexiones básicas en $N_{\mathscr{F}}$ y φ es un polinomio simétrico homogéneo de grado $l > n - k$, entonces $\varphi(\nabla_1, \nabla_2) = 0$.*

Demostración. El resultado se establece esencialmente en [BB72, Lema 5.3]. Allí se demuestra que $\varphi(t\nabla_1 + (1-t)\nabla_2) = 0$ como forma diferencial en $X \times [0,1]$, lo que claramente implica nuestra afirmación. □

3.4. Los residuos de Baum-Bott

En esta sección daremos una definición de los residuos de Baum-Bott para foliaciones holomorfas construídos originalmente en [BB72]. Primero revisaremos algunos resultados sobre cohomología relativa que serán necesarios para la definición. Tras esta revisión proveeremos la definición y las principales propiedades de estos residuos y finalizaremos la sección enunciando el teorema de los residuos y discutiendo el vínculo entre esta y otras definiciones posibles del objeto de estudio.

Comenzamos esta sección recordando que, dado un abierto $U \subseteq X$, existen grupos de cohomología de rham relativos que pueden calcularse mediante la cohomología del complejo de formas

$$(\mathscr{A}^i(X) \oplus \mathscr{A}^{i-1}(U))_i$$

con el diferencial $d(\omega, \eta) = (d\omega, i^*(\omega) - d\eta)$ (véase, por ejemplo, [BT89], página 78). Estos grupos se encuentran en una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \to H^{2l}(X, U, \mathbb{C}) \to H^{2l}(X, \mathbb{C}) \to H^{2l}(U, \mathbb{C}) \to \dots$$

Debido al teorema de anulación de Bott, si X es una variedad compleja y $\mathscr{F}$ es una foliación singular, S su lugar singular, obtenemos que cada clase característica de $N_{\mathscr{F}}$

de grado mayor que la codimensión de $\mathscr{F}$ se anula cuando se restringe a $U = X - S$. Por lo tanto, tenemos que en la sucesión exacta larga de cohomología relativa

$$\dots H^{2l-1}(U, \mathbb{C}) \to H^{2l}(X, U, \mathbb{C}) \to H^{2l}(X, \mathbb{C}) \to H^{2l}(U, \mathbb{C}) \to H^{2l+1}(U, \mathbb{C}) \dots$$

la restricción $i^*(\varphi(N_{\mathscr{F}})) \in H^{2l}(U, \mathbb{C})$ se anula y por lo tanto existe una clase $\xi \in H^{2l}(X, U, \mathbb{C})$ cuya imagen en $H^{2l}(X, \mathbb{C})$ es $\varphi(N_{\mathscr{F}})$. Sin embargo, hay varias clases $\xi \in H^{2l}(X, U, \mathbb{C})$ que se le asignan a $\varphi(N_{\mathscr{F}})$ y los residuos de Baum-Bott se obtienen como la construcción de uno de dichos levantados utilizando la ayuda de una conexión básica.

Definición 3.4.1. Fijemos X como una variedad compleja de dimensión n y $\mathscr{F}$ una foliación saturada en X de rango k. Sea $\varphi \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polinomio simétrico homogéneo de grado $n-k < l \leq n$ y S el lugar singular de $\mathscr{F}$, y $U = X \setminus S$. Consideremos una resolución

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow N_{\mathscr{F}}$$

del haz normal $N_{\mathscr{F}}$ y elijamos conexiones compatibles ∇_i en cada E_i. Consideremos también la sucesión exacta de fibrados vectoriales.

$$0 \longrightarrow E_n|_U \longrightarrow E_{n-1}|_U \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1|_U \longrightarrow N_{\mathscr{F}}|_U$$

y fijemos conexiones compatibles $\widetilde{\nabla}_i$ en cada $E_i|_U$ de modo que esta familia de conexiones también sea compatible con una conexión básica $\widetilde{\nabla_0}$ en $N_{\mathscr{F}}|_U$. Luego, definimos el residuo de Baum-Bott como la clase

$$\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) = [(\varphi(\nabla_\bullet), \varphi(\nabla_\bullet|_U, \widetilde{\nabla_\bullet}))] \in H^{2l}(X, U, \mathbb{C}).$$

Proposición 3.4.2. *La clase $Res^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) \in H^{2l}(X, U, \mathbb{C})$ es independiente de las elecciones tomadas.*

Demostración. Primero veremos que $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})$ define una clase de cohomología relativa. En efecto, para ver esto realizamos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} d(\varphi(\nabla_\bullet), \varphi(\nabla_\bullet|_U, \widetilde{\nabla_\bullet})) &= (0, \varphi(\nabla_\bullet)|_U - d\varphi(\nabla_\bullet|_U, \widetilde{\nabla_\bullet})) \\ &= (0, \varphi(\nabla_\bullet)|_U - \varphi(\nabla_\bullet)|_U + \varphi(\widetilde{\nabla_\bullet})) \\ &= (0, \varphi(\widetilde{\nabla_\bullet})) = (0, 0) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe al teorema de anulación de Bott.

También afirmamos que la clase $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})$ es independiente de la elección de conexiones. Para ello, primero elegimos dos familias diferentes de conexiones definidas globalmente ∇_i y D_i en cada fibrado vectorial E_i y consideramos las clases $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, \nabla_\bullet)$ y $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, D_\bullet)$, ambas definidas utilizando la misma conexión básica $\widetilde{\nabla_0}$ y la sucesión de conexiones compatibles $\widetilde{\nabla_\bullet}$ en U. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, \nabla_\bullet) - \mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, D_\bullet) &= (\varphi(\nabla_\bullet) - \varphi(D_\bullet), \varphi(\nabla_\bullet|_U, \widetilde{\nabla_\bullet}) - \varphi(D_\bullet|_U, \widetilde{\nabla_\bullet})) \\ &= (d\varphi(\nabla_\bullet, D_\bullet), \varphi(\nabla_\bullet|_U, D_\bullet|_U)) \\ &= d(\varphi(\nabla_\bullet, D_\bullet), 0) \end{aligned}$$

lo que muestra que $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, \nabla_\bullet) - \mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, D_\bullet)$ es exacta.

De manera similar, podemos demostrar que la clase $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})$ no depende de la elección de la conexión básica $\widetilde{\nabla_0}$ ni de la sucesión de conexiones compatibles $\widetilde{\nabla_\bullet}$ en U. Para ello, elegimos dos conexiones básicas diferentes con sus conexiones asociadas $\widetilde{\nabla_\bullet}$ y $\widetilde{D_\bullet}$ y fijamos las elecciones globales de conexiones $\nabla_\bullet$ en cada $E_\bullet$. Luego, calculamos

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, \widetilde{\nabla_\bullet}) - \mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, \widetilde{D_\bullet}) =& (\varphi(\nabla_\bullet) - \varphi(\nabla_\bullet), \varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla_\bullet}) - \varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{D_\bullet})) \\ =& (0, \varphi(\widetilde{D}_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet)) = (0, 0)\end{aligned}$$

donde hemos usado en la última igualdad la proposición 3.3.6 para obtener que la forma de diferencia entre dos familias de conexiones compatibles con dos conexiones básicas se anula.

A continuación demostraremos que la clase $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})$ es independiente de la elección de la resolución $E_\bullet$ del haz normal $N_{\mathscr{F}}$. Sean $E_\bullet$ y $F_\bullet$ dos resoluciones localmente libres de $N_{\mathscr{F}}$. Entonces, existe una resolución localmente libre $G_\bullet$ de $N_{\mathscr{F}}$ con epimorfismos $G_\bullet \to F_\bullet$ y $G_\bullet \to E_\bullet$ [BS58, Lema 14 y discusión previa]. Denotaremos por $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, G)$ la clase calculada con la resolución $G_\bullet$ y por $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, E)$ la clase calculada con la resolución $E_\bullet$, y demostraremos que estas dos clases coinciden. Para ello, considérese una familia $\nabla_\bullet$ de conexiones compatibles en $E_\bullet$ y una familia $\widetilde{\nabla}_\bullet$ de conexiones compatibles en $E_\bullet$ que también son compatibles con una conexión básica $\widetilde{\nabla_0}$ en $N_{\mathscr{F}}$. Los haces $L_i = \ker(G_i \to E_i)$ son localmente libres ya que el morfismo $G_i \to E_i$ es un epimorfismo. Podemos elegir una familia de conexiones compatibles $\nabla^L_\bullet$ en la sucesión exacta de haces localmente libres $L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \to 0$. Ahora elegimos un complemento H_i a L_i dentro de G_i en la categoría $\mathscr{C}^\infty$: esto significa $\mathscr{C}^\infty-$subfibrados vectoriales H_i de G_i tales que $H_i \oplus L_i \simeq G_i$. Sea $\varphi_i : H_i \to E_i$ la restricción del epimorfismo $G_i \to E_i$ que ahora es un isomorfismo de $\mathscr{C}^\infty$ fibrados vectoriales. Definimos $\nabla^H_\bullet$ como la familia de conexiones compatibles en la sucesión $H_n \to H_{n-1} \to \cdots \to H_1 \to N_{\mathscr{F}}$ obtenida por $\nabla^H_i(v) = \varphi^{-1}(\nabla_i(\varphi_i(v)))$. Ahora, al considerar las conexiones $D_i = \nabla^L_i + \nabla^H_i$ en cada G_i, obtenemos que la curvatura de las conexiones D_i satisface

$$\det(1 + K(D_i)) = \det(1 + K(\nabla^L_i))\det(1 + K(\nabla^H_i)).$$

Lo que demuestra que $\varphi(\nabla_\bullet) = \varphi(\nabla^H_\bullet) = \varphi(D_\bullet)$. Dado que este mismo argumento se puede aplicar a las conexiones $\widetilde{\nabla_i}$ y $t\nabla_i|_U + (1-t)\widetilde{\nabla_i}$, obtenemos que también

$$\varphi(\nabla_\bullet|_U, \widetilde{\nabla_\bullet}) = \varphi(D_\bullet|_U, \widetilde{D_\bullet}))$$

Para una familia de conexiones compatibles $D_\bullet$ y $\widetilde{D_\bullet}$ en $G_\bullet$. Dado que esto también se puede realizar para la resolución $F_\bullet$, se obtiene que el residuo no depende de la resolución elegida. Por lo tanto, la clase $\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})$ solo depende del polinomio φ y la foliación $\mathscr{F}$, y la demostración está completa. □

La definición brindada arriba de los residuos de Baum-Bott consiste en una clase específica de cohomología relativa que puede obtenerse mediante una conexión básica en $N_{\mathscr{F}}$ y conexiones compatibles en cualquier resolución y será con la que trabajaremos

en esta tesis. La construcción original de Baum y Bott, aunque muy similar, consiste en clases de homología en cada una de las componentes conexas del lugar singular de la foliación $\mathscr{F}$. Ambas definiciones se relacionan como explicaremos ahora. Comenzamos analizando cómo la dualidad de Poincaré en una variedad compleja compacta X de dimensión n se traduce a la cohomología relativa.

Definición 3.4.3. Dado $S \subseteq X$, un subconjunto compacto que admite una entorno regular, y $U = X - S$, existe un isomorfismo $H^{2l}(X, U, \mathbb{C}) \simeq H_{2n-2l}(S, \mathbb{C})$.. En particular, siempre que S sea una subvariedad analítica compacta de X (posiblemente singular), tenemos este isomorfismo (para una referencia sobre este resultado, véase [BSS09, section 1.2]). Llamamos a este isomorfismo la **dualidad de Alexander Lefschetz** y lo denotamos

$$AL : H^{2l}(X, U, \mathbb{C}) \to H_{2n-2l}(S, \mathbb{C}).$$

Usando la dualidad anterior, si X es una variedad compleja compacta, podemos producir residuos en homología que se obtienen de nuestra definición de residuos de Baum-Bott y la aplicación del isomorfismo de Alexander-Lefschetz.

Definición 3.4.4. Sean X una variedad compleja compacta de dimensión n y $\mathscr{F}$ una foliación saturada en X de rango k. Sea $\varphi \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio simétrico homogéneo de grado $n - k < l \leq n$ y S el lugar singular de $\mathscr{F}$. Llamaremos residuo de Baum-Bott en homología y lo denotaremos por $HRes^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})$ a la clase

$$HRes^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) = AL(Res^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})) \in H_{2n-2l}(Sing(\mathscr{F}), \mathbb{C}).$$

Además, descomponiendo el lugar singular en sus componentes conexas podemos definir clases de homología asociadas sólo a cada componente conexa del lugar singular como en el trabajo original de Baum y Bott. Para hacer eso, escribimos

$$Sing(\mathscr{F}) = \bigcup_{i=1}^{r} Z_i$$

con Z_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ las componentes conexas de $Sing(\mathscr{F})$. Hay un isomorfismo $H_{2n-2l}(Sing(\mathscr{F}), \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} H_{2n-2l}(Z_i, \mathbb{C})$ y denotamos por

$$\pi_{Z_i} : H_{2n-2l}(Sing(\mathscr{F}), \mathbb{C}) \to H_{2n-2l}(Z_i, \mathbb{C})$$

las proyecciones.

Definición 3.4.5. Sea X una variedad compleja compacta de dimensión n y $\mathscr{F}$ una foliación saturada en X de rango k. Sea $\varphi \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio simétrico homogéneo de grado $n - k < l \leq n$ y S el lugar singular de $\mathscr{F}$. Sea Z_i una componente conexa de S. Luego, definimos la clase de homología de Baum-Bott a lo largo de la componente Z_i como la clase

$$Res^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, Z_i) = \pi_{Z_i}(HRes^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F})) \in H_{2n-2l}(Z_i)$$

para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Las consideraciones anteriores pueden aplicarse en el caso no compacto, siempre que estemos dispuestos a trabajar con homología de Borel-Moore. Desarrollamos los detalles de este caso en el apéndice de este capítulo.

Terminamos esta sección enunciando el teorema original de Baum y Bott en relación con su formulación de estos residuos y los aspectos globales que estos satisfacen. Mostraremos ejemplos de cálculo de los residuos de Baum-Bott en las siguientes secciones.

Teorema 3.4.6. *Dada X una variedad compleja compacta de dimensión n, $\mathscr{F}$ una foliación saturada en X de rango k, $\varphi \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, x_n]$ un polinomio simétrico homogéneo de grado $n - k < l \leq n$ y $Z \subset S$ una componente conexa del conjunto singular S de $\mathscr{F}$, la clase de homología $Res_\varphi^{BB}(\mathscr{F}, Z) \in H_{2n-2l}(Z, \mathbb{C})$ depende solo de la elección de φ y del comportamiento local de $\mathscr{F}$ cerca de Z y satisface la siguiente igualdad*

$$\sum_Z \mu_*(Res_\varphi^{BB}(\mathscr{F}, Z)) = \varphi(N_{\mathscr{F}}),$$

donde $\mu : H_{2n-2l}(Z, \mathbb{C}) \to H^{2l}(X, \mathbb{C})$ está dada por la inclusión de Z en X seguida del isomorfismo de dualidad de Poincaré.

3.5. Un algoritmo para el cálculo de residuos de grado mínimo

Ahora procederemos a describir la situación para residuos de **grado mínimo**. Sea $(X, \mathscr{F})$ como se indicó anteriormente. En el caso de un polinomio φ de grado $n-k+1$, el residuo puede calcularse concretamente. Si Z es una componente conexa compacta de $S = \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ de dimensión k-1 y $Z_1, \ldots, Z_r$ son sus componentes irreducibles, entonces $H_{2(k-1)}(Z, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo de dimensión r y generado por las clases fundamentales de $Z_1, \ldots, Z_r$. De esta manera, si elegimos un polinomio φ de grado $l = n - k + 1$, obtenemos que

$$\mathrm{HRes}_\varphi^{BB}(\mathscr{F}) = \sum_{i=1}^{r} \langle \mathrm{Res}_\varphi^{BB}(\mathscr{F}), Z_i \rangle [Z_i]$$

para algunos números complejos $\langle \mathrm{Res}_\varphi^{BB}(\mathscr{F}), Z_i \rangle$. Baum and Bott proveyeron un **algoritmo** para calcular $\langle \mathrm{Res}_\varphi^{BB}(\mathscr{F}), Z_i \rangle$ siempre que Z_i sea una componente irreducible compacta de S de tipo Kupka. El mismo algoritmo fue luego generalizado al caso en que Z_i fuera cualquier componente irreducible compacta de dimensión $k-1$ del lugar singular S en el artículo [CL19]. El algoritmo es el siguiente.

1. Primero elegimos un punto suave $p \in Z_i$ que no esté en ninguna otra componente irreducible de Z. Dado que $\dim(Z_i) = k - 1$ existe una variedad lineal $(n - k + 1)$−dimensional que interseca transversalmente a Z_i en p y podemos considerar el pullback de la foliación a este espacio en una entorno de p, obteniendo una foliación de dimensión uno definida por un campo vectorial holomorfo

   $$v = a_1\partial_1 + a_2\partial_2 + \ldots a_{n-k+1}\partial_{n-k+1}$$

   con un cero aislado en p, que podemos asumir como el origen.

2. Calculamos la matriz de derivadas

$$A = (\frac{\partial a_i}{\partial x_j})_{i,j}$$

y luego calculamos

$$\varphi(A) = \widetilde{\varphi}(\sigma_1(A)\ldots, \sigma_{n-k+1}(A))$$

donde $\widetilde{\varphi}(s_1, \ldots s_{n-k+1}) = \varphi$ para $\{s_1, \ldots s_{n-k+1}\}$ los polinomios simétricos elementales y $\sigma_i(A)$ están definidos por la relación $\det(\lambda A + I) = 1 + \lambda\sigma_1(A) + \ldots \lambda^{n-k+1}\sigma_{n-k+1}(A)$.

3. Ahora, dado que ν tiene un cero aislado en el origen, podemos encontrar funciones holomorfas b_{ij} tales que $x_j^{\alpha_j} = \sum b_{ij}a_i$. Buscamos esta matriz (b_{ij}) y los números α_j.

4. Finalmente expandimos en serie de Taylor la $(n-k+1)-$forma

$$\frac{\varphi(A)\det(b_{ij})dx_1 \wedge \ldots dx_{n-k+1}}{(x_1)^{\alpha_1}\ldots(x_{n-k+1})^{\alpha_{n-k+1}}}$$

y el número $\langle \mathrm{Res}_\varphi^{BB}(\mathscr{F}), Z_i\rangle$ será igual al coeficiente correspondiente a $\frac{dx_1\wedge\ldots dx_{n-k+1}}{(x_1)\ldots x_{n-k+1}}$ en dicha expansión.

De ahora en adelante escribiremos $\mathrm{Res}_\varphi^{BB}(\mathscr{F})$ para la clase en cohomología relativa definida en 3.4.1, $\mathrm{HRes}_\varphi^{BB}(\mathscr{F})$ para su dual en homología definido en 3.4.4 y $\langle \mathrm{Res}_\varphi^{BB}(\mathscr{F}), Z_i\rangle$ para los números complejos obtenidos por el proceso anterior cuando $\deg(\varphi) = n - k + 1$ y Z_i es una componente irreducible del lugar singular de dimensión $k-1$. Sin embargo, cuando no surja ninguna confusión, llamaremos a cualquiera de estos objetos residuos de Baum-Bott.

Ejemplo 3.5.1. Consideremos ahora la 1-forma torcida globalmente definida en $\mathbb{P}^3$ dada en coordenadas homogéneas $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ por

$$\omega = x_1x_2x_3dx_0 - 2x_0x_2x_3dx_1 - x_0x_1x_3dx_2 + 2x_0x_1x_2dx_3.$$

Esta fórmula define una sección global de $\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(4) \simeq \Omega^1_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$. La foliación $\mathscr{F}$ dada por ω tiene lugar singular $S = \bigcup_{i,j}\{x_i = x_j = 0\} = \bigcup_{i,j} L_{ij}$ que tiene una única componente conexa con 6 componentes irreducibles. En el entorno coordenado $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ nos da la 1-forma

$$\omega = -2x_2x_3dx_1 - x_1x_3dx_2 + 2x_1x_2dx_3.$$

El lugar singular en este entorno coordenado tiene las siguientes tres componentes irreducibles: $L_{12} = \{x_1 = x_2 = 0\}$, $L_{23} = \{x_1 = x_3 = 0\}$ $L_{23} = \{x_2 = x_3 = 0\}$. Calculamos $\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}, Z), L_{12}\rangle$ del siguiente modo: tomamos el punto $p = (0, 0, 1) \in L_{12}$ y consideramos el pullback de ω al plano transversal $P = \{x_3 = 1\}$ arrojando la 1-forma

$$i^*(\omega) = -2x_2dx_1 - x_1dx_2$$

que representa la foliación en $\mathbb{C}^2$ generada por el campo

$$V = x_1\partial_1 - 2x_2\partial_2$$

y entonces las matrices A y (b_{ij}) descriptas en el algoritmo quedan dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Los números α_1 and α_2 son ambos 1 y el valor de

$$(s_1)^2(A) = (\sigma_1(A))^2 = (\mathrm{tr}(A))^2 = 1$$

nos permite calcular

$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{12} \rangle = \mathrm{Res}(\frac{(-\frac{1}{2})dx_1 \wedge dx_2}{x_1 x_2}) = -\frac{1}{2}.$$

En las otras dos componentes del lugar singular que se encuentran dentro de U_0 obtenemos

$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{13} \rangle = 4 \qquad \langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{23} \rangle = \frac{9}{2}.$$

Finalmente, los residuos de Baum-Bott asociados a las otras tres componentes irreducibles del lugar singular pueden calcularse arrojando los valores

$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{01} \rangle = \frac{9}{2}, \langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{02} \rangle = 4, \langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{03} \rangle = -\frac{1}{2}$$

usando otros abiertos afines. Entonces el residuo de Baum-Bott completo en homología da la clase

$$\mathrm{HRes}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}) = -\frac{1}{2}[L_{03}] + 4[L_{02}] + \frac{9}{2}[L_{01}] - \frac{1}{2}[L_{12}] + 4[L_{13}] + \frac{9}{2}[L_{23}] \in H_2(S, \mathbb{C}).$$

Como $\mathbb{P}^3$ es compacto, el teorema de los residuos dice que

$$(c_1)^2(\mathscr{O}(4)) = 16[H^2] = \mu_*(\mathrm{HRes}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}))$$

donde $\mu_* : H_2(S, \mathbb{C}) \to H^4(\mathbb{P}^3, \mathbb{C})$ es la inclusión seguida de la dualidad de Poincaré y $[H]$ es el generador de la cohomología de $\mathbb{P}^3$. Como las clases $[L_{ij}]$ son todas duales de Poincare de $[H^2]$ dentro de $\mathbb{P}^3$ el teorema puede verificarse con el cálculo

$$16[H^2] = -\frac{1}{2}[H^2] + 4[H^2] + \frac{9}{2}[H^2] - \frac{1}{2}[H^2] + 4[H^2] + \frac{9}{2}[H^2].$$

3.6. Residuos de grado superior

En la sección anterior, discutimos el comportamiento de los residuos de grado mínimo y demostramos que existe un algoritmo para calcularlos en términos de residuos de Grothendieck. En esta sección, analizaremos brevemente el comportamiento de los residuos que no son de grado mínimo. También derivaremos una proposición que permite calcular los residuos asociados a polinomios de alto grado en términos de los residuos asociados a los divisores de dicho polinomio.

Baum y Bott observaron que sus residuos se comportan de forma muy diferente según el grado del polinomio simétrico φ. De hecho, para φ de grado $n - k + 1$, demostraron que los residuos varían continuamente con las deformaciones de la foliación $\mathscr{F}$. Al mismo tiempo, conjeturaron lo siguiente para residuos de grado superior a $n - k + 1$.

Conjetura. (Conjetura de racionalidad [BB72, 0.50]) Sea X una variedad compleja, $\mathscr{F}$ una foliación singular saturada sobre X y Z una componente conexa del lugar singular de $\mathscr{F}$. Si $\varphi \in \mathbb{Q}[X_1, \dots X_n]$ es un polinomio simétrico homogéneo tal que $n - k + 1 < l = \deg(\varphi) \leq n$ entonces

$$\mathrm{HRes}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}, Z) \in H_{2n-2l}(Z, \mathbb{Q}).$$

La conjetura de racionalidad implica que si el grado de φ fuera estrictamente mayor que $n - k + 1$, el residuo tendría coeficientes racionales y, por lo tanto, no variaría al deformar la foliación $\mathscr{F}$, a diferencia del caso de los residuos de grado $n - k + 1$. En [Suw84], el autor demostró que la conjetura de racionalidad se cumple para polinomios φ que satisfacen que todos los monomios en la expresión $\varphi = \widetilde{\varphi}(c_1, \dots, c_n)$ tienen un factor del tipo c_j para algún $j > n - k$.

La conjetura de racionalidad retrata las diferencias entre los casos de $\deg(\varphi) = n - k + 1$ y $\deg(\varphi) > n - k + 1$. Ahora mostraremos una proposición que nos permitirá calcular algunos residuos de mayor grado utilizando residuos de menor grado.

Proposición 3.6.1. *Sean X una variedad compleja de dimensión n y $\mathscr{F}$ una foliación singular holomorfa saturada en X. Sea φ un polinomio homogéneo simétrico de grado $l > n - k$ tal que $\varphi = \phi.\xi$ para ϕ y ξ polinomios simétricos homogéneos con $s = deg(\phi) > n - k$. Entonces*

$$Res^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) = Res^{BB}_{\phi}(\mathscr{F}) \cdot \xi(N_{\mathscr{F}})$$

donde $Res^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) \in H^{2l}(X, U, \mathbb{C})$ para U el conjunto de puntos regulares de $\mathscr{F}$ donde la acción de $H^\bullet(X, \mathbb{C})$ sobre $H^\bullet(X, U, \mathbb{C})$ está dada por

$$(\omega, \eta) \cdot \nu = (\omega \wedge \nu, \eta \wedge i^*(\nu)).$$

para $\omega \in \Omega^{2s}(X, \mathbb{C})$, $\eta \in \Omega^{2s-1}(U, \mathbb{C})$, $i : U \to X$ la inclusión y $\nu \in \Omega^{l-s}(X, \mathbb{C})$.

Demostración. El miembro izquierdo de la igualdad está dado por

$$\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) = [(\varphi(\nabla_\bullet), \varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet))]$$

mientras que el miembro derecho de la ecuación está dado por el producto

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^{BB}_{\phi}(\mathscr{F}) \cdot \xi(N_{\mathscr{F}}) &= [(\phi(\nabla_\bullet), \phi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet))] \cdot [\xi(\nabla_\bullet)] \\ &= [(\phi(\nabla_\bullet) \wedge \xi(\nabla_\bullet), \phi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet) \wedge \xi(\nabla_\bullet))] \end{aligned}$$

Como las primeras coordenadas de estas dos clases de cohomología relativa coinciden tenemos que demostrar tan solo que

$$\phi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet) \wedge \xi(\nabla_\bullet) = \varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet).$$

Para esto usamos que

$$\varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla_\bullet}) = \int_{[0,1]} \varphi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet}) = \int_{[0,1]} \phi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet})\xi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet})$$

pero como $\deg(\phi) > n-k$ también tenemos que la forma $\phi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet})$ es exacta. En efecto, considerando la forma $\phi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet}), \widetilde{\nabla_\bullet}$, podemos ver que $\phi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet}) = d(\phi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet}), \widetilde{\nabla_\bullet})$. Finalmente, usando el teorema de Stokes probamos que

$$\begin{aligned}
\varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla_\bullet}) &= \int_{[0,1]} d(\phi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet}, \widetilde{\nabla_\bullet}))\xi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet}) \\
&= \int_{[0,1]} d\left(\phi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet}, \widetilde{\nabla_\bullet})\xi(t\nabla_\bullet + (1-t)\widetilde{\nabla_\bullet})\right) \\
&= \phi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla_\bullet}) \wedge \xi(\nabla_\bullet)
\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^{BB}_{\varphi}(\mathscr{F}) =& [(\varphi(\nabla_\bullet), \varphi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet))] \\
=& [(\phi(\nabla_\bullet) \wedge \xi(\nabla_\bullet), \phi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet) \wedge \xi(\nabla_\bullet))] \\
=& [(\phi(\nabla_\bullet), \phi(\nabla_\bullet, \widetilde{\nabla}_\bullet))] \wedge [\xi(\nabla_\bullet)] \\
=& \mathrm{Res}^{BB}_{\phi}(\mathscr{F}) \cdot \xi(N_{\mathscr{F}})
\end{aligned}$$

que es exactamente lo que queríamos probar. □

Observación 3.6.2. A través de la dualidad de Alexander Lefschetz la acción mencionada arriba se corresponde con el producto cap entre un elemento de $H_{2n-2l}(Z, \mathbb{C})$ y un elemento de $H^{2q}(X, \mathbb{C})$ para obtener un elemento en $H_{2n-2l-2q}(Z, \mathbb{C})$.

A continuación usaremos la proposición anterior para calcular todos los residuos de Baum-Bott de un tipo particular de foliaciones.

Ejemplo 3.6.3. Sea $\mathscr{F}$ una foliación de tipo $L(1,1,1,1)$ en $\mathbb{P}^3$, es decir, $\mathscr{F}$ es una foliación saturada dada como el haz anulador de una 1-forma del tipo

$$\omega = x_0x_1x_2x_3 \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i}$$

para ciertos números complejos λ_i que satisfacen la condición $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 0$. Para una foliación genérica de este tipo el lugar singular es la unión de 6 rectas

$$S = \bigcup_{0 \le i < j \le 3} L_{ij}$$

donde $L_{ij} = \{x_i = x_j = 0\}$. Podemos calcular que

$$H^6(\mathbb{P}^3, S, \mathbb{C}) \simeq H_0(S, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}, \quad H^4(\mathbb{P}^3, S, \mathbb{C}) \simeq H_2(S, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^6.$$

Como se trata de una foliación de codimensión 1 hay residuos de Baum-Bott de grados 2 y 3. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}^{BB}_{(c_1)^2}(\mathscr{F}) &= \sum_{0\le i<j\le 3} \frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i\lambda_j}[L_{ij}] \\
\mathrm{Res}^{BB}_{(c_2)}(\mathscr{F}) &= \sum_{0\le i<j\le 3} [L_{ij}] \\
\mathrm{Res}^{BB}_{(c_1)^3}(\mathscr{F}) &= \sum_{0\le i<j\le 3} \frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i\lambda_j}[L_{ij}]\cap c_1(N_{\mathscr{F}}) \\
&= 4\sum_{0\le i<j\le 3} \frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i\lambda_j}[L_{ij}]\cap[H] \\
&= 4\sum_{0\le i<j\le 3} \frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i\lambda_j}[p_0] \\
&= 4(\sum_{0\le i<j\le 3} -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}+2)[p_0] \\
&= 4(12+\sum_{0\le i<j\le 3} -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}-\frac{\lambda_j}{\lambda_i})[p_0] \\
&= 4(12+4)[p_0] \\
&= 64[p_0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}^{BB}_{(c_2c_1)}(\mathscr{F}) &= \sum_{0\le i<j\le 3} [L_{ij}]\cap(c_1(N_{\mathscr{F}})) \\
&= \sum_{0\le i<j\le 3} 4[p_0] \\
&= 24
\end{aligned}
$$

y el último residuo puede calcularse como $\mathrm{Res}^{BB}_{(c_3)}(\mathscr{F}) = 4[p_0]$ usando el teorema de los residuos y el hecho de que $c_3(N_{\mathscr{F}}) = 4[H^3]$.

3.7. Apéndice.

En este apéndice, explicaremos cómo relacionar nuestra definición de residuos de Baum-Bott con clases de homología, incluso en casos donde la variedad no es compacta. Comenzamos con varias consideraciones sobre la dualidad de Poincaré para variedades no compactas. Sea X un espacio topológico que puede ser incluido como subespacio cerrado de una variedad suave (por ejemplo, cualquier variedad compleja o subvariedad compleja). Los grupos de homología de Borel-Moore de X son los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $H_i^{BM}(X,\mathbb{C})$, definidos considerando la homología del complejo de sumas formales de cadenas singulares con soporte localmente finito. Esto significa que $H_i^{BM}(X,\mathbb{C})$ es el i-ésimo grupo de homología del complejo

$$C_i \to C_{i-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0$$

donde C_j es el grupo abeliano de sumas formales $\sum_\sigma a_\sigma \sigma$, donde σ recorre el conjunto de todas las funciones continuas de Δ^i a X y a_σ es un número complejo, tal que para cada subconjunto compacto S de X solo las cadenas finitas σ cuya imagen coincide con S tienen coeficientes distintos de cero. Los grupos de homología de Borel-Moore satisfacen las siguientes propiedades.

1. Si X es compacto, la homología de Borel Moore coincide con la homología singular.
2. Si $Y \subseteq X$ es una subvariedad cerrada de la variedad compleja X y U es su complemento en X, tenemos una sucesión exacta larga.
$$\cdots \to H_j^{BM}(Y,\mathbb{C}) \to H_j^{BM}(X,\mathbb{C}) \to H_j^{BM}(U,\mathbb{C}) \to H_{j-1}^{BM}(Y,\mathbb{C}) \to \dots$$
3. Si X es una variedad compleja de dimensión n, entonces $H_j^{BM}(X,\mathbb{C}) = 0$ para $j > 2n$ y $H_{2n}(X,\mathbb{C})$ es el espacio vectorial generado libremente por las componentes irreducibles de X.
4. Existen operaciones de producto cap $\cap : H^j(X,\mathbb{C}) \otimes H_k^{BM}(X,\mathbb{C}) \to H_{k-j}^{BM}(X,\mathbb{C})$.
5. Existe una clase fundamental $[X] \in H_{2n}^{BM}(X,\mathbb{C})$ que satisface que el producto cap $-\cap[X]$ induce un isomorfismo $H^j(X,\mathbb{C}) \simeq H_{2n-j}^{BM}(X,\mathbb{C})$ que generaliza la dualidad de Poincaré habitual.
6. Además, para una subvariedad cerrada $Y \subseteq X$ de X existen operaciones de producto cap $\cap : H^j(X, X-Y, \mathbb{C}) \otimes H_k^{BM}(X,\mathbb{C}) \to H_{k-j}^{BM}(Y,\mathbb{C})$ que se restringen a las anteriores cuando $X = Y$ y tales que $\cap[X]$ induce un isomorfismo
$$AL : H^j(X, X-Y, \mathbb{C}) \simeq H_{2n-j}^{BM}(Y,\mathbb{C})$$
que generaliza la dualidad de Alexander-Lefschetz.
7. $H_*(-,\mathbb{C})$ es un funtor covariante con respecto a morfismos propios y un funtor contravariante con respecto a inclusiones abiertas.
8. Si $f : X \to Y$ es una función holomorfa entre variedades complejas, entonces se satisface la siguiente ecuación
$$f_*(f^*(c) \cap \mu) = c \cap f_*(\mu).$$

Existen varias otras propiedades para la homología de Borel Moore y se pueden encontrar más detalles en [Ful98, chapter 19].

El residuo de Baum-Bott definido en 3.4.1 también puede dualizarse a una clase de homología cuando la variedad ambiente o la componente conexa del conjunto singular no son compactas. Para ello, los residuos duales deben considerarse como clases de homología de Borel-Moore. De hecho, la dualidad de Alexander-Lefschetz, utilizada anteriormente para variedades complejas compactas, puede considerarse un caso particular de esta dualidad para la homología de Borel-Moore y, por lo tanto, la misma construcción nos proporciona una clase de homología en la homología de Borel-Moore. Sean $X, \mathscr{F}, \varphi$ y $\mathrm{Res}_\varphi(\mathscr{F})$ como en 3.4.1. Sea $Z \subset S$ una componente conexa del lugar singular S de $\mathscr{F}$. Definimos el residuo de Baum-Bott de $\mathscr{F}$ a lo largo de Z como
$$\mathrm{Res}_\varphi^{BB}(\mathscr{F}, Z) = \pi_Z(AL(\mathrm{Res}_\varphi(\mathscr{F}))) \in H_{2n-2l}^{BM}(Z,\mathbb{C})$$

donde $H^{BM}_{2n-2l}(S,\mathbb{C}) = \bigoplus_{i\in I} H^{BM}_{2n-2l}(Z_i,\mathbb{C})$ para $(Z_i)_{i\in I}$ las componentes conexas de S y π_{Z_i} es la proyección correspondiente a cada sumando.

Ejemplo 3.7.1. Sea $\mathscr{F}$ la foliación saturada en $\mathbb{C}^3$ dada por el anulador de

$$\omega = -2x_2x_3dx_1 - x_1x_3dx_2 + 2x_1x_2dx_3$$

que es la restricción de la forma en 3.5.1 a $\mathbb{C}^3$. El lugar singular es conexo y tiene tres componentes irreducibles $L_{12} = \{x_1 = x_2 = 0\}$, $L_{23} = \{x_1 = x_3 = 0\}$ $L_{23} = \{x_2 = x_3 = 0\}$. Calculamos $\langle \mathrm{Res}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{12}\rangle$ de la siguiente manera: elegimos el punto $p = (0,0,1) \in L_{01}$ y consideramos el pullback de ω al plano transversal $P = \{x_3 = 1\}$ obteniendo la forma

$$i^*(\omega) = -2x_2dx_1 - x_1dx_2$$

que representa la foliación en $\mathbb{C}^2$ generada por el campo vectorial

$$V = x_1\partial_1 - 2x_2\partial_2$$

y por lo tanto las matrices A y (b_{ij}) están dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Los números α_1 y α_2 son ambos iguales a 1 y el valor de $(s_1)^2(A) = (\sigma_1(A))^2 = (\mathrm{tr}(A))^2 = 1$ nos permite calcular

$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), L_{12}\rangle = \mathrm{Res}\left(\frac{(-\frac{1}{2})dx_1 \wedge dx_2}{x_1x_2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

El residuo completo de Baum Bott en este caso resulta

$$\mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}) = -\frac{1}{2}[L_{12}] + 4[L_{13}] + \frac{9}{2}[L_{23}].$$

Esto se puede interpretar como solo una parte del residuo calculado en el ejemplo 3.5.1.

4. Variedades de Poisson complejas

4.1. Variedades de Poisson y la foliación simpléctica

Una **estructura de Poisson** en una variedad compleja X es un bivector holomorfo $\pi \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X)$ tal que $[\pi, \pi] = 0$, donde $[\ ,\ ]$ es el corchete de Schouten de campos multivectoriales. Decimos que la ecuación $[\pi, \pi] = 0$ es la **condición de integrabilidad** del bivector de Poisson. Siempre que (X, π) sea una variedad compleja de Poisson, $\mathscr{O}_X$ hereda un corchete que lo convierte en un haz de álgebras de Poisson. El corchete viene dado por $\{f, g\} = \pi(df \wedge dg)$.
Decimos que una estructura de Poisson π tiene **rango** r si $\pi^r \neq 0$ pero $\pi^{r+1} = 0$. Las estructuras de Poisson holomorfas en una variedad holomorfa equivalen a dos estructuras de Poisson usuales en la variedad diferenciable subyacente correspondientes a la parte real e imaginaria del bivector π y una compatibilidad con la estructura compleja en la variedad: es decir, si π_I y π_R son las partes imaginarias y reales de π y J la estructura compleja en X, entonces (π_I, J) tienen que formar una estructura de Poisson Nijenhuis y $\pi_R^\# = J \circ \pi_I^\#$ [LGSX08, proposition 2.6].

Ejemplo 4.1.1. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja, el espacio dual $\mathfrak{g}^*$ es una variedad de Poisson holomorfa y es tal que el corchete de funciones lineales también es una función lineal. Para ver esto, considere la inclusión $i : \mathfrak{g} \subseteq \mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*}$, donde $\mathfrak{g}$ se identifica con las funciones lineales en $\mathfrak{g}^*$. Dado que $\mathfrak{g}$ genera $\mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*}$ como álgebra conmutativa, existe un único corchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ en $\mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*}$ tal que $\{i(x), i(y)\} = i([x, y])$, y esta estructura de Poisson se denomina estructura de Poisson de Kostant-Soriau en $\mathfrak{g}^*$. Dado que el haz tangente a $\mathfrak{g}^*$ es libre y se genera mediante campos vectoriales ∂_{x_i} donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, tenemos que el bivector que define la estructura de Poisson es de la forma

$$\pi = \sum_{i<j} f_{ij} \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$$

y las funciones f_{ij} que definen este bivector son funciones lineales $f_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k i(x_k)$, donde las constantes c_{ij}^k son las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 4.1.2. Una estructura de Poisson holomorfa sobre una superficie es simplemente un campo bivector holomorfo π, que es una sección del fibrado anticanónico, ya que la condición de integrabilidad siempre se cumple. Por ejemplo, una estructura de Poisson sobre $\mathbb{P}^2$ viene dada por un bivector holomorfo $\pi \in \Lambda^2 T_{\mathbb{P}^2} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ y, por lo tanto, se describe localmente como

$$\pi = f(x, y) \partial_x \wedge \partial_y$$

para coordenadas locales (x, y) sobre $\mathbb{P}^2$ y f, un polinomio cúbico en las variables x, y.

Ejemplo 4.1.3. Las variedades simplécticas holomorfas son, por naturaleza, variedades de Poisson holomorfas. Si (X, π) es una variedad de Poisson holomorfa de dimensión $2n$ y la contracción $\pi^\# : \Omega_X^1 \to T_X$ es genéricamente un isomorfismo, decimos que

(X, π) es una variedad de Poisson **genéricamente simpléctica**. Si el divisor anticanónico $\text{Zeros}(\pi^n)$ es reducido como espacio analítico, la estructura de Poisson se denomina **log-simpléctica**.

Como en el caso diferenciable, en una variedad compleja de Poisson existen ciertos haces de campos vectoriales que se distinguen: los campos vectoriales hamiltonianos y los campos vectoriales de Poisson. Dada una función holomorfa f definida en un abierto de una variedad compleja de Poisson (X, π),, definimos el campo vectorial holomorfo en el mismo abierto $X_f = i_{df}(\pi)$, y lo llamamos su **campo vectorial hamiltoniano**. Denotamos por $\mathfrak{X}_{\text{Ham}}$ el haz de campos vectoriales hamiltonianos. Llamamos a una función holomorfa f definida en un abierto de una variedad Poisson una **función de Casimir** si su campo vectorial hamiltoniano es cero. Denotamos por Cas_X el haz de funciones de Casimir holomorfas en (X, π). Un **campo vectorial de Poisson** en una variedad de Poisson compleja (X, π) es un campo vectorial holomorfo definido sobre un abierto de la variedad Poisson $X \in \Gamma(U, T_X(U))$ tal que $L_X(\pi) = 0$. Denotamos por $\mathfrak{X}_{\text{Poiss}}$ el haz de campos vectoriales de Poisson. Los campos vectoriales hamiltonianos son siempre campos vectoriales de Poisson, pero no necesariamente lo contrario.

Tanto los haces de los campos vectoriales de Poisson como de los campos vectoriales hamiltonianos no son haces de módulos sobre $\mathscr{O}_X$: son haces de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. Los campos vectoriales hamiltonianos forman un subhaz integrable de T_X ya que $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$. En una variedad de Poisson compleja (X, π), la imagen de la función $\pi^\# : \Omega^1_X \to T_X$ dada por contracción con el tensor de Poisson es un subhaz coherente de T_X generado como módulo sobre $\mathscr{O}_X$ por los campos vectoriales hamiltonianos y es, por lo tanto, una distribución integrable. Se llamará **foliación simpléctica** de (X, π) y se notará $\mathscr{F}_{\text{sym}}$ a esta foliación. La foliación simpléctica satisface que todas sus hojas son subvariedades simplécticas (posiblemente singulares) de X y por lo tanto son de dimensión par: esto incluye las subvariedades integrales que pasan por puntos singulares. Decimos que una estructura de Poisson $\pi \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X)$ de rango r **tiene contenido** si existe una sección global s de un fibrado de línea L y una sección $\xi \in \Gamma(X, \Lambda^{2r} T_X \otimes L^*)$ tales que $\pi^r = s\xi$. Como en el caso de las formas diferenciales, una estructura de Poisson tiene contenido si y solo si $\text{Zeros}(\pi^r) = \text{Sing}(\mathscr{F}_{\text{sym}})$ tiene codimensión 1 en X. El grado de la saturación de la foliación simpléctica de una variedad de Poisson sin contenido es siempre el fibrado de línea anticanónico dado que esta foliación está dada como el haz anulador de una sección de $\Omega_X(\Lambda^n T_X) = \Omega_X \otimes \omega_X^{-1}$.

A veces resulta interesante trabajar con estructuras de Poisson sobre espacios analíticos complejos que pueden no ser suaves. Dado un espacio analítico complejo X, definimos el haz de k-multiderivaciones en X como

$$\mathfrak{X}^k_X = (\Omega^k_X)^*.$$

Cuando X es una variedad compleja suave, Ω^k_X es un haz localmente libre y $(\Omega^k_X)^* \simeq \Lambda^k(\Omega^1_X)^* = \Lambda^k T_X$ pero este puede no ser el caso en general. El haz de multiderivaciones en un espacio analítico complejo hereda un único corchete multilineal graduado que extiende el corchete de Lie de derivaciones y lo llamamos corchete de Schouten. Una estructura de Poisson en un espacio analítico complejo X es una biderivación global $\pi \in \Gamma(X, \mathfrak{X}^2_X)$ que satisface $[\pi, \pi] = 0$, donde $[,]$ es el corchete de Schouten de multiderivaciones. Un bivector induce una biderivación siempre pero, en general, una estructura de Poisson en un espacio analítico complejo singular no será inducida por un bivector globalmente.

A continuación discutiremos el concepto de las subvariedades Poisson. Si (X, π) es una variedad de Poisson, un **subespacio de Poisson** de X es un subespacio analítico $Y \subseteq X$ junto con una estructura de Poisson σ, tal que la inclusión $i : Y \to X$ satisface $\pi(df, dg) = \sigma(i^*(df), i^*(dg))$.. En caso de que $Y \subseteq X$ tenga la estructura de un subespacio de Poisson, esta estructura es única y, por lo tanto, podemos afirmar sin ambigüedad que $Y \subseteq X$ es un subespacio de Poisson sin necesidad de aclarar la estructura en cuestión.

Proposición 4.1.4. *Sea (X, π) un espacio analítico de Poisson y sea $Y \subseteq X$ un subespacio analítico con haz de ideales $I \subseteq \mathscr{O}_X$ asociado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *Y admite estructura de subespacio Poisson.*
- *I es un haz de ideales Poisson, es decir, $\{I, \mathscr{O}_X\} \subseteq I$.*
- *Cada campo hamiltoniano es tangente a Y.*

Demostración. Una referencia para este resultado es [Pym13] prop. 4.3.1. □

Dada (X, π) una variedad de Poisson, llamamos a un subespacio $Y \subseteq X$ un **subespacio de Poisson fuerte** si todo campo vectorial de Poisson es tangente a Y. Un subespacio de Poisson fuerte siempre es un subespacio de Poisson, ya que los campos hamiltonianos son de Poisson. Definimos algunos subespacios de Poisson fuertes importantes que pueden considerarse dentro de cualquier variedad de Poisson. Dada una variedad de Poisson compleja (X, π), definimos el $2k-$ésimo**lugar de degeneración** de π como:

$$D_{2k} = \text{Zeros}(\pi^{k+1}).$$

Los lugares de degeneración son invariantes bajo las simetrías del bivector de Poisson y, por lo tanto, son subespacios de Poisson fuertes de X. De esta manera, la variedad de Poisson X está dotada de una estratificación por subespacios de Poisson fuertes (posiblemente singulares).

$$D_0 \subseteq D_2 \subseteq D_4 \subseteq \cdots \subseteq D_{2r} = X$$

donde $2r$ es el rango del bivector π. El lugar de degeneración no trivial más alto, D_{2r-2}, a veces se denomina el conjunto singular de la variedad Poisson y coincide con el conjunto singular de la foliación simpléctica $\mathscr{F}_{\text{sym}}$. El lugar de degeneración D_{2k} admite también la siguiente descripción:

$$D_{2k} = \{x \in X \mid \text{la hoja simpléctica por el punto } x \text{ tiene dimensión a lo sumo} 2k\}.$$

Hay una conjetura importante en el campo de la geometría algebraica o analítica Poisson que concierne a las dimensiones de los lugares de degeneración $D_{2k}(\pi)$. La conjetura fue propuesta por Bondal y es la siguiente.

Conjetura. ([Bon93]) Si (X, π) es una variedad de Poisson compleja Fano de rango r entonces D_{2k} admite una componente irreducible de dimensión al menos $2k + 1$ para cada $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$.

La conjetura de Bondal incluye los siguientes casos particulares:

- Si X es Fano entonces π se anula sobre una curva.

- Si X es Fano y π de rango 2k entonces D_{2k-2} tiene una componente de dimensión al menos $2k-1$. Este resultado fue probado en [Pol97] .

En dimensiones bajas la conjetura toma las siguientes formas

- En el caso de dimensión 3, donde el rango de π debe ser 2, la conjetura se reduce para demostrar el enunciado de que D_0 contiene una curva. Este caso se resolvió en [Pol97].
- En el caso de dimensión 4, la conjetura es el par de enunciados D_0 contiene una curva y D_2 contiene un subespacio de dimensión 3. Este caso se demostró en [GP13].
- En el caso de dimensión 5, la conjetura está conformada por el mismo par de enunciados que en dimensión 4: D_0 contiene una curva y D_2 contiene un subespacio de dimensión 3. Esto sigue abierto.

4.2. Ejemplos de estructuras Poisson en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$

En esta sección vamos a estudiar las estructuras de Poisson en $\mathbb{P}^3$. Este es el ejemplo de dimensión más baja de un espacio proyectivo donde la condición de integrabilidad de la estructura de Poisson no es trivial. Resulta que las estructuras de Poisson en $\mathbb{P}^3$ se corresponden naturalmente con foliaciones de codimensión 1 de grado 4. El fibrado canónico $\omega_{\mathbb{P}^3}$ de $\mathbb{P}^3$ es isomorfo al fibrado de línea $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$. Una forma de verlo es considerando la sucesión exacta de Euler ([OSS11] páginas 3 y 4)

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^4 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to 0$$

que tomando determinantes nos arroja $\Omega^3_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \simeq \det(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^4) \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$.

El wedge pairing

$$\Lambda^2 T_{\mathbb{P}^3} \otimes T_{\mathbb{P}^3} \to \omega^{-1}_{\mathbb{P}^3} \simeq \Lambda^3 T_{\mathbb{P}^3}$$

es no degenerado y, por lo tanto, induce un isomorfismo

$$\Lambda^2 T_{\mathbb{P}^3} \simeq \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(4)$$

y este isomorfismo induce uno entre los espacios de campos de bivectores holomorfos $\Gamma(\mathbb{P}^3, \Lambda^2 T_{\mathbb{P}^3})$ y de 1-formas holomorfas twisteadas de grado 4. Este isomorfismo se puede explicitar de la siguiente manera: dado un campo de bivectores holomorfo $\pi \in \Gamma(\mathbb{P}^3, \Lambda^2 T_{\mathbb{P}^3})$, podemos considerar el morfismo

$$i_\pi : \Omega^3_{\mathbb{P}^3} \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}$$

que a su vez puede verse como un morfismo

$$i_\pi : \Omega^3_{\mathbb{P}^3}(4) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(4)$$

y al elegir una trivialización del fibrado trivial $\Omega^3_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$ el morfismo produce una sección global de $\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(4)$. Es interesante que la condición de integrabilidad del corchete de Poisson sea igual a la condición de integrabilidad de su 1-forma diferencial torcida correspondiente como dice la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Bajo el isomorfismo*

$$\Lambda^2 T_{\mathbb{P}^3} \simeq \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(4)$$

una 1-forma holomorfa twisteada ω de grado 4 en $\mathbb{P}^3$ satisface la identidad $\omega \wedge d\omega = 0$ si y solo si su campo de bivectores correspondiente define una estructura de Poisson holomorfa en $\mathbb{P}^3$.

Demostración. Sea s una sección local del fibrado de línea canónico de $\mathbb{P}^3$. La contracción con esta sección induce un isomorfismo $\Lambda^i T_{\mathbb{P}^3} \to \Omega^{3-i}_{\mathbb{P}^3}$ que denotamos i_s. Definimos el operador de divergencia

$$\triangle_s : \Lambda^i T_{\mathbb{P}^3} \to \Lambda^{i-1} T_{\mathbb{P}^3}$$

por la ecuación $\triangle_s(X) = (i_s)^{-1} \circ d \circ i_s(X)$. Escribimos $Z = \triangle_s(\pi)$ y observamos que

$$d \circ i_\pi(s) = d \circ i_s(\pi) = i_s \triangle_s(\pi) = i_s(Z) = i_Z(s)$$

y por lo tanto

$$\omega \wedge d\omega = 0 \iff i_\pi(s) \wedge d i_\pi(s) = 0 \iff i_\pi(s) \wedge i_Z(s) = 0$$

pero este último producto wedge se anula precisamente en los puntos donde $\pi \wedge Z$ se anula y, por lo tanto,

$$\omega \wedge d\omega = 0 \iff \pi \wedge Z = 0.$$

Al mismo tiempo, la fórmula [Lim, theorem 1.24] o [Pol97, proposition 3.4] nos dice que

$$[\pi, \pi] = \triangle_s(\pi \wedge \pi) + \pi \wedge \triangle_s(\pi) + \triangle_s(\pi) \wedge \pi = 2\pi \wedge Z$$

demostrando que $[\pi, \pi] = 0 \iff \omega \wedge d\omega = 0$. □

El operador $\triangle_s$ utilizado en esta demostración define lo que se conoce como una **estructura BV** en $\Lambda^\bullet T_{\mathbb{P}^3}$. Véase [Pol97, proposition 3.2] para más información sobre este tipo de estructuras, que es común a todas las variedades de Poisson y no particular de $\mathbb{P}^3$. El campo vectorial $Z = \triangle_s(\pi)$ se conoce como el campo vectorial modular y lo analizaremos con más detalle en la siguiente sección.

Debido a la proposición anterior, un campo de bivectores holomorfo equivale a una 1-forma twisteada integrable en $\mathbb{P}^3$ y su haz anulador proporciona una foliación saturada de codimensión uno de grado 4, siempre que esta forma no tenga contenido. Bajo esta equivalencia, en $\mathbb{P}^3$ una estructura de Poisson sin contenido equivale a una 1-forma twisteada integrable en $\mathbb{P}^3$ sin contenido y por tanto, una foliación de codimensión uno saturada de grado 4. Podemos por tanto separar las estructuras de Poisson de $\mathbb{P}^3$ sin contenido según la clasificación de Cerveau y Lins Neto de su foliación correspondiente en 6 tipos diferentes.

La mayor parte de la equivalencia anterior se pierde al trabajar con otras variedades más allá de $\mathbb{P}^3$. Sin embargo, dada una estructura de Poisson de rango r en una variedad compleja de dimensión n, todavía tenemos que mediante el isomorfismo

$$\Lambda^{2r}T_X \simeq \Omega_X^{n-2r} \otimes \omega_X^{-1}$$

el elemento π^r puede realizarse mediante una función

$$i_{\pi^r} : \omega_X \to \Omega_X^{n-2r}$$

que a su vez puede verse como una sección global del haz de formas twisteadas de grado anticanónico, $i_{\pi^r}(\Omega) \in \Gamma(X, \Omega_X^{n-2r}(\omega_X^{-1}))$. El anulador de esta sección global es la saturación de la foliación simpléctica, y esta forma tiene contenido si y solo si la estructura de Poisson lo tenía. Por otro lado una foliación de codimensión $n-2r$ y de grado anticanónico saturada siempre estará dada por una forma de este tipo que dará lugar a una sección de $\Lambda^{2r}T_X$ pero esta sección no será, en general, de la forma π^r para una estructura de Poisson π en X, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.2. En la proposición 2.17 de [Lim] se muestra que una foliación genérica de tipo $L(5,1)$ en $\mathbb{P}^5$ no surgirá de una estructura de Poisson, lo que demuestra que, en general, la multiderivación inducida por una 1-forma de grado anticanónico podría no ser una potencia de un bivector integrable.

4.3. Módulos Poisson y fibrados de línea Poisson

En una variedad de Poisson existen fibrados vectoriales distinguidos que actúan como los fibrados vectoriales con conexiones playas usuales pero dentro de la geometría Poisson. Estos se denominan módulos de Poisson. Dada una variedad de Poisson compleja (X, π), llamaremos a un fibrado vectorial E sobre X junto con una conexión playa de Poisson ∇, un **módulo de Poisson**. Esto significa que un módulo Poisson consiste de un par (E, ∇), como antes, tal que

$$\nabla : E \to T_X \otimes E$$

satisface

$$\nabla(fs) = -X_f \otimes s + f\nabla(s)$$

y tal que la composición $\nabla \circ \nabla = 0$. Esta última condición se conoce como la playitud de la conexión de Poisson. Los módulos de Poisson inducen una acción de Ω_X^1 sobre E al considerar

$$\nabla_\alpha(s) = (\nabla(s))(\alpha).$$

Nos centraremos principalmente en los módulos de Poisson de rango uno, que llamamos **fibrados de línea Poisson**. El conjunto de fibrados de línea Poisson de una cierta variedad de Poisson forma un grupo bajo el producto tensorial habitual. A este grupo lo llamamos **grupo de Picard-Poisson** de (X, π) y lo denotamos como $\mathrm{PicPoiss}(X, \pi)$.. El grupo de Picard-Poisson de (X, π) se puede identificar con el primer grupo de hipercohomología del complejo de haces

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X^\times \longrightarrow T_X \longrightarrow \Lambda^2 T_X \longrightarrow \dots$$

donde la primera función está dada por $f \mapsto \frac{X_f}{f}$ yy X_f es el campo hamiltoniano asociado a f.

Dado un fibrado de línea Poisson (L, ∇) y una trivialización local s de L, obtenemos un campo vectorial definido por

$$\nabla(s) = Z_{conn} \otimes s.$$

Este campo vectorial se denomina campo de conexión de (L, ∇) asociado a la trivialización s. Debido a la playitud de ∇, tenemos que Z_{conn} es un campo vectorial Poisson. Dadas dos trivializaciones locales diferentes s, s', existe una función holomorfa f tal que $s = fs'$ en la intersección de ambos conjuntos abiertos trivializantes. El campo de conexión asociado a s y el asociado a s' difieren en X_f en la intersección de ambos conjuntos abiertos. Debido a esto, la colección de todos los campos vectoriales de conexión en cada trivialización define una clase en $H^0(X, \mathfrak{X}_{Poiss}/\mathfrak{X}_{Ham})$, a la que llamamos el **campo vectorial de conexión** del fibrado de línea Poisson. En general, el campo vectorial de conexión no es un campo vectorial holomorfo global en X. De esta manera, la asignación del campo vectorial de conexión define una función

$$\partial_{conn} : PicPoiss(X, \pi) \to \Gamma(X, \mathfrak{X}_{Poiss}/\mathfrak{X}_{Ham}).$$

Ejemplo 4.3.1. El fibrado canónico ω_X siempre es un módulo Poisson. La conexión puede describirse vía la fórmula

$$\nabla_\alpha(s) = -\alpha \wedge di_\pi(s)$$

para una $1-$forma α y s una sección de ω_X. El campo de conexión asociado con este fibrado de línea Poisson se llama **campo modular** de (X, π) y lo denotamos usualmente como $Z_{mod}(\pi)$. De esta definición es claro que $di_\pi(s) = i_{Z_{mod}}(s)$.

Ejemplo 4.3.2. Describiremos brevemente algunos ejemplos de grupos de Picard-Poisson.

1. Si $(X, 0)$ es una variedad holomorfa con una estructura de Poisson trivial, entonces cada fibrado lineal en X tendrá una estructura de módulo de Poisson dada por la conexión trivial. Las demás estructuras de módulo de Poisson vendrán dadas por la elección de un campo vectorial holomorfo en X, de modo que $PicPoiss(X, 0) \simeq H^0(X, T_X) \times Pic(X)$.
2. Si (X, ω) es una variedad simpléctica, entonces los fibrados lineales que admiten una estructura de Poisson son aquellos con clase Chern nula. En este caso, una estructura de Poisson en un fibrado de línea L corresponde a dotar a L de una conexión playa holomorfa, y el grupo de Picard-Poisson es la componente conexa de la identidad en el grupo de Picard.
3. Si $(\mathbb{P}^n, \pi)$ es una estructura de Poisson holomorfa en $\mathbb{P}^n$, entonces todo fibrado de línea admite una conexión playa de Poisson debido a que el grupo de Picard es cíclico y el fibrado lineal canónico no es trivial y siempre admite una estructura de módulo de Poisson. Dos estructuras de módulo de Poisson en un fibrado lineal dado difieren por la elección de un campo vectorial de Poisson global, lo que da como resultado
$$PicPoiss(\mathbb{P}^n, \pi) \simeq H^0(\mathfrak{X}_{Poiss}) \times \mathbb{Z}.$$

4. Si dotamos a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de una estructura de Poisson distinta de cero, entonces los fibrados de línea de la forma $\mathscr{O}(n, n)$ para $n \in \mathbb{Z}$ llevan una estructura de módulo de Poisson, ya que el módulo canónico pertenece a esta familia. En [Mat20, lemma 4.2.2.] se muestra que ciertas estructuras de Poisson en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ no admiten estructuras de módulo de Poisson para $\mathscr{O}(0, 1)$. Para esas estructuras $\mathrm{PicPoiss}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \pi) \simeq H^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Poiss}}) \times \mathbb{Z}$.

Dado un fibrado de línea Poisson L, los campos vectoriales hamiltonianos, junto con el campo vectorial de conexión de este módulo, proporcionan una nueva foliación en X que contiene a la foliación simpléctica. En el caso de que L sea el fibrado canónico con la estructura canónica de módulo Poisson, obtenemos una foliación denominada como la **foliación modular** de (X, π).

Ejemplo 4.3.3. Sea $X = \mathbb{C}^3$ con la estructura holomorfa de Poisson dada por el campo de bivectores

$$\pi = c_{12}x_1x_2\partial_1 \wedge \partial_2 + c_{13}x_1x_3\partial_1 \wedge \partial_3 + c_{23}x_2x_3\partial_2 \wedge \partial_3.$$

Esta estructura de Poisson es la restricción a un subconjunto abierto afín de $\mathbb{P}^3$ de la estructura de Poisson inducida por una foliación de tipo $L(1, 1, 1, 1)$, como en el ejemplo 2.5.8. La foliación simpléctica para esta estructura se genera mediante los campos vectoriales hamiltonianos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\mathrm{sym}} &= \langle i_{dx_1}(\pi), i_{dx_2}(\pi), i_{dx_3}(\pi)\rangle \\ &= \langle x_1(c_{12}x_2\partial_2 + c_{13}x_3\partial_3), x_2(-c_{12}x_1\partial_1 + c_{23}x_3\partial_3), x_3(-c_{13}x_1\partial_1 - c_{23}x_2\partial_2)\rangle.\end{aligned}$$

Para valores genéricos de $\{c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$, el lugar singular de π es la unión de los tres ejes de coordenadas. El campo vectorial modular de esta estructura de Poisson es un campo vectorial de Poisson global, ya que $\omega_{\mathbb{C}^3}$ es trivial y puede calcularse como

$$Z_{\mathrm{mod}} = -(c_{12} + c_{13})x_1\partial_1 + (c_{12} - c_{23})x_2\partial_2 + (c_{13} + c_{23})x_3\partial_3.$$

Fuera del lugar singular, el campo modular es tangente a la foliación simpléctica como se puede ver por la identidad $Z_{\mathrm{mod}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{i_{dx_i}(\pi)}{x_i}$, sin embargo, sobre el lugar singular Z_{mod} no se anula para valores genéricos de $\{c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$ aunque todos los campos vectoriales hamiltonianos sí lo hacen.

Por ejemplo, si el campo bivectorial es

$$\pi_1 = -2x_1x_2\partial_1 \wedge \partial_2 - x_1x_3\partial_1 \wedge \partial_3 + 2x_2x_3\partial_2 \wedge \partial_3.$$

La foliación simpléctica para esta estructura se genera mediante los campos vectoriales hamiltonianos.

$$\mathscr{F}_{\mathrm{sym}} = \langle i_{dx_1}(\pi_1), i_{dx_2}(\pi_1), i_{dx_3}(\pi_1)\rangle = \langle x_1(-2x_2\partial_2 - x_3\partial_3), x_2(2x_1\partial_1 + 2x_3\partial_3), x_3(x_1\partial_1 - 2x_2\partial_2)\rangle$$

que ya vimos que no es una foliación saturada. Por otro lado, el campo modular es $Z_{\mathrm{mod}} = 3x_1\partial_1 - 4x_2\partial_2 + x_3\partial_3$. En el lugar singular, Z_{mod} no se anula y la foliación modular se ve como simplemente la saturación $\mathscr{F}_{\mathrm{symp}}^{\mathrm{sat}}$.

Si consideramos ahora la estructura holomorfa de Poisson dada por el campo de bivectores

$$\pi_2 = 2x_1x_2\partial_1 \wedge \partial_2 + x_1x_3\partial_1 \wedge \partial_3 - x_2x_3\partial_2 \wedge \partial_3$$

su foliación simpléctica es

$$\mathscr{F}_{\text{symp}} = \langle x_1(2x_2\partial_2 + x_3\partial_3), x_2(-2x_1\partial_1 - x_3\partial_3), x_3(-x_1\partial_1 + x_2\partial_2)\rangle$$

y la saturación de su foliación simpléctica es

$$\mathscr{F}^{\text{sat}}_{\text{symp}} = \langle 2x_2\partial_2 + x_3\partial_3, -2x_1\partial_1 - x_3\partial_3, -x_1\partial_1 + x_2\partial_2\rangle$$

Pero ahora el campo modular es $Z_{\text{mod}} = -3x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2$, que se anula a lo largo de la recta $\{x_1 = x_2 = 0\} \subseteq D_0$ y, por lo tanto, la foliación modular no está saturada y $\mathscr{F}_{\text{symp}} \subsetneq \mathscr{F}_{\text{mod}} \subsetneq \mathscr{F}^{\text{sat}}_{\text{symp}}$.

Los ejemplos anteriores muestran que la foliación simpléctica de una variedad de Poisson es típicamente no saturada. En todos los ejemplos anteriores, la foliación simpléctica presentaba singularidades de codimensión 2, pero esto no necesariamente ocurre, ya que la estructura de Poisson puede anularse a lo largo de un divisor $\{f = 0\}$ como sucede tomando cualquier estructura de Poisson de la forma $\pi = f\partial_x \wedge \partial_y$ en $\mathbb{C}^2$, donde f es una función holomorfa.

4.4. Residuos de Gualtieri y Pym

En el trabajo [GP13], los autores definieron una multiderivación soportada en cada lugar de degeneración inducido por el campo vectorial de conexión de un fibrado de línea Poisson, a la que denominaron *residuo*. Estos residuos surgieron como una búsqueda para resolver la conjetura de Bondal. En efecto, si estos residuos fueran no nulos para un módulo de Poisson amplio obtendríamos una explicación para las dimensiones que aparecen en la conjetura.

Definición 4.4.1. Sea (L, ∇) un fibrado de línea Poisson. Para cada punto $p \in D_{2k}$, se elige un subconjunto abierto trivializante $p \in U$ para L y se escribe Z_{conn} para el campo de conexión de L en este abierto U. El k-ésimo residuo de Gualtieri-Pym asociado a (L, ∇) queda definido como:

$$\text{Res}^{GP}_k(L, \nabla)(p) = \left(Z_{\text{conn}} \wedge \pi^k\right)(p).$$

Los residuos asociados al fibrado de línea de Poisson canónico se denominan **residuos modulares** de (X, π).

Teorema 4.4.2. *Para cada fibrado de línea Poisson (L, ∇), el elemento*

$$Res^{GP}_k(L, \nabla) = (Z_{conn} \wedge \pi^k)|_{D_{2k}}$$

es un elemento bien definido de $\Gamma(D_{2k}, \Lambda^{2k+1}T_{D_{2k}})$, independiente de la elección del campo vectorial de conexión.

Demostración. Primero debemos demostrar que la definición de cada residuo es independiente de la trivialización elegida para proporcionar el campo vectorial de conexión. Pero si elegimos dos trivializaciones diferentes alrededor de un punto p que dan lugar a los campos vectoriales de conexión Z_1 y Z_2 tenemos que

$$(Z_1 \wedge \pi^k)|_{D_{2k}} - (Z_2 \wedge \pi^k)|_{D_{2k}} = ((Z_1 - Z_2) \wedge \pi^k)|_{D_{2k}} = (X_f \wedge \pi^k)|_{D_{2k}} = 0$$

ya que el último producto wedge se anula en D_{2k} para cada campo vectorial hamiltoniano X_f. Esto demuestra que la definición es independiente de las elecciones realizadas. Finalmente, para demostrar que $\mathrm{Res}_k^{GP}(L, \nabla)$ es un elemento de $\Gamma(D_{2k}, \Lambda^{2k+1} T_{D_{2k}})$ necesitamos demostrar que Z_{conn} y π son tangentes a D_{2k} y esto es cierto porque D_{2k} es un subespacio fuerte de Poisson y Z_{conn} es un campo vectorial de Poisson. □

Los residuos de Gualtieri-Pym de un fibrado lineal de Poisson son entonces multiderivaciones globales en cada uno de los lugares de degeneración. Este residuo se anula en los puntos donde el campo vectorial de conexión es hamiltoniano. Además, dado que los residuos de Gualtieri-Pym se construyen únicamente utilizando el campo vectorial de conexión del fibrado lineal, el k-ésimo residuo define una función:

$$\Gamma(X, \mathfrak{X}_{Poiss}/\mathfrak{X}_{Ham}) \to \Gamma(D_{2k}, \Lambda^{2k+1} T_{D_{2k}}).$$

Ejemplo 4.4.3. $\mathrm{Res}_0^{GP}(L, \nabla)$ es la restricción del campo de conexión de (L, ∇) a D_0.

Ejemplo 4.4.4. Sea $X = \mathbb{C}^3$ con la estructura de Poisson holomorfa dada por el bivector

$$\pi = c_{12} x_1 x_2 \partial_1 \wedge \partial_2 + c_{13} x_1 x_3 \partial_1 \wedge \partial_3 + c_{23} x_2 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3,$$

que ya estudiamos en el ejemplo 4.3.3. Para valores genéricos de c_{12}, c_{13} and c_{23} el lugar singular es la unión de siguientes tres rectas $D_0 = \{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_1 = x_3 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\} = L_{12} \cup L_{13} \cup L_{23}$. Usando los cálculos del ejemplo 4.3.3 vemos que:

$$\mathrm{Res}_0^{GP}(\omega_{\mathbb{C}^3}, \nabla_{mod})|L_{12} = (c_{13} + c_{23}) x_3 \partial_3$$

$$\mathrm{Res}_0^{GP}(\omega_{\mathbb{C}^3}, \nabla_{mod})|L_{13} = (c_{12} - c_{23}) x_2 \partial_2$$

$$\mathrm{Res}_0^{GP}(\omega_{\mathbb{C}^3}, \nabla_{mod})|L_{23} = -(c_{12} + c_{13}) x_1 \partial_1.$$

mientras que $\mathrm{Res}_1^{GP}(\omega_{\mathbb{C}^3}, \nabla_{mod})$ se anula en todos los puntos.

Ejemplo 4.4.5. Consideremos (X, π) una variedad de Poisson compleja log-simpléctica de dimensión $2n$ y supongamos que el divisor de degeneración $Y = \mathrm{Zeros}(\pi^n)$ es suave. En este caso, π corresponde a una ω 2-forma simpléctica con polos, y entonces ω^n es una forma de volumen con polos a lo largo de Y, que tiene un residuo de Poincaré

$$\mathrm{Res}_{Poin}(\omega^n) \in H^0(Y, \omega_Y).$$

Entonces tenemos la igualdad:

$$\mathrm{Res}_{Poin}(\omega^n)^{(-1)} = \frac{-1}{n} \mathrm{Res}_{n-1}^{GP}(\omega_X, \nabla_{mod}).$$

El ejemplo anterior vincula los residuos modulares de Gualtieri-Pym con los residuos de Poincaré de las formas logarítmicas.

5. Los teoremas de comparación para residuos

5.1. Singularidades de foliaciones de tipo Kupka

En esta sección, analizaremos las propiedades de ciertos puntos en el lugar singular de una foliación saturada, denominados puntos de Kupka. Finalmente, demostraremos que los puntos de Kupka de la foliación simpléctica de una estructura de Poisson están relacionados con la anulación de algunos de los residuos de Gualtieri-Pym. Comenzaremos definiendo los puntos que consideraremos.

Definición 5.1.1. Dada una 1-forma twisteada integrable $\omega \in \Gamma(\Omega^1_X \otimes L)$, sin contenido, su **conjunto de Kupka** se define como

$$K(\omega) = \overline{\{p \in X |\ \omega(p) = 0, d\omega(p) \neq 0\}}.$$

Un punto $p \in X$ es un **punto Kupka** si $\omega(p) = 0$ pero $d\omega(p) \neq 0$.

Observación 5.1.2. Una 1-forma diferencial twisteada integrable $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X \otimes L)$ define una foliación holomorfa $\mathscr{F}$ y su conjunto de Kupka es un invariante de la foliación $\mathscr{F}$ siempre que la variedad compleja X sea compacta. De hecho, si dos 1-formas diferenciales twisteadas diferentes sin contenido ω_1 y ω_2 definen la misma foliación saturada $\mathscr{F}$, entonces se anulan localmente en los mismos campos vectoriales y, por lo tanto, difieren localmente en multiplicar por una función. Por lo tanto, debe haber una relación de la forma $\omega_1 = s\omega_2$ para alguna sección s de un fibrado de línea sobre X y dado que ni ω_1 ni ω_2 tienen contenido, s debe ser una función global sobre X. Como X es compacto, s es una función constante y tenemos que $d\omega_1$ se anula exactamente en los mismos puntos que $d\omega_2$.

Ejemplo 5.1.3. La saturación de la foliación del ejemplo 2.4.1 en $\mathbb{C}^3$,

$$\mathscr{F}^{sat} = \langle(-2x_2\partial_2 - x_3\partial_3), (2x_1\partial_1 + 2x_3\partial_3), (x_1\partial_1 - 2x_2\partial_2)\rangle$$

puede describirse como el haz anulador de una 1-forma de la siguiente manera:

$$\mathscr{F}^{sat} = \mathrm{Ann}(-2x_2x_3dx_1 - x_1x_3dx_2 + 2x_1x_2dx_3).$$

El único punto no Kupka en su lugar singular S está dado por el origen.

El siguiente teorema refleja la estructura local de una foliación alrededor de una singularidad de tipo Kupka.

Teorema 5.1.4. *(Kupka) Sea* X *una variedad compleja y* $\omega \in \Omega^p_X(U)$ *una forma* p− *integrable que define una foliación saturada en un entorno* U *de un punto* $x \in X$. *Supongamos que* x *es un punto Kupka de esta foliación, entonces existen un entorno analítico abierto* U *de* x *con funciones coordenadas* $x_1, \ldots, x_n$ *tales que, en esas coordenadas,* ω *puede escribirse*

$$\omega = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\widehat{dx_1} + F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\widehat{dx_2} + \cdots + F_{p+1}(x_1, \ldots, x_n)\widehat{dx_{p+1}}$$

donde $\widehat{dx_i} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge dx_{p+1}$ *para* $i \in \{1, \dots, p+1\}$.
En términos más intrínsecos, $\omega|_V$ *es el pullback de una* p*-forma integrable en* $\mathbb{C}^{p+1}$

Demostración. Para una prueba completa ver [Qua] teorema 2.4.13. □

El teorema anterior establece lo siguiente: dado una componente de Kupka conexa K de una foliación de codimensión 1 existe un germen en $0 \in \mathbb{C}^2$ de una 1-forma holomorfa $\eta = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$ con una singularidad aislada en 0, una cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ de un entorno de K en X y una familia de sumersiones holomorfas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^2$ tales que $K \cap U_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(0)$ y $\varphi_\alpha^*(\eta) = \omega|_{U_\alpha}$. En particular, la componente de Kupka irreducible K tiene la estructura de una subvariedad compleja de X suave de codimensión 2 y el conjunto de Kupka es un subespacio analítico de X de codimensión 2. Llamamos a una componente irreducible de $K(\omega)$ una **componente de Kupka** del lugar singular.

En esta sección también analizaremos un resultado de linealización vinculado a las componentes de Kupka compactas de una foliación de codimensión 1 que utilizaremos más adelante. El gérmen de una 1-forma holomorfa en $\mathbb{C}^2$, definida por una foliación de codimensión 1 alrededor de una componente de Kupka, se denomina su **tipo transversal** asociado a dicha componente. Está bien definido, salvo por biholomorfismos y la multiplicación por funciones holomorfas no nulas. Dada una foliación de codimensión 1 inducida por una 1-forma ω y K un componente de Kupka de su lugar singular, tenemos que su tipo transversal está dado por una 1-forma $\eta = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$ y esta 1-forma define un campo vectorial dual $X_\omega = f_2(x,y)\partial_x - f_1(x,y)\partial_y$ que genera el anulador de ω. La matriz

$$A = DX(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & -\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}$$

se denomina **tipo transversal lineal** de ω a lo largo de K. Está bien definida a menos de multiplicación por escalares y conjugación de matrices y satisface que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ ya que esto equivale a la condición de Kupka.

Observación 5.1.5. Como $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ tenemos que el tipo transversal lineal tiene un autovalor distinto de cero y al reescalar podemos asumir que sus autovalores son 1 y λ. Llamamos al tipo transversal lineal de **tipo Poincaré** si $\lambda \notin (-\infty, 0)$. Este nombre se debe a la teoría de Poincaré Dulac sobre la linealización de campos vectoriales. De hecho, dado un campo vectorial en $\mathbb{C}^2$ con una singularidad en el origen, se puede considerar su matriz diferencial en el origen y sus autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Se dice que los autovalores se encuentran en el **dominio de Poincaré** si 0 no pertenece a la cápsula convexa de $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Los campos vectoriales cuyos autovalores se encuentran en el dominio de Poincaré pueden reducirse a una forma polinómica normal conocida como forma de Poincaré-Dulac. Si el tipo transversal lineal es de tipo Poincaré, el campo vectorial dual de la forma ω puede reducirse a su forma normal de Poincaré-Dulac.

En [GMLN91], los autores demostraron que una foliación de codimensión 1 con una componente de Kupka compacta, cuyo tipo transversal lineal es de Poincaré y su fibrado normal tiene una primera clase de Chern no nula, puede linealizarse. Además, se demostró que el valor complejo λ descrito en la observación 5.1.5 era un número

racional. Posteriormente, en [CAS94], se demostró que cuando el fibrado normal de la componente de Kupka es amplio, el tipo transversal lineal pertenece al dominio de Poincaré, completando el siguiente resultado.

Teorema 5.1.6. *(Teorema de linearización) Sea X una variedad proyectiva y sea $\mathscr{F}$ una foliación de codimensión 1 en X, dada como el anulador de una 1-forma twisteada $\omega \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$.. Supóngase que el fibrado de línea L es amplio y sea K una componente de Kupka compacta del lugar singular de ω. Entonces, el tipo transversal lineal en cualquier punto Kupka de K es de tipo Poincaré con autovalores racionales. Además, el tipo transversal viene dado por $\eta = pxdy - qydx$ con p, q enteros coprimos positivos o $p = q = 1$.*

Demostración. Ver [GMLN91], Teorema 2.3 y Corolario 2.4 y Teorema 3.4 de [CAS94]. □

Finalizamos esta sección estudiando la noción de singularidades de Kupka de la foliación simpléctica de una variedad de Poisson. Comenzamos con una breve observación sobre las foliaciones simplécticas.

Observación 5.1.7. Dada una variedad de Poisson compleja (X, π) sin contenido, la saturación de su foliación simpléctica $\mathscr{F}^{sat}_{sym}$ viene dada por el anulador de la $(n - 2r)$−forma torcida dada por la contracción $\omega_\pi = i_{\pi^r}(s)$, donde s es una sección del fibrado de línea canónico y r es el rango de la estructura de Poisson. En efecto, la foliación dada por el anulador de esta forma está saturada, tiene el mismo lugar singular que $\mathscr{F}_{sym}$ y coincide con $\mathscr{F}_{sym}$ fuera de sus singularidades; por lo tanto, debe ser la saturación de la foliación simpléctica. Esto nos permite relacionar las nociones de la teoría de foliaciones desarrolladas para formas diferenciales twisteadas con las de la geometría de Poisson y la foliación simpléctica.

Ahora estamos en condiciones de establecer un resultado que relaciona el residuo más alto de Gualtieri-Pym y las componentes de Kupka del lugar singular de la foliación simpléctica.

Teorema 5.1.8. *Sea (X, π) una variedad de Poisson de rango r sin contenido y D_{2r-2} su locus singular. Entonces un punto $p \in D_{2r-2}$ es un cero de $Res^{GP}_{r-1}(\omega_X)$ si y solo si p es un punto no Kupka de $Sing(\mathscr{F}^{sat}_{sym})$.*

Demostración. El lema 7.1 de [GP13] nos dice lo siguiente:

$$d \circ i_{\pi^r}(s) = r\, i_{\pi^r} \circ d(s) - r\, i_{\pi^{(r-1)}} \delta s$$

donde $\delta : \Omega^n_X \to \Omega^{n-1}_X$ se conoce como el operador de homología de Poisson y está dado por $\delta = i_\pi \circ d - d \circ i_\pi$. Como $ds = 0$ tenemos que la fórmula anterior nos dice que

$$d \circ i_{\pi^r}(s) = r\, i_{\pi^{(r-1)}} d i_\pi s = r\, i_{\pi^{(r-1)}} i_{Z_{mod}} s = r i_{Z_{mod} \wedge \pi^{(r-1)}}(s).$$

Por lo tanto, $d(\omega_\pi) = d(i_{\pi^r}(s)) = 0$ si y solo si $i_{Z_{mod} \wedge \pi^{(r-1)}}(s) = 0$, lo cual ocurre exactamente cuando $Z_{mod} \wedge \pi^{(r-1)} = 0$. Por lo tanto, un punto singular no Kupka de ω_π es exactamente igual a un punto en D_{2r-2} en el que $Z_{mod} \wedge \pi^{(r-1)}$ se anula, y ese es exactamente un cero de $Res^{GP}_{r-1}(\omega_X)$. □

Existen varios resultados en la literatura que involucran singularidades Kupka de foliaciones. La proposición 5.1.8 nos permite traducir algunos de esos resultados al lenguaje de la geometría y los residuos de Poisson.

5.2. Residuos de Baum-Bott y de Gualtieri-Pym

En esta sección, obtendremos relaciones entre ciertos residuos de Gualtieri-Pym y los residuos de Baum-Bott de la foliación simpléctica. Enunciaremos a continuación nuestro teorema principal, que es el siguiente:

Teorema 5.2.1. *Sea (X, π) una variedad de Poisson compleja de rango r, que no es genéricamente simpléctica y sin contenido. Sea Z una componente irreducible y reducida de $D_{2r-2}(\pi)$ de dimensión 2r-1. Entonces $Res^{GP}_{r-1}(\omega_X)|_Z = 0$ si y solo si $\langle Res^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z\rangle = 0$.*

Antes de demostrar nuestro teorema principal, lo ilustraremos con algunos ejemplos de estructuras de Poisson en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ y los cálculos de los residuos involucrados en el teorema.

Ejemplo 5.2.2. Sea π una estructura de Poisson de tipo L(1, 1, 1, 1) en $\mathbb{P}^3$ dada por un bivector de la forma

$$\pi = \sum c_{ij} x_i x_j \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$$

sin contenido. Estas estructuras de Poisson también se denominan diagonales (véase [LP14]). Calcularemos los residuos modulares y de Baum-Bott en estas estructuras. Para este ejemplo, el único lugar de degeneración no trivial es

$$S = D_0(\pi) = \bigcup_{0\le i<j\le 3} \{x_i = x_j = 0\}$$

que es la unión de 6 rectas. Llamemos $L_{ij} = \{x_i = x_j = 0\}$, entonces en cada componente obtenemos que el residuo modular tiene la forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{L_{01}} &= (c_{02} + c_{23} - c_{03} + c_{12} + c_{23} - c_{13})\, z_2\partial_2|_{L_{01}}\\
\mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{L_{02}} &= (c_{01} + c_{13} - c_{03} - c_{12} - c_{23} + c_{13})\, z_1\partial_1|_{L_{02}}\\
\mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{L_{03}} &= (c_{01} + c_{12} - c_{02} + c_{12} + c_{23} - c_{13})\, z_1\partial_1|_{L_{03}}\\
\mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{L_{12}} &= (-c_{02} - c_{23} + c_{03} - c_{01} - c_{13} + c_{03})\, z_0\partial_0|_{L_{12}}\\
\mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{L_{13}} &= (-c_{01} - c_{12} + c_{02} + c_{02} + c_{23} - c_{03})\, z_0\partial_0|_{L_{13}}\\
\mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{L_{23}} &= (c_{01} + c_{12} - c_{02} + c_{01} + c_{13} - c_{03})\, z_0\partial_0|_{L_{23}}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si consideramos los residuos de Baum-Bott en cada una de las componentes irreducibles del lugar singular obtenemos que

$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), L_{01}\rangle = \frac{(c_{02}+c_{23}-c_{03}+c_{12}+c_{23}-c_{13})^2}{(c_{02}+c_{23}-c_{03})\,(c_{12}+c_{23}-c_{13})}$$
$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), L_{02}\rangle = \frac{(c_{01}+c_{13}-c_{03}-c_{12}-c_{23}+c_{13})^2}{(c_{01}+c_{13}-c_{03})\,(-c_{12}-c_{23}+c_{13})}$$
$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), L_{03}\rangle = \frac{(c_{01}+c_{12}-c_{02}+c_{12}+c_{23}-c_{13})^2}{(c_{01}+c_{12}-c_{02})\,(c_{12}+c_{23}-c_{13})}$$
$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), L_{12}\rangle = \frac{(-c_{02}-c_{23}+c_{03}-c_{01}-c_{13}+c_{03})^2}{(-c_{02}-c_{23}+c_{03})\,(-c_{01}-c_{13}+c_{03})}$$
$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), L_{13}\rangle = \frac{(-c_{01}-c_{12}+c_{02}+c_{02}+c_{23}-c_{03})^2}{(-c_{01}-c_{12}+c_{02})\,(c_{02}+c_{23}-c_{03})}$$
$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), L_{23}\rangle = \frac{(c_{01}+c_{12}-c_{02}+c_{01}+c_{13}-c_{03})^2}{(c_{01}+c_{12}-c_{02})\,(c_{01}+c_{13}-c_{03})}.$$

Ejemplo 5.2.3. Sea π una estructura de Poisson tal que su foliación simpléctica es de tipo L(1, 1, 2) en $\mathbb{P}^3$. Estas estructuras de Poisson están dadas por un bivector sin contenido de la forma

$$\begin{aligned}\pi = {} & c_0x_0x_2\partial_0\wedge\partial_2 - c_0x_0x_3\partial_0\wedge\partial_3 + c_1x_1x_3\partial_1\wedge\partial_3 - c_1x_1x_2\partial_1\wedge\partial_2 \\ & + [(c_0-c_1)(x_0^2+\lambda x_0x_1+x_1^2+x_2x_3)+2c_0x_0^2-2c_1x_1^2]\partial_2\wedge\partial_3.\end{aligned}$$

para algunos parámetros λ, c_0 y c_1. Sea $g = x_0^2+\lambda x_0x_1+x_1^2+x_2x_3$, entonces tenemos que el único lugar de degeneración no trivial de estas estructuras es

$$S = D_0(\pi) = \{x_0=x_1=0\}\cup\{x_0=g=0\}\cup\{x_1=g=0\}\cup\{(1:\lambda_1:0:0)\}\cup\{(1:\lambda_2:0:0)\}$$

donde λ_i son las dos raíes de la ecuación $(c_0-3c_1)x^2+\lambda(c_0-c_1)x+(3c_0-c_1)$. Let $L_{01}=\{x_0=x_1=0\}$, $E_0=\{x_0=g=0\}$ and $E_1=\{x_1=g=0\}$, así que

$$D_0(\pi) = L_{01}\cup E_0\cup E_1\cup\{\text{puntos aislados}\}.$$

En este caso, el residuo modular de Gualtieri-Pym puede ser computado en cada componente como

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{L_{01}} &= (-4(c_0-c_1))x_3\partial_3|_{L_{01}}\\ \mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{E_0} &= (4c_1)(x_1\partial_1+2x_2\partial_2)|_{E_0}\\ \mathrm{Res}^{GP}_0(\omega_X)|_{E_1} &= (-4c_0)(x_0\partial_0+2x_2\partial_2)|_{E_1}.\end{aligned}$$

Por otro lado, los residuos de Baum-Bott asociados al polinomio $(s_1)^2$ quedan dados por

$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}_{symp}), L_{01}\rangle = \frac{16(c_0-c_1)^2}{(3c_0-c_1)(c_0-3c_1)}$$
$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}_{symp}), E_0\rangle = \frac{-16(c_1)^2}{(c_0+c_1)(c_0-3c_1)}$$
$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}_{symp}), E_1\rangle = \frac{16(c_0)^2}{(c_1+c_0)(3c_0-c_1)}.$$

También es interesante estudiar ejemplos de estructuras de Poisson con lugares singulares no reducidos. El siguiente ejemplo muestra que es posible construir estructuras de Poisson con residuo modular máximo de Gualtieri-Pym nulo a lo largo de una componente irreducible de su conjunto singular pero con un residuo de Baum-Bott correspondiente no nulo, lo que demuestra que las hipótesis del teorema 5.2.1 son necesarias.

Ejemplo 5.2.4. Consideremos la estructura de Poisson en $\mathbb{C}^3$ dada por el siguiente bivector.

$$\pi = (x^3 - y^3)\partial_x \wedge \partial_y + x(x+y)\partial_x \wedge \partial_z + y(x+y)\partial_y \wedge \partial_z$$

Este bivector tiene rango 2 en $\mathbb{C}^3$ y su lugar degenerado está dado por

$$S = D_0(\pi) = \{x^3 - y^3 = 0, x(x+y) = 0, y(x+y) = 0\}.$$

Por lo tanto, S es el conjunto $\{x = y = 0\}$ con una estructura no reducida de variedad analítica. π es una estructura de Poisson sin contenido. La saturación de la foliación simpléctica de π viene dada por el anulador de la 1-forma

$$\omega_\pi = i_\pi(dx \wedge dy \wedge dz) = y(x+y)dx - x(x+y)dy + (x^3 - y^3)dz$$

, y dicho anulador está generado por los campos vectoriales $v = (x\partial_x + y\partial_y)$ y $u = y^2\partial_x + x^2\partial_y + (x+y)\partial_z$. Ambos campos son cero sobre S, por lo que la descomposición en hojas del lugar singular de la saturación de la foliación simpléctica viene dada por puntos. En particular, la foliación simpléctica está saturada. Dado que $d\omega_\pi = (-3x - 3y)dx \wedge dy + 3x^2 dx \wedge dz - 3y^2 dy \wedge dz$, tenemos que todos los puntos de S son singularidades no Kupka y, por lo tanto, el residuo de Gualtieri-Pym $\mathrm{Res}_0^{GP}(\omega_{\mathbb{C}^3})|_S = 0$. Sin embargo, el residuo de Baum-Bott a lo largo de S asociado con el cuadrado del primer polinomio simétrico elemental $(s_1)^2$ es distinto de cero. Para comprobarlo, utilizaremos el algoritmo de Hartshorne para calcularlo. Consideramos el plano $P = \{x = z\}$ transversal a S, la inclusión $i : P \to \mathbb{C}^3$ y la restricción

$$i^*(\omega_\pi) = (y(x+y) + (x^3 - y^3))dx - x(x+y)dy$$

de modo que la foliación restringida a P está dada por el campo

$$X_\pi = x(x+y)\partial_x + (y(x+y) + (x^3 - y^3))\partial_y = (x^2 + xy)\partial_x + (x^3 + xy + y^2 - y^3)\partial_y.$$

Sean $f = x^2 + xy$ y $g = x^3 + xy + y^2 - y^3$. Tenemos que

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - xy - y)f + \frac{1}{2}xg = x^4$$

y

$$\frac{1}{2(1-y)}(-x^2y - x^2 - xy^2 + xy + y^3 - 2y^2 - y)f + \frac{1}{2(1-y)}(xy + x + 2y^2)g = y^4.$$

Por otro lado, $(\mathrm{tr}(DX_\pi))^2 = (3x + 3y - 3y^2)^2$ por lo que el residuo de Baum-Bott en cuestión puede ser calculado como

$$\left[\begin{matrix} (3x + 3y - 3y^2)^2 \det(A)dx \wedge dy \\ x^4y^4 \end{matrix}\right]_0$$

Donde la matriz A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2+y^2-xy-y) & \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2(1-y)}(-x^2y-x^2-xy^2+xy+y^3-2y^2-y) & \frac{1}{2(1-y)}(xy+x+2y^2) \end{pmatrix}.$$

Y tenemos que

$$\det(A) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-y}(x^3y+x^3+x^2y^2-x^2y-xy^3+xy^2+y^4-y^3)$$

y además

$$(3x+3y-3y^2)^2 = 9(x^2-2xy^2+2xy+y^4-2y^3+y^2).$$

Por lo que el residuo en cuestión es el coeficiente correspondiente al monomio x^3y^3 en la expansión en Taylor de

$$\frac{9}{2}(x^2-2xy^2+2xy+y^4-2y^3+y^2)\frac{1}{1-y}(x^3y+x^3+x^2y^2-x^2y-xy^3+xy^2+y^4-y^3)$$

que arroja

$$\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}_{\mathrm{symp}}), \rangle = \frac{9}{2}\cdot 2 = 9$$

Terminamos esta sección proveyendo una prueba de 5.2.1.

Demostración. Supongamos primero que el residuo de Gualtieri-Pym se anula a lo largo de Z. Entonces, Z es una componente no Kupka del lugar singular de la saturación de la foliación simpléctica. Como el grado del polinomio que define el residuo de Baum-Bott es $n-2r+1$, tenemos que

$$\mathrm{HRes}^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}) \in H_{4r-2}(D_{2r-2}(\pi), \mathbb{C})$$

y como $D_{2r-2}(\pi)$ tiene dimensión $2r-1$, tenemos que este grupo de homología está generado por las componentes irreducibles de $D_{2r-2}(\pi)$, una de los cuales es Z. Entonces escribimos

$$\mathrm{HRes}^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}) = \sum_i \langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}), Z_i\rangle [Z_i]$$

y usamos el algoritmo de la sección 3.5 para calcular $\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}), Z\rangle$. Consideremos la $(n-2r)-$forma que define la saturación de la foliación simpléctica $\omega = i_{\pi^r}(s)$ para s una sección del fibrado canónico y consideramos las coordenadas afines $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alrededor de un punto $p \in Z$. Podemos elegir estas coordenadas de modo que $x_{n-2r+2} = x_{n-2r+3} = \ldots x_n = 0$ sea una variedad lineal P que interseca a Z transversalmente en el punto p. Sea $i : P \to X$ la inclusión. Sea

$$i^*(\omega) = F_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge \ldots dx_{n-2r+1} + F_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \ldots dx_{n-2r+1} + \ldots F_{n-2r+1} dx_1 \wedge \ldots dx_{n-2r}$$

entonces la foliación está generada en un entorno de p por la colección de campos de vectores $\{\partial_{n-2r+2}, \ldots, \partial_n, X\}$ con

$$X = F_1\partial_{x_1} - F_2\partial_{x_2} + F_3\partial_3 \cdots + (-1)^{n-2r+2}F_{n-2r+1}\partial_{n-2r+1}.$$

Sea $A = DX(0)$. Tenemos que el residuo de Baum-Bott que estamos buscando puede ser calculado como el coeficiente correspondiente a $\frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots dx_{n-2r+1}}{x_1 x_2 \ldots x_{n-2r+1}}$ de laexpansión en serie de Taylor de

$$\frac{(tr(A))^{n-2r+1} det(b_{ij}) dx_1 \wedge dx_2 \ldots dx_{n-2r+1}}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-2r+1}^{\alpha_{n-2r+1}}}$$

donde las funciones b_{ij} son funciones holomorfas tales que $\sum_j b_{kj}(-1)^{j+1} F_j = x_k^{\alpha_k}$. Como la componente Z es reducida, el ideal definido por $F_1, F_2, \ldots F_{n-2r+1}$ es radical y tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-2r+1} = 1$ y estamos buscando el primer coeficiente en la expansión en serie de Taylor de $tr(A)^{n-2r+1} det(b_{ij})$ en el cero. Como la componente no es Kupka tenemos que

$$tr(A)(0) = \sum_{i=1}^{n-2r+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}|_p = 0$$

y finalmente como $det(b_{ij})$ es holomorfa tenemos que $\langle Res^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z \rangle = 0$.

Para la otra implicación, supongamos ahora que el residuo de Gualtieri-Pym no se anula a lo largo de Z. Dado que Z es irreducible, esto implica que los puntos donde el residuo no es cero forman un subconjunto denso y abierto de Z y, por lo tanto, Z es una componente de Kupka del lugar geométrico singular de la foliación simpléctica. Sea $p \in Z$ un punto suave Kupka. Considérese la $(n-2r)$-forma que define la saturación de la foliación simpléctica $\omega = i_{\pi^r}(s)$ para s una sección del fibrado canónico y considérese también un sistema afín de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alrededor del punto $p \in Z$ como en 5.1.4. Ahora procedemos con el algoritmo para calcular el residuo de Baum Bott $\langle Res^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z \rangle$. Una vez más, la foliación se genera mediante la colección de campos vectoriales $\{\partial_{n-2r+2}, \ldots, \partial_n, X\}$ con

$$X = F_1 \partial_{x_1} - F_2 \partial_{x_2} + F_3 \partial_3 \cdots + (-1)^{n-2r+2} F_{n-2r+1} \partial_{n-2r+1}.$$

Sea $A = DX(0)$. En el sistema de coordenadas en el que trabajamos, la componente Z se identifica con $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2r+1} = 0\}$. Sean b_{ij} las funciones holomorfas tales que $\sum_j b_{kj}(-1)^{j+1} F_j = x_k^{\alpha_k}$. Como la componente Z es reducida, el ideal definido por $F_1, F_2, \ldots F_{n-2r+1}$ es radical y tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-2r+1} = 1$ y buscamos el primer coeficiente en la expansión de Taylor de $tr(A)^{n-2r+1} det(b_{ij})$ en cero. Como el punto es Kupka, tenemos que

$$tr(A)(0) = \sum_{i=1}^{n-2r+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}|_p \neq 0.$$

Como $\sum_j b_{kj}(-1)^{j+1} F_j = x_k$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\partial_i \Big(\sum_j b_{kj}(-1)^{j+1} F_j \Big) = \delta_{ik} \\
&\sum_j \partial_i(b_{kj})(-1)^{j+1} F_j + b_{kj}(-1)^{j+1} \partial_i(F_j) = \delta_{ik} \\
&\sum_j \partial_i(b_{kj})(0)(-1)^{j+1} F_j(0) + b_{kj}(0)(-1)^{j+1} \partial_i(F_j)(0) = \delta_{ik} \\
&\sum_j b_{kj}(0)(-1)^{j+1} \partial_i(F_j)(0) = \delta_{ik}
\end{aligned}$$

lo que demuestra que el producto entre las matrices A y $(b_{kj}(0))$ es la identidad. Por lo tanto, $\det(b_{kj})(0) \neq 0$ y obtenemos que $\langle \mathrm{Res}^{BB}_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z\rangle \neq 0$, ya que es el coeficiente correspondiente a $\frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots dx_{n-2r+1}}{x_1 x_2 \ldots x_{n-2r+1}}$ en la expansión de Taylor de

$$\frac{(\mathrm{tr}(A))^{n-2r+1}\det(b_{ij})dx_1 \wedge dx_2 \ldots dx_{n-2r+1}}{x_1 x_2 \ldots x_{n-2r+1}}$$

y el producto $(\mathrm{tr}(A))^{n-2r+1}\det(b_{ij})$ no se anula en 0. □

Finalizamos esta sección aplicando el teorema de Baum-Bott sobre residuos y uno de los resultados de comparación previos para obtener que el residuo más alto de Gualtieri-Pym no puede anularse de forma idéntica en todo el conjunto singular de ciertos tipos de variedades de Poisson. Esto implica parte de la conjetura de Bondal, ya demostrada en [Pol97], pero también confirma que las dimensiones que aparecen en la conjetura de Bondal pueden explicarse por la no anulación de los residuos de Gualtieri-Pym en ciertos casos.

Corolario 5.2.5. *Si (X, π) es una variedad de Poisson compleja de Fano de rango r que no es genéricamente simpléctica y sin contenido tal que $D_{2r-2}(\pi)$ es reducido, entonces existe una componente irreducible de $D_{2r-2}(\pi)$ de dimensión al menos $2r-1$.*

Demostración. Si (X, π) es una variedad de Poisson con X Fano, entonces usando el teorema 5.2.1 obtenemos que el residuo más alto de Gualtieri-Pym no puede anularse idénticamente por lo siguiente: los residuos de Baum-Bott asociados al polinomio $(s_1)^{n-2r+1}$ de la foliación simpléctica no pueden ser todos iguales a cero debido al teorema 3.4.6 y al hecho de que la clase Chern del fibrado normal a la foliación simpléctica es $c_1(\omega_X) \neq 0$. Entonces, existe una componente irreducible de D_{2r-2} que admite una multiderivación de $(2r-1)$ y, por lo tanto, de dimensión al menos $2r-1$. □

5.3. Algunos resultados parciales más en el caso de foliaciones simplécticas de codimensión uno

En esta sección, recopilaremos algunos resultados parciales más pequeños que pueden obtenerse al trabajar con variedades de Poisson que definen foliaciones simplécticas de codimensión uno. Comenzamos definiendo dichas estructuras de Poisson.

Definición 5.3.1. Llamamos a una variedad de Poisson compleja **casi regular** si $\dim(X) = 2r+1$, $\mathrm{rk}(\pi) = 2r$ y π no tiene contenido.

En el caso de estructuras de Poisson casi regulares, podemos estudiar ejemplos concretos de estructuras de Poisson en los espacios proyectivos y obtener que el residuo de Baum-Bott se anula precisamente cuando lo hacen los residuos de Gualtieri-Pym, como en el siguiente resultado.

Proposición 5.3.2. *Si $(\mathbb{P}^{2r+1}, \pi)$ es una variedad de Poisson compleja casi regular de rango r sin contenido tal que su correspondiente foliación simpléctica saturada es logarítmica o racional, entonces el residuo de Gualtieri-Pym se anula a lo largo de una componente irreducible Z_i de $D_{2r-2}(\pi)$ si y solo si $\langle Res_{(s_1)^{n-2r+1}}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z_i\rangle = 0$.*

Demostración. Demostraremos que dada dicha foliación y una componente irreducible Z_i de su lugar geométrico singular, entonces $\langle \mathrm{Res}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), Z_i\rangle = 0$ si y solo si Z_i es una componente no Kupka del lugar geométrico singular de $\mathscr{F}$. Si la foliación es de tipo racional o logarítmico, entonces existen $f_1, \dots f_k$ polinomios irreducibles tales que la foliación se describe como el anulador de la forma

$$\omega = (f_1 f_2 \dots f_k) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

para algunos λ_i tales que $\sum_i \lambda_i \deg(f_i) = 0$. Una vez establecida esta forma de la foliación, podemos calcular que las componentes irreducibles de dimensión 2 del lugar singular son $Z_{ij} = \{f_i = f_j = 0\}$ y el residuo de Baum Bott toma la forma $\langle \mathrm{Res}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}), Z_{ij}\rangle = \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i \lambda_j}$. Por lo tanto, este número se anula precisamente cuando $\lambda_i = \lambda_j$ y ese es precisamente el caso en el que se ve que ls componente irreducible Z_{ij} no es Kupka. □

Otro resultado parcial relacionado con nuestro teorema principal en el caso de variedades de Poisson casi regulares utiliza un teorema de [CACFP16] para demostrar una versión diferente de una de las implicaciones de 5.2.1.

Teorema 5.3.3. *Sea (X, π) una variedad de Poisson compleja casi regular de rango r. Sea Z una componente conexa de su lugar de degeneración $D_{2r-2}(\pi)$. Si el residuo más alto de Gualtieri-Pym se anula a lo largo de una componente irreducible suave Z_i de Z de codimensión 2 y $j^1_p(\omega_\pi) \neq 0$ para todo $p \in Z_i$, entonces $\langle Res_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z_i\rangle = 0$.*

Demostración. Debido a que el residuo más alto de Gualtieri-Pym se anula a lo largo de Z_i, sabemos que Z_i es una componente que no tiene puntos de Kupka debido al teorema 5.1.8. Luego usamos el teorema 3.3 de [CACFP16] que establece que una componente compacta irreducible suave de dimensión 2 del lugar singular de una foliación con un primer jet no nulo a lo largo de un punto debe tener un residuo de Baum-Bott nulo y, por lo tanto, concluimos que $\langle \mathrm{Res}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}), Z_i\rangle = 0$. □

En el resultado anterior, presentamos un enfoque diferente para demostrar que la anulación del residuo de Gualtieri-Pym a lo largo de una componente irreducible del lugar singular implica la anulación del residuo de Baum-Bott. Por otro lado, podemos estudiar cuándo la anulación del residuo de Baum-Bott implica la del de Gualtieri-Pym utilizando técnicas de linealización para X una variedad de Poisson de Fano.

Teorema 5.3.4. *Sea (X, π) una variedad de Poisson compleja proyectiva casi regular de dimensión $2r+1$ y $\mathscr{F}^{sat}_{symp}$ la saturación de la foliación simpléctica. Sea Z una componente compacta irreducible de codimensión 2 del conjunto singular S de esta foliación. Supongamos que X es Fano. Entonces, $\langle Res^{BB}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{sat}_{symp}), Z\rangle = 0$ implica que $Res^{GP}_{r-1}(\omega_X)|_Z(x) = 0$ para algún $x \in Z$.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Res}^{\mathrm{GP}}_{r-1}(\omega_X)|_Z$ no tiene ceros. En este caso tenemos que Z es una componente de Kupka compacta del lugar geométrico singular de $\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}$. Como la foliación simpléctica es de grado anticanónico y X es Fano podemos usar el teorema 5.1.6 que nos da que el tipo transversal de $\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}$ alrededor de Z es linealizable y de la forma $\eta = px\,dy - qy\,dx$. Calculando su residuo de Baum Bott obtenemos que

$$\langle \mathrm{Res}^{\mathrm{BB}}_{(s_1)^2}(\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}_{\mathrm{symp}}), Z\rangle = \frac{(p+q)^2}{pq}$$

que no es cero porque la condición de Kupka equivale a $p + q \neq 0$. □

Bibliografía

[BB72] Paul Baum and Raoul Bott. Singularities of holomorphic foliations. *J. Differ. Geom.*, 7:279–342, 1972.

[Bon93] A.I. Bondal. *Non-commutative Deformations and Poisson Brackets on Projective Spaces*. Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993.

[Bot70] Raoul Bott. On a topological obstruction to integrability. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vols. XIV, XV, XVI, Berkeley, Calif., 1968)*, Proc. Sympos. Pure Math., XIV-XVI, pages 127–131. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.

[BS58] Armand Borel and Jean-Pierre Serre. Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France*, 86:97–136, 1958.

[BSS09] Jean-Paul Brasselet, José Seade, and Tatsuo Suwa. *Vector fields on singular varieties*, volume 1987 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[BT89] R. Bott and L. V. Tu. *Differential forms in algebraic topology*. "Nauka", Moscow, 1989. Translated from the English by I. V. Savelev and G. S. Shmelev, Translation edited and with a preface by A. A. Kirillov.

[CACFP16] Omegar Calvo-Andrade, Maurício Corrêa, and Arturo Fernández-Pérez. On non-Kupka points of codimension one foliations on $\mathbb{P}^3$. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 88(4):2067–2080, 2016.

[CAS94] O. Calvo-Andrade and M. Soares. Chern numbers of a Kupka component. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 44(4):1219–1236, 1994.

[CL19] Maurício Corrêa and Fernando Lourenço. Determination of Baum-Bott residues of higher codimensional foliations. *Asian J. Math.*, 23(3):527–538, 2019.

[CLN96] D. Cerveau and A. Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbf{C}\mathrm{P}(n)$, $n \geq 3$. *Ann. of Math. (2)*, 143(3):577–612, 1996.

[dM00] Airton S. de Medeiros. Singular foliations and differential p-forms. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 9(3):451–466, 2000.

[Ful98] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[GMLN91] Xavier Gómez-Mont and Alcides Lins Neto. Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral. *Topology*, 30(3):315–334, 1991.

[GP13] Marco Gualtieri and Brent Pym. Poisson modules and degeneracy loci. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 107(3):627–654, 2013.

[GR84] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Coherent analytic sheaves*, volume 265 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Gro68] A. Grothendieck. Classes de Chern et representations linearies des groupes discrets. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, volume 3 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 215–305. North-Holland, Amsterdam, 1968.

[Har80] Robin Hartshorne. Stable reflexive sheaves. *Mathematische Annalen*, 254:121–176, 1980.

[LGSX08] Camille Laurent-Gengoux, Mathieu Stiénon, and Ping Xu. Holomorphic Poisson manifolds and holomorphic Lie algebroids. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, pages Art. ID rnn 088, 46, 2008.

[Lim] Renan Lima. Poisson structures on projective manifolds, thesis (ph. d.)-impa (brasil).

[LP14] Renan Lima and Jorge Vitório Pereira. A characterization of diagonal Poisson structures. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 46(6):1203–1217, 2014.

[Mal72] Paul Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Collection Enseignement des Sciences, No. 14. Hermann, Paris, 1972.

[Mat20] Mykola Matviichuk. *Quadratic Poisson Brackets and co-Higgs Fields*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2020. Thesis (Ph.D.)–University of Toronto (Canada).

[MQ] A. Molinuevo and F. Quallbrunn. Singular locus of q-logarithmic foliations. *arXiv preprint*.

[Nag66] Tadashi Nagano. Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras. *J. Math. Soc. Japan*, 18:398–404, 1966.

[OSS11] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. Corrected reprint of the 1988 edition, With an appendix by S. I. Gelfand.

[Pol97] A. Polishchuk. Algebraic geometry of Poisson brackets. *J. Math. Sci., New York*, 84(5):1413–1444, 1997.

[Pym13] Brent Pym. *Poisson Structures and Lie Algebroids in Complex Geometry*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2013. Thesis (Ph.D.)–University of Toronto (Canada).

[Qua] Federico Quallbrunn. Flat families of algebraic foliations. Tesis Doctoral, FCEN-UBA, 2012. Disponible en https://bibliotecadigital.exactas.uba.ar/collection/tesis/document/tesis-n5366-Quallbrunn.

[Suw84] Tatsuo Suwa. Residues of complex analytic foliation singularities. *J. Math. Soc. Japan*, 36(1):37–45, 1984.

[Vak25] Ravi Vakil. *The rising sea—foundations of algebraic geometry*. Princeton University Press, Princeton, NJ, [2025] ©2025.

[Voi07] Claire Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, volume 76 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, english edition, 2007. Translated from the French by Leila Schneps.