



Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Explorando la teoría doble de campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en
el área de Ciencias Físicas

Lic. Jesús Alejandro Rodríguez Sandoval

Directora de tesis: Dra. Carmen A. Núñez

Consejero de estudios: Dr. Diego Wisniacki

Lugar de trabajo: Instituto de Física de Buenos Aires (IFIBA-CONICET)

Buenos Aires, 28 de octubre de 2025

Resumen

La Teoría de Cuerdas es actualmente la principal candidata para formular una teoría cuántica de la gravedad y la unificación de las interacciones fundamentales. En su límite de bajas energías, se describe mediante teorías de supergravedad en diez dimensiones, cuyas acciones efectivas reciben correcciones perturbativas en el parámetro α' , asociado a la longitud de la cuerda. Estas correcciones modifican las ecuaciones de movimiento y tienen implicaciones profundas en compactificaciones y soluciones gravitacionales que resultan clave para la fenomenología de cuerdas. Un enfoque prometedor para estudiarlas es la Teoría Doble de Campos (TDC), un marco que incorpora de manera explícita la dualidad T de la Teoría de Cuerdas.

Esta tesis explora la extensión supersimétrica de la TDC con $\mathcal{N} = 1$ y su relación con la supergravedad heterótica, relevante para la conexión con el Modelo Estándar de partículas. En primer lugar, se estudian las simetrías de la supergravedad heterótica desde la perspectiva de la TDC, con énfasis en la transformación β , perteneciente al sector no geométrico del grupo de dualidad. Luego, se analizan las correcciones de primer orden en α' en el marco de la TDC supersimétrica, obteniendo la deformación de la transformación de Green-Schwarz generalizada y sus efectos sobre la acción efectiva y las reglas de transformación supersimétrica. Finalmente, se exploran aspectos perturbativos mediante el *ansatz* de Kerr-Schild y su generalización a la TDC, lo que brinda una herramienta para construir soluciones con correcciones α' .

Los resultados obtenidos contribuyen a una mejor comprensión de las dualidades de cuerdas y de las correcciones α' en la supergravedad heterótica desde una perspectiva unificada. Asimismo, abren nuevas vías para explorar estructuras de la teoría de cuerdas en contextos donde las dualidades desempeñan un papel central.

Abstract

Exploring $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric Double Field Theory

String Theory is currently the main candidate in formulating a quantum theory of gravity and unifying the fundamental interactions. In its low-energy limit, it is described by ten-dimensional supergravity theories, whose effective actions receive perturbative corrections in the parameter α' , associated with the string length. These corrections modify the equations of motion and have deep implications for compactifications and gravitational solutions, which are crucial for string phenomenology. A promising approach to studying these corrections is Double Field Theory (DFT), a framework that explicitly incorporates T-duality symmetry from String Theory.

This thesis explores the $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric extension of DFT and its connection to heterotic supergravity, which is relevant to connect with the Standard Model of particle physics. First, the symmetries of heterotic supergravity are studied from the perspective of DFT, with emphasis on the β -transformation, which belongs to the non-geometric sector of the duality group. Then, the first-order α' corrections to supersymmetric DFT are analyzed, including the deformation of the generalized Green-Schwarz transformation and its impact on the effective action and supersymmetry transformation rules. Finally, perturbative aspects are explored through the Kerr-Schild ansatz and its generalization within the DFT framework, which provides an effective tool for constructing solutions with α' corrections.

The results obtained contribute to a better understanding of string dualities and α' corrections in heterotic supergravity from a unified perspective. They also open new avenues for investigating the structure of string theory in contexts where dualities play a central role.

Lista de publicaciones

Los capítulos 4, 5 y 6 de esta tesis se basan en los resultados de los siguientes trabajos publicados:

- [1] W. H. Baron, C. A. Nunez and J. A. Rodriguez, *β symmetry of heterotic supergravity*, JHEP **01** (2025), 127 [arXiv:2410.17067 [hep-th]].
- [2] E. Lescano, C. A. Núñez and J. A. Rodríguez, *Supersymmetry, T-duality and heterotic α' -corrections*, JHEP **07** (2021), 092 [arXiv:2104.09545 [hep-th]].
- [3] E. Lescano and J. A. Rodríguez, *$\mathcal{N} = 1$ supersymmetric Double Field Theory and the generalized Kerr-Schild ansatz*, JHEP **10** (2020), 148 [arXiv:2002.07751 [hep-th]].
- [4] E. Lescano and J. A. Rodríguez, *Higher-derivative heterotic Double Field Theory and classical double copy*, JHEP **07** (2021), 072 [arXiv:2101.03376 [hep-th]].

Además, durante el desarrollo del doctorado, el autor participó en los siguientes trabajos, que no forman parte del contenido de la tesis:

- [5] E. Lescano, G. Menezes and J. A. Rodríguez, *Aspects of conformal gravity and double field theory from a double copy map*, Phys. Rev. D **108** (2023) no.12, 126017 [arXiv:2307.14538 [hep-th]].
- [6] E. Lescano and J. A. Rodríguez, *Constructing conformal double field theory through a double copy map*, Phys. Rev. D **112** (2025) no.2, 026004 [arXiv:2408.11892 [hep-th]].
- [7] E. Lescano and J. A. Rodríguez, *Quadratic Curvature Corrections in Double Field Theory via Double Copy*, [arXiv:2409.05628 [hep-th]].

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi directora de doctorado, Carmen Núñez. Su ayuda a lo largo de estos años ha sido invaluable y se extendió mucho más allá de su excelente labor científica y formadora, siendo un factor determinante en mi desarrollo. También agradezco a los investigadores y estudiantes del grupo de dualidades, en particular a quienes fueron más cercanos en distintos momentos: Walter Baron, Yago Cagnacci, Tomás Codina, Sergio Iguri, Eric Lescano y Diego Marqués, con quienes compartí experiencias excepcionales y de quienes aprendí mucho, además de física. Un agradecimiento especial a Eric, que con el tiempo se convirtió en mi principal colaborador.

Extiendo mi gratitud a la Universidad de Buenos Aires y, en particular, al Departamento de Física; al IAFE, donde pasé una parte importante de mi doctorado; y al CONICET por su apoyo al sistema científico argentino, que, aunque no atravesase su mejor momento, sigue siendo un ejemplo para América Latina y me hace sentir orgulloso de haber sido becario.

Finalmente, mi agradecimiento infinito a mi familia, a Vania, a mis amigos y a los coros. Muchas gracias a todos por su apoyo permanente.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Estructura de la tesis	3
2	Una mirada a la Teoría de Cuerdas	5
2.1	Cuerdas y supercuerdas	5
2.1.1	La cuerda bosónica	7
2.1.2	La cuerda supersimétrica	13
2.2	Dualidades de cuerdas	15
2.2.1	Compactificación y dualidad T	16
2.3	El límite de bajas energías: Supergravedad	21
2.3.1	La acción efectiva	21
2.3.2	Correcciones α' en supergravedad	24
3	La Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$	27
3.1	Aspectos básicos de Teoría Doble de Campos	28
3.1.1	La derivada de Lie generalizada y el <i>strong constraint</i>	29
3.1.2	La acción y las ecuaciones de movimiento	32
3.1.3	Curvaturas: El tensor de Riemann generalizado	34
3.2	El formalismo de <i>frame</i> generalizado	35

3.2.1	Transformaciones de Lorentz en el espacio doble	36
3.2.2	Flujos generalizados	37
3.2.3	La acción y las ecuaciones de movimiento	40
3.3	Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$	41
3.3.1	El álgebra de Clifford generalizada	41
3.3.2	Contenido de campos y sus transformaciones	42
3.3.3	La acción supersimétrica	43
3.4	Parametrización y contacto con supergravedad	45
3.5	La teoría heterótica	48
3.5.1	Gaugeando la Teoría Doble de Campos supersimétrica	49
4	Supersimetría y simetría β en Teoría Doble de Campos	53
4.1	La simetría β en Teoría Doble de Campos	54
4.1.1	El sector no geométrico de $O(d, d)$	54
4.1.2	Las transformaciones β de los campos	56
4.2	Simetría β de la supergravedad heterótica	57
4.2.1	Sector bosónico	58
4.2.2	Sector fermiónico	59
4.3	Interacciones entre cuatro fermiones	63
4.3.1	Derivación desde la TDCs	65
4.4	Conclusiones	69
5	Supersimetría y correcciones α' en Teoría Doble de Campos	71
5.1	El formalismo de Bergshoeff-de Roo generalizado	72
5.2	El orden α' de la Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$	76
5.2.1	Transformaciones de los campos	76

5.2.2	La acción supersimétrica a orden α'	79
5.3	El orden α' de la supergravedad heterótica	80
5.3.1	Transformaciones de los campos	81
5.3.2	La acción supersimétrica a orden α'	88
5.4	Conclusiones	91
6	Supersimetría y el <i>ansatz</i> de Kerr-Schild en Teoría Doble de Campos	95
6.1	El <i>ansatz</i> de Kerr-Schild	96
6.1.1	En Relatividad General	96
6.1.2	En Teoría Doble de Campos	98
6.2	Extensión supersimétrica del gKSA	102
6.2.1	Perturbación de los campos	102
6.2.2	Ecuaciones de Killing para espinores	104
6.3	Incorporación de correcciones α'	105
6.4	Relación con la Copia Doble Clásica	107
6.5	Conclusiones	109
7	Conclusiones y comentarios	111
	Apéndice A: Convenciones	117
A.1	Convenciones y definiciones	117
	Apéndice B: Espinores y matrices <i>gamma</i>	121
B.1	Teoría Doble de Campos	121
B.2	Supergravedad	122
	Apéndice C: Flujos generalizados	125
C.1	Parametrización de los flujos de $O(10, 10 + n_g)$	125

C.2 Correcciones α' de los flujos generalizados 126

Apéndice D: Ecuaciones de movimiento **127**

D.1 Métrica y *vielbein* 128

D.2 Dilatón 128

D.3 Campo de Kalb-Ramond 128

D.4 Gravitino 128

D.5 Dilatino 129

D.6 Campo de *gauge* 129

D.7 Gaugino 129

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de Cuerdas [8–12] es una de las propuestas más prometedoras para formular una teoría cuántica de la gravedad y unificar las interacciones fundamentales. Desde sus inicios a fines de la década de 1960, ha evolucionado significativamente, proporcionando un marco teórico que busca reconciliar la mecánica cuántica con la relatividad general y describir de manera unificada las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravedad, electromagnetismo, interacción nuclear fuerte e interacción nuclear débil. Su característica distintiva es la idea de que las partículas fundamentales emergen como modos de vibración de pequeños objetos unidimensionales, las cuerdas, en lugar de puntos sin estructura interna.

En su formulación moderna, la Teoría de Cuerdas ha generado diversas líneas de investigación con implicaciones teóricas y fenomenológicas importantes. Un ejemplo destacado es la conjetura AdS/CFT [13], que establece una correspondencia holográfica entre una teoría de gravedad en un espacio Anti-de Sitter (AdS) y una teoría de campos conformes (CFT) en su frontera. Esta conjetura ha permitido estudiar aspectos como la termodinámica de agujeros negros y la información en contextos gravitacionales [14]. Además, la introducción de objetos extendidos de múltiples dimensiones, denominados branas, ha sido clave para entender la dinámica de la teoría y en sus aplicaciones a la cosmología del universo temprano [15]. Asimismo, áreas como la geometría no conmutativa y las dualidades de cuerdas han sido impulsadas por estos desarrollos, con posibles repercusiones en la física teórica y experimental.

Sin embargo, la Teoría de Cuerdas introduce elementos menos intuitivos, como la existencia de dimensiones extra ($D = 26$ en la versión bosónica y $D = 10$ en la versión supersimétrica) y la

necesidad de supersimetría. Otro desafío conceptual es la aparente existencia de cinco teorías de supercuerdas consistentes: Tipo I, Tipo IIA, Tipo IIB, Heterótica $SO(32)$ y Heterótica $E_8 \times E_8$. No obstante, gracias a las dualidades de cuerdas, se ha propuesto que estas cinco teorías son manifestaciones distintas de una teoría subyacente, conocida como Teoría M.

Las dualidades de cuerdas establecen conexiones entre las teorías de supercuerdas y la Teoría M, revelando una estructura común. Entre ellas, la dualidad T relaciona teorías formuladas en geometrías diferentes, mientras que la dualidad S conecta versiones fuertemente y débilmente acopladas de la teoría de Tipo IIB. Su combinación da lugar a la dualidad U, que juega un papel relevante en la Teoría M. Estas dualidades también influyen en el límite de bajas energías, donde emergen teorías de supergravedad como extensiones supersimétricas de la relatividad general que incorporan campos de *gauge* y materia. La acción efectiva de supergravedad recibe correcciones en α' , el parámetro de longitud de la cuerda, que introducen términos de orden superior en derivadas y modifican las ecuaciones de movimiento. Dichas correcciones resultan cruciales para el estudio de compactificaciones y soluciones gravitacionales en este marco.

Para abordar el estudio de estas correcciones, se han desarrollado distintos enfoques, siendo uno de los más prometedores la Teoría Doble de Campos (TDC) [16–22]. Esta formulación se basa en duplicar las coordenadas del espacio-tiempo, extendiéndolo a $2D$ dimensiones con simetría global bajo $O(D, D)$, el grupo ortogonal en el espacio doble, que incorpora de forma manifiesta la dualidad T. En la TDC, los campos fundamentales son objetos covariantes bajo $O(D, D)$ y encapsulan la información del sector universal (NS-NS) de las teorías de supergravedad. Además, extiende las simetrías locales estándar de la supergravedad, incluyendo difeomorfismos y transformaciones de Lorentz generalizadas. Este marco ha resultado particularmente útil para estudiar las correcciones α' y la estructura de la acción efectiva, aprovechando de forma sistemática las simetrías de dualidad presentes en la teoría.

En este contexto, esta tesis busca extender la comprensión de la TDC en presencia de supersimetría $\mathcal{N} = 1$, relevante para conectar con el límite de bajas energías de la cuerda heterótica. La descripción efectiva de esta cuerda corresponde a una supergravedad en diez dimensiones que incluye no solo el campo gravitatorio, sino también un sector de *gauge* no abeliano, esencial para la fenomenología de la teoría y su relación con el modelo estándar de partículas. Para ello, se desarrollaron y analizaron las siguientes direcciones:

1. Se estudiaron simetrías asociadas al grupo $O(D, D)$, en particular la simetría β en la

supergravedad heterótica, una transformación no geométrica útil para la construcción de correcciones α' y la consistencia de la teoría.

2. Se calcularon las correcciones de primer orden en α' dentro de la TDC supersimétrica, deformando la transformación de Green-Schwarz con términos supersimétricos y obteniendo modificaciones a la acción efectiva y a las reglas de transformación de los campos fundamentales a orden α' .
3. Se exploraron aspectos perturbativos, partiendo desde una generalización del *ansatz* de Kerr-Schild a la TDC supersimétrica. Este *ansatz* permite perturbar simultáneamente el contenido bosónico y fermiónico de las teorías de supergravedad, y resulta compatible con la inclusión de correcciones de orden superior en derivadas

Esta tesis contribuye al entendimiento de las correcciones α' en la supergravedad heterótica desde la perspectiva de la TDC con supersimetría. Los resultados obtenidos no solo tienen implicaciones teóricas, sino que también pueden impactar la fenomenología de la Teoría de Cuerdas, especialmente en compactificaciones y soluciones gravitacionales. Estos hallazgos abren nuevas vías de investigación en la física teórica y en la estructura fundamental de la teoría.

1.1 Estructura de la tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente forma:

Capítulo 2: Una mirada a la Teoría de Cuerdas

Se introducen los conceptos fundamentales de la teoría de cuerdas, incluyendo su formulación básica, las dualidades y el límite de bajas energías donde emerge la supergravedad. Se discuten las correcciones α' y su impacto en la acción efectiva.

Capítulo 3: La Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$

Se presentan los fundamentos de la Teoría Doble de Campos (TDC) y su extensión supersimétrica. Se revisan las estructuras matemáticas involucradas y se establece la conexión con la supergravedad.

Capítulo 4: Supersimetría y simetría β en Teoría Doble de Campos

Se presentan los resultados de [1], donde se explora el papel de la simetría β , una transfor-

mación no geométrica perteneciente al grupo de dualidad. Se investiga su manifestación en la supergravedad heterótica y su relación con la consistencia de la teoría.

Capítulo 5: Supersimetría y correcciones α' en Teoría Doble de Campos

Se presentan los resultados de [2], donde se analizan las correcciones de primer orden en α' dentro de la TDC con supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Se obtienen términos de interacción fermiónicos, incluyendo la corrección a la transformación de Green-Schwarz, y se estudian sus implicaciones en la estructura de la acción efectiva.

Capítulo 6: Supersimetría y el *ansatz* de Kerr-Schild en Teoría Doble de Campos

Se presentan los resultados de [3, 4], donde se extiende el *ansatz* de Kerr-Schild al marco de la TDC con supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Se analizan las ecuaciones de Killing para espinores, la compatibilidad con la transformación de Green-Schwarz, y se discute la relación con la copia doble clásica en el contexto de supergravedad heterótica.

Capítulo 7: Conclusiones y comentarios

Se resumen los principales resultados de la tesis y se discuten posibles líneas futuras de investigación. Se enfatiza el papel de la TDC con supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en el estudio de correcciones α' y su impacto en la fenomenología de la teoría de cuerdas.

Apéndices

Se detallan las convenciones utilizadas y cálculos complementarios, junto a parametrizaciones relevantes en supergravedad.

Cerramos con un comentario sobre el estilo. En física, muchas magnitudes tienen nombres estandarizados en otros idiomas, especialmente en el contexto de la Teoría de Cuerdas y la Teoría Doble de Campos, cuya traducción al español resulta poco natural. Por esta razón, a lo largo de la tesis dichos términos no serán traducidos, pero se escribirán en *italicas*. Además, para resaltar conceptos clave, independientemente del idioma, se utilizarán **negritas**, evitando así posibles confusiones.

Capítulo 2

Una mirada a la Teoría de Cuerdas

En este capítulo exploraremos de manera general algunos elementos de la Teoría de Cuerdas, los cuales resultarán útiles a lo largo de esta tesis, proporcionando el marco conceptual necesario para comprender los temas centrales de nuestro estudio. Para una revisión más detallada de los temas aquí tratados, se recomienda consultar las referencias clásicas [23–32], junto a los apuntes [33, 34] y las referencias adicionales que se mencionan a lo largo del capítulo.

Comenzaremos introduciendo la dinámica de las cuerdas y supercuerdas, analizando sus propiedades básicas y las características principales de sus espectros. Luego, abordaremos las dualidades de cuerdas, herramientas poderosas que revelan conexiones profundas entre diferentes teorías y regímenes físicos. Finalmente, discutiremos el límite de bajas energías de la teoría, donde emerge la supergravedad como una teoría efectiva, y examinaremos las correcciones de orden superior en derivadas que modifican este límite.

2.1 Cuerdas y supercuerdas

A diferencia del marco tradicional de partículas puntuales, la Teoría de Cuerdas postula que los constituyentes básicos de la naturaleza son objetos unidimensionales: las cuerdas. Estas se propagan en un espacio-tiempo de D dimensiones, y sus vibraciones determinan sus propiedades observables. Un aspecto fundamental de la teoría es la distinción entre cuerdas abiertas y cuerdas cerradas, dependiendo de si sus extremos están identificados o no. Esta condición de contorno no solo afecta la dinámica de las cuerdas, sino que también influye en el espectro de estados físicos

descritos por sus modos de vibración. En particular, el espectro de la cuerda abierta incluye un modo sin masa de espín uno [35], mientras que el espectro de la cuerda cerrada cuantizada contiene un modo sin masa de espín dos [36]. Estos modos desempeñan un papel central en la interpretación física de la teoría, ya que el primero se asocia a los campos de *gauge* y el segundo al gravitón, lo que sugiere una conexión natural entre la teoría de cuerdas y una formulación cuántica de la gravedad.

Un resultado notable de la cuantización de la teoría es que la consistencia física determina la dimensión del espacio-tiempo en el que viven las cuerdas. En el caso de la **teoría de cuerdas bosónica**, esta dimensión es $D = 26$. Esta restricción no es arbitraria, sino que surge de la cancelación de anomalías y la necesidad de preservar la invariancia conforme en la hoja de mundo. Desde un punto de vista conceptual, el hecho de que la teoría fije la dimensión del espacio-tiempo en lugar de imponerla como un parámetro libre es una de sus características más distintivas y una de sus principales fortalezas.

Sin embargo, la teoría de cuerdas bosónica, aunque matemáticamente elegante, presenta dos problemas fundamentales que limitan su viabilidad como modelo físico. En primer lugar, su espectro no incluye fermiones, los cuales son esenciales para describir la materia en nuestro universo. En segundo lugar, contiene un modo taquiónico, es decir, un estado con masa imaginaria, lo que indica la presencia de inestabilidades en la teoría. Estas limitaciones sugieren que la teoría bosónica, en su formulación original, es incapaz de describir el universo observable.

La solución a estos problemas surgió con la introducción de la supersimetría, una simetría que relaciona bosones y fermiones. Al extender la teoría de cuerdas para incluir supersimetría, se obtienen las **teorías de supercuerdas**, que resuelven ambos inconvenientes de manera elegante. Por un lado, la supersimetría introduce fermiones en el espectro, permitiendo la descripción de la materia observada en el universo. Por otro lado, la relación entre bosones y fermiones a través de la supersimetría elimina el modo taquiónico, garantizando la estabilidad de la teoría [37, 38]. Además, la supersimetría permite la cancelación de anomalías, asegurando la consistencia matemática de la teoría en un espacio-tiempo de diez dimensiones. De este modo, la teoría no solo fija la dimensión del espacio-tiempo, sino que en el caso supersimétrico este número es menor que en la teoría bosónica, acercándolo más a la realidad física.

En esta sección, presentaremos la acción que describe la dinámica de cuerdas libres y analizaremos el espectro de partículas tanto para cuerdas abiertas como cerradas. Esto lo

haremos en el contexto de la cuerda bosónica y de la supercuerda, comparando sus propiedades y diferencias clave.

2.1.1 La cuerda bosónica

Así como una partícula describe una trayectoria unidimensional en el espacio-tiempo, conocida como línea de mundo, una cuerda traza una superficie bidimensional denominada **hoja de mundo**¹. La acción que gobierna la dinámica de la cuerda se construye por analogía con la de una partícula puntual. Mientras que para una partícula se extremiza la longitud de su línea de mundo, para una cuerda se propone una acción que extremiza el área de la superficie bidimensional que describe al propagarse. Esta acción, conocida como **acción de Nambu-Goto** [39, 40], está dada por

$$S_{NG} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad (2.1.1)$$

donde (τ, σ) son coordenadas sobre la hoja de mundo: τ es una coordenada temporal que puede interpretarse como el tiempo propio que describe la evolución de la cuerda, y σ es una coordenada espacial que recorre cada punto de la cuerda a lo largo de su extensión. La función $X^\mu(\tau, \sigma)$ define un mapa de la hoja de mundo en el espacio-tiempo, y las derivadas

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma},$$

describen cómo cambia la posición de la cuerda con respecto a las coordenadas τ y σ . El índice μ recorre las D dimensiones del espacio-tiempo, tomando los valores $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$.

El parámetro T no es simplemente una constante de proporcionalidad, sino que tiene una interpretación física clave: es la **tensión de la cuerda**, que determina la escala de energía de la teoría. Esta tensión está relacionada con otras cantidades físicas importantes, como la longitud de la cuerda ℓ_s y la escala de masa M_s , a través de la constante α' . En concreto, se tiene:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad \ell_s = 2\pi\sqrt{\alpha'}, \quad M_s = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}. \quad (2.1.2)$$

La longitud de la cuerda ℓ_s representa la extensión espacial típica de una cuerda, mientras que M_s es la escala de masa asociada a sus modos de vibración. Estas cantidades son fundamentales para entender las propiedades físicas de la teoría y su conexión con fenómenos a bajas energías.

¹A lo largo de esta tesis utilizaremos indistintamente el término “hoja de mundo” y su equivalente en inglés, *worldsheet*.

La acción (2.1.1) proporciona una interpretación sencilla y describe con precisión la dinámica clásica de la cuerda. Sin embargo, la presencia de la raíz cuadrada en su expresión dificulta considerablemente su cuantización. Para superar esta dificultad, se introduce una formulación alternativa de la acción de la cuerda, clásicamente equivalente a la de Nambu-Goto, pero que elimina la raíz cuadrada a costa de incorporar un nuevo campo

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (2.1.3)$$

donde $h \equiv \det h$ es el determinante de la métrica $h_{\alpha\beta}$, y $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha}$ denota la derivada parcial con respecto a las coordenadas $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$ de la hoja de mundo. Los índices $\alpha, \beta, \dots = 0, 1$ recorren las dimensiones de la hoja de mundo. Esta formulación es conocida como la **acción de Polyakov** [41–44].

Desde la perspectiva de la hoja de mundo, la acción de Polyakov describe un conjunto de campos escalares X^μ acoplados a una métrica dinámica $h_{\alpha\beta}$, que actúa como un campo de gravedad en dos dimensiones. Por otro lado, desde la perspectiva del espacio-tiempo, estos campos X^μ corresponden a vectores que representan las coordenadas de la cuerda, cuyos índices se contraen en la acción con la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo.

La acción (2.1.3) posee las siguientes simetrías:

1. Invariancia de Poincaré: La acción de Polyakov es manifiestamente invariante bajo transformaciones de Poincaré en un espacio-tiempo de dimensión D

$$X^\mu(\sigma) \mapsto \tilde{X}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\sigma) + c^\mu, \quad (2.1.4)$$

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) \mapsto \tilde{h}_{\alpha\beta}(\sigma) = h_{\alpha\beta}(\sigma). \quad (2.1.5)$$

Aquí, $\Lambda^\mu{}_\nu$ es una transformación de Lorentz y c^μ un vector de traslación constante. Desde la perspectiva de la teoría de campos en la hoja de mundo, esta simetría puede interpretarse como una simetría interna global.

2. Difeomorfismos (reparametrización de la hoja de mundo): Ante la redefinición de las coordenadas de la hoja de mundo como $\sigma^\alpha \mapsto \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$, los campos transforman según

$$X^\mu(\sigma) \mapsto \tilde{X}^\mu(\tilde{\sigma}) = X^\mu(\sigma), \quad (2.1.6)$$

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) \mapsto \tilde{h}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\tilde{\sigma}^\alpha} \frac{\partial\sigma^\delta}{\partial\tilde{\sigma}^\beta} h_{\gamma\delta}(\sigma), \quad (2.1.7)$$

siendo así una simetría local. En particular vemos que los campos X^μ transforman como escalares en la hoja de mundo, mientras que $h_{\alpha\beta}$ juega el papel de una métrica en dos dimensiones.

3. Invariancia de Weyl: Esta simetría local actúa de la siguiente manera

$$X^\mu(\sigma) \mapsto \tilde{X}^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma), \quad (2.1.8)$$

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) \mapsto \tilde{h}_{\alpha\beta}(\sigma) = \Omega^2(\sigma)h_{\alpha\beta}(\sigma). \quad (2.1.9)$$

Las configuraciones de cuerdas relacionadas por transformaciones de Weyl corresponden al mismo estado físico, lo que introduce una redundancia adicional en la descripción de Polyakov que no está presente en la de Nambu-Goto.

La combinación de las simetrías locales sobre la hoja de mundo, difeomorfismos e invariancia de Weyl, permite elegir convenientemente la métrica $h_{\alpha\beta}$, eliminando grados de libertad mediante un fijado de *gauge*. En particular, es posible fijarla en la forma

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.1.10)$$

es decir, la métrica de Minkowski en la hoja de mundo, lo que simplifica considerablemente la teoría.

Ahora analizaremos las ecuaciones de movimiento para X^μ que se obtienen a partir de la variación de la acción de Polyakov (2.1.3). Si consideramos una variación infinitesimal de los campos, la variación de la acción toma la forma

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \right) \delta X_\mu + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \sqrt{-h} \partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l}, \quad (2.1.11)$$

donde l representa la longitud de la cuerda. La contribución del segundo término en la expresión anterior corresponde a un término de borde, cuyo comportamiento depende de las condiciones de contorno y que, en general, debe anularse. Para determinar las ecuaciones de movimiento requerimos que la variación de la acción se anule para variaciones arbitrarias δX^μ , lo que nos lleva a

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \right) = 0, \quad (2.1.12)$$

la cual es equivalente a la ecuación de movimiento que se obtendría a partir de la acción de Nambu-Goto (2.1.1). Sin embargo, en la formulación de Polyakov, la métrica $h_{\alpha\beta}$ es un campo dinámico que satisface su propia ecuación de movimiento.

Antes de continuar con el análisis de la ecuación de movimiento, examinemos el término de borde. Este debe evaluarse en función de las condiciones de contorno impuestas en los extremos de la cuerda, considerando tanto cuerdas abiertas como cerradas.

Para una cuerda abierta, los dos extremos son independientes, por lo que los términos de borde en $\sigma = 0$ y $\sigma = l$ deben anularse de manera independiente. Para cada coordenada X^μ , existen dos tipos posibles de condiciones de contorno:

- Condiciones de contorno de Dirichlet (D): $\delta X_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} = 0$.
- Condiciones de contorno de Neumann (N): $\partial_\sigma X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} = 0$.

El significado físico de estas condiciones es claro: si un extremo de la cuerda cumple una condición de Dirichlet, su posición está restringida a un punto fijo. En cambio, una condición de Neumann indica que no hay flujo de momento en esa dirección, permitiendo el movimiento del extremo de la cuerda en el espacio-tiempo. Dado que cada extremo de la cuerda puede cumplir una condición diferente, existen cuatro combinaciones posibles de condiciones de contorno: (NN), (ND), (DN) y (DD). Además, no es necesario que se imponga la misma condición en todas las direcciones del espacio-tiempo, lo que permite configuraciones más generales.

Para cuerdas cerradas, la situación es diferente. En este caso, la coordenada σ es periódica, es decir, $\sigma \sim \sigma + l$. Por lo tanto, no hay bordes en $\sigma = 0$ y $\sigma = l$, ya que estos puntos están identificados. La condición de periodicidad para cuerdas cerradas es:

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (2.1.13)$$

Esta condición garantiza que la cuerda forma un lazo cerrado sin extremos. Como consecuencia, el término de borde en la variación de la acción se anula automáticamente debido a la periodicidad de X^μ , por lo que no es necesario imponer condiciones de contorno adicionales.

A partir de ahora, nuestro análisis se enfocará en cuerdas cerradas. Cuando sea pertinente, mencionaremos las diferencias más relevantes con respecto a las cuerdas abiertas. Retomando la ecuación de movimiento de los campos X^μ , podemos aprovechar las simetrías de la acción de Polyakov para reescribir (2.1.12) en el *gauge* conforme (2.1.10), lo que nos lleva a

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0, \quad (2.1.14)$$

una ecuación de onda, cuya solución general es de la forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma), \quad (2.1.15)$$

con

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha'p^\mu(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}, \\ X_R^\mu(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha'p^\mu(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)}. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Las variables x^μ y p^μ representan la posición y el momento del centro de masa de la cuerda, mientras que $\tilde{\alpha}_n^\mu$ y α_n^μ corresponden a las amplitudes de oscilación de los modos (izquierdos y derechos) de la cuerda. Para que X^μ sea real se requiere que los coeficientes de los modos de Fourier cumplan con

$$\alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^*, \quad \tilde{\alpha}_n^\mu = (\tilde{\alpha}_{-n}^\mu)^*. \quad (2.1.17)$$

Al cuantizar la teoría, estos coeficientes se convierten en operadores de creación y aniquilación de los modos de vibración de la cuerda. En términos de estos operadores, se define el número de ocupación de los modos como

$$N = \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad \tilde{N} = \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n. \quad (2.1.18)$$

La masa de los estados de la cuerda se determina a partir de la relación usual en el espacio-tiempo de Minkowski, $M^2 = -p^2$, junto con condiciones derivadas² a partir de la ecuación de movimiento de la métrica de la hoja de mundo $h_{\alpha\beta}$. A partir de esto, es posible obtener la siguiente relación

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2). \quad (2.1.19)$$

Además, los operadores N y \tilde{N} deben satisfacer la denominada *Level Matching Condition* (LMC), que impone

$$N = \tilde{N}. \quad (2.1.20)$$

Con esta estructura, podemos analizar el espectro de partículas de la teoría. Cada modo de oscilación genera un nuevo estado, lo que implica que en la Teoría de Cuerdas las partículas están asociadas a las vibraciones de la cuerda.

²No incluimos aquí la derivación de estas condiciones, para lo cual remitimos a la bibliografía estándar [23–34].

Comencemos por el estado con $N = \tilde{N} = 0$, cuya masa es $M^2 = -\frac{4}{\alpha'} < 0$. Este estado se asocia a una partícula escalar conocida como **taquiión**. La presencia de taquiones introduce inestabilidades en la teoría y plantea problemas como la violación de causalidad. Se interpreta generalmente como una indicación de que el vacío elegido es inadecuado. Sin embargo, la introducción de supersimetría permite remover el taquiión de manera consistente [37,38].

El siguiente nivel corresponde a los estados sin masa ($M^2 = 0$), que cumplen $N = \tilde{N} = 1$. Estos estados son fundamentales en la teoría, ya que dominan la física a bajas energías. A diferencia del taquiión, los **estados sin masa** contienen excitaciones de osciladores. En concreto, tienen un oscilador de cada tipo. Si denotamos el estado de vacío como $|k\rangle$, donde k representa el momento del centro de masa, los estados sin masa se pueden escribir como

$$\epsilon_{\mu\nu}\alpha^\mu\tilde{\alpha}^\nu|k\rangle, \quad (2.1.21)$$

siendo $\epsilon_{\mu\nu}$ un tensor de polarización que permite describir el estado más general posible. Para identificar qué partículas corresponden a estos estados, descomponemos $\epsilon_{\mu\nu}$ en representaciones irreducibles del grupo de Poincaré:

$$\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \oplus b_{\mu\nu} \oplus \phi, \quad (2.1.22)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico sin traza, que representa al **gravitón**; $b_{\mu\nu}$, un tensor antisimétrico conocido como el **campo de Kalb-Ramond**; y ϕ es un escalar denominado **dilatón**. Para estados con $N = \tilde{N} > 1$, el espectro contiene partículas masivas, es decir, excitaciones que aparecen a energías muy altas.

En el caso de cuerdas abiertas, el análisis del espectro sigue un procedimiento similar, pero con diferencias clave. La expansión de X^μ en modos normales contiene solo un conjunto de osciladores α_n^μ , ya que la cuerda no tiene propagación independiente de modos izquierdo y derecho. Como resultado, el espectro está dado por

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - 1). \quad (2.1.23)$$

Al igual que en la cuerda cerrada, el estado fundamental con $N = 0$ es un taquiión, lo que sugiere una inestabilidad en la teoría. En el primer nivel excitado ($N = 1$), encontramos un conjunto de estados sin masa que se agrupan en un **campo de gauge** A^μ , característica distintiva de la cuerda abierta. En niveles superiores ($N > 1$), el espectro contiene estados masivos, análogos a los de la cuerda cerrada. Mientras que la cuerda cerrada predice, entre otros, la presencia de

la gravedad en el sector no masivo, la cuerda abierta da lugar a interacciones de *gauge*, lo que sugiere su conexión con teorías de Yang-Mills.

Finalmente, un aspecto característico de la Teoría de Cuerdas es la restricción sobre la dimensionalidad del espacio-tiempo. El análisis de las simetrías de la acción de Polyakov muestra que la teoría posee simetría conforme. Sin embargo, al cuantizar la teoría, surgen anomalías que rompen dicha simetría. Para eliminarlas, se requiere un número específico de campos en la teoría: 26. Dado que el índice μ en X^μ etiqueta tanto el número de campos como las coordenadas del espacio-tiempo, se concluye que la teoría es consistente solo en una **dimensión crítica** de $D = 26$.

2.1.2 La cuerda supersimétrica

Como hemos visto, la teoría de cuerdas bosónica enfrenta dos problemas fundamentales que impiden su aplicación como modelo realista de la física observable. Por un lado, su espectro carece de fermiones, los cuales son esenciales para describir la materia en nuestro universo; por el otro, la presencia de taquiones señala inestabilidades y problemas de consistencia en la teoría.

La solución a estas dificultades surge con la incorporación de la **supersimetría**, una simetría que relaciona bosones y fermiones. Para introducir fermiones en el marco de la teoría de cuerdas, se modifica la acción de Polyakov añadiendo un término cinético para un espinor de Majorana de dos componentes

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_+^\mu \\ \psi_-^\mu \end{pmatrix}, \quad (2.1.24)$$

que transforma además como un vector bajo el grupo de Lorentz del espacio-tiempo. La acción resultante es [44]:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \quad (2.1.25)$$

donde γ^α es una representación bidimensional del álgebra de Clifford, generada por las matrices γ^α , que satisfacen la relación de anticonmutación:

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}, \quad (2.1.26)$$

con η^{ab} la métrica de Minkowski en dos dimensiones. Esta estructura garantiza la consistencia del sector fermiónico de la teoría.

La acción (2.1.25) es invariante bajo transformaciones supersimétricas en la hoja de mundo, que intercambian bosones y fermiones. Concretamente, los campos X^μ y ψ^μ transforman como

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon}\psi^\mu, \quad \delta\psi^\mu = -i\gamma^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon, \quad (2.1.27)$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal fermiónico.

Al igual que en el caso bosónico, es necesario imponer condiciones de contorno para los campos fermiónicos. En cuerdas abiertas se distinguen dos tipos:

- Condiciones de contorno de Ramond (R):

$$\psi_+^\mu(0, \tau) = \psi_-^\mu(0, \tau), \quad \psi_+^\mu(l, \tau) = \psi_-^\mu(l, \tau). \quad (2.1.28)$$

- Condiciones de contorno de Neveu-Schwarz (NS):

$$\psi_+^\mu(0, \tau) = \psi_-^\mu(0, \tau), \quad \psi_+^\mu(l, \tau) = -\psi_-^\mu(l, \tau). \quad (2.1.29)$$

En el caso de cuerdas cerradas, las condiciones de contorno para los modos izquierdos y derechos de la cuerda pueden elegirse de manera independiente, dando lugar a configuraciones periódicas (R) o antiperiódicas (NS), que generan cuatro sectores distintos de la teoría: R-R, NS-NS, R-NS y NS-R. Esta estructura, que exhibe supersimetría manifiesta en la hoja de mundo, se conoce como el formalismo Neveu-Schwarz-Ramond (NSR) [45,46]. Cabe mencionar que, para conseguir supersimetría en el espacio-tiempo, es preciso aplicar la proyección GSO [37,38], que garantiza la correcta relación entre espín y estadística.

Otra formulación relevante de la teoría de supercuerdas es el formalismo de Green-Schwarz (GS) [47–49], que presenta la ventaja de hacer explícita la supersimetría en el espacio-tiempo. No obstante, su cuantización ha sido posible únicamente en el *gauge* de cono de luz [50]. Además, existe una cuantización covariante basada en este enfoque, conocida como el formalismo de espinores puros, que mantiene la supersimetría del espacio-tiempo de manera manifiesta [51,52].

La diversidad de condiciones de contorno en cuerdas abiertas y cerradas da origen a cinco teorías de supercuerdas distintas: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, y las teorías heteróticas $E_8 \times E_8$ y $SO(32)$. En particular, la elección de condiciones NS en ambas direcciones (NS-NS) genera un espectro que, entre otros campos, contiene el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el campo antisimétrico $b_{\mu\nu}$ y el dilatón ϕ . Este contenido es común a todas las teorías de supercuerdas³, así como a la cuerda bosónica.

³Con la excepción de la teoría tipo I, que no contiene el campo de Kalb-Ramond $b_{\mu\nu}$.

En las teorías tipo II, la imposición de condiciones de contorno R-R da lugar a la aparición de tensores antisimétricos de distintos rangos, denotados como $C^{(n)}$, con n par en la teoría tipo IIB e impar en la tipo IIA. Por otro lado, las teorías heteróticas combinan los modos izquierdos de la cuerda bosónica con los modos derechos de la supercuerda, lo que da lugar a una estructura con supersimetría $\mathcal{N} = 1$. No obstante, se diferencian en el grupo de simetría bajo el cual se agrupan los vectores de *gauge*.

En la siguiente tabla se resume el contenido de campos bosónicos de las cinco teorías de supercuerdas. Todas ellas requieren que la **dimensión crítica** del espacio-tiempo sea $D = 10$,

Nombre	Tipo de cuerdas	Espectro bosónico	SUSY
Tipo I	cerradas y abiertas	$g_{\mu\nu}, \phi, A_\mu, C_{\mu\nu}$	$\mathcal{N} = 1$
Tipo IIA	cerradas	$g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi, C_\mu, C_{\mu\nu\rho}$	$\mathcal{N} = 2$
Tipo IIB	cerradas	$g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi, C_0, C_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}^+$	$\mathcal{N} = 2$
Heterótica $E_8 \times E_8$	cerradas	$g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi, A_\mu$	$\mathcal{N} = 1$
Heterótica $SO(32)$	cerradas	$g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi, A_\mu$	$\mathcal{N} = 1$

en contraste con la cuerda bosónica, cuya dimensión crítica es $D = 26$.

Finalmente, es importante destacar que los fermiones en el espacio-tiempo surgen del sector mixto NS-R o R-NS en el caso de cuerdas cerradas, mientras que en cuerdas abiertas provienen directamente del sector R. En consecuencia, las teorías heteróticas y la tipo I incorporan un gravitino, un dilatino y un *gaugino*, mientras que las teorías tipo II poseen dos gravitinos y dos dilatinos, lo que refleja su grado de supersimetría duplicado.

2.2 Dualidades de cuerdas

Aunque las cinco teorías de supercuerdas en diez dimensiones parecen, a primera vista, independientes, pueden entenderse como distintos límites de una teoría unificada en once dimensiones: la teoría M. La relación entre estas teorías se describe a través del concepto de **dualidades de cuerdas**, las cuales establecen conexiones entre ellas y la teoría M, proporcionando una visión unificada de la teoría de cuerdas. Además, estas dualidades introducen simetrías en el límite de bajas energías (supergravedad), lo que permite determinar propiedades de la acción efectiva,

como las interacciones de orden superior en derivadas de los estados no masivos.

Entre estas simetrías, la **dualidad T** [53–56] juega un papel fundamental al conectar teorías formuladas en espacios geoméricamente distintos. Esta dualidad se basa en la naturaleza unidimensional de la cuerda, lo que permite que las cuerdas cerradas se enrollen alrededor de ciclos no contraíbles si el espacio tiene dimensiones compactas. Como consecuencia, el espectro de la cuerda incluye modos de enrollamiento además de los modos de momento. La dualidad T intercambia estos modos entre distintos espacios compactos, garantizando que la física permanezca invariante.

Por otro lado, la **dualidad S** [57–60] es una simetría no perturbativa que relaciona la teoría de cuerdas tipo IIB en el régimen de acoplamiento fuerte con su versión en el régimen de acoplamiento débil. Dado que las dualidades T y S generan transformaciones que no conmutan entre sí, su combinación da lugar a un grupo de simetría más amplio conocido como **dualidad U** [60]. Esta simetría unificada resulta fundamental en el contexto de la teoría M, ya que permite conectar distintos regímenes de acoplamiento y diferentes geometrías de fondo, incluyendo configuraciones no perturbativas.

Aunque las dualidades S y U son fundamentales para la comprensión global de la teoría de cuerdas y la teoría M, su estudio detallado queda fuera del alcance de esta tesis. En su lugar, exploraremos en profundidad la dualidad T, con especial énfasis en aquellos aspectos más relevantes dentro de la teoría de cuerdas para su integración en la Teoría Doble de Campos.

2.2.1 Compactificación y dualidad T

Hasta ahora, hemos analizado el espectro de la cuerda cerrada y cómo sus modos excitados generan partículas sin masa. En este proceso, hemos visto que la consistencia de la teoría exige un número de dimensiones mayor al observado macroscópicamente, lo que sugiere que algunas de ellas deben ser compactas y de tamaño reducido. A continuación, exploraremos cómo esta compactificación modifica el espectro de la cuerda cerrada en el caso más simple: cuando una de las dimensiones está enrollada en un círculo.

El primer efecto de la compactificación es la cuantización del momento en la dirección compacta, ya que una onda propagándose en una dimensión periódica solo puede tener ciertos valores

discretos de momento. Esto se expresa como

$$p = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.1)$$

donde n es un número entero y R es el radio de la dimensión compacta.

El segundo efecto es que las condiciones de frontera para el campo escalar en esa dirección se vuelven más generales

$$X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma) + 2\pi w R, \quad w \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.2)$$

en comparación con (2.1.13). Aquí, el número entero w indica cuántas veces la cuerda se enrolla alrededor del círculo y se denomina número de enrollamiento (*winding number*).

Estos efectos modifican la relación entre los niveles de energía y la masa desde la perspectiva de un observador en las direcciones no compactas. En particular, el espectro de masas queda determinado por

$$M^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2). \quad (2.2.3)$$

Además, la LMC, que originalmente imponía $N = \tilde{N}$, ahora se modifica según

$$N - \tilde{N} = n w. \quad (2.2.4)$$

Este resultado revela un aspecto característico de la teoría de cuerdas: una cuerda con $n > 0$ unidades de momento en la dirección compacta adquiere una contribución a su masa que puede ser replicada si la cuerda se enrolla $w > 0$ veces alrededor de esa dirección.

A partir de (2.2.3), observamos que el conjunto de estados permanece invariante bajo la transformación

$$n \leftrightarrow w, \quad R \leftrightarrow \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}, \quad (2.2.5)$$

la cual intercambia los modos de momento con el número de enrollamiento, así como el radio del espacio compacto. Esta simetría, sin análogo en la física de partículas, surge de la naturaleza extendida de la cuerda: a diferencia de una partícula puntual, la cuerda es sensible tanto a su momento como a su interacción con la estructura global del espacio compacto.

La transformación (2.2.5) se conoce como **dualidad T** y, lejos de limitarse al espectro de masas, constituye una simetría exacta de la teoría de cuerdas. Esta exactitud implica que la física en un espacio compacto de radio R es completamente indistinguible de la correspondiente a un espacio con radio $\tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$. En consecuencia, no existe un radio preferido en la teoría de

cuerdas: una compactificación con $R > \alpha'$ describe exactamente la misma física que otra con $R < \alpha'$, pero con los roles de los modos de momento y enrollamiento intercambiados.

Este resultado sugiere que la noción clásica de geometría debe ser revisada en el contexto de la teoría de cuerdas, donde la dualidad T revela la existencia de nuevas simetrías que van más allá de las esperadas en un marco puramente gravitacional.

Compactificaciones toroidales: Transformaciones de $O(d, d; \mathbb{Z})$

Cuando más de una dimensión está compactificada, las transformaciones de dualidad T se organizan en una estructura de simetría más amplia: el grupo $O(d, d; \mathbb{Z})$, donde d es el número de dimensiones compactas. En este marco, los números cuánticos n y w pueden interpretarse como componentes de un vector en un espacio de dimensión $2d$, sobre el cual actúa este grupo de transformaciones.

El grupo $O(d, d; \mathbb{Z})$ no solo generaliza la simetría de la dualidad T en un círculo (2.2.5), sino que también permite comprender cómo ciertas propiedades de la teoría de cuerdas permanecen invariantes bajo transformaciones del espacio compacto. Sus elementos pueden describirse mediante matrices $2d \times 2d$, que actúan linealmente sobre el espacio de momentos y enrollamientos. Estas matrices, que denotamos por $h^M{}_N$, caracterizan transformaciones que dejan invariante la métrica del grupo

$$h^M{}_P \eta^{PQ} h^N{}_Q = \eta^{MN}, \quad (2.2.6)$$

donde

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ \delta^i_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{MP} \eta^{PN} = \delta^M{}_N. \quad (2.2.7)$$

Aquí, los índices $M, N = 1, \dots, 2d$ corresponden a $O(d, d; \mathbb{Z})$, mientras que los índices $i, j = 1, \dots, d$ están restringidos al espacio compacto.

Los modos de momento n^i y enrollamiento w_i ahora son objetos d -dimensionales, que pueden organizarse en un vector de momento generalizado:

$$P^M = \begin{pmatrix} w_i \\ n^i \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

En términos de esta cantidad, el espectro de masas se expresa como

$$M^2 = (N + \tilde{N} - 2) + P^M H_{MN} P^N, \quad (2.2.9)$$

donde

$$H_{MN} = \begin{pmatrix} g^{ij} & -g^{ik}b_{kj} \\ b_{ik}g^{kj} & g_{ij} - b_{ik}g^{kl}b_{lj} \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

se denomina métrica generalizada [55, 56]. La LMC toma la forma

$$N - \tilde{N} = \frac{1}{2}P^M\eta_{MN}P^N, \quad (2.2.11)$$

lo que implica que, para los estados no masivos (con $N = \tilde{N} = 1$), los modos de momento y enrollamiento deben ser ortogonales entre sí, es decir, $n^i w_i = 0$.

Revisemos la estructura de $O(d, d; \mathbb{Z})$. Cualquier elemento de este grupo de dualidad puede generarse a partir de los siguientes cuatro subgrupos:

- Dualidades factorizadas:

$$h^{(k)M}_N = \begin{pmatrix} \delta^i_j - t^i_j & t^{ij} \\ t_{ij} & \delta_i^j - t_i^j \end{pmatrix}, \quad t = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad (2.2.12)$$

donde el 1 en la matriz t , de dimensión $d \times d$, está en la posición k -ésima. Estas transformaciones generalizan la dualidad T del círculo (2.2.5) a través de las denominadas **reglas de Buscher** [53, 54]:

$$g_{kk} \rightarrow \frac{1}{g_{kk}}, \quad g_{ki} \rightarrow \frac{b_{ki}}{g_{kk}}, \quad g_{ij} \rightarrow g_{ij} - \frac{g_{ki}g_{kj} - b_{ki}b_{kj}}{g_{kk}}, \quad (2.2.13)$$

$$b_{ki} \rightarrow \frac{g_{ki}}{g_{kk}}, \quad b_{ij} \rightarrow b_{ij} - \frac{g_{ki}b_{kj} - b_{ki}g_{kj}}{g_{kk}}. \quad (2.2.14)$$

Se observa que en la dirección k , g y g^{-1} se intercambian, tal como ocurre en el caso del círculo, donde R y α'/R se transforman uno en el otro.

- Difeomorfismos:

$$h^M_N = \begin{pmatrix} a^i_j & 0 \\ 0 & a_i^j \end{pmatrix}, \quad a \in \text{GL}(d). \quad (2.2.15)$$

Estas transformaciones corresponden a cambios de coordenadas dados por la matriz invertible a .

- Desplazamientos B :

$$h^M_N = \begin{pmatrix} \delta^i_j & 0 \\ B_{ij} & \delta_i^j \end{pmatrix}, \quad B_{ij} = -B_{ji}. \quad (2.2.16)$$

Modifican el campo de Kalb-Ramond mediante una matriz antisimétrica B_{ij} , sin alterar la métrica.

- Transformaciones β :

$$h^M{}_N = \begin{pmatrix} \delta^i{}_j & \beta^{ij} \\ 0 & \delta_i{}^j \end{pmatrix}, \quad \beta^{ij} = -\beta^{ji}. \quad (2.2.17)$$

Introducen una matriz antisimétrica β^{ij} que afecta la estructura del espacio dual. Este tipo de transformaciones pertenecen al sector no geométrico de $O(d, d; \mathbb{Z})$.

Así, para compactificaciones toroidales, la dualidad T actúa sobre los objetos relevantes como

$$H_{MN} \rightarrow h_M{}^P h_N{}^Q H_{PQ}, \quad P^M \rightarrow h^M{}_N P^N, \quad h \in O(d, d; \mathbb{Z}). \quad (2.2.18)$$

La dualidad T también afecta al dilatón. Dado que las amplitudes de dispersión del dilatón son invariantes bajo dualidad T, la relación entre el acoplamiento de cuerdas en d y $d - 1$ dimensiones debe preservarse. Así, la combinación invariante bajo dualidad T es

$$\sqrt{g} e^{-2\phi}. \quad (2.2.19)$$

Más allá de su papel fundamental en la teoría de cuerdas, el grupo $O(d, d; \mathbb{Z})$ se encuentra inmerso en una estructura aún más amplia: $O(d, d; \mathbb{R})$. Este último, a diferencia del primero, es un grupo continuo que aparece como simetría global de la teoría de cuerdas en el límite de bajas energías.

En este contexto, $O(d, d; \mathbb{Z})$ puede interpretarse como la realización discreta de $O(d, d; \mathbb{R})$ que surge al considerar los efectos de la cuantización en la teoría de cuerdas. Mientras que $O(d, d; \mathbb{R})$ describe transformaciones continuas sobre los campos de fondo, $O(d, d; \mathbb{Z})$ restringe estas transformaciones a aquellas que preservan la estructura cuántica de la teoría, como la cuantización de los modos de momento y enrollamiento. Así, en tanto que $O(d, d; \mathbb{R})$ describe las simetrías clásicas de la teoría, $O(d, d; \mathbb{Z})$ captura las que persisten en el régimen cuántico. Esta distinción es crucial para comprender cómo las dualidades y simetrías de la teoría de cuerdas se manifiestan en ambos niveles.

En la siguiente sección, exploraremos en detalle este límite de bajas energías, donde la teoría de supergravedad emerge como una descripción efectiva de la teoría de cuerdas en regímenes de energía suficientemente pequeños.

2.3 El límite de bajas energías: Supergravedad

Las teorías de supercuerdas, con sus torres infinitas de estados masivos, son difíciles de tratar en su formulación completa. En la práctica, es común trabajar en un régimen de energías donde es posible una descripción en términos de una teoría de campos efectiva. Así, en el **límite de bajas energías** de la teoría de cuerdas (cuando la energía es mucho menor que la escala característica de la cuerda M_s), las contribuciones de los estados masivos pueden ignorarse de manera segura, y la descripción más adecuada que se obtiene se da en términos de acciones de **supergravedad**.

Las teorías de supergravedad surgieron como extensiones de la relatividad general que incorporan campos bosónicos y fermiónicos, con una supersimetría local que generaliza la simetría de Poincaré [61]. Aunque no se ha demostrado que la supergravedad sea una teoría perturbativa finita a todos los órdenes, sus acciones efectivas siguen siendo fundamentales en numerosas aplicaciones. En particular, un resultado notable es que describen el comportamiento efectivo de baja energía de las teorías de supercuerdas.

Existen diversos métodos para obtener las acciones efectivas de supercuerdas, así como sus correcciones en derivadas. Por ejemplo, pueden derivarse imponiendo simetrías del espacio-tiempo y de *gauge*, así como la cancelación de anomalías. Otra estrategia consiste en exigir que la acción efectiva reproduzca las amplitudes de dispersión de la teoría de cuerdas.

En esta sección, exploraremos la acción efectiva de supergravedad y su derivación a partir de la teoría de cuerdas. Además, analizaremos las correcciones en α' , las cuales incluyen términos de orden superior en derivadas y permiten extender la validez de la descripción efectiva al incorporar efectos característicos de la teoría de cuerdas.

2.3.1 La acción efectiva

Los estados sin masa de la cuerda cerrada corresponden a tres campos diferentes, los cuales configuran el fondo en el que se propaga la cuerda. La acción de la cuerda en dicho fondo es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\bar{h}} \left[g_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu + i b_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \phi(X) R^{(2)} \right], \quad (2.3.1)$$

donde $R^{(2)}$ es el escalar de Ricci bidimensional de la hoja de mundo y $\epsilon^{\alpha\beta}$ es el tensor anti-simétrico, normalizado de modo que $\sqrt{\bar{h}}\epsilon^{12} = +1$. Aunque esta acción generaliza naturalmente

la acción de Polyakov (2.1.3), introduce interacciones entre los campos escalares.

Aunque el acoplamiento del dilatón desaparece en una hoja de mundo plana ($R^{(2)} = 0$), en general viola la invariancia de Weyl incluso a nivel clásico. No obstante, esta violación puede compensarse a nivel cuántico por una contribución de un *loop*, que surge de los acoplamientos con $g_{\mu\nu}$ y $b_{\mu\nu}$ al calcular las funciones beta del grupo de renormalización, asegurando que la invariancia de Weyl se preserve en la teoría completa.

Para estudiar esta ruptura, analizamos la traza del tensor energía-momento⁴ $\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle$. Cada campo contribuye de manera distinta a esta traza, definiendo tres funciones beta diferentes:

$$\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = -\frac{1}{2\alpha'}\beta_{\mu\nu}(g)\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{i}{2\alpha'}\beta_{\mu\nu}(b)\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2}\beta(\phi)R^{(2)}, \quad (2.3.2)$$

las cuales están dadas por [62],

$$\beta_{\mu\nu}(g) = \alpha'R_{\mu\nu} + 2\alpha'\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{\alpha'}{4}H_{\mu\lambda\kappa}H^{\lambda\kappa}{}_\nu, \quad (2.3.3)$$

$$\beta_{\mu\nu}(b) = -\frac{\alpha'}{2}\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \alpha'\nabla^\lambda\phi H_{\lambda\mu\nu}, \quad (2.3.4)$$

$$\beta(\phi) = -\frac{\alpha'}{2}\nabla^2\phi + \alpha'\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{\alpha'}{24}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}, \quad (2.3.5)$$

donde $H_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}b_{\nu\rho]}$.

Un fondo consistente en teoría de cuerdas debe preservar la invariancia de Weyl, con lo cual hay que exigir que el tensor energía-momento debe tener traza nula, lo que implica

$$\beta_{\mu\nu}(g) = \beta_{\mu\nu}(b) = \beta(\phi) = 0. \quad (2.3.6)$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse como las ecuaciones de movimiento del fondo en el que la cuerda se propaga. Podemos buscar una acción en un espacio-tiempo 26-dimensional cuyas ecuaciones de movimiento reproduzcan estas ecuaciones beta, lo cual nos lleva a la acción efectiva

$$S = \int d^{26}X \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[R + 4\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} \right], \quad (2.3.7)$$

donde R es el escalar de Ricci en 26 dimensiones. A partir de ahora, nos referiremos a esta acción como la acción de supergravedad.

Comentarios sobre las acciones efectivas de supercuerdas

Las teorías de supergravedad se caracterizan por el número de supersimetrías \mathcal{N} y la dimensión del espacio-tiempo D en el que están definidas. El número de componentes de los espinores

⁴El cual se obtiene a partir de la ecuación de movimiento para la métrica del *worldsheet* $h_{\alpha\beta}$.

irreducibles, conocidos como supercargas, determina el número máximo de supersimetrías que una teoría de campos puede tener, siempre que esta no incluya partículas de espín mayor a dos. Este límite superior es de 32 supercargas.

Por ejemplo, en $D = 4$, un espinor tiene cuatro componentes reales, lo que implica que el número máximo de supersimetrías es $\mathcal{N} = 8$. Este es el caso de la supergravedad maximal en cuatro dimensiones. Un ejemplo particularmente importante es la supergravedad en once dimensiones, donde el espinor tiene 32 componentes, correspondiendo a $\mathcal{N} = 1$. En esta dimensión, la teoría de supergravedad es única, y solo existe un multiplete de supergravedad.

El procedimiento para calcular la acción efectiva de baja energía descrito en esta sección también puede aplicarse a la teoría de supercuerdas. Se ha demostrado que la aproximación de baja energía de la supercuerda corresponde a una teoría de supergravedad en diez dimensiones, la cual es una teoría cuántica de campos localmente supersimétrica. La supersimetría en la hoja de mundo induce supersimetría en el espacio-tiempo, con $\mathcal{N} = 2$ para las teorías de tipo IIA y IIB. La forma en que estas supersimetrías se manifiestan en la teoría determina los distintos

Teoría de supercuerdas	Aproximación de baja energía (SUGRA)
Tipo IIA	Tipo IIA con $\mathcal{N} = 2$
Tipo IIB	Tipo IIB con $\mathcal{N} = 2$
Tipo I	$\mathcal{N} = 1 + \text{Super Yang-Mills SO}(32)$
Heterótica SO(32)	$\mathcal{N} = 1 + \text{Super Yang-Mills SO}(32)$
Heterótica $E_8 \times E_8$	$\mathcal{N} = 1 + \text{Super Yang-Mills } E_8 \times E_8$

tipos de supercuerdas y sus respectivas acciones efectivas de baja energía, tal como se muestra en la tabla anterior.

Como ejemplo, describiremos brevemente la acción efectiva de la cuerda heterótica [63, 64]. La estructura de la teoría de cuerdas heterótica se basa en el hecho de que las cuerdas cerradas que la componen tienen sectores de modos independientes para los movimientos hacia la derecha y hacia la izquierda. En este marco, solo uno de los sectores es supersimétrico, lo que da lugar a una supersimetría con $\mathcal{N} = 1$ en el espacio-tiempo. Esta supersimetría es suficiente para eliminar el taquión del espectro. En particular, el sector izquierdo puede coincidir con el de una cuerda puramente bosónica, mientras que el sector derecho corresponde a los modos de una supercuerda.

Además, la teoría de cuerdas heterótica incorpora una teoría de *gauge* no abeliana del tipo Yang-Mills, que surge de la compactificación del sector bosónico en un espacio interno de 16 dimensiones. Esta estructura conduce a una teoría de supercuerdas en diez dimensiones. Por consistencia cuántica, el grupo de *gauge* resultante debe ser $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$. Así, la acción efectiva de baja energía, es decir, el sector bosónico de la supergravedad heterótica [64], está dada por

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[R + 4\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu}_i + \text{fermi terms} \right]. \quad (2.3.8)$$

2.3.2 Correcciones α' en supergravedad

Un aspecto fundamental de las acciones efectivas de cuerdas es la presencia de correcciones de orden superior en derivadas de los campos, conocidas como correcciones α' . Dichas correcciones pueden obtenerse mediante cálculos de amplitudes de dispersión de estados de cuerdas [64–71] o a partir de las condiciones de invariancia conforme de la teoría en la hoja de mundo [72]. Además, las dualidades de cuerdas proporcionan una herramienta poderosa para determinar estas correcciones [73].

A bajas energías, la acción efectiva de la teoría de cuerdas está dada por (2.3.7). Sin embargo, la teoría predice una serie infinita de correcciones con derivadas superiores, que enriquecen la estructura de la acción efectiva. Estas correcciones tienen implicaciones profundas, ya que modifican las ecuaciones de movimiento clásicas, introducen términos de interacción y permiten explorar fenómenos físicos que no están presentes en la aproximación de supergravedad a orden más bajo.

La acción efectiva completa puede escribirse como una expansión en potencias de α' , de la forma

$$S = \int d^Dx \sqrt{-g} e^{-2\phi} (L_0 + \alpha' L_1 + \alpha'^2 L_2 + \alpha'^3 L_3 + \dots), \quad (2.3.9)$$

donde L_0 corresponde al Lagrangiano de supergravedad al orden más bajo, y los términos L_n representan las correcciones de orden n en α' . Los primeros términos de la serie están dados

esquemáticamente por

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \text{Riem}^2 + \dots && \text{(bosónica/heterótica),} \\
 L_2 &= \text{Riem}^3 + \dots && \text{(bosónica),} \\
 L_3 &= \zeta(3) \text{Riem}^4 + \dots && \text{(bosónica/heterótica/tipo IIA/IIB).}
 \end{aligned}$$

Aquí, Riem^n denota productos contraídos de n tensores de Riemann, y $\zeta(3)$ es la función zeta de Riemann evaluada en 3. Los términos L_1 y L_2 se conocen completamente para las distintas teorías que los contienen, mientras que en los últimos años se han hecho avances significativos para determinar completamente la estructura de L_3 [74–78].

Un aspecto importante de la expansión (2.3.9) es la aparición de la dualidad T cuando se compactifica la teoría en un toro T^d . Esta simetría aparece a todo orden en α' [73] y proporciona una herramienta clave para determinar las contribuciones de orden superior compatibles con la teoría de cuerdas.

En relación con el papel de la dualidad T en supergravedad, es importante destacar que esta simetría no está presente en la teoría descompactificada, ya que los modos de enrollamiento son infinitamente pesados y no contribuyen a la dinámica de baja energía. Sin embargo, en una supergravedad completamente compactificada en D dimensiones (es decir, donde todas las dimensiones son compactas, y entonces $D = d$), es posible reescribir la teoría de manera covariante bajo T-dualidad, o más generalmente bajo el grupo $O(D, D; \mathbb{R})$ ⁵. Esta reformulación hace que la simetría se manifieste a nivel de la teoría de campos. Con esta idea surge la Teoría Doble de Campos, la cual será el objeto de estudio del siguiente capítulo.

⁵En adelante utilizaremos la notación $O(D, D)$ para referirnos al grupo continuo $O(D, D; \mathbb{R})$. Especificaremos cuando nos refiramos a su subgrupo discreto cuando sea necesario.

Capítulo 3

La Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$

La riqueza de fenómenos asociados a las dualidades de cuerdas ha motivado el desarrollo de teorías de campo que las incorporen como simetrías manifiestas. En este contexto, la Teoría Doble de Campos (TDC) [16–22] se propuso como un marco para incluir la dualidad T como una simetría fundamental en una teoría de campo. Una extensión de esta idea, que también incorpora la dualidad S y hace explícita la simetría U, es la Teoría de Campos Excepcionales (TCEx) [79–83].

Este capítulo introduce los conceptos fundamentales de la TDC y su extensión supersimétrica [84, 85], que constituyen la base del desarrollo de esta tesis. Para una exposición detallada, se recomienda la consulta de los trabajos de revisión [86–88]. Además de presentar el marco teórico necesario, aquí se establece la notación utilizada a lo largo del trabajo.

Las primeras dos secciones abordan la TDC bosónica, con un énfasis especial en el formalismo de *frame* generalizado [89], que ofrece el marco adecuado para incluir supersimetría y considerar correcciones de orden superior en derivadas. En la sección siguiente, se explora la extensión supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ de la TDC, introducida en [84]. Por su parte, la cuarta sección conecta con la teoría de supergravedad, parametrizando los campos de la TDC en términos de multipletes de supergravedad. Más adelante, se incluye el sector de *gauge* de la supergravedad heterótica y se añaden términos de super Yang-Mills a la parametrización.

3.1 Aspectos básicos de Teoría Doble de Campos

La TDC está definida en un espacio doble equipado con coordenadas $X^M = (x^\mu, \tilde{x}_\mu)$, que pertenecen a la representación fundamental del grupo de simetrías $G = O(D, D)$. Los índices $M = 0, \dots, 2D - 1$ etiquetan las coordenadas del espacio doble, donde D denota la dimensión del espacio-tiempo, mientras que $\mu = 0, \dots, D - 1$. La motivación para considerar un espacio doble surge del interés por incluir a la dualidad T, presente en la teoría de cuerdas, como una simetría de una teoría de campos. Al duplicar las coordenadas, se incorporan las coordenadas duales, permitiendo una descripción más simétrica y unificada de las relaciones entre modos de momento y modos de enrollamiento.

La teoría se construye utilizando multipletes del grupo de dualidad, haciendo de G una simetría manifiesta y global de la teoría. Sea V^M una densidad vectorial arbitraria con peso $w(V)$, covariante bajo transformaciones de G , esta transforma según

$$V^M = h^M{}_N V^N, \quad h \in O(D, D). \quad (3.1.1)$$

Podemos definir una métrica invariante ante transformaciones de G , denotada como η_{MN} y dada por

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\mu{}_\nu \\ \delta_\mu{}^\nu & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.2)$$

la cual, junto con su inversa η^{MN} , se utilizará para bajar y subir índices de $O(D, D)$.

Los campos fundamentales son: un tensor generalizado simétrico H_{MN} , denominado métrica generalizada, y una densidad escalar d , conocida como dilatón generalizado. El tensor H_{MN}

$$H_{MN} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\rho} b_{\rho\nu} \\ b_{\mu\rho} g^{\rho\nu} & g_{\mu\nu} - b_{\mu\rho} g^{\rho\sigma} b_{\sigma\nu} \end{pmatrix}, \quad (3.1.3)$$

combina la métrica del espacio-tiempo D -dimensional, $g_{\mu\nu}$, y el campo antisimétrico, $b_{\mu\nu}$, extendiendo el concepto de geometría para incluir estructuras no riemannianas. Por otro lado, el dilatón generalizado d está relacionado con el dilatón convencional de la teoría de cuerdas, ϕ , a través de

$$e^{-2d} = \sqrt{-g} e^{-2\phi}, \quad (3.1.4)$$

y afecta a la medida de integración en el espacio doble, influyendo en la acción efectiva de la teoría.

Estos campos que, en principio dependen de las coordenadas dobles, contienen la información del sector universal de las teorías de supergravedad, correspondiente al límite de bajas energías de las teorías de supercuerdas. Aunque formalmente los campos dependen del conjunto de coordenadas dobles, debe existir algún mecanismo para restringir la dependencia de las coordenadas y además, dado que queremos una formulación invariante bajo dualidad T, tal restricción debe ser invariante de dualidad. A continuación discutiremos una condición que restringe las posibles configuraciones permitidas, consistentes con la física en D -dimensiones.

3.1.1 La derivada de Lie generalizada y el *strong constraint*

Además de duplicar el número de coordenadas espacio-temporales, en la TDC también se amplían las simetrías locales para reflejar las dualidades heredadas de la teoría de cuerdas. En particular, las transformaciones de difeomorfismos en el espacio doble se describen mediante la derivada de Lie generalizada, cuya acción sobre V^M está dada por

$$\mathcal{L}_\xi V^M = \xi^N \partial_N V^M + (\partial^M \xi_N - \partial_N \xi^M) V^N + w(V) \partial_N \xi^N V^M, \quad (3.1.5)$$

con ξ^M el parámetro de difeomorfismos generalizado, dado por $\xi^M = (\xi^\mu, \lambda_\mu)$, siendo ξ^μ el parámetro de difeomorfismos usuales, y λ_μ el parámetro de transformaciones de *gauge* abelianas.

Si comparamos con la derivada de Lie convencional, es posible observar la aparición de términos adicionales, que reflejan la estructura extendida de las simetrías en el espacio doble. Por ejemplo, al actuar sobre la métrica generalizada (con peso $w(H) = 0$) se obtiene

$$\mathcal{L}_\xi H_{MN} = \xi^P \partial_P H_{MN} + (\partial_M \xi^P - \partial^P \xi_M) H_{PN} + (\partial_N \xi^P - \partial^P \xi_N) H_{MP}, \quad (3.1.6)$$

mientras que sobre el dilatón generalizado e^{-2d} ($w(e^{-2d}) = 1$)

$$\mathcal{L}_\xi e^{-2d} = \xi^M \partial_M e^{-2d} + \partial_M \xi^M e^{-2d}. \quad (3.1.7)$$

La clausura del álgebra de difeomorfismos generalizados impone vínculos sobre las derivadas respecto a las coordenadas generalizadas. Es aquí donde aparece el denominado vínculo fuerte (de ahora en más usaremos su denominación en inglés, *strong constraint*), dado por

$$\partial_M \partial^M \star = \partial_M \star \partial^M \star = 0, \quad (3.1.8)$$

donde \star representa campos de $O(D, D)$ o combinaciones de ellos, y las derivadas $\partial_M = (\partial_\mu, \tilde{\partial}^\mu)$ forman parte de la representación fundamental de G. Si escribimos (3.1.8) usando coordenadas,

encontramos que una posible solución es

$$\tilde{\partial}^\mu \star = 0. \quad (3.1.9)$$

Este vínculo reduce efectivamente el espacio doble al espacio-tiempo convencional de D dimensiones y garantiza que la teoría recupere los grados de libertad físicos conocidos. Cuando las coordenadas que se preservan corresponden a las coordenadas del espacio-tiempo usual, se dice que el *strong constraint* se resuelve en el **marco de supergravedad**. En este marco, las simetrías de la TDC se relacionan directamente con las simetrías de la supergravedad en D dimensiones.

Consideremos entonces el caso en el que el *strong constraint* se resuelve en dicho marco. La derivada de Lie generalizada (3.1.6) nos lleva a las transformaciones conocidas de los campos de supergravedad

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = L_\xi g_{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_\xi b_{\mu\nu} = L_\xi b_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu}\lambda_{\nu]}, \quad (3.1.10)$$

donde L_ξ es la derivada de Lie usual en D -dimensiones. Esta expresión muestra que la derivada de Lie generalizada unifica de manera elegante las simetrías de difeomorfismos y de *gauge* en una sola estructura, respetando las transformaciones esperadas de los campos en supergravedad.

Covariancia ante difeomorfismos generalizados

Un aspecto importante en las teorías de gravedad es la covariancia, que garantiza que las leyes físicas sean independientes del sistema de coordenadas elegido. Esto significa que las derivadas de un tensor que transforma adecuadamente bajo las simetrías de la teoría también deben transformar como tensores bajo dichas simetrías. En el contexto de la TDC, examinar la covariancia bajo difeomorfismos generalizados es esencial para asegurar la consistencia de la teoría.

Veamos cómo transforma la derivada parcial de un vector V_N bajo difeomorfismos generalizados (al ser un vector, $w(V) = 0$). Tenemos

$$\begin{aligned} \delta_\xi (\partial_M V_N) &= \partial_M (\delta_\xi V_N) \\ &= \partial_M (\xi^P \partial_P V_N + (\partial_N \xi^P - \partial^P \xi_N) V_P) \\ &= \mathcal{L}_\xi (\partial_M V_N) + \partial_M (\partial_N \xi^P - \partial^P \xi_N) V_P. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Se observa la aparición de un término extra que rompe la covariancia de la derivada parcial bajo difeomorfismos generalizados. Para restaurar la covariancia, es necesario introducir un

término de conexión que compense este término anómalo. Consideremos el objeto $\Gamma_{MN}{}^P$, que transforma según

$$\delta_\xi \Gamma_{MN}{}^P = \mathcal{L}_\xi \Gamma_{MN}{}^P + \partial_M (\partial_N \xi^P - \partial^P \xi_N) . \quad (3.1.12)$$

Con esto, podemos introducir la derivada covariante generalizada

$$\nabla_M V_N = \partial_M V_N - \Gamma_{MN}{}^P V_P , \quad (3.1.13)$$

la cual, por construcción, transforma covariantemente

$$\delta_\xi (\nabla_M V_N) = \mathcal{L}_\xi (\nabla_M V_N) . \quad (3.1.14)$$

El objeto $\Gamma_{MN}{}^P$ se denomina *conexión afín generalizada*, y juega un papel análogo al de la conexión afín en la geometría riemanniana, pero extendido al marco de la TDC.

Es posible imponer ciertas condiciones de compatibilidad para determinar las componentes de la conexión afín. En relatividad general, por ejemplo, se requiere que la derivada covariante de la métrica se anule (compatibilidad métrica) y que el tensor de torsión sea cero, lo que conduce de manera única a los símbolos de Christoffel. En TDC podemos estudiar condiciones similares. Por ejemplo, la compatibilidad de la derivada covariante con la métrica invariante de grupo η_{MN}

$$\nabla_M \eta_{NP} = \partial_M \eta_{NP} - \Gamma_{MN}{}^Q \eta_{QP} - \Gamma_{MP}{}^Q \eta_{NQ} = -\Gamma_{MNP} - \Gamma_{MPN} = 0 , \quad (3.1.15)$$

implica que la conexión es antisimétrica en los últimos dos índices, es decir, determina las componentes

$$\Gamma_{M(NP)} = 0 . \quad (3.1.16)$$

Veamos ahora otra condición relacionada con la generalización del tensor de torsión en la TDC. Consideremos la siguiente definición

$$\mathcal{T}_{MNP} = \Gamma_{[MNP]} , \quad (3.1.17)$$

la cual transforma covariantemente como un tensor de tres índices y se denomina *tensor de torsión generalizado*. De su definición queda claro que imponer su nulidad determina la componente totalmente antisimétrica de la conexión afín

$$\Gamma_{[MNP]} = 0 . \quad (3.1.18)$$

Si además consideramos condiciones sobre la métrica generalizada, se obtienen restricciones adicionales sobre $\Gamma_{MN}{}^P$. Sin embargo, a diferencia de la geometría riemanniana en D dimensiones, en la TDC estas condiciones no son suficientes para determinar completamente todas las

componentes de la conexión afín generalizada. Esta indeterminación dificulta la construcción explícita de un tensor de curvatura generalizado único, lo que a su vez, limita la incorporación de correcciones de orden superior en derivadas. Retomaremos esta discusión más adelante.

3.1.2 La acción y las ecuaciones de movimiento

La dinámica de la TDC, se deriva a partir de una acción que es invariante bajo las simetrías globales y locales de la teoría. Esta acción, análoga a la acción de Einstein-Hilbert pero formulada en el espacio doble, se expresa como

$$S = \int d^{2D} X e^{-2d} \mathcal{R}(H, d). \quad (3.1.19)$$

El escalar de Ricci generalizado $\mathcal{R}(H, d)$ se define mediante la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(H, d) = & 4H^{MN} \partial_M \partial_N d - \partial_M \partial_N H^{MN} + 4\partial_M H^{MN} \partial_N d - 4H^{MN} \partial_M d \partial_N d, \\ & - \frac{1}{2} H^{MN} \partial_M H^{KL} \partial_K H_{NL} + \frac{1}{8} H^{MN} \partial_M H^{KL} \partial_N H_{KL} + \Delta_{(SC)} \mathcal{R}, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

donde $\Delta_{(SC)} \mathcal{R}$ representa contribuciones que se anulan al imponer el *strong constraint*.

Al parametrizar la métrica y el dilatón generalizados en términos de los campos de supergravedad, según (3.1.3) y (3.1.4) respectivamente, y resolver (3.1.8) en el marco de supergravedad, la acción (3.1.19) se reduce a la acción del sector NS-NS (Neveu-Schwarz) de las teorías de supergravedad en D dimensiones

$$S = \int d^D x e^{-2\phi} \left(R + 4\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right), \quad (3.1.21)$$

donde R es el escalar de Ricci convencional en D -dimensiones, ϕ es el dilatón y $H_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]}$ es la curvatura asociada al tensor antisimétrico $b_{\mu\nu}$.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de la teoría, es necesario variar la acción (3.1.19) respecto a los campos fundamentales, es decir, el dilatón generalizado d y la métrica generalizada H^{MN} . Esto nos lleva [22] a

$$\delta_d S = \int d^{2D} X e^{-2d} \mathcal{K} \delta d, \quad (3.1.22)$$

$$\delta_H S = \int d^{2D} X e^{-2d} \mathcal{K}_{MN} \delta H^{MN}. \quad (3.1.23)$$

La variación de la acción respecto al dilatón generalizado está directamente relacionada con el escalar de Ricci generalizado, resultando

$$\mathcal{K} = -2\mathcal{R}. \quad (3.1.24)$$

Por su parte, la expresión para \mathcal{K}_{MN} es más elaborada. Consideramos (3.1.8), lo cual nos conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{MN} = & \frac{1}{8} \partial_M H^{KL} \partial_N H_{KL} - \frac{1}{4} (\partial_L - 2(\partial_L d)) (H^{LK} \partial_K H_{MN}) + 2\partial_M \partial_N d \\ & - \frac{1}{2} \partial_{(M|} H^{KL} \partial_L H_{|N)K} + \frac{1}{2} (\partial_L - 2(\partial_L d)) (H^{KL} \partial_{(M} H_{N)K} + H^K{}_{(M|} \partial_K H^L{}_{|N)}) . \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Sin embargo, las variaciones de H^{MN} no son arbitrarias, debido a que la métrica generalizada está sujeta a la condición $H^{MN} = \eta^{MP} H_{PQ} \eta^{QN}$. Como consecuencia, solo algunas proyecciones de \mathcal{K}_{MN} contribuyen efectivamente a las ecuaciones de movimiento.

Para aislar las componentes relevantes, introducimos los proyectores

$$P_{MN} = \frac{1}{2} (\eta_{MN} - H_{MN}), \quad \bar{P}_{MN} = \frac{1}{2} (\eta_{MN} + H_{MN}), \quad (3.1.26)$$

que permiten descomponer cualquier vector generalizado en sus componentes proyectadas

$$V_M = \bar{P}_M{}^N V_N + P_M{}^N V_N = V_{\bar{M}} + V_{\underline{M}}. \quad (3.1.27)$$

Definimos entonces el tensor de Ricci generalizado como

$$\mathcal{R}_{MN} = P_M{}^P \bar{P}_N{}^Q \mathcal{K}_{PQ} + \bar{P}_M{}^P P_N{}^Q \mathcal{K}_{PQ} = \mathcal{K}_{\underline{M}\bar{N}} + \mathcal{K}_{\bar{M}\underline{N}}. \quad (3.1.28)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento de la TDC se obtienen al imponer que las variaciones de la acción se anulan para variaciones arbitrarias, pero permitidas, de los campos, resultando en

$$\mathcal{R} = 0, \quad \mathcal{R}_{MN} = 0. \quad (3.1.29)$$

Estas ecuaciones son las análogas en la TDC a las ecuaciones de Einstein en la relatividad general, extendidas para incluir las dualidades y simetrías adicionales presentes debido al origen cuerdístico de la teoría. Describen cómo el dilatón y la métrica generalizada evolucionan y se relacionan en el espacio doble, respetando las restricciones impuestas por la teoría.

3.1.3 Curvaturas: El tensor de Riemann generalizado

Hasta ahora, hemos visto que la TDC posee una estructura geométrica análoga a la de la relatividad general, pero definida en el espacio doble. La aparición de conexiones cuyas componentes se determinan a través de condiciones de compatibilidad similares a las de la teoría de Einstein sugiere una riqueza geométrica significativa. Además, en la sección anterior observamos que al calcular las ecuaciones de movimiento de la TDC, llegamos a la definición de los tensores de curvatura generalizados \mathcal{R} y \mathcal{R}_{MN} , lo cual nos lleva a considerar la posible existencia de un tensor de Riemann generalizado $\mathcal{R}_{MNP}{}^Q$.

Sin embargo, es importante destacar una diferencia crucial entre la geometría riemanniana y la geometría doble: a diferencia de lo que ocurre con la conexión afín en relatividad general, en la geometría doble no existen condiciones suficientes para determinar completamente todas las componentes de la conexión afín generalizada. Esto tiene implicaciones significativas en la construcción de los tensores de curvatura y en la formulación de las correcciones de orden superior en derivadas [90].

Retomemos la idea del tensor de Riemann generalizado. Una primera aproximación es extender al espacio doble la definición convencional del tensor de curvatura, esto es

$$R_{MNP}{}^Q = 2\partial_{[M}\Gamma_{N]P}{}^Q + 2\Gamma_{[M|R}{}^Q\Gamma_{|N]P}{}^R. \quad (3.1.30)$$

El problema que surge con esta definición es que no transforma como tensor ante difeomorfismos generalizados. En geometría riemanniana esta falla en la transformación se corrige imponiendo la condición de torsión nula. Sin embargo, en la geometría doble esta condición no cancela todos los términos adicionales de la transformación. Para resolver este problema, se considera la siguiente combinación

$$\mathcal{R}_{MNPQ} = R_{MNPQ} + R_{PQMN} + \Gamma_{RMN}\Gamma^R{}_{PQ}, \quad (3.1.31)$$

la cual transforma covariantemente bajo difeomorfismos generalizados. No obstante, se presenta un nuevo desafío: esta combinación de conexiones y derivadas no proyecta las conexiones a su parte determinada, por lo que nos queda un tensor de Riemann indeterminado.

Sin embargo esto no resulta un impedimento para definir el tensor de Ricci generalizado, ni el escalar de Ricci generalizado, pues estos se obtienen a partir de trazas de las componentes de (3.1.31) que nos llevan a las definiciones obtenidas vía ecuaciones de movimiento. Por ejemplo,

el escalar de curvatura generalizado está dado por

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\underline{MN}}^{\underline{MN}} = -\mathcal{R}_{\underline{MN}}^{\overline{MN}}, \quad (3.1.32)$$

construído con cantidades totalmente determinadas.

La imposibilidad de construir un tensor de curvatura totalmente determinado en la geometría doble es fundamental al intentar obtener correcciones en derivadas de orden superior en la TDC y su conexión con las teorías de supergravedad. Al no poder construir términos del tipo $\mathcal{R}_{MNPQ}\mathcal{R}^{MNPQ}$ que sean covariantes de dualidad, debido a la indeterminación inherente en las componentes de la conexión afín generalizada, se limita la capacidad de la TDC. Esto ha motivado la búsqueda de alternativas a lo largo de los años, generando un campo activo de investigación.

3.2 El formalismo de *frame* generalizado

Para poder introducir campos fermiónicos y definir una teoría supersimétrica, es necesario contar con simetrías locales, tales como las transformaciones de Lorentz en la relatividad general. En las teorías geométricas convencionales, la introducción de un *vielbein* (conocido como *vierbein* o tetrada en cuatro dimensiones) es fundamental para describir dichas simetrías y explorar la estructura local de la variedad diferenciable. El *vielbein* actúa como un mapa entre el espacio tangente y la variedad, permitiendo expresar cantidades geométricas en términos de referencias locales.

En el contexto de la TDC, esto se logra en el formalismo de *frame* generalizado [89], el cual no solo permite incorporar los campos fermiónicos necesarios para formular la extensión supersimétrica de la teoría, sino que también resulta esencial en el cálculo de correcciones de orden superior en derivadas. En esta formulación se reemplaza la métrica generalizada como campo fundamental de la teoría por el *frame* generalizado E_M^A , que parametriza el coset

$$\frac{\mathbb{G}}{\mathbb{H}} = \frac{\mathrm{O}(D, D)}{\mathrm{O}(D-1, 1)_L \times \mathrm{O}(1, D-1)_R}, \quad (3.2.1)$$

donde $\mathbb{G} = \mathrm{O}(D, D)$ corresponde al grupo de simetrías globales de la teoría, mientras que el grupo $\mathbb{H} = \mathrm{O}(D-1, 1)_L \times \mathrm{O}(1, D-1)_R$ refleja la duplicación de las simetrías de Lorentz (locales) necesarias para describir adecuadamente las propiedades geométricas del espacio doble en la TDC.

El *frame* generalizado está sujeto a los vínculos

$$\eta_{MN} = E_M^A \eta_{AB} E_N^B, \quad H_{MN} = E_M^A H_{AB} E_N^B, \quad (3.2.2)$$

donde los índices M son índices del espacio doble, y los índices planos A se descomponen como $A = (\underline{a}, \bar{a})$, con $\underline{a}, \bar{a} = 0, \dots, D-1$. Las métricas η_{AB} y H_{AB} son constantes, invertibles e invariantes bajo la acción de H . La métrica η_{AB} sube y baja índices planos, mientras que la métrica H_{AB} satisface la condición $H_A^C H_C^B = \delta_A^B$. Con estas métricas invariantes podemos construir los proyectores

$$P_{AB} = \frac{1}{2}(\eta_{AB} - H_{AB}), \quad \bar{P}_{AB} = \frac{1}{2}(\eta_{AB} + H_{AB}), \quad (3.2.3)$$

que permiten descomponer un vector de Lorentz doble en sus componentes proyectadas

$$V_A = \bar{P}_A^B V_B + P_A^B V_B = V_{\bar{a}} + V_{\underline{a}}. \quad (3.2.4)$$

Estas componentes representan las proyecciones del vector en los subespacios definidos por los proyectores, correspondientes a las dos copias del grupo de Lorentz H . Los proyectores, junto con sus inversas, nos servirán para subir y bajar índices proyectados.

La derivada de Lie generalizada actúa sobre E_M^A según

$$\mathcal{L}_\xi E_M^A = \xi^N \partial_N E_M^A + (\partial_M \xi^N - \partial^N \xi_M) E_N^A, \quad (3.2.5)$$

y tal como en el formalismo de métrica generalizada, la consistencia de la construcción requiere la imposición del *strong constraint* (3.1.8). Junto al *frame* generalizado, el dilatón generalizado d aparece en esta formulación como campo fundamental, transformando como un escalar ante las simetrías de la teoría.

En la siguiente sección, exploraremos la acción de las transformaciones de Lorentz en el espacio doble y cómo afectan al *frame* generalizado, profundizando en la estructura local y las simetrías de la teoría.

3.2.1 Transformaciones de Lorentz en el espacio doble

La inclusión del grupo de simetrías locales internas H , requiere extender las transformaciones de Lorentz al espacio doble. Una transformación infinitesimal de Lorentz para un vector genérico V_A , covariante bajo H , toma la forma

$$\delta_\Lambda V_A = V_B \Lambda^B{}_A, \quad (3.2.6)$$

y en particular, para el *frame* generalizado tenemos

$$\delta_\Lambda E_M^A = E_M^B \Lambda_B^A. \quad (3.2.7)$$

La invariancia de las métricas η_{AB} y H_{AB} ante esta transformación impone condiciones sobre el parámetro de Lorentz doble Λ_{AB} . Por ejemplo, consideremos la invariancia de η , esto es $\delta_\Lambda \eta_{AB} = 0$

$$\delta_\Lambda \eta_{AB} = \eta_{CB} \Lambda^C_A + \eta_{AC} \Lambda^C_B = \Lambda_{BA} + \Lambda_{AB} = 0,$$

de donde obtenemos $\Lambda_{AB} = -\Lambda_{BA}$, es decir, el parámetro de Lorentz doble es antisimétrico en sus dos índices. Un cálculo similar, pero esta vez considerando la invariancia de H_{AB} , conduce a la condición $\Lambda_{\underline{a}\bar{b}} = \Lambda_{\bar{a}b} = 0$.

Covariancia ante transformaciones de Lorentz

Así como con los difeomorfismos generalizados, resulta necesario covariantizar las derivadas al incorporar la simetría de Lorentz doble. Sea un vector de Lorentz, V_A , su derivada covariante estará dada por

$$\nabla_M V_A = \partial_M V_A + \omega_{MA}^B V_B, \quad (3.2.8)$$

donde ω_{MA}^B es la *conexión de spin generalizada*. Nuevamente, podemos determinar algunas de sus componentes al exigir ciertas condiciones de compatibilidad. Por ejemplo, la constancia (covariante) de las métricas invariantes de H, nos conduce a

$$\nabla_M \eta_{AB} = 0 \longrightarrow \omega_{MAB} = -\omega_{MBA}, \quad \nabla_M H_{AB} = 0 \longrightarrow \omega_{M\underline{a}\bar{b}} = \omega_{M\bar{a}b} = 0. \quad (3.2.9)$$

Es posible relacionar la conexión de spin generalizada y la conexión afín generalizada, demandando que el *frame* generalizado sea compatible con la derivada covariante, esto es $\nabla_M E_N^A = 0$. Por lo tanto, no debe sorprendernos que no sea posible determinar todas las componentes de la conexión de spin generalizada. En la sección siguiente profundizaremos en las componentes que se pueden determinar a partir de la condición de compatibilidad del *frame* y en cómo estas definen objetos que serán fundamentales en el cálculo de correcciones de orden superior en TDC.

3.2.2 Flujos generalizados

En la Teoría Doble de Campos (TDC), la introducción de los flujos generalizados proporciona una forma de encapsular la dinámica de la teoría en términos de objetos que son, en gran medida,

covariantes bajo las simetrías de la teoría. Estos flujos emergen naturalmente al considerar las componentes determinadas de la conexión de spin generalizada y juegan un papel crucial en la construcción de la acción y las ecuaciones de movimiento en términos de cantidades invariantes.

La condición de compatibilidad del *frame* generalizado con la derivada covariante se expresa como

$$\nabla_M E_N^A = \partial_M E_N^A - \Gamma_{MN}^P E_P^A - \omega_{MB}^A E_N^B = 0. \quad (3.2.10)$$

Podemos aprovechar las propiedades de los índices planos, para lo cual resulta conveniente aplanar los índices dobles utilizando el *frame* generalizado. Definimos así la conexión de spin plana¹ $\omega_{ABC} = \sqrt{2}E^M{}_A \omega_{MBC}$, la conexión afín plana $\Gamma_{ABC} = \sqrt{2}\Gamma_{MN}^P E^M{}_A E^N{}_B E_{PC}$, y la derivada plana $\partial_A = \sqrt{2}E^M{}_A \partial_M$. Con estas definiciones, podemos manipular la condición de compatibilidad (3.2.10) y utilizando las propiedades del *frame* generalizado, resolvemos para la conexión de spin plana

$$\omega_{ABC} = -\partial_A E^N{}_B E_{NC} - \Gamma_{ABC}. \quad (3.2.11)$$

Si bien (3.2.11) nos dice cómo es la conexión de spin generalizada, no es posible determinar todas sus componentes, tal como anticipamos al finalizar la sección anterior. Esto se debe a que no todas las componentes de la conexión afín generalizada quedan determinadas con las condiciones de compatibilidad y de torsión nula. No obstante, podemos determinar ciertas componentes específicas: las componentes totalmente antisimétricas de la conexión de spin generalizada y su traza.

Determinar las componentes totalmente antisimétricas de la conexión de spin generalizada es posible gracias a que las condiciones planteadas nos conducen a $\Gamma_{[ABC]} = 0$. Con esto obtenemos

$$\omega_{[ABC]} = -\partial_{[A} E^N{}_B E_{N|C]}. \quad (3.2.12)$$

Para determinar la traza de la conexión de spin imponemos que la derivada covariante ∇_A se puede integrar por partes en presencia de la medida de integración e^{-2d} , esto es

$$\int d^{2D} X e^{-2d} V \nabla_A V^A = - \int d^{2D} X e^{-2d} V^A \nabla_A V, \quad (3.2.13)$$

para V y V^A arbitrarios. Esto implica

$$\omega_{BA}{}^B = -\sqrt{2}e^{2d} \partial_M \left(e^{-2d} E^M{}_A \right). \quad (3.2.14)$$

¹Los factores de $\sqrt{2}$ se introducen por conveniencia pensando en la parametrización de los multipletes de dualidad para hacer contacto con la supergravedad en D dimensiones.

En este punto tenemos todos los ingredientes para definir los *flujos generalizados*

$$F_{ABC} = 3\partial_{[A}E^N{}_B E_{|N|C]}, \quad (3.2.15)$$

$$F_A = \sqrt{2}\partial_M E^M{}_A - 2\partial_A d, \quad (3.2.16)$$

los cuales claramente están relacionados a las componentes determinadas de la conexión de spin generalizada. En particular vemos que el flujo F_{ABC} es un objeto totalmente antisimétrico, mientras que F_A se asocia con la traza la conexión de spin.

Dado que estos objetos están escritos con índices planos, son manifiestamente invariantes $O(D, D)$, así como también cualquier combinación de ellos. De cualquier modo, su comportamiento bajo las simetrías locales (difeomorfismos generalizados y transformaciones de Lorentz dobles) requiere una consideración cuidadosa. Ante difeomorfismos generalizados es necesario aplicar el *strong constraint* para que los flujos generalizados transformen como escalares

$$\delta_\xi F_{ABC} = \xi^M \partial_M F_{ABC}, \quad \delta_\xi F_A = \xi^M \partial_M F_A. \quad (3.2.17)$$

Aunque es posible relajar el *strong constraint* y aun así obtener transformaciones covariantes para los flujos generalizados [91], nosotros consideraremos en todo momento el caso en el que (3.1.8) se impone.

Por otra parte, ante transformaciones de Lorentz dobles tenemos

$$\delta_\Lambda F_{ABC} = -3\partial_{[A}\Lambda_{BC]} + 3\Lambda^D{}_{[A}F_{BC]D}, \quad \delta_\Lambda F_A = \partial_B \Lambda^B{}_A + \Lambda^B{}_A F_B. \quad (3.2.18)$$

Los primeros términos en ambas transformaciones indican que estos flujos no son objetos tensoriales bajo la simetría de Lorentz doble, debido a las derivadas del parámetro. Sin embargo, es posible construir combinaciones específicas de los flujos generalizados que sean invariantes ante estas transformaciones y, por lo tanto, sean objetos completamente covariantes.

Los flujos generalizados dependen de los campos fundamentales de la TDC y, por tanto, son objetos dinámicos. Podemos construir cantidades covariantes a partir de los flujos generalizados de forma tal que nos permita expresar la acción de la TDC en términos de estos objetos exclusivamente.

3.2.3 La acción y las ecuaciones de movimiento

La acción de la TDC en términos de los flujos generalizados se expresa como

$$S = \int d^{2D}X e^{-2d}\mathcal{R}(E, d), \quad (3.2.19)$$

donde ahora el escalar de Ricci generalizado se expresa en términos de los flujos generalizados

$$\mathcal{R} = \frac{1}{8}F_{ABC}F_{DEF} \left(H^{AD}\eta^{BE}\eta^{CF} - \frac{1}{3}H^{AD}H^{BE}H^{CF} \right) - H^{AB} \left(\frac{1}{2}F_A F_B + \partial_A F_B \right). \quad (3.2.20)$$

En principio, la acción incluye todas las proyecciones de los flujos generalizados presentes en el escalar de curvatura. Sin embargo, podemos utilizar la identidad de Bianchi

$$\frac{1}{6}F_{ABC}F^{ABC} = 2\partial_A F^A + F_A F^A, \quad (3.2.21)$$

para escribir el escalar de Ricci generalizado utilizando un conjunto de proyecciones específico. Esto resultará útil para probar la invariancia de la acción al incluir supersimetría. Obtenemos entonces

$$\mathcal{R} = 2\partial_{\underline{a}}F^{\underline{a}} + F_{\underline{a}}F^{\underline{a}} - \frac{1}{6}F_{\underline{abc}}F^{\underline{abc}} - \frac{1}{2}F_{\bar{abc}}F^{\bar{abc}}. \quad (3.2.22)$$

La acción (3.2.19) es invariante ante las distintas transformaciones de simetría de la teoría. Las transformaciones de los campos fundamentales se resumen en las siguientes expresiones

$$\delta E_M^A = h_M^N E_N^A + \xi^N \partial_N E_M^A + (\partial_M \xi^N - \partial^N \xi_M) E_N^A + E_M^B \Lambda_B^A, \quad (3.2.23)$$

$$\delta d = \xi^N \partial_N d - \frac{1}{2} \partial_M \xi^M. \quad (3.2.24)$$

Finalmente, al considerar las ecuaciones de movimiento, recordemos que la TDC es una teoría con restricciones, y las variaciones del *frame* generalizado no son completamente arbitrarias, sino que están sujetas a vínculos. La situación es similar a la que encontramos al discutir el formalismo de métrica generalizada, donde fue necesario considerar proyecciones específicas de la variación de la acción respecto a la métrica generalizada, lo que nos condujo a definir el tensor de curvatura de Ricci. Entonces, la variación de la acción respecto al dilatón generalizado y al *frame* generalizado nos conducen a las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{R} = 0, \quad \mathcal{R}_{\bar{ab}} = 0, \quad (3.2.25)$$

donde \mathcal{R} es (3.2.22) y

$$\mathcal{R}_{\bar{ab}} = \partial_{\bar{a}}F_{\underline{b}} - \partial_{\underline{c}}F_{\bar{ab}}^{\underline{c}} + F_{\underline{c}\bar{a}}F_{\underline{b}}^{\underline{c}\bar{d}} - F_{\underline{c}}F_{\bar{ab}}^{\underline{c}}. \quad (3.2.26)$$

3.3 Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$

La Teoría Doble de Campos (TDC) captura de manera elegante las simetrías y dualidades presentes en las teorías de supercuerdas. Para profundizar en la conexión con la supergravedad y explorar las propiedades de la teoría en presencia de fermiones, es esencial considerar su extensión supersimétrica. En esta sección, presentamos la TDC con supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en diez dimensiones, a la que nos referiremos como TDC supersimétrica (TDCs).

La elección de $D = 10$ es natural, ya que en diez dimensiones los espinores de Majorana-Weyl existen y son adecuados para describir la supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Esto también coincide con las dimensiones críticas de las teorías de supercuerdas, proporcionando un marco consistente para estudiar la interacción entre bosones y fermiones en el contexto de la TDC.

3.3.1 El álgebra de Clifford generalizada

Para incorporar campos fermiónicos en la TDC, es necesario introducir una generalización del álgebra de Clifford que refleje la estructura del espacio doble. Consideramos las matrices *gamma* γ_a , que satisfacen una versión generalizada del álgebra de Clifford para el grupo $O(9, 1)_L$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2P^{ab}, \quad (3.3.1)$$

donde P_{ab} es el proyector correspondiente a una de las copias (H_L) del grupo de Lorentz en el espacio plano. Estas matrices pueden elegirse de manera que su parametrización corresponda a las matrices *gamma* convencionales en diez dimensiones, facilitando la conexión con las teorías de supergravedad.

Es útil definir los productos antisimétricos de matrices *gamma*

$$\gamma^{a\dots b} = \gamma^{[a} \dots \gamma^{b]}, \quad (3.3.2)$$

los cuales pueden calcularse recursivamente utilizando el álgebra de Clifford (3.3.1). Estos objetos son fundamentales para construir los términos de interacción y las transformaciones de los campos fermiónicos. En el Apéndice B se proporcionan detalles sobre las convenciones y la lista de identidades útiles de las matrices *gamma* en diez dimensiones.

3.3.2 Contenido de campos y sus transformaciones

La TDCs incorpora, además de los campos bosónicos del formalismo de *frame* generalizado, campos fermiónicos que completan el multiplete supersimétrico. Los campos fermiónicos fundamentales son: El gravitino generalizado $\Psi_{\bar{a}}$, que transforma como un espinor de Majorana-Weyl bajo $O(9,1)_L$ y como un vector de $O(1,9)_R$; y el dilatino generalizado, que es un espinor de Majorana-Weyl bajo $O(9,1)_L$ y un escalar ante $O(1,9)_R$. Estos campos son escalares bajo las transformaciones del grupo $O(10,10)$ y los difeomorfismos generalizados. Sus transformaciones bajo las simetrías locales de la teoría quedan expresadas como

$$\delta_{(\xi,\Lambda)}\Psi_{\bar{a}} = \xi^M \partial_M \Psi_{\bar{a}} + \Psi_{\bar{b}} \Lambda^{\bar{b}}_{\bar{a}} + \frac{1}{4} \Lambda_{\underline{bc}} \gamma^{bc} \Psi_{\bar{a}}, \quad (3.3.3)$$

$$\delta_{(\xi,\Lambda)}\varrho = \xi^M \partial_M \varrho + \frac{1}{4} \Lambda_{\underline{bc}} \gamma^{bc} \varrho. \quad (3.3.4)$$

Tal como sucede con los vectores, la derivada de un espinor no es covariante bajo las transformaciones de Lorentz dobles, por lo que necesitamos introducir una contribución adicional en la derivada covariante. Para un espinor genérico² Σ de $O(9,1)_L$, la derivada covariante actúa como

$$\nabla_A \Sigma = \partial_A \Sigma - \frac{1}{4} \omega_{Abc} \gamma^{bc} \Sigma, \quad (3.3.5)$$

y en particular, para los campos fermiónicos fundamentales de la teoría tenemos

$$\nabla_A \Psi_{\bar{b}} = \partial_A \Psi_{\bar{b}} + \omega_{A\bar{b}}^{\bar{c}} \Psi_{\bar{c}} - \frac{1}{4} \omega_{Abc} \gamma^{bc} \Psi_{\bar{b}}, \quad \nabla_A \varrho = \partial_A \varrho - \frac{1}{4} \omega_{Abc} \gamma^{bc} \varrho. \quad (3.3.6)$$

Además de las simetrías G, H y de los difeomorfismos generalizados, ahora tenemos transformaciones de supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Estas transformaciones están parametrizadas por un espinor de Majorana-Weyl ϵ , y (al orden más bajo en fermiones) están dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon E_M^A &= -\bar{\epsilon} \gamma^{[A} \Psi^{B]} E_{MB}, & \delta_\epsilon d &= -\frac{1}{4} \bar{\epsilon} \rho, \\ \delta_\epsilon \Psi_{\bar{a}} &= \nabla_{\bar{a}} \epsilon, & \delta_\epsilon \varrho &= -\gamma^{\underline{a}} \nabla_{\underline{a}} \epsilon, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

las cuales reflejan cómo los campos bosónicos y fermiónicos se acoplan entre sí en el marco de la supersimetría $\mathcal{N} = 1$.

²Por simplicidad omitimos los índices espinoriales.

Resumen de las transformaciones de los campos fundamentales

Las transformaciones de los campos fundamentales de la TDCs bajo las distintas simetrías junto con los parámetros asociados a cada transformación se resumen en la siguiente tabla

	O(10, 10) [h_{MN}]	Difeomorfismos generalizados [ξ^M]	O(9, 1) _L [Λ_{ab}]	O(1, 9) _R [$\Lambda_{\bar{a}\bar{b}}$]	SUSY [ϵ]
E_M^A	vector	vector	vector	vector	Ψ^A
d	escalar	densidad escalar	escalar	escalar	ϱ
Ψ^A	escalar	escalar	espinor	vector	E_M^A
ϱ	escalar	escalar	espinor	escalar	d

En particular se destaca que las transformaciones de H_L y H_R corresponden a dos copias independientes del grupo de Lorentz, caracterizadas por distintas proyecciones del parámetro. Además, la última columna muestra los compañeros supersimétricos de cada campo, resaltando la relación entre los grados de libertad bosónicos y fermiónicos en el marco de la supersimetría $\mathcal{N} = 1$.

3.3.3 La acción supersimétrica

Con las reglas de transformación y el contenido de campos establecidos, podemos construir la acción de la TDCs. La acción, al orden más bajo en fermiones, es

$$S = \int d^{20}X e^{-2d} \left(\mathcal{R} + \bar{\Psi}^{\bar{a}} \gamma^b \nabla_{\bar{b}} \Psi_{\bar{a}} - \bar{\varrho} \gamma^a \nabla_a \varrho + 2 \bar{\Psi}^{\bar{a}} \nabla_{\bar{a}} \varrho \right), \quad (3.3.8)$$

donde \mathcal{R} es el escalar de Ricci generalizado dado por (3.2.22), y los términos fermiónicos representan las contribuciones cinéticas y de interacción entre los campos fermiónicos.

Para demostrar la invariancia supersimétrica de la acción, utilizamos las identidades tipo Lichnerowicz [92], que relacionan los operadores de Dirac y las derivadas covariantes

$$\left(\gamma^a \nabla_a \gamma^b \nabla_b - \nabla^{\bar{a}} \nabla_{\bar{a}} \right) \epsilon = -\frac{1}{4} \mathcal{R} \epsilon, \quad \left[\nabla_{\bar{a}}, \gamma^b \nabla_b \right] \epsilon = \frac{1}{2} \gamma^b \mathcal{R}_{\bar{a}b} \epsilon, \quad (3.3.9)$$

donde aparecen (3.2.22) y (3.2.26). Estas identidades son esenciales para verificar que la variación de la acción bajo supersimetría se anula.

Es importante notar que, en la construcción de los términos bilineales fermiónicos, no aparecen contracciones entre las matrices *gamma* y el gravitino generalizado. Esto se debe a que los índices proyectados contraen con los proyectores $P_{\underline{ab}}$ y $\bar{P}_{\overline{ab}}$, los cuales no tienen componentes mixtas. Esta característica refleja la estructura intrínseca de la TDC y tiene implicaciones en la formulación de las interacciones fermiónicas de orden superior.

Interacciones entre cuatro fermiones

Hasta este punto hemos discutido la extensión mínima de la teoría para considerar supersimetría $\mathcal{N} = 1$, con interacciones entre pares de fermiones acoplados a gravedad. Es posible considerar interacciones no triviales entre cuatro fermiones, para lo cual debemos completar la acción (3.3.8) según

$$S = \int d^{20}X e^{-2d} (\mathcal{R} + L_{2f} + L_{4f}), \quad (3.3.10)$$

donde

$$L_{2f} = \bar{\Psi}^{\bar{a}} \gamma^b \nabla_b \Psi_{\bar{a}} - \bar{\varrho} \gamma^a \nabla_a \varrho + 2 \bar{\Psi}^{\bar{a}} \nabla_{\bar{a}} \varrho, \quad (3.3.11)$$

mientras que L_{4f}

$$L_{4f} = -\frac{1}{384} \left(\bar{\varrho} \gamma^{abc} \varrho \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{d}} \gamma_{abc} \Psi_{\bar{d}} \right) + \frac{1}{192} \left(\bar{\Psi}^{\bar{d}} \gamma^{abc} \Psi_{\bar{d}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{e}} \gamma_{abc} \Psi_{\bar{e}} \right). \quad (3.3.12)$$

Además de incluir nuevos términos en la acción, es necesaria la corrección de las transformaciones de supersimetría

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon E_M^A &= -\bar{\epsilon} \gamma^{[A} \Psi^{B]} E_{MB} + \delta_\epsilon^{(4)} E_M^A, & \delta_\epsilon d &= -\frac{1}{4} \bar{\epsilon} \rho + \delta_\epsilon^{(4)} d, \\ \delta_\epsilon \Psi_{\bar{a}} &= \nabla_{\bar{a}} \epsilon + \delta_\epsilon^{(3)} \Psi_{\bar{a}}, & \delta_\epsilon \varrho &= -\gamma^a \nabla_a \epsilon + \delta_\epsilon^{(3)} \varrho, \end{aligned}$$

en donde las etiquetas (3,4) hacen referencia al número de fermiones en la transformación. Un análisis dimensional nos permite ver que las correcciones a los campos bosónicos no son posibles, ya que son de orden superior en derivadas. Sin embargo, es posible añadir términos con 3 fermiones a las transformaciones de supersimetría de los fermiones generalizados

$$\delta_\epsilon^{(3)} \Psi_{\bar{a}} = -\frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \varrho) \Psi_{\bar{a}} + \frac{1}{4} \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi_{\bar{a}} \right) \gamma_b \varrho + \frac{1}{4} (\bar{\Psi}_{\bar{a}} \varrho) \epsilon \quad (3.3.13)$$

$$\delta_\epsilon^{(3)} \varrho = \frac{1}{384} \left(\bar{\varrho} \gamma^{abc} \varrho \right) \gamma_{abc} \epsilon + \frac{1}{96} \left(\bar{\Psi}^{\bar{d}} \gamma^{abc} \Psi_{\bar{d}} \right) \gamma_{abc} \epsilon. \quad (3.3.14)$$

Estas correcciones aseguran que la variación de la acción bajo supersimetría se anule hasta el orden considerado. La derivación de L_{4f} y las transformaciones corregidas constituye uno de los resultados originales de esta tesis y se detalla en la sección 4.3.1.

Es interesante destacar que, debido a las propiedades de los proyectores y a la estructura de la TDC, los términos de interacción entre cuatro fermiones son específicos y limitados. Este hecho se relaciona con la simetría β presente en supergravedad y tiene implicaciones en la formulación de teorías efectivas, tal como discutiremos en el capítulo 4.

3.4 Parametrización y contacto con supergravedad

Como se mencionó anteriormente, la TDC se define en un espacio doble con coordenadas $X^M = (x^\mu, \tilde{x}_\mu)$, pertenecientes a la representación fundamental de $O(10, 10)$, con $M = 0, \dots, 19$. Al imponer el *strong constraint* (3.1.8), podemos eliminar la dependencia en la mitad de las coordenadas. En particular, al considerar la solución $\tilde{\partial}^\mu \star = 0$, es posible hacer contacto con la supergravedad $\mathcal{N} = 1$ en 10 dimensiones. Para lograr esto, necesitamos parametrizar los objetos de la TDC (campos, parámetros de transformación, etc.) en función de los de supergravedad, y además fijar un *gauge* que garantice que el número de grados de libertad coincida después de la reducción dimensional. De esta forma, el grupo de Lorentz doble se identifica con el grupo de Lorentz convencional en diez dimensiones

$$O(9, 1)_L \times O(1, 9)_R \xrightarrow{\text{Gauge fixing}} O(1, 9).$$

Comenzamos con la descomposición de los índices planos $A = (\underline{a}, \bar{a})$, que toman valores $\underline{a}, \bar{a} = 0, \dots, 9$. Las métricas invariantes de H , η_{AB} y H_{AB} , están dadas por

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} -g_{\underline{ab}} & 0 \\ 0 & g_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad H_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\underline{ab}} & 0 \\ 0 & g_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad (3.4.1)$$

donde $g_{\underline{ab}}$ y $g_{\bar{a}\bar{b}}$ son dos copias de la métrica de Minkowski 10-dimensional. Recordemos que, en esta base, los índices proyectados (del espacio tangente) suben y bajan usando los proyectores $P_{\underline{ab}}, P_{\bar{a}\bar{b}}$, y sus inversas, construidas según (3.2.3).

El frame generalizado se parametriza según

$$E^M{}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e_{\mu\underline{a}} - b_{\nu\mu} e^\nu{}_{\underline{a}} & e^\mu{}_{\underline{a}} \\ e_{\mu\bar{a}} - b_{\nu\mu} e^\nu{}_{\bar{a}} & e^\mu{}_{\bar{a}} \end{pmatrix}, \quad (3.4.2)$$

el cual incorpora información sobre el campo de Kalb-Ramond $b_{\mu\nu}$ y la métrica $g_{\mu\nu}$, a través de los *vielbeins* 10-dimensionales $e_\mu{}^{\underline{a}}$ y $e_\mu{}^{\bar{a}}$, que satisfacen

$$e_\mu{}^{\underline{a}} g_{\underline{ab}} e_\nu{}^{\underline{b}} = e_\mu{}^{\bar{a}} g_{\bar{a}\bar{b}} e_\nu{}^{\bar{b}} = g_{\mu\nu}. \quad (3.4.3)$$

Tras fijar el *gauge* identificaremos $e_\mu^a \delta_{\underline{a}}^a = e_\mu^{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^a = e_\mu^a$, siendo e_μ^a el *vielbein* de supergravedad, y los índices $a, b, \dots = 0, \dots, 9$, índices de $O(1, 9)$. Este paso reducirá el grupo de Lorentz doble al grupo de Lorentz convencional.

La medida de integración de la acción de la TDC se debe identificar con la medida de integración de supergravedad, esto es $e^{-2d} = \sqrt{-g} e^{-2\phi}$, lo cual nos conduce a la parametrización del dilatón generalizado

$$d = \phi - \frac{1}{2} \ln \sqrt{-g}, \quad (3.4.4)$$

con g el determinante de la métrica 10-dimensional.

Para los campos fermiónicos, comenzamos con el gravitino generalizado. Su parametrización es

$$\Psi_A = (\Psi_{\underline{a}}, \Psi_{\bar{a}}) = (0, \psi_a \delta_{\bar{a}}^a). \quad (3.4.5)$$

El dilatino generalizado se parametriza directamente como

$$\varrho = \rho, \quad (3.4.6)$$

siendo ρ un espinor de $O(1, 9)$. Sin embargo, si queremos conectar exactamente con la formulación presentada en [93–95] en términos del campo λ , podemos utilizar la siguiente redefinición de campos

$$\rho = 2\lambda + \gamma^\mu \psi_\mu, \quad (3.4.7)$$

donde tanto ψ_a , ρ y λ pertenecen a la representación espinorial de $O(1, 9)$, con el gravitino transformando también en la representación vectorial.

Ahora queremos expresar las transformaciones y la acción de la teoría en términos de los campos de supergravedad en diez dimensiones. Para ello, es necesario conocer la parametrización de algunas componentes de los flujos generalizados definidos en las ecuaciones (3.2.15) y (3.2.16). Las componentes relevantes de los flujos generalizados al orden que estamos estudiando son

$$F_{\underline{abc}} = -3 \left(w_{[abc]} + \frac{1}{6} H_{abc} \right) \delta_{\underline{abc}}^{abc}, \quad (3.4.8)$$

$$F_{\bar{a}bc} = - \left(w_{abc} + \frac{1}{2} H_{abc} \right) \delta_{\bar{a}}^a \delta_{bc}^{bc} \equiv -w_{abc}^{(+)}, \quad (3.4.9)$$

$$F_{\underline{a}} = \left(\partial_\mu e^\mu_a + e^\mu_a e^\nu_b \partial_\mu e_\nu^b - 2e^\mu_a \partial_\mu \phi \right) \delta_{\underline{a}}^a, \quad (3.4.10)$$

donde definimos la conexión de spin con torsión $w_{abc}^{(\pm)} = w_{abc} \pm \frac{1}{2} H_{abc}$, siendo w_{abc} la conexión de spin usual en supergravedad y $H_{abc} = e^\mu_a e^\nu_b e^\rho_c H_{\mu\nu\rho}$ la 3-forma de curvatura del campo $b_{\mu\nu}$.

En el apéndice A se detallan nuestras convenciones en supergravedad, y en el apéndice C se lista la parametrización de todas las componentes de los flujos generalizados utilizados en la tesis.

Con esta parametrización, procedemos a expresar las transformaciones de los campos, omitiendo las transformaciones bajo $O(10, 10)$ para simplificar. Comenzamos analizando las transformaciones de las componentes $E^\mu_{\underline{a}}$ y $E^\mu_{\bar{a}}$, lo que nos permitirá obtener las transformaciones de los inversos de los *vielbeins* 10-dimensionales. La transformación de $E^\mu_{\underline{a}}$ es

$$\begin{aligned} \delta E^\mu_{\underline{a}} &= \mathcal{L}_\xi E^\mu_{\underline{a}} + E^\mu_{\underline{b}} \Lambda_{\underline{a}}^{\underline{b}} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_{\underline{a}} \Psi^{\bar{b}} E^\mu_{\bar{b}} \\ \xrightarrow{\text{param.}} \frac{1}{\sqrt{2}} \delta e^\mu_{\underline{a}} \delta_{\underline{a}}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} L_\xi e^\mu_{\underline{a}} \delta_{\underline{a}}^a - \frac{1}{\sqrt{2}} e^\mu_{\underline{b}} \Lambda_{\underline{a}}^{\underline{b}} \delta_{\underline{a}}^a - \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_{\underline{a}} \psi^{\bar{b}} e^\mu_{\bar{b}} \delta_{\underline{a}}^a, \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

mientras que la transformación de $E^\mu_{\bar{a}}$ es

$$\begin{aligned} \delta E^\mu_{\bar{a}} &= \mathcal{L}_\xi E^\mu_{\bar{a}} + E^\mu_{\bar{b}} \bar{\Lambda}_{\bar{a}}^{\bar{b}} + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^{\bar{b}} \Psi_{\bar{a}} E^\mu_{\bar{b}} \\ \xrightarrow{\text{param.}} \frac{1}{\sqrt{2}} \delta e^\mu_{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} L_\xi e^\mu_{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^a + \frac{1}{\sqrt{2}} e^\mu_{\bar{b}} \bar{\Lambda}_{\bar{a}}^{\bar{b}} \delta_{\bar{a}}^a - \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma^{\bar{b}} \psi_{\bar{a}} e^\mu_{\bar{b}} \delta_{\bar{a}}^a. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Para hacer contacto con la supergravedad en 10 dimensiones, realizamos un **fijado de gauge** que implica identificar $e_\mu^{\underline{a}} \delta_{\underline{a}}^a = e_\mu^{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^a = e_\mu^a$, siendo e_μ^a el *vielbein* de supergravedad y los índices $a, b, \dots = 0, \dots, 9$, índices de $O(1, 9)$. Esta identificación nos conduce a la relación entre los parámetros de las transformaciones de Lorentz doble

$$\bar{\Lambda}_{ab} = -(\underline{\Lambda}_{ab} + \bar{\epsilon} \gamma_{[a} \psi_{b]}) = \Lambda_{ab}, \quad (3.4.13)$$

donde $\underline{\Lambda}_{ab}$ parametriza las transformaciones de $O(9, 1)_L$, $\bar{\Lambda}_{ab}$ las de $O(1, 9)_R$, y Λ_{ab} corresponde al grupo de Lorentz $O(1, 9)$ en supergravedad. Esta relación muestra cómo, tras el fijado de *gauge*, las transformaciones de Lorentz dobles se combinan con las transformaciones de supersimetría para recobrar las transformaciones de Lorentz convencionales en diez dimensiones.

Después de fijar el *gauge* y realizar las identificaciones necesarias, podemos listar las transformaciones de los campos del multiplete de supergravedad: $(e_\mu^a, b_{\mu\nu}, \phi, \psi_a, \rho)$. Estas transformaciones se obtienen a partir de las de la TDCs al expresar los campos en términos de los

campos de supergravedad. Las transformaciones son

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu^a &= L_\xi e_\mu^a + e_\mu^b \Lambda_b^a + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \\
\delta b_{\mu\nu} &= L_\xi b_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu} \lambda_{\nu]} + \bar{\epsilon} \gamma_{[\mu} \psi_{\nu]}, \\
\delta \phi &= L_\xi \phi - \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \rho + \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_a, \\
\delta \psi_a &= L_\xi \psi_a + \psi_b \Lambda^b_a - \frac{1}{4} \Lambda_{bc} \gamma^{bc} \psi_a + \nabla_a^{(+)} \epsilon - \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \rho) \psi_a - \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \gamma^b \psi_a) \gamma_b \rho + \frac{1}{4} (\bar{\psi}_a \rho) \epsilon, \\
\delta \rho &= L_\xi \rho - \frac{1}{4} \Lambda_{ab} \gamma^{ab} \rho + \gamma^\mu \nabla_\mu \epsilon - \partial \phi \gamma^\mu \epsilon - \frac{1}{384} (\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho) \gamma_{abc} \epsilon - \frac{1}{96} (\bar{\psi}^d \gamma^{abc} \psi_d) \gamma_{abc} \epsilon.
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

La parametrización de la acción resulta en

$$\begin{aligned}
S &= \int d^{10}x e e^{-2\phi} \left[R - \frac{1}{12} H_{abc} H^{abc} + 4 \nabla_a \phi \nabla^a \phi - \bar{\psi}^a \gamma^b \nabla_b \psi_a + \bar{\rho} \gamma^a \nabla_a \rho + 2 \bar{\psi}^a \nabla_a \rho \right. \\
&\quad + \frac{1}{24} H_{abc} \left(\bar{\psi}^\mu \gamma^{abc} \psi_\mu + 12 \bar{\psi}^a \gamma^b \psi^c - \bar{\rho} \gamma^{abc} \rho - 6 \bar{\psi}^a \gamma^{bc} \rho \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{384} (\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho) (\bar{\psi}^d \gamma_{abc} \psi_d) - \frac{1}{192} (\bar{\psi}^d \gamma^{abc} \psi_d) (\bar{\psi}^e \gamma_{abc} \psi_e) \right].
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Esta acción es invariante bajo las transformaciones (3.4.14). Tanto la acción como las transformaciones de los campos coinciden exactamente con los resultados obtenidos previamente [93–95]. Esto confirma la consistencia de la parametrización realizada y valida el enfoque de conectar la TDCs con la supergravedad en diez dimensiones.

3.5 La teoría heterótica

En esta sección, extendemos la construcción previa de la Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$ para incluir campos de *gauge* [96, 97]. Para ello, ampliamos el grupo de simetría global a $G = O(10, 10 + n_g)$, y el grupo de simetrías del espacio tangente a $H = O(9, 1)_L \times O(1, 9 + n_g)_R$, donde n_g es la dimensión del grupo de *gauge* considerado. Cuando se incorporan las constantes de estructura, se obtiene una formulación covariante bajo dualidad T del límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas heterótica [97], que captura las simetrías y dualidades presentes en las teorías con grupos de *gauge* no abelianos $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$.

Observamos que las expresiones necesarias para esta descripción mantienen esencialmente la misma estructura que las obtenidas anteriormente en la TDC sin campos de *gauge*. Sin embargo, deben interpretarse en el contexto de los grupos extendidos G y H . La parametrización adecuada de estos grupos y de los campos asociados nos conduce de manera natural a la supergravedad heterótica, permitiendo explorar nuevas conexiones y generalizaciones.

3.5.1 Gaugeando la Teoría Doble de Campos supersimétrica

Con el objetivo de describir de manera completa la supergravedad heterótica, extendemos la TDCs para incluir campos de *gauge* no abelianos. Basándonos en la formulación de la TDC en presencia de campos de *gauge* abelianos introducida en [96], incorporamos los nuevos grados de libertad asociados a los campos de *gauge* y mantenemos la consistencia de la teoría ampliando el grupo global de simetrías a $G = O(10, 10 + n_g)$, donde n_g es la dimensión del grupo de *gauge* considerado. De esta manera, las coordenadas generalizadas se extienden de 20 (o $2D$ en el caso más general), a $20 + n$,

$$X^M = (x^\mu, \tilde{x}_\mu, x^i), \quad i = 1, \dots, n_g. \quad (3.5.1)$$

El grupo de simetrías del espacio tangente también se amplía a $H = O(9, 1)_L \times O(1, 9 + n_g)_R$, lo que implica que los índices planos siguen la descomposición

$$A = (\underline{a}, \bar{A}) = (\underline{a}, \bar{a}, \bar{i}), \quad \bar{i} = 1, \dots, n_g. \quad (3.5.2)$$

Así, las métricas invariantes de G y H toman ahora la forma

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\mu_\nu & 0 \\ \delta_\mu^\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{ij} \end{pmatrix}, \quad \eta_{AB} = \begin{pmatrix} -g_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & g_{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\bar{i}\bar{j}} \end{pmatrix}, \quad H_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & g_{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\bar{i}\bar{j}} \end{pmatrix}, \quad (3.5.3)$$

donde $\kappa_{ij} = e_i^{\bar{i}} \kappa_{\bar{i}\bar{j}} e_j^{\bar{j}}$ es la métrica de Cartan-Killing del grupo de *gauge* ($SO(32)$ o $E_8 \times E_8$ en la teoría heterótica), y el campo $e_i^{\bar{i}}$ juega el papel de vielbein para el grupo de *gauge*. Las contribuciones no abelianas del sector de *gauge* aparecen a través de los *gauging* f_{MNP} [97], que deforman tanto la derivada de Lie generalizada

$$\mathcal{L}_\xi V^M = \xi^N \partial_N V^M + (\partial^M \xi_N - \partial_N \xi^M) V^N + w(V) \partial_N \xi^N V^M + f^M_{NP} \xi^N V^P, \quad (3.5.4)$$

como los flujos generalizados

$$F_{ABC} = 3\partial_{[A} E^N_B E_{N|C]} + \sqrt{2} E^M_A E^N_B E^P_C f_{MNP}, \quad (3.5.5)$$

y que se parametrizan según

$$f_{MNP} = \begin{cases} f_{ijk} & \text{para } MNP = i, j, k \\ 0 & \text{otras combinaciones} \end{cases}, \quad (3.5.6)$$

siendo f_{ijk} las constantes de estructura del grupo de *gauge* no abeliano considerado. El *strong constraint* (3.1.8), también se ve modificado por la introducción de los gauging, siendo

$$\partial_M \partial^{M\star} = 0, \quad \partial_M \star \partial^{M\star} = 0, \quad f_{MN}{}^P \partial_{P\star} = 0, \quad (3.5.7)$$

además de los vínculos

$$f_{MNP} = f_{[MNP]}, \quad f_{[MN}{}^R f_{P]R}{}^Q = 0. \quad (3.5.8)$$

Los campos fundamentales ahora son:

- El *frame* generalizado $E^M{}_A$, parametrizado como

$$E^M{}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e_{\mu\bar{a}} - C_{\rho\mu} e^{\rho\bar{a}} & e^{\mu\bar{a}} & -A_\rho{}^i e^{\rho\bar{a}} \\ e_{\mu\bar{a}} - C_{\rho\mu} e^{\rho\bar{a}} & e^{\mu\bar{a}} & -A_\rho{}^i e^{\rho\bar{a}} \\ \sqrt{2} A_{\mu i} e^{i\bar{i}} & 0 & \sqrt{2} e^{i\bar{i}} \end{pmatrix}, \quad (3.5.9)$$

donde $A_\mu{}^i$ representa vectores cargados ante el grupo de *gauge*, y además aparece la combinación $C_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2} A_\mu{}^i A_{\nu i}$.

- El dilatón generalizado d , cuya parametrización es similar al caso sin campos de *gauge*

$$d = \phi - \frac{1}{2} \log \sqrt{2}. \quad (3.5.10)$$

- El gravitino generalizado $\Psi_{\bar{A}}$, que al ser un vector de $O(1, 9 + n_g)_R$ se descompone como

$$\Psi_{\bar{A}} = (\Psi_{\bar{a}}, \Psi_{\bar{i}}), \quad (3.5.11)$$

donde a $\Psi_{\bar{i}}$ lo llamaremos *gaugino generalizado*. Estos campos se parametrizan según

$$\Psi_{\bar{a}} = \psi_a \delta_{\bar{a}}^a, \quad \Psi_{\bar{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_i e^{i\bar{i}}, \quad (3.5.12)$$

siendo χ_i el gaugino de la teoría de supergravedad heterótica, compañero supersimétrico del campo $A_\mu{}^i$.

- El dilatino generalizado ϱ , dado por

$$\varrho = \rho. \quad (3.5.13)$$

Las transformaciones de los campos incluyendo al sector de *gauge* se expresan como

$$\begin{aligned}
\delta E_M^a &= \mathcal{L}_\xi E_M^a + E_M^b \Lambda_b^a - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_{\bar{B}} E_M^{\bar{B}}, \\
\delta E_M^{\bar{A}} &= \mathcal{L}_\xi E_M^{\bar{A}} + E_M^{\bar{B}} \Lambda_{\bar{B}}^{\bar{A}} + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_b \Psi^{\bar{A}} E_M^b, \\
\delta d &= \mathcal{L}_\xi d - \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \rho, \\
\delta \Psi_{\bar{A}} &= \mathcal{L}_\xi \Psi_{\bar{A}} + \Lambda_{\bar{A}}^{\bar{B}} \Psi_{\bar{B}} + \frac{1}{4} \Lambda_{bc} \gamma^{bc} \Psi_{\bar{A}} + \nabla_{\bar{A}} \epsilon - \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \rho) \Psi_{\bar{A}} + \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi_{\bar{A}}) \gamma_b \rho + \frac{1}{4} (\bar{\Psi}_{\bar{A}} \rho) \epsilon, \\
\delta \rho &= \mathcal{L}_\xi \rho + \frac{1}{4} \Lambda_{bc} \gamma^{bc} \rho - \gamma^a \nabla_a \epsilon + \frac{1}{384} (\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho) \gamma_{abc} \epsilon + \frac{1}{96} (\bar{\Psi}^{\bar{D}} \gamma^{abc} \Psi_{\bar{D}}) \gamma_{abc} \epsilon,
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

donde el parámetro de difeomorfismos se extiende para incluir el parámetro de transformaciones de *gauge* $\xi^M = (\xi^\mu, \lambda_\mu, \lambda^i)$. Igualmente hay que extender la proyección $\Lambda_{\bar{A}\bar{B}} = (\Lambda_{\bar{a}\bar{b}}, \Lambda_{\bar{a}i}, \Lambda_{\bar{i}\bar{j}})$ del parámetro de Lorentz doble, donde las componentes con índices de *gauge* deben fijarse con la parametrización de manera que los grados de libertad se ajusten adecuadamente. Este **fijado de gauge** nos lleva a identificar las componentes como

$$\bar{\Lambda}_{ab} = -(\Lambda_{ab} + \bar{\epsilon} \gamma_{[a} \psi_{b]}) = \Lambda_{ab}, \tag{3.5.15}$$

$$\bar{\Lambda}_{ai} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_a \chi_i, \tag{3.5.16}$$

$$\bar{\Lambda}_{ij} = f_{ijk} \lambda^k e^i_{\bar{i}} e^j_{\bar{j}}. \tag{3.5.17}$$

Aplicando el fijado de *gauge* y parametrizando los campos en términos de los de supergravedad heterótica, obtenemos las transformaciones de los campos en $D = 10$ dimensiones

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu^a &= L_\xi e_\mu^a + e_\mu^b \Lambda_b^a + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \\
\delta b_{\mu\nu} &= L_\xi b_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu} \lambda_{\nu]} - \partial_{[\mu} \lambda^i A_{\nu]i} + \bar{\epsilon} \gamma_{[\mu} \psi_{\nu]} + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_{[\mu} \chi^i A_{\nu]i}, \\
\delta A_\mu^i &= L_\xi A_\mu^i + \partial_\mu \lambda^i + f^i_{jk} \lambda^j A_\mu^k + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \chi^i, \\
\delta \phi &= L_\xi \phi - \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \rho + \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_a, \\
\delta \psi_a &= L_\xi \psi_a + \psi_b \Lambda_a^b - \frac{1}{4} \Lambda_{bc} \gamma^{bc} \psi_a + \nabla_a^{(+)} \epsilon - \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \rho) \psi_a - \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \gamma^b \psi_a) \gamma_b \rho + \frac{1}{4} (\bar{\psi}_{a\rho}) \epsilon, \\
\delta \chi^i &= L_\xi \chi^i + f^i_{jk} \lambda^j \chi^k - \frac{1}{4} \Lambda_{ab} \gamma^{ab} \chi^i - \frac{1}{4} F_{ab}^i \gamma^{ab} \epsilon - \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \rho) \chi^i + \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \gamma^a \chi^i) \gamma_a \rho + \frac{1}{4} (\bar{\chi}^i \rho) \epsilon \\
\delta \rho &= L_\xi \rho - \frac{1}{4} \Lambda_{ab} \gamma^{ab} \rho + \gamma^\mu \nabla_\mu \epsilon - \partial_\mu \phi \gamma^\mu \epsilon - \frac{1}{384} (\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho) \gamma_{abc} \epsilon \\
&\quad - \frac{1}{96} (\bar{\psi}^d \gamma^{abc} \psi_d) \gamma_{abc} \epsilon - \frac{1}{192} (\bar{\chi}^i \gamma^{abc} \chi_i) \gamma_{abc} \epsilon.
\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

Observamos que ahora se incluyen las transformaciones de los campos del multiplete de super Yang-Mills (A_μ^i, χ^i). Además tanto el dilatino como el campo de Kalb-Ramond adquieren

nuevos términos explícitos en sus reglas de transformación relacionados con el sector de *gauge*. En particular, el campo de Kalb-Ramond adquiere una transformación de *gauge* no-abeliana conocida como transformación de Green-Schwarz, que es fundamental para la cancelación de anomalías de *gauge* en la teoría heterótica.

En estas transformaciones aparecen las curvaturas $F_{ab}{}^i = e^\mu{}_a e^\nu{}_b F_{\mu\nu}{}^i$ y $H_{abc} = e^\mu{}_a e^\nu{}_b e^\rho{}_c H_{\mu\nu\rho}$, asociadas a los campos $A_\mu{}^i$ y $b_{\mu\nu}$ respectivamente, y definidas mediante

$$F_{\mu\nu}{}^i = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^i - f^i{}_{jk}A_\mu{}^j A_\nu{}^k, \quad (3.5.19)$$

$$H_{\mu\nu\rho} = 3(\partial_{[\mu}b_{\nu\rho]} - C_{\mu\nu\rho}^g), \quad (3.5.20)$$

con $C_{\mu\nu\rho}^g$ la forma de Chern-Simons de *gauge*, dada por

$$C_{\mu\nu\rho}^g = A_{[\mu}{}^i \partial_\nu A_{\rho]}{}_i - \frac{1}{3}f_{ijk}A_\mu{}^i A_\nu{}^j A_\rho{}^k, \quad (3.5.21)$$

la cual también juega un papel importante en la cancelación de anomalías.

Finalmente, la acción de la TDCs se puede escribir como

$$\begin{aligned} S = \int d^{20}X e^{-2d} & \left[2\partial_{\underline{a}}F^{\underline{a}} + F_{\underline{a}}F^{\underline{a}} - \frac{1}{6}F_{\underline{abc}}F^{\underline{abc}} - \frac{1}{2}F_{\underline{Abc}}F^{\underline{Abc}} \right. \\ & + \bar{\Psi}^{\underline{A}}\gamma^{\underline{b}}\nabla_{\underline{b}}\Psi_{\underline{A}} - \bar{\varrho}\gamma^{\underline{a}}\nabla_{\underline{a}}\varrho + 2\bar{\Psi}^{\underline{A}}\nabla_{\underline{A}}\varrho \\ & \left. - \frac{1}{384}(\bar{\varrho}\gamma^{\underline{abc}}\varrho)(\bar{\Psi}^{\underline{D}}\gamma_{\underline{abc}}\Psi_{\underline{D}}) + \frac{1}{192}(\bar{\Psi}^{\underline{D}}\gamma^{\underline{abc}}\Psi_{\underline{D}})(\bar{\Psi}^{\underline{E}}\gamma_{\underline{abc}}\Psi_{\underline{E}}) \right], \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

cuya parametrización nos lleva a

$$\begin{aligned} S = \int d^{10}x e^{-2\phi} & \left[R + 4\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^i F^{\mu\nu}{}_i \right. \\ & - \bar{\psi}^\mu\gamma^\nu\nabla_\nu\psi_\mu + \bar{\rho}\gamma^\mu\nabla_\mu\rho + 2\bar{\psi}^\mu\nabla_\mu\rho - \frac{1}{2}\bar{\chi}^i\gamma^\mu\nabla_\mu\chi_i + \bar{\chi}_i\left(\gamma^\mu\psi^\nu - \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\rho\right)F_{\mu\nu}{}^i \\ & + \frac{1}{24}H_{\mu\nu\rho}\left(\bar{\psi}^\lambda\gamma^{\mu\nu\rho}\psi_\lambda + 12\bar{\psi}^\mu\gamma^\nu\psi^\rho - \bar{\rho}\gamma^{\mu\nu\rho}\rho - 6\bar{\psi}^\mu\gamma^{\nu\rho}\rho + \frac{1}{2}\bar{\chi}^i\gamma^{\mu\nu\rho}\chi_i\right) \\ & \left. + \text{four fermi terms.} \right], \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

la acción de la teoría de supergravedad en 10 dimensiones con supersimetría $\mathcal{N} = 1$ acoplada a campos de Yang-Mills. Para los grupos de *gauge* $SO(32)$ o $E(8) \times E(8)$, esta acción se corresponde con el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas heterótica. Los términos con cuatro fermiones serán discutidos en detalle en el capítulo 4, en el contexto del estudio de la simetría β de la supergravedad heterótica.

Capítulo 4

Supersimetría y simetría β en Teoría Doble de Campos

La acción efectiva resultante de la reducción de Kaluza-Klein del límite de bajas energías de la teoría de cuerdas compactificada en un toro d -dimensional posee una simetría global continua $O(d, d, \mathbb{R})$ a todo orden en α' [73]. Esta simetría es la manifestación a bajas energías del grupo discreto de dualidad T, $O(d, d, \mathbb{Z})$, asociado a las compactificaciones toroidales en teoría de cuerdas. Recientemente se ha demostrado que el sector no geométrico de esta simetría, parametrizado por un bivector β , actúa efectivamente como una simetría oculta sobre los campos del sector universal NS-NS [98, 99], y sobre los campos RR en la formulación democrática de las teorías de Tipo II [100] de la teoría en diez dimensiones, fijando sus acoplamientos y definiendo una simetría efectiva de la teoría no compactificada. Por lo tanto, la simetría β emerge como una herramienta valiosa para calcular términos de derivadas superiores en la expansión en α' de la teoría de cuerdas.

En este capítulo extendemos el análisis de la simetría β para explorar sus efectos en la supergravedad heterótica, incluyendo el sector de *gauge* y los campos fermiónicos. Este capítulo se basa en los resultados presentados en [1]. En la primera sección, obtenemos las transformaciones β de los campos del multiplete de gravedad y del multiplete de super Yang-Mills de la supergravedad heterótica, usando el formalismo de *frame* de la Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$ (TDCs), presentado en el capítulo anterior.

Posteriormente, completamos el análisis derivando la acción de la supergravedad heterótica

considerando términos bilineales en fermiones. Mientras que los acoplamientos entre campos bosónicos están determinados de manera única por la simetría β , identificamos cuatro combinaciones de acoplamientos fermiónicos bilineales invariantes bajo β , cuyos coeficientes relativos pueden ser fijados mediante supersimetría. Es notable que, aunque la simetría β no determina completamente la parte fermiónica de la acción, restringe los posibles acoplamientos fermiónicos al orden más bajo en α' .

En la sección siguiente, analizamos las interacciones que involucran cuatro fermiones y encontramos dos combinaciones invariantes bajo la simetría β . Los coeficientes relativos de estos términos en la acción también pueden ser determinados por supersimetría. Finalmente, a partir del marco de la TDCs, derivamos los términos cúbicos en fermiones en las transformaciones de supersimetría y obtenemos la acción cuártica correspondiente.

4.1 La simetría β en Teoría Doble de Campos

En esta sección extendemos el procedimiento desarrollado en [98, 99] para incluir tanto el sector de *gauge* como el sector fermiónico de la supergravedad heterótica. Comenzamos con una descripción del sector no geométrico del grupo $O(d, d)$ y su manifestación en la TDC. A continuación, obtenemos explícitamente las reglas de transformación β de los campos de la teoría en diez dimensiones a partir de la TDCs, enfatizando su impacto en el sector *gauge* y en los campos fermiónicos. Esta ampliación del marco teórico nos permitirá comprender mejor las implicaciones de la simetría β en la supergravedad heterótica y establecer las bases para los análisis posteriores en el capítulo.

4.1.1 El sector no geométrico de $O(d, d)$

Las transformaciones globales continuas del grupo $O(d, d)$ emergen naturalmente al realizar reducciones de Kaluza-Klein en supergravedad, compactificando d de las D dimensiones originales. Infinitesimalmente, estas transformaciones están parametrizadas por una matriz antisimétrica y constante $h_M{}^N$ introducida en (2.2.18), que toma la forma

$$h_M{}^N = \begin{pmatrix} a^\mu{}_\nu & \beta^{\mu\nu} \\ B_{\mu\nu} & -a^\mu{}_\nu \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Estas transformaciones pueden clasificarse según su naturaleza:

- **Subgrupo geométrico:** Incluye los difeomorfismos en d dimensiones $a^\mu{}_\nu$, además de los desplazamientos rígidos del campo de Kalb-Ramond, representados por $B_{\mu\nu}$. Este subgrupo genera transformaciones que dejan invariante la acción de la teoría en D dimensiones.
- **Subgrupo no geométrico:** Las transformaciones asociadas al bivector constante $\beta^{\mu\nu}$ pertenecen a este sector. Estas no admiten una interpretación geométrica convencional y no son simetrías de la teoría completa en D dimensiones, sino que emergen tras la compactificación.

A pesar de que las transformaciones no geométricas no son simetrías exactas en la teoría original, en los últimos años se demostró [98,99] que el sector no geométrico puede considerarse como una simetría efectiva del Lagrangiano del sector universal (NS-NS) antes de cualquier compactificación. En este contexto, la simetría β se convierte en una simetría efectiva de la supergravedad al imponer la restricción

$$\beta^{\mu\nu} \partial_\nu \star = 0. \quad (4.1.2)$$

Esta condición garantiza que las configuraciones de los campos sean independientes de las direcciones donde β tiene componentes no nulas, coherentes con el marco de la compactificación, lo cual permite promover la simetría al nivel del grupo $O(D, D)$.

Para comprender mejor la condición (4.1.2), podemos apoyarnos en la TDC. Las derivadas ∂_M pertenecen a la representación fundamental de $O(D, D + n_g)$ y por lo tanto, transforman linealmente bajo la acción del grupo, es decir

$$\delta_\beta \partial_M \star = h_M{}^N \partial_N \star. \quad (4.1.3)$$

Recordemos que una solución al *strong constraint* está dada por la **sección de supergravedad**, lo cual equivale a fijar $\partial_M = (\partial_\mu, 0, 0)$. Sin embargo los elementos no geométricos de $O(D, D + n_g)$ rompen la elección de la sección

$$\delta_\beta \partial_M \star = (0, \beta^{\mu\nu} \partial_\nu, 0) \star, \quad (4.1.4)$$

por lo que es necesario imponer la restricción (4.1.2) para restablecerla y mantener la consistencia de la teoría.

4.1.2 Las transformaciones β de los campos

Si incluimos las transformaciones de $O(10, 10+n_g)$ en el conjunto de transformaciones (3.5.14), y consideramos únicamente términos bilineales en fermiones (los términos cuárticos se analizarán en la última sección de este capítulo), obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta E_M^a &= h_M^N E_N^a + \mathcal{L}_\xi E_M^a + E_M^b \underline{\Lambda}_b^a - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_{\bar{B}} E_M^{\bar{B}}, \\
\delta E_M^{\bar{A}} &= h_M^N E_N^{\bar{A}} + \mathcal{L}_\xi E_M^{\bar{A}} + E_M^{\bar{B}} \bar{\Lambda}_{\bar{B}}^{\bar{A}} + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_{\bar{b}} \Psi^{\bar{A}} E_M^{\bar{b}}, \\
\delta d &= \mathcal{L}_\xi d - \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \varrho, \\
\delta \Psi_{\bar{A}} &= \mathcal{L}_\xi \Psi_{\bar{A}} + \bar{\Lambda}_{\bar{A}}^{\bar{B}} \Psi_{\bar{B}} + \frac{1}{4} \Lambda_{bc} \gamma^{bc} \Psi_{\bar{A}} + \nabla_{\bar{A}} \epsilon, \\
\delta \varrho &= \mathcal{L}_\xi \varrho + \frac{1}{4} \Lambda_{bc} \gamma^{bc} \varrho - \gamma^a \nabla_a \epsilon,
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

las cuales pueden parametrizarse siguiendo (3.5.9)-(3.5.13). De aquí en adelante, consideraremos sólo los elementos antisimétricos constantes $\beta^{\mu\nu}$ de $h_M^N \in O(10, 10+n_g)$, correspondientes al sector no geométrico del grupo. Es decir, usaremos la parametrización

$$h_M^N = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.6}$$

Con esto en mente, podemos parametrizar las transformaciones (4.1.5). En particular, para el *frame* generalizado, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta E^\mu_{\underline{a}} &\xrightarrow{\text{param.}} \delta e^\mu_{\underline{a}} = -\beta^{\mu\nu} (e_{\nu a} + C_{\rho\nu} e^\rho_a) - e^\mu_b \underline{\Lambda}^b_a - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_a \psi^b e^\mu_b, \\
\delta E^\mu_{\bar{a}} &\xrightarrow{\text{param.}} \delta e^\mu_{\bar{a}} = \beta^{\mu\nu} (e_{\nu a} - C_{\rho\nu} e^\rho_a) + e^\mu_b \bar{\Lambda}^b_a - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^b \psi_a e^\mu_b,
\end{aligned}$$

donde hemos omitido los difeomorfismos generalizados para simplificar la expresión.

Para que los grados de libertad de la teoría doble coincidan, al reducirse, con los de la teoría en diez dimensiones, es necesario realizar un **fijado de gauge**, $e_\mu^{\bar{a}} = e_\mu^a$. Esto relaciona el grupo de Lorentz doble H con el grupo de Lorentz de la supergravedad heterótica $O(1, 9)$. Este fijado de *gauge* conduce a la coincidencia de las transformaciones de los *vielbeins*, estableciendo la relación

$$\bar{\Lambda}_{ab} + \underline{\Lambda}_{ab} = -2\beta_{ab} + \bar{\epsilon} \gamma_{[a} \psi_{b]}, \tag{4.1.7}$$

donde $\beta_{ab} = \beta^{\mu\nu} e_{\mu a} e_{\nu b}$. Diferentes soluciones de esta ecuación están relacionadas mediante redefiniciones del parámetro de Lorentz estándar en supergravedad. Elegimos la solución

$$\underline{\Lambda}_{ab} = -\Lambda_{ab} - \beta_{ab} + \bar{\epsilon} \gamma_{[a} \Psi_{b]}, \quad \bar{\Lambda}_{ab} = \Lambda_{ab} - \beta_{ab}, \quad (4.1.8)$$

siendo Λ_{ab} el parámetro de Lorentz de la teoría en diez dimensiones.

Determinaremos las componentes con índices de *gauge* en el parámetro de Lorentz a partir de la transformación de las componentes $E^{\bar{m}i} = 0$ y $E_i^{\bar{i}} = e_i^{\bar{i}} = \text{const.}$, del *frame* generalizado. Esto nos lleva a

$$\bar{\Lambda}_{ai} = \sqrt{2} \beta^{\mu\nu} A_{\mu i} e_{\nu a} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_a \chi_i, \quad (4.1.9)$$

$$\bar{\Lambda}_{ij} = -\beta^{\mu\nu} A_{\mu i} A_{\nu j} + f_{ijk} \lambda^k. \quad (4.1.10)$$

Ahora, podemos completar el conjunto de transformaciones (3.5.18) incluyendo las transformaciones β

$$\begin{aligned} \delta_{\beta} e_{\mu}^a &= \beta^{\nu\rho} C_{\mu\rho} e_{\nu}^a, \\ \delta_{\beta} b_{\mu\nu} &= -\beta^{\lambda\rho} \left(g_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + b_{\mu\lambda} b_{\rho\nu} - A_{\rho i} A_{[\mu}^i g_{\nu]\lambda} + \frac{1}{4} A_{\mu i} A_{\lambda}^i A_{\rho j} A_{\nu}^j \right), \\ \delta_{\beta} A_{\mu}^i &= \beta^{\rho\nu} (g_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}) A_{\rho}^i, \\ \delta_{\beta} \phi &= \frac{1}{2} \beta^{\mu\nu} b_{\mu\nu}, \\ \delta_{\beta} \psi_a &= -\beta^{\mu\nu} \left(\psi_{\mu} e_{\nu a} + \chi_i A_{\mu}^i e_{\nu a} + \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} \psi_a \right), \\ \delta_{\beta} \chi^i &= \beta^{\mu\nu} \left(2A_{\mu}^i \psi_{\nu} + A_{\mu}^i A_{\nu}^j \chi_j - \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} \chi^i \right), \\ \delta_{\beta} \rho &= -\frac{1}{4} \beta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} \rho, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

las cuales están sujetas a la condición (4.1.2).

4.2 Simetría β de la supergravedad heterótica

En esta sección derivamos la acción invariante bajo las reglas de transformación β que acabamos de obtener, considerando términos bilineales en fermiones. Al exigir la invariancia β de la combinación más general de términos invariantes bajo difeomorfismos, transformaciones de *gauge* y transformaciones de Lorentz, se fijan de manera unívoca los acoplamientos de los campos

bosónicos de la supergravedad heterótica. Sin embargo, en el sector fermiónico, encontramos cuatro combinaciones invariantes bajo β de términos bilineales en fermiones, cuyos coeficientes relativos deben ser determinados por supersimetría.

4.2.1 Sector bosónico

Comenzamos considerando la combinación más general de términos invariantes bajo las simetrías locales, que pueden construirse a partir de los campos bosónicos de la supergravedad en $D = 10$ con supersimetría $\mathcal{N} = 1$, acoplada a campos de Yang-Mills. Esta combinación se expresa como

$$S_B = \int d^{10}x \sqrt{-g} f(\phi) L = \int d^{10}x \sqrt{-g} f(\phi) [R + a \square \phi + b (\nabla \phi)^2 + c H^2 + d F^2] , \quad (4.2.1)$$

con $H^2 = H_{abc} H^{abc}$ y $F^2 = F_{abi} F^{abi}$. Cabe destacar que, aunque aquí hemos utilizado una única función escalar $f(\phi)$, una combinación más general consistente con las simetrías de *gauge* podría incluir diferentes funciones $f_i(\phi)$ frente a cada uno de los cinco términos dentro de los corchetes. Esta generalización es directa, ya que cada función satisfará la misma ecuación que $f(\phi)$.

Nuestro objetivo es analizar si la invariancia de la acción ante transformaciones β , es decir

$$\delta_\beta S_B = 0 , \quad (4.2.2)$$

es suficiente para determinar todos los coeficientes de los acoplamientos presentes en la acción. Para ello, necesitamos calcular la variación de los objetos involucrados en la acción. Usando las transformaciones (4.1.11) junto a la condición (4.1.2), obtenemos

$$\delta_\beta \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \beta^{ab} b_{ab} , \quad (4.2.3)$$

$$\delta_\beta w_{abc} = -\beta_{[b}^d (H_{c]ad} + F_{c]a}{}^i A_{di}) + \frac{1}{2} \beta_a{}^d (H_{bcd} + F_{bc}{}^i A_{di}) , \quad (4.2.4)$$

$$\delta_\beta R = -2 \nabla_a \left[(H^a{}_{bc} + A_b{}^i F_{cai}) \beta^{bc} \right] - \frac{1}{2} \nabla_a \beta^{bc} (H^a{}_{bc} + 2 F_{ab}{}^i A_{ci} - F_{bc}{}^i A_{ai}) \quad (4.2.5)$$

$$\delta_\beta (\nabla \phi)^2 = \beta^{bc} (H^a{}_{bc} + F^a{}_b{}^i A_{ci}) \nabla_a \phi , \quad (4.2.6)$$

$$\delta_\beta \square \phi = \frac{1}{2} \nabla_a \left[(H^a{}_{bc} + F^a{}_{bi} A_c{}^i) \beta^{bc} \right] + \nabla_a \phi \beta^{bc} (H^a{}_{bc} + F^a{}_{bi} A_c{}^i) , \quad (4.2.7)$$

$$\delta_\beta F_{ab}{}^i = 2 \beta_{[a}{}^c F_{b]c}{}^i + \left(\nabla^c \beta_{ab} - 2 \nabla_{[a} \beta_{b]}{}^c + \beta^{cd} (H_{abd} + F_{ab}{}^j A_{dj}) \right) A_c{}^i , \quad (4.2.8)$$

$$\delta_\beta H_{abc} = -3 \nabla_{[a} \beta_{bc]} - 3 \beta_{[a}^d F_{bc]}{}^i A_{di} , \quad (4.2.9)$$

donde todos los índices curvos fueron aplanados utilizando el *vielbein* $e_\mu{}^a$, o su inversa. Por ejemplo: $A_a{}^i = e^\mu{}_a A_\mu{}^i$. Nótese que incluimos la variación de la conexión de spin w_{abc} , la cual

no aparece de manera explícita en la acción sino a través del escalar de Ricci R y de las derivadas covariantes, por lo que debe tomarse en cuenta.

La variación de la acción (4.2.1) toma la forma

$$\begin{aligned}
\delta_\beta S_B = & \int d^{10}x \sqrt{-g} f(\phi) \left\{ -2 \left(1 - \frac{1}{4}b \right) \nabla_a \left[(H^a{}_{bc} + A_{bi} F_c{}^{ai}) \beta^{bc} \right] \right. \\
& + (a+b) \nabla_a \phi \beta^{bc} (H^a{}_{bc} + F^a{}_{bi} A_c{}^i) - \frac{1}{2} (1+12c) \nabla_a \beta_{bc} H^{abc} \\
& \left. - \frac{1}{2} (1+4d) \nabla_a \beta_{bc} \left(2F^{abi} A^c{}_i - A^{ai} F^{bc}{}_i \right) + 2(d-3c) \beta^d{}_a F_{bc}{}^i A_{di} H^{abc} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \beta^{ab} b_{ab} (2f(\phi) + f'(\phi)) [R + a\Box\phi + b(\nabla\phi)^2 + cH^2 + dF^2] ,
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

y a partir de aquí, la invariancia ante transformaciones β , esto es, que se cumpla (4.2.2) nos conduce a los siguientes valores para los coeficientes

$$a = -b = -4, \quad c = -\frac{1}{12}, \quad d = -\frac{1}{4}, \quad f(\phi) = e^{-2\phi}. \tag{4.2.11}$$

Estos coeficientes corresponden precisamente a la acción del sector bosónico de la supergravedad en diez dimensiones con supersimetría $\mathcal{N} = 1$

$$S_B = \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[R + 4\Box\phi - 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu i} F^{\mu\nu i} \right], \tag{4.2.12}$$

que para los grupos de *gauge* $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$ coincide con el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas heterótica. Este resultado completa el análisis en [98,99] con la inclusión del sector de *gauge*.

4.2.2 Sector fermiónico

Para obtener el sector fermiónico de la acción, invariante bajo la acción de la simetría β , consideramos todos los posibles acoplamientos fermiónicos bilineales invariantes bajo las simetrías

locales, dados por

$$\begin{aligned}
F_1 &= \bar{\rho}\gamma^a\nabla_a\rho, & F_2 &= \bar{\psi}_a\gamma^{abc}\nabla_b\psi_c, & F_3 &= \bar{\psi}_a\gamma^a\nabla^b\psi_b, & F_4 &= \bar{\psi}_a\gamma^b\nabla^a\psi_b, \\
F_5 &= \bar{\psi}^a\gamma^b\nabla_b\psi_a, & F_6 &= \bar{\chi}_i\gamma^a\nabla_a\chi^i, & F_7 &= \bar{\rho}\gamma^{ab}\nabla_a\psi_b, & F_8 &= \bar{\rho}\nabla^a\psi_a, \\
F_9 &= \bar{\psi}_a\gamma^{ab}\nabla_b\rho, & F_{10} &= \bar{\psi}_a\nabla^a\rho, \\
B_1^\phi &= \bar{\psi}_b\gamma^b\psi^a\nabla_a\phi, & B_2^\phi &= \bar{\rho}\gamma^{ab}\psi_a\nabla_b\phi, & B_3^\phi &= \bar{\rho}\psi^a\nabla_a\phi, \\
B_1^H &= \bar{\rho}\gamma^{abc}\rho H_{abc}, & B_2^H &= \bar{\chi}^i\gamma^{abc}\chi_i H_{abc}, & B_3^H &= \bar{\psi}_a\gamma^{abcde}\psi_b H_{cde}, & B_4^H &= \bar{\psi}_d\gamma^{abc}\psi^d H_{abc}, \\
B_5^H &= \bar{\psi}^a\gamma^{bcd}\psi_d H_{abc}, & B_6^H &= \bar{\psi}^a\gamma^b\psi^c H_{abc}, & B_7^H &= \bar{\rho}\gamma^{abcd}\psi_d H_{abc}, & B_8^H &= \bar{\rho}\gamma^{ab}\psi^c H_{abc}, \\
B_1^F &= \bar{\rho}\gamma^{ab}\chi_i F_{ab}^i, & B_2^F &= \bar{\psi}_c\gamma^{abc}\chi_i F_{ab}^i, & B_3^F &= \bar{\psi}^a\gamma^b\chi_i F_{ab}^i.
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

En realidad, se debería incluir un término $\sqrt{-g}f_i(\phi)$ delante de cada acoplamiento en la lista (4.2.13). No obstante, el razonamiento utilizado para los acoplamientos de campos puramente bosónicos sigue siendo válido, lo que conduce a un factor invariante global de $\sqrt{-g}e^{-2\phi}$, que omitiremos para simplificar. Para calcular cómo transforma cada uno de los términos propuestos, las siguientes transformaciones β serán útiles

$$\delta_\beta(\nabla_a\rho) = -\frac{1}{4}\nabla_a(\beta^{bc}\gamma_{bc}\rho) - \frac{1}{8}\left[(H_{abc} + A_{di}F_{bc}^i)\beta_a^d - 2(H_{dab} + A_{di}F_{ab}^i)\beta_c^d\right]\gamma^{bc}\rho, \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\beta(\nabla_a\psi_b) &= \nabla_a\left[\beta_{bc}(\psi^c + A^c{}_i\chi^i) - \frac{1}{4}\beta^{cd}\gamma_{cd}\psi_b\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[(H_{abc} + A_{di}F_{bc}^i)\beta_a^d - 2(H_{da[b} + A_{di}F_{a[b}^i)\beta_{c]}^d\right]\psi^c \\
&\quad - \frac{1}{8}\left[(H_{ecd} + A_{ei}F_{cd}^i)\beta_a^e - 2(H_{eac} + A_{ei}F_{ac}^i)\beta_d^e\right]\gamma^{cd}\psi_b,
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\beta(\nabla_a\chi^i) &= \nabla_a\left[\beta^{bc}\left(2A_b{}^i\psi_c + A_b{}^i A_c{}^j\chi_j\chi^i - \frac{1}{4}\gamma_{bc}\chi^i\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{8}\left[(H_{abc} + A_{dj}F_{bc}^j)\beta_a^d - 2(H_{da[b} + A_{di}F_{a[b}^i)\beta_{c]}^d\right]\gamma^{bc}\chi^i.
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Sin embargo, no todos los términos listados en (4.2.13) están permitidos por la simetría β , lo cual vamos a discutir a continuación. Una inspección general de los términos revela la siguiente estructura

$$\delta_\beta T = \delta_{QC}T + \delta_{NC}T, \tag{4.2.17}$$

donde T denota cualquier acoplamiento fermiónico bilineal construido a partir de los campos ρ, ψ^a y χ^i , $\delta_{QC}T$ es una transformación *cuasi-covariante* y $\delta_{NC}T$ es una transformación no covariante, es decir, que contiene acoplamientos diferentes de los de T .

En particular a partir de la transformación del gravitino listada en (4.1.11), podemos ver que la estructura $T^{ab}_{c_1\dots c_n} = \bar{\psi}^a \gamma_{c_1\dots c_n} \psi^b$ transforma como la suma de los siguientes dos términos

$$\delta_{QC} T^{ab}_{c_1\dots c_n} = \beta^a{}_d T^{db}_{c_1\dots c_n} + \beta^b{}_d T^{ad}_{c_1\dots c_n} - \beta_{c_1}{}^d T^{ab}_{dc_2\dots c_n} - \dots - \beta_{c_n}{}^d T^{ab}_{c_1\dots d}, \quad (4.2.18)$$

$$\delta_{NC} T^{ab}_{c_1\dots c_n} = \beta^{ad} A_d{}^i \bar{\chi}_i \gamma_{c_1\dots c_n} \psi^b + \beta^{bd} A_d{}^i \bar{\psi}^a \gamma_{c_1\dots c_n} \chi_i. \quad (4.2.19)$$

Nótese que si el índice vectorial de uno de los gravitinos (a o b) está contraído con el índice vectorial de una matriz γ , las correspondientes transformaciones β en (4.2.18) se suman y no pueden ser canceladas por las variaciones de ningún otro término. De hecho, términos en los que el índice vectorial de un gravitino o de una matriz γ está contraído con el de una derivada o un campo bosónico, se transforman en expresiones en las que un índice de β está contraído con el gravitino o la matriz γ , y el otro con el campo bosónico. Por lo tanto, la simetría β no permite la contracción de los índices vectoriales de los gravitinos con los de las matrices γ , y los acoplamientos $F_2, F_3, F_4, F_7, F_9, B_1^\phi, B_2^\phi, B_3^H, B_5^H$ y B_7^H no pueden pertenecer a un lagrangiano invariante bajo β . Esta observación solo es válida cuando la teoría está escrita en términos de ψ_a, χ^i y $\rho = 2\lambda + \gamma^a \psi_a$, es decir, el dilatino λ solo aparece a través del dilatino generalizado ρ .

Este resultado también puede deducirse fácilmente a partir de la TDCs, donde se sigue del hecho de que el índice vectorial del gravitino transforma bajo $O(1, 9)_R$ y el índice espinorial bajo $O(9, 1)_L$, reflejando su relación con la teoría de cuerdas, pues los campos fermiónicos pertenecen al sector R-NS (o NS-R) en el espectro de cuerdas.

Más aún, puesto que las transformaciones (4.1.11) preservan el número de dilatinos, la invariancia β de los acoplamientos fermiónicos propuestos se puede analizar de forma separada a través de tres combinaciones de términos

$$\mathcal{L}_0 = F_5 + a_1 F_6 + a_2 B_3^F + a_3 B_2^H + a_4 B_4^H + a_5 B_6^H, \quad (4.2.20)$$

$$\mathcal{L}_1 = F_8 + b_1 F_{10} + b_2 B_3^\phi + b_3 B_1^F + b_4 B_8^H, \quad (4.2.21)$$

$$\mathcal{L}_2 = F_1 + c B_1^H, \quad (4.2.22)$$

los cuales transforman según

$$\begin{aligned} \delta_\beta \mathcal{L}_0 &= (1 - 2a_1) \beta_{ac} A^{ci} \left(\bar{\psi}^a \gamma^b \nabla_b \chi_i - \nabla_b \bar{\psi}^a \gamma^b \chi_i \right) \\ &\quad - (1 + 2a_5) \left[2\beta_{cd} (-w^d{}_{ab} + \frac{1}{2} H^d{}_{ab}) + \beta_{bd} w^d{}_{ac} + \frac{1}{2} \beta_{bd} \left(H^d{}_{ac} + A^d{}_i F_{ac}^i \right) \right] \bar{\psi}^a \gamma^b \psi^c \\ &\quad - (1 + 2a_2 - 2a_5) \beta_c{}^d A_{di} F_{ab}{}^i \bar{\psi}^a \gamma^b \psi^c + (2a_1 + a_2) \beta^{bc} F_{ab}{}^i A_c{}^j \bar{\chi}_i \gamma^a \chi_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8}(a_5 + 24a_3) \left[(H_{dab} + A_{di}F_{ab}^i) \beta_c^d - \nabla_a \beta_{bc} \right] \bar{\chi}_j \gamma^{abc} \chi^j \\
& + \frac{1}{8}(1 + 24a_4) \left[(H_{ecd} + A_{ei}F_{cd}^i) \beta_b^e - \nabla_d \beta_{bc} \right] \bar{\psi}^a \gamma^{bcd} \psi_a \\
& - \left[(2a_5 - a_2) H_{dab} A_c^i \beta^{cd} - (1 + 2a_1 + 2a_2) \left(A_c^i w_{dab} \beta^{cd} + F_{bc}^i \beta_a^c \right) \right] \bar{\psi}^a \gamma^b \chi_i \\
& + 2(a_4 - 2a_3) A^e_i H_{bcd} \beta_{ac} \bar{\psi}^a \gamma^{bcd} \chi^i, \tag{4.2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\beta \mathcal{L}_1 &= (1 + \frac{1}{2}b_2) \beta^{cd} H_{acd} \bar{\rho} \psi^a + \frac{1}{8}(1 - b_1 + 16b_3 - 8b_4) A_{di} F_{bc}^i \beta_a^d \bar{\psi}^a \gamma^{bc} \rho \\
& + \frac{1}{8}(1 - b_1 + 8b_4) \left[(-2w_{dbc} + H_{dbc}) \beta_a^d - 2(2w_{dab} + H_{dab} + A_{di}F_{ab}^i) \beta_c^d \right] \bar{\psi}^a \gamma^{bc} \rho \\
& + \frac{1}{4} \left[(1 - b_1 + 8b_3) w_{acd} + 4(b_3 - b_4) H_{acd} \right] \beta^{ab} A_b^i \bar{\chi}_i \gamma^{cd} \rho, \tag{4.2.24}
\end{aligned}$$

$$\delta_\beta \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{8}(1 + 24c) \left[\nabla_a \beta_{bc} - (H_{dab} + A_d^i F_{abi}) \beta_c^d \right] \bar{\rho} \gamma^{abc} \rho. \tag{4.2.25}$$

Cada uno de estos términos debe anularse por separado. Vemos entonces que la simetría β fija todos los coeficientes relativos para cuatro combinaciones distintas de términos fermiónicos, quedando por fijar estos cuatro coeficientes globales. De esta forma, la combinación invariante β más general que se puede construir con bilineales fermiónicos es

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \left(F_1 - \frac{1}{24} B_1^H \right) &+ \alpha_2 \left(F_8 + F_{10} - 2B_3^\phi \right) + \alpha_3 \left(8F_{10} + B_1^F + B_8^H \right) \\
&+ \alpha_4 \left(F_5 + \frac{1}{2} F_6 - B_3^F - \frac{1}{48} B_2^H - \frac{1}{24} B_4^H - \frac{1}{2} B_6^H \right), \tag{4.2.26}
\end{aligned}$$

que nos conduce a la acción

$$\begin{aligned}
S_F &= \int d^{10}x e^{-2\phi} \left[\alpha_1 \left(\bar{\rho} \gamma^a \nabla_a \rho - \frac{1}{24} \bar{\rho} \gamma^{abc} \rho H_{abc} \right) + \alpha_2 \left(\bar{\rho} \nabla^a \psi_a + \bar{\psi}_a \nabla^a \rho - 2\bar{\rho} \psi^a \nabla_a \phi \right) \right. \\
&+ \alpha_3 \left(8\bar{\psi}_a \nabla^a \rho + \bar{\rho} \gamma^{ab} \chi_i F_{ab}^i + \bar{\rho} \gamma^{ab} \psi^c H_{abc} \right) \\
&+ \alpha_4 \left(\bar{\psi}_a \gamma^b \nabla_b \psi_a + \frac{1}{2} \bar{\chi}_i \gamma^a \nabla_a \chi^i - \bar{\psi}^a \gamma^b \chi_i F_{ab}^i - \frac{1}{48} \bar{\chi}^i \gamma^{abc} \chi_i H_{abc} \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{24} \bar{\psi}_d \gamma^{abc} \psi^d H_{abc} - \frac{1}{2} \bar{\psi}^a \gamma^b \psi^c H_{abc} \right) \right]. \tag{4.2.27}
\end{aligned}$$

Los cuatro coeficientes indeterminados pueden parametrizarse recurriendo a la supersimetría. Obtenemos así

$$\alpha_1 = -\alpha_4 = 4\alpha_3. \tag{4.2.28}$$

Los términos con coeficiente α_2 corresponden a una derivada total y pueden ser descartados. La

acción toma entonces la forma

$$\begin{aligned}
S_F = \alpha_1 \int d^{10}x e^{-2\phi} & \left[\bar{\rho} \gamma^a \nabla_a \rho - \frac{1}{24} \bar{\rho} \gamma^{abc} \rho H_{abc} + \frac{1}{4} \left(8 \bar{\psi}_a \nabla^a \rho + \bar{\rho} \gamma^{ab} \chi_i F_{ab}{}^i + \bar{\rho} \gamma^{ab} \psi^c H_{abc} \right) \right. \\
& - \left(\bar{\psi}_a \gamma^b \nabla_b \psi_a + \frac{1}{2} \bar{\chi}_i \gamma^a \nabla_a \chi^i - \bar{\psi}^a \gamma^b \chi_i F_{ab}{}^i - \frac{1}{48} \bar{\chi}^i \gamma^{abc} \chi_i H_{abc} \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{24} \bar{\psi}_d \gamma^{abc} \psi^d H_{abc} - \frac{1}{2} \bar{\psi}^a \gamma^b \psi^c H_{abc} \right) \right] + \alpha_2 \int d^{10}x e \nabla_a \left(\bar{\rho} \psi^a e^{-2\phi} \right).
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Finalmente, considerando la acción bosónica S_B (4.2.12), la transformación de supersimetría nos fija $\alpha_1 = 1$, y la suma

$$S = S_B + S_F, \tag{4.2.30}$$

coincide totalmente con la acción de la supergravedad en $D = 10$ con $\mathcal{N} = 1$ acoplada a super Yang-Mills [93], a menos de derivadas totales y redefiniciones de campos, además de omitir las interacciones cuárticas en fermiones. En particular, coincide con la acción de la supergravedad heterótica presentada en [95] si tomamos en cuenta las siguientes redefiniciones de campos: $\phi^{-3} \rightarrow e^{-2\phi}$, $R \rightarrow -R$, $H_{\mu\nu\lambda} \rightarrow \frac{1}{3\sqrt{2}} H_{\mu\nu\lambda}$, $B_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} b_{\mu\nu}$, $\lambda \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (\rho - \gamma^\mu \psi_\mu)$, $A_\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} A_\mu$, $\chi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \chi$.

4.3 Interacciones entre cuatro fermiones

En esta sección, construimos todas las posibles combinaciones de términos cuárticos en fermiones invariantes bajo la simetría β . Es importante mencionar que, al orden más bajo de la expansión en α' , estos términos no contienen derivadas.

A partir de (4.2.18), observamos que la invariancia bajo β solo permite contracciones del índice vectorial de un gravitino con el de otro gravitino. Estos gravitinos contraídos pueden considerarse dentro del mismo bilineal utilizando la identidad de Fierz

$$(\bar{\psi} M \varphi) (\bar{\eta} N \chi) = -\frac{1}{32} \sum_{n=0}^5 C_n (\bar{\psi} \gamma^{c_1 \dots c_n} \chi) (\bar{\eta} N \gamma_{c_1 \dots c_n} M \varphi), \tag{4.3.1}$$

donde $C_0 = C_1 = 2$, $C_2 = -1$, $C_3 = -\frac{1}{3}$, $C_4 = \frac{1}{12}$, $C_5 = \frac{1}{120}$, y $\psi, \varphi, \eta, \chi$ son fermiones de Majorana-Weyl arbitrarios. Entonces, existe un esquema en el cual los gravitinos solo aparecen en la estructura $\bar{\psi}^d \gamma^{abc} \psi_d$, ya que los acoplamientos bilineales $\bar{\eta} \gamma^{c_1 \dots c_n} \eta$ de espinores de Majorana-Weyl η solo son diferentes de cero para $n = 3$. Un análisis similar se aplica a los gauginos. Dado

que la invariancia de *gauge* solo permite contracciones entre ellos mismos, utilizando (4.3.1), siempre se puede encontrar un esquema donde solo aparezcan en la estructura $\bar{\chi}^i \gamma^{abc} \chi_i$.

En el esquema en el que los índices vectoriales de los gravitinos solo se contraen entre sí, y los gauginos solo se contraen entre gauginos, los dilatinos solo pueden aparecer en pares. Sin embargo, (4.3.1) implica que el único acoplamiento cuártico de dilatinos, $(\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho)(\bar{\rho} \gamma_{abc} \rho)$ se anula. Por lo tanto, solo se permite un único factor $\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho$ en un acoplamiento cuártico de fermiones. En resumen, solo se permiten tres bloques fundamentales para los acoplamientos cuárticos de fermiones al orden más bajo en α' : $(\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho)$, $(\bar{\chi}^i \gamma^{abc} \chi_i)$ y $(\bar{\psi}^d \gamma^{abc} \psi_d)$.

La transformación β de cada uno de estos bloques fundamentales es

$$\delta_\beta \left(\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho \right) = 3\beta^{d[a} \bar{\rho} \gamma^{bc]}_d \rho, \quad (4.3.2)$$

$$\delta_\beta \left(\bar{\chi}^i \gamma^{abc} \chi_i \right) = -4\beta^{de} A_e{}^i \bar{\chi}_i \gamma^{abc} \psi_d + 3\beta^{d[a} \bar{\chi}_i \gamma^{bc]}_d \chi_i, \quad (4.3.3)$$

$$\delta_\beta \left(\bar{\psi}^d \gamma^{abc} \psi_d \right) = 2\beta^{de} A_e{}^i \bar{\chi}_i \gamma^{abc} \psi_d + 3\beta^{d[a} \bar{\psi}_e \gamma^{bc]}_d \psi^e, \quad (4.3.4)$$

las cuales sugieren las siguientes definiciones

$$Y^{abc} \equiv \bar{\chi}^i \gamma^{abc} \chi_i + 2\bar{\psi}^d \gamma^{abc} \psi_d \quad \text{and} \quad Z^{abc} \equiv \bar{\rho} \gamma^{abc} \rho, \quad (4.3.5)$$

permitiendo condensar las transformaciones (4.3.2)-(4.3.4) en

$$\delta_\beta Y^{abc} = 3\beta^{d[a} Y^{bc]}_d \quad \text{and} \quad \delta_\beta Z^{abc} = 3\beta^{d[a} Z^{bc]}_d. \quad (4.3.6)$$

Es sencillo verificar que la combinación Y^2 junto a $Y \cdot Z$ son los únicos acoplamientos cuárticos de fermiones invariantes bajo la simetría β , en términos de los tres bloques fundamentales previamente mencionados. El Lagrangiano cuártico en fermiones es

$$L_F = -\frac{1}{48 \times 16} \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(Y_{abc} Y^{abc} - Y_{abc} Z^{abc} \right). \quad (4.3.7)$$

Esta expresión coincide exactamente con las interacciones cuárticas de fermiones obtenidas en [93, 95], donde dichas interacciones están distribuidas en varios términos con derivadas covariantes y curvaturas de *gauge*. La misma forma simple del Lagrangiano y las reglas de transformación de supersimetría fueron obtenidas en [101] utilizando geometría generalizada.

La simplicidad de esta expresión resalta el poder de la simetría β como un principio organizador y sugiere que puede ser una herramienta útil para calcular acoplamientos de derivadas de mayor orden.

4.3.1 Derivación desde la TDCs

El resultado anterior sobre las interacciones cuárticas de fermiones se deduce únicamente usando como argumento la simetría β de la supergravedad. No obstante, también puede obtenerse a partir de la TDCs tal como se mencionó en la sección 3.3.3. En esta sección analizamos la contribución de cuatro fermiones a la acción de la TDCs. Utilizando una identidad de Fierz modificada para TDCs, derivamos el lagrangiano con interacciones cuárticas en fermiones y mostramos que puede expresarse con solo dos términos independientes. Además, calculamos las correcciones cúbicas en fermiones a las transformaciones supersimétricas de los campos fermiónicos fundamentales, necesarias para garantizar la invariancia supersimétrica.

La identidad de Fierz en TDC

Comenzamos presentando la versión generalizada de la identidad de Fierz en TDC

$$(\bar{\Psi}M\Phi)(\bar{\Gamma}N\Theta) = -\frac{1}{32} \sum_{n=0}^5 (-1)^n C_n (\bar{\Psi}\gamma^{a_1 \dots a_n} \Theta) (\bar{\Gamma}N\gamma_{a_1 \dots a_n} M\Phi), \quad (4.3.8)$$

con coeficientes $C_0 = 2$, $C_1 = 2$, $C_2 = -1$, $C_3 = -\frac{1}{3}$, $C_4 = \frac{1}{12}$, $C_5 = \frac{1}{120}$. En comparación con la definición estándar en supergravedad (4.3.1), es necesario considerar un factor $(-1)^n$ debido al álgebra de Clifford (3.3.1), puesto que los índices se contraen con el proyector P_{AB} , lo cual resulta en un signo negativo para un número impar de contracciones de índices una vez que parametrizamos.

La acción

Ahora podemos proponer la contribución de cuatro fermiones a la acción fermiónica en TDC.

La forma más general del lagrangiano con interacciones cuárticas en fermiones es

$$\begin{aligned} L_{4f} = & a_0 (\bar{\varrho}\gamma^{ABC}\varrho) (\bar{\varrho}\gamma_{ABC}\varrho) + a_1 (\bar{\varrho}\gamma^{ABC}\varrho) (\bar{\Psi}^{\bar{D}}\gamma_{ABC}\Psi_{\bar{D}}) + a_2 (\bar{\Psi}^{\bar{D}}\gamma^{ABC}\Psi_{\bar{D}}) (\bar{\Psi}^{\bar{E}}\gamma_{ABC}\Psi_{\bar{E}}) \\ & + a_3 (\bar{\Psi}_{\bar{D}}\gamma^{ABC}\Psi_{\bar{E}}) (\bar{\Psi}^{\bar{D}}\gamma_{ABC}\Psi^{\bar{E}}) + a_4 (\bar{\Psi}_{\bar{B}}\gamma^A\Psi_{\bar{C}}) (\bar{\Psi}^{\bar{B}}\gamma_A\Psi^{\bar{C}}) \\ & + a_5 (\bar{\Psi}_{\bar{F}}\gamma^{ABCDE}\Psi_{\bar{G}}) (\bar{\Psi}^{\bar{F}}\gamma_{ABCDE}\Psi^{\bar{G}}) + a_6 (\bar{\Psi}^{\bar{A}}\varrho) (\bar{\Psi}_{\bar{A}}\varrho) + a_7 (\bar{\Psi}^{\bar{A}}\gamma^{BC}\varrho) (\bar{\Psi}_{\bar{A}}\gamma_{BC}\varrho) \\ & + a_8 (\bar{\Psi}^{\bar{A}}\gamma^{BCDE}\varrho) (\bar{\Psi}_{\bar{A}}\gamma_{BCDE}\varrho). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Utilizando identidades de Fierz, se puede demostrar que el término con coeficiente a_0 se anula, mientras que los términos con $a_3 \dots a_5$ y $a_6 \dots a_8$ pueden reescribirse como los términos con

coeficientes a_2 y a_1 , respectivamente. Así, el lagrangiano se reduce a

$$L_{4f} = \alpha_1 \left(\bar{\varrho} \gamma^{ABC} \varrho \right) \left(\bar{\Psi}^{\underline{D}} \gamma_{\underline{ABC}} \Psi_{\underline{D}} \right) + \alpha_2 \left(\bar{\Psi}^{\underline{D}} \gamma^{ABC} \Psi_{\underline{D}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\underline{E}} \gamma_{\underline{ABC}} \Psi_{\underline{E}} \right). \quad (4.3.10)$$

Para fijar el coeficiente relativo entre estos dos términos en la acción, recurrimos a la supersimetría. Debemos determinar entonces las correcciones cúbicas en fermiones a las transformaciones supersimétricas de los campos fermiónicos, con lo cual la invariancia supersimétrica fijará los coeficientes.

Transformaciones

Al orden más bajo en fermiones, las reglas de transformación supersimétricas de los campos fundamentales de la TDC son

$$\delta_\epsilon E_M{}^A = -\bar{\epsilon} \gamma^{[A} \Psi^{B]} E_{MB}, \quad \delta_\epsilon d = -\frac{1}{4} \bar{\epsilon} \varrho, \quad (4.3.11)$$

$$\delta_\epsilon \Psi_{\underline{A}} = \nabla_{\underline{A}} \epsilon, \quad \delta_\epsilon \varrho = -\gamma^{\underline{a}} \nabla_{\underline{a}} \epsilon. \quad (4.3.12)$$

Las transformaciones de los campos bosónicos no pueden modificarse añadiendo términos con cuatro fermiones, ya que esto introduciría correcciones de orden α' . Por otro lado, las transformaciones de los fermiones sí permiten la inclusión de nuevos términos que contengan tres fermiones, pero sin incluir derivadas de los campos.

Las modificaciones con tres fermiones a las transformaciones de los campos fermiónicos más generales que podemos construir en la TDC son

- Gravitino:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^{(3)} \Psi_{\underline{A}} &= \sum_{n=0}^5 \left[b_n \left(\bar{\epsilon} \Gamma^{(n)} \varrho \right) \Gamma_{(n)} \Psi_{\underline{A}} + c_n \left(\bar{\epsilon} \Gamma^{(n)} \Psi_{\underline{A}} \right) \Gamma_{(n)} \varrho + d_n \left(\bar{\Psi}_{\underline{A}} \Gamma^{(n)} \varrho \right) \Gamma_{(n)} \epsilon \right] \\ &= b_0 (\bar{\epsilon} \varrho) \Psi_{\underline{A}} + b_2 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{bc} \varrho \right) \gamma_{bc} \Psi_{\underline{A}} + b_4 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{bcde} \varrho \right) \gamma_{bcde} \Psi_{\underline{A}} \\ &\quad + c_1 \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi_{\underline{A}} \right) \gamma_b \varrho + c_3 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{bcd} \Psi_{\underline{A}} \right) \gamma_{bcd} \varrho + c_5 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{bcdef} \Psi_{\underline{A}} \right) \gamma_{bcdef} \varrho \\ &\quad + d_0 \left(\bar{\Psi}_{\underline{A}} \varrho \right) \epsilon + d_2 \left(\bar{\Psi}_{\underline{A}} \gamma^{bc} \varrho \right) \gamma_{bc} \epsilon + d_4 \left(\bar{\Psi}_{\underline{A}} \gamma^{bcde} \varrho \right) \gamma_{bcde} \epsilon. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Nótese que, debido a la contracción de índices proyectados, no es posible incluir términos cuadráticos en gravitinos en la transformación. Aplicando identidades de Fierz, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^{(3)} \Psi_{\underline{A}} &= \beta_1 (\bar{\epsilon} \varrho) \Psi_{\underline{A}} + \beta_2 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{bc} \varrho \right) \gamma_{bc} \Psi_{\underline{A}} + \beta_3 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{bcde} \varrho \right) \gamma_{bcde} \Psi_{\underline{A}} \\ &\quad + \beta_4 \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi_{\underline{A}} \right) \gamma_b \varrho + \beta_5 \left(\bar{\Psi}_{\underline{A}} \varrho \right) \epsilon, \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

que puede simplificarse a

$$\delta_\epsilon^{(3)}\Psi_{\bar{A}} = \xi_1 (\bar{\epsilon}\rho) \Psi_{\bar{A}} + \xi_2 \left(\bar{\epsilon}\gamma^{bcde}\rho \right) \gamma_{bcde}\Psi_{\bar{A}}, \quad (4.3.15)$$

utilizando nuevamente identidades de Fierz, y absorbiendo algunos términos en el parámetro de Lorentz de $O(9,1)_L$. Sin embargo, para facilitar la comparación con la literatura existente, es preferible utilizar (4.3.14), ya que los términos con coeficientes β_4 y β_5 aparecen en la transformación presentada en [95].

• Dilatino:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^{(3)}\rho &= \sum_{n=0}^5 \left[e_n \left(\bar{\epsilon}\Gamma^{(n)}\rho \right) \Gamma_{(n)}\rho + f_n \left(\bar{\epsilon}\Gamma^{(n)}\Psi^{\bar{A}} \right) \Gamma_{(n)}\Psi_{\bar{A}} + g_n \left(\bar{\rho}\Gamma^{(n)}\rho \right) \Gamma_{(n)}\epsilon \right. \\ &\quad \left. + h_n \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}}\Gamma^{(n)}\Psi_{\bar{A}} \right) \Gamma_{(n)}\epsilon \right] \\ &= e_0 (\bar{\epsilon}\rho) \rho + e_2 \left(\bar{\epsilon}\gamma^{ab}\rho \right) \gamma_{ab}\rho + e_4 \left(\bar{\epsilon}\gamma^{abcd}\rho \right) \gamma_{abcd}\rho \\ &\quad + f_1 \left(\bar{\epsilon}\gamma^b\Psi^{\bar{A}} \right) \gamma_b\Psi_{\bar{A}} + f_3 \left(\bar{\epsilon}\gamma^{bcd}\Psi^{\bar{A}} \right) \gamma_{bcd}\Psi_{\bar{A}} + f_5 \left(\bar{\epsilon}\gamma^{bcdef}\Psi^{\bar{A}} \right) \gamma_{bcdef}\Psi_{\bar{A}} \\ &\quad + g_3 \left(\bar{\rho}\gamma^{abc}\rho \right) \gamma_{abc}\epsilon + h_3 \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}}\gamma^{bcd}\Psi_{\bar{A}} \right) \gamma_{bcd}\epsilon. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Una vez más, podemos aplicar identidades de Fierz para llegar a

$$\delta_\epsilon^{(3)}\rho = \zeta_1 \left(\bar{\rho}\gamma^{abc}\rho \right) \gamma_{abc}\epsilon + \zeta_2 \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}}\gamma^{bcd}\Psi_{\bar{A}} \right) \gamma_{bcd}\epsilon. \quad (4.3.17)$$

Variación de la acción

La invariancia de la acción se expresa a través de $\delta S = 0$, donde la acción está dada por

$$S = \int dX e^{-2d} (\mathcal{R} + L_{2f} + L_{4f}), \quad (4.3.18)$$

con \mathcal{R} el escalar de Ricci generalizado (3.2.22), y L_{2f} el lagrangiano con bilineales fermiónicos definido en (3.3.11). Sabemos que la acción a orden cuadrático en fermiones es invariante, por lo que debemos ocuparnos solamente de los términos cuárticos que resultan de la variación, lo cual se traduce en

$$-2\delta_\epsilon dL_{2f} + \delta_\epsilon L_{2f} + \delta_\epsilon L_{4f} = 0. \quad (4.3.19)$$

En la segunda contribución, debemos considerar todas las interacciones cuárticas en fermiones que se generan. Algunas de estas provienen directamente de las transformaciones supersimétricas de orden superior (en fermiones) de los campos fermiónicos, mientras que otras surgen de la variación de los campos bosónicos en la derivada covariante.

Después de integrar por partes algunos términos, la variación de la acción resulta entonces

$$\begin{aligned}
\delta S = & \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}\rho) \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \nabla_{\underline{b}} \Psi_{\bar{A}} \right) - \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}\rho) \left(\bar{\rho} \gamma^a \nabla_{\underline{a}} \rho \right) + (\bar{\epsilon}\rho) \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}} \nabla_{\bar{A}} \rho \right) \\
& + 2\delta_\epsilon^{(3)} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \nabla_{\underline{b}} \Psi_{\bar{A}} - \frac{1}{2} \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi^{\bar{C}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma_b \nabla_{\bar{C}} \Psi_{\bar{A}} \right) + \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi^{\bar{C}} \right) \left(\nabla_{\bar{A}} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma_b \Psi_{\bar{C}} \right) \\
& + \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi^{\bar{C}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma_b \nabla_{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}} \right) - 2\delta_\epsilon^{(3)} \bar{\rho} \gamma^a \nabla_{\underline{a}} \rho + \frac{1}{2} \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{a}} \Psi^{\bar{B}} \right) \left(\bar{\rho} \gamma^a \nabla_{\bar{B}} \rho \right) \\
& + 2\delta_\epsilon^{(3)} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \nabla_{\bar{A}} \rho - 2\delta_\epsilon^{(3)} \bar{\rho} \nabla_{\bar{A}} \Psi^{\bar{A}} + \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \Psi_{\bar{A}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}} \nabla_{\underline{b}} \rho \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{d}} \Psi_{\bar{A}} \right) \left(\nabla_{\underline{c}} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{cd} \rho \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{d}} \Psi_{\bar{A}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{cd} \nabla_{\underline{c}} \rho \right) \\
& + 2\alpha_1 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{abcd} \nabla_{\underline{d}} \rho \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{E}} \gamma_{abc} \Psi_{\bar{E}} \right) + 4\alpha_1 \left(\bar{\epsilon} \gamma^{abcd} \rho \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{E}} \gamma_{abc} \nabla_{\underline{d}} \Psi_{\bar{E}} \right) \\
& + 6\alpha_1 \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{ab}} \nabla_{\underline{c}} \rho \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{D}} \gamma^{abc} \Psi_{\bar{D}} \right) + 12\alpha_1 \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{ab}} \rho \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{D}} \gamma^{abc} \nabla_{\underline{c}} \Psi_{\bar{D}} \right) \\
& - 2\alpha_1 \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{abc}} \nabla_{\bar{D}} \Psi^{\bar{D}} \right) \left(\bar{\rho} \gamma^{abc} \rho \right) - 4\alpha_1 \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{abc}} \Psi^{\bar{D}} \right) \left(\bar{\rho} \gamma^{abc} \nabla_{\bar{D}} \rho \right) \\
& - 4\alpha_2 \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{abc}} \nabla_{\bar{E}} \Psi^{\bar{E}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{D}} \gamma^{abc} \Psi_{\bar{D}} \right) - 8\alpha_2 \left(\bar{\epsilon} \gamma_{\underline{abc}} \Psi^{\bar{E}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{D}} \gamma^{abc} \nabla_{\bar{E}} \Psi_{\bar{D}} \right), \tag{4.3.20}
\end{aligned}$$

la cual debe ser nula. Analizando esta variación orden a orden según el número de dilatinos, podemos determinar los coeficientes. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{1}{384} & \alpha_2 &= \frac{1}{192}, \\
\beta_1 &= -\frac{1}{4}, & \beta_2 &= 0, & \beta_3 &= 0, & \beta_4 &= \frac{1}{4}, & \beta_5 &= \frac{1}{4}, \\
\zeta_1 &= \frac{1}{384} & \zeta_2 &= \frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

Podemos entonces fijar las contribuciones cuárticas en fermiones al lagrangiano de la TDCs

$$L_{4f} = -\frac{1}{384} (\bar{\rho} \gamma^{ABC} \rho) \left(\bar{\Psi}^{\bar{D}} \gamma_{ABC} \Psi_{\bar{D}} \right) + \frac{1}{192} \left(\bar{\Psi}^{\bar{D}} \gamma^{ABC} \Psi_{\bar{D}} \right) \left(\bar{\Psi}^{\bar{E}} \gamma_{ABC} \Psi_{\bar{E}} \right), \tag{4.3.21}$$

la cuales se reducen precisamente a $Y \cdot Z$ y Y^2 al parametrizar los campos. Los términos cúbicos en fermiones que completan las transformaciones supersimétricas de los fermiones toman la forma

$$\delta_\epsilon^{(3)} \Psi_{\bar{A}} = -\frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \rho) \Psi_{\bar{A}} + \frac{1}{4} (\bar{\epsilon} \gamma^B \Psi_{\bar{A}}) \gamma_{B\rho} + \frac{1}{4} (\bar{\Psi}_{\bar{A}} \rho) \epsilon \tag{4.3.22}$$

$$\delta_\epsilon^{(3)} \rho = \frac{1}{384} (\bar{\rho} \gamma^{ABC} \rho) \gamma_{ABC} \epsilon + \frac{1}{96} \left(\bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{BCD} \Psi_{\bar{A}} \right) \gamma_{BCD} \epsilon, \tag{4.3.23}$$

cuya parametrización conduce a las contribuciones cúbicas en fermiones para las reglas de transformación supersimétrica de los campos estándar de la supergravedad listados en (3.5.18) [95].

4.4 Conclusiones

Este capítulo aborda el estudio de la simetría β , ampliando los resultados de [98–100] para incluir los sectores de *gauge* y fermiónicos sin masa de la supergravedad heterótica.

Las reglas de transformación β para los campos fundamentales se derivaron desde la TDCs, haciendo un fijado de *gauge* del grupo de Lorentz doble $O(9, 1)_L \times O(1, 9 + n_g)_R$ al grupo de Lorentz $O(1, 9)$ de la supergravedad. Si bien el marco de la TDCs es conveniente, la simetría β opera directamente sobre los campos de la supergravedad estándar sin necesidad de introducir coordenadas duales o recurrir a formulaciones alternativas.

Aunque la supergravedad en diez dimensiones no es invariante bajo $O(10, 10)$, la compactificación en T^d introduce invariancia $O(d, d)$ y, por lo tanto, simetría β . La condición $\beta^{\mu\nu} \partial_\nu \dots = 0$ restringe las configuraciones de los campos para que no dependan de las coordenadas en las que β tiene componentes diferentes de cero, lo que reduce efectivamente la acción a la teoría compactificada, manteniendo las estructuras en diez dimensiones.

Mientras que la simetría β determina completamente las interacciones bosónicas, produce cuatro acoplamientos fermiónicos bilineales y dos términos cuárticos, cuyos coeficientes relativos deben ser fijados por la supersimetría. La menor capacidad predictiva de la simetría β en el sector fermiónico se debe a que las transformaciones preservan el número de dilatinos generalizados, a diferencia de los dilatones. No obstante, la simetría β funciona como un principio organizador eficaz, permitiendo un tratamiento independiente de los términos con diferentes números de dilatinos generalizados y excluyendo contracciones como $\gamma^a \psi_a$ en el esquema en el que los campos fermiónicos son ψ_a , ρ y χ^i .

Más allá de la importancia evidente de identificar nuevas simetrías, determinar la simetría β en los sectores de *gauge* y fermiónico de la supergravedad heterótica podría ser relevante para comprender la estructura de dualidad en el límite de baja energía de la teoría de cuerdas cuando se incluyen términos de derivadas superiores. Aunque la simetría β restringe los acoplamientos fermiónicos a orden cero en α' , estas restricciones pueden eludirse a órdenes superiores mediante redefiniciones de campos. Por ejemplo, términos que involucren la contracción de los índices vectoriales de los gravitinos con las matrices γ , que no están permitidos en el esquema discutido en este capítulo, podrían introducirse en otros esquemas tras redefiniciones de campos.

Capítulo 5

Supersimetría y correcciones α' en Teoría Doble de Campos

En el límite de bajas energías, la teoría de cuerdas heterótica se reduce a una supergravedad con $\mathcal{N} = 1$, acoplada a super Yang-Mills en diez dimensiones [64]. La expansión en α' introduce una serie de interacciones de orden superior en derivadas, cuyas primeras contribuciones se conocen explícitamente. En particular, las interacciones entre los campos bosónicos hasta $\mathcal{O}(\alpha'^3)$ se determinaron a partir del cálculo de amplitudes de dispersión en teoría de cuerdas, tanto a nivel árbol [64–67] como a un *loop* [68–71], así como de la cancelación de anomalías conformes [72]. Las contribuciones de los campos fermiónicos se calcularon mediante métodos de supersimetría [94, 95, 103–114]. La supersimetría determina los términos del orden más bajo en la expansión y explica las correcciones en derivadas. No obstante, las reglas de transformación de los campos requieren modificaciones iterativas, orden a orden en α' , las cuales están restringidas por otras simetrías y dualidades de la teoría de cuerdas.

En este capítulo, basado en los resultados de [2], profundizamos en la estructura de la expansión en α' de la supergravedad heterótica, a partir de una formulación que genera una torre infinita de correcciones de orden superior en derivadas, denominada la **identificación de Bergshoeff-de Roo generalizada** [115]. Específicamente, en [2] realizamos una expansión perturbativa de la construcción exacta de [115] para obtener las correcciones de primer orden a la TDC supersimétrica con $\mathcal{N} = 1$ (TDCs).

Al parametrizar los multipletes de dualidad en términos de multipletes de supergravedad

y de super Yang-Mills, demostramos que la transformación generalizada de Green-Schwarz supersimétrica y covariante bajo dualidad, fija completamente las deformaciones de primer orden en las reglas de transformación de los campos. Además, construimos la acción invariante, incluyendo términos de hasta cuatro derivadas para todos los campos bosónicos y fermiónicos sin masa de la cuerda heterótica, así como términos bilineales en fermiones.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la primera sección presentamos la identificación de Bergshoeff-de Roo generalizada y su papel en la obtención de las correcciones en α' . En las secciones 2 y 3, presentamos las correcciones de primer orden para la TDCs y la supergravedad heterótica, respectivamente, incluyendo en ambos casos términos bilineales en fermiones. Finalmente, en la última sección discutimos los resultados obtenidos y los comparamos con la literatura existente.

5.1 El formalismo de Bergshoeff-de Roo generalizado

En esta sección se presentan algunos aspectos fundamentales del formalismo desarrollado en [115], en particular, aquellos necesarios para obtener las correcciones de primer orden a la TDCs.

En [115], se introdujo un mecanismo exacto, supersimétrico y manifiestamente covariante bajo dualidad, con simetría global $\mathcal{G} = O(D, D + k)$, donde k es la dimensión del grupo $O(1, D - 1 + k)$. Esto contrasta con la construcción de la sección 3.5, donde el grupo es $O(D, D + n_g)$ y n_g representa la dimensión del grupo de *gauge* heterótico $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$. En esta formulación, en cambio, el sector de *gauge* codifica las derivadas de orden superior.

Los multipletes de \mathcal{G} se parametrizan mediante elementos de $G = O(D, D)$ para preservar la covariancia de dualidad. Al identificar los vectores de $O(D, D)$ con los flujos generalizados de $O(D, D + k)$, que cumplen el rol de conexión de espín, se obtiene una generalización de la transformación de Green-Schwarz, que requiere una torre infinita de términos con derivadas superiores, covariantes bajo $O(D, D)$, en la acción invariante de *gauge*.

En adelante, tal como hicimos en los capítulos anteriores, fijamos la dimensión en $D = 10$, ya que nos interesa considerar el contenido de campos fermiónicos de la TDCs, y usaremos símbolos caligráficos para distinguir los objetos de $O(10, 10 + k)$ de los objetos de $O(10, 10)$.

El *vielbein* generalizado $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}^A$ es un elemento de $O(10, 10 + k)$, parametrizado en términos

de los campos de $O(10, 10)$ como

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_M^{\bar{a}} &= E_M^{\bar{a}}, & \mathcal{E}_M^a &= (\Delta^{\frac{1}{2}})_M^P E_P^a, & \mathcal{E}_M^{\bar{\alpha}} &= -A_M^\beta e_{\beta\bar{\alpha}}, \\ \mathcal{E}_\alpha^{\bar{a}} &= 0, & \mathcal{E}_\alpha^a &= E_M^a A^M_\alpha, & \mathcal{E}_\alpha^{\bar{\alpha}} &= (\square^{\frac{1}{2}})_\alpha^\beta e_{\beta\bar{\alpha}}.\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Nótese que esta parametrización difiere de (3.5.9) y de construcciones previas, por ejemplo, [116, 117], donde el *vielbein* generalizado se parametriza con multipletes de $GL(10)$. Los índices $\mathcal{M} = (M, \alpha)$ y $\mathcal{A} = (\underline{A}, \bar{A})$ toman valores $M = 0, \dots, 19$, $\underline{A} \equiv \underline{a} = 0, \dots, 9$; $\bar{A} = (\bar{a}, \bar{\alpha})$, $\bar{a} = 0, \dots, 9$ y $\alpha, \bar{\alpha} = 1, \dots, k$. En la parametrización aparece el vector $A_M^\alpha \in O(10, 10)$, que satisface

$$A_M^\alpha = P_M^N A_N^\alpha,\tag{5.1.2}$$

donde la proyección está fijada por la elección del grupo de dualidad $O(10, 10 + k)$, en contraste con $O(10 + k, 10)$, que daría una teoría equivalente relacionada a través de una transformación de \mathbb{Z}_2 . Además, aparecen también los objetos

$$\square_\alpha^\beta = \kappa_\alpha^\beta - A_{M\alpha} A^{M\beta},\tag{5.1.3}$$

$$\Delta_M^N = \eta_M^N - A_{M\alpha} A^{N\alpha},\tag{5.1.4}$$

que codificarán la información relacionada a las correcciones de orden superior.

La parametrización (5.1.1) preserva la restricción

$$\mathcal{E}_M^A \eta_{AB} \mathcal{E}_N^B = \eta_{MN},\tag{5.1.5}$$

donde η_{MN} y η_{AB} son las métricas invariantes de $O(10, 10 + k)$ y $O(9, 1)_L \times O(1, 9 + k)_R$, respectivamente, parametrizadas según

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_\mu^\nu & 0 \\ \delta_\mu^\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad \eta_{AB} = \begin{pmatrix} -\delta_{\underline{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \end{pmatrix},\tag{5.1.6}$$

con las métricas de Cartan-Killing de $O(1, 9 + k)$ relacionadas a través de

$$e_\alpha^{\bar{\alpha}} \kappa_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} e_{\beta\bar{\beta}} = \kappa_{\alpha\beta}.\tag{5.1.7}$$

El gravitino generalizado de $O(10, 10 + k)$ se descompone como $\Psi_{\mathcal{A}} = (0, \Psi_{\bar{a}}, \Psi_{\bar{\alpha}})$, donde $\Psi_{\bar{a}}$ es el gravitino generalizado de la TDCs y $\Psi_{\bar{\alpha}}$ es un gaugino del grupo *gauge* $O(1, 9 + k)_R$, que posteriormente se identificará como una función de los campos generalizados de $O(10, 10)$.

El dilatino generalizado de $O(10, 10 + k)$ estará representado por ϱ , y su parametrización será directamente el dilatino generalizado de $O(10, 10)$. Las matrices gamma pertenecen a $O(9, 1)_L$ y verifican (3.3.1).

Las reglas de transformación de los campos de $O(10, 10 + k)$ tienen la misma forma funcional que (3.5.14), a saber

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{E}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} &= \xi^{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{P}} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} + (\partial_{\mathcal{M}} \xi^{\mathcal{P}} - \partial^{\mathcal{P}} \xi_{\mathcal{M}}) \mathcal{E}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{A}} + g f_{\mathcal{M}\mathcal{N}}^{\mathcal{P}} \xi^{\mathcal{N}} \mathcal{E}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{A}} \\
&\quad + \mathcal{E}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{B}} \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} - \bar{\epsilon} \gamma^{[\mathcal{A}} \Psi^{\mathcal{B}]} \mathcal{E}_{\mathcal{M}\mathcal{B}}, \\
\delta d &= \xi^{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{P}} d - \frac{1}{2} \partial_{\mathcal{P}} \xi^{\mathcal{P}} - \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \rho \\
\delta \Psi_{\underline{\mathcal{A}}} &= \xi^{\mathcal{M}} \partial_{\mathcal{M}} \Psi_{\underline{\mathcal{A}}} + \mathcal{T}_{\underline{\mathcal{A}}}^{\underline{\mathcal{B}}} \Psi_{\underline{\mathcal{B}}} + \frac{1}{4} \mathcal{T}_{\underline{\mathcal{B}}\underline{\mathcal{C}}} \gamma^{\underline{\mathcal{B}}\underline{\mathcal{C}}} \Psi_{\underline{\mathcal{A}}} + \nabla_{\underline{\mathcal{A}}} \epsilon \\
\delta \varrho &= \xi^{\mathcal{M}} \partial_{\mathcal{M}} \varrho + \frac{1}{4} \mathcal{T}_{\underline{\mathcal{A}}\underline{\mathcal{B}}} \gamma^{\underline{\mathcal{A}}\underline{\mathcal{B}}} \varrho - \gamma^{\underline{\mathcal{A}}} \nabla_{\underline{\mathcal{A}}} \epsilon,
\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

donde $g^{-2} \sim \alpha'$ es la constante de acoplamiento de *gauge*, y $\mathcal{T}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ parametriza la simetría local de Lorentz $O(9, 1)_L \times O(1, 9 + k)_R$ en el espacio doble.

La derivada covariante que actúa sobre el parámetro de supersimetría ϵ es

$$\nabla_{\mathcal{A}} \epsilon = \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \epsilon - \frac{1}{4} \omega_{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}} \gamma^{\mathcal{B}\mathcal{C}} \epsilon, \tag{5.1.9}$$

donde $\partial_{\mathcal{A}} = \sqrt{2} \mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}} \partial_{\mathcal{M}}$, y $\omega_{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}}$ es la conexión de spin generalizada de $O(10, 10 + k)$, que define los flujos generalizados de $O(10, 10 + k)$ mediante

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}} = 3 \partial_{[\mathcal{A}} \mathcal{E}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{B}} \mathcal{E}_{\mathcal{N}\mathcal{C}]} + g \sqrt{2} f_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}} \mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{B}} \mathcal{E}_{\mathcal{P}\mathcal{C}} = -3 \omega_{[\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}],} \tag{5.1.10}$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \sqrt{2} e^{2d} \partial_{\mathcal{M}} \left(\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}} e^{-2d} \right) = -\omega_{\mathcal{B}\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}, \tag{5.1.11}$$

$$f_{\mathcal{M}\mathcal{N}}^{\mathcal{P}} = \begin{cases} f_{\alpha\beta}^{\gamma} & \text{for } \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P} = \alpha, \beta, \gamma \\ 0 & \text{otras combinaciones} \end{cases}. \tag{5.1.12}$$

Similarmente, debemos imponer condiciones equivalentes a (3.5.7) y (3.5.8)

$$\partial_{\mathcal{M}} \partial^{\mathcal{M}} \star = 0, \quad \partial_{\mathcal{M}} \star \partial^{\mathcal{M}} \star = 0, \quad f^{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{M}} \star = 0, \tag{5.1.13}$$

$$f_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}} = f_{[\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}]}, \quad f_{[\mathcal{M}\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} f_{\mathcal{P}]\mathcal{R}}^{\mathcal{Q}} = 0. \tag{5.1.14}$$

La variación $\delta \mathcal{E}_{\alpha}^{\bar{\alpha}} = 0$ nos permite fijar la componente $\mathcal{T}_{\bar{\alpha}}^{\bar{b}}$ del parámetro de Lorentz doble

$$\mathcal{T}_{\bar{\alpha}}^{\bar{b}} = \left(\partial^{\mathcal{P}} \xi_{\alpha} \mathcal{E}_{\mathcal{P}}^{\bar{b}} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^{\mathcal{C}} \Psi^{\bar{b}} \mathcal{E}_{\alpha\mathcal{C}} \right) (\square^{-\frac{1}{2}})^{\alpha}_{\beta} e^{\beta}_{\bar{\alpha}}, \tag{5.1.15}$$

mientras que la constancia del mapa $e_\alpha^{\bar{\beta}}$ nos conduce a $\delta e_\alpha^{\bar{\alpha}} = 0$, y a partir de allí determinamos la componente $\mathcal{T}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}$

$$\mathcal{T}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} = \left(\delta(\square^{\frac{1}{2}})_{\alpha}^{\beta} e_{\beta}^{\bar{\beta}} - \xi^P \partial_P \mathcal{E}_{\alpha}^{\bar{\beta}} + \partial^P \xi_{\alpha} \mathcal{E}_P^{\bar{\beta}} - g f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \xi^{\beta} \mathcal{E}_{\gamma}^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^{\gamma b} \Psi^{\bar{\beta}} \mathcal{E}_{\alpha b} \right) (\square^{-\frac{1}{2}})^{\alpha}{}_{\delta} e^{\delta}_{\bar{\alpha}}. \quad (5.1.16)$$

Los generadores de *gauge* $(t^{\alpha})_{\bar{\mathcal{A}}}^{\bar{\mathcal{B}}}$ dan lugar a la relación

$$V_{\bar{\mathcal{A}}}^{\bar{\mathcal{B}}} = -g V_{\alpha} (t^{\alpha})_{\bar{\mathcal{A}}}^{\bar{\mathcal{B}}}, \quad (5.1.17)$$

lo que permite escribir

$$-g \xi_{\alpha} (t^{\alpha})_{\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}} \equiv \mathcal{T}_{\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}}, \quad -g \mathcal{E}_{\alpha}^{\underline{a}} (t^{\alpha})_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}^{\underline{a}}. \quad (5.1.18)$$

Estos generadores satisfacen $[t_{\alpha}, t_{\beta}] = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} t_{\gamma}$ y $Tr(t^{\alpha} t_{\beta}) = X_R \delta_{\beta}^{\alpha}$, donde X_R es el índice de Dynkin de la representación. Parametrizando $\delta \mathcal{E}_M^{\underline{a}}$ se obtiene

$$\delta A_{\underline{a}\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} = \xi^P \partial_P A_{\underline{a}\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} - \partial_{\underline{a}} \mathcal{T}_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} - 2 A_{\underline{a}[\bar{\mathcal{C}}} \bar{\mathcal{B}} \mathcal{T}_{\bar{\mathcal{B}}\bar{\mathcal{D}}]} - A_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}^{\underline{b}} \mathcal{T}_{\underline{a}\underline{b}} + \bar{\epsilon} \gamma_{\underline{a}} \Psi_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}, \quad (5.1.19)$$

donde

$$\Psi_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} \equiv \frac{g}{\sqrt{2}} \Psi_{\bar{\beta}} \mathcal{E}_{\alpha}^{\bar{\beta}} (t^{\alpha})_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}. \quad (5.1.20)$$

Para eliminar estos grados de libertad adicionales, es conveniente definir

$$\mathcal{F}_{\underline{a}\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}^* = \mathcal{F}_{\underline{a}\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} - \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{\bar{\mathcal{C}}} \gamma_{\underline{a}} \Psi_{\bar{\mathcal{D}}}, \quad (5.1.21)$$

lo que permite establecer la identificación de Bergshoeff-de Roo generalizada entre las conexiones de *gauge* y espín generalizadas

$$A_{\underline{M}\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} = \mathcal{F}_{\underline{M}\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}^*, \quad (5.1.22)$$

y definir $\Psi_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}$ como la curvatura del gravitino generalizada

$$\Psi_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}} = \nabla_{[\bar{\mathcal{C}}} \Psi_{\bar{\mathcal{D}}]} + \frac{1}{2} \omega_{\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{D}}}^{\bar{\mathcal{B}}} \Psi_{\bar{\mathcal{B}}}, \quad (5.1.23)$$

ya que ambos lados de (5.1.22) y (5.1.23) transforman de la misma manera. Los pasos principales de la demostración se pueden encontrar en [115].

5.2 El orden α' de la Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$

Ahora procederemos a calcular las correcciones de primer orden en α' a las reglas de transformación de los campos generalizados de $O(10, 10 + n_g)$, así como a la acción de la Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$, basándonos en la identificación de Bergshoeff-de Roo generalizada.

5.2.1 Transformaciones de los campos

Las reglas de transformación (5.1.8) inducen deformaciones de orden superior en derivadas para las transformaciones (3.5.14)¹ de los campos de $O(10, 10 + n_g)$. A continuación calcularemos las modificaciones de primer orden, expandiendo los coeficientes $(\square^{\frac{1}{2}})_{\alpha}^{\beta}$ y $(\triangle^{\frac{1}{2}})_{MN}$ en la parametrización de los multipletes de $O(10, 10 + k)$. Para simplificar la presentación, vamos a omitir el sector de *gauge* de los multipletes de $O(10, 10 + n_g)$, es decir, tomaremos $n_g = 0$, y obtendremos las reglas de transformación inducidas de los campos de $O(10, 10)$. El sector de *gauge* se incluirá trivialmente más adelante.

Es conveniente expresar primero las componentes de los flujos generalizados de $O(10, 10 + k)$, (5.1.10) y (5.1.11) en términos de los flujos de $O(10, 10)$, definidos en (3.2.15) y (3.2.16). Los términos de primer orden en la expansión de los coeficientes $(\square^{\frac{1}{2}})_{\alpha}^{\beta}$ y $(\triangle^{\frac{1}{2}})_{MN}$ toman la forma

$$(\square^{\frac{1}{2}})_{\alpha}^{\beta} \cong \kappa_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2}A_{M\alpha}A^{M\beta}, \quad (\triangle^{\frac{1}{2}})_{MN} \cong \eta_{MN} - \frac{1}{2}A_{M\alpha}A_{N\beta}\kappa^{\alpha\beta}. \quad (5.2.1)$$

Estos objetos entran en la parametrización de los campos, dada por (5.1.1), y a través de estos, en los flujos generalizados. Así obtenemos, por ejemplo, la componente $\mathcal{F}_{\underline{abc}}$

$$\mathcal{F}_{\underline{abc}} = F_{\underline{abc}} + F_{\underline{abc}}^{(3)} = F_{\underline{abc}} - \frac{3b}{4} \left(\partial_{[\underline{a}} F_{\underline{b}}^{*\underline{cd}} - \frac{1}{2} F_{d[\underline{ab}} F^{*\underline{cd}} - \frac{2}{3} F^{*\underline{c}}_{\underline{e}[\underline{a}} F_{\underline{b}}^{*\underline{ed}} \right) F_{\underline{c}]\underline{cd}}^*, \quad (5.2.2)$$

en donde hicimos la identificación (5.1.22) y usamos

$$F_{\underline{Mbc}}^* = P_M^N F_{Nbc}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} E_M^a F_{\underline{abc}}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} E_M^a \left(F_{\underline{abc}} - \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{\underline{b}} \gamma_{\underline{a}} \Psi_{\underline{c}} \right), \quad (5.2.3)$$

además de $b = \frac{2}{(1-X_R)g^2}$, y donde la etiqueta ⁽³⁾ hace referencia al número de derivadas de los campos bosónicos del objeto. Las correcciones de orden α' a las distintas componentes de los flujos generalizados se listan en el apéndice C.

¹En este capítulo no se consideran las interacciones cuárticas en fermiones.

Veamos ahora la forma que toman las reglas de transformación (5.1.8), teniendo en cuenta que la transformación del dilatón generalizado, así como las transformaciones de difeomorfismos de todos los campos, no reciben correcciones, y que solamente consideraremos contribuciones al orden más bajo en fermiones:

- Frame generalizado: La identificación $\mathcal{E}_M^{\bar{a}} = E_M^{\bar{a}}$ implica $\delta\mathcal{E}_M^{\bar{a}} = \delta E_M^{\bar{a}}$, y de (5.1.8) obtenemos

$$\delta E_M^{\bar{a}} = \hat{\mathcal{L}}_\xi E_M^{\bar{a}} + E_M^{\bar{b}} \bar{\mathcal{T}}_{\bar{b}}^{\bar{a}} + \mathcal{E}_M^{\bar{\beta}} \bar{\mathcal{T}}_{\bar{\beta}}^{\bar{a}} + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^b \Psi^{\bar{a}} \mathcal{E}_{M\bar{b}}. \quad (5.2.4)$$

Utilizando el parámetro (5.1.15) y la siguiente relación

$$A_M^\beta f(\square)_\beta^\alpha = A_N^\alpha f(\Delta)_{M^N}, \quad (5.2.5)$$

que se cumple para cualquier función f , se obtiene

$$\delta E_M^{\bar{a}} = \hat{\mathcal{L}}_\xi E_M^{\bar{a}} + E_M^{\bar{b}} \bar{\mathcal{T}}_{\bar{b}}^{\bar{a}} - A_M^\beta \partial^P \xi_\alpha E_P^{\bar{a}} (\square^{-\frac{1}{2}})^\alpha_\beta + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^b \Psi^{\bar{a}} (\Delta^{-\frac{1}{2}})_{M^N} E_{N\bar{b}}. \quad (5.2.6)$$

El segundo término en el lado derecho de esta expresión permite identificar $\bar{\mathcal{T}}_{\bar{a}\bar{b}}$ con la componente $\Lambda_{\bar{a}\bar{b}}$ del parámetro de Lorentz de $O(9,1)_L \times O(1,9)_R$. El tercer término contiene la deformación

$$\delta_\Lambda^{(1)} E_M^{\bar{a}} = \frac{b}{2} F_{\underline{M}\bar{b}\bar{c}}^* E_N^{\bar{a}} \partial^N \Lambda^{\bar{b}\bar{c}}, \quad (5.2.7)$$

que corresponde a la generalización covariante de $O(10,10)$ de la transformación de Green-Schwarz [118]. Finalmente, el último término en (5.2.6) contiene la corrección de primer orden a la regla de transformación de supersimetría

$$\delta_\epsilon^{(1)} E_M^{\bar{a}} = -\frac{b}{8} \bar{\epsilon} \gamma^b \Psi^{\bar{a}} F_{\underline{M}\bar{b}\bar{c}}^* F_N^{\bar{b}\bar{c}} E^N_{\bar{b}}. \quad (5.2.8)$$

Siguiendo un razonamiento similar, se puede ver que la otra proyección transforma como

$$\delta^{(1)} E_M^{\underline{a}} = \frac{b}{2} F^{*N\bar{c}\bar{d}} E_N^{\underline{a}} \left(-\partial_{\bar{M}} \Lambda_{\bar{c}\bar{d}} + \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^b \Psi_{\bar{b}} F_{\bar{c}\bar{d}} E_M^{\bar{b}} \right), \quad (5.2.9)$$

donde hemos identificado

$$\bar{\mathcal{T}}_{\bar{a}\bar{b}} = \Lambda_{\bar{a}\bar{b}} + \frac{b}{4} F_{[\bar{b}}^* \bar{c}\bar{d}] \partial_{\bar{a}]} \Lambda_{\bar{c}\bar{d}}. \quad (5.2.10)$$

- Gravitino: Las correcciones de primer orden a las reglas de transformación del gravitino de $O(10,10)$ pueden obtenerse de (5.1.8) y toman la forma

$$\delta^{(1)} \Psi_{\bar{a}} = \frac{b}{16} \partial_{\bar{b}} \Lambda_{\bar{c}\bar{d}} F_{\bar{e}}^{\bar{c}\bar{d}} \gamma^{\bar{b}\bar{c}} \Psi_{\bar{a}} + \frac{b}{2} \Psi^{\bar{c}\bar{d}} \partial_{\bar{a}} \Lambda_{\bar{c}\bar{d}} + \frac{1}{4} F_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}^{(3)} \gamma^{\bar{b}\bar{c}} \epsilon. \quad (5.2.11)$$

Nótese que hay dos correcciones a las transformaciones de Lorentz. El primer término en el lado derecho puede interpretarse como una transformación generalizada de Green-Schwarz, y el segundo depende de la curvatura del gravitino.

- Curvatura del gravitino: A partir de la componente de *gauge* de la transformación del gravitino en (5.1.8), encontramos que la curvatura del gravitino obedece la regla de transformación

$$\delta\Psi_{\underline{ab}} = \xi^M \partial_M \Psi_{\underline{ab}} + 2\Psi_{\underline{c}[\underline{b}} \Lambda_{\underline{a}]}^{\bar{c}} + \frac{1}{4} \Lambda_{\underline{cd}} \gamma^{\underline{cd}} \Psi_{\underline{ab}} + \frac{1}{2} \partial_{\underline{c}} \Lambda_{\underline{ab}} \Psi^{\bar{c}} + \frac{1}{2} F^{*\underline{c}}_{\underline{ab}} \partial_{\underline{c}} \epsilon + \frac{1}{8} F_{\underline{cdab}}^{(2)} \gamma^{\underline{cd}} \epsilon. \quad (5.2.12)$$

- Dilatino: Las correcciones de primer orden a las reglas de transformación del dilatino generalizado que se obtienen de (5.1.8) son

$$\delta^{(1)} \varrho = \frac{b}{16} \partial_{\underline{b}} \Lambda_{\underline{cd}} F_{\underline{c}}^{*\bar{cd}} \gamma^{bc} \varrho - \frac{b}{8} \gamma^a F_{\underline{abc}}^* F^{*\bar{abc}} \partial_{\underline{d}} \epsilon - \frac{1}{12} F_{\underline{abc}}^{(3)} \gamma^{abc} \epsilon - \frac{1}{2} F_{\underline{c}}^{(3)} \gamma^c \epsilon. \quad (5.2.13)$$

Incluyendo el sector de *gauge*

En este punto resulta trivial incluir el sector de *gauge* en la TDCs. Tal como se hizo en el capítulo 2 para el orden más bajo de la expansión en α' , basta con extender el grupo de dualidad $O(10, 10) \rightarrow O(10, 10+n_g)$, el sector derecho del grupo de Lorentz doble $O(1, 9)_R \rightarrow O(1, 9+n_g)_R$ y los índices del espacio doble $M \rightarrow M = (M, i)$, $\bar{a} \rightarrow \bar{A} = (\bar{a}, \bar{i})$, de manera consistente. Ahora, los flujos generalizados y la curvatura del gravitino incluyen las contribuciones del sector de *gauge*, y en particular las constantes de estructura.

La extensión directa de los índices en las ecuaciones (5.2.7 - 5.2.13) proporciona las siguientes reglas de transformación de primer orden para los campos generalizados de $O(10, 10+n_g)$

$$\delta^{(1)} E_M^a = -\frac{b}{2} E_N^a F^{*N}_{\underline{CD}} \left(\partial_{\underline{M}} \Gamma^{\underline{CD}} - \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^b \Psi_{\underline{B}} F_{\underline{b}}^{\underline{CD}} E_M^{\underline{B}} \right), \quad (5.2.14a)$$

$$\delta^{(1)} E_M^{\bar{A}} = \frac{b}{2} F_{\underline{CD}}^{*\bar{CD}} \left(E_N^{\bar{A}} \partial^N \Gamma_{\underline{CD}} - \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^b \Psi^{\bar{A}} F_{N\underline{CD}} E_N^{\underline{b}} \right), \quad (5.2.14b)$$

$$\delta^{(1)} \Psi_{\bar{A}} = \frac{b}{16} \partial_{\underline{b}} \Gamma_{\underline{CD}} F_{\underline{c}}^{\underline{CD}} \gamma^{bc} \Psi_{\bar{A}} + \frac{b}{2} \Psi^{\underline{DC}} \partial_{\bar{A}} \Gamma_{\underline{CD}} + \frac{1}{4} F_{\underline{Abc}}^{(3)} \gamma^{bc} \epsilon, \quad (5.2.14c)$$

$$\delta^{(1)} \varrho = \frac{b}{16} \partial_{\underline{b}} \Gamma_{\underline{CD}} F_{\underline{c}}^{\underline{CD}} \gamma^{bc} \varrho - \frac{b}{8} \gamma^a F_{\underline{aBC}} F^{\underline{dBC}} \partial_{\underline{d}} \epsilon - \frac{1}{12} F_{\underline{abc}}^{(3)} \gamma^{abc} \epsilon - \frac{1}{2} F_{\underline{a}}^{(3)} \gamma^a \epsilon. \quad (5.2.14d)$$

5.2.2 La acción supersimétrica a orden α'

La acción invariante bajo las reglas de transformación (5.1.8) tiene claramente la misma forma funcional que (3.5.22), pero depende de los multipletes de $O(10, 10 + k)$, es decir

$$S_{O(10,10+k)} = \int d^{20+k} X e^{-2d} \left(\tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{E}, d) + \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \nabla_b \Psi_{\bar{A}} - \bar{\rho} \gamma^a \nabla_a \rho + 2 \bar{\Psi}^{\bar{A}} \nabla_{\bar{A}} \rho \right), \quad (5.2.15)$$

con el escalar de Ricci generalizado

$$\tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{E}, d) = 2 \partial_{\bar{A}} \mathcal{F}^{\bar{A}} + \mathcal{F}_{\bar{A}} \mathcal{F}^{\bar{A}} - \frac{1}{6} \mathcal{F}_{\underline{ABC}} \mathcal{F}^{\underline{ABC}} - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\underline{ABC}} \mathcal{F}^{\bar{A}BC}, \quad (5.2.16)$$

la extensión de $O(10, 10 + k)$ de (3.2.22). Por lo tanto, esta acción contiene correcciones de orden superior en términos de los campos de $O(10, 10 + n_g)$. Tenemos entonces, hasta primer orden

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + b \mathcal{R}^{(1)} &= \mathcal{R} - F_{\underline{Abc}}^{(3)} F^{\bar{A}bc} - \frac{1}{3} F_{\underline{abc}}^{(3)} F^{abc} + 2 F_{\underline{d}}^{(3)} F^{\underline{d}} + 2 \partial_{\underline{a}} F^{(3)a} \\ &+ \frac{b}{4} \partial_{\underline{d}} F^{\underline{a}} F^{*d}_{\underline{BC}} F^{\bar{B}\bar{C}} + \frac{b}{8} F^{(2)\bar{A}\bar{B}}_{\underline{cd}} F^{\bar{C}\bar{D}}_{\underline{AB}}, \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

donde \mathcal{R} es el escalar de Ricci generalizado a orden cero, dado por (3.2.22), pero incluyendo el sector de *gauge* heterótico. Nótese que esta ecuación está escrita usando los flujos generalizados de $O(10, 10 + n_g)$ y su correcciones. Reemplazando las expresiones (C.2.1)², $\mathcal{R}^{(1)}$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(1)} &= \frac{1}{4} \left[(\partial_{\underline{a}} \partial_{\underline{b}} F^{*b}_{\underline{CD}}) F^{*a\bar{C}\bar{D}} + (\partial_{\underline{a}} \partial_{\underline{b}} F^{*a}_{\underline{CD}}) F^{*b\bar{C}\bar{D}} + 2 (\partial_{\underline{a}} F^{*b}_{\underline{CD}}) F^{*a}_{\underline{CD}} F^{\underline{b}} \right. \\ &+ (\partial_{\underline{a}} F^{*a\bar{C}\bar{D}}) (\partial_{\underline{b}} F^{*b}_{\underline{CD}}) + (\partial_{\underline{a}} F^{*b}_{\underline{CD}}) (\partial^{\underline{a}} F^{*b}_{\underline{CD}}) + 2 (\partial_{\underline{a}} F_{\underline{b}}) F^{*b}_{\underline{CD}} F^{*a\bar{C}\bar{D}} \\ &+ (\partial_{\bar{A}} F^{*}_{\underline{bCD}}) F^{*\bar{C}\bar{D}} F^{*\bar{A}bc} - (\partial_{\underline{a}} F^{*}_{\underline{bCD}}) F^{*\bar{C}\bar{D}} F^{abc} + 2 (\partial_{\underline{a}} F^{*a}_{\underline{CD}}) F^{*\bar{C}\bar{D}} F^{\underline{b}} \\ &- 4 (\partial_{\underline{a}} F^{*}_{\underline{bCD}}) F^{*a}_{\underline{CE}} F^{*b\bar{E}}_{\underline{D}} + \frac{4}{3} F^{*\bar{E}}_{\underline{aC}} F^{*}_{\underline{bED}} F^{*\bar{C}\bar{D}} F^{abc} + F^{*b}_{\underline{CD}} F^{*}_{\underline{a}} F^{\bar{C}\bar{D}} F_{\underline{b}} F^{\underline{a}} \\ &\left. + F^{*\bar{C}\bar{E}}_{\underline{a}} F^{*}_{\underline{bED}} F^{*a}_{\underline{CG}} F^{*b\bar{G}\bar{D}} - F^{*\bar{C}\bar{E}}_{\underline{b}} F^{*}_{\underline{aED}} F^{*a}_{\underline{CG}} F^{*b\bar{G}\bar{D}} - F_{\underline{Abd}} F^{*d}_{\underline{CD}} F^{*\bar{C}\bar{D}} F^{\bar{A}bc} \right], \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

que depende del gravitino generalizado a través de la componente $F^{*}_{\underline{aBC}}$ del flujo generalizado, definida en (5.2.3).

De manera similar, podemos definir

$$\tilde{L}_F = \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \nabla_b \Psi_{\bar{A}} - \bar{\varrho} \gamma^a \nabla_a \varrho + 2 \bar{\Psi}^{\bar{A}} \nabla_{\bar{A}} \varrho = L_F + L_F^{(1)}, \quad (5.2.19)$$

²Donde los índices planos, proyectados con \bar{P}_{AB} , están extendidos para incluir el sector de *gauge* (es decir, $\bar{c}, \bar{d}, \dots \rightarrow \bar{C}, \bar{D}, \dots$).

donde L_F fue introducido en (3.3.11), y las correcciones de primer orden están dadas por

$$\begin{aligned}
L_F^{(1)} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \partial_{\underline{c}} \Psi_{\bar{A}} F^{\underline{c}\bar{C}\bar{D}} F_{\underline{b}\bar{C}\bar{D}} - \frac{1}{8} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{bcd} \Psi_{\bar{A}} (\partial_{\underline{b}} F_{\underline{c}\bar{C}\bar{D}}) F_{\underline{d}}^{\bar{C}\bar{D}} \right. \\
& + \frac{1}{16} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{bcd} \Psi_{\bar{A}} F_{\underline{abc}} F^a_{\underline{CD}} F_{\underline{d}}^{\bar{C}\bar{D}} + \frac{1}{12} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{bcd} \Psi_{\bar{A}} F_{\underline{b}\bar{C}}^{\bar{E}} F_{\underline{c}\bar{E}\bar{D}} F_{\underline{d}}^{\bar{C}\bar{D}} \\
& - \frac{1}{4} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \Psi^{\bar{C}} F_{\underline{b}}^{\bar{E}\bar{F}} F_{\underline{d}\bar{A}\bar{C}} F^d_{\bar{E}\bar{F}} + 2 \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \Psi_{\bar{C}\bar{D}} (\partial_{\bar{A}} F_{\underline{b}}^{\bar{C}\bar{D}}) - 2 \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^b \Psi_{\bar{C}\bar{D}} F_{\underline{Abc}} F^{\underline{c}\bar{C}\bar{D}} \\
& - 2 \bar{\Psi}^{\bar{C}\bar{D}} \gamma^b \partial_{\underline{b}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}} - \frac{1}{6} \bar{\Psi}^{\bar{C}\bar{D}} \gamma^{bcd} \Psi_{\bar{C}\bar{D}} F_{\underline{bcd}} - 4 \bar{\Psi}_{\bar{C}\bar{E}} \gamma^b \Psi^{\bar{E}}_{\bar{D}} F_{\underline{b}}^{\bar{C}\bar{D}} - \frac{1}{4} \bar{\varrho} \gamma^a \partial_{\underline{b}} \varrho F^{\underline{b}\bar{C}\bar{D}} F_{\underline{a}\bar{C}\bar{D}} \\
& + \frac{1}{8} \bar{\varrho} \gamma^{abc} \varrho \partial_{\underline{a}} F_{\underline{b}\bar{C}\bar{D}} F_{\underline{c}}^{\bar{C}\bar{D}} - \frac{1}{16} \bar{\varrho} \gamma^{abc} \varrho F_{\underline{abd}} F^d_{\underline{CD}} F_{\underline{c}}^{\bar{C}\bar{D}} - \frac{1}{12} \bar{\varrho} \gamma^{abc} \varrho F_{\underline{a}\bar{C}}^{\bar{E}} F_{\underline{b}\bar{E}\bar{D}} F_{\underline{c}}^{\bar{C}\bar{D}} \\
& - \frac{1}{4} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{bc} \varrho (\partial_{\bar{A}} F_{\underline{b}}^{\bar{C}\bar{D}}) F_{\underline{c}\bar{C}\bar{D}} + \frac{1}{4} \bar{\Psi}^{\bar{A}} \gamma^{bc} \varrho F_{\underline{Abd}} F^d_{\underline{CD}} F_{\underline{c}}^{\bar{C}\bar{D}} - 2 \bar{\Psi}^{\bar{C}\bar{D}} F^a_{\underline{CD}} \partial_{\underline{a}} \varrho \\
& \left. + \bar{\Psi}^{\bar{C}\bar{D}} \gamma^{ab} \varrho (\partial_{\underline{a}} F_{\underline{b}\bar{C}\bar{D}}) - \bar{\Psi}^{\bar{C}\bar{D}} \gamma^{ab} \varrho F_{\underline{a}\bar{C}}^{\bar{E}} F_{\underline{b}\bar{E}\bar{D}} - \frac{1}{2} \bar{\Psi}^{\bar{C}\bar{D}} \gamma^{ab} \varrho F_{\underline{abc}} F^c_{\underline{CD}} \right], \quad (5.2.20)
\end{aligned}$$

la cual incluye el sector de *gauge* heterótico.

En conclusión, las correcciones de primer orden manifiestamente covariantes bajo dualidad a la acción de la TDCs (3.5.22) en términos de los múltiplos de $O(10, 10 + n_g)$, están dadas por la suma de $\mathcal{R}^{(1)}$ y $L_F^{(1)}$. La acción

$$S_{\mathcal{N}=1 \text{ DFT}} = \int d^{20+n_g} X e^{-2d} \left(\mathcal{R} + \mathcal{R}^{(1)} + L_F + L_F^{(1)} \right), \quad (5.2.21)$$

es invariante bajo las reglas de transformación (3.5.18, 5.2.14), hasta términos con cuatro derivadas y dos fermiones.

5.3 El orden α' de la supergravedad heterótica

Para establecer una conexión con la teoría efectiva a bajas energías de la cuerda heterótica, en esta sección parametrizamos los multipletes de dualidad de $O(10, 10 + n_g)$ en términos de los multipletes de supergravedad y super Yang-Mills. Primero, examinamos las deformaciones de las reglas de transformación de supersimetría. Luego, expresamos la acción supersimétrica invariante bajo $O(10, 10 + n_g)$ en términos de los campos de la teoría en diez dimensiones. Derivamos todos los términos de la acción efectiva de la cuerda heterótica, incluyendo términos con hasta cuatro derivadas de los campos y términos fermiónicos bilineales. A lo largo de esta sección, comparamos nuestros resultados con propuestas previas en la literatura, destacando similitudes y diferencias.

5.3.1 Transformaciones de los campos

Las correcciones a las reglas de transformación de los campos covariantes de dualidad (5.2.14) inducen correcciones de orden superior en derivadas a las reglas de transformación de los campos de supergravedad y super Yang-Mills que parametrizan los campos generalizados (3.5.9 - 3.5.13). En consecuencia, esperamos que existan redefiniciones de orden α' de las parametrizaciones, que ahora denotamos como $\tilde{e}_\mu^a, \tilde{b}_{\mu\nu}, \tilde{\phi}, \tilde{A}_\mu^i, \tilde{\psi}_\mu, \tilde{\rho}, \tilde{\chi}_i$, en términos de los campos covariantes de *gauge* y Lorentz, por ejemplo

$$\tilde{e}_\mu^a = e_\mu^a + \mathcal{O}(\alpha'), \quad \tilde{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'), \quad \tilde{\psi}_\mu = \psi_\mu + \mathcal{O}(\alpha'), \quad \text{etc.}$$

Para encontrar las relaciones entre ambos conjuntos de campos, es conveniente enfocarnos primero en las parametrizaciones de los flujos generalizados y curvaturas, así como en sus reglas de transformación. A partir de los términos de primer orden en la acción (5.2.21), vemos que solo son necesarias las expresiones del orden cero de los flujos generalizados. Denotamos la parametrización de $F_{\underline{a}\underline{C}\underline{D}}^*$ como

$$\hat{\Omega}_{aCD} = \left(\hat{w}_{acd}^{(-)}, \hat{F}_{ac}^i, \hat{A}_a^{ij} \right), \quad (5.3.1)$$

donde los sombreros $\hat{}$ distinguen objetos que contienen fermiones, y los **índices colectivos del espacio tangente** $C = (c, i)$ incluyen los índices de *gauge*. En términos de los campos de supergravedad y super Yang-Mills, las componentes son

$$\hat{w}_{abc}^{(-)} \equiv \left(w_{\mu bc}^{(-)} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_b \gamma_\mu \psi_c \right) e^\mu_a, \quad (5.3.2)$$

con $w_{abc}^{(\pm)} = w_{abc} \pm \frac{1}{2} H_{abc}$,

$$\hat{F}_{ab}^i \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2} \bar{\psi}_{[\mu} \gamma_{\nu]} \chi^i \right) e^\mu_a e^\nu_b, \quad (5.3.3)$$

donde $F_{\mu\nu}^i$ es la curvatura del campo de Yang-Mills definida en (3.5.19), y

$$\hat{A}_a^{ij} \equiv - \left(A_\mu^k f_k^{ij} + \frac{1}{4} \bar{\chi}^i \gamma_\mu \chi^j \right) e^\mu_a. \quad (5.3.4)$$

La curvatura del gravitino generalizada $\Psi_{\underline{A}\underline{B}}$ se parametriza como

$$\tilde{\Psi}_{AB} = \Psi_{AB} - \frac{1}{2} \hat{\Omega}_{cAB} \psi^c \equiv \psi_{AB} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{\Omega}_{iAB} \chi^i - \frac{1}{2} \hat{\Omega}_{cAB} \psi^c, \quad (5.3.5)$$

con

$$\psi_{ab} \equiv e^\mu_{[a} e^\nu_{b]} \nabla_\mu^{(+)} \psi_\nu, \quad (5.3.6a)$$

$$\psi_{ai} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\partial_a \chi_i - \frac{1}{4} \hat{w}_{abc}^{(+)} \gamma^{bc} \chi_i - \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{F}_{bci} \gamma^{bc} \psi_a \right), \quad (5.3.6b)$$

$$\psi_{ij} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \hat{F}_{bc[i} \gamma^{bc} \chi_{j]}, \quad (5.3.6c)$$

y

$$\hat{\Omega}_{iAB} = \left(\hat{F}_{abi}, \hat{A}_{aij}, \sqrt{2} f_{ijk} \right) \quad (5.3.7)$$

la parametrización de las componentes $F_{\overline{AB}i}$ del flujo generalizado.

Parametrizando las reglas de transformación de Lorentz y supersimetría de $F_{\overline{aBC}}^*$

$$\delta F_{\overline{aBC}}^* = -\partial_{\underline{a}} \Lambda_{\overline{BC}} + \Lambda_{\underline{a}}^b F_{\overline{bBC}}^* - 2\Lambda_{\overline{[B}^D} F_{\overline{C]D\underline{a}}}^* + \bar{\epsilon} \gamma_{\underline{a}} \Psi_{\overline{BC}}, \quad (5.3.8)$$

obtenemos

$$\delta \hat{\Omega}_{\mu CD} = -\partial_\mu \Lambda_{CD} + 2\hat{\Omega}_{\mu B[D} \Lambda^B{}_{C]} + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \Psi_{CD}, \quad (5.3.9)$$

donde los parámetros de Lorentz generalizados Λ_{ab} y $\Lambda_{\overline{AB}}$ se parametrizan como $-\tilde{\Lambda}_{ab} + \bar{\epsilon} \gamma_{[a} \tilde{\psi}_{b]}$ y $\tilde{\Lambda}_{AB} = (\tilde{\Lambda}_{ab}, \tilde{\Lambda}_{ai}, \tilde{\Lambda}_{ij})$, con $\tilde{\Lambda}_{AB} = \Lambda_{AB} + \mathcal{O}(\alpha')$. Aquí, Λ_{ab} es el generador de las transformaciones de $O(1, 9)$, mientras que $\Lambda_{ai} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_a \chi_i$ y $\Lambda_{ij} = f_{ijk} \lambda^k$ dependen de los parámetros de supersimetría y de *gauge* según (3.5.16) y (3.5.17).

La transformación (5.3.9) contiene, además de las transformaciones de Lorentz estándar, la variación de supersimetría de la conexión de spin con torsión [94, 95]

$$\delta_\epsilon \hat{w}_{\mu bc}^{(-)} = \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi_{bc} + \frac{3}{4} \bar{\epsilon} \gamma_{[\rho} \chi_i \hat{F}_{\mu\nu]}^i e^\nu_b e^\rho_c, \quad (5.3.10)$$

las transformaciones de supersimetría y de *gauge* de la curvatura de Yang-Mills

$$\delta_\epsilon \hat{F}_{\mu ci} = \frac{1}{2} \left[\nabla_\mu (\bar{\epsilon} \gamma_c \chi_i) - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \nabla_c \chi_i + \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} H_{c\nu\rho} \gamma^{\nu\rho} \chi_i - \hat{F}_{\nu\rho i} \gamma^{\nu\rho} \psi_c \right) \right] \quad (5.3.11)$$

y

$$\delta_\lambda \hat{F}_{\mu ci} = f_{ijk} \lambda^j \hat{F}_{\mu c}^k, \quad (5.3.12)$$

así como las transformaciones de *gauge* y supersimetría de orden cero de la conexión de Yang-Mills A_μ^i , que se muestran en la ecuación (3.5.18).

De manera similar, a partir de la transformación de la curvatura del gravitino generalizada

$$\delta \Psi_{\overline{AB}} = 2\Psi_{\overline{C[B} \Lambda^{\overline{C}]}_{\overline{A]}} + \frac{1}{4} \Lambda_{\underline{cd}} \gamma^{cd} \Psi_{\overline{AB}} + \frac{1}{2} \partial_{\overline{C}} \Lambda_{\overline{AB}} \Psi^{\overline{C}} + \frac{1}{2} F_{\overline{AB}}^{*c} \partial_{\underline{c}} \epsilon + \frac{1}{8} \mathcal{F}_{\underline{cdAB}}^{(2)} \gamma^{cd} \epsilon \quad (5.3.13)$$

obtenemos

$$\delta\Psi_{CD} = 2\Psi_{B[D}\Lambda^B{}_{C]} + \frac{1}{8}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD}\gamma^{\mu\nu}\epsilon, \quad (5.3.14)$$

donde hemos definido

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD} = -2\partial_{[\mu}\hat{\Omega}_{\nu]CD} + 2\hat{\Omega}_{[\mu|C|}{}^E\hat{\Omega}_{\nu]ED}, \quad (5.3.15)$$

cuyas componentes son

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu cd} = \hat{R}_{\mu\nu cd}^{(-)} - \hat{F}_{\mu\tau}{}^i\hat{F}_{\nu\lambda i}e^\tau{}_{[c}e^\lambda{}_{d]}, \quad (5.3.16)$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu c}{}^i = \sqrt{2}\left(\nabla_{[\mu}^{(-)}\hat{F}_{\nu]c}{}^i + \frac{1}{4}\bar{\chi}^j\gamma_{[\mu}\chi^j\hat{F}_{\nu]c}{}^i\right), \quad (5.3.17)$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}{}^{ij} = F_{\mu\nu}^k f^{ij}{}_k + \hat{F}^{i\lambda}{}_{[\mu}\hat{F}_{\nu]\lambda}{}^j + \frac{1}{2}\nabla_{[\mu}(\bar{\chi}^i\gamma_{\nu]}\chi^j). \quad (5.3.18)$$

En particular, (5.3.14) contiene la transformación de supersimetría de la curvatura del gravitino estándar de supergravedad

$$\delta_\epsilon\psi_{ab} = \frac{1}{8}\left(\hat{R}_{\mu\nu ab}^{(-)} + \frac{3}{2}\hat{T}_{\mu\nu ab}\right)\gamma^{\mu\nu}\epsilon, \quad (5.3.19)$$

donde $\hat{R}_{\mu\nu ab}^{(-)}$ es la 2-forma de curvatura construída a partir de la conexión de spin con torsión $\hat{w}_{\mu ab}^{(-)}$, y $\hat{T}_{\mu\nu ab} = \hat{F}_{[\mu\nu}{}^i\hat{F}_{ab]i}$, en concordancia con [94, 95].

Ahora nos enfocamos en la parametrización de los campos fundamentales. Comenzamos con las reglas de transformación deformadas de las componentes $E_M{}^{\bar{a}}$ y $E_M{}^a$ del *frame* generalizado, dadas en (5.2.14a) y (5.2.14b). Por supuesto, diferentes redefiniciones conducen a multipletes de supergravedad que obedecen reglas de transformación distintas. Una de particular interés es la siguiente

$$\tilde{e}_\mu{}^a = e_\mu{}^a - \frac{b}{8}\left(\hat{w}_{bcd}^{(-)}\hat{w}^{(-)acd} + 2\hat{T}_b{}^a + \hat{A}_{bij}\hat{A}^{ij}\right)e_\mu{}^b, \quad (5.3.20)$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{b}{16}\left(\hat{w}^{(-)acd}\hat{w}_{acd}^{(-)} + 2\hat{T} + \hat{A}^{ij}\hat{A}_{ij}\right), \quad (5.3.21)$$

donde $\hat{T}_{ab} = \hat{F}_{aci}\hat{F}_b{}^{ci}$ y $\hat{T} = \hat{T}_a{}^a$. Se sabe que los términos cuadráticos en las conexiones de espín y de *gauge* son necesarios para eliminar las transformaciones de Lorentz no convencionales de los campos de supergravedad $e_\mu{}^a$ y ϕ [118, 119]. Junto con los términos covariantes de *gauge* \hat{T} , estas parametrizaciones determinan los campos $e_\mu{}^a$ y ϕ que obedecen las reglas de transformación de supersimetría y Lorentz de orden cero. Para obtener este resultado, se fija el *gauge* tal que $\tilde{e}^{\mu}{}_{\bar{a}} = \tilde{e}^{\mu}{}_{\underline{a}} \equiv \tilde{e}^{\mu}{}_a$, $\delta E^i{}_{\bar{i}} = 0$ y $\delta E^{\mu}{}_{\bar{i}} = 0$, y así absorber varios términos en los parámetros de Lorentz. Como consecuencia, se necesita la siguiente parametrización para el

gravitino covariante bajo dualidad

$$\tilde{\psi}_a = \psi_a - \frac{b}{2}\hat{\Omega}_{aCD}\Psi^{CD} + \frac{b}{8}\hat{\Omega}_a{}^{CD}\hat{\Omega}_{bCD}\psi^b. \quad (5.3.22)$$

Curiosamente, estas parametrizaciones inducen una deformación de la variación de supersimetría del gravitino que puede ser absorbida en la torsión de la conexión de espín mediante la siguiente modificación de la curvatura del campo de Kalb-Ramond

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\mu\nu\rho} = & 3 \left[\partial_{[\mu}\tilde{b}_{\nu\rho]} - \zeta C_{\mu\nu\rho}^{(g)} + \frac{b}{2}\hat{C}_{\mu\nu\rho}^{(L)} + \frac{b}{2}\hat{F}_{[\mu}{}^{ci}\nabla_{\nu}^{(-)}\hat{F}_{\rho]ci} + \frac{b}{8}A_{[\mu}^k\partial_{\nu}(\bar{\chi}^i\gamma_{\rho]}\chi^j) f_{ijk} \right. \\ & \left. + \frac{b}{8}\bar{\chi}^i\gamma_{[\mu}\chi^j(\partial_{\nu}A_{\rho]}^k - A_{\nu}^l A_{\rho]}^m f_{lm}^k) f_{ijk} - \frac{b}{8}\bar{\chi}^i\gamma_{[\mu}\chi^j\hat{F}_{\nu}{}^{ci}\hat{F}_{\rho]c}^j \right], \quad (5.3.23) \end{aligned}$$

donde aparece la forma de Chern-Simons de Yang-Mills $C_{\mu\nu\rho}^{(g)}$, definida en (3.5.21), multiplicada por el coeficiente

$$\zeta = 1 + \frac{1}{2}b\varsigma, \quad \varsigma\kappa_{ij} = f_i{}^{kl}f_{jlk}, \quad (5.3.24)$$

que contiene una deformación de primer orden. También aparece en la redefinición de $H_{\mu\nu\rho}$ el objeto $\hat{C}_{\mu\nu\rho}^{(L)}$, que denota la forma de Chern-Simons de Lorentz de la conexión de espín con torsión $\hat{w}_{\mu ab}^{(-)}$.

$$\hat{C}_{\mu\nu\rho}^{(L)} = \hat{w}_{[\mu}^{(-)cd}\partial_{\nu}\hat{w}_{\rho]cd}^{(-)} + \frac{2}{3}\hat{w}_{[\mu}^{(-)bc}\hat{w}_{\nu cd}^{(-)}\hat{w}_{\rho]}^{(-)d}{}_b. \quad (5.3.25)$$

Los términos bilineales en gauginos en (5.3.23) pueden ser absorbidos en la deformación de primer orden de la forma de Chern-Simons de Yang-Mills reemplazando $A_{\mu}^i \rightarrow \hat{A}_{\mu}{}^{jk}$, pero esto no es conveniente por razones que se aclararán más adelante.

La 3-forma $\tilde{H}_{\mu\nu\rho}$ (5.3.23) puede reescribirse de forma compacta como

$$\tilde{H}_{\mu\nu\rho} = 3 \left[\partial_{[\mu}\tilde{b}_{\nu\rho]} - C_{\mu\nu\rho}^{(g)} + \frac{b}{2}\hat{C}_{\mu\nu\rho} \right], \quad (5.3.26)$$

donde

$$\hat{C}_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu}\hat{\Omega}_{\nu}{}^{CD}\hat{\Omega}_{\rho]CD} + \frac{2}{3}\hat{\Omega}_{[\mu|CD}[\hat{\Omega}_{\nu}{}^{DE}\hat{\Omega}_{\rho]E}{}^C. \quad (5.3.27)$$

En el esquema donde el dilatino se denota como λ , una parametrización del dilatino análoga a (5.3.22) también conlleva el reemplazo de $H_{\mu\nu\rho}$ de orden más bajo por $\tilde{H}_{\mu\nu\rho}$ en su transformación de supersimetría. Como resultado, la combinación $\tilde{\rho} = 2\tilde{\lambda} + \gamma^a\tilde{\psi}_a$ y su regla de transformación de supersimetría permanecen sin deformación. Específicamente, $\tilde{\rho} = \rho$ y $\delta_{\epsilon}\tilde{\rho} = \delta_{\epsilon}^{(0)}\rho$. Por lo tanto, en el esquema donde el dilatino se denota como ρ , ni el campo mismo ni su regla de

transformación se modifican. De $\delta E_\mu^{\bar{i}}$ y $\delta \Psi_{\bar{i}}$ en (5.2.14), se puede observar que las reglas de transformación del campo de *gauge* y del gaugino no están deformadas, por lo que no es necesario redefinir estos campos.

Finalmente, a partir de las reglas de transformación de las componentes $E_{\mu\bar{a}}$ o $E_{\mu\bar{a}}$, y utilizando las parametrizaciones definidas anteriormente, obtenemos

$$\delta^{(1)}\tilde{b}_{\mu\nu} = -\frac{b}{2} \left(\partial_{[\mu}\Lambda^{CD}\hat{\Omega}_{\nu]CD} + \bar{\epsilon}\gamma_{[\mu}\Psi^{CD}\hat{\Omega}_{\nu]CD} \right). \quad (5.3.28)$$

Esta expresión compacta contiene información sobre las transformaciones de *gauge*, Lorentz y supersimetría del campo \tilde{b} , las cuales analizaremos por separado. Al expandir el primer término en (5.3.28), se obtiene

$$-\frac{b}{2}\partial_{[\mu}\Lambda^{CD}\hat{\Omega}_{\nu]CD} = -\frac{b}{2} \left(\partial_{[\mu}\Lambda^{cd}\hat{w}_{\nu]cd}^{(-)} + \partial_{[\mu}\lambda^k\hat{A}_{\nu]}^{ij}f_{ijk} - \frac{1}{2}\partial_{[\mu}(\bar{\epsilon}\gamma^c\chi^j)\hat{F}_{\nu]ci} \right). \quad (5.3.29)$$

El primer término en el lado derecho corresponde al sector de Lorentz de la transformación de Green-Schwarz [102], que requiere la inclusión de la forma de Chern-Simons de Lorentz (5.3.25) en $\tilde{H}_{\mu\nu\rho}$. Este término no puede eliminarse mediante redefiniciones del campo b [118]. Los términos bilineales fermiónicos en $\hat{w}_{\nu cd}^{(-)}$ pueden cancelarse redefiniendo $\tilde{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \frac{b}{2}w_{[\mu}^{cd}\bar{\psi}_c\gamma_{\nu]}\psi_d$, pero elegimos no hacerlo porque (5.3.25) está definido con la correspondiente contribución fermiónica, y por lo tanto $\tilde{H}_{\mu\nu\rho}$ es invariante bajo Lorentz.

La contribución bosónica del segundo término en (5.3.29), constituye la corrección de primer orden a la transformación de Green-Schwarz de Yang-Mills

$$\delta_\lambda b_{\mu\nu} = -\partial_{[\mu}\lambda^i A_{\nu]i}, \quad (5.3.30)$$

resaltando la deformación ς de la métrica de Killing en (5.3.24). Esta transformación tampoco puede eliminarse mediante redefiniciones del campo b . En su lugar, es conveniente cancelar los términos fermiónicos en \hat{A}_μ^{ij} redefiniendo

$$\tilde{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{b}{8}A_{[\mu}^k\bar{\chi}^i\gamma_{\nu]}\chi^j f_{ijk}, \quad (5.3.31)$$

con el fin de comparar con resultados estándar. Con esta redefinición, (5.3.23) se convierte en

$$\tilde{H}_{\mu\nu\rho} = \bar{H}_{\mu\nu\rho} + \frac{3b}{2} \left(\nabla_{[\mu}^{(-)}\hat{F}_{\nu}^{ci}\hat{F}_{\rho]ci} - \frac{1}{4}\bar{\chi}^i\gamma_{[\mu}\chi^j\hat{F}_{\nu}^{ci}\hat{F}_{\rho]c}^j + \frac{1}{4}\bar{\chi}^i\gamma_{[\mu}\chi^j F_{\nu\rho]}^k f_{ijk} \right), \quad (5.3.32)$$

donde

$$\bar{H}_{\mu\nu\rho} = 3 \left(\partial_{[\mu}b_{\nu\rho]} - \zeta C_{\mu\nu\rho}^{(g)} + \frac{b}{2}\hat{C}_{\mu\nu\rho}^{(L)} \right). \quad (5.3.33)$$

Finalmente, el tercer término en (5.3.29), junto con el segundo término en (5.3.28), contienen las deformaciones de primer orden de la transformación de supersimetría de $b_{\mu\nu}$, esto es

$$\delta_\epsilon^{(1)} b_{\mu\nu} = \frac{b}{2} \left(\hat{w}_{[\mu}^{(-)cd} \delta_\epsilon \hat{w}_{\nu]cd}^{(-)} - \varsigma A_{[\mu}^i \delta_\epsilon A_{\nu]i} + \hat{F}_{[\mu}{}^{ci} \delta_\epsilon \hat{F}_{\nu]ci} + \nabla_{[\mu}^{(-)} \left(\bar{\epsilon} \gamma^b \chi^i \right) \hat{F}_{\nu]bi} \right). \quad (5.3.34)$$

El primer término en (5.3.34) fue introducido originalmente en [104] para restaurar la covariancia de Lorentz manifiesta en la variación supersimétrica de la curvatura del campo $b_{\mu\nu}$. Posteriormente, fue reobtenido en [94] como consecuencia de la propuesta de que las conexiones de Yang-Mills y la conexión de spin con torsión deben aparecer simétricamente en la supergravedad con $\mathcal{N} = 1$ en diez dimensiones acoplada a super Yang-Mills. El segundo término en (5.3.34) refleja la deformación ς de la métrica de Killing (5.3.24) en la transformación de supersimetría de orden cero (3.5.18). Estos dos términos son los análogos evidentes de las transformaciones de Green-Schwarz de Lorentz y Yang-Mills

$$\delta_\Lambda b_{\mu\nu} = -\frac{b}{2} \partial_{[\mu} \Lambda^{cd} \hat{w}_{\nu]cd}^{(-)}, \quad \delta_\lambda b_{\mu\nu} = -\zeta \partial_{[\mu} \lambda^k A_{\nu]}^k, \quad (5.3.35)$$

como se señaló en [104]. Aquí, estas transformaciones se derivan directamente de la formulación manifiestamente covariante bajo dualidad de la teoría.

Es notorio que el segundo término en (5.3.28) puede obtenerse a partir de la transformación de orden cero del campo $b_{\mu\nu}$ en (3.5.18) con las identificaciones $A_\mu^i \leftrightarrow \hat{\Omega}_\mu^{CD}$, $\chi^i \leftrightarrow \Psi^{CD}$, *i.e.* una generalización de la simetría $A_\mu^i \leftrightarrow \hat{w}_\mu^{(-)cd}$, $\chi^i \leftrightarrow \psi^{cd}$ empleada en [94, 95] para obtener el superinvariante de Riemann al cuadrado. Esta identificación generalizada juega un papel crucial en la demostración de la invariancia supersimétrica de la acción de primer orden, como discutimos en la siguiente sección.

En resumen, las definiciones (5.3.20 - 5.3.22) y (5.3.31) conducen a campos de supergravedad y super Yang-Mills que obedecen las reglas de transformación de orden cero, excepto por las deformaciones de primer orden en (5.3.34) y el reemplazo $H_{\mu\nu\rho} \rightarrow \tilde{H}_{\mu\nu\rho}$ en la transformación de supersimetría del gravitino³, que toma la forma

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = \partial_\mu \epsilon - \frac{1}{4} \tilde{w}_{\mu ab}^{(+)} \gamma^{ab} \epsilon, \quad (5.3.36)$$

con $\tilde{w}_{\mu ab}^{(+)} = w_{\mu ab} + \frac{1}{2} \tilde{H}_{\mu\nu\rho} e^\nu{}_a e^\rho{}_b$.

Claramente, las leyes de transformación dependen de la elección de la parametrización. Por

³También en la del dilatino en el esquema ($\rho \rightarrow \lambda$), siendo $\delta_\epsilon \lambda = -\frac{1}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \phi \epsilon + \frac{1}{24} \tilde{H}_{abc} \gamma^{abc} \epsilon$.

ejemplo, podríamos definir

$$\tilde{e}'^a{}_\mu = e_\mu^a - \frac{b}{8} \left(\hat{w}_b^{(-)cd} \hat{w}_{cd}^{(-)a} + \hat{A}_{bij} \hat{A}^{aij} \right) e_\mu^b, \quad (5.3.37)$$

$$\tilde{\phi}' = \phi - \frac{b}{16} \left(\hat{w}^{(-)acd} \hat{w}_{acd}^{(-)} + \hat{A}^{aij} \hat{A}_{aij} \right), \quad (5.3.38)$$

y expresiones similares para sus compañeros supersimétricos, que están relacionadas con las parametrizaciones anteriores mediante redefiniciones de campo covariantes bajo transformaciones de *gauge* y de Lorentz. Se sabe que esta parametrización reproduce los términos con cuatro derivadas en el sector bosónico de la acción efectiva de la cuerda heterótica cuando $b = \alpha'$ [119]. Además, los campos definidos de esta manera obedecen la misma dinámica clásica que los de (5.3.20) y (5.3.21), ya que las acciones efectivas correspondientes difieren solo en términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento de orden cero.

Sin embargo, las definiciones (5.3.37, 5.3.38) inducen correcciones de primer orden complicadas en las reglas de transformación supersimétrica de los campos de supergravedad. Por esta razón, preferimos mantener los campos que obedecen leyes de transformación con la menor cantidad de deformaciones.

Antes de pasar a la construcción de la acción invariante bajo las transformaciones modificadas, vamos a analizar las deformaciones propuestas en las referencias [94, 95]. En particular, nos preguntamos si existe una parametrización del *vielbein* covariante bajo dualidad en términos de uno covariante bajo *gauge* que transforme según lo propuesto en [94] o en [95], es decir

$$\delta^{(1)} \mathbf{e}_\mu^a = -\frac{3\alpha'}{32} \bar{\epsilon} \gamma^{\sigma\tau} \gamma_\mu \psi^\nu T_{\lambda\nu\sigma\tau} e^{\lambda a}, \quad \text{o} \quad \delta^{(1)} \mathbf{e}_\mu^a = \frac{3\alpha'}{16} \bar{\epsilon} \gamma_{[\lambda\chi}^i F_{\nu\rho]i} H_\mu^{\nu\rho} e^{\lambda a}, \quad (5.3.39)$$

respectivamente, escritas aquí usando nuestras convenciones. Nótese que solo examinamos los términos que involucran al sector de *gauge*, ya que el sector gravitatorio coincide hasta el orden considerado. En concreto, buscamos una cantidad E_μ^a tal que

$$\mathbf{e}_\mu^a = e_\mu^a + E_\mu^a \quad \text{and} \quad \delta^{(1)} \mathbf{e}_\mu^a = \delta^{(0)} E_\mu^a. \quad (5.3.40)$$

Las expresiones más generales que pueden reproducir alguna de las transformaciones (5.3.39) pueden escribirse esquemáticamente como

$$E_\mu^a = a_1^m (\bar{\psi} \dots \gamma \dots \psi \cdot e)_\mu^a + a_2^m (\bar{\psi} \dots \gamma \dots \chi F e)_\mu^a \quad (5.3.41)$$

o como

$$\begin{aligned} E_\mu^a = & b_1^m H_{bcd} H^{acd} e_\mu^b + b_2^m (\bar{\psi} \dots \gamma \dots \psi \cdot H e)_\mu^a + b_3^m (\bar{\rho} \gamma \dots \psi \cdot H e)_\mu^a + b_4^m (\bar{\chi} \gamma \dots \psi \cdot F e)_\mu^a \\ & + b_5^m (\bar{\chi} \gamma \dots \chi F e)_\mu^a + b_6^m (\bar{\rho} \gamma \dots \chi F e)_\mu^a + b_7^m (\bar{\chi} \gamma \dots \chi H e)_\mu^a, \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

donde los términos entre paréntesis representan todas las posibles contracciones de índices y números de matrices γ , enumeradas por el supraíndice m , mientras que ψ y $\psi_{..}$ denotan el gravitino y la curvatura del gravitino, respectivamente. Sin embargo, hemos encontrado que ninguna de las expresiones en (5.3.39) puede ser reproducida.

De hecho, la transformación supersimétrica de Green-Schwarz generalizada, parametrizada con los campos que reproducen los términos bosónicos de la acción efectiva de la supergravedad heterótica, impone fuertes restricciones sobre las posibles deformaciones de la teoría. En particular, no admite las propuestas (5.3.39). Esto no implica que dichas propuestas estén en conflicto con la teoría de cuerdas. Para establecer la invariancia de la acción que implementa esas transformaciones de supersimetría bajo transformaciones de $O(d, d)$, sería necesario reducir dimensionalmente la teoría a $10 - d$ dimensiones.

Cabe destacar que las deformaciones (5.3.34) y (5.3.36) se obtuvieron a partir de las reglas de transformación de los multipletes de $O(10, 10 + k)$, cuyo álgebra cierra exactamente. En consecuencia, la teoría evita un procedimiento iterativo como el de [94, 95] que solo garantiza la consistencia hasta un cierto orden. Además, la supersimetría se mantiene manifiesta a todos los órdenes y las reducciones dimensionales preservarán la invariancia bajo dualidad T esperada en la teoría.

5.3.2 La acción supersimétrica a orden α'

Si bien es un ejercicio laborioso, la acción (5.2.21) puede parametrizarse de manera directa. Utilizando identidades de Bianchi e integraciones por partes, la acción de la teoría a orden $\mathcal{O}(\alpha')$ puede escribirse de forma compacta como

$$S = \int d^{10}x e^{-2\phi} \mathcal{L}, \quad (5.3.43)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & R + 4\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\phi - \frac{1}{12}\tilde{H}_{\mu\nu\rho}\tilde{H}^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu i}F^{\mu\nu i} + \frac{\alpha'}{8}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu AB}\hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu AB} \\ & - \bar{\psi}^{\mu}\gamma^{\nu}\nabla_{\nu}\psi_{\mu} + \bar{\rho}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\rho + 2\bar{\psi}^{\mu}\nabla_{\mu}\rho - \frac{1}{2}\bar{\chi}^i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\chi_i + \bar{\chi}_i\left(\gamma^{\mu}\psi^{\nu} - \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\rho\right)F_{\mu\nu}^i \\ & + \frac{1}{24}\tilde{H}_{\rho\sigma\tau}\left(\bar{\psi}^{\mu}\gamma^{\rho\sigma\tau}\psi_{\mu} + 12\bar{\psi}^{\rho}\gamma^{\sigma}\psi^{\tau} - \bar{\rho}\gamma^{\rho\sigma\tau}\rho - 6\bar{\psi}^{\rho}\gamma^{\sigma\tau}\rho + \frac{1}{2}\bar{\chi}^i\gamma^{\rho\sigma\tau}\chi_i\right) \\ & + \alpha'\left[\bar{\Psi}^{AB}\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}(w, \hat{\Omega})\Psi_{AB} - \frac{1}{24}H_{\mu\nu\rho}\bar{\Psi}^{AB}\gamma^{\mu\nu\rho}\Psi_{AB} - \bar{\Psi}^{AB}\left(\gamma^{\mu}\psi^{\nu} - \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\rho\right)\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu AB}\right], \end{aligned}$$

donde hemos tomado $b = \alpha'$, y definimos

$$\mathcal{D}_\mu(w, \hat{\Omega})\Psi_{AB} = \partial_\mu\Psi_{AB} + 2\hat{\Omega}_{\mu[A}{}^C\Psi_{B]C} - \frac{1}{4}w_{\mu cd}\gamma^{cd}\Psi_{AB}. \quad (5.3.44)$$

Tal como esperábamos, el sector puramente bosónico reproduce la expresión obtenida a partir del cálculo de amplitudes de dispersión [65–67], esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}|_{\text{bos}} = & \int d^{10}x e^{-2\phi} \left[R + 4\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{1}{12}\overline{H}^{\mu\nu\rho}\overline{H}_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}\zeta F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{\alpha'}{8} \left(R_{\mu\nu}^{(-)ab} R^{(-)\mu\nu}{}_{ab} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{3}{2}T_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\mu\nu\rho\sigma} \right) + \frac{\alpha'}{4} e.o.m. \right], \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

donde *e.o.m.* se refiere a una combinación de las ecuaciones de movimiento de orden cero $\Delta g_{\mu\nu}$, $\Delta\phi$, $\Delta A_{\nu i}$ y $\Delta b_{\rho\nu}$, listadas en el Apéndice D. Esta combinación es

$$e.o.m. = \frac{1}{2}\Delta e_{\mu a}T^{\mu a} - \left(\frac{1}{4}\Delta\phi T_{\mu\nu} + \Delta(Ab)_\nu^i \Delta A_{i\mu} + A_\lambda^i A_{i\rho} \Delta b^\lambda{}_\mu \Delta b^\rho{}_\nu \right) g^{\mu\nu}, \quad (5.3.46)$$

con $\Delta(Ab)_\nu^i = (\Delta A_\nu^i - 2A_\lambda^i \Delta b^\lambda{}_\nu)$. La corrección de primer orden a la métrica de Killing incluida en el coeficiente ζ y todos los términos en *e.o.m.* pueden eliminarse mediante redefiniciones de campos covariantes de *gauge*. Sin embargo, como argumentamos en la sección anterior, los campos redefinidos obedecerían reglas de transformación de supersimetría más complicadas. Invirtiendo el argumento, podemos pensar que al agregar términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento en la acción, las deformaciones de las reglas de transformación de supersimetría pueden minimizarse.

La aparente simplicidad de las correcciones de primer orden con términos bilineales en fermiones en (5.3.43) se debe a las definiciones (5.3.1), (5.3.5) y (5.3.15). Los términos que son independientes de los campos de super Yang-Mills (es decir, aquellos en los que todos los índices colectivos A, B, \dots toman los valores a, b, \dots) coinciden exactamente con la ecuación (2.11) de [95]. Este resultado se obtuvo reemplazando $A_\mu^i \rightarrow \hat{w}_\mu^{(-)cd}$ y $\chi^i \rightarrow \psi^{cd}$ en el Lagrangiano. De hecho, se puede recuperar el Lagrangiano $\mathcal{L}(R^2)$ de [95] reemplazando

$$\Psi_{AB} \rightarrow \psi_{ab}, \quad \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu AB} \rightarrow R_{\mu\nu ab}^{(-)}, \quad \tilde{H}_{\mu\nu\rho} \rightarrow \overline{H}_{\mu\nu\rho}$$

en (5.3.43). Sin embargo, las estructuras con índices colectivos del espacio tangente A, B, \dots contienen campos de super Yang-Mills además de los campos de supergravedad. Nótese que $\tilde{H}_{\mu\nu\rho}$ involucra la generalización de la forma de Chern-Simons de Lorentz (5.3.25) definida en (5.3.27). Como era de esperar, los términos en los que los índices colectivos toman los valores

i, j, \dots no coinciden con las expresiones correspondientes $\mathcal{L}(RF^2) + \mathcal{L}(F^4)$ en [95], ya que las reglas de transformación de supersimetría de los campos difieren en términos dependientes de los campos de Yang-Mills.

Invariancia supersimétrica

Probar la invariancia supersimétrica de la acción (5.3.43) resulta de la observación de que tanto la acción como las reglas de transformación de los campos tienen la misma estructura que las correspondientes en [95], aunque con índices colectivos, excepto por los términos contenidos en $\Lambda_{ci} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\gamma_c\chi_i$, que se cancelan en la variación de la acción. A continuación mostramos la invariancia supersimétrica de la acción (5.3.43) ante las transformaciones de supersimetría (3.4.14), (5.3.28) y (5.3.36), junto con las reglas transformación

$$\delta\hat{\Omega}_{\mu CD} = -\partial_\mu\Lambda_{CD} + 2\hat{\Omega}_{\mu E[D}\Lambda^E{}_{C]} + \bar{\epsilon}\gamma_\mu\Psi_{CD} = -\mathcal{D}_\mu\Lambda_{CD} + \bar{\epsilon}\gamma_\mu\Psi_{CD}, \quad (5.3.47a)$$

$$\delta\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD} = 2\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu E[D}\Lambda^E{}_{C]} - 2\mathcal{D}_{[\mu}(\bar{\epsilon}\gamma_{\nu]}\Psi_{CD}), \quad (5.3.47b)$$

$$\delta\Psi_{CD} = 2\Psi_{E[D}\Lambda^E{}_{C]} + \frac{1}{8}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD}\gamma^{\mu\nu}\epsilon. \quad (5.3.47c)$$

Sabemos que a orden cero la teoría es invariante [103], por lo cual nos enfocamos en las variaciones de orden α'

$$(\delta S)^{(1)} = \int d^{10}x e e^{-2\phi} \left[-e_\mu{}^a \delta^{(0)} e^\mu{}_a \mathcal{L}^{(1)} - 2\delta^{(0)} \phi \mathcal{L}^{(1)} + \delta^{(0)} \mathcal{L}^{(1)} + \delta^{(1)} \mathcal{L}^{(0)} \right], \quad (5.3.48)$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} (\delta S)^{(1)} = & -\frac{\alpha'}{8}\bar{\epsilon}\rho \left(H_{\mu\nu\rho}\hat{\mathcal{C}}^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD}\hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu CD} \right) + \frac{3\alpha'}{8}\bar{\epsilon}\gamma^{(\mu}\psi^{\lambda)}H_{\mu\nu\rho}\hat{\mathcal{C}}^{\lambda\nu\rho} \\ & -\frac{3\alpha'}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi^\nu \left(\nabla_\rho\phi\hat{\mathcal{C}}^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_\rho\hat{\mathcal{C}}^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{12}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\rho CD}\hat{\mathcal{R}}^{\rho CD} \right) + \frac{3\alpha'}{8}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\chi^i F_{\nu\rho i}\hat{\mathcal{C}}^{\mu\nu\rho} \\ & +\frac{\alpha'}{2}\delta^{(0)}\hat{\Omega}_\mu{}^{CD} \left(\Delta b^{\mu\nu}\hat{\Omega}_{\nu CD} + \frac{1}{2}H^{\mu\nu\rho}\hat{\mathcal{R}}_{\nu\rho CD} + 2\nabla_\nu\phi\hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu CD} - \mathcal{D}_\nu\hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu CD} \right) \\ & +\frac{\alpha'}{8}\delta^{(0)}\bar{\psi}^\mu \left(\gamma^{\rho\sigma\tau}\psi_\mu\hat{\mathcal{C}}_{\rho\sigma\tau} + 12\gamma^\sigma\psi^\tau\hat{\mathcal{C}}_{\mu\sigma\tau} - 3\gamma^{\sigma\tau}\rho\hat{\mathcal{C}}_{\mu\sigma\tau} + 8\gamma^\nu\Psi^{CD}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD} \right) \\ & -\frac{\alpha'}{8}\delta^{(0)}\bar{\rho} \left((\gamma^{\rho\sigma\tau}\rho + 3\gamma^{\sigma\tau}\psi^\rho)\hat{\mathcal{C}}_{\rho\sigma\tau} - 2\gamma^{\mu\nu}\Psi^{CD}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD} \right) + \frac{\alpha'}{16}\delta^{(0)}\bar{\chi}^i\gamma^{\rho\sigma\tau}\chi_i\hat{\mathcal{C}}_{\rho\sigma\tau} \\ & +2\alpha'\delta^{(0)}\bar{\Psi}^{CD} \left(\mathcal{D}(w, \hat{\Omega})\Psi_{CD} - \left(\nabla\phi + \frac{1}{24}\mathcal{H} \right) \Psi_{CD} + \frac{1}{2} \left(\gamma^\mu\psi^\nu - \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\rho \right) \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu CD} \right) \\ & +\delta^{(1)}\tilde{b}_{\mu\nu}\Delta b^{\mu\nu} - 2\delta^{(1)}\bar{\psi}^\mu\Delta\psi_\mu + 2\delta^{(1)}\bar{\rho}\Delta\rho. \end{aligned} \quad (5.3.49)$$

Las variaciones (5.3.47) dependen explícitamente del parámetro de supersimetría y también a través de $\Lambda_{ci} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\gamma_c\chi_i$. La dependencia explícita tiene la misma estructura que las transformaciones correspondientes en [94, 95], con la sustitución de los índices colectivos C, D, \dots por c, d, \dots . Dado que las acciones correspondientes también tienen la misma estructura, podemos asegurar que estos términos se cancelan en (5.3.49).

Los términos dependientes de Λ_{ci} aparecen en $\delta^{(0)}\hat{\Omega}_{\mu CD}$, $\delta^{(1)}b_{\mu\nu}$ y $\delta^{(0)}\Psi_{CD}$. Podemos descartar la última contribución, ya que es de orden superior en fermiones. Las dos primeras contribuciones pueden reescribirse como

$$(\delta S)^{(1)} = \frac{\alpha'}{2}D_\rho \left[\partial_\mu \Lambda^{CD} \hat{\Omega}_{\nu CD} - \hat{\Omega}_\mu^{ED} \hat{\Omega}_\nu^C{}_D \Lambda_{EC} \right] H^{\mu\nu\rho} \\ + \frac{\alpha'}{2} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \Lambda^{CD} \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu}{}_{CD} - \frac{\alpha'}{4} \mathcal{D}_\mu \Lambda^{CD} H^{\mu\nu\rho} \hat{\mathcal{R}}_{\nu\rho CD} ,$$

expresión que se anula tras realizar algunas integraciones por partes.

5.4 Conclusiones

En este capítulo presentamos los resultados de [2], en donde derivamos las correcciones de primer orden en α' a la TDCs expandiendo el formalismo exacto, supersimétrico, y covariante bajo dualidad de [115]. Al descomponer el grupo de simetría global $O(10, 10+k)$ en multipletes de $O(10, 10+n_g)$, la teoría incorpora términos de derivadas superiores a todos los órdenes. En [2] conservamos términos con hasta cuatro derivadas de los campos y términos fermiónicos bilineales.

Las reglas de transformación de los multipletes de $O(10, 10+k)$ inducen deformaciones de derivadas superiores en las de los campos de $O(10, 10+n_g)$. En particular, producen una generalización supersimétrica de la transformación de Green-Schwarz covariante bajo dualidad que se encontró en [118]. Para conectar con el límite de bajas energías de la cuerda heterótica, parametrizamos los multipletes covariantes de dualidad en términos de campos de supergravedad y super Yang-Mills. La inclusión de términos de derivadas superiores requiere redefiniciones de campos no convencionales y no covariantes en las parametrizaciones de las estructuras covariantes bajo dualidad. Las redefiniciones que reproducen las interacciones de cuatro derivadas de los campos bosónicos de la acción efectiva de la cuerda heterótica se encontraron en [118, 119]. Aquí, trabajamos con un conjunto de campos relacionados con estos últimos mediante redefini-

ciones covariantes de *gauge*. Excepto por la 2-forma de Kalb-Ramond, los campos obedecen las reglas de transformación de orden cero con una modificación de la curvatura de la 2-forma en las variaciones de supersimetría. Las transformaciones de Lorentz y de *gauge* no abelianas de la 2-forma están deformadas por el mecanismo de Green-Schwarz, como era de esperar, y sus transformaciones de supersimetría están deformadas por términos tipo Green-Schwarz más algunos términos adicionales de derivadas superiores dependientes de Yang-Mills.

También construimos la acción invariante con hasta cuatro derivadas de los multipletes de $O(10, 10 + n_g)$ y términos bilineales en fermiones, parametrizando la expresión manifiestamente covariante bajo dualidad (5.2.21), en términos de los campos que obedecen reglas de transformación de supersimetría con el conjunto mínimo de deformaciones. Como era de esperar, las interacciones de los campos bosónicos coinciden con los resultados obtenidos de las amplitudes de dispersión de la cuerda heterótica, a menos de términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento.

Las extensiones supersimétricas de las formas de Chern-Simons de Yang-Mills y Lorentz se han construido utilizando el método de Noether. En particular, en [94,95] la obtienen a partir de la acción de orden cero (3.5.23), utilizando la simetría entre las conexiones de *gauge* y de espín con torsión. Los términos de tres derivadas que son independientes de los campos de Yang-Mills en la acción (5.3.43) coinciden con esos resultados. Sin embargo, los términos dependientes de los campos de Yang-Mills no coinciden con las expresiones correspondientes de los invariantes propuestos en esas referencias, ya que las deformaciones de las reglas de transformación difieren en términos dependientes de los campos de Yang-Mills.

Hasta donde sabemos, las interacciones de baja energía de tres derivadas que involucran fermiones no se han construido directamente a partir de la teoría de cuerdas. En este sentido, hacemos énfasis en que la acción y las reglas de transformación que hemos obtenido se derivan de un formalismo exacto, supersimétrico, y covariante bajo dualidad, en el cual se evita un procedimiento iterativo que solo garantiza consistencia hasta un orden dado, como el presentado en [94,95]. Además, la supersimetría es manifiesta a todos los órdenes, y las reducciones dimensionales preservarán la dualidad T, esperada de la teoría de cuerdas. Más aún, la transformación de Green-Schwarz generalizada restringe fuertemente las modificaciones a las reglas de transformación de supersimetría de orden cero y, en particular, no permite las propuestas de [94,95]. Como se argumentó, esto no implica que estas últimas estén en conflicto con la

teoría de cuerdas. Para establecer si son compatibles con la dualidad T, la acción invariante correspondiente debería reducirse dimensionalmente.

Capítulo 6

Supersimetría y el *ansatz* de Kerr-Schild en Teoría Doble de Campos

En el marco de la Relatividad General, una de las técnicas más poderosas para encontrar soluciones exactas es el *ansatz* de Kerr-Schild [120, 121]. Este método consiste en deformar una métrica de fondo, solución de la teoría, con una perturbación exacta y lineal construida a partir de vectores nulos y geodésicos. Dicha estructura permite linealizar las ecuaciones de Einstein e identificar soluciones no triviales, como el agujero negro de Kerr. Esta idea fue generalizada al contexto de la Teoría Doble de Campos en [122], y extendida posteriormente en una serie de trabajos [123–127], mostrando que el *ansatz* de Kerr-Schild generalizado (gKSA) permite obtener soluciones exactas mediante la perturbación simultánea del contenido bosónico del sector NS-NS, preservando la linealidad de las ecuaciones de movimiento, incluso cuando los campos perturbados presentan no linealidades.

En este capítulo se presentan los resultados de [3, 4]. En particular, en [3] se aplica el gKSA a la extensión supersimétrica con $\mathcal{N} = 1$ de la TDC, permitiendo extender el *ansatz* al sector fermiónico de la teoría. Además, en [4] se explora la incorporación de correcciones de orden superior en derivadas, mostrando que es posible compatibilizar el gKSA con deformaciones a primer orden en α' . No obstante, las ecuaciones de movimiento resultantes adquieren una complejidad estructural considerable, lo que representa un desafío tanto para la obtención como

para el análisis de soluciones explícitas.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la primera sección se revisa el *ansatz* de Kerr-Schild tanto en Relatividad General como en la TDC, destacando sus similitudes y diferencias. A continuación se presenta su extensión supersimétrica, analizando la perturbación de los campos fermiónicos y la estructura de las ecuaciones de Killing para espinores, en el marco de la TDCs. Luego se incorporan correcciones de primer orden en α' compatibles con el gKSA, considerando las deformaciones asociadas a la transformación de Green-Schwarz. Por último, se discute cómo este formalismo permite extender el programa de la copia doble clásica, incluyendo el sector fermiónico y las correcciones en derivadas propias de la teoría heterótica.

6.1 El *ansatz* de Kerr-Schild

En esta sección presentamos algunos aspectos relevantes del *ansatz* de Kerr-Schild. Comenzamos revisando su formulación en el contexto de la relatividad general y luego extendemos la discusión a la TDC, resaltando las principales diferencias y las características novedosas que surgen en el marco covariante bajo dualidad.

6.1.1 En Relatividad General

El *ansatz* de Kerr-Schild consiste en definir la métrica del espacio-tiempo D -dimensional $g_{\mu\nu}$, como una perturbación a una métrica de fondo $\tilde{g}_{\mu\nu}$, la cual satisface las ecuaciones de Einstein en el vacío (no necesariamente es la métrica de Minkowski)

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \kappa\varphi l_\mu l_\nu. \quad (6.1.1)$$

Aquí, κ es un parámetro de expansión, φ una función escalar que depende de las coordenadas, y l_μ un vector nulo¹ respecto a g y \tilde{g}

$$g^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = \tilde{g}^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = 0. \quad (6.1.2)$$

La nulidad de l_μ respecto de ambas métricas impone fuertes restricciones sobre el término de perturbación, lo que conlleva importantes simplificaciones. Por ejemplo, los índices de l_μ suben

¹Un vector nulo no tiene norma pero sí dirección. Es ortogonal a sí mismo, ya que $l \cdot l = 0$.

y bajan tanto con g como con \tilde{g}

$$l_\mu = g_{\mu\nu} l^\nu = \tilde{g}_{\mu\nu} l^\nu, \quad l^\mu = g^{\mu\nu} l_\nu = \tilde{g}^{\mu\nu} l_\nu.$$

Una de las consecuencias más relevantes es la expresión que se obtiene para la métrica inversa. Para calcularla, comenzamos con

$$g^{\mu\nu} = (\tilde{g}_{\mu\nu} + \kappa\varphi l_\mu l_\nu)^{-1} = (\delta^\rho_\nu + \kappa\varphi l^\rho l_\nu)^{-1} \tilde{g}^{\mu\rho},$$

que tras una expansión en serie de Taylor se convierte en

$$(\delta^\rho_\nu + \kappa\varphi l^\rho l_\nu)^{-1} = \left(\delta^\rho_\nu - \kappa\varphi l^\rho l_\nu + \kappa^2\varphi^2 l^\rho l^\lambda l_\lambda l_\nu + \dots \right),$$

que debido a la condición de nulidad (6.1.2) anula todos los términos de orden $\mathcal{O}(\kappa^2)$. Esto conduce a la expresión compacta

$$g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} - \kappa\varphi l^\mu l^\nu. \quad (6.1.3)$$

Así, la métrica inversa mantiene una estructura simple, estrechamente relacionada con la métrica de fondo. Además, al considerar el *ansatz* de Kerr-Schild el determinante de la métrica permanece invariante

$$\det(g) = \det(\tilde{g}), \quad (6.1.4)$$

lo cual simplifica el tratamiento de formas de volumen y la evaluación de invariantes de curvatura.

Quizas la principal ventaja del *ansatz* de Kerr-Schild es su capacidad para linearizar las ecuaciones de Einstein. Esto es consecuencia de una condición de consistencia sobre el vector nulo, el cual debe satisfacer también la ecuación geodésica respecto de ambas métricas

$$l^\mu \tilde{\nabla}_\mu l_\nu = 0, \quad l^\mu \nabla_\mu l_\nu = 0. \quad (6.1.5)$$

Estas condiciones geodésicas aseguran que la perturbación no introduce no linealidades adicionales, lo cual facilita la resolución de las ecuaciones de Einstein. Considerando conjuntamente la nulidad y la condición geodésica sobre l_μ , la ecuación de Einstein en el vacío toma la forma

$$R_{\mu\nu} = \kappa R_{\mu\nu}^{(1)} + \kappa^2 \varphi l_\mu l^\rho R_{\rho\nu}^{(1)} = 0, \quad (6.1.6)$$

donde $R^{(1)}$ denota los términos lineales en κ ,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \kappa \tilde{\nabla}^\rho \left(\tilde{\nabla}_\mu(\varphi l_\nu l_\rho) + \tilde{\nabla}_\nu(\varphi l_\mu l_\rho) - \tilde{\nabla}_\rho(\varphi l_\mu l_\nu) \right). \quad (6.1.7)$$

Por lo tanto, la ecuación de Einstein se reduce a la condición $R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$.

6.1.2 En Teoría Doble de Campos

Una generalización del *ansatz* de Kerr-Schild a la Teoría Doble de Campos (TDC) fue propuesta en [122]. Esta consiste en perturbar la métrica generalizada con un par de vectores de $O(D, D)$

$$H_{MN} = \tilde{H}_{MN} + \kappa\varphi (K_M \bar{K}_N + \bar{K}_M K_N), \quad (6.1.8)$$

siendo κ el parámetro de expansión, mientras que φ es una función escalar que ahora depende de las coordenadas dobles.

La métrica generalizada de fondo \tilde{H}_{MN} debe satisfacer la condición

$$\eta_{MN} = \tilde{H}_{MP} \eta^{PQ} \tilde{H}_{QN}, \quad (6.1.9)$$

mientras que los vectores K y \bar{K} cumplen condiciones de nulidad

$$K_M K^M = 0, \quad \bar{K}_M \bar{K}^M = 0, \quad (6.1.10)$$

y condiciones de quiralidad sobre el fondo

$$\tilde{P}_{MN} K^N = K_M, \quad \tilde{\bar{P}}_{MN} \bar{K}^N = \bar{K}_M, \quad K_M \bar{K}^M = 0, \quad (6.1.11)$$

donde \tilde{P} y $\tilde{\bar{P}}$ son los proyectores (3.1.26) definidos en términos de \tilde{H} . Bajo estas condiciones, el *ansatz* para la métrica (6.1.8) satisface automáticamente la restricción (6.1.9), sin necesidad de truncamientos. Además, las condiciones de quiralidad (6.1.11) siguen siendo válidas al reemplazar los proyectores de fondo por los proyectores definidos por la métrica generalizada perturbada.

Para comparar esta construcción con el *ansatz* convencional de Kerr-Schild, parametrizamos los vectores K y \bar{K} en términos de vectores D -dimensionales l^μ y \bar{l}^μ

$$K^M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} l^\mu \\ (-\tilde{g}_{\mu\nu} + \tilde{b}_{\mu\nu}) l^\nu \end{pmatrix}, \quad \bar{K}^M = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{l}^\mu \\ (\tilde{g}_{\mu\nu} + \tilde{b}_{\mu\nu}) \bar{l}^\nu \end{pmatrix}. \quad (6.1.12)$$

Sustituyendo esta parametrización en (6.1.10), se obtiene que l^μ y \bar{l}^μ también son vectores nulos

$$l^\mu \tilde{g}_{\mu\nu} l^\nu = l^\mu l_\mu = 0, \quad \bar{l}^\mu \tilde{g}_{\mu\nu} \bar{l}^\nu = \bar{l}^\mu \bar{l}_\mu = 0, \quad (6.1.13)$$

pero no son ortogonales entre sí, $l \cdot \bar{l} = l^\mu \bar{l}_\mu = l^\mu \bar{l}^\nu \tilde{g}_{\mu\nu} \neq 0$. Aquí, los índices suben y bajan usando la métrica de fondo \tilde{g} .

Parametrizando la métrica generalizada (6.1.8) según (3.1.3), se obtienen la métrica y el campo de Kalb-Ramond

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{\kappa\varphi}{1 - \frac{1}{2}\kappa\varphi(l \cdot \bar{l})} l_{(\mu} \bar{l}_{\nu)}, \quad (6.1.14)$$

$$b_{\mu\nu} = \tilde{b}_{\mu\nu} + \frac{\kappa\varphi}{1 - \frac{1}{2}\kappa\varphi(l \cdot \bar{l})} l_{[\mu} \bar{l}_{\nu]}, \quad (6.1.15)$$

así como la métrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} - \kappa\varphi l^{(\mu} \bar{l}^{\nu)}. \quad (6.1.16)$$

Una diferencia clave respecto al *ansatz* convencional es que esta generalización permite perturbar tanto la métrica como el campo de Kalb-Ramond, debido a la presencia de dos vectores nulos independientes. Además, se cumple que

$$l_{\mu} g^{\mu\nu} \bar{l}_{\nu} \neq l_{\mu} \tilde{g}^{\mu\nu} \bar{l}_{\nu}. \quad (6.1.17)$$

Ambos enfoques coinciden si se identifica $l^{\mu} = \bar{l}^{\mu}$, en cuyo caso $l \cdot \bar{l} \rightarrow l \cdot l = 0$, recuperando la forma usual

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \kappa\varphi l_{\mu} l_{\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} - \kappa\varphi l^{\mu} l^{\nu}, \quad (6.1.18)$$

mientras que $\tilde{b}_{\mu\nu}$ permanece sin perturbar. El determinante de la métrica está dado por

$$\det g = (\det \tilde{g}) \left(1 - \frac{1}{2}\kappa\varphi(l \cdot \bar{l}) \right)^{-2}, \quad (6.1.19)$$

lo cual reproduce el resultado clásico cuando $l = \bar{l}$. Cabe destacar que, a diferencia del caso original, tanto la métrica como el campo de Kalb-Ramond presentan una dependencia no lineal en κ , aunque las ecuaciones de movimiento seguirán siendo lineales.

Con el objetivo de incorporar supersimetría y correcciones α' , es necesario estudiar el *frame* generalizado. Una propuesta compatible con las restricciones (3.2.2) y con la métrica (6.1.8) es

$$E_M^{\bar{a}} = \tilde{E}_M^{\bar{a}} + \frac{1}{2}\kappa\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}^{\bar{a}} \tilde{E}_M^{\underline{b}}, \quad (6.1.20)$$

$$E_M^{\underline{a}} = \tilde{E}_M^{\underline{a}} - \frac{1}{2}\kappa\varphi \bar{K}_{\bar{b}} K^{\underline{a}} \tilde{E}_M^{\bar{b}}, \quad (6.1.21)$$

donde \tilde{E}_M^A representa el fondo, mientras que los vectores planos se definen como

$$K^{\underline{a}} = \tilde{E}_M^{\underline{a}} K^M, \quad \bar{K}^{\bar{a}} = \tilde{E}_M^{\bar{a}} \bar{K}^M. \quad (6.1.22)$$

La parametrización de ambas componentes del *frame* conduce a

$$e_{\mu}^{\underline{a}} = \tilde{e}_{\mu}^{\underline{a}} + \frac{\kappa\varphi}{2 - \kappa\varphi(l \cdot \bar{l})} l_{\mu} \bar{l}^{\nu} \tilde{e}_{\nu}^{\underline{a}}, \quad e_{\mu}^{\bar{a}} = \tilde{e}_{\mu}^{\bar{a}} + \frac{\kappa\varphi}{2 - \kappa\varphi(l \cdot \bar{l})} \bar{l}_{\mu} l^{\nu} \tilde{e}_{\nu}^{\bar{a}}, \quad (6.1.23)$$

siendo los *vielbeins* inversos

$$e^{\mu a} = \tilde{e}^{\mu a} - \frac{1}{2}\kappa\varphi\bar{l}^{\mu\nu}\tilde{e}_{\nu}{}^a, \quad e^{\mu\bar{a}} = \tilde{e}^{\mu\bar{a}} - \frac{1}{2}\kappa\varphi l^{\mu\nu}\tilde{e}_{\nu}{}^{\bar{a}}. \quad (6.1.24)$$

Estos objetos satisfacen el fijado de *gauge*

$$\tilde{e}_{\mu}{}^a g_{ab}\tilde{e}_{\nu}{}^b = \tilde{e}_{\mu}{}^{\bar{a}} g_{\bar{a}\bar{b}}\tilde{e}_{\nu}{}^{\bar{b}} = \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad e_{\mu}{}^a g_{ab}e_{\nu}{}^b = e_{\mu}{}^{\bar{a}} g_{\bar{a}\bar{b}}e_{\nu}{}^{\bar{b}} = g_{\mu\nu}, \quad (6.1.25)$$

necesario para identificar el *vielbein* de supergravedad y reducir el grupo de Lorentz doble al grupo de Lorentz convencional.

Para completar el análisis del contenido de campos en TDC, es necesario estudiar el papel del dilatón generalizado en presencia del *ansatz*. El dilatón de la TDC, d , no está sujeto a restricciones y no tiene por qué ser lineal. En [122] se propuso

$$d = \tilde{d} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n d^{(n)}, \quad (6.1.26)$$

donde \tilde{d} es el dilatón de fondo y $d^{(n)}$ son perturbaciones dependientes de las coordenadas dobles. En lo que sigue consideraremos solamente contribuciones de $d^{(n)}$ constantes.

Para estudiar las ecuaciones de movimiento (3.2.25), resulta esencial examinar la modificación de los flujos generalizados ante el *ansatz*. Como paso preliminar, listamos algunas condiciones útiles que derivan de la nulidad

$$K^a \partial_{\bar{b}} K_a = 0, \quad \bar{K}^{\bar{a}} \partial_{\bar{b}} \bar{K}_{\bar{a}} = 0. \quad (6.1.27)$$

También consideramos la generalización al espacio doble de la condición geodésica (6.1.5)

$$\begin{aligned} K^a \tilde{\nabla}_{\underline{a}} \bar{K}_{\bar{b}} = 0 &\quad \longrightarrow \quad K^a \partial_{\underline{a}} \bar{K}_{\bar{b}} = \tilde{F}_{\underline{a}\bar{b}c} K^a \bar{K}^{\bar{c}}, \\ \bar{K}^{\bar{a}} \tilde{\nabla}_{\bar{a}} K_{\underline{b}} = 0 &\quad \longrightarrow \quad \bar{K}^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}} K_{\underline{b}} = \tilde{F}_{\bar{a}\underline{b}c} \bar{K}^{\bar{a}} K^c. \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

Bajo estas condiciones, los componentes relevantes de los flujos generalizados se vuelven

$$F_{\underline{a}} = \tilde{F}_{\underline{a}} - \frac{1}{2}\kappa\partial_{\bar{b}}(\varphi\bar{K}^{\bar{b}}K_{\underline{a}}) - \frac{1}{2}\kappa\varphi\bar{K}^{\bar{b}}K_{\underline{a}}\tilde{F}_{\bar{b}}, \quad (6.1.29)$$

$$F_{\underline{abc}} = \tilde{F}_{\underline{abc}} - \frac{3}{2}\kappa\varphi\bar{K}^{\bar{d}}K_{[\underline{a}}\tilde{F}_{\underline{bc]}\bar{d}}, \quad (6.1.30)$$

$$F_{\bar{abc}} = \tilde{F}_{\bar{abc}} - \kappa\partial_{[\underline{b}}(\varphi K_{\underline{c]}}\bar{K}_{\bar{a}}) - \kappa\varphi\bar{K}^{\bar{d}}K_{[\underline{b}}\tilde{F}_{\underline{c]}\bar{a}\bar{d}} + \frac{\kappa\varphi}{2}K^{\underline{d}}\bar{K}_{\bar{a}}\tilde{F}_{\underline{abc}}, \quad (6.1.31)$$

$$F_{\bar{abc}} = \tilde{F}_{\bar{abc}} + \kappa\partial_{[\bar{b}}(\varphi\bar{K}_{\bar{c]}}K_{\underline{a}}) + \kappa\varphi K^{\underline{d}}\bar{K}_{[\bar{b}}\tilde{F}_{\underline{c]}\bar{a}\bar{d}} - \frac{\kappa\varphi}{2}\bar{K}^{\bar{d}}K_{\underline{a}}\tilde{F}_{\bar{abc}}. \quad (6.1.32)$$

En en [122] se mostró que las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir del gKSA incluyen términos cuadráticos en el parámetro de perturbación. Para la ecuación de movimiento del

dilatón generalizado estos términos se anulan al imponer las condiciones (6.1.28) y asumir que las perturbaciones $d^{(n)}$ son constantes, obteniendo así

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} = & \tilde{\mathcal{R}} - \kappa \partial_{\underline{a}} \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K^{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{b}} \right) - \kappa \partial_{\underline{a}} \left(\varphi K^{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{b}} \right) \tilde{F}_{\underline{b}} - \kappa \varphi K^{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{b}} \partial_{\underline{a}} \tilde{F}_{\underline{b}} \\
& - \kappa \varphi K^{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{b}} \partial_{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{a}} - \kappa \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K^{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{b}} \right) \tilde{F}_{\underline{a}} - \kappa \varphi K^{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{a}} \tilde{F}_{\underline{b}} \\
& - \frac{1}{2} \kappa \varphi K^{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{a}}{}^{\underline{cd}} \tilde{F}_{\underline{b}\underline{cd}} + 2\kappa \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K_{\underline{c}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) \tilde{F}^{\underline{abc}} + 2\kappa \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{cad}} \tilde{F}^{\underline{abc}},
\end{aligned} \tag{6.1.33}$$

mientras que para el *frame* generalizado la ecuación de movimiento se puede escribir de manera esquemática como $\mathcal{R}_{\underline{ab}} = \tilde{\mathcal{R}}_{\underline{ab}} + \kappa \mathcal{R}_{\underline{ab}}^{(1)} + \kappa^2 \mathcal{R}_{\underline{ab}}^{(2)}$, con

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\underline{ab}}^{(1)} = & -\frac{1}{2} \partial_{\underline{a}} \partial_{\underline{c}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{c}} K_{\underline{b}} \right) + \frac{1}{2} \partial_{\underline{c}} \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K^{\underline{c}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) - \frac{1}{2} \partial_{\underline{c}} \partial^{\underline{c}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) - \frac{1}{2} \partial_{\underline{a}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{c}} K_{\underline{b}} \right) \tilde{F}_{\underline{c}} \\
& + \frac{1}{2} \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K_{\underline{c}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) \tilde{F}^{\underline{c}} - \frac{1}{2} \partial_{\underline{c}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) \tilde{F}^{\underline{c}} - \frac{1}{2} \partial_{\underline{c}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \right) \tilde{F}_{\underline{bad}} - \frac{1}{2} \partial_{\underline{c}} \left(\varphi K^{\underline{d}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) \tilde{F}_{\underline{db}}{}^{\underline{c}} \\
& - \frac{1}{2} \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K^{\underline{c}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) \tilde{F}_{\underline{cda}} + \frac{1}{2} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{a}} K_{\underline{c}} \right) \tilde{F}_{\underline{b}}{}^{\underline{cd}} - \frac{1}{2} \partial_{\underline{a}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{d}} K_{\underline{c}} \right) \tilde{F}_{\underline{b}}{}^{\underline{cd}} + \frac{1}{2} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \right) \tilde{F}_{\underline{abc}} \\
& - \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{c}} K_{\underline{b}} \partial_{\underline{a}} \tilde{F}_{\underline{c}} + \frac{1}{2} \varphi K^{\underline{c}} \bar{K}_{\underline{a}} \partial_{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{b}} + \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{b}} \partial_{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{ad}}{}^{\underline{c}} - \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \partial_{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{bad}} - \frac{1}{2} \varphi K^{\underline{d}} \bar{K}_{\underline{a}} \partial_{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{db}}{}^{\underline{c}} \\
& + \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \partial_{\underline{d}} \tilde{F}_{\underline{abc}} + \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{cad}}{}^{\underline{c}} - \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{bad}}{}^{\underline{c}} - \frac{1}{2} \varphi K^{\underline{d}} \bar{K}_{\underline{a}} \tilde{F}_{\underline{dbc}}{}^{\underline{c}} \\
& + \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{abc}} \tilde{F}_{\underline{d}} - \frac{1}{2} \varphi \bar{K}_{\underline{e}} K_{\underline{b}} \tilde{F}^{\underline{cde}} \tilde{F}_{\underline{cda}} + \frac{1}{2} \varphi \bar{K}_{\underline{e}} K^{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{b}}{}^{\underline{de}} \tilde{F}_{\underline{cda}} + \frac{1}{2} \varphi K^{\underline{e}} \bar{K}^{\underline{d}} \tilde{F}_{\underline{eb}}{}^{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{cda}} \\
& + \frac{1}{2} \varphi K^{\underline{e}} \bar{K}_{\underline{d}} \tilde{F}_{\underline{ace}} \tilde{F}_{\underline{b}}{}^{\underline{cd}} - \frac{1}{2} \varphi K^{\underline{e}} \bar{K}_{\underline{a}} \tilde{F}_{\underline{dce}} \tilde{F}_{\underline{b}}{}^{\underline{cd}} - \frac{1}{2} \varphi \bar{K}^{\underline{e}} K_{\underline{c}} \tilde{F}_{\underline{eda}} \tilde{F}_{\underline{b}}{}^{\underline{cd}},
\end{aligned} \tag{6.1.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\underline{ab}}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{a}} K_{\underline{c}} \right) \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K^{\underline{c}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) + \frac{1}{4} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{a}} K_{\underline{c}} \right) \partial^{\underline{c}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) + \frac{1}{4} \partial_{\underline{a}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{d}} K_{\underline{c}} \right) \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K^{\underline{c}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) \\
& - \frac{1}{4} \partial_{\underline{a}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{d}} K_{\underline{c}} \right) \partial^{\underline{c}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) + \frac{1}{4} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \right) \partial_{\underline{c}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) - \frac{1}{4} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \right) \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K_{\underline{c}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) \\
& - \frac{1}{4} \varphi K^{\underline{d}} \bar{K}_{\underline{a}} \partial_{\underline{d}} \partial_{\underline{c}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{c}} K_{\underline{b}} \right) - \frac{1}{4} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \partial_{\underline{d}} \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K_{\underline{c}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) + \frac{1}{4} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K^{\underline{c}} \partial_{\underline{d}} \partial_{\underline{c}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) \\
& - \frac{1}{4} \varphi \bar{K}^{\underline{e}} K^{\underline{c}} \partial_{\underline{e}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{b}} \right) \tilde{F}_{\underline{cad}} - \frac{1}{4} \varphi \bar{K}_{\underline{e}} K_{\underline{b}} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{a}} K_{\underline{c}} \right) \tilde{F}^{\underline{cde}} + \frac{1}{4} \varphi \bar{K}_{\underline{e}} K_{\underline{b}} \partial_{\underline{a}} \left(\varphi \bar{K}_{\underline{d}} K_{\underline{c}} \right) \tilde{F}^{\underline{cde}} \\
& + \frac{1}{4} \varphi K^{\underline{e}} \bar{K}_{\underline{a}} \partial_{\underline{b}} \left(\varphi K^{\underline{c}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) \tilde{F}_{\underline{dce}} - \frac{1}{4} \varphi K^{\underline{e}} \bar{K}_{\underline{a}} \partial^{\underline{e}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) \tilde{F}_{\underline{dce}} - \frac{1}{4} \varphi \bar{K}^{\underline{e}} K_{\underline{c}} \partial^{\underline{e}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}^{\underline{d}} \right) \tilde{F}_{\underline{eda}} \\
& - \frac{1}{4} \varphi \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{b}} \partial_{\underline{e}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{e}} K^{\underline{c}} \right) \tilde{F}_{\underline{cad}} - \frac{1}{4} \varphi K^{\underline{d}} \bar{K}_{\underline{a}} \partial_{\underline{d}} \left(\varphi \bar{K}^{\underline{c}} K_{\underline{b}} \right) \tilde{F}_{\underline{c}} + \frac{1}{4} \varphi \bar{K}^{\underline{e}} K^{\underline{c}} \partial_{\underline{c}} \left(\varphi K_{\underline{b}} \bar{K}_{\underline{a}} \right) \tilde{F}_{\underline{e}} \\
& - \frac{1}{4} \varphi^2 K^{\underline{d}} \bar{K}_{\underline{a}} \bar{K}^{\underline{e}} K_{\underline{b}} \partial_{\underline{d}} \tilde{F}_{\underline{c}} - \frac{1}{4} \varphi^2 \bar{K}^{\underline{e}} K^{\underline{c}} \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{b}} \partial_{\underline{e}} \tilde{F}_{\underline{cad}} + \frac{1}{4} \varphi^2 K^{\underline{e}} \bar{K}_{\underline{a}} \bar{K}_{\underline{f}} K_{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{dce}} \tilde{F}^{\underline{cdf}} \\
& + \frac{1}{4} \varphi^2 \bar{K}^{\underline{e}} K_{\underline{c}} \bar{K}_{\underline{f}} K_{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{eda}} \tilde{F}^{\underline{cdf}} - \frac{1}{4} \varphi^2 \bar{K}^{\underline{e}} K^{\underline{c}} \bar{K}^{\underline{d}} K_{\underline{b}} \tilde{F}_{\underline{cad}} \tilde{F}_{\underline{e}}.
\end{aligned} \tag{6.1.35}$$

Vemos que la ecuación de movimiento del *frame* generalizado contiene términos cuadráticos en κ , incluso cuando consideramos contribuciones constantes del dilatón, y que, contrario a lo que pasa en relatividad general, no es posible escribir dichas contribuciones en función de las de

primer orden [4], es decir, no existen coeficientes a_1, a_2 , tal que podamos escribir

$$\mathcal{R}_{\bar{a}\bar{b}}^{(2)} = a_1 \kappa \bar{K}_{\bar{a}} \bar{K}^{\bar{c}} \mathcal{R}_{\bar{c}\bar{b}}^{(1)} + a_2 \kappa K_{\bar{b}} K^{\underline{c}} \mathcal{R}_{\bar{a}\underline{c}}^{(1)}.$$

Así, la aplicación del gKSA a las ecuaciones de movimiento de la TDC nos muestra, sin ninguna sorpresa, que la estructura del espacio doble es un poco más complicada que la del espacio D -dimensional. Sin embargo, es posible recuperar la linealidad de las ecuaciones de movimiento a nivel de supergravedad manteniendo los vectores l y \bar{l} , rompiendo el grupo de simetría $O(D, D)$ e imponiendo las ecuaciones de movimiento de los campos, como se demostró en [122].

6.2 Extensión supersimétrica del gKSA

En esta sección se presentan los resultados de [3], donde se analiza la compatibilidad del gKSA con la estructura supersimétrica de la Teoría Doble de Campos con $\mathcal{N} = 1$. Como en los capítulos previos, se considerará el caso $D = 10$. Se muestra que las propiedades fundamentales del gKSA se preservan al extender el formalismo al sector fermiónico, y que la supersimetría impone fuertes restricciones sobre las posibles deformaciones de los campos. En primer lugar, se estudian las perturbaciones fermiónicas inducidas por el gKSA, en paralelo con el tratamiento del sector bosónico. Luego, se introduce una alternativa basada en las ecuaciones de Killing para espinores, que resultan especialmente útiles para construir soluciones supersimétricas. Finalmente, se analizan ejemplos concretos que ilustran la eficacia del método para generar soluciones no triviales que preservan parte de la supersimetría.

6.2.1 Perturbación de los campos

Para extender el *ansatz* de Kerr-Schild generalizado al marco de la TDCs, es necesario incorporar los campos fermiónicos: el gravitino generalizado $\Psi_{\bar{a}}$ y el dilatino generalizado ϱ . Al igual que en el caso del dilatón generalizado d , no existen restricciones a priori sobre la forma de sus perturbaciones, más allá de las simetrías propias de cada campo. Considerando esto, se propone la siguiente expansión en el parámetro κ

$$\Psi_{\bar{a}} = \tilde{\Psi}_{\bar{a}} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \Theta_{\bar{a}}^{(n)}, \quad \varrho = \tilde{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n p^{(n)}, \quad (6.2.1)$$

donde $\Theta_{\bar{a}}^{(n)}$ y $p^{(n)}$ son los términos de perturbación a cada orden. Ambos campos transforman como escalares bajo $O(10, 10)$ y bajo difeomorfismos generalizados, y como espinores de $O(9, 1)_L$. Adicionalmente, $\Theta_{\bar{a}}^{(n)}$ transforma como un vector bajo $O(1, 9)_R$, mientras que $p^{(n)}$ es escalar respecto de ese subgrupo.

El objetivo es determinar si la supersimetría impone restricciones sobre estas expansiones en presencia del gKSA. Para ello, analizamos la perturbación de las transformaciones supersimétricas (3.3.7), las cuales son satisfechas automáticamente por los campos de fondo. Consideramos también las condiciones que acompañan al gKSA: la nulidad de los vectores y la condición geodésica, además de la constancia de las perturbaciones del dilatón $d^{(n)}$.

La transformación de la componente E_M^a del *frame* generalizado² conduce a

$$\delta E_M^a \rightarrow \kappa \delta (\varphi K^a \bar{K}_{\bar{b}}) \tilde{E}_M^{\bar{b}} = \kappa^n \bar{\epsilon} \gamma^a \Theta_{\bar{b}}^{(n)} \tilde{E}_M^{\bar{b}} + \tilde{E}_M^{\bar{b}} \Lambda_{\bar{b}}^a, \quad (6.2.2)$$

donde el segundo término corresponde a una contribución al parámetro de Lorentz dada por $\Lambda_{\bar{a}\bar{b}} = \kappa \varphi \bar{\epsilon} \gamma_{[\bar{a}} \tilde{\Psi}^{\bar{c}} K_{\bar{b}]} \bar{K}_{\bar{c}}$. Enfocándonos en la parte supersimétrica se obtiene

$$\kappa \delta (\varphi K^a \bar{K}^{\bar{b}}) = \kappa^n \bar{\epsilon} \gamma^a \Theta^{(n)\bar{b}}. \quad (6.2.3)$$

Esta expresión muestra que no es posible obtener transformaciones independientes para los vectores K y \bar{K} , sino únicamente para la combinación que perturba al *frame*. Además, se ve que esta relación es consistente solamente si $n = 1$, lo que implica que la supersimetría restringe la forma de la perturbación del gravitino generalizado, limitándola a ser lineal

$$\Psi_{\bar{a}} = \tilde{\Psi}_{\bar{a}} + \kappa \Theta_{\bar{a}}. \quad (6.2.4)$$

Al analizar la transformación del gravitino, y considerando la perturbación (6.2.4), se obtiene

$$\delta \Psi_{\bar{a}} \rightarrow \kappa \delta \Theta_{\bar{a}} = \frac{1}{2} \kappa \varphi \bar{K}_{\bar{a}} K^b \partial_{\bar{b}} \epsilon + \frac{1}{4} F_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}^{(1)} \gamma^{bc} \epsilon, \quad (6.2.5)$$

donde $F_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}^{(1)}$ representa la parte de orden κ del flujo generalizado perturbado (6.1.31). Esto nos permite escribir

$$\delta \Theta_{\bar{a}} = \frac{1}{2} \varphi K^b \bar{K}_{\bar{a}} \tilde{\nabla}_{\bar{b}} \epsilon - \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_{\bar{b}} (\varphi K_{\bar{c}} \bar{K}_{\bar{a}}) \gamma^{bc} \epsilon, \quad (6.2.6)$$

donde $\tilde{\nabla}$ denota la derivada covariante construida exclusivamente con campos de fondo. Esta transformación resultará particularmente interesante en la siguiente subsección.

²Considerar la componente $E_M^{\bar{a}}$ lleva al mismo resultado, salvo por la corrección del parámetro $\Lambda_{\bar{a}\bar{b}}$.

La transformación del dilatón generalizado, cuyas perturbaciones no afectan la dinámica de la teoría, conduce a $p^{(n)} = 0$. Sin embargo, al analizar la transformación supersimétrica del dilatino $\varrho = \tilde{\varrho}$ se obtiene

$$\tilde{\nabla}_{\bar{b}} \left(\varphi \bar{K}^{\bar{b}} K_{\underline{a}} \right) \gamma^{\underline{a}} \epsilon = 0, \quad (6.2.7)$$

condición que también adquirirá relevancia en la sección siguiente.

Finalmente, es posible preguntarse qué ocurre si se relaja la condición de constancia para las perturbaciones del dilatón. En ese caso, la transformación del gravitino (6.2.6) permanece lineal, pero se introducen vínculos adicionales entre los flujos generalizados [3]. En ese escenario, tanto las perturbaciones del dilatón como del dilatino permanecen en principio arbitrarias, siempre que estén al mismo orden en la expansión en κ . En general, no es común considerar perturbaciones explícitas de los campos fermiónicos, ya que su comportamiento está determinado principalmente por sus transformaciones supersimétricas. En cambio, resulta más habitual trabajar con las ecuaciones de Killing para los espinores, las cuales encapsulan de manera más directa las condiciones para la preservación de supersimetría. En la siguiente subsección abordaremos este enfoque, y mostraremos cómo las ecuaciones de Killing se ven afectadas al considerar el gKSA.

6.2.2 Ecuaciones de Killing para espinores

Las ecuaciones de Killing para espinores (KSE, por sus siglas en inglés) establecen las condiciones necesarias para que las transformaciones supersimétricas de los campos fermiónicos se anulen. En el contexto de la TDCs, dichas condiciones adoptan la forma

$$\delta \Psi_{\bar{a}} = \nabla_{\bar{a}} \epsilon = 0, \quad \delta \varrho = -\gamma^{\underline{a}} \nabla_{\underline{a}} \epsilon = 0, \quad (6.2.8)$$

es decir, se requiere que se anulen las variaciones dadas en (3.3.7). Si bien las soluciones de las KSE suelen satisfacer también las ecuaciones de movimiento, el recíproco no siempre se cumple. Las configuraciones que verifican ambas condiciones se denominan soluciones supersimétricas.

Con el objetivo de analizar la estructura de las KSE, exploramos cómo el *ansatz* de Kerr-Schild generalizado permite linealizar estas ecuaciones, de manera análoga a lo que ocurre con las ecuaciones de movimiento. Las KSE que surgen a partir de las transformaciones de supersimetría del gravitino y del dilatino se expresan como

$$\nabla_{\bar{a}} \epsilon = D_{\bar{a}} \epsilon + \frac{1}{4} F_{\underline{a}\underline{b}\underline{c}} \gamma^{\underline{b}\underline{c}} \epsilon = 0, \quad (6.2.9)$$

$$-\gamma^a \nabla_a \epsilon = -\gamma^a D_a \epsilon - \frac{1}{12} F_{abc} \gamma^{abc} \epsilon - \frac{1}{2} F_a \gamma^a \epsilon = 0, \quad (6.2.10)$$

donde $D_a = \sqrt{2} E^M{}_A \partial_M$ representa una derivada plana definida a partir del *frame* perturbado $E^M{}_A$, el cual contiene la información tanto del *frame* de fondo como de su deformación.

Si el espinor ϵ es solución de las KSE en el fondo, es decir, si satisface

$$\tilde{\nabla}_{\bar{a}} \epsilon = \partial_{\bar{a}} \epsilon + \frac{1}{4} \tilde{F}_{\bar{a}bc} \gamma^{bc} \epsilon = 0, \quad (6.2.11)$$

$$-\gamma^a \tilde{\nabla}_a \epsilon = -\gamma^a \partial_a \epsilon - \frac{1}{12} \tilde{F}_{abc} \gamma^{abc} \epsilon - \frac{1}{2} \tilde{F}_a \gamma^a \epsilon = 0, \quad (6.2.12)$$

entonces es posible rastrear cómo actúa la deformación inducida por el gKSA sobre dichas ecuaciones. Esto conduce a las condiciones

$$\varphi K^b \bar{K}_{\bar{a}} \tilde{\nabla}_{\bar{b}} \epsilon - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{\bar{b}} (\varphi K_{\bar{c}} \bar{K}_{\bar{a}}) \gamma^{bc} \epsilon = 0, \quad (6.2.13)$$

y

$$\tilde{\nabla}_{\bar{b}} (\varphi \bar{K}^{\bar{b}} K_a) \gamma^a \epsilon = 0, \quad (6.2.14)$$

las cuales coinciden con las ecuaciones de Killing obtenidas en [122].

Estas expresiones están estrechamente relacionadas con los resultados obtenidos al perturbar los campos fermiónicos, como se discutió en la sección anterior. En particular, puede observarse que la KSE asociada al gravitino (6.2.13) coincide con la transformación supersimétrica de la perturbación del gravitino en el límite $\Theta_{\bar{a}} \rightarrow 0$. Por su parte, la ecuación (6.2.14) es precisamente la que se obtiene al considerar la transformación supersimétrica del dilatino bajo el gKSA, incluyendo las perturbaciones de todos los campos relevantes.

6.3 Incorporación de correcciones α'

El estudio de correcciones de orden superior en derivadas dentro del marco del *ansatz* de Kerr-Schild generalizado puede abordarse de manera natural considerando la acción de la TDC con términos a primer orden en α' , tal como fue propuesta en [118]. En dicho trabajo se construyó una acción covariante bajo $O(D, D)$ que incluye contribuciones con cuatro derivadas, y cuya forma general es

$$S = \int d^{2D} X e^{-2d} \left(\mathcal{R} + a \mathcal{R}^{(-)} + b \mathcal{R}^{(+)} \right), \quad (6.3.1)$$

donde \mathcal{R} representa el escalar de Ricci generalizado al orden más bajo en α' (3.2.22), mientras que $\mathcal{R}^{(+)}$ contiene términos de orden α' , dados explícitamente en (5.2.18). El término $\mathcal{R}^{(-)}$ se obtiene de $\mathcal{R}^{(+)}$ mediante una transformación \mathbb{Z}_2 , y los coeficientes a y b , proporcionales a α' , determinan el tipo de teoría en el límite de supergravedad (bosónica, heterótica, tipo II o HSZ) [118]. En particular, la elección $a = 0$, $b = \alpha'$ corresponde a la supergravedad heterótica, y fue el caso considerado en [4]. Al aplicar el gKSA en este marco, se obtuvo en [4] la forma perturbada del lagrangiano, que puede escribirse como

$$\mathcal{R}^{(+)} = \tilde{\mathcal{R}}^{(+)} + \kappa (T_0 + T_1 + T_2 + T_3) + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (6.3.2)$$

donde los términos T_i recogen las contribuciones de orden κ que resultan de la expansión, y se encuentran listados explícitamente en el Apéndice A de [4].

La acción (6.3.1) se obtuvo a partir de una generalización de la transformación de Green-Schwarz para el *frame* generalizado. Para que la deformación inducida por el gKSA sea consistente con dicha transformación, es necesario considerar su efecto tanto sobre el propio *frame* como sobre las derivadas planas y los flujos generalizados. En [118] se propuso la transformación de Green-Schwarz generalizada

$$\delta_{\Lambda}^{(1)} E_M^{\bar{a}} = \frac{\alpha'}{4} D^{\bar{a}} \Lambda^{\bar{c}\bar{d}} F_{\bar{b}\bar{c}\bar{d}} E_M^{\bar{b}}, \quad \delta_{\Lambda}^{(1)} E_M^a = -\frac{\alpha'}{4} D_{\bar{b}} \Lambda^{\bar{c}\bar{d}} F^{a\bar{c}\bar{d}} E_M^{\bar{b}}. \quad (6.3.3)$$

la cual recibe modificaciones inducidas por la presencia del gKSA.

Para que la deformación (6.3.2) sea compatible con esta transformación, deben cumplirse ciertas condiciones adicionales. En primer lugar, los flujos generalizados de fondo deben satisfacer

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{b}} (\varphi K_{\bar{c}} \bar{K}_{\bar{a}}) + \varphi \bar{K}^{\bar{d}} K_{\bar{b}} \tilde{F}_{\bar{c}\bar{d}\bar{a}} - \frac{\varphi}{2} K^{\bar{d}} \bar{K}_{\bar{a}} \tilde{F}_{\bar{d}\bar{b}\bar{c}} &= 0, \\ \partial_{\bar{b}} (\varphi \bar{K}_{\bar{c}} K_{\bar{a}}) + \varphi K^{\bar{d}} \bar{K}_{\bar{b}} \tilde{F}_{\bar{c}\bar{d}\bar{a}} - \frac{\varphi}{2} \bar{K}^{\bar{d}} K_{\bar{a}} \tilde{F}_{\bar{d}\bar{b}\bar{c}} &= 0. \end{aligned}$$

Además, los parámetros del grupo de Lorentz doble deben recibir correcciones a primer orden en α' , dadas por

$$\Lambda_{\underline{ab}} = -\frac{\alpha'}{4} \kappa \varphi \bar{K}_{\bar{e}} K_{\bar{a}} \partial_{\bar{e}} \Lambda^{\bar{c}\bar{d}} \tilde{F}_{\bar{b}\bar{c}\bar{d}}, \quad \Lambda_{\bar{a}\bar{b}} = -\frac{\alpha'}{4} \kappa \varphi K^{\bar{e}} \bar{K}_{\bar{a}} \partial_{\bar{b}} \Lambda^{\bar{c}\bar{d}} \tilde{F}_{\bar{e}\bar{c}\bar{d}}.$$

Con estas consideraciones, la transformación de Lorentz que recibe la perturbación del *frame* generalizado queda expresada como

$$\delta (\bar{K}^{\bar{a}} K_{\bar{b}}) = \frac{\alpha'}{4} \bar{K}^{\bar{a}} K^{\bar{e}} \partial_{\bar{e}} \Lambda^{\bar{c}\bar{d}} \tilde{F}_{\bar{b}\bar{c}\bar{d}}. \quad (6.3.4)$$

Esta transformación resulta crucial para asegurar la invariancia de la acción deformada bajo la simetría de Lorentz modificada, validando así la compatibilidad del *ansatz* de Kerr-Schild generalizado con la incorporación de correcciones a orden α' .

6.4 Relación con la Copia Doble Clásica

Según la conocida relación de Kawai–Lewellen–Tye (KLT) [128], las amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas pueden factorizarse en términos de amplitudes de cuerdas abiertas. A nivel de teoría de campos, esta propiedad se manifiesta en la relación de Bern–Carrasco–Johansson (BCJ) [129–131], que establece que las amplitudes gravitacionales pueden obtenerse como el cuadrado de amplitudes de Yang-Mills, mediante una correspondencia entre índices cinemáticos y de color.

Esta relación ha sido extendida del régimen cuántico al régimen clásico. En particular, se ha demostrado que ciertas soluciones de las ecuaciones de Einstein —como las obtenidas mediante el *ansatz* de Kerr-Schild convencional— pueden asociarse a soluciones de las ecuaciones de Maxwell o Yang-Mills linealizadas. Este es el contenido esencial de la **copia doble clásica** [132]. En este contexto, el vector nulo y geodésico del *ansatz* de Kerr-Schild l_μ , puede identificarse con un campo de *gauge* A_μ , y el escalar φ con un campo escalar bi-adjunto linealizado. Sin embargo, esta construcción está limitada al sector puramente gravitacional. Como se argumenta en [122], el *ansatz* de Kerr-Schild convencional no permite representar de manera consistente el campo de Kalb–Ramond, lo cual impide extender la copia doble clásica al sector NS-NS de la teoría de cuerdas.

El gKSA ofrece una vía natural para superar esta limitación y extender la copia doble clásica al sector NS-NS de las supergravidades, gracias a la introducción de dos vectores nulos independientes, lo cual permite perturbar simultáneamente la métrica y el campo de Kalb-Ramond de forma controlada. En [122] se asume la existencia de un vector de Killing, cuya contracción con las ecuaciones de movimiento resultantes del gKSA permite derivar dos ecuaciones de Maxwell independientes. Esta estructura puede incluso extenderse al sector fermiónico: las ecuaciones de Killing para espinores en TDCs pueden contraerse con un vector de Killing para derivar las ecuaciones BPS de una teoría de Maxwell supersimétrica. De este modo, surge una versión supersimétrica de la copia doble, que establece una correspondencia entre soluciones gravitacionales

que preservan supersimetría y soluciones BPS en teorías de gauge supersimétricas. En [4] se estudia la extensión de esta estructura al régimen con correcciones de orden superior en derivadas. En particular, se analizan las contribuciones de primer orden en α' en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas heterótica, dentro del marco del gKSA.

El punto de partida es considerar un fondo que admita al menos un vector de Killing tal que su derivada de Lie sobre los campos fundamentales se anule. Además, mediante una elección adecuada del sistema de coordenadas, dicho vector puede tomarse como covariantemente constante, lo cual facilita las construcciones explícitas. Como se sigue del gKSA, la métrica y el campo de Kalb-Ramond se perturban mediante dos vectores nulos l^μ y \bar{l}^μ (6.1.14-6.1.15), los cuales se identifican con un par de campos de gauge abelianos A_μ y \bar{A}_μ , de manera análoga a la copia doble clásica.

Bajo esta identificación, la dinámica se reduce a un par de ecuaciones de Maxwell modificadas por correcciones de orden α' en derivadas, en acuerdo con la estructura esperada de la relación KLT para la teoría heterótica. En particular, al contraer las ecuaciones de movimiento perturbadas con uno o dos vectores de Killing, se aíslan las contribuciones relevantes al nivel de copia simple y copia cero, reproduciendo la dinámica efectiva de los campos de gauge hasta orden $\mathcal{O}(\alpha')$

$$\frac{\kappa}{4} \left[\tilde{\nabla}^\mu F_{\mu\nu} + (\tilde{\nabla}_\rho F_{\mu\sigma}) \tilde{R}_\nu{}^{\mu\rho\sigma} \right] = 0, \quad \frac{\kappa}{4} \left[\tilde{\nabla}^\mu \bar{F}_{\mu\nu} + (\tilde{\nabla}_\rho \bar{F}_{\mu\sigma}) \tilde{R}_\nu{}^{\mu\rho\sigma} \right] = 0. \quad (6.4.1)$$

Por su parte, la ecuación correspondiente a la copia cero no recibe correcciones en derivadas a este orden:

$$\frac{\kappa}{4} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \varphi = 0, \quad (6.4.2)$$

Estos resultados muestran que el ansatz de Kerr-Schild generalizado ofrece un marco robusto para extender la estructura de copia doble clásica a teorías efectivas con correcciones en derivadas. La incorporación de dos vectores nulos permite representar de manera completa el sector NS-NS, y las identificaciones adecuadas con los campos de gauge aseguran que la relación gravedad-gauge se mantenga incluso en presencia de términos de orden α' . De este modo, el gKSA se consolida como una herramienta eficaz para investigar la conexión entre gravedad y teorías de gauge.

6.5 Conclusiones

Este capítulo aborda el estudio del *ansatz* de Kerr-Schild generalizado (gKSA) en el marco de la Teoría Doble de Campos con supersimetría $\mathcal{N} = 1$ y correcciones α' , integrando los resultados de [3,4]. El gKSA, originalmente introducido para extender soluciones de Relatividad General a teorías de campos con simetría de T-dualidad, permite perturbar simultáneamente la métrica y el campo de Kalb-Ramond preservando la linealidad de las ecuaciones de movimiento, propiedad que ha sido clave para su aplicación al sector bosónico de la TDC.

En la primera parte del capítulo se mostró cómo extender el gKSA al sector fermiónico, respetando las estructuras de supersimetría de la TDCs. Se encontró que la perturbación del gravitino generalizado debe ser lineal, mientras que el dilatino y el dilatón pueden recibir perturbaciones no restringidas. A partir del análisis de las transformaciones supersimétricas se obtuvieron expresiones para las ecuaciones de Killing para espinores, mostrando que también se linealizan bajo el gKSA y permitiendo establecer condiciones suficientes para la existencia de soluciones supersimétricas.

En la segunda parte se incorporaron correcciones de primer orden en α' asociadas a la teoría heterótica. A partir de la acción general propuesta en [118], se aplicó el gKSA y se obtuvo una deformación lineal del lagrangiano con cuatro derivadas, que conserva la invariancia bajo la transformación de Green-Schwarz generalizada. La consistencia de esta deformación impone nuevas condiciones sobre los vectores nulos y requiere correcciones específicas en los parámetros de Lorentz, todo lo cual fue verificado explícitamente.

Por último, se exploró la relación entre el gKSA y la copia doble clásica. El uso de dos vectores nulos permite extender esta correspondencia al sector NS-NS completo y al caso supersimétrico. Además, se mostró que la estructura de copia doble puede mantenerse en presencia de correcciones de orden α' , reproduciendo de manera efectiva las ecuaciones de Maxwell deformadas esperadas a partir de la relación KLT, a pesar de no satisfacer automáticamente la dualidad color-cinemática. Estos resultados posicionan al gKSA como una herramienta eficaz para el análisis de soluciones supersimétricas, con correcciones de derivadas superiores, y con una interpretación natural dentro del programa de la copia doble.

Capítulo 7

Conclusiones y comentarios

En esta tesis se han explorado diversos aspectos que contribuyen a una mejor comprensión de la Teoría Doble de Campos y su extensión supersimétrica con $\mathcal{N} = 1$ (TDCs). El trabajo se basa en los resultados de [1–4], que proporcionan un marco sólido para el estudio de la supersimetría, la dualidad T y las correcciones α' dentro de la descripción efectiva de la teoría de cuerdas heterótica. A continuación, se resumen las principales conclusiones de esta investigación

Simetría β de la supergravedad heterótica

Se analizó el papel de la simetría β en la supergravedad heterótica, extendiendo resultados previos al sector de *gauge* y fermiónico sin masa. Los principales hallazgos fueron:

- Se derivaron las reglas de transformación bajo β para los campos de *gauge* y fermiónicos de la supergravedad heterótica a partir de la TDCs. Si bien este marco es conveniente para analizar la simetría β , también se mostró que es posible estudiarla directamente en supergravedad.
- Se verificó que la simetría β determina completamente las interacciones de los campos bosónicos, pero posee un menor poder predictivo en el sector fermiónico. No obstante, resulta útil en la construcción de acoplamientos fermiónicos bilineales y cuárticos, cuyos coeficientes relativos quedan fijados por la supersimetría.
- En relación con el punto anterior, se construyeron las interacciones de cuatro fermiones

tanto en la TDCs como en la supergravedad heterótica al orden más bajo en α' , encontrando acuerdo con la literatura existente.

Supersimetría, dualidad T, y correcciones α'

En este apartado se obtuvieron las correcciones α' para la TDCs. Los resultados principales fueron:

- Se derivaron las correcciones de primer orden para la acción y las reglas de transformación de la TDCs. El formalismo preserva la supersimetría a todos los órdenes y garantiza que las reducciones dimensionales sean T-duales. La acción obtenida incluye términos con hasta cuatro derivadas de los campos y acoplamientos bilineales fermiónicos.
- Al parametrizar los multipletes covariantes bajo dualidad en términos de los campos de supergravedad y super Yang-Mills, se estableció una conexión con la acción efectiva de la cuerda heterótica. Se confirmó que las interacciones bosónicas coinciden con los resultados obtenidos mediante amplitudes de dispersión en teoría de cuerdas, mientras que las interacciones fermiónicas ofrecen nuevas perspectivas sobre los acoplamientos con tres derivadas, en particular en el sector de *gauge*.
- La introducción de índices colectivos generalizados del espacio tangente permitió incorporar términos dependientes del campo de Yang-Mills dentro de estructuras gravitacionales, lo que simplifica la construcción de soluciones supersimétricas y facilita la extensión de soluciones gravitacionales conocidas al sector Yang-Mills.

El *ansatz* de Kerr-Schild generalizado

Se estudió la incorporación del *ansatz* de Kerr-Schild generalizado (gKSA) en el marco de la TDCs. Los principales resultados obtenidos fueron:

- Se extendió el gKSA al sector fermiónico de la TDCs, mostrando que la perturbación del gravitino generalizado debe ser lineal para mantener la consistencia con la supersimetría. Las transformaciones supersimétricas permitieron derivar las ecuaciones de Killing para espinores, fundamentales para la construcción de soluciones que preservan supersimetría.

- Se incorporaron las correcciones de primer orden en α' dentro del gKSA y se analizó su impacto sobre la acción efectiva y la transformación de Green-Schwarz. Se verificó que las deformaciones inducidas por el gKSA son compatibles con la simetría de Lorentz doble, siempre que se impongan ciertas condiciones adicionales sobre los flujos y los parámetros de transformación.
- Se exploró la relación entre el gKSA y la copia doble clásica. En particular, se mostró cómo las ecuaciones de movimiento perturbadas permiten derivar ecuaciones de Maxwell con correcciones de cuatro derivadas, en acuerdo con la estructura de la relación KLT en el contexto de la cuerda heterótica.

El marco covariante de dualidad desarrollado en esta tesis proporciona una herramienta poderosa para el estudio de correcciones de orden superior en derivadas dentro del límite de bajas energías de la teoría de cuerdas. Este enfoque no solo simplifica la construcción de acciones invariantes, sino que también garantiza su compatibilidad con las dualidades de cuerdas. La interacción entre la simetría β , la supersimetría y la dualidad T resalta el papel fundamental de las simetrías en la organización y restricción de las correcciones de orden superior, proporcionando una nueva perspectiva sobre la estructura de la expansión en α' .

Perspectivas futuras y direcciones de investigación

Los resultados de esta tesis abren diversas líneas de investigación para el futuro. A continuación, se destacan algunas direcciones prometedoras:

- **Extensión a órdenes superiores en α' :** Un paso natural es construir correcciones de segundo orden y superiores en la teoría TDCs. Las correcciones cuadráticas del sector bosónico de la TDC fueron calculadas en [133] y estudiadas en profundidad en [134–136]. La extensión supersimétrica permitiría aumentar la comprensión sobre el papel de los objetos gravitacionales con índices colectivos introducidos en [2]. En cuanto a los términos de $\mathcal{O}(\alpha'^3)$, se sabe que existen contribuciones en la acción efectiva proporcionales a $\zeta(3)$, comunes a las supergravidades que describen el límite de bajas energías de las teorías de supercuerdas [65, 66, 137–139], aunque los formalismos de dualidad presentan limitaciones para reproducirlos [140–142]. No obstante, resulta interesante explorar algunos términos

a este orden dentro del formalismo considerado en esta tesis, especialmente aquellos con ocho derivadas dependientes de campos de super Yang-Mills, que, hasta donde se sabe, no han sido obtenidos por otros métodos.

- **Comparación con métodos alternativos:** La relación entre supersimetría y la simetría $O(d, d)$ ha sido ampliamente estudiada [2, 115, 117, 143–149]. En particular, las deformaciones de primer orden en las transformaciones supersimétricas de los campos heteróticos obtenidas en [2]¹ difieren de las obtenidas mediante la supersimetrización de las formas de Chern-Simons [95]. Tal como se mencionó en el cuerpo del trabajo, esto no implica que los resultados de [95] sean incompatibles con la teoría de cuerdas. Para comprobar la compatibilidad entre supersimetría y la simetría $O(d, d)$, resulta necesario compactificar la teoría en diez dimensiones. Sin embargo, comparar distintas formulaciones no es trivial debido a las redefiniciones de campos, que pueden incluir términos de *gauge* no covariantes [118]. En este contexto, la simetría β resulta especialmente útil, ya que sus transformaciones actúan covariantemente sobre los multipletes de los difeomorfismos en diez dimensiones, evitando las redefiniciones de campo requeridas en el procedimiento estándar de Kaluza-Klein. Se espera avanzar en la comprensión de esta diferencia y conciliar ambos resultados.
- **Compactificaciones y supergravidades gaugeadas:** Reducir dimensionalmente la TDCs por medio de compactificaciones generalizadas de Scherk-Schwarz [119, 150] permitiría estudiar las correcciones α' en supergravidades gaugeadas de menor dimensión, incluyendo los acoplamientos fermiónicos. Estas correcciones podrían tener implicaciones relevantes en la fenomenología de cuerdas, particularmente en la estabilización de módulos y los acoplamientos de Yukawa. La aplicación de estos resultados en modelos efectivos de cuatro dimensiones podría proporcionar nuevas perspectivas sobre la compactificación y la física más allá del Modelo Estándar.
- **Aplicaciones a soluciones supersimétricas:** Un resultado interesante de [2] es la aparición natural de los índices colectivos del espacio tangente, lo que permite incorporar términos dependientes del campo de Yang-Mills de orden superior dentro de estructuras gravitacionales. Esto conduce a modificaciones relativamente simples de las reglas de transformación supersimétrica a orden cero en α' , lo que permite emplear las ecuaciones

¹Véase también [149], donde la reducción toroidal de las variaciones supersimétricas de los fermiones a $\mathcal{O}(\alpha')$ coincide con [2] al fijar el grupo de Lorentz doble al de supergravedad.

de los espinores de Killing a dicho orden para obtener soluciones clásicas con correcciones de orden superior. Estas propiedades no solo simplifican la construcción de nuevas soluciones supersimétricas, sino que también facilitan la extensión de soluciones conocidas del sector gravitacional al sector de Yang-Mills [151–160]. Explorar cómo estas interacciones modifican soluciones conocidas en supergravedad heterótica podría proporcionar información clave sobre la influencia de las correcciones de orden superior en escenarios físicos concretos.

- **Deformaciones integrables y modelos σ :** Otra dirección en la que este trabajo podría resultar útil es el estudio de deformaciones integrables en modelos σ bidimensionales. Comprender la relación entre el bi-vector β y la ecuación de Yang–Baxter clásica podría proporcionar nuevas técnicas para generar soluciones en supergravedad [161–166]. En particular, este enfoque podría ser adecuado para extender las deformaciones estudiadas en el sector de *gauge* de la cuerda heterótica [166], incorporando además la supersimetría.

Apéndice A

Convenciones

En este apéndice recopilamos las convenciones y definiciones empleadas a lo largo de la tesis.

A.1 Convenciones y definiciones

Métricas

Adoptamos la convención de signatura mayormente positiva para la métrica. En particular, la métrica plana en D dimensiones está dada por

$$g_{ab} = \text{diag}(-1, \underbrace{+1, +1, \dots, +1}_{D-1 \text{ veces}}),$$

y la utilizaremos para subir y bajar índices de $O(1, D-1)$. Podemos utilizar el *vielbein* e_μ^a para construir la métrica de la variedad según:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b g_{ab}, \quad (\text{A.1.1})$$

con la cual vamos a contraer índices espacio-temporales.

Conexiones y derivadas covariantes

Consideremos un tensor T_ν^ρ que transforma bajo representaciones del grupo $GL(D)$. Su derivada covariante está dada por

$$\nabla_\mu T_\nu^\rho = \partial_\mu T_\nu^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho T_\nu^\lambda, \quad (\text{A.1.2})$$

siendo $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ las componentes de la **conexión afín**. Si demandamos que la conexión esté libre de torsión, y la constancia covariante de la métrica (A.1.1), las componentes de la conexión se pueden determinar completamente como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) , \quad (\text{A.1.3})$$

y se denominan **símbolos de Christoffel**.

Podemos definir, de manera análoga, la derivada covariante de un tensor $T_a{}^b$ que transforma ante $O(1, D-1)$

$$\nabla_\mu T_a{}^b = \partial_\mu T_a{}^b - w_{\mu a}{}^c T_c{}^b + w_{\mu c}{}^b T_a{}^c , \quad (\text{A.1.4})$$

donde $w_{\mu a}{}^b$ es la denominada **conexión de spin**. La constancia de la métrica plana nos conduce a la condición de antisimetría $w_{\mu ab} = -w_{\mu ba}$. La compatibilidad del *vielbein* con la derivada covariante se expresa como

$$\nabla_\mu e_\nu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho{}^a + w_{\mu b}{}^a e_\nu{}^b = 0 , \quad (\text{A.1.5})$$

lo cual nos permitirá determinar las componentes de la conexión de spin, a través de

$$\begin{aligned} w_{\mu bc} &= -e^\nu{}_b \partial_\mu e_{\nu c} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^\nu{}_b e_{\rho c} \\ &= e_\mu{}^a (-e^\mu{}_{[a} e^\nu{}_{b]} \partial_\mu e_{\nu c} + e^\mu{}_{[a} e^\nu{}_{c]} \partial_\mu e_{\nu b} + e^\mu{}_{[b} e^\nu{}_{c]} \partial_\mu e_{\nu a}) \\ &= e_\mu{}^a w_{abc} . \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

En este contexto, resultará útil definir la **conexión de spin con torsión**

$$w_{abc}^{(\pm)} = w_{abc} \pm \frac{1}{2} H_{abc} , \quad (\text{A.1.7})$$

y con ella la derivada covariante $\nabla_a^{(\pm)} V_b = \partial_a V_b - w_{ab}^{(\pm)c} V_c$, que surge naturalmente en los términos de orden α' de las transformaciones supersimétricas y la acción efectiva de la supergravedad heterótica.

También podemos ver cómo actúa la derivada covariante sobre un tensor de *gauge* T^i

$$\nabla_\mu T^i = \partial_\mu T^i - f^i{}_{jk} A_\mu{}^j T^k , \quad (\text{A.1.8})$$

con $A_\mu{}^j$ el campo de Yang-Mills, que cumple el papel de conexión, y $f^i{}_{jk}$ la constante de estructura del grupo de *gauge*. Por último, la derivada covariante de un espinor ε es

$$\nabla_\mu^{(\pm)} \varepsilon = \partial_\mu \varepsilon - \frac{1}{4} w_{\mu ab}^{(\pm)} \gamma^{ab} \varepsilon , \quad (\text{A.1.9})$$

donde la torsión de la conexión de spin puede ser nula.

Curvaturas

El conmutador de derivadas covariantes actuando sobre tensores/espinores

$$\left[\nabla_{\mu}^{(\pm)}, \nabla_{\nu}^{(\pm)} \right] G_{\rho ci} = -R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} G_{\sigma ci} + R_{\mu\nu c}^{(\pm)d} G_{\rho di} - F_{\mu\nu}{}^j G_{\rho c}{}^k f_{ijk} \quad (\text{A.1.10})$$

$$\left[\nabla_{\mu}^{(\pm)}, \nabla_{\nu}^{(\pm)} \right] \varepsilon = \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab}^{(\pm)} \gamma^{ab} \varepsilon, \quad (\text{A.1.11})$$

define el **tensor de curvatura de Riemann**

$$\begin{aligned} R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\kappa} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa} \\ &= e^{\rho a} e_{\sigma}{}^b R_{\mu\nu ab} = e^{\rho a} e_{\sigma}{}^b \left(-2\partial_{[\mu} w_{\nu]ab} + w_{\mu a}{}^c w_{\nu cb} - w_{\nu a}{}^c w_{\mu cb} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

y la **curvatura de Yang-Mills**

$$F_{\mu\nu}^i = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^i - f^i{}_{jk} A_{\mu}^j A_{\nu}^k. \quad (\text{A.1.13})$$

El tensor de Riemann admite la inclusión de torsión, $R_{\mu\nu\rho\lambda}^{(\pm)}$ simplemente con el reemplazo $w \rightarrow w^{(\pm)}$ en su definición. Las trazas del tensor de Riemann permiten definir el **tensor de Ricci**

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = e^{\rho}{}_a e_{\nu b} R_{\rho\mu}{}^{ab}, \quad (\text{A.1.14})$$

y el **escalar de Ricci** en D dimensiones

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{\mu}{}_a e^{\nu}{}_b R_{\mu\nu}{}^{ab}. \quad (\text{A.1.15})$$

También podemos construir la curvatura asociada al campo de Kalb-Ramond $b_{\mu\nu}$

$$H_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]}, \quad (\text{A.1.16})$$

la cual debe ser modificada cuando la teoría de supergravedad se acopla a super Yang-Mills, de manera que

$$H_{\mu\nu\rho} = 3 \left(\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]} - A_{[\mu}^i \partial_{\nu} A_{\rho]i} + \frac{1}{3} f_{ijk} A_{\mu}^i A_{\nu}^j A_{\rho}^k \right) = 3 \left(\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]} - C_{\mu\nu\rho}^g \right), \quad (\text{A.1.17})$$

donde $C_{\mu\nu\rho}^g$ es la **forma de Chern-Simons**, definida en (3.5.21).

Apéndice B

Espinores y matrices *gamma*

Este apéndice presenta las convenciones para espinores y matrices gamma en la Teoría Doble de Campos y en supergravedad, destacando su quiralidad y propiedades clave para la construcción de bilineales. También incluye identidades útiles para los productos de matrices gamma en ambos contextos, fundamentales para los cálculos de este trabajo.

B.1 Teoría Doble de Campos

En TDC, el contenido de campos fermiónicos está compuesto por el gravitino generalizado $\Psi_{\bar{A}}$ y el dilatino generalizado ϱ . El gravitino $\Psi_{\bar{A}}$ es un espinor de Majorana-Weyl que transforma como un espinor bajo $O(9,1)_L$, y como un vector bajo $O(1,9+n_g)_R$, mientras que el dilatino ϱ es un espinor de Majorana-Weyl que transforma únicamente como un espinor de $O(9,1)_L$. Estos espinores tienen quiralidades opuestas, dadas por

$$\gamma_{11}\Psi_{\bar{A}} = \Psi_{\bar{A}}, \quad \gamma_{11}\varrho = -\varrho, \quad (\text{B.1.1})$$

donde γ_{11} es la matriz de quiralidad en diez dimensiones, análoga a γ_5 en cuatro dimensiones. Se define como

$$\gamma_{11} = -\gamma^0\gamma^1\cdots\gamma^9. \quad (\text{B.1.2})$$

Una base para el espacio de matrices gamma en diez dimensiones está dada por

$$\Gamma^{(n)} = \left\{ 1, \gamma^a, \gamma^{ab}, \gamma^{abc}, \dots, \gamma^{a_1\cdots a_{10}} \right\}. \quad (\text{B.1.3})$$

Para dos espinores η y κ , el bilineal $\eta\Gamma^{(n)}\kappa$ es simétrico ante el intercambio $\eta \leftrightarrow \kappa$ cuando

$n = 0, 3, 4, 7, 8$, y antisimétrico para $n = 1, 2, 5, 6, 9, 10$. Además, si η y κ tienen la misma quiralidad, entonces n debe ser impar; de lo contrario, n debe ser par.

Dado que para $n > 5$ un producto de n matrices gamma puede reescribirse en términos del tensor de Levi-Civita ε multiplicado por un producto de $10 - n$ matrices gamma y γ_{11} , basta considerar solamente los términos con $n \leq 5$ en la construcción de bilineales fermiónicos.

Productos de matrices *gamma*

El álgebra de Clifford (3.3.1) determina las siguientes identidades para las matrices *gamma* de $O(9, 1)_L$

$$\underline{\gamma}_a \underline{\gamma}_b = \underline{\gamma}_{ab} - P_{ab}, \quad (\text{B.1.4a})$$

$$\underline{\gamma}_{ab} \underline{\gamma}_c = \underline{\gamma}_{abc} - 2\underline{\gamma}_{[a} P_{b]c}, \quad (\text{B.1.4b})$$

$$\underline{\gamma}_a \underline{\gamma}_{bc} = \underline{\gamma}_{abc} - 2P_{a[b} \underline{\gamma}_{c]}, \quad (\text{B.1.4c})$$

$$\underline{\gamma}_{ab} \underline{\gamma}^{cd} = \underline{\gamma}_{ab}^{cd} - 4\underline{\gamma}_{[a}^{[d} P_{b]}^{c]} + 2P_{[b}^{[c} P_{a]}^{d]}, \quad (\text{B.1.4d})$$

$$\underline{\gamma}_{ab} \underline{\gamma}^{cde} = \underline{\gamma}_{ab}^{cde} - 6\underline{\gamma}_{[a}^{[de} P_{b]}^{c]} + 6\underline{\gamma}^{[e} P_{[b}^{c} P_{a]}^{d]}, \quad (\text{B.1.4e})$$

$$\underline{\gamma}_{abc} \underline{\gamma}^{de} = \underline{\gamma}_{abc}^{de} - 6\underline{\gamma}_{[ab}^{[e} P_{c]}^{d]} + 6\underline{\gamma}_{[a} P_{c}^{[d} P_{b]}^{e]}, \quad (\text{B.1.4f})$$

$$\underline{\gamma}_{abc} \underline{\gamma}^{def} = \underline{\gamma}_{abc}^{def} - 9\underline{\gamma}_{[ab}^{[ef} P_{c]}^{d]} + 18\underline{\gamma}_{[a}^{[f} P_{c}^{[d} P_{b]}^{e]} - 6P_{[c}^{[d} P_{b}^{e} P_{a]}^{f]}. \quad (\text{B.1.4g})$$

B.2 Supergravedad

Una vez que resolvemos el *strong constraint* en el marco de supergravedad, necesitamos hacer el fijado de *gauge*

$$O(9, 1)_L \times O(1, 9 + n_g)_R \longrightarrow O(1, 9) \times G,$$

siendo G el grupo de *gauge*, que debe ser $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$ para poder conectar con la supergravedad heterótica.

El contenido de campos fermiónicos de la teoría está compuesto por el gravitino ψ_a , un dilatino ρ y un gaugino χ^i , todos ellos espinores de Majorana-Weyl que transforman bajo $O(1, 9)$, con quiralidad determinada por

$$\gamma_{11} \psi_a = \psi_a, \quad \gamma_{11} \rho = -\rho, \quad \gamma_{11} \chi^i = \chi^i. \quad (\text{B.2.1})$$

La matriz γ_{11} se define de manera análoga a su versión en TDC, pero ahora en términos de las matrices gamma de $O(1, 9)$. Las propiedades de permutación entre espinores son similares a las presentadas previamente en el contexto de la TDC.

Productos de matrices *gamma*

El álgebra de Clifford $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2g^{ab}$ determina las siguientes identidades para las matrices *gamma* de $O(1, 9)$

$$\gamma_a \gamma_b = \gamma_{ab} + g_{ab} , \quad (\text{B.2.2a})$$

$$\gamma_{ab} \gamma_c = \gamma_{abc} + 2\gamma_{[a} g_{b]c} , \quad (\text{B.2.2b})$$

$$\gamma_a \gamma_{bc} = \gamma_{abc} + 2g_{a[b} \gamma_{c]} , \quad (\text{B.2.2c})$$

$$\gamma_{ab} \gamma^{cd} = \gamma_{ab}{}^{cd} + 4\gamma_{[a}{}^{[d} \delta_{b]}{}^{c]} + 2\delta_{[b}{}^{[c} \delta_{a]}{}^{d]} , \quad (\text{B.2.2d})$$

$$\gamma_{ab} \gamma^{cde} = \gamma_{ab}{}^{cde} + 6\gamma_{[a}{}^{[de} \delta_{b]}{}^{c]} + 6\gamma^{[e} \delta_{[b}{}^c \delta_a]{}^d] , \quad (\text{B.2.2e})$$

$$\gamma_{abc} \gamma^{de} = \gamma_{abc}{}^{de} + 6\gamma_{[ab}{}^{[e} \delta_{c]}{}^d] + 6\gamma_{[a} \delta_c{}^d \delta_b]{}^e] , \quad (\text{B.2.2f})$$

$$\gamma_{abc} \gamma^{def} = \gamma_{abc}{}^{def} + 9\gamma_{[ab}{}^{[ef} \delta_{c]}{}^d] + 18\gamma_{[a}{}^{[f} \delta_c{}^d \delta_b]{}^e] + 6\delta_{[c}{}^{[d} \delta_b{}^e \delta_a]{}^f] . \quad (\text{B.2.2g})$$

Apéndice C

Flujos generalizados

En este apéndice se muestra la parametrización de las componentes de los flujos generalizados de $O(10, 10 + n_g)$

$$F_{ABC} = 3\partial_{[A}E^N{}_B E_{|N|C]} + \sqrt{2}E^M{}_A E^N{}_B E^P{}_C f_{MNP}, \quad F_A = \sqrt{2}\partial_M E^M{}_A - 2\partial_A d,$$

involucradas en el cálculo de las transformaciones supersimétricas y de la acción efectiva de la supergravedad heterótica. También vamos a parametrizar los flujos generalizados de $O(10, 10+k)$ de la identificación de Bergshoeff - de Roo generalizada en términos de los flujos generalizados de $O(10, 10 + n_g)$, para así determinar las correcciones α' de estos últimos.

C.1 Parametrización de los flujos de $O(10, 10 + n_g)$

Considerando las parametrizaciones (3.5.9, 3.5.10) en la definición de los flujos generalizados obtenemos la parametrización de las componentes

$$F_{\underline{abc}} = -\left(w_{abc} + \frac{1}{2}H_{abc}\right) \equiv -w_{abc}^{(+)}, \quad (\text{C.1.1a})$$

$$F_{\underline{a}\bar{bc}} = \left(w_{abc} - \frac{1}{2}H_{abc}\right) \equiv w_{abc}^{(-)}, \quad (\text{C.1.1b})$$

$$F_{\bar{abc}} = 3\left(w_{[abc]} - \frac{1}{6}H_{abc}\right), \quad (\text{C.1.1c})$$

$$F_{\underline{abc}} = -3\left(w_{[abc]} + \frac{1}{6}H_{abc}\right), \quad (\text{C.1.1d})$$

$$F_{\underline{a}} = F_{\bar{a}} = \left(\partial_\mu e_a^\mu + e_a^\mu e_b^\nu \partial_\mu e_\nu^b - 2e^\mu{}_a \partial_\mu \phi\right), \quad (\text{C.1.1e})$$

en las cuales los términos correspondientes al sector de *gauge* aparecen en H_{abc} a través de la forma de Chern-Simons de *gauge*. Además tenemos las componentes con índices de *gauge* explícitos

$$F_{\underline{iab}} = F_{\underline{abi}} = F_{\underline{abi}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^\mu{}_a e^\nu{}_b e_{\underline{ii}} F_{\mu\nu}^i, \quad (\text{C.1.2a})$$

$$F_{\underline{aij}} = -e^i{}_{\underline{i}} e^j{}_{\underline{j}} e^\mu{}_a A_\mu{}^k f_{ijk}, \quad (\text{C.1.2b})$$

$$F_{\underline{ijk}} = \sqrt{2}e^i{}_{\underline{i}} e^j{}_{\underline{j}} e^k{}_{\underline{k}} f_{ijk} \quad (\text{C.1.2c})$$

C.2 Correcciones α' de los flujos generalizados

Ahora vamos a parametrizar los flujos generalizados de $O(10, 10 + k)$, definidos en (5.1.10) y (5.1.11), utilizando la parametrización (5.1.1). Tal como lo explicamos en la sección 5.2.1, esta parametrización induce correcciones de orden α' en los flujos generalizados de $O(10, 10 + n_g)$. A continuación listaremos las componentes¹ involucradas en el cálculo de la acción de primer orden (5.2.21)

$$\mathcal{F}_{\underline{abc}} \cong F_{\underline{abc}} + F_{\underline{abc}}^{(3)} = F_{\underline{abc}} - \frac{3b}{4} \left(\partial_{[\underline{a}} F_{\underline{b}}^{\ast\bar{c}d} - \frac{1}{2} F_{d[\underline{ab}} F^{\ast\bar{d}c}] - \frac{2}{3} F^{\ast\bar{c}}{}_{\underline{e}[\underline{a}} F_{\underline{b}}^{\ast\bar{e}d}] \right) F_{\underline{c}d}^{\ast}, \quad (\text{C.2.1a})$$

$$\mathcal{F}_{\underline{abc}} \cong F_{\underline{abc}} + F_{\underline{abc}}^{(3)} = F_{\underline{abc}} - \frac{b}{4} \left(\partial_{\underline{a}} F_{[\underline{b}}^{\ast\bar{c}d} + F^{\ast\bar{e}cd} F_{\underline{a}\underline{e}[\underline{b}} \right) F_{\underline{c}d}^{\ast}, \quad (\text{C.2.1b})$$

$$\mathcal{F}_{\underline{abc}} \cong F_{\underline{abc}} + F_{\underline{abc}}^{(3)} = F_{\underline{abc}} + \frac{b}{8} F_{\underline{def}}^{\ast} F^{\ast\bar{e}f}{}_{\underline{a}} F_{\underline{bc}}^d, \quad (\text{C.2.1c})$$

$$\mathcal{F}_{\underline{abc}} = F_{\underline{abc}}, \quad (\text{C.2.1d})$$

$$\mathcal{F}_{\underline{abcd}} \cong F_{\underline{abcd}}^{(2)} = -2\partial_{[\underline{c}} F_{\underline{d}]ab}^{\ast} + 2F_{\underline{a}}^{\ast\bar{e}}{}_{[\underline{c}} F_{\underline{d}]e\bar{b}}^{\ast} + F_{\underline{cde}} F_{\underline{ab}}^{\ast\bar{e}}, \quad (\text{C.2.1e})$$

$$\mathcal{F}_{\underline{abcd}} \cong F_{\underline{abcd}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_{\underline{b}} F_{\underline{acd}}^{\ast} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_{\underline{adb}} F_{\underline{cd}}^{\ast}, \quad (\text{C.2.1f})$$

$$\mathcal{F}_{\underline{a}} \cong F_{\underline{a}} + F_{\underline{a}}^{(3)} = F_{\underline{a}} + \frac{b}{8} \left[F^{\ast\bar{b}}{}_{\underline{cd}} F_{\underline{a}}^{\ast\bar{c}d} F_{\underline{b}} + \partial_{\underline{b}} \left(F^{\ast\bar{b}}{}_{\underline{cd}} F_{\underline{a}}^{\ast\bar{c}d} \right) \right], \quad (\text{C.2.1g})$$

$$\mathcal{F}_{\underline{a}} = F_{\underline{a}}, \quad (\text{C.2.1h})$$

siendo el parámetro $b = \frac{2}{(1-X_R)g^2}$, las etiquetas ⁽²⁾ y ⁽³⁾ indican el número de derivadas de los campos bosónicos, y donde además usamos

$$F_{\underline{abc}}^{\ast} = F_{\underline{abc}} - \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{\underline{b}}\gamma_{\underline{a}}\Psi_{\underline{c}}, \quad \mathcal{F}_{\underline{acd}} = \frac{1}{\sqrt{2}gX_R} \mathcal{F}_{\underline{ABcd}}(t_\alpha)^{\underline{AB}} e^{\alpha}{}_{\underline{a}}. \quad (\text{C.2.2})$$

¹Si bien se lista la parametrización en términos de los campos de $O(10, 10)$, recordemos que la extensión a $O(10, 10 + n_g)$ es trivial, vía $\bar{a}, \bar{b} \rightarrow \bar{A}, \bar{B}$.

Apéndice D

Ecuaciones de movimiento

En este apéndice, presentamos las ecuaciones de movimiento de los campos de supergravedad a orden cero en α' , incluyendo términos bilineales en fermiones. Estas se obtienen a partir de la variación de la acción

$$\begin{aligned} S = \int d^{10}x e^{-2\phi} & \left[R + 4\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^i F^{\mu\nu}{}_i \right. \\ & - \bar{\psi}^\mu \gamma^\nu \nabla_\nu \psi_\mu + \bar{\rho} \gamma^\mu \nabla_\mu \rho + 2\bar{\psi}^\mu \nabla_\mu \rho - \frac{1}{2} \bar{\chi}^i \gamma^\mu \nabla_\mu \chi_i + \bar{\chi}_i \left(\gamma^\mu \psi^\nu - \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} \rho \right) F_{\mu\nu}{}^i \\ & \left. + \frac{1}{24} H_{\mu\nu\rho} \left(\bar{\psi}^\lambda \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_\lambda + 12\bar{\psi}^\mu \gamma^\nu \psi^\rho - \bar{\rho} \gamma^{\mu\nu\rho} \rho - 6\bar{\psi}^\mu \gamma^{\nu\rho} \rho + \frac{1}{2} \bar{\chi}^i \gamma^{\mu\nu\rho} \chi_i \right) \right], \end{aligned}$$

con respecto a cada uno de los campos dinámicos. En la expresión anterior se han omitido los términos cuárticos en fermiones, y se ha adoptado el esquema en el que el dilatino está contenido en el campo ρ .

Además de describir la dinámica clásica de la teoría, estas ecuaciones cumplen un rol fundamental al considerar redefiniciones de campos. Como es bien sabido, dos teorías cuyas acciones efectivas difieren únicamente por términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento están relacionadas por una transformación de campos y conducen a la misma matriz S . En consecuencia, describen la misma física. Las ecuaciones de movimiento, entonces, no solo determinan las soluciones clásicas del modelo, sino que también permiten identificar equivalencias físicas entre formulaciones efectivas aparentemente distintas.

A continuación, presentamos explícitamente las ecuaciones de movimiento correspondientes a cada uno de los campos de la supergravedad heterótica a orden cero en α' .

D.1 Métrica y vielbein

Considerando variaciones arbitrarias de $g^{\mu\nu}$ obtenemos la ecuación de movimiento de la métrica

$$\begin{aligned} \Delta G_{\mu\nu} = & \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Delta\phi + R_{\mu\nu} + 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{4}H_{\mu\lambda\sigma}H_\nu{}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}F_{\mu\lambda i}F_\nu{}^{\lambda i} \\ & - \bar{\psi}_\mu\gamma^\lambda\nabla_\lambda\psi_\nu - \bar{\psi}^\lambda\gamma_\mu\nabla_\nu\psi_\lambda + \bar{\rho}\gamma_\mu\nabla_\nu\rho + 2\bar{\psi}_\mu\nabla_\nu\rho - \frac{1}{2}\bar{\chi}^i\gamma_\mu\nabla_\nu\chi_i + \frac{1}{8}\bar{\psi}^\lambda\gamma_\mu{}^{\sigma\tau}\psi_\lambda H_{\nu\sigma\tau} \\ & - \frac{1}{8}\bar{\rho}\gamma_\mu{}^{\sigma\tau}\rho H_{\nu\sigma\tau} + \frac{1}{16}\bar{\chi}^i\gamma_\mu{}^{\sigma\tau}\chi_i H_{\nu\sigma\tau} + \frac{1}{2}\bar{\psi}^\sigma\gamma_\mu{}^\tau\rho H_{\nu\sigma\tau} - \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\gamma_{\sigma\tau}\rho H_{\nu\sigma\tau} + \bar{\psi}_\mu\gamma^\sigma\psi^\tau H_{\nu\sigma\tau} \\ & - \frac{1}{2}\bar{\psi}^\sigma\gamma_\mu\psi^\tau H_{\nu\sigma\tau} + \frac{1}{24}\bar{\psi}_\mu\gamma^{\rho\sigma\tau}\psi_\nu H_{\rho\sigma\tau} + \bar{\chi}_i\gamma_\mu\psi_\lambda F_\nu{}^{\lambda i} - \bar{\chi}_i\gamma_\lambda\psi_\mu F_\nu{}^{\lambda i} - \frac{1}{2}\bar{\chi}_i\gamma_\mu\lambda\rho F_\nu{}^{\lambda i}, \end{aligned} \quad (\text{D.1.1})$$

con $\Delta\phi$ la ecuación de movimiento del dilatón. Si variamos el vielbein $e^\mu{}_a$, se llega a

$$\Delta e_\mu{}^a = 2e^{\nu a}\Delta G_{\mu\nu}. \quad (\text{D.1.2})$$

D.2 Dilatón

La variación de la acción efectiva respecto al dilatón determina una ecuación de movimiento proporcional al Lagrangiano de la teoría

$$\Delta\phi = -2\mathcal{L}. \quad (\text{D.2.1})$$

D.3 Campo de Kalb-Ramond

La ecuación de movimiento para el campo antisimétrico $b_{\mu\nu}$ toma la forma

$$\begin{aligned} \Delta b_{\nu\rho} = & \frac{1}{2}\nabla^\mu H_{\mu\nu\rho} - \nabla^\mu\phi H_{\mu\nu\rho} \\ & - \frac{1}{8}\nabla^\mu \left(\bar{\psi}^\lambda\gamma_{\mu\nu\rho}\psi_\lambda + 12\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_\nu\psi_{\rho]} - \bar{\rho}\gamma_{\mu\nu\rho}\rho - 6\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_{\nu\rho]}\rho + \frac{1}{2}\bar{\chi}^i\gamma_{\mu\nu\rho}\chi_i \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(\bar{\psi}^\lambda\gamma_{\mu\nu\rho}\psi_\lambda + 12\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_\nu\psi_{\rho]} - \bar{\rho}\gamma_{\mu\nu\rho}\rho - 6\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_{\nu\rho]}\rho + \frac{1}{2}\bar{\chi}^i\gamma_{\mu\nu\rho}\chi_i \right) \nabla^\mu\phi. \end{aligned} \quad (\text{D.3.1})$$

D.4 Gravitino

La ecuación de movimiento del gravitino $\psi_\mu = e_\mu{}^a\psi_a$, es

$$\Delta\psi_\mu = 2\nabla_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^\nu - 2\bar{\psi}_\mu\gamma^\nu\nabla_\nu\phi + 2\nabla_\mu\bar{\rho} + \frac{1}{12}\bar{\psi}_\mu\gamma^{\rho\sigma\tau}H_{\rho\sigma\tau} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu\rho}(4\bar{\psi}^\rho\gamma^\nu - \bar{\rho}\gamma^{\nu\rho}) - F_{\mu\nu}{}^i\bar{\chi}_i\gamma^\nu \quad (\text{D.4.1})$$

D.5 Dilatino

El campo ρ obedece la siguiente ecuación de movimiento

$$\Delta\rho = -2\nabla_\mu\bar{\rho}\gamma^\mu + 2\bar{\rho}\gamma^\mu\nabla_\mu\phi - 2\nabla_\mu\bar{\psi}^\mu + 4\bar{\psi}^\mu\nabla_\mu\phi - \frac{1}{12}H_{\rho\sigma\tau}(\bar{\rho}\gamma^{\rho\sigma\tau} + 3\bar{\psi}^\rho\gamma^{\sigma\tau}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^i\bar{\chi}_i\gamma^{\mu\nu} \quad (\text{D.5.1})$$

D.6 Campo de *gauge*

Los campos de *gauge* $A_\mu{}^i$ satisfacen una ecuación de movimiento que incluye los términos habituales de tipo Yang–Mills, además de interacciones con los campos de fondo y los fermiones de la teoría.

$$\begin{aligned} \Delta A_\mu{}^i &= \frac{1}{2}H_{\mu\nu\rho}F^{\nu\rho i} + A_\rho{}^i\Delta b^\rho{}_\mu - \nabla^\nu F_{\mu\nu}{}^i + 2F_{\mu\nu}{}^i\nabla^\nu\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{\chi}^j\gamma_\mu\chi^k f^i{}_{jk} - \frac{1}{8}F^{\nu\rho i}\left(\bar{\psi}^\lambda\gamma_{\mu\nu\rho}\psi_\lambda + 12\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_\nu\psi_{\rho]} - \bar{\rho}\gamma_{\mu\nu\rho}\rho - 6\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_\nu\rho] + \frac{1}{2}\bar{\chi}^j\gamma_{\mu\nu\rho}\chi_j\right) \\ &\quad + 2\nabla^\nu\bar{\chi}^i\left(\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]} - \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\rho\right) + 2\bar{\chi}^i\nabla^\nu\left(\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]} - \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\rho\right) - 4\bar{\chi}^i\left(\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]} - \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\rho\right)\nabla^\nu\phi. \end{aligned} \quad (\text{D.6.1})$$

D.7 Gaugino

Finalmente, la ecuación de movimiento del gaugino queda determinada según

$$\Delta\chi_i = \nabla_\mu\bar{\chi}_i\gamma^\mu - \bar{\chi}_i\gamma^\mu\nabla_\mu\phi + \frac{1}{24}H_{\rho\sigma\tau}\bar{\chi}_i\gamma^{\rho\sigma\tau} - \left(\bar{\psi}^\nu\gamma^\mu - \frac{1}{4}\bar{\rho}\gamma^{\mu\nu}\right)F_{\mu\nu i}. \quad (\text{D.7.1})$$

Bibliografía

- [1] W. H. Baron, C. A. Nunez and J. A. Rodriguez, “ β symmetry of heterotic supergravity,” JHEP **01** (2025), 127 [arXiv:2410.17067 [hep-th]].
- [2] E. Lescano, C. A. Núñez and J. A. Rodríguez, “Supersymmetry, T-duality and heterotic α' -corrections,” JHEP **07** (2021), 092 [arXiv:2104.09545 [hep-th]].
- [3] E. Lescano and J. A. Rodríguez, “ $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric Double Field Theory and the generalized Kerr-Schild ansatz,” JHEP **10** (2020), 148 [arXiv:2002.07751 [hep-th]].
- [4] E. Lescano and J. A. Rodríguez, “ $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric Double Field Theory and the generalized Kerr-Schild ansatz,” JHEP **10** (2020), 148 [arXiv:2002.07751 [hep-th]].
- [5] E. Lescano, G. Menezes and J. A. Rodríguez, “Aspects of conformal gravity and double field theory from a double copy map,” Phys. Rev. D **108** (2023) no.12, 126017 [arXiv:2307.14538 [hep-th]].
- [6] E. Lescano and J. A. Rodríguez, “Constructing conformal double field theory through a double copy map,” Phys. Rev. D **112** (2025) no.2, 026004 [arXiv:2408.11892 [hep-th]].
- [7] E. Lescano and J. A. Rodríguez, “Quadratic Curvature Corrections in Double Field Theory via Double Copy,” [arXiv:2409.05628 [hep-th]].
- [8] G. Veneziano, “Construction of a crossing - symmetric, Regge behaved amplitude for linearly rising trajectories,” Nuovo Cim. A **57** (1968), 190-197.
- [9] J. E. Paton and H. M. Chan, “Generalized veneziano model with isospin,” Nucl. Phys. B **10** (1969), 516-520.
- [10] M. A. Virasoro, “Alternative constructions of crossing-symmetric amplitudes with regge behavior,” Phys. Rev. **177** (1969), 2309-2311.

- [11] J. A. Shapiro, “Electrostatic analog for the virasoro model,” *Phys. Lett. B* **33** (1970), 361-362.
- [12] M. A. Virasoro, “Subsidiary conditions and ghosts in dual resonance models,” *Phys. Rev. D* **1** (1970), 2933-2936.
- [13] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 231-252.
- [14] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian and A. Tajdini, “The entropy of Hawking radiation,” *Rev. Mod. Phys.* **93** (2021) no.3, 035002
- [15] L. Randall and R. Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999), 3370-3373
- [16] W. Siegel, “Two vierbein formalism for string inspired axionic gravity,” *Phys. Rev. D* **47** (1993), 5453-5459, [arXiv:hep-th/9302036 [hep-th]].
- [17] W. Siegel, “Superspace duality in low-energy superstrings,” *Phys. Rev. D* **48** (1993), 2826-2837, [arXiv:hep-th/9305073 [hep-th]].
- [18] W. Siegel, “Manifest duality in low-energy superstrings,” [arXiv:hep-th/9308133 [hep-th]].
- [19] C. Hull and B. Zwiebach, “Double Field Theory,” *JHEP* **09** (2009), 099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]].
- [20] C. Hull and B. Zwiebach, “The Gauge algebra of double field theory and Courant brackets,” *JHEP* **0909** (2009) 090 [arXiv:0908.1792 [hep-th]].
- [21] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, “Background independent action for double field theory,” *JHEP* **1007** (2010) 016 [arXiv:1003.5027 [hep-th]].
- [22] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, “Generalized metric formulation of double field theory,” *JHEP* **1008** (2010) 008 [arXiv:1006.4823 [hep-th]].
- [23] J. Polchinski, “String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String,” Cambridge, UK: Cambridge University Press, (1998).
- [24] J. Polchinski, “String Theory: Volume 2, Superstring Theory and Beyond,” Cambridge, UK: Cambridge University Press, (1998).

- [25] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, “Superstring Theory: Volume 1, Introduction,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, (1987).
- [26] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, “Superstring Theory: Volume 2, Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, (1987).
- [27] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, “String Theory and M-Theory: A Modern Introduction,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, (2007).
- [28] E. Kiritsis, “String Theory in a Nutshell,” Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, (2007).
- [29] B. Zwiebach, “A First Course in String Theory,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, (2009).
- [30] L. E. Ibáñez and A. M. Uranga, “String Theory and Particle Physics: An Introduction to String Phenomenology,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, (2012).
- [31] R. Blumenhagen, D. Lüst, and S. Theisen, “Basic concepts of string theory,” Theoretical and Mathematical Physics. Springer, Heidelberg, Germany, 2013.
- [32] T. Ortín, “Gravity and Strings,” 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, (2015).
- [33] D. Tong, “String Theory,” (Cambridge, Part III Maths, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>).
- [34] T. Weigand, “Introduction to String Theory,” (Heidelberg University, <https://www.thphys.uni-heidelberg.de/courses/weigand/Strings11-12.pdf>).
- [35] A. Neveu and J. Scherk, “Connection between Yang-Mills fields and dual models,” Nucl. Phys. B **36** (1972) 155–161.
- [36] J. Scherk and J. H. Schwarz, “Dual Models for Nonhadrons,” Nucl. Phys. B **81** (1974) 118–144.
- [37] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, “Supergravity and the Spinor Dual Model,” Phys. Lett. B **65** (1976) 282–286.
- [38] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, ““Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model,” Nucl. Phys. B **122** (1977) 253–290.

- [39] Y. Nambu, “Duality and Hadrodynamics,” Notes prepared for the Copenhagen High Energy Symposium (1970).
- [40] T. Goto, “Relativistic Quantum Mechanics of One-Dimensional Mechanical Continuum and Subsidiary Condition of Dual Resonance Model,” *Progress of Theoretical Physics* **46** 5 (1971) 1560–1569.
- [41] S. Deser and B. Zumino, “A complete action for the spinning string,” *Phys.Lett.* **B65** (1976) 369
- [42] L. Brink, P. Di Vecchia, Paul S. Howe, “A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string,” *Phys.Lett.* **B65** (1976) 471
- [43] A. Polyakov, “Quantum geometry of bosonic strings,” *Phys.Lett.* **B103** (1981) 207
- [44] A. Polyakov, “Quantum geometry of fermionic strings,” *Phys.Lett.* **B103** (1981) 211
- [45] A. Neveu and J.H. Schwarz, “Factorizable dual model of pions,” *Nucl.Phys.B* **31** (1971) 86-112.
- [46] P. Ramond, “Dual Theory for Free Fermions,” *Phys.Rev.D* **3** (1971) 2415-2418.
- [47] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Supersymmetrical Dual String Theory,” *Nucl. Phys.* **B181** (1981), 502–530.
- [48] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Supersymmetrical Dual String Theory (II): Vertices and Trees,” *Nucl. Phys.* **B198** (1982), 252–268.
- [49] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Supersymmetrical Dual String Theory (III): Loops and Renormalization,” *Nucl. Phys.* **B198** (1982), 441–460.
- [50] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Covariant Description of Superstrings,” *Phys.Lett.B* **136** (1984) 367-370.
- [51] N. Berkovits, “Super Poincare covariant quantization of the superstring,” *JHEP* **04** (2000), 018 [arXiv:hep-th/0001035 [hep-th]].
- [52] N. Berkovits, “Covariant quantization of the superstring,” *Int. J. Mod. Phys. A* **16** (2001), 801-811 [arXiv:hep-th/0008145 [hep-th]].

- [53] T. H. Buscher, “A Symmetry of the String Background Field Equations,” *Phys. Lett. B* **194** (1987), 59-62
- [54] T. H. Buscher, “Path Integral Derivation of Quantum Duality in Nonlinear Sigma Models,” *Phys. Lett. B* **201** (1988), 466-472
- [55] A. Giveon, E. Rabinovici and G. Veneziano, “Duality in String Background Space,” *Nucl. Phys. B* **322** (1989), 167-184
- [56] J. Maharana and J. H. Schwarz, “Noncompact symmetries in string theory,” *Nucl. Phys. B* **390** (1993), 3-32 [arXiv:hep-th/9207016 [hep-th]].
- [57] C. Montonen and D. I. Olive, “Magnetic Monopoles as Gauge Particles?,” *Phys. Lett. B* **72** (1977), 117-120
- [58] A. Font, L. E. Ibanez, D. Lust and F. Quevedo, “Strong - weak coupling duality and nonperturbative effects in string theory,” *Phys. Lett. B* **249** (1990), 35-43
- [59] J. H. Schwarz and A. Sen, “Duality symmetries of 4-D heterotic strings,” *Phys. Lett. B* **312** (1993), 105-114 [arXiv:hep-th/9305185 [hep-th]].
- [60] C. M. Hull and P. K. Townsend, “Unity of superstring dualities,” *Nucl. Phys. B* **438** (1995), 109-137 [arXiv:hep-th/9410167 [hep-th]].
- [61] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, “Progress Toward a Theory of Supergravity,” *Phys. Rev. D* **13** (1976), 3214-3218
- [62] C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry and D. Friedan, “Strings in Background Fields,” *Nucl. Phys. B* **262** (1985), 593-609
- [63] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, “Heterotic String Theory. 1. The Free Heterotic String,” *Nucl. Phys. B* **256** (1985), 253.
- [64] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, “Heterotic String Theory. 2. The Interacting Heterotic String,” *Nucl. Phys. B* **267** (1986), 75-124.
- [65] Y. Cai and C. A. Nunez, “Heterotic String Covariant Amplitudes and Low-energy Effective Action,” *Nucl. Phys. B* **287**, 279 (1987).

- [66] D. J. Gross and J. H. Sloan, “The Quartic Effective Action for the Heterotic String,” Nucl. Phys. B **291**, 41 (1987).
- [67] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, “Order alpha-prime (Two Loop) Equivalence of the String Equations of Motion and the Sigma Model Weyl Invariance Conditions: Dependence on the Dilaton and the Antisymmetric Tensor,” Nucl. Phys. B **293**, 385 (1987).
- [68] N. Sakai and Y. Tani, “One Loop Amplitudes and Effective Action in Superstring Theories,” Nucl. Phys. B **287**, 457 (1987).
- [69] M. Abe, H. Kubota, and N. Sakai, “Loop corrections to the heterotic string effective lagrangian”, Phys. Lett. B **200**, 461–465 (1988).
- [70] M. Abe, H. Kubota, and N. Sakai, “Loop corrections to the $E_8 \times E_8$ heterotic string effective lagrangian”, Nucl. Phys. B **306**, 405 (1988).
- [71] J. Ellis, P. Jetzer, and L. Mizrachi, “One loop string corrections to the effective field theory”, Nucl. Phys. B **303**, 1 (1988).
- [72] M. T. Grisaru, A. E. M. van de Ven and D. Zanon, “Four Loop Divergences for the $N=1$ Supersymmetric Nonlinear Sigma Model in Two-Dimensions,” Nucl. Phys. B **277** (1986), 409-428
- [73] A. Sen, “ $O(d) \times O(d)$ symmetry of the space of cosmological solutions in string theory, scale factor duality and two-dimensional black holes,” Phys. Lett. B **271** (1991), 295-300
- [74] H. Razaghian and M. R. Garousi, “ R^4 terms in supergravities via T-duality constraint,” Phys. Rev. D **97** (2018) no.10, 106013 [arXiv:1801.06834 [hep-th]].
- [75] M. R. Garousi, “Effective action of type II superstring theories at order α'^3 : NS-NS couplings,” JHEP **02** (2021), 157 [arXiv:2011.02753 [hep-th]].
- [76] M. R. Garousi, “Minimal gauge invariant couplings at order α'^3 : NS-NS fields,” Eur. Phys. J. C **80** (2020) no.11, 1086 [arXiv:2006.09193 [hep-th]].
- [77] M. R. Garousi, “On NS-NS couplings at order α'^3 ,” Nucl. Phys. B **971** (2021), 115510 [arXiv:2012.15091 [hep-th]].
- [78] M. R. Garousi, “ $O(9,9)$ symmetry of NS-NS couplings at order α'^3 ,” Phys. Rev. D **104** (2021) no.6, 066013 [arXiv:2105.07598 [hep-th]].

- [79] O. Hohm and H. Samtleben, “Exceptional Form of D=11 Supergravity,” *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013), 231601, [arXiv:1308.1673 [hep-th]].
- [80] O. Hohm and H. Samtleben, “Exceptional Field Theory I: $E_{6(6)}$ covariant Form of M-Theory and Type IIB,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.6, 066016, [arXiv:1312.0614 [hep-th]].
- [81] O. Hohm and H. Samtleben, “Exceptional field theory. II. $E_{7(7)}$,” *Phys. Rev. D* **89** (2014), 066017, [arXiv:1312.4542 [hep-th]].
- [82] O. Hohm and H. Samtleben, “Exceptional field theory. III. $E_{8(8)}$,” *Phys. Rev. D* **90** (2014), 066002, [arXiv:1406.3348 [hep-th]].
- [83] D. S. Berman and C. D. A. Blair, “The Geometry, Branes and Applications of Exceptional Field Theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **35** (2020) no.30, 2030014, [arXiv:2006.09777 [hep-th]].
- [84] O. Hohm and S. K. Kwak, “ $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric double field theory”, *JHEP* **1203** (2012) 080 [hep-th/1111.7293].
- [85] I. Jeon, K. Lee and J. H. Park, “Supersymmetric Double Field Theory: Stringy Reformulation of Supergravity,” *Phys. Rev. D* **85** (2012), 081501 [erratum: *Phys. Rev. D* **86** (2012), 089903], [arXiv:1112.0069 [hep-th]].
- [86] G. Aldazabal, D. Marques and C. Nunez, “Double Field Theory: A Pedagogical Review,” *Class. Quant. Grav.* **30**, 163001 (2013) [arXiv:1305.1907 [hep-th]].
- [87] D. S. Berman and D. C. Thompson, “Duality Symmetric String and M-Theory,” *Phys. Rept.* **566** (2014), 1-60, [arXiv:1306.2643 [hep-th]].
- [88] O. Hohm, D. Lüst and B. Zwiebach, “The Spacetime of Double Field Theory: Review, Remarks, and Outlook,” *Fortsch. Phys.* **61** (2013), 926-966, [arXiv:1309.2977 [hep-th]].
- [89] O. Hohm and S. K. Kwak, “Frame-like Geometry of Double Field Theory,” *J. Phys. A* **44** (2011), 085404 [arXiv:1011.4101 [hep-th]].
- [90] O. Hohm and B. Zwiebach, “On the Riemann Tensor in Double Field Theory,” *JHEP* **05** (2012), 126, [arXiv:1112.5296 [hep-th]].
- [91] D. Geissbuhler, D. Marques, C. Nunez and V. Penas, “Exploring Double Field Theory,” *JHEP* **1306**, 101 (2013) [arXiv:1304.1472 [hep-th]].

- [92] A. Coimbra and R. Minasian, “M-theoretic Lichnerowicz formula and supersymmetry,” *JHEP* **10** (2019), 036 [arXiv:1705.04330 [hep-th]].
- [93] E. Bergshoeff, M. de Roo, B. de Wit, P. van Nieuwenhuizen, “Ten-Dimensional Maxwell-Einstein Supergravity, Its Currents, and the Issue of Its Auxiliary Fields,” *Nucl. Phys. B* **195** (1982) 97.
- [94] E. Bergshoeff and M. de Roo, “Supersymmetric Chern-simons Terms in Ten-dimensions,” *Phys. Lett. B* **218** (1989) 210.
- [95] E. A. Bergshoeff and M. de Roo, “The Quartic Effective Action of the Heterotic String and Supersymmetry,” *Nucl. Phys. B* **328** (1989) 439.
- [96] O. Hohm and S. K. Kwak, “Double Field Theory Formulation of Heterotic Strings,” *JHEP* **1106** (2011) 096 [arXiv:1103.2136 [hep-th]].
- [97] M. Grana and D. Marques, “Gauged Double Field Theory,” *JHEP* **1204**, 020 (2012) [arXiv:1201.2924 [hep-th]].
- [98] W. H. Baron, D. Marques and C. A. Nunez, “ β Symmetry of Supergravity,” *Phys. Rev. Lett.* **130** (2023) no.6, 061601 [arXiv:2209.02079 [hep-th]].
- [99] W. H. Baron, D. Marques and C. A. Nunez, “Exploring the β symmetry of supergravity,” *JHEP* **12** (2023), 006 [arXiv:2307.02537 [hep-th]].
- [100] W. H. Baron and N. A. Yazbek, “ β symmetry in type II supergravities,” *JHEP* **03** (2024), 146 [arXiv:2312.15061 [hep-th]].
- [101] J. Kupka, C. Strickland-Constable and F. Valach, “Direct derivation of $\mathcal{N} = 1$ supergravity in ten dimensions to all orders in fermions,” *JHEP* **07** (2025), 114 [arXiv:2410.16046 [hep-th]].
- [102] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory,” *Phys. Lett.* **149B**, 117 (1984).
- [103] G. F. Chapline and N. S. Manton, “Unification of Yang-Mills Theory and Supergravity in Ten-Dimensions,” *Phys. Lett. B* **120** (1983), 105-109
- [104] L. J. Romans and N. P. Warner, “Some Supersymmetric Counterparts of the Lorentz Chern-simons Term,” *Nucl. Phys. B* **273**, 320 (1986).

- [105] M. de Roo, H. Suelmann and A. Wiedemann, “The Supersymmetric effective action of the heterotic string in ten-dimensions,” Nucl. Phys. B **405** (1993), 326-366 [arXiv:hep-th/9210099 [hep-th]].
- [106] K. Peeters, P. Vanhove and A. Westerberg, “Supersymmetric higher derivative actions in ten-dimensions and eleven-dimensions, the associated superalgebras and their formulation in superspace,” Class. Quant. Grav. **18** (2001), 843-890 [arXiv:hep-th/0010167 [hep-th]].
- [107] S. J. Gates, Jr. and H. Nishino, “New $D = 10$, $N = 1$ Superspace Supergravity and Local Symmetries of Superstrings,” Phys. Lett. B **173**, 46 (1986).
- [108] S. J. Gates, Jr. and H. Nishino, “Manifestly Supersymmetric $O(\alpha')$ Superstring Corrections in New $D = 10$, $N = 1$ Supergravity Yang-Mills Theory,” Phys. Lett. B **173**, 52 (1986).
- [109] L. Bonora, M. Bregola, K. Lechner, P. Pasti and M. Tonin, “Anomaly Free Supergravity and SuperYang-mills Theories in Ten-dimensions,” Nucl. Phys. B **296**, 877 (1988).
- [110] S. Bellucci and S. J. Gates, Jr., “ $D = 10$, $N = 1$ Superspace Supergravity and the Lorentz Chern-simons Form,” Phys. Lett. B **208**, 456 (1988).
- [111] S. Bellucci, D. A. Depireux and S. J. Gates, Jr., “Consistent and Universal Inclusion of the Lorentz Chern-Simons Form in $D = 10$, $N = 1$ Supergravity Theories,” Phys. Lett. B **238**, 315 (1990).
- [112] R. Kallosh, “Strings and Superspace,” Phys. Scripta T **15**, 118 (1987).
- [113] B. E. W. Nilsson and A. K. Tollsten, “Supersymmetrization of Zeta (3) $(R_{\mu\nu\rho\sigma})^{**4}$ in Superstring Theories,” Phys. Lett. B **181**, 63 (1986).
- [114] P. S. Howe, “Heterotic supergeometry revisited,” [arXiv:0805.2893 [hep-th]].
- [115] W. H. Baron, E. Lescano and D. Marqués, “The generalized Bergshoeff-de Roo identification,” JHEP **11** (2018), 160 [arXiv:1810.01427 [hep-th]].
- [116] O. A. Bedoya, D. Marques and C. Nunez, “Heterotic α' -corrections in Double Field Theory,” JHEP **1412** (2014) 074 [arXiv:1407.0365 [hep-th]].
- [117] A. Coimbra, R. Minasian, H. Triendl and D. Waldram, “Generalised geometry for string corrections,” JHEP **1411** (2014) 160 [arXiv:1407.7542 [hep-th]].

- [118] D. Marques and C. A. Nunez, “T-duality and α' -corrections,” JHEP **1510**, 084 (2015) [arXiv:1507.00652 [hep-th]].
- [119] W. H. Baron, J. J. Fernandez-Melgarejo, D. Marques and C. Nunez, “The Odd story of α' -corrections,” JHEP **1704**, 078 (2017) [arXiv:1702.05489 [hep-th]].
- [120] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics,” Phys. Rev. Lett. **11** (1963), 237-238
- [121] G. C. Debney, R. P. Kerr and A. Schild, “Solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell Equations,” J. Math. Phys. **10** (1969), 1842
- [122] K. Lee, “Kerr-Schild Double Field Theory and Classical Double Copy,” JHEP **10** (2018), 027 [arXiv:1807.08443 [hep-th]].
- [123] W. Cho and K. Lee, “Heterotic Kerr-Schild Double Field Theory and Classical Double Copy,” JHEP **07** (2019), 030 [arXiv:1904.11650 [hep-th]].
- [124] K. Kim, K. Lee, R. Monteiro, I. Nicholson and D. Peinador Veiga, “The Classical Double Copy of a Point Charge,” JHEP **02** (2020), 046 [arXiv:1912.02177 [hep-th]].
- [125] D. S. Berman, K. Kim and K. Lee, “The classical double copy for M-theory from a Kerr-Schild ansatz for exceptional field theory,” JHEP **04** (2021), 071 [arXiv:2010.08255 [hep-th]].
- [126] S. Angus, K. Cho and K. Lee, “The classical double copy for half-maximal supergravities and T-duality,” JHEP **10** (2021), 211 [arXiv:2105.12857 [hep-th]].
- [127] E. Lescano and S. Roychowdhury, “Heterotic Kerr-Schild Double Field Theory and its double Yang-Mills formulation,” JHEP **04** (2022), 090 [arXiv:2201.09364 [hep-th]].
- [128] H. Kawai, D. C. Lewellen and S. H. H. Tye, “A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings,” Nucl. Phys. B **269** (1986), 1-23
- [129] Z. Bern, J. J. M. Carrasco and H. Johansson, “New Relations for Gauge-Theory Amplitudes,” Phys. Rev. D **78** (2008), 085011 [arXiv:0805.3993 [hep-ph]].
- [130] Z. Bern, J. J. M. Carrasco and H. Johansson, “Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory,” Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 061602 [arXiv:1004.0476 [hep-th]].

- [131] Z. Bern, T. Dennen, Y. t. Huang and M. Kiermaier, “Gravity as the Square of Gauge Theory,” *Phys. Rev. D* **82** (2010), 065003 [arXiv:1004.0693 [hep-th]].
- [132] R. Monteiro, D. O’Connell and C. D. White, “Black holes and the double copy,” *JHEP* **12** (2014), 056 [arXiv:1410.0239 [hep-th]].
- [133] W. Baron and D. Marques, “The generalized Bergshoeff-de Roo identification. Part II,” *JHEP* **01** (2021), 171 [arXiv:2009.07291 [hep-th]].
- [134] S. Hronek and L. Wulff, “String theory at order α'^2 and the generalized Bergshoeff-de Roo identification” *JHEP* **11** (2021), 186 [arXiv:2109.12200 [hep-th]].
- [135] S. Hronek, L. Wulff and S. Zacarias, “The α'^2 correction from double field theory” *JHEP* **11** (2022), 090 [arXiv:2206.10640 [hep-th]].
- [136] L. Wulff, “Second order bosonic string effective action from $O(d, d)$,” *JHEP* **02** (2025), 194 [arXiv:2406.15234 [hep-th]].
- [137] D. J. Gross and E. Witten, “Superstring Modifications of Einstein’s Equations,” *Nucl. Phys. B* **277** (1986), 1
- [138] M. T. Grisaru and D. Zanon, “ σ Model Superstring Corrections to the Einstein-hilbert Action,” *Phys. Lett. B* **177** (1986), 347-351
- [139] M. D. Freeman, C. N. Pope, M. F. Sohnius and K. S. Stelle, “Higher Order σ Model Counterterms and the Effective Action for Superstrings,” *Phys. Lett. B* **178** (1986), 199-204
- [140] S. Hronek and L. Wulff, “ $O(D, D)$ and the string α' expansion: an obstruction,” *JHEP* **04** (2021), 013 [arXiv:2012.13410 [hep-th]].
- [141] L. Wulff, “Completing R^4 using $O(d,d)$,” *JHEP* **08** (2022), 187 [arXiv:2111.00018 [hep-th]].
- [142] S. W. Hsia, A. R. Kamal and L. Wulff, “No manifest T duality at order α'^3 ,” *Phys. Rev. D* **111** (2025) no.6, L061904 [arXiv:2411.15302 [hep-th]].
- [143] D. Butter, “Exploring the geometry of supersymmetric double field theory,” *JHEP* **01** (2022), 152, [arXiv:2101.10328 [hep-th]].

- [144] D. Butter, “Type II double field theory in superspace,” *JHEP* **02** (2023), 187 [arXiv:2209.07296 [hep-th]].
- [145] H. Y. Chang, E. Sezgin and Y. Tanii, “Higher derivative couplings of hypermultiplets,” *JHEP* **06** (2023), 172 [arXiv:2304.06073 [hep-th]].
- [146] D. Butter, F. Hassler, C. N. Pope and H. Zhang, “Generalized dualities and supergroups,” *JHEP* **12** (2023), 052 [arXiv:2307.05665 [hep-th]].
- [147] J. T. Liu and R. J. Saskowski, “Consistent truncations in higher derivative supergravity,” *JHEP* **09** (2023), 136 [arXiv:2307.12420 [hep-th]].
- [148] J. T. Liu and R. Minasian, “Higher-derivative couplings in string theory: five-point contact terms,” *Nucl. Phys. B* **967** (2021), 115386 [arXiv:1912.10974 [hep-th]].
- [149] S. Jayaprakash and J. T. Liu, “Higher derivative heterotic supergravity on a torus and supersymmetry,” *JHEP* **12** (2024), 076 [arXiv:2406.14600 [hep-th]].
- [150] G. Aldazabal, W. Baron, D. Marques and C. Nunez, “The effective action of Double Field Theory,” *JHEP* **11** (2011), 052 [erratum: *JHEP* **11** (2011), 109], [arXiv:1109.0290 [hep-th]].
- [151] P. A. Cano, P. Meessen, T. Ortín and P. F. Ramírez, “ α' -corrected black holes in String Theory,” *JHEP* **05** (2018), 110 [arXiv:1803.01919 [hep-th]].
- [152] S. Chimento, P. Meessen, T. Ortin, P. F. Ramirez and A. Ruiperez, “On a family of α' -corrected solutions of the Heterotic Superstring effective action,” *JHEP* **07** (2018), 080 [arXiv:1803.04463 [hep-th]].
- [153] A. Fontanella and T. Ortín, “On the supersymmetric solutions of the Heterotic Superstring effective action,” *JHEP* **06** (2020), 106 [erratum: *JHEP* **10** (2021), 130] [arXiv:1910.08496 [hep-th]].
- [154] T. Ortin, “ $O(n, n)$ invariance and Wald entropy formula in the Heterotic Superstring effective action at first order in α' ,” *JHEP* **01** (2021), 187 [arXiv:2005.14618 [hep-th]].
- [155] Z. Elgood and T. Ortin, “T duality and Wald entropy formula in the Heterotic Superstring effective action at first-order in α' ,” *JHEP* **10** (2020), 097 [erratum: *JHEP* **06** (2021), 105] [arXiv:2005.11272 [hep-th]].

- [156] Z. Elgood, D. Mitsios, T. Ortín and D. Pereñíguez, “The first law of heterotic stringy black hole mechanics at zeroth order in α' ,” JHEP **07** (2021), 007 [arXiv:2012.13323 [hep-th]].
- [157] Z. Elgood, T. Ortín and D. Pereñíguez, “The first law and Wald entropy formula of heterotic stringy black holes at first order in α' ,” JHEP **05** (2021), 110 [arXiv:2012.14892 [hep-th]].
- [158] P. A. Cano, T. Ortín, A. Ruipérez and M. Zatti, “Non-extremal, α' -corrected black holes in 5-dimensional heterotic superstring theory,” JHEP **12** (2022), 150 [arXiv:2210.01861 [hep-th]].
- [159] I. Bandos and T. Ortin, “Noether-Wald charge in supergravity: the fermionic contribution,” JHEP **12** (2023), 095 [arXiv:2305.10617 [hep-th]].
- [160] T. Ortin, “Black hole solutions in theories of supergravity,” [arXiv: 2412.12020 [hep-th]].
- [161] J. i. Sakamoto, Y. Sakatani and K. Yoshida, “Homogeneous Yang-Baxter deformations as generalized diffeomorphisms,” J. Phys. A **50** (2017) no.41, 415401 [arXiv:1705.07116 [hep-th]].
- [162] J. J. Fernandez-Melgarejo, J. i. Sakamoto, Y. Sakatani and K. Yoshida, “ T -folds from Yang-Baxter deformations,” JHEP **12** (2017), 108 [arXiv:1710.06849 [hep-th]].
- [163] I. Bakhmatov and E. T. Musaev, “Classical Yang-Baxter equation from β -supergravity,” JHEP **01** (2019), 140 [arXiv:1811.09056 [hep-th]].
- [164] R. Borsato, A. Vilar López and L. Wulff, “The first α' -correction to homogeneous Yang-Baxter deformations using $O(d, d)$,” JHEP **07** (2020) no.07, 103 [arXiv:2003.05867 [hep-th]].
- [165] D. Butter, F. Hassler, C. N. Pope and H. Zhang, “Consistent truncations and dualities,” JHEP **04** (2023), 007 [arXiv:2211.13241 [hep-th]].
- [166] D. Osten, “Heterotic integrable deformation of the principal chiral model,” Phys. Rev. D **109** (2024) no.10, 106021 [arXiv:2312.10149 [hep-th]].