

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Ciencias de la Atmósfera y los Océanos

Análisis y validación de simulaciones climáticas mediante técnicas topológicas en dinámica no lineal

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la
Universidad de Buenos Aires, área Ciencias de la Atmósfera y los Océanos

Lic. Caterina Mosto

Directora de Tesis: Dra. Denisse Sciamarella
Co-directora: Dra. Marisol Osman
Consejero de Estudios: Dr. Juan José Ruiz
Lugar de trabajo: Centro de Investigaciones del Mar y la Atmósfera
Buenos Aires, 2025

A mi gran mentora Denisse,
por compartirme su entusiasmo
y ser una fuente inagotable de inspiración

Análisis de simulaciones climáticas mediante técnicas topológicas en dinámica no lineal

Resumen

En la teoría de sistemas dinámicos, los invariantes topológicos en el espacio de estados permiten determinar si dos dinámicas son equivalentes y, en particular, si un modelo representa adecuadamente la dinámica asociada a una serie temporal obtenida a partir de observaciones o simulaciones numéricas. Inversamente, también permiten construir modelos reducidos que capturen los mecanismos principales que generan los datos, sin necesidad de conocer de antemano las ecuaciones que rigen el sistema. En las ciencias del clima, existe una amplia variedad de modelos con diferentes jerarquías y resoluciones, por lo que resulta de gran interés evaluar en qué medida un modelo simplificado representa con fidelidad una determinada dinámica climatológica. Los modelos de baja dimensión se emplean, en particular, para emular características específicas de ciertos subsistemas o procesos no lineales. En esta tesis se desarrollan técnicas topológicas novedosas, basadas en la construcción de complejos celulares y grafos, junto con su aplicación a modelos reducidos utilizados para representar diversos procesos de variabilidad climática y oceánica.

Palabras clave: dinámica no lineal, modelos climáticos, topología, caos.

Analysis and validation of climate simulations using topological techniques in nonlinear dynamics

In dynamical systems theory, topological invariants in state space allow us to determine whether two dynamics are equivalent and, in particular, whether a model adequately represents the dynamics associated with a time series obtained from observations or numerical simulations. Conversely, they also make it possible to construct reduced models that capture the main mechanisms generating the data, without the need to know the governing equations of the system in advance. In climate science, there is a wide variety of models with different hierarchies and resolutions, making it highly relevant to assess the extent to which a simplified model faithfully represents a given climatological dynamic. Low-dimensional models are used, in particular, to emulate specific features of certain subsystems or nonlinear processes. This thesis develops novel topological techniques based on the construction of cell complexes and graphs, along with their application to reduced models used to represent various processes of climate and ocean variability.

Keywords: nonlinear dynamics, climate models, topology, chaos.

Índice general

Resumen **2**

Abstract **3**

Índice general **4**

Introducción **7**

1 Desarrollo de nuevos elementos en topología del caos **11**
Índice de definiciones 11
1.1 Topología en el espacio de estados 13
1.2 Complejos celulares y complejos BRAMAH 16
1.3 Grupos de homología 19
1.4 Templex 24
1.4.1 Construcción del templex en el espacio de estados 26
1.5 Unidades dinámicas fundamentales 31
1.5.1 Procedimiento de reducción de un templex 32
1.5.2 Unidades fundamentales para algunos atractores caóticos 33
1.5.3 El atractor toroidal caótico de Deng 42
1.5.4 Templex para una dinámica regular 45
1.6 Algoritmos desarrollados 47
1.6.1 Método de falsos vecinos cercanos 47
1.6.2 Cómputo de stripex 48
1.7 Conclusión 49

2 Aplicaciones en modelos climáticos de baja dimensión **51**
2.1 El atractor de Lorenz 96 51
2.2 Modelos simplificados de ENSO 55
2.3 Circulación Meridional del Atlántico Norte 58
2.3.1 Introducción 59
2.3.2 Modelo autónomo de la AMOC 60
2.3.3 Modelo no autónomo de la AMOC 64
2.4 Conclusiones 75

3 Desafíos para el análisis topológico de simulaciones climáticas de alta dimensión **77**
3.1 Introducción 77
3.2 Análisis métrico 78
3.2.1 Componentes principales de HGT mensual 82
3.2.2 Componentes principales de HGT diaria 84
3.3 Análisis topológico 86

3.3.1 Técnicas de cálculo de homologías 87
3.3.2 Hacia un pseudo-templex 91
3.4 Conclusiones 93

A Cómputo de grupos de homología **103**
A.1 Cálculo de los grupos de homología para la botella de Klein y un toro 103

B Reconstrucción del espacio de estados **107**
B.1 Embebidos por retardos temporales 107
B.2 Estimación del retardo temporal τ 108
B.3 Elección de la serie temporal 108

C Comparación entre métodos topológicos **111**

Bibliografía **113**

Introducción

Uno de los objetivos principales en las ciencias del clima y en el análisis de impactos asociados a fenómenos específicos es evaluar cómo un modelo representa la climatología, ya sea en términos de promedios o de variabilidad. La atmósfera y el océano son sistemas dinámicos que pueden describirse mediante ecuaciones basadas en leyes físicas. Los modelos climáticos, construidos sobre estos principios, permiten simular y proyectar el comportamiento futuro del sistema climático. Son herramientas fundamentales para entender su evolución, su variabilidad y los efectos del cambio climático, tanto a escala regional como global.

La naturaleza no lineal de muchos procesos dinámicos en sistemas naturales condujo al descubrimiento del caos determinista, caracterizado por la sensibilidad a las condiciones iniciales junto con un confinamiento en el espacio de estados, que da lugar a un comportamiento recurrente no periódico. Se ha demostrado que ciertos mecanismos geométricos simples —como el estiramiento, la compresión, el plegado o el corte— actúan sobre el flujo en el espacio de estados y determinan su estructura. El estiramiento amplifica pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, la compresión limita la expansión del sistema, el corte genera diferencias en las estructuras y el plegado recurrencia. Esta complejidad no requiere un número elevado de variables: el caos determinista para sistemas continuos puede surgir en espacios de estados de solo tres dimensiones.

La herramienta matemática que permite captar, de un modo general, los rasgos esenciales de los mecanismos responsables del caos determinista no es, sin embargo, la geometría, sino la topología. Esta disciplina estudia las propiedades que permanecen invariantes bajo deformaciones continuas, es decir, transformaciones que no implican cortar ni pegar. Por eso se espera que dos dinámicas distintas, pero generadas por los mismos mecanismos en el espacio de estados, compartan una estructura topológica equivalente. La posibilidad de extraer estas propiedades a partir de series temporales —obtenidas por observación o por simulaciones basadas en ecuaciones diferenciales y utilizadas para reconstruir el espacio de estados— permite comparar modelos con datos, contrastar dinámicas entre sí e incluso construir modelos reducidos que conserven los rasgos propios de una dinámica dada, manteniendo su capacidad explicativa.

En 1976, el bioquímico alemán Otto Eberhard Rössler formuló un sistema dinámico disipativo más simple capaz de generar caos determinista —una suerte de molécula de hidrógeno del caos. Este sistema posee tres parámetros, y la estructura que adopta en el espacio de estados a largo plazo depende de sus valores. El caso más célebre corresponde a un juego de parámetros que produce una estructura con forma acaracolada, conocida como atractor espiral de Rössler. La variedad con forma de caracol alberga todas las trayectorias posibles de la dinámica a largo plazo, sin importar las condiciones iniciales. Rössler observó que la ley de evolución temporal que da lugar a esta dinámica resulta de combinar algebraicamente un oscilador ordinario de dos variables y un conmutador no lineal de una variable. Inspirándose en la unión de átomos en los elementos químicos, conjeturó entonces que cualquier dinámica caótica podría derivarse de variantes en la combinación entre unidades fundamentales oscilantes y conmutantes.

No obstante, la conjetura de Rössler plantea una dificultad fundamental. Hasta el presente, no ha sido posible establecer relaciones claras entre la estructura algebraica de las ecuaciones que gobiernan una dinámica y la forma —es decir, la estructura topológica— de los atractores que estas ecuaciones

engendran al variar los parámetros. Un leve cambio en uno de los parámetros del sistema de Rössler, por ejemplo, transforma la estructura acaracolada en una estructura de embudo. La clasificación de los atractores caóticos continúa siendo, por tanto, un desafío que invita a desarrollar enfoques topológicos en el espacio de estados, donde pueden emerger semejanzas estructurales entre dinámicas generadas por sistemas de ecuaciones muy distintos —incluso entre ecuaciones ordinarias y ecuaciones con retardo.

La intuición de que la evolución de un sistema dinámico depende de propiedades cualitativas en el espacio de estados —más que de la forma exacta de sus ecuaciones— se remonta al siglo XIX. Henri Poincaré dejó una huella profunda en ambas direcciones: por un lado, fue pionero en el estudio del caos, al mostrar que incluso sistemas deterministas simples pueden tener soluciones impredecibles; por otro, introdujo el concepto de *analysis situs* para referirse al estudio de las propiedades topológicas de los sistemas. Su enfoque cualitativo no era inexacto, sino que perseguía una comprensión no estrictamente geométrica de los mecanismos que actúan en el espacio de estados. Con ello, inauguró una manera rigurosa de pensar lo cualitativo, hoy central en el estudio formal de los flujos caóticos.

Estas dos vertientes vuelven a encontrarse un siglo más tarde en la figura del meteorólogo estadounidense Edward N. Lorenz, pionero en la comprensión de la dinámica atmosférica. Al estudiar de manera simplificada la convección, propuso un sistema de tres variables que, para ciertos valores de los parámetros, mostraba una evolución determinista pero impredecible a largo plazo. La estructura que alberga estas soluciones en el espacio de estados tiene forma de mariposa; Lorenz la denominó *isopleth* en su célebre artículo de 1963.

Dos décadas más tarde, el matemático Robert F. Williams retomó esta noción y la formalizó bajo el nombre de *variedad enramada* (en inglés, *branched manifold*), un objeto matemático capaz de representar esquemáticamente la estructura topológica de los atractores caóticos. En términos matemáticos, una variedad enramada es una variedad localmente euclídea salvo en ciertos puntos de ramificación, donde el espacio deja de ser separable en el sentido definido por Felix Hausdorff en 1914. Fue en un congreso que Williams conoció a Joan S. L. Birman, matemática especializada en teoría de nudos. Juntos desarrollaron un formalismo para describir atractores tridimensionales a partir del modo en que sus trayectorias se anudan dentro de la estructura de una variedad enramada.

La teoría de nudos presenta una limitación severa para el estudio topológico de dinámicas en espacios de estados de dimensión arbitraria: en espacios de más de tres dimensiones, los nudos pierden sentido porque se desanudan. Para evitar la restricción dimensional de la teoría de nudos, y también sortear la dificultad de reconstruir trayectorias dentro de una variedad enramada —trayectorias que, en presencia de ruido, no resulta sencillo delinear—, es posible recurrir a otros métodos. La topología algebraica ha ideado un objeto matemático llamado complejo celular, a través del cual es posible identificar y clasificar variedades cualesquiera mediante el cómputo algebraico de sus propiedades topológicas. Un complejo celular es un espacio topológico construido mediante la unión de celdas de distintas dimensiones, según reglas específicas de pegado. Este concepto fue introducido por J. H. C. Whitehead —más conocido como Henry Whitehead—, destacado matemático británico especializado en topología y geometría diferencial. Su formalismo puede emplearse para inferir las propiedades topológicas de una variedad enramada a partir de un conjunto discreto de puntos que representan estados del sistema, ya sea provenientes de soluciones numéricas o de una reconstrucción del espacio de estados a partir de series temporales.

Las recetas para construir un complejo celular a partir de un conjunto de puntos —suele hablarse también de nube de puntos— son variadas: todas satisfacen las reglas de pegado que definen un complejo celular, pero no necesariamente aproximan la variedad enramada de manera tal que las celdas de máxima dimensión que forman el complejo reflejen la distribución local de los puntos. El complejo celular que cumple con estas condiciones fue introducido en 1999 y se denomina actualmente complejo BRAMAH. El acrónimo procede del inglés *Branched Manifold Analysis through Homologies*. El álgebra que permite describir las propiedades de un complejo celular requiere definir una orientación para las celdas, es decir, una dirección de lectura para sus vértices (0-celdas), segmentos (1-celdas), caras (2-celdas), volúmenes (3-celdas), etc. El complejo celular que aproxima la mariposa de Lorenz, por ejemplo, es un complejo

que no tiene 3-celdas: las alas de la mariposa son superficiales y pueden aproximarse adecuadamente con 2-celdas. En un complejo BRAMAH uniformemente orientado, es posible calcular no solo los grupos de homología, que identifican los agujeros en un complejo celular cualquiera —el atractor de Lorenz tiene un agujero en cada ala—, sino también los grupos de torsión. Un complejo BRAMAH permite además identificar los sitios de juntura entre ramas; en el caso del atractor de Lorenz, las 1-celdas que cumplen la función de mantener las dos alas del atractor engarzadas. Como afirma Christine Kinsey parafraseando a Shakespeare, hay muchas más cosas en un complejo celular de las que sueña la teoría de la homología.

Las celdas de un complejo BRAMAH están orientadas para definir un álgebra de cadenas, pero esta orientación no guarda relación alguna con la dirección en que una trayectoria visita las celdas de máxima dimensión del complejo. Para incorporar la información de la evolución temporal continua y unidireccional sobre el complejo celular, se introduce en 2022 el concepto de *templex*, un objeto matemático formado por un complejo BRAMAH y un grafo dirigido cuyos nodos son las celdas de máxima dimensión (por ejemplo, las 2-celdas si la variedad es una superficie), y cuyas aristas dirigidas indican si el semi-flujo permite pasar de una celda a otra adyacente. El templex permite así caracterizar tanto los rasgos topológicos de la variedad subyacente como la organización del semi-flujo sobre las celdas del complejo. Por ejemplo, una dinámica puede ser regular o caótica y, no obstante, inscribirse en un toro. Así como los agujeros, torsiones y sitios de juntura caracterizan el complejo, las propiedades del semi-flujo se describen en términos de ciclos que comienzan y terminan en celdas contiguas a los sitios de juntura y que denominamos *generatex*. Las propiedades del templex codifican de un modo integral las características topológicas propias de una variedad y de un semi-flujo sobre ella. Como se verá, los generatex pueden interpretarse como modos de variabilidad topológica.

¿Permite el templex volver sobre la conjetura de Rössler, según la cual toda dinámica caótica puede descomponerse en dos tipos de unidades fundamentales? Esta tesis confirma esa conjetura, medio siglo después de haber sido formulada, dotándola por primera vez de un formalismo matemático adecuado. Se trata del primer aporte original del trabajo: mostrar que todo templex puede descomponerse, mediante reglas matemáticas bien definidas, en una combinación de unidades topológicas de dos tipos, que hemos denominado —siguiendo a Rössler— unidades oscilantes y conmutantes. La clave para identificarlas y reconocer su naturaleza comienza con un procedimiento de reducción que fusiona celdas (del complejo) hasta llevarlo al templex con el mínimo número de nodos. Recordemos que las propiedades de un complejo no dependen del número de celdas que lo componen, de modo que el templex reducido conserva los mismos rasgos topológicos —agujeros, torsiones, junturas, generatex— que el templex original. Este desarrollo será detallado en el primer capítulo de la tesis y aplicado a varios atractores de topología conocida, mostrando cómo esta descomposición permite construir una taxonomía de dinámicas caóticas en términos de unidades oscilantes y conmutantes que se agregan progresivamente. En estos términos puede comprenderse también, con particular sencillez, por qué el atractor espiral de Rössler constituye el tipo más elemental de caos que puede construirse.

El segundo capítulo estará dedicado al análisis topológico de modelos climáticos de baja dimensión, analizando las dinámicas en términos de unidades topológicas fundamentales y de modos de variabilidad caótica. Al célebre atractor de la mariposa, propuesto en 1963, se sumará el modelo de Lorenz formulado en 1996, ampliamente utilizado como banco de pruebas para métodos de predicción, reducción de dimensión y asimilación de datos en ciencias del clima. También se analizará un modelo simplificado de la Circulación Meridional de Retorno del Atlántico (AMOC, por sus siglas en inglés), tanto en su formato autónomo —sin forzante externo— como en su versión no autónoma. Los modelos simplificados del clima, también conocidos como Toy Models, han sido una herramienta muy utilizada por la comunidad no sólo por su bajo costo computacional, a diferencia de los modelos climáticos globales, sino por su potencial para entender procesos climáticos básicos, testear nuevas hipótesis, explorar la sensibilidad climática y como herramientas educativas. Entre los más conocidos se encuentran los modelos de balance de energía (EBMs por sus siglas en inglés), los modelos de una sola columna o los modelos estocásticos de baja dimensión, como el que se usa en esta tesis para representar la AMOC. La dinámica del AMOC

ha cobrado especial relevancia por su vínculo con posibles transiciones abruptas en el sistema climático global. Este modelo simula los cambios a largo plazo y las alternancias entre intervalos glaciares e interglaciares. Es la primera vez que estos modelos son estudiados desde la perspectiva de la topología del caos. Las propiedades del templex en los distintos intervalos permiten incluso realizar una lectura dinámica de los atractores instantáneos, que describen el conjunto de estados accesibles en un instante dado, bajo una realización específica del forzante externo. Permiten también identificar alertas topológicas tempranas y *tipping points*, entendidos como cambios abruptos e irreversibles de la dinámica.

El tercer capítulo culmina el recorrido conceptual de esta tesis con el análisis de resultados provenientes de datos climáticos de alta dimensión que describen la circulación troposférica en el Hemisferio Sur. Los modelos numéricos más avanzados que representan el océano y la atmósfera contienen millones de variables. Sin embargo, debido a restricciones físicas, gran parte de la variabilidad del sistema puede, a menudo, representarse mediante un número relativamente pequeño de patrones. Las investigaciones utilizando simulaciones con modelos acoplados océano-atmósfera muestran, de hecho, que tres componentes principales alcanzan para describir un porcentaje importante de las anomalías en la circulación atmosférica del Hemisferio Sur. Al aplicar las herramientas topológicas desarrolladas en esta tesis a las series temporales asociadas con los tres principales modos de variabilidad que describen adecuadamente, desde un punto de vista métrico, la circulación en el Hemisferio Sur, se obtiene una variedad subyacente equivalente a una bola sólida. A partir de estos datos, se construye un *pseudo templex*, entendido como una descomposición en clústeres que hacen las veces de celdas sin bordes en un complejo. Al grafo dirigido asociado —definido sobre los centroides de los clústeres y con aristas que siguen la dirección del flujo en el espacio de estados— no se le pueden calcular los generatex, ya que faltan los sitios de juntura que dependen de la matriz de bordes del complejo. Sin embargo, sí es posible estimar el número de ciclos independientes del grafo, que permiten compararlo con otras dinámicas y también con el grafo completo para el mismo número de clústeres, representativo –este último– de una ausencia total de estructura.

Esta tesis contribuye, pues, a definir nuevos conceptos y herramientas y a realizar análisis topológicos sobre modelos climáticos de complejidad variable mediante el enfoque proporcionado por el *templex*, como se detallará a continuación.

Capítulo 1

Desarrollo de nuevos elementos en topología del caos

Índice de definiciones

Espacio de estados 14
Atractor extraño 14
Variedad enramada . . . . . **??**
Template . . . . . **??**
n-celda 17
Complejo celular 17
Complejo orientado 18
Complejo BRAMAH 18
k-cadena 19
Operador borde 20
k-frontera 20
Cadenas homólogas 20
Grupo de homología 20
Número de Betti 21
Templex 24
Joining locus 25
Ingoing/outgoing cells 25
Joining/splitting node 25
Generatex 26
***Generatex* equivalentes** 26
Stripex 26
Descomposición 32
Bond 33
O-unidad 33
S-unidad 33

La topología es una rama de las matemáticas que estudia la forma de los objetos en el espacio de una manera distinta a la que propone la geometría [1]. La geometría se ocupa de las propiedades métricas de las figuras, aquellas propiedades que dependen de magnitudes, como por ejemplo la medida de los lados de un polígono, el valor de sus ángulos, la curvatura de una línea, etc. Ciertas propiedades de las figuras son completamente independientes de tales magnitudes. Tómese, por ejemplo, por un lado el interior de una elipse, de un círculo o de un cuadrado, y por otro lado, un anillo circular, como los de la Figura 1.1.

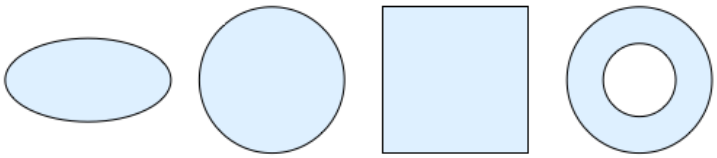


Figura 1.1: Elipse, círculo, cuadrado y anillo circular.

Cada una de estas figuras posee propiedades métricas distintas. Sin embargo, intuitivamente se percibe que hay algunas propiedades comunes a las tres primeras que la última no posee. Las tres primeras comparten, por ejemplo, esta propiedad: cualquier línea poligonal cerrada situada en su interior delimita una superficie que pertenece completamente al interior de la figura. Es evidente que el anillo no comparte esta propiedad cualitativa con los otros tres objetos.

Es precisamente esta diferencia la que permite introducir el enfoque propio de la topología. A diferencia de la geometría, la topología se ocupa de las propiedades de un objeto espacial que permanecen invariantes bajo isotopías, es decir, deformaciones continuas como estiramientos, torsiones o doblamientos. Se dice que dos objetos son topológicamente equivalentes si existe una transformación continua —sin cortar ni pegar— que permite convertir uno en el otro. Las acciones como estirar, comprimir y doblar (curvar), son ejemplos de tales deformaciones continuas. Por ejemplo, si se estira verticalmente la elipse de la Figura 1.1, o se comprimen los vértices del cuadrado, se obtiene el círculo de esa misma Figura. No así con el anillo, que por más que se lo estire o curve, no puede ser llevado a un círculo sin la necesidad de cortar o pegar.

La topología está interesada en la conectividad del objeto estudiado, medida en diferentes niveles. Dicha conectividad es representada a través de los agujeros topológicos, que son una propiedad invariante bajo transformaciones continuas. Los invariantes topológicos, como los grupos de homología, se calculan usando un complejo celular, como se explicará en esta tesis.

En el contexto de la teoría del caos, los métodos topológicos se utilizan para analizar y describir la estructura de trayectorias tanto de simulaciones numéricas como de observaciones experimentales [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. La caracterización topológica del caos proporciona una comprensión profunda del comportamiento intrincado y complejo producido por sistemas dinámicos caóticos [9, 10, 11, 12]. Comprender la estructura de los sistemas caóticos tiene aplicaciones prácticas en diversos campos, incluyendo la física, la biología, la economía y la ingeniería. Por ejemplo, la teoría del caos ha sido aplicada en áreas como la predicción meteorológica [13, 14, 15] y el control [16], la dinámica de fluidos [17, 18, 19], la óptica [20], las comunicaciones seguras [21], y la modelización de sistemas ecológicos [22, 23]. En casi todas estas disciplinas se conocen actualmente atractores caóticos topológicamente no equivalentes.

El comportamiento caótico de un sistema dinámico está definido por dos características: la sensibilidad a las condiciones iniciales y el comportamiento recurrente no periódico. La sensibilidad a las condiciones iniciales aparece como un apartamiento o estiramiento a lo largo del tiempo de los volúmenes que las representan en el espacio de estados. Por otra parte, si el flujo en el espacio de estados está acotado, dos puntos inicialmente cercanos que hayan alcanzado una separación máxima comenzarán a aproximarse nuevamente. Gráficamente esto se traduce en un "plegado" de dichos puntos. A este fenómeno se hace referencia cuando se habla de "estirado y plegado" en el espacio de estados.

Los invariantes topológicos codifican las operaciones de estirado y plegado en el espacio de estados, y por ello son los que se usarán en esta tesis. Por otra parte, los invariantes métricos son cantidades que describen las propiedades fractales del conjunto invariante al cual pertenece la solución observada [24]. Por ejemplo, la dimensión fractal permite estimar el grado de complejidad del flujo. Sin embargo, esta cuantificación de soluciones complejas no revela la naturaleza de la ley [25], es decir, no permite realizar una clasificación adecuada del sistema dinámico en términos de clases bien definidas. También se tienen los invariantes dinámicos, que son números reales que no varían frente a los cambios de coordenadas, pero sí frente a cambios en los valores de los parámetros de control. Un ejemplo de invariantes

dinámicos son los exponentes de Lyapunov. No obstante, estos no son robustos frente a perturbaciones experimentales [26, 27].

A fines del siglo XIX, Henri Poincaré señaló que el estudio de sistemas dinámicos debía centrarse en la evolución de conjuntos de condiciones iniciales, más que en la búsqueda de soluciones exactas. En los años 70, Otto Rössler propuso modelar el caos mediante la interacción de un oscilador bidimensional con un mecanismo de cambio abrupto (o "switch"), dando lugar a uno de los sistemas caóticos más simples. Más tarde, Bo Deng extendió esta idea ensamblando sistemas dinámicos complejos a partir de bloques elementales, en una lógica similar a la de un juego de construcción LEGO.

Durante la década de 1980, Joan Birman y Robert F. Williams introdujeron el uso de la teoría de nudos para describir la estructura topológica de flujos tridimensionales, lo que permitió clasificar atractores en sistemas caóticos disipativos. Sin embargo, los nudos dejan de ser relevantes en dimensiones mayores, ya que pueden deshacerse sin cortes en espacios de dimensión superior.

Para abordar el caos en espacios de dimensión arbitraria, se requieren herramientas topológicas que no dependan de la dimensión, como los complejos celulares introducidos por Whitehead en 1940. Un complejo celular es una estructura estratificada de celdas de distintas dimensiones, sobre la cual se construye un álgebra de cadenas que permite calcular invariantes topológicos como los grupos de homología y torsión. El uso de complejos celulares en el estudio del caos comienza en la década de 1990.

La topología algebraica proporciona el marco para traducir problemas topológicos en términos algebraicos. En el contexto del caos, permite adaptar estas herramientas a las particularidades del flujo en el espacio de estados.

Este enfoque se consolidó como un método eficaz para describir y clasificar sistemas caóticos. Posteriormente, Rössler propuso una clasificación jerárquica basada en el número de exponentes de Lyapunov positivos [28, 29].

Ahora bien, si bien los complejos celulares son útiles para caracterizar variedades [30], no capturan el ordenamiento temporal impuesto por un flujo. Esta limitación fue superada con la introducción del *templex* en 2022 [31, 32], un objeto matemático que extiende el complejo celular incorporando información dinámica. El templex consiste en un complejo BRAMAH —"Branched Manifold Analysis through Homologies"— dotado de un grafo dirigido. Las celdas de mayor dimensión local forman los nodos, y las aristas codifican el flujo sobre la variedad.

El templex representa así una generalización del complejo celular, adaptada al análisis algebraico de trayectorias caóticas. Mientras que en homología clásica se busca el número mínimo de celdas necesarias para describir una variedad sin flujo, aquí se plantea una pregunta análoga: ¿cuál es el número mínimo de nodos que debe tener el grafo del templex para representar un flujo dado?

Uno de los principales aportes de esta tesis es una metodología de reducción del templex, que permite descomponerlo en unidades elementales equivalentes a los osciladores y switches de Rössler. Dado un atractor, el templex reducido permite describirlo mediante un conjunto finito de bloques de dos tipos: O (oscilador) y S (switch). Esta reducción establece un vínculo directo entre la topología de las trayectorias y las unidades dinámicas que las generan. En este sentido, se ofrece una nueva clasificación del caos que completa la jerarquía iniciada por Rössler hace más de medio siglo. Estos resultados han sido publicados en la revista *Chaos* [33].

Las Secciones 1.1 a 1.4 desarrollan el formalismo necesario para construir un templex a partir de trayectorias. En la Sección 1.6 se presentan los algoritmos de construcción y reducción, y en la Sección 1.5 se introduce la última clase de esta taxonomía del caos: las unidades dinámicas fundamentales.

1.1. Topología en el espacio de estados

En la teoría de sistemas dinámicos, dada una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1.1.1}$$

donde el tiempo es la única variable independiente, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{f}$ satisface una condición de Lipschitz tal que $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave que genera un *flujo* $\phi(t, t_0, \mathbf{x})$. El espacio de estados es el espacio generado por las variables dependientes x_i, con $i = 1, ..., n$.

Definición 1.1. *Se denomina **espacio de estados** al conjunto de todos los posibles estados que puede adoptar un sistema dinámico entendido como una regla que especifica el estado futuro de todas las variables de estado a partir de sus valores presentes.*

Un sistema dinámico se dice determinista si para un estado actual hay un único futuro. El hecho de que haya un único futuro no quiere decir que dicho futuro sea predecible, puesto que en un sistema que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales es menester conocer con infinita precisión las condiciones iniciales para poder predecir el estado futuro a partir de las ecuaciones de gobierno. Se llama dimensión de un sistema dinámico a la dimensión del espacio de estados que lo representa.

El estado del sistema en un instante de tiempo t consiste en toda la información necesaria para determinar de manera única los estados futuros para tiempos $\geq t$; por ejemplo, típicamente, posiciones y velocidades. Para un sistema que puede modelarse matemáticamente, el espacio de estados se conoce a partir de las ecuaciones de movimiento. Un atractor es un subconjunto del espacio de estados que es invariante y atrae las trayectorias con un valor inicial en un entorno de dicho subconjunto. Ruelle y Takens [34, 35] introdujeron el término *atractor extraño* para describir el comportamiento a largo plazo de sistemas dinámicos deterministas caóticos.

Definición 1.2. *Un **atractor extraño** es un conjunto invariante del sistema dinámico que exhibe dependencia a las condiciones iniciales, tiene una estructura geométrica fractal (es decir, dimensión fractal no entera) y contiene un número denso de órbitas periódicas inestables (y por lo tanto un comportamiento a largo plazo no periódico).*

El atractor presentado por Edward Lorenz en 1963 [36], conocido como "el atractor de Lorenz", marcó el nacimiento de la teoría del caos en la física. El sistema de las ecuaciones (1.1.2) se trata de un sistema dinámico tridimensional, determinista y no lineal, derivado de una simplificación de las ecuaciones que describen los rollos de convección en la dinámica atmosférica. Al estar relacionadas con los movimientos convectivos de la atmósfera, estas ecuaciones se han utilizado para el estudio del pronóstico del tiempo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \tag{1.1.2}$$

con los valores de parámetros que producen caos: $R = 28$, $\sigma = 10$ y $b = \frac{8}{3}$.

Al integrar numéricamente el sistema de ecuaciones (1.1.2) se obtiene una trayectoria en el espacio de estados y la nube de puntos asociada se muestra en la Figura 1.2.

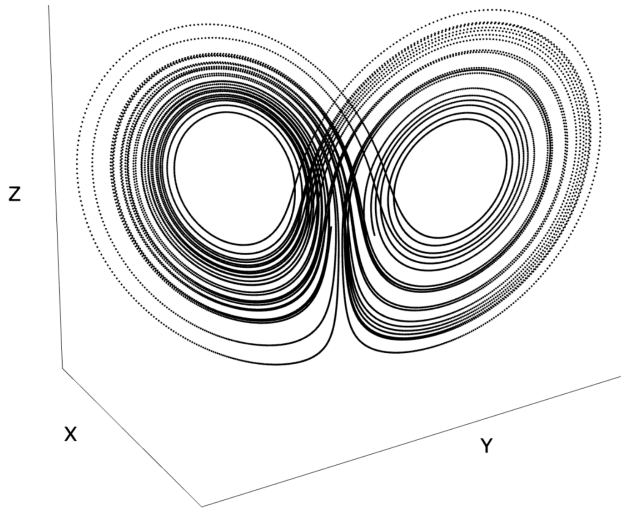


Figura 1.2: Nube de puntos en el espacio de estados que constituye el atractor de Lorenz, proveniente de integrar el sistema de ecuaciones (1.1.2).

La estructura de un atractor extraño puede aproximarse por un 'soporte' denominado *variedad enramada*. En general, una variedad es un conjunto localmente homeomorfo a una bola abierta del espacio euclídeo. Una variedad enramada es una variedad localmente euclídea salvo en ciertos puntos de ramificación, donde el espacio deja de ser separable en el sentido definido por Hausdorff, es decir, dos puntos distintos no necesariamente se separan por abiertos disjuntos.
Es, en consecuencia, una variedad en todas partes salvo en los puntos de ramificación, que están precisamente asociados a los mecanismos que actúan para estructurar un atractor.

Los matemáticos Birman y Williams [37] demostraron un teorema que lleva su nombre y que establece que, bajo ciertas condiciones, las trayectorias de un sistema dinámico colapsan hacia una región estrecha del espacio de estados, cuyo comportamiento puede ser bien aproximado por una variedad enramada de baja dimensión. La organización de las trayectorias puede ser descripta utilizando teoría de nudos, como se muestra en la Figura 1.3. Se conoce como template a la representación esquemática de esta organización para sistemas dinámicos tridimensionales.

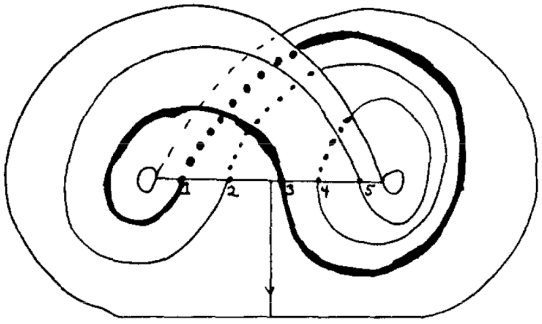
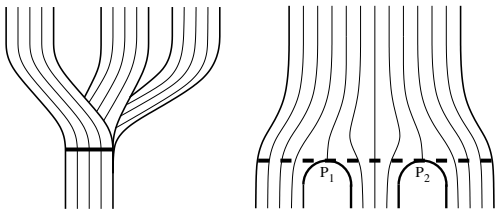


Figura 1.3: Nudos contenidos en el atractor de Lorenz 63. *Figura extraída de la Ref. [37].*

Un **template** es la representación esquemática de una variedad enramada mediante un diagrama estándar, en el que las ramas se representan como bandas capaces de alojar los nudos compatibles con un atractor extraño.

El template consta de un *splitting locus*, donde las bandas se separan, y de un *joining locus*, donde las bandas se reúnen en una única línea, como se muestra en la Figura 1.12.



(a) *Joining locus* (b) *Splitting locus*

Figura 1.4: (a) Tres bandas entrantes — el flujo va de arriba hacia abajo — se unen en una única banda saliente a través de un *joining locus* (línea gruesa). (b) Una banda entrante se divide en tres bandas salientes de acuerdo con los dos puntos críticos P_1 y P_2 a través de un *splitting locus* (línea gruesa discontinua).

El *template* correspondiente al atractor de Lorenz para representar el anudamiento de las trayectorias de la "mariposa" se muestra en la Figura 1.5, donde la flecha representa la dirección del flujo.

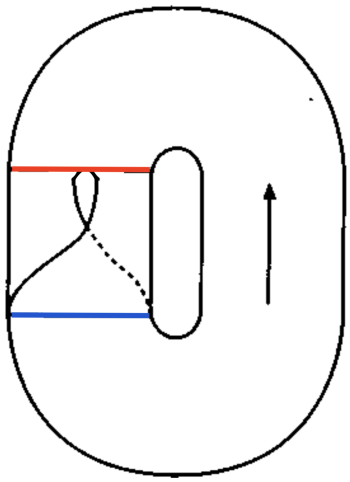


Figura 1.5: Template para el atractor de Lorenz, con *splitting locus* (rojo) y *joining locus* (azul). *Figura extraída de la Ref. [38].*

Esta representación permite asociar cada dinámica a una descripción simbólica que facilita su clasificación dentro de una taxonomía topológica. Sin embargo, los templates describen únicamente dinámicas en espacios de estados tridimensionales – los nudos se desanudan al añadir una cuarta dimensión.

1.2. Complejos celulares y complejos BRAMAH

Para abordar el caos en espacios de dimensión arbitraria, es necesario utilizar herramientas topológicas que no dependan de la dimensión, como los complejos celulares introducidos por Whitehead en 1940. Estos permiten representar la estructura topológica de un objeto mediante una colección jerárquica de celdas de distintas dimensiones, organizadas de forma que reflejan cómo se ensamblan entre sí. Al descomponer un espacio en componentes elementales, se facilita tanto su análisis como la comparación con otros espacios. Esta descomposición permite traducir problemas topológicos en términos algebraicos, a través del estudio de invariantes asociados a la disposición y conexión de las celdas. Cada celda se

construye a partir de otras de dimensión menor, lo que dota al complejo de una estructura estratificada apta para el cálculo algebraico de propiedades topológicas globales.

En topología algebraica, un complejo celular $\mathbb{K}$ es una estructura estratificada constituida por celdas de distintas dimensiones, denominadas k-celdas, con $k \in \mathbb{N}_0$. Estas celdas se ensamblan jerárquicamente para formar una representación discreta de un espacio topológico.

Definición 1.3. *Una **n-celda** es un conjunto cuyo interior es homeomorfo al disco n-dimensional abierto*

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

La frontera de una n-celda está compuesta por un número finito de celdas de dimensión estrictamente menor, denominadas caras.

- *Una 0-celda es un punto (vértice).*
- *Una 1-celda es un segmento (arista).*
- *Una 2-celda es una región poligonal (cara).*
- *Una 3-celda es un volumen poliedral, cuyas caras son 2-celdas, 1-celdas y 0-celdas.*

Las caras de una n-celda corresponden a celdas de dimensión inferior: por ejemplo, las caras de un segmento son 0-celdas, las de una 2-celda son 1-celdas y 0-celdas, y así sucesivamente. Estas n-celdas se ensamblan mediante un proceso inductivo para construir un complejo celular, que denotamos por $\mathbb{K}$ (véase la Figura 1.6).

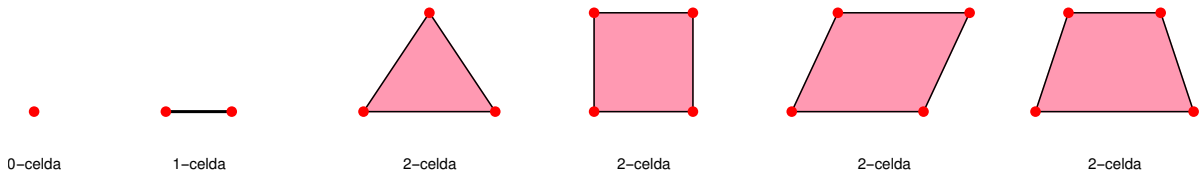


Figura 1.6: Un vértice es una 0-celda, un segmento es una 1-celda y un triángulo, un cuadrado, un paralelepípedo o un trapecio son ejemplos de 2-celdas.

Definición 1.4. *Un **complejo celular** $\mathbb{K}$ es una colección finita de celdas*

$$\mathbb{K} = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i,$$

donde cada σ_i es una k-celda con $k \in \mathbb{N}_0$, que satisface las siguientes condiciones:

- *Toda cara de una celda σ_i pertenece también a $\mathbb{K}$.*
- *Si σ_i y σ_j son celdas distintas en $\mathbb{K}$, entonces sus interiores son disjuntos:*

  $$\mathrm{Int}(\sigma_i) \cap \mathrm{Int}(\sigma_j) = \emptyset \quad \text{para } i \neq j,$$

  donde Int *denota el interior relativo de la celda.*
- *La dimensión del complejo $\mathbb{K}$, que denotaremos κ, es la dimensión máxima entre las celdas que lo componen.*

Los complejos celulares deben estar *orientados*, es decir, a cada k-celda con $k > 0$ se le asigna una orientación arbitraria, independientemente de la existencia o no de un flujo subyacente. Esta orientación es fundamental para definir operaciones algebraicas sobre las celdas, lo que permite introducir una estructura de *álgebra de cadenas*.

Definición 1.5. *Un complejo celular $\mathbb{K}$ de dimensión $\kappa = 2$ se dice **orientado** si cumple las siguientes condiciones:*

- *A cada 1-celda se le asigna una dirección, es decir, un orden en sus vértices (de origen a destino).*
- *A cada 2-celda se le asigna una orientación planar, por ejemplo, sentido horario o antihorario, lo que equivale a fijar un orden cíclico de sus aristas.*

Estas elecciones de orientación son *a priori* arbitrarias, pero deben mantenerse consistentes en todo el complejo para que el cálculo de los operadores borde y, por ende, de los grupos de homología sea válido. Las definiciones necesarias y la construcción de los grupos de homología se desarrollan en la siguiente sección.

Por ejemplo, como se observa en la Figura 1.7, la superficie de una esfera puede ser subdividida en varios gajos o secciones que deformadas resultan superficies poligonales, que son celdas de dimensión 2 (2-celdas). Cada una de estas superficies poligonales está delimitada por segmentos que son celdas de dimensión 1 (1-celda) que forman los lados de los polígonos. Y por último, cada segmento tiene en los extremos dos vértices que constituyen celdas de dimensión nula (0-celda).

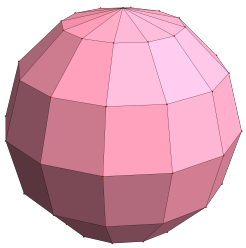


Figura 1.7: Complejo celular de una superficie esférica.

Una variedad puede representarse con distintos complejos celulares. Las propiedades topológicas no dependerán del número de celdas que los componen y podrán determinarse algebraicamente. Cuando todas las celdas poseen el número mínimo de caras necesario según su dimensión, el complejo se denomina *simplicial*, y sus celdas se llaman *símplices*. Por ejemplo, un vértice es un 0-símplice, un segmento un 1-símplice, un triángulo un 2-símplice y un tetraedro sólido un 3-símplice.

En esta tesis se utilizará un tipo de complejo más adecuado (no necesariamente simplicial) para representar la estructura de variedades enramadas: el complejo BRAMAH.

Definición 1.6. *Sea una nube de puntos en $\mathbb{R}^n$ que aproxima una variedad de dimensión local $d \leq n$. Un **complejo BRAMAH** de dimensión κ es un complejo celular formado por k-celdas ($k \leq n$) que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) Las 0-celdas constituyen un subconjunto de la nube de puntos en el espacio de estados.

(ii) La dimensión del complejo satisface $\kappa = d$, con d la dimensión local de la variedad.

(iii) Cada κ-celda está compuesta por un conjunto de puntos que aproximan una bola de dimensión κ.

(iv) La dimensión local $\kappa_l(\mathbf{x})$ en un punto $\mathbf{x}$ cualquiera de la variedad satisface $\kappa_l(\mathbf{x}) \leq \kappa$, permitiendo la coexistencia de regiones con distintas dimensiones locales dentro del mismo complejo.

Aunque el complejo BRAMAH puede construirse sobre cualquier conjunto de puntos, en esta tesis se considerarán exclusivamente nubes obtenidas a partir del muestreo de trayectorias de sistemas dinámicos.

Cabe recordar que la dimensión de un complejo es la dimensión de su celda de mayor orden. Por ejemplo, si la nube de puntos yace sobre una superficie, las celdas más grandes serán 2-celdas y el complejo tendrá dimensión $\kappa = 2$. No obstante, en regiones específicas pueden coexistir celdas con dimensión local $\kappa_l < \kappa$.

Dado un complejo celular, una pregunta natural es cuál es el número mínimo de k-celdas necesario para aproximar el atractor subyacente a una trayectoria. El complejo BRAMAH se construye con esta especificidad en mente, como fue propuesto inicialmente por Sciamarella [39, 40, 8] y perfeccionado posteriormente en trabajos más recientes [41, 42, 43].

Siguiendo la estrategia presentada en [8], la nube de puntos se divide en subconjuntos que, localmente, aproximan discos de dimensión d. Estos subconjuntos constituyen las d-celdas del complejo. Tanto la dimensión local d como la cantidad de puntos en cada subconjunto se determinan mediante descomposición en valores singulares, seguida de ajustes lineales dentro de un rango preestablecido.

En la Figura 1.8 se muestra el complejo BRAMAH superpuesto a la nube de puntos del atractor de Lorenz.

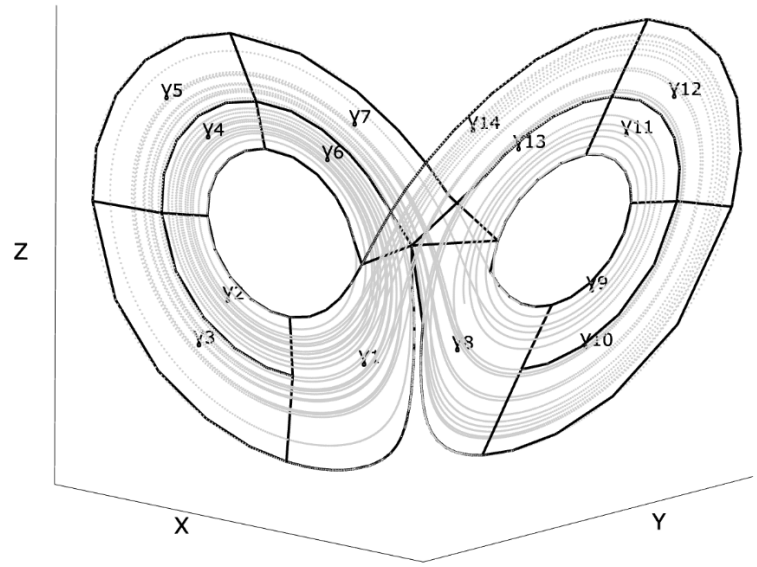


Figura 1.8: Complejo celular $\mathbb{K}(\mathrm{L})$ conformado por catorce 2-celdas γ_i ($i = 1, \ldots, 14$), superpuesto a la nube de puntos del atractor de Lorenz.

1.3. Grupos de homología

Las propiedades topológicas de un complejo celular son independientes del número, la forma o la distribución geométrica de sus celdas: lo que realmente importa es cómo estas están conectadas entre sí. Dichas propiedades se codifican mediante los grupos de homología $\mathscr{H}_k(\mathbb{K})$, con $k \in \mathbb{N}_0$.

A continuación, desarrollaremos los conceptos algebraicos necesarios para definir formalmente los grupos de homología. En el Apéndice A se encuentra el desarrollo de los pasos a seguir para computar los grupos de homología, y algunos ejemplos.

Definición 1.7. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo celular orientado de dimensión κ. Una k-**cadena** C_k es una combinación lineal de k-celdas del complejo, de la forma*

$$C_k = \sum_i a_i \sigma_k^i, \tag{1.3.3}$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y σ_k^i denota una k-celda orientada del complejo. El conjunto de todas las k-cadenas sobre $\mathbb{K}$, denotado $\mathscr{C}_k$, forma un grupo abeliano bajo la suma formal de cadenas.

Dos k-celdas se consideran adyacentes si comparten una $(k-1)$-celda. Esta relación de adyacencia es fundamental para la definición del operador borde y la construcción de complejos de cadenas.

Definición 1.8. *El **operador borde** ∂_k es un morfismo*

$$\partial_k : \mathscr{C}_k \to \mathscr{C}_{k-1}$$

definido sobre cada k-celda σ del siguiente modo: $\partial_k \sigma$ es una cadena formada por todas las $(k-1)$-caras con coeficientes 1 o -1 dependiendo de su orientación.

Por ejemplo, la frontera de una 2-celda orientada es la cadena formada por las 1-celdas en su frontera, con signo positivo si la orientación de una arista es consistente con la dirección de la 2-celda, y con signo negativo en caso contrario. Por construcción, el operador borde satisface

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} \to 0_{k+1,k-1}\,,$$

donde 0 denota el morfismo trivial, es decir, la aplicación constante que envía todo elemento de $\mathscr{C}_{k+1}$ al elemento identidad de $\mathscr{C}_{k-1}$. Afirmar que "la frontera de una frontera es trivial" es equivalente a decir que $\mathrm{im}(\partial_{k+1}) \subseteq \ker(\partial_k)$, donde $\mathrm{im}(\partial_{k+1})$ designa la imagen del operador borde y $\ker(\partial_k)$ su núcleo.

Definición 1.9. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo celular dirigido. Para cada dimensión $k \in \mathbb{N}$, se definen:*

- *El grupo de cadenas k-dimensionales $\mathscr{C}_k(\mathbb{K})$, generado formalmente por las k-celdas del complejo.*
- *El grupo de k-ciclos $Z_k(\mathbb{K}) = \ker(\partial_k)$, formado por aquellas k-cadenas cuya frontera es nula.*
- *El grupo de k-bordes $B_k(\mathbb{K}) = \mathrm{im}(\partial_{k+1})$, formado por las fronteras de $(k+1)$-cadenas.*

*Un k-ciclo que pertenece a $B_k(\mathbb{K})$ se denomina **k-frontera**.*

Los grupos $\mathscr{C}_k$, Z_k y B_k dependen del complejo particular que se haya construido. Para extraer las propiedades principales de la topología del conjunto subyacente de puntos, se introduce la siguiente relación de equivalencia sobre las cadenas:

Definición 1.10. *Sean $\mathscr{C}_k^{\alpha_1}$ y $\mathscr{C}_k^{\alpha_2}$ dos k-cadenas $\in \mathscr{C}_k$. Se dice que son **homólogas** — se nota $\mathscr{C}_k^{\alpha_1} \sim \mathscr{C}_k^{\alpha_2}$ — si y sólo si existe una frontera de una $(k+1)$-cadena $\mathscr{C}_{k+1}$ tal que $\partial_{k+1}(\mathscr{C}_{k+1}) = \mathscr{C}_k^{\alpha_1} - \mathscr{C}_k^{\alpha_2}$.*

Definición 1.11. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo celular dirigido de dimensión finita, y sea $\mathscr{C}_k(\mathbb{K})$ el grupo abeliano generado por las k-celdas de $\mathbb{K}$.*

*El **grupo de homología de orden** k se define como el cociente:*

$$\mathscr{H}_k(\mathbb{K}) = Z_k(\mathbb{K})/B_k(\mathbb{K}).$$

Este grupo describe las clases de ciclos no triviales que no son frontera de ninguna cadena de orden superior.

Los grupos de homología forman una familia de invariantes topológicos que se calculan a partir de la estructura del complejo celular. Estos invariantes permiten detectar la presencia de estructuras no triviales, como regiones vacías completamente rodeadas por celdas k-dimensionales. En esta tesis, denominaremos a tales estructuras *k-agujeros*: se trata de ciclos cerrados de k-celdas que no son bordes de ninguna $(k+1)$-cadena. Por ejemplo, un 1-agujero representa una región plana vacia encerrada por aristas; un 2-agujero, una cavidad tridimensional rodeada por caras; y para $k \geq 3$, se trata de hipervolúmenes vacíos delimitados por celdas de mayor dimensión.

Definición 1.12. *El k-ésimo* ***número de Betti*** b_k *es el número de k-ciclos no equivalentes que contiene el grupo* $\mathscr{H}_k$*:*

$$b_k = \dim(\mathscr{H}_k).$$

Cada número de Betti cuantifica el número de k-agujeros topológicamente distintos. En particular, b_0 indica cuántas componentes conexas tiene el complejo: si está formado por una sola pieza, entonces $b_0 = 1$; si hay p piezas desconectadas, $b_0 = p$. El grupo $\mathscr{H}_0$ contiene los 0-ciclos que identifican cada componente. Del mismo modo, b_1 cuenta los 1-agujeros, b_2 indica el número de cavidades tridimensionales, cuyos generadores en $\mathscr{H}_2$ describen las configuraciones independientes de 2-cadenas que las delimitan.

Estos invariantes son estables frente a refinamientos del complejo: una vez alcanzada la resolución mínima necesaria para representar correctamente el espacio subyacente [44], los valores de b_k y la estructura de los grupos $\mathscr{H}_k$ no dependen del número ni la disposición de las celdas [45]. Además, si el complejo está orientado uniformemente puede definirse también la parte de torsión del grupo de homología, que captura sutilezas adicionales de la estructura topológica, como se vera a continuacion.

Consideremos una cinta estándar comparada con una cinta de Möbius, con cuatro 2-celdas cada una, como se muestra en la Figura 1.9. Una vez elegida la orientación de una de ellas, se induce la orientación para las otras tres, de modo que el complejo resulte uniformemente orientado. Si se considera la cadena que resulta de sumar las cuatro 2-celdas en cada caso, y se le aplica el operador de borde, se tiene que:

$$\partial_2 \left(\sum_i \sigma_2^i \right) = 0 \text{ para la cinta común}$$

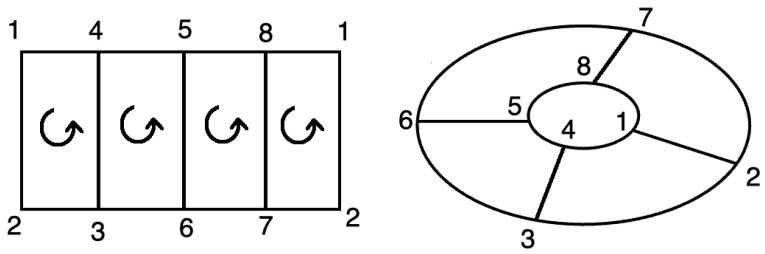
mientras que:

$$\partial_2 \left(\sum_i \sigma_2^i \right) = 2 \langle 1,2 \rangle \text{ para la cinta de Möbius}$$

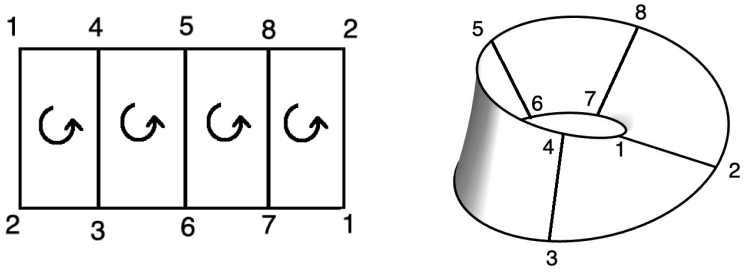
donde la 1-celda $< 1,2 >$ representa el **elemento de torsión** de la cinta de Möbius.

El grupo de homología $\mathscr{H}_k(\mathbb{K})$ sintetiza información clave sobre la estructura del complejo celular, al identificar ciclos k-dimensionales no triviales, es decir, cadenas cerradas que no son bordes de ninguna $(k+1)$-cadena. Tales ciclos representan regiones vacías de dimensión k, completamente rodeadas por celdas del mismo orden. En este sentido, la homología actúa como un filtro que aísla las características topológicas esenciales del espacio, descartando aquellas que pueden eliminarse mediante deformaciones continuas. Esta capacidad de detectar agujeros topológicos convierte a la homología en una herramienta fundamental para caracterizar cualitativamente la geometría del espacio de estados de un sistema dinámico. No obstante, como se discutirá más adelante, su poder discriminativo es limitado cuando se trata de diferenciar entre distintos regímenes dinámicos, especialmente en contextos caóticos donde la estructura del flujo se vuelve más intrincada.

El complejo BRAMAH permite representar distintos tipos de dinámicas en el espacio de estados, incluyendo oscilaciones periódicas, cuasiperiódicas, y atractores tanto regulares como caóticos. Cada régimen exhibe configuraciones topológicas particulares que reflejan su comportamiento cualitativo. En el caso de una bifurcación clásica, el sistema transita entre regímenes con propiedades dinámicas fundamentalmente distintas, lo que se traduce en un cambio topológico del espacio de estados. Esta transición



(a) Complejo celular $\mathbb{K}_1$



(b) Complejo celular $\mathbb{K}_2$

Figura 1.9: Complejos celulares $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$ para la cinta estándar (a) y la cinta de Möbius (b). A la izquierda se muestra su *diagrama planar*, donde los índices repetidos en las 0-celdas indican que se trata del mismo vértice; a la derecha, la representación sobre la superficie correspondiente.

puede ser capturada por las propiedades algebraicas del complejo asociado. BRAMAH ofrece así un enfoque formal para estudiar cómo la dinámica evoluciona bajo la acción de un parámetro de control, ya sea fijo —como en sistemas autónomos— o variable en el tiempo, como ocurre en situaciones con forzante determinista o estocástico.

Durante décadas, los grupos de homología fueron considerados candidatos naturales para construir una taxonomía topológica del espacio de estados en dimensiones arbitrarias. En [8] se demostró que los complejos celulares permiten describir con éxito soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de hasta cuatro dimensiones. Como se señala allí, la topología de un complejo no constituye por sí sola un criterio suficiente para detectar caoticidad. Aunque la homología puede capturar ciertos aspectos de la dinámica —como procesos de estiramiento y plegado característicos del flujo—, no siempre permite distinguir entre dos sistemas dinámicos cuya topología subyacente no es equivalente, como se verá a continuación.

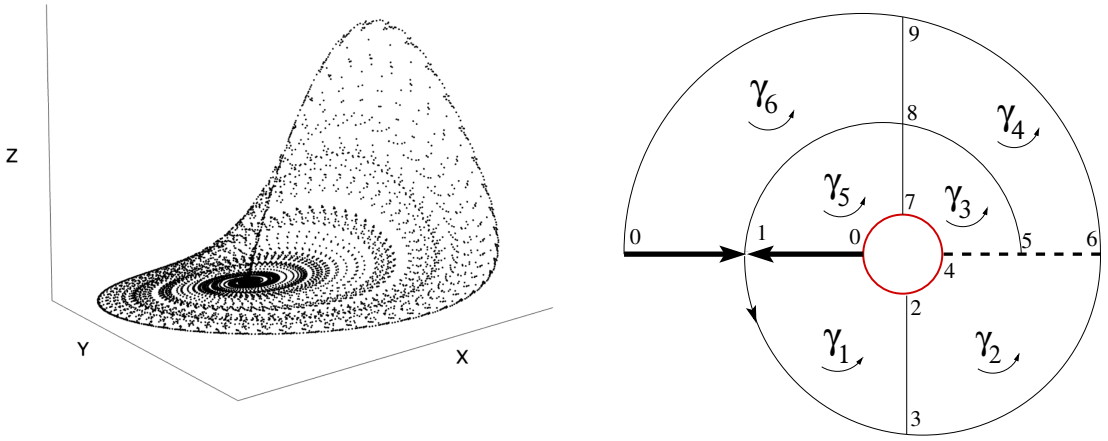
Cálculo de los grupos de homología para el atractor de Rössler

El atractor caótico topológicamente más sencillo fue descubierto por Rössler [46] con el objetivo de simplificar el sistema de Lorenz [36]. El sistema propuesto por Rössler obedece las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c)\,. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Las ecuaciones (1.3.4) con los parámetros $b = 2$ y $c = 4$, para $a = 0{,}432$ se obtiene un atractor "tipo espiral", mientras que para $a = 0{,}492$ se obtiene un atractor tipo "embudo" [10] (ver Figuras 1.10 (a) y 1.11 (a)).

Sea R_2 la nube de puntos obtenida al integrar las ecuaciones de Rössler (1.3.4) en su versión "tipo espiral". Como se observa en la Figura 1.10 (a), el flujo que asciende en la dirección z es plegado de nuevo sobre el disco principal. En el panel (b) de la misma Figura se encuentra $\mathbb{K}(R_2)$, el complejo de celdas BRAMAH conformado por un conjunto de seis 2-celdas etiquetadas como γ_i, con $i = 1,2,3,4,5,6$. El *joining locus*, esquematizado con una flecha más gruesa, aparece duplicado porque $\mathbb{K}(R_2)$ está dibujado como un diagrama planar. En las representaciones planas de complejos de celdas, las 0-celdas repetidas indican prescripciones de pegado.



(a) Nube de puntos R_2 del atractor de Rössler espiral (b) Complejo $\mathbb{K}(R_2)$

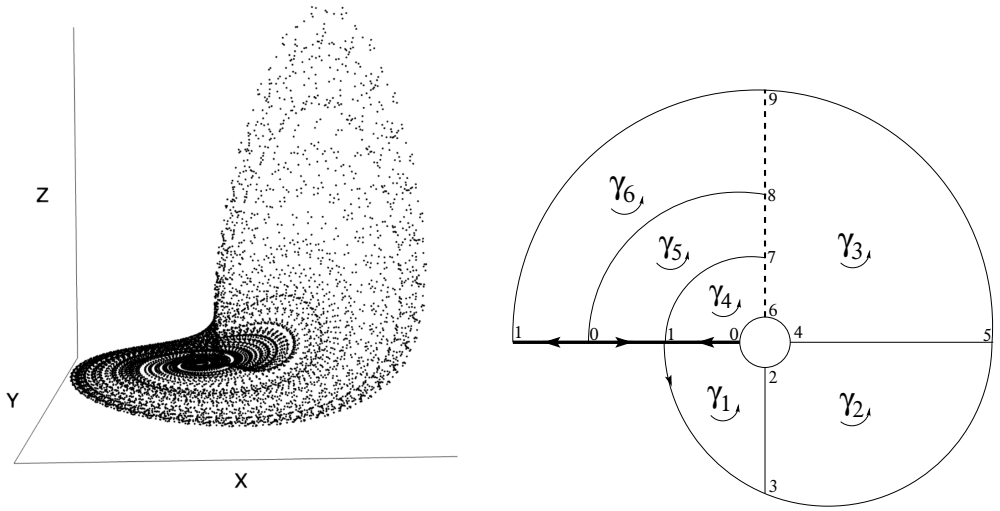
Figura 1.10: (a) Atractor de Rössler espiral producido por el sistema de ecuaciones (1.3.4); y (b) complejo $\mathbb{K}(R_2)$, donde se marca en rojo un generador de $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(R_2))$. Valores de los parámetros: $a = 0,43295$, $b = 2$ y $c = 4$.

Ahora que ya está construido el complejo $\mathbb{K}(R_2)$, se procede con la extracción de las propiedades del mismo. Se comienza por los grupos de homología, calculados a partir de $\mathbb{K}(R_2)$. El complejo $\mathbb{K}(R_2)$ presenta un generador del grupo de homología de orden 0 denotado como $\mathscr{H}_0(\mathbb{K}(R_2))$. Dado que todas las 0-celdas están conectadas entre sí y son todas homólogas, cualquiera de las 0-celdas puede representar a $\mathscr{H}_0$. Si la 0-celda representativa está etiquetada como $\langle 0\rangle$, esto se expresa como $\mathscr{H}_0(\mathbb{K}(R_2)) = [\langle 0\rangle] \sim \mathbb{Z}$. Un complejo con un único generador de $\mathscr{H}_0$ es simplemente un complejo de una sola pieza. $\mathbb{K}(R_2)$ tiene un único generador de $\mathscr{H}_1$, de modo que $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(R_2)) = [\langle 0,2\rangle + \langle 2,4\rangle + \langle 4,7\rangle - \langle 0,7\rangle] \sim \mathbb{Z}$ (ver Figura 1.10 (b) en rojo). Todos los 1-agujeros, es decir, todos los bucles no triviales que rodean el centro del disco, son homólogos al generador de $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(R_2))$. No hay 2-agujeros (cavidades encerradas) y, por tanto, $\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(R_2)) \sim 0$. Entonces, el atractor de Rössler en su versión "tipo espiral" presenta una estructura con una única componente conexa, un único 1-agujero y no tiene cavidades.

Otra variante del sistema de Rössler puede encontrarse cuando el parámetro a se fija en 0,492 [47]. En este caso, la rama presenta un pliegue más antes de alcanzar la base [10], tal como se observa en la Figura 1.11 (a), y por consiguiente el complejo celular correspondiente presenta una celda más, como se observa en el panel (b) de la misma Figura. A este atractor se lo denominará de ahora en más R_3 y es lo que se conoce comúnmente como el atractor de Rössler "tipo embudo".

El complejo celular $\mathbb{K}(R_3)$ consiste en una única componente conexa $\mathscr{H}_0(\mathbb{K}(R_3) = [\langle 0\rangle] \sim \mathbb{Z})$ tiene un 1-generador de $\mathscr{H}_1$ ($\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(R_3)) \sim \mathbb{Z}$), y no presenta cavidades cerradas ($\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(R_3)) \sim 0$). Por lo tanto, sus grupos de homología son los mismos que los correspondientes al complejo asociado al sistema de Rössler "espiral" ($\mathbb{K}(R_2)$), a pesar de poseer un pliegue extra.

Los grupos de homología proporcionan una descripción global de la manera en que el espacio de estados debe ser mapeado sobre sí mismo bajo la acción de las ecuaciones del modelo correcto. Sin embargo, este enfoque sólo provee una solución parcial al problema de la taxonomía, ya que no incluye



(a) Nube de puntos R_3 (b) Complejo $\mathbb{K}(R_3)$

Figura 1.11: (a) Atractor de Rössler "embudo" producido por el sistema de ecuaciones (1.3.4); y (b) complejo $\mathbb{K}(R_3)$. Valores de los parámetros: $a = 0{,}492$, b y c como en la Figura 1.10.

la estructura subyacente del flujo en la descripción, lo que puede ser un problema en casos como el de diferenciar $\mathbb{K}(R_2)$ de $\mathbb{K}(R_3)$. Con el objetivo de diferenciar estos dos tipos de atractores, se dota el complejo de un grafo dirigido que codifique el flujo sobre el complejo, como se explicará en la siguiente Sección.

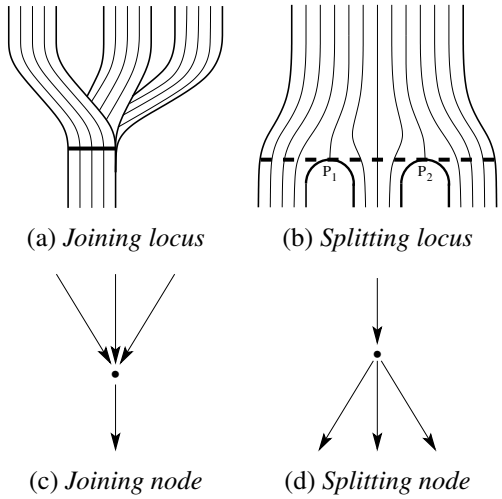
1.4. Templex

El *templex* [43] fue diseñado específicamente para describir la estructura de un flujo, ya que proporciona no solo una representación matemática de dicha estructura, sino también de las distintas formas en que puede ser recorrida por las trayectorias solución de un sistema dinámico. En este contexto, se asume que existe un flujo subyacente a la nube de puntos utilizada para construir el complejo celular. Por lo tanto, existe una secuencia determinista de visitas a las celdas, la cual puede representarse mediante un grafo dirigido o *digrafo*. Estos dos elementos —el complejo celular y el digrafo— conforman el objeto matemático dual denominado *templex*.

Sea $\mathbb{K}$ un complejo orientado de dimensión κ, el digrafo asociado debe codificar la información sobre la secuencia de visitas a las κ-celdas impuesta por el flujo. A continuación, utilizaremos los términos *nodos* y *aristas* para referirnos a los vértices y conexiones del digrafo. Dos κ-celdas, γ_i y γ_j, están asociadas a nodos i y j respectivamente, y se dice que existe una arista dirigida $i \to j$ si el flujo pasa de la celda γ_i a la celda γ_j.

Definición 1.13. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo de dimensión κ que aproxima una κ-variedad enramada asociada a un flujo en el espacio de estados, y sea $D = (N, E)$ un digrafo donde los nodos N corresponden a las κ-celdas de $\mathbb{K}$ y las aristas E representan las conexiones inducidas por el flujo entre dichas κ-celdas. Entonces, el* ***templex*** *se define como el par $T = (\mathbb{K}, D)$.*

Cuando el flujo subyacente a un sistema dinámico no presenta un comportamiento regular —es decir, no es periódico ni cuasiperiódico—, su estructura está organizada por una variedad enramada. Esta estructura topológica es característica del comportamiento caótico y se distingue por contener zonas donde el flujo se separa (*splitting*) y zonas donde se une (*joining*). Estas regiones desempeñan un papel clave en la organización del atractor, ya que permiten identificar los distintos caminos que puede seguir el flujo y,



(a) *Joining locus* (b) *Splitting locus*

(c) *Joining node* (d) *Splitting node*

Figura 1.12: (a) Tres bandas uniéndose en una única banda saliente mediante el *joining locus* (línea gruesa). (b) Una única banda separándose en tres bandas a través del *splitting locus* (línea gruesa discontinua). (c) *Joining node* correspondiente a la situación (a). (d) *Splitting node* correspondiente a la situación (b).

por lo tanto, describir su complejidad estructural. En la Figura 1.12 se ilustran ambos tipos de regiones, así como su representación en el digrafo asociado al flujo.

En este contexto, el complejo $\mathbb{K}$ permite un análisis homológico de la estructura, mientras que el grafo dirigido D posibilita el estudio de los caminos recorridos por el flujo, en particular, la identificación de ciclos cerrados a través de regiones de unión o bifurcación. Una región de unión, o *joining locus*, se detecta en el complejo como un conjunto de tres o más κ-celdas que comparten una misma celda de dimensión $\kappa - 1$ —lo que, en el caso bidimensional, se manifiesta como una línea de unión o *joining line*. La Figura 1.12 (a,c) muestra un ejemplo de esta situación, donde tres bandas confluyen en una sola a través de un punto de unión, mientras que la Figura 1.12 (b,d) muestra el caso inverso, en el que una banda se divide en varias.

Definición 1.14. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo* BRAMAH *bidimensional. El **joining locus** (o la joining line) está formado por las 1-celdas compartidas por al menos tres 2-celdas. Estas 1-celdas y sus respectivas 2-celdas se denominan **joining 1-cells** y **joining 2-cells**, respectivamente.*

Definición 1.15. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo* BRAMAH *bidimensional. Se designarán como **ingoing cells** (respectivamente, **outgoing cells**) a las celdas visitadas por el flujo justo antes (después) de cruzar la joining line.*

Al igual que en las bandas de un *template*, un *joining locus* debe tener al menos dos *ingoing cells* y una única *outgoing cell* (Figura 1.12 (a, c)); un *splitting locus* permite tener al menos dos *outgoings* κ-cells provenientes de una única *ingoing cell* (Figura 1.12 (b, d)). Estos *joining* y *splitting locus* llevan asociados sus nodos correspondientes en el digrafo D:

Definición 1.16. *Un **joining node** (respectivamente, **splitting node**) con grado de entrada (respectivamente, salida) ≥ 2 en un digrafo $D = (N, E)$ corresponde a una celda adyacente a un joining locus (respectivamente, splitting locus) en el complejo.*

En los digrafos se adoptará la convención de subrayar un *joining node* y poner una línea sobre un *splitting node*.

La existencia del *joining locus* no sólo identifica los pliegues en el espacio de estados, también permite cuantificar caminos cerrados distintos en el flujo. Para computar los caminos no equivalentes por los que el flujo puede circular por el complejo, se calculan los ciclos del digrafo, que dan lugar a una clase de invariantes topológicos denominados *generatexes*.

Definición 1.17. *Un* **generatex** $\mathscr{G} = (K^g, D^g)$ *es un subtemplex de* $T = (\mathbb{K}, D)$*, donde* D^g *es el subdígrafo inducido por los vértices y aristas de un ciclo dirigido* $\mathscr{C} \in D$*, y* $K^g \subset \mathbb{K}$ *es el subcomplejo formado por las celdas asociadas al ciclo* $\mathscr{C}$*. Se dice que un generatex es de orden* θ*, con* $\theta \in \mathbb{N}$ *y* $\theta \geq 1$*, si el ciclo* $\mathscr{C}$ *tiene* θ *joining nodes. En este caso, también se dice que el ciclo* $\mathscr{C}$ *es de orden* θ*.*

Definición 1.18. *Sean* $\mathscr{G}_1 = (K_1^g, D_1^g)$ *y* $\mathscr{G}_2 = (K_2^g, D_2^g)$ *dos generatex asociados a ciclos dirigidos* $\mathscr{C}_1$ *y* $\mathscr{C}_2$ *en un templex* $T = (\mathbb{K}, D)$*.*

Se dice que $\mathscr{G}_1 \sim \mathscr{G}_2$ *(es decir, que son* ***equivalentes****) si se cumpledque:*

- *Las outgoing cells de* $\mathscr{G}_1$ *y* $\mathscr{G}_2$ *coinciden.*
- *Las ingoing cells de* $\mathscr{G}_1$ *y* $\mathscr{G}_2$ *coinciden.*

Análogamente, se dice que los ciclos $\mathscr{C}_1$ *y* $\mathscr{C}_2$ *son* ***equivalentes*** *si satisfacen las mismas condiciones sobre nodos correspondientes a las ingoing y outgoing cells.*

Nótese que si la dimensión de K^g es 2, las 2-celdas del generatex forman, por construcción, una cinta estándar o de Möbius. Se dice que $\mathscr{G}$ tiene un elemento de torsión si el K^g, uniformemente orientado, lo posee; en otras palabras, si es homeomorfo a una cinta de Möbius.

Definición 1.19. *Sea* $\mathscr{G} = (K^g, D^g)$ *una generatex de orden* $\theta \geq 1$ *en un templex* $T = (\mathbb{K}, D)$*.*

- *Si* $\theta = 1$*, se define la* ***stripex*** $\mathscr{S}$ *como idéntica al generatex:* $\mathscr{S} = \mathscr{G}$*.*
- *Si* $\theta > 1$*, se define que* $\mathscr{G}$ *puede descomponerse en* θ ***stripex*** $\{\mathscr{S}_j\}_{j=1}^{\theta}$*, tales que cada* $\mathscr{S}_j$ *es un subtemplex* $\mathscr{S}_j = (K_j^s, D_j^s)$*, donde:*
  - D_j^s *es el digrafo inducido por el camino dirigido de* D^g*, que comienza en una outgoing cell y termina en la primera ingoing cell alcanzada por el flujo;*
  - $K_j^s \subset K^g$ *es el subconjunto de celdas asociadas a dicho camino dirigido.*

Así como las bandas en un *template* son siempre simples —en el sentido de que se definen para no atravesar más de una vez los *joining locus*—, la definición de *stripex* sirve como una generalización de una banda en un *template*.

1.4.1. Construcción del templex en el espacio de estados

La construcción matemática del *templex* parte de la integración numérica de un sistema dinámico determinista, cuya solución se representa como un conjunto de series temporales. Esta información define una nube de puntos en el espacio de estados, cuya topología se desea estudiar. Para garantizar que el análisis topológico refleje las propiedades del espacio completo y no de una proyección de menor dimensión, es fundamental que dicha nube esté libre de falsos vecinos, como se explicará en la Sección 1.6.

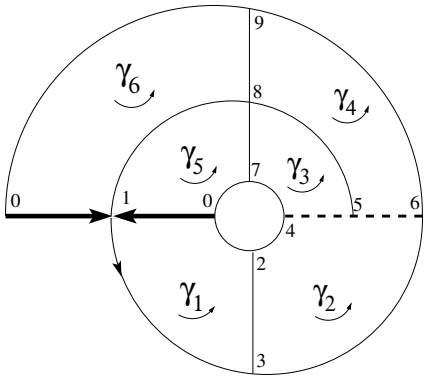
A continuación, la nube se segmenta en celdas de dimensión d, correspondiente a la dimensión local de la variedad sobre la que se apoyan los puntos. Cada d-celda debe aproximar localmente una región euclidiana de dimensión d de manera adecuada [8].

Con estas celdas se construye un complejo BRAMAH, cuya resolución —determinada por el número de celdas— debe ser suficiente para preservar los detalles relevantes de la dinámica, pero sin introducir una complejidad excesiva en el cálculo de homologías y elementos de torsión. Finalmente, las conexiones entre celdas se codifican en un grafo dirigido que respeta la orientación temporal del flujo, lo que permite capturar su organización dinámica global.

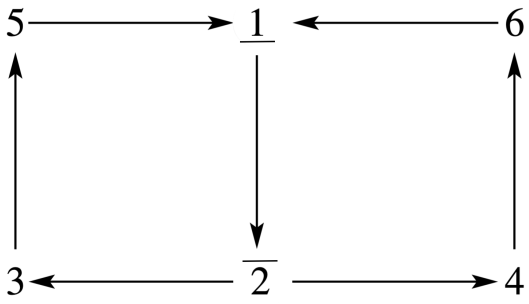
Templex para el atractor de Rössler

Ya se ha visto que el atractor de Rössler, tanto en su forma espiral como en su forma de embudo, presenta un único 1-agujero, que rodea el disco principal. El segundo pliegue que aparece en el caso embudo no es detectado por los grupos de homología, ya que estos únicamente capturan vacíos (agujeros topológicos). Sin embargo, dicho pliegue se manifiesta en el *joining locus* del templex.

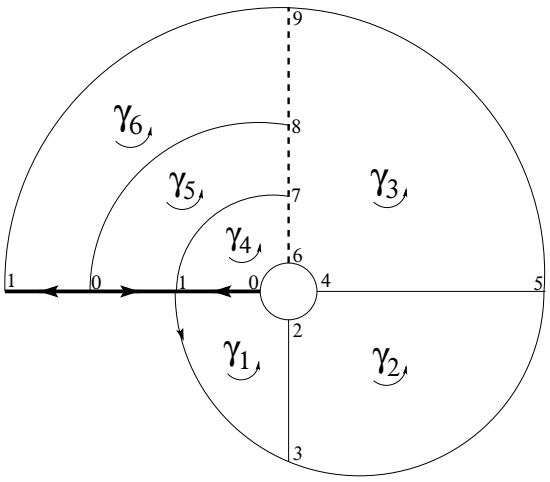
Si a los complejos de las Figuras 1.10 y 1.11 se les agrega la información del flujo mediante la incorporación de un digrafo, se obtienen los templex correspondientes para ambas variantes del Rössler de la Figura 1.13. En el panel (a) se muestra $\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)$, el complejo celular BRAMAH y en (b) $D(\mathrm{R}_2)$, el digrafo correspondiente, con un nodo por 2-celda y aristas dirigidas según la dirección del flujo. De forma análoga, dado $T(\mathrm{R}_3) = (\mathbb{K}(\mathrm{R}_3), D(\mathrm{R}_3))$ el templex correspondiente al Rössler embudo, en la Figura 1.13 (c) y (d) se pueden encontrar el complejo y el digrafo correspondientes.



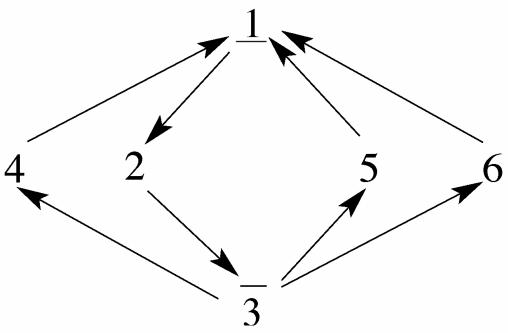
(a) Complejo $\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)$



(b) Digrafo $D(\mathrm{R}_2)$



(c) Complejo $\mathbb{K}(\mathrm{R}_3)$



(d) Digrafo $D(\mathrm{R}_3)$.

Figura 1.13: Templex $T(\mathrm{R}_2) = (\mathbb{K}(\mathrm{R}_2), D(\mathrm{R}_2))$ para el atractor de Rössler espiral en (a) y (b) y templex $T(\mathrm{R}_3) = (\mathbb{K}(\mathrm{R}_3), D(\mathrm{R}_3))$ para el atractor de Rössler embudo en (c) y (d).

Como se observa en la Figura 1.13 (b) y (d), los digrafos asociados a ambas variantes del Rössler no son idénticos. Sin embargo, aún no se puede afirmar que no hay equivalencia topológica entre ambos atractores, o que la dinámica subyacente en ambos sistemas no es la misma. Para ello será necesario calcular las distintas formas no equivalentes en las que el flujo circula por la estructura.

Se empezará por el templex del caso espiral, $T(\mathrm{R}_2) = (\mathbb{K}(\mathrm{R}_2), D(\mathrm{R}_2))$. El *joining locus* de $\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)$ está formado por tres 2-celdas: γ_1 (*outgoing*), γ_3 (*ingoing*) y γ_4 (*ingoing*), que comparten la *joining line*

$J(\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)) = \langle 0,1\rangle$, una 1-celda más gruesa que actúa como bisagra común, tal como se muestra en la Figura 1.14.

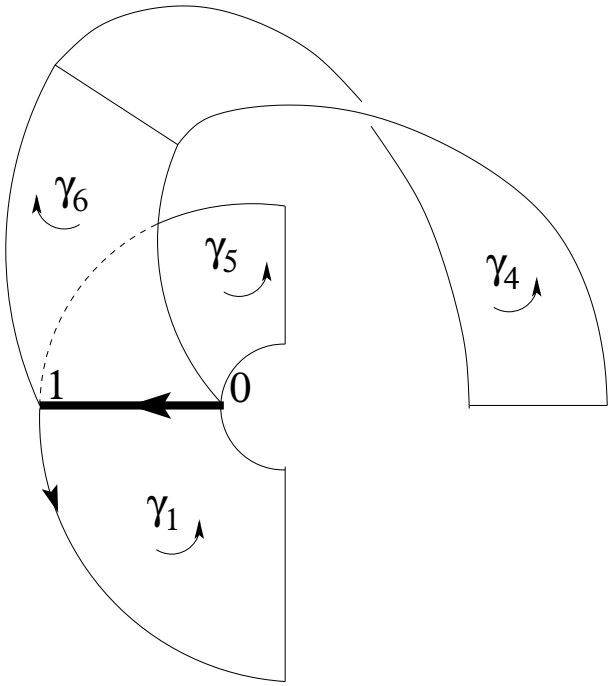


Figura 1.14: *Joining locus* en el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)$ asociado al atractor de Rössler en forma espiral. Está formado por tres 2-celdas: γ_1 (*outgoing*), γ_3 (*ingoing*) y γ_4 (*ingoing*), que comparten la *joining line* $J(\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)) = \langle 0,1\rangle$.

Como todos los ciclos de $D(\mathrm{R}_2)$ presentan un único *joining node* (subrayado en la Figura 1.13 (b)), los generatex son de orden 1 ($\theta = 1$) y por lo tanto coinciden con las stripex. Los dos ciclos que se extraen del digrafo del templex son:

$$\mathscr{C}_1(D(\mathrm{R}_2)) \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 5 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_2(D(\mathrm{R}_2)) \equiv \underline{1} \to 2 \to 4 \to 6 \to \underline{1}$$

La *joining line* es atravesada de dos formas no equivalentes: uno de estos caminos coincide con el disco, y el otro pasa por la zona plegada del atractor. De esta forma, hay dos circuitos alternativos de flujo desde y hacia γ_1: $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{R}_2))$ pasa por γ_5 y $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{R}_2))$ por γ_6.

$$\mathscr{S}_1(T(\mathrm{R}_2)) \equiv \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to \gamma_5$$
$$\mathscr{S}_2(T(\mathrm{R}_2)) \equiv \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_4 \to \gamma_6$$

La ramificación de los caminos es causada por el pliegue, y en este caso no existe una "abertura" o "rasgadura" entre los caminos. Si existiera tal separación, el complejo tendría un segundo 1-hueco alrededor del espacio que separa ambos caminos, pero estos quedan unidos por la 1-celda $\langle 0,1\rangle$ y, por tanto, no aparecen en un análisis homológico.

Los elementos de torsión de cada generatex pueden extraerse directamente aislando el complejo celular constituido por sus 2-celdas uniformemente orientadas. El generatex asociado a $\mathscr{C}_1(D(\mathrm{R}_2))$ no tiene elemento de torsión, mientras que el generatex asociado a $\mathscr{C}_2(D(\mathrm{R}_2))$ sí – la stripex $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{R}_2))$ presenta, en consonancia, un twist local.

Lo interesante ahora es ver qué sucede con el atractor de Rössler tipo "embudo". Como ya se mencionó, el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{R}_3)$ presenta los mismos grupos de homología que $\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)$: un 1-generador alrededor del centro del atractor ($\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{R}_3)) \sim \mathbb{Z}$) y ninguna cavidad cerrada ($\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{R}_3)) \sim 0$).

El *joining locus* en $\mathbb{K}(\mathrm{R}_3)$ es de una sola componente en la 1-celda $\langle 0,1\rangle$, que ahora aparece triplicada (y no duplicada), evidenciando que la prescripción de pegado es más compleja que para el atractor espiral. En el caso de $\mathbb{K}(\mathrm{R}_3)$, el *joining locus* está formado por cuatro 2-celdas: γ_1 (*outgoing*), γ_4 (*ingoing*), γ_5 (*ingoing*) y γ_6 (*ingoing*). Hay 3 generatex asociados a los siguientes 3 ciclos no equivalentes del digrafo:

$$\mathscr{C}_1(D(\mathrm{R}_3)) \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 4 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_2(D(\mathrm{R}_3)) \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 5 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_3(D(\mathrm{R}_3)) \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 6 \to \underline{1}$$

Dado que el grado de cada generatex es 1 ($\theta = 1$) ya que hay un único *joining node* asociado a γ_1, directamente se puede hablar en términos de stripex de orden 1 si se consideran las celdas que los componen:

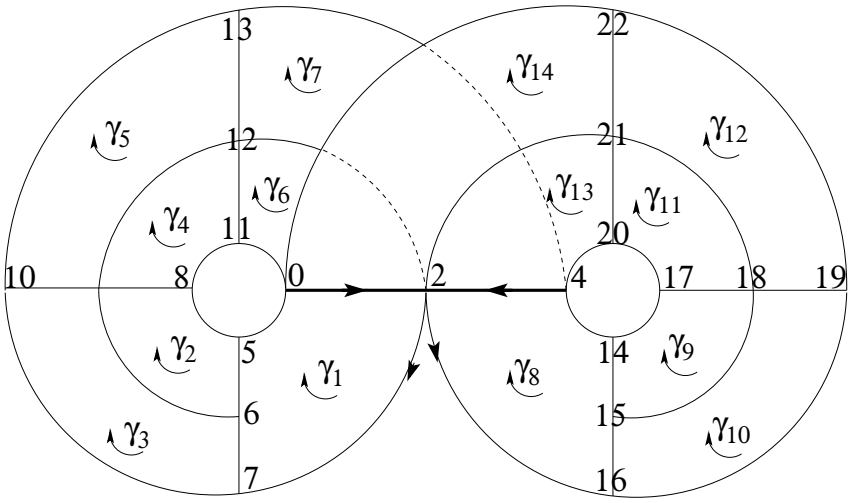
$$\mathscr{S}_1(T(\mathrm{R}_3)) \equiv \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to \gamma_4$$
$$\mathscr{S}_2(T(\mathrm{R}_3)) \equiv \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to \gamma_5$$
$$\mathscr{S}_3(T(\mathrm{R}_3)) \equiv \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to \gamma_6$$

El generatex asociado al ciclo $\mathscr{C}_2(D(\mathrm{R}_3))$ tiene un elemento de torsión. De modo que se tiene que la stripex $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{R}_3))$ posee un twist local, en consonancia con la stripex $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{R}_2))$ del caso espiral.

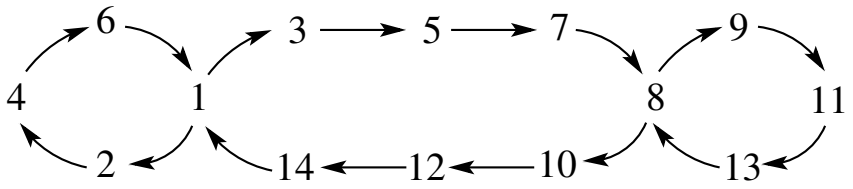
Con todos estos elementos, es posible afirmar que la dinámica de ambas variantes del atractor de Rössler R_2 y R_3 no es equivalente dado que $T(\mathrm{R}_3)$ presenta una rama más en su plegado.

Templex para el atractor de Lorenz

Si se agrega la información del flujo al complejo celular del atractor de Lorenz de la Figura 1.8 complementando el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{L})$ con un digrafo que codifique las conexiones entre las celdas, se obtiene el templex de la Figura 1.15. El panel (a) muestra un diagrama semi-planar del complejo y el panel (b) muestra el grafo dirigido $D(\mathrm{L})$ que da lugar al templex $T(\mathrm{L}) = (\mathbb{K}(\mathrm{L}), D(\mathrm{L}))$ para el atractor de Lorenz.



(a) Diagrama semi-planar del complejo $\mathbb{K}(\mathrm{L})$.



(b) Digrafo $D(\mathrm{L})$.

Figura 1.15: Templex $T(\mathrm{L}) = (\mathbb{K}(\mathrm{L}), D(\mathrm{L}))$ para el atractor de Lorenz.

Como se calculó en la Sección 1.3, el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{L})$ tiene un solo generador de orden 0 ya que el atractor no presenta componentes desconectadas ($\mathscr{H}_0(\mathbb{K}(\mathrm{L})) \sim \mathbb{Z}$), tiene dos generadores de orden 1, uno alrededor del centro de rotación de cada ala del atractor de Lorenz ($\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{L})) \sim \mathbb{Z}^2$), y no tiene cavidades cerradas ($\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{L})) \sim 0$). El complejo $\mathbb{K}(\mathrm{L})$ posee una *joining line* con dos componentes, como era de esperar, dado que la sección de Poincaré del atractor de Lorenz tiene dos componentes. Las trayectorias en el atractor pueden cruzar la *joining line* desde cuatro *ingoing 2-cells*, a saber: γ_6, γ_7, γ_{13} y γ_{14}. $J_1(\mathbb{K}(\mathrm{L})) = \langle 0,2\rangle$ tiene como *ingoing 2-cells* a γ_6 y γ_{14}, y como *outgoing 2-cell* a γ_1. En cambio, $J_2(\mathbb{K}(\mathrm{L})) = \langle 2,4\rangle$ tiene como *ingoing 2-cells* a γ_7 y γ_{13}, y como *outgoing 2-cell* a γ_8. Nótese que en la Figura 1.15 (b) no se han marcado los *splitting nodes* y unión porque estos coinciden: cada *joining line* tiene dos *ingoing 2-cells* y una *outgoing 2-cell*. Por ahora esto no impide el cómputo de los ciclos del digrafo $D(\mathrm{L})$. Se tienen tres generatex asociados a los siguientes tres ciclos:

$$\mathscr{C}_1(D(\mathrm{L})) \equiv \underline{1} \to 2 \to 4 \to 6 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_2(D(\mathrm{L})) \equiv \underline{8} \to 9 \to 11 \to 13 \to \underline{8}$$
$$\mathscr{C}_3(D(\mathrm{L})) \equiv \underline{1} \to 3 \to 5 \to 7 \to \underline{8} \to 10 \to 12 \to 14 \to \underline{1}$$

Dos de los generatex de $T(\mathrm{L})$ presentan orden 1 ($\theta = 1$) y están asociados a los ciclos $\mathscr{C}_1(\mathrm{L})$ y $\mathscr{C}_2(\mathrm{L})$. El generatex asociado al ciclo $\mathscr{C}_3(\mathrm{L})$ presenta orden 2 ($\theta = 2$) ya que este contiene dos *joining nodes*. Resulta de la unión de dos ciclos débiles, $\mathscr{C}_{3_1}(\mathrm{L})$ y $\mathscr{C}_{3_2}(\mathrm{L})$. Por lo tanto, se dice que está degenerado, dado que ambos ciclos débiles son imágenes uno del otro bajo la acción de la simetría rotacional [31]. No hay elementos de torsión en ninguno de los generatex asociados.

$$\mathscr{C}_{3_1}(D(\mathrm{L})) \equiv \underline{1} \to 3 \to 5 \to 7 \to \underline{8}$$
$$\mathscr{C}_{3_2}(D(\mathrm{L})) \equiv \underline{8} \to 10 \to 12 \to 14 \to \underline{1}$$

En $T(\mathrm{L})$ hay cuatro stripex: $\mathscr{S}_1$ asociado a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{S}_2$ asociado a $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{S}_3$ asociado a $\mathscr{C}_{3_1}$, y $\mathscr{S}_4$ asociado a $\mathscr{C}_{3_2}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_1(T(\mathrm{L})) &\equiv \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_4 \to \gamma_6 \\
\mathscr{S}_2(T(\mathrm{L})) &\equiv \gamma_8 \to \gamma_9 \to \gamma_{11} \to \gamma_{13} \to \gamma_8 \\
\mathscr{S}_3(T(\mathrm{L})) &\equiv \gamma_1 \to \gamma_3 \to \gamma_5 \to \gamma_7 \to \gamma_8 \\
\mathscr{S}_4(T(\mathrm{L})) &\equiv \gamma_8 \to \gamma_{10} \to \gamma_{12} \to \gamma_{14} \to \gamma_1
\end{aligned}$$

El conjunto de stripex tiene cuatro elementos. $\mathscr{S}_3$ y $\mathscr{S}_4$ presentan twists locales, pero el generatex formado por sus 2-celdas no tiene elemento de torsión: una cinta con dos medias vueltas en el mismo sentido es homeomorfa a la cinta común.

1.5. Unidades dinámicas fundamentales

En esta tesis se demuestra que un *templex* puede reducirse automáticamente a una forma «mínima» que brinda una visión sintética de las propiedades principales de un atractor caótico. Esta reducción permite retomar la tarea de la construcción de una taxonomía del caos. El aporte consiste en la construcción de una clasificación en términos de dos unidades elementales: la unidad oscilante (O-unidad) y la unidad conmutante (S-unidad).

En 1976, Otto Rössler conjeturó que todo atractor caótico resulta de la combinación de un oscilador de dos variables con un conmutador no lineal de una variable [48]. Rössler llamó unidad conmutante (*switching unit*) a un conmutador entre dos variedades que permite el estiramiento y compresión necesarios para mezclar trayectorias e inducir sensibilidad a las condiciones iniciales [11]. Fue combinando estos dos tipos de elementos que Rössler obtuvo su primer sistema caótico [48], que era apenas más complejo que el conocido sistema de Rössler [46].

Luego de haber propuesto varios sistemas para distintos tipos de caos [49, 50, 47, 51, 28], Rössler propuso construir una jerarquía del caos [52, 29]. Esta jerarquía fue luego actualizada [53, 54], antes de transformarse en una taxonomía del caos [55], que permite definir y clasificar clases de conjuntos invariantes caóticos en función de características compartidas. Los niveles taxonómicos [55], desde los más generales hasta los más refinados, son los siguientes:

(1) dinámico o no;

(2) estocástico o determinista;

(3) exponentes de Lyapunov positivos;

(4) exponentes de Lyapunov negativos;

(5) toros de contención;

(6) modalidad del mapa de primer retorno;

(7) template o templex.

En esta tesis se revisita el concepto de unidad fundamental propuesto por Rössler con una perspectiva exclusivamente topológica – sin apelar a invariantes métricos como los exponentes de Lyapunov, ni a las características algebraicas que relacionan las variables de estado en el conjunto de ecuaciones de gobierno. Los generatex del digrafo reducido nos guiarán hacia la descomposición del templex en términos de unidades topológicas elementales.

1.5.1. Procedimiento de reducción de un templex

En esta sección se hará foco en la última clase taxonómica: el *templex*. A través de una serie de pasos, se mostrará cómo el templex permite retomar la tarea iniciada por Rössler hasta alcanzar un algoritmo capaz de describir todos los atractores caóticos conocidos mediante combinaciones de las unidades que él propuso.

Hasta ahora se han recorrido una serie de elementos constitutivos del templex, que permiten realizar una caracterización tanto de la estructura de las trayectorias solución de un sistema dinámico como de cómo circula el flujo sobre esta estructura. A partir de ahora se buscará llevar esta descripción a su mínima expresión. Así como el templex hereda de la teoría de homología la capacidad de eliminar información irrelevante y extraer propiedades fundamentales de la estructura del flujo, independientemente del número y disposición de las celdas, las unidades fundamentales permiten construir una estructura combinatoria que no dependa del digrafo D. De este modo, el digrafo reducido proporciona una manera sistemática de describir atractores caóticos en términos de O-unidades y S-unidades.

El procedimiento para extraer las unidades fundamentales de un templex consta de dos partes: reducir el templex y descomponer su digrafo reducido en O- y S-unidades. Una descomposición [56] de un digrafo se define de la siguiente manera:

Definición 1.20. *Una **descomposición** de un digrafo $D = (N, E)$ es tal que:*

- $D = \bigcup_{1 \leq i \leq k} D_i$, *donde* $D_i \subset D$, $\forall i$.
- $E(D_i) \cap E(D_j) = \emptyset \ \forall i, j$.

Es precisamente la existencia de una *joining line* lo que inscribe la caoticidad en un atractor. Asimismo, la especificidad de cada atractor caótico se manifiesta entre los *splitting* y *joining locus*. Todos los procesos dinámicos no triviales quedan contenidos entre estos dos lugares. De modo que para realizar una reducción, el primer paso consiste en identificar los *splitting* y *joining nodes* del digrafo, asociados a las celdas del complejo que se encuentran en dichos lugares y que resultan fundamentales. Identificarlos será crucial para preservar las propiedades topológicas de un templex reducido.

La lógica del procedimiento de reducción consiste en fusionar tantas celdas como sea posible en el complejo $\mathbb{K}$ (y sus nodos correspondientes en el digrafo D) sin alterar las propiedades topológicas (grupos de homología y torsión, *splitting* y *joining locus*, conjunto de generatex o stripex). En otras palabras, pueden fusionarse celdas (nodos) mientras esta operación no cree ni elimine stripex, torsiones o agujeros [57]. Un digrafo reducido debe estar compuesto por *splitting* y *joining nodes* y los nodos necesarios situados en el camino entre ambos (siempre entre un *splitting node* y un *joining node*, no al revés) para preservar las propiedades topológicas. A continuación, se listan una serie de reglas:

- Se asume que el complejo $\mathbb{K}$ fue construido de forma tal que presenta una única *outgoing cell* por cada componente del *joining locus*.
- Los *splitting* y *joining nodes* no pueden eliminarse durante el proceso de fusión.
- Un nodo no puede ser simultáneamente *splitting* y *joining node*. Esto es: una dada celda no puede estar limitada simultáneamente por un *joining locus* y un *splitting locus*, de modo que existan al menos dos celdas entre ambos.
- No puede haber una arista que vaya de un *splitting node* a uno de unión. Se debe fusionar todas las celdas entre ambos y asignarlas a un nodo extra.

Una vez reducido el complejo, resta descomponer el digrafo reducido $\overline{D}$ en O- y S-unidades. Dado que los *generatex* constituyen el esqueleto del atractor, los mismos serán utilizados para extraer las unidades. Los caminos compartidos por todos los *generatex* (esto es, los tramos del digrafo en el que

intersecan todos los *generatex*) coincide con la arista que va del *joining node* al *splitting node*. Estas aristas se denominan *bonds* (enlaces), ya que conectan rutas no equivalentes:

Definición 1.21. *Sea $\overline{T} = (\overline{\mathbb{K}}, \overline{D})$ un templex reducido con $\overline{D} = (\overline{N}, \overline{E})$. Un **enlace** o **bond** $B_i \in \mathscr{B}$ es tal que $B_i \in \overline{E}$ y conecta un joining node con un splitting node.*

Los *bonds* o enlaces corresponden a partes del templex donde la dinámica es trivial. En otras palabras, la especificidad del atractor se manifiesta entre los *splitting* y *joining locus*, es decir, en la parte complementaria al *bond*. Los *bonds* pueden pensarse como las manijas de un *template*, que sostienen los stripex y marcan los caminos donde la dinámica es irrelevante. Cuando hay *m bonds* ($m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) que pertenecen a un mismo ciclo en $\overline{D}$, se dice que el *bond* es degenerado y de orden *m*.

Una vez identificados los *bonds* y reunidos en $\mathscr{B}$, ya se puede descomponer el grafo en unidades. Se continúa seleccionando las O-unidades entre los ciclos del digrafo reducido. Por construcción, un ciclo *i* en $\overline{D}$ rodea un centro de rotación c_i y está asociado a un *bond* (o conjunto de *bonds* degenerados) B_i.

Definición 1.22. *La **O-unidad** asociada a un bond (o conjunto de bonds degenerados) es el ciclo en $\overline{D}$ que (i) tiene el menor número de nodos y (ii) se encuentra más próximo a un centro de rotación c_i.*

Hay una sola O-unidad por *bond* (o conjunto de *bonds* degenerados). Si el *bond* es degenerado, la O-unidad asociada también se considera degenerada. Una vez identificadas las O-unidades, las S-unidades deben seleccionarse entre los ciclos restantes de $\overline{D}$, de modo que el conjunto de unidades forme una descomposición de $\overline{D}$.

Definición 1.23. *Una **S-unidad** es un camino obtenido sustrayendo las aristas de las O-unidades de los ciclos restantes en $\overline{D}$.*

Al eliminar las aristas correspondientes a las O-unidades de los ciclos restantes asociados a las S-unidades, se pone de manifiesto que las S-unidades no pueden existir sin la O-unidad correspondiente. Cabe señalar que, en ausencia de enlaces degenerados, el número total de unidades (de ambos tipos) en la descomposición de $\overline{D}$ suele coincidir con el número de elementos del conjunto de stripex.

Los pasos a seguir para la reducción de un digrafo entonces consisten en:

(1) Identificar los *splitting* y *joining nodes*.

(2) Fusionar todas las celdas que quedan en el medio entre ellos, dejando una celda (y su correspondiente nodo) entre cada *splitting node* que va hacia un *joining node*.

(3) Identificar el *bond* como las aristas que van de un *joining node* a un *splitting node*.

(4) Asignar una O-unidad por *bond* al ciclo más corto y próximo a un centro de rotación.

(5) Tomar las S-unidades de los ciclos restantes.

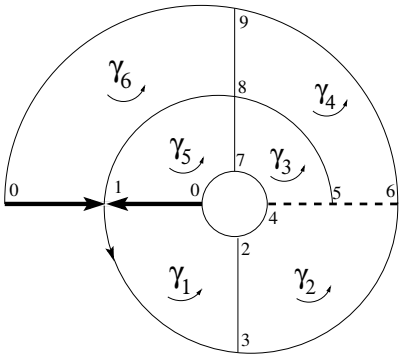
1.5.2. Unidades fundamentales para algunos atractores caóticos

En esta sección se aplica la reducción a diversos atractores bien conocidos (Rössler, Lorenz y Burke-Shaw), así como a un atractor no trivial en cuatro dimensiones y a un caso de caos toroidal (Deng).

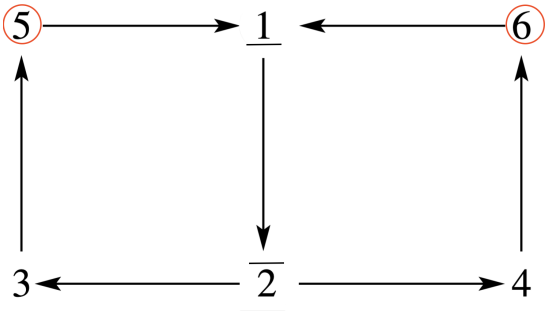
El atractor de Rössler espiral

A continuación se mostrará el procedimiento de reducción con el caso de R_2. Tal como se observa en la Figura 1.16 (b), el *joining node* 1 presenta un grado de entrada 2, ya que hay 2 aristas entrantes que se dirigen a él, y el nodo 2 (*splitting node*) tiene un grado de salida 2, dado por sus 2 aristas salientes. En color rojo fueron redondeados los nodos que a pesar de no ser ni *joining* ni *splitting node*, deberán

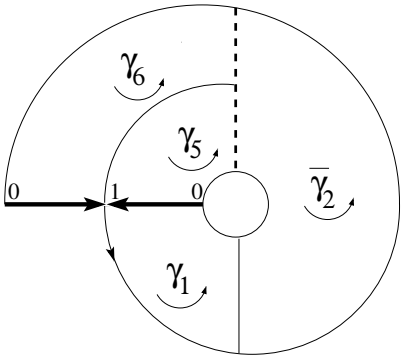
estar en la reducción para cumplir con la regla de que haya al menos algún nodo entre un *splitting* y un *joining node*. Los nodos adyacentes (y sus correspondientes celdas) se fusionarán a ellos en tanto no sean ni *joining* ni *splitting node*. A partir de ahora, a las celdas fusionadas se les pondrá una barra encima. Como se ve en el panel (c), las celdas γ_2, γ_3 y γ_4 fueron fusionadas en $\overline{\gamma}_2$. Por otro lado, las celdas γ_5 y γ_6 son necesarias para no perder las propiedades topológicas de $T(\mathrm{R}_2)$, lo cual se condice con la elección de los nodos correspondientes como nodos intermedios entre el 1 y el 2.



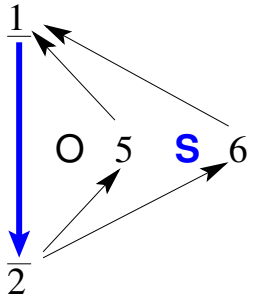
(a) Complejo $\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)$



(b) Digrafo $D(\mathrm{R}_2)$



(c) Complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{R}_2)$



(d) Digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{R}_2)$, con el *bond* en azul

Figura 1.16: Reducción del templex para el atractor de espiral de Rössler: (a) complejo $\mathbb{K}(\mathrm{R}_2)$, (b) digrafo $D(\mathrm{R}_2)$ con los nodos que no se pueden fusionar a los *splitting* o *joining nodes* redondeados en rojo. En (c) y (d), sus versiones reducidas: complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{R}_2)$ (c), digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{R}_2)$ con el *bond* en azul, los *splitting nodes* subrayados y los *joining nodes* con una línea encima (d).

El digrafo reducido para el atractor espiral de Rössler $\overline{D}(\mathrm{R}_2)$ que se muestra en la Figura 1.16 (d) presenta dos generatex de orden 1 asociados a los siguientes dos ciclos:

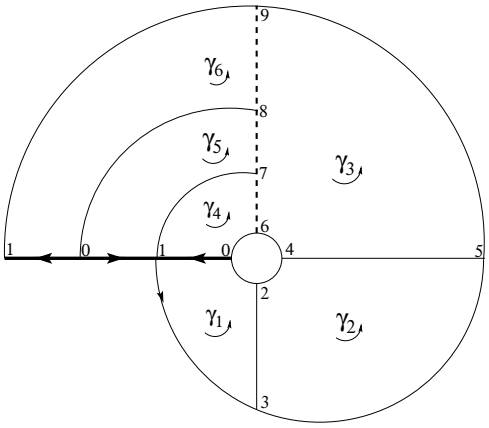
$$\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{R}_2)) \equiv \underline{1} \to \overline{2} \to 5 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_2(\overline{D}(\mathrm{R}_2)) \equiv \underline{1} \to \overline{2} \to 6 \to \underline{1}$$

Dado que $\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{R}_2)) \cup \mathscr{C}_2(\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{R}_2)) \neq \emptyset$, ambos stripex comparten la arista $\underline{1} \to \overline{2}$, por lo que existe un único *bond* $\mathscr{B}(\mathrm{R}_2) = \{(\underline{1}, \overline{2})\}$ marcado en color azul en la Figura 1.16 (d). Ambos ciclos tienen la misma cantidad de nodos, pero el que está más cerca del centro de rotación es $\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{R}_2))$, identificado como la O-unidad. Al eliminar el *bond* del segundo ciclo $\mathscr{C}_2(\overline{D}(\mathrm{R}_2))$, se obtiene la S-unidad, descripta por la ruta $\overline{2} \to 6 \to \underline{1}$.

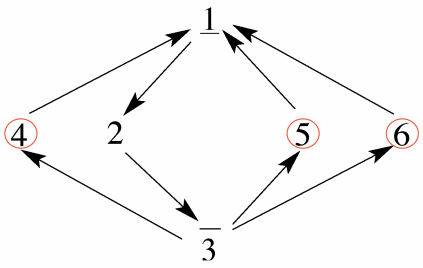
Tal como antes, el número de unidades corresponde al número de stripex (o cintas en el límite disipativo en 3D), es decir, al número de ramas monótonas en el mapa de primer retorno (no mostrado). El digrafo reducido opera al mismo nivel taxonómico que el mapa de primer retorno.

El atractor de Rössler embudo

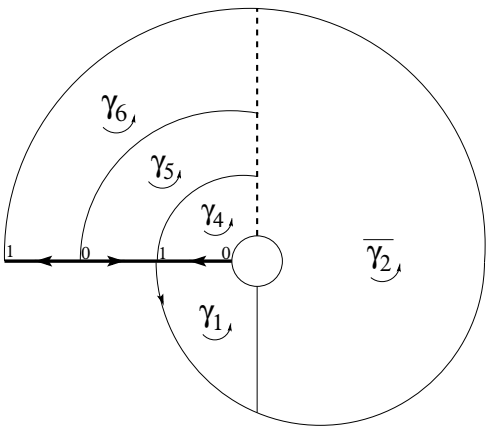
Corresponde ahora realizar la reducción del templex para el atractor del Rössler embudo R_3. En la Figura 1.17 (a) y (b) se tiene el templex calculado previamente, con la salvedad de que ahora los *joining nodes* están subrayados, y los *splitting nodes* presentan una línea por encima. El nodo 1 presenta un grado de entrada 3, de modo que es un *joining node*; mientras que el nodo 3 presenta un grado de salida 3, con lo cual es un *splitting node*. Como se vio previamente, la identificación de esos nodos es el primer paso dado que delimitan los *bonds*, que en este caso es uno solo: $\mathscr{B}(R_3) = \{(\underline{1},\overline{2})\}$. 4, 5 y 6 son los nodos que están entre un *splitting* y un *joining node* (por eso están redondeados en rojo en la Figura 1.17 (d)), por lo que deben incluirse para preservar las propiedades del templex. Es por esto que, tal como se ve en la Figura 1.17 (c), sólo el nodo 3 estaba de más y fue fusionado con el 2. Esto le da al nodo 2 la característica de haber sido fusionado con otro y por consiguiente su respectiva celda aparece en esa misma figura con una barra por encima ($\overline{\gamma}_2$).



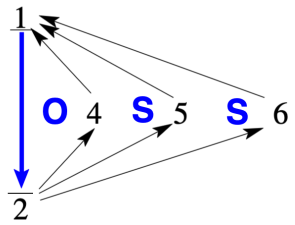
(a) Diagrama plano del complejo $\mathbb{K}(R_3)$



(b) Digrafo $D(R_3)$



(c) Diagrama plano del complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(R_3)$.



(d) Digrafo reducido $\overline{D}(R_3)$ con el *bond* azul.

Figura 1.17: Reducción del templex para el atractor de espiral de Rössler $T(R_3) = (\mathbb{K}(R_3), D(R_3))$. (a) complejo $\mathbb{K}(R_3)$, (b) digrafo $D(R_3)$ y sus versiones reducidas: (c) complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(R_3)$, (d) digrafo reducido $\overline{D}(R_3)$ con el *bond* marcado en azul, los nodos entrantes subrayados y los salientes con una línea encima.

En el digrafo reducido de Figura 1.17 (d) los tres generatex de orden 1 asociados a los siguientes tres

ciclos son:

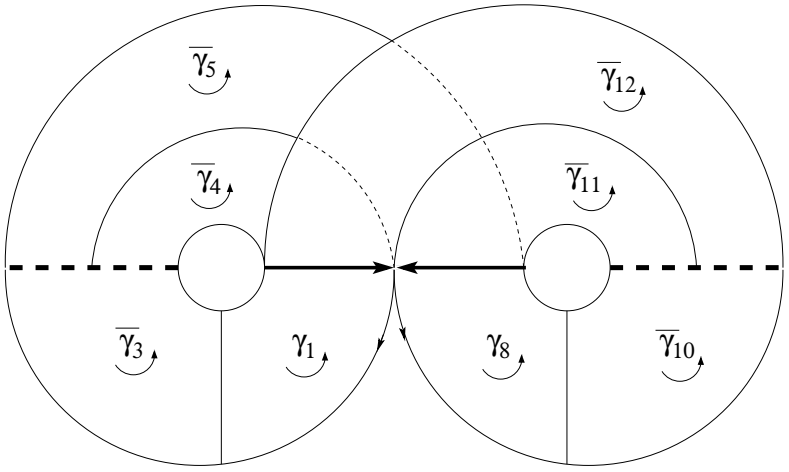
$$\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{R}_3)) \equiv \underline{1} \to \overline{2} \to 4 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_2(\overline{D}(\mathrm{R}_3)) \equiv \underline{1} \to \overline{2} \to 5 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_3(\overline{D}(\mathrm{R}_3)) \equiv \underline{1} \to \overline{2} \to 6 \to \underline{1}$$

Los tres ciclos $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ poseen el mismo número de nodos, pero $\mathscr{C}_1$ es el más cercano al centro de rotación, por lo que se identifica como O-unidad. Al eliminar el *bond* (ya presente en la O-unidad) de los otros dos ciclos restantes, se obtienen las S-unidades descriptas por $(\overline{2} \to 5 \to \underline{1})$ y $(\overline{2} \to 6 \to \underline{1})$.

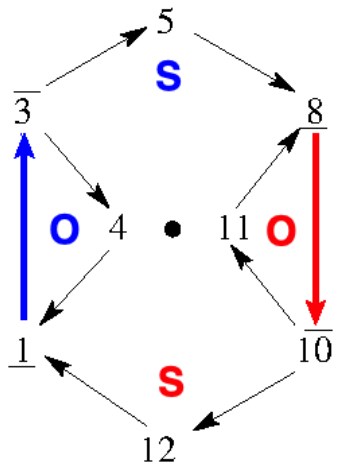
En comparación con el caso espiral, el atractor de embudo de Rössler, tal como se observa en la Figura 1.17 (d), presenta una S-unidad adicional. Ambas S-unidades quedan en "paralelo", es decir, quedan unidas a la O-unidad a través del mismo camino $(\underline{1} \to \overline{2})$, que constituye el *bond*.

El atractor de Lorenz

A continuación se procede de forma análoga para la reducción del atractor de Lorenz. Como se observa en el diagrama semiplanar de la Figura 1.15 (a), en $\mathbb{K}(\mathrm{L})$ las celdas γ_1 y γ_8 están delimitadas simultáneamente por un *joining locus* y uno de bifurcación. Como se mencionó antes, para que funcione la reducción y no se pierdan las propiedades topológicas en el camino, es necesario que ningún nodo (y por lo tanto, ninguna celda) sea al mismo tiempo de unión y bifurcación. Para evitarlo, se fusionan las celdas γ_2 y γ_3 (respectivamente, γ_9 y γ_{10}) en una única celda $\overline{\gamma}_3$ (respectivamente, $\overline{\gamma}_{10}$). El templex puede reducirse aún más sin alterar sus propiedades: las celdas γ_5 y γ_7 (respectivamente, γ_4 y γ_6) pueden fusionarse en una celda $\overline{\gamma}_5$ (respectivamente, $\overline{\gamma}_4$), como se observa en el complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{L})$ de la Figura 1.18 (a). El templex reducido $\overline{T}(\mathrm{L})$ posee ocho celdas bidimensionales en lugar de catorce, pero conserva las mismas homologías y el mismo conjunto de generatex, formado por tres elementos, uno de ellos de orden 2. Fusionar más celdas alteraría las propiedades del templex, por lo que la reducción se considera completa.



(a) Complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{L})$.



(b) Digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{L})$.

Figura 1.18: Templex reducido para el atractor de Lorenz. (a) Complejo $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{L})$; (b) Digrafo $\overline{D}(\mathrm{L})$.

El digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{L})$ se presenta en la Figura 1.18 (b), con el punto que representa el eje de rotación [58]. El digrafo reducido de ocho nodos del atractor de Lorenz presenta un *joining locus* de dos componentes (los dos nodos subrayadas) y un *splitting locus* también con dos componentes (los dos nodos con barra encima).

Hay dos enlaces marcados en azul y rojo en la Figura 1.18 (b): $\mathscr{B}(\mathrm{L}) = \{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2\}$, con $B_1 = (\underline{1}, \overline{3})$ y $B_2 = (\underline{8}, \overline{10})$. Con esta información, ya se puede descomponer $\overline{D}(\mathrm{L})$ en unidades. Se tienen los siguientes

cuatro ciclos:

$$\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{L})) = \underline{1} \to 3 \to 4 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_2(\overline{D}(\mathrm{L})) = \underline{8} \to \overline{10} \to 11 \to \underline{8}$$
$$\mathscr{C}_{31}(\overline{D}(\mathrm{L})) = \underline{1} \to \overline{3} \to 5 \to \underline{8}$$
$$\mathscr{C}_{32}(\overline{D}(\mathrm{L})) = \underline{8} \to \overline{10} \to 12 \to \underline{1}$$

Los dos primeros ciclos son de orden 1, y el tercero es de orden 2. Los ciclos $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_{31}$ comparten el enlace B_1; y los ciclos $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_{32}$ comparten el enlace B_2. $\mathscr{C}_1$ (asociado a B_1) y $\mathscr{C}_2$ (asociado a B_2) son los ciclos con el menor número de nodos (tres) y los más cercanos a los dos centros de rotación de cada ala del atractor. Ambos califican como O-unidades.

Ahora que se han determinado las O-unidades, ya se pueden eliminar las aristas que pertenecen a las O-unidades de los dos ciclos restantes $\mathscr{C}_{31}$ y $\mathscr{C}_{32}$. Esto da lugar a los siguientes caminos disjuntos: $(\overline{3} \to 5 \to \underline{8})$ y $(\overline{10} \to 12 \to \underline{1})$, que constituyen las S-unidades. De este modo, el digrafo $\overline{D}(\mathrm{L})$ ha sido así descompuesto en cuatro unidades dinámicas: dos O-unidades y dos S-unidades.

El atractor de Burke y Shaw

En el año 1981 se introduce el siguiente sistema de ecuaciones [59] que genera el llamado atractor de Burke y Shaw [59]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - ay \\ \dot{y} = -y - axz \\ \dot{z} = b + axy \end{cases} \tag{1.5.5}$$

con valores de parámetros $a = 10$ y $b = 4{,}271$. Al integrar numéricamente el sistema de ecuaciones (1.5.5) se obtiene una nube de puntos BS que genera el atractor de la Figura 1.19.

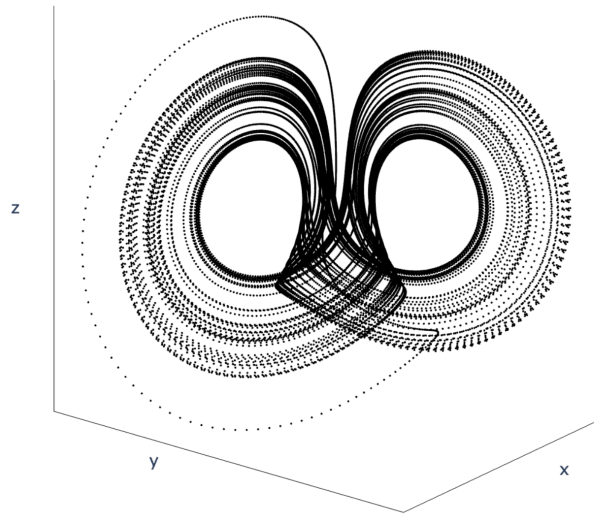
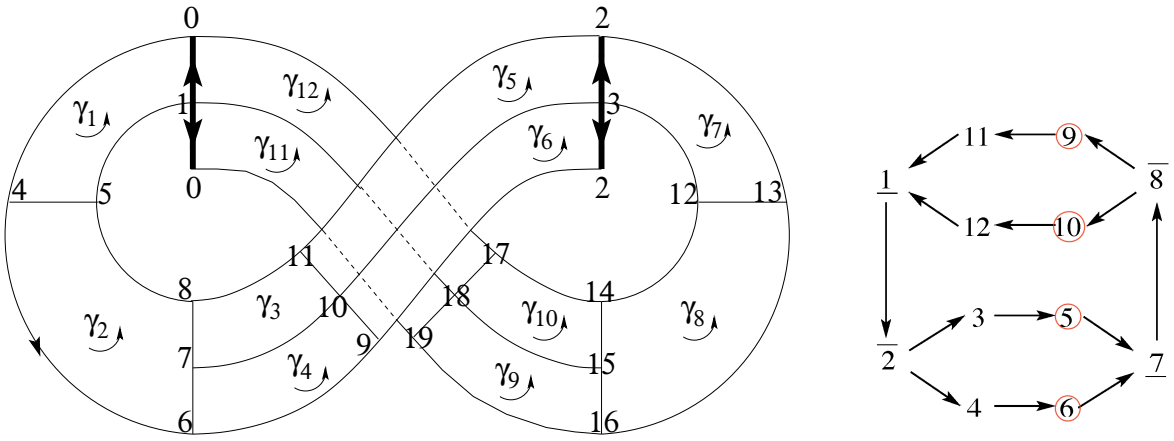


Figura 1.19: Nube de puntos BS en el espacio de estados que constituye el atractor de Burke Shaw formado al integrar el sistema de ecuaciones (1.5.5).

El diagrama semi-planar del complejo $\mathbb{K}(\mathrm{BS})$ del atractor de Burke y Shaw es mostrado en la Figura 1.20. El cómputo de los grupos de homología arroja que $\mathbb{K}(\mathrm{BS})$ presenta un único generador de orden 1 que rodea el agujero tipo foco del atractor ($\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{BS})) \sim \mathbb{Z}$) y no presenta cavidades cerradas ($\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{BS})) \sim 0$). El *joining locus* está compuesto por dos componentes $J_1(\mathbb{K}(\mathrm{BS})) = \langle 1,0 \rangle$ y

$J_2(\mathbb{K}(\mathrm{BS})) = \langle 3,2\rangle$, correspondientes a las dos componentes de la sección de Poincaré y asociadas a las celdas salientes γ_1 y γ_7. Como es habitual, los *joining locus* se indican con flechas gruesas en el complejo.

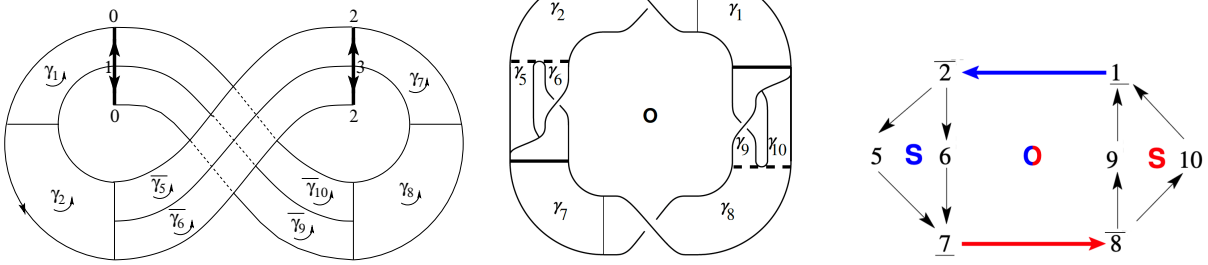


(a) Complejo $\mathbb{K}(\mathrm{BS})$.

(b) Digrafo $D(\mathrm{BS})$.

Figura 1.20: Templex para el atractor de Burke Shaw: (a) muestra el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{BS})$, (b) el digrafo $D(\mathrm{BS})$.

El complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{BS})$ para este atractor, obtenido a partir del complejo de la Figura 1.20, se muestra en la representación semi-planar en la Figura 1.21 (a). La representación en forma de *template* de la Figura 1.21 (b) muestra los dos centros de rotación fusionados en uno solo desdoblándolos. El digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{BS})$ se muestra en la Figura 1.21 (c).



(a) Complejo reducido semi-planar $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{BS})$

(b) *Template* de Burke-Shaw con las celdas de $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{BS})$

(c) Digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{BS})$ con enlaces y unidades coloreadas

Figura 1.21: Templex reducido $\overline{T}(\mathrm{BS}) = (\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{BS}), \overline{\mathrm{D}}(\mathrm{BS}))$ para el atractor de Burke y Shaw. $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{BS})$ se muestra en (a), seguido por la representación tipo *template* con la numeración de celdas (b). El digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{BS})$ con enlaces y unidades fundamentales se muestra en (c).

Existen cuatro generatex de orden 2 asociados a los siguientes ciclos:

$$\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{BS})) = \underline{1} \to \overline{2} \to 6 \to \underline{7} \to \overline{8} \to 9 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_2(\overline{D}(\mathrm{BS})) = \underline{1} \to \overline{2} \to 6 \to \underline{7} \to \overline{8} \to 10 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_3(\overline{D}(\mathrm{BS})) = \underline{1} \to \overline{2} \to 5 \to \underline{7} \to \overline{8} \to 9 \to \underline{1}$$
$$\mathscr{C}_4(\overline{D}(\mathrm{BS})) = \underline{1} \to \overline{2} \to 5 \to \underline{7} \to \overline{8} \to 10 \to \underline{1}$$

Los cuatro generatex de orden 2 asociados a estos ciclos son la combinación de cuatro ciclos de

orden 1. Esta degeneración proviene de la simetría de orden 2, discutida en las Refs. [60, 61, 58]. Al descomponer estos cuatro generatex se obtienen los siguientes cuatro ciclos débiles:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_{1_1}(\overline{D}(\mathrm{BS})) &= \underline{1} \to \overline{2} \to 6 \to \underline{7} \\
\mathscr{C}_{1_2}(\overline{D}(\mathrm{BS})) &= \underline{7} \to \overline{8} \to 9 \to \underline{1} \\
\mathscr{C}_{2_1}(\overline{D}(\mathrm{BS})) &= \underline{1} \to \overline{2} \to 5 \to \underline{7} \\
\mathscr{C}_{2_2}(\overline{D}(\mathrm{BS})) &= \underline{7} \to \overline{8} \to 10 \to \underline{1}
\end{aligned}$$

Cada ciclo de orden 2 resulta de la unión de dos ciclos débiles: $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_{1_1} \cup \mathscr{C}_{1_2}$, $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_{1_1} \cup \mathscr{C}_{2_2}$, $\mathscr{C}_3 = \mathscr{C}_{2_1} \cup \mathscr{C}_{1_2}$ y $\mathscr{C}_4 = \mathscr{C}_{2_1} \cup \mathscr{C}_{2_2}$. Estos cuatro ciclos débiles tienen asociadas las siguientes cuatro stripex:

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_1(\overline{T}(\mathrm{BS})) &= \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_6 \to \gamma_7 \\
\mathscr{S}_2(\overline{T}(\mathrm{BS})) &= \gamma_7 \to \gamma_8 \to \gamma_9 \to \gamma_1 \\
\mathscr{S}_3(\overline{T}(\mathrm{BS})) &= \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_5 \to \gamma_7 \\
\mathscr{S}_4(\overline{T}(\mathrm{BS})) &= \gamma_7 \to \gamma_8 \to \gamma_{10} \to \gamma_1
\end{aligned}$$

Como hay dos aristas que van de un *joining node* a un *splitting node*, hay dos *bonds*: $\mathscr{B}(\mathrm{BS}) = \{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2\} = \{(\underline{1}, \overline{2}), (\underline{7}, \overline{8})\}$. Los cuatro ciclos tienen el mismo número de nodos, pero el más cercano al centro de rotación es el primero. El ciclo $\mathscr{C}_1$ es por lo tanto una O-unidad y es degenerada, ya que cruza dos veces la *joining line*. Al eliminar las aristas de la O-unidad de los ciclos restantes, se obtienen dos S-unidades formadas por los caminos $(\overline{2} \to 5 \to \underline{7})$ y $(\overline{8} \to 10 \to \underline{1})$. La unión de los dos primeros stripex forma la O-unidad degenerada. Si bien el atractor de Burke y Shaw puede parecer el dual del atractor de Lorenz, su estructura es bastante diferente. El enfoque con templex muestra claramente las dos componentes del *joining locus*, y por tanto también de la sección de Poincaré, en concordancia con los primeros trabajos sobre mapas de primer retorno para este atractor [62, 63].

Un atractor no trivial en cuatro dimensiones

En 1994 Bo Deng propuso un sistema dinámico de cuatro dimensiones [64] obtenido como una extensión de uno tridimensional que sigue el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}
\dot{x} = -(z+2)d\,(x - [a + \varepsilon_3(2+w)]) + (2-z)\left[\alpha(x-2) - \beta y - \alpha(x-2)\frac{(x-2)^2+y^2}{R^2}\right] \\
\dot{y} = -(z+2)(y-b) + (2-z)\left[\beta(x-2) + \alpha y - \alpha y\frac{(x-2)^2+y^2}{R^2}\right] \\
\dot{z} = (4-z^2)\frac{z+2-\mu(x+2)}{\varepsilon_1} - cz \\
\dot{w} = (4-z^2)\frac{z+2-\mu(x+2)}{\varepsilon_2} - cz\,.
\end{cases} \tag{1.5.6}$$

Con los valores de parámetros indicados en la Figura 1.22, el sistema (1.5.6) genera la nube de puntos S allí mostrada a través de dos proyecciones. Este atractor fue investigado mediante un complejo celular (aunque no con un templex) por Sciamarella y Mindlin [8] para mostrar que el método BRAMAH permite tratar exitosamente espacios de estados de más de tres dimensiones. El análisis topológico se realiza con las cuatro coordenadas de las trayectorias. En ese trabajo, el objetivo era mostrar que las homologías permitían una descripción topológica a partir de series temporales cortas, independientemente de la naturaleza de la dinámica (periódica, cuasiperiódica, caótica u otra). Aquí se le dará foco a su carácter caótico.

Su complejo celular $\mathbb{K}(\mathrm{S})$ es mostrado en la Figura 1.23 (a). El mismo consiste en una única componente conexa que tiene cinco generadores de orden 1 y no presenta cavidades cerradas. Esto se expresa como $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{S})) \sim \mathbb{Z}^5, \mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{S})) \sim 0$. El volumen formado por las diez 3-celdas de $\mathbb{K}(\mathrm{S})$, a saber: γ_1,

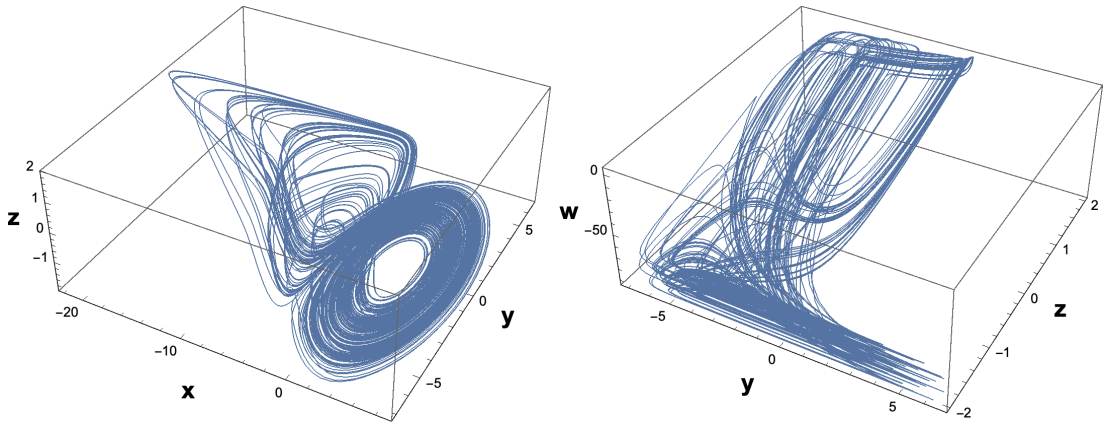


Figura 1.22: Dos proyecciones de la nube de puntos S generada por el sistema cuatridimensional (1.5.6). Parámetros: $a = 7$, $b = 1{,}45$, $c = 1$, $d = 0{,}5$, $R = 6$, $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 7$, $\varepsilon_1 = 0{,}165$, $\varepsilon_2 = 0{,}01$, $\varepsilon_3 = 2$, $\mu = 1{,}543$.

γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6, γ_7, γ_8, γ_{37} y γ_{40}, es topológicamente equivalente a un toro sólido (relleno). Obsérvese que las homologías del toro sólido ($\mathscr{H}_0 \sim \mathbb{Z}$, $\mathscr{H}_1 \sim \mathbb{Z}$, $\mathscr{H}_2 \sim \emptyset$, $\mathscr{H}_3 \sim \emptyset$) son equivalentes a las del cilindro o banda normal. Por esta razón, el mismo puede ser aplanado.

El *joining locus* fue definido previamente para una variedad enramada de orden 2, y por lo tanto para un 2-complejo. En este caso particular, se calcula buscando la cadena de 1-celdas compartida por un conjunto de al menos tres celdas, que pueden ser 3-celdas (γ_i) o 2-celdas (σ_i) que no sean la cara de ninguna 3-celda. El *joining locus* tiene dos componentes:

(1) $J_1 = J_{1a} \cup J_{1b}$, en donde $J_{1a} = \langle 1343, 1672 \rangle$ está formada por las celdas γ_1, γ_8 y σ_{24}; y $J_{1b} = \langle 1343, 1799 \rangle$ está formada por las celdas γ_1, γ_8, σ_9 y σ_{34};

(2) $J_2 = \langle 1750, 4270 \rangle$, formada por las celdas σ_{12}, σ_{13} y σ_{14};

A partir del digrafo de la Figura 1.23 (b) son computados los ciclos de orden 1, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$, que están asociados a tres generatex:

$$\mathscr{C}_1 \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \overline{6} \to 7 \to 8 \to \underline{1}$$

$$\mathscr{C}_2 \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \overline{6} \to 37 \to \overline{40} \to 36 \to 35 \to 25 \to 26 \to 27 \to 28 \to 29 \to 30 \to 31 \to 32 \to 33 \to 34 \to \underline{1}$$

$$\mathscr{C}_3 \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 37 \to \overline{40} \to 38 \to 20 \to 19 \to 18 \to \overline{17} \to 21 \to 22 \to 23 \to 24 \to \underline{1}$$

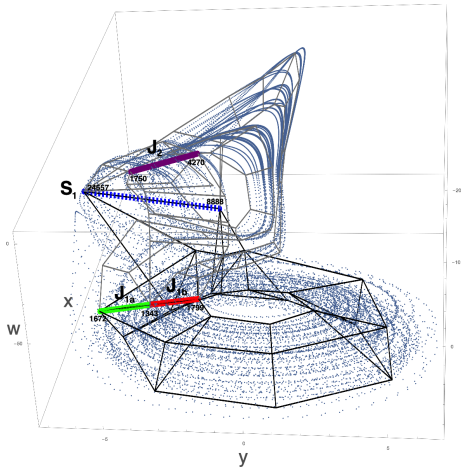
Se tienen dos generatex de orden 2, asociados a dos ciclos que son la unión de dos ciclos débiles: $\mathscr{C}_4 = \mathscr{C}_{4_1} \cup \mathscr{C}_{4_2}$ y $\mathscr{C}_5 = \mathscr{C}_{5_1} \cup \mathscr{C}_{4_2}$:

$$\mathscr{C}_{4_1} \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 37 \to \overline{40} \to 38 \to 20 \to 19 \to 18 \to \overline{17} \to 16 \to 15 \to 14 \to \underline{12}$$

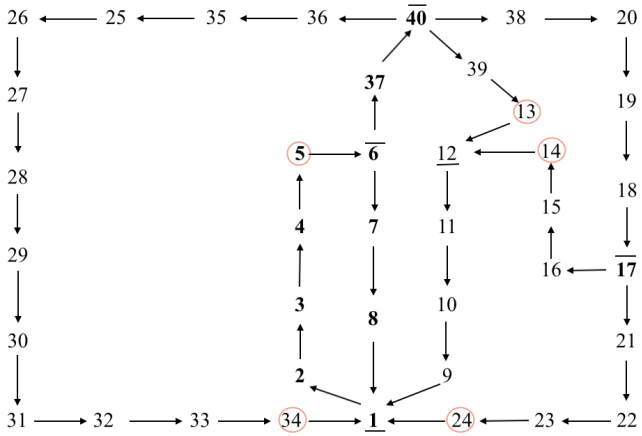
$$\mathscr{C}_{5_1} \equiv \underline{1} \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 37 \to \overline{40} \to 39 \to 13 \to \underline{12}$$

$$\mathscr{C}_{4_2} \equiv \underline{12} \to 11 \to 10 \to 9 \to \underline{1}$$

Para extraer los stripex a partir de los ciclos, se consideran los caminos que están delimitados por los *joining nodes*, 1 y 12. Los tres primeros ciclos conducen a tres stripex:



(a) Complejo $\mathbb{K}(\mathrm{S})$ en el subespacio *x*-*y*-*w*. Las líneas etiquetadas (en color) corresponden a los *joining locus* (líneas sólidas) o *splitting locus* (líneas punteadas).



(b) Digrafo $D(\mathrm{S})$.

Figura 1.23: Templex para el atractor cuatrodimensional: (a) muestra el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{S})$, (b) el digrafo $D(\mathrm{S})$. En (b), los *joining nodes* de encuentran subrayados y los *splitting nodes* con una línea encima. En rojo se circulan los nodos que, a pesar de no ser *joining* o *splitting nodes*, deberán ser agregados al digrafo reducido acorde a las reglas de reducción.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S}_1 &\equiv \gamma_1 \dots \gamma_8 \\
\mathscr{S}_2 &\equiv \gamma_1 \dots \gamma_6 \to \gamma_{37} \to \gamma_{40} \to \sigma_{36} \to \sigma_{35} \to \sigma_{25} \dots \sigma_{34} \\
\mathscr{S}_3 &\equiv \gamma_1 \dots \gamma_6 \to \gamma_{37} \to \gamma_{40} \to \sigma_{38} \to \sigma_{20} \to \sigma_{19} \to \sigma_{18} \to \sigma_{17} \to \sigma_{21} \dots \sigma_{24}
\end{aligned}
$$

Los siguientes dos ciclos conducen a:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S}_4 \equiv\ & \gamma_1 \dots \gamma_6 \to \gamma_{37} \to \gamma_{40} \to \sigma_{38} \to \sigma_{20} \to \sigma_{19} \to \sigma_{18} \to \sigma_{17} \to \sigma_{16} \to \sigma_{15} \to \sigma_{14} \\
\mathscr{S}_5 \equiv\ & \gamma_1 \dots \gamma_6 \to \gamma_{37} \to \gamma_{40} \to \sigma_{39} \to \sigma_{13} \\
\mathscr{S}_6 \equiv\ & \sigma_{12} \to \sigma_{11} \to \sigma_{10} \to \sigma_9
\end{aligned}
$$

El stripex $\mathscr{S}_6$ corresponde a una banda trivial, y la *joining line* J_2 puede identificarse con la *joining line* J_1 mediante una isotopía. Así, los stripex $\mathscr{S}_4$ y $\mathscr{S}_5$ se transforman en:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S}'_4 \equiv\ & \gamma_1 \dots \gamma_6 \to \gamma_{37} \to \gamma_{40} \to \sigma_{38} \to \sigma_{20} \to \sigma_{19} \to \sigma_{18} \to \sigma_{17} \to \sigma_{16} \to \sigma_{15} \to \sigma_{14} \to \sigma_{12} \\
& \to \sigma_{11} \to \sigma_{10} \to \sigma_9 \\
\mathscr{S}'_5 \equiv\ & \gamma_1 \dots \gamma_6 \to \gamma_{37} \to \gamma_{40} \to \sigma_{39} \to \sigma_{13} \to \sigma_{12} \to \sigma_{11} \to \sigma_{10} \to \sigma_9
\end{aligned}
$$

Así, el atractor de cuatro dimensiones puede describirse con cinco stripex, es decir, con una dinámica de cinco unidades. Se encuentran torsiones locales en $\mathscr{S}_3$ y $\mathscr{S}'_5$. El *template* directo fue extraído de la Ref. [31] y se presenta en la Figura 1.24. En el mismo se entiende visualmente por qué la *joining line* J_2 puede identificarse con la *joining line* J_1 mediante una isotopía.

Se procede ahora sí con la descomposición del templex y su consecuente reducción. A partir del digrafo $D(\mathrm{S})$ del templex $T(\mathrm{S})$ de la Figura 1.23 (b), se calcula el digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{S})$, que se presenta

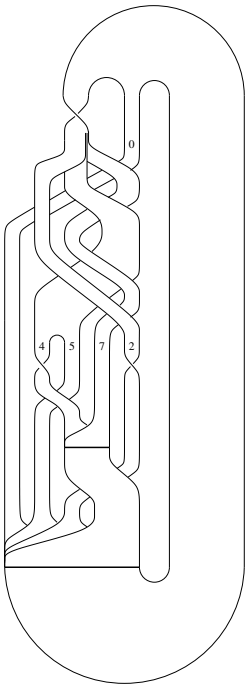


Figura 1.24: *Template* directo extraído de la Ref. [31], producido por el sistema de ecuaciones cuatro-dimensional (1.5.6).

en la Figura 1.25 (b). Los ciclos de orden 1 en la versión reducida son:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{S})) = \underline{1} \to \overline{6} \to 8 \to \underline{1}\\
&\mathscr{C}_2(\overline{D}(\mathrm{S})) = \underline{1} \to \overline{6} \to \overline{40} \to 34 \to \underline{1}\\
&\mathscr{C}_3(\overline{D}(\mathrm{S})) = \underline{1} \to \overline{6} \to \overline{40} \to 13 \to \underline{12} \to \underline{1}\\
&\mathscr{C}_4(\overline{D}(\mathrm{S})) = \underline{1} \to \overline{6} \to \overline{40} \to \overline{17} \to 24 \to \underline{1}\\
&\mathscr{C}_5(\overline{D}(\mathrm{S})) = \underline{1} \to \overline{6} \to \overline{40} \to \overline{17} \to 14 \to \underline{12} \to \underline{1}
\end{aligned}$$

Existe un único enlace:

$$\mathscr{B}(\overline{D}(\mathrm{S})) = \{(\underline{1},\overline{6})\}.$$

El ciclo $\mathscr{C}_1$ es el más corto (en número de nodos) y el más próximo al centro de rotación, por lo tanto es identificado como la O-unidad. Al sustraer las aristas de esta O-unidad de los ciclos restantes, se obtienen las cuatro S-unidades mostradas en la Figura 1.25. El número de unidades coincide con el de stripex en $T(\mathrm{S})$.

Obsérvese que las celdas γ_1 a γ_8 y γ_{40} son celdas tridimensionales. Los nodos correspondientes a estas celdas están destacados en negrita en $D(\mathrm{S})$ y $\overline{D}(\mathrm{S})$. La O-unidad está formada por celdas tridimensionales, que aproximan el toro sólido o anillo (ver Figura 1.26).

1.5.3. El atractor toroidal caótico de Deng

El sistema toroidal de Deng [64] está gobernado por las siguientes tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases}
\dot{x} = (\lambda x - \mu y)z + (2-z)\left[\alpha\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)x - \beta y\right]\\
\dot{y} = (\lambda y + \mu x)z + (2-z)\left[\alpha\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)y + \beta x\right]\\
\dot{z} = \frac{1}{\varepsilon}\left[z((2-z)(a(z-2)^2+b) - dx)(z + e(x^2+y^2) - \eta) - \varepsilon c(z-1)\right]
\end{cases} \tag{1.5.7}$$

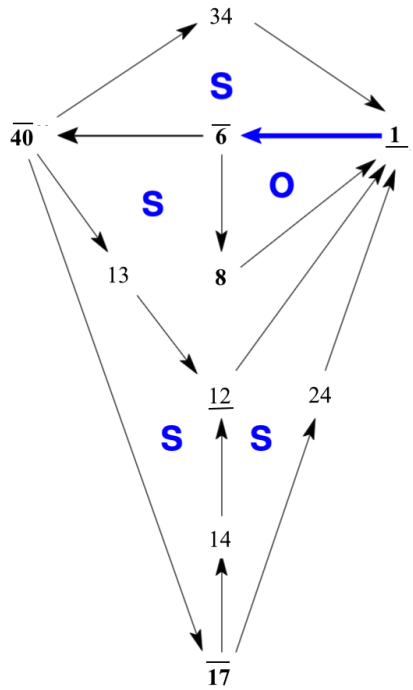


Figura 1.25: Digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{S})$ con *bond* coloreado y unidades O y S.

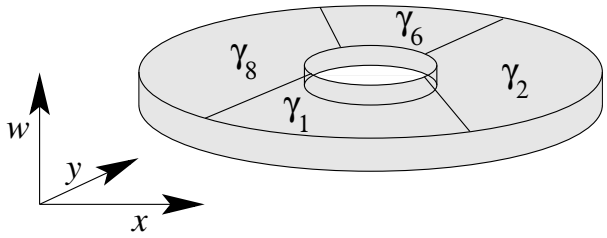
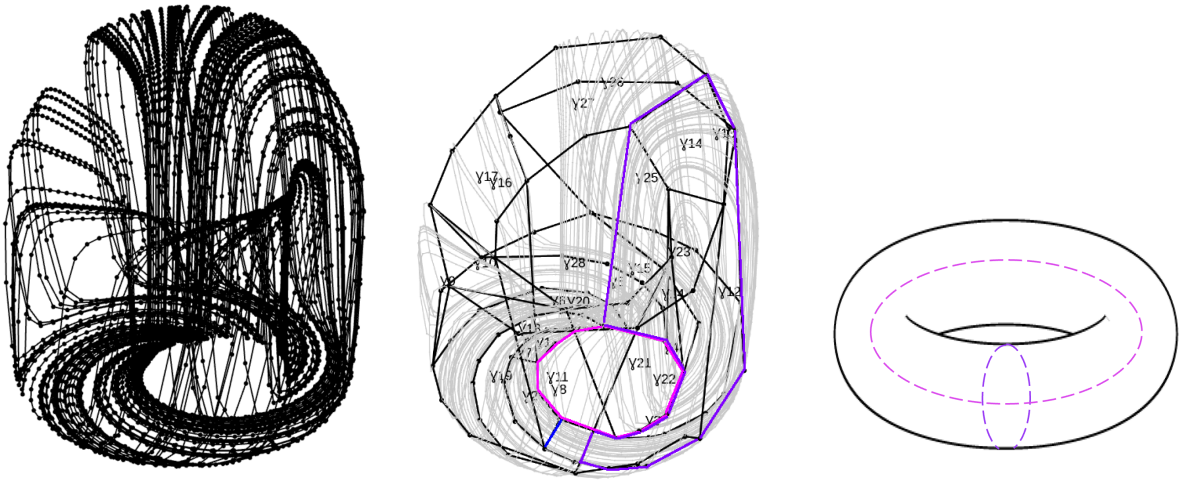


Figura 1.26: Toro sólido correspondiente a la O-unidad del atractor caótico de cuatro dimensiones generado por el sistema (1.5.6).

Para los valores de los parámetros de la Figura 1.27, este sistema produce el atractor toroidal caótico unimodal mostrado en el panel (a) de esa misma figura.

El templex para este atractor $T(\mathrm{D}) = (\mathbb{K}(\mathrm{D}), \mathrm{D}(\mathrm{D}))$ se encuentra en la Figura 1.28. El complejo $\mathbb{K}(\mathrm{D})$ de la Figura 1.27 (b) está compuesto por veintiocho celdas bidimensionales y presenta los grupos de homología de un toro, es decir, dos generadores de orden 1: $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{D})) \sim \mathbb{Z}^2$ (coloreados en las Figuras 1.27 (b) y (c)), y un generador de orden 2: $\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{D})) \sim \mathbb{Z}$, que define la cavidad toroidal encerrada. $\mathbb{K}(\mathrm{D})$ presenta un *joining locus*, como requiere la presencia de caos.

El digrafo $D(\mathrm{D})$ se muestra en la Figura 1.28 (a) y puede reducirse al digrafo de seis nodos $\overline{D}(\mathrm{D})$ que se presenta en la Figura 1.28 (b). El nodo 1 se conserva para evitar que el digrafo tenga una única celda entre *joining locus* y de bifurcación.

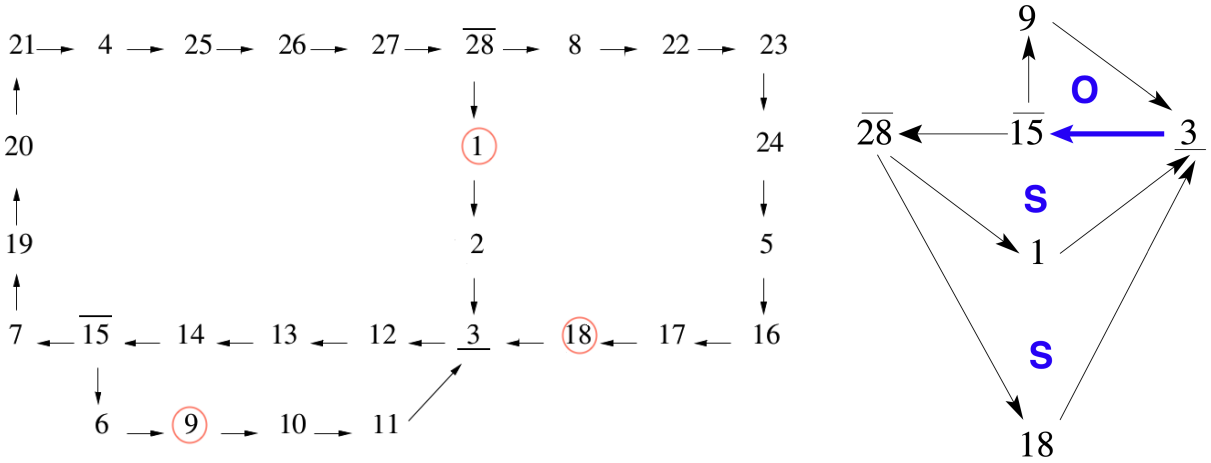


(a) Nube de puntos D con su trayectoria

(b) Complejo original $\mathbb{K}(\mathrm{D})$

(c) Esquema de un toro

Figura 1.27: Atractor toroidal caótico generado por el sistema de Deng (1.5.7) (a) y su complejo celular $\mathbb{K}(\mathrm{D})$ (b). Los dos generadores de primer orden de $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{D}))$ están coloreados en violeta y magenta, tanto en el complejo como en el toro regular. El complejo encierra una cavidad: tiene un solo generador de segundo orden en $\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{D}))$. Valores de los parámetros: $a = 3$, $b = 0{,}8$, $c = 1$, $d = 0{,}1$, $e = 0{,}05$, $\eta = 3{,}312$, $R = 10$, $\alpha = 2{,}8$, $\beta = 5$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\lambda = -2$. Condiciones iniciales: $x_0 = y_0 = z_0 = 0{,}01$.



(a) Digrafo $D(\mathrm{D})$

(b) Digrafo reducido $\overline{D}(\mathrm{D})$

Figura 1.28: Digrafos del complejo $\mathbb{K}(\mathrm{D})$ (a) y del complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{D})$ (b). En (a) los nodos circulados en rojo son los que se agregaron acorde a las reglas de reducción. En (b) están las unidades identificadas en $\overline{D}(\mathrm{D})$ y el enlace está representado por una flecha azul.

$\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{D})$ tiene una *joining line* de una componente, asociada al nodo 3 de $\overline{D}(\mathrm{D})$. Hay tres ciclos de orden 1 asociados a los tres stripex en $\overline{T}(\mathrm{D})$: $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ y $\mathscr{S}_3$.

$$\mathscr{C}_1(\overline{D}(\mathrm{D})) = \underline{3} \to \overline{15} \to 9 \to \underline{3}$$
$$\mathscr{C}_2(\overline{D}(\mathrm{D})) = \underline{3} \to \overline{15} \to \overline{28} \to 1 \to \underline{3}$$
$$\mathscr{C}_3(\overline{D}(\mathrm{D})) = \underline{3} \to \overline{15} \to \overline{28} \to 18 \to \underline{3}$$

Hay un único *bond*:

$$\mathscr{B}(\overline{D}(\mathrm{D})) = \{(\underline{3}, \overline{15})\}.$$

El ciclo $\mathscr{C}_1$ es el más corto y cercano al centro de rotación, por lo que es identificado como la O-unidad del templex. Al restar las aristas de la O-unidad de los ciclos restantes se obtienen dos S-unidades: $(\overline{15} \to \overline{28} \to 1 \to \underline{3})$ y $(\overline{28} \to 18 \to \underline{3})$, como se ilustra en la Figura 1.28 (b).

El atractor de Deng está estructurado alrededor de un toro y, en consecuencia, está gobernado por dos frecuencias principales, como se confirma por el espectro de Fourier: $f_1 = 1{,}022$ Hz y $f_2 = 2{,}046$ Hz, con una razón $\frac{f_1}{f_2} = 0{,}4997 \approx 0{,}5$. Cada una de estas frecuencias se asocia a uno de los dos generadores de primer orden del grupo de homología $\mathscr{H}_1(\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{D}))$, que estructuran el toro como se ilustra en la Figura 1.27 (c).

Para comprender mejor cómo se organizan los stripex $\mathscr{S}_1(\overline{T}(\mathrm{D}))$, $\mathscr{S}_2(\overline{T}(\mathrm{D}))$ y $\mathscr{S}_3(\overline{T}(\mathrm{D}))$, en la Figura 1.29 se colorearon tres fragmentos de trayectoria caótica que visitan cada uno de estos stripex. La duración asociada a cada fragmento es $\tau_1 = 0{,}926$ s, $\tau_2 = 1{,}980$ s y $\tau_3 = 2{,}916$ s, respectivamente.

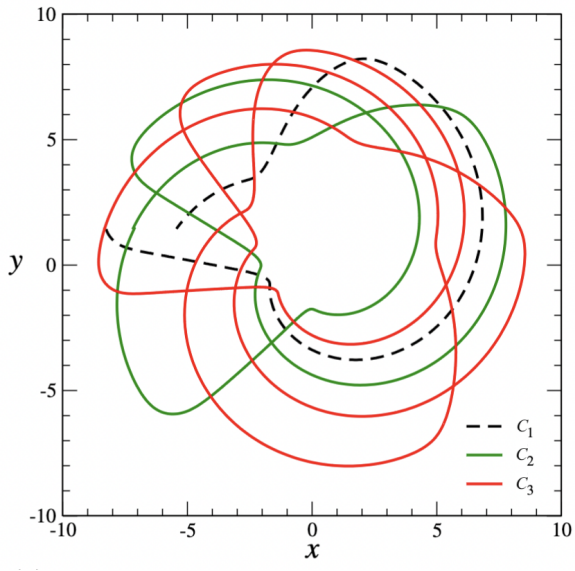


Figura 1.29: Trayectoria que visita las celdas de cada ciclo $\mathscr{C}_i$ extraída del atractor toroidal caótico de Deng.

1.5.4. Templex para una dinámica regular

Un toro puede representarse adecuadamente con un complejo compuesto por una sola celda bidimensional con al menos dos celdas unidimensionales, como se muestra en las Figuras 4.13 y 4.14 de la Ref. [1], p. 62. El hecho de que una única celda de dimensión 2 sea suficiente para construir el complejo de un toro pone de relieve que un complejo celular no es simplemente una malla de un objeto, y que cada dimensión estratificada k contiene información clave. Cuando la superficie regular de un toro es recorrida por una trayectoria cuasi-periódica, caracterizada por un templex sin *joining locus*, la información relevante ya está codificada en el complejo celular, puesto que no existen caminos alternativos para el flujo en su estructura.

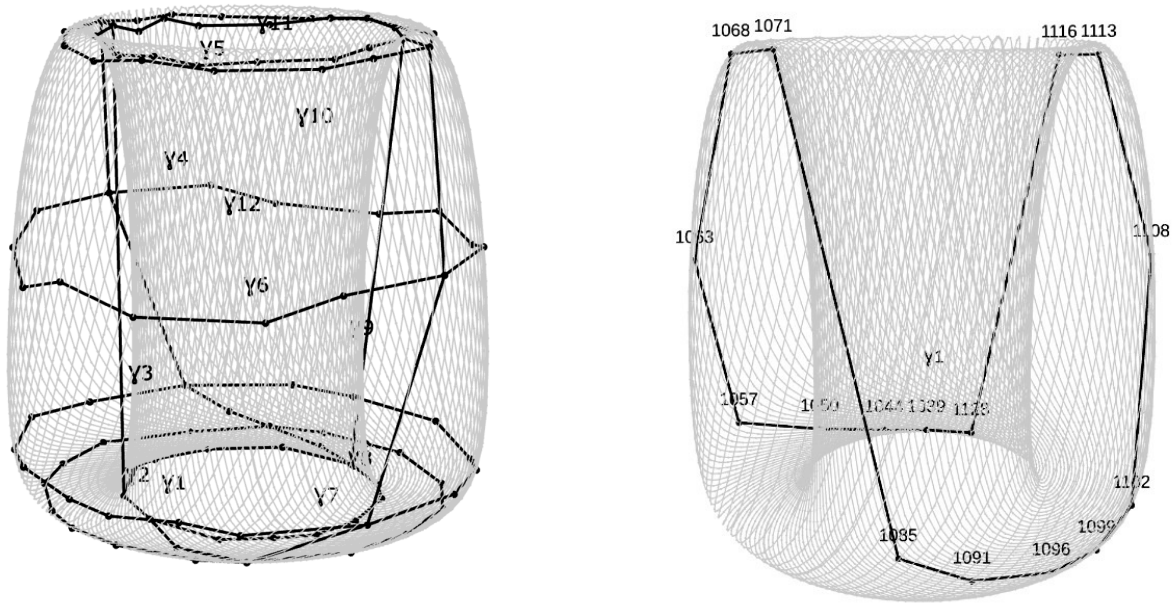
Cuando el templex original no presenta *joining locus*, el flujo subyacente es periódico o cuasi-periódico, y la variedad que soporta las trayectorias no tiene ramificaciones. Es decir, no hay trayectorias alternativas sobre la variedad, o equivalentemente, no existen stripex. En este caso, el templex puede simplificarse reduciendo el número de celdas de mayor dimensión (y por tanto de nodos en el digrafo), siempre que no se modifiquen los grupos de homología ni de torsión. Las celdas de dimensión superior

del complejo original pueden fusionarse hasta obtener un complejo con el número mínimo de κ-celdas que conserve los mismos grupos de homología y torsión. Así, una única celda de dimensión 2 basta para describir un toro. Y un flujo regular sobre un toro puede representarse mediante un digrafo reducido con un único nodo y una arista hacia sí mismo, que representa la organización trivial del flujo.

Un ejemplo de este tipo de flujo está dado por el sistema toroidal de Deng [64], definido por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x} = z(\lambda x - \mu y) + (2-z)\left[\alpha x\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right) - \beta y\right] \\ \dot{y} = z(\lambda y + \mu x) + (2-z)\left[\alpha y\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right) + \beta x\right] \\ \dot{z} = z(2-z)\frac{\left[z+e(x^2+y^2)-\eta\right]-\varepsilon c(z-1)}{\varepsilon} \end{cases} \tag{1.5.8}$$

La simetría del sistema (1.5.8) impide que se desarrollen pliegues propensos al caos [64], por lo cual el sistema resultante es cuasi-periódico (Figura 1.30). Como era de esperar, el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{QP})$ no presenta *joining locus*. Sus grupos de homología son los de un toro: dos generadores de orden 1, $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{QP})) \sim \mathbb{Z}^2$, y un generador de orden 2 correspondiente a la cavidad encerrada, $\mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{QP})) \sim \mathbb{Z}$. Las celdas bidimensionales que cubren la superficie del toro pueden fusionarse en una sola sin alterar los grupos de homología, como se muestra en la Figura 1.30 (b). No hay grupos de torsión. El digrafo reducido consiste en un único nodo (correspondiente a γ_1) con una arista que parte de él y vuelve a sí mismo, mostrando la organización trivial del flujo sobre el toro. El digrafo se muestra en la Figura 1.31.



(a) Complejo original $\mathbb{K}(\mathrm{QP})$ (b) Complejo reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{QP})$

Figura 1.30: Complejos original $\mathbb{K}(\mathrm{QP})$ y reducido $\overline{\mathbb{K}}(\mathrm{QP})$ para el atractor cuasi-periódico generado por el sistema (1.5.8). El complejo reducido tiene una única celda de dimensión 2, etiquetada como γ_1.



Figura 1.31: Digrafo $\overline{D}(\mathrm{QP})$ para el atractor cuasi-periódico generado por el sistema (1.5.8). Tiene una única celda 2-dimensional γ_1.

1.6. Algoritmos desarrollados

A continuación se detallan dos algoritmos desarrollados en el marco de esta tesis. El primero, es una adaptación de un método popularmente usado para hallar las autointersecciones en espacios de estados reconstruidos a partir de una serie temporal. En esta tesis, se adapta para localizar aquellos puntos que se autointersecan en espacio de estados no reconstruidos o en proyecciones de sistemas de dimensión mayor que tres. El segundo, es la traducción a Python de un algoritmo hecho en Mathematica por Sciamarella [31]. A este mismo algoritmo se le incluyó la reducción del templex y cómputo de unidades.

1.6.1. Método de falsos vecinos cercanos

En el Apéndice B se detallan algunos métodos topológicos que permiten reconstruir completamente el espacio de estados a partir de una serie temporal disponible. En particular, en esta tesis no se utilizaron estos métodos para reconstruir el espacio de estados, pero se han adaptado dichos algoritmos para trabajar con dimensiones mayores que tres.

El método de los falsos vecinos más cercanos (FNN, por sus siglas en inglés) [65] es utilizado para determinar la mínima dimensión de un *embedding*. Los *embeddings* [66, 35, 67, 68] permiten realizar una reconstrucción del espacio de estados empleando únicamente mediciones escalares de la forma $x(t)$, basados en el Teorema de Takens [35]. En el Apédice B se detalla el formalismo matemático que permite reconstruir el espacio de estados a través de los *embeddings* por retardos temporales y la estimación del retardo τ correspondiente.

El método FNN consiste en la construcción de vectores $s(t)$ con n componentes del observable $x(t)$. La idea principal es examinar cómo cambia el número de vecinos de un punto a lo largo de la trayectoria de una señal al aumentar la dimensión de embebido.

Sea $s(n) = (x(n), x(n+\tau), \cdots, x(n+(d-1)\tau))$ un embebido en dimensión d, la evolución temporal de $s(n)$ está dada por el paso entre $s(n) \to s(n+1)$. El método FNN se basa en el principio de que, al pasar de una dimensión d a una dimensión $d+1$, es posible distinguir entre vecinos verdaderos y falsos. Un vecino falso es un punto en el conjunto de datos que parece cercano únicamente porque los puntos están siendo proyectados en un espacio de menor dimensión. Esto implicaría que, al agregar una dimensión extra, dos puntos que parecían estar muy cercanos sin considerar esa dimensión, en esta nueva proyección se alejen considerablemente.

Cuando $d > m$, todos los vecinos de los puntos en la órbita serán verdaderos vecinos. Un criterio natural para detectar errores en la elección de la dimensión del embebido es si se encuentra un aumento considerable de la distancia entre dos puntos vecinos cuando se pasa de la dimensión d a $d+1$. Sea $s'(n)$ el vecino r de $s(n)$ y $R_d(n,r)$ la distancia entre ellos:

$$R_d^2(n,r) = \sum_{k=0}^{d-1} \left[x(n+k\tau) - x'(n+k\tau)\right]^2 \tag{1.6.9}$$

El criterio de FNN designa como falso vecino cercano a cualquier vecino para el que sea válido lo siguiente:

$$\left[\frac{R_{d+1}^2(n,r) - R_d^2(n,r)}{R_d^2(n,r)}\right]^{1/2} > R_{\mathrm{tol}}, \tag{1.6.10}$$

donde R_{tol} es el umbral de la tolerancia en términos de distancia.

Valores demasiado altos de R_{tol} conducen a una subestimación del número de vecinos falsos, mientras que valores demasiado bajos tienden a identificar un exceso de falsos vecinos, especialmente cuando los puntos del atractor son escasos y la nube de datos es poco densa. La dimensión de embebido m adecuada se alcanza cuando el número de vecinos falsos cercanos se reduce a cero, o a un valor cercano a cero en ciertos casos, lo que indica que el atractor ha sido correctamente desplegado.

Es posible adaptar el algoritmo de FNN para estimar la dimensión local de distintas regiones de un atractor. Esto será muy importante en los siguientes capítulos, donde se trabajará con sistemas cuya dimensión era mayor a 3. Cabe aclarar que si bien el método FNN se usa con embebidos, aquí se adapta para localizar las autointersecciones en espacios de estados dados por las ecuaciones de gobierno, por lo que fue necesario normalizar las series temporales. Además de detectar las regiones del espacio de estados que atentan contra una caracterización unívoca del sistema, este algoritmo también sirve para elegir adecuadamente las proyecciones sobre las cuales calcular el templex de un atractor. La mejoría consiste en la identificación en la nube de puntos de las regiones en las que están localizadas las autointersecciones de trayectorias que, al pasar a otra proyección, se alejan. El algoritmo de Python desarrollado se encuentra en el siguiente enlace: `https://git.cima.fcen.uba.ar/caterina.mosto/fnn`. En las Figuras 1.32 y 1.33 se muestran ejemplos de su aplicación.

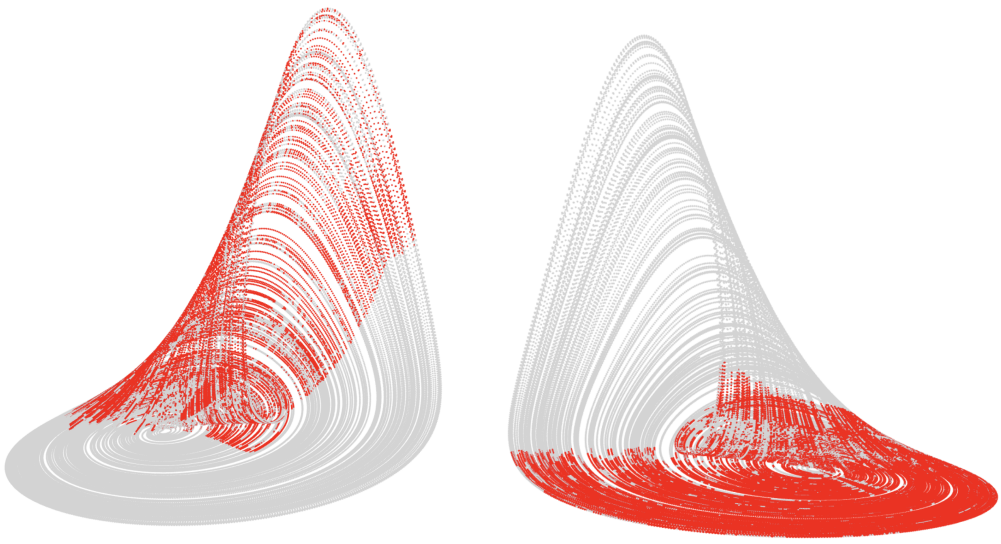


Figura 1.32: Nube de puntos normalizada del atractor de Rössler. En rojo se marcan los puntos que son falsos vecinos si no se considera la dimensión z en el panel izquierdo, y x en el derecho.

1.6.2. Cómputo de stripex

Un código algebraico disponible en `https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/3079776` permite calcular las propiedades del templex a partir de un templex de dimensión 2. Como entrada se proporciona un conjunto de 2-celdas expresadas en términos de sus 0-celdas indexadas, junto con el grafo de conexiones entre las 2-celdas. Como salida, el código devuelve los k-agujeros indexados de los grupos de homología, los grupos de torsión si los hay, la localización de los *joining locus*, y el conjunto de generatex y stripex. En esta tesis se tradujo dicho algoritmo a Python, incluyendo la reducción del templex y el cómputo de unidades `https://git.cima.fcen.uba.ar/caterina.mosto/templex_properties_python`.

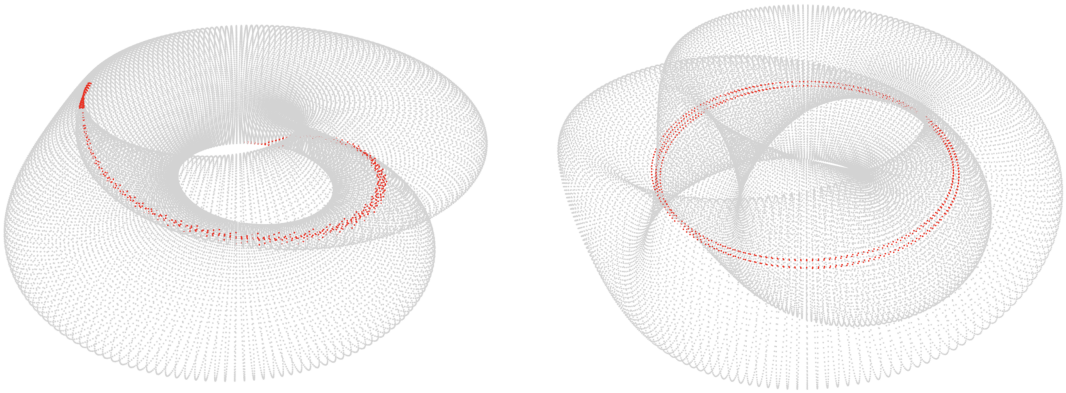


Figura 1.33: Nube de puntos de una botella de Klein. En rojo se marcan los puntos que son falsos vecinos si no se considera la dimensión w en el panel izquierdo, y x en el derecho.

1.7. Conclusión

Este capítulo de la tesis comienza revisitando conceptos fundamentales que permiten la aplicación de herramientas de la topología algebraica a los atractores producidos por diversos sistemas dinámicos. En una primera instancia se presentan nociones esenciales de teoría de sistemas dinámicos, para luego hacer un raconto histórico de la evolución y desarrollo de las herramientas topológicas que permitieron avanzar en esta teoría. Más adelante se describe el templex, que logra trazar finalmente un puente entre la topología algebraica y la teoría de sistemas dinámicos. Un templex es un complejo BRAMAH orientado por el flujo que aproxima la estructura que alberga un atractor, acompañado por un digrafo que indica cómo el flujo visita las celdas de mayor dimensión local.

El aporte de esta tesis consiste en reducir el templex mediante la fusión de celdas innecesarias y la eliminación de nodos correspondientes para definir las unidades dinámicas fundamentales. Se muestra que el templex reducido puede interpretarse en términos de dos procesos dinámicos elementales: unidades oscilantes (O-unidades) y unidades conmutantes (S-unidades). Su combinación permite describir diversos tipos de dinámica caótica. Se detalla el procedimiento de reducción para obtener algorítmicamente los enlaces entre O- y S-unidades. El número y la naturaleza de las unidades se derivan de las propiedades de los ciclos en el digrafo reducido. Asimismo, se caracterizan atractores paradigmáticos en teoría del caos y se provee una primera descripción topológica del caos toroidal de Deng. También se construye por primera vez un templex para una dinámica regular. Este aporte de la tesis fue publicado en la revista Chaos [33].

En vistas de los desarrollos que se presentarán a continuación en esta tesis, este capítulo detalla la adaptación a un algoritmo de detección de falsos vecinos cercanos para poder trabajar con sistemas dinámicos de dimensión mayor que 3.

Capítulo 2

Aplicaciones en modelos climáticos de baja dimensión

En este capítulo se aplican las herramientas topológicas desarrolladas en el capítulo anterior al estudio de modelos climáticos de baja dimensión, con el objetivo de mostrar cómo el formalismo del templex permite caracterizar la organización del flujo en el espacio de fases y detectar cambios topológicos asociados a distintas fases o regímenes dinámicos.

El recorrido comienza con el modelo propuesto por Edward Lorenz en 1996 [69], conocido como L96. A pesar de su simplicidad, este sistema de ecuaciones diferenciales reproduce características esenciales de la dinámica atmosférica: combina un forzante externo con disipación lineal y términos no lineales que conservan la energía total y simulan la advección. Por estas propiedades, el L96 se ha convertido en un banco de pruebas habitual para experimentos de asimilación de datos, estudios de sensibilidad, pronóstico por conjuntos (*ensemble forecasting*) y métodos de reducción de dimensionalidad en dinámica caótica [70].

A continuación se considera un modelo simplificado del fenómeno El Niño–Oscilación del Sur (ENSO), introducido por Ghil y Jiang [71]. En él, el atractor clásico de Lorenz estudiado en el primer capítulo se acopla unidireccionalmente con un oscilador armónico que representa el ciclo estacional. Esta configuración permite reproducir la alternancia irregular entre fases tipo El Niño y La Niña y evaluar la predictibilidad estacional a interanual del sistema acoplado océano–atmósfera en el Pacífico tropical.

Por último, se analiza el modelo desarrollado por Florian Sévellec y Alexey Fedorov para estudiar la dinámica de la Circulación Meridional de Retorno del Atlántico (AMOC) [72, 73]. Basado en el esquema de loop de Howard–Malkus, este modelo de baja dimensión es capaz de reproducir oscilaciones milenarias análogas a los eventos Dansgaard–Oeschger y capturar su carácter caótico. Su estudio es de gran actualidad, dado que la estabilidad de la AMOC se encuentra en el centro de la discusión climática por su papel en la variabilidad abrupta del Atlántico Norte y en los posibles puntos de inflexión del sistema climático global.

En los tres casos, el templex se construye a partir de series temporales simuladas. Para vincular la organización topológica del flujo con las transiciones entre distintos regímenes dinámicos reproducidos por estas configuraciones climáticas simplificadas, se distingue en propiedades activas y pasivas, tanto a nivel del complejo celular como del grafo dirigido que lo acompaña. Esta distinción introduce elementos para reconocer tipping points y señales tempranas de alerta de carácter topológico.

2.1. El atractor de Lorenz 96

El sistema de ecuaciones propuesto por Lorenz en 1996 [69] ha permitido explorar la predictibilidad atmosférica y el crecimiento de errores en la predicción numérica del tiempo. Sus variables X_k represen-

tan una cantidad atmosférica genérica distribuida en K sectores de un círculo de latitud, mientras que las extensiones multiescala introducen variables $Y_{j,k}$ que simulan procesos convectivos de menor escala.

$$\begin{cases} \dfrac{dX_n}{dt} = -X_{n-1}(X_{n-2} - X_{n+1}) - X_n + F - \dfrac{hc}{b} \displaystyle\sum_{j=J(n-1)+1}^{nJ} Y_j & n = 1,\dots,N \\ \dfrac{dY_m}{dt} = -cbY_{m+1}(Y_{m+2} - Y_{m-1}) - cY_m + \dfrac{hc}{b} X_{\text{int}[(m-1)/J]+1} & m = 1,\dots,M \end{cases} \tag{2.1.1}$$

El sistema de ecuaciones a derivadas ordinarias presenta N variables X_n más $M = JN$ variables $Y_{j,n}$, definidas para $n = 1,\dots,N$ y $j = 1,\dots,J$. Las variables $X_1,...,X_N$ representan cualquier variable atmosférica distribuida en N sectores de un círculo de latitud. Este sistema reproduce el acomplamiento de dos escalas espaciales distintas: las ecuaciones de X_n parametrizan los efectos de las variables de pequeña escala (Y_m) sobre la dinámica de gran escala (X_n).

La dinámica atmosférica se refleja en la presencia de un forzante externo y una disipación interna, mientras que los términos cuadráticos, que simulan la advección, conservan la energía total del sistema. La variable periódica Y representa una cantidad a escala convectiva y presenta su propio conjunto de ecuaciones diferenciales, acopladas a las de X mediante un término de interacción que aparece al final de ambas ecuaciones. En cada ecuación del sistema (2.1.1), se contemplan los efectos de la advección, la disipación y un forzante externo. El acoplamiento permite que las variables de pequeña escala sean forzadas por las variables locales de gran escala.

Dado que es un sistema periódico, X_{n-N} y X_{n+N} son iguales a X_n, y $Y_{j,n-N}$ y $Y_{j,n+N}$ son iguales a $Y_{j,n}$, mientras que $Y_{j-J,m} = Y_{j,m-1}$ y $Y_{j+J,m} = Y_{j,m+1}$. De este modo, las variables X_n pueden representar los valores de cierta cantidad en N sectores de un círculo de latitud, mientras que las variables $Y_{j,m}$, ordenadas como $Y_{1,1}, Y_{2,1}, \dots, Y_{J,1}, Y_{1,2}, Y_{2,2}, \dots, Y_{J,2}, Y_{3,1}, \dots$, pueden representar los valores de otra cantidad en JN sectores.

Es posible integrar numéricamente el sistema (2.1.1) acoplando y desacoplando las variables de escala convectiva Y mediante el parámetro h. Si se fija $h = 0$, se apagan las variables de pequeña escala, mientras que es posible encenderlas tomando $h = 1$. La Figura 2.1 muestra las nubes de puntos generadas por el sistema de ecuaciones (2.1.1) con el acomplamiento de las variables convectivas Y apagado en (a), y encendido en (b). Al tomar $J = 8$, en el panel (b) se obtiene un sistema mucho más suavizado, dado por la alta dimensionalidad del sistema (el mismo presenta 4 variables de gran escala X y 32 variables convectivas Y) y la periodicidad propia del sistema de ecuaciones.

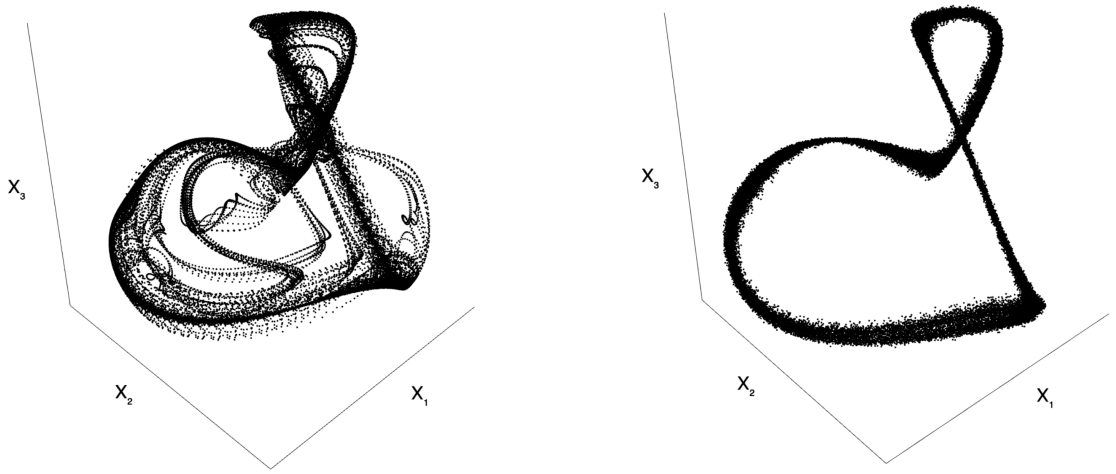


Figura 2.1: Nubes de puntos generadas por el sistema de ecuaciones (2.1.1) con las variables Y sin acoplar ($h = 0$) en (a), y acopladas ($h = 1$) en (b). Valores de los parámetros: $N = 4$, $b = 10$, $c = 10$, $F = 12$ con $J = 8$ en (b). Cabe destacar que ambos sistemas presentan 4 variables X, pero las proyecciones son las mismas dada la periodicidad que presentan sus variables.

Como se indicó en la Sección 1.6.1, el primer paso para construir un templex de más de 3 dimensiones es al aplicar un test de falsos vecinos previamente descripto. En la Figura 2.2 se tiene coloreados los puntos que resultan falsos vecinos al agregar la información de X_4 a las dos nubes de puntos de la Figura 2.1. Dada la imposibilidad de localizar un *joining locus*, elemento fundamental para caracterizar un sistema caótico, en el atractor con las variables de pequeña escala encendidas (panel derecho de las Figuras 2.1 y 2.2), se construye el templex de la nube del panel (a), a la que se hará referencia de ahora en más como L_{96}.

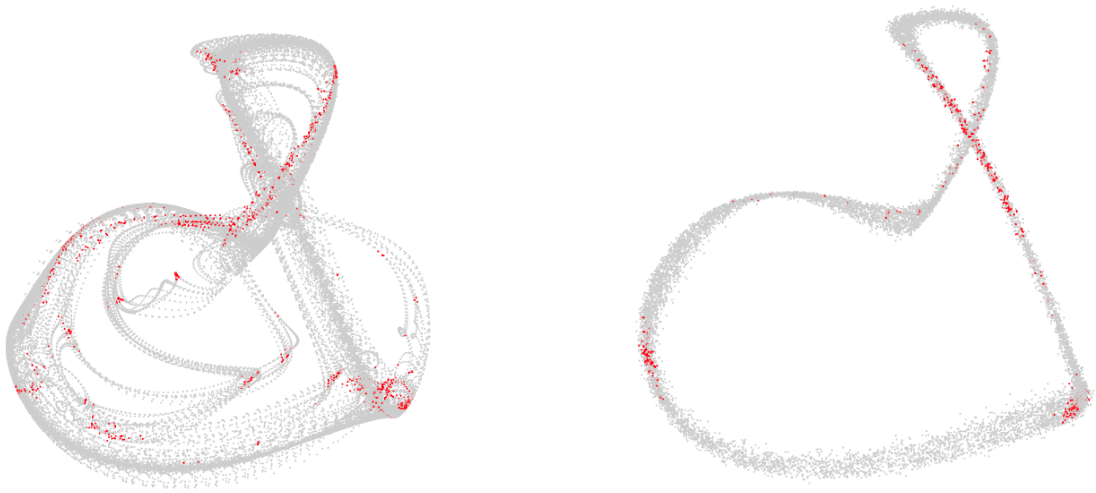


Figura 2.2: Nubes de puntos generadas por el sistema de ecuaciones (2.1.1) con las variables Y apagadas en (a), y encendidas en (b). En rojo se marcan los puntos que son falsos vecinos si no se considera la cuarta dimensión.

Siguiendo los pasos detallados en el capítulo anterior, se construye el templex $T(\mathrm{L}_{96}) = (\mathbb{K}(\mathrm{L}_{96}), \mathrm{D}(\mathrm{L}_{96}))$. En la Figura 2.3 (a) se tiene el complejo de 19 celdas. Solo una de ellas es volumétrica: σ_{18}, a la que

entran las celdas γ_{19} y γ_1 y salen las celdas γ_{12} y γ_{10}. La celda σ_{18} no contiene una *joining line* ya que las celdas que ingresan lo hacen en distintas capas. Dicha celda sí presenta un *splitting locus*, por eso el nodo asociado aparece con una línea por encima en el digrafo $D(\mathrm{L}_{96})$ de la Figura 2.3 (b).

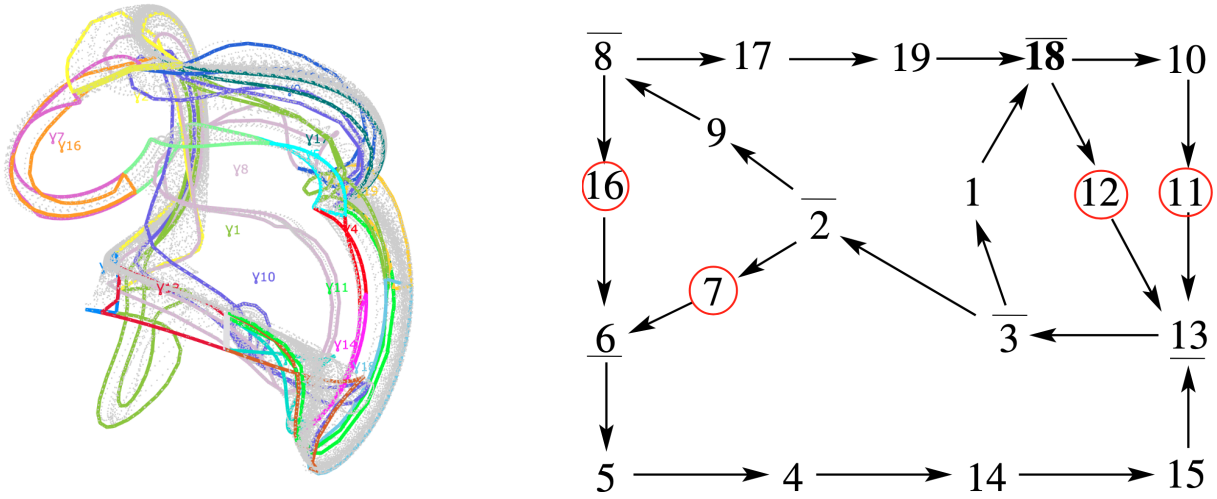


Figura 2.3: Templex $T(\mathrm{L}_{96}) = (\mathbb{K}(\mathrm{L}_{96}), \mathrm{D}(\mathrm{L}_{96}))$ para el atractor de Lorenz 96. En (a), el complejo $\mathbb{K}(\mathrm{L}_{96})$ con sus 19 celdas; en (b), el digrafo $D(\mathrm{L}_{96})$ correspondiente. En negrita, el nodo correspondiente a la única celda tridimensional. En rojo, los nodos que se incluyen en la reducción.

En $\mathbb{K}(\mathrm{L}_{96})$ hay dos *joining lines*:

(1) $J_1 = \langle 15545, 48826 \rangle$, formada por las celdas γ_{13}, γ_{12}, γ_{15} y γ_{11};

(2) $J_2 = \langle 20944, 21965 \rangle$, formada por las celdas γ_6, γ_{16} y γ_7.

A partir del digrafo de la Figura 2.3 (b) son computados los generatex de orden $\theta = 1$, asociados a los tres ciclos $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_1 &\equiv \underline{13} \to \overline{3} \to 1 \to 18 \to 12 \to \underline{13} \\
\mathscr{C}_2 &\equiv \underline{13} \to \overline{3} \to 1 \to 18 \to 10 \to 11 \to \underline{13} \\
\mathscr{C}_3 &\equiv \underline{13} \to \overline{3} \to \overline{2} \to 9 \to \overline{8} \to 17 \to 19 \to 18 \to 12 \to \underline{13}
\end{aligned}$$

Y dos generatex de orden $\theta = 2$, $\mathscr{C}_4$ y $\mathscr{C}_5$, que son la unión de dos ciclos débiles, de modo que $\mathscr{C}_4 = \mathscr{C}_{4_1} \cup \mathscr{C}_{4_2}$ y $\mathscr{C}_5 = \mathscr{C}_{5_1} \cup \mathscr{C}_{4_2}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_{4_1} &\equiv \underline{13} \to \overline{3} \to \overline{2} \to 9 \to \overline{8} \to 16 \to \underline{6} \\
\mathscr{C}_{5_1} &\equiv \underline{13} \to \overline{3} \to 2 \to 7 \to \underline{6} \\
\mathscr{C}_{4_2} &\equiv \underline{6} \to 5 \to 4 \to 14 \to 15 \to \underline{13}
\end{aligned}$$

Para extraer las stripex a partir de los ciclos, se consideran los caminos que están delimitados por los nodos de unión, 6 y 13. Los tres primeros ciclos conducen a tres stripex:

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_1 &\equiv \gamma_{13} \to \gamma_3 \to \gamma_1 \to \sigma_{18} \to \gamma_{12} \\
\mathscr{S}_2 &\equiv \gamma_{13} \to \gamma_3 \to \gamma_1 \to \sigma_{18} \to \gamma_{10} \to \gamma_{11} \\
\mathscr{S}_3 &\equiv \gamma_{13} \to \gamma_3 \to \gamma_2 \to \gamma_9 \to \gamma_8 \to \gamma_{17} \to \gamma_{19} \to \sigma_{18} \to \gamma_{12}
\end{aligned}$$

Los siguientes dos ciclos conducen a:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_4 \equiv &\quad \gamma_{13} \to \gamma_3 \to \gamma_2 \to \gamma_9 \to \gamma_8 \to \gamma_{16} \to \gamma_6\\ \mathscr{S}_5 \equiv &\quad \gamma_{13} \to \gamma_3 \to \gamma_2 \to \gamma_7 \to \gamma_6\\ \mathscr{S}_6 \equiv &\quad \gamma_6 \to \gamma_5 \to \gamma_4 \to \gamma_{14} \to \gamma_{15} \to \gamma_{13}\end{aligned}$$

Tal como sucede con el atractor cuatrodimensional analizado en el capítulo anterior (Sección 1.5.2), el stripex $\mathscr{S}_6$ corresponde a una banda trivial, y la *joining line* J_2 puede identificarse con la *joining line* J_1 mediante una isotopía. Así, los stripex $\mathscr{S}_4$ y $\mathscr{S}_5$ se transforman en:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}'_4 \equiv &\quad \gamma_{13} \to \gamma_3 \to \gamma_2 \to \gamma_9 \to \gamma_8 \to \gamma_{16} \to \gamma_6 \to \gamma_5 \to \gamma_4 \to \gamma_{14} \to \gamma_{15}\\ \mathscr{S}'_5 \equiv &\quad \gamma_{13} \to \gamma_3 \to \gamma_2 \to \gamma_7 \to \gamma_6 \to \gamma_5 \to \gamma_4 \to \gamma_{14} \to \gamma_{15}\end{aligned}$$

De modo que el atractor del Lorenz 96 puede ser descripto en términos de cinco stripex, y por consiguiente cinco unidades. El cómputo de las unidades dinámicas fundamentales comienza tomando los *splitting* y *joining nodes*. En rojo en el digrafo $D(\mathrm{L}_{96})$ de la Figura 2.3 están marcados los nodos que agrega el algoritmo para preservar las propiedades del templex, siguiendo los pasos de la reducción detallados en la Sección 1.5.1. Hay un único *bond*:

$$\mathscr{B}(\overline{D}(\mathrm{L}_{96})) = \{(\underline{13}, \overline{3})\}.$$

Las unidades dinámicas fundamentales resultantes son cinco, como era de esperar, y las mismas se muestran en la Figura 2.4.

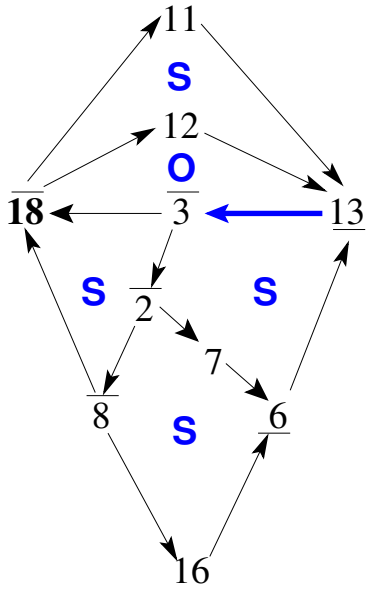


Figura 2.4: Unidades dinámicas fundamentales para el atractor de Lorenz 96.

El hecho de que el atractor producido por las soluciones del modelo de Lorenz 96 tomado tenga 5 unidades, es decir que las trayectorias tengan 5 formas no equivalentes de circular por el espacio de estados, permite identificar 5 regímenes. Cuando el sistema se acopla con la escala convectiva, el sistema presenta 36 dimensiones y la localización de la *joining line* con las herramientas actuales resulta imposible por el momento.

2.2. Modelos simplificados de ENSO

Los eventos llamados El Niño–Southern Oscillation (ENSO) corresponden a anomalías positivas de temperatura de la superficie del mar (SST, por sus siglas en inglés) en el Pacífico Tropical oriental,

causadas por vientos alisios más débiles de lo habitual [74, 75]. Estas anomalías de SST afectan no solo a la atmósfera inmediatamente superior, sino también a los patrones de circulación en gran parte del planeta. El fenómeno ENSO es la principal fuente de variabilidad climática interanual [75, 76].

El *Southern Oscillation Index* (SOI) y el índice Niño-3 de SST son los dos índices escalares más conocidos que caracterizan las variaciones climáticas en el Pacífico Tropical. El SOI captura el signo y la intensidad de los fenómenos atmosféricos, en particular de la celda de Walker orientada Este-Oeste, mientras que los índices de SST se refieren a fenómenos oceánicos [75, 77]. El hecho de que el SOI y los índices oceánicos estén fuertemente anticorrelacionados indica ya que ciertos aspectos de ENSO pueden ser capturados, hasta cierto punto, por modelos de baja dimensión. No obstante, las afirmaciones tempranas —basadas en el análisis de las series temporales cortas de tales índices disponibles— sobre una dimensionalidad baja o fractal del sistema océano-atmósfera acoplado real eran ciertamente algo ingenuas [78].

La pregunta clave de la dinámica de ENSO es cómo puede ser que el ciclo estacional desempeñe un papel crucial en el fenómeno —el nombre El Niño se debe a que el máximo anual de calentamiento de la SST cerca de la costa del Perú ocurre alrededor de Navidad— mientras que la intensidad de este calentamiento varía de manera muy irregular de un año a otro. Esta cuestión se ha abordado tanto con modelos relativamente simples como con otros mucho más detallados [79, 77].

Los modelos simples, aunque no necesariamente de baja dimensión, incluyen:

(1) modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) de bajo orden [80, 81, 82, 71, 83];
(2) modelos simplificados de ecuaciones diferenciales parciales (PDE) unidimensionales en el espacio [84, 85, 86];
(3) modelos escalares de ecuaciones diferenciales con retardo [87, 88, 89, 90]; y
(4) diversos modelos simples, incluyendo:
   - ecuaciones diferenciales escalares estocásticas con retardo [90];
   - cadenas de Markov [78]; y
   - ecuaciones booleanas con retardo [91].

De estos, los modelos (1) son verdaderamente de baja dimensión, mientras que los modelos (2,3) y algunos de los (4) son en realidad de dimensión infinita [92, 93]. En esta sección se hará foco en uno de los modelos de tipo (1). Derivado de la aproximación de Vallis [80, 81], el modelo que se estudiará fue utilizado por Ghil y Jiang [71]. La dinámica caótica interna tiene una estructura tipo Lorenz [36], mientras que el forzante estacional se introduce como un acoplamiento unidireccional con un oscilador armónico que modela el ciclo anual. El propósito es construir el templex y calcular sus propiedades.

El sistema dinámico tiene las siguientes ecuaciones:

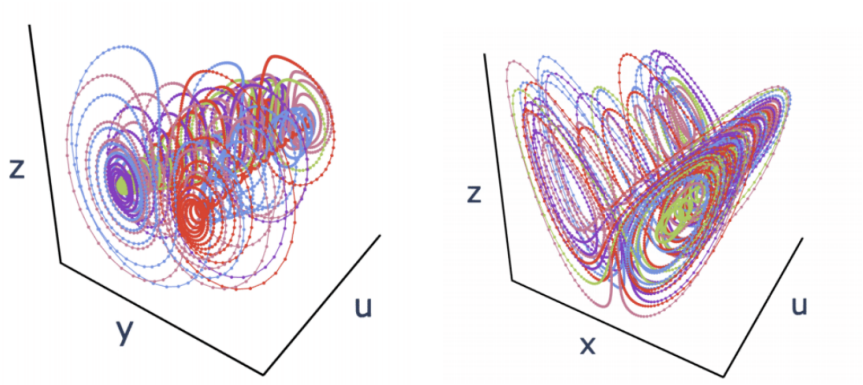
$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy + u \\ \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases} \tag{2.2.2}$$

donde (x, y, z) corresponden a las variables del sistema de Lorenz clásico, y (u, v) representan el oscilador armónico que introduce el forzante estacional. Se toman los valores habituales para el sistema de Lorenz

$$\sigma = 10, \qquad b = \frac{8}{3}, \qquad R = 28,$$

con condiciones iniciales $(u_0, v_0) = (0, 10)$ para el oscilador. Un sistema similar fue utilizado por Palmer [94] para considerar el efecto de las oscilaciones intraestacionales en los trópicos sobre la atmósfera caótica de latitudes medias.

La Figura 2.5 muestra el espacio de estados para dos valores de ω. En el eje u se observa el engrosamiento del atractor, con la estructura de doble ala replicada en una secuencia de capas.



(a) $\frac{\omega}{2\pi} = 0{,}04$ (b) $\frac{\omega}{2\pi} = 0{,}10$

Figura 2.5: Espacio de estados del modelo simplificado del ENSO para dos valores de ω.

Para cubrir con celdas este atractor, se agrupan las capas en 3-celdas, como se muestra esquemáticamente en la Figura 2.6. El *joining locus* se sitúa entre las alas y consta de 2-celdas σ_1 y σ_0 (secciones superficiales) que cubren todo el espesor del engrosamiento, asegurando la cohesión entre las 3-celdas que allí se unen. En términos del grafo dirigido, las conexiones entre celdas según el flujo producen las mismas conexiones que en el Lorenz tradicional: de hecho, contrayendo las 3-celdas en 2-celdas, y las 2-celdas del joining locus en 1-celdas, se recupera el templex de la Figura 1.18. Las stripex son:

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_1(T(\text{ENSO})) &\equiv \gamma_1 \to \gamma_3 \to \gamma_4 \\
\mathscr{S}_2(T(\text{ENSO})) &\equiv \gamma_8 \to \gamma_{10} \to \gamma_{11} \\
\mathscr{S}_{31}(T(\text{ENSO})) &\equiv \gamma_1 \to \gamma_3 \to \gamma_5 \\
\mathscr{S}_{32}(T(\text{ENSO})) &\equiv \gamma_8 \to \gamma_{10} \to \gamma_{12}
\end{aligned}$$

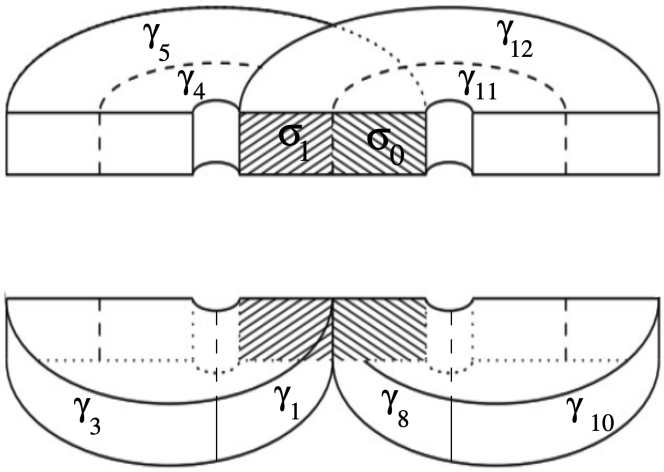


Figura 2.6: Complejo BRAMAH de dimensión 3 del templex del ENSO, cortado en dos partes para mostrar el engrosamiento. La partición se indica con líneas punteadas y el *joining locus*, compuesto por las 2-celdas σ_0 y σ_1, se muestra con rayado.

Este modelo produce dinámicas caóticas con un flujo que tiene la misma organización topológica del atractor de Lorenz: el grafo dirigido es idéntico al del Lorenz clásico. El efecto del forzante produce, no obstante, un engrosamiento del atractor en el espacio de fases cinco-dimensional, de modo que las stripex

están formadas por secuencias de 3-celdas. Dado que la estructura topológica ensanchada es contráctil en el espesor, y reenvía a la descomposición en unidades que corresponde al Lorenz tradicional, se puede concluir que la dinámica de Lorenz posee una estructura muy robusta, que se preserva en presencia de un forzante intenso. El engrosamiento ofrece mayor libertad a la trayectoria para recorrer el atractor, lo que resulta en transiciones modificadas entre las stripex volumétricas.

Para caracterizar las transiciones entre una stripex y otra, se construyen matrices de transición de Markov codificadas mediante una partición simbólica entre las cuatro *ingoing cells* $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_{11}, \gamma_{12}$. Cada elemento M_{ij} de la matriz representa la probabilidad de pasar de la celda entrante i a la celda entrante j en un paso de la dinámica. Estas matrices permiten cuantificar cómo el forzante periódico modifica las trayectorias sobre el atractor: en particular, reflejan si aumenta la probabilidad de permanecer en la misma "ala" o si se favorecen las transiciones entre alas. Los superíndices de las matrices, $f = 0{,}04$, $f = 0{,}10$ y $f = 9{,}14$, indican la frecuencia del forzante $f = \omega/(2\pi)$ en ciclos por unidad de tiempo.

$$M^{f=0,04} \equiv \begin{bmatrix} 0{,}92 & 0{,}08 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}54 & 0{,}46 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}92 & 0{,}08 \\ 0{,}55 & 0{,}45 & 0{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}, \tag{2.2.3}$$

$$M^{f=0,10} \equiv \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}53 & 0{,}47 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}70 & 0{,}30 \\ 0{,}54 & 0{,}46 & 0{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}, \tag{2.2.4}$$

$$M^{f=9,14} \equiv \begin{bmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}53 & 0{,}47 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}52 & 0{,}48 & 0{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}. \tag{2.2.5}$$

En el contexto del modelo simplificado de ENSO, las alas del atractor de Lorenz pueden interpretarse como dominios dinámicos asociados a la fase del fenómeno: una ala corresponde a condiciones tipo El Niño, con anomalías positivas de SST y alisios debilitados, mientras que la otra ala representa condiciones tipo La Niña, con anomalías negativas de SST y alisios reforzados. Desde esta perspectiva, las transiciones entre alas reflejan el pasaje entre fases cálidas y frías del sistema océano–atmósfera acoplado.

A frecuencias bajas del forzante, la amplitud del oscilador es mayor y la trayectoria puede quedar "atrapada" durante más tiempo en la misma ala, mientras que a frecuencias altas el efecto del forzante se atenúa y la dinámica se aproxima a la del Lorenz no forzado. En términos probabilísticos, esto se traduce en un aumento de las entradas diagonales de las matrices a medida que disminuye la frecuencia, lo que indica una reducción de las inversiones entre alas.

El análisis topológico del modelo simplificado del ENSO muestra que el formalismo del templex permite abordar situaciones en las que la estructura de un flujo conocido se engrosa por la acción de un forzante. También demuestra que es posible adosar una descripción métrica a la descripción topológica del templex a través del nexo que existe entre las celdas y los puntos de la nube.

2.3. Circulación Meridional del Atlántico Norte

Uno de los componentes del sistema climático a gran escala que podría atravesar un punto de inflexión es la Circulación Meridional de Retorno del Atlántico (AMOC, por sus siglas en inglés). Aquí se investiga la dinámica producida por un modelo autónomo idealizado y su homólogo no autónomo para considerar los cambios climáticos a largo plazo y reproducir los fenómenos que se producen durante distintas épocas, como los intervalos glaciares e interglaciares. Los modelos de AMOC nunca han sido

estudiados desde la perspectiva topológica. Aquí se consideran las series temporales producidas por los dos modelos: el primero describe las oscilaciones caóticas características de los intervalos glaciales, y el segundo incorpora la posición variable en el tiempo del borde del hielo marino que impulsa al sistema dentro y fuera de este comportamiento caótico. En el sistema no autónomo, la trayectoria visita dos dominios distintos en el espacio de fases, uno de los cuales comparte ciertas propiedades con el encontrado en el caso autónomo. La disección del templex y la definición de las propiedades del templex activo mejoran la comprensión de cómo el sistema bascula de un régimen a otro. También se estudia la relación entre estos resultados y el atractor de pullback del modelo no autónomo.

2.3.1. Introducción

El sistema climático terrestre ha experimentado intervalos glaciares e interglaciares. Los registros paleoclimáticos de la última glaciación, incluyendo datos de núcleos de hielo de Groenlandia y temperaturas del Océano Atlántico Norte, revelan una variabilidad caótica correspondiente a los eventos Dansgaard-Oeschger (D-O) [95, 96, 97]. Estos eventos implican un enfriamiento lento durante varios siglos seguido de un calentamiento abrupto en unas pocas décadas. Estudios recientes han planteado la hipótesis de que la variabilidad caótica de la Circulación Meridional de Retorno del Atlántico (AMOC) puede explicarse mediante oscilaciones deterministas entre dos fases alternantes: una fase activa lenta durante la cual la circulación se fortalece, y una fase inactiva rápida durante la cual la circulación se debilita. Estas fases son características de los osciladores de relajación [72], en contraste con la relativa estabilidad del Holoceno [98].

Comprender la dinámica de la AMOC es crucial debido a su impacto en la distribución del calor en el planeta [99, 100]. En la literatura se han identificado varios mecanismos responsables de la dinámica de la AMOC. Modelos idealizados que acoplan el océano, la atmósfera y el hielo sugieren que las oscilaciones milenarias son principalmente endógenas y deterministas [101]. Sévellec y Fedorov [72] formulan un modelo de orden reducido de la AMOC que reproduce de manera realista los espectros de potencia para diferentes conjuntos de condiciones iniciales. Este modelo es una modificación del circuito de Howard-Malkus [102], formulado para tres variables: dos gradientes de salinidad y la intensidad de la circulación de retorno. Dicho modelo se deriva de las ecuaciones del movimiento de la circulación oceánica en su forma promediada zonalmente en el plano profundidad-latitud. Las soluciones del sistema responden a una dinámica típica de un oscilador de relajación. Estos consisten en el acoplamiento de subsistemas lentos y rápidos en dimensiones cada vez mayores [64] y han sido estudiados previamente desde una perspectiva topológica [8].

Para reproducir los intervalos interglaciares, el modelo se complejiza [73]. Se considera que la ubicación latitudinal de la AMOC respecto a la precipitación atmosférica controla las propiedades de estabilidad del sistema, presentando un único estado estacionario estable durante los interglaciares que cambia a soluciones que transitan por tres estados estacionarios inestables. De acuerdo con estudios numéricos, se asume que los desplazamientos latitudinales de la AMOC siguen el borde sur del hielo marino. Para estudiar este sistema no autónomo, se impone una función “serrucho” con media cero y un período de 100.000 años. El hecho de proponer que los cambios temporales en la posición del borde del hielo marino (ESI, por sus siglas en inglés) constituyen una modificación en el término forzante del sistema [73] deriva en la obtención de períodos con condiciones estacionarias como en los intervalos interglaciares.

Los sistemas dinámicos no autónomos suelen estudiarse utilizando el llamado enfoque pullback [103, 104, 105, 106, 107], es decir, integrando las ecuaciones dependientes del tiempo del modelo no autónomo en un intervalo de tiempo elegido a partir de un gran conjunto de condiciones iniciales, y graficando la función de densidad de probabilidad del sistema. Sévellec y Fedorov [73] muestran que calcular los atractores pullback para diferentes tiempos de diagnóstico separados por 5.000 años es suficiente para revelar que la dinámica de la AMOC alterna entre un intervalo interglaciar y un estallido caótico durante el intervalo glacial. En el espacio de fases tridimensional, el atractor pullback tiene

formas distintas dependiendo del momento de inicialización, y se contrae a un solo punto durante los intervalos interglaciares.

Esta tesis proporciona el primer análisis topológico del flujo en el espacio de fases asociado con estos modelos deterministas de la AMOC. El estudio se realiza utilizando el enfoque templex tanto en configuraciones autónomas como no autónomas, bajo la suposición de que el determinismo y la continuidad implican invariancia topológica en ausencia de vecinos falsos, es decir, en ausencia de diferentes estados en el espacio de fases que aparecen como coincidentes debido a una proyección. Agregar dimensiones al espacio de fases para eliminar cruces propios equivale a reescribir el sistema no autónomo como un sistema autónomo acotado de mayor dimensión [108]. El análisis se llevará a cabo construyendo el templex directamente a partir de las series temporales proporcionadas por las soluciones numéricas las ecuaciones de ambos modelos, con tantas dimensiones por caso como sea necesario, y calculando y comparando las propiedades de sus templex.

En las siguientes subsecciones primero se trata el sistema tridimensional para caracterizar la topología de la dinámica caótica de los intervalos glaciales reproducidos por el modelo autónomo [72]. El mismo sistema se reconsidera cuando se introduce el forzamiento dependiente del tiempo en forma de "serrucho". Se demuestra que el nuevo templex es una estructura compuesta que puede fragmentarse en ciertas partes. En este punto se introduce el concepto de propiedades activas del templex. La terminología, tomada de las fases activas e inactivas de los mecanismos de estallido en sistemas excitables de Rinzel [109], permite identificar puntos críticos dentro de un templex determinista. Se ofrece hacia el final una comparación con el enfoque pullback.

2.3.2. Modelo autónomo de la AMOC

En primer lugar se considera el modelo idealizado autónomo de la AMOC [72], derivado de las ecuaciones de movimiento para la dinámica oceánica a gran escala que reproduce la variabilidad caótica de la última era glacial. El mismo está basado en la conservación del calor, la masa y la sal, además de las ecuaciones de momento en las tres direcciones espaciales que tiene tres grados de libertad. La dinámica se simplifica usando el modelo de loop de Howard-Malkus [110, 111] para reducir el problema a una sola dimensión espacial, siguiendo una única línea de corriente, como se observa en la Figura 2.7.

El sistema de ecuaciones correspondiente queda de la siguiente manera [72]:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\lambda\,\omega - \varepsilon\beta S_{NS} \\ \dot{S}_{BT} = (\Omega_0 + \omega)S_{NS} - KS_{BT} + \frac{F_0 S_0}{h} \\ \dot{S}_{NS} = -(\Omega_0 + \omega)S_{BT} - KS_{NS} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Las tres variables del modelo representan anomalías en la tasa de vuelco de la AMOC (ω) y en los gradientes de salinidad vertical (fondo-superficie, S_{BT}) y meridional (norte-sur, S_{NS}) del océano, cada una dependiendo del tiempo (t). Se asume que la componente estacionaria de la circulación (Ω_0) está determinada por los gradientes medios de temperatura oceánica y los vientos superficiales, mientras que la parte variable de la circulación (ω) está controlada por los gradientes de salinidad meridional; la tasa total de vuelco es $\Omega = \Omega_0 + \omega$, y se mide en yr^{-1}. Las otras dos ecuaciones describen la evolución de los gradientes de salinidad impulsada por la advección, el amortiguamiento lineal (con el coeficiente K), y los flujos de sal en superficie ($F_0 S_0/h$, donde F_0 es la intensidad del flujo de agua dulce, S_0 es una salinidad de referencia, y h es la profundidad del nivel sin movimiento para el flujo baroclínico). Las series temporales resultantes de integrar el sistema de ecuaciones (2.3.6), para dos condiciones iniciales ligeramente diferentes, se muestran en la Figura 2.8.

El conjunto de puntos $\mathrm{N} \in \mathbb{R}^3$ correspondiente a la ventana temporal (de 0 a 120.000 años) de una única condición inicial en la Figura 2.8 se muestra en la Figura 2.9. Este atractor tiene aspecto de oscilador de relajación, lo cual es esperable, dado que busca reproducir la conjugación de una dinámica lenta (asociada a los enfriamientos) con una dinámica rápida (asociada a los calentamientos abruptos).

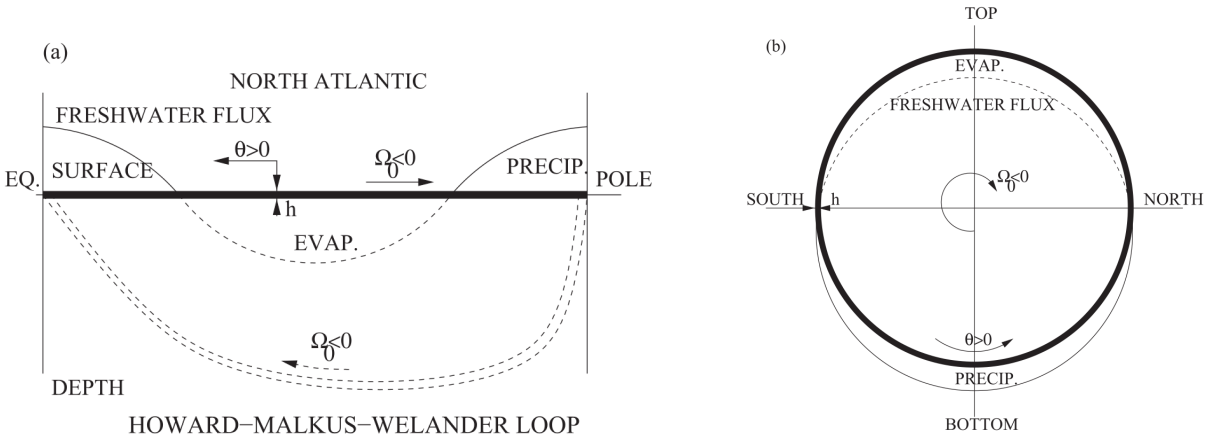


Figura 2.7: (a) Diagrama esquemático que representa la circulación de retorno en el Atlántico Norte. Las líneas sólidas gruesas representan la circulación oceánica superficial. Las dos líneas discontinuas muestran el flujo de retorno profundo implícito en el modelo de loop. (b) Representación del modelo de loop. La variable θ es la coordenada angular positiva para el movimiento antihorario, medida desde el fondo del océano, h es la profundidad o espesor característico del modelo de loop (es decir, la profundidad del nivel sin movimiento para el flujo baroclínico), y Ω_0 es la componente estacionaria de la circulación de retorno inducida por los vientos y el gradiente meridional de temperatura atmosférica. También se muestran los flujos de agua dulce en la superficie. *Figura 1 extraída de la Ref. [72].*

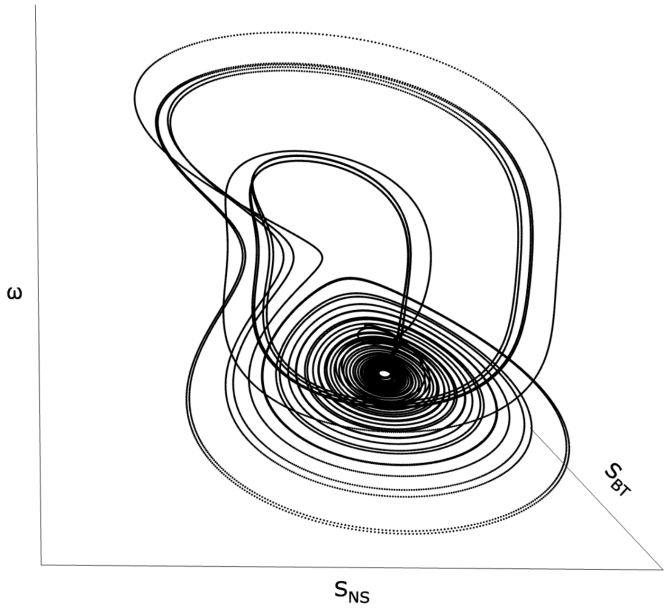


Figura 2.9: Nube de puntos N generada por las Ecs. (2.3.6).

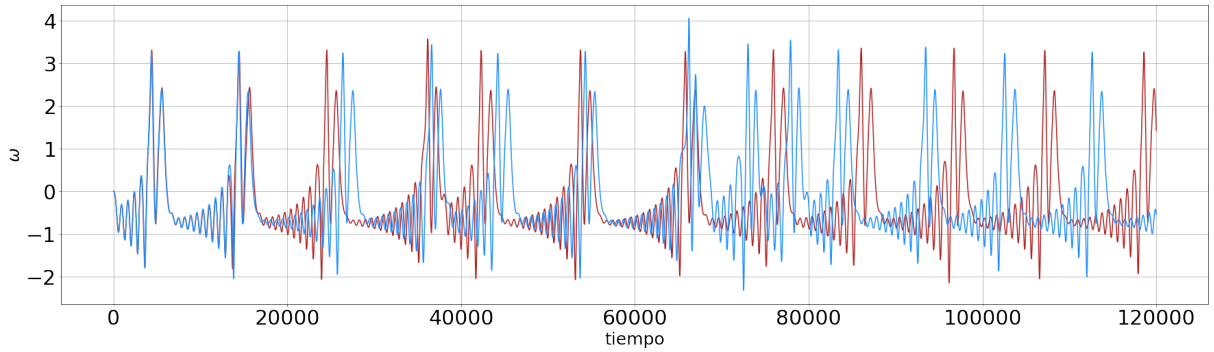


Figura 2.8: Soluciones para condiciones iniciales ligeramente diferentes (líneas celeste y rojo) para las Ecs. (2.3.6). Los valores de los parámetros son: $S_0 = 35$ psu, $h = 1000$ m, $\lambda = 10^{-2}\text{yr}^{-1}$, $\varepsilon = 0{,}35$ yr^{-2}, $\Omega_0 = -2{,}5 \times 10^{-2}$ yr^{-1}, $\beta = 7 \times 10^{-4}$ psu^{-1}, $F_0 = 1$ m yr^{-1}.

El primer paso del análisis es calcular un templex $T(\mathrm{N})$, compuesto por un complejo $\mathbb{K}(\mathrm{N})$ y un digrafo $D(\mathrm{N})$. El complejo $\mathbb{K}(\mathrm{N})$ presenta 29 2-celdas tal como se observa en la Figura 2.10 (a). Las homologías de $\mathbb{K}(\mathrm{N})$ revelan que este complejo celular presenta un único agujero de dimensión 0, dos agujeros de dimensión 1 y ningún agujero de dimensión 2:

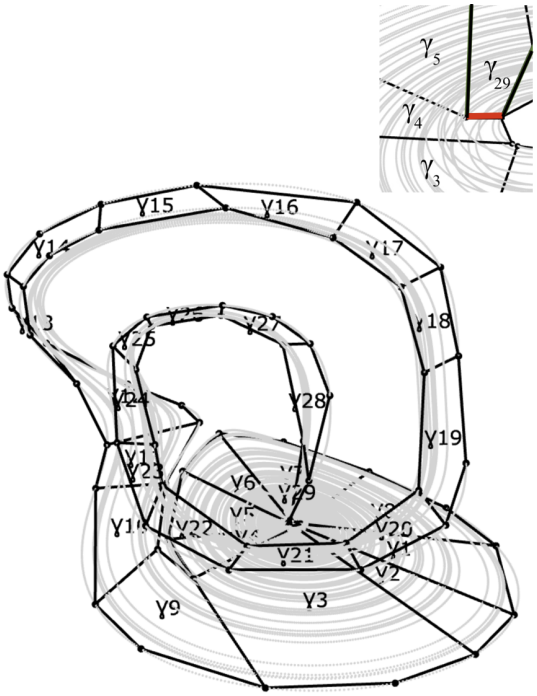
$$\begin{aligned} \mathscr{H}_0(\mathbb{K}(\mathrm{N})) &\sim \mathbb{Z} \\ \mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{N})) &= [[h_1, h_2]] \sim \mathbb{Z}^2 \\ \mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{N})) &\sim 0 \end{aligned}$$

El templex $T(\mathrm{N})$ tiene una *joining line*, formada por la 1-celda que conecta las dos *ingoing 2-cells* γ_4, γ_{29} con la única *outgoing 2-cell* γ_5. Esto se observa en el recuadro ampliado sobre la Figura 2.10 (a). Los generatex calculados a partir de los ciclos del digrafo son de orden 1, por lo que coinciden con las stripex, y están asociados a los siguientes ciclos del digrafo:

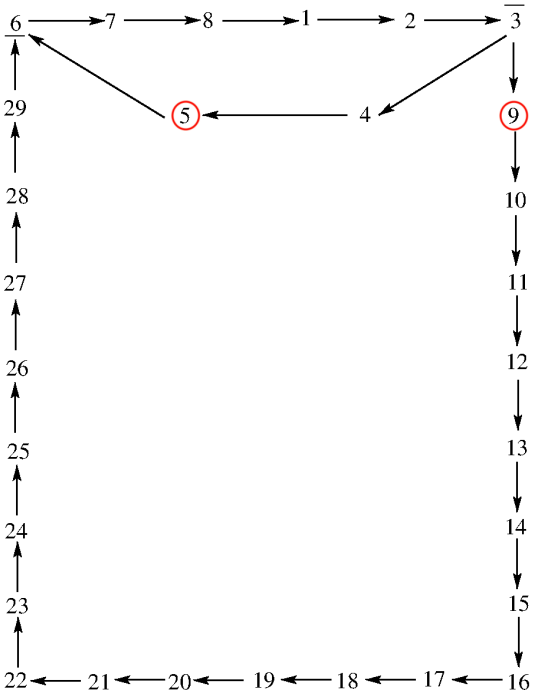
$$\begin{aligned} &\mathscr{C}_1 = \underline{6} \to 7 \to 8 \to 1 \to 2 \to \overline{3} \to 4 \to \underline{5} \\ &\mathscr{C}_2 = \underline{6} \to 7 \to 8 \to 1 \to 2 \to \overline{3} \to 9 \to 10 \to 11 \to 12 \to 13 \to 14 \to 15 \to 16 \\ &\to 17 \to 18 \to 19 \to 20 \to 21 \to 22 \to 23 \to 24 \to 25 \to 26 \to 27 \to 28 \to \underline{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathscr{S}_1(T(\mathrm{N})) \equiv \gamma_6 \ldots \gamma_8 \to \gamma_1 \ldots \gamma_5 \\ &\mathscr{S}_2(T(\mathrm{N})) \equiv \gamma_6 \ldots \gamma_8 \to \gamma_1 \ldots \gamma_3 \to \gamma_9 \ldots \gamma_{29} \end{aligned}$$

En la Figura 2.11 se encuentran esquematizadas las dos stripex $\mathscr{S}_1$ y $\mathscr{S}_2$. El tramo del digrafo en común entre los dos stripex está dado por: $\underline{6} \to 7 \to 8 \to 1 \to 2 \to \overline{3}$, constituido completamente por celdas que se encuentran en la base. El camino compartido se divide en el nodo número 3, conduciendo a 4 (en $\mathscr{S}_1$) y a 9 (en $\mathscr{S}_2$). El segundo stripex $\mathscr{S}_2$ presenta un *twist* local [57].

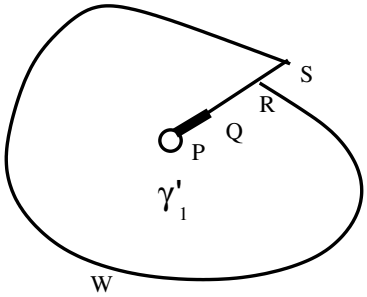


(a) Complejo celular $\mathbb{K}(\mathrm{N})$ con celdas 2-dimensionales γ_i, $i \in \mathbb{N}$.

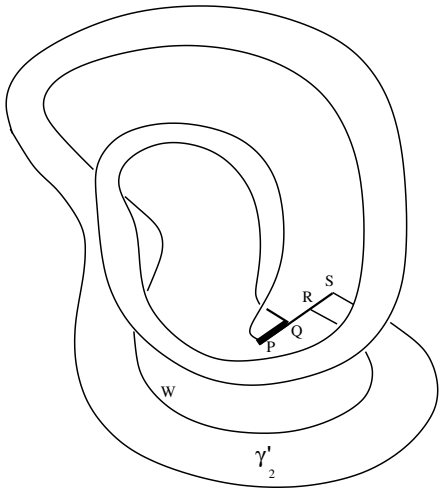


(b) Digrafo $D(\mathrm{N})$.

Figura 2.10: Templex $T(\mathrm{N}) = (\mathbb{K}(\mathrm{N}), \mathrm{D}(\mathrm{N}))$ del conjunto de puntos tridimensional de la AMOC obtenido resolviendo las Ecs. (2.3.6). En (a) se encuentra el complejo celular, y en el recuadro ampliado se muestra la *joining line* (línea roja) con las 2-celdas entrantes y salientes conectadas a ella. En (b) se encuentra el digrafo, en donde el *joining node* está subrayado y el *splitting node* tiene una barra encima. En rojo los nodos que se preservan en el digrafo reducido, siguiendo las reglas de reducción.



(a) Stripex $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{N}))$.



(b) Stripex $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{N}))$ sin la parte compartida.

Figura 2.11: Diagramas esquemáticos que muestran los dos stripex del templex $T(\mathrm{N})$. Las líneas gruesas resaltan la *joining line* en cada esquema. Las etiquetas indican cómo deben ensamblarse las dos partes.

El conjunto de puntos N corresponde a un atractor con dos stripex producto de un pliegue y un *twist* local, como en el caso del atractor de Rössler formado por la nube de puntos R_2 (Figura 1.13). Sin embar-

go, la descripción homológica es diferente. Esta diferencia radica en el agujero adicional de dimensión 1 (un ciclo no trivial) ubicado cerca del punto fijo adicional del sistema. El agujero de dimensión 1 extra está asociado al hecho de que la rama que se despega de la base no se inserta sobre toda ella (ver Figura 2.10 (a)). La stripex que presenta *twist* local está separada del disco principal en N, mientras que esto no ocurre en R_2, donde la rama que se despega se inserta en toda la base. Esta separación conduce a la formación de un agujero adicional de dimensión 1, que causa que $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{N}))$ y $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{N}))$ se separen en el nodo 3, es decir, después de que el flujo pasa por γ_3. Este mecanismo de desgarro está ausente en R_2, haciendo que los dos sistemas sean distintos en este aspecto. En R_2, γ_2 separa $\mathscr{S}_1(T(R_2))$ y $\mathscr{S}_2(T(R_2))$ sin desgarrarlas, manteniendo unidas sus fronteras laterales. En este contexto, las homologías pueden usarse para distinguir entre desgarramiento y plegamiento. Debido al agujero adicional de dimensión 1 que separa los dos stripex, el régimen de debilitamiento de la AMOC queda separado del régimen de fortalecimiento por un vacío de estados que la solución no puede atravesar.

Otra característica del modelo de tres variables de la AMOC es la *joining line*, que no atraviesa todo el disco principal como en el caso del Rössler espiral. En N, la *joining line* es una estrecha "ranura" cerca del centro del disco principal, como se muestra en el recuadro ampliado de la Figura 2.10 (a). El atractor de Rössler-Ortoleva [112] comparte esta característica con N, al igual que los sistemas con una órbita homoclínica tipo foco-silla de Shilnikov [64, 8], donde el flujo es expulsado y reinyectado cerca del centro del disco.

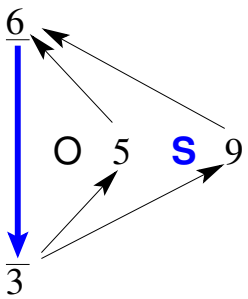


Figura 2.12: Unidades dinámicas fundamentales para el atractor producido por el modelo autónomo de la AMOC.

En la Figura 2.12 se presentan las unidades dinámicas fundamentales para la nube de puntos N producida por el modelo no autónomo de la AMOC. La misma presenta un único *bond*, dado por las aristas entre el *joining node* 6 y el *splitting node* 3:

$$\mathscr{B}(\overline{D}(\mathrm{N})) = \{(\underline{6},\overline{3})\}.$$

En la Figura 2.10 se redondearon en rojo los nodos que son necesarios incluir en la reducción del digrafo. El ciclo más corto y más cercano al centro de rotación es designado como O-unidad. De la stripex restante se extrae la S-unidad. Las soluciones del modelo autónomo de la AMOC resultan de la combinación de una O-unidad con una S-unidad, como en R_2.

2.3.3. Modelo no autónomo de la AMOC

En segundo lugar se analiza el atractor resultante de integrar el modelo de ecuaciones de la AMOC presente en [73], que incorpora la fase interglacial, además de reproducir la variabilidad caótica de la fase glacial. Esto se logra asumiendo que las variaciones glacial-interglacial en la cobertura de hielo marino controlan la extensión más septentrional de la AMOC, haciendo que se desplace hacia el sur y hacia el norte. Una de las consecuencias importantes de este desplazamiento meridional en la formación de aguas profundas y en toda la circulación de vuelco es su cambio relativo respecto a la precipitación atmosférica media. Para investigar el efecto de primer orden de estos cambios relativos, los autores utilizan un perfil

latitudinal fijo del flujo de sal superficial virtual (una función sinusoidal), pero mueven los límites de la cuenca del modelo hacia el sur durante los intervalos glaciales. Este esquema se puede observar en la Figura 2.13.

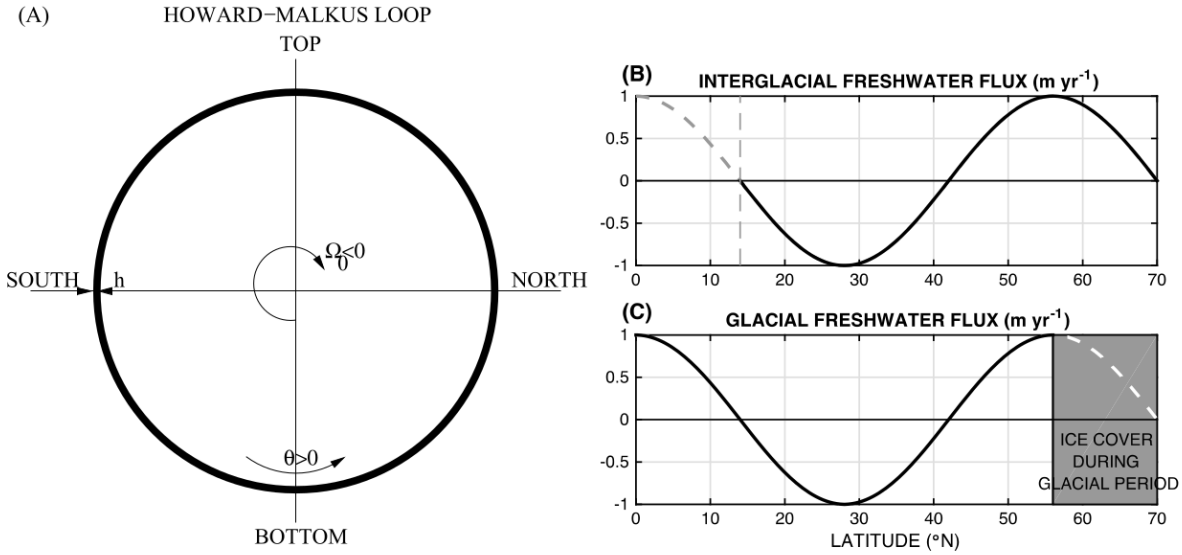


Figura 2.13: Diagrama esquemático del modelo de loop. (A) La AMOC es representada como una circulación rotacional que sigue una línea de corriente en el plano meridional. (B, C) Forma idealizada del flujo superficial de agua dulce en el Atlántico, tal como se utiliza en el modelo de loop, y extensión máxima de la cobertura de hielo marino en el hemisferio norte durante intervalos glaciales. La línea sólida representa el flujo real de agua dulce hacia el océano utilizado en el modelo durante los intervalos (B) interglaciales y (C) glaciales. La línea discontinua indica forzantes atmosféricos de agua dulce que no impactan el océano, ya sea porque se sitúan al sur de la región de interés durante los interglaciales, o porque están enmascarados por el hielo marino durante los glaciales. *Figura 2 extraída de la Ref. [73].*

La dependencia temporal de estos cambios se describe mediante una función "serrucho", elegida para imitar un típico ciclo glacial–interglacial del Pleistoceno tardío. Esta dependencia temporal lleva a variaciones periódicas correspondientes en las amplitudes de Fourier F_{BT} y F_{NS} (cuando el borde del hielo marino alcanza los 70°N, F_{NS} es igual al flujo total de sal superficial y $F_{BT} = 0$, y viceversa cuando alcanza los 55°N; tales variaciones conservan la salinidad media del océano). El modelo de tres variables se vuelve no autónomo:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\lambda\omega - \varepsilon\beta S_{NS} \\ \dot{S}_{BT} = (\Omega_0 + \omega)S_{NS} - KS_{BT} + F_{BT}(t) \\ \dot{S}_{NS} = -(\Omega_0 + \omega)S_{BT} - KS_{NS} + F_{NS}(t) \end{cases} \tag{2.3.7}$$

donde

$$F_{BT} + iF_{NS} = \frac{S_0}{2\pi h}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, e^{-i\theta} d\theta$$

son los coeficientes de las proyecciones de Fourier del flujo de sal superficial. La Figura 2.14 muestra las series temporales para las variaciones simuladas en la tasa de vuelco ($-\omega$) para dos conjuntos de condiciones iniciales ligeramente diferentes —líneas celeste y rojo—. El forzante del movimiento del borde del hielo marino es la función en forma de "serrucho", de media cero y un período de 100.000 años.

Los sistemas no autónomos pueden, en principio, reescribirse en una forma autónoma al precio de aumentar la dimensión del espacio de fases, como se observa en la Ref. [113]. Cuando el forzante co-

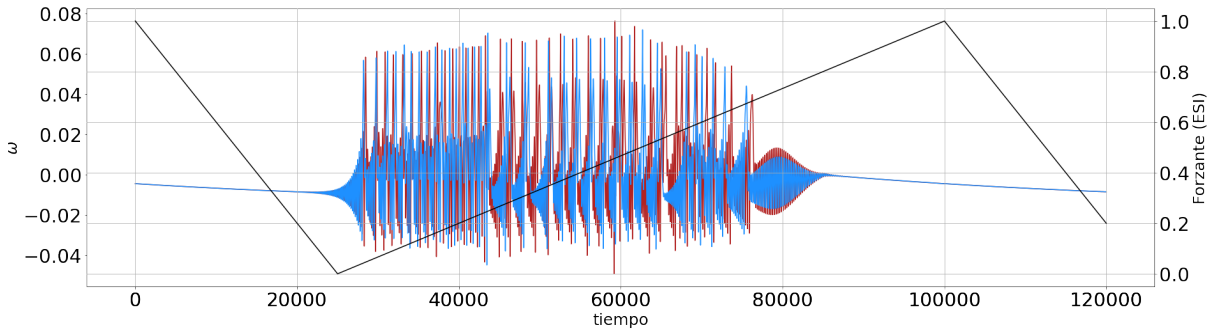


Figura 2.14: Soluciones para condiciones iniciales ligeramente diferentes (líneas celeste y rojo) para las Ecs. (2.3.7). La línea negra en forma de "serrucho" representa el forzante dependiente del tiempo introducido por la posición del borde del hielo marino (ESI). Mismos valores de los parámetros que en la Figura 2.8, salvo $F_0 = 0{,}5$ m yr^{-1}, $K = 0{,}0001$.

rresponde a una función periódica, el sistema no autónomo puede verse como uno impulsado por un oscilador de un grado de libertad. En este caso, el forzamiento periódico implica, en principio, dos dimensiones adicionales en el espacio de fases. Dado que la relación entre las dos variables adicionales F_{BT} y F_{NS} está fijada (ver Ecs. (2.3.7)), sólo una de estas dos variables será necesaria para obtener una solución libre de falsos vecinos. Esto concuerda con los tests de falsos vecinos más cercanos (FNN) [114].

Aquí se aplica la técnica FNN detallada en la Sección 1.6.1 a las series temporales normalizadas para identificar los vecinos falsos en la nube de puntos. El número de dimensiones suficiente para caracterizar el sistema que arroja el test es 4. Se colorean en la Figura 2.15 las regiones donde puntos que parecen estar próximos en tres dimensiones están, en realidad, separados (engrosando la estructura) por la dimensión faltante. Cabe destacar que el engrosamiento en cuatro dimensiones afecta principalmente al disco base y a un fragmento relativamente pequeño de las tiras desprendidas.

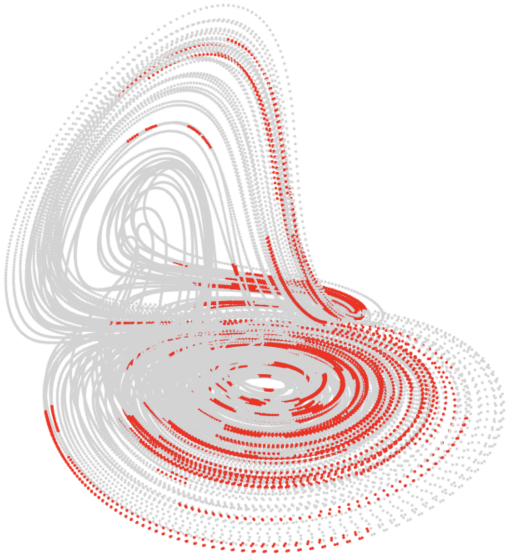


Figura 2.15: Existencia de vecinos falsos más cercanos en una proyección tridimensional del modelo de cuatro dimensiones de la AMOC (Ecs. 2.3.7). Los puntos en rojo parecen estar más cerca de lo que realmente están cuando se añade la cuarta coordenada.

Una vez que se tiene estudiado el espacio donde se calculará el templex, se continúa realizando el

análisis del modelo no autónomo, donde la variabilidad caótica alterna con condiciones oceánicas casi constantes. Se trabaja con un solo ciclo glaciar-interglacial que genera una nube de puntos $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^4$. La variable de estado adicional en el espacio de fases es F_{BT}. Al dar el test de FNN 4 como valor suficiente de variables para analizar el sistema, se trabaja con la proyección que da menor cantidad de falsos vecinos, atendiendo particularmente a la complejidad de las regiones que presentan más puntos coloreados en la Figura 2.15, que corresponden a puntos que se alejan cuando se agrega la cuarta dimensión.

La Figura 2.16 muestra el espacio de fases tridimensional de M formado por las variables de estado ω, F_{NS} y S_{NS}. Se representan tanto los intervalos glaciar como interglacial, así como las transiciones entre ellos. La nube de puntos M se descompone en cuatro partes. Sea $\mathrm{M} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{4} \mathrm{M_i}$, donde $\mathrm{M_i} \in \mathbb{R}^4$ ($i = 1, \ldots, 4$) y $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$, $\mathrm{M_3}$ y $\mathrm{M_4}$ corresponden a los conjuntos de puntos relacionados con las cuatro secciones en la serie temporal. La sección $\mathrm{M_2}$ corresponde al intervalo glaciar, caracterizado por su dinámica caótica. Las secciones $\mathrm{M_1}$ y $\mathrm{M_3}$ corresponden a las transiciones hacia y fuera de los intervalos glaciales, y $\mathrm{M_4}$ corresponde al intervalo interglacial.

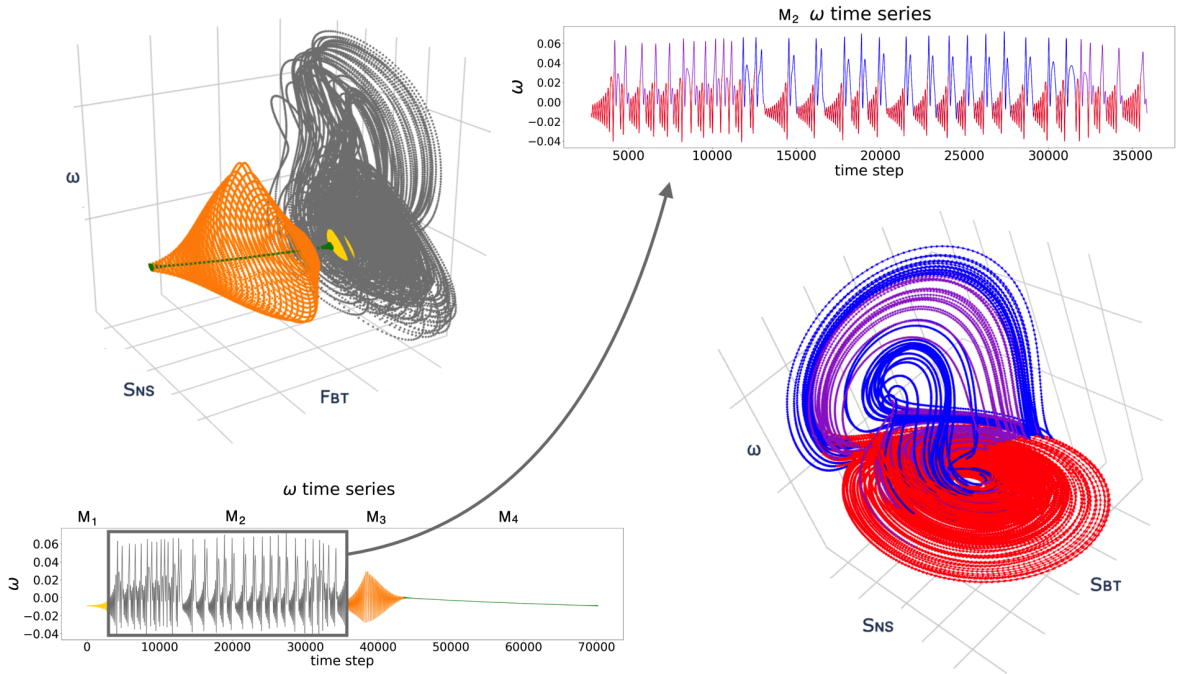


Figura 2.16: En el panel izquierdo, la proyección tridimensional (ω, F_{BT} y S_{NS}) del conjunto de puntos en cuatro dimensiones $\mathrm{M} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{4} \mathrm{M_i}$ correspondiente a la serie temporal mostrada abajo, donde $\mathrm{M_i} \in \mathbb{R}^4$, $i = 1, 2, 3, 4$ está asociado a los cuatro intervalos. La parte caótica, correspondiente a $\mathrm{M_2}$, se muestra en el panel derecho usando la proyección en ω, S_{BT} y S_{NS}. Los colores de la serie temporal de ω para $\mathrm{M_2}$ y de las trayectorias en el retrato de fase corresponden a los tres stripex $\mathscr{S}_{1,2,3}(\mathrm{M_2})$: las partes de $\mathscr{S}_2(\mathrm{M_2})$ y $\mathscr{S}_3(\mathrm{M_2})$ que incluyen el stripex $\mathscr{S}_1(\mathrm{M_2})$ correspondiente a la base del complejo $\mathbb{K}(\mathrm{M_2})$ están marcadas en rojo.

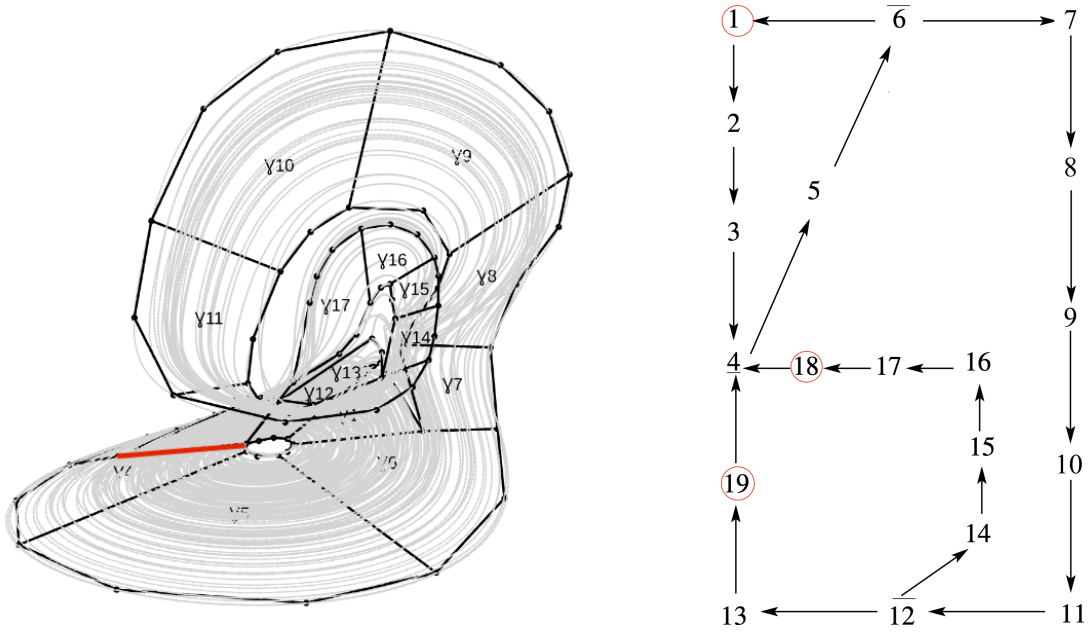
Por lo tanto, se construye y analiza $T(\mathrm{M}) = (\mathbb{K}(\mathrm{M}), \mathrm{D}(\mathrm{M}))$, el templex de la nube de puntos completa de cuatro dimensiones M, teniendo en cuenta la descomposición, $\mathbb{K}(\mathrm{M}) = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{4} \mathbb{K}(\mathrm{M_i})$, de modo que $\mathbb{K}(\mathrm{M_i})$ es el complejo celular obtenido del subconjunto $\mathrm{M_i}$. La ubicación de los agujeros y stripex del templex descompuesto es accesible a través de las celdas 0, cuyas coordenadas en el complejo celular se conocen por construcción.

Una advertencia importante respecto a la descomposición del templex es que las propiedades topo-

lógicas de los subtemplexes deben considerarse con cautela. Una propiedad como un 1-agujero en un subcomplejo puede no corresponder a un vacío real, sino simplemente indicar una sección faltante. Al igual que con la figura literaria conocida como sinécdoque, no se debe confundir el todo con la parte. Es por esto que al final de esta sección se calculan las propiedades de todo el templex, más allá de la descomposición realizara para entender cada etapa.

Intervalo glaciar

Se toma primero el intervalo glaciar correspondiente al subconjunto $M_2 \subset M$. Al construir $\mathbb{K}(M_2)$ a partir de la nube de puntos, se tiene que las celdas que forman el disco en la base de la estructura en N se han engrosado en la coordenada adicional, formando un toro sólido o lleno. Esto es consistente con el análisis FNN presentado en la Figura 2.15. Un toro lleno tiene 3-celdas (poliedros) en lugar de 2-celdas (polígonos), pero los grupos de homología siguen siendo los mismos si las 3-celdas se aplanan y se tratan como 2-celdas de en el manejo algebraico de los generadores de los grupos de homología, por ser un toro sólido.



(a) $\mathbb{K}(M_2)$ (b) $D(M_2)$

Figura 2.17: Templex $T(M_2) = (\mathbb{K}(M_2), D(M_2))$ correspondiente al intervalo glaciar en el modelo no autónomo. En (a), una proyección tridimensional del complejo celular $\mathbb{K}(M_2)$. La *joining line* se encuentra coloreada en rojo. En (b), el digrafo $D(M_2)$ con los *joining nodes* subrayados y los *spitting nodes* con una línea por encima. En rojo, los nodos que aparecerán en el digrafo reducido.

Como en el caso de cuatro dimensiones estudiado en la Sección 1.5.2, el disco grueso será aproximado con 2-celdas sin pérdida de generalidad. Con esta suposición, $\mathbb{K}(M_2)$ –mostrado en la Figura 2.17– es un subcomplejo BRAMAH tal que:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_0(\mathbb{K}(M_2)) &\sim \mathbb{Z} \\ \mathscr{H}_1(\mathbb{K}(M_2)) &= [[h_1, h_2, h_3]] \sim \mathbb{Z}^3 \\ \mathscr{H}_2(\mathbb{K}(M_2)) &\sim 0 \end{aligned}$$

Como es habitual, solo hay una componente conexa o 0-agujero. Hay tres ciclos no equivalentes o 1-agujeros, de los cuales el que se halla en el centro del subcomplejo (h_1) no está asociado con un

agujero de tipo foco como en N. En este caso h_1 está asociado al hecho de que se está trabajando con un subcomplejo de M. Si se considerase el conjunto M, este vacío está lleno, por lo que las homologías cambian, como se advirtió previamente. Es posible referirse a un sub-agujero (de un subcomplejo), pero no a un agujero de la parte entera. Los otros dos 1-agujeros h_2 y h_3 corresponden a vacíos reales entre los stripex en la estructura. Como era de esperar, no hay cavidades vacías cerradas.

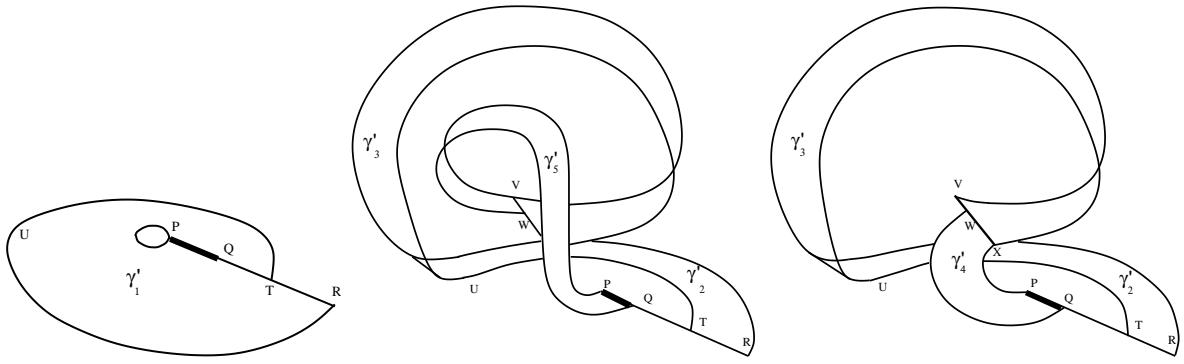
Hay una *joining line* (coloreada en la Figura 2.17) dentro de M_2 cerca de h_1, que no atraviesa todo el disco, tal como en N. Esta 1-celda compartida es la bisagra que conecta las *ingoing 2-cells* (γ_3, γ_{18} y γ_{19}) con la *outgoing 2-cell* γ_4 (nodo subrayado). El cálculo de los generatex para M_2 restringiendo el análisis a la ventana temporal asociada, es decir, desconsiderando momentáneamente $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_3$ y M_4 arroja tres ciclos de orden 1:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_1 &= \underline{4} \to 5 \to \overline{6} \to 1 \to 2 \to 3 \to \underline{4} \\
\mathscr{C}_2 &= \underline{4} \to 5 \to \overline{6} \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11 \to \overline{12} \to 13 \to 19 \to \underline{4} \\
\mathscr{C}_3 &= \underline{4} \to 5 \to \overline{6} \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11 \to \overline{12} \to 14 \to 15 \to 16 \to 17 \to 18 \to \underline{4}
\end{aligned}$$

Como los generatex son de orden $\theta = 1$, estos tres ciclos están asociados a tres stripex, $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ y $\mathscr{S}_3$, cuando se habla en términos de las celdas que los componen:

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_1(T(\mathrm{M}_2)) &\equiv \gamma_4 \ldots \gamma_6 \to \gamma_1 \ldots \gamma_3 \\
\mathscr{S}_2(T(\mathrm{M}_2)) &\equiv \gamma_4 \ldots \gamma_{13} \to \gamma_{19} \\
\mathscr{S}_3(T(\mathrm{M}_2)) &\equiv \gamma_4 \ldots \gamma_{12} \to \gamma_{14} \ldots \gamma_{18}
\end{aligned}$$

El esquema en la Figura 2.18 ayuda a reconocer las stripex de $T(\mathrm{M}_2)$ en la proyección formada por ω, S_{BT} y S_{NS}. El generatex asociado a $\mathscr{C}_2$ tiene un elemento de torsión: $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{M}_2))$ tiene un *twist* local, que puede asociarse al *twist* de la stripex en N, a saber, $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{N}))$.



(a) (b) (c)

Figura 2.18: Diagrama esquemático que muestra los tres stripex (a) $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{M}_2))$, (b) $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{M}_2))$ y (c) $\mathscr{S}_3(T(\mathrm{M}_2))$ sin su parte compartida en el subtemplex $T(\mathrm{M}_2)$. La línea gruesa resalta el lugar de unión.

El desplazamiento latitudinal del borde del hielo marino, ausente en N, ha alterado claramente la estructura topológica del régimen caótico glaciar, introduciendo una tercera stripex, $\mathscr{S}_3(T(\mathrm{M}_2))$, separada de $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{M}_2))$ por h_3. Esta stripex es "nueva" en el sentido de que sus celdas visitan regiones del espacio de fases que permanecieron inexploradas en N.

En la Figura 2.17 se redondearon en rojo los nodos que son necesarios incluir en la reducción del digrafo de M_2. El *bond* está compuesto por las aristas entre el *joining node* 4 y el *splitting node* 6, comunes a todas las stripex:

$$\mathscr{B}(\overline{D}(\mathrm{N})) = \{(\underline{4}, \overline{6})\}.$$

El ciclo más corto y más cercano al centro de rotación, correspondiente al toro sólido, es designado como O-unidad. De las stripex restantes se extraen las S-unidades. El digrafo reducido y las unidades correspondientes a M_2 se observan en la Figura 2.19.

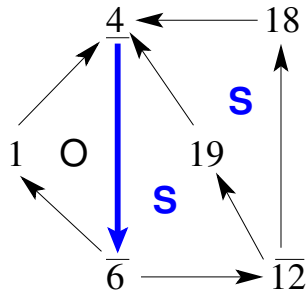


Figura 2.19: Unidades dinámicas fundamentales para M_2.

La aparición de una nueva unidad respecto de N, sintetiza y refuerza el hecho de que hay una stripex extra, otra forma no explorada de circular por la estructura. En la Figura 2.16 se pueden identificar dos regímenes dentro del intervalo glaciar de la serie temporal: el primer régimen, que ocurre en [5.000 años, 12.000 años] y [32.000 años, 35.000 años], presenta un pico con ω excediendo 0,04. En contraste, el segundo régimen, que ocurre en [12.000 años, 32.000 años], presenta dos extremos: un pico más alto seguido de uno más bajo, ambos por encima de 0,04. El panel derecho de la Figura 2.16 ilustra cómo estos dos regímenes se correlacionan con la estructura del templex. El primer régimen en la serie temporal del intervalo glaciar corresponde a la trayectoria que visita las stripex $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{M}_2))$ (en rojo) y $\mathscr{S}_3(T(\mathrm{M}_2))$ (en violeta), donde solo hay un camino lejos del disco principal, resultando en un único valor extremo (con ω por encima de 0,04). El segundo régimen, que ocurre en el medio del intervalo glaciar, corresponde a la trayectoria que visita las stripex $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{M}_2))$ (en rojo) y $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{M}_2))$ (en azul). Esta stripex con *twist* local presenta un camino de doble bucle lejos del disco base, como se muestra en la Figura 2.18. La estructura de las stripex explica así los picos dobles en el régimen intermedio y el pico único en el régimen al principio y al final del intervalo glaciar.

Estos resultados pueden compararse con la serie temporal del sistema de menor dimensión discutido en la Sección 2.3.2, donde solo estaban disponibles dos stripex: el disco principal responsable de los picos de baja amplitud y aumento lento de ω –stripex $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{N}))$– y los caminos de doble pico a través de la stripex con *twist* local $\mathscr{S}_2(T(\mathrm{N}))$. El forzante introduce así las separaciones de un solo pico, que ocurren cuando los valores de ESI son ya sea inferiores a $-0{,}01$ o superiores a 0,05.

A la luz de estos resultados, los puntos de inflexión entre distintos regímenes pueden interpretarse en función de los conjuntos de stripex que son visitadas. A medida que aumentan los valores del ESI, la dinámica bascula de visitar $\mathscr{S}_{1,3}(T(\mathrm{M}_2))$ a visitar $\mathscr{S}_{1,2}(T(\mathrm{M}_2))$, lo que da lugar a diferencias cualitativas en las separaciones que tienen ambas stripex y los picos característicos asociados.

Intervalo interglaciar

En esta subsección se considera la estructura celular correspondiente a la ventana temporal interglaciar. El sistema abandona la región glacial a través de la stripex $\mathscr{S}_3(T(\mathrm{M}_2))$, más precisamente mediante la celda etiquetada como γ_{13}. El intervalo interglaciar exhibe oscilaciones regulares mientras el sistema transita hacia y desde el intervalo glacial. Entre M_3 y M_1, se encuentra M_4, con condiciones prácticamente constantes.

Topológicamente, el intervalo interglaciar está representado por la unión de subcomplejos, a saber, $\mathbb{K}(\mathrm{I}) = \mathbb{K}(\mathrm{M}_1) \cup \mathbb{K}(\mathrm{M}_3) \cup \mathbb{K}(\mathrm{M}_4)$. La estructura celular involucra 2-celdas en M_1 y M_3, y una 1-celda en M_4. Estas celdas se muestran en la Figura 2.20 usando la proyección ω, S_{NS} y F_{BT}, junto con los conjuntos de puntos subyacentes, todos coloreados consistentemente con la Figura 2.16.

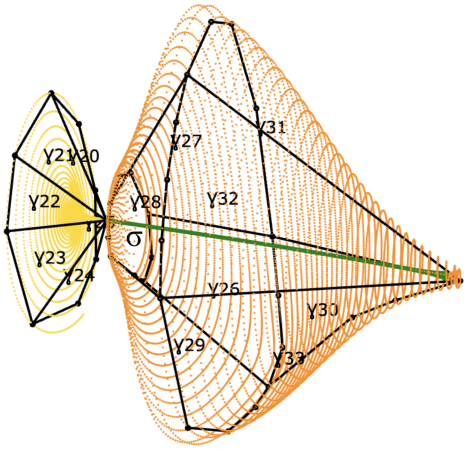


Figura 2.20: Subcomplejo interglaciar $\mathbb{K}(\mathrm{I})$ formado por $\mathbb{K}(\mathrm{M}_1)$ (con puntos en amarillo), $\mathbb{K}(\mathrm{M}_3)$ (con puntos en naranja) y $\mathbb{K}(\mathrm{M}_4)$ (con puntos en verde). Las 2-celdas están etiquetadas como γ_i, $i \in \mathbb{N}$ y la 1-celda en $\mathbb{K}(\mathrm{M}_4)$ está etiquetada como σ.

Las transiciones entre las subsecciones de $\mathbb{K}(\mathrm{I})$ están marcadas por cambios topológicos en la estructura celular. Es importante recordar que la dimensión local κ_l aumenta de 2 a 3 al entrar en el toro sólido –visitado por la stripex $\mathscr{S}_1(T(\mathrm{M}_2))$– y desciende de 2 a 1 cuando la superficie naranja se contrae hacia la línea verde cubierta por la 1-celda σ en M_4.

Ciclo Glacial-Interglaciar

Se puede ahora sí analizar el templex de tiempo finito de la dinámica glacial e interglaciar a partir de la nube de puntos en cuatro dimensiones, reestableciendo la unión de los subconjuntos descritos hasta ahora por separado.

Se toma ahora el templex $T(\mathrm{M})$ con un único complejo celular y un único digrafo, $D(\mathrm{M})$. Las homologías de $\mathbb{K}(\mathrm{M})$ son:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_0(\mathbb{K}(\mathrm{M})) &\sim \mathbb{Z} \\ \mathscr{H}_1(\mathbb{K}(\mathrm{M})) &= [[h_2, h_3]]] \sim \mathbb{Z}^2 \\ \mathscr{H}_2(\mathbb{K}(\mathrm{M})) &\sim 0 \end{aligned}$$

Hay una única componente conexa, como es habitual. Hay dos 1-agujeros no triviales correspondientes a los desgarros que separan las stripex en la fase caótica, y no hay cavidades vacías encerradas. Aquí se confirma que el sub-agujero h_1 en M_2 no es un 1-agujero en M. Esto es simplemente un efecto de la disección de la serie temporal; no hay un 1-agujero central en el complejo completo M. Las celdas γ_j con $j = 21, \ldots, 25$ (pertenecientes a M_1) llenan h_1 en M_2: esta región del espacio de fases es visitada cuando la trayectoria entra en el intervalo interglaciar.

A partir del digrafo $D(\mathrm{M})$ se calcula el conjunto de stripex de M. Dado que existe una salida en M desde el ciclo de tres stripex de M_2, $T(\mathrm{M})$ contiene un cuarto stripex unido a los tres ya existentes en $T(\mathrm{M}_2)$:

$$\begin{aligned} &\mathscr{S}_1(T(\mathrm{M})) = \mathscr{S}_1(\mathrm{T}(\mathrm{M}_2)) \\ &\mathscr{S}_2(T(\mathrm{M})) = \mathscr{S}_2(\mathrm{T}(\mathrm{M}_2)) \\ &\mathscr{S}_3(T(\mathrm{M})) = \mathscr{S}_3(\mathrm{T}(\mathrm{M}_2)) \\ &\mathscr{S}_4(T(\mathrm{M})) \equiv \gamma_4 \ldots \gamma_{13} \to \gamma_{26} \ldots \gamma_{33} \to \sigma \to \gamma_{20} \ldots \gamma_{25} \to \gamma_1 \ldots \gamma_3 \end{aligned}$$

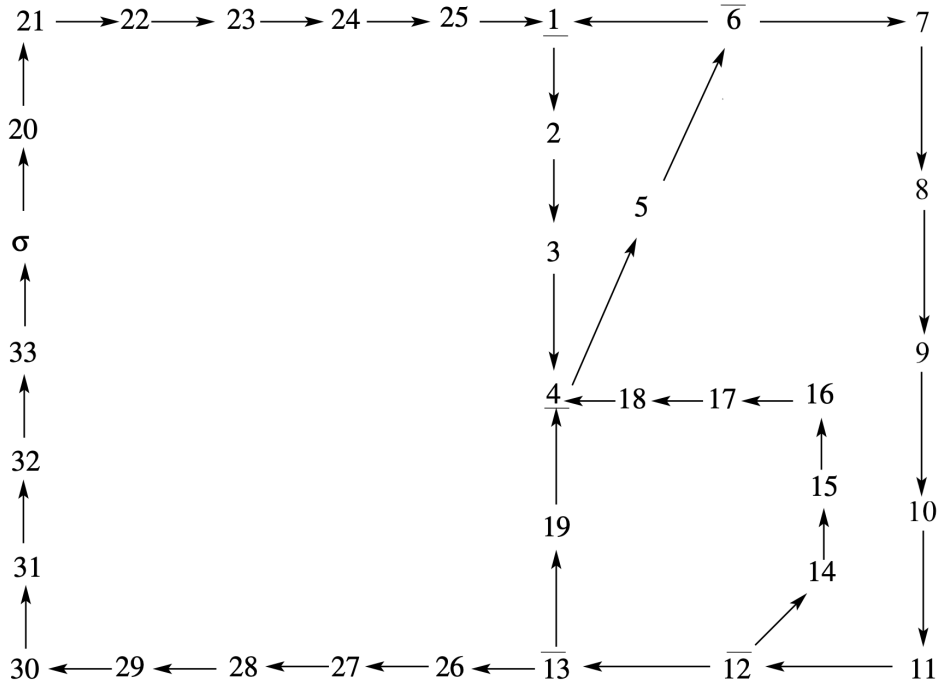


Figura 2.21: Digrafo $D(\mathrm{M})$ del intervalo temporal glacial-interglaciar. Nótese que ahora los nodos 13 y 1 son de *splitting* y *joining nodes* respectivamente, dada la incorporación de los nodos correspondientes al intervalo interglacial. $\mathscr{S}_4(T(\mathrm{M}))$ es el único que visita tanto los intervalos glaciales como interglaciares.

Desde el punto de vista topológico, la trayectoria sale de la fase glacial debido a la existencia de un *splitting locus* en la celda γ_{13} (perteneciente a $\mathscr{S}_3$ en M_2), lo que permite que el flujo bascule hacia γ_{26}, como se muestra en la Figura 2.21. Dado que se sale del intervalo glacial a través de $\mathscr{S}_3(\mathrm{M}_2)$, la serie temporal de ω muestra trayectorias asociadas a picos de ω en la serie temporal que superan los 0,04 antes de entrar en el intervalo interglaciar. En otras palabras, es el régimen $\mathscr{S}_{1,3}$ en M_2, seguido por las oscilaciones cuasiperiódicas en M_3 subyacentes a $\mathscr{S}_4$ (celdas $\gamma_{13,26\ldots33}$), lo que sugiere la existencia de una señal topológica del intervalo interglaciar entrante. Por otro lado, la trayectoria cambia o bascula desde el intervalo interglaciar hacia el glacial a través de las celdas o nodos $\gamma_{20\ldots25}$, que conducen inexorablemente a γ_1. Aquí, las oscilaciones de amplitud creciente en M_1, representadas por las 2-celdas que siguen a la 1-celda σ en $\mathscr{S}_4$, parecen constituir una Señal de Advertencia Temprana (EWS, por sus siglas en inglés) topológica del intervalo glacial entrante. Los cambios en la dimensión local máxima del complejo celular deberían corresponder a un aumento de la varianza, lo que es consistente con el enfoque estadístico EWS para el colapso de la AMOC [115, 116].

Para ensamblar los resultados del análisis topológico de M en una única imagen que ilustre las transformaciones topológicas o puntos de inflexión que ocurren dentro de M, se introduce el concepto de propiedades activas del templex. En términos simples, cuando una propiedad templex, como una stripex, no es visitada durante un cierto tiempo, se considera inactiva o silenciosa. Lo mismo ocurre con un 1-agujero que deja de estar rodeado por la trayectoria, convirtiéndose así en inactivo o silencioso. De aquí en adelante, se llamarán agujeros activos o stripex activas en relación con una ventana temporal específica y su subtemplex asociado. Este concepto se resume en la tabla proporcionada en la Figura 2.22, utilizando la serie temporal de ω como referencia.

Los conjuntos de puntos M_1, M_3 y M_4 no poseen ningún 1-agujero activo; los tres 1-agujeros h_1, h_2 y h_3 solo están activos para el conjunto M_2. Las stripex $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ y $\mathscr{S}_3$ están activas en M_2. Podemos discriminar entre los dos regímenes dentro del intervalo glacial en términos de stripex activas: $\mathscr{S}_{1,3}$ al principio y al final del intervalo M_2 y $\mathscr{S}_{1,2}$ en el medio. Durante el intervalo interglacial, que abarca

I (M_1, M_3 y M_4), la única stripex activa es $\mathscr{S}_4$. Es notable que $\mathscr{S}_4$ sigue estando vinculada a la parte glaciar del templex. También cabe destacar que la parte de $\mathscr{S}_4 \subset I$ está compuesta por celdas con κ_l progresivamente más bajas (de 3-celdas a 2-celdas y 1-celdas). Posteriormente, la dimensión local de los subcomplejos vuelve a aumentar para alcanzar un nuevo estallido caótico.

Es importante enfatizar que el templex está construido a partir de un único ciclo glacial-interglacial, lo que significa que la parte no vinculada de la stripex $\mathscr{S}_4$ se visita solo una vez. La estructura del templex permanece consistente a lo largo de todos los ciclos que se consideran, siempre que cada ciclo se analice por separado. Sin embargo, si la solución utilizada para construir el templex abarca múltiples ciclos interglaciares-glaciares, la estructura resultante mostrará características no estudiadas aquí.

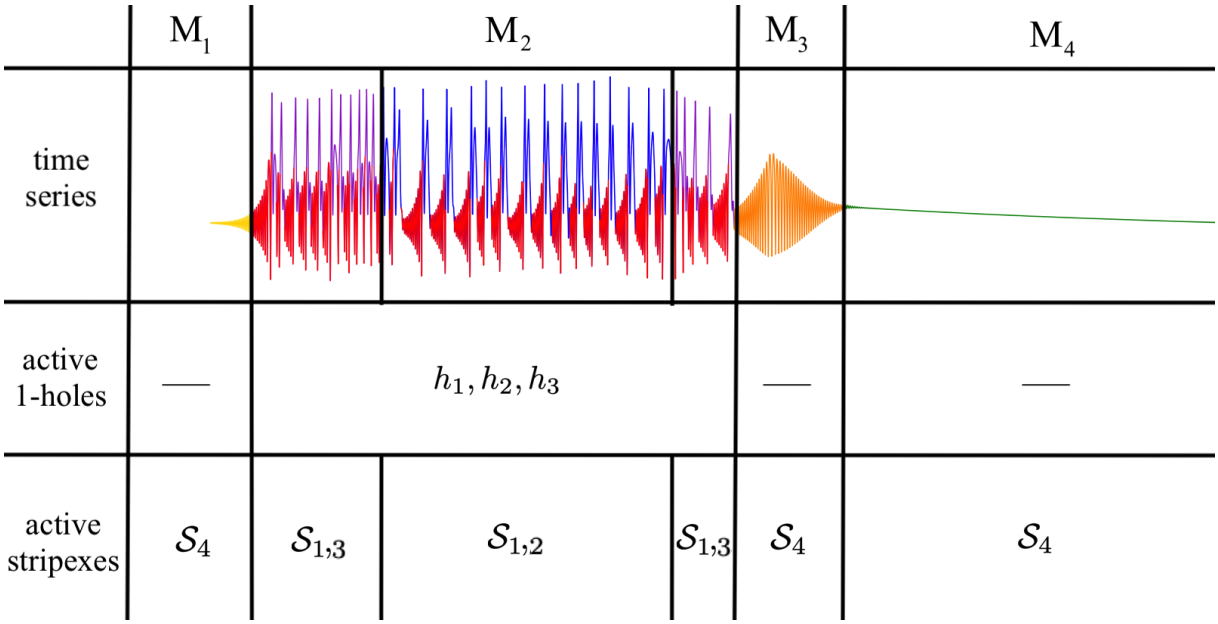


Figura 2.22: Agujeros y stripex activos para los cuatro subconjuntos en el templex $T(\mathrm{M})$.

Enfoque de Pullback

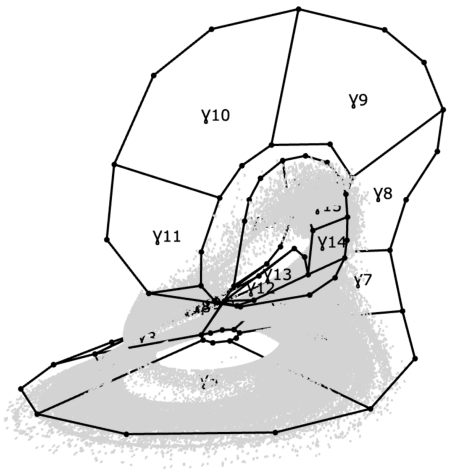
Los sistemas no autónomos a menudo se estudian utilizando el concepto de atractor pullback, que generaliza los atractores globales para sistemas no autónomos [105, 107]. Los atractores pullback describen el comportamiento a largo plazo de un sistema a medida que se "retrocede" en el tiempo, ofreciendo una visión de cómo evolucionan las trayectorias en diferentes entornos [104].

El modelo idealizado no autónomo de la AMOC ha sido analizado por sus autores a través del enfoque de pullback. La Figura 2.23 presenta cuatro snapshots en el sentido pullback [73], yuxtapuestas con diferentes subconjuntos de $\mathbb{K}(\mathrm{M})$. En gris, se representan los puntos que corresponden a las regiones de mayor densidad, junto con los subcomplejos en la proyección (ω, S_{NS}, F_{BT}) del espacio de fases de cuatro dimensiones.

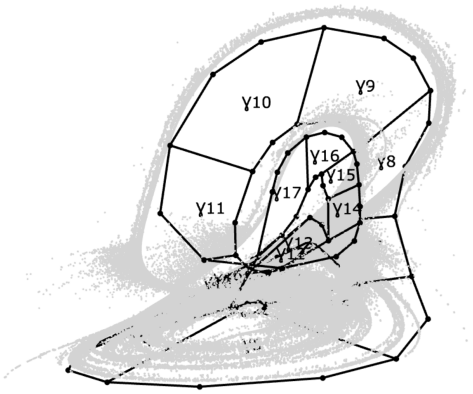
Las cuatro snapshots del atractor pullback se obtienen para diferentes valores de (t_0, t), donde t_0 es el tiempo de inicialización y t es el tiempo diagnóstico. Los cálculos comienzan 5 kyr antes de t_0. En el primer cuadro (A), el conjunto de puntos pullback aterriza sobre las celdas en $\mathscr{S}_{1,2}(\mathrm{M})$ de acuerdo con el valor de $t_0 = -175$ kyr. En la segunda snapshot (B), las regiones de mayor densidad visitan las celdas en $\mathscr{S}_1(\mathrm{M})$ y la periferia de $\mathscr{S}_3(M)$, como se espera para $t_0 = -150$ kyr. En (C), el atractor pullback se concentra en la parte interglacial de $\mathscr{S}_4(\mathrm{M})$ correspondiente a $\mathrm{M}_{3,4} \subset \mathrm{I}$, en concordancia con $t_0 = -100$ kyr. En (D), con $t_0 = -125$ kyr, las partes centrales de $\mathscr{S}_{1,3}$ son las protagonistas.

Los conjuntos de puntos que varían en el tiempo del atractor pullback en evolución pueden, por lo

tanto, traducirse en las propiedades activas cambiantes del templex construido aquí. $T(\mathrm{M})$ respalda las regiones de mayor densidad (las partes más visitadas del espacio de fases de tres variables) obtenidas de una gran cantidad de experimentos numéricos (dos millones), cada uno con condiciones iniciales diferentes. Cabe señalar que calcular el atractor pullback para el modelo idealizado no autónomo requiere tanto esfuerzo numérico como simular varias décadas con un modelo de circulación general oceánica de última generación. Este resultado sugiere que las stripex más pobladas del modelo idealizado están contenidos dentro del templex de tiempo finito, que fue construido a partir de un único ciclo glacial-interglacial y un solo experimento numérico (una condición inicial). Teniendo en cuenta la yuxtaposición de las snapshots sobre $T(\mathrm{M})$, podemos concluir que el templex multi-ciclo aún no construido puede tener más stripex, pero estos deberían corresponder a los menos visitados.



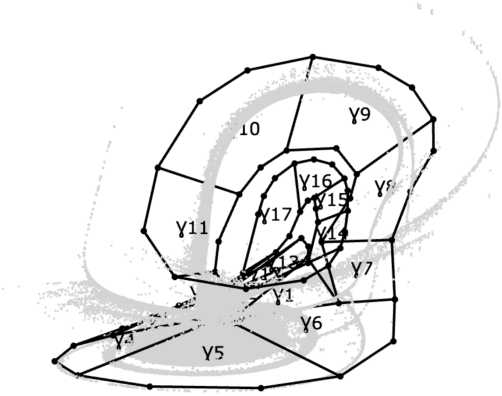
(a) $t_0 = -175$ kyr



(b) $t_0 = -150$ kyr



(c) $t_0 = -100$ kyr



(d) $t_0 = -125$ kyr

Figura 2.23: Conjuntos de puntos extraídos de snapshots en el enfoque de PBA correspondientes a densidades de probabilidad superiores a -22 en escala log para (a) $t_0 = -175$ kyr, (b) -150 kyr, (c) -100 kyr y (d) -125 kyr. Los cálculos comienzan 5 kyr antes de t_0. Las celdas del templex se muestran en yuxtaposición.

2.4. Conclusiones

En este capítulo se analizaron 3 modelos climáticos. En primer lugar se realizó un estudio topológico del atractor producido por el sistema de ecuaciones de Lorenz 96 en su versión de cuatro variables con el acoplamiento asociado a la escala convectiva apagado. Se trabajó con una proyección del espacio de estados gracias a la adaptación del algoritmo de falsos vecinos que permite localizar las falsas autointersecciones en dicha proyección. Se encontró que el atractor de Lorenz 96 puede ser descripto como la combinación de 5 unidades fundamentales. Como perspectiva futura, se buscará trabajar con la escala convectiva encendida.

Más adelante se realizó un estudio del modelo simplificado del ENSO forzado estacionalmente. El análisis topológico reveló que la dinámica interna del sistema mantiene una organización topológica análoga a la del atractor de Lorenz clásico. A pesar de la introducción de un forzante periódico mediante un oscilador armónico, el grafo dirigido que organiza las transiciones entre celdas permanece invariante. Este resultado sugiere que la estructura topológica subyacente del sistema de Lorenz es estable bajo perturbaciones periódicas, incluso de gran amplitud. El engrosamiento del atractor en el espacio de fases inducido por el forzante da lugar a un templex cuyas stripex, ahora volumétricas, reflejan el aumento de grados de libertad en la trayectoria, que puede recorrer regiones más amplias del atractor sin alterar la conectividad topológica global del flujo. El análisis mediante matrices de transición de Markov permitió cuantificar el efecto del forzante sobre las transiciones entre las alas del atractor. Se observó que frecuencias de forzante más bajas conducen a una mayor persistencia en una misma ala, lo que se traduce en una reducción de las inversiones entre dominios dinámicos. Este comportamiento resulta coherente con la interpretación física del fenómeno ENSO: en presencia de un forzante más fuerte (frecuencia baja), las fases El Niño o La Niña tienden a prolongarse.

Por último, el trabajo del AMOC muestra que los puntos de inflexión o tipping points en el comportamiento de un sistema dinámico determinista pueden ser analizados eficazmente a través de los cambios en las propiedades activas topológicas en el espacio de fases mediante el enfoque templex. La metodología se aplica a un modelo idealizado recientemente propuesto de la Circulación Meridional de Retorno del Atlántico (AMOC) en configuraciones autónomas y no autónomas. En el caso autónomo, el modelo imita la variabilidad caótica de los intervalos glaciales utilizando tres variables: las anomalías en la tasa de vuelco y los gradientes de salinidad fondo-superficie y norte-sur. En el caso no autónomo, el modelo tiene en cuenta las variaciones glaciales-interglaciares en la cobertura de hielo marino. La cuarta variable es la proyección de Fourier del flujo de superficie de sal.

En el caso autónomo, las oscilaciones caóticas representan el fortalecimiento y debilitamiento irregular de la AMOC asociado a los eventos Dansgaard-Oeschger. Los rápidos cambios entre estas fases corresponden a una variedad enramada con dos agujeros de dimensión 1 y dos stripex, una de las cuales presenta un twist local. Uno de los agujeros de dimensión 1 está asociado a un punto fijo del tipo foco: el espacio vacío está rodeado por el flujo. El otro agujero de dimensión 1 está asociado con un desgarramiento del flujo que crea un vacío entre las dos stripex. El debilitamiento de la circulación está directamente relacionado con la stripex que posee un twist local.

En el escenario no autónomo, la dinámica puede ser embebida en cuatro dimensiones sin vecinos falsos. En este contexto aparece un tercer stripex y un tercer agujero de dimensión 1, ubicados en regiones del espacio de fases que permanecían inexploradas en la proyección abarcada por las tres variables del modelo autónomo. Las stripex tienen partes comunes que las mantienen unidas, pero la parte interesante de la dinámica se encuentra en sus partes no superpuestas. Se pueden distinguir dos regímenes según cómo se visitan las stripex: uno de estos, asociado con las dos stripex ya presentes en el caso autónomo, exhibe un doble pico la parte variable de la circulación durante la fase de debilitamiento, mientras que el otro muestra un solo pico.

El término propiedades activas del templex se introduce en el caso no autónomo para caracterizar los cambios topológicos inducidos por un forzante externo. Estas propiedades, que pueden o no ser ob-

servadas en un subtemplex durante un intervalo de tiempo dado, se denominan activas o silenciosas respectivamente. Por ejemplo, en el modelo no autónomo, los tres agujeros de dimensión 1 están activos solo durante el estallido caótico y permanecen silenciosos durante el intervalo interglacial. Otra propiedad clave del templex es la dimensión local de los complejos celulares, que marca los saltos topológicos en la serie temporal. La dimensión local de la estructura celular es 1 durante intervalos casi constantes, 2 durante transiciones cuasi periódicas, y aumenta a 3 durante explosiones caóticas. Los puntos de inflexión pueden, por lo tanto, ser identificados como las celdas o nodos donde la trayectoria cambia de un conjunto de propiedades activas a otro. También se pueden formular señales de alerta temprana utilizando los términos topológicos de este enfoque, ya que tanto los intervalos glaciales como los interglaciares están precedidos por indicadores topológicos específicos. En cambio, no hay puntos de inflexión en el caso autónomo, ya que todas las propiedades del templex permanecen activas de forma continua.

Un comentario importante es necesario respecto a cómo se construyeron los templex en este trabajo. Todos son objetos de tiempo finito en el sentido de que se construyeron a partir de series temporales finitas, pero existen diferencias significativas en cuanto al número de ciclos considerados en las series temporales utilizadas para construir los templex de tres y cuatro variables. Los dos stripex del caso autónomo corresponden aproximadamente a veinte ciclos de fortalecimiento y debilitamiento; por lo tanto, las dos stripex se visitan alrededor de veinte veces. En cambio, el intervalo interglacial, que solo es reproducido por el modelo no autónomo, se recorre solo una vez en el conjunto de puntos utilizado para el estudio topológico. Según lo que se pudo probar, las propiedades del templex no autónomo parecen permanecer sin cambios para diferentes ciclos glaciales-interglaciares, siempre que cada ciclo se analice por separado. Por supuesto, se espera que una estructura de templex multi-ciclo no autónoma presente propiedades interglaciares más complejas relacionadas con las visitas repetidas de diferentes intervalos interglaciares. Este aspecto ha quedado fuera del alcance de este estudio, pero se considerará en un trabajo separado.

Cuando se comparan las propiedades del templex no autónomo con el análisis del modelo no autónomo realizado mediante el enfoque pullback, el templex de este estudio sirve como apoyo para los puntos correspondientes a altas densidades de probabilidad del atractor pullback. Las regiones más pobladas de las snapshots calculadas para diferentes inicializaciones y tiempos diagnósticos de dos millones de experimentos numéricos [73] están contenidas dentro del templex no autónomo presentado aquí. Esto sugiere que estos resultados topológicos son lo suficientemente robustos como para describir las stripex más visitadas del modelo idealizado no autónomo, a pesar de haber sido construidos a partir de una sola ventana temporal glacial-interglacial basada en una única integración numérica.

En conclusión, el enfoque templex ha demostrado ser útil para detectar señales de alerta temprana y puntos de inflexión del colapso de la AMOC [115, 116], formulados en términos de propiedades activas topológicas. Esto abre la posibilidad de usar el método templex para detectar puntos de inflexión de la AMOC bajo diferentes forzantes. Tal análisis podría realizarse mediante el examen de simulaciones de modelos climáticos de última generación tanto del período histórico como de las proyecciones futuras proporcionadas por el Proyecto de Comparación de Modelos Acoplados (CMIP, por sus siglas en inglés) [117]. Este será también el enfoque de trabajos futuros. Estos resultados han sido publicados en la revista Chaos [57].

Capítulo 3

Desafíos para el análisis topológico de simulaciones climáticas de alta dimensión

We deal with ordinary differential equations almost exclusively.

A diferencia de lo que ocurre con las series temporales generadas por modelos de baja dimensión, los datos provenientes de observaciones, simulaciones climáticas o productos de reanálisis presentan desafíos específicos vinculados a los millones de variables involucradas, a la resolución espacial y temporal disponible, a la relación señal-ruido, a las discontinuidades en los datos y a la posibilidad misma de distinguir una estructura topológica asociada a una ley de evolución compleja frente a la ausencia de ley discernible.

En este capítulo se abordará el análisis de simulaciones climáticas de alta dimensión. En particular, se examinarán las dificultades que surgen al aplicar técnicas clásicas de reducción dimensional a conjuntos de datos obtenidos mediante modelos globales del estado del arte. La primera parte del capítulo presentará un análisis métrico (no topológico) de las anomalías en la circulación austral, a partir de datos mensuales y diarios de altura geopotencial obtenidos a partir de modelos acoplados océano-atmósfera. La segunda parte del capítulo presentará un análisis topológico parcial, mediante lo que se denominará un *pseudo templex*. Utilizando el atractor de Lorenz como referencia, se discutirá la posibilidad de analizar el grado de ordenamiento del flujo, sobre una estructura topológica de homología trivial.

3.1. Introducción

Los principales patrones de variabilidad de la circulación troposférica en el Hemisferio Sur (HS) se han descrito en la literatura utilizando principalmente anomalías de altura geopotencial (HGT), que es la altura desde la superficie a la que se encuentra un nivel de presión determinado, que puede ser, por ejemplo, 200hPa. La variabilidad de la circulación en el HS en escalas estacionales está influenciada principalmente por el Modo Anular del Sur (en inglés SAM), así como por las teleconexiones emanadas del Pacífico Tropical Central, en gran medida inducidas por El Niño-Oscilación del Sur (en inglés ENSO); y por las teleconexiones emanadas del sector Índico-Pacífico que también son forzadas parcialmente por la variabilidad de la superficie oceánica [118].

La Oscilación Antártica (AAO, del inglés), también conocida como Modo Anular del Sur (SAM), es un modo de variabilidad interna de la atmósfera con fuerte influencia sobre latitudes extratropicales del HS [119]. Este modo, activo durante todo el año, está asociado a la intensificación o debilitamiento de los vientos del oeste y presenta una estructura barotrópica equivalente. El impacto de SAM en las precipitaciones varía según las regiones y las estaciones. El SAM puede ser influenciado por la temperatura de la superficie del mar (en inglés SST) tropical [120] y extratropical [121].

Los patrones Pacífico-Sudamérica (PSA por su siglas en inglés) también juegan un rol importante en

la variabilidad de la atmósfera en latitudes extratropicales. Estos modos se consideran fases diferentes de un tren de ondas que se propaga hacia el polo desde el Pacífico tropical [122]. Los PSA están asociados a una mayor convección en los trópicos como principal respuesta atmosférica al ENSO y a una SST cálida sobre el continente marítimo en el HS. Los dos patrones PSA están activos durante todo el año pero con algunas variaciones estacionales en su amplitud. Ambos influyen en las anomalías regionales de temperatura y precipitación en Australia, Nueva Zelanda, la Antártida y el sur de Sudamérica [123, 124, 125, 126].

Las simulaciones con modelos acoplados océano-atmósfera muestran que un número reducido de modos es suficiente para describir las anomalías en la circulación atmosférica del HS [127]. En este trabajo se tiene como objetivo identificar modos de variabilidad en latitudes medias y altas del HS siguiendo una metodología similar a la utilizada por [127], trabajando no sólo con anomalías mensuales de altura geopotencial sino también con anomalías diarias.

3.2. Análisis métrico

ERA5 es el reanálisis elaborado por el Centro Europeo de Previsiones Meteorológicas a Plazo Medio (ECMWF, por sus siglas en inglés). Los datos disponibles son desde 1950 hasta el presente. Para este trabajo se utilizan datos de reanálisis de altura geopotencial a 200 hPa del ERA5 disponibles en: `https://cds.climate.copernicus.eu`. Se han descargado los datos de altura geopotencial (HGT) desde el año desde donde se comenzaron a utilizar datos satelitales para la construcción de reanálisis (1979) hasta el año 2023. Se seleccionaron todos los puntos de la retícula entre 20-90°S para restringir el análisis a la circulación extratropical. Posteriormente se han retenido únicamente los meses de verano (DJF, por sus siglas en inglés) para realizar un análisis subestacional.

Osman y Vera [127] probaron que con tres modos es suficiente para caracterizar más del 50 % de la variabilidad de la circulación atmosférica estival del HS utilizando el promedio estacional DJF para la misma variable. En este trabajo se reproduce dicho análisis para el mismo dominio y extendiendo el período de 2005 a 2023. En una primera instancia, se realiza el análisis de componentes principales utilizando la anomalía mensual para los meses de verano (DJF) y, posteriormente, la anomalía diaria para la misma estación. Para ello, los datos diarios de altura geopotencial han sido preprocesados con el objetivo de filtrar la variabilidad de alta frecuencia y retener la variabilidad propia de la escala subestacional y la variabilidad de más baja frecuencia, según se describe más adelante. Los distintos filtros se aplican para cada punto de retícula del dominio. En la Figura 3.1 se muestra una serie temporal de los datos asociados a un punto de la retícula (50°S 100°E), sólo para un intervalo de años para mayor claridad. En el primer panel de la Figura 3.1 se muestran los datos sin procesar. El primer paso consiste en la remoción de los días 29 de febrero de los años bisiestos. Luego, se aplica un filtro del ciclo medio anual (segundo panel, Figura 3.1). Para ello, se calculan las anomalías diarias respecto de la climatología diaria de todo el período considerado. Esto quiere decir que se resta a cada valor diario la climatología para ese día. Esta climatología es previamente suavizada con un promedio móvil centrado de 5 días.

El siguiente paso consiste en filtrar las tendencias a largo plazo que sean significativas. Estas pueden estar dadas por forzantes externos del sistema climático. En cada punto de retícula se asume que la tendencia es lineal. Para estimar su pendiente, se utiliza el método no paramétrico de Theil-Sen [128, 129], que es más robusto ante la presencia de valores atípicos en comparación con la estimación por mínimos cuadrados. Específicamente, la pendiente (β) se define como la mediana de las pendientes calculadas entre todos los pares de puntos posibles de la serie:

$$\beta = M_e\left(\frac{x_i - x_j}{i - j}\right) \quad i, j \in [1, N], \quad i \neq j$$

La tendencia lineal es eliminada aplicando el ajuste previamente descrito, con el fin de obtener una serie de anomalías libre de la influencia de factores externos y centrada exclusivamente en la variabilidad

interna del sistema terrestre.

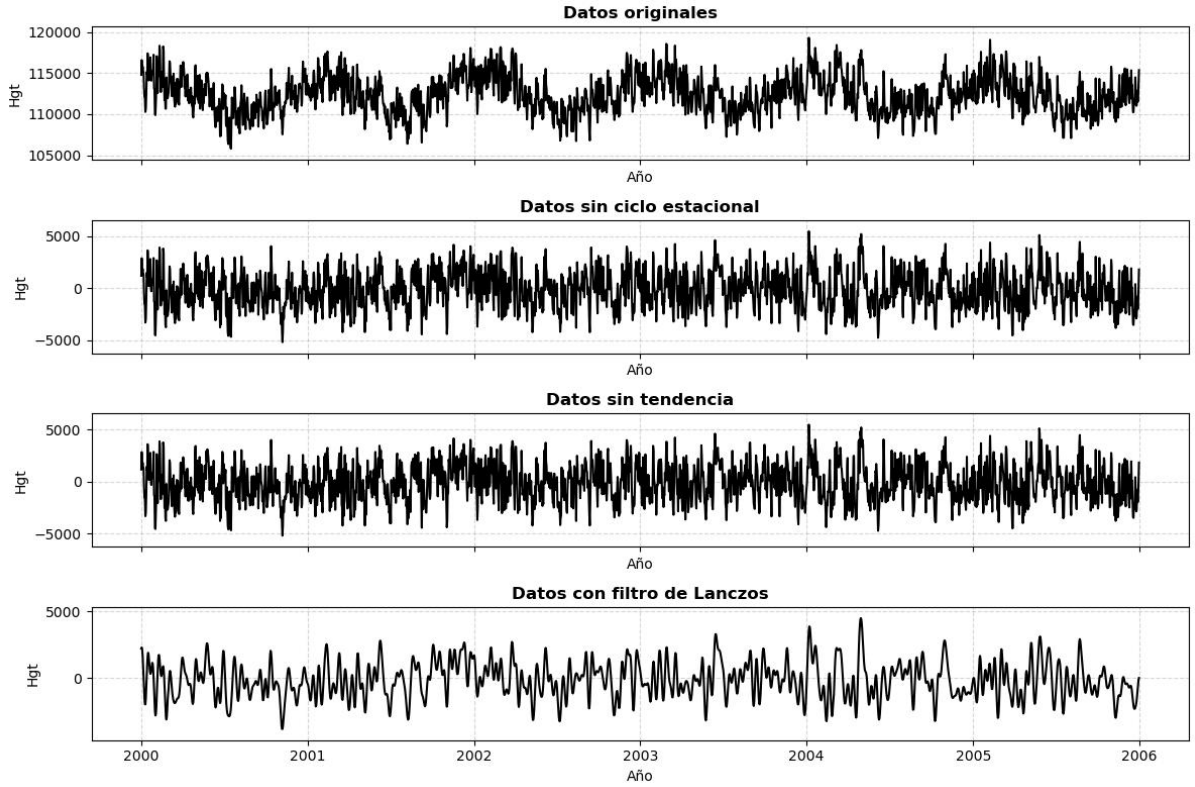


Figura 3.1: Datos diarios de altura geopotencial a 200 hPa para una coordenada en particular, para los meses de diciembre, enero y febrero entre 1979 y 2023 (a) datos extraídos del ERA5, (b) con el filtro del ciclo medio anual, (c) con la tendencia removida, (d) con el filtro de Lanczos.

En la Figura 3.2 se muestra la pendiente ajustada en cada punto del dominio para las anomalías de ERA5 mediante el método de Theil-Sen. Ésta resulta significativa para prácticamente todo el dominio. Se observa que cerca de los trópicos la tendencia es más marcada. Esto está dado por el hecho de que en dichas latitudes la expansión de la celda de Hadley como respuesta al calentamiento de las regiones tropicales es muy importante. Asimismo, en las mayores latitudes hay una tendencia negativa producto de la intensificación del vórtice polar como consecuencia del calentamiento global y el agotamiento del ozono estratosférico. La serie temporal para el punto de retícula seleccionado, con la tendencia removida, se encuentra en el tercer panel de la Figura 3.1.

Por último, se aplica el filtro de Lanczos [130] con una ventana (M) de 61 días y una frecuencia de corte (f_c) de 10 días a las series de anomalías de geopotencial sin tendencia, obteniendo para cada punto de grilla una serie de datos como la del cuarto panel de la Figura 3.1. El objetivo de este filtro es remover la variabilidad de alta frecuencia, asociada a la escala sinóptica y escalas menores, de modo de retener únicamente la variabilidad más lenta propia de la escala subestacional. Este filtro también es conocido como pasa-bajo, aplicado para reducir el efecto espurio de las oscilaciones de Gibbs. El filtro implica una ventana impar centrada con pesos dados por la siguiente fórmula:

$$w_k = \frac{\operatorname{sen}(2\pi f_c k)}{\pi k} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{M-1}\right)}{\frac{2\pi k}{M-1}}, \quad k \in \left[-\frac{M-1}{2}, \frac{M-1}{2}\right]$$

La serie filtrada pierde los primeros y últimos $(M-1)/2$ valores, lo cual no representa un problema ya que, de aquí en adelante, sólo se retienen los meses de verano. En el último panel de la Figura 3.1 se

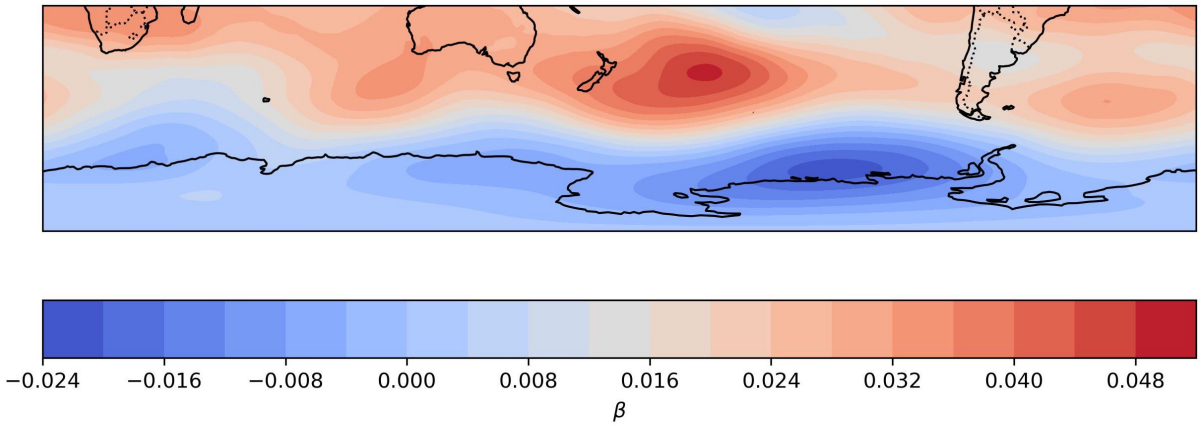


Figura 3.2: Pendiente de la regresión lineal obtenida con el método de Theil-Sen sobre anomalías de altura geopotencial respecto del ciclo medio anual (ERA5).

observa lo suavizados que quedan los datos luego de aplicar este filtro y, posteriormente, se recortan los meses de verano para todo el período.

$$z^*(\lambda,\varphi,t) = \sum_{k=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} w_k z''(\lambda,\varphi,t+k)$$

Con los datos ya procesados, se busca reducir la dimensionalidad del problema, de modo de retener las series temporales (discontinuas entre veranos) más representativas de la variabilidad. Para ello se calculan las componentes principales asociadas a las anomalías subestacionales de altura geopotencial sin tendencia. El análisis realizado consiste en el cálculo de las componentes principales (o Funciones Ortogonales Empíricas, EOF) en modo S basado en la matriz de correlación.

Luego, se rotan las primeras componentes utilizando la técnica VARIMAX para maximizar la varianza local dentro del dominio. Este método, ampliamente utilizado en la disciplina, permite encontrar los modos de variabilidad espacial que explican un mayor porcentaje de la variabilidad temporal de la variable estudiada, a partir de la aplicación de una descomposición de valores singulares a la matriz de covarianza del campo espacial de cada variable. Estos modos son ortogonales entre sí y cada uno se asocia a su respectiva serie temporal.

El Análisis de Componentes Principales (PCA, por sus siglas en inglés) es un método matemático basado en conceptos de álgebra lineal que permite transformar un conjunto de variables correlacionadas entre sí en uno nuevo donde todas son linealmente independientes. Estas nuevas variables se conocen como componentes principales y son el resultado de proyectar los datos en un determinado espacio ortonormal. En este trabajo se aplica PCA a la matriz de anomalías subestacionales resultante de disponer las series temporales del verano pre-procesadas, para cada punto del dominio, en forma de columnas (modo S):

$$Z^* = \begin{pmatrix} z^*(\lambda_1,\varphi_1,t) & \dots & z^*\left(\lambda_{n_\lambda},\varphi_{n_\varphi},t\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times n_\lambda n_\varphi}$$

donde n_λ y n_φ representan la cantidad de longitudes y latitudes de la retícula del dominio, respectivamente, y N es la cantidad de tiempos.

PCA consiste en encontrar un espacio ortonormal cuyos ejes sean de máxima varianza cuando los datos originales se proyectan en ellos, lo cual se reduce a un problema de diagonalización o descomposición en valores singulares de la matriz de covarianza (C) o correlación de las anomalías. En este trabajo se utiliza la primera ya que esto permite retener el peso que tiene la varianza de cada punto en la variabilidad total presente:

$$C = \frac{1}{N-1} X_d^T X_d, \quad X_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

donde X_d es la matriz de entrada con n variables m-dimensionales a las cuales se les ha removido la media por columnas.

La matriz de componentes principales en columnas (Z), i.e. EOFs, se obtiene a partir de la matriz de autovectores unitarios en columnas (U) (que representan el espacio ortonormal hallado):

$$Z = X_d U, \quad Z \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad U \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

donde U es la matriz de autovectores unitarios asociada a C, ordenados en función de los autovalores asociados en forma decreciente. Además, se cumple:

i) $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = 0$ para todo $i \neq j$.

ii) $\mathrm{Var}(Z_i) = \lambda_i$, con λ_i el i-ésimo autovalor de C.

De las dos propiedades mencionadas anteriormente se deduce que la varianza total es la suma de todos los autovalores obtenidos. Por lo tanto, la contribución de cada EOF a la variabilidad total (V_i) podrá cuantificarse de la siguiente manera:

$$V_i = \lambda_i / Var_{total} = \lambda_i / \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

La relación existente entre las EOFs obtenidas y las variables de entrada se puede cuantificar calculando la covarianza entre ambas. Los coeficientes obtenidos se denominan factores de peso o loadings y la matriz asociada (F) puede obtenerse fácilmente a partir de los resultados anteriores, cuyas columnas representan la covarianza de las variables originales con cada una de las EOFs:

$$F = \frac{1}{m-1} X_d^T Z = UD, \quad F, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

donde D es la matriz diagonal con los autovalores de C ordenados en forma decreciente.

Para calcular la correlación entre series temporales se utiliza el coeficiente de correlación de Pearson. La relación entre la matriz de coeficientes de correlación (R) y la matriz de covarianzas (C) está dada por:

$$R_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii} C_{jj}}}$$

Además, a fines de ver la contribución de los forzantes oceánicos en los modos computados, se calculan los mapas de correlación entre las series temporales de la SST de la NOAA (`https://psl.noaa.gov/data/gridded/data.noaa.oisst.v2.highres.html`) y las series temporales de los pesos de los modos principales, para cada punto de la retícula.

Finalmente, para contrastar las componentes principales halladas con otras métricas utilizadas en la bibliografía para caracterizar al SAM se toma una definición numérica del SAM. Esta es utilizada para comparar observaciones con datos de reanálisis [131] y fue propuesta por Gong y Wang [132]:

$$SAM = P^*_{40S} - P^*_{65S}$$

donde P es la presión en superficie en 40°S y 65°S. Dichas latitudes fueron elegidas por la fuerte correlación entre ellas.

3.2.1. Componentes principales de HGT mensual

En una primera instancia, se calculan las componentes principales de las anomalías mensuales de HGT. En las Figuras 3.3 y 3.4 se muestran los campos espaciales de las EOFs obtenidas y el porcentaje de varianza explicada. El primer modo explica aproximadamente el 15 % de la varianza total observada. Se caracteriza por un monopolo de anomalías positivas de altura geopotencial en el polo y anomalías negativas en latitudes medias (Figura 3.3). Este modo principal, conocido en la bibliografía como Oscilación Antártica o SAM, presenta una estructura altamente simétrica desde el punto de vista zonal que describe una inversión de la anomalía entre latitudes polares y medias [133, 118]. Esto se observa también en la Figura 3.5. En dicha figura se muestra el cálculo de las correlaciones entre las series temporales de los loadings de los primeros tres modos y la SST mensual en DJF para cada punto de la retícula. En el primer panel, donde se muestran las correlaciones con la EOF 1, se observa una importante correlación con la SST mensual siguiendo un patrón zonal característico del SAM y representa la respuesta de la SST al viento con fuerte componente del oeste.. También se puede ver algo de correlación en la SST cerca de los trópicos, asociada a la parte menos simétrica del SAM que tiene influencia tropical.

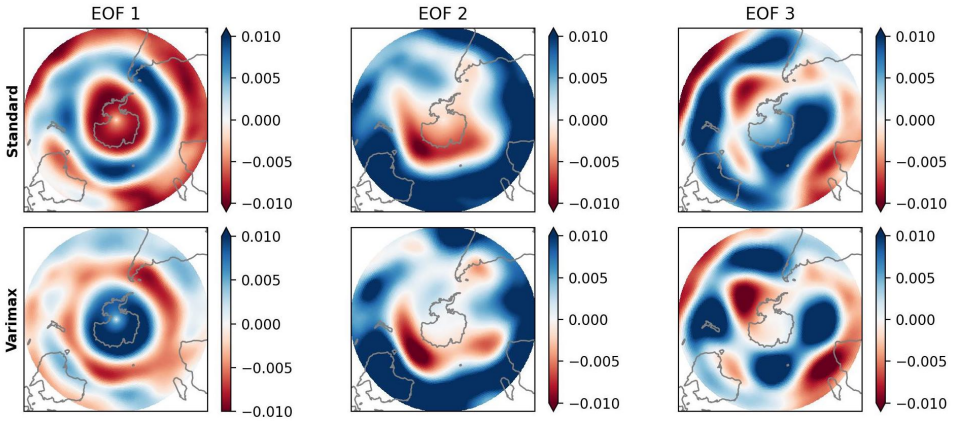


Figura 3.3: Campos de anomalías mensuales subestacionales de altura geopotencial (HGT) a 200 hPa para las primeras 3 EOF de forma estándar y rotadas.

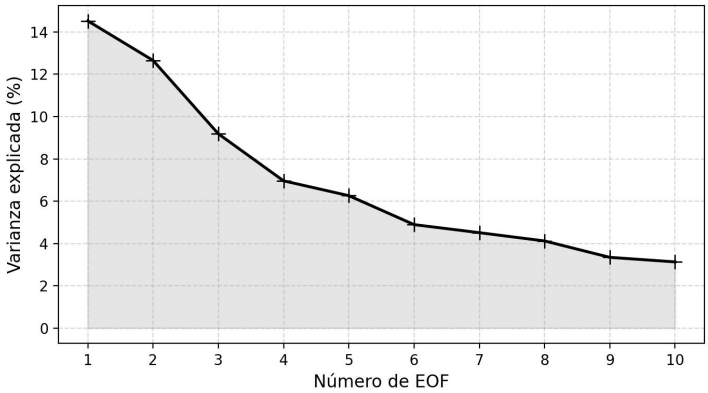


Figura 3.4: Porcentaje de varianza explicada por las EOFs construidas a partir de las anomalías mensuales subestacionales de altura geopotencial (HGT) en 200 hPa.

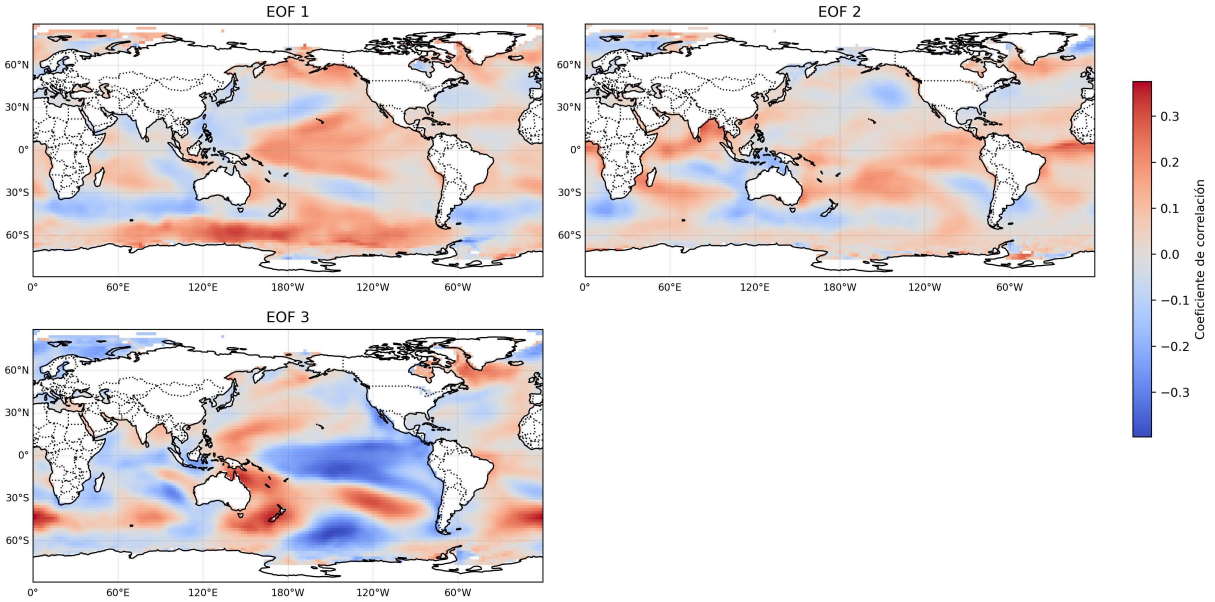


Figura 3.5: Correlación de la SST mensual con las tres primeras EOF de anomalías de HGT mensuales.

Por otro lado, el segundo y tercer modo explican el 12 y 8 % de la varianza total observada, respectivamente (Figura 3.4). Ambos modos están asociados a trenes de onda en respuesta a la convección tropical forzados al menos en parte por anomalías de la SST en las porciones tropicales de los océanos Pacífico e Índico. En particular, el segundo modo principal presenta un patrón normalmente denominado PSA2 [118]. Este está vinculado a las anomalías de la SST en el Océano Índico tropical, tal como se observa en el segundo panel de la Figura 3.5, en donde las mayores correlaciones entre la distribución de SST y las series temporales de los loadings del modo 2 están dadas en el Océano Índico. En la Figura 3.6 se muestran las series temporales de las primeras tres componentes principales rotadas para anomalías de HGT mensual. En particular, la EOF 2 (segundo panel) presenta una variabilidad más lenta mientras que en la segunda parte del período la variabilidad rápida y de menor amplitud.

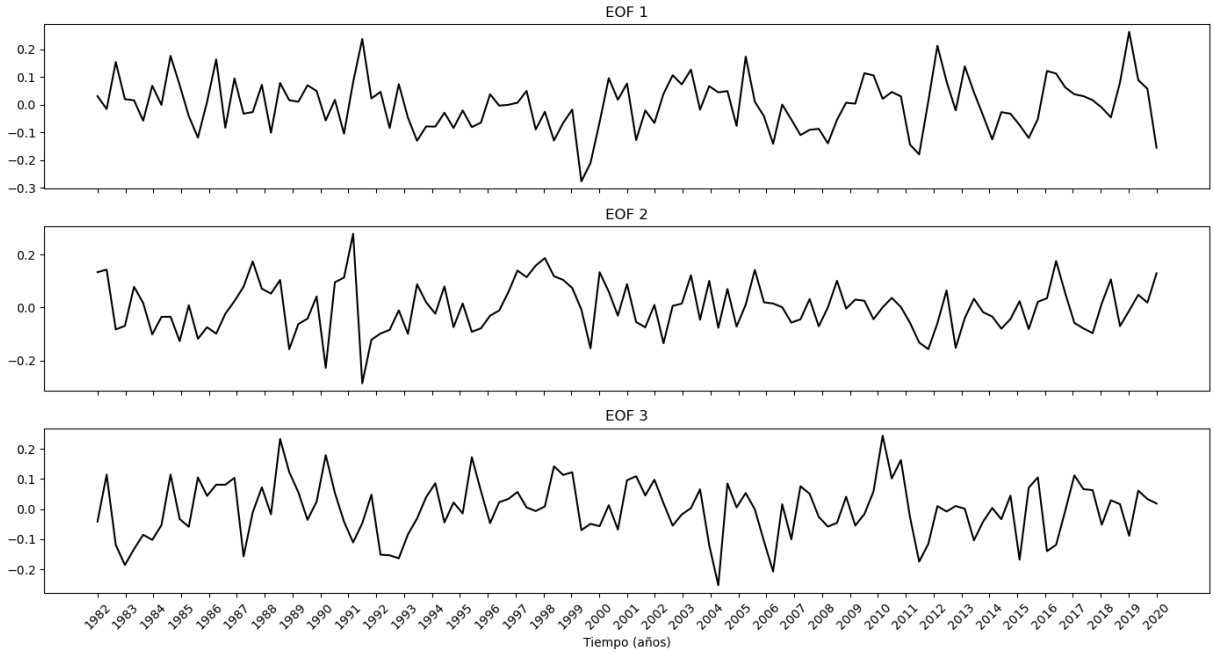


Figura 3.6: Series temporales de las primeras tres componentes principales de las anomalías de altura geopotencial a 200hPa.

Por último, el patrón que se observa en el modo 3 (Figura 3.3) es normalmente denominado PSA1 [118]. Este está asociado a la convección en el Océano Pacífico central tropical como principal respuesta a las anomalías de SST del Pacífico tropical, correspondiente al fenómeno del ENSO. En la Figura 3.6, la EOF 3 (tercer panel) se maximiza en los años Niño: 1982, 1986/87, 1991/92, 1994/95, 1997/98, 2002/03, 2004/05, 2006/07, 2009/10, 2015/16. Esto se corresponde con el patrón que se observa en el tercer panel de la Figura 3.5. Dicha figura, donde se correlaciona la serie temporal de los loadings del modo 3 con las series temporales de SST, muestra una alta correlación en una distribución de SST característica de la fase Niño del ENSO.

3.2.2. Componentes principales de HGT diaria

Luego de hacer el preprocesamiento de los datos, se aplica la misma metodología a las anomalías diarias de HGT para los meses de verano. En las Figuras 3.7 y 3.8 se observa que el primer modo combina un patrón zonal de anomalías positivas en los trópicos, nuevamente asociado al SAM, y explica un cerca del 9 % de la variabilidad total. El modo 2, a pesar de haber filtrado la variabilidad de alta frecuencia, presenta un patrón ondulatorio en todo el dominio asociado a un tren de ondas con anomalías negativas sobre el sur de Sudamérica. El segundo y tercer modo explican cada uno entre el 6 y 7 %. Al aplicar la técnica del VARIMAX, se obtiene para el tercer modo las oscilaciones más lentas, mientras que el modo 2 presenta la variabilidad de más alta frecuencia y cierta respuesta vinculada a la variabilidad de la SST sobre el Pacífico oriental y central. La señal del tercer modo de la Figura 3.7 se corresponde con la del segundo modo obtenido para los datos mensuales de la Figura 3.3. Las anomalías positivas se encuentran en el centro del Océano Pacífico tropical, el suroeste del Océano Atlántico y el sur de África, mientras que las anomalías negativas se encuentran sobre el centro del Océano Pacífico Sur y el sureste del Océano Índico (Figura 3.7). En la bibliografía se suele denominar PSA2 [118].

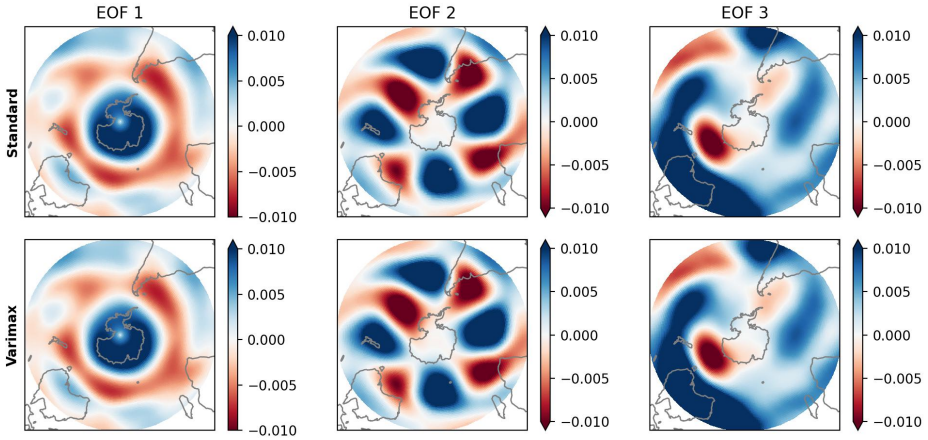


Figura 3.7: Campos de anomalías diarias subestacionales de altura geopotencial (HGT) a 200 hPa para las primeras 3 EOF de forma estándar y rotadas.

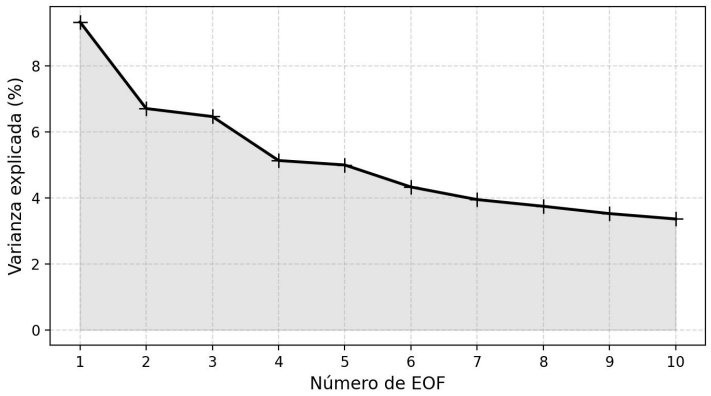


Figura 3.8: Porcentaje de varianza explicada por las EOFs construidas a partir de las anomalías diarias subestacionales de altura geopotencial (HGT) en 200hPa.

En la Figura 3.9 se muestra nuevamente la correlación entre las primeras tres componentes principales y las series temporales de SST en cada punto de retícula, en este caso para los datos diarios. Para el primer panel, se observa nuevamente una patrón coherente con el SAM, en el que hay correlaciones positivas de SST en mayores latitudes del HS y algo negativas en latitudes extratropicales. En el segundo panel, se observa un patrón correspondiente a los años tipo ENSO. Finalmente, los loadings de la tercera EOF son los que presentan una menor correlación con las series temporales de SST diarias.

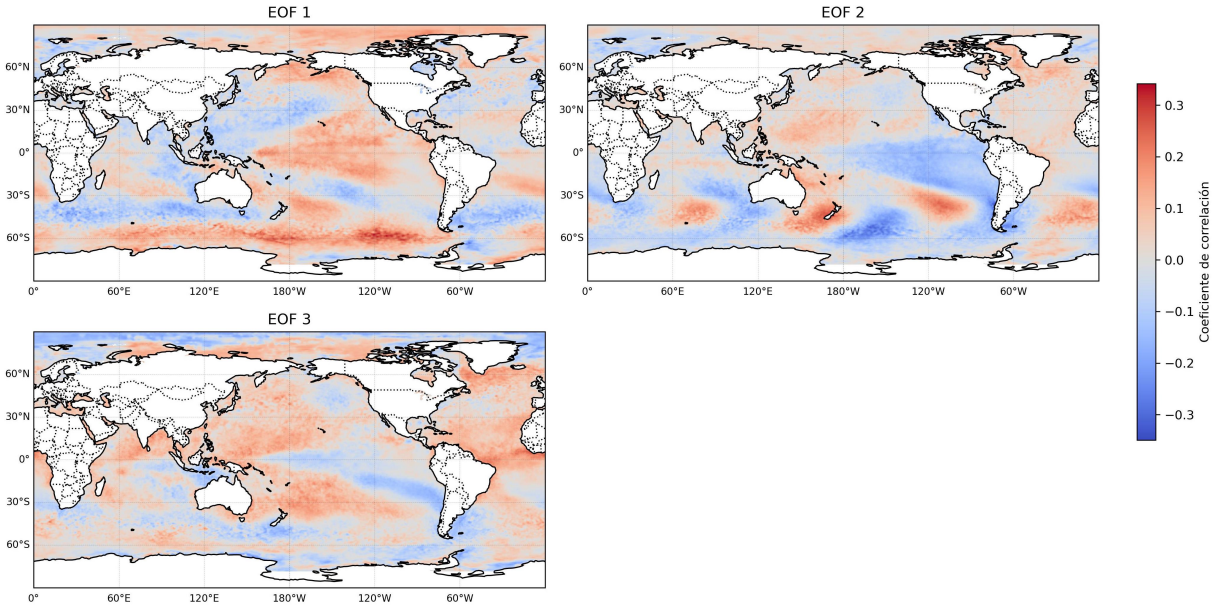


Figura 3.9: Correlaciones de la SST con las tres primeras EOF de anomalías de HGT diarias, ambos en DJF.

El análisis de los principales modos de variabilidad de la circulación estival extratropical del HS revela que tanto en el uso de datos diarios, con la remoción de la variabilidad sinóptica de más alta frecuencia, como datos mensuales se puede describir los aspectos más salientes de la circulación que han sido previamente identificados y descriptos en diversas investigaciones [127, 118]. Estos modos en esta estación han demostrado ser predictibles a partir de simulaciones inicializadas por Osman y Vera [127]. Esto es, la variabilidad que presentan estos modos puede explicarse en mayor medida por la variabilidad en la señal como respuesta al estado de los océanos y otras condiciones del sistema terrestre, y en menor medida al ruido producto de la variabilidad interna. En la siguiente sección se realiza el análisis topológico de la variabilidad descripta por estos tres modos.

3.3. Análisis topológico

¿Qué puede aportar un análisis topológico para complementar el enfoque tradicional basado en métodos de descomposición modal con estrategias intrínsecamente lineales? En esta sección se abordan las dificultades que surgen al intentar extraer la topología de flujos provenientes de simulaciones climáticas de alta dimensionalidad, incluso cuando un número reducido de componentes principales explica gran parte de la variabilidad.

En muchos problemas atmosféricos y oceánicos, la variedad subyacente sobre la que evoluciona el flujo es topológicamente trivial: su homología es equivalente a la de una bola sólida, sin agujeros de dimensión positiva, es decir, una auténtica “no-estructura” topológica. Esta bola sólida es, de hecho, el soporte natural de una evolución completamente aleatoria, no determinista, en la que cada región de un espacio de estados es visitada con igual probabilidad y sin restricciones topológicas impuestas por una ley de evolución.

Para abordar estos casos, esta sección evalúa la utilidad de conceptos ampliamente difundidos en el análisis topológico de datos, como la técnica de homologías persistentes, con el fin de detectar posibles agujeros robustos de dimensión no nula mediante métodos genéricos aplicables a nubes de puntos de cualquier procedencia. Por otra parte, para describir la topología del semi-flujo en ausencia de un complejo BRAMAH propiamente dicho, se propone el concepto de pseudo-templex: un grafo dirigido

construido sobre clústeres de la nube de puntos que codifica las transiciones entre regiones del espacio de estados, permitiendo extraer información sobre la organización del flujo incluso cuando el espacio topológico subyacente es homológicamente trivial.

Si bien no es posible utilizar el pseudo-templex para extraer los generatex, interpretables como modos intrínsecamente no lineales de variabilidad, sus ciclos independientes permiten evaluar cuán lejos de un comportamiento aleatorio se encuentra un flujo y compararlo con otros. A diferencia del templex, el pseudo-templex puede construirse sin requerir la ausencia de falsos vecinos y a partir de tramos discontinuos de la dinámica (por ejemplo, considerando únicamente los veranos), como se muestra en el análisis de las anomalías de la circulación austral.

3.3.1. Técnicas de cálculo de homologías

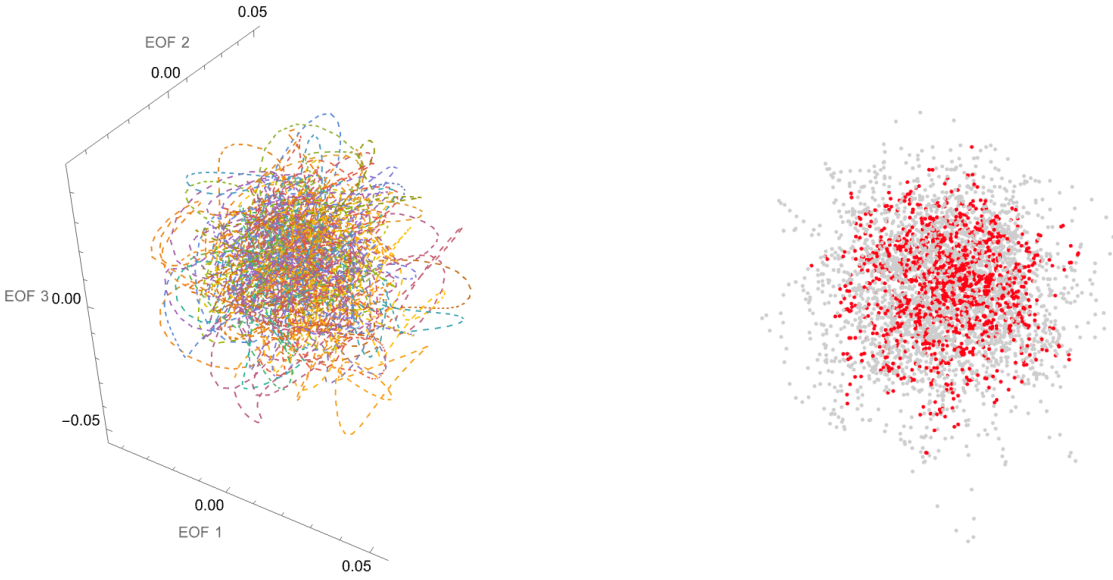
Para comenzar esta sección, se debe recordar que en un análisis exclusivamente homológico, el atractor de Rössler es un espacio topológico con un 0-agujero, un 1-agujero y ningún 2-agujero, indistinguible de una cinta estándar. El atractor de Lorenz es un espacio topológico con un 0-agujero, dos 1-agujeros y ningún 2-agujero, homólogo a una botella de Klein. El caos toroidal de Deng es homológicamente equivalente a una dinámica toroidal cuasi-periódica: ambos casos comparten las homologías de un toro, con un 0-agujero, dos 1-agujeros y un 2-agujero. Esta secuencia de ejemplos muestra que la información proporcionada por los números de Betti resulta muy limitada para describir correctamente la topología de un atractor caótico, tal como se logra mediante el templex. Las homologías solo distinguen ramas de una variedad si están separadas por vacíos de escala suficientemente grande como para que puedan detectarse en términos de agujeros significativos.

El complejo BRAMAH ofrece más detalles que los que se cifran exclusivamente en sus homologías. Permiten identificar *joining locus*, calcular los grupos de torsión y ubicar los generadores de los grupos en la nube original, además de sentar las bases para poder definir el grafo dirigido que completa el templex y las clases de equivalencia que permiten determinar qué ciclos del grafo son topológicamente equivalentes. Los requerimientos para la construcción de un complejo BRAMAH son menos estrictos que los de los métodos basados en la reconstrucción de trayectorias para formar nudos y calcular invariantes como los números de enlace. Exigen, no obstante, trabajar con una resolución temporal relativamente buena que permita dar cuenta de la continuidad de la dinámica que se intenta caracterizar, y con un espacio de estados libre de falsos vecinos. Con los datos mensuales de la circulación austral no se cumple la primera condición. Con los datos diarios, se obtiene una continuidad por tramos que permite explorar el atractor, pero no se cumple la segunda condición, como se verá a continuación.

La Figura 3.10 presenta la nube de puntos correspondiente a los datos diarios: en el panel (a) se muestran las trayectorias tridimensionales para las tres componentes principales, superponiendo los 44 veranos; en el panel (b) se destacan en rojo los falsos vecinos, que cubren prácticamente toda la estructura, siendo más del 30 % de los datos. A pesar de que estas tres componentes principales explican un gran porcentaje de la variabilidad, no fueron calculadas de modo tal que preservaran la topología de la dinámica, dificultando la extracción de información topológica.

Una posible solución para este problema es utilizar algún método de reducción dimensional que preserve la topología. En un trabajo reciente [134], se propone un método de reconstrucción del espacio de estados que procura preservar la topología. El método fue puesto a prueba exitosamente con el atractor espiral de Rössler y otros casos numéricos tridimensionales, pero no ha sido aplicado a casos de mayor complejidad o dimensionalidad, puesto que los números de enlace que se emplean para el análisis topológico no aplican en más de tres dimensiones. El formalismo del templex puede constituir una herramienta valiosa para evaluar estas técnicas de reciente elaboración, puesto que permite codificar todos los detalles fundamentales que caracterizan la doble topología de un atractor: la de la estructura base y la del semi-flujo sobre ella, sin restricciones dimensionales.

Con las herramientas disponibles durante el desarrollo de esta tesis, no resultó posible construir un



(a) (b)

Figura 3.10: (a) En línea punteada, las trayectorias que unen los puntos correspondientes a cada verano (un color por verano) en los valores de los datos diarios, tal como resulta de la descomposición modal utilizando tres EOF. (b) Para la misma nube de puntos, se destacan en rojo los falsos vecinos con un umbral de 10. Su distribución homogénea confirma que las tres EOF representan un subespacio que no preserva la topología de la dinámica original.

complejo BRAMAH y por ende un templex para estos datos. Se explorará a continuación la información topológica parcial que puede extraerse al aplicar un enfoque topológico genérico y sin restricciones dimensionales que surge en 2002 en el marco de la topología computacional, con el objetivo de extraer información topológica robusta a partir de datos discretos, de amplia aplicación en el área de tratamiento de imágenes [135]. La técnica de *homologías persistentes* (PH) [136] propone la obtención de diagramas de persistencia a partir de nubes de puntos de dimensión arbitraria. En términos simples, el enfoque PH extiende la homología clásica a conjuntos de puntos dispersos en $\mathbb{R}^n$, para cualquier n. Para ello se construye una *filtración* de complejos simpliciales que crece con un parámetro de escala ε: inicialmente cada punto es un 0-símplice; cuando la distancia entre dos puntos es menor que ε se agrega la 1-celda correspondiente; y, en general, un k-símplice se incorpora cuando todas sus $(k+1)$ celdas están presentes. Así se obtiene una familia anidada de complejos donde, a medida que ε aumenta, los k-agujeros aparecen y desaparecen. La *persistencia* de un k-agujero se mide por el intervalo de escalas en el que dicho agujero existe: los de 'vida larga' suelen interpretarse como rasgos topológicos robustos, mientras que los efímeros se consideran ruido.

Existen dos implementaciones ampliamente utilizadas para el cálculo de homologías persistentes: *Ripser* [137], especializado en la construcción de complejos Vietoris–Rips [138] y muy eficiente en la reducción de fronteras, disponible en `C++`, `Python` y `Julia`; y *GUDHI* [139], una biblioteca más general de topología computacional que permite trabajar con complejos de varios tipos, con interfaces en `C++` y `Python`. Ambos paquetes constituyen la base de la mayor parte de los cálculos modernos de PH en aplicaciones científicas. La información que se obtiene con estos algoritmos se resume en un diagrama donde la abscisa representa el nacimiento y la ordenada la persistencia de una clase de homología. Puede setearse hasta qué dimensión se calculan los agujeros. En un diagrama de persistencia, la abscisa corresponde al valor del parámetro de filtrado que corresponde al nacimiento de un k-agujero y la ordenada al intervalo de persistencia de dicho agujero. Los puntos sobre la línea punteada de ∞ indican las componentes conexas que nunca se fusionan, mientras que un un umbral horizontal bajo en

persistencia, definido en relación con la escala típica de separación entre puntos, permite descartar los k-agujeros, que se consideran como ruido topológico.

Nótese por último que, en el enfoque PH, ninguno de los complejos generados para ningún valor de ε cumple con la condición fundamental que exige BRAMAH: que la dimensión del complejo coincida localmente con la dimensión de la variedad que subyace a los datos – ver tabla comparativa en el C. En un complejo Vietoris–Rips sobre N puntos, la dimensión máxima teórica es $N-1$, pues con un valor de ε suficientemente grande todos los puntos se conectan y se obtiene un símplice completo de N vértices. Para un atractor de Lorenz visitado por $N = 9000$ puntos, el complejo podría alcanzar formalmente la dimensión 8999, aunque la dinámica subyacente vive en una variedad enramada localmente bidimensional que puede describirse con ocho 2-celdas no simpliciales en un complejo BRAMAH. Este comportamiento es típico de los complejos usados en PH: aun los más geométricos, como *alpha*, producen muchas más celdas que puntos (decenas de miles de 2-celdas para $N = 9000$ puntos) y no respetan la dimensión local de la variedad. Por ello resultan ineficientes para caracterizar la topología de un atractor y para la construcción de un templex, que en el caso del atractor de Lorenz puede lograrse con un complejo BRAMAH reducido de tan solo ocho 2-celdas.

Tanto la nube original como filtrada por densidad son equivalentes a una bola sólida. No hay filtro que haya permitido, como sí ocurrió en el estudio de los regímenes meteorológicos, distinguir 1-agujeros persistentes que superen claramente el umbral de ruido topológico. Cabe aclarar que en el estudio de Micieli tampoco se detectan 1-agujeros relevantes en el espacio de las tres componentes principales que describen la dinámica del jet subpolar: la clave estructural la provee el índice de latitud del jet. En el caso de la circulación austral no existe una variable equivalente que permita facilitar la detección de una estructura topológica persistente no trivial. El análisis PH en términos de las tres componentes principales para la circulación austral indica que la variedad subyacente no es distinguible de una bola rellena, sin cavidades de ningún tipo.

La escasa aptitud de PH para caracterizar una dinámica a partir de una nube de puntos puede morigerarse mediante estrategias suplementarias, como los filtros por rangos de densidad de puntos para favorecer la detección de agujeros significativos. En el estudio topológico de la dinámica subestacional del jet subpolar sobre Sudamérica realizado en la tesis de licenciatura de Marco Micieli [140], se exploraron los 0-agujeros en las zonas más densas de la nube para identificar posibles nodos asociados a joining loci, y se buscaron los ciclos representativos de los 1-agujeros en el 10 % menos denso. La clave del éxito de esta estrategia radica no obstante en una variable que condensa rasgos esenciales de la dinámica del jet subpolar: el índice de latitud del jet. Si esta variable se omite y se utilizan solo las tres componentes principales que explican un alto porcentaje de la variabilidad, se cae en diagramas de persistencia similares al que mostraremos para la circulación austral. Lamentablemente, en el caso de las anomalías de la circulación atmosférica en el Hemisferio Sur no existe una variable equivalente al índice de latitud del jet que permita facilitar la detección de una estructura topológica persistente no trivial mediante el uso de distintos bins de densidad.

La Figura 3.11 muestra los diagramas de persistencia obtenidos para los veranos de la circulación austral, junto con la representación tridimensional de la nube de puntos filtrada por densidad. En los diagramas superiores, los puntos azules ($\mathscr{H}_0$) representan componentes conexas y los puntos naranjas ($\mathscr{H}_1$) representan 1-agujeros detectados en la nube. En la nube original aparece un único punto naranja ligeramente separado del resto, asociado a un 1-agujero efímero generado por la capa exterior de la esfera sólida, sin relevancia topológica concreta. Los filtros por densidad progresivamente eliminan el ruido periférico, pero no revelan 1-agujeros persistentes ni robustos que superen claramente el umbral de ruido topológico. Tanto la nube original como las versiones filtradas son homológicamente equivalentes a una esfera sólida, es decir, a una bola rellena sin cavidades internas. La única estructura persistente que se observa corresponde a esta bola sólida, que coincide con la base homológica esperada para una visita puramente azarosa del espacio de estados.

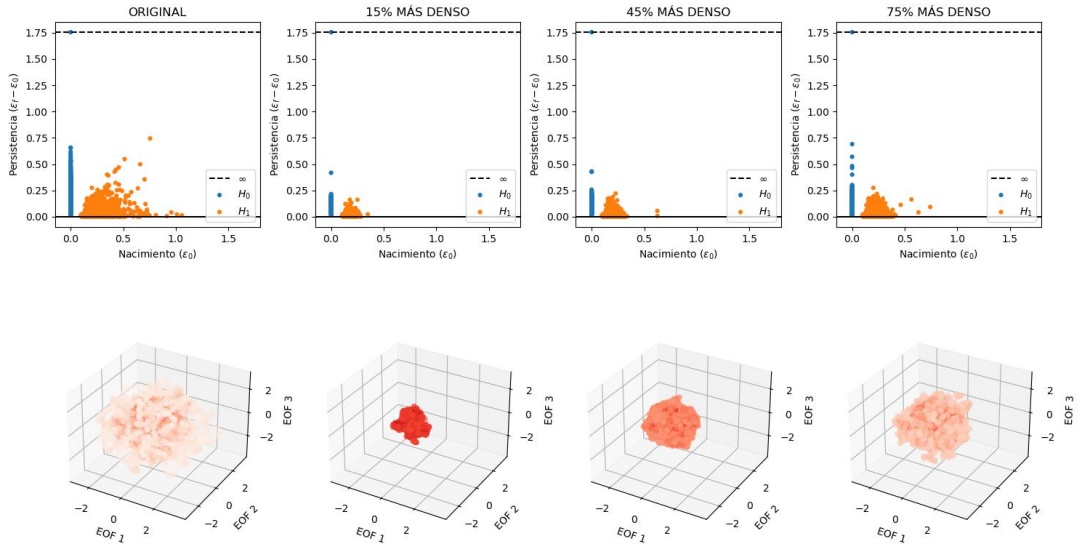


Figura 3.11: Diagramas de persistencia obtenidos con *Ripser* en `C++` (arriba) y nubes de puntos tridimensionales correspondientes (abajo) para la circulación austral, utilizando distintos bins de densidad: nube original y filtrados al 15 %, 45 % y 75 % más densos. Los puntos azules ($\mathscr{H}_0$) indican componentes conexas y los naranjas ($\mathscr{H}_1$) indican 1-agujeros. La estructura persistente observada es equivalente a una esfera sólida, sin cavidades internas.

3.3.2. Hacia un pseudo-templex

La mayor dificultad computacional para la construcción de un templex en nubes de puntos provenientes de simulaciones de alta dimensionalidad reside principalmente en la construcción de las caras de las d-celdas no simpliciales ensambladas entre sí que representan la variedad localmente d-dimensional. Surge entonces la pregunta de si es posible evitar ese paso. De aquí nace la idea de calcular un *pseudo-templex*, es decir, un grafo dirigido definido sobre los centroides de una clusterización de la nube de puntos. Los clústeres cumplen un rol similar al de las celdas de máxima dimensión del complejo BRAMAH, pero sin caras ni bordes definidos.

En esta sección se presenta una primera incursión en la definición y construcción de un pseudo-templex, ilustrada con el atractor de Lorenz y los tres EOF de la circulación austral. Ambos ejemplos utilizan nubes tridimensionales, pero la clusterización puede realizarse en espacios de cualquier dimensión. Es claro que sería preferible analizar la simulación climática sin falsos vecinos: al trabajar únicamente con las tres componentes principales calculadas en la primera parte de este capítulo, lo que se analiza no es la estructura topológica de la dinámica original, sino su proyección en el espacio de las tres componentes estadísticamente más representativas. Con estas limitaciones, se mostrará que las propiedades entrópicas del pseudo-templex indican que el semi-flujo tiene un alto nivel de desorden, pero está lejos de ser asimilable a una evolución completamente aleatoria.

La evaluación de las propiedades del pseudo-templex es preliminar y queda pendiente, por supuesto, un desarrollo ulterior con marcos conceptuales extendidos, como por ejemplo incorporando la noción de persistencia al concepto de generatex [141].

Pseudo-templex para el atractor de Lorenz

¿Cuál es el número de clústeres ideal para construir un pseudo-templex? Es posible ensayar una respuesta a partir del conocimiento adquirido con los templex ya construidos. Es sabido que, si el complejo BRAMAH se construye correctamente, las propiedades del templex no dependen del número de 2-celdas que lo componen. Por otra parte, también se sabe que, en el caso del atractor de Lorenz, existe un número mínimo de ocho 2-celdas para construir el templex reducido, que luego se descompone en las unidades fundamentales que lo conforman. No obstante, tomar un número inferior a ocho podría llevar a una estructura sobresimplificada.

En el caso extremo de un solo clúster (equivalente a una única d-celda), el grafo dirigido se reduce a un nodo que se mapea sobre sí mismo, sin aportar información de interés. Un complejo BRAMAH de una sola 2-celda puede describir estructuras como un cilindro, un toro, una superficie esférica o una botella de Klein, ya que la información topológica reside en sus caras (1-celdas); sin embargo, al omitir la construcción de las caras, esa información se pierde. En general, siempre que la resolución temporal permita una nube de puntos donde los puntos consecutivos no presenten saltos bruscos entre regiones alejadas del espacio de estados, puede elegirse un número de clústeres muy inferior al de puntos de la nube.

A continuación se presenta el pseudo-templex obtenido para el atractor de Lorenz con veinte clústeres sobre una nube de 9000 puntos. Las Figuras 3.13 y 3.12 muestran el resultado. Si bien el grafo presenta defectos en la zona de juntura, debido a que los clústeres se forman sin diagnóstico sobre la distribución de los puntos en torno a cada centroide, el grafo reproduce la estructura topológica de las dos alas y la circulación del flujo entre ellas. Como las celdas no tienen bordes, no es posible calcular la *joining line* ni, en consecuencia, definir clases de equivalencia para los ciclos del grafo que permitan identificar los generatex.

El grafo dirigido posee un total de 56 ciclos simples. Para caracterizar de manera compacta la estructura de ciclos, se considera el espacio de ciclos dirigido sobre $\mathbb{Z}_2$, definido como el núcleo de la matriz de incidencia dirigida tomada módulo 2. La dimensión de este espacio es 13, lo que proporciona un conjunto generador mínimo de ciclos cuyas combinaciones lineales (mod 2) permiten reconstruir todos los

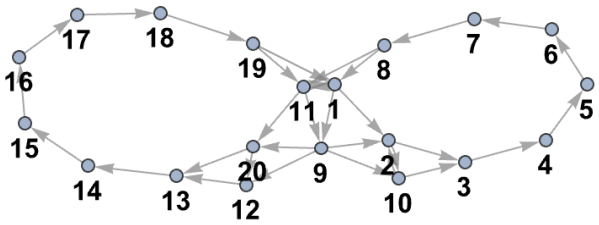


Figura 3.12: Grafo del pseudo-templex construido con 20 clústeres para el atractor de Lorenz.

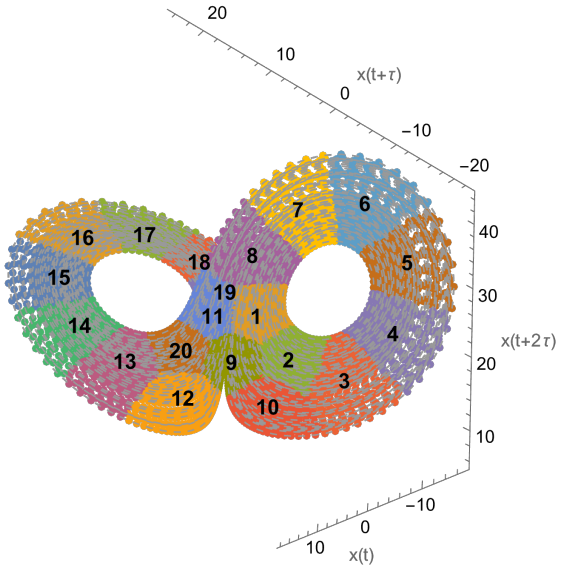


Figura 3.13: En colores, los 20 clústeres numerados de la nube de 9000 puntos que se utilizan para la construcción del pseudo-templex del atractor de Lorenz.

ciclos dirigidos del grafo. Como era de esperar, este número sigue siendo mayor que los tres *generatex* que caracterizan al auténtico templex del atractor de Lorenz.

La Figura 3.14 muestra la variación del número de ciclos con el número de clústeres. El número de ciclos simples (curva verde) crece rápidamente por combinatoria a medida que aumenta la cantidad de clústeres. En cambio, la dimensión del espacio de ciclos sobre $\mathbb{Z}_2$ (curva violeta) indica el número mínimo de ciclos independientes en el grafo dirigido, sin interpretación topológica directa, ya que en un pseudo-templex no existen clases de equivalencia entre ciclos. La oscilación entre 2 y 3 generadores para bajos números de clústeres refleja la simplificación combinatoria de la estructura del grafo y no guarda relación con los tres *generatex* del templex auténtico. Queda pendiente, para trabajos futuros, estudiar si es posible dotar al pseudo-templex de algún método alternativo que permita definir pseudo-generatex.

Pseudo-templex para la circulación austral

A continuación presentamos un ejemplo de pseudo-templex construido a partir de la circulación atmosférica austral, proyectada en el espacio de las tres primeras componentes principales (EOFs). La nube de puntos contiene 3990 estados diarios, distribuidos en la base EOF tridimensional. La clusterización en 20 clústeres, mostrada en la Figura 3.15, proporciona los nodos para la construcción del grafo dirigido.

El grafo resultante, presentado en la Figura 3.16, evidencia una conectividad densa y es compatible con una variedad subyacente con una estructura topológica trivial, equivalente a una esfera sólida, indistinguible de la que podría presentar una dinámica aleatoria, no determinista. Si bien el número de ciclos

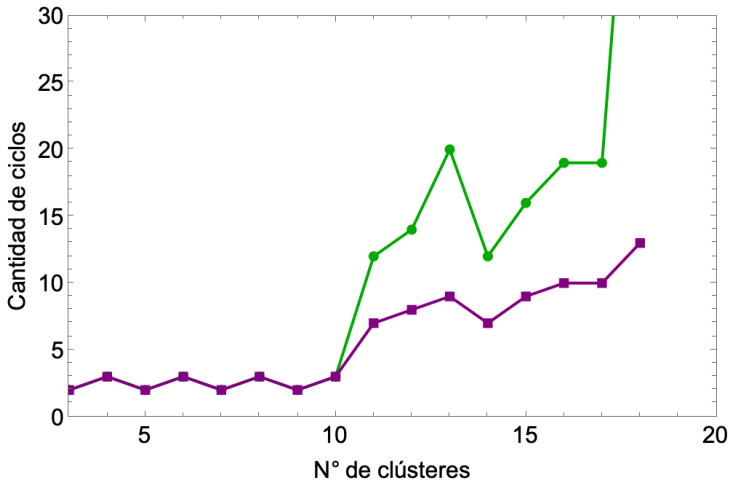


Figura 3.14: Variación del número de ciclos simples (verde) y de generadores del espacio de ciclos sobre $\mathbb{Z}_2$ (violeta) con el número de clústeres en un pseudo-templex para el atractor de Lorenz a partir de una nube de 9000 puntos.

simples para el pseudo-templex de 20 clústeres es de más de 19 millones, la dimensión del espacio de ciclos sobre $\mathbb{Z}_2$ es 100. Esto indica que, aunque el número de ciclos simples crece de manera explosiva por combinatoria, como muestra la Figura 3.18, el número mínimo de ciclos independientes sigue siendo mucho más reducido; y notablemente inferior al número de ciclos independientes que presenta un grafo completamente conectado de 20 nodos, que es de 361 (ver Figura 3.17). En otros términos, si bien las homologías de una bola rellena son compatibles con un desorden de carácter aleatorio, el semiflujo codeado por el pseudo-templex da cuenta de un cierto nivel de determinismo, que está seguramente sobreestimado debido a la alta población de falsos vecinos.

En general, un grafo dirigido completo sin autobucles (*lazos*) y con N_c nodos posee

$$|E| = N_c(N_c - 1)$$

aristas. La matriz de incidencia dirigida tiene rango $N_c - 1$ sobre $\mathbb{Z}_2$, por lo que la dimensión de su espacio de ciclos es

$$|E| - (N_c - 1) = N_c(N_c - 1) - (N_c - 1) = (N_c - 1)^2.$$

Para $N_c = 20$, esto da

$$(20 - 1)^2 = 361.$$

Este valor sirve como referencia para evaluar cuán lejos está el pseudo-templex de una conectividad y un desorden combinatorio completamente aleatorios: sus 100 ciclos independientes representan menos de un tercio del máximo posible para un grafo completo de 20 nodos.

3.4. Conclusiones

El análisis desarrollado en este capítulo pone de relieve las dificultades inherentes a la extracción de información topológica a partir de simulaciones climáticas de alta dimensionalidad. Aun cuando un número reducido de componentes principales explica un porcentaje significativo de la varianza de la circulación austral, la proyección de los datos en dicho subespacio no preserva la topología de la dinámica original. La presencia masiva de falsos vecinos evidencia que las EOF, si bien son óptimas para la descripción estadística de la varianza, no constituyen una base adecuada para reconstruir el espacio de estados desde el punto de vista topológico.

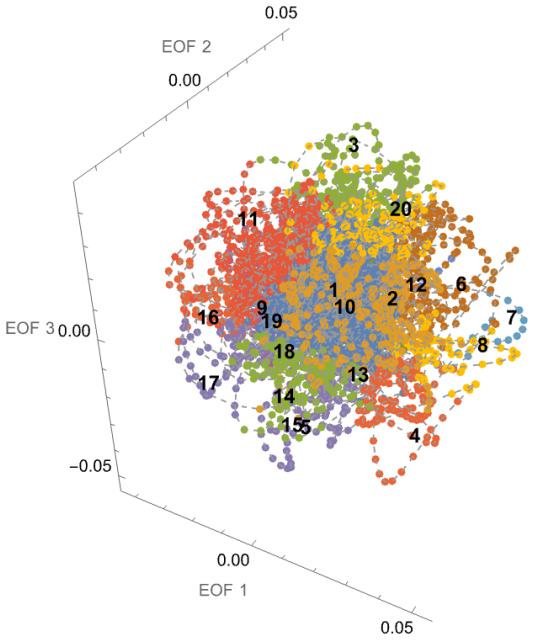


Figura 3.15: Distribución de los 3990 estados diarios proyectados en el espacio de las tres primeras EOFs del Hemisferio Sur, clusterizados en 20 grupos. Cada color identifica un clúster y el número indica el índice asignado al nodo correspondiente del pseudo-templex.

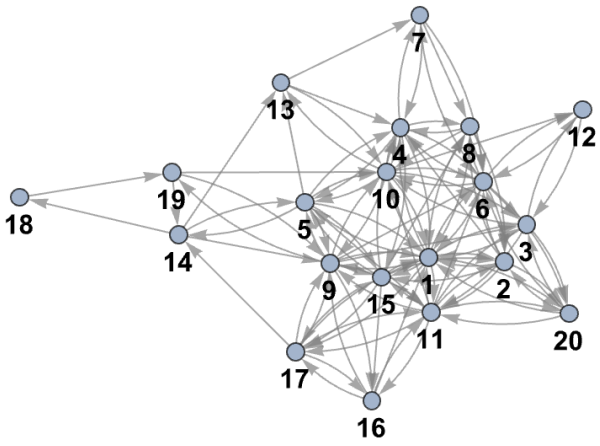


Figura 3.16: Grafo dirigido del pseudo-templex construido a partir de los 20 clústeres de la circulación atmosférica austral. Cada nodo representa un clúster y las aristas codifican las transiciones consecutivas de la trayectoria entre clústeres.

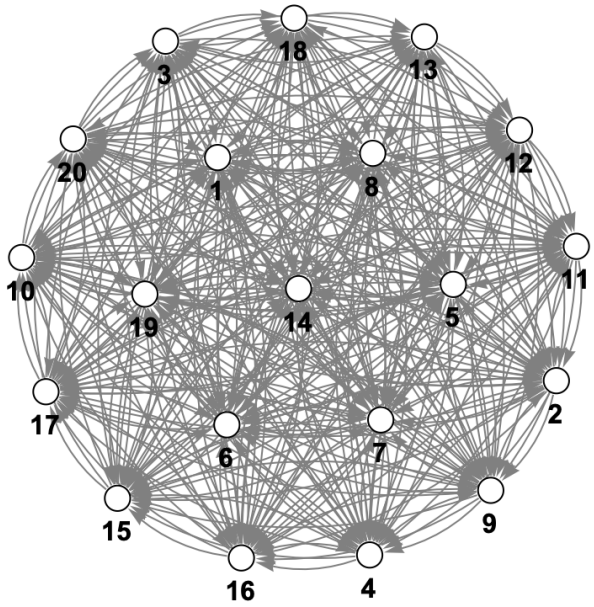


Figura 3.17: Grafo completo dirigido de 20 nodos sin autobucles (*lazos*). Su espacio de ciclos sobre $\mathbb{Z}_2$ tiene dimensión $(20-1)^2 = 361$, que corresponde al número de ciclos independientes.

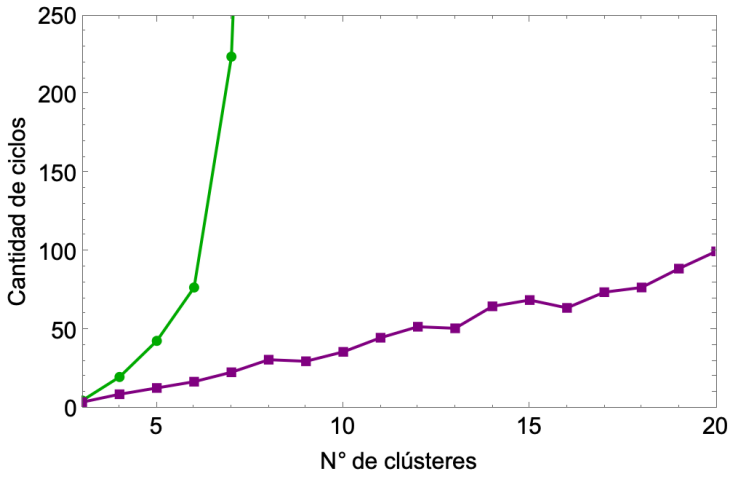


Figura 3.18: Variación del número de ciclos simples (verde) y de generadores del espacio de ciclos sobre $\mathbb{Z}_2$ (violeta) con el número de clústeres en un pseudo-templex para la nube de 3990 puntos de la circulación austral.

La aplicación de homologías persistentes confirma este diagnóstico: la nube de puntos, tanto en su forma original como bajo filtrado por densidad, resulta homológicamente equivalente a una bola rellena, sin cavidades de dimensión positiva. En ausencia de un complejo BRAMAH viable, no se obtienen *generatex* ni una estructura topológica no trivial que restrinja la dinámica. Este comportamiento contrasta con el de atractores caóticos de baja dimensión, donde los agujeros topológicos y los *joining loci* aportan información estructural esencial sobre el flujo subyacente.

Ante esta limitación, se introdujo el concepto de *pseudo-templex* como herramienta exploratoria para caracterizar la organización del semi-flujo incluso en un escenario de no-estructura topológica de base. Los grafos dirigidos construidos sobre clústeres de la nube de puntos permiten cuantificar el grado de ordenamiento de las trayectorias mediante el análisis de ciclos simples y la dimensión de su espacio de ciclos sobre $\mathbb{Z}_2$. En el caso de la circulación austral, el pseudo-templex revela un comportamiento desordenado en relación con el número de ciclos que se obtiene para el pseudo-templex del atractor de Lorenz, tomado como referencia, aunque claramente lejos de un ruido puramente estocástico. Este resultado sugiere que, aun sin estructura topológica discernible, persisten trazas de organización dinámica que distinguen al sistema de una evolución aleatoria.

En síntesis, este capítulo muestra que:

(1) La reducción dimensional basada en PCA describe la varianza de la circulación, pero no garantiza preservar la topología de la dinámica.

(2) Las homologías persistentes confirman la ausencia de agujeros significativos, validando que la variedad subyacente es homológicamente trivial.

(3) El pseudo-templex ofrece un marco preliminar para evaluar el grado de ordenamiento del semi-flujo en un escenario de no-estructura topológica de base, constituyendo una herramienta útil para comparaciones y diagnósticos de desorden relativo.

Como perspectiva, el formalismo del templex se perfila como un marco ideal para validar métodos que buscan realizar una reducción dimensional preservando la topología. Estos métodos no podrán evaluarse con técnicas de homologías persistentes como afirman los autores, puesto que las homologías por sí solas proveen información insuficiente para caracterizar adecuadamente el flujo sobre una variedad enramada. Es precisamente a través de un formalismo como el del templex que puede verificarse de manera rigurosa si una reconstrucción del espacio de fases respeta la doble topología de un atractor: la de la estructura base y la del semi-flujo que la recorre.

Conclusiones

Esta tesis propone nuevos desarrollos y aplicaciones del formalismo del templex como herramienta matemática para analizar dinámicas regulares y caóticas, distinguiendo distintos tipos de caos en términos combinatorios de unidades topológicas fundamentales. Los casos de estudio incluyen atractores caóticos paradigmáticos –como el atractor de Lorenz de 1963 (en adelante, Lorenz)–, modelos climáticos de baja dimensión tanto de la atmósfera como del océano, y, por último, resultados de simulaciones climáticas de alta dimensión. Los ejemplos considerados no se limitan a aplicar la técnica o los desarrollos teóricos: también enriquecen de manera gradual la interpretación conceptual, que incorpora nociones como propiedades activas, pseudo-templex y la asignación de propiedades métricas a las celdas del templex, conformando un enfoque híbrido métrico-topológico. El trabajo se organiza en tres capítulos.

El primero retoma la conjetura formulada por Otto Rössler hace más de medio siglo, según la cual toda dinámica caótica puede descomponerse en dos tipos de unidades. La tesis proporciona por primera vez un formalismo matemático que sustenta esta hipótesis mediante reglas capaces de reducir el número de celdas de mayor dimensión en un templex y descomponerlo en varios subtemplex que, según sus características, pueden clasificarse como unidades oscilantes (O-unidades) o conmutantes (S-unidades). El tipo, número y modo de combinar estas unidades mediante celdas que aseguran los enlaces sienta las bases para una taxonomía topológica que ordena la diversidad de dinámicas caóticas en términos de estas unidades constitutivas. Las unidades S son condición *sine qua non* para dar cuenta de una dinámica caótica. El procedimiento de reducción se implementa algorítmicamente, junto con la discriminación del tipo de unidades. Para mejorar el preprocesamiento de nubes de puntos, se aporta además un algoritmo de detección de falsos vecinos cercanos en el espacio de estados, de gran importancia en análisis topológicos para sistemas dinámicos de dimensión mayor que tres. Estos aportes fueron publicados en un artículo destacado por la revista Chaos [33].

El segundo capítulo implementa la metodología del templex al análisis topológico de tres modelos climáticos de baja dimensión: el sistema dinámico para variables de distinta escala propuesto por Edward N. Lorenz en 1996, un modelo simplificado del El Niño–Oscilación del Sur (ENSO) propuesto por Michael Ghil y Ning Jiang en 1998, y un modelo de la Circulación Meridional de Retorno del Atlántico (AMOC) propuesto por Florian Sévellec y Alexey V. Fedorov en 2013.

En el caso de Lorenz 96, el análisis topológico muestra que el atractor que producen cuatro variables de gran escala puede descomponerse en cinco unidades fundamentales. Las variables de pequeña escala alteran esta estructura, eliminando las ramas menos pobladas y difuminando los puntos en las ramas que sobreviven, impidiendo así la localización de la joining line. El efecto difuminador de las pequeñas escalas sobre la estructura topológica de gran escala requiere un refinamiento del formalismo que será abordado en trabajos ulteriores, cuyo objetivo será incorporar un diagnóstico topológico en asimilación de datos, apelando como complemento a técnicas de aprendizaje automático.

Como modelo simplificado del ENSO, se utiliza un sistema de tipo Lorenz acoplado unidireccionalmente a un oscilador armónico que introduce el ciclo estacional. Se demuestra que la estructura del flujo del atractor de Lorenz clásico se preserva bajo este forzante, aunque se produce un engrosamiento del atractor. El templex formado por 3-celdas permite abordar la descripción del atractor engrosado. La diferencia entre el Lorenz sin y con forzante se manifiesta en las dimensiones de las celdas del complejo:

el joining locus pasa a estar representado por celdas superficiales. La estructura del grafo dirigido no cambia para ninguna de las frecuencias de forzado analizadas. Las celdas volumétricas entrantes al joining locus permiten construir matrices de transición de Markov. Estas matrices cuantifican el efecto del forzante sobre las transiciones entre las alas engrosadas del atractor para distintos valores de frecuencia del oscilador. El análisis muestra cómo el enfoque templex, que separa y a la vez mantiene vinculadas la topología de la variedad enramada y del flujo que la recorre, permite capturar los efectos topológicos de una modulación estacional sobre una dinámica caótica.

El estudio del modelo AMOC constituye una aplicación del templex al análisis de una dinámica con puntos de inflexión o *tipping points* climáticos. Se analizan tanto el modelo autónomo de 2013 como el no autónomo que se introduce en 2015 para incorporar el rol de la extensión media del hielo marino. El examen topológico comparado de las series temporales de los dos casos conduce a la introducción del concepto de *propiedades activas* del templex, que permiten otorgarle un estatus transitorio a los invariantes topológicos, cuando coexisten en un templex fases dinámicas bien diferenciadas. Esta noción permite identificar *puntos de inflexión topológicos* asociados a cambios en los rasgos topológicos activos. Los resultados fueron comparados con los obtenidos previamente a través de cálculos pullback realizados sobre grandes conjuntos de simulaciones numéricas por los autores de este modelo para el caso no autónomo, evidenciando la relevancia de la definición de propiedades activas para atractores con explosiones caóticas. Este trabajo también fue publicado en la revista Chaos [57].

El tercer capítulo extiende el análisis topológico al estudio de simulaciones climáticas de alta dimensión, en particular aquellas que describen la circulación troposférica del Hemisferio Sur. La dificultad principal en este caso de estudio radica en que los tres modos principales obtenidos por análisis EOF, que explican una gran parte de la varianza, no preservan la topología de la dinámica original. Es conocido que los métodos de descomposición modal y reducción dimensional convencionales no garantizan fidelidad topológica. La presencia y distribución de falsos vecinos en la nube de puntos analizada en esta tesis indica que el subespacio desplegado por las tres componentes principales no es representativo de la estructura del atractor. Este es un rasgo típico de las simulaciones climáticas de alta dimensión en modelos que involucran millones de variables. A pesar de las restricciones físicas que limitan la dinámica a un número relativamente pequeño de patrones, no existen métodos de descomposición en componentes principales –aun en sus versiones adaptadas para casos no lineales– que garanticen fidelidad topológica en escenarios de alta dimensión.

La dificultad para la construcción de un complejo BraMAH que represente correctamente la variedad enramada subyacente al juego de datos de la circulación austral está dada, como fue dicho anteriormente, por la alta cantidad de falsos vecinos que presenta la nube de puntos. Se implementa en su defecto un análisis con homologías persistentes que –por su carácter genérico– no presenta requerimiento alguno. El diagrama de persistencia confirma que la nube de puntos es homológicamente trivial –equivalente a una bola sólida. Para aportar una descripción topológica parcial del semi-flujo, se propone el concepto de *pseudo-templex*, una construcción basada en clústeres que hacen las veces de las celdas sin bordes del complejo y que permite definir el grafo dirigido sobre los centroides de los clústeres. Esta herramienta no permite recuperar los detalles que ofrece un templex; habilita, por ejemplo, un análisis de los ciclos independientes en el grafo resultante en función del número de clústeres considerados, o de otras cantidades como su entropía topológica. Utilizando como referencia el pseudo-templex para el atractor de Lorenz, se concluye que el flujo proyectado en los tres EOFs que dan cuenta de una gran parte de la varianza para la circulación austral presenta un grado intermedio de organización, claramente diferenciable de una dinámica puramente estocástica. Esta metodología ofrece una vía preliminar, menos precisa pero con menos requerimientos que el templex, para estudiar flujos caóticos en sistemas dinámicos de alta dimensión, incluso cuando no se disponga de un complejo celular representativo de la estructura topológica de la variedad enramada que lo contiene.

Finalmente, la tesis propone que el templex y sus propiedades (agujeros de distintas dimensiones, torsiones, joining loci, generatex, stripex, twists, unidades-O, unidades-S) pueden servir como criterio

de validación para métodos de reducción dimensional que buscan preservar la topología. A diferencia de las homologías persistentes, que no capturan ni las torsiones, ni los joining loci, ni la organización del flujo sobre una variedad, el templex permite verificar la preservación de la doble topología de un atractor: la de la estructura base y la del semi-flujo que la recorre.

En conjunto, los resultados de esta tesis constituyen una prueba de la relevancia de la interdisciplina, y en particular de la interacción entre la topología algebraica, la teoría de sistemas dinámicos y las ciencias del clima. Gracias a los desarrollos y análisis aquí presentados, el enfoque templex se posiciona como una herramienta que no solo complementa los métodos métricos (no topológicos) en la ciencia no lineal, sino que también potencia las técnicas genéricas disponibles dentro del ámbito del análisis topológico de datos. La construcción paralela de conceptos guiada por las necesidades de las aplicaciones, junto con los esfuerzos por proveer herramientas rigurosas para responder a preguntas cruciales en ciencias de la Tierra, contribuyen al desarrollo de un marco teórico consistente, capaz de definir con precisión y detectar cambios abruptos o eventos extremos en el sistema climático desde una perspectiva matemática novedosa.

Agradecimientos

A Dante, Joaquín y Francisco, por ser mi casa todo este tiempo.
A Gise, por la ayuda y la paciencia.
A Marisol y Juan J. R., por todo el apoyo.
A Pedro, Joaquín, Brenda, Juan Cruz, Mora y Juan por acompañarme en este camino.

Apéndice A

Cómputo de grupos de homología

A continuación se describirá el cómputo algebraico de los grupos de homología para un complejo no necesariamente simplicial. A partir de la definición de los grupos de homología $\mathscr{H}_k(\mathbb{K})$ del complejo $\mathbb{K}$, la construcción de estos invariantes escalonados para un complejo $\mathbb{K}$ orientado puede obtenerse algorítmicamente [142].

Primero, se debe orientar uniformemente al complejo $\mathbb{K}$, y seguir una serie de pasos para cada nivel k, empezando por la dimensión más alta y luego ir decreciendo hasta llegar a la dimensión 0. Siguiendo estos cinco pasos para cada nivel k, las operaciones que se realizan son:

(1) Listar todas las k-celdas del complejo $\mathbb{K}$ orientado uniformemente y calcular su borde ∂. Para realizar esto se construye una matriz de mapas de bordes ∂, la que se llama M.

(2) Calcular Z_k como el núcleo de M^T.

(3) Calcular B_k como las filas linealmente independientes de la matriz de mapa de bordes de las $(k+1)$-celdas.

(4) Expresar los elementos de B_k (las k-fronteras) en términos de los elementos de Z_k (los k-ciclos) para determinar cuáles k-ciclos son homólogos a otros.

(5) Acumular en $\mathscr{H}_k$ aquellos k-ciclos que sean homológicamente independientes.

Es posible entonces decidir cuándo dos espacios topológicos son equivalentes gracias a la invarianza de los grupos de homología: superficies topológicamente equivalentes tienen grupos de homología isomorfos.

A.1. Cálculo de los grupos de homología para la botella de Klein y un toro

Tómese la botella de Klein mostrado de la Figura A.1. Se proporciona un complejo celular con cuatro celdas de dimensión 2 σ_i $(i = 1,\ldots,4)$, nueve celdas de dimensión 1 (a, b, c, d, e, f, g, h, i) y cinco celdas de dimensión 0 ($\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle$). Las etiquetas repetidas en el diagrama planar indican instrucciones de pegado. Obsérvese que, con el mismo conjunto de celdas y etiquetas pero cambiando algunas de sus posiciones y direcciones, se puede obtener un toro, como se muestra en la Figura A.2.

Dos k-cadenas son homólogas si su diferencia es la frontera de alguna $(k+1)$-cadena.
En este ejemplo, c, f y e cumplen que $c+f \sim e$, ya que $c+f-e = \partial(\sigma_2)$. La celda σ_2 actúa como un puente entre los bordes $c+f$ y e, lo que implica que cualquier información transportada por $c+f$ también está representada por e, y viceversa. Esta relación de equivalencia homológica conduce a la definición de grupos de homología.

Para un complejo dirigido $\mathbb{K}$, el grupo de homología k-dimensional de $\mathbb{K}$ es el cociente $\mathscr{H}_k(\mathbb{K}) = Z_k(K)/B_k(\mathbb{K})$, es decir, el grupo de clases de equivalencia de elementos de $Z_k(\mathbb{K})$ bajo la relación de homología.

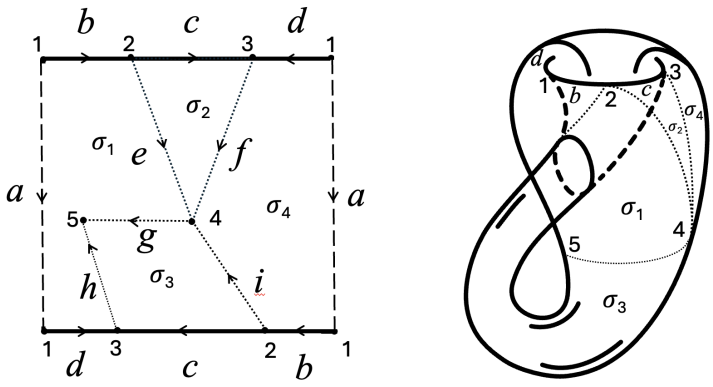


Figura A.1: Un complejo celular $\mathbb{K}$ con cuatro celdas 2-dimensionales σ_i $(i = 1 \ldots 4)$ para una botella de Klein. Las etiquetas repetidas en el diagrama planar indican instrucciones de pegado para formar la botella de Klein en cuatro dimensiones.

Celda	Vértices
σ_1	1, 2, 4, 5, 3
σ_2	2, 3, 4
σ_3	5, 4, 2, 3
σ_4	3, 1, 2, 4

Los ciclos homológicamente independientes de dimensión k forman los generadores k-dimensionales de $\mathscr{H}_k$, también llamados agujeros k-dimensionales. El número de Betti de orden k, denotado β_k, es el rango de $\mathscr{H}_k$, es decir, el número de elementos en una base. En términos simples, β_0 indica el número de componentes conexas, β_1 el número de lazos cerrados que rodean agujeros, y β_2 el número de cavidades cerradas. Los generadores permiten identificar cada componente conexa, agujero o cavidad.

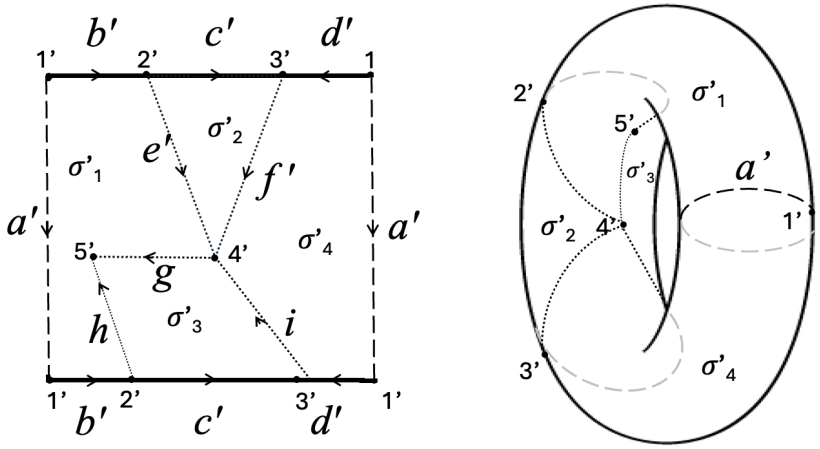


Figura A.2: Un complejo celular $\mathbb{K}'$ con cuatro celdas 2-dimensionales σ'_i $(i = 1 \ldots 4)$ para un toro. Las etiquetas repetidas indican instrucciones de pegado para formar la superficie toroidal en tres dimensiones.

Para el complejo celular de la botella de Klein, hay un solo generador de orden 0, es decir, una

componente conexa: $\beta_0(\mathbb{K}') = 1$, $\mathscr{H}_0(K) \sim \mathbb{Z}$ con base $\{\langle 1\rangle\}$. En orden 1, $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}') \sim \mathbb{Z}$ con base $\{a\}$ y $\beta_1(K) = 1$. Finalmente, $\mathscr{H}_2(\mathbb{K}') \sim 0$, por lo que $\beta_2(\mathbb{K}') = 0$. Además, dado que $(b+c-d)$ debe recorrerse dos veces para formar un ciclo, la superficie presenta un coeficiente de torsión igual a 2.

El toro tiene números de Betti $\beta_0(\mathbb{K}') = 1$, $\beta_1(K') = 2$ y $\beta_2(\mathbb{K}') = 1$. Más precisamente, $H_0(\mathbb{K}') \sim \mathbb{Z}$ con base $\{\langle 1\rangle\}$, $\mathscr{H}_1(\mathbb{K}') \sim \mathbb{Z}^2$ con base $\{a', b'+c'-d'\}$ (dos agujeros de orden 1), y $\mathscr{H}_2(\mathbb{K}') \sim \mathbb{Z}$ con base $\{\sigma'_1+\sigma'_2+\sigma'_3+\sigma'_4\}$, que encierra la cavidad. El toro no presenta coeficientes de torsión.

Apéndice B

Reconstrucción del espacio de estados

En sistemas dinámicos caóticos que ocurren de manera natural o que son estudiados experimentalmente, el espacio de estados y una descripción matemática explícita del sistema suelen ser desconocidos. En estos casos, se han desarrollado métodos de reconstrucción de atractores como una vía para reconstruir el espacio de estados y construir nuevos modelos predictivos. Para ello, es necesario observar una o más señales del sistema en función del tiempo, utilizando las series temporales resultantes para construir un sustituto de los estados del sistema. Esto es posible a merced del Teorema de Takens. El teorema de Takens [35] afirma que un sistema dinámico en $\mathbb{R}^n$ genera una solución en una variedad de dimensión n en $\mathbb{R}^n$, siendo una variedad un espacio topológico en el cual cada punto tiene una vecindad que es homeomorfa a una n-bola o a la mitad de una n-bola, esto último para permitir variedades con bordes [143]. Un escalar genérico observable $s(t)$ puede ser usado para crear una nueva representación de la dinámica en $\mathbb{R}^k$ por el mapeo. La imagen de este mapeo está contenida en un subespacio n-dimensional en $\mathbb{R}^k$ si $k \geq n$. Es por esto que toma especial relevancia saber si este embebido generado por $\{s_k\}$ permite describir unívocamente el sistema. Si esto no sucede estamos en presencia de un punto que realmente corresponde a dos situaciones dinámicas diferentes, por lo que aparecerá necesariamente una intersección de las trayectorias dibujadas en el candidato a embebido.

El análisis topológico de datos parte precisamente de una serie temporal [35]. Los métodos topológicos permiten reconstruir completamente el espacio de estados a partir de la serie temporal disponible. A continuación, se presentan algunos de estos métodos, que permiten dicha reconstrucción empleando únicamente mediciones escalares de la forma $x(t)$. Si bien existen múltiples técnicas, en lo que sigue se detallarán exclusivamente los embebidos por retardos temporales como método para reconstruir el espacio de estados.

B.1. Embebidos por retardos temporales

Para construir embebidos $s(t)$ con n componentes del observable $x(t)$ se aplica el siguiente mapeo:

$$x(t) \to s(t) = (s_1(t), \ldots, s_n(t)) \tag{B.1.1}$$

donde $s_k(t) = x(t - \tau_k)$, $k = 1, \ldots, n$ y $\tau \in \mathbb{R}_0^+$.

Los parámetros τ_k se llaman retardos temporales, usualmente son equiespaciados, lo que implica que $\tau_k = k\tau$, siendo τ el retardo temporal.

Para una serie temporal discreta $x(i)$:

$$x(i) \to s(i) = (s_1(i), \ldots, s_n(i)) \tag{B.1.2}$$

donde $s_k(i) = x(i - (k-1)\tau)$, $k = 1, \ldots, n$ y $\tau \in \mathbb{N}$.

La dimensionalidad de un embebido puede ser reducida siempre que se satisfaga la condición de determinar unívocamente el estado del sistema.

En términos generales, se considera que dos situaciones dinámicas distintas están asociadas a pasados y futuros diferentes. Esta observación entra en conflicto con el teorema de unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por consiguiente es fundamental verificar la ausencia de autointersecciones al momento de construir un embebido. Si el valor de k no es suficientemente elevado, la aparición de autointersecciones se vuelve más probable, y dicha verificación puede resultar inviable, especialmente cuando la dimensión del embebido excede tres.

Una cota superior para la dimensión del espacio de embebido puede estimarse a partir de la dimensión de la subvariedad en la que efectivamente se desarrolla la dinámica. La formulación original del teorema del embebido establece que la dinámica en una variedad de dimensión n puede recuperarse mediante un embebido generado a partir de un observable escalar (por ejemplo, una coordenada) siempre que $k > 2n+1$ [68]. Desde un punto de vista intuitivo, la dimensión de la variedad es al menos igual al "tamaño" del conjunto invariante —como un atractor— en torno al cual se estructura la dinámica del sistema.

Tanto el valor óptimo de τ como la dimensión m del embebido se calculan de forma heurística y sus procedimientos se detallan a continuación.

B.2. Estimación del retardo temporal τ

El método más popular para calcular τ es el de la información mutua media AMI (Average Mutual Information), creado por Fraser y Swinney [144]. Este consiste en verificar que las coordenadas $(x(t), x(t+\tau))$ sean tan independientes entre sí como sea posible. La cuantificación de la dependencia entre la serie temporal original $x(t)$ y la serie de tiempo $x(t+\tau)$ está representada en el término que se denomina información mutua $I(x(t), x(t+\tau))$.

El método toma el nombre de información mutua automática o información mutua media (AMI) dado que el cálculo se realiza para una serie temporal y su versión retardada en el tiempo. La información mutua automática es una especie de generalización no lineal de la función de autocorrelación dada por la expresión:

$$I(x(t), x(t+\tau)) = \sum_{i,j} p_{ij}(\tau) \log\left(\frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j}\right) \tag{B.2.3}$$

donde p_i es la probabilidad de que $x(t)$ esté en la ubicación i del histograma construido a partir de los datos $x(t)$, y $p_{ij}(\tau)$ es la probabilidad de que $x(t)$ esté en la ubicación i y $x(t+\tau)$ esté en la ubicación j.

La función AMI también depende de cómo se construyen los histogramas. Para que las coordenadas del embebido sean tan independientes como sea posible se establece como el valor óptimo de τ la posición del primer mínimo de $I(x(t), x(t+\tau))$. El uso de ese valor en particular significa que la primera coordenada del embebido $x(t)$ será máximamente independiente de la segunda coordenada $x(t+\tau)$ y así sucesivamente.

En la práctica, la función AMI puede no tener un mínimo local, por ejemplo, ser una función monótona decreciente de τ. Por lo que se tiene que el retardo temporal adecuado es el intervalo de tiempo para el cual existe un mínimo local en la información mutua media. Si no, se escoge el τ más pequeño donde se produce una disminución sustancial en la información mutua media.

B.3. Elección de la serie temporal

La *observabilidad* es un concepto introducido para evaluar si las variables medidas permiten caracterizar de manera confiable la dinámica subyacente de un sistema dado [145]. Para aplicar este tipo de análisis de forma rigurosa, es necesario contar con el conocimiento explícito del sistema dinámico que

genera la serie temporal. Sin embargo, en muchos casos prácticos esto no es posible, y la reconstrucción dinámica debe realizarse sin dicho conocimiento. En estos casos, debe considerarse que el espacio de fases reconstruido puede no ser estrictamente equivalente al original.

Para que el análisis topológico permita identificar correctamente la topología del atractor, es fundamental que la variedad enramada esté suficientemente bien recorrida por el embebido, y que la variable observada tenga buenas propiedades de observación. No obstante, en la práctica, frecuentemente sólo se dispone de una única variable medida. Para tratar series temporales multivariadas, se han desarrollado enfoques específicos [146], y también existen métodos orientados a seleccionar o construir, entre las variables disponibles, aquella que posea mejores propiedades de observabilidad [145].

La observabilidad completa del espacio de fases original, así como del reconstruido mediante embebido, solo se alcanza cuando no existe pérdida de información en las mediciones. Un análisis de observabilidad permite determinar en qué medida —o con qué fidelidad— las propiedades de la dinámica del sistema son efectivamente captadas por las observaciones.

En situaciones donde estas condiciones no pueden garantizarse a priori, es importante que quien aplique métodos topológicos sea consciente de que el embebido utilizado podría no proporcionar una representación completa del sistema generador de los datos, lo cual debe ser tenido en cuenta al interpretar los resultados.

En el ámbito de la teoría de control, existe un concepto formal para evaluar la calidad de la información transmitida mediante determinadas mediciones. Este se basa en la *matriz de observabilidad* [147], definida como la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas $\Phi : \mathbb{R}^d(y) \to \mathbb{R}^d(Y)$ entre el espacio de estados original $\mathbb{R}^d(y)$ y el espacio reconstruido $\mathbb{R}^d(Y)$, obtenido a partir de las variables medidas y de algunas de sus derivadas de Lie [148].

Considérese un sistema dinámico de dimensión d:

$$\dot{x}_i = f_i(x), \tag{B.3.4}$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$ representa el vector de estados, y f_i es la i-ésima componente del campo vectorial f. Se dice que el sistema dinámico dado por la ecuación (B.3.4) es *observable en el tiempo t* si el estado inicial $x(0)$ puede determinarse de manera única a partir del conocimiento de m variables medidas $h(x) \in \mathbb{R}^m$ (con $m < d$) y de algunas de sus derivadas en el intervalo $[0,t]$. De este modo, se construye un vector $X \in \mathbb{R}^{d_r}$ compuesto por las variables que permiten la reconstrucción del espacio de fases.

Apéndice C

Comparación entre métodos topológicos

El cuadro que se presenta a continuación resume, de manera sintética, la información que aporta la técnica de homologías persistentes (PH, por su sigla en inglés) frente al enfoque BRAMAH–Templex, comparando las propiedades topológicas que permiten calcular, las restricciones y limitaciones de cada método, así como su costo computacional.

Comparación entre la técnica de homologías persistentes (PH por su sigla en inglés) y la familia BRAMAH–Templex: propiedades topológicas, limitaciones y costo computacional.

Método	**Propiedades**	**Limitaciones**	**Costo computacional**
PH	Números de Betti (0-, 1-, ..., k-agujeros) en función del parámetro de filtrado y su persistencia; visualización en diagramas de persistencia.	Depende del tipo de complejo (Vietoris–Rips, alpha), de la métrica, de la dimensión máxima y del umbral de persistencia; no distingue torsiones, joining loci ni dinámica.	Muy alto; el número de celdas crece combinatoriamente y supera ampliamente el número de puntos. En nubes grandes requiere reducción previa o *landmarks*.
BRAMAH	Generadores de homología de la variedad enramada, torsión y joining loci localizables. Resultados invariantes para un bajo número de celdas.	Requiere nube de puntos sin falsos vecinos, elegir un número máximo y mínimo de puntos por celda, y una exploración suficiente de la variedad subyacente.	Muy bajo; el número de d-celdas es mucho menor que el número de puntos y no requiere reducción. Se calcula un solo complejo, reducible a un mínimo de celdas.
Templex	Agrega la estructura de flujo: generatex, stripex, twists y unidades elementales identificadas sobre celdas y nube original.	Depende de la identificación previa de los joining loci con el complejo BRAMAH.	Muy bajo; las propiedades del grafo tienen costo computacional mínimo.

Bibliografía

[1] L. Christine Kinsey. *Topology of surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] H. G. Solari and R. Gilmore. Relative rotation rates for driven dynamical systems. *Physical Review A*, 37(8):3096–3109, 1988.

[3] Gabriel B. Mindlin and R. Gilmore. Topological analysis and synthesis of chaotic time series. *Physica D*, 58(1):229–242, 1992.

[4] M. Lefranc and Pierre Glorieux. Topological analysis of chaotic signals from a CO_2 laser with modulated losses. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 3(3):643–650, 1993.

[5] C. Letellier, L. Le Sceller, P. Dutertre, G. Gouesbet, Z. Fei, and J. L. Hudson. Topological characterization and global vector field reconstruction from an experimental electrochemical system. *Journal of Physical Chemistry*, 99:7016–7027, 1995.

[6] R. Gilmore, R. Vilaseca, R. Corbalán, and E. Roldán. Topological analysis of chaos in the optically pumped laser. *Physical Review E*, 55(3):2479–2487, 1997.

[7] C. Letellier, J. Maquet, H. Labro, L. Le Sceller, G. Gouesbet, F. Argoul, and A. Arnéodo. Analyzing chaotic behaviour in a belousov-zhabotinskii reaction by using a global vector field reconstruction. *Journal of Physical Chemistry A*, 102:10265–10273, 1998.

[8] Denisse Sciamarella and Gabriel B. Mindlin. Unveiling the topological structure of chaotic flows from data. *Physical Review E*, 64:036209, 2001.

[9] Nicholas B. Tufillaro, Tyler Abbott, and Jeremiah Reilly. *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1992.

[10] C. Letellier, P. Dutertre, and B. Maheu. Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: Toward a systematic topological characterization. *Chaos*, 5(1):271–282, 1995.

[11] Robert Gilmore. Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 70(4):1455–1529, 1998.

[12] Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos*. Wiley, 2003.

[13] Edward N. Lorenz. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, 17(3):321–333, 1965.

[14] Edward N. Lorenz. On the range of atmospheric predictability. In *Proceedings of the first National Conference on Statistical Meteorology*, pages 11–19. American Meteorological Society, 1968.

[15] Bo-Wen Shen, Roger A. Pielke, Xubin Zeng, Jong-Jin Baik, Sara Faghih-Naini, Jialin Cui, and Robert Atlas. Is weather chaotic?: Coexistence of chaos and order within a generalized Lorenz model. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 102(1):E148–E158, 2021.

[16] Q. Sun, T. Miyoshi, and S. Richard. Control simulation experiments of extreme events with the Lorenz-96 model. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 30(2):117–128, 2023.

[17] Edward N. Lorenz. The predictability of hydrodynamic flow. *Transactions of the New York Academy of Sciences*, 25:409–432, 1963.

[18] J. A. Yorke and E. D. Yorke. *Chaotic behavior and fluid dynamics*, pages 77–95. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.

[19] Hassan Aref, John R. Blake, Marko Budišić, Silvana S. S. Cardoso, Julyan H. E. Cartwright, Herman J. H. Clercx, Kamal El Omari, Ulrike Feudel, Ramin Golestanian, Emmanuelle Gouillart, GertJan F. van Heijst, Tatyana S. Krasnopolskaya, Yves Le Guer, Robert S. MacKay, Vyacheslav V. Meleshko, Guy Metcalfe, Igor Mezić, Alessandro P. S. de Moura, Oreste Piro, Michel F. M. Speetjens, Rob Sturman, Jean-Luc Thiffeault, and Idan Tuval. Frontiers of chaotic advection. *Review of Modern Physics*, 89(2):025007, 2017.

[20] Satoshi Sunada, Takahisa Harayama, Kenichi Arai, Kazuyuki Yoshimura, Peter Davis, Ken Tsuzuki, and Atsushi Uchida. Chaos laser chips with delayed optical feedback using a passive ring waveguide. *Optics Express*, 19(7):5713–5724, 2011.

[21] Shihong Wang, Jinyu Kuang, Jinghua Li, Yunlun Luo, Huaping Lu, and Gang Hu. Chaos-based secure communications in a large community. *Physical Review E*, 66(6):065202, 2002.

[22] Alan Hastings and Thomas Powell. Chaos in a three-species food chain. *Ecology*, 72(3):896–903, 1991.

[23] Alan Hastings, Carole L. Hom, Stephen Ellner, Peter Turchin, and H. Charles J. Godfray. Chaos in ecology: Is mother nature a strange attractor? *Annual Review of Ecology and Systematics*, 24:1–33, 1993.

[24] Peter Grassberger and Itamar Procaccia. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Physical Review A*, 28(4):2591, 1983.

[25] Henry D. Abarbanel, Reggie Brown, John J. Sidorowich, and Lev Sh. Tsimring. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of Modern Physics*, 65(4):1331, 1993.

[26] Valery Iustinovich Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. liapunov characteristic number for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.

[27] Alan Wolf, Jack B Swift, Harry L Swinney, and John A Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317, 1985.

[28] O. E. Rössler and P. J. Ortoleva. Strange attractors in 3-variable reaction systems. *Lecture Notes in Biomathematics*, 21:67–73, 1978.

[29] O. E. Rössler. The chaotic hierarchy. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 38:788–801, 1983.

[30] M. Ghil and D. Sciamarella. Climate change and climate variability: Nonlinear, random, and topological aspects. In *Reference Module in Earth Systems and Environmental Sciences*. Elsevier, 2024.

[31] Gisela D Charó, Christophe Letellier, and Denisse Sciamarella. Templex: A bridge between homologies and templates for chaotic attractors. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32(8), 2022.

[32] Denisse Sciamarella and Gisela D. Charó. *New Elements for a Theory of Chaos Topology*. - Advances in Mechanics and Mathematics. Springer Birkhäuser Cham, 2024.

[33] Caterina Mosto, Gisela D Charó, Christophe Letellier, and Denisse Sciamarella. Templex-based dynamical units for a taxonomy of chaos. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(11), 2024.

[34] David Ruelle. Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 5(1):29–42, 1981.

[35] Floris Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*, pages 366–381. Springer, 1981.

[36] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.

[37] Joan Birman and Robert F Williams. Knotted periodic orbits in dynamical systems i: Lorenz's equations. *Topology*, 22(1):47–82, 1983.

[38] Robert Gilmore. Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 70(4):1455, 1998.

[39] D. Sciamarella. *Estructura topológica de flujos caóticos*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2001.

[40] Denisse Sciamarella and Gabriel B. Mindlin. Topological structure of chaotic flows from human speech data. *Physical Review Letters*, 64:1450–1453, 2001.

[41] Gisela D. Charó, Guillermo Artana, and Denisse Sciamarella. Topology of dynamical reconstructions from Lagrangian data. *Physica D*, 405:132371, 2020.

[42] Gisela D. Charó, Guillermo Artana, and Denisse Sciamarella. Topological colouring of fluid particles unravels finite-time coherent sets. *Journal of Fluid Mechanics*, 923:A17, 2021.

[43] Gisela D. Charó, Christophe Letellier, and Denisse Sciamarella. Templex: A bridge between homologies and templates for chaotic attractors. *Chaos*, 32(8):083108, 2022.

[44] Charles Terence Clegg Wall. Finiteness conditions for cw-complexes. *Annals of Mathematics*, pages 56–69, 1965.

[45] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. New York, NY: Cambridge University Press, 2002.

[46] Otto E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5):397–398, 1976.

[47] O. E. Rössler. Continuous chaos. volume 2 of *Springer Series in Synergetics*, pages 174–183, Berlin, Germany, 1977. Springer-Verlag.

[48] O. E. Rössler. Chaotic behavior in simple reaction system. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 31:259–264, 1976.

[49] O. E. Rössler. Different types of chaos in two simple differential equations. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 31:1664–1670, 1976.

[50] Otto E. Rössler. Toroidal oscillation in a 3-variable abstract reaction system. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 32(3-4):299–301, 1977.

[51] O.E. Rössler. Horseshoe-map chaos in the Lorenz equation. *Physics Letters A*, 60(5):392–394, 1977.

[52] O. E. Rössler. The hierarchy of chaos. In *10th Summer Seminar on Applied Mathematics*, 1978. F. C. Hoppensteadt (organizer), University of Utah.

[53] M. Klein and G. Baier. Hierarchies of dynamical systems. In *A chaotic hierarchy*, pages 1–24. World Scientific Publishing, 1991.

[54] Christophe Letellier and Otto E. Rössler. *Chaos: The world of nonperiodic oscillations*, chapter An updated hierarchy of chaos, pages 181–203. Springer, Cham, Switzerland, 2020.

[55] Christophe Letellier, Nataliya Stankevich, and Otto E. Rössler. Dynamical taxonomy : some taxonomic ranks to systematically classify every chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 32:2230004, 2022.

[56] Jomon Kottarathil, Sudev Naduvath, and Joseph Varghese Kureethara. *Graph Theory and Decomposition*. CRC Press, 2024.

[57] Caterina Mosto, Gisela D Charó, Florian Sévellec, Pierre Tandeo, Juan J Ruiz, and Denisse Sciamarella. A templex-based study of the atlantic meridional overturning circulation dynamics in idealized chaotic models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 35(1), 2025.

[58] Christophe Letellier and Robert Gilmore. Covering dynamical systems: Two-fold covers. *Physical Review E*, 63(1):016206, 2001.

[59] Robert Shaw. Strange attractor, chaotic behavior and information flow. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 36:80–112, 1981.

[60] R. Miranda and E. Stone. The proto-Lorenz system. *Physics Letters A*, 178:105–113, 1993.

[61] Christophe Letellier. *Caractérisation topologique et reconstruction des attracteurs étranges*. PhD thesis, University of Paris VII, Paris, France, May 1994.

[62] C. Letellier, P. Dutertre, J. Reizner, and G. Gouesbet. Evolution of multimodal map induced by an equivariant vector field. *Journal of Physics A*, 29:5359–5373, 1996.

[63] Greg Byrne, Robert Gilmore, and Christophe Letellier. Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors. *Physical Review E*, 70(5):056214, 2004.

[64] Bo Deng. Constructing homoclinic orbits and chaotic attractors. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 4:823–841, 1994.

[65] Matthew B. Kennel, Reggie Brown, and Henry D I Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45(6):3403, 1992.

[66] Holger Kantz and Thomas Schreiber. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge university press, 2003.

[67] Norman H Packard, James P Crutchfield, J Doyne Farmer, and Robert S Shaw. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45(9):712, 1980.

[68] Tim Sauer, James A Yorke, and Martin Casdagli. Embedology. *Journal of statistical Physics*, 65(3-4):579–616, 1991.

[69] Edward N Lorenz. Predictability: A problem partly solved. In *Proc. Seminar on predictability*, volume 1, pages 1–18. Reading, 1996.

[70] Manuel Pulido, Guillermo Scheffler, Juan Jose Ruiz, Maria Magdalena Lucini, and Pierre Tandeo. Estimation of the functional form of subgrid-scale parametrizations using ensemble-based data assimilation: a simple model experiment. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 142(701):2974–2984, 2016.

[71] M. Ghil and N. Jiang. Recent forecast skill for the El Niño/Southern Oscillation. *Geophysical Research Letters*, 25(2):171–174, 1998.

[72] Florian Sévellec and Alexey V Fedorov. Millennial variability in an idealized ocean model: predicting the AMOC regime shifts. *Journal of Climate*, 27(10):3551–3564, 2014.

[73] Florian Sévellec and Alexey V Fedorov. Unstable AMOC during glacial intervals and millennial variability: The role of mean sea ice extent. *Earth and Planetary Science Letters*, 429:60–68, 2015.

[74] J. P. Bjerknes. Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific. 97:163–172, 1969.

[75] S. G. H. Philander. *El Niño and the Southern Oscillation.* Academic Press, New York, 1990.

[76] Michael Ghil and Valerio Lucarini. The physics of climate variability and climate change. *Reviews of Modern Physics*, 92(3):035002, 2020.

[77] J. D. Neelin, M. Latif, and F.-F. Jin. Dynamics of coupled ocean-atmosphere models: The tropical problem. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 26:617–659, 1994.

[78] Klaus Fraedrich. El Niño/Southern Oscillation predictability. *Monthly Weather Review*, 116(5):1001–1012, 1988.

[79] Mark A. Cane and Stephen E. Zebiak. A Theory for El Niño and the Southern Oscillation. *Science*, 228(4703):1085–1087, 1985.

[80] G. K. Vallis. El Niño: A chaotic dynamical system? *Science*, 232:243–245, 1986.

[81] G. K. Vallis. Conceptual models of El Niño and the Southern Oscillation. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 93(C11):13979–13991, 1988.

[82] Fei-Fei Jin. An equatorial ocean recharge paradigm for ENSO. Part II: a stripped-down coupled model. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 54(7):830–847, 1997.

[83] Axel Timmermann. Decadal ENSO amplitude modulations: a nonlinear paradigm. *Global and Planetary Change*, 37(1):135–156, 2003.

[84] Fei-Fei Jin, J. David Neelin, and Michael Ghil. El niño on the Devil's staircase: Annual subharmonic steps to chaos. *Science*, 264:70–72, 1994.

[85] F.-F. Jin, J. D. Neelin, and M. Ghil. El Niño/Southern Oscillation and the annual cycle: Subharmonic frequency-locking and aperiodicity. *Physica D*, 98:442–465, 1996.

[86] Fei-Fei Jin. An equatorial ocean recharge paradigm for ENSO. Part I: conceptual model. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 54(7):811–829, 1997.

[87] M. J. Suarez and P. S. Schopf. A delayed action oscillator for enso. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 45(21):3283–3287, 1988.

[88] E. Tziperman, L. Stone, M. A. Cane, and H. Jarosh. El niño chaos: Overlapping of resonances between the seasonal cycle and the pacific ocean-atmosphere oscillator. *Science*, 264:72–74, 1994.

[89] E. Tziperman, M. A. Cane, S. E. Zebiak, Y. Xue, and B. Blumenthal. Locking of el niño's peak time to the end of the calendar year in the delayed oscillator picture of enso. *Journal of Climate*, 11:2191–2199, 1998.

[90] L. Chen and A. J. Majda. Simple stochastic models for enso with complex physics. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 25:387–410, 2018.

[91] P. Saunders and M. Ghil. Boolean delay equations and el niño: A conceptual study. *Physica D*, 160:54–78, 2001.

[92] Jack K. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, 1977.

[93] L. Chen and A. J. Majda. Multiple time-scale models for el niño and their mathematical analysis. *SIAM Review*, 58(4):554–584, 2016.

[94] T. N. Palmer. Extended-range atmospheric prediction and the Lorenz model. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 74(1):49–65, 1993.

[95] Greenland Ice-core Project (GRIP) Members. Climate instability during the last interglacial period recorded in the GRIP ice core. *Nature*, 364(6434):203–207, 1993.

[96] Willi Dansgaard, Sigfus J Johnsen, Henrik B Clausen, Dorte Dahl-Jensen, Nils S Gundestrup, Claus U Hammer, Christine S Hvidberg, Jørgen P Steffensen, AE Sveinbjörnsdottir, Jean Jouzel, et al. Evidence for general instability of past climate from a 250-kyr ice-core record. *nature*, 364(6434):218–220, 1993.

[97] Richard B Alley. Ice-core evidence of abrupt climate changes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(4):1331–1334, 2000.

[98] Pieter Meiert Grootes, Minze Stuiver, JWC White, S Johnsen, and J Jouzel. Comparison of oxygen isotope records from the gisp2 and grip greenland ice cores. *nature*, 366(6455):552–554, 1993.

[99] Niklas Boers, Michael Ghil, and Denis-Didier Rousseau. Ocean circulation, ice shelf, and sea ice interactions explain dansgaard–oeschger cycles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(47):E11005–E11014, 2018.

[100] Niklas Boers, Michael Ghil, and Thomas F Stocker. Theoretical and paleoclimatic evidence for abrupt transitions in the earth system. *Environmental Research Letters*, 17(9):093006, 2022.

[101] O. Arzel, A. Colin de Verdière, and M. H. England. The role of oceanic heat transport and wind stress forcing abrupt millennial-scale climate transitions. *Journal of Climate*, 23:2233–2256, 2010.

[102] Rui Xin Huang and William K Dewar. Haline circulation: Bifurcation and chaos. *Journal of physical oceanography*, 26(10):2093–2106, 1996.

[103] José A Langa, James C Robinson, and Antonio Suárez. Stability, instability, and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations. *Nonlinearity*, 15(3):887, 2002.

[104] Tomás Caraballo, Grzegorz Łukaszewicz, and José Real. Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 64(3):484–498, 2006.

[105] Michael Ghil, Mickaël D Chekroun, and Eric Simonnet. Climate dynamics and fluid mechanics: Natural variability and related uncertainties. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(14-17):2111–2126, 2008.

[106] Stefano Pierini, Michael Ghil, and Mickael D Chekroun. Exploring the pullback attractors of a low-order quasigeostrophic ocean model: The deterministic case. *Journal of Climate*, 29(11):4185–4202, 2016.

[107] Michael Ghil and Denisse Sciamarella. Dynamical systems, algebraic topology and the climate sciences. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 30(4):399–434, 2023.

[108] Gisela D Charó, Denisse Sciamarella, Sylvain Mangiarotti, Guillermo Artana, and Christophe Letellier. Observability of laminar bidimensional fluid flows seen as autonomous chaotic systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(12), 2019.

[109] John Rinzel. A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems. In *Mathematical Topics in Population Biology, Morphogenesis and Neurosciences: Proceedings of an International Symposium held in Kyoto, November 10–15, 1985*, pages 267–281. Springer, 1987.

[110] LN Howard. Abc's of convection. *Geophysical Fluid Dynamics Summer School, WHOI Internal Tech. Rep*, 71(63):102–105, 1971.

[111] Willem VR Malkus. Non-periodic convection at high and low prandtl number. *Mem. Societe Royale des Sciences de Liege*, pages 125–128, 1972.

[112] Otto E Rössler and Peter J Ortoleva. Strange attractors in 3-variable reaction systems. *Lecture notes in Biomathematics*, 21:67–73, 1977.

[113] Gisela D. Charó, Denisse Sciamarella, Sylvain Mangiarotti, Guillermo Artana, and Christophe Letellier. Equivalence between the unsteady double-gyre system and a 4D autonomous conservative chaotic system. *Chaos*, 29(12):123126, 2019.

[114] Henry D. I. Abarbanel and Matthew B. Kennel. Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data. *Physical Review E*, 47(5):3057–3068, 1993.

[115] Valerie N. Livina and Timothy M. Lenton. A modified method for detecting incipient bifurcations in a dynamical system. *Geophys. Res. Lett.*, 34:L03712, 2007.

[116] Timothy M. Lenton. Early warning of climate tipping points. *Nat. Climate Change*, 1:201–209, 2011.

[117] V. Eyring, S. Bony, G. A. Meehl, C. A. Senior, B. Stevens, R. J. Stouffer, and K. E. Taylor. Overview of the coupled model intercomparison project phase 6 (cmip6) experimental design and organization. *Geosci. Model Dev.*, 9:1937–1958, 2016.

[118] K. C. Mo. Relationships between low-frequency variability in the Southern Hemisphere and sea surface temperature anomalies. *Journal of Climate*, 13(20):3599–3610, 2000.

[119] R. L. Fogt and G. J. Marshall. The Southern Annular Mode: Variability, trends, and climate impacts across the Southern Hemisphere. *WIREs Climate Change*, 11(4):e652, 2020.

[120] Q. Ding, E. J. Steig, D. S. Battisti, and J. M. Wallace. Influence of the tropics on the Southern Annular Mode. *Journal of Climate*, 25(18):6330–6348, 2012.

[121] A. Sen Gupta and M. H. England. Coupled ocean–atmosphere–ice response to variations in the Southern Annular Mode. *Journal of Climate*, 19(18):4457–4486, 2006.

[122] K. C. Mo and J. N. Paegle. The Pacific–South American modes and their downstream effects. *International Journal of Climatology*, 21:1211–1229, 2001.

[123] A. L. Berman, G. Silvestri, and R. Compagnucci. Eastern Patagonia seasonal precipitation: Influence of Southern Hemisphere circulation and links with subtropical South American precipitation. *Journal of Climate*, 25(19):6781–6795, 2012.

[124] R. L. Fogt, D. H. Bromwich, and K. M. Hines. Understanding the SAM influence on the South Pacific ENSO teleconnection. *Climate Dynamics*, 36:1555–1576, 2011.

[125] G. Silvestri and C. S. Vera. Nonstationary impacts of the Southern Annular Mode on Southern Hemisphere climate. *Journal of Climate*, 22(22):6142–6148, 2009.

[126] Harry H. Hendon, David W. J. Thompson, and Matthew C. Wheeler. Australian rainfall and surface temperature variations associated with the Southern Hemisphere Annular Mode. *Journal of Climate*, 20(11):2452–2467, 2007.

[127] M. Osman and C. S. Vera. Predictability of extratropical upper-tropospheric circulation in the Southern Hemisphere by its main modes of variability. *Journal of Climate*, 33(4):1405–1421, 2020.

[128] Henri Theil. A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis. *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Sciences*, 53:386–392; 521–525; 1397–1412, 1950.

[129] P. K. Sen. Estimates of the Regression Coefficient based on Kendall's Tau. *Journal of the American Statistical Association*, 63(324):1379–1389, 1968.

[130] C. E. Duchon. Lanczos Filtering in One and Two Dimensions. *Journal of Applied Meteorology*, 18(8):1016–1022, 1979.

[131] G. J. Marshall. Trends in the Southern Annular Mode from observations and reanalyses. *Journal of Climate*, 16:4134–4143, 2003.

[132] Daoyi Gong and Shaowu Wang. Definition of Antarctic Oscillation Index. *Geophysical Research Letters*, 26(4):459–462, 1999.

[133] J. W. Kidson. Principal modes of Southern Hemisphere low-frequency variability obtained from NCEP–NCAR reanalyses. *Journal of Climate*, 12:2808–2830, 1999.

[134] Facundo Fainstein, Gabriel B Mindlin, and Pablo Groisman. Reconstructing attractors with autoencoders. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 35(1), 2025.

[135] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete & Computational Geometry*, 28:511–533, 2002.

[136] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, 2010.

[137] Ulrich Bauer. Ripser: efficient computation of vietoris–rips persistence barcodes. *Journal of Applied and Computational Topology*, 5(3):391–423, 2021.

[138] Leopold Vietoris. Über den höheren zusammenhang kompakter räume und eine klasse von zusammenhangstreuen abbildungen. *Mathematische Annalen*, 97:454–472, 1927.

[139] Clément Maria, Jean-Daniel Boissonnat, Marc Glisse, and Mariette Yvinec. The GUDHI library: Simplicial complexes and persistent homology. In *Mathematical Software–ICMS 2014*, pages 167–174. Springer, 2014.

[140] Marco Ezequiel Micieli. Análisis topológico de la dinámica subestacional del jet subpolar sobre sudamérica, 2024. Directora: Dra. Denisse Sciamarella. Co-directora: Dra. Marisol Osman.

[141] Gisela Daniela Charó, Davide Faranda, and Denisse Sciamarella. Persistent generatexes: unveiling the dynamical paths in complex systems. In *SPIRES 2024 – 4th Annual Centre for Topological Data Analysis Conference*, Oxford, United Kingdom, August 2024. `https://hal.science/hal-04776719`.

[142] Laura Christine Kinsey. *Topology of surfaces. Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1993.

[143] M. R. Muldoon, R. S. MacKay, J. P. Huke, and D. S. Broomhead. Topology from time series. *Physica D*, 65(1):1–16, 1993.

[144] Andrew M Fraser and Harry L Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33(2):1134, 1986.

[145] Christophe Letellier, Luis A Aguirre, and Jean Maquet. Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics. *Physical Review E*, 71(6):066213, 2005.

[146] Henry D I Abarbanel and Jerry P Gollub. Analysis of observed chaotic data. *Physics Today*, 49:86, 1996.

[147] Robert Hermann and Arthur J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):728–740, 1977.

[148] Christophe Letellier, Luis A. Aguirre, and Jean Maquet. Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics. *Physical Review E*, 71(6):066213, 2005.