



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Un estudio poliedral del routing and spectrum allocation problem

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en
el área de Ciencias de la Computación

Federico Alberto Bertero

Director: Dr. Javier Leonardo Marengo

Consejera de estudios: Dra. Flavia Bonomo

Buenos Aires, 2025

UN ESTUDIO POLIEDRAL DEL ROUTING AND SPECTRUM ALLOCATION PROBLEM

El *problema de ruteo y asignación de espectro (RSA)* surge en el contexto de las redes de fibra óptica flexible y consiste en determinar rutas óptimas para un conjunto de demandas a través de una red, mientras de manera simultánea se asigna un intervalo del espectro electromagnético a cada demanda, sujeto a restricciones de no superposición. Como solución clave para gestionar el tráfico de datos a gran escala en dichas redes, el RSA ha ganado atención significativa, a pesar de ser un problema NP-difícil. Dado que la aplicación de técnicas de programación entera ha demostrado ser exitosa para varios problemas de optimización combinatoria, el objetivo principal de esta tesis es utilizarlas en el contexto del RSA. Comenzamos presentando varios modelos de programación entera para el problema y analizamos su efectividad. Basándonos en los resultados, definimos el politopo asociado a la formulación con mejor desempeño sobre instancias conocidas y presentamos un estudio poliedral del mismo, incluyendo su dimensión y familias de desigualdades que definen facetas. Luego de este estudio y dada la complejidad del problema, definimos una relajación de la formulación dada por un subconjunto de variables de la formulación original, con el fin de identificar desigualdades válidas que puedan ser útiles dentro de un entorno de métodos de planos de corte. Presentamos propiedades básicas de esta formulación relajada, identificamos varias familias de desigualdades que inducen facetas y mostramos que algunas de ellas pueden separarse en tiempo polinomial. Finalmente, incluimos experimentos computacionales que ofrecen indicios sobre la contribución de estas desigualdades en la práctica.

Palabras clave: problema de ruteo y asignación de espectro, combinatoria poliedral, programación lineal entera, investigación operativa, redes de fibra óptica.

A POLYHEDRAL STUDY OF THE ROUTING AND SPECTRUM ALLOCATION PROBLEM

The *routing and spectrum allocation (RSA) problem* arises in the context of flexible grid optical networks, and consists in determining optimal routes for a set of demands through a network while simultaneously assigning an interval of the electromagnetic spectrum to each demand, subject to non-overlapping constraints. As a key solution to managing large-scale data traffic in such networks, RSA has gained significant attention despite being an NP-hard problem. Since applying integer programming techniques has shown to be successful for several combinatorial optimization problems, the main goal of this thesis is to use these techniques for the RSA. We start by presenting several integer programming models for the problem and analyze their effectiveness. Based on the results, we define the polytope associated with the formulation with the best performance over known instances, and a polyhedral study of it is presented, including its dimension and facet-inducing families of inequalities. After this study and given the complexity of the problem, we define a relaxation of this formulation given by a subset of variables from the original formulation, in order to identify valid inequalities that could be useful within a cutting-plane environment for tackling real instances. We present basic properties of this relaxed formulation, we identify several families of facet-inducing inequalities, and we show that some of them can be separated in polynomial time. Finally, we include computational experiments that provide preliminary evidence of the practical contribution of these inequalities.

Keywords: routing and spectrum allocation problem, polyhedral combinatorics, integer linear programming, operations research, fiber optic networks.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a mi director, **Javier Marengo**, por su infinita paciencia, por las incontables reuniones, correos y consultas, y por acompañar durante todo este proceso siempre de forma positiva y con la mayor de las simpatías. Haber trabajado con él fue un placer y un privilegio; espero haberme llevado al menos una mínima parte de su capacidad de trabajo y forma de pensar.

Agradezco muy especialmente a los miembros del jurado por el tiempo y la dedicación invertidos en la lectura y evaluación de este trabajo. Sus observaciones contribuyeron enormemente a mejorar la versión final de esta tesis. A **Cid de Souza**, por sus comentarios detallados que ayudaron a mejorar la consistencia técnica del trabajo realizado; a **Juan José Salazar**, por sus sugerencias relativas a la organización y presentación del contenido, que permitieron mejorar la estructura general del documento; y a **Enrico Malaguti**, por sus aportes sobre posibles extensiones y alternativas del problema, que servirán como punto de partida para futuras investigaciones.

Agradezco a **Flavia Bonomo**, **Guillermo Durán** y a todo el Departamento de Computación, por su dedicación y compromiso con la formación académica. Muchas gracias a los miembros de la Subcomisión de Doctorado del Departamento, en particular a **Isabel Méndez** y **Esteban Mocskos**, por su atención y la ayuda brindada en todo el proceso.

Agradezco mucho a **Annegret Wagler** y **Hervé Kerivin**, por la hospitalidad y calidez durante mi estadía en Clermont-Ferrand, una experiencia que fue clave para el desarrollo de esta tesis.

Agradezco a todos los compañeros y amigos del grupo de Optimización de la UNGS, principalmente a **Marcelo Bianchetti**, **Diego Delle Donne**, **Mónica Braga** y **Manuela Blaum** por los trabajos hechos en conjunto, las discusiones y las colaboraciones; y a los amigos que hice en la UBA —**Facundo Gutiérrez**, **Joaquín del Priore**, **Florencia Fernández**, **Agustina López** y **León Maislin**— por haber hecho del cursado de las materias una experiencia divertida.

Agradezco muchísimo a **Graciela Nasini** y **Daniel Negrotto**, por sus gestiones, consejos y apoyo, que fueron fundamentales para la realización de este doctorado.

Agradezco a todos los que forman y formaron parte de **Findo**, especialmente a **Diego Varela**, **Ignacio Ortega**, **Marcela Marincioni**, **Melina Ciunne**, **Gonzalo Nini**, **Julián Martini** y **Emiliano Gorr**, por hacer fácil el día a día durante tantos años. Un especial agradecimiento a **Federico Patane**, por su amistad y por todas las ayudas logísticas, sin las cuales este proyecto habría resultado mucho más difícil.

Agradezco a mi familia por el cariño y apoyo incondicional de siempre.

Finalmente, agradezco profundamente a **Carmela**, quien me acompañó día a día durante estos años, con un amor infinito, una energía inagotable y una paciencia increíble. Sin su apoyo constante, y todas las experiencias compartidas, este trabajo jamás se habría completado.

Para Carmela.

PUBLICACIONES DERIVADAS DE ESTA TESIS

A continuación, se listan las contribuciones publicadas o enviadas a publicación que se relacionan con esta tesis:

- El contenido del Capítulo 2 fue publicado en:
Federico Bertero, Marcelo Bianchetti, y Javier Marenco. Integer programming models for the routing and spectrum allocation problem. TOP, 26:465–488, 2018.
- El contenido del Capítulo 3 fue aceptado para su presentación en el XIII Latin American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium y publicado en:
Federico Bertero y Javier Marenco. An initial polyhedral study of the routing and spectrum allocation problem (extended abstract). Procedia Computer Science (en prensa).
- Los principales resultados del Capítulo 4 fueron presentados en el XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium y publicados en el siguiente abstract extendido:
Federico Bertero, Herve Kerivin, Javier Marenco, y Annegret Wagler. A polyhedral study of a relaxation of the routing and spectrum allocation problem (brief announcement). Procedia Computer Science, 223:391–393, 2023.
- El contenido de los Capítulos 4 y 5 está bajo revisión en:
Federico Bertero, Herve Kerivin, Javier Marenco, y Annegret Wagler. A polyhedral study of a relaxation of the routing and spectrum allocation problem. Enviado a la edición especial de Discrete Applied Mathematics dedicada al XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.

Índice general

1..	Introducción	1
1.1.	Problema de ruteo y asignación de espectro	1
1.2.	Complejidad computacional	3
1.3.	Estado del arte y fundamentos teóricos	4
1.4.	Problemas de coloreo	7
1.5.	Contenido de la tesis	7
2..	Formulaciones de programación entera para el RSA	11
2.1.	Definiciones generales	11
2.2.	Formulaciones de asignación demanda-rango (DR)	13
2.3.	Formulaciones de asignación demanda-slot (DS)	16
2.4.	Formulaciones de asignación demanda-slot-enlace (DSL)	17
2.5.	Formulación de asignación demanda-rango-enlace (DRL)	19
2.6.	Experimentos computacionales	20
3..	Estudio poliedral de la formulación DR-AOV	29
3.1.	Propiedades generales	30
3.2.	Desigualdades válidas	40
3.2.1.	Restricciones de la formulación	40
3.2.2.	Grafo de conflictos y relación con chromatic scheduling	44
3.2.3.	Desigualdades clique	47
3.2.4.	Desigualdades clique doble	51
3.3.	Consideraciones sobre el grafo de conflictos	58
4..	Estudio poliedral de una relajación del problema	61
4.1.	Propiedades generales del poliedro asociado a la relajación	62
4.2.	Familias de desigualdades validas	66
4.2.1.	Desigualdades telescópicas	66
4.2.2.	Desigualdades telescópicas reforzadas	69
4.2.3.	Desigualdades telescópicas extendidas	72
4.2.4.	Desigualdades telescópicas medias	76
4.3.	Facetas provenientes del politopo del subgrafo acíclico	79
5..	Experimentos computacionales	83
5.1.	Plan de experimentación	83
5.2.	Resumen de resultados computacionales	85
5.3.	Detalles de implementación	87
6..	Conclusiones y trabajo a futuro	91
6.1.	Formulaciones de programación lineal entera	92
6.2.	Estudio poliedral	92
6.3.	Formulación relajada	93
6.4.	Experimentos computacionales	94
6.5.	Trabajo a futuro	95

Apéndice	103
A.. Teorema de unos consecutivos	103
B.. Resultados detallados	105

1. INTRODUCCIÓN

Las redes de fibra óptica han revolucionado las telecomunicaciones al permitir la transmisión de datos a altas velocidades y con una mínima pérdida de señal [34]. A diferencia de los medios tradicionales, las fibras ópticas usan pulsos de luz para transmitir información a través de cables delgados hechos de vidrio o plástico. Esta tecnología ha sido fundamental para satisfacer la creciente demanda de ancho de banda impulsada por aplicaciones como la transmisión de vídeo, el uso de servicios en la nube y el Internet de las cosas (IoT).

A medida que la demanda de datos siguió aumentando, las redes de fibra óptica evolucionaron hacia configuraciones más eficientes y avanzadas, como las redes ópticas coherentes y las redes DWDM (Multiplexación por División de Longitud de Onda Densa). Estas innovaciones permitieron maximizar la capacidad de las fibras mediante el uso de múltiples longitudes de onda para transmitir diferentes señales simultáneamente. Sin embargo, las redes tradicionales tenían limitaciones en su capacidad de adaptarse de forma dinámica a los cambios en el tráfico y la demanda [53].

Para superar estas restricciones, surgieron las redes elásticas de fibra óptica (EON), diseñadas para asignar espectro y recursos de manera flexible [33]. En este contexto, se introduce el concepto de *slot*, que representa una unidad básica de espectro en el dominio de las frecuencias. A diferencia de las redes tradicionales de grilla fijas (Fixed Grid), las redes elásticas usan grillas flexibles (FlexGrid), permitiendo que los slots se combinen dinámicamente para ajustar el ancho de banda necesario. Esta capacidad de asignar y reorganizar espectro de manera eficiente permite a las redes elásticas optimizar el uso de los recursos y adaptarse mejor a la creciente y variable demanda de tráfico de datos.

1.1. Problema de ruteo y asignación de espectro

El problema de Ruteo y Asignación de Espectro (RSA, por sus siglas en inglés) surge a medida que las redes elásticas de fibra óptica comenzaron a implementarse, debido a la necesidad de determinar simultáneamente las mejores rutas para un conjunto de demandas de tráfico y la asignación más eficiente de slots de espectro en estas rutas.

El RSA es complejo debido a la naturaleza combinatoria de sus componentes. Por un lado, el ruteo implica encontrar un camino adecuado entre el origen y el destino para un conjunto de demandas, considerando factores como la capacidad y la longitud de los enlaces de la red. Por otro lado, la asignación de espectro debe garantizar que los slots asignados a una determinada demanda sean iguales en todos los enlaces de la ruta correspondiente; que los slots asignados a cada demanda sean contiguos; y, por último, que no se asigne un mismo slot a diferentes demandas si sus rutas comparten al menos un enlace de la red.

Formalmente, consideremos un grafo dirigido $G = (V, E)$, que representa una red de fibra óptica; un conjunto de demandas D , donde cada demanda d tiene la forma $(s_d, t_d, v_d) \in V \times V \times \mathbb{Z}_+$, siendo $s_d \in V$ el *nodo de origen*, $t_d \in V$ el *nodo de destino*, y $v_d \in \mathbb{Z}_+$ el *volumen* (se denomina con este término a la cantidad de slots requeridos); y un número fijo de slots disponibles $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+$. El RSA consiste en determinar una ruta y asignar un conjunto de slots consecutivos para cada demanda en D , garantizando que dos demandas que comparten al menos un arco en sus rutas no utilicen slots en común. En otras palabras, para cada demanda $d \in D$ se debe asignar un camino $P_d \subseteq E$ que conecte s_d con t_d y un intervalo I_d compuesto por v_d slots consecutivos en el rango $[0, \bar{s} - 1]$, de manera que, para cualquier par de demandas $d \neq d'$, si $P_d \cap P_{d'} \neq \emptyset$, entonces $I_d \cap I_{d'} = \emptyset$. Para simplificar la notación, definimos las funciones $s, t : D \rightarrow V$ y $v : D \rightarrow \mathbb{Z}_+$ de manera que para toda demanda

$d = (s_d, t_d, v_d) \in D$ se tiene $s(d) = s_d$, $t(d) = t_d$, y $v(d) = v_d$.

En la Figura 1.1 se presenta un ejemplo con una solución para una instancia del problema sobre una red representada mediante el grafo G formado por seis nodos $(V_1, \dots, V_6)$. Los arcos dirigidos de G indican los enlaces de transmisión entre los nodos, mientras que los bloques de colores sobre cada enlace representan la asignación de slots de espectro a las demandas a satisfacer, asociando cada color a una demanda. Cada enlace cuenta con una capacidad limitada de seis slots, y a cada una de las siguientes cuatro demandas se le debe asignar una ruta y un conjunto contiguo de slots, garantizando que no haya solapamiento en los enlaces compartidos:

- $d_1 = (V_1, V_3, 3)$
- $d_2 = (V_2, V_6, 2)$
- $d_3 = (V_1, V_2, 4)$
- $d_4 = (V_4, V_2, 3)$

A la demanda d_1 se le asigna la ruta formada por los enlaces (V_1, V_2) y (V_2, V_3) , siendo éste el camino más corto entre su origen V_1 y su destino V_3 , y los slots $\{0, 1, 2\}$. A d_2 se le asignan los enlaces (V_2, V_3) y (V_3, V_6) , siendo también éste el camino corto entre V_2 y V_6 , y los slots $\{3, 4\}$. En este caso, dados los enlaces usados por d_2 , no sería posible asignar los slots $\{0, 1, 2\}$, ya que el enlace (V_2, V_3) es también usado por d_1 , que tiene asignados estos tres slots. A d_3 se le asignan los enlaces (V_1, V_4) y (V_4, V_2) y los slots $\{0, 1, 2, 3\}$. Cabe destacar que, siendo el origen y el destino de esta demanda los nodos V_1 y V_2 , respectivamente, el camino más corto entre ellos está formado por el enlace (V_1, V_2) . Sin embargo, no es posible asignar este camino a d_3 , ya que el volumen de la demanda excede los slots disponibles en el enlace. Por último, a la demanda d_4 se le asignan los enlaces (V_4, V_5) , (V_5, V_6) y (V_6, V_2) y los slots $\{0, 1, 2\}$. De forma análoga al caso anterior, no es posible asignar a esta demanda la ruta más corta entre su origen y su destino, ya que estaría formada por el enlace (V_4, V_2) , el cual solo dispone de dos slots libres.

Como función objetivo para el RSA, en la literatura se encuentran al menos cuatro criterios utilizados:

- Minimizar el máximo índice de slot ocupado: Este objetivo busca compactar todas las demandas dentro del intervalo más bajo posible, reduciendo el ancho espectral total utilizado y facilitando la ubicación de futuras demandas sin modificar las demandas existentes [17, 25].
- Minimizar el número total de slots consumidos: En lugar de fijarse en la posición del último slot, esta métrica considera la cantidad de slots efectivamente asignados en alguno de los enlaces, priorizando configuraciones que utilicen la menor cantidad de slots aunque se produzcan “huecos” entre ellos [38, 60].
- Minimizar la suma de las longitudes de las rutas: En este caso, se pone el foco sobre el número total de enlaces utilizados, buscando minimizar la longitud de las rutas asignadas a cada demanda [49, 58].
- Enfoques multi-criterio: Algunas propuestas combinan consumo eléctrico, ancho espectral máximo y slots utilizados totales, buscando un balance entre eficiencia energética y eficiencia espectral [31, 40, 42].

En este trabajo utilizamos como función objetivo la minimización de la longitud total de las rutas asociadas a las demandas. Más precisamente, la función objetivo es la suma de las longitudes de los caminos asignados a todas las demandas, siendo la longitud de un camino la cantidad de enlaces en la red que el camino utiliza. Cuando la capacidad de los enlaces no es un factor limitante, asignar

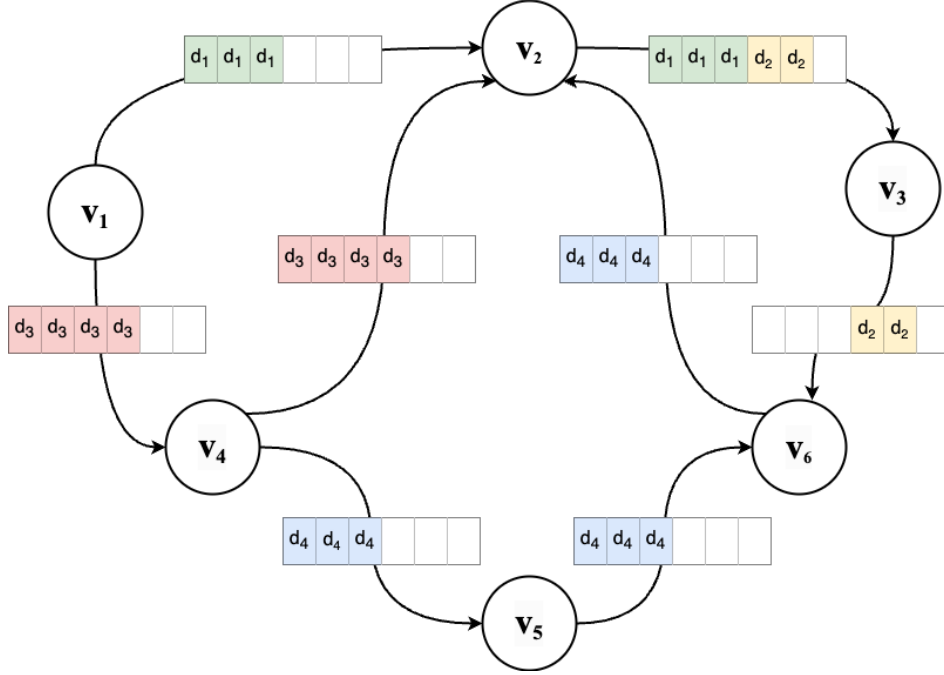


Fig. 1.1: Ejemplo de solución del RSA en una red pequeña. El grafo está formado por seis nodos y arcos dirigidos que representan los enlaces de transmisión. La asignación de slots a las demandas está representada por los bloques coloreados sobre los arcos. Cada enlace cuenta con una capacidad limitada de seis slots, y a cada una de las cuatro demandas se le asigna una ruta y un conjunto contiguo de slots.

el camino más corto a cada demanda garantiza optimalidad según este objetivo. En cambio, cuando la capacidad de los enlaces es más limitada, entonces no siempre es posible asignar a cada demanda un camino mínimo entre sus nodos de origen y destino, y entonces la componente de ruteo se vuelve no trivial dadas sus interacciones con la asignación de slots. Dado que la finalidad principal de la tesis es profundizar en el estudio poliedral del RSA –estudio en el cual la función objetivo tiene un rol secundario–, esta función objetivo simplifica la presentación y evita complejidades adicionales asociadas con la asignación de espectro.

1.2. Complejidad computacional

En esencia, el RSA combina dos subproblemas NP-difíciles ampliamente estudiados. La selección de rutas para múltiples demandas se puede ver como un problema de flujo multiproducto (donde cada demanda corresponde a un producto) y la asignación del espectro se ha estudiado en la literatura bajo diferentes nombres, incluyendo coloreo de intervalos y *chromatic scheduling* [43].

En detalle, el subproblema de ruteo en RSA puede modelarse como un flujo multicommodity (multiproducto), donde cada demanda debe seguir una única ruta entre su origen y destino sin exceder las capacidades de los enlaces. Este problema, incluso sin considerar espectro, es NP-difícil en casos muy básicos [24]. En particular, en [46] se demuestra que el flujo multicommodity con tan solo dos commodities (y capacidades unitarias en los enlaces) es NP-difícil. Esto implica que la componente de ruteo del RSA tiene asociada la dificultad del problema de encontrar caminos disjuntos o de satisfacer múltiples demandas en la red, que pertenece a la clase NP-difícil. Esta complejidad persiste aún

cuando las topologías de red a usar son relativamente simples. Por ejemplo, el problema de ruteo de dos demandas es NP-difícil incluso en topologías tipo árbol o anillo [5].

Por otro lado, el subproblema de asignación de espectro de RSA, por sí solo, también es NP-difícil. Si todas las rutas ya son conocidas o se determinan de manera única (por ejemplo, si la red óptica es un árbol), entonces el problema se reduce a la asignación del espectro y consiste únicamente en determinar los canales de cada demanda. Este problema equivale a una variante de coloreo de grafos donde cada par de demandas que comparten al menos un enlace se considera en conflicto y no puede tener asignados los mismos slots. En el caso especial donde cada demanda requiere de solo un slot, el problema se reduce al Routing and Wavelength Assignment (RWA) con ruteo fijo, cuyo componente de asignación es esencialmente un problema de coloreo de grafos tradicional (cada demanda es un vértice y existe una arista de conflicto si dos demandas comparten algún enlace). El problema de coloreo de vértices es NP-difícil [26], por lo que incluso esta simplificación del RSA es difícil de resolver de forma óptima. Cuando las demandas requieren múltiples slots consecutivos, como en redes flexibles, nos enfrentamos a una variante más general denominada *coloreo de intervalos*. En esta variante, cada vértice del grafo de conflictos -que representa una demanda- debe ser coloreado con un bloque de colores contiguos de tamaño igual al ancho de banda requerido por la demanda asociada. En consecuencia, el subproblema de asignación de espectro (aún con ruteo fijo) es NP-difícil, y es NP-completo decidir si existe una asignación de espectro factible dentro de un espectro óptico dado, incluso cuando la red óptica es un camino simple [56].

Dado que tanto el ruteo como la asignación de espectro por separado son problemas NP-difíciles, el RSA es al menos tan difícil como cada componente por separado [16, 61]. La combinación de ambas decisiones en el RSA produce un espacio de búsqueda complejo, donde las decisiones de selección de enlaces para las demandas afectan directamente a las de asignación de espectro. Es decir, elegir caminos distintos puede evitar o crear conflictos de espectro entre demandas, alterando el grafo de conflictos que buscaríamos colorear. Esta dependencia entre los subproblemas implica la complejidad que se tiene al intentar resolver el ruteo y luego la asignación de forma óptima.

En [9] se demuestra formalmente que el problema pertenece a la clase NP-difícil al reducir una versión del problema de planificación con múltiples procesadores al RSA.

La complejidad asociada a este problema justifica la necesidad de enfoques avanzados para abordar instancias de tamaño real.

1.3. Estado del arte y fundamentos teóricos

Dada la importancia que el RSA ha despertado en los últimos años, se han aplicado diversos enfoques de resolución dentro del área de la *optimización combinatoria*, tanto exacta como heurística e híbrida. El problema puede ser considerado como un problema de esta disciplina, ya que se dispone de un conjunto finito de soluciones factibles definido en términos combinatorios, sobre el cual se busca encontrar la mejor según algún criterio. Como muchos otros problemas difíciles en ciencias de la computación y en investigación de operaciones, el RSA se enfrenta a un crecimiento exponencial del espacio de búsqueda a medida que aumenta el tamaño de la instancia a resolver, por lo que se requieren métodos específicos para gestionar la complejidad computacional de este problema y, en la medida de lo posible, garantizar la obtención de soluciones óptimas.

En este contexto, la *programación lineal entera (PLE)* proporciona un marco matemático para modelar y resolver problemas de optimización combinatoria, que ha demostrado ser clave para esta clase de problemas [2, 4, 10]. En un modelo de PLE, se introducen variables de decisión *enteras* que representan las elecciones discretas del problema, una *función objetivo lineal* que representa el costo o beneficio a optimizar, y *restricciones lineales* que representan las condiciones y limitaciones a cumplir por las soluciones. La formulación general de un problema de PLE puede expresarse como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar (o maximizar)} \quad c^T x, \\ &\text{sujeto a: } Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned}$$

donde x es el vector de variables enteras, $Ax \leq b$ representa un conjunto de restricciones lineales y $c^T x$ es la función objetivo a minimizar o maximizar. Esta herramienta de formulación captura una amplia gama de problemas combinatorios, ya que las variables enteras permiten modelar decisiones o conteos discretos, mientras que las restricciones lineales permiten imponer capacidades, precedencias, compatibilidades, etc. Por ejemplo, una variable binaria podría indicar si se selecciona o no un determinado elemento de un conjunto, y las restricciones aseguran que se satisfacen requerimientos sobre el elemento a seleccionar.

A pesar de ser un problema NP-difícil, en el contexto de la PLE se han desarrollado *métodos exactos* que intentan obtener soluciones óptimas de forma eficiente. El más básico es el algoritmo *ramificación y acotación* (*branch-and-bound*), que explora el espacio de soluciones mediante un árbol de búsqueda. Cada nodo de este árbol se corresponde con un subproblema definido por restricciones adicionales (generalmente, fijando el valor que toman las variables), cuyo valor óptimo de la relajación lineal asociada sirve como cota para descartar nodos. Este procedimiento divide el problema en subproblemas más pequeños, pero crece exponencialmente en el peor caso. Para potenciar esta estrategia, el algoritmo de *ramificación y poda* (*branch-and-cut*) introduce la generación de *planos de corte* en la misma estructura de árbol. De esta manera, cuando la relajación lineal de un nodo retorna una solución fraccionaria, se buscan *desigualdades válidas*, es decir, desigualdades lineales que sean satisfechas por todas las soluciones enteras, y que además sean violadas por la solución fraccionaria actual (y en este caso se denominan *cortes*). Dichas desigualdades se añaden dinámicamente al modelo, produciendo relajaciones lineales más fuertes y, por ende, facilitando la poda de ramas. Por su parte, los algoritmos de *planos de corte* (*cutting planes*) se basan en resolver repetidamente la relajación lineal añadiendo cortes hasta alcanzar la solución entera. Este último método no suele aplicarse de forma aislada, ya que puede generar gran cantidad de cortes y tener una complejidad computacional asociada muy grande, y suele integrarse dentro de los algoritmos de ramificación y poda.

Se han propuesto diversos modelos de PLE para el RSA, por ejemplo, en [13] y [17]. En estas formulaciones se busca minimizar la cantidad de slots de espectro alocados por las demandas y se utilizan variables enteras para modelar la asignación de slots y arcos a demandas. En [16, 35, 41, 51, 59] se presentan también formulaciones de PLE para el RSA en el marco de una resolución mediante métodos heurísticos, utilizando como entrada del problema conjuntos de caminos precalculados y/o intervalos de slots para las demandas. De esta manera, se busca también minimizar la cantidad de slots asignados por las demandas, pero utilizando variables enteras para representar la asignación de rutas e intervalos de slots a demandas. Una limitación de estos enfoques es su alto tiempo de cómputo por lo que muchos de los trabajos mencionados combinan modelos exactos con algoritmos heurísticos diseñados específicamente para manejar redes de mayor tamaño. Estas heurísticas permiten obtener soluciones cercanas al óptimo en tiempos significativamente menores, logrando un equilibrio entre precisión y eficiencia computacional.

Como se mencionó anteriormente, una forma de acelerar la resolución de un modelo de PLE (especialmente cuando la cota dual no es ajustada) es agregar planos de corte durante la resolución. La búsqueda de desigualdades válidas asociadas a una formulación de programación lineal entera (PLE) conduce de manera natural al estudio de los poliedros correspondientes:

$$P(A, b) = \text{conv}\{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\},$$

ámbito conocido como *combinatoria poliedral*. La combinatoria poliedral se ha consolidado como una herramienta sumamente poderosa en el campo de la optimización combinatoria, y no solo ha permitido

el desarrollo de algoritmos eficientes, sino que, recíprocamente, la existencia de tales algoritmos suele implicar la posibilidad de caracterizaciones poliedrales [55].

En algunos casos particulares, se dispone de una descripción completa de la cápsula convexa del conjunto de soluciones, que puede ser usada para resolver el problema de separación del poliedro asociado a la formulación en tiempo polinomial. En [30] se demostró que los problemas de separación y optimización sobre un poliedro son polinomialmente equivalentes; esto es, si uno de ellos admite una resolución en tiempo polinomial, entonces el otro también. A partir de esta equivalencia, existe una conjetura generalizada que sugiere que si un problema de optimización combinatoria puede resolverse en tiempo polinomial, entonces debería existir alguna formulación de PLE del problema para la cual la cápsula convexa de sus soluciones admite una caracterización “elegante”.

En este sentido, la estructura combinatoria del poliedro puede proporcionar información valiosa sobre el problema asociado, y la identificación de desigualdades válidas y facetas permite mejorar las formulaciones del problema y reducir el espacio de búsqueda. Este enfoque es una herramienta que ha demostrado ser eficiente para la resolución de problemas de optimización combinatoria, por ejemplo, el problema del *viajante de comercio* o problemas de *asignación de tareas* [3, 18, 50].

Como se mencionó brevemente más arriba, cuando las instancias a resolver tienen tamaños demasiado grandes, es habitual recurrir a enfoques heurísticos. Para el RSA, una opción es predefinir los valores de algunas variables en los modelos de programación lineal entera, dejando que el modelo determine el resto de las decisiones. Cuando se fijan algunas decisiones, como caminos posibles o intervalos de slots para las demandas, es crucial garantizar que dichas decisiones prefijadas incluyan una representación lo suficientemente amplia del espacio de soluciones, asegurando así que las soluciones obtenidas sean cercanas al óptimo. Sin embargo, identificar conjuntos de variables que permitan cubrir de manera efectiva las posibles combinaciones de rutas e intervalos de slots tiene asociada una complejidad significativa. Para enfrentar este desafío, se han presentado enfoques que descomponen el problema en subproblemas manejables, especialmente mediante técnicas basadas en generación de columnas, permitiendo construir iterativamente conjuntos de variables relevantes. Por ejemplo, en los trabajos recientes [23, 36, 37, 54] se han propuesto heurísticas basadas en generación de columnas que construyen dinámicamente rutas e intervalos de slots para las demandas e incorporan únicamente las variables necesarias en cada iteración. Este enfoque, si bien no garantiza la optimalidad global, reduce de forma notable el tamaño de los modelos y, en consecuencia, la carga computacional asociada.

En [1, 9, 15] se utiliza uno de los enfoques de descomposición más utilizados, que consiste en dividir el problema RSA en dos subproblemas, buscando así reducir el espacio de búsqueda que tiene asociado el problema general. En una primera etapa se calcula el conjunto de los k caminos más cortos entre el origen y destino de cada demanda. Una vez que se determinó una ruta para cada demanda, se resuelve el problema de asignación de espectro, el cual consiste en asignar los slots asociados al espectro para cada demanda, teniendo la ruta de la misma ya establecida. En [21] se presenta un procedimiento metaheurístico para obtener el mejor orden de resolución basado en descomposición para una instancia del RSA, es decir, si resolver la asignación de espectro basada en el ruteo o si resolver el ruteo basado en candidatos de intervalos de espectro precalculados.

Además de las heurísticas mencionadas, se han propuesto en trabajos anteriores enfoques *meta-heurísticos* para el RSA, buscando encontrar soluciones para instancias grandes en tiempos más cortos que los enfoques exactos, aunque sin garantizar su optimalidad [11]. Los algoritmos genéticos han sido utilizados para el RSA en [14] donde se implementa una heurística Biased Random-Key Genetic Algorithm (BRKGA). De manera similar, en [45] y [52] se implementaron algoritmos basados en la metaheurística de optimización de colonias de abejas; en [27] un algoritmo basado en búsqueda tabú; en [62] un algoritmo basado en la metaheurística de optimización del lobo gris; y en [63] un procedimiento genético híbrido, el cual incluye una heurística y un algoritmo genético. En todos estos casos, comparando contra el uso de modelos de PLE estándar y utilizando solvers como CPLEX, los

algoritmos presentados obtienen soluciones cercanas al óptimo con un rendimiento significativo.

1.4. Problemas de coloreo

Como se mencionó en la Sección 1.2, el RSA está estrechamente relacionado con variantes del problema de coloreo de grafos. El problema de coloreo de intervalos (también llamado *chromatic scheduling*) implica asignar colores consecutivos a los vértices de un grafo, donde cada color representa un recurso o intervalo de tiempo distinto, de modo que los vértices adyacentes (que representan demandas de recursos superpuestas) reciban colores diferentes, minimizando la cantidad total de colores utilizados.

Formalmente, dado un conjunto de vértices $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, el objetivo del problema es asignar un intervalo de colores $\{s_t, \dots, s_t + d(t) - 1\}$ a cada vértice t donde s_t es el primer color asignado a t y $d(t)$ es la cantidad fija de colores que necesita t . El conjunto disponible de colores que tenemos es $\{0, \dots, \bar{t} - 1\}$ con $\bar{t} \in \mathbb{Z}$. El conjunto de aristas E representa conflictos tales que, para cada par de vértices $(t_1, t_2) \in E$, el último color del intervalo de t_1 debe ser menor que el primer color del intervalo de t_2 , o viceversa. El objetivo es encontrar una asignación de intervalos que satisfaga las restricciones de conflictos, mientras se minimiza el número total de colores asignados.

En [43] se demostró que el politopo de chromatic scheduling tiene una fuerte simetría, que permite simplificar muchas demostraciones. En este trabajo recurriremos a argumentos similares, enfatizando las similitudes entre los politopos de coloreo y la componente de coloreo que incluye el RSA.

Si bien los aspectos poliedrales de los problemas de coloreo relacionados con el RSA han sido ampliamente estudiados [47] y existen algunos trabajos en el tema sobre coloreo de intervalos y chromatic scheduling [19, 43], los aspectos teóricos y combinatorios poliedrales del RSA no han sido estudiados en profundidad [8, 64, 20]. En particular, la complejidad del problema aplicada a ciertas familias de grafos sigue siendo desconocida, y no hay estudios en la literatura en cuanto a la facetitud de posibles desigualdades válidas para distintas formulaciones del problema.

1.5. Contenido de la tesis

La presente tesis se enmarca en la línea de investigación que busca aplicar técnicas de programación lineal entera al RSA. Específicamente en los aspectos teóricos y poliedrales vinculados a su estructura combinatoria, los cuales han recibido escasa atención en la literatura. En este contexto, el objetivo central de este trabajo es contribuir a llenar ese vacío mediante un estudio poliedral en profundidad de una de las formulaciones más prometedoras —la formulación DR-AOV—, con el propósito de comprender mejor su estructura y desarrollar herramientas que mejoren su capacidad de resolución.

El Capítulo 1 comienza con una descripción del RSA, un problema que surge en el contexto de redes de fibra óptica elásticas y que busca simultáneamente encontrar rutas óptimas para un conjunto de demandas de tráfico y asignar eficientemente franjas de espectro electromagnético —llamadas slots— a lo largo de esas rutas. El problema es complejo debido a su naturaleza combinatoria, que implica restricciones de ruteo y asignación de espectro. Por un lado, el ruteo requiere identificar una ruta adecuada entre el origen y el destino de cada demanda, teniendo en cuenta la capacidad y la longitud del enlace de la red. Por otro lado, la asignación de espectro debe garantizar que los intervalos asignados sean contiguos, idénticos en todos los enlaces de la ruta y que no se compartan con otras demandas con las que se comparte al menos un enlace.

En la Sección 1.2 se describe la complejidad computacional del problema. En la Sección 1.3 se hace una breve introducción a la optimización combinatoria, a la programación lineal entera y a la combinatoria poliedral, y se presentan trabajos donde se usan técnicas provenientes de estas áreas,

buscando obtener soluciones para instancias del RSA. En la Sección 1.4 se definen los problemas de coloreo con los que el RSA comparte algunas características.

En el Capítulo 2 se presentan múltiples formulaciones de programación lineal entera para abordar el RSA. Las formulaciones emplean distintos conjuntos de variables de decisión y de restricciones que conducen a dos enfoques de modelado: uno con conjuntos de variables separados para las asignaciones de demandas a enlaces y de demandas a slots, y otro con un conjunto de variables unificado para ambos. A partir de estos enfoques y de la forma en que se realiza la asignación de demandas a slots, se propusieron cuatro familias de formulaciones con evaluaciones basadas en el objetivo de minimizar la cantidad de arcos utilizados. El rendimiento computacional de las formulaciones resultantes se evalúa en dos etapas, considerando diferentes topologías de red, demandas y cantidad de slots disponibles, mostrando que algunas formulaciones tienen dificultades al tratar de ser aplicadas sobre las instancias de mayor tamaño.

En el Capítulo 3 comenzamos un estudio poliedral sobre la cápsula convexa de las soluciones factibles de la formulación DR-AOV, que fue la de mejor rendimiento en los experimentos presentados en el Capítulo 2. Este modelo utiliza dos familias de variables binarias para indicar si una demanda utiliza un enlace específico y para administrar el orden de las demandas que comparten un arco, y una familia de variables enteras para representar el primer slot del intervalo de espectro asignado a cada demanda. Las restricciones garantizan la conservación del flujo a través de la red y la asignación de demandas a slots contiguos, evitando la superposición en pares de demandas que comparten enlaces.

Al comienzo de la Sección 3.1 se define el poliedro $P(G, D, \bar{s})$ como la cápsula convexa de las soluciones factibles asociadas a la formulación DR-AOV y cómo éste cumple una propiedad de simetría de las soluciones, similar a como se da en problemas derivados del problema clásico de coloreo. Luego, se presentan definiciones y conceptos necesarios para determinar la dimensión de $P(G, D, \bar{s})$. Específicamente, se considera el conjunto de pares de demandas L que comparten al menos un enlace en toda solución, el grafo de factibilidad G_d asociado a una demanda d (con el fin de determinar los nodos y enlaces que nunca serán parte de una ruta de d) y el poliedro $PR(G, D)$ que contiene todos los caminos factibles a ser usados por las demandas que se quieren satisfacer. A partir de estas estructuras auxiliares y del cálculo de la dimensión de $PR(G, D)$, se deriva un sistema minimal de ecuaciones para $P(G, D, \bar{s})$ y la dimensión del mismo.

En la Sección 3.2 se identifican y caracterizan desigualdades válidas del poliedro y se establecen las condiciones bajo las cuales definen facetas del mismo. Considerando el grafo de conflictos de demandas asociado al conjunto L de una instancia del RSA, se presenta la relación del RSA con el chromatic scheduling, donde la asignación de slots a las demandas a satisfacer se puede corresponder con el coloreo de los vértices, garantizando la no superposición de recursos. A partir de la relación entre los poliedros asociados a ambos problemas, se busca establecer condiciones necesarias bajo las cuales desigualdades válidas y facetas del chromatic scheduling puedan ser aplicadas al RSA. El análisis se extiende a familias de desigualdades clique, presentando las condiciones bajo las cuales estas son válidas y definen facetas de $P(G, D, \bar{s})$.

En el Capítulo 4, dada la complejidad del RSA y en particular haciendo hincapié en las dificultades relacionadas con la asignación de espectro, se presenta una formulación de PLE derivada de la formulación DR-AOV, que se corresponde a una relajación del problema obtenida al eliminar la componente de ruteo en la red. Se define el poliedro $RP(D, \bar{s})$ como la cápsula convexa de todas las soluciones factibles que satisfacen las restricciones de la formulación relajada y se demuestran las condiciones bajo las cuales el mismo tiene dimensión completa. Se verifica la simetría entre soluciones del poliedro y se presentan algunas de sus implicancias.

En la Sección 4.2 se presenta una serie de familias de desigualdades válidas para $RP(D, \bar{s})$, motivadas por el hecho de que cualquier desigualdad válida para este politopo también será válida para la formulación DR-AOV. En un principio, se presentan las familias de desigualdades llamadas *telescopicas*

izquierda y derecha, que buscan acotar los slots asignados para cada demanda en función de la suma de las diferencias de volumen entre elementos consecutivos en un conjunto de demandas posicionadas a la izquierda o a la derecha, respectivamente. Se demuestra que estas desigualdades definen facetas de $RP(D, \bar{s})$ bajo ciertas condiciones y que pueden ser separadas en tiempo polinomial, reduciendo el problema a un problema de camino mínimo en un grafo acíclico dirigido. Se hacen presentaciones y demostraciones análogas para las familias de desigualdades válidas *telescópicas reforzadas izquierda y derecha*, *telescópicas extendidas izquierda y derecha*, y *telescópicas medias*.

En la Sección 4.3 se estudian las facetas provenientes del politopo del subgrafo acíclico $P_{AC}(K_{|D|})$. Se demuestra que una proyección del poliedro $RP(D, \bar{s})$ está contenida en $P_{AC}(K_{|D|})$, por lo que toda desigualdad válida de este poliedro sigue siéndolo para $RP(D, \bar{s})$. Se presentan condiciones que permiten asegurar que también se preserve la propiedad de definir facetas del poliedro correspondiente.

En el Capítulo 5 se detallan los experimentos computacionales realizados, destinados a evaluar la contribución de las familias de desigualdades presentadas en el capítulo anterior, dentro de un entorno de planos de corte. Las pruebas se llevaron a cabo utilizando la formulación DR-AOV sobre múltiples instancias, variando parámetros como la topología de red, el número de slots disponibles y el conjunto de demandas, con el fin de observar el efecto de agregar los cortes dinámicos asociados a las familias de desigualdades de la Sección 4.2, tanto en la reducción del árbol de búsqueda como en la mejora de la cota inferior de la relajación lineal.

Los resultados muestran que, en la mayoría de los casos, el número de nodos explorados en el árbol se reduce, y la cota inferior se ve mejorada hasta en un 8 %. Sin embargo, la sobrecarga de cómputo que implica la separación exacta de estas familias de desigualdades no siempre se compensa con la disminución del tamaño de la búsqueda, por lo que se discuten posibles optimizaciones y la incorporación de estrategias heurísticas que equilibren la generación de cortes y el tiempo de resolución. Dado que el objetivo principal no es implementar un procedimiento de ramificación y corte completo para el RSA, en esta sección sólo se discuten estas posibilidades sin estudiar en forma completa sus implicancias computacionales.

Finalmente, en el Capítulo 6 se exponen las conclusiones más destacadas de este trabajo y se presentan diferentes líneas de trabajo a futuro, como variantes de los modelos de PLE presentados, el uso de heurísticas en la separación de desigualdades y la extensión de las familias de cortes. De esta forma, se busca sentar las bases para continuar este estudio y potenciar los resultados obtenidos.

2. FORMULACIONES DE PROGRAMACIÓN ENTERA PARA EL RSA

En este capítulo presentamos familias de formulaciones compactas de PLE para el RSA que surgen del trabajo [6] realizado en el marco de esta tesis y en colaboración con Marcelo Bianchetti. Cada modelo utiliza distintos conjuntos de variables y restricciones, lo que conduce a descripciones matemáticas alternativas del mismo problema. Un aspecto interesante de este trabajo consiste en la comparación empírica de dichas representaciones para determinar cuáles resultan más efectivas en la resolución del problema. Con este propósito, se realizan experimentos computacionales, centrándose en su rendimiento en términos de tiempo de ejecución y escalabilidad. Para garantizar consistencia en dichas evaluaciones, se aplica la misma función objetivo en todos los modelos. Esta evaluación nos permite identificar la formulación que ofrece el mejor desempeño, ya sea por alcanzar soluciones óptimas en el menor tiempo o por lograr la menor brecha de optimalidad dentro de un tiempo límite predefinido. Esto resalta la importancia de explorar múltiples formulaciones y analizar su desempeño computacional.

2.1. Definiciones generales

En las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3 se presenta la notación asociada a conjuntos, constantes y variables utilizadas en las formulaciones del actual capítulo.

Conjuntos	Descripción
V	Conjunto de nodos de la red
$E \subseteq V \times V$	Conjunto de arcos dirigidos (enlaces)
D	Conjunto de demandas
$\delta^-(j) \subseteq E$	Conjunto de arcos que ingresan al nodo j .
$\delta^+(j) \subseteq E$	Conjunto de arcos que salen al nodo j .
$\delta(j) \subseteq E$	Conjunto de arcos incidentes al nodo j .

Tab. 2.1: Definición de conjuntos utilizados en las formulaciones de PLE.

Para abordar el RSA mediante programación lineal entera, consideramos dos formas naturales de modelar el mismo:

- Utilizando un conjunto de variables para representar el enrutamiento y otro conjunto de variables para la asignación de slots.
- Utilizando un único conjunto de variables para la representación del enrutamiento y para la asignación de slots.

En primer lugar, presentaremos los modelos que utilizan dos conjuntos de variables separados para la asignación de demandas a enlaces y de demandas a slots. Luego describimos los modelos que

Constantes	Descripción	Dominio
$\bar{s}$	Cantidad de slots disponibles por arco	$\mathbb{Z}_+$
$v(d)$	Volumen de la demanda d	$\{0, \dots, \bar{s} - 1\}$
$s(d)$	Origen de la demanda d	V
$t(d)$	Destino de la demanda d	V

Tab. 2.2: Definición de constantes utilizadas en las formulaciones de PLE.

integran ambas decisiones en un único conjunto de variables, asignando simultáneamente demandas a enlaces y slots.

Dentro de cada una de estas dos categorías, se consideran dos enfoques para gestionar la asignación de slots consecutivos a las demandas:

- Asignación explícita *demanda-slot*: Se utilizan variables que indican si un slot específico está asignado a una demanda en particular.
- Asignación implícita *demanda-rango de slots*: Se utilizan variables que identifican el primer y/o último slot asignada a cada demanda. Dado que el volumen de la demanda es fijo, si el slot s es el primer slot asignado a la demanda d , entonces el rango de slots $\{s, \dots, s + v(d) - 1\}$ también estará asignado a d .

Basándonos en estas consideraciones, las formulaciones de PLE que se presentan a continuación se agrupan en cuatro familias:

- *Demanda-Rango* (DR): Modelos que utilizan conjuntos separados de variables para el enrutamiento y la asignación de slots, y emplean la asignación implícita de rangos de slots.
- *Demanda-Slot* (DS): Modelos que también separan las variables para el enrutamiento y los slots, pero con una asignación explícita de slots de forma individual.
- *Demanda-Slot-Enlace* (DSL): Modelos que integran en un único conjunto de variables las decisiones de enrutamiento y asignación de slots, utilizando la asignación explícita de slots.
- *Demanda-Rango-Enlace* (DRL): Modelos que también unifican las decisiones en un solo conjunto de variables, pero emplean la asignación implícita de rangos de slots.

Como se mencionó anteriormente, aunque es posible considerar diversas funciones objetivo según necesidades específicas o preferencias, como podría ser la diferencia entre el máximo y el mínimo slot utilizado entre todos los arcos, el número total de slots asignados en todos los enlaces de red, la suma de todas las longitudes de las rutas asignadas, optamos por utilizar una función objetivo que minimice la cantidad de arcos empleados en las soluciones.

Cabe aclarar que las denominaciones empleadas para las formulaciones de PLE presentadas a continuación no son autoexplicativas, ya que provienen de la nomenclatura utilizada en el artículo previamente publicado en inglés [6]. En dichas siglas, el prefijo identifica la familia de formulaciones a la que pertenece el modelo (DR, DS, DSL, DRL), mientras que el sufijo se corresponde a las iniciales del nombre de la formulación en inglés (por ejemplo, Base Formulation para BF). Se mantiene esta convención por coherencia con la publicación original.

Variable	Descripción	Dominio
y_{de}	Indica si la demanda d usa el arco e	$\{0, 1\}$
l_d	Indica el primer slot asignado la demanda d	$\mathbb{Z}_+$
r_d	Indice el ultimo slot asignado la demanda d	$\mathbb{Z}_+$
$z_{dd'}$	Indica si para las demandas d y d' se cumple que $r_d < l_{d'}$	$\{0, 1\}$
$x_{dd'}$	Indica si las demandas d y d' comparten un arco y se cumple que $r_d < l_{d'}$	$\{0, 1\}$
w_{ds}	Indica si la demanda d tiene asignado el slot s	$\{0, 1\}$
u_{des}	Indica si la demanda d tiene asignado el slot s en el enlace e	$\{0, 1\}$
l_{ds}	Indica si la demanda d tiene asignado el slot s como primer slot	$\{0, 1\}$
r_{ds}	Indica si la demanda d tiene asignado el slot s como último slot	$\{0, 1\}$
l_{des}	Indica si la demanda d en el arco e tiene asignado el slot s como primer slot	$\{0, 1\}$

Tab. 2.3: Definición de variables utilizadas en las formulaciones de PLE.

2.2. Formulaciones de asignación demanda-rango (DR)

En esta familia de formulaciones buscamos asociar arcos con demandas para definir las rutas, y el primer y último slot con demandas para definir los intervalos de slots.

Formulación base (DR-BF)

En esta primera formulación asociamos arcos con demandas para definir los caminos y, además, modelamos el primer y el último slot asignado a cada demanda. Para ello, para cada demanda $d \in D$ y cada arco $e \in E$, utilizamos la variable binaria y_{de} de modo que $y_{de} = 1$ si y sólo si el camino correspondiente a la demanda d tiene asignado el arco e . Por otro lado, para cada demanda $d \in D$ se utilizan las variables $l_d, r_d \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\}$, de manera que el intervalo de slots asignado a la demanda d queda definido por $\{l_d, \dots, r_d\}$. Finalmente, para garantizar que los intervalos de slots asociados a pares de demandas cuyos caminos no son disjuntos no se solapen, introducimos la variable binaria $z_{dd'}$ tal que, para dos demandas d y d' , si $r_d < l_{d'}$ entonces $z_{dd'} = 1$.

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{e \in E} y_{de} \quad (2.1)$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta^-(j)} y_{de} - \sum_{e \in \delta^+(j)} y_{de} = \begin{cases} -1 & \text{si } j = s(d) \\ 1 & \text{si } j = t(d) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall j \in V, \forall d \in D \quad (2.2)$$

$$z_{dd'} + z_{d'd} = 1 \quad \forall d, d' \in D, d \neq d' \quad (2.3)$$

$$r_d + 1 \leq l_{d'} + \bar{s}(3 - z_{dd'} - y_{de} - y_{d'e}) \quad \forall d, d' \in D, d \neq d', \forall e \in E \quad (2.4)$$

$$r_d - l_d + 1 = v(d) \quad \forall d \in D \quad (2.5)$$

$$0 \leq l_d \leq r_d \leq \bar{s} - v(d) \quad \forall d \in D \quad (2.6)$$

Con la función objetivo (2.1) buscamos minimizar el número total de arcos en todas las rutas asignadas. Las restricciones (2.2) constituyen un sistema clásico de conservación de flujo en redes, garantizando que cada demanda d recorra un camino desde su origen $s(d)$ hasta su destino $t(d)$. Las restricciones (2.3) y (2.4) establecen que, para cada par de demandas d, d' , el intervalo de slots de una de ellas debe posicionarse a la izquierda del intervalo de slots de la otra cuando comparten al menos un arco. Es decir, si las demandas d y d' comparten el arco e , entonces las restricciones (2.3) implican que $z_{dd'} + y_{de} + y_{d'e} = 3$ o $z_{d'd} + y_{de} + y_{d'e} = 3$, imponiendo, por lo tanto, que $r_d < l_{d'}$ o $r_{d'} < l_d$. Notar que las restricciones (2.3) se definen para todos los pares de demandas, pero solo resultan efectivas cuando dichas demandas comparten al menos un arco, ya que en esos casos es necesario imponer un orden entre sus intervalos de slots. En caso contrario, las desigualdades asociadas (2.4) quedan inactivas. Las restricciones (2.5) y (2.6) aseguran que el número de slots asignado a cada demanda satisfaga su volumen requerido.

Limite con un slot (DR-OSB)

Las restricciones (2.5) permiten eliminar las variables r , ya que éstas pueden expresarse en función de las variables l . Reemplazando las restricciones (2.5) y (2.4) por la dada a continuación, obtenemos esta nueva formulación.

$$l_{d'} \geq l_d + v(d) - \bar{s}(3 - z_{dd'} - y_{de} - y_{d'e}) \quad \forall d, d' \in D, \forall e \in E \quad (2.7)$$

Variables alternativas de orden (DR-AOV)

Se reemplaza la variable z por la variable x , buscando una alternativa para asegurar que los intervalos asociados a pares de demandas con caminos no disjuntos no se superpongan. La variable $x_{dd'}$ es igual a 1 si los caminos asignados a las demandas d y d' comparten un arco y $r_d < l_{d'}$. La formulación DR-AOV queda definida por las familias de restricciones (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) y las que se presentan a continuación:

$$x_{dd'} + x_{d'd} \geq y_{de} + y_{d'e} - 1 \quad \forall d, d' \in D, d \neq d', \forall e \in E \quad (2.8)$$

$$r_d + 1 \leq l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{dd'}) \quad \forall d, d' \in D, d \neq d' \quad (2.9)$$

Las restricciones (2.8) aseguran que si dos demandas d y d' comparten un arco, entonces $x_{dd'} = 1$ o $x_{d'd} = 1$. Las restricciones (2.9) aseguran que si $x_{dd'} = 1$ entonces $r_d + 1 \leq l_{d'}$, por lo que los slots asignados a d' deberán tener índices mayores a los slots asignados a d . Si $x_{d'd} = 1$ entonces pasaría lo opuesto. Dado que por las restricciones (2.8) o (2.9) no puede ocurrir que $x_{dd'} = 1$ y $x_{d'd} = 1$, aseguramos que todo par de demandas que comparten un enlace no tendrá asignado un mismo slot. Por otro lado, si las demandas d y d' no comparten un enlace, no es necesario imponer que las variables $x_{dd'}$ y $x_{d'd}$ no puedan ser ambas iguales a 1.

Sobre esta formulación puede aplicarse una variación que simplifica la representación de la asignación de slots para cada demanda. En lugar de utilizar dos familias de variables para denotar el primer y el último slot a usar por cada demanda, se puede hacer uso de la igualdad $l_d = r_d + v(d) - 1$. De este modo, se conserva únicamente la variable asociada al primer slot de cada demanda, mientras que el último slot queda definido de forma implícita. Con esta modificación, las restricciones (2.9) del modelo se sustituyen por las que se muestran a continuación.

$$l_d + v(d) \leq l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{dd'}) \quad \forall d, d' \in D, d \neq d' \quad (2.10)$$

Asignación binaria de slots (DR-BSA)

Partiendo de la formulación base DR-BF, una alternativa a la asignación de slots a demandas mediante las variables enteras l y r consiste en utilizar variables binarias. Implementamos esta asignación mediante la variable binaria l_{ds} para cada demanda $d \in D$ y cada slot $s \in \{0, \dots, \bar{s} - v(d)\}$, de modo que $l_{ds} = 1$ si s es el primer slot asignado a la demanda d y $l_{ds} = 0$ en caso contrario. Cuando $l_{ds} = 1$, los slots $\{s, \dots, s + v(d) - 1\}$ son asignados a la demanda d . El modelo DR-BSA utiliza la familia de restricciones (2.2) y las que se presentan a continuación:

$$\sum_{s=0}^{\bar{s}-v(d)} l_{ds} = 1 \quad \forall d \in D \quad (2.11)$$

$$\sum_{s'=\max\{0, s-v(d')+1\}}^{s+v(d)-1} l_{d's'} \leq 3 - y_{de} - y_{d'e} - l_{ds} \quad \forall d, d' \in D, d \neq d', \forall e \in E, \quad (2.12)$$

$$\forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - v(d)\}$$

Las restricciones (2.11) aseguran que cada demanda tenga asignado exactamente un único primer slot. Las restricciones (2.12) aseguran que si el slot s es el primer slot asignado a la demanda d , entonces los siguientes $v(d) - 1$ slots son asignados a d , es decir, ninguno de estos slots va a ser asignado como el slot inicial de otra demanda que comparta al menos un enlace con d . De esta manera, logramos satisfacer las restricciones de no superposición.

Restricciones más ajustadas (DR-SC)

La familia de restricciones (2.12) asegura en una única restricción que los slots asignados a la demanda d son consecutivos. En la formulación DR-SC se expresa esta restricción del problema utilizando las siguientes $v(d)$ desigualdades para cada demanda d' distinta de d y cada slot:

$$l_{d'(s+i)} \leq 3 - y_{de} - y_{d'e} - l_{ds} \quad \forall d, d' \in D, d \neq d', \forall e \in E, \quad (2.13)$$

$$\forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - v(d)\},$$

$$\forall i \in \{1 - v(d'), \dots, v(d) - 1\}$$

Las restricciones (2.13) aseguran que si dos demandas diferentes d y d' comparten un enlace e y siendo s el primer slot asignado a d , no puede existir un slot en el intervalo $\{s, \dots, s + v(d) - 1\}$ asignado a d' como primer slot.

2.3. Formulaciones de asignación demanda-slot (DS)

En esta familia de formulaciones se busca una asociación explícita de slots a demandas, en lugar de una asignación de intervalos de slots mediante el uso de las variables l y r .

Formulación base (DS-BF)

En esta formulación, para cada demanda $d \in D$ y cada slot $s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\}$, la variable binaria w_{ds} toma el valor 1 si la demanda d utiliza el slot s y el valor 0 en caso contrario. Para la asignación de arcos a demandas, utilizamos las variables y como en los modelos anteriores.

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{e \in E} y_{de} \quad (2.14)$$

s.t.

(2.2)

$$y_{de} + w_{ds} + y_{d'e} + w_{d's} \leq 3 \quad \begin{array}{l} \forall d, d' \in D, d \neq d', \\ \forall e \in E, \\ \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \end{array} \quad (2.15)$$

$$w_{d, \bar{s}} = 0 \quad \forall d \in D \quad (2.16)$$

$$\sum_{s'=1+s-v(d)}^s w_{ds'} \geq v(d)(w_{ds} - w_{d(s+1)}) \quad \begin{array}{l} \forall d \in D, \\ \forall s \in \{v(d), \dots, \bar{s} - 1\} \end{array} \quad (2.17)$$

$$\sum_{s=0}^{\bar{s}-1} w_{ds} = v(d) \quad \forall d \in D \quad (2.18)$$

Con la función objetivo (2.14), al igual que en los casos anteriores, buscamos minimizar el número total de arcos en todas las rutas asignadas. Las restricciones (2.2) aseguran la definición de un camino del inicio al destino para cada demanda y son las mismas que se usaron en las formulaciones previas. Las restricciones (2.15) aseguran que al menos una de las variables y_{de} , w_{ds} , $y_{d'e}$ y $w_{d's}$ no estará activa y de esa manera, si dos demandas comparten al menos un enlace, no compartirán ningún slot. Las restricciones (2.16) y (2.17) aseguran la contigüidad de los intervalos de slots de manera que si un slot s es asignado a la demanda d y el slot $s + 1$ no lo es, entonces los $v(d) - 1$ slots previos a s deben estar asignados a d . Para facilitar la formulación, suponemos la existencia de la variable $w_{d, \bar{s}}$, a la cual se le asigna el valor 0. Cabe mencionar que la familia de restricciones (2.17) podría reemplazarse por un conjunto de desigualdades de la forma $w_{ds'} \geq w_{ds} - w_{d, s+1}$ para todo $s' \in \{s - v(d) + 1, \dots, s\}$, las cuales dominan a (2.17). En efecto, al sumar dichas desigualdades se obtiene exactamente la restricción (2.17), por lo que ambas son equivalentes. Finalmente, las restricciones (2.18) aseguran que el volumen de cada demanda sea satisfecho.

Restricciones de contigüidad alternativa (DS-ACC)

En esta formulación, se reemplazan las restricciones (2.17) por las siguientes:

$$w_{ds} + w_{ds'} \leq w_{d,s+1} + 1 \quad \begin{array}{l} \forall s, s' \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\}, \\ s' > s, \forall d \in D \end{array} \quad (2.19)$$

Las restricciones (2.19) aseguran que todos los slots asignados a una demanda sean consecutivos, forzando que si $w_{ds} - w_{d,s+1} = 1$ entonces s debe ser el último slot asignado a la demanda d , por lo que $w_{ds'} = 0$ para todo $s' > s$.

Restricciones de contigüidad más ajustadas (DS-SCC)

Se busca otra forma de expresar las restricciones (2.17) y se reemplazan por las siguientes:

$$\sum_{\substack{s \in \{0, \dots, \bar{s}-1\}: \\ s \equiv j \pmod{v(d)}}} w_{ds} = 1 \quad \begin{array}{l} \forall d \in D, \\ \forall j \in \{0, \dots, v(d) - 1\} \end{array} \quad (2.20)$$

$$\sum_{\substack{s \in \{0, \dots, i\}: \\ s \equiv i \pmod{v(d)}}} w_{ds} \geq \sum_{\substack{s \in \{0, \dots, i-1\}: \\ s+1 \equiv i \pmod{v(d)}}} w_{ds} \quad \begin{array}{l} \forall d \in D, \\ \forall i \in \{0, \dots, \bar{s} - v(d)\} \end{array} \quad (2.21)$$

Las restricciones (2.20) y (2.21) aseguran que para cada demanda y cada enlace van a existir exactamente $v(d)$ variables consecutivas activadas, y el resto con valor nulo. Este hecho no es sencillo de ver, por lo que en el Apéndice A se presenta una demostración de que estas restricciones son suficientes para lograr la configuración enunciada. Finalmente, las restricciones (2.21) evitan asignaciones de slots que se extienden desde los últimos índices del espectro hasta los primeros, impidiendo configuraciones de tipo circular. Por ejemplo, si $\bar{s} = 8$ y $v(d) = 3$, una asignación que utilice los slots 6, 7, 0 resultaría inválida ya que la desigualdad correspondiente a $i = 1$ tendría $w_{d,0} = 1$ en el lado derecho, por lo que sería violada.

2.4. Formulaciones de asignación demanda-slot-enlace (DSL)

En esta familia de formulaciones se presenta una asociación explícita de slots a demandas y enlaces, manejando de esta manera el ruteo y la asignación de slots con solo una familia de variables. La principal ventaja de esta representación es la facilidad para garantizar que cada slot es asignado a lo sumo a una demanda en cada enlace.

Formulación base (DSL-BF)

Se utilizan las variables u relacionando demandas con enlaces y slots de manera tal que para cada demanda $d \in D$, cada enlace $e \in E$ y cada slot $s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\}$, $u_{des} = 1$ indica que la demanda d utiliza el slot s sobre el enlace e .

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{e \in E} \sum_{s=0}^{\bar{s}-1} u_{des} / v(d) \quad (2.22)$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta^-(j)} u_{des} - \sum_{e \in \delta^+(j)} u_{des} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall j \in V, j \neq s(d), j \neq t(d), \\ \forall d \in D, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \end{array} \quad (2.23)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(j)} u_{des} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall j \in V, j = s(d), \\ \forall d \in D, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \end{array} \quad (2.24)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(j)} \sum_{s=0}^{\bar{s}-1} u_{des} \geq v(d) \quad \begin{array}{l} \forall j \in V, j = s(d), \\ \forall d \in D \end{array} \quad (2.25)$$

$$\sum_{d \in D} u_{des} \leq 1 \quad \forall e \in E, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \quad (2.26)$$

$$u_{de, \bar{s}} = 0 \quad \forall d \in D, \forall e \in E \quad (2.27)$$

$$\sum_{s'=s-v(d)}^{s-1} u_{des'} \geq v(d)(u_{de, s-1} - u_{des}) \quad \begin{array}{l} \forall d \in D, \forall e \in E, \\ \forall s \in \{v(d) - 1, \dots, \bar{s} - 1\} \end{array} \quad (2.28)$$

La función objetivo (2.22), al igual que en las formulaciones anteriores, busca minimizar el número de arcos usados en el ruteo. Las restricciones (2.23), (2.24) y (2.25) aseguran la definición de un camino del inicio al destino para cada demanda. Específicamente, las restricciones (2.23) imponen conservación de flujo para cada nodo del grafo y cada demanda, excepto para el inicio y el destino de la demanda correspondiente. Las restricciones (2.24) previenen el uso de arcos entrantes al nodo inicio de la demanda correspondiente, y las restricciones (2.25) evitan flujos vacíos. Las restricciones (2.25) podrían expresarse como una igualdad en lugar de una desigualdad, manteniendo la correctitud del modelo. Las restricciones (2.27), (2.28) aseguran la contigüidad de slots y que el volumen de la demanda correspondiente es satisfecho. Cuando $u_{de, s-1} - u_{des} \neq 0$ se tiene que el slot s es el último slot usado por la demanda d , por lo que se asegura que todas las variables u_{dei} para i en el intervalo $s - v(d)$ y s tendrán valor 1. Dado que se tiene que cubrir cada posible combinación de pares de slots consecutivos, incluido el último par de slots, se incluye una variable $u_{de\bar{s}}$ ficticia, la cual siempre tiene valor nulo. La restricción (2.28) está dominada por el conjunto de desigualdades $u_{des'} \geq u_{de, s-1} - u_{des}$, cuya suma equivale a la desigualdad presentada.

Restricciones alternativas de satisfacibilidad y contigüidad (DSL-ASCC)

Las restricciones (2.27) y (2.28) pueden ser reemplazadas por las siguientes:

$$v(d) u_{des} \leq \sum_{s'=\max\{0, s-v(d)\}}^{\min\{\bar{s}-1, s+v(d)\}} u_{des'} \quad \forall d \in D, \forall e \in E, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \quad (2.29)$$

$$u_{des_1} + u_{des_2} \leq u_{de(s_1+1)} + 1 \quad \begin{array}{l} \forall d \in D, \forall e \in E, \\ \forall s_1, s_2 \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\}, s_2 > s_1 \end{array} \quad (2.30)$$

Las restricciones (2.29) aseguran que el número de slots usados por d en e sea mayor o igual a $v(d)$ y de esta manera se garantiza la satisfacibilidad de cada demanda. Las restricciones (2.30) aseguran que si la demanda d tiene asignado el slot s_1 y s_2 (con $s_1 < s_2$) en el enlace e , entonces todo slot en el

rango $\{s_1, \dots, s_2\}$ debe ser también asignado a d en el enlace e . La restricción (2.30) se podría definir considerando un índice adicional $i \in \{s_1 + 1, \dots, s_2\}$ y restricciones de la forma $u_{des_1} + u_{des_2} \leq u_{dei} + 1$, sin embargo la forma actual resulta suficiente para garantizar la contigüidad y evita incrementar el número de restricciones del modelo.

Agregando límites a los slots (DSL-ASB)

En esta formulación, se busca una asignación implícita de los intervalos de slots asignados a cada demanda. Para esto, en lugar de las variables enteras l_d y r_d , este modelo utiliza variables binarias asociadas a cada demanda y a cada slot. Para $d \in D$ y $s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\}$, definimos la variable binaria l_{ds} (resp. r_{ds}) de modo que $l_{ds} = 1$ (resp. $r_{ds} = 1$) cuando s es el primer (resp. último) slot asignado a d . En este contexto, la formulación DSL-ASB usa las restricciones (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.29) y las siguientes:

$$\sum_{s=0}^{\bar{s}-1} s(r_{ds} - l_{ds}) = v(d) - 1 \quad \forall d \in D \quad (2.31)$$

$$\sum_{s=0}^{\bar{s}-1} l_{ds} = 1 \quad \forall d \in D \quad (2.32)$$

$$\sum_{s=0}^{\bar{s}-1} r_{ds} = 1 \quad \forall d \in D \quad (2.33)$$

$$u_{des} \leq \sum_{s'=max\{0, s-v(d)+1\}}^s l_{ds'} \quad \forall d \in D, \forall e \in E, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \quad (2.34)$$

$$u_{des} \leq \sum_{s'=s}^{min\{\bar{s}-1, s+v(d)+1\}} r_{ds'} \quad \forall d \in D, \forall e \in E, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \quad (2.35)$$

Las restricciones (2.31) aseguran que el rango asignado a la demanda correspondiente satisface su volumen. Si s_1 y s_2 son el primer y último slot asignado a la demanda d , respectivamente, entonces $l_{ds_1} = r_{ds_2} = 1$ mientras que $l_{ds'} = 0$ para todos los slots s' diferentes a s_1 y $r_{ds'} = 0$ para todos los slots s' diferentes a s_2 . De esta manera, el lado izquierdo de las restricciones se reduce a $s_2 - s_1$. Las restricciones (2.32) y (2.33) aseguran que cada demanda tenga exactamente un primer y un último slot. Las restricciones (2.34) y (2.35) aseguran que cualquier slot usado por una demanda pertenezca al rango especificado por las variables l y r correspondientes, relacionando de esta manera las variables u con las variables l y r . Observemos que, dado que cada demanda tiene exactamente un primer y un último slot asignado, las restricciones (2.31)–(2.33) implican que el índice asociado al primer slot l_{ds} siempre será menor que el correspondiente al último slot r_{ds} . En efecto, la igualdad (2.31) garantiza que la diferencia entre ambos índices sea precisamente $v(d) - 1$, asegurando así que el rango asignado a cada demanda coincida con su volumen requerido.

2.5. Formulación de asignación demanda-rango-enlace (DRL)

En la siguiente formulación se asignan los intervalos de slots de forma implícita, representando el primer slot utilizado por cada demanda en cada enlace. Para ello, utilizamos la

variable binaria l_{des} para cada $d \in D$, $e \in E$ y $s \in \{0, \dots, \bar{s} - v(d)\}$, de modo que $l_{des} = 1$ si y solo si la demanda d tiene asignado el slot s sobre el enlace e y s es el slot inicial asignado a d .

Formulación base (DRL-BF)

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{e \in E} \sum_{s=0}^{\bar{s}-1} l_{des} \quad (2.36)$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta^-(j)} l_{des} - \sum_{e \in \delta^+(j)} l_{des} = 0 \quad \forall j \in V, j \neq s(d), j \neq t(d), \quad \forall d \in D, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \quad (2.37)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(j)} \sum_{s=0}^{\bar{s}-1} l_{des} = 0 \quad \forall j \in V, j = s(d), \forall d \in D \quad (2.38)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(j)} \sum_{s=0}^{\bar{s}-1} l_{des} = 1 \quad \forall j \in V, j = s(d), \forall d \in D \quad (2.39)$$

$$\sum_{d' \in D: d' \neq d} \sum_{s'=\max\{0, s-v(d')+1\}}^{\min\{\bar{s}-1, s+v(d)-1\}} l_{d'es'} \leq \bar{s}(1 - l_{des}) \quad \forall d \in D, \forall e \in E, \quad \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} \quad (2.40)$$

En esta formulación buscamos minimizar la función objetivo (2.36), nuevamente con el fin de reducir el número total de enlaces utilizados en el ruteo. Las restricciones (2.37), (2.38) y (2.39) aseguran la existencia de caminos factibles para cada demanda, eliminando ciclos que empiecen y terminen en el nodo inicial, y garantizando que cada demanda tenga asignado un único slot inicial, respectivamente. Las restricciones (2.40) aseguran el no solapamiento de slots, siendo que si una demanda d tiene asignado el slot s como slot inicial en el enlace e , entonces s y los próximos $v(d) - 1$ slots no pueden ser asignados a ninguna otra demanda diferente de d en el enlace. La restricción (2.40) podría reemplazarse por la desigualdad

$$\sum_{d \in D} \sum_{s'=\max\{0, s-v(d)+1\}}^{\min\{s, \bar{s}-v(d)\}} l_{des'} \leq 1, \quad \forall e \in E, \forall s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\}$$

la cual garantiza que ningún slot s sea asignado a más de una demanda sobre el mismo enlace.

2.6. Experimentos computacionales

En esta sección evaluamos el desempeño computacional de las formulaciones de PLE presentadas en las secciones anteriores. Se comparan los modelos en términos de tiempo de resolución, calidad de la solución y escalabilidad, utilizando instancias de prueba con diferentes características asociadas a la topología de red, cantidad de demandas y slots disponibles.

Descripción de las instancias de prueba

Las instancias a ser utilizadas sobre las formulaciones se generaron considerando diferentes características de la topología de red, de las demandas a satisfacer y de la cantidad de slots disponibles, buscando realizar un análisis exhaustivo y representativo:

- **Topologías de red:** Consideramos diversas topologías clásicas utilizadas en la literatura de redes de fibra óptica:
 - British Telecom (20 nodos, 32 enlaces)
 - COST239 (11 nodos, 26 enlaces)
 - Deutsche Telekom-14 (14 nodos, 23 enlaces)
 - Deutsche Telekom-21 (21 nodos, 32 enlaces)
 - EON (19 nodos, 35 enlaces)
 - NSF (14 nodos, 21 enlaces)
 - Spanish Telefonica (21 nodos, 34 enlaces)
 - UKNET (21 nodos, 39 enlaces)
- **Cantidad de demandas:** Para cada topología, generamos conjuntos de demandas con los tamaños que se muestran a continuación. Además, cada demanda tiene un volumen asociado generado con una distribución uniforme sobre $\{0, \dots, \bar{s} - 1\}$, y también un inicio y destino generados uniformemente sobre V .
 - $|D| = 10$
 - $|D| = 20$
 - $|D| = 40$
 - $|D| = 80$
- **Cantidad de slots disponibles:** Evaluamos los siguientes valores posibles para $\bar{s}$, los cuales dependen de la cantidad de demandas $|D|$:
 - $\bar{s} = 2|D|$
 - $\bar{s} = 2|D|+10$
 - $\bar{s} = 2|D|+20$
 - $\bar{s} = 2|D|+30$

En esta etapa, los valores son generados con fines experimentales y no representan necesariamente valores realistas de tráfico o capacidad. Cada combinación de estos parámetros genera instancias con distintos niveles de dificultad computacional, entendida esta en función de los valores adoptados por los parámetros del problema —por ejemplo, el tamaño de la red, la cantidad y volumen de las demandas y la cantidad total de slots disponibles—, los cuales determinan el esfuerzo computacional requerido para su resolución y nos permiten evaluar la escalabilidad de las formulaciones. De este modo, se terminan generando 128 instancias que se buscan resolver sobre las 12 formulaciones de PLE presentadas.

Configuración experimental

Las pruebas fueron realizadas en una computadora con procesador Intel i5 @ 2.10 GHz y 8 GB de memoria RAM, con sistema operativo Ubuntu 14.04 LTS. Se utilizó IBM ILOG CPLEX 12.6 [32] como solver de optimización, junto con OPL (Optimization Programming Language) como lenguaje de modelado para la formulación de los problemas.

Dada la gran cantidad de pruebas que se realizaron, se fijó un tiempo límite de 600 segundos. Si la solución óptima no se alcanza dentro de ese lapso, la ejecución se detiene. En caso de que el tamaño del modelo generado sea tal que CPLEX no sea capaz de manejarlo, se retorna una excepción de falta de memoria. Por otro lado, dado que el volumen, el inicio y el destino de las demandas son generados de forma aleatoria, la instancia puede resultar no factible.

Resultados

En la Tabla 2.4 y en las Figuras 2.1 y 2.2 se presenta un resumen del desempeño de cada formulación de PLE en los experimentos computacionales. Las métricas reportadas incluyen:

- **% Resuelto:** Porcentaje de instancias que fueron resueltas por optimalidad dentro del tiempo límite.
- **% Tiempo límite:** Porcentaje de instancias que no alcanzaron la optimalidad dentro del tiempo máximo propuesto.
- **% Memoria:** Porcentaje de instancias que no llegaron a construirse debido a una excepción de falta de memoria.
- **Máximo $|D|$:** Máximo número de demandas que pudieron resolverse de manera óptima en alguna instancia.

Considerando solo las formulaciones con mejor rendimiento dentro de sus respectivas familias, y sin incluir una formulación de la familia DRL por su similitud con la familia DSL en la evaluación, las formulaciones con mejor performance son las DR-AOV, DS-SCC y DSL-BF, las cuales se comparan a continuación en término de cantidad promedio de variables, restricciones y tiempos de resolución. Los resultados se presentan en función del tamaño de las instancias, determinado por los valores adoptados por los parámetros $|D|$ y $\bar{s}$, y el promedio se calculó sumando los valores de todas las instancias de cada tamaño y dividiendo por el total de instancias de dicha categoría.

El tamaño de los modelos, medido en términos del número de variables y restricciones, crece según lo mostrado en la Tabla 2.5 con el tamaño de las instancias. Como consecuencia, a partir de ciertos valores de $|D|$ y $\bar{s}$, no es posible finalizar la generación de los modelos asociados. En particular, la formulación DS-SCC no pudo ser generada para instancias con más de 40 demandas y 90 slots, mientras que en la formulación DSL-BF se tuvo la misma limitación a partir de instancias con 80 demandas y 160 slots.

En cuanto a la cantidad de restricciones, el modelo DS-SCC presentó la mayor cantidad debido a la familia de restricciones asociada a la propiedad de no solapamiento. Se requieren $|D||D||E|\bar{s}$ restricciones para asegurar que ningún par de demandas tenga asignado un mismo slot en un mismo enlace. La cantidad de restricciones total en este modelo es un orden de magnitud en $|D|$ superior al número de variables de DSL-BF y es lo que termina impidiendo

Formulación	% Resuelto	% Tiempo límite	% Memoria	Máx. $ D $
DR-BF	86	14	0	40
DR-OSB	85	15	0	40
DR-AOV	90	10	0	40
DR-BSA	37	4	59	20
DR-SC	22	0	78	10
DS-BF	34	18	48	10
DS-ACC	38	3	59	20
DS-SCC	46	2	52	20
DSL-BF	46	52	2	20
DSL-ASCC	17	17	64	10
DSL-ASB	21	32	47	10
DRL-BF	35	9	56	10
Promedio	43.6	14.5	38.6	19.2

Tab. 2.4: Resumen del desempeño de las formulaciones de PLE en términos de resolución óptima, tiempo límite, errores de memoria y tamaño máximo de conjunto de demandas resuelto.

la generación de instancias debido a limitaciones de memoria. En este aspecto, DR-AOV resultó ser el modelo más eficiente, ya que el número de restricciones fue hasta dos órdenes de magnitud menor en comparación con DS-SCC y un orden de magnitud en $|D|$ menor en comparación con DSL-BF. Además, al no depender de $\bar{s}$, el número de restricciones no se ve afectado por modificaciones en este parámetro.

En cuanto a la cantidad de variables, el modelo DSL-BF presentó un número significativamente mayor que los demás. Esto se debe a la forma en que se representa la asignación de demandas a enlaces y slots, utilizando un conjunto de variables de tamaño $|D||E|\bar{s}$. En contraste, en las otras familias de modelos, la asignación de demandas a enlaces y slots se representa por separado, lo que reduce considerablemente la cantidad de variables. La formulación DS-SCC presenta un número teórico de variables igual a $|D|(|E| + \bar{s})$, menor que el de DR-AOV, que contiene $|D||E| + 2|D| + |D||D|$ variables.

El número de variables y restricciones que tiene asociada cada familia de formulaciones es presentada en la Tabla 2.5, considerando la formulación de mayor tamaño dentro de cada familia.

En términos de tiempos de ejecución y cantidad de instancias resueltas, el modelo DR-AOV fue el de mejores resultados ya que resolvió la mayor cantidad de instancias en forma óptima, mostrando además los mejores tiempos de resolución. La formulación DS-SCC resolvió la menor cantidad de instancias de manera óptima, debido a que en muchas de ellas la formulación no pudo ser generada por su tamaño. Por otro lado, aunque la formulación DSL-BF tuvo menos instancias sin resolver, esto se debió principalmente a excepciones por límite de tiempo, lo que podría mitigarse aumentando el tiempo máximo de resolución.

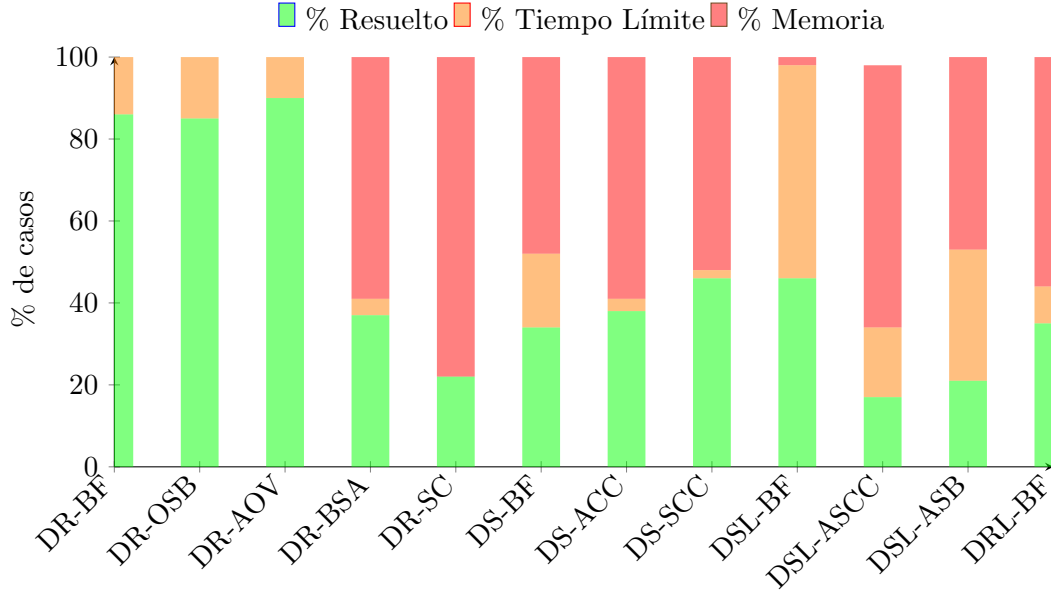


Fig. 2.1: Distribución de porcentaje de instancias según el estado de resolución

Familia	Variables	Restricciones
Demanda-rango (DR)	$\Theta(D E + D \bar{s})$	$\Theta(D ^2 E \bar{s})$
Demanda-slot (DS)	$\Theta(D E + D \bar{s})$	$\Theta(D ^2 E \bar{s})$
Demanda-slot-enlace (DSL)	$\Theta(D E \bar{s} + D \bar{s})$	$\Theta(D E \bar{s})$
Demanda-rango-enlace (DRL)	$\Theta(D E \bar{s})$	$\Theta(D E \bar{s})$

Tab. 2.5: Número de variables y restricciones de las familias de formulaciones de PLE presentadas, considerando la formulación de mayor tamaño dentro de cada familia.

Escenarios realistas

Para finalizar con esta sección, presentamos los resultados de los experimentos computacionales realizados con las formulaciones DR-AOV, DS-SCC y DSL-BF en escenarios realistas. Para ello, utilizamos las topologías de red British Telecom (14 nodos y 21 aristas) y NSF (20 nodos y 32 aristas) y una cantidad de 32 o 320 slots disponibles - slots de 12.5GHz y dos anchos de espectro óptico: 400GHz y 4000GHz -. Para cada $d \in D$, el volumen $v(d)$ se generó siguiendo una distribución uniforme en $\{1, 2, 4\}$, mientras que los nodos de origen y destino fueron seleccionados de manera aleatoria dentro del conjunto de vértices V . El tamaño del conjunto de demandas $|D|$ varía según la topología de la red y el número de slots. En la red NSF, cuando $\bar{s} = 32$, se consideran instancias con $|D| = 30, 50$ y 80 , mientras que para $\bar{s} = 320$ se emplean los valores $100, 150$ y 180 . En la red British Telecom, los valores de $|D|$ fueron $30, 50$ y 70 en ambos casos ($\bar{s} = 32$ y $\bar{s} = 320$). La elección de estos valores se realizó con el propósito de controlar la dificultad y el tamaño de las instancias. Por un lado, las instancias generadas con la red British Telecom, $\bar{s} = 32$ y $|D| = 80$ resultaron imposibles de resolver para cualquier modelo, incluso con un límite de tiempo de una hora. Por otro lado, dado que la red NSF cuenta con solo 14 nodos, no es posible generar más de 182 demandas

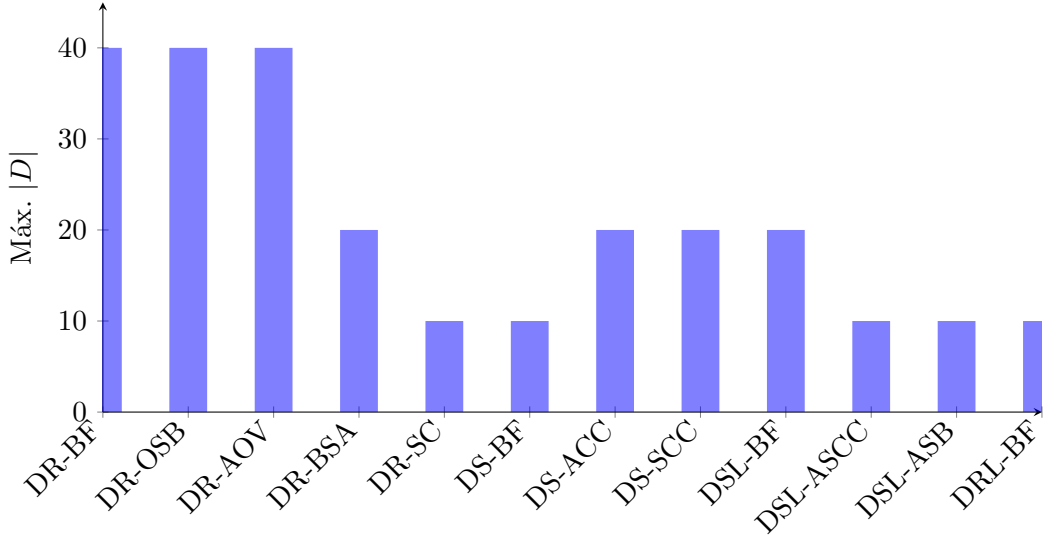


Fig. 2.2: Máximo número de demandas resueltas de manera óptima para cada formulación.

sin repetirlas. Para esta segunda etapa de evaluación, establecemos un tiempo límite de 1800 segundos.

En términos de performance se observan diferencias significativas entre las tres formulaciones analizadas:

- La formulación DR-AOV fue la que presentó los mejores tiempos de resolución en todas las configuraciones de prueba. En particular, para la red NSF con $\bar{s} = 32$, los tiempos de resolución estuvieron en el rango de entre 1 y 6 segundos, mientras que para $\bar{s} = 320$, los tiempos incrementaron, llegando a 365 segundos en la instancia de mayor tamaño. En la red British Telecom, el comportamiento de esta formulación fue similar, con tiempos de resolución que variaron entre 2 y 122 segundos, dependiendo del tamaño de la instancia.
- La formulación DS-SCC presentó dificultades en varias instancias, ya que no fue posible generar el modelo por la gran cantidad de restricciones asociada. En particular, para la red NSF, no fue posible generar los modelos a partir de instancias con 50 demandas y $\bar{s} = 32$, y en todos los casos con $\bar{s} = 320$. En la red British Telecom, este problema ocurrió en instancias de menor tamaño, no siendo posible generar los modelos sobre instancias con 50 demandas y $\bar{s} = 32$, y en todas las instancias con $\bar{s} = 320$.
- La formulación DSL-BF presentó tiempos de resolución intermedios entre los modelos anteriores. Para NSF con $\bar{s} = 32$, los tiempos de resolución variaron entre 3 y 22 segundos, mientras que con $\bar{s} = 320$ se incrementaron hasta alcanzar valores que superaron los 243 segundos en las instancias más grandes. En la red British Telecom se tuvieron valores en el rango de entre 10 y 151 segundos, dependiendo del tamaño de la instancia. Sin embargo, a diferencia de DS-SCC, la formulación DSL-BF logró resolver más instancias, aunque en los casos de mayor tamaño se alcanzó el límite de tiempo de 30 minutos, impidiendo obtener una solución óptima.

Las Tablas 2.6 y 2.7 muestran en detalle los resultados asociados al rendimiento de las formulaciones en los experimentos donde se utiliza NSF y British Telecom como topología de

red, respectivamente. Si una resolución excede el tiempo límite, se utiliza la etiqueta *Tiempo*. En el caso en que no es posible generar la formulación en memoria debido al tamaño de la instancia, se utiliza el carácter “-”.

Formulación	$\bar{s} = 32$			$\bar{s} = 320$		
	$ D = 30$	$ D = 50$	$ D = 80$	$ D = 100$	$ D = 150$	$ D = 180$
DR-BF	1	5	18	21	100	109
DR-OSB	2	6	18	30	76	296
DR-AOV	1	3	6	13	42	365
DR-BSA	33	129	594	-	-	-
DR-SC	51	179	-	-	-	-
DS-BF	17	50	-	-	-	-
DS-ACC	20	65	-	-	-	-
DS-SCC	14	49	-	-	-	-
DSL-BF	3	4	22	243	Tiempo	Tiempo
DSL-ASCC	18	29	161	-	-	-
DSL-ASB	11	21	Tiempo	-	-	-
DRL-BF	13	26	104	Tiempo	Tiempo	Tiempo

Tab. 2.6: Tiempos computacionales de las formulaciones en experimentos realistas con NSF como topología de red, en segundos.

Nuevamente, las formulaciones BF, OSB y AOV de la familia DR, junto con DSL-BF, presentan el mejor rendimiento, esta vez teniendo en cuenta los tiempos de resolución y el tamaño de las instancias que se pueden manejar sin obtener una excepción de memoria. Para todas las formulaciones de la familia DS y la mayoría de DSL, no es posible generar los modelos en memoria.

En conclusión, la formulación DR-AOV demostró nuevamente ser la formulación con mejor performance, logrando resolver todas las instancias en tiempos relativamente bajos. La formulación DS-SCC, en contraste, presentó dificultades debido a la gran cantidad de restricciones, lo que impidió su generación en la mayoría de los casos. Y por último, la formulación DSL-BF logró resolver más instancias que la formulación DS-SCC, pero en los casos de mayor tamaño, los tiempos de resolución alcanzaron el límite establecido.

Estos resultados refuerzan el interés en la formulación DR-AOV como una alternativa prometedora dentro de las distintas estrategias de modelado mediante PLE del RSA. Su capacidad para resolver de forma eficiente instancias de mayor tamaño sugiere que un estudio más profundo de su estructura combinatoria y poliedral podría aportar herramientas teóricas para explicar y potenciar su eficiencia, motivando así las líneas de trabajo desarrolladas en el resto de esta tesis.

Formulación	$\bar{s} = 32$			$\bar{s} = 320$		
	$ D = 30$	$ D = 50$	$ D = 70$	$ D = 100$	$ D = 150$	$ D = 200$
DR-BF	2	11	261	51	285	923
DR-OSB	2	9	19	81	349	Tiempo
DR-AOV	2	5	9	23	60	122
DR-BSA	64	1200	Tiempo	-	-	-
DR-SC	201	Tiempo	Tiempo	-	-	-
DS-BF	51	335	Tiempo	-	-	-
DS-ACC	37	1148	Tiempo	-	-	-
DS-SCC	65	362	Tiempo	-	-	-
DSL-BF	10	27	151	Tiempo	Tiempo	Tiempo
DSL-ASCC	48	72	Tiempo	-	-	-
DSL-ASB	59	240	Tiempo	-	-	-
DRL-BF	27	50	656	Tiempo	Tiempo	-

Tab. 2.7: Tiempos computacionales en segundos de formulaciones en experimentos realistas con British Telecom como topología de red.

3. ESTUDIO POLIEDRAL DE LA FORMULACIÓN DR-AOV

En este capítulo, presentamos un estudio poliedral de la cápsula convexa formada por el conjunto de soluciones factibles de la formulación DR-AOV. Nuestro enfoque está dirigido al análisis de los aspectos poliedrales de este modelo, con el objetivo de llenar un vacío en la literatura existente sobre el RSA. En particular, estamos interesados en determinar la dimensión del poliedro asociado y en la derivación de nuevas clases de desigualdades válidas. Además, para las nuevas familias de desigualdades presentadas, buscamos establecer las condiciones bajo las cuales definen facetas. Al abordar estos aspectos, nuestro propósito es aportar conocimientos teóricos que ayuden a una mejor comprensión de la estructura poliedral del RSA, sentando así las bases para futuros estudios y aplicaciones prácticas.

Trabajamos sobre la formulación DR-AOV dado que mostró el mejor desempeño en los experimentos reportados en el Capítulo 2. En este modelo, para cada demanda $d \in D$ y cada arco $e \in E$, la variable binaria y_{de} indica si la demanda d utiliza o no el arco e . Para cualquier par de demandas distintas $d, d' \in D$, la variable binaria $x_{dd'}$ es igual a 1 si las demandas d y d' comparten un arco y el primer slot asignado a d es menor que el asignado a d' . Además, para cada demanda d , la variable entera l_d representa el primer slot del intervalo de espectro asignado a d y, dado que el volumen de demandas es fijo, a d se le asigna el intervalo de slots $\{l_d, \dots, l_d + v(d) - 1\}$. La formulación DR-AOV completa se presenta a continuación.

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{e \in E} y_{de} \quad (3.1)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(u)} y_{de} - \sum_{e \in \delta^+(u)} y_{de} = \begin{cases} -1 & \text{si } u = s(d) \\ 1 & \text{si } u = t(d) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall u \in V, \forall d \in D, \quad (3.2)$$

$$x_{dd'} + x_{d'd} \geq y_{de} + y_{d'e} - 1 \quad \forall d, d' \in D, d \neq d', \forall e \in E, \quad (3.3)$$

$$l_d + v(d) \leq l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{dd'}) \quad \forall d, d' \in D, d \neq d', \quad (3.4)$$

$$0 \leq l_d \leq \bar{s} - v(d) \quad \forall d \in D, \quad (3.5)$$

$$y_{de} \in \{0, 1\} \quad \forall d \in D, \forall e \in E, \quad (3.6)$$

$$x_{dd'} \in \{0, 1\} \quad \forall d, d' \in D, d \neq d'. \quad (3.7)$$

Las restricciones (3.2) imponen condiciones de conservación de flujo para cada demanda, garantizando así la existencia de un camino desde el origen hasta el destino de cada demanda. Por otra parte, las restricciones (3.3) establecen la relación entre demandas que tienen asignado un mismo enlace, de modo que si las demandas d y d' comparten un arco, al menos una de las variables $x_{dd'}$ y $x_{d'd}$ debe tomar valor 1. A continuación, las restricciones (3.4) establecen un orden en la asignación de los slots para las demandas que comparten un enlace: si $x_{dd'} = 1$, entonces el primer slot asignado a d , l_d , debe preceder al primer slot asignado a d' , $l_{d'}$, y viceversa. Observemos que $x_{dd'}$ y $x_{d'd}$ no pueden tomar el valor 1 al mismo tiempo, ya que las restricciones (3.4) impondrían que $l_d + v(d) \leq l_{d'}$ y $l_{d'} + v(d') \leq l_d$, lo cual no es posible. Por último, en las restricciones (3.5)–(3.7) se definen los dominios de las variables.

3.1. Propiedades generales

En esta sección se define formalmente el poliedro asociado al conjunto de soluciones factibles del modelo DR-AOV. Luego de la definición, se procede a presentar algunas características y propiedades combinatorias que serán utilizadas para calcular la dimensión del poliedro.

Definición 3.1. Definimos el poliedro $P(G, D, \bar{s})$ como la cápsula convexa de todas las soluciones $(y, l, x) \in \mathbb{Z}^{|D||E|+|D|+(|D|^2-|D|)}$ que satisfacen las restricciones (3.2)-(3.7).

El politopo $P(G, D, \bar{s})$ tiene una propiedad especial de simetría. Para cada solución $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ existe una solución simétrica respecto a la asignación de espectro $\bar{z} = (y, \bar{l}, \bar{x})$, donde el vector $\bar{l}$ se obtiene sustituyendo l_d por $\bar{l}_d = \bar{s} - v(d) - l_d$ para todas las demandas $d \in D$ y $\bar{x}$ se obtiene sustituyendo $x_{d_1 d_2}$ por $\bar{x}_{d_1 d_2} = x_{d_2 d_1}$ para todos los pares de demandas diferentes $d_1, d_2 \in D$. Esta solución simétrica se corresponde con reflejar la asignación de slots con respecto a $(\bar{s} - 1)/2$.

A modo de ejemplo de la propiedad de simetría presentada, en la Figura 3.1 se muestra la solución simétrica asociada a la asignación de slots dada en el ejemplo de la Sección 1.1, a la que llamaremos *solución original*. Con este ejemplo se busca ilustrar la relación entre la solución original y su correspondiente solución simétrica. Siendo $\bar{s} = 6$, la demanda d_1 que tenía el slot 0 como primer slot en la solución original pasa a tener asignado el 3 como primer slot, mientras que la demanda d_2 , que tenía el slot 3 como primer slot, pasa a tener el slot 1 como slot inicial. Esto se aplica al resto de demandas, preservando la factibilidad de la solución e invirtiendo el orden en que las demandas se ubican en el espectro, reflejándose además en la variable $x_{d_1 d_2}$, que intercambia su valor con $x_{d_2 d_1}$.

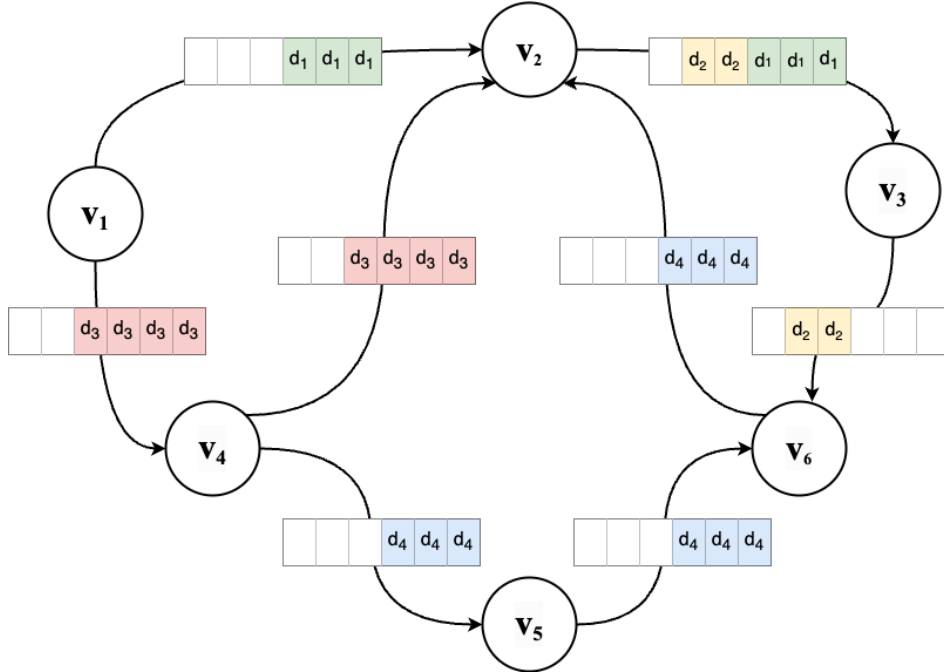


Fig. 3.1: Representación de la solución simétrica asociada al ruteo y a la asignación de espectro del ejemplo presentado en la Sección 1.1. Se obtienen nuevas asignaciones aplicando $\bar{\ell}_d = \bar{s} - v(d) - \ell_d$ y $\bar{x}_{d_1 d_2} = x_{d_2 d_1}$, evidenciando la propiedad de simetría en el modelo.

En la Tabla 3.1 se muestran los valores de las variables l_d y $\bar{l}_d$ de la solución original y simétrica, respectivamente. A pesar de las diferencias, ambas soluciones son válidas y cumplen con las restricciones del problema.

Demanda	$v(d)$	l_d (Solución original)	$\bar{l}_d$ (Solución simétrica)
d_1	3	0	3
d_2	2	3	1
d_3	4	0	2
d_4	3	0	3

Tab. 3.1: Comparación entre la solución original y la simétrica para cada demanda.

En el problema de *chromatic scheduling* se encuentra que las asignaciones de colores (o, en nuestro caso, espectro) exhiben una simetría análoga a la presentada para el RSA: una asignación puede transformarse en otra “reflejada” sin afectar la factibilidad de la solución asociada. Esta simetría en las soluciones que definen $P(G, D, \bar{s})$ nos permite obtener el siguiente resultado, que será de utilidad a lo largo de este trabajo. Definimos $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_+^{|D|}$ como el vector cuya d -ésima coordenada es $v(d)$, para cada $d \in D$. Definimos además $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^{|D|}$ como el vector de unos de dimensión $|D|$.

Teorema 3.1. *Sea $\alpha^\top y + \beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ una desigualdad válida para $P(G, D, \bar{s})$, entonces la desigualdad simétrica $\alpha^\top y - \beta^\top l + \bar{\gamma}^\top x \leq \pi_0 - \beta^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})$ es válida para $P(G, D, \bar{s})$, donde $\bar{\gamma}_{dd'} := \gamma_{d'd}$ para cada $d, d' \in D$, $d \neq d'$. Además, si la desigualdad original define faceta de $P(G, D, \bar{s})$, la desigualdad simétrica también lo hace.*

Demostración. En primer lugar probaremos que la desigualdad simétrica es válida para $P(G, D, \bar{s})$. Sea $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ una solución factible y sea $\bar{z} = (\bar{y}, \bar{l}, \bar{x})$ su solución simétrica asociada, donde $\bar{y} = y$, $\bar{l}_d = \bar{s} - v(d) - l_d$ para $d \in D$, y $\bar{x}_{dd'} = x_{d'd}$ para $d, d' \in D$, $d \neq d'$. Verificamos primero que $(\bar{y}, \bar{l}, \bar{x}) \in P(G, D, \bar{s})$ mostrando que esta solución también satisface (3.2)–(3.7).

- *Restricciones (3.2).* Para todo $d \in D$, $e \in E$ tenemos que $\bar{y}_{de} = y_{de}$, y siendo que (y, l, x) satisface (3.2), tenemos que $(\bar{y}, \bar{l}, \bar{x})$ también satisface (3.2)
- *Restricciones (3.3).* Para todo $d \neq d'$, $e \in E$ tenemos que

$$\bar{x}_{dd'} + \bar{x}_{d'd} = x_{d'd'} + x_{dd'} \geq y_{de} + y_{d'e} - 1 = \bar{y}_{de} + \bar{y}_{d'e} - 1,$$

dado que (y, l, x) satisface (3.3).

- *Restricciones (3.4).* Para $d, d' \in D$, $d \neq d'$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{l}_d + v(d) &= (\bar{s} - v(d) - l_d) + v(d) = \bar{s} - l_d, \\ \bar{l}_{d'} + \bar{s}(1 - \bar{x}_{dd'}) &= (\bar{s} - v(d') - l_{d'}) + \bar{s}(1 - x_{d'd}) = \bar{s} - v(d') - l_{d'} + \bar{s} - \bar{s}x_{d'd}. \end{aligned}$$

La restricción de (3.4) que debe verificarse es

$$\bar{s} - l_d \leq \bar{s} - v(d') - l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{d'd}),$$

o, equivalentemente,

$$(l_d - l_{d'}) + \bar{s} - v(d') - \bar{s}x_{d'd} \geq 0.$$

Es fácil ver que esta última expresión es exactamente la restricción (3.4) escrita para el par (d', d) y, como (y, l, x) es una solución factible, se cumple esta desigualdad.

- *Cotas de las variables l .* De $0 \leq l_d \leq \bar{s} - v(d)$ se deduce

$$0 \leq \bar{s} - v(d) - l_d \leq \bar{s} - v(d),$$

de modo que $(\bar{y}, \bar{l}, \bar{x})$ cumple (3.5).

- *Dominio de las variables y .* Dado que no hay cambio en la variable y_{de} , (3.6) permanece siendo válido.
- *Dominio de las variables x .* El cambio de $x_{dd'}$ por $x_{d'd}$ no altera el dominio de la variable, por lo que (3.7) permanece siendo válido.

Dado que $(\bar{y}, \bar{l}, \bar{x})$ es una solución factible, entonces cumple la desigualdad válida, es decir $\alpha^\top \bar{y} + \beta^\top \bar{l} + \gamma^\top \bar{x} \leq \pi_0$. Pero $\alpha^\top \bar{y} + \beta^\top \bar{l} + \gamma^\top \bar{x} = \alpha^\top y + \beta^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v} - l) + \gamma^\top x$. Como (y, l, x) es una solución arbitraria, entonces la desigualdad $\alpha^\top y - \beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0 - \beta^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})$ es válida para $P(G, D, \bar{s})$.

Ahora, sea $H = \{(y, l, x) \in P(G, D, \bar{s}) : \alpha^\top y + \beta^\top l + \gamma^\top x = \pi_0\}$ la cara asociada a la desigualdad. Dado que hay $k = \dim(P(G, D, \bar{s}))$ puntos afinmente independientes en H , $(y^1, l^1, x^1), \dots, (y^k, l^k, x^k)$, construyendo la solución simétrica asociada a cada uno de ellos, tenemos los puntos $(\bar{y}^1, \bar{l}^1, \bar{x}^1), \dots, (\bar{y}^k, \bar{l}^k, \bar{x}^k)$. Estos puntos cumplen

$$\alpha^\top \bar{y}^h - \beta^\top \bar{l}^h + \gamma^\top \bar{x}^h = \pi_0 - \beta^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v}), \quad h = 1, \dots, k.$$

Dado que cada uno de los puntos $(\bar{y}^1, \bar{l}^1, \bar{x}^1), \dots, (\bar{y}^k, \bar{l}^k, \bar{x}^k)$ se obtiene reflejando la asignación de slots con respecto a $(\bar{s} - 1)/2$, lo cual es una transformación afín, el conjunto $H' = \{(y, l, x) \in P(G, D, \bar{s}) : \alpha^\top y - \beta^\top l + \gamma^\top x = \pi_0 - \beta^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})\}$ contiene k puntos afinmente independientes, y su dimensión es la misma que la de H . Por lo tanto, si $\alpha^\top y + \beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ define una faceta, entonces $\alpha^\top y - \beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0 - \beta^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})$ también lo hace. □

En particular, tenemos las siguientes consecuencias para las restricciones que definen $P(G, D, \bar{s})$.

Corolario 3.1.

1. La restricción $l_d + v(d) \leq l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{dd'})$ es simétrica a $l_d + v(d') \leq l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{d'd})$, para cualquier $d, d' \in D$, $d \neq d'$.
2. La restricción $x_{dd'} + x_{d'd} \geq y_{de} + y_{d'e} - 1$ es simétrica consigo misma (es decir, su restricción simétrica es nuevamente $x_{dd'} + x_{d'd} \geq y_{de} + y_{d'e} - 1$), para cualquier $d, d' \in D$, $d \neq d'$.

Vamos ahora a explorar la estructura poliedral de $P(G, D, \bar{s})$. Para esto, introducimos algunas definiciones que serán útiles a lo largo de esta sección en la determinación de la dimensión de $P(G, D, \bar{s})$. Dada una solución factible $(y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$, decimos que la demanda $d \in D$ está *ubicada a la derecha* de la demanda $d' \in D \setminus \{d\}$ si $l_d \geq l_{d'} + v(d')$, y que la demanda d está *ubicada a la izquierda* de la demanda d' si $l_{d'} \geq l_d + v(d)$.

Definición 3.2. Sea D un conjunto de demandas sobre el cual suponemos dado un orden total arbitrario, denotado por “ $<$ ”. Definimos el conjunto de *demandas que comparten enlaces* $L(G, D, \bar{s}) \subseteq D \times D$ asociado a G , D y $\bar{s}$ como

$$L(G, D, \bar{s}) = \left\{ (d, d') \in D \times D : d < d' \text{ y en toda solución } (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s}) \text{ existe un arco } e \in E \text{ tal que } y_{de} = y_{d'e} = 1 \right\}.$$

En otras palabras, $L(G, D, \bar{s})$ es el conjunto de pares de demandas $(d, d') \in D \times D$, $d < d'$, tales que en toda solución factible de $P(G, D, \bar{s})$, los caminos asociados a d y d' comparten al menos un arco $e \in E$. Es importante observar que el arco e no tiene que ser el mismo en todas las soluciones.

El conjunto $L(G, D, \bar{s})$ puede verse como un conjunto de *demandas conflictivas*, es decir, demandas a las que se les deben asignar conjuntos disjuntos de slots en cualquier solución. Por lo tanto, si $(d, d') \in L(G, D, \bar{s})$ el intervalo de slots asignado a d debe estar completamente a la izquierda o a la derecha del intervalo de slots asignado a d' y tenemos que $x_{dd'} + x_{d'd} = 1$. Esta información es importante para nuestros propósitos, ya que la condición $x_{dd'} + x_{dd} = 1$ proporciona una ecuación satisfecha por todos los puntos en $P(G, D, \bar{s})$, acotando así la dimensión de este politopo. Cuando el contexto esté claro, nos referiremos al conjunto $L(G, D, \bar{s})$ como L para simplificar la notación.

La Figura 3.2 presenta un ejemplo de la construcción del conjunto $L(G, D, \bar{s})$. Sea G el grafo representado en la figura, $D = \{d_1 = (s_1, t_1, 4), d_2 = (s_2, t_2, 2), d_3 = (s_3, t_3, 2)\}$ y $\bar{s} = 4$. En este caso, a la demanda d_1 se le asignará el arco e_1 o e_2 y dado que no hay suficientes slots, d_2 y d_3 no podrán utilizar el arco asignado a d_1 . De esta manera, independientemente del arco asignado a d_1 , las demandas d_2 y d_3 compartirán un arco en cada solución, y por lo tanto, el par (d_2, d_3) será un elemento del conjunto L asociado a la instancia.

Este ejemplo evidencia que el conjunto L no se deriva únicamente a partir de la estructura de G , sino que también depende de $\bar{s}$ y D . Si se tuviese un valor mayor de $\bar{s}$ o se redujeran los volúmenes requeridos por d_1 , d_2 o d_3 , los caminos asociados a estas demandas podrían no compartir un mismo arco en toda solución y, en consecuencia, el par (d_2, d_3) no pertenecería a L .

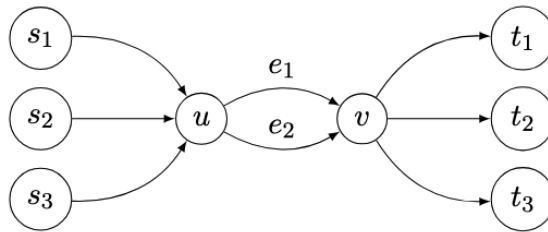


Fig. 3.2: Instancia en la que se muestran las posibles asignaciones de arcos para la demanda d_1 (arcos e_1 y e_2) y cómo, debido a la cantidad de slots disponibles ($\bar{s} = 4$), las demandas d_2 y d_3 deben compartir un arco, implicando que el par (d_2, d_3) sea un elemento del conjunto L .

Recordemos que para toda demanda $d \in D$, llamamos $s(d) \in V$ al nodo de origen de la demanda, $t(d) \in V$ al nodo de destino de la demanda, y $v(d) \in \mathbb{Z}_+$ a la cantidad de slots requeridos por la demanda (es decir, su volumen).

Definición 3.3. Sea $d \in D$ una demanda sobre el grafo dirigido $G = (V, E)$. El *grafo de factibilidad asociado a la demanda d* es el grafo dirigido $G_d = (V_d, E_d)$, donde

- E_d incluye todos los arcos que aparecen en algún camino dirigido entre $s(d)$ y $t(d)$, y todos los arcos que pertenecen a algún ciclo dirigido de G ,
- V_d está formado por todos los nodos incidentes a los arcos de E_d .

El grafo de factibilidad G_d contiene todos los arcos que la demanda d puede usar en alguna solución. Estos son los que aparecen en un camino entre $s(d)$ y $t(d)$, más todos los arcos que están en algún ciclo del grafo (es relevante observar que puede haber arcos en las dos categorías). En la Figura 3.3 los arcos con trazado grueso ilustran E_d , el cual incluye los arcos de la ruta $\{s(d), u, t(d)\}$, y los arcos del ciclo $\{a, b, c\}$. Por otro lado, los vértices resaltados, asociados al ciclo y al camino, son los elementos de V_d .

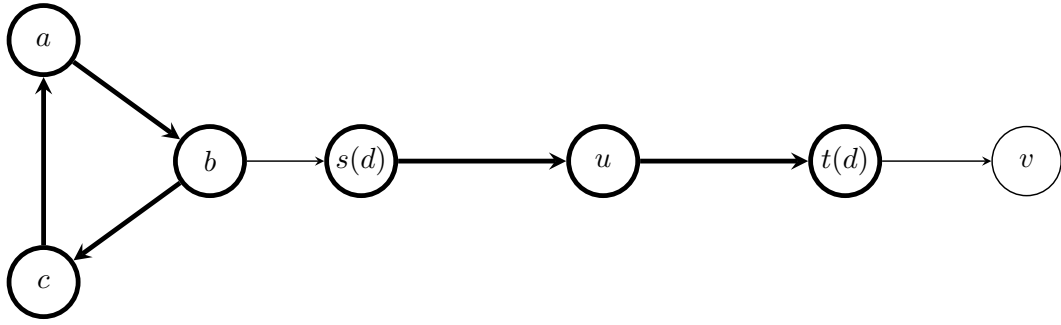


Fig. 3.3: Ejemplo del grafo de factibilidad $G_d = (V_d, E_d)$ asociado con la demanda d . Los arcos del camino con trazado grueso entre el origen $s(d)$ y el destino $t(d)$, junto con los arcos del ciclo resaltado constituyen las aristas de E_d , mientras que los vértices igualmente resaltados identifican el conjunto V_d .

El grafo de factibilidad asociado a $d \in D$ será de utilidad para identificar arcos que no pueden ser usados por la demanda d en ninguna solución, lo que implica que las variables y asociadas deben tomar valor cero. Esta observación será de ayuda para determinar la dimensión de $P(G, D, \bar{s})$ y, para ello, a continuación, presentamos una definición auxiliar.

Definición 3.4. Si $d \in D$ es una demanda, definimos el *politopo de todos los caminos de d* como

$$PR(G, d) = \text{conv} \left\{ y \in \{0, 1\}^{|E|} : \sum_{e \in \delta^-(u)} y_{de} - \sum_{e \in \delta^+(u)} y_{de} = \begin{cases} -1 & \text{si } u = s(d) \\ 1 & \text{si } u = t(d) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall u \in V \right\}.$$

El poliedro $PR(G, d)$ describe todos los caminos que puede usar la demanda d en la formulación DR-AOV. Este poliedro posee una estructura bien conocida, dado que su matriz

de coeficientes es precisamente la matriz de incidencia del grafo G [2]. Los dos lemas siguientes, asociados a la dimensión de este poliedro, presentan resultados que nos ayudarán más adelante a identificar un sistema minimal de ecuaciones para $PR(G, D, \bar{s})$.

Lema 3.1. Sea $G_d = (V_d, E_d)$ el grafo de factibilidad asociado a la demanda $d \in D$, entonces

$$\dim(PR(G_d, d)) = |E_d| - (|V_d| - 1).$$

Demostración. Sean $|V_d| = n$ y $|E_d| = m$. Estableceremos la dimensión de $PR(G_d, d)$ por inducción sobre el número de caminos entre $s(d)$ y $t(d)$.

Si existe solo una solución factible en $PR(G_d, d)$, entonces G_d es un camino sin nodos aislados y se deduce que $m = n - 1$ (el número mínimo de aristas en un grafo dirigido conexo simple). La dimensión del poliedro en este escenario está dada por:

$$\dim(PR(G_d, d)) = 0 = m - n + 1 = (n - 1) - n + 1.$$

Así, la dimensión del poliedro es 0, lo que corresponde a un único punto para este camino.

Si hay más de una solución factible en $PR(G_d, d)$, entonces o bien existen más de dos caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, en cuyo caso existe un vértice v cuyo grado de salida es estrictamente mayor que 1, o bien existe un ciclo aislado en G_d , que incluye digamos a un vértice v . A partir de v tomamos un camino dirigido o bien un ciclo con todos nodos de grado 2:

$$C = (v = v_0, v_1, \dots, v_{m'} = w)$$

hasta el primer vértice w cuyo grado de entrada es al menos 2 o bien hasta $w = v$ si se trata de un ciclo aislado. El camino o ciclo P puede estar formado por solo uno o varios arcos, y tenemos que $\delta^+(v_i) = \delta^-(v_i) = 1$ para $i = 1, \dots, v_{m'-1}$. En cualquier caso C es un camino inducido en el grafo dirigido, por lo que sea n' el número de nodos intermedios y m' el número de arcos de C , se tiene que $m' = n' + 1$.

Sea $G_D \setminus C$ el grafo obtenido al eliminar de G_d los arcos de C , manteniendo los vértices sin cambios. Por inducción, tenemos que

$$\dim(PR(G_D \setminus C, d)) = m - m' - (n - n' - 1) = m - n.$$

Como existe una solución en G_d que incluye las variables de C (que no están en $G_D \setminus C$), la dimensión de $PR(G_d, d)$ es al menos uno más que la dimensión de $PR(G_D \setminus C, d)$. Por lo tanto, tenemos que $\dim(PR(G_d, d))$ es mayor o igual a $m - n + 1$. Sin embargo, como la formulación asociada a G_d tiene m variables y n igualdades, de las cuales $n - 1$ son linealmente independientes, su dimensión es como máximo $m - (n - 1)$.

Por lo tanto, la dimensión de $PR(G_d, d)$ es $m - (n - 1)$. □

Además de la demostración por inducción sobre el número de caminos, el resultado se puede obtener de forma directa al notar que la matriz de incidencia de un grafo es totalmente unimodular y, en particular, que para un grafo conexo con n vértices su rango es $n - 1$ [48]. Dado que $PR(G_d, d)$ se caracteriza mediante las ecuaciones de conservación de flujo (definidas

por la matriz de incidencia) y las restricciones que definen los valores que pueden tomar las variables, se deduce inmediatamente que su dimensión es $|E_d| - (|V_d| - 1)$.

Si $(y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ es una solución factible y $d \in D$ es una demanda, definimos $y_{\neq d} \in \mathbb{R}^{(|D|-1)|E|}$ como el vector obtenido a partir de y eliminando las coordenadas asociadas a la demanda d , es decir, $y_{\neq d}$ es la proyección de y sobre las variables $\{y_{d'e}\}_{d' \in D \setminus \{d\}, e \in E}$. Si $A \subseteq P(G, D, \bar{s})$ y $d \in D$, definimos $A_{\neq d} := \{y_{\neq d} : \text{existe } (l, x) \text{ tal que } (y, l, x) \in A\}$.

Lema 3.2. Sea F una cara (no necesariamente propia) de $P(G, D, \bar{s})$, y supongamos que $\alpha^\top y + \beta^\top l + \gamma^\top x = \pi_0$ para todo $(y, l, x) \in F$. Si

(a) para cada $d \in D$ existe un conjunto $A \subseteq F$ formado por $|E_d| - |V_d| + 2$ puntos afinmente independientes y tal que $|A_{\neq d}| = 1$, y

(b) existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\beta^\top l + \gamma^\top x = \lambda_0$ para todo $(y, l, x) \in F$,

entonces α es una combinación lineal de las restricciones de conservación de flujo (3.2).

Demostración. Fijemos una demanda $d \in D$. La hipótesis (a) garantiza que se pueden encontrar $|E_d| - |V_d| + 2$ puntos afinmente independientes en F tales que las variables y asociadas a las demandas en $D \setminus \{d\}$ son iguales en todos estos puntos. Sean $p^0, \dots, p^k$ estos puntos, con $k = |E_d| - |V_d| + 1$. Como estos puntos están en F y $\alpha^\top y + \beta^\top l + \gamma^\top x = \pi_0$ para toda solución $(y, l, x) \in F$, tenemos

$$(\alpha, \beta, \gamma)p^i = \pi_0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\},$$

implicando

$$\alpha^\top p_y^i + \beta^\top p_l^i + \gamma^\top p_x^i = \pi_0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}.$$

Por la hipótesis (b), existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\beta^\top l + \gamma^\top x = \lambda_0$ para todo $(y, l, x) \in F$, por lo que la última expresión es equivalente a

$$\alpha^\top p_y^i = \pi_0 - \lambda_0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}.$$

Dado que es posible expresar $\alpha^\top p_y^i$ como la suma de sus componentes asociadas y no asociadas a d , respectivamente, tenemos

$$\alpha_{d*}^\top p_{y_{d*}}^i + \alpha_{\neq d}^\top (p_y^i)_{\neq d} = \pi_0 - \lambda_0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}.$$

Por hipótesis (a) y considerando el conjunto $F_{\neq d} = \{y_{\neq d} : (y, l, x) \in F\}$, tenemos que $\alpha_{\neq d}^\top (p_y^i)_{\neq d}$ es constante, llamemos $\mu_0 \in \mathbb{R}$ a este valor. Tenemos entonces

$$\alpha_{d*}^\top p_{y_{d*}}^i = \pi_0 - \lambda_0 - \mu_0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}.$$

En estas ecuaciones, por definición, tenemos que la componente de $p_{y_{d*}}^i$ asociada a las variables $\{y_{de}\}_{e \in E \setminus E_d}$ es cero, y entonces tenemos $|E_d| - |V_d| + 2$ igualdades afinmente independientes para $|E_d|$ incógnitas con al menos algún coeficiente no nulo. Si tomamos una ecuación (fija) arbitraria y la restamos de las demás ecuaciones, obtenemos un sistema de $|E_d| - |V_d| + 1$ ecuaciones linealmente independientes para $|E_d|$ incógnitas. Por definición, cualquier múltiplo no nulo de los vectores de coeficientes de ecuaciones (3.2) es solución de este sistema, y tales

múltiplos (excepto uno de ellos seleccionado arbitrariamente) son linealmente independientes. Por lo tanto, cualquier solución α de este sistema es combinación lineal de los vectores de coeficientes de las ecuaciones (3.2). $\square$

Como comentario sobre el argumento del lema que se acaba de presentar, si tenemos un número suficientemente grande de slots, entonces la hipótesis (a) se cumple de forma trivial y existe al menos una solución para cada ruta. Por otro lado, la hipótesis (b) exige que la cara F no sea definida en términos de las variables y .

Utilizando las definiciones y resultados presentados a lo largo de la sección, podemos afirmar que las siguientes familias de igualdades son satisfechas por $P(G, D, \bar{s})$:

$$x_{dd'} + x_{d'd} = 1 \quad \forall (d, d') \in L(G, D, \bar{s}), \quad (3.8)$$

$$y_{de} = 0 \quad \forall d \in D, \forall e \in E \setminus E_d. \quad (3.9)$$

Si $(d, d') \in L(G, D, \bar{s})$, entonces en toda solución existe un arco utilizado por d y d' , y la restricción (3.3) implica que $x_{dd'}$ o $x_{d'd}$ debe tomar valor 1. Como ambas variables no pueden tener valores no nulos al mismo tiempo, la igualdad (3.8) se debe cumplir necesariamente. Por otra parte, la igualdad (3.9) surge del hecho de que no es posible encontrar una solución que satisfaga las restricciones (3.2) y al mismo tiempo tenga $y_{de} = 1$ para $d \in D$ y $e \in E \setminus E_d$, dado que el arco e no es alcanzable desde $s(d)$ por ningún flujo definido por estas restricciones.

Denotamos por $s_{\min}(G, D)$ el menor entero s tal que $P(G, D, s)$ no es vacío, es decir, $P(G, D, s_{\min}(G, D)) \neq \emptyset$ y $P(G, D, s_{\min}(G, D) - 1) = \emptyset$. Además, definimos Δ_D como el volumen máximo sobre las demandas de D , es decir, $\Delta_D := \max_{d \in D} v(d)$.

Teorema 3.2. Si $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 2\Delta_D$, las restricciones (3.2), (3.8) y (3.9) definen un sistema minimal de ecuaciones de $P(G, D, \bar{s})$.

Demostración. Como se mencionó más arriba, las ecuaciones (3.8) y (3.9) son cumplidas por todas las soluciones factibles. En efecto, si $(d, d') \in L(G, D, \bar{s})$ entonces en toda solución factible d y d' comparten al menos un arco, y esto implica que $x_{dd'} + x_{d'd} = 1$. Por otra parte, en ninguna solución es factible usar un arco que no pertenece a ningún camino entre el origen y el destino de toda demanda o a un ciclo espurio en G , implicando que (3.9) también se cumple.

Sea $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{|D||E|+|D|+(|D|^2-|D|)}$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda z = \lambda_0$ para toda solución $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$. Veremos que (λ, λ_0) es una combinación lineal de los vectores de coeficientes de las ecuaciones (3.2), (3.8) y (3.9). Para esto, verificaremos que los coeficientes de λ cumplen ciertas condiciones, las cuales se mostrarán a continuación.

Fijemos una demanda $d \in D$ arbitraria. Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d\}, \bar{s} - v(d) - 1)$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 2\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - 1$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_i = \hat{l}_i + v(d) + 1$ para todo $i \in D \setminus \{d\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d\}$, $i \neq j$. Fijamos además $l_d = 0$ y seteamos las variables y asociadas con d para que representen un camino entre $s(d)$ y $t(d)$. Finalmente, fijamos $x_{di} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d\}$. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo

$\{v(d) + 1, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, v(d) - 1\}$ a la demanda d , fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_d = l_d + 1$, es decir, moviendo el intervalo asociado a la demanda d un slot a la derecha, y con el resto de las variables sin alterar. La solución z' es factible dado que ahora la demanda d recibe el intervalo $\{1, \dots, v(d)\}$, que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a $P(G, D, \bar{s})$, tenemos que $\lambda z = \lambda z' = \lambda_0$. Más aún, estas dos soluciones solo difieren en la componente d de l , implicando:

$$\beta_d l_d = \beta_d l'_d = \beta_d (l_d + 1).$$

Por lo tanto, se concluye:

$$\beta_d = 0 \quad \forall d \in D. \quad (\text{Condición 1})$$

Fijemos ahora un par arbitrario de demandas $(d, d') \in (D \times D) \setminus L(G, D, \bar{s})$, $d \neq d'$, y definamos $\max_{d,d'} = \max\{v(d), v(d')\}$. Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d'\}, \bar{s} - v(d) - v(d'))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d'\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 2\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d')$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_i = \hat{l}_i + v(d) + \max_{d,d'}$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d, d'\}$, $i \neq j$. Fijamos además $l_d = l'_d = v(d)$ (esto es posible dado que $(d, d') \notin L(G, D, \bar{s})$), $x_{dd'} = x_{d'd} = 0$ y seteamos las variables y asociadas con d y d' para que representen dos caminos disjuntos entre $s(d)$ y $t(d)$, y $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente (que existen puesto que de lo contrario tendríamos $(d, d') \in L(G, D, \bar{s})$). Finalmente, fijamos $x_{di} = x_{d'i} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(d) + \max_{d,d'}, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{v(d), \dots, v(d) + \max_{d,d'} - 1\}$ a las demandas d y d' , dejando los primeros $v(d)$ slots a la izquierda libres, y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_d = 0$ y $x'_{dd'} = 1$. La solución z' se corresponde a ubicar a la demanda d a la izquierda de d' , y es factible dado que ahora d recibe el intervalo $\{0, \dots, v(d) - 1\}$, que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a $P(G, D, \bar{s})$ y solo difieren en las variables l_d y $x_{dd'}$, tenemos que:

$$\beta_d l_d + \gamma_{dd'} x_{dd'} = \beta_d l'_d + \gamma_{dd'} x'_{dd'}.$$

Por Condición 1 tenemos que $\beta_d = 0$ y reemplazando las variables $x_{dd'}$ y $x'_{dd'}$ por sus valores, llegamos a:

$$\gamma_{dd'} = 0 \quad \forall (d, d') \in (D \times D) \setminus L(G, D, \bar{s}), d \neq d' \quad (\text{Condición 2})$$

Fijemos ahora un par arbitrario de demandas $(d, d') \in L(G, D, \bar{s})$, $d \neq d'$. Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d'\}, \bar{s} - v(d) - v(d'))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d'\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 2\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d')$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_i = \hat{l}_i + v(d) + v(d')$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d, d'\}$, $i \neq j$.

Fijamos además $l_d = 0$, $l_{d'} = l_d + v(d)$, $x_{dd'} = 1$ y seteamos las variables y asociadas con d y d' para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, y entre $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{di} = x_{d'i} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda d' a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de estas dos. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{l_{d'} + v(d'), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, l_{d'} + v(d') - 1\}$ a las demandas d y d' , fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_{d'} = 0$, $l_d = l_{d'} + v(d')$ y $x'_{d'd} = 1$, es decir, moviendo solo la demanda d' a la izquierda del intervalo y a d a la derecha de d' . La solución z' es factible ya que el intercambio de los intervalos asociados a las demandas d y d' no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a $P(G, D, \bar{s})$ y solo difieren en las variables l_d , $l'_{d'}$, $x_{dd'}$ y $x'_{d'd}$, tenemos que:

$$\beta_d l_d + \beta_{d'} l_{d'} + \gamma_{dd'} x_{dd'} + \gamma_{d'd} x_{d'd} = \beta_d l'_d + \beta_{d'} l'_{d'} + \gamma_{dd'} x'_{dd'} + \gamma_{d'd} x'_{d'd}.$$

Por Condición 1 tenemos que $\beta_d = \beta_{d'} = 0$ y reemplazando las variables x y x' por sus valores, llegamos a:

$$\gamma_{dd'} = \gamma_{d'd} \quad \forall (d, d') \in L(G, D, \bar{s}) \quad (\text{Condición 3})$$

Fijemos una demanda $d \in D$ arbitraria. Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d\}, \bar{s} - v(d) - 1)$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - \Delta_D \leq \bar{s} - v(d)$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteadando $l_i = \hat{l}_i$ para todo $i \in D \setminus \{d\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d\}$, $i \neq j$. Fijamos además $l_d = s_{\min}(G, D)$ y $x_{id} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d\}$. Siendo $p^0, \dots, p^k \in PR(G_d, d)$ puntos afinmente independientes, con $k = |E_d| - |V_d| + 1$, construimos $k+1$ soluciones obtenidas a partir de z , estableciendo $y_{d*} = p^i$, para $i = 0, \dots, k$, y con el resto de las variables sin alterar. Cada una de estas soluciones se corresponde a ubicar la solución en el intervalo $\{0, \dots, s_{\min}(G, D) - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{s_{\min}(G, D), \dots, s_{\min}(G, D) + v(d) - 1\}$ a la demanda d , fijando las restantes variables de manera acorde, y son factibles dado que la demanda d no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. De esta forma, según lo probado en el Lema 3.1 y tomando a todo $P(G, D, \bar{s})$ como la cara F , tenemos un conjunto formado por $|E_d| - |V_d| + 2$ puntos afinmente independientes tales que las variables y asociadas a las demandas en $D \setminus \{d\}$ son iguales en todos estos puntos. De esta manera vemos que la hipótesis (a) del Lema 3.2 se cumple. Además, las condiciones anteriores muestran que $\beta^T l + \gamma^T x$ es constante para todas las soluciones $(y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$, con lo cual la hipótesis (b) del Lema 3.2 también se cumple. Este lema nos permite concluir que los coeficientes α son una combinación lineal de las ecuaciones de conservación de flujo (3.2).

De esta manera, las condiciones presentadas muestran que (λ, λ_0) es una combinación lineal de los vectores de coeficientes de las ecuaciones (3.2), (3.8) y (3.9), implicando que las restricciones (3.2), (3.8) y (3.9) definen un sistema minimal de ecuaciones de $P(G, D, \bar{s})$. $\square$

Corolario 3.2. Si $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 2\Delta_D$, la dimensión de $P(G, D, \bar{s})$ es $|D|(|E| - |V|) + |D|^2 + |D| - |L(G, D, \bar{s})| - \sum_{d \in D} |E \setminus E_d|$.

El Corolario 3.2 caracteriza la dimensión de $P(G, D, \bar{s})$ cuando $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 2\Delta_D$. Si el número de slots disponibles $\bar{s}$ es menor que $s_{\min}(G, D)$, no existen soluciones factibles y, por lo tanto, $P(G, D, \bar{s})$ es vacío. Por otro lado, la dimensión de este poliedro para los casos donde $\bar{s} < s_{\min}(G, D) + 2\Delta_D$ resulta difícil de caracterizar, dado que depende fuertemente de la estructura del grafo G y de las especificaciones de las demandas. Una situación similar se da en el politopo asociado al coloreo de vértices clásico (cuando el número de colores disponibles es igual al número cromático del grafo) y en los politopos asociados al coloreo por intervalos (bajo una hipótesis similar a la presentada aquí). Obtener una caracterización completa de la dimensión de estos poliedros en estos casos es una línea de investigación interesante, aunque puede ser difícil arribar a un resultado de estas características.

3.2. Desigualdades válidas

Aunque comprender completamente la estructura de $P(G, D, \bar{s})$ es una tarea no trivial dado que el RSA es NP-difícil, en esta sección comenzamos dicho estudio presentando familias de desigualdades válidas y demostrando que, bajo ciertas condiciones sobre el conjunto de demandas conflictivas L , estas desigualdades definen facetas de este politopo.

3.2.1 Restricciones de la formulación

Comenzamos centrándonos en la familia de restricciones (3.4), que está relacionada con el problema de coloreo por intervalos y puede proporcionar planos de corte interesantes para la formulación asociada.

Teorema 3.3. *Si $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 3\Delta_D$ y $L(G, D, \bar{s}) = \emptyset$, la desigualdad (3.4) define una faceta de $P(G, D, \bar{s})$.*

Demostración. Sea F la cara de $P(G, D, \bar{s})$ asociada a la desigualdad (3.4), y supongamos que $\lambda z = \lambda_0$ para todo $z \in F$. Veremos que $(\lambda, \lambda_0) = ((\alpha, \beta, \gamma), \lambda_0)$ es una combinación lineal de (3.4) y los vectores de coeficientes del sistema minimal de ecuaciones de la formulación, por lo que F es faceta de $P(G, D, \bar{s})$. Para esto, verificaremos que los coeficientes de λ cumplen ciertas condiciones.

Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d'\}, \bar{s} - v(d) - v(d') - 1)$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d'\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d') - 1$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_i = \hat{l}_i + v(d) + v(d') + 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d, d'\}$, $i \neq j$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_{d'} = v(d)$, $x_{dd'} = 1$ y $x_{d'd} = 0$, y seteamos las variables y asociadas con k, d y d' para que representen caminos entre $s(k)$ y $t(k)$, entre $s(d)$ y $t(d)$, y entre $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{di} = x_{d'i} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$. Es decir, situamos a la demanda d a la izquierda del intervalo, a la demanda d' a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de d' , dejando un slot libre a la derecha de d' . Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{l_{d'} + v(d') + 1, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, l_{d'} + v(d') - 1\}$ a las demandas d y d' , fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_d = l_d + 1 = 1$, $l'_{d'} = l_{d'} + 1 = l_d + v(d) + 1$, es decir, moviendo d y d'

un slot a la derecha. La solución z' es factible dado que ahora las demandas d y d' reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a F y solo difieren en las variables l_d y $l_{d'}$, tenemos que:

$$\beta_d l_d + \beta_{d'} l_{d'} = \beta_d l'_d + \beta_{d'} l'_{d'},$$

y reemplazando las variables l' , tenemos que

$$\beta_d l_d + \beta_{d'} l_{d'} = \beta_d (l_d + 1) + \beta_{d'} (l_{d'} + 1).$$

Por lo tanto:

$$\beta_d = -\beta_{d'}. \quad (\text{Condición 1})$$

Fijemos una demanda $i \in D \setminus \{d, d'\}$ arbitraria. Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{i\}, \bar{s} - v(i) - 1)$, donde $\hat{l}_{d'} = \hat{l}_d + v(d)$, que existe dado que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 2\Delta_D$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(i) + 1$ para todo $k \in D \setminus \{i\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{i\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kj} = \hat{x}_{kj}$ para todo $k, j \in D \setminus \{i\}$, $k \neq j$. Fijamos además $l_i = 0$, y seteamos las variables y asociadas con i para que representen un camino entre $s(i)$ y $t(i)$. Finalmente, fijamos $x_{ki} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{i\}$. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(i) + 1, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, l_i - 1\}$ a la demanda i , fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_i = l_i + 1 = 1$, es decir, moviendo i un slot a la derecha. La solución z' es factible dado que ahora la demanda i recibe un intervalo que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a F y solo difieren en la variable l_i , tenemos que:

$$\beta_i l_i = \beta_i l'_i = \beta_i (l_i + 1).$$

Por lo tanto, se concluye

$$\beta_i = 0 \quad \forall i \in D \setminus \{d, d'\}. \quad (\text{Condición 2})$$

Fijemos una demanda $k \in D \setminus \{d, d'\}$ arbitraria y definamos $\max_{d+d',k} = \max\{v(d) + v(d'), v(k)\}$. Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d', k\}, \bar{s} - \max_{d+d',k} - v(k))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d', k\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - \max_{d+d',k} - v(k)$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_i = \hat{l}_i + \max_{d+d',k} + v(k)$ para todo $i \in D \setminus \{d, d', k\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d, d', k\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d, d', k\}$, $i \neq j$. Fijamos además $l_d = l_k = 0$ (lo cual es posible dado que $L(G, D, \bar{s}) = \emptyset$), $l_{d'} = v(d)$, $x_{dd'} = 1$ y $x_{dk} = 0$, y seteamos las variables y asociadas con k , d y d' para que representen caminos entre $s(k)$ y $t(k)$, entre $s(d)$ y $t(d)$, y entre $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente, cuidando que los dos primeros sean disjuntos. Finalmente, fijamos $x_{di} = x_{d'i} = x_{ki} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, d', k\}$. Es decir, situamos las demandas d y k a la izquierda del intervalo, la demanda d' a la derecha de d , y mantenemos $v(k)$ slots libres a la derecha de d' , o a la derecha de k en caso de que $v(k) > v(d) + v(d')$, y finalmente el resto de las demandas a la derecha de los slots libres. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{\max_{d+d',k} + v(k), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots

$\{0, \dots, \max_{d+d',k} + v(k) - 1\}$ a las demandas d , d' y k , y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_k = \max_{d+d',k}$ y $x'_{dk} = 1$, es decir, situando la demanda k a la derecha de la demanda d . La solución z' es factible dado que la demanda k recibe un intervalo que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a F y solo difieren en las variables x_{dk} y l_k , tenemos que:

$$\gamma_{dk}x_{dk} = \gamma_{dk}x'_{dk},$$

y reemplazando los valores de las variables x en las soluciones, llegamos a que $\gamma_{dk} = 0$. A partir de construcciones similares se obtiene que $\gamma_{d'k} = 0$ y que $\gamma_{kd'} = 0$, y así llegamos a:

$$\gamma_{dk} = \gamma_{d'k} = \gamma_{kd'} = 0 \quad \forall k \in D \setminus \{d, d'\}. \quad (\text{Condición 3})$$

Fijemos ahora dos demandas arbitrarias $i, j \in D \setminus \{d, d'\}$, $i \neq j$ y definamos $\max_{d+d',i,j} = \max\{v(d) + v(d'), v(i), v(j)\}$. Sea ahora una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d', i, j\}, \bar{s} - \max_{d+d',i,j} + v(j))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d', i, j\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - \max_{d+d',i,j} - v(j)$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ setando $l_k = \hat{l}_k + \max_{d+d',i,j} + v(j)$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i, j\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i, j\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kk'} = \hat{x}_{kk'}$ para todo $k, k' \in D \setminus \{d, d', i, j\}$, $k \neq k'$. Fijamos además $l_d = l_i = l_j = 0$ (lo cual es posible dado que $L(G, D, \bar{s}) = \emptyset$), $l_{d'} = v(d)$, $x_{dd'} = 1$ y $x_{ij} = 0$, y setamos las variables y asociadas con i , j , d y d' para que representen caminos entre $s(i)$ y $t(i)$, entre $s(j)$ y $t(j)$, entre $s(d)$ y $t(d)$, y entre $s(d')$ y $t(d')$ respectivamente, cuidando que los tres primeros sean disjuntos. Finalmente, fijamos $x_{dk} = x_{d'k} = x_{ik} = x_{jk} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i, j\}$. Es decir, situamos las demandas d , i y j a la izquierda del intervalo, la demanda d' a la derecha de d , y mantenemos $v(j)$ slots libres a la derecha de d' , o a la derecha de la demanda con mayor volumen entre i y j en caso de que $v(i) > v(d) + v(d')$ o $v(j) > v(d) + v(d')$, y finalmente el resto de las demandas a la derecha de los slots libres. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{\max_{d+d',i,j} + v(k), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, \max_{d+d',i,j} + v(k) - 1\}$ a las demandas d , d' , i y j , y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_j = \max_{d+d',i,j}$ y $x'_{ij} = 1$, es decir, situando la demanda j a la derecha de la demanda i . La solución z' es factible dado que ahora la demanda j recibe un intervalo que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a F y solo difieren en las variables x_{ij} y l_i , tenemos que:

$$\gamma_{ij}x_{ij} = \gamma_{ij}x'_{ij},$$

y reemplazando los valores de las variables x en las soluciones, se obtiene:

$$\gamma_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in D \setminus \{d, d'\}. \quad (\text{Condición 4})$$

Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d'\}, \bar{s} - 2v(d) - v(d'))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d'\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - 2v(d) - v(d')$.

Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_i = \hat{l}_i + v(d) + v(d')$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d, d'\}$, $i \neq j$, y manteniendo los $v(d)$ slots más a la derecha libres. Fijamos además $l_d = 0$, $l_{d'} = v(d)$, $x_{dd'} = 1$ y $x_{d'd} = 0$ y seteamos las variables y asociadas con d y d' para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, y $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{di} = x_{d'i} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, d'\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda d' a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de d' , dejando $v(d)$ slots libres a la derecha del intervalo. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{l_{d'} + v(d'), \dots, \bar{s} - v(d) - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, l_{d'} + v(d') - 1\}$ a las demandas d, d' , y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_{d'} = 0$, $l'_d = \bar{s} - v(d)$, $x_{dd'} = 0$ y $x_{d'd} = 1$, es decir, asignando a la demanda d' los $v(d')$ slots más a la izquierda, y a la demanda d los $v(d)$ slots más a la derecha. La solución z' es factible dado que ahora la demanda d recibe un intervalo que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a F y difieren en $x_{dd'}$, $x_{d'd}$, l_d , $l_{d'}$ y en las variables x asociadas a la demanda d y a cada demanda $i \in D \setminus \{d, d'\}$. Sin embargo, estas últimas variables y sus coeficientes γ asociados se cancelarán por Condición 4 y, por lo tanto, tenemos:

$$\beta_d l_d + \beta_{d'} l_{d'} + \gamma_{dd'} x_{dd'} + \gamma_{d'd} x_{d'd} = \beta_d l'_d + \beta_{d'} l'_{d'} + \gamma_{dd'} x'_{dd'} + \gamma_{d'd} x'_{d'd}.$$

Reemplazando las variables x y l por los valores que se tienen en ambas soluciones, llegamos a

$$\beta_{d'} v(d) + \gamma_{dd'} = \beta_d (\bar{s} - v(d)) + \gamma_{d'd},$$

y, aplicando Condición 1 tenemos que

$$\gamma_{dd'} = \beta_d \bar{s} + \gamma_{d'd}. \quad (\text{Condición 5})$$

Fijemos una demanda $i \in D \setminus \{d, d'\}$ arbitraria. Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{i, d, d'\}, \bar{s} - v(i) - v(d) - v(d') - 1)$ que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{i, d, d'\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - v(d) - v(d') - v(i) - 1$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_j = \hat{l}_j$ para todo $j \in D \setminus \{d, d', i\}$ y comenzando desde el primer slot a la izquierda del intervalo, $y_{je} = \hat{y}_{je}$ para todo $j \in D \setminus \{d, d', i\}$ y todo $e \in E$, y $x_{jj'} = \hat{x}_{jj'}$ para todo $j, j' \in D \setminus \{d, d', i\}$, $j \neq j'$. Fijamos además $l_d = s_{\min}(G, D)$, $l_{d'} = l_d + v(d)$, $l_i = l_{d'} + v(d')$ y $x_{jd} = x_{jd'} = x_{ji} = 1$ para todo $j \in D \setminus \{d, d', i\}$. Siendo $p^0, \dots, p^k \in PR(G_i, i)$ puntos afinmente independientes, con $k = |E_i| - |V_i| + 1$, construimos $k + 1$ soluciones obtenidas a partir de z , estableciendo $y_{i*} = p^j$, para $j = 0, \dots, k$, y con el resto de las variables sin alterar. Cada una de estas soluciones se corresponde a ubicar la solución en el intervalo $\{0, \dots, s_{\min}(G, D) - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{s_{\min}(G, D), \dots, s_{\min}(G, D) + v(d) + v(d') + v(i) - 1\}$ a las demandas d, d' y i , y fijando las restantes variables de manera acorde. Estas soluciones son factibles dado que la demanda i no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas y pertenecen a F dado que la demanda d se encuentra de forma contigua a la izquierda de d' . De esta forma, según lo probado en el Lema 3.1, tenemos un conjunto formado por $|E_i| - |V_i| + 2$ puntos afinmente independientes tales que las variables y asociadas a las

demandas en $D \setminus \{i\}$ son iguales en todos estos puntos. De esta manera vemos que la hipótesis (a) del Lema 3.2 se cumple. Además, las condiciones anteriores muestran que $\beta^\top l + \gamma^\top x$ es constante para todas las soluciones $(y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$, con lo cual la hipótesis (b) del Lema 3.2 también se cumple. Este lema nos permite concluir que los coeficientes α son una combinación lineal de las ecuaciones de conservación de flujo (3.2).

Dado F , el vector de coeficientes π puede verse como

$$\left(\underbrace{0}_{l_1}, \dots, \underbrace{1}_{l_d}, \dots, \underbrace{1}_{l_{d'}}, \dots, \underbrace{0}_{l_n}, \underbrace{0}_{x_{12}}, \dots, \underbrace{\bar{s}}_{x_{dd'}}, \dots, \underbrace{0}_{x_{n,n-1}} \right),$$

mientras que el vector de coeficientes de (3.8) se puede escribir como

$$\left(\underbrace{0}_{x_{12}}, \dots, \underbrace{1}_{x_{dd'}}, \dots, \underbrace{0}_{x_{n,n-1}} \right).$$

Entonces, buscamos coeficientes a y b tales que

$$a(0, \dots, 1, \dots, -1, \dots, 0, 0, \dots, \bar{s}, \dots, 0) + b(0, \dots, 1, \dots, 0) = (\beta, \gamma),$$

lo que es equivalente a

$$(0, \dots, a, \dots, -a, \dots, 0, 0, \dots, \bar{s}a + b, \dots, 0) = (\beta, \gamma).$$

Sean a y b los siguientes:

$$a = \beta_d,$$

$$b_{dd'} = \gamma_{dd'},$$

$$b_{ij} = \gamma_{ij} \quad \forall i, j \in D \setminus \{d, d'\}.$$

Con esta configuración, tenemos que

$$(0, \dots, \beta_d, \dots, -\beta_d, \dots, 0, 0, \dots, \bar{s}\beta_d + \gamma_{dd'}, \dots, 0) = (\beta, \gamma).$$

Luego, teniendo en cuenta Condición 4, llegamos a

$$(0, \dots, \beta_d, \dots, -\beta_d, \dots, 0, 0, \dots, \gamma_{dd'}, \dots, 0) = (\beta, \gamma).$$

De esta manera, λ puede formarse como la combinación lineal de π y los vectores de coeficientes del sistema minimal de ecuaciones de la formulación, implicando que la desigualdad (3.4) define faceta para $P(G, D, \bar{s})$.

□

3.2.2 Grafo de conflictos y relación con chromatic scheduling

Cuando $L(G, D, \bar{s}) \neq \emptyset$, indicando que existen pares de demandas que comparten al menos un arco en cada solución, surge el grafo de conflictos correspondiente a estas demandas. Las aristas de este grafo (que se corresponden con pares de demandas en L) proporcionan una relación estrecha entre el RSA y el problema de chromatic scheduling, y en el resto de esta sección estamos interesados en las consecuencias poliedrales de este hecho.

Definición 3.5. Sea $(G, D, \bar{s})$ una instancia del RSA, definimos el *grafo de conflictos* $G_c = (V_c, E_c, w)$ asociado a esta instancia, siendo $V_c = D$, $E_c = \{dd' \in D \times D : (d, d') \in L(G, D, \bar{s}) \text{ o } (d', d) \in L(G, D, \bar{s})\}$, y $w : V_c \rightarrow \mathbb{Z}_+$ una función de pesos que asigna a cada vértice el número de slots que la demanda asociada requiere.

En este grafo, dos demandas representadas por vértices están unidas por una arista cuando comparten al menos un enlace en todas las soluciones factibles, implicando que cualquier asignación de espectro debe garantizar que vértices adyacentes en G_c reciban conjuntos disjuntos de slots.

Para plantear una solución del problema de *chromatic scheduling*, se utiliza una variable de intervalo acotada l_i para cada $i \in V_c$ que puede interpretarse como el primer color asignado al vértice i . Adicionalmente, se define un conjunto de variables binarias x_{ij} que indican el orden relativo entre los intervalos de colores asignados a los vértices i y j , para $ij \in E_c$. En particular, $x_{ij} = 1$ si y solo si los colores de i son menores a los de j , es decir,

$$l_i + w(i) \leq l_j.$$

Una instancia de chromatic scheduling es factible cuando existe una asignación de valores a las variables l y x que satisfaga las desigualdades dadas a continuación, impidiendo la superposición de colores para todo par de vecinos en G_c y garantizando la consistencia en la asignación.

$$l_i + w(i) \leq l_j + \bar{s}(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in E_c, i < j \quad (14)$$

$$l_j + w(j) \leq l_i + \bar{s}x_{ij} \quad \forall i, j \in E_c, i < j \quad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in E_c, i < j \quad (16)$$

$$l_i \in \{0, \dots, \bar{s} - w(i)\} \quad \forall i \in V_c \quad (17)$$

Definición 3.6. Sea $G = (V, E, w)$ un grafo donde E es un conjunto que describe conflictos entre vértices y $w : V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ son los pesos asociados a los elementos de V . Dada una cantidad de colores $\bar{s}$, el *politopo de chromatic scheduling* $C(G, \bar{s}) \subseteq \mathbb{R}^{|V|+|E|}$ se define como la cápsula convexa de todas las soluciones enteras $(l, x) \in \mathbb{R}^{|V|+|E|}$ que satisfacen las restricciones (14)-(17).

El problema de chromatic scheduling y el RSA guardan una estrecha relación, pues ambos problemas involucran la asignación de recursos contiguos bajo restricciones que evitan conflictos. En chromatic scheduling, se asignan colores a los vértices de un grafo de tal manera que no existan dos vértices en conflicto que compartan el mismo color. De forma análoga, en RSA se asignan rutas y slots de frecuencia a las demandas de la red, garantizando que sus transmisiones no se solapen ni interfieran entre sí. Como se muestra en la Definición 3.5, ambos pueden representarse mediante un grafo de conflictos, donde cada vértice modela una tarea o demanda de comunicación, y las aristas reflejan la incompatibilidad entre ellas. Bajo este enfoque, la solución a cada problema se interpreta como un coloreo de dicho grafo.

A pesar de las diferencias en sus restricciones y objetivos específicos, estos problemas comparten propiedades poliedrales estructurales en común y la proyección de $P(G, D, \bar{s})$ sobre las variables l y x está incluida en $C(G_c, \bar{s})$, con $G_c = (D, L, v)$. Esta relación se puede explorar para derivar resultados útiles. En particular, las desigualdades que son válidas para $C(G_c, \bar{s})$

son válidas para $P(G, D, \bar{s})$, ofreciendo así una manera de usar resultados conocidos en el dominio del chromatic scheduling para el RSA. En el siguiente teorema formalizaremos esta observación.

Teorema 3.4. *Si $\beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ es una desigualdad válida de $C(G_c, \bar{s})$ con $G_c = (D, L(G, D, \bar{s}), v)$, entonces la desigualdad $\beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ es válida para $P(G, D, \bar{s})$.*

Demostración. Sea $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ una solución entera factible. Los vectores l y x especifican una asignación de intervalos de slots a demandas respetando las restricciones de contigüidad y no solapamiento entre los slots asociados a pares de demandas en conflicto, y pueden ser extendidos a una asignación $l', x' \in C(G_c, \bar{s})$ satisfaciendo $\beta^\top l' + \gamma^\top x' \leq \pi_0$. Dado que $G_c = (D, L(G, D, \bar{s}), v)$ y $L(G, D, \bar{s}) \subseteq D \times D$, entonces $\beta^\top l' + \gamma^\top x' \leq \beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$. Siendo que esta desigualdad solo involucra las variables x y l , la desigualdad es válida para $P(G, D, \bar{s})$. $\square$

Por otra parte, el siguiente teorema presenta las condiciones necesarias para que una desigualdad que define faceta de $P(G, D, \bar{s})$ defina faceta de $C(G_c, \bar{s})$.

Teorema 3.5. *Sea $\beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ una desigualdad que define faceta de $P(G, D, \bar{s})$ tal que $\gamma_{dd'} = 0$ para todo $(d, d') \in D \times D$ con $(d, d') \notin L(G, D, \bar{s})$ y $(d', d) \notin L(G, D, \bar{s})$. Si $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 2\Delta_D$, entonces $\beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ define una faceta de $C(G_c, \bar{s})$.*

Demostración. Sea $F = \{(l, x) \in C(G_c, \bar{s}) : \beta^\top l + \gamma^\top x = \pi_0\}$, con $G_c = (D, L, v)$, la cara de $C(G_c, \bar{s})$ definida por $\beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$. Cualquier solución $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ puede convertirse en una solución $p(z)$ de $C(G_c, \bar{s})$ simplemente tomando las componentes x y l de z que están presentes en la definición de $C(G_c, \bar{s})$, es decir, aplicando la proyección $p(z) = p(y, l, x) = (l, x')$ donde x' solo está definida para los pares de demandas que pertenecen a L y $x'_{dd'} = x_{dd'}$ y $x'_{d'd} = 1 - x_{dd'}$ para todo $(d, d') \in L$ (que, por definición, cumple $d < d'$).

La proyección p genera soluciones factibles de $C(G_c, \bar{s})$. Además, como las variables que no se tienen en cuenta en la proyección tienen un valor nulo como coeficiente asociado en π , las soluciones proyectadas cumplen $\beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ por igualdad.

El Corolario 3.2 establece la dimensión de $P(G, D, \bar{s})$. Dado que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 2\Delta_D$, que $\alpha^\top y + \beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ define faceta de $P(G, D, \bar{s})$ y que las variables x asociadas a los pares de demandas que no están en L (es decir, $\bar{L}$) y todas las variables y quedaron fuera de la proyección, existen $|D| + |L|$ puntos, $p(z^1), \dots, p(z^{|D|+|L|}) \in C(G_c, \bar{s})$, que satisfacen $\beta^\top l + \gamma^\top x \leq \pi_0$ por igualdad y cada uno de esos puntos pertenece a $\mathbb{R}^{|D|+2|L|}$.

Como $x'_{dd'} = x_{dd'}$ para todo $(d, d') \in L$, las soluciones proyectadas cumplen la igualdad $x_{dd'} + x_{d'd} = 1$ para todo $(d, d') \in L$. En virtud de estas igualdades, podemos eliminar las variables $\{x_{d'd}\}_{(d,d') \in L}$ de estas soluciones sin perder la independencia afín entre ellas, obteniendo así un conjunto de $|D| + |L|$ puntos afinmente independientes en $\mathbb{R}^{|D|+|L|}$. De esta forma, construimos en F un conjunto de $|D| + |L|$ soluciones afinmente independientes, lo que implica que F es faceta de $C(G_c, \bar{s})$. $\square$

El Teorema 3.5 proporciona algo de información sobre la estructura de $P(G, D, \bar{s})$, al demostrar que las desigualdades que definen facetas de $P(G, D, \bar{s})$ pueden transferirse a $C(G_c, \bar{s})$

bajo condiciones específicas. Aunque esto no proporciona una caracterización de todas las desigualdades que definen faceta de $P(G, D, \bar{s})$, este resultado presenta una condición necesaria para una desigualdad, en términos de las variables x y l , para definir faceta de $P(G, D, \bar{s})$, para un valor arbitrario de $\bar{s}$. Esto nos brinda una estrategia general para la búsqueda de desigualdades que inducen facetas de $P(G, D, \bar{s})$, es decir, tomando familias de desigualdades que definan faceta de $C(G_c, \bar{s})$ y explorando sus propiedades de facetitud para $P(G, D, \bar{s})$.

Por otro lado, el Teorema 3.5 establece una condición suficiente bajo la cual una desigualdad que define faceta de $P(G, D, \bar{s})$ define faceta de $C(G_c, \bar{s})$. Sin embargo, esta implicación no se da en forma recíproca: el obtener una faceta de $P(G, D, \bar{s})$ a partir de una faceta de $C(G_c, \bar{s})$ no es trivial ya que requiere extender la desigualdad a las variables y y a las variables x asociadas a pares de demandas que no pertenecen a L . En este sentido, el Teorema 3.5 ayuda a orientar la búsqueda de facetas, tarea que se realiza a continuación.

3.2.3 Desigualdades clique

A continuación, presentaremos familias de desigualdades válidas de $C(G_c, \bar{s})$ provenientes de la literatura de chromatic scheduling [44]. Estas familias, además de ser desigualdades que definen facetas de $C(G_c, \bar{s})$, satisfacen las condiciones dadas en el Teorema 3.5, es decir, los coeficientes de las variables x asociadas a los pares de demandas $(d, d') \in (D \times D) \setminus L(G, D, \bar{s})$ y todas las variables y son nulas en ellas. Demostraremos que son válidas para $P(G, D, \bar{s})$ y, además, que un subconjunto de estas define facetas de $P(G, D, \bar{s})$.

Si $G = (V, E)$ es un grafo e $i \in V$, definimos $N(i) := \{j \in V : ij \in E\}$ como el conjunto de vecinos de i . Además, decimos que un conjunto de vértices $K \subseteq V$ es una *clique* si $ij \in E$ para todo $i, j \in K$, $i \neq j$.

Definición 3.7. Sea $G_c = (V_c, E_c)$ el grafo de conflictos asociado con $L(G, D, \bar{s})$, sea $d \in D$ y sea $K \subseteq N(d)$ una clique en G_c , definimos

$$l_d \geq \sum_{k \in K} v(k)x_{kd} \quad (18)$$

como la *desigualdad de clique simple* asociada con d y K .

Lema 3.3. La desigualdad de clique simple (18) es válida para $P(G, D, \bar{s})$.

Demostración. Sea $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ una solución factible. Sea $K' \subseteq K$ el conjunto de demandas tal que el intervalo de cada $k \in K'$ se encuentra situado a la izquierda del intervalo de d , es decir, los $k \in K'$ tal que $x_{kd} = 1$. Dado que K es una clique, los intervalos asociados a las demandas en K son disjuntos, implicando

$$l_d \geq \sum_{k \in K'} v(k) = \sum_{k \in K} x_{kd}v(k),$$

por lo que la desigualdad de clique simple (18) es válida para $P(G, D, \bar{s})$ $\square$

Exploramos ahora condiciones que garantizan que (18) define una faceta de $P(G, D, \bar{s})$.

Teorema 3.6. Si para cada demanda $i \in N(d) \setminus K$ existe al menos una demanda $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$, y tenemos que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 3\Delta_D$, la desigualdad de clique simple (18) define una faceta de $P(G, D, \bar{s})$.

Demostración. Sea F la cara de $P(G, D, \bar{s})$ asociada a la desigualdad de clique simple (18), y supongamos que $\lambda z = \lambda_0$ para todo $z \in F$. Veremos que $(\lambda, \lambda_0) = ((\alpha, \beta, \gamma), \lambda_0)$ es una combinación lineal de (18) y los vectores de coeficientes del sistema minimal de ecuaciones de la formulación, por lo que F es faceta de $P(G, D, \bar{s})$. Para esto, verificaremos que los coeficientes de λ cumplen ciertas condiciones.

Fijemos una demanda $i \in D \setminus \{d\}$ arbitraria. Sea $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, i\}, \bar{s} - v(d) - v(i) - 1)$ que existe dado que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D \setminus \{d, i\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(i) - 1$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + v(i) + 1$ para todo $k \in D \setminus \{i, d\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{i, d\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kj} = \hat{x}_{kj}$ para todo $k, j \in D \setminus \{i, d\}$, $k \neq j$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_i = v(d)$ y seteamos las variables y asociadas con i y d para que representen caminos entre $s(i)$ y $t(i)$, y $s(d)$ y $t(d)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{di} = 1$, $x_{ik} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{i, d\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda i a la derecha de d , un slot libre a la derecha de i , y el resto de las demandas a la derecha del slot libre. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{l_i + v(i) + 1, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, l_i + v(i) - 1\}$ a las demandas d y i , fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_i = l_i + 1$, es decir, moviendo la demanda i un slot a la derecha. La solución z' es factible dado que ahora la demanda i recibe un intervalo que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a F y solo difieren en la variable l_i , implicando

$$\beta_i l_i = \beta_i l'_i = \beta_i (l_i + 1).$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\beta_i = 0 \quad \forall i \in D, i \neq d. \quad (\text{Condición 1})$$

Fijemos ahora dos demandas $i, j \in D \setminus \{d\}$, $i \neq j$ tal que $(i, j) \in L(G, D, \bar{s})$. Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, i, j\}, \bar{s} - v(d) - v(i) - v(j))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, i, j\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(i) - v(j)$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + v(i) + v(j)$ para todo $k \in D \setminus \{d, i, j\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, i, j\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kk'} = \hat{x}_{kk'}$ para todo $k, k' \in D \setminus \{d, i, j\}$, $k \neq k'$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_i = v(d)$, $l_j = v(d) + v(i)$, $x_{di} = x_{dj} = x_{ij} = 1$, y seteamos las variables y asociadas con d , i y j para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, $s(i)$ y $t(i)$, y $s(j)$ y $t(j)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{dk} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, i, j\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda i a la derecha de d , la demanda j a la derecha de i , y el resto de las demandas a la derecha de j . Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(d) + v(i) + v(j), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, v(d) + v(i) + v(j) - 1\}$ a las demandas d , i , j y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_j = v(d)$ y $l'_i = l'_j + v(j)$ es decir, situando la demanda j a la derecha de la demanda d y la demanda i a la derecha de j . La solución z' es factible dado que ahora las

demandas i y j reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que las soluciones difieren solo en las variables l_i , l_j , x_{ij} y x_{ji} , y por Condición 1 sabemos que $\beta_i = \beta_j = 0$, tenemos

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad \forall (i, j) \in L(G, D, \bar{s}) \setminus \delta(d), \quad i, j \in D \setminus \{d\} \quad (\text{Condición 2})$$

Fijemos ahora una demanda $k \in K$ tal que $(d, k) \in L(G, D, \bar{s})$. Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, k\}, \bar{s} - v(d) - v(k))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, k\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 2\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(k)$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_i = \hat{l}_i + v(d) + v(k)$ para todo $i \in D \setminus \{d, k\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d, k\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d, k\}$, $i \neq j$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_k = v(d)$, $x_{dk} = 1$ y $x_{kd} = 0$, y seteamos las variables y asociadas con d y k para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, y entre $s(k)$ y $t(k)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{di} = x_{ki} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, k\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda k a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de estas. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(d) + v(k), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, v(d) + v(k) - 1\}$ a las demandas d y k , y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_k = 0$, $l'_d = v(k)$, $x'_{dk} = 0$ y $x'_{kd} = 1$, es decir, situando la demanda k a la izquierda del intervalo y a la demanda d a la derecha de k . La solución z' es factible dado que las demandas d y k reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que las soluciones difieren en las variables x_{dk} , x_{kd} , l_d , l_k , tenemos

$$\gamma_{dk}x_{dk} + \gamma_{kd}x_{kd} + \beta_d l_d + \beta_k l_k = \gamma_{dk}x'_{dk} + \gamma_{kd}x'_{kd} + \beta_d l'_d + \beta_k l'_k.$$

Por Condición 1 sabemos que $\beta_k = 0$, y reemplazando los valores asociados a las variables, obtenemos

$$\gamma_{dk} = \beta_d v(k) + \gamma_{kd} \quad \forall k \in K. \quad (\text{Condición 3})$$

Fijemos ahora una demanda $i \in N(d) \setminus K$. Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, i\}, \bar{s} - v(d) - \Delta_D)$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, i\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 2\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - \Delta_D$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + \Delta_D$ para todo $k \in D \setminus \{d, i\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, i\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kj} = \hat{x}_{kj}$ para todo $k, j \in D \setminus \{d, i\}$, $k \neq j$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_i = \Delta_D$, $x_{di} = 1$ y $x_{id} = 0$, y seteamos las variables y asociadas con d y i para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, y entre $s(i)$ y $t(i)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{dk} = x_{ik} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, i\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda i en los próximos Δ_D slots a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de estas. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(d) + \Delta_D, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, v(d) + \Delta_D - 1\}$ a las demandas d y i , y fijando las restantes variables de manera acorde.

Por hipótesis, existe una demanda $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$. Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir

de z estableciendo $l'_i = l'_u = 0$ y $l'_d = v(u)$. Es decir, situando las demandas i y u a la izquierda del intervalo y la demanda d a la derecha de u . La solución z' es factible dado que la demanda d recibe intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas y la demanda u se superpone solo con la demanda i , lo cual es posible dado que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$. Por otro lado, dado que d solo tiene a la izquierda a i y a u , es decir, $x'_{id} = x'_{ud} = 1$, y $x'_{jd} = 0$ para todo $j \in D \setminus \{i, u\}$, y siendo que $l'_d = v(u) = \sum_{k \in K} x_{kd}v(k)$, entonces z' satisface F . De esta manera, tenemos que

$$\beta_d l'_d + \beta_i l'_i + \beta_u l'_u + \gamma_{id} x'_{id} + \gamma_{ud} x'_{ud} = \beta_d l'_d + \beta_i l'_i + \beta_u l'_u + \gamma_{id} x'_{id} + \gamma_{ud} x'_{ud},$$

y reemplazando los valores de las variables l y x , y los coeficientes de la Condición 1, llegamos a

$$\gamma_{di} + \gamma_{du} = \beta_d v(u) + \gamma_{id} + \gamma_{ud}.$$

Finalmente, aplicando Condición 3 obtenemos

$$\gamma_{di} = \gamma_{id} \quad \forall i \in N(d) \setminus K. \quad (\text{Condición 4})$$

Dado que las variables y no participan en la desigualdad de clique simple (18), se puede demostrar de manera similar a la prueba del Teorema 3.3 que los coeficientes α son una combinación lineal del sistema minimal de ecuaciones. Las condiciones presentadas muestran que (λ, λ_0) es una combinación lineal del vector de coeficientes de (18). Luego, queda demostrado que la desigualdad de clique simple induce faceta de $P(G, D, \bar{s})$. $\square$

Es posible generalizar la hipótesis de que para cada demanda $i \in N(d) \setminus K$ exista al menos una demanda $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$. Para ello, introducimos la siguiente definición.

Definición 3.8. Dado un conjunto $A \subseteq D$ y una clique $K \subseteq A$ en G_c , decimos que K cubre A (o, alternativamente, que K es una *clique de cubrimiento* de A) si cada vértice $i \in A \setminus K$ satisface $v(i) \leq \sum_{k \in K \setminus N(k)} v(k)$, y existe una solución tal que i utiliza un camino P y cada $k \in K$ tiene asignado un camino disjunto a P .

Dada esta definición, resulta que K sea una clique de cubrimiento de $N(d)$, junto a que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 3\Delta_D$, es condición suficiente para que (18) defina una faceta de $P(G, D, \bar{s})$.

Considerando esta generalización de la hipótesis, al momento de construir la solución z' asociada a la Condición 4, se debería situar la demanda i a la izquierda del intervalo, ubicar las demandas de U_i de forma secuencial iniciando también en la primera posición a la izquierda y d a la derecha de los elementos de U_i . Dado que d solo tiene a la izquierda a i y a los elementos de U_i , es decir, $x_{id} = 1$, $x_{ud} = 1$ para todo $u \in U_i$, y $x_{jd} = 0$ para todo $d \in D \setminus \{U_i \cup \{i\}\}$, y siendo que $l'_d = \sum_{u \in U_i} v(u) = \sum_{k \in K} x_{kd}v(k)$, entonces z' satisface F . Así, se llega al mismo resultado.

Cuando $\bar{s} < s_{\min}(G, D) + 3\Delta_D$, no es posible garantizar que (18) defina una faceta, aunque en este contexto es posible que esto efectivamente se cumpla, dependiendo de la estructura del grafo G y de las especificaciones de las demandas. La *desigualdad de clique simple* (18) describe la relación entre el primer slot asignado a d y el primer slot disponible en el intervalo $\{0, \dots, s-1\}$, reflejando cómo los volúmenes de las demandas conflictivas pueden desplazar a d

hacia slots superiores. Utilizando el Teorema 3.1, podemos obtener una desigualdad simétrica con las mismas propiedades, en este caso estableciendo una relación análoga entre la cota superior del intervalo asignado a d y la cota derecha de los slots disponibles.

Definición 3.9. Sea G_c el grafo de conflictos asociado con $L(G, D, \bar{s})$, sea $d \in V_c$ un vértice de G_c y sea $K \subseteq N(d)$ una clique en G_c , definimos

$$l_d + v(d) \leq \bar{s} - \sum_{k \in K} v(k)x_{dk} \quad (19)$$

como la *desigualdad de clique simple opuesta* asociada con d y K .

Teorema 3.7. La desigualdad de clique simple opuesta (19) es válida para $P(G, D, \bar{s})$. Además, si para cada demanda $i \in N(d) \setminus K$ existe al menos una demanda $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$, y $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 3\Delta_D$, la desigualdad induce una faceta del poliedro.

El Teorema 3.7 se puede demostrar de manera similar al Lema 3.3 y al Teorema 3.6.

3.2.4 Desigualdades clique doble

Consideramos ahora una familia de desigualdades válidas que describe la relación entre los intervalos de slots asignados a dos demandas vecinas en G_c . A cualquier par de demandas de este tipo siempre se les debe asignar intervalos que no se superpongan, lo que da lugar al siguiente resultado. Si $K \subseteq D$, definimos $v(K)$ como la suma del volumen de los nodos involucrados en una clique dada K , es decir, $v(K) := \sum_{k \in K} v(k)$.

Definición 3.10. Sea G_c el grafo de conflictos asociado con $L(G, D, \bar{s})$, sea (d, d') una arista de G_c y sea $K \subseteq N(d) \cap N(d')$ una clique en G_c . Definimos

$$l_d + v(d) + \sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k}) \leq l_{d'} + (\bar{s} - v(K))x_{d'd} \quad (20)$$

como la *desigualdad de clique doble* asociada con d, d' y K .

La desigualdad de clique doble (20) establece que el último slot asignado a la demanda d (es decir, $l_d + v(d) - 1$) debe ser estrictamente menor que el primer slot asignado a la demanda d' siempre que $x_{dd'} = 1$. Además, la distancia entre estos dos slots está acotada interiormente por la suma de los volúmenes de todas las demandas de K cuyos intervalos de slots se sitúan entre los intervalos asignados a d y d' .

Lema 3.4. La desigualdad de clique doble (20) es válida para $P(G, D, \bar{s})$.

Demostración. Supongamos una solución entera factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$. Dadas las demandas $d, d' \in D$, probaremos que en los dos valores posibles para la variable $x_{dd'}$ la desigualdad se cumple.

- En el caso en que $x_{dd'} = 1$, la restricción $l_d + v(d) \leq l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{dd'})$ se reduce a:

$$l_d + v(d) \leq l_{d'}.$$

Además, tenemos que la diferencia entre el lado izquierdo y derecho de la desigualdad (20) es la siguiente:

$$\Delta = [l_d + v(d) + \sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k})] - [l_{d'} + (\bar{s} - v(K))x_{d'd}],$$

y como $x_{d'd} = 0$, el término $(\bar{s} - v(K))x_{d'd}$ es cero, obteniendo que:

$$\Delta = (l_d + v(d) - l_{d'} + \sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k})).$$

Dado que $l_d + v(d) \leq l_{d'}$, se tiene que $l_d + v(d) - l_{d'} \leq 0$.

Finalmente, como $K \cup \{d, d'\}$ es una clique en el grafo de conflictos, cada par de demandas del conjunto $K \cup \{d, d'\}$ está unido por una arista, por lo que sus intervalos asociados no se pueden superponer, y tenemos que la expresión $l_{d'} - (l_d + v(d))$ es mayor o igual a la suma de los volúmenes de las demandas cuyos intervalos se encuentren entre los intervalos de d y d' , implicando que z satisface (20).

- En el caso en que $x_{dd'} = 0$, la diferencia antes vista queda dada de la siguiente manera:

$$\Delta = [l_d + v(d) + \sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k})] - [l_{d'} + (\bar{s} - v(K))x_{d'd}],$$

y ya que $x_{d'd} = 1$,

$$\Delta = [l_d + v(d) - l_{d'} - (\bar{s} - v(K))] + \sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k}).$$

La restricción $l_d + v(d) \leq l_{d'} + \bar{s}(1 - x_{dd'})$ con $x_{dd'} = 0$ permite deducir:

$$l_d + v(d) \leq l_{d'} + \bar{s},$$

de donde

$$l_d + v(d) - l_{d'} - (\bar{s} - v(K)) \leq \bar{s} - (\bar{s} - v(K)) = v(K).$$

Por consiguiente,

$$\Delta \leq v(K) + \sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k}).$$

Podemos obtener $\Delta \leq 0$ si vemos que se cumple

$$v(K) + \sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k}) \leq 0.$$

Siendo $k \in K$ tal que $x_{dk} = 0$ y $x_{d'k} = 1$ tenemos que:

$$\sum_{k \in K} v(k)(x_{dk} - x_{d'k}) \leq - \sum_{k \in K : x_{d'k}=1 \wedge x_{dk}=0} v(k).$$

Luego,

$$v(K) + \sum_{k \in K} v(k) (x_{dk} - x_{d'k}) \leq v(K) - \sum_{k \in K : x_{d'k}=1 \wedge x_{dk}=0} v(k) \leq 0,$$

y de esta manera se satisface que $\Delta \leq 0$, implicando que z satisface (20).

Así, la desigualdad (20) se satisface para toda solución en $P(G, D, \bar{s})$. □

Del mismo modo, las desigualdades de clique doble definen facetas para $P(G, D, \bar{s})$ siempre que para todo vértice $i \in N(d) \cap N(d')$ exista al menos un $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$ y siempre que exista un número suficientemente grande de slots disponibles.

Teorema 3.8. *Si para cada demanda $i \in (N(d) \cap N(d')) \setminus K$ existe al menos una demanda $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$, y tenemos que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 4\Delta_D$, la desigualdad de clique doble (20) define una faceta de $P(G, D, \bar{s})$.*

Demostración. Sea F una cara de $P(G, D, \bar{s})$ asociada a la desigualdad de clique doble (20), y supongamos que $\lambda z = \lambda_0, \forall z \in F$. Veremos que $(\lambda, \lambda_0) = ((\alpha, \beta, \gamma), \lambda_0)$ es una combinación lineal de (20) y los vectores de coeficientes del sistema minimal de ecuaciones de la formulación, implicando que esta desigualdad define una faceta de $P(G, D, \bar{s})$. Para esto, verificaremos que los coeficientes de λ cumplen ciertas condiciones, las cuales se mostrarán a continuación.

Fijemos una demanda $i \in D \setminus \{d, d'\}$ arbitraria. Sea un punto $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d', i\}, \bar{s} - v(d) - v(d') - v(i) - 1)$ que existe dado que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D \setminus \{d, d', i\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d') - v(i) - 1$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + v(d') + v(i) + 1$ para todo $k \in D \setminus \{i, d, d'\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{i, d, d'\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kj} = \hat{x}_{kj}$ para todo $k, j \in D \setminus \{i, d, d'\}$, $k \neq j$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_{d'} = v(d)$, $l_i = l_{d'} + v(d')$ y seteamos las variables y asociadas con i, d, d' para que representen caminos entre $s(i)$ y $t(i)$, $s(d)$ y $t(d)$, y $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{di} = 1$, $x_{d'i} = 1$, $x_{ik} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{i, d, d'\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda d' a la derecha de d , la demanda i a la derecha de d' , un slot libre a la derecha de i , y el resto de las demandas a la derecha del slot libre. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{l_i + v(i) + 1, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, l_i + v(i) - 1\}$ a las demandas d, d' y i , fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_i = l_i + 1$, es decir, moviendo la demanda i un slot a la derecha. La solución z' es factible dado que ahora la demanda i recibe un intervalo que no se superpone con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que tanto z como z' pertenecen a F y solo difieren en la variable l_i , implicando

$$\beta_i l_i = \beta_i l'_i = \beta_i (l_i + 1).$$

Por lo tanto, se concluye

$$\beta_i = 0 \quad \forall i \in D \setminus \{d, d'\}. \quad (\text{Condición 1})$$

Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d'\}, \bar{s} - v(d) - v(d'))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d'\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 2\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d')$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + v(d') + 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, d'\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, d'\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kk'} = \hat{x}_{kk'}$ para todo $k, k' \in D \setminus \{d, d'\}$, $k \neq k'$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_{d'} = v(d)$, $x_{di} = x_{dj} = 1$, y seteamos las variables y asociadas con d y d' para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, y $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{dk} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, d'\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda d' a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de d' , manteniendo el slot contiguo a la derecha de d' vacío. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(d) + v(d') + 1, \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, v(d) + v(d')\}$ a las demandas d y d' , fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_d = l_d + 1$ y $l'_{d'} = l_{d'} + 1$, es decir, moviendo las demandas d y d' un slot a la derecha. La solución z' es factible dado que ahora las demandas d y d' reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. De esta forma, tenemos que

$$\beta_d l_d + \beta_{d'} l_{d'} = \beta_d l'_d + \beta_{d'} l'_{d'}.$$

Reemplazando los valores de las variables por los dados en las soluciones, llegamos a

$$\beta_d = -\beta_{d'}. \quad (\text{Condición 2})$$

Fijemos dos demandas $i, j \in D \setminus \{d, d'\}$ tales que $(i, j) \in L(G, D, \bar{s})$. Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d', i, j\}, \bar{s} - v(d) - v(d') - v(i) - v(j))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d', i, j\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 4\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d') - v(i) - v(j)$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + v(d') + v(i) + v(j)$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i, j\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i, j\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kk'} = \hat{x}_{kk'}$ para todo $k, k' \in D \setminus \{d, d', i, j\}$, $k \neq k'$. Fijamos además $l_i = 0$, $l_j = l_i + v(i)$, $l_d = l_j + v(j)$, $l_{d'} = l_d + v(d)$, $x_{id} = x_{jd} = x_{id'} = x_{jd'} = x_{ij} = x_{dd'} = 1$, y seteamos las variables y asociadas con d , d' , i y j para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, $s(d')$ y $t(d')$, $s(i)$ y $t(i)$, y $s(j)$ y $t(j)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{dk} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i, j\}$. Es decir, situamos la demanda i a la izquierda del intervalo, la demanda j a la derecha de i , la demanda d a la derecha de j , la demanda d' a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de d' . Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(i) + v(j) + v(d) + v(d'), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, v(i) + v(j) + v(d) + v(d') - 1\}$ a las demandas d , d' , i , j y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_j = 0$ y $l'_i = v(j)$, es decir, intercambiando los intervalos asociados a las demandas i y j . La solución z' es factible dado que las demandas i y j reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que las soluciones difieren solo en las variables l_i , l_j , x_{ij} y x_{ji} , y que por el resultado previo sabemos

que los coeficientes asociados a las variables l_i y l_j son nulos, se obtiene:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad \forall (i, j) \in L(G, D, \bar{s}), \quad i, j \in D \setminus \{d, d'\}. \quad (\text{Condición 3})$$

Fijemos ahora dos demandas $i, j \in D \setminus \{d, d'\}$ tales que $(i, j) \notin L(G, D, \bar{s})$. Considerando una construcción análoga al caso anterior, existe una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ donde los espectros asociados a las demandas i y j se superponen a la izquierda del intervalo (lo cual es posible ya que $(i, j) \notin L(G, D, \bar{s})$), con $l_i = l_j = x_{ij} = x_{ji} = 0$. A partir de z , se construye una nueva solución $z' = (y', l', x')$ estableciendo $l'_j = v(i)$ y $x'_{ij} = 1$, es decir, desplazando j a la derecha de i , de modo que los espectros asociados a i y j no se superponen. Así, obtenemos que:

$$\gamma_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \notin L(G, D, \bar{s}), \quad i, j \in D \setminus \{d, d'\}. \quad (\text{Condición 4})$$

Fijemos ahora una demanda $k \in K$. Sea una solución factible $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d', k\}, \bar{s} - v(d) - v(d') - v(k) - \Delta_D)$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d', k\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 4\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d') - v(k) - \Delta_D$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteadando $l_i = \hat{l}_i + v(d) + v(d') + v(k) + \Delta_D$ para todo $i \in D \setminus \{d, d', k\}$, $y_{ie} = \hat{y}_{ie}$ para todo $i \in D \setminus \{d, d', k\}$ y todo $e \in E$, y $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$ para todo $i, j \in D \setminus \{d, d', k\}$, $i \neq j$. Fijamos además $l_k = 0$, $l_d = v(k)$, $l_{d'} = v(k) + v(d)$, $x_{kd} = x_{kd'} = x_{dd'} = 1$, y seteamos las variables y asociadas con d, d' y k para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, $s(d')$ y $t(d')$, y entre $s(k)$ y $t(k)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{di} = x_{d'i} = x_{ki} = 1$ para todo $i \in D \setminus \{d, d', k\}$. Es decir, situamos la demanda k a la izquierda del intervalo, la demanda d a la derecha de k , la demanda d' a la derecha de d , luego mantenemos Δ_D slots sin asignar y finalmente el resto de las demandas a la derecha de estos slots libres. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{2v(k) + v(d) + v(d'), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, l_d + v(d) + v(k) - 1\}$ a las demandas d y k , manteniendo Δ_D slots libres, y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_d = 0$, $l'_k = v(d)$, $l'_{d'} = l'_k + v(k)$ y $x'_{dk} = 1$, es decir, situando la demanda k a la derecha de la demanda d y a la demanda d' a la derecha de k . La solución z' es factible dado que las demandas k y d' reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. Dado que las soluciones difieren en las variables x_{dk} , x_{kd} , l_k , $l_{d'}$, tenemos

$$\beta_k l_k + \beta_{d'} l_{d'} + \gamma_{dk} x_{dk} + \gamma_{kd} x_{kd} = \beta_k l'_k + \beta_{d'} l'_{d'} + \gamma_{dk} x'_{dk} + \gamma_{kd} x'_{kd}$$

Siendo que $x_{dk} = 0$, $x'_{dk} = 1$, $\beta_k = 0$, $l_{d'} = l_d + v(d)$ y $l'_{d'} = l_d + v(d) + v(k)$, y que por Condición 2, tenemos $\beta_d = -\beta_{d'}$, obtenemos,

$$\gamma_{dk} = v(k)\beta_d + \gamma_{kd} \quad \forall k \in K. \quad (\text{Condición 5})$$

De manera análoga al caso anterior, pero planteando el intervalo de k a la derecha del intervalo de d' en z y luego intercambiando estos dos intervalos en z' de manera que el intervalo de k quede a la izquierda del intervalo de d' , obtenemos:

$$\gamma_{d'k} = v(k)\beta_{d'} + \gamma_{kd'} \quad \forall k \in K. \quad (\text{Condición 6})$$

Fijemos ahora una demanda $i \in [N(d) \cap N(d')] \setminus K$. Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d', i\}, \bar{s} - v(d) - v(d') - \Delta_D)$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d', i\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d') - \Delta_D$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + v(d') + \Delta_D$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kj} = \hat{x}_{kj}$ para todo $k, j \in D \setminus \{d, d', i\}$, $k \neq j$. Fijamos además $l_i = 0$, $l_d = \Delta_D$, $l_{d'} = \Delta_D + v(d)$, $x_{id} = 1$, $x_{id'} = 1$ y $x_{dd'} = 1$, y seteamos las variables y asociadas con d , d' y i para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, $s(d')$ y $t(d')$, y $s(i)$ y $t(i)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{dk} = x_{d'k} = x_{ik} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i\}$. Es decir, situamos la demanda i en los primeros Δ_D slots del intervalo, la demanda d a la derecha de i , la demanda d' a la derecha de d y el resto de las demandas a la derecha de estas. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{\Delta_D + v(d) + v(d'), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, \Delta_D + v(d) + v(d') - 1\}$ a las demandas d , d' y i , y fijando las restantes variables de manera acorde.

Por hipótesis, existe una demanda $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$. Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_d = 0$, $l'_i = l'_u = v(d)$, $l'_{d'} = v(d) + v(u)$. Es decir, situando la demanda d a la izquierda del intervalo, las demandas i y u a la derecha de d y la demanda d' a la derecha de u . La solución z' es factible dado que la demanda d recibe intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. Por otro lado, dado que d tiene a la derecha a i y a u , es decir, $x'_{di} = x'_{du} = 1$ y $x'_{d'u} = 0$, y siendo que $l'_{d'} = v(d) + v(u) = \sum_{k \in K} x_{kd}v(k)$, z' satisface F . De esta manera y aplicando Condición 2, Condición 4 y Condición 6, tenemos que

$$\gamma_{di} = \gamma_{id} \quad \forall i \in [N(d) \cap N(d')] \setminus K. \quad (\text{Condición 7})$$

Repetiendo el argumento anterior, esta vez con d' , tenemos que

$$\gamma_{d'i} = \gamma_{id'}. \quad (\text{Condición 8})$$

Fijemos ahora una demanda $i \in N(d) \setminus N(d')$. Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d', i\}, \bar{s} - v(d) - v(d') - v(i))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d', i\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 3\Delta_D \leq \bar{s} - v(d) - v(d') - v(i)$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + v(d') + v(i)$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kj} = \hat{x}_{kj}$ para todo $k, j \in D \setminus \{d, d', i\}$, $k \neq j$. Fijamos además $l_d = 0$, $l_{d'} = v(d)$, $l_i = v(d) + v(d')$, $x_{dd'} = x_{d'i} = x_{di} = 1$, y seteamos las variables y asociadas con d , d' y i para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, $s(d')$ y $t(d')$, y $s(i)$ y $t(i)$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{dk} = x_{d'k} = x_{ik} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, d', i\}$. Es decir, situamos la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda d' a la derecha de d , la demanda i a la derecha de d' , y finalmente el resto de las demandas a la derecha de i . Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{v(i) + v(d) + v(d'), \dots, \bar{s} - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{0, \dots, v(i) + v(d) + v(d') - 1\}$ a las demandas d, d' y i , y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_i = 0$, $l'_d = v(i)$, $l'_{d'} = v(i) + v(d)$ y $x'_{di} = 0$, es decir, situando la demanda

i a la izquierda del intervalo, la demanda d a la derecha de i y la demanda d' a la derecha de d . La solución z' es factible dado que las demandas d , d' y i reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas. Siendo que las soluciones solo difieren en las demandas d , d' y i , tenemos

$$\gamma_{di} = \gamma_{id} \quad \forall i \in N(d) \setminus N(d'). \quad (\text{Condición 9})$$

Usando la misma construcción que en el caso anterior, pero estableciendo que i sea adyacente a d' y no adyacente a d , llegamos a

$$\gamma_{d'i} = \gamma_{id'} \quad \forall i \in N(d) \setminus N(d'). \quad (\text{Condición 10})$$

Sea una solución $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{l}, \hat{x}) \in P(G, D \setminus \{d, d'\}, \bar{s} - 2v(d) - 2v(d'))$, que existe puesto que este poliedro es no vacío dado que $s_{\min}(G, D \setminus \{d, d'\}) \leq s_{\min}(G, D) \leq \bar{s} - 4\Delta_D \leq \bar{s} - 2v(d) - 2v(d')$. Construimos una solución factible $z = (y, l, x) \in P(G, D, \bar{s})$ seteando $l_k = \hat{l}_k + v(d) + 2v(d')$ para todo $k \in D \setminus \{d, d'\}$, $y_{ke} = \hat{y}_{ke}$ para todo $k \in D \setminus \{d, d'\}$ y todo $e \in E$, y $x_{kk'} = \hat{x}_{kk'}$ para todo $k, k' \in D \setminus \{d, d'\}$, $k \neq k'$. Fijamos además $l_d = v(d')$, $l_{d'} = v(d') + v(d)$, $x_{dd'} = 1$, y seteamos las variables y asociadas con d y d' para que representen caminos entre $s(d)$ y $t(d)$, y $s(d')$ y $t(d')$, respectivamente. Finalmente, fijamos $x_{dk} = x_{dk'} = 1$ para todo $k \in D \setminus \{d, d'\}$. Es decir, mantenemos $v(d')$ slots sin asignar a la izquierda del intervalo, situamos la demanda d a la derecha del intervalo asociado a los slots libres, la demanda d' a la derecha de d , y el resto de las demandas a la derecha de d' , manteniendo los últimos $v(d)$ slots del intervalo sin asignar. Esta construcción corresponde a ubicar la solución $\hat{z}$ en el intervalo $\{2v(d') + v(d) - 1, \dots, \bar{s} - v(d) - 1\}$, y asignarle el intervalo de slots $\{v(d'), \dots, v(d) + 2v(d')\}$ a las demandas d y d' , manteniendo los primeros $v(d')$ slots y los últimos $v(d)$ slots sin asignar, y fijando las restantes variables de manera acorde.

Construimos ahora una nueva solución factible $z' = (y', l', x')$ como la obtenida a partir de z estableciendo $l'_{d'} = 0$ y $l'_d = \bar{s} - v(d)$, es decir, moviendo las demandas d' y d a los extremos izquierdo y derecho, respectivamente. La solución z' es factible dado que ahora las demandas d y d' reciben intervalos que no se superponen con los intervalos asignados al resto de las demandas y dado que $x_{dk} - x_{d'k} = 0$, $x'_{dk} = 0$ y $x'_{d'k} = 1$ para todo $k \in N(d) \cap N(d')$, z y z' satisfacen F . De esta forma, tenemos que

$$\beta_d l_d + \beta_{d'} l_{d'} + \sum_{k \in K} (\gamma_{dk} x_{dk} + \gamma_{d'k} x_{d'k}) = \beta_d l'_d + \beta_{d'} l'_{d'} + \sum_{k \in K} \gamma_{d'k} x'_{d'k} + \gamma_{d'd} x'_{d'd}.$$

Reemplazando los valores de $l_{d'}$, l'_d , $l'_{d'}$, $x_{dd'}$ y $x'_{dd'}$, y siendo que $\beta_d = -\beta_{d'}$, obtenemos

$$\sum_{k \in K} (\gamma_{dk} x_{dk} + \gamma_{d'k} x_{d'k}) = \beta_d \bar{s} + \sum_{k \in K} \gamma_{d'k} x'_{d'k} + \gamma_{d'd}.$$

Dado que $\gamma_{dk} = v(k)\beta_d$, $\gamma_{d'k} = -v(k)\beta_{d'}$ y $\beta_{d'} = -\beta_d$ llegamos a

$$0 = \beta_d \left(\bar{s} - \sum_{k \in K} v(k) \right) + \gamma_{d'd}.$$

Implicando que

$$\gamma_{d'd} = -\beta_d (\bar{s} - v(K)). \quad (\text{Condición 11})$$

Dado que las variables y no participan en la desigualdad de clique doble (20), se puede demostrar de manera similar a la prueba del Teorema 3.3 que los coeficientes α son una combinación lineal del sistema minimal de ecuaciones.

Esto demuestra que (λ, λ_0) es una combinación lineal del vector de coeficientes de (20) y de las ecuaciones del sistema minimal, dando por demostrado que la desigualdad de clique doble define faceta de $P(G, D, \bar{s})$. $\square$

De manera análoga al caso de las desigualdades clique simple, es posible generalizar la condición de que para cada demanda $i \in N(d) \cap N(d')$ exista al menos una demanda $u \in K$ tal que $(u, i) \notin L(G, D, \bar{s})$ y $v(u) \geq v(i)$. De esta manera, que K sea una clique de cubrimiento de $N(d) \cap N(d')$, junto a que $\bar{s} \geq s_{\min}(G, D) + 4\Delta_D$, es condición suficiente para que (20) defina una faceta de $P(G, D, \bar{s})$.

En este caso, considerando la generalización de la hipótesis, al momento de construir la solución z' asociada a la Condición 7, se debería situar la demanda d a la izquierda del intervalo, la demanda i y las demandas de U_i (estas ubicadas de forma secuencial) iniciando a la derecha de d y d' a la derecha de los elementos de U_i . Dado que d tiene a la derecha a todos los elementos de U_i , es decir, $x_{du} = 1$ y $x_{d'u} = 0$ para todo $u \in U_i$, y siendo que $l'_{d'} = v(d) + \sum_{u \in U_i} v(u) = \sum_{k \in K} x_{kd}v(k)$, z' satisface F . De esta forma, se llega al mismo resultado.

Las desigualdades presentadas anteriormente son útiles para fortalecer las restricciones que definen cotas en las variables asociadas a la asignación de los intervalos de slots. Las *desigualdades de clique simple* lo hacen involucrando un vértice d en el grafo de conflictos G_c y una clique incluida en el vecindario de d , y la *desigualdad de clique doble* involucrando una arista d, d' en E_c y una clique incluida en la intersección de los vecindarios de d y d' .

3.3. Consideraciones sobre el grafo de conflictos

Las desigualdades válidas presentadas en este capítulo están basadas en conocer los elementos de L . Siendo éste un conjunto computacionalmente difícil de generar, ya que, como vimos anteriormente, no se deriva únicamente a partir de la estructura de G , sino que también depende de $\bar{s}$ y D , la aplicación práctica de estos resultados es compleja. Sin embargo, es posible centrarse en un subconjunto de L para obtener resultados prácticos que, si bien no capturan toda la complejidad del enfoque original, pueden proporcionar conocimientos significativos.

Llamemos L' a un subconjunto de L que solo contenga elementos de L razonablemente fáciles de calcular. Un ejemplo de estos pares de demandas fáciles de calcular se puede ver en un grafo $G = (V, E)$ compuesto por dos subgrafos disjuntos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ unidos por un único arco puente (u, v) , de manera tal que

$$V_1 = \{s_1, s_2, u\}, E_1 = \{(s_1, u), (s_2, u)\}, V_2 = \{v, t_1, t_2\}, E_2 = \{(v, t_1), (v, t_2)\}$$

de modo que $V = V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}$ y $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(u, v)\}$. Considerando las demandas $d_1 = (s_1, t_1)$ y $d_2 = (s_2, t_2)$, dado que los orígenes de ambas demandas se hallan en G_1 y sus destinos en G_2 , toda ruta factible para d_1 y d_2 debe utilizar el arco (u, v) . Esto implica que las rutas de d_1 y d_2 comparten al menos un arco en todas las soluciones de $P(G, D, \bar{s})$, de manera que el conjunto $L(G, D, \bar{s})$ contiene el par (d_1, d_2) . La Figura 3.4 describe el ejemplo presentado.

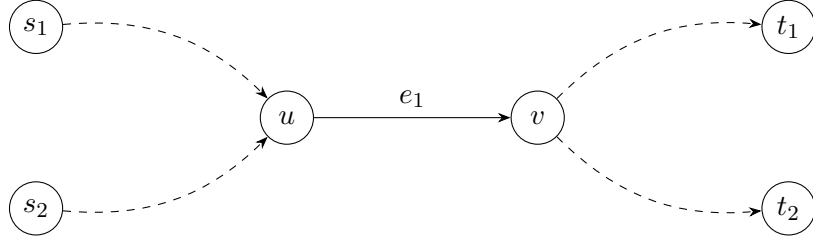


Fig. 3.4: Grafo compuesto por dos subgrafos unidos por un arco puente (u, v) . Cualquier ruta que conecte la demanda $d_1 = (s_1, t_1)$ y la demanda $d_2 = (s_2, t_2)$ debe utilizar (u, v) , de modo que el conjunto $L(G, D, \bar{s})$ incluye el par (d_1, d_2) .

El conjunto L' proporciona un método práctico para generar desigualdades válidas e identificar candidatos que definan facetas sin requerir el conjunto completo. Aunque no captura todas las desigualdades posibles asociadas con L , permite una derivación eficiente de desigualdades que pueden ser aplicadas para fortalecer la formulación del problema en la práctica.

Identificar los elementos de L fáciles de generar también es un desafío. En el ejemplo anterior, los pares de demandas unidos por un puente en común representan un subconjunto fácilmente identificable, pero la identificación de otros pares de demandas a menudo depende de características específicas de la instancia, y puede ser necesario considerar otros atributos de la misma, como los volúmenes de las demandas o todos los caminos posibles para ciertas demandas.

Un enfoque que puede resultar útil para identificar pares de demandas conflictivos consiste en analizar la conectividad del grafo. En particular, los puntos de articulación y los arcos puentes dividen el grafo en componentes que pueden tratarse de manera independiente, determinando subconjuntos de demandas cuya conectividad las obliga a compartir ciertos enlaces entre dichas componentes. Esta descomposición reduce la complejidad asociada con la construcción de subconjuntos de L .

Dada esta complejidad, vale la pena estudiar una relajación de este problema, siendo que simplificando ciertas restricciones podríamos obtener información útil sobre la estructura de $P(G, D, \bar{s})$, lo que ayudaría a mejorar la resolución exacta del RSA en la práctica. Llevamos a cabo esta tarea en el siguiente capítulo.

4. ESTUDIO POLIEDRAL DE UNA RELAJACIÓN DEL PROBLEMA

Los resultados presentados en el capítulo anterior sugieren que estudiar las propiedades de facetitud de la formulación DR-AOV puede ser difícil. Con el fin de enfocarnos en la asignación de espectro, en este capítulo introducimos y analizamos una formulación relajada que solamente se enfoca en la componente de asignación de espectro y deja de lado la definición de las rutas para las demandas. La región factible de esta formulación relajada incluirá a la proyección de $P(G, D, \bar{s})$ sobre las variables l y x , de modo tal que toda desigualdad válida para esta relajación es válida para la formulación DR-AOV. Por este motivo, estudiar su estructura combinatoria no sólo constituye un aporte desde el punto de vista teórico, sino que provee desigualdades trasladables de forma directa a la resolución del RSA en un entorno de planos de corte.

Dado un conjunto D de demandas, un volumen $v(i) \in \mathbb{Z}_+$ asignado a cada demanda $i \in D$, y una cantidad $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+$ de slots disponibles, consideramos la siguiente formulación. Al igual que en el capítulo anterior, la variable entera l_i representa el inicio del intervalo de $v(i)$ slots asignados a la demanda i , para $i \in D$, y la variable binaria x_{ij} representa si el intervalo asignado a la demanda i se encuentra a la izquierda del intervalo asignado a la demanda j , para $i, j \in D, i \neq j$.

$$l_i + v(i) \leq l_j + \bar{s}(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in D, i \neq j, \quad (4.1)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall i, j \in D, i \neq j, \quad (4.2)$$

$$0 \leq l_i \leq \bar{s} - v(i) \quad \forall i \in D, \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in D, i \neq j. \quad (4.4)$$

Las restricciones de *antiparalelismo* (4.1) exigen que los intervalos de slots asignados a las demandas i y j sean disjuntos siempre que $x_{ij} = 1$ o $x_{ji} = 1$, para $i, j \in D, i \neq j$. Las restricciones de *2-ciclos* (4.2) establecen que $x_{ij} = x_{ji} = 1$ no es factible, para $i, j \in D, i \neq j$. Sin embargo, no es obligatorio que $x_{ij} + x_{ji} = 1$, es decir, permitimos que los intervalos de slots asociados se superpongan estableciendo $x_{ij} = x_{ji} = 0$. Esta situación también es factible en la formulación original, aunque en conexión con los intervalos de slots asignados a i y j . La restricción (4.3) establece la *no negatividad* $l_i \geq 0$ y una cota superior para la variable de cada demanda $i \in D$. Finalmente, las restricciones (4.4) establecen que las variables x son binarias.

En la Figura 4.1 se muestran dos soluciones factibles de la formulación relajada a una instancia simple donde $D = \{1, 2\}$, tal que $v(1) = 3$, $v(2) = 5$, y $\bar{s} = 12$. En la subfigura 4.1-(a) se presenta una solución tal que 1 y 2 ocupan intervalos de slots disjuntos y se establece $x_{12} = 1$ para reflejar que $l_1 + v(1) \leq l_2$. Por otro lado, en la subfigura 4.1-(b) se muestra una asignación en la que los intervalos asignados a 1 y 2 tienen un slot en común, donde $x_{12} = x_{21} = 0$.

En este capítulo se presentan diversas familias de desigualdades válidas para la formulación relajada. Como toda desigualdad válida para dicha relajación es válida para $P(G, D, \bar{s})$, se pone especial énfasis en caracterizar las que, además, definen facetas. Buscamos establecer las condiciones que garantizan esta propiedad y analizar la complejidad computacional de los

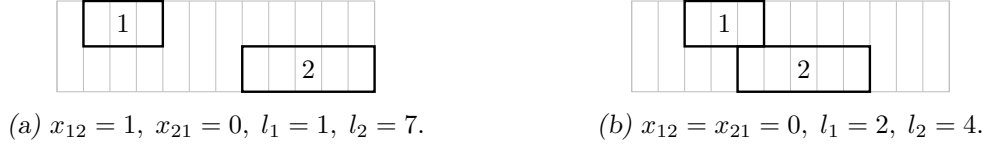


Fig. 4.1: Ejemplo de dos soluciones factibles de la formulación relajada a una instancia simple de dos demandas 1, 2, donde $v(1) = 3, v(2) = 5$, y $\bar{s} = 12$.

problemas de separación asociados. El objetivo principal es identificar familias de desigualdades válidas fuertes que podrían ser útiles dentro de un entorno de planos de corte para resolver el RSA.

4.1. Propiedades generales del poliedro asociado a la relajación

Definimos el poliedro $RP(D, \bar{s})$ como la cápsula convexa de todas las soluciones $(l, x) \in \mathbb{Z}^{|D|+(|D|^2-|D|)}$ que satisfacen las restricciones (4.1)-(4.4). Para $i \in D$, sea e_i el vector unitario de dimensión $|D|$ que tiene valor 1 en la entrada correspondiente a la demanda i . De manera similar, para $i, j \in D, i \neq j$, sea e_{ij} el vector unitario de dimensión $|D|(|D| - 1)$ que tiene valor 1 en la entrada correspondiente al par de demandas (i, j) , donde los pares de demandas están ordenados lexicográficamente, de manera que la notación e_{ij} se refiere a una entrada fija de e para cualquier $i, j \in D, i \neq j$ fija. Definimos $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{|D|}$ como el vector de ceros de longitud $|D|$.

Teorema 4.1. *El poliedro $RP(D, \bar{s})$ tiene dimensión completa $|D|^2$ si y solo si $\bar{s} \geq v(i) + v(j)$ para cada $i, j \in D, i \neq j$.*

Demostración. Supongamos primero $\bar{s} \geq v(i) + v(j)$ para cada $i, j \in D, i \neq j$. Se puede observar que existen soluciones $(l, x) \in RP(D, \bar{s})$ con

- $l = \mathbf{0}$ y $x = \mathbf{0}$,
- $l = e_i$ y $x = \mathbf{0}$ para todo $i \in D$, y
- $l = v(i) \cdot e_i$ y $x = e_{ij}$ para todos los pares de demandas diferentes $i, j \in D, i \neq j$.

Todos estos puntos pertenecen a $RP(D, \bar{s})$ y son afinmente independientes, lo que demuestra que la dimensión de $RP(D, \bar{s})$ es $|D| + (|D|^2 - |D|) = |D|^2$. Por el contrario, si $v(i) + v(j) < \bar{s}$ para algún $i, j \in D, i \neq j$, entonces cualquier solución factible tiene $x_{ij} = x_{ji} = 0$, por lo tanto $RP(D, \bar{s})$ no tiene dimensión completa en este caso. □

Al igual que el poliedro asociado a la formulación DR-AOV presentado en la Sección 3.1 y el asociado a la formulación de chromatic scheduling presentado en la Sección 3.2, $RP(D, \bar{s})$ satisface una propiedad de simetría, la cual viene dada como se describe a continuación. Para cada solución $(l, x) \in RP(D, \bar{s})$, definimos su solución simétrica $\bar{z} = (\bar{l}, \bar{x})$ con respecto a la asignación de espectro, con $\bar{l} = \bar{s} \cdot \mathbf{1} - v - l$, donde v denota el vector que describe el volumen de las demandas en D , y $\bar{x}$ tiene entradas $\bar{x}_{ij} = x_{ji}$ para todo par de demandas diferentes $i, j \in D$. De hecho, $(\bar{l}, \bar{x})$ se obtiene reemplazando el intervalo $I(i) = \{l_i, \dots, l_i + v(i) - 1\}$ en

(l, x) para todas las demandas $i \in D$ por su “espejo” $I(\bar{i}) = \{\bar{s} - v(i) - l_i, \dots, \bar{s} - l_i - 1\}$, con respecto al espectro $\{0, \dots, \bar{s} - 1\}$, y claramente tenemos que la solución simétrica asociada con $(\bar{l}, \bar{x})$ es (l, x) . La Figura 4.2 ilustra la correspondencia entre una solución de $RP(D, \bar{s})$ y la solución simétrica asociada. Debido a la simetría de las soluciones que componen $RP(D, \bar{s})$, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

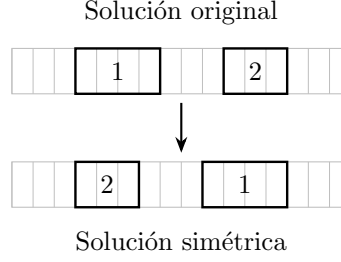


Fig. 4.2: Ejemplo de la simetría presente en $RP(D, \bar{s})$ sobre una instancia con dos demandas 1 y 2, donde $v(1) = 4$, $v(2) = 3$ y $\bar{s} = 16$. La figura superior representa una solución (l, x) donde $x_{12} = 1$, $x_{21} = 0$, $l_1 = 3$ y $l_2 = 10$, mientras que la inferior muestra la solución simétrica asociada $(\bar{l}, \bar{x})$ donde $\bar{x}_{12} = 0$, $\bar{x}_{21} = 1$, $\bar{l}_1 = 9$ y $\bar{l}_2 = 3$.

Teorema 4.2. Sea $\alpha^\top l + \beta^\top x \leq \pi_0$ una desigualdad válida (respectivamente, que define faceta) de $RP(D, \bar{s})$, entonces la desigualdad simétrica $-\alpha^\top l + \bar{\beta}^\top x \leq \pi_0 - \alpha^\top(\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})$ es válida (respectivamente, define faceta) para $P(G, D, \bar{s})$, donde $\bar{\beta}_{dd'} := \beta_{d'd}$ para cada $d, d' \in D$, $d \neq d'$.

Demostración. Primero probaremos que la desigualdad $-\alpha^\top l + \bar{\beta}^\top x \leq \pi_0 - \alpha^\top(\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})$ es válida para $RP(D, \bar{s})$. Sea $(l, x) \in RP(D, \bar{s})$ una solución factible y sea $(\bar{l}, \bar{x})$ la solución simétrica asociada a (l, x) , donde $\bar{l}_i = \bar{s} - v(i) - l_i$ para $i \in D$ y $\bar{x}_{ij} = x_{ji}$ para $i, j \in D, i \neq j$. Verificamos primero que $(\bar{l}, \bar{x}) \in RP(D, \bar{s})$ mostrando que esta solución también satisface (4.1)–(4.4).

- *Restricciones de antiparalelismo.* Para $i, j \in D, i \neq j$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{l}_i + v(i) &= (\bar{s} - v(i) - l_i) + v(i) = \bar{s} - l_i, \\ \bar{l}_j + \bar{s}(1 - \bar{x}_{ij}) &= (\bar{s} - v(j) - l_j) + \bar{s}(1 - x_{ji}) = \bar{s} - v(j) - l_j + \bar{s} - \bar{s}x_{ji}. \end{aligned}$$

La restricción de antiparalelismo que debe verificarse es

$$\bar{s} - l_i \leq \bar{s} - v(j) - l_j + \bar{s}(1 - x_{ji}),$$

o, equivalentemente,

$$(l_i - l_j) + \bar{s} - v(j) - \bar{s}x_{ji} \geq 0.$$

Es fácil ver que esta última expresión es exactamente la restricción de antiparalelismo (4.1) escrita para el par (j, i) y, como (l, x) es una solución factible, se cumple esta desigualdad.

- *Restricciones de 2-ciclos.* Para todo $i \neq j$, tenemos que

$$\bar{x}_{ij} + \bar{x}_{ji} = x_{ji} + x_{ij} \leq 1,$$

dado que (l, x) satisface (4.2).

- *Cotas de las variables l .* De $0 \leq l_i \leq \bar{s} - v(i)$ se deduce

$$0 \leq \bar{s} - v(i) - l_i \leq \bar{s} - v(i),$$

de modo que $(\bar{l}, \bar{x})$ cumple (4.3).

- *Dominio de las variables x .* El cambio de x_{ij} por x_{ji} no altera el dominio de la variable, por lo que (4.4) permanece siendo válido.

Dado que $(\bar{l}, \bar{x})$ es una solución factible, entonces cumple la desigualdad válida, es decir $\alpha^\top \bar{l} + \beta^\top \bar{x} \leq \pi_0$. Pero $\alpha^\top \bar{l} + \beta^\top \bar{x} = \alpha^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v} - l) + \beta^\top x$. Como (l, x) es una solución arbitraria, entonces la desigualdad $-\alpha^\top l + \bar{\beta}^\top x \leq \pi_0 - \alpha^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})$ es también válida para $RP(D, \bar{s})$.

Ahora, sea $H = \{(l, x) \in RP(D, \bar{s}) : \alpha^\top l + \beta^\top x = \pi_0\}$ la cara asociada a la desigualdad. Dado que hay $k = \dim(RP(D, \bar{s}))$ puntos afinmente independientes en H , $(l^1, x^1), \dots, (l^k, x^k)$, construyendo la solución simétrica asociada a cada uno de ellos, obtenemos los puntos $(\bar{l}^1, \bar{x}^1), \dots, (\bar{l}^k, \bar{x}^k)$. Estos puntos cumplen

$$-\alpha^\top \bar{l}^h + \beta^\top \bar{x}^h = \pi_0 - \alpha^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v}), \quad h = 1, \dots, k.$$

Dado que cada uno de los puntos $(\bar{l}^1, \bar{x}^1), \dots, (\bar{l}^k, \bar{x}^k)$ se obtiene reflejando la asignación de slots con respecto a $(\bar{s} - 1)/2$, lo cual es una transformación afín, el conjunto $H' = \{(l, x) \in RP(D, \bar{s}) : -\alpha^\top l + \bar{\beta}^\top x = \pi_0 - \alpha^\top (\bar{s}\mathbf{1} - \mathbf{v})\}$ contiene k puntos afinmente independientes. Por lo tanto, si $\alpha^\top l + \beta^\top x \leq \pi_0$ define una faceta, entonces su desigualdad simétrica también lo hace.

□

En particular, tenemos las siguientes consecuencias para las restricciones que definen $RP(D, \bar{s})$.

Corolario 4.1.

1. La restricción de antiparalelismo $l_i + v(i) \leq l_j + \bar{s}(1 - x_{ij})$ es simétrica a $l_j + v(j) \leq l_i + \bar{s}(1 - x_{ji})$, para cualquier $i, j \in D$, $i \neq j$.
2. La restricción de 2-ciclos $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$ es simétrica consigo misma (es decir, su restricción simétrica es nuevamente $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$), para cualquier $i, j \in D$, $i \neq j$.
3. La cota inferior $0 \leq l_i$ para l_i es simétrica a su cota superior $l_i \leq \bar{s} - v(i)$, para cualquier $i \in D$.

Con respecto a las restricciones de la formulación de PLE relajada presentada, tenemos el siguiente resultado directo.

Proposición 4.1. Si $\bar{s} \geq v(i) + v(j)$, entonces

1. Las restricciones de antiparalelismo (4.1) definen facetas de $RP(D, \bar{s})$,
2. Las restricciones de 2-ciclos (4.2) definen facetas de $RP(D, \bar{s})$, y

3. La restricción de no negatividad $x_{ij} \geq 0$ define una faceta de $RP(D, \bar{s})$, para $i, j \in D$, $i \neq j$.

Demostración. Consideremos las caras F , G y H de $RP(D, \bar{s})$ definidas por (4.1), (4.2) y $x_{ij} \geq 0$, respectivamente, para $i, j \in D$, $i \neq j$ fijos. La hipótesis sobre $\bar{s}$ implica que $RP(D, \bar{s})$ tiene dimensión completa, por el Teorema 4.1, por lo que la demostración consiste en construir, para cada una de las caras definidas, $|D|^2$ soluciones afinmente independientes que satisfagan la cara en cuestión por igualdad.

1. Consideremos las siguientes soluciones factibles que satisfacen (4.1) por igualdad.
 - La solución $((\bar{s} - v(i)) e_i, \mathbf{0})$ cumple (4.1) por igualdad.
 - Para cada $k \in D \setminus \{i, j\}$, construimos la solución $((\bar{s} - v(i)) e_i + e_k, \mathbf{0})$. Como $x_{ij} = 0$ y $l_j = 0$, (4.1) se cumple por igualdad.
 - Las soluciones $((\bar{s} - v(i) - v(j)) e_j + (\bar{s} - v(i)) e_i, e_{ji})$ y $(v(i) e_j, e_{ij})$ cumplen (4.1) por igualdad.
 - Para cada par ordenado $(p, q) \in (D \times D) \setminus \{(i, j)\}$, $p \neq q$, realizamos la siguiente construcción. Si $q \neq i$ consideramos la solución $((\bar{s} - v(i)) e_i + v(p) e_q, e_{pq})$. Por otra parte, si $q = i$ entonces tomamos la solución $((\bar{s} - v(i)) e_i, e_{pq})$. En ambos casos la solución cumple (4.1) por igualdad.

Es fácil ver que los puntos dados son afinmente independientes, dado que cada punto en la secuencia especificada asigna un valor no nulo a una variable que en las soluciones anteriores estaba en cero. Además, se tienen $|D|^2 = \dim(RP(D, \bar{s}))$ soluciones en F por lo que (4.1) define una faceta de $RP(D, \bar{s})$.

2. Consideremos las siguientes soluciones factibles que satisfacen (4.2) por igualdad.
 - Para cada $k \in D \setminus \{j\}$, consideremos la solución $(v(i) e_j + e_k, e_{ij})$, que cumple (4.2) por igualdad dado que tiene $x_{ij} = 1$.
 - Consideremos además la solución $(v(i) e_j, e_{ij})$, que también cumple (4.2) por igualdad.
 - Consideramos además las soluciones $(v(j) e_i, e_{ji})$ y $((v(j) + 1) e_i, e_{ji})$. La segunda solución es afinmente independiente con las anteriores, dado que no cumple $l_i = v(j)x_{ji}$ mientras que las soluciones anteriores sí cumplen esta ecuación.
 - Para cada $(p, q) \in (D \times D) \setminus \{(i, j), (j, i)\}$, $p \neq q$, si $q \neq i$ y $q \neq j$ entonces construimos la solución $(v(p) e_q + v(i) e_j, e_{ij} + e_{pq})$. Si $q = i$ construimos la solución $(\max\{v(j), v(p)\} e_i, e_{ji} + e_{pq})$. Finalmente, si $q = j$ entonces construimos la solución $(\max\{v(i), v(p)\} e_j, e_{ij} + e_{pq})$. En todos los casos, se cumple (4.1) por igualdad y se tiene $x_{pq} = 1$.

Nuevamente, es fácil ver que los puntos dados son afinmente independientes. Además, se tienen $|D|^2 = \dim(RP(D, \bar{s}))$ soluciones en G por lo que (4.2) define una faceta de $RP(D, \bar{s})$.

3. Consideremos las siguientes soluciones factibles que satisfacen la restricción de no negatividad $x_{ij} \geq 0$ por igualdad.

- La solución $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ cumple $x_{ij} = 0$.
- Para cada $k \in D$, construimos la solución $(e_k, \mathbf{0})$. Dado que $l_k = 1$ y todas las variables x , incluida x_{ij} , valen 0, se cumple $x_{ij} = 0$.
- Para cada par ordenado $(p, q) \in (D \times D) \setminus \{(i, j)\}$, $p \neq q$, construimos la solución $(v(p)e_q, e_{pq})$. En estas soluciones solamente x_{pq} vale 1, por lo tanto se cumple $x_{ij} = 0$.

Los puntos dados son afinmente independientes, puesto que en todas las soluciones (excepto la primera) una variable toma un valor positivo y en las soluciones anteriores esta variable tiene valor nulo. Además, se tienen $|D|^2 = \dim(RP(D, \bar{s}))$ soluciones en H por lo que la restricción de no negatividad $x_{ij} \geq 0$ define una faceta de $RP(D, \bar{s})$.

□

Los resultados presentados en la siguiente sección implican que la restricción $x_{ij} \leq 1$ y las cotas $l_i \geq 0$ y $l_i \leq \bar{s} - v(i)$ están dominadas por desigualdades válidas más fuertes, de manera que estas restricciones no definen facetas de $RP(D, \bar{s})$.

4.2. Familias de desigualdades validas

En esta sección presentamos varias familias de desigualdades válidas para $RP(D, \bar{s})$, motivadas por el hecho de que cualquier desigualdad válida para este politopo también será válida para la formulación DR-AOV del RSA. Los resultados de facetitud no se traducen directamente de un politopo a otro, pero aún así pueden proporcionar una idea sobre la fortaleza de las desigualdades identificadas, por lo que también abordamos esta cuestión. Sumado a esto, exploraremos los problemas de separación asociados con cada familia presentada de desigualdades válidas, mostrando que es posible resolver todas ellas en tiempo polinomial.

4.2.1 Desigualdades telescópicas

La idea de las siguientes familias de desigualdades es definir cotas para cada demanda $i \in D$ en función de la suma de las diferencias de volumen entre elementos consecutivos de un conjunto de demandas que se encuentran a la izquierda o a la derecha de i . Las desigualdades resultantes proporcionan una versión reforzada de las restricciones (4.3) que especifican cotas inferiores y superiores para las variables l .

Definición 4.1. Sea $i \in D$ y $A = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D \setminus \{i\}$ con $v(j_l) \geq v(j_{l-1})$ para $l = 2, \dots, t$. Definimos

$$\alpha_{j_l} = \begin{cases} v(j_l) & \text{si } l = 1 \\ v(j_l) - v(j_{l-1}) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $l = 1, \dots, t$. En este contexto, definimos

$$l_i \geq \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l i}, \quad (4.5)$$

como la *desigualdad telescópica izquierda (LTI)*, y

$$l_i \leq \bar{s} - v(i) - \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{ij_l}, \quad (4.6)$$

como la *desigualdad telescópica derecha (RTI)* asociada con i y A .

En la Figura 4.3 se presenta de manera esquemática cómo se construyen las *desigualdades telescópicas*. En la parte izquierda se representan, a distinta altura, los valores asociados a los coeficientes α para las demandas j_1, j_2 y j_3 . De este modo, se ve que el valor para la demanda j_1 es su propio volumen, mientras que para las demandas sucesivas se toma la diferencia de volumen con respecto a la demanda “anterior”, siguiendo el orden establecido por la definición, esto es $v(j_2) - v(j_1)$ y $v(j_3) - v(j_2)$ para las demandas j_2 y j_3 , respectivamente. A la derecha, el intervalo de la demanda i muestra que la cota para l_i queda definida a partir de la suma de estas diferencias (o de la diferencia con $\bar{s} - v(i)$ en el caso de la variante izquierda), tal como establecen las desigualdades $l_i \geq \sum \alpha_{j_l} x_{j_l i}$ y $l_i \leq \bar{s} - v(i) - \sum \alpha_{j_l} x_{ij_l}$. La figura busca mostrar cómo, en el acumulado de estas diferencias de volumen, se obtienen cotas más ajustadas para las variables l que las dadas por las restricciones básicas de la formulación.

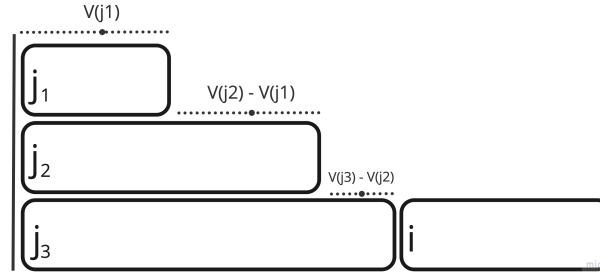


Fig. 4.3: Representación gráfica de la construcción del coeficiente α asociado a las demandas, utilizado para definir las *desigualdades telescópicas izquierda y derecha* de una demanda i y un conjunto $A = \{j_1, j_2, j_3\}$.

Para cualquier $i \in D$ y $A \subseteq D \setminus \{i\}$, la desigualdad *RTI* es simétrica a la desigualdad *LTI* asociada. Por lo tanto, todos los resultados de validez y facetitud para las desigualdades *LTI* también se aplican a las desigualdades *RTI*. Si $A \subseteq D$, recordemos que llamamos $v(A) = \sum_{i \in A} v(i)$.

Proposición 4.2. *Las desigualdades telescópicas izquierda y derecha son válidas para $RP(D, \bar{s})$.*

Demostración. Sea $(l, x) \in RP(D, \bar{s}) \cap \mathbb{Z}^{|D|^2}$ una solución factible arbitraria, y $r \in \{1, \dots, t\}$ el índice más grande de $\{1, \dots, t\}$ tal que $x_{j_r i} = 1$. El cálculo

$$l_i \geq l_{j_r} + v(j_r) \geq v(j_r) \geq \sum_{l=1}^r \alpha_{j_l} \geq \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l i}$$

muestra que (l, x) satisface (4.5), y el Corolario 4.1 implica que (l, x) satisface (4.6). □

Teorema 4.3. Sean $i \in D$ y $A \subset D \setminus \{i\}$. Las desigualdades *LTI* y *RTI* asociadas con i y A definen facetas de $RP(D, \bar{s})$ si

- (a) $\bar{s} \geq v(k) + v(k')$ para todo $k, k' \in D$, $k \neq k'$, y
- (b) $v(j_t) = \max_{k \in D \setminus \{i\}} v(k)$.

Demostración. La hipótesis (a) implica que $RP(D, \bar{s})$ es de dimensión completa, por el Teorema 4.1. Consideremos las siguientes soluciones factibles que satisfacen (4.5) por igualdad. Sea $y^0 := (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ la solución factible que tiene todas las entradas l y x con valores nulos. Este vector es una solución válida y se encuentra en la cara F definida por $l_i \geq \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l i}$. Para $k \in D \setminus \{i\}$, definimos la solución $y^k := (e_k, \mathbf{0})$ como la solución obtenida al establecer $l_k = 1$ y dejando las variables restantes con valores nulos. Nuevamente, no es difícil verificar que $y^k \in F$. Finalmente, para $k, k' \in D$, $k \neq k'$, consideremos la solución $y^{kk'}$ construida de la siguiente manera:

- Si $k = i$ y $k' \in A$, entonces las entradas x_{ri} para todos los $r \in A$ con $v(r) \leq v(k')$ se establecen con valor 1. También fijamos $l_i = v(k')$ y dejamos todos los valores restantes con valores nulos. Tenemos que $\sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l i} = v(k') = l_i$, por lo que esta solución satisface (4.5) por igualdad.
- Si $k = i$ y $k' \notin A$, entonces fijamos $x_{ri} = 1$ para cada $r \in A \cup \{k'\}$. También establecemos $l_i = v(j_t)$, mientras que todas las variables restantes se fijan en valores nulos. El cálculo $\sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} = v(j_t)$ junto con la hipótesis (b) implica que esta solución es factible y también satisface (4.5) por igualdad.
- Si $k \neq i$, entonces fijamos $x_{k'k} = 1$, $l_k = v(k')$ y todas las variables restantes con valores nulos. Nuevamente, dicha solución satisface (4.5) por igualdad.

No es difícil verificar que los puntos en $\mathcal{A} := \{y^0\} \cup \{y^k\}_{k \in D \setminus \{i\}} \cup \{y^{kk'}\}_{k, k' \in D, k \neq k'}$ son afínmente independientes. Además, $\mathcal{A}$ está compuesto por $|D|^2 = \dim(RP(D, \bar{s}))$ soluciones en F , por lo que (4.5) define una faceta de $RP(D, \bar{s})$. Por el Teorema 4.2, la desigualdad simétrica (4.6) también define una faceta de este politopo. □

Si la hipótesis (a) del Teorema 4.3 se cumple, entonces la hipótesis (b) también es necesaria para la facetitud. De hecho, si existe una demanda $k \in D \setminus \{i\}$ con $v(k) > v(j_t)$, entonces no es posible construir una solución que satisfaga (4.5) por igualdad y tal que $x_{ki} = 1$, ya que esto implicaría que $\sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l i} \leq v(j_t) < v(k) \leq l_i$. Luego, tenemos que $x_{ki} = 0$ en cada solución en la cara de $RP(D, \bar{s})$ definida por (4.5) que, por la dimensión completa de $RP(D, \bar{s})$, no es una faceta de este politopo.

Dada una solución fraccionaria (l^*, x^*) , el *problema de separación* asociado a una familia $\mathcal{F}$ de desigualdades válidas consiste en determinar si existe o no alguna desigualdad de $\mathcal{F}$ violada por (l^*, x^*) . El siguiente resultado muestra que las desigualdades *LTI* y *RTI* pueden ser separadas en tiempo polinomial mediante una reducción al problema de camino mínimo en grafos dirigidos. Para $k \in \mathbb{Z}_+$, definimos $sp(k)$ como la complejidad computacional del camino mínimo en un grafo acíclico dirigido con k nodos.

Teorema 4.4. *Las desigualdades LTI y RTI admiten un procedimiento de separación que puede ejecutarse en tiempo $O(|D|sp(|D|))$.*

Demostración. Fijamos un $i \in D$ y consideramos el grafo dirigido $G^i = (D \cup \{0\}, E^i)$, donde

$$\begin{aligned} E^i &= \{(0, j) : j \in D\} \\ &\cup \{(j, j') : j, j' \in D \setminus \{i\}, v(j) \leq v(j')\} \\ &\cup \{(j, i) : j \in D \setminus \{i\}\}. \end{aligned}$$

Recordemos que $D = \{1, \dots, n\}$, por lo tanto $0 \notin D$. En este contexto, cualquier camino $P = (0, j_1, \dots, j_t, i)$ en G^i desde el nodo 0 al nodo i representa un conjunto $A_P = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D \setminus \{i\}$ con $v(j_l) \geq v(j_{l-1})$ para $l = 2, \dots, t$, tal como lo requieren las desigualdades LTI. Asociamos un peso w_e a cada arco $e \in E^i$ de este grafo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} w_{0j} &= v(j) x_{ji}^* && \text{para } j \in D \setminus \{i\}, \\ w_{jj'} &= (v(j') - v(j)) x_{j'i}^* && \text{para } j, j' \in D \setminus \{i\}, v(j) \leq v(j'), \\ w_{ji} &= 0 && \text{para } j \in (D \cup \{0\}) \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Con esta definición, el peso de un camino P es igual al lado derecho de la desigualdad LTI (4.5) asociada con i y A_P . En consecuencia, existe un camino de 0 a i en este grafo con peso mayor que l_i^* si y solo si existe una desigualdad LTI violada asociada con i . Calcular el camino de peso máximo de 0 a i en este grafo -que puede realizarse mediante cualquier algoritmo de camino mínimo que admita arcos de peso negativo, ya que G^i es un grafo acíclico dirigido- proporciona dicho camino, siempre que tal camino exista. □

4.2.2 Desigualdades telescópicas reforzadas

Las familias de desigualdades que se presentarán en esta subsección están basadas en la idea de las presentadas en la sección anterior, con la diferencia de que, para definir las cotas de cada demanda $i \in D$, además de la suma telescópica de los volúmenes de un conjunto de demandas que se ubiquen ya sea a la izquierda o a la derecha de i , se tomará en cuenta otra demanda $k \in D \setminus \{i\}$.

Definición 4.2. Sean $i, k \in D$, $i \neq k$ y $A = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D \setminus \{i, k\}$ con $A \neq \emptyset$ y $v(j_l) \geq v(j_{l-1})$ para $l = 2, \dots, t$. Definimos

$$\alpha_{j_l} = \begin{cases} v(j_l) & \text{si } l = 1 \\ v(j_l) - v(j_{l-1}) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $l = 1, \dots, t$. En este contexto, definimos

$$l_i \geq (v(k) + v(j_t))x_{ki} + \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l k} - v(j_t), \quad (4.7)$$

como la *desigualdad telescópica reforzada izquierda (LRTI)*, y

$$\bar{s} - l_i - v(i) \geq (v(k) + v(j_t))x_{ik} + \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{kj_l} - v(j_t), \quad (4.8)$$

como la *desigualdad telescópica reforzada derecha (RRTI)* asociada con i, j y A .

Para cualquier $i, k \in D$, $i \neq k$ y cada $A \subseteq D \setminus \{i\}$, la desigualdad telescópica reforzada derecha asociada con i, j y A es simétrica a la desigualdad telescópica reforzada izquierda asociada a i, j y A . Por lo tanto, todos los resultados de validez y facetitud para las desigualdades *LRTI* también se aplican a las desigualdades *RRTI*.

Proposición 4.3. *Las desigualdades telescópicas reforzadas izquierda (4.7) y las desigualdades telescópicas reforzadas derecha (4.8) son válidas para $RP(D, \bar{s})$.*

Demostración. Sea $(l, x) \in RP(D, \bar{s}) \cap \mathbb{Z}^{|D|^2}$ una solución factible arbitraria. Si $x_{ki} = 0$, entonces $\sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l k} \leq \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} = v(j_t)$ implica que el lado izquierdo de (4.7) es menor o igual a 0, por lo tanto (4.7) se satisface con (l, x) . Por lo tanto, supongamos que $x_{ki} = 1$. Definimos $A := \{l \in \{1, \dots, t\} : x_{j_l k} = 1\}$, y establecemos $\bar{v} = \max\{v(j_l) : l \in A\}$ si $A \neq \emptyset$ y $\bar{v} = 0$ si $A = \emptyset$. Tenemos $\sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} x_{j_l k} = \sum_{l \in A} \alpha_{j_l} \leq \bar{v}$. Como $x_{ki} = 1$, entonces $l_i \geq l_k + v(k)$ y, además, $l_k \geq \bar{v}$. Combinando estas observaciones, obtenemos que (l, x) satisface (4.7). Dado que (l, x) es una solución factible arbitraria, se concluye que (4.7) es una desigualdad válida para $RP(D, \bar{s})$. □

Teorema 4.5. *Sean $i, k \in D$, $i \neq k$ y $A \subseteq D \setminus \{i, k\}$. Las desigualdades *LRTI* y *RRTI* asociadas a i, k y A definen facetas de $RP(D, \bar{s})$ si*

- (a) $v(i) + v(k) + v(r) \leq \bar{s}$ para todo $r \in D \setminus \{i, k\}$, y
- (b) $v(r) \leq v(j_t) + v(k)$ para todo $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$.

Demostración. Consideremos la cara F de $RP(D, \bar{s})$ definida por (4.7). La hipótesis (a) implica que $RP(D, \bar{s})$ tiene dimensión completa, por el Teorema 4.1, por lo que la demostración consiste en construir $|D|^2$ soluciones afinmente independientes dentro de F (es decir, que satisfacen (4.7) por igualdad).

- Construimos una solución $y^0 = (l^0, x^0)$ estableciendo $l_k = 0$, $l_i = v(k)$ y $l_r = v(k) + v(i)$ para cada $r \in D \setminus \{i, k\}$. También fijamos $x_{ki} = x_{kj_l} = 1$ para $l = 1, \dots, t$ y establecemos las variables x restantes en valores nulos, por lo que $y^0 \in F$.
- Para cada $r \in D \setminus \{i, k\}$, construimos las soluciones $(l^0, x^0 + e_{kr})$, $(l^0, x^0 + e_{ir})$, y $(l^0 + e_r, x^0)$. Estas soluciones son afinmente independientes con las soluciones construidas previamente, que tienen $x_{kr} = 0$, $x_{ir} = 0$, y $l_r = 0$. De esta manera construimos $3|D| - 6$ soluciones.

- Ahora, para $r = 1, \dots, t$, construimos la solución $y^r = (l^r, x^r)$ estableciendo $l_k = v(j_r)$, $l_i = v(j_r) + v(k)$, y dejando las l variables restantes con valores nulos. También establecemos $x_{ki} = 1$, $x_{j_s k} = 1$ para $s = 1, \dots, r$, dejando las x variables restantes con valores nulos. Tenemos $y^r \in R$ y, además, y^r es afinmente independientes con las soluciones construidas previamente, ya que $x_{j_r k} = 1$ en esta solución pero $x_{j_r k} = 0$ en las soluciones anteriores. Esta construcción proporciona t nuevas soluciones.
- Para cada $r \in D \setminus \{i, k\}$, construimos la solución $(l^t, x^t + e_{ri})$. Esta solución es factible por la hipótesis (b) y es afinmente independiente con las soluciones construidas previamente, las cuales tienen $x_{ri} = 0$. De esta manera construimos $|D| - 2$ soluciones.
- Consideremos ahora la solución $w^0 = (\hat{l}, \hat{x})$ definida estableciendo $l_k = \bar{s} - v(k)$ y $l_r = 0$ para cada $r \in D \setminus \{k\}$. También fijamos $x_{jk} = 1$ para $j = 1, \dots, t$, y dejamos las variables x restantes con valores nulos. Tenemos $w^0 \in F$ dado que el lado derecho de (4.7) es nulo para esta solución. Además, w^0 es afinmente independiente con las soluciones anteriores, ya que $x_{ki} = 0$ en esta solución, siendo que las soluciones anteriores tienen $x_{ki} = 1$. Por otro lado, consideramos la solución $(\hat{l}, \hat{x} + e_{ik})$, es decir, la solución obtenida de w^0 al hacer $x_{ik} = 1$. Esta solución es afinmente independiente con las soluciones construidas previamente, que tienen $x_{ik} = 0$. Finalmente, construimos la solución $(\hat{l} - e_k, \hat{x})$, es decir, la solución obtenida de w^0 disminuyendo l_k en una unidad. Esta solución es afinmente independiente con las soluciones anteriores, que satisfacen

$$l_k = \sum_{l=1}^t \alpha_{jl} x_{jlk} + (\bar{s} - v(k))(1 - x_{ki}),$$

mientras que esta nueva solución no lo hace. De esta manera, construimos tres nuevas soluciones afinmente independientes en F .

- Para cada $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$, construimos la solución $(\hat{l}, \hat{x} + e_{rk})$, es decir, la solución obtenida de w^0 fijando $x_{rk} = 1$. Esta solución es afinmente independiente con las soluciones anteriores, que tienen $x_{rk} = 0$. De esta manera construimos $|D| - t - 2$ nuevas soluciones afinmente independientes en F .
- Para cada $r, s \in D \setminus \{i, k\}$, $r \neq s$, construimos una solución a partir de w^0 estableciendo $l_r = 0$, $l_s = v(r)$ y $x_{rs} = 1$ y dejando las variables restantes sin cambios. Nuevamente, esta solución es afinmente independiente con las soluciones anteriores, que tienen $x_{rs} = 0$ y esto proporciona $(|D| - 2)(|D| - 3)$ nuevos puntos afinmente independientes.

De esta manera, hemos construido $|D|^2$ soluciones afinmente independientes en F y, por tanto, define una faceta de $RP(D, \bar{s})$.

□

Nuevamente, las desigualdades $LRTI$ y $RRTI$ pueden separarse en tiempo polinomial, a través de una reducción al problema de camino mínimo en grafos dirigidos.

Teorema 4.6. *Las desigualdades $LRTI$ y $RRTI$ admiten un procedimiento de separación que puede ejecutarse en tiempo $O(|D|^2 sp(|D|))$.*

Demostración. Para cada par de demandas $i, k \in D$, $i \neq k$, construimos el grafo dirigido $G^{i/k} = ((D \setminus \{k\}) \cup \{0\}, E^{i/k})$, donde

$$\begin{aligned} E^{i/k} &= \{(0, j) : j \in D \setminus \{i, k\}\} \\ &\cup \{(j, j') : j, j' \in D \setminus \{i, k\}, v(j) \leq v(j')\} \\ &\cup \{(j, i) : j \in D \setminus \{i, k\}\}. \end{aligned}$$

Cualquier camino $P = (0, j_1, \dots, j_t, i)$ en $G^{i/k}$ desde el nodo 0 al nodo i representa un conjunto $A_P = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D \setminus \{i\}$ con $v(j_l) \geq v(j_{l-1})$ para $l = 2, \dots, t$. Dada una solución fraccionaria (l^*, x^*) , asociamos un peso w_e a cada arco $e \in E^{i/k}$ de este grafo, definido como

$$\begin{aligned} w_{0j} &= v(j) x_{jk}^* && \text{para } j \in D \setminus \{i, k\}, \\ w_{jj'} &= (v(j') - v(j)) x_{j'k}^* && \text{para } j, j' \in D \setminus \{i, k\}, v(j) \leq v(j'), \\ w_{ji} &= -v(j) + v(i) x_{ki}^* && \text{para } j \in D \setminus \{i, k\}. \end{aligned}$$

Existe un camino de 0 a i en este grafo con peso mayor que $l_i^* - v(k) x_{ki}^*$ si y solo si existe una desigualdad *LRTI* violada asociada con i y k . Nótese que $G^{i/k}$ no incluye un arco de 0 a i para asegurar que $A \neq \emptyset$, como lo requieren las desigualdades *LRTI*. Combinando estas observaciones, se obtiene el resultado deseado. $\square$

4.2.3 Desigualdades telescópicas extendidas

Las familias de desigualdades que se presentarán en esta subsección siguen la idea de las presentadas en la sección anterior. En este caso, fijamos una demanda i y una segunda demanda k , y consideramos las demandas entre ellas, además de las demandas a la izquierda de la demanda k . Aunque la desigualdad resultante tiene muchos términos de “corrección” y puede parecer débil, la cara asociada es, de hecho, una faceta del politopo estudiado.

Definición 4.3. Sea $i, k \in D$, $i \neq k$ y $A = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D \setminus \{i, k\}$ con $A \neq \emptyset$ y $v(j_l) \geq v(j_{l-1})$ para $l = 2, \dots, t$. Definimos

$$\alpha_{j_l} = \begin{cases} v(j_l) & \text{si } l = 1 \\ v(j_l) - v(j_{l-1}) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

para $l = 1, \dots, t$. En este contexto, definimos

$$l_i \geq v(k)x_{ki} + \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} (x_{j_l i} + x_{j_l k} + x_{k j_l} - 1), \quad (4.9)$$

como la *desigualdad telescópica extendida izquierda (LETI)* y

$$l_i \leq \bar{s} - v(i) - v(k)x_{ik} - \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} (x_{j_l k} + x_{k j_l} + x_{j_l i} - 1), \quad (4.10)$$

como la *desigualdad telescópica extendida derecha (RETI)* asociada con i , k y A .

Nuevamente, las desigualdades *RETI* son simétricas a las desigualdades *LETI*, por lo que con demostrar validez y facetitud para una de ellas queda demostrada la validez y facetitud de la desigualdad simétrica.

Proposición 4.4. *Las desigualdades telescópicas extendidas (4.9) y (4.10) son válidas para $RP(D, \bar{s})$.*

Demostración. Sea $(l, x) \in RP(D, \bar{s}) \cap \mathbb{Z}^{|D|^2}$ una solución factible arbitraria y consideremos los siguientes casos:

- Caso 1: $x_{ki} = 0$. Llamemos $A_1 := \{l \in \{1, \dots, t\} : x_{ji} = 1\}$. Tenemos $l_i \geq \max_{l \in A_1} v(j_l) \geq \sum_{l \in A_1} \alpha_{j_l}$. Dado que, además, $x_{j_l k} + x_{k j_l} \leq 1$ para $l = 1, \dots, t$, el siguiente cálculo muestra que (4.9) se cumple:

$$v(k) \underbrace{x_{ki}}_{=0} + \sum_{l=1}^t \alpha_l (x_{ji} + \underbrace{x_{j_l k} + x_{k j_l} - 1}_{\leq 0}) \leq \sum_{l \in A_1} \alpha_{j_l} \leq l_i.$$

- Caso 2: $x_{ki} = 1$. Esto implica que $l_i \geq l_k + v(k)$. Llamemos $A_1 := \{l \in \{1, \dots, t\} : x_{j_l k} = 1\}$ y $A_2 := \{l \in \{1, \dots, t\} : x_{k j_l} = 1\}$. Tenemos que $l_k \geq \max_{l \in A_1} v(j_l) \geq \sum_{l \in A_1} \alpha_{j_l}$ y, de manera similar, que $l_i - (l_k + v(k)) \geq \max_{l \in A_2} v(j_l) \geq \sum_{l \in A_2} \alpha_{j_l}$. Combinando estas afirmaciones, obtenemos que (4.9) se cumple:

$$\begin{aligned} & v(k) \underbrace{x_{ki}}_{=1} + \sum_{l=1}^t \alpha_l (x_{ji} + x_{j_l k} + x_{k j_l} - 1) \\ & \leq v(k) + \sum_{l \in A_1} \alpha_{j_l} x_{ji} + \sum_{l \in A_2} \alpha_{j_l} + \sum_{l \in A \setminus (A_1 \cup A_2)} \alpha_{j_l} \underbrace{(x_{ji} + x_{j_l k} + x_{k j_l} - 1)}_{\leq 0} \\ & \leq v(k) + \sum_{l \in A_1} \alpha_{j_l} + \sum_{l \in A_2} \alpha_{j_l} \\ & \leq v(k) + l_k + (l_i - (l_k + v(k))) = l_i. \end{aligned}$$

Dado que (l, x) es una solución factible arbitraria, podemos concluir que (4.9) es una desigualdad válida para $RP(D, \bar{s})$. □

Teorema 4.7. *Sea $i, k \in D$, $i \neq k$ y $A \subseteq D \setminus \{i, k\}$. Las desigualdades *LETI* y *RETI* asociadas con i , k y A definen facetas de $RP(D, \bar{s})$ si*

- (a) $v(i) + v(k) + v(r) \leq \bar{s}$ para todo $r \in D \setminus \{i, k\}$,
- (b) $v(j_t) \leq v(k)$, y
- (c) $v(r) \leq v(k) + v(j_t)$ para todo $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$.

Demostración. Llamemos F a la cara de $RP(D, \bar{s})$ definida por (4.9). La hipótesis (a) implica que $RP(D, \bar{s})$ tiene dimensión completa, por el Teorema 4.1, por lo que la demostración consiste en la construcción de $|D|^2$ soluciones afinmente independientes dentro de F (es decir, que satisfacen (4.9) con igualdad).

- Construimos una solución $y^0 = (l^0, x^0)$ estableciendo $l_k = \bar{s} - v(k)$ y las variables l restantes con valores nulos. Además, establecemos $x_{jik} = 1$ para $l = 1, \dots, t$ y las variables x restantes en valores nulos, por lo que $y^0 \in F$.
- Construimos la solución $y^k = (l^0 - e_k, x^0)$, es decir, la solución obtenida de y^0 al establecer $l_k = \bar{s} - v(k) - 1$. Tenemos $y^k \in F$ ya que la variable l_k no aparece en (4.9). Además, y^k es afinmente independiente con y^0 , que tiene un valor diferente en la variable l_k .
- Construimos la solución $y^i = (l^0, x^0 + e_{ik})$, es decir, la solución que se obtiene de y^0 fijando $x_{ik} = 1$. Tenemos $y^i \in F$ ya que la variable x_{ik} no aparece en (4.9), y y^i es afinmente independiente con las soluciones anteriores, que tienen $x_{ik} = 0$.
- Para $l = 1, \dots, t$, llamamos y^l a la solución obtenida de y^0 haciendo $l_i = v(j_l)$ y $x_{j_r i} = 1$ para $r = 1, \dots, l$. Nuevamente, tenemos $y^l \in F$ y esta solución es afinmente independiente con las soluciones construidas previamente, que tienen $x_{j_l i} = 0$. De esta manera construimos t nuevas soluciones en F .
- Para $r \in D \setminus \{i, k\}$, consideremos la solución $\bar{y}^r = (l^0 + e_r, x^0)$, es decir, la solución que se obtiene de y^0 al hacer $l_r = 1$. Nuevamente tenemos $\bar{y}^r \in F$ y la independencia afín de esta solución respecto de los puntos anteriores viene dada por el hecho de que $\bar{y}^r$ tiene $l_r = 1$ pero esta variable toma valor 0 en los puntos anteriores. De esta manera construimos $|D| - 2$ puntos adicionales en F .
- Para $r \in D \setminus \{i, k\}$, consideremos la solución $\hat{y}^r = (l^0 + v(i)e_r, x^0 + e_{ir})$, es decir, la solución obtenida de y^0 estableciendo $l_r = v(i)$ y $x_{ir} = 1$. Tenemos $\hat{y}^r \in F$ ya que las variables l_r y x_{ir} no aparecen en (4.9), y $\hat{y}^r$ es afinmente independiente con respecto a las soluciones anteriores, que tienen $x_{ir} = 0$. De esta manera construimos $|D| - 2$ puntos adicionales en F .
- Para $r, s \in D \setminus \{i, k\}$, $r \neq s$, construimos una solución a partir de y^0 estableciendo $l_s = v(r)$, $x_{rs} = 1$ y dejando las variables restantes sin cambios. Nuevamente, esta solución pertenece a F y es afinmente independiente con las soluciones anteriores. Esto proporciona $(|D| - 2)(|D| - 3)$ nuevas soluciones en F .
- Para $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$, consideremos la solución $(l^0, x^0 + e_{rk})$, es decir, la solución obtenida a partir de y^0 al establecer $x_{rk} = 1$. Nuevamente, esta solución pertenece a F y es afinmente independiente con las soluciones anteriores. Esta construcción proporciona $|D| - t - 2$ nuevas soluciones en F .
- Para $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$, consideremos la solución obtenida a partir de y^0 al establecer $l_k = \bar{s} - v(k) - v(r)$, $l_r = \bar{s} - v(r)$, $x_{kr} = 1$, y dejando las variables restantes sin cambios. Como la variable x_{kr} no aparece en (4.9), tenemos que esta solución pertenece a F . Además, esta solución es afinmente independiente con los puntos anteriores, que tienen $x_{kr} = 0$. De esta manera, construimos $|D| - t - 2$ nuevas soluciones en F .
- Para $l = 1, \dots, t$, consideremos la solución $\tilde{y}^l$ obtenida a partir de y^0 al establecer $l_k = \bar{s} - v(k) - v(j_l)$, $l_{j_l} = \bar{s} - v(j_l)$, $x_{kj_l} = 1$, $x_{j_l k} = 0$, y dejando las variables

restantes sin cambios. Nuevamente tenemos $\tilde{y}^l \in F$ ya que el último término de (4.9) es nulo. Esta nueva solución es afinmente independiente con las soluciones anteriores, que tienen $x_{kj_l} = 0$. Observamos también que todas las soluciones construidas hasta este punto tienen $x_{kj_l} + x_{j_lk} = 1$ para todo $l = 1, \dots, t$. De esta forma obtenemos t puntos adicionales en F .

- Construimos la solución w^0 estableciendo $l_k = 0$, $l_i = v(k)$ y $l_r = v(i) + v(k)$ para cada $r \in D \setminus \{i, k\}$. Establecemos también $x_{ki} = 1$ y $x_{kj_l} = 1$ para cada $l = 1, \dots, t$, y fijamos todas las variables x restantes con valores nulos. Tenemos $w^0 \in F$ ya que $l_i = v(k)$ y el último término en (4.9) es igual a 0. La solución w^0 es afinmente independiente con las soluciones construidas previamente, que tienen $x_{ki} = 0$.
- Para $l = 1, \dots, t$, construimos la solución w^l obtenida a partir de w^0 fijando $l_{j_l} = 0$, $x_{kj_l} = 0$ y $x_{j_li} = 1$. Esta construcción es factible por la hipótesis (b), y tenemos $w^l \in F$. Dado que todas las soluciones anteriores tienen $x_{j_lk} + x_{kj_l} = 1$ pero en esta solución tanto x_{j_lk} como x_{kj_l} toman valores nulos, entonces w^l es afinmente independiente con los puntos anteriores. Esta construcción proporciona t puntos adicionales en F .
- Para $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$, construimos una solución estableciendo $l_k = 0$, $l_{j_l} = v(k)$ para cada $l \in \{1, \dots, t\}$, $l_i = v(k) + v(j_t)$, y fijando las variables l restantes con valores nulos. Establecemos también $x_{kj_l} = x_{j_li} = 1$ para $l = 1, \dots, t$, y $x_{ri} = 1$. Esta solución es factible por la hipótesis (c), pertenece a F , y es afinmente independiente con las soluciones construidas previamente, que tienen $x_{ri} = 0$. Esta construcción proporciona $|D| - t - 2$ puntos adicionales en F .

De esta manera, hemos construido $|D|^2$ soluciones afinmente independientes en F que, por tanto, es una faceta de $RP(D, \bar{s})$. □

De manera similar a las familias de desigualdades anteriores, las desigualdades *LETI* y *RETI* pueden ser separadas en tiempo polinomial mediante una reducción al problema de camino mínimo en grafos dirigidos.

Teorema 4.8. *Las desigualdades LETI y RETI admiten un procedimiento de separación que puede ejecutarse en tiempo $O(|D|^2 sp(|D|))$.*

Demostración. Para cada $i, k \in D$, $i \neq k$, construimos el grafo dirigido $G^{i \rightarrow k} = ((D \setminus \{k\}) \cup \{0\}, E^{i \rightarrow k})$, donde

$$\begin{aligned} E^{i \rightarrow k} &= \{(0, j) : j \in D \setminus \{i, k\}\} \\ &\cup \{(j, j') : j, j' \in D \setminus \{i, k\}, v(j) \leq v(j')\} \\ &\cup \{(j, i) : j \in D \setminus \{i, k\}\}. \end{aligned}$$

Recordemos que $0 \notin D$, por lo que en esta construcción el vértice 0 no se corresponde a ninguna demanda de D . Nuevamente, cualquier camino $P = (0, j_1, \dots, j_t, i)$ en $G^{i \rightarrow k}$ desde el nodo 0 al nodo i representa un conjunto $A_P = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D \setminus \{i\}$ con $v(j_l) \geq v(j_{l-1})$

para $l = 2, \dots, t$. Dada una solución fraccionaria (l^*, x^*) , asociamos un peso w_e a cada arco $e \in E^{i \rightarrow k}$ de este grafo, definido como

$$\begin{aligned} w_{0j} &= v(j) (x_{ji}^* + x_{jk}^* + x_{kj}^* - 1) && \text{para } j \in D \setminus \{i, k\}, \\ w_{jj'} &= (v(j') - v(j)) (x_{ji}^* + x_{jk}^* + x_{kj'}^* - 1) && \text{para } j, j' \in D \setminus \{i, k\}, v(j) \leq v(j'), \\ w_{ji} &= 0 && \text{para } j \in D \setminus \{i, k\}. \end{aligned}$$

En este grafo existe un camino de 0 a i con un peso mayor que $l_i^* - v(k) x_{ki}^*$ si y solo si existe una desigualdad *LETI* asociada con i y k violada. Nótese que $G^{i \rightarrow k}$ no incluye un arco de 0 a i , por lo que nos aseguramos de que $A \neq \emptyset$, como lo requieren las desigualdades *LETI*. Combinando estas observaciones, se obtiene el resultado buscado. $\square$

4.2.4 Desigualdades telescópicas medias

Las desigualdades consideradas en esta sección provienen de una idea similar a las desigualdades *LTI* y *RTI*, proporcionando en este caso una versión reforzada de las restricciones de antiparalelismo (4.1).

Definición 4.4. Sea $i, k \in D$, $i \neq k$, y $A = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D \setminus \{i, k\}$, con $v(j_l) \geq v(j_{l-1})$ para $l = 2, \dots, t$. Definimos

$$\alpha_{j_l} = \begin{cases} v(j_l) & \text{si } l = 1 \\ v(j_l) - v(j_{l-1}) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

para $l = 2, \dots, t$, y

$$\beta = \begin{cases} v(j_t) + v(j_{t-1}) & \text{si } t \geq 2 \\ v(j_t) & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

En este contexto, definimos

$$l_k \geq l_i + v(i) + \sum_{l=1}^t \alpha_{j_l} (x_{ij_l} + x_{j_l k} - 1) - (\bar{s} - \beta)(1 - x_{ik}), \quad (4.11)$$

como la *desigualdad telescópica media (MTI)* asociada con i , k y A .

Proposición 4.5. Las desigualdades telescópicas medias son válidas para $RP(D, \bar{s})$.

Demostración. Sea $(l, x) \in RP(D, \bar{s}) \cap \mathbb{Z}^{|D|^2}$ una solución factible arbitraria y consideremos los siguientes casos.

- Caso 1: $l_i + v(i) \leq l_k$. Llamemos $M := \{l \in \{1, \dots, t\} : x_{ij_l} = x_{j_l k} = 1\}$ al conjunto de demandas de A ubicado entre i y k . Sea $\bar{v} = \max_{l \in M} v(j_l)$ el mayor volumen entre las demandas en M si $M \neq \emptyset$, y $\bar{v} = 0$ en caso contrario. Tenemos $l_i + v(i) + \bar{v} \leq l_k$ y también $\sum_{l \in M} \alpha_{j_l} \leq \bar{v}$, lo que implica que (l, x) satisface (4.11).

- Caso 2: $l_i + v(i) > l_k$. En este caso tenemos $x_{ik} = 0$ y $x_{ij_l} + x_{j_l k} \leq 1$ para $l = 1, \dots, t$. Llamemos $N := \{l \in \{1, \dots, t\} : x_{j_l k} = 1\}$ al conjunto de demandas de A ubicado antes de k , y $R := \{l \in \{1, \dots, t\} : x_{ij_l} = 1\}$ al conjunto de demandas de A ubicado después de i . Nótese que $N \cap R = \emptyset$. Definimos $\bar{v}_N = \max_{l \in N} v(j_l)$ si $N \neq \emptyset$ y $\bar{v}_N = 0$ en caso contrario, y $\bar{v}_R = \max_{l \in R} v(j_l)$ si $R \neq \emptyset$ y $\bar{v}_R = 0$ en caso contrario. Tenemos $l_k \geq \bar{v}_N$ y $l_i + v(i) \leq \bar{s} - \bar{v}_R$, por lo tanto

$$l_k - (l_i + v(i)) \geq \bar{v}_N - (\bar{s} - \bar{v}_R) \geq \beta - \bar{s}.$$

Como $x_{ij_l} + x_{j_l k} \leq 1$ para $l \in \{1, \dots, t\} \setminus (N \cup R)$ y $x_{ik} = 0$, concluimos que (l, x) satisface (4.11).

En ambos casos tenemos que se satisface (4.11). Siendo que (l, x) es una solución factible arbitraria, podemos concluir que (4.11) es una desigualdad válida para $RP(D, \bar{s})$. $\square$

Teorema 4.9. Sea $i, k \in D$, $i \neq k$ y $A \subseteq D \setminus \{i, k\}$. La desigualdad MTI asociada con i , k y A define una faceta de $RP(D, \bar{s})$ si

- (a) $\bar{s} \geq v(i) + v(r) + v(s)$ para cada $r, s \in D \setminus \{i\}$, $r \neq s$,
- (b) $v(r) \leq v(j_t)$ para cada $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$, y
- (c) $\beta \geq v(i) + v(k) + \bar{s}$.

Demostración. Llamemos F a la cara de $RP(D, \bar{s})$ definida por (4.11). La hipótesis (a) implica que $RP(D, \bar{s})$ es de dimensión completa, por el Teorema 4.1, por lo que la demostración consiste en la construcción de $|D|^2$ soluciones afinmente independientes dentro de F (es decir, que satisfacen (4.11) con igualdad).

- Construimos la solución $y^0 = (l^0, x^0)$ estableciendo $l_i = 0$, $l_k = v(i)$ y $l_r = v(i) + v(k)$ para cada $r \in D \setminus \{i, j\}$. Fijamos también $x_{ik} = 1$ y $x_{ir} = 1$ para cada $r \in D \setminus \{i, k\}$, y las variables x restantes en valores nulos. Esta solución es factible según la hipótesis (a) y, además, no es difícil verificar que $y^0 \in F$.
- Construimos la solución y^k a partir de y^0 estableciendo $l_i = 1$, $l_k = v(i) + 1$ y manteniendo las variables restantes sin cambios, es decir, $y^k = (l^0 + e_i + e_k, x^0)$. Nuevamente, tenemos $y^k \in F$ y y^k es afinmente independiente con y^0 , que tiene $l_i = 0$.
- Para $r \in D \setminus \{i, k\}$, consideremos la solución $y^r = (l^0 - e_r, x^0)$, es decir, la obtenida a partir de y^0 estableciendo $l_r = v(i)$ y manteniendo las variables restantes sin cambios. Nuevamente, $y^r \in F$, por lo que esta construcción proporciona $|D| - 2$ nuevas soluciones.
- Para $r \in D \setminus \{i, k\}$, consideremos la solución $\bar{y}^r = (l^0, x^0 + e_{kr})$, es decir, la obtenida a partir de y^0 al establecer $x_{kr} = 1$ y manteniendo las variables restantes sin cambios. Esta solución es afinmente independiente con las soluciones anteriores, que tienen $x_{kr} = 0$. Nuevamente, esta construcción proporciona $|D| - 2$ nuevas soluciones en F .

- Para $r \in D \setminus \{i, k\}$, construimos la solución w^r estableciendo $l_r = 0$, $l_i = v(r)$ y $l_s = v(r) + v(i)$ para cada $s \in D \setminus \{i, r\}$. Establecemos también $x_{rk} = 1$, $x_{is} = 1$ para cada $s \in D \setminus \{i, r\}$ y las variables x restantes con valores nulos. La solución w^r pertenece a F y es afinmente independiente con las soluciones construidas previamente, ya que esta solución tiene $x_{rk} = 1$ mientras que las anteriores $x_{rk} = 0$. Nuevamente, esta construcción proporciona $|D| - 2$ nuevas soluciones en F .
- Para $r \in D \setminus \{i, k\}$, construimos la solución $\bar{w}^r$ a partir de y^r estableciendo $x_{ri} = 1$ y dejando las variables restantes sin cambios. Esta solución es afinmente independiente de las soluciones anteriores, que tienen $x_{ri} = 0$.
- Para $r = 1, \dots, t$, construimos la solución w^{j_r} estableciendo $l_i = 0$, $l_{j_l} = v(i)$ para $l = 1, \dots, r$, y $l_s = v(i) + v(j_r)$ para cada $s \in D \setminus (\{i\} \cup \{j_1, \dots, j_r\})$. Fijamos también $x_{ij_l} = x_{j_l k} = 1$ para $l = 1, \dots, r$, $x_{ik} = 1$, y las variables x restantes con valores nulos. La solución w^{j_r} es afinmente independiente con las construidas anteriormente, ya que esta solución tiene $x_{ij_r} + x_{j_r k} = 2$ mientras que las anteriores $x_{ij_r} + x_{j_r k} = 1$. De esta manera, construimos t nuevos puntos en F .
- Para $r \in D \setminus (A \cup \{i, k\})$, construimos la solución z^r estableciendo $l_i = 0$, $l_{j_l} = v(i)$ para $l = 1, \dots, t$, $l_r = v(i)$ y $l_s = v(i) + v(j_t)$ para cada $s \in D \setminus (A \cup \{i, r\})$. Fijamos también $x_{is} = x_{sk} = 1$ para cada $s \in A \cup \{r\}$, $x_{ik} = 1$ y las variables x restantes con valores nulos. La hipótesis (b) garantiza que esta construcción proporciona una solución factible. No es difícil verificar que $z^r \in F$. Finalmente, la solución w^r es afinmente independiente con las construidas previamente, ya que esta solución tiene $x_{ir} + x_{rk} = 2$ mientras que las anteriores tienen $x_{ir} + x_{rk} = 1$. Esta construcción proporciona $|D| - t - 2$ puntos adicionales en F .
- Para $r, s \in D \setminus \{i, k\}$, $r \neq s$, construimos la solución z^{rs} a partir de y^0 estableciendo $l_r = v(i)$, $l_s = v(i) + v(r)$, $x_{rs} = 1$ y dejando las variables restantes sin cambios. Esta solución es afinmente independiente con los puntos construidos previamente ya que z^{rs} tiene $x_{rs} = 1$, mientras que las soluciones anteriores tienen $x_{rs} = 0$. Esta construcción genera $(|D| - 2)(|D| - 3)$ puntos adicionales en F .
- Ahora construimos una solución $\bar{w} \in F$ con $x_{ik} = 0$, por lo tanto esta solución será afinmente independiente con las soluciones anteriores, que tienen $x_{ik} = 1$.
 - Si $t = 0$, entonces establecemos $l_i = \bar{s} - v(i)$ y todas las variables restantes (incluida x_{ik}) en valores nulos.
 - Si $t = 1$, entonces establecemos $l_i = \bar{s} - v(i) - v(j_1)$, $l_{j_1} = \bar{s} - v(j_1)$, $x_{ij_1} = 1$ y todas las variables restantes en valores nulos.
 - Si $t \geq 2$, entonces establecemos $l_i = \bar{s} - v(i) - v(j_t)$, $l_j = v(j_{t-1})$ y $l_{j_t} = \bar{s} - v(j_t)$. Fijamos también $x_{ij_l} = 1$ y $x_{j_l k} = 1$ para $l = 1, \dots, t - 1$. Todas las variables restantes se establecen en valores nulos.

La hipótesis (c) implica que estas construcciones proporcionan soluciones factibles. En todos los casos, obtenemos una solución $\bar{w} \in F$ con $x_{ik} = 0$.

- Finalmente, construimos la solución $\hat{w}$ a partir de $\bar{w}$ estableciendo $x_{ki} = 1$ y manteniendo las variables restantes sin cambios. Nuevamente, esta solución satisface (4.11) con igualdad y es afinmente independiente con las soluciones anteriores, que tienen $x_{ki} = 0$.

De esta manera, hemos construido $|D|^2$ soluciones afinmente independientes en F que, por tanto, define una faceta de $RP(D, \bar{s})$. □

Siguiendo un procedimiento similar al de la subsección anterior, podemos demostrar que las desigualdades MTI pueden ser separadas en tiempo polinomial.

Teorema 4.10. *Las desigualdades telescópicas medias admiten un procedimiento de separación que puede ejecutarse en tiempo $O(|D|^2 sp(|D|))$.*

Demostración. Fijemos $i, k \in D$, $i \neq k$, y consideremos el grafo dirigido $G^{ik} = (D, E^{ik})$, donde

$$\begin{aligned} E^{ik} &= \{(i, j) : j \in D \setminus \{i\}\} \\ &\cup \{(j, j') : j, j' \in D \setminus \{i, k\}, v(j) \leq v(j')\} \\ &\cup \{(j, k) : j \in D \setminus \{i, k\}\}. \end{aligned}$$

Cualquier camino $P = (i, j_1, \dots, j_t, k)$ en G^{ik} desde el nodo i al nodo k representa un conjunto A_P según lo requieran las desigualdades MTI . Asociamos un peso w_e a cada arco $e \in E^{ik}$ de este grafo, definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} w_{ij} &= v(j) (x_{ij}^* + x_{jk}^* - 1) && \text{para } j \in V \setminus \{i, k\}, \\ w_{ik} &= 0, \\ w_{jj'} &= (v(j') - v(j)) (x_{ij'}^* + x_{j'k}^* - 1) && \text{para } j, j' \in D \setminus \{i, k\}, v(j) \leq v(j'), \\ w_{jk} &= -v(j) (1 - x_{ik}^*) && \text{para } j \in D \setminus \{i, k\}. \end{aligned}$$

Existe un camino de i a k en este grafo con un peso mayor que $l_k^* - l_i^* - v(i) + \bar{s}(1 - x_{ik}^*)$ si y solo si existe una desigualdad MTI violada asociada con i y k . Nuevamente, el cálculo del camino de peso máximo de i a k en este grafo permite determinar si existe tal camino. Repetimos este procedimiento para cada i y k , obteniendo así el resultado. □

4.3. Facetas provenientes del politopo del subgrafo acíclico

Dado un grafo dirigido $G = (N, A)$, el *politopo del subgrafo acíclico* [29] representa conjuntos de arcos correspondientes a dígrafos acíclicos (es decir, subgrafos no necesariamente inducidos de G que no admiten ciclos), y se define como

$$P_{AC}(G) = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^{|A|} : \sum_{ij \in C} x_{ij} \leq |C| - 1 \text{ para cada ciclo } C \subseteq A\}.$$

Las variables x en cualquier solución de $RP(D, \bar{s})$ forman un grafo acíclico. De hecho, si $C = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq D$, $t \geq 2$ entonces cualquier punto en $RP(D, \bar{s})$ satisface

$$x_{j_t j_1} + \sum_{l=1}^{t-1} x_{j_l j_{l+1}} \leq t - 1. \quad (4.12)$$

Cualquier solución entera factible que viole (4.12) tiene $x_{j_t j_1} = 1$ y $x_{j_k j_{k+1}} = 1$ para $k = 1, \dots, t - 1$ que, junto con las restricciones (4.1) implica $l_{j_1} < l_{j_2} < \dots < l_{j_t} < l_{j_1}$, una contradicción. Por lo tanto, la proyección de $RP(D, \bar{s})$ sobre las variables x está incluida en $P_{AC}(K_{|D|})$. Estas observaciones dan lugar a la siguiente proposición.

Proposición 4.6. *Cualquier desigualdad válida para $P_{AC}(K_{|D|})$ también es válida para $RP(D, \bar{s})$.*

Es interesante observar que la facetitud también se conserva, siempre que el número de slots disponibles sea lo suficientemente grande.

Teorema 4.11. *Sea $\pi^\top x \leq \pi_0$ una desigualdad que induce una faceta de $P_{AC}(K_{|D|})$. Si $\bar{s} \geq \sum_{i \in D} v(i)$, entonces $\pi^\top x \leq \pi_0$ induce una faceta de $RP(D, \bar{s})$.*

Demostración. Sea $F = \{(l, x) \in RP(D, \bar{s}) : \pi^\top x = \pi_0\}$ la cara de $RP(D, \bar{s})$ definida por $\pi^\top x \leq \pi_0$. Cualquier solución $x \in P_{AC}(K_{|D|})$ se puede convertir en una solución $s(x) = (l, x) \in RP(D, \bar{s})$, de la siguiente manera. Construimos un grafo dirigido $G_x = (D, A_x)$ con las demandas como su conjunto de nodos, y un arco $ij \in A_x$ entre todo par de demandas $i, j \in D$, $i \neq j$, siempre que $x_{ij} = 1$. Recorremos G_x en orden topológico y, para cada demanda $i \in D$ dentro de dicho orden, fijamos l_i como el valor mínimo según las variables x . Dado que $\bar{s} > \sum_{i \in D} v(i)$, esta construcción genera una solución factible.

Como $P_{AC}(K_{|D|})$ tiene dimensión completa, existen $|D|(|D| - 1)$ puntos afinmente independientes $x^1, \dots, x^{|D|(|D|-1)} \in P_{AC}(K_{|D|})$ que satisfacen $\pi^\top x \leq \pi_0$ por igualdad.

Tomando $y^1 = (l^1, x) := s(x^1)$ y sea $S = (i_1, \dots, i_{|D|})$ una secuencia de demandas en orden decreciente con respecto a su variable l en y^1 , es decir, $l_{i_t}^1 \geq l_{i_{t+1}}^1$ para todo $t = 1, \dots, |D| - 1$. Para $t = 1, \dots, |D|$, definimos $w^t := (l^1 + \sum_{r=t}^{|D|} e_{i_r}, x)$ como la solución obtenida a partir de y^1 desplazando una unidad hacia la derecha los intervalos asignados a las últimas $|D| - t + 1$ demandas en S . Cada una de estas soluciones es afinmente independiente de las soluciones anteriores, ya que difiere de las soluciones anteriores en una componente de la variable l .

Finalmente, para $i = 2, \dots, |D|(|D| - 1)$, definamos $y^i := s(x^i)$. La independencia afín de $\{x^i\}_{i=1}^{|D|(|D|-1)}$ asegura que $\{y^i\}_{i=1}^{|D|(|D|-1)}$ sean también afinmente independientes.

De esta manera, construimos un conjunto $\{y^i\}_{i=1}^{|D|(|D|-1)} \cup \{w^t\}_{t=1}^{|D|}$ de $|D|^2$ soluciones afinmente independientes en F . La hipótesis $\bar{s} > \sum_{i \in D} v(i)$, junto con el Teorema 4.1, aseguran que $RP(D, \bar{s})$ tiene dimensión completa, y por lo tanto podemos concluir que F es una faceta de este politopo. □

La condición $\bar{s} \geq \sum_{i \in D} v(i)$ implica que la cantidad de slots disponibles es suficiente para acomodar todas las demandas sin solapamiento, por lo que el problema se reduce a resolver la asignación de rutas. Es interesante notar que en este caso es posible resolver el problema en tiempo polinomial.

El resultado asociado al Teorema 4.11 implica que la *desigualdad de k -ciclo* (4.12, con $k \geq 2$, es válida para $RP(D, \bar{s})$. Además, en este caso particular podemos obtener una cota mejorada de $\bar{s}$ asegurando la facetitud, como presenta el siguiente enunciado.

Teorema 4.12. *Si $\bar{s} > v(C) + v(i)$ para todo $i \in D \setminus C$, entonces la desigualdad de k -ciclo (4.12) define faceta de $RP(D, \bar{s})$*

Esta familia de desigualdades, que sólo involucra las variables x , también es “heredada” del politopo de ordenamiento lineal [12, 22, 28, 39, 57], y podría ser útil para prohibir ciclos dirigidos en soluciones fraccionarias.

Es interesante notar que las desigualdades $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$ de la formulación de PLE relajada se corresponden a desigualdades de k -ciclos con $k = 2$. Los resultados en [30] implican directamente que la familia de desigualdades de k -ciclos puede ser separada en tiempo polinomial. Respecto a la simetría, para todas las desigualdades de k -ciclos asociadas a $A \subset D$ con $|A| = k \geq 3$, existen dos direcciones posibles para un ciclo, y la desigualdad asociada con una dirección es simétrica a la desigualdad asociada con la dirección opuesta.

5. EXPERIMENTOS COMPUTACIONALES

En este capítulo se presentan experimentos computacionales realizados con el fin de evaluar la contribución dentro de un entorno de planos de corte de las familias de desigualdades identificadas en el Capítulo 4. Dado que el objetivo de esta tesis es obtener información estructural sobre el poliedro asociado a la formulación DR-AOV del RSA, en este capítulo no buscamos implementar un procedimiento competitivo de ramificación y corte para el RSA, sino que con estos experimentos buscamos obtener información empírica sobre la fuerza de estas familias de desigualdades. En particular, dado que estas desigualdades son válidas para una relajación de la formulación original, nos interesa estudiar si son capaces de cortar puntos en la relajación lineal de la formulación DR-AOV completa y, en caso afirmativo, cuál es el aporte de estos cortes al procedimiento global.

La Sección 5.1 presenta un resumen de la implementación realizada y del plan de experimentación. Siguiendo la literatura existente sobre el RSA, esto implica determinar las topologías sobre las que se realizan experimentos y el mecanismo para generar aleatoriamente las demandas sobre la topología seleccionada. En la Sección 5.2 se presenta un resumen de los resultados, que se reportan con detalle en el Apéndice B. Finalmente, la Sección 5.3 describe detalles de la implementación.

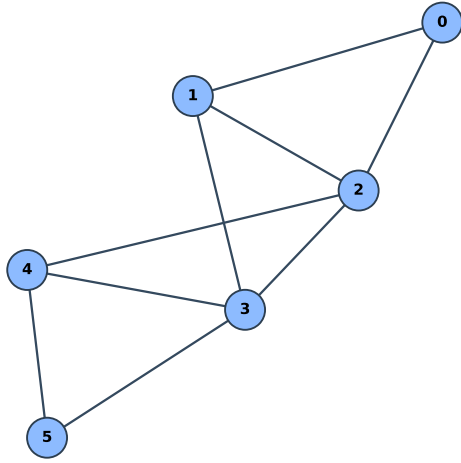
5.1. Plan de experimentación

Los experimentos fueron llevados a cabo con la formulación DR-AOV (3.1)-(3.7) sobre instancias con diferentes configuraciones. La implementación se realizó en Java utilizando CPLEX 22.4 como software de optimización, interactuando con la API CPLEX Concert. Los experimentos se realizaron en una computadora con 8 procesadores de 3.2 GHz y 16 GB de memoria RAM.

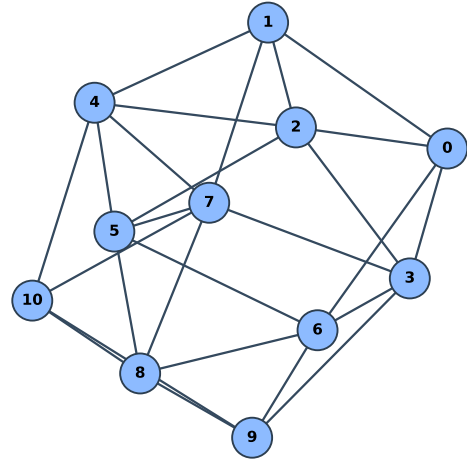
Las instancias que se buscan resolver son generadas con el procedimiento descrito en [7] y cada una tiene asociada una topología de red, un conjunto de demandas y un tamaño fijo de slots disponibles. Para la construcción de cada instancia se parte de una topología de red dirigida considerada un grafo $G = (V, E)$. A cada enlace se le asigna una capacidad de $\bar{s}$ slots. Luego, para la generación del conjunto de demandas D , se fija un porcentaje $p \in (0, 1]$ que determina el volumen máximo $v_{\max} = p \cdot \bar{s}$ que se le puede asociar a una demanda y un valor que determina la cantidad total de demandas a construir. Para cada demanda $d \in D$ se elige al azar su par de origen y destino, y un volumen tomado de manera uniforme en el intervalo $[\frac{1}{2}v_{\max}, v_{\max}]$. En la Figura 5.1 se presentan algunas de las topologías usadas en los experimentos descritos en este capítulo.

Para cada instancia se construye un modelo de PLE y se activan diferentes niveles de cortes, basados en las familias de cortes presentadas a lo largo del Capítulo 4. Esto nos permite evaluar sistemáticamente las mejoras de rendimiento y calidad de solución obtenidas mediante la incorporación de cada familia de desigualdades válidas.

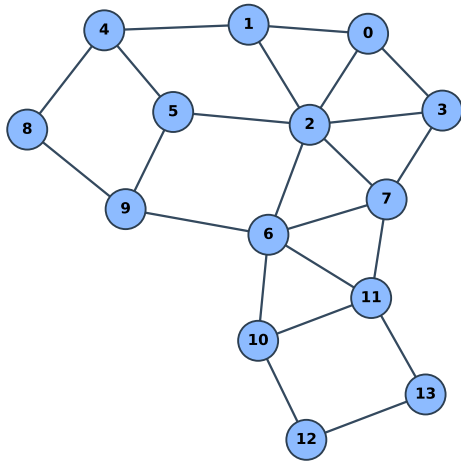
Para realizar una comparación con una versión de CPLEX que se asemeje lo máximo posible a un algoritmo tipo ramificación y acotación básico, se configuró el solver de tal forma que desactivara las técnicas avanzadas que incluye por defecto. Esto es, se buscó desactivar la simplificación previa del modelo -llamada presolve-, la generación automática de cortes y las



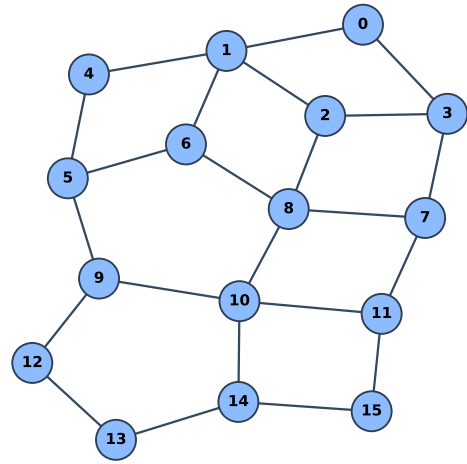
(a) 06n-9m-n6s9



(b) 11n-52m-COST239



(c) 14n-46m-Telekom



(d) 16n-46m-EURO

Fig. 5.1: Ejemplo de los grafos no dirigidos asociados a las topologías usadas en los experimentos. Cada arista mostrada en la figura se corresponde con dos arcos paralelos y opuestos en la topología real.

heurísticas internas, ajustando la estrategia de ramificación al modo más básico disponible. De este modo, buscamos que CPLEX trabaje casi como un algoritmo de ramificación y acotación “puro”, sin recurrir a la inteligencia adicional que normalmente ayuda en la búsqueda del espacio de soluciones. Por otro lado, se estableció un tiempo límite de resolución de 10 minutos y una diferencia entre el valor de la mejor solución entera conocida y la cota inferior de un mínimo del 10 %.

Se experimentó añadiendo dinámicamente cortes provenientes de las familias de desigualdades presentadas en la Sección 4.2 con los métodos de separación exacta basados en la resolución de un subproblema de camino mínimo. Para esto, se implementaron los procedimientos de separación correspondientes, que nos permiten identificar subconjuntos de desigualdades válidas que resultan violadas. No se consideraron las familias de desigualdades válidas presentadas en la Sección 3.2, dado que para su generación se requiere conocer el conjunto $L(G, D, \bar{s})$, cuya obtención es no trivial, como se describe en la Sección 3.3, optando por familias de desigualdades con separación más eficiente.

5.2. Resumen de resultados computacionales

En una primera etapa, se utilizaron diferentes configuraciones de demandas, slots y volúmenes por demanda sobre cinco topologías de varios tamaños, obteniendo un total de 225 instancias. Utilizando el límite de tiempo de ejecución de 10 minutos y siendo 36 de las instancias infactibles, fue posible resolver 155 de las 225 instancias por optimalidad, y en 85 de estas 155 instancias, el número de nodos en el árbol de enumeración se reduce cuando se añaden las desigualdades identificadas en este trabajo.

La Tabla 5.1 resume el efecto de agregar dinámicamente los cortes a un procedimiento de ramificación y acotación, agrupando las instancias por topología y número de slots disponibles (en grupos formados por 9 instancias), y reportando el número promedio de cortes agregados y nodos en el árbol de enumeración para cada grupo de instancias. Esta métrica muestra una disminución en 20 de estos 25 grupos de casos, logrando una mejora promedio del 30 %, y los mejores resultados se obtienen cuando se utilizan las desigualdades telescópicas extendidas o todas las familias de desigualdades. Notar que, no obstante, estos grupos corresponden a distintas configuraciones de topología y tamaño de instancia, por lo que los resultados no son estrictamente comparables entre sí, aunque permiten observar una tendencia. En 70 instancias, agregar estas desigualdades no produce una mejora en el número promedio de nodos. Aunque la sobrecarga introducida por los procedimientos de separación en nuestra implementación no se compensa con la reducción en el número de nodos, estos resultados computacionales sugieren que estas desigualdades podrían ser útiles con una implementación más eficiente de los procedimientos de separación o con una búsqueda heurística de cortes efectivos en tiempos más cortos que nuestra implementación. Como alternativa, también es posible reforzar la formulación inicial incorporando desigualdades válidas generadas mediante métodos heurísticos.

Topología	$\bar{s}$	Formulación		R&A Nodos	Telescópicas		Fortalecidas		Extendidas		Todas	
		Variables	Restricciones		Nodos	Cortes	Nodos	Cortes	Nodos	Cortes	Nodos	Cortes
06n-9m-n6s9	10	1249.11	10011.11	23.25	116.00	388.78	8.50	453.67	7.50	325.89	59.75	393.56
06n-9m-n6s9	50	1523.33	12350.33	71.20	120.80	590.89	137.60	338.67	41.40	568.56	106.40	706.89
06n-9m-n6s9	100	1380.44	11169.44	19.60	32.80	466.67	22.20	222.44	19.60	446.33	14.00	509.00
06n-9m-n6s9	500	1080.89	8318.56	19.00	4.00	1070.00	4.00	724.89	2.00	706.56	4.00	807.33
06n-9m-n6s9	1000	1312.44	10427.44	15.40	48.40	484.11	17.80	265.11	48.80	579.22	40.60	517.33
14n-46m-Telekom	10	3029.33	67295.11	7.50	73.50	474.89	126.00	520.56	15.00	355.00	92.00	449.78
14n-46m-Telekom	50	2822.75	61912.75	9.25	11.50	336.62	37.75	175.88	36.00	362.38	8.75	411.00
14n-46m-Telekom	100	2488.56	51873.44	175.17	166.17	605.22	222.33	361.11	99.50	499.22	161.33	509.44
14n-46m-Telekom	500	2426.11	50401.22	22.67	22.83	712.11	17.50	566.22	12.50	544.00	20.17	623.11
14n-46m-Telekom	1000	2762.78	59886.33	43.33	27.67	472.44	26.67	380.89	27.00	611.67	16.33	454.00
21n-70m-Telefónica	10	3862.44	110279.56	5.80	22.00	374.33	36.00	532.67	5.40	346.33	19.80	403.11
21n-70m-Telefónica	50	3103.67	71463.33	11.50	11.00	538.56	8.50	357.78	10.00	370.00	5.50	456.00
21n-70m-Telefónica	100	3630.22	101599.11	3.20	3.00	540.33	4.00	383.67	5.60	398.33	4.80	440.00
21n-70m-Telefónica	500	3376.50	90416.25	9.29	8.43	719.33	15.57	620.56	16.71	705.11	10.86	817.56
21n-70m-Telefónica	1000	3517.78	90269.56	43.17	90.67	642.22	31.83	438.89	48.00	667.56	11.67	709.67
28n-82m-EURO28	10	2448.78	48517.44	11.40	51.40	432.67	12.40	442.89	17.40	357.11	15.60	419.11
28n-82m-EURO28	50	3202.33	76000.33	17.25	28.75	467.22	20.75	393.62	19.75	399.12	20.00	483.00
28n-82m-EURO28	100	2900.44	63901.33	19.50	42.33	501.22	39.33	473.38	16.83	337.38	11.33	432.22
28n-82m-EURO28	500	3677.50	99432.50	6.50	7.50	548.33	8.25	407.67	6.25	561.33	36.25	906.11
28n-82m-EURO28	1000	2851.00	66657.44	25.33	21.33	515.44	18.50	379.33	14.00	470.56	36.33	612.11
43n-176m-EuroLarge	10	7890.33	287709.56	187.80	406.00	431.00	365.80	382.89	319.60	354.44	186.40	449.78
43n-176m-EuroLarge	50	8811.56	329102.00	61.83	17.33	338.00	27.67	264.89	33.33	337.11	16.50	487.11
43n-176m-EuroLarge	100	9892.67	395318.67	9.00	30.00	457.78	17.33	278.22	12.67	351.33	26.67	466.56
43n-176m-EuroLarge	500	8406.78	316550.22	6.00	4.67	573.22	5.00	372.11	13.67	702.22	10.67	525.56
43n-176m-EuroLarge	1000	9000.78	352166.00	26.20	20.40	538.00	39.80	420.56	14.20	573.00	19.60	540.67

Tab. 5.1: Número promedio de variables y restricciones de las formulaciones, cortes y nodos del árbol para cada grupo compuesto por nueve instancias, agrupando por topología y número de slots.

La principal contribución esperada del agregado dinámico de cortes dentro de un entorno de planos de corte es una reducción en la cota dual dada por la relajación lineal del modelo a resolver. Para probar si éste es realmente el caso con los cortes identificados en este trabajo, realizamos una segunda etapa de experimentos explorando diferentes configuraciones de demandas, slots y volúmenes por demanda sobre ocho topologías de varios tamaños, obteniendo un total de 120 instancias. En esta etapa se utilizaron instancias distintas de las de la primera etapa, con el propósito de profundizar el análisis sobre casos más representativos para evaluar el impacto de los cortes. Por cada una de las topología se generaron 15 instancias considerando distintos valores $\bar{s}$ y $|D|$, y para tres de ellas no se encontró una solución para la relajación lineal por lo que no fueron consideradas en las tablas donde se muestran los resultados.

La Tabla 5.2 resume los resultados clave, agrupando las instancias en tres categorías basadas en el número de slots disponibles $\bar{s}$: la Categoría 1 incluye instancias con 1–50 slots, la Categoría 2 incluye instancias con 60–200 slots y la Categoría 3 incluye instancias con 300–1000 slots. Por cada topología, cada categoría está formada por 5 instancias, a excepción de la Categoría 3, que está formada por 15 instancias. Como muestra esta tabla, la cota inferior presenta una mejora con la adición de los cortes y esta diferencia en la función objetivo representa una mejora que alcanza el 8 %, siendo 4 % la mejora en promedio. Este efecto tiende a hacerse más evidente a medida que aumenta la densidad asociada a las instancias (es decir, la relación entre el número de slots necesarios y el número de slots disponibles). De hecho, para muchas instancias de densidad baja, la solución óptima consiste en enrutar cada demanda a través del camino más corto en la red desde el origen de la demanda hasta el destino de la misma, y la relajación lineal proporciona esta cota obtenida directamente, por lo que en estos casos no se puede esperar ninguna mejora en la cota mediante el agregado dinámico de cortes.

5.3. Detalles de implementación

Para concluir el capítulo, presentamos los aspectos prácticos de la implementación describiendo la forma en que se estructuran y llaman las clases encargadas de la lectura de las topologías y demandas, de la construcción de los modelos de programación lineal entera, y del agregado de forma dinámica de las desigualdades válidas durante la ejecución del algoritmo de ramificación y corte. Se describe la creación de los objetos y la ejecución de las rutinas con o sin generación de cortes, buscando clarificar qué componentes intervienen en cada configuración, cómo se activan o desactivan las familias de cortes y de qué manera se registran las métricas utilizadas para comparar las distintas estrategias.

El diseño comienza con clases dedicadas a leer datos de entrada. Las clases *GraphReader* y *RSInputReader* analizan los archivos de texto que describen las entradas del problema, es decir, las topologías de red mediante la lista de nodos y arcos, y las demandas, mediante su origen, destino y volumen. Una vez que la clase *GraphReader* crea una instancia de la clase *Graph*, esta se configura en un objeto *RSInput*, junto con una lista de objetos *Demand* que almacenan los detalles de cada demanda a satisfacer y un entero que refleja el total de slots de frecuencia de red disponibles. Por lo tanto, una instancia de la clase *RSInput* encapsula todos los datos de entrada del problema necesarios para construir el modelo de PLE.

Al ejecutar los experimentos, la clase *Main* es la principal y la encargada de leer los archivos de entrada, crear las variables de los modelos de PLE asociados a las instancias y establecer los parámetros de CPLEX. Según un “nivel” elegido de desigualdades válidas, la

Topología	$\bar{s}$	Promedio relajación lineal	Promedio mejor cota	Promedio diferencia	Promedio porcentaje diferencia
06n-9m-n6s9	1-50	155.9067	163.5205	7.6138	4.73 %
06n-9m-n6s9	60-200	170.8500	180.8151	9.96516	5.71 %
06n-9m-n6s9	300-1000	150.0637	158.9748	8.9111	5.89 %
11n-52m-COST239	1-50	238.1752	245.6510	7.4758	2.96 %
11n-52m-COST239	60-200	216.6710	222.9614	6.2904	3.14 %
11n-52m-COST239	300-1000	234.3600	240.2475	5.8876	2.49 %
16n-46m-EURO	1-50	276.8167	286.7515	9.9347	3.63 %
16n-46m-EURO	60-200	286.5810	297.3609	10.7799	3.78 %
16n-46m-EURO	300-1000	262.9226	272.1930	9.2704	3.48 %
20n-62m-ARPANet	1-50	267.8052	278.0881	10.2829	3.81 %
20n-62m-ARPANet	60-200	293.9659	305.9209	11.9550	4.09 %
20n-62m-ARPANet	300-1000	295.5031	308.5102	13.0071	4.32 %
21n-70m-Telefonica	1-50	285.5502	294.8573	9.3071	3.20 %
21n-70m-Telefonica	60-200	322.7973	333.0226	10.2253	3.20 %
21n-70m-Telefonica	300-1000	330.7213	342.7061	11.9848	3.81 %
24n-86m-UBN24	1-50	387.9755	394.7601	6.7846	1.67 %
24n-86m-UBN24	60-200	322.7309	329.8747	7.1439	2.20 %
24n-86m-UBN24	300-1000	392.6948	396.5214	3.8266	1.04 %
28n-82m-EURO28	1-50	341.8751	353.2392	11.3641	3.13 %
28n-82m-EURO28	60-200	314.6125	327.9629	13.3504	4.25 %
28n-82m-EURO28	300-1000	325.4728	337.4390	11.9662	3.75 %
30n-112m-Spain	1-50	372.9570	377.3910	4.4340	1.26 %
30n-112m-Spain	60-200	425.3485	428.0734	2.7248	0.67 %
30n-112m-Spain	300-1000	382.2924	385.1981	2.9057	0.83 %

Tab. 5.2: Mejora promedio obtenida al agregar cortes en el nodo raíz del procedimiento de ramificación y acotamiento, agrupando en tres categorías según el número de slots, en grupos de entre 5 y 15 instancias.

clase *Main* también dará la devolución de llamada *RSASeparator* al optimizador. *RSASeparator* es una subclase de *IloCplex.UserCutCallback* e implementa una lógica de planos de corte. Siempre que el optimizador encuentra una solución fraccionaria durante su búsqueda en el árbol de ramificación y acotación, *RSASeparator* inspecciona la asignación parcial de las variables chequeando si violan alguna de las restricciones. Esto lo hace mediante la construcción de un grafo dirigido donde los pesos de los arcos reflejan la diferencia en los volúmenes de las demandas y la superposición indicada por las variables fraccionarias. La clase *BellmanFord* contiene una implementación propia del algoritmo de Bellman-Ford y es la encargada de construir, dado un grafo de entrada y dos nodos asociados a demandas, la ruta más corta entre ellos. Al interpretar dichas rutas, la clase *RSASeparator* identifica subconjuntos de demandas cuyas asignaciones parciales violan las restricciones del RSA. Cualquier violación detectada da como resultado la generación de nuevas desigualdades que se devuelven al optimizador, ajustando de manera incremental la región factible. Vale la pena notar que no es posible usar el algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta más corta entre dos nodos debido a que los pesos de los arcos son negativos.

Cuando se busca realizar comparaciones contra una configuración simplificada de CPLEX, se intenta que éste ejecute un algoritmo de ramificación y acotación lo más simplificado posible, como se describió previamente. Bajo esta configuración, es posible registrar las mejoras de los cortes definidos por el usuario y que termina añadiendo la clase *RSASeparator*. Al ejecutar tanto el entorno de planos de corte haciendo uso de la clase *RSASeparator* como el básico de CPLEX sobre las mismas topologías de red y escenarios de demanda, podemos medir las mejoras en términos de tiempo de ejecución, función objetivo y comportamiento de convergencia. Todos los experimentos se ejecutaron con límites fijos de tiempo o memoria, y se registran métricas de rendimiento relevantes, como gap de optimalidad, los nodos en el árbol de enumeración y la cantidad de cortes de usuario agregados.

La Figura 5.2 muestra un diagrama UML con la relación entre las clases mencionadas y cómo fluyen los datos desde los procedimientos encargados de la entrada de datos hasta la rutina principal del optimizador y luego de regreso a través del mecanismo de generación de planos de corte.

Al integrar estos componentes, la solución asociada al conjunto de clases presentadas ofrece un entorno flexible y modular para la ejecución de distintos procedimientos de resolución del RSA, activando o desactivando las características avanzadas de CPLEX y registrando sistemáticamente su rendimiento. Los detalles de cada ejecución (archivos de topología, archivos de demandas, configuraciones y salidas de CPLEX, y registros de solución) constituyen la base para extraer conclusiones significativas sobre cómo escalan y se comportan en la práctica las diferentes estrategias implementadas.

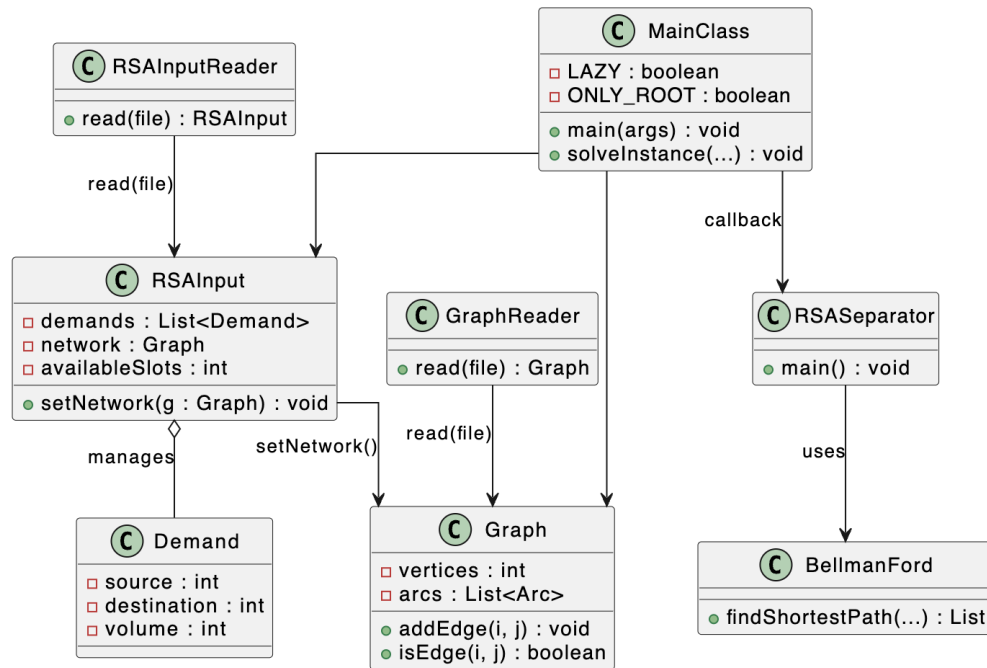


Fig. 5.2: Diagrama de clases UML de alto nivel que representa las relaciones entre los principales componentes del marco de solución del RSA. Las flechas muestran cómo fluye la información desde la lectura de topología y demandas (**GraphReader** y **RSAInputReader**) hacia las estructuras **Graph** y **RSAInput**, que luego son utilizadas por la clase **Main** para construir y resolver el modelo de PLE. El callback **RSASeparator** depende de la clase **BellmanFord** para detectar violaciones de restricciones en soluciones fraccionarias.

6. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

Esta tesis se ha centrado en el problema de ruteo y asignación de espectro en redes ópticas elásticas, abordándolo mediante técnicas de programación lineal entera (PLE). Desde el comienzo, el trabajo se orientó a lograr aportes teóricos sobre aspectos poliedrales del RSA, analizando la estructura del espacio de soluciones de una de las formulaciones presentadas e introduciendo un procedimiento para la generación de planos de corte derivados de este estudio con el fin de evaluar su impacto computacional.

El trabajo siguió cuatro hitos relacionados entre sí:

- **Diseño y evaluación de formulaciones de PLE para el RSA.** Se propusieron varios modelos de PLE con distintos juegos de variables y restricciones, los cuales se compararon mediante dos etapas de experimentación computacional, identificando a la formulación DR-AOV como la de mejor relación entre tamaño, calidad de la relajación y tiempo de resolución.
- **Análisis poliedral de la formulación DR-AOV.** Se definió el poliedro asociado a la formulación DR-AOV como $P(G, D, \bar{s})$, se determinó su dimensión mediante la identificación de un sistema minimal de ecuaciones y se estudió la propiedad de simetría presente en él. Se caracterizaron familias de desigualdades derivadas de la relación de $P(G, D, \bar{s})$ con poliedros asociados al problema de coloreo por intervalos, y se establecieron condiciones bajo las cuales dichas desigualdades definen facetas de $P(G, D, \bar{s})$.
- **Estudio poliedral de una relajación de la formulación DR-AOV.** Aislando la componente de asignación de espectro, se introdujo una relajación de la formulación DR-AOV y se definió el poliedro asociado $RP(D, \bar{s})$. Sobre este, se demostró que tiene dimensión completa y se estudió la propiedad de simetría que presenta. Se derivaron las familias de desigualdades telescópicas, fortalecidas, extendidas y medias, y se establecieron, por un lado, condiciones bajo las cuales las mismas definen facetas de $RP(D, \bar{s})$, y por otro lado, procedimientos de separación con complejidad computacional polinomial. Además, se mostró que una proyección de $RP(D, \bar{s})$ está contenida en el politopo del subgrafo acíclico.
- **Integración en un esquema de ramificación y corte.** Las familias de cortes que surgen a partir del estudio de $RP(D, \bar{s})$ se incorporaron dinámicamente a la formulación DR-AOV. Los experimentos, realizados sobre un amplio conjunto de instancias usando diversas topologías, números de slots y demandas, mostraron reducciones en el tamaño del árbol de búsqueda y mejoras en la cota inferior.

Este capítulo busca repasar el trabajo realizado en cada uno de los capítulos, destacando las dificultades encontradas y los hallazgos más relevantes, teniendo en cuenta las contribuciones teóricas, los resultados computacionales obtenidos y sus implicancias. Además, se incluyen posibles líneas de trabajo a futuro destinadas a ampliar y mejorar las metodologías presentadas.

6.1. Formulaciones de programación lineal entera

Una de las contribuciones de esta tesis es la exploración exhaustiva de alternativas de diseño para formulaciones de programación lineal entera para el RSA, buscando que los modelos resultantes sobrelleven de manera eficiente el crecimiento en el tamaño de los modelos a medida que aumenta el tamaño de las topologías de red y el número de demandas a satisfacer.

Para esto, se plantearon familias de formulaciones que varían en la configuración y noción de sus variables de decisión; en algunas se adopta un enfoque tal que se distinguen las familias de variables de ruteo y las de asignación de espectro, mientras que en otras se integran estas decisiones en una misma familia de variables. Se obtuvo un total de 12 formulaciones sobre las cuales se realizó un análisis comparativo utilizando topologías de red tomadas de la literatura y distintas configuraciones de demandas a satisfacer y slots disponibles.

Se encontró que ciertas formulaciones presentan problemas de escalabilidad debido a la gran cantidad de restricciones y variables de los modelos asociados, tanto en la construcción como en la resolución de los mismos. En particular, en las familias de formulaciones que incorporan ruteo y asignación de espectro a nivel de slots individuales (DS y, sobre todo, DSL) el tamaño de los modelos provocó errores de memoria al momento de la construcción considerando conjuntos de demandas de más de 70 elementos. Por otro lado, en las familias de formulaciones en las que la asignación de espectro se hace a nivel intervalo (DR y DRL), el comportamiento varía entre si se usa una o dos familias de variables para el ruteo y la asignación de espectro. En el caso de la formulación DRL-BF fue posible la construcción de los modelos con un número mayor de demandas (hasta 180), aunque con dificultades en la resolución de los mismos. El mejor comportamiento con respecto a la construcción y resolución de los modelos se encontró combinando variables binarias que modelan el uso de enlaces por demanda y el orden de asignación de demandas que comparten enlaces, junto con variables enteras que indican el primer slot asignado a cada demanda, como en la familia DR. Dentro de esta familia de formulaciones, la DR-AOV demostró ser la de mejor eficiencia computacional.

Desde el inicio se adoptó por buscar minimizar la longitud total de ruta como función objetivo. Tal vez el incorporar un segundo criterio (por ejemplo, el balance de espectro) habría permitido otro tipo de análisis sobre las formulaciones.

Como resultado de este análisis y de los experimentos realizados, el buen desempeño asociado a la formulación DR-AOV nos motivó a profundizar sobre este modelo desde un aspecto poliedral, buscando fortalecer la base teórica del problema y la formulación.

6.2. Estudio poliedral

Tras identificar la formulación DR-AOV como más prometedora desde el punto de vista computacional, el trabajo realizado en esta tesis se centra en un estudio del poliedro $P(G, D, \bar{s})$, definido como la cápsula convexa de las soluciones factibles asociadas a esta formulación. La primera parte de este estudio se dedicó a caracterizar la dimensión de $P(G, D, \bar{s})$, necesitando para esto la introducción de estructuras auxiliares:

- El conjunto $L(G, D, \bar{s})$, que describe los pares de demanda que comparten al menos un enlace en cualquier solución.
- El grafo de factibilidad G_d , utilizado para eliminar los enlaces que nunca son válidos para una demanda $d \in D$.

- El poliedro $PR(G, d)$, definido por todas las combinaciones de rutas factibles en G para una demanda $d \in D$.

A partir de estas estructuras y de la dimensión asociada a $PR(G, d)$, es posible derivar un sistema minimal de ecuaciones de $P(G, D, \bar{s})$ y, a partir de éste, determinar la dimensión del poliedro estudiado. Una vez caracterizado este parámetro, se buscó identificar desigualdades válidas para $P(G, D, \bar{s})$ y analizar las condiciones bajo las cuales estas desigualdades definen faceta del poliedro, contribuyendo de esta manera a una comprensión más profunda de la estructura poliedral del problema.

Se encontró que el conjunto $L(G, D, \bar{s})$ es clave, tanto para determinar la factibilidad de restricciones asociadas a la formulación como para encontrar nuevas familias de desigualdades que definan facetas de $P(G, D, \bar{s})$. En el caso en que $L(G, D, \bar{s})$ no es vacío, y mediante el grafo de conflictos entre demandas, se estableció una relación entre el RSA y los problemas de coloreo, buscando identificar familias de desigualdades válidas asociadas a algunas derivaciones de esta familia de problemas. Para las desigualdades de clique, conocidas en el contexto de coloreo por intervalos, se establecieron condiciones suficientes bajo las cuales definen facetas de $P(G, D, \bar{s})$.

Por lo nombrado anteriormente y lo visto en el capítulo, se encuentra que el análisis de $P(G, D, \bar{s})$ está fuertemente vinculado con $L(G, D, \bar{s})$. Así, la dificultad encontrada en este estudio se basa en la complejidad asociada a la caracterización de los pares de demandas que en toda solución comparten al menos un enlace. Al no ser trivial identificar estos elementos, el uso de L como herramienta teórica queda sensiblemente limitado. Sin embargo, la posibilidad de construir subconjuntos de $L(G, D, \bar{s})$ cuyos elementos se identifiquen de forma simple otorga a dicho conjunto un valor práctico concreto.

6.3. Formulación relajada

Como se mencionó, la complejidad computacional asociada a generar el conjunto $L(G, D, \bar{s})$ limitó la aplicación práctica de estos resultados. Esto motivó el planteo de una nueva formulación, simplificando ciertas restricciones, buscando así obtener conocimiento adicional sobre la estructura combinatoria de $P(G, D, \bar{s})$. Se introdujo entonces una relajación de la formulación DR-AOV, centrándose en la componente de asignación de espectro y simplificando el resto de las restricciones. Esto condujo a la definición del poliedro $RP(D, \bar{s})$, el cual se estudió en profundidad, buscando así fortalecer la formulación original.

En un principio, se caracterizó la dimensión y la propiedad simetría que posee $RP(D, \bar{s})$, y se demostró que las desigualdades de antiparalelismo, las restricciones sobre 2-ciclos y la no-negatividad de un juego de variables definen facetas de este poliedro. Por otro lado, se propusieron las siguientes familias de desigualdades válidas:

- *Desigualdades telescópicas derechas e izquierdas:* Estas familias buscan acotar la asignación de slots de una demanda i considerando la suma de las diferencias de volumen de otras demandas a la derecha/izquierda de i .
- *Desigualdades telescópicas reforzadas derechas e izquierdas:* Estas familias buscan acotar la asignación de slots de pares de demandas de forma análoga a la familia anterior.
- *Desigualdades telescópicas extendidas derechas e izquierdas:* Estas familias buscan acotar la asignación de slots de pares de demanda i, j considerando tanto las demandas entre i y j , como las que se encuentran a la derecha/izquierda de i .

- *Desigualdades telescópicas medias*: Esta familia busca acotar la asignación de slots de pares de demandas i, j teniendo en cuenta demandas que se sitúan entre i y j .
- *Desigualdades k -ciclo*: Esta familia se hereda del politopo del subgrafo acíclico y busca acotar la asignación de slots estableciendo un orden entre los intervalos asignados a las demandas.

En este contexto, dos de las contribuciones centrales de este capítulo son:

- Se presentaron y demostraron las condiciones bajo las cuales estas familias de desigualdades definen facetas de $RP(D, \bar{s})$.
- Se demostró que su separación puede lograrse en tiempo polinomial, mediante reducciones al problema de camino mínimo en grafos dirigidos adecuadamente contruidos.

El segundo punto destacado, además de ser un resultado significativo desde el punto de vista teórico, hace a estas desigualdades particularmente valiosas para su integración en un entorno de planos de corte. Además, su estructura sugiere la aplicación de procedimientos de separación heurísticos simples en caso de que los algoritmos polinómicos no sean efectivos en la práctica.

6.4. Experimentos computacionales

Si bien la presente tesis tiene un marco teórico y se centra en el estudio del poliedro asociado a la formulación DR-AOV, se llevaron a cabo experimentos computacionales con el objetivo de tener una aproximación acerca del potencial de las familias identificadas en el Capítulo 4. Se implementó un algoritmo de ramificación y corte, y procedimientos de separación, de manera de incorporar las desigualdades de forma dinámica en un entorno de planos de corte. Los resultados obtenidos se pueden resumir en los dos siguientes puntos.

- *Reducción en el tamaño del árbol de búsqueda*. En la mayoría de las instancias la incorporación de las familias telescópicas, fortalecidas, extendidas o medias disminuyó el número de nodos del árbol de búsqueda, logrando una mejora promedio del 30 %.
- *Mejoras en la cota dual*. Los cortes aportaron hasta un 8 % de mejora en la relajación lineal, con un 4 % de mejora promedio, tendiendo a ser mayor a medida que aumenta la relación entre el número de slots necesarios y el número de slots disponibles de las instancias. Es decir, en configuraciones donde se tienen pocos slots disponibles frente a los necesarios, el uso de estos cortes mejoró en mayor medida la cota inferior dada por la relajación lineal de la formulación original.

Aunque el tiempo requerido por los procedimientos de separación exacta de los cortes, más allá de tener una complejidad polinomial, tiende a compensar parte de la mejora obtenida en términos de reducción del tamaño del árbol de búsqueda, estos resultados sugieren líneas concretas de trabajo a futuro, que se describirán en la próxima sección.

6.5. Trabajo a futuro

A partir de los desarrollos teóricos y prácticos llevados a cabo en esta tesis, surgen diversas líneas de investigación futuras.

Una dirección natural consiste en el diseño de nuevas formulaciones de programación lineal entera que puedan ofrecer una mejor escalabilidad o relajaciones lineales más ajustadas que el modelo DR-AOV. Si bien esta formulación tiene asociadas las mejores métricas sobre el resto de las formulaciones presentadas, puede que este resultado esté limitado por los experimentos realizados.

Otra dirección de investigación relevante consiste en incorporar incertidumbre en los modelos, considerando versiones estocásticas del problema de RSA. En particular, podría modelarse la variabilidad en los volúmenes de demanda mediante programación estocástica, buscando soluciones que permanezcan factibles frente a diferentes escenarios de tráfico. Asimismo, la disponibilidad de los enlaces podría representarse como un parámetro aleatorio, permitiendo estudiar escenarios con fallas en la red y ponderar su impacto sobre las decisiones en el ruteo y en la asignación de espectro.

Por otro lado, la incorporación de restricciones prácticas adicionales, como límites de latencia, requerimientos de protección o consumo energético, enriquecería aún más el marco de modelado y abriría nuevos desafíos teóricos. Un ejemplo de esto podría ser el estudio de variantes del RSA en las que se relaje la restricción de continuidad de espectro, permitiendo que una misma demanda utilice diferentes slots a lo largo de su ruta mediante técnicas de conversión de longitud de onda o espectro. Si bien este enfoque introduce un costo adicional asociado al equipamiento de los nodos con hardware de conversión, aumentaría la aplicabilidad del enfoque en contextos de planificación y operación de redes en tiempo real.

Otra línea de trabajo interesante consiste en explorar formulaciones alternativas en las que las variables de decisión se definan en términos de rutas precomputadas en la red, como se hizo, por ejemplo, en los trabajos [16, 35, 51]. Este enfoque podría simplificar la representación matemática del problema, reduciendo el número de variables y restricciones, y potencialmente mejorando los tiempos de resolución. En este contexto, la principal dificultad está en garantizar que el conjunto de rutas consideradas sea lo suficientemente amplio, manteniendo al mismo tiempo la factibilidad computacional de los modelos, y se podrían utilizar métodos de descomposición como generación de columnas y descomposición de Benders.

En el ámbito teórico, el estudio poliedral realizado sobre la formulación DR-AOV podría ampliarse mediante la exploración de nuevas familias de desigualdades válidas y la búsqueda de una caracterización más completa del espacio de soluciones que describe el problema. Desde el punto de vista práctico, sería relevante desarrollar procedimientos de separación heurísticos efectivos para las familias de desigualdades presentadas, con el fin de mejorar el uso de estas desigualdades dentro de un entorno de planos de corte.

Por otro lado, en este trabajo nos centramos en la relación entre el RSA y una familia de problemas derivados del problema de coloreo. Si bien aún queda mucho por explorar para profundizar en las relaciones con estas familias de problemas, siendo que este problema tiene una componente de ruteo y otra de asignación de recursos, y ambos problemas son ampliamente estudiados, se podrían analizar relaciones entre el RSA y otras familias de problemas de optimización combinatoria.

En cuanto a la resolución práctica del RSA, el desarrollo de un procedimiento completo de ramificación y corte más eficiente representa un paso natural hacia adelante. Este algoritmo debería integrar rutinas eficientes para la separación y administración de las desigualdades

presentadas durante el proceso de resolución. Por otro lado, en [7] se mostró que la adición de heurísticas iniciales a un algoritmo de ramificación y corte sobre otra formulación tuvo un impacto positivo en su rendimiento, por lo que sería interesante implementar e incorporar este tipo de técnicas.

Por último, dada la relevancia práctica del problema estudiado, resultaría interesante poder llevar investigaciones futuras hacia aplicaciones reales. Tener la posibilidad de experimentar sobre conjuntos de datos provenientes de tráfico y redes ópticas operativas permitiría evaluar con mayor precisión los resultados obtenidos y contrastar la eficacia de los cortes en escenarios realistas. Además, como se observó en los experimentos, ciertas métricas de mejora muestran una relación con la estructura de las instancias. Un análisis de los atributos asociados a instancias reales facilitaría el diseño de estrategias a medida capaces de explotar rasgos específicos.

Bibliografía

- [1] Forough Shirin Abkenar, Akbar Ghaffarpour Rahbar, and Amin Ebrahimzadeh. Best fit (BF): A new spectrum allocation mechanism in elastic optical networks (EONs). In *2016 8th International Symposium on Telecommunications (IST)*, pages 24–29, 2016.
- [2] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [3] Egon Balas and Mark J. Saltzman. Facets of the three-index assignment polytope. *Discrete Applied Mathematics*, 36(2):175–188, 1992.
- [4] Cynthia Barnhart, Ellis L. Johnson, George L. Nemhauser, Martin W. P. Savelsbergh, and Pamela H. Vance. Branch-and-price: Column generation for huge integer programs. *Operations Research*, 46(3):316–329, 1998.
- [5] Bruno Beauquier, Jean-Claude Bermond, Luisa Gargano, Pavol Hell, Stéphane Pérennes, and Ugo Vaccaro. Graph problems arising from wavelength-routing in all-optical networks. In *WOCS 1997 - 2nd Workshop on Optics and Computer Science - 11th International Parallel Processing Symposium*, Geneve, Switzerland, April 1997.
- [6] Federico Bertero, Marcelo Bianchetti, and Javier Marenco. Integer programming models for the routing and spectrum allocation problem. *TOP*, 26:465–488, 2018.
- [7] Marcelo Bianchetti. *Un algoritmo branch-and-cut para el routing and spectrum allocation problem*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2022.
- [8] Marcelo Bianchetti and Javier Marenco. Valid inequalities and a branch-and-cut algorithm for the routing and spectrum allocation problem. *Procedia Computer Science*, 195:523–531, 2021. Proceedings of the XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.
- [9] Marcelo Bianchetti and Javier Marenco. A matheuristic for the routing and spectrum allocation problem. *4OR (in press)*, 2025.
- [10] Robert E. Bixby. A brief history of linear and mixed-integer programming computation. *Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP*, pages 107–121, 2012.
- [11] Christian Blum and Andrea Roli. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys*, 35(3):268–308, 2003.
- [12] Givi Bolotashvili, Michail Kovalev, and Eberhard Girlich. New facets of the linear ordering polytope. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 12(3):326–336, 1999.
- [13] Chengyu Cai, Xiang Chen, Xuesen Yu, Genc Shen, and Moshe Zukerman. A novel node-arc model and multiiteration heuristics for static routing and spectrum assignment in elastic optical networks. *Journal of Optical Communications and Networking*, 9(12):1059–1071, December 2017.

- [14] Alberto Castro, Marc Ruiz, Luis Velasco, Gabriel Junyent, and Jaume Comellas. Path-based recovery in flexgrid optical networks. In *2012 14th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON)*, pages 1–4, 2012.
- [15] Konstantinos Christodoulopoulos, Ioannis Tomkos, and Emmanuel Varvarigos. Routing and spectrum allocation in OFDM-based optical networks with elastic bandwidth allocation. In *2010 IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM 2010*, pages 1–6, 2010.
- [16] Konstantinos Christodoulopoulos, Ioannis Tomkos, and Emmanuel Varvarigos. Elastic bandwidth allocation in flexible OFDM-based optical networks. *Journal of Lightwave Technology*, 29(9):1354–1366, 2011.
- [17] Rafael Colares, Hervé Kerivin, and Annegret Wagler. An extended formulation for the Constraint Routing and Spectrum Assignment Problem in Elastic Optical Networks. working paper or preprint, March 2021.
- [18] Harold Crowder, Ellis L. Johnson, and Manfred W. Padberg. Solving large-scale zero-one linear programming problems. *Operations Research*, 31(5):803–834, 1983.
- [19] Diego Delle Donne and Javier Marenco. Polyhedral studies of vertex coloring problems: The standard formulation. *Discrete Optimization*, 21:1–13, 2016.
- [20] Ibrahima Diarrassouba, Hadhbi Youssouf, and Ali Mahjoub. The constrained-routing and spectrum assignment problem: Polyhedral analysis and algorithms. 12 2021.
- [21] Henrique Dinarte, Bruno Correia, Daniel Chaves, and Raul Almeida Jr. Routing and spectrum assignment: A metaheuristic for hybrid ordering selection in elastic optical networks. *Computer Networks*, 197:108287, 07 2021.
- [22] Jean-Paul Doignon, Samuel Fiorini, and Gwenaél Joret. Facets of the linear ordering polytope: A unification for the fence family through weighted graphs. *Journal of Mathematical Psychology*, 50(3):251–262, 2006.
- [23] Julian Enoch. Nested column generation decomposition for solving the routing and spectrum allocation problem in elastic optical networks. *CoRR*, abs/2001.00066, 2020.
- [24] Shimon Even, Alon Itai, and Adi Shamir. On the complexity of timetable and multi-commodity flow problems. *SIAM Journal on Computing*, 5(4):691–703, 1976.
- [25] Pedro H Fernandes da Silva, Juan Pablo Nant, Hervé L.M. Kerivin, and Annegret K. Wagler. A framework for routing and spectrum assignment in optical networks, driven by combinatorial properties. In *OpenProceedings.org*, Aachen, Germany, June 2022.
- [26] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., USA, 1990.
- [27] Róża Goścień, Mirosław Klinkowski, and Krzysztof Walkowiak. A tabu search algorithm for routing and spectrum allocation in elastic optical networks. *2014 16th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON)*, pages 1–4, 2014.

-
- [28] Martin Grötschel, Michael Jünger, and Gerhard Reinelt. Facets of the linear ordering polytope. *Mathematical Programming*, 33:43–60, 1985.
- [29] Martin Grötschel, Michael Jünger, and Gerhard Reinelt. On the acyclic subgraph polytope. *Mathematical Programming*, 33:28–42, 1985.
- [30] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, volume 2 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 1988.
- [31] Joy Halder, Tamaghna Acharya, Monish Chatterjee, and Uma Bhattacharya. Optimal design of energy efficient survivable routing and spectrum allocation in eon. In *2020 11th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT)*, pages 1–6, 2020.
- [32] IBM ILOG. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio. <https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio>, 2013. Versión 12.6.
- [33] Masahiro Jinno, Bartłomiej Kozicki, Takahiro Tsuda, Yuji Sone, Shoichiro Matsuura, and Toshio Kuri. Spectrum-efficient and scalable elastic optical path network: Architecture, benefits, and enabling technologies. *IEEE Communications Magazine*, 47(11):66–73, 2009.
- [34] Gerd Keiser. *Optical Fiber Communications*. McGraw-Hill, 5th edition, 2013.
- [35] Mirosław Klinkowski and Krzysztof Walkowiak. Routing and spectrum assignment in spectrum sliced elastic optical path network. *IEEE Communications Letters*, 15(8):884–886, 2011.
- [36] Mirosław Klinkowski and Krzysztof Walkowiak. A column generation-based optimization of anycast and multicast traffic in distance-adaptive flexgrid networks. In *Asia Communications and Photonics Conference 2015*, page AS4H.3. Optica Publishing Group, 2015.
- [37] Mirosław Klinkowski, Michał Pióro, Mateusz Żotkiewicz, Marc Ruiz, and Luis Velasco. Valid inequalities for the routing and spectrum allocation problem in elastic optical networks. In *2014 16th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON)*, pages 1–5, 2014.
- [38] Mirosław Klinkowski, Mateusz Żotkiewicz, Krzysztof Walkowiak, Michał Pióro, Marc Ruiz, and Luis Velasco. Solving large instances of the rsa problem in flexgrid elastic optical networks. *Journal of Optical Communications and Networking*, 8(5):320–330, 2016.
- [39] Janny Leung and Jon Lee. More facets from fences for linear ordering and acyclic subgraph polytopes. *Discret. Appl. Math.*, 50:185–200, 1994.
- [40] Li Li and Hong-jie Li. Performance analysis of novel routing and spectrum allocation algorithm in elastic optical networks. *Optik*, 212:164688, 2020.
- [41] Li Li and Hong-jie Li. Performance analysis of novel routing and spectrum allocation algorithm in elastic optical networks. *Optik*, 212:164688, 04 2020.

-
- [42] Luis Víctor Maidana Benítez, Melisa María Rosa Villamayor Paredes, José Colbes, César F. Bogado-Martínez, Benjamin Barán, and Diego P. Pinto-Roa. Routing, modulation level, and spectrum assignment in elastic optical networks—a serial stage approach with multiple sub-sets of requests based on integer linear programming. *Mathematical and Computational Applications*, 28(3), 2023.
- [43] Javier Marenco and Annegret Wagler. On the combinatorial structure of chromatic scheduling polytopes. *Discrete Applied Mathematics*, 154(13):1865–1876, 2006. Traces of the Latin American Conference on Combinatorics, Graphs and Applications.
- [44] Javier Marenco and Annegret Wagler. Facet-inducing inequalities for chromatic scheduling polytopes based on covering cliques. *Discret. Optim.*, 6(1):64–78, 2009.
- [45] Goran Markovic. Routing and spectrum allocation in elastic optical networks using bee colony optimization. *Photonic Network Communications*, 34, 12 2017.
- [46] Alexsander A. Melo, Celina M.H. Figueiredo, and Uéverton S. Souza. Simple undirected two-commodity integral flow with a unitary demand. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 62:279–284, 2017. LAGOS’17 – IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization.
- [47] Isabel Méndez-Díaz and Paula Zabala. A branch-and-cut algorithm for graph coloring. *Discrete Appl. Math.*, 154(5):826–847, April 2006.
- [48] George L. Nemhauser and Laurence A. Wolsey. *Integer and combinatorial optimization*. Wiley-Interscience, USA, 1988.
- [49] Ireneusz Olszewski. Routing and spectrum assignment in spectrum flexible transparent optical networks. In *Image Processing and Communications Challenges 5*, pages 407–417, Heidelberg, 2014. Springer International Publishing.
- [50] Manfred W. Padberg and Giovanni Rinaldi. A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, 33(1):60–100, 1991.
- [51] Arijit Paul, Quazi Rahman, Subir Bandyopadhyay, and Yash Aneja. An optimal and a heuristic algorithm for solving the route and spectrum allocation problem in OFDM networks. *Photonic Network Communications*, 30, 06 2015.
- [52] Christian D. Pérez-López, Luis M. Soto-Bovó, Jose Colbes, and Diego P. Pinto-Roa. Semi-dynamic routing and spectrum assignment with variable bandwidth in elastic optical networks. bee-inspired algorithms approach. In *2021 XLVII Latin American Computing Conference (CLEI)*, pages 1–10, 2021.
- [53] Rajiv Ramaswami, Kumar Sivarajan, and Galen Sasaki. *Optical Networks: A Practical Perspective*. Morgan Kaufmann, 3rd edition, 2009.
- [54] Marc Ruiz, Michal Pioro, Mateusz Żotkiewicz, Mirosław Klinkowski, and Luis Velasco Esteban. Column generation algorithm for RSA problems in flexgrid optical networks. *Photonic Network Communication*, 26:53–64, 12 2013.

-
- [55] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization - Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003.
 - [56] Shahrzad Shirazipourazad, Chenyang Zhou, Zahra Derakhshandeh, and Arunabha Sen. On routing and spectrum allocation in spectrum-sliced optical networks. In *2013 Proceedings IEEE INFOCOM*, pages 385–389. IEEE, 2013.
 - [57] Renaud Sirdey and Hervé L. M. Kerivin. A branch-and-cut algorithm for a resource-constrained scheduling problem. *RAIRO - Operations Research*, 41(3):235–251, 2007.
 - [58] Ireneusz Szcześniak, A. Jajszczyk, and Bożena Woźna-Szcześniak. Generic Dijkstra for optical networks. *Journal of Optical Communications and Networking*, 11:568–577, 09 2019.
 - [59] Luis Velasco Esteban, Mirosław Klinkowski, Marc Ruiz, and Jaume Comellas. Modeling the routing and spectrum allocation problem for flexgrid optical networks. *Photonic Network Communication*, 24:177–186, 01 2013.
 - [60] Krzysztof Walkowiak, Mirosław Klinkowski, Bartosz Rabiega, and Róża Goścień. Routing and spectrum allocation algorithms for elastic optical networks with dedicated path protection. *Optical Switching and Networking*, 13:63–75, 2014.
 - [61] Yang Wang, Xiaojun Cao, and Yi Pan. A study of the routing and spectrum allocation in spectrum-sliced elastic optical path networks. In *2011 Proceedings Ieee Infocom*, pages 1503–1511. IEEE, 2011.
 - [62] Hejun Xuan, Lidan Lin, Lanlan Qiao, and Yang Zhou. Grey wolf algorithm and multi-objective model for the manycast RSA problem in EONs. *Information*, 10(12), 2019.
 - [63] Hejun Xuan, Yuping Wang, Zhanqi Xu, Shanshan Hao, and Xiaoli Wang. New optimization model for routing and spectrum assignment with nodes insecurity. *Optics Communications*, 389:42–50, 2017.
 - [64] Hadhbi Youssouf. Polyhedral investigation and branch-and-cut for the constrained-routing and spectrum assignment problem in spectrally flexible optical networks. 12 2020.

Apéndice A

TEOREMA DE UNOS CONSECUTIVOS

Fijamos una demanda d y un enlace e usado por esta demanda. Sea x_s una variable binaria tal que es igual a uno si y solo si el slot s es usado por la demanda d , y consideremos las siguientes restricciones:

$$\sum_{\substack{s \in \{0, \dots, \bar{s}-1\}: \\ s \equiv i \pmod{v(d)}}} x_s = 1 \quad \forall i \in \{0, \dots, v(d) - 1\} \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{\substack{s \in \{0, \dots, i-1\}: \\ s \equiv i \pmod{v(d)}}} x_s \geq \sum_{\substack{s \in \{0, \dots, i-2\}: \\ s+1 \equiv i \pmod{v(d)}}} x_s \quad \forall i \in \{0, \dots, \bar{s} - v(d) - 1\} \quad (\text{A.2})$$

Teorema A.1. Sea $x^* \in \{0, 1\}^{\bar{s}}$, las restricciones A.1 y A.2 aseguran que hay exactamente $v(d)$ variables consecutivas en el vector $\{x_0^*, \dots, x_{\bar{s}-1}^*\}$ tomando el valor 1.

Demostración. Usando las restricciones A.2 y una propiedad de las restricciones A.1 podemos probar que hay al menos $v(d)$ variables consecutivas tomando el valor 1, y usando las restricciones A.1 podemos probar que el resto de las variables del vector binario x^* toman el valor 0.

Para $i = 0, \dots, \bar{s} - v(d) - 1$, sea C_i la restricción A.2 asociada al índice i , y sean L_i y R_i el lado izquierdo y derecho de C_i , respectivamente. Es decir, tenemos que:

$$C_i : L_i \geq R_i.$$

Dado que $R_0 = 0$ y como el conjunto de índices de L_i es igual al conjunto de índices de R_{i+1} para todo i en $\{0, \dots, \bar{s} - v(d) - 1\}$:

$$L_{\bar{s}-v(d)} \geq R_{\bar{s}-v(d)} = L_{\bar{s}-v(d)-1} \geq \dots \geq R_1 = L_0 \geq R_0 = 0$$

Es decir, tenemos que:

$$L_{i+1} \geq L_i \quad \forall i \in \{0, \dots, \bar{s} - v(d) - 1\} \quad (\text{A.3})$$

Ahora, sea I_i el conjunto de índices asociados a L_i , es decir, $I_i = \{s \in \{0, \dots, i-1\} : s \equiv i \pmod{v(d)}\}$. De esta manera, el índice i es el mayor elemento en I_i , y dado que $i \notin I_{i+1}, \dots, i \notin I_{i+v(d)-1}$, para $q = 0, \dots, v(d) - 1$ y $i = 0, \dots, \bar{s} - q - 1$ concluimos que el único índice mayor a i en I_{i+q} es $i + q$:

$$\{i' \in I_{i+q} : i' \geq i\} = \{i + q\} \quad (\text{A.4})$$

Ahora, sean LI_i el lado izquierdo de la restricción A.1 asociado al índice i , y $\alpha_i = \{s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} : s \equiv i \pmod{v(d)}\}$. Dado que $I_i \subseteq \alpha_i$, entonces las restricciones A.1 implican:

$$L_i \leq LI_i = 1 \quad \forall i \in \{0, \dots, v(d) - 1\} \quad (\text{A.5})$$

Sea p el menor índice tal que $x_p^* = 1$ y i^* el menor índice tal que $x_p^* \in L_i$. Dado que A.4 y $x_p^* = 1$ entonces $L_{i^*} = 1$. De manera análoga, por A.3 y A.5, $L_k = 1$ para todo $k \geq i^*$. En particular,

$$L_k = 1 \quad \forall k \in \{i^*, \dots, i^* + v(d) - 1\}$$

Por la definición de p , tenemos que $x_{p'}^* = 0$ para todo $p' < p$. Esto implica que en cada L_k , tal que $i^* < k < i^* + v(d)$, solamente las variables las variables con índices mayores a p pueden tomar el valor 1, pero a causa de A.4, algunas de estas son $\{x_{p+1}^*, \dots, x_{p+v(d)-1}^*\}$. Por lo tanto, tenemos al menos $v(d)$ variables consecutivos tomando el valor 1.

Ahora, si consideramos la unión de los conjuntos $\{s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} : s \equiv i \mod v(d)\}$ para $i \in \{0, \dots, v(d) - 1\}$, dado que sus elementos son disjuntos tenemos:

$$\bigcup_{i=0}^{v(d)-1} \{s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} : s \equiv i \mod v(d)\},$$

lo que es equivalente a

$$\{s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} : s \equiv i \mod v(d), i \in \{0, \dots, v(d) - 1\}\}.$$

Y de esta manera,

$$\bigcup_{i=0}^{v(d)-1} \{s \in \{0, \dots, \bar{s} - 1\} : s \equiv i \mod v(d)\} = \{0, \dots, \bar{s} - 1\}$$

Implicando que existen a lo sumo $v(d)$ variables tomando el valor 1:

$$\sum_{i \in \{0, \dots, v(d)-1\}} \sum_{\substack{s \in \{0, \dots, \bar{s}-1\}: \\ s \equiv i \mod v(d)}} x_s^* \leq v(d)$$

De esta manera, tenemos que existen exactamente $v(d)$ variables consecutivas tomando el valor 1.

□

Apéndice B

RESULTADOS DETALLADOS

En esta sección se muestran los resultados completos obtenidos de los experimentos computacionales realizados para evaluar la contribución de las familias de desigualdades identificadas en un entorno de planos de corte. La Tabla B.1 presenta, para cada instancia, el efecto de agregar de manera dinámica las diferentes familias de desigualdades (telescopicas, fortalecidas, extendidas o todas ellas) en un procedimiento de ramificación y acotación. Para cada topología y número de slots disponibles $\bar{s}$, se reporta el número de cortes generados y el número promedio de nodos explorados en el árbol de enumeración. De esta forma, puede observarse en detalle cómo la inclusión de cortes influye en la reducción del número de nodos.

Topología	D	$\bar{s}$	$\max_{i \in D} v(i)$	R&A Nodos	Telescópicas		Fortalecidas		Extendidas		Todas	
					Cortes	Nodos	Cortes	Nodos	Cortes	Nodos	Cortes	Nodos
06n-9m-n6s9	6	1000	900	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06n-9m-n6s9	7	10	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06n-9m-n6s9	7	100	90	2	0	2	0	2	0	2	0	2
06n-9m-n6s9	9	50	45	2	0	2	0	2	0	2	0	2
06n-9m-n6s9	11	10	9	5	13	14	4	4	2	4	27	15
06n-9m-n6s9	12	100	90	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	12	500	450	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	13	10	9	-	10	-	6	-	0	-	21	-
06n-9m-n6s9	13	500	450	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	13	1000	900	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	14	50	45	1	0	1	0	1	0	1	0	1
06n-9m-n6s9	15	500	450	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	16	1000	500	1	0	1	0	1	0	1	0	1
06n-9m-n6s9	18	50	45	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	18	100	90	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	20	50	25	252	501	400	633	616	326	116	990	439
06n-9m-n6s9	20	100	50	43	159	112	140	81	320	48	122	26
06n-9m-n6s9	20	1000	900	-	0	-	0	-	0	-	0	-
06n-9m-n6s9	22	10	3	24	14	11	14	6	5	10	34	10
06n-9m-n6s9	22	10	5	64	185	439	39	24	31	16	322	214
06n-9m-n6s9	22	100	50	4	1	4	1	4	0	4	2	4
06n-9m-n6s9	23	10	5	-	1610	-	1796	-	890	-	1402	-
06n-9m-n6s9	23	500	250	37	11	7	10	7	22	3	35	7
06n-9m-n6s9	24	100	30	37	64	39	14	11	69	31	118	29
06n-9m-n6s9	25	50	25	63	240	180	101	47	126	69	338	68
06n-9m-n6s9	27	500	150	1	0	1	0	1	0	1	0	1
06n-9m-n6s9	31	500	250	-	3061	-	2252	-	2932	-	3051	-
06n-9m-n6s9	34	1000	500	29	382	139	124	40	942	153	551	72
06n-9m-n6s9	36	50	15	38	67	21	40	22	55	19	204	22
06n-9m-n6s9	37	10	5	-	741	-	1365	-	960	-	947	-
06n-9m-n6s9	37	1000	300	29	75	35	51	24	67	30	340	69

06n-9m-n6s9	39	10	3	-	383	-	426	-	204	-	323	-
06n-9m-n6s9	39	500	250	-	3781	-	2870	-	1489	-	2611	-
06n-9m-n6s9	40	500	150	163	828	268	456	-	373	51	387	40
06n-9m-n6s9	41	500	150	751	1949	-	936	-	1543	-	1182	-
06n-9m-n6s9	42	100	30	12	6	7	42	13	17	13	44	9
06n-9m-n6s9	42	100	50	-	2004	-	1396	-	2360	-	2127	-
06n-9m-n6s9	44	1000	300	566	683	-	211	98	751	-	707	-
06n-9m-n6s9	45	1000	300	18	331	67	41	24	105	60	597	61
06n-9m-n6s9	46	1000	500	-	2886	-	1959	-	3348	-	2461	-
06n-9m-n6s9	47	50	25	-	2536	-	1576	-	3028	-	2302	-
06n-9m-n6s9	52	50	15	-	1041	-	463	-	1011	-	1011	-
06n-9m-n6s9	58	50	15	-	933	-	235	-	571	-	1517	-
06n-9m-n6s9	66	10	3	-	543	-	433	-	841	-	466	-
06n-9m-n6s9	68	100	30	-	1966	-	409	-	1251	-	2168	-
14n-46m-Telekom	7	100	90	3	1	2	0	3	1	3	2	2
14n-46m-Telekom	10	500	450	25	38	23	91	52	28	12	178	72
14n-46m-Telekom	11	50	45	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14n-46m-Telekom	11	500	450	4	4	4	4	5	2	5	8	4
14n-46m-Telekom	12	10	9	14	55	146	187	251	44	29	154	183
14n-46m-Telekom	13	100	90	39	16	27	19	29	14	51	72	32
14n-46m-Telekom	14	50	45	4	3	4	3	4	3	4	7	4
14n-46m-Telekom	14	1000	900	-	4	-	8	-	0	-	12	-
14n-46m-Telekom	16	1000	500	67	31	8	27	13	76	15	90	9
14n-46m-Telekom	16	1000	900	-	0	-	0	-	0	-	0	-
14n-46m-Telekom	18	10	5	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14n-46m-Telekom	19	50	45	-	0	-	0	-	0	-	0	-
14n-46m-Telekom	20	500	250	5	24	13	23	9	21	5	69	13
14n-46m-Telekom	20	500	450	29	39	15	54	19	76	21	135	17
14n-46m-Telekom	20	1000	900	-	10	-	24	-	15	-	62	-
14n-46m-Telekom	21	10	9	-	0	-	0	-	0	-	0	-
14n-46m-Telekom	21	100	50	825	612	841	873	1023	691	507	1594	891
14n-46m-Telekom	23	100	90	-	0	-	0	-	0	-	0	-
14n-46m-Telekom	23	500	150	1	0	1	0	1	0	1	0	1

14n-46m-Telekom	25	50	25	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14n-46m-Telekom	27	10	9	-	0	-	0	-	0	-	0	-
14n-46m-Telekom	28	100	50	134	58	28	427	189	86	16	215	20
14n-46m-Telekom	30	10	5	-	1658	-	1776	-	1259	-	1554	-
14n-46m-Telekom	33	500	250	3859	2022	-	1723	-	2306	-	2190	-
14n-46m-Telekom	35	10	5	-	1648	-	1781	-	1167	-	1580	-
14n-46m-Telekom	35	100	30	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14n-46m-Telekom	35	100	50	-	1300	-	1259	-	1416	-	1528	-
14n-46m-Telekom	36	50	25	72	1013	679	771	289	1068	663	1783	-
14n-46m-Telekom	36	1000	300	51	158	47	93	37	207	31	259	18
14n-46m-Telekom	36	1000	500	-	1896	-	1067	-	1623	-	1766	-
14n-46m-Telekom	37	50	15	31	137	40	158	145	444	138	274	29
14n-46m-Telekom	38	500	150	72	189	81	23	19	77	31	106	14
14n-46m-Telekom	39	1000	500	10238	1757	-	1337	-	1811	-	1861	-
14n-46m-Telekom	41	1000	300	12	89	28	65	30	73	35	154	22
14n-46m-Telekom	42	10	3	4199	340	-	336	-	282	-	254	-
14n-46m-Telekom	43	100	30	49	223	98	123	89	108	19	68	22
14n-46m-Telekom	45	500	250	15204	1329	-	1185	-	2887	-	1320	-
14n-46m-Telekom	55	50	15	12472	924	-	233	-	578	-	612	-
14n-46m-Telekom	60	10	3	-	374	-	439	-	321	-	305	-
14n-46m-Telekom	61	50	15	3608	616	-	242	-	806	-	612	-
14n-46m-Telekom	61	500	150	687	546	-	237	-	402	-	350	-
14n-46m-Telekom	62	100	30	-	967	-	303	-	858	-	1030	-
14n-46m-Telekom	63	10	3	-	199	-	166	-	122	-	201	-
14n-46m-Telekom	69	1000	300	-	807	-	335	-	480	-	1658	-
21n-70m-Telefonica	7	1000	900	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21n-70m-Telefonica	8	100	90	2	0	2	0	2	0	2	0	2
21n-70m-Telefonica	9	10	9	6	2	3	1	4	1	6	3	3
21n-70m-Telefonica	11	50	45	2	0	2	0	2	0	2	0	2
21n-70m-Telefonica	11	100	90	3	3	4	4	3	0	3	6	3
21n-70m-Telefonica	12	500	450	2	0	2	0	2	0	2	0	2
21n-70m-Telefonica	13	500	450	4	4	4	4	4	4	6	40	7
21n-70m-Telefonica	14	10	9	5	68	80	99	148	0	5	112	64

21n-70m-Telefonica	14	50	25	8	19	34	13	8	2	8	26	13
21n-70m-Telefonica	14	1000	900	2	0	2	0	2	0	2	0	2
21n-70m-Telefonica	15	10	5	7	4	6	6	6	0	7	11	6
21n-70m-Telefonica	15	10	9	6	5	9	8	8	1	6	11	5
21n-70m-Telefonica	15	500	450	1	0	1	0	1	0	1	0	1
21n-70m-Telefonica	17	100	90	-	90	-	90	-	57	-	200	-
21n-70m-Telefonica	18	1000	900	4	7	3	5	3	7	3	15	3
21n-70m-Telefonica	20	50	45	-	190	-	299	-	285	-	657	-
21n-70m-Telefonica	20	500	250	11	17	7	30	12	54	13	56	7
21n-70m-Telefonica	23	100	50	1	0	1	0	1	0	1	0	1
21n-70m-Telefonica	26	50	45	-	3997	-	3606	-	3554	-	4297	-
21n-70m-Telefonica	26	1000	500	11	22	11	84	32	64	15	48	8
21n-70m-Telefonica	27	500	250	13	19	11	120	48	104	37	80	12
21n-70m-Telefonica	30	100	30	2	0	2	0	2	0	2	0	2
21n-70m-Telefonica	30	100	50	8	7	6	23	12	41	20	53	16
21n-70m-Telefonica	31	1000	500	3222	1428	-	1497	-	1775	-	1685	-
21n-70m-Telefonica	32	10	5	326	1285	-	1536	-	1033	-	675	255
21n-70m-Telefonica	32	50	15	1	0	1	0	1	0	1	0	1
21n-70m-Telefonica	32	100	50	2959	1987	-	1684	-	2315	-	2108	-
21n-70m-Telefonica	33	10	3	5	11	12	19	14	5	3	23	21
21n-70m-Telefonica	33	1000	500	187	936	490	92	30	681	227	281	36
21n-70m-Telefonica	34	500	150	30	37	29	30	37	115	49	191	42
21n-70m-Telefonica	35	50	25	-	1347	-	1194	-	1621	-	1306	-
21n-70m-Telefonica	37	10	5	17596	731	-	890	-	818	-	795	-
21n-70m-Telefonica	37	50	15	35	16	7	28	23	39	29	30	6
21n-70m-Telefonica	40	500	150	4	9	5	6	5	29	9	17	5
21n-70m-Telefonica	43	100	30	33	60	12	219	158	551	-	464	-
21n-70m-Telefonica	44	1000	300	275	56	18	40	12	144	27	496	-
21n-70m-Telefonica	46	50	15	2665	985	-	434	-	716	217	823	-
21n-70m-Telefonica	46	50	25	-	1528	-	1240	-	2428	-	1655	-
21n-70m-Telefonica	53	1000	300	55	92	38	237	124	268	41	215	21
21n-70m-Telefonica	57	10	3	-	159	-	183	-	111	-	155	-
21n-70m-Telefonica	60	1000	300	822	249	-	125	-	265	-	359	-

21n-70m-Telefonica	77	500	150	-	741	-	161	-	750	-	839	-
21n-70m-Telefonica	82	10	3	-	151	-	198	-	223	-	239	-
21n-70m-Telefonica	86	100	30	-	811	-	121	-	1397	-	647	-
28n-82m-EURO28	6	1000	900	2	0	2	0	2	0	2	0	2
28n-82m-EURO28	7	500	450	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28n-82m-EURO28	8	10	9	5	5	5	8	4	11	4	15	4
28n-82m-EURO28	9	50	45	5	2	5	5	5	10	4	7	4
28n-82m-EURO28	9	100	90	3	1	3	0	3	0	3	1	3
28n-82m-EURO28	9	1000	900	4	6	4	4	4	6	4	16	4
28n-82m-EURO28	10	500	450	2	0	2	0	2	0	2	0	2
28n-82m-EURO28	11	10	5	4	4	4	4	4	1	3	9	4
28n-82m-EURO28	11	100	90	3	2	3	3	3	3	3	8	3
28n-82m-EURO28	14	50	45	-	0	-	0	-	0	-	0	-
28n-82m-EURO28	15	50	45	-	0	-	0	-	0	-	0	-
28n-82m-EURO28	17	10	5	8	63	96	17	13	6	7	48	22
28n-82m-EURO28	18	10	9	-	45	-	67	-	33	-	109	-
28n-82m-EURO28	19	500	250	15	49	23	73	20	61	12	423	138
28n-82m-EURO28	20	100	50	11	38	23	39	17	19	6	82	17
28n-82m-EURO28	21	50	25	23	33	19	29	15	27	16	52	20
28n-82m-EURO28	21	1000	500	8	9	7	9	9	5	10	18	7
28n-82m-EURO28	22	10	9	-	26	-	46	-	14	-	76	-
28n-82m-EURO28	22	1000	500	113	90	48	95	38	107	32	617	167
28n-82m-EURO28	23	100	90	-	0	-	0	-	0	-	0	-
28n-82m-EURO28	24	500	450	-	0	-	0	-	0	-	0	-
28n-82m-EURO28	24	1000	900	-	0	-	0	-	0	-	0	-
28n-82m-EURO28	25	1000	300	1	0	1	0	1	0	1	0	1
28n-82m-EURO28	25	1000	500	-	3141	-	2626	-	2824	-	2970	-
28n-82m-EURO28	27	10	3	7	11	16	18	12	18	7	45	13
28n-82m-EURO28	27	100	30	26	16	12	25	16	92	34	42	11
28n-82m-EURO28	28	50	15	8	13	6	15	18	38	5	45	6
28n-82m-EURO28	28	100	30	1	0	1	0	1	0	1	0	1
28n-82m-EURO28	30	10	5	-	1545	-	2430	-	1720	-	1970	-
28n-82m-EURO28	31	10	3	33	41	136	38	29	91	66	79	35

28n-82m-EURO28	31	500	250	740	605	267	311	113	1503	631	2328	-
28n-82m-EURO28	32	50	25	-	1747	-	1431	-	2137	-	1500	-
28n-82m-EURO28	32	100	50	2961	742	268	504	138	1325	277	1601	-
28n-82m-EURO28	32	1000	300	24	202	66	98	57	148	35	385	37
28n-82m-EURO28	36	100	50	-	1412	-	1695	-	1124	-	2082	-
28n-82m-EURO28	36	500	150	9	8	5	21	11	34	11	30	5
28n-82m-EURO28	39	10	3	66	476	-	405	244	142	105	442	-
28n-82m-EURO28	40	50	15	33	107	85	90	45	96	54	240	50
28n-82m-EURO28	44	50	25	-	1157	-	1172	-	1824	-	1474	-
28n-82m-EURO28	46	50	15	780	342	81	738	-	1045	-	850	-
28n-82m-EURO28	46	100	30	73	372	212	361	196	180	54	243	33
28n-82m-EURO28	54	500	150	-	519	-	255	-	604	-	726	-
28n-82m-EURO28	59	500	150	-	689	-	282	-	548	-	638	-
28n-82m-EURO28	59	1000	300	-	896	-	335	-	988	-	1225	-
43n-176m-EuroLarge	9	10	9	4	0	4	0	4	0	4	0	4
43n-176m-EuroLarge	12	500	450	3	2	3	2	3	4	3	8	3
43n-176m-EuroLarge	13	50	45	3	0	3	0	3	0	3	0	3
43n-176m-EuroLarge	14	1000	900	4	4	5	4	4	2	5	9	5
43n-176m-EuroLarge	17	100	90	5	6	4	6	4	8	4	20	4
43n-176m-EuroLarge	18	50	45	3	2	3	2	3	0	3	4	3
43n-176m-EuroLarge	18	1000	500	1	0	1	0	1	0	1	0	1
43n-176m-EuroLarge	20	10	9	-	15	-	21	-	11	-	41	-
43n-176m-EuroLarge	20	100	90	-	3	-	1	-	0	-	6	-
43n-176m-EuroLarge	20	500	450	1	0	1	0	1	0	1	0	1
43n-176m-EuroLarge	21	10	9	3	2	3	4	3	0	3	6	3
43n-176m-EuroLarge	21	500	450	9	6	7	9	8	7	7	19	7
43n-176m-EuroLarge	23	50	25	17	25	24	52	27	104	105	35	11
43n-176m-EuroLarge	24	10	5	914	565	2000	851	1757	425	1571	560	895
43n-176m-EuroLarge	27	10	5	3	1	2	1	2	2	2	2	2
43n-176m-EuroLarge	27	1000	900	1	0	1	0	1	0	1	0	1
43n-176m-EuroLarge	30	500	250	18	22	11	32	13	202	66	166	48
43n-176m-EuroLarge	30	1000	500	10	61	18	35	20	96	13	143	29
43n-176m-EuroLarge	30	1000	900	-	11	-	20	-	18	-	34	-

43n-176m-EuroLarge	32	10	3	15	6	21	69	63	6	18	21	28
43n-176m-EuroLarge	32	100	50	18	106	83	105	42	105	30	304	73
43n-176m-EuroLarge	33	50	45	6	42	13	113	51	66	18	187	28
43n-176m-EuroLarge	33	500	150	1	0	1	0	1	0	1	0	1
43n-176m-EuroLarge	34	500	250	4	8	5	5	4	7	4	17	4
43n-176m-EuroLarge	35	100	90	-	658	-	824	-	986	-	790	-
43n-176m-EuroLarge	42	50	15	319	39	27	74	61	153	51	239	34
43n-176m-EuroLarge	43	100	50	718	595	-	224	103	957	-	778	-
43n-176m-EuroLarge	43	500	250	107	194	66	749	-	565	69	432	47
43n-176m-EuroLarge	44	1000	500	115	195	77	430	173	230	51	386	62
43n-176m-EuroLarge	46	100	50	440	138	100	108	40	200	45	331	-
43n-176m-EuroLarge	47	50	15	23	80	34	37	21	27	20	88	20
43n-176m-EuroLarge	47	100	30	4	2	3	4	6	3	4	4	3
43n-176m-EuroLarge	48	50	25	3059	254	92	328	-	389	-	492	-
43n-176m-EuroLarge	51	1000	300	605	210	-	75	59	149	-	258	-
43n-176m-EuroLarge	55	10	5	-	279	-	350	-	280	-	308	-
43n-176m-EuroLarge	56	50	25	-	378	-	399	-	797	-	648	-
43n-176m-EuroLarge	58	1000	300	676	142	-	113	-	194	-	176	-
43n-176m-EuroLarge	63	10	3	-	183	-	185	-	178	-	213	-
43n-176m-EuroLarge	68	10	3	-	177	-	240	-	109	-	517	-
43n-176m-EuroLarge	71	100	30	340	156	-	53	-	84	-	247	-
43n-176m-EuroLarge	71	500	150	82	267	-	151	-	382	-	559	-
43n-176m-EuroLarge	73	500	150	219	101	-	49	-	88	-	180	-
43n-176m-EuroLarge	74	50	15	-	424	-	174	-	469	-	603	-
43n-176m-EuroLarge	79	100	30	-	232	-	128	-	310	-	468	-
43n-176m-EuroLarge	85	1000	300	100	292	-	414	-	890	-	1669	-

Tab. B.1: Número de cortes y número de nodos en el árbol de enumeración cuando se agregan dinámicamente cortes de cada familia a cada instancia. Cada fila representa una instancia individual.

Por otro lado, la Tabla B.2 muestra en detalle la mejora obtenida en la cota inferior de la relajación lineal al agregar las familias de cortes en el nodo raíz del procedimiento de enumeración. Esto se aplica sobre cada una de las instancias construidas, mostrando tanto la cota original de la relajación lineal como la nueva cota (“Mejor cota”) luego de agregar los cortes, así como la diferencia absoluta y relativa entre ambas. Estos resultados permiten verificar en qué medida las desigualdades propuestas refuerzan la formulación y mejoran la cota inferior, lo cual puede resultar favorable a la hora de reducir los tiempos computacionales y el tamaño del árbol de búsqueda.

Topología	$\bar{s}$	D	Max. Volumen	Relajación lineal	Mejor cota	Diferencia	Diferencia porcentaje	Cortes agregados
06n-9m-n6s9	10	85	10	135.1000	135.4416	0.3416	0.25 %	566
06n-9m-n6s9	15	109	15	173.3002	177.5124	4.2122	2.43 %	850
06n-9m-n6s9	20	123	19	189.4500	203.8601	14.4101	7.61 %	3762
06n-9m-n6s9	30	95	29	153.6333	165.8301	12.1968	7.94 %	2225
06n-9m-n6s9	40	80	38	128.0500	134.9584	6.9084	5.40 %	1728
06n-9m-n6s9	60	125	57	193.3670	207.2837	13.9167	7.20 %	4037
06n-9m-n6s9	80	116	76	189.0628	197.2538	8.191	4.33 %	4079
06n-9m-n6s9	100	83	95	125.5400	131.5114	5.9714	4.76 %	2052
06n-9m-n6s9	150	123	143	196.3600	210.4883	14.1283	7.20 %	4930
06n-9m-n6s9	200	101	190	149.9200	157.5384	7.6184	5.08 %	2643
06n-9m-n6s9	300	94	285	145.4633	152.8232	7.3599	5.06 %	2986
06n-9m-n6s9	400	103	380	156.3900	166.6401	10.2501	6.55 %	3027
06n-9m-n6s9	600	89	570	136.5800	143.6838	7.1038	5.20 %	2660
06n-9m-n6s9	800	94	760	139.2700	147.3987	8.1287	5.84 %	2616
06n-9m-n6s9	1000	111	950	172.6150	184.3282	11.7132	6.79 %	3686
11n-52m-COST239	10	95	10	154.2000	156.7242	2.5242	1.64 %	311
11n-52m-COST239	15	159	15	264.6669	264.7666	0.0997	0.04 %	667
11n-52m-COST239	20	183	19	298.0004	313.8351	15.8347	5.31 %	2554
11n-52m-COST239	30	145	29	235.8333	247.2780	11.4447	4.85 %	2239
11n-52m-COST239	60	122	57	208.2502	213.3898	5.1396	2.47 %	2407
11n-52m-COST239	100	99	95	150.0000	157.9682	7.9682	5.31 %	1220
11n-52m-COST239	150	156	143	248.4336	255.3421	6.9085	2.78 %	4311
11n-52m-COST239	200	162	190	260.0002	265.1454	5.1452	1.98 %	3546
11n-52m-COST239	300	99	285	165.7667	169.8564	4.0897	2.47 %	1980
11n-52m-COST239	400	110	380	184.2926	188.6245	4.3319	2.35 %	2062
11n-52m-COST239	600	169	570	284.8571	292.1045	7.2474	2.54 %	5133
11n-52m-COST239	1000	191	950	302.5234	310.4047	7.8813	2.61 %	5006
16n-46m-EURO	10	108	10	289.8004	291.0000	1.1996	0.41 %	919
16n-46m-EURO	15	102	15	283.5000	286.5461	3.0461	1.07 %	737
16n-46m-EURO	20	115	19	300.4000	321.6405	21.2405	7.07 %	2677
16n-46m-EURO	30	82	29	241.8333	255.5338	13.7005	5.67 %	1256
16n-46m-EURO	40	93	38	268.5500	279.0369	10.4869	3.91 %	2019
16n-46m-EURO	60	102	57	283.5500	296.2622	12.7122	4.48 %	2389
16n-46m-EURO	80	81	76	207.9000	215.3413	7.4413	3.58 %	1580
16n-46m-EURO	100	104	95	295.7400	309.5449	13.8049	4.67 %	2297
16n-46m-EURO	150	113	143	317.0867	327.5814	10.4947	3.31 %	3066
16n-46m-EURO	200	113	190	328.6283	338.0745	9.4462	2.87 %	2994

16n-46m-EURO	300	102	285	283.6500	293.9324	10.2824	3.63 %	2751
16n-46m-EURO	400	101	380	274.1175	285.3124	11.1949	4.08 %	2450
16n-46m-EURO	600	91	570	246.8167	253.4527	6.6360	2.69 %	2214
16n-46m-EURO	800	95	760	276.9088	288.7900	11.8812	4.29 %	2219
16n-46m-EURO	1000	75	950	233.1200	239.4775	6.3575	2.73 %	1606
20n-62m-ARPANet	10	62	10	194.0000	194.5000	0.5000	0.26 %	338
20n-62m-ARPANet	15	116	15	343.5672	344.4332	0.866	0.25 %	886
20n-62m-ARPANet	20	85	19	241.1000	261.1339	20.0339	8.31 %	1058
20n-62m-ARPANet	30	110	29	337.5339	358.6377	21.1038	6.25 %	2407
20n-62m-ARPANet	40	74	38	222.8250	231.7358	8.9108	4.00 %	1223
20n-62m-ARPANet	60	105	57	333.9833	344.6345	10.6512	3.19 %	2739
20n-62m-ARPANet	80	102	76	275.9625	285.1333	9.1708	3.32 %	2273
20n-62m-ARPANet	100	80	95	234.0300	243.9796	9.9496	4.25 %	1431
20n-62m-ARPANet	150	112	143	322.2738	332.4092	10.1354	3.14 %	2704
20n-62m-ARPANet	200	105	190	303.5800	323.4478	19.8678	6.54 %	2409
20n-62m-ARPANet	300	109	285	320.0733	333.0716	12.9983	4.06 %	2743
20n-62m-ARPANet	400	113	380	344.3275	358.1364	13.8089	4.01 %	2718
20n-62m-ARPANet	600	127	570	374.4057	395.0144	20.6087	5.50 %	3604
20n-62m-ARPANet	800	79	760	229.7438	239.5701	9.8263	4.28 %	1540
20n-62m-ARPANet	1000	71	950	208.9650	216.7583	7.7933	3.73 %	1338
21n-70m-Telefonica	10	66	10	173.3000	181.2500	7.9500	4.59 %	323
21n-70m-Telefonica	15	79	15	226.2666	227.3667	1.1001	0.49 %	323
21n-70m-Telefonica	20	127	19	376.7006	392.7283	16.0277	4.25 %	2687
21n-70m-Telefonica	30	104	29	305.7338	317.6461	11.9123	3.90 %	2026
21n-70m-Telefonica	40	125	38	345.7500	355.2952	9.5452	2.76 %	2917
21n-70m-Telefonica	60	109	57	292.0333	304.8260	12.7927	4.38 %	1998
21n-70m-Telefonica	80	132	76	362.9755	372.3128	9.3373	2.57 %	2974
21n-70m-Telefonica	100	129	95	360.1206	371.2073	11.0867	3.08 %	2838
21n-70m-Telefonica	150	82	143	228.2067	234.9690	6.7623	2.96 %	1510
21n-70m-Telefonica	200	116	190	370.6506	381.7979	11.1473	3.01 %	2606
21n-70m-Telefonica	300	133	285	394.6206	404.8303	10.2097	2.59 %	4074
21n-70m-Telefonica	400	125	380	350.7330	364.1335	13.4005	3.82 %	2733
21n-70m-Telefonica	600	74	570	200.0000	210.7429	10.7429	5.37 %	1346
21n-70m-Telefonica	800	120	760	338.7342	352.3696	13.6354	4.03 %	2625
21n-70m-Telefonica	1000	130	950	369.5186	381.4543	11.9357	3.23 %	2991
24n-86m-UBN24	10	94	10	297.8500	297.8500	0.0000	0.00 %	617
24n-86m-UBN24	15	135	15	430.3674	431.4666	1.0992	0.26 %	813
24n-86m-UBN24	20	142	19	426.1507	438.4250	12.2743	2.88 %	1316
24n-86m-UBN24	30	129	29	393.5339	405.1811	11.6472	2.96 %	1694
24n-86m-UBN24	40	131	38	391.9756	400.8777	8.9021	2.27 %	1194
24n-86m-UBN24	60	90	57	283.3333	287.5900	4.2567	1.50 %	1563
24n-86m-UBN24	80	122	76	377.7255	385.7757	8.0502	2.13 %	2196
24n-86m-UBN24	100	89	95	260.3700	267.1344	6.7644	2.60 %	1381
24n-86m-UBN24	150	94	143	324.2400	330.5134	6.2734	1.93 %	1665
24n-86m-UBN24	200	120	190	367.9855	378.3601	10.3746	2.82 %	2481
24n-86m-UBN24	300	109	285	321.1533	328.5213	7.3680	2.29 %	2342
24n-86m-UBN24	400	121	380	393.5331	396.6618	3.1287	0.80 %	1726

24n-86m-UBN24	600	125	570	396.6490	400.5020	3.8530	0.97 %	2121
24n-86m-UBN24	800	140	760	401.8456	405.4751	3.6295	0.90 %	2180
24n-86m-UBN24	1000	134	950	450.2928	451.4466	1.1538	0.26 %	1594
28n-82m-EURO28	10	74	10	276.7000	276.7000	0.0000	0.00 %	489
28n-82m-EURO28	15	96	15	389.2000	395.3307	6.1307	1.58 %	573
28n-82m-EURO28	20	76	19	280.2000	290.1743	9.9743	3.56 %	1047
28n-82m-EURO28	30	103	29	393.6006	423.1967	29.5961	7.52 %	2136
28n-82m-EURO28	40	95	38	369.6750	380.7944	11.1194	3.01 %	1885
28n-82m-EURO28	60	78	57	299.2667	310.6697	11.4030	3.81 %	1418
28n-82m-EURO28	80	84	76	305.6625	316.2550	10.5925	3.47 %	1631
28n-82m-EURO28	100	97	95	366.9200	381.2575	14.3375	3.91 %	1893
28n-82m-EURO28	150	77	143	285.3533	298.4796	13.1263	4.60 %	1417
28n-82m-EURO28	200	85	190	315.8600	333.1525	17.2925	5.47 %	1613
28n-82m-EURO28	300	87	285	329.9767	340.6931	10.7164	3.25 %	2072
28n-82m-EURO28	400	93	380	349.4100	363.1867	13.7767	3.94 %	1813
28n-82m-EURO28	600	98	570	375.0050	386.0376	11.0326	2.94 %	2257
28n-82m-EURO28	800	69	760	253.6825	266.0285	12.3460	4.87 %	1145
28n-82m-EURO28	1000	86	950	319.2900	331.2492	11.9592	3.75 %	1595
30n-112m-Spain	10	90	10	301.6000	302.3000	0.7000	0.23 %	514
30n-112m-Spain	15	128	15	425.3339	427.7233	2.3894	0.56 %	559
30n-112m-Spain	20	147	19	506.5509	511.6817	5.1308	1.01 %	1134
30n-112m-Spain	30	88	29	299.2000	307.6621	8.4621	2.83 %	1320
30n-112m-Spain	40	96	38	332.1000	337.5878	5.4878	1.65 %	1657
30n-112m-Spain	60	119	57	390.4836	395.5849	5.1013	1.31 %	1275
30n-112m-Spain	80	138	76	443.8381	446.3248	2.4867	0.56 %	1475
30n-112m-Spain	100	145	95	502.2309	504.3395	2.1086	0.42 %	1489
30n-112m-Spain	150	143	143	481.4651	483.1519	1.6868	0.35 %	1625
30n-112m-Spain	200	86	190	308.7250	310.9658	2.2408	0.73 %	1346
30n-112m-Spain	300	117	285	433.9903	434.5600	0.5697	0.13 %	1239
30n-112m-Spain	400	127	380	420.4379	422.9081	2.4702	0.59 %	1109
30n-112m-Spain	600	138	570	466.5274	470.2610	3.7336	0.80 %	1658
30n-112m-Spain	800	93	760	281.1725	285.3802	4.2077	1.50 %	1523
30n-112m-Spain	1000	86	950	309.3340	312.8812	3.5472	1.15 %	1568

Tab. B.2: Mejora en la función objetivo de la relajación lineal cuando se agregan cortes de cada familia dinámicamente (es decir, en el nodo raíz del árbol de enumeración).

