



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**Transporte de material particulado por eventos extremos en
la atmósfera nocturna y los océanos**

Tesis presentada para optar al título de Doctor
en la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

Lic. Christian De Jesús Reartes

Director: Dr. Pablo Daniel Mininni
Consejero de Estudios: Dr. Pablo Cobelli

Lugar de trabajo: Instituto de Física Interdisciplinaria y Aplicada

Buenos Aires, Argentina - 19 de Mayo del 2025

*A quienes me enseñaron
la ternura de la vida,
porque la vida sin ternura
no vale gran cosa.*

Transporte de material particulado por eventos extremos en la atmósfera nocturna y los océanos

Resumen

En esta tesis se estudia el transporte de partículas en flujos turbulentos establemente estratificados (SST), centrándose tanto en la dinámica como en el agrupamiento preferencial y en el efecto de eventos extremos sobre estos procesos. La turbulencia es un fenómeno común en flujos geofísicos como la atmósfera y los océanos, donde la estratificación reduce el transporte vertical y da lugar a anisotropías en el flujo. La interacción entre la turbulencia y la estratificación permite el desarrollo de ondas internas de gravedad, que modifican la dinámica del transporte de partículas. Aunque la turbulencia isotropa y homogénea (HIT) ha sido ampliamente estudiada, en flujos estratificados la interacción entre partículas y turbulencia es aún poco comprendida, especialmente en presencia de eventos extremos que provocan comportamientos fuera de lo común en el flujo y en la distribución de partículas.

Esta investigación aborda la dinámica de partículas inerciales livianas neutralmente flotantes en SST, considerando escalas pequeñas e intermedias relevantes para la atmósfera nocturna y el océano. Sin embargo, también se estudió el problema de sedimentación de partículas livianas en flujos HIT. En estos sistemas, las partículas bajo ciertas condiciones tienden a formar columnas de sedimentación, estructuras que guían y concentran el flujo de caída de las partículas. Estas columnas afectan el comportamiento del transporte, reduciendo el mezclado lateral y potenciando un transporte vertical ordenado, lo que puede modificar significativamente los patrones de dispersión en el flujo.

Para el análisis numérico de la dinámica de partículas en SST y HIT, se emplearon simulaciones numéricas directas (DNS) basadas en las ecuaciones de Boussinesq y Navier-Stokes respectivamente. En el primer caso, estas ecuaciones permiten modelar flujos SST y capturar la interacción entre la turbulencia y la fuerza de empuje, que estabiliza el sistema y facilita la formación de ondas internas de gravedad. A diferencia de HIT, caracterizada por un comportamiento isotrópico en todas las direcciones, la SST presenta anisotropía con velocidades verticales moduladas por las ondas y velocidades horizontales de mayor intensidad, lo que influye en la dinámica de dispersión de partículas. Las simulaciones numéricas incluyeron la inyección de un gran número de partículas inerciales

y Lagrangianas para analizar su transporte tanto en SST como en HIT. En SST, las partículas exhiben patrones de transporte vertical y horizontal diferenciados, donde el transporte horizontal puede estar influido por estructuras como vientos horizontales con cizalladura vertical, que tienden a mejorar la dispersión en esa dirección.

En el contexto de transporte de aerosoles, nutrientes y partículas biológicas, los resultados permiten inferir implicancias para procesos atmosféricos y oceánicos, como la formación de nubes y el transporte de plancton. Además, el trabajo realiza una comparación entre los patrones de acumulación de partículas en SST y en HIT, contribuyendo a un mejor entendimiento de los mecanismos de transporte y mezclado en diferentes regímenes de flujo.

Esta tesis presenta modelos mejorados para el transporte de partículas inerciales en flujos estratificados, abriendo nuevas posibilidades para el modelado de transporte en flujos atmosféricos y oceánicos. Los resultados aportan herramientas para mejorar la parametrización del transporte de material particulado en aplicaciones geofísicas y ambientales, ampliando nuestro conocimiento sobre el papel de la turbulencia y de la estratificación en la dispersión y el agrupamiento de partículas en la atmósfera y en los océanos.

Palabras clave: *Transporte; Flujos geofísicos; Turbulencia; Simulaciones numéricas directas; Eventos extremos.*

Transport of particulate matter by extreme events in the nocturnal atmosphere and oceans

Abstract

This thesis studies the transport of particles in stably stratified turbulent flows (SST), focusing on both their dynamics and preferential clustering, as well as the effect of extreme events on these processes. Turbulence is a common phenomenon in geophysical flows such as the atmosphere and the oceans, where stratification reduces vertical transport and introduces anisotropies in the flow. The interaction between turbulence and stratification enables the development of internal gravity waves, which modify the dynamics of particle transport. Although isotropic and homogeneous turbulence (HIT) has been extensively studied, the interaction between particles and turbulence in stratified flows remains less understood, especially in the presence of extreme events that lead to unusual behaviors in both the flow and the particle distribution.

This research addresses the dynamics of neutrally buoyant, light inertial particles in SST, considering small and intermediate scales relevant to the nocturnal atmosphere and the ocean. However, the sedimentation of light particles in isotropic and homogeneous turbulent flows (HIT) was also studied. In these systems, under certain conditions, particles tend to form sedimentation columns/structures that guide and concentrate the downward flow of particles. These columns impact transport behavior by reducing lateral mixing and enhancing organized vertical transport, which can significantly modify dispersion patterns in the flow.

For the numerical analysis of particle dynamics in SST and HIT, direct numerical simulations (DNS) were performed using the Boussinesq and Navier-Stokes equations, respectively. In the case of SST, these equations enable modeling of stratified flows and capture the interaction between turbulence and the stabilizing buoyancy force, which facilitates the formation of internal gravity waves. Unlike HIT, which is characterized by isotropic behavior in all directions, SST exhibits anisotropy with vertical velocities modulated by waves and more intense horizontal velocities, which influence particle dispersion dynamics. The numerical simulations included injecting a large number of inertial and Lagrangian particles to analyze their transport in both SST and HIT. In SST, particles exhibit distinct vertical and horizontal transport patterns, with horizontal transport potentially influenced by structures such as vertically sheared horizontal winds (VHCVs),

which can enhance dispersion in that direction.

In the context of aerosol, nutrient, and biological particle transport, the results provide insights into atmospheric and oceanic processes such as cloud formation and plankton transport. Additionally, this work compares particle accumulation patterns in SST and HIT, contributing to a better understanding of transport and mixing mechanisms in different flow regimes.

This thesis presents improved models for the transport of inertial particles in stratified flows, opening new possibilities for modeling transport in atmospheric and oceanic flows. The results provide tools to improve the parameterization of particulate matter transport in geophysical and environmental applications, expanding our understanding of the role of turbulence and stratification in particle dispersion and clustering in the atmosphere and the oceans.

Keywords: *Transport; Geophysical flows; turbulence; direct numerical simulations; Extreme events.*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a la Universidad de Buenos Aires, a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, y especialmente al Departamento de Física, por brindarme una formación pública, gratuita y de calidad, tanto durante la carrera de grado como en el doctorado. Tuve la enorme fortuna de formar parte de esta casa como estudiante de doctorado, docente, consejero departamental, entre otros roles. Esta institución funciona gracias al compromiso de quienes la integramos, y me siento profundamente agradecido con todas y todos los que la sostienen día a día.

A mi mamá, Nancy, por su cariño y su apoyo incondicional. A mis hermanas, Milagros, por hacerme reír cada día, y Verónica, junto a Juan Pablo, por bancarme siempre en todos mis proyectos. A mis sobrinas, María, Malena y Martina, por su amor y su ternura.

A todos los investigadores y estudiantes que forman parte del FLiP, en especial a mis compañeros, mis amigos: Flor, Juli, Facu, Sofi, Mauro, Mai y Manu E, con quienes formamos un grupo hermoso que fue un apoyo fundamental en los inicios de mi doctorado. También a quienes se fueron sumando después, en especial Manu N, Berna, Gonzalo, Luchi, Azu, Lucía, Melisa y Gabriel, con quienes terminamos de construir un grupo de trabajo enriquecedor y un ambiente cotidiano excepcional. Les agradezco por todos los buenos momentos compartidos, las charlas de café y las aventuras. Tuve la suerte de atravesar este camino rodeado de jóvenes brillantes y excelentes personas, que sin duda serán grandes profesionales. En particular, quiero agradecer a Flor, mi compañera de oficina, quien hizo de esta etapa algo maravilloso, me acompañó y apoyo siempre, y convirtió mi día a día en algo muy especial. Te agradezco profundamente por esta amistad sin parangón.

A mis amigos Juanma y Sebas, por su amistad, su apoyo y por hacerme reír cuando más lo necesito. A Camila, mi amiga y compañera docente, gracias por compartir conmigo tantas clases, charlas, risas y lomitos. A Yani y Mariel, por su ayuda constante, sus consejos, y por enseñarme que no hay dificultades imposibles de superar. A Lea, por la hermosa amistad que compartimos desde hace tantos años, y por haber sido un apoyo fundamental en esta etapa. A Lis, por su confianza y sus charlas siempre tan claras y divertidas. A todos los amigos que hice durante el doctorado, Muri, Lucas, Ramiro, Tomi y Mati, gracias por acompañarme en el camino. Y a mis amigos del fútbol, en especial a Nati, Pili, Lupe y Tom, por tantos buenos momentos compartidos.

También agradezco a todas las personas con quienes tuve el placer de colaborar e investigar durante el desarrollo de esta tesis, y de quienes aprendí muchísimo a lo largo del camino.

Finalmente, quiero agradecer especialmente a mi director, Pablo Mininni, con quien tuve el privilegio de compartir tantos años de trabajo. De él no solo aprendí a hacer ciencia e investigar con rigor, sino también muchas lecciones sobre la vida. Le agradezco profundamente su generosidad, su confianza, su calidad humana y el impulso constante a superarme. Haber trabajado con él fue, sin dudas, un verdadero privilegio. Me ayudó a crecer tanto en lo profesional como en lo personal. Gracias de corazón.

Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
1. Introducción	1
2. Transporte y mezcla turbulenta	5
2.1. Turbulencia en flujos geofísicos	5
2.2. Ecuaciones dinámicas de los fluidos	7
2.3. Aproximación de Boussinesq	11
2.3.1. Turbulencia establemente estratificada	14
2.3.2. Formación de estructuras y transferencia de energía	16
2.3.3. Inestabilidad vertical	19
2.4. Partículas inerciales en flujos turbulentos	20
2.4.1. Esquemas Euleriano y Lagrangiano	21
2.4.2. Modelo sencillo para la dinámica de partículas inerciales de tamaño finito	21
2.4.3. Ecuación de Maxey-Riley-Gatignol	22
2.4.4. Características generales de las partículas inerciales	23
3. Sedimentación y acumulación de partículas de densidad moderada en turbulencia isótropa y homogénea	25
3.1. El rol de la gravedad en la acumulación preferencial de partículas	26
3.2. Simulaciones Numéricas	27
3.3. Velocidad de sedimentación	32
3.4. El efecto de la variación de la gravedad y la diferencia de masas . .	34
3.4.1. Efecto de la razón de masas	34
3.4.2. Efectos del número de Froude	36
3.5. Formación de cúmulos y teselación de Voronoï	38
3.5.1. Acumulación y columnas de sedimentación	38
3.5.2. Estadística de los volúmenes de Voronoï	42
3.6. Desentrañando los efectos de masa añadida y tamaño del dominio	44
3.6.1. Efecto de variar artificialmente el parámetro de razón de masas	44
3.6.2. Efecto de variar la altura del dominio	46
3.7. Discusión	47
4. Partículas inerciales con flotación neutra en turbulencia establemente	

estratificada	49
4.1. Diferencias entre SST y HIT	49
4.2. Ecuaciones de movimiento	50
4.3. Estudios numéricos	52
4.4. Espectros y modelo de desplazamiento vertical	56
4.5. Dispersión vertical de partículas inerciales	61
4.6. Formación de clústeres y teselación de Voronoï	63
4.7. Conclusiones	67
5. La fuerza de Basset-Boussinesq en flujos estratificados	69
5.1. Cotas para la fuerza de Basset-Boussinesq	70
5.2. Simulaciones numéricas	73
5.3. Validación numérica de la cota	75
5.3.1. Relación entre las fuerzas y el número de Stokes de empuje	75
5.3.2. Efecto de la fuerza de Basset-Boussinesq en la dispersión de	
partículas	75
5.3.3. Influencia de la fuerza de Basset-Boussinesq en la velocidad	
de las partículas	77
5.3.4. Efecto de la fuerza de Basset-Boussinesq en la acumulación	
de partículas	79
5.4. Conclusiones	80
6. Efecto de los eventos extremos en el transporte de material particulado	83
6.1. Simulaciones numéricas	84
6.2. Definición de eventos extremos	85
6.3. Dispersión de pares de partículas	87
6.4. Exponentes de Lyapunov de tiempo finito y estructuras coherentes	
Lagrangianas	90
6.5. Relación de los eventos extremos con la disipación	94
6.6. Conclusiones	95
7. Conclusiones	99
Bibliografía	103

Capítulo 1

Introducción

Los flujos geofísicos, como los que encontramos en la atmósfera y los océanos, están caracterizados por la interacción de múltiples procesos físicos que determinan su dinámica, y por su capacidad de mezclar y transportar material particulado. Entre estos procesos, la turbulencia juega un papel central, caracterizándose por tener una jerarquía de escalas espaciales y temporales en constante interacción (Alexakis y col. 2024; Davidson 2013; Frisch 1995). Para escalas menores a 400 km, los efectos de la rotación en la atmósfera pueden ser despreciados, predominando los efectos gravitatorios (Vallis 2017). En los océanos, lo mismo ocurre en una escala aproximada de 30km, dependiendo de la latitud. En estos casos, la gravedad genera un perfil estable de densidad, donde las perturbaciones inducen ondas internas de gravedad que modulan la turbulencia y generan anisotropía en el transporte y la mezcla de cantidades arrastradas por el fluido (Mahrt 2014; J. Riley y col. 2008). En estos flujos se presentan también vientos o corrientes horizontales cuya intensidad varía significativamente con la altura, clasificándose la turbulencia como establemente estratificada. Ejemplos de este tipo de turbulencia incluyen los océanos y la atmósfera nocturna. Comprender estos mecanismos es fundamental para aplicaciones en meteorología, oceanografía y en el estudio de la dispersión de contaminantes, así como en el transporte de ceniza volcánica o de aerosoles y partículas en la atmósfera y los océanos (J. Taylor 2016; Ichihara y col. 2023; Kovács y col. 2021; Beron-Vera y col. 2020).

El transporte de partículas en flujos turbulentos ha sido un tema de gran interés en la física de fluidos (Fry 1926; Salazar y col. 2009), especialmente debido a su relevancia en flujos geofísicos. En turbulencia isotrópica y homogénea (HIT, por sus siglas en inglés), se han desarrollado modelos robustos para describir la dispersión de partículas (H. Bec J. H. y col. 2014; Bragg y col. 2015; Bourgoin 2015), mientras que en flujos establemente estratificados (SST, por sus siglas en inglés) persisten muchas incógnitas sobre la influencia de la estratificación, la aparición de estructuras coherentes, y el impacto de eventos extremos en la dispersión (Rorai y col. 2015; Feraco y col. 2018; N. E. Sujovolsky y col. 2019a). En particular, la dinámica de partículas en estos regímenes está modulada por ondas internas de gravedad y vientos horizontales con cizalladura vertical, lo que afecta significativamente su dispersión y acumulación (Sozza y col. 2018; Aartrijk y col. 2008a). Monitorear y predecir estos procesos es esencial no solo para la preservación de la vida en la Tierra, sino también para sectores clave como la

industria y la economía global.

Una de las características distintivas de los flujos SST es la presencia de eventos extremos, que corresponden a fluctuaciones intensas y esporádicas en variables como la velocidad, la temperatura y la disipación de energía (Feraco y col. 2018). Estos eventos, que ocurren de manera intermitente, pueden alterar significativamente la dinámica del flujo, promoviendo procesos de mezclado localizado y amplificando el transporte. En flujos geofísicos estratificados, la interacción entre la turbulencia y las ondas internas de gravedad facilita la aparición de estos eventos, generando variaciones abruptas en la velocidad vertical y en la temperatura potencial (Marino y col. 2022). Comprender su impacto es crucial para el estudio del transporte de material particulado, ya que pueden modificar de manera no trivial la dispersión de gases trazadores (Rodríguez Imazio y col. 2023). Desarrollar modelos que incorporen explícitamente estos eventos resulta clave para mejorar las predicciones en sistemas turbulentos complejos (N. E. Sujovolsky y col. 2019b).

Pero dado el gran número de grados de libertad en los flujos geofísicos, la resolución directa de todas sus escalas espaciales es computacionalmente inviable. Por ello, las escalas más pequeñas deben ser modeladas (Bauer y col. 2015). En estas escalas, la competencia entre turbulencia y estratificación determina la evolución de las partículas en el flujo. En este contexto, el estudio de la dinámica desde un enfoque Lagrangiano de la atmósfera y los océanos se vuelve natural para atacar el problema, y representa un desafío abierto y un área de gran interés en la turbulencia geofísica. Su importancia ha crecido en disciplinas como la hidrometeorología, el monitoreo de la calidad del aire y gases de efecto invernadero, la dispersión de cenizas volcánicas y la evaluación del impacto de emisiones nucleares (Rodríguez Imazio y col. 2023; Ichihara y col. 2023; Maalouly y col. 2023).

El enfoque Lagrangiano ya ha sido ampliamente utilizado en el estudio de la turbulencia. Diversos estudios han investigado el transporte de partículas en estos entornos por su relevancia en aplicaciones ambientales e industriales (Thomson y col. 2013; Angriman y col. 2022b). Sin embargo, se ha demostrado que para capturar correctamente la dispersión de partículas, no basta con modelar la turbulencia de forma aislada, sino que es crucial considerar el transporte coherente asociado a estructuras de gran escala (N. Sujovolsky y col. 2017; N. E. Sujovolsky y col. 2019a).

Además, no todas las partículas en un fluido pueden ser descritas como Lagrangianas. Partículas muy pequeñas, con la misma densidad e inercia que los elementos del fluido, son trazadoras y se describen como partículas Lagrangianas. Pero partículas más grandes, con diferente densidad, o con inercia mayor o menor a la del elemento de fluido, son partículas inerciales. En geofísica, ejemplos de este tipo de partículas son las gotas en nubes, las cenizas volcánicas, partículas de hielo en la atmósfera, el plancton, algas, y otros materiales biológico en los océanos.

En HIT, las partículas inerciales exhiben dinámicas complejas debido a su interacción con estructuras turbulentas en múltiples escalas (Obligado y col. 2011; Fiabane y col. 2012). Estas partículas no siguen exactamente la trayectoria del fluido, sino que pueden ser expulsadas de regiones de alta vorticidad y concentrarse en zonas de menor fluctuación turbulenta, un fenómeno conocido como acumu-

lación preferencial (Obligado y col. 2014; Angriman y col. 2022a; Zapata y col. 2024). En ausencia de gravedad, la expulsión centrífuga domina en partículas con baja inercia, desplazándolas fuera de regiones vorticosas y concentrándolas en zonas de baja vorticidad (Maxey y col. 1983). Para partículas con inercia grande, el mecanismo de "sweep-stick" las acumula en regiones donde la aceleración Lagrangiana del fluido es nula (Goto y col. 2008). Además, aunque estos dos mecanismos son fundamentales para establecer la concentración media local de las partículas, también son relevantes los efectos multiescala del flujo (Bragg y col. 2015; Tom y col. 2019).

En la misma línea, en flujos estratificados los gradientes de densidad inducen anisotropía en la turbulencia, alterando significativamente la dinámica de las partículas inerciales. A diferencia de HIT, donde los mecanismos de agrupamiento y acumulación están bien caracterizados, en sistemas estratificados la interacción entre turbulencia y ondas internas de gravedad introduce patrones de transporte complejos y altamente no lineales, confinando las partículas en zonas de igual densidad (Sozza y col. 2018). Las partículas pueden quedar atrapadas en estructuras coherentes o ser transportadas por corrientes verticales intermitentes, modificando sustancialmente su dispersión (Aartrijk y col. 2010). El problema tiene aún una complicación más: para partículas inerciales ni siquiera conocemos la ecuación de movimiento general que describe su dinámica. Para partículas esféricas y muy pequeñas, en ausencia de estratificación y de otras fuerzas relevantes en geofísica (como las asociadas a la rotación), contamos con la ecuación de Maxey y Riley (Maxey y col. 1983). Aún si a esta ecuación se agregan las fuerzas relevantes, no es claro cuál es su rango de validez ni cuál es la relevancia relativa de los diferentes términos en la ecuación. Y un término en particular, el término de historia de Basset-Boussinesq asociado al desprendimiento de vorticidad de las partículas, vuelve a la ecuación integro-diferencial y hace su cálculo muy difícil. Así, este término suele despreciarse sin justificación. Todas estas dificultades han impulsado el desarrollo de modelos reducidos que permitan representar de manera simplificada la evolución de partículas en flujos geofísicos, facilitando su estudio numérico y experimental (Wagner y col. 2019; Palmer 2019; Beron-Vera y col. 2019). Sin embargo, estos modelos reducidos suelen ser empíricos y no cuentan con una justificación física para sus aproximaciones.

En esta tesis nos proponemos resolver estos problemas estudiando numérica y teóricamente el transporte y acumulación de partículas en flujos turbulentos estratificados. Para ello, se emplearán simulaciones numéricas directas (DNS) basadas en las ecuaciones de Boussinesq y Navier-Stokes, permitiendo una caracterización detallada de la interacción entre la turbulencia y las ondas internas de gravedad. Se analizarán distintos regímenes de estratificación, y sus efectos en la dinámica de partículas neutralmente flotantes y con densidad moderada. Se derivará en forma sistemática una aproximación de la ecuación de Maxey y Riley válida para flujos estratificados en la aproximación de Boussinesq para el empuje. Con esta ecuación se estudiará el papel que juega la inercia tanto en la dinámica del transporte como en la acumulación preferencial de partículas. Además, se evaluará la relevancia del término de historia de Basset-Boussinesq en la evolución de estas partículas y su impacto en la dinámica, y veremos bajo que condiciones este término puede ser despreciado. Para ello se derivarán cotas formales para este

término, que se validarán numéricamente.

Los resultados obtenidos en esta tesis aportan una caracterización detallada de los mecanismos que regulan la dispersión y acumulación de partículas en flujos estratificados, en un rango de parámetros relevante para flujos oceánicos y atmosféricos. Se demostrará que la estratificación introduce anisotropías significativas en el transporte, modificando la eficiencia del mezclado vertical y horizontal. Además, se mostrará que los eventos extremos tienen un impacto crucial en la dinámica de partículas, amplificando su dispersión en ciertas regiones del flujo. Por último, el análisis del término de historia permitirá establecer criterios para su inclusión o desprecio en modelos dinámicos, optimizando su implementación en simulaciones de alta fidelidad. Estos avances contribuyen al desarrollo de modelos más precisos para aplicaciones en meteorología, oceanografía y ciencias ambientales. Los resultados de esta tesis fueron reportados en Reartes y col. 2021; Reartes y col. 2023, 2024, y en un manuscrito que se encuentra en preparación.

La estructura de esta tesis es la siguiente: en el capítulo 2 se introducen los fundamentos teóricos de la turbulencia, el transporte, y la mezcla turbulenta en flujos estratificados, estableciendo el marco conceptual para el análisis posterior. El capítulo 3 explora la sedimentación y agrupamiento de partículas en turbulencia homogénea e isotrópica, proporcionando una referencia clave para comparar los efectos de la estratificación. En el capítulo 4 se analiza la dinámica de partículas inerciales livianas neutralmente flotantes en flujos estratificados, enfocándose en parámetros relevantes para los océanos y en el impacto de las ondas internas y los vientos o corrientes horizontales sobre la dispersión y la formación de cúmulos. El capítulo 5 se dedica al estudio del término de historia de Basset-Boussinesq, evaluando en qué condiciones su contribución puede ser despreciada sin afectar significativamente la precisión de los modelos de partículas inerciales. En el capítulo 6 se investiga el rol de eventos extremos en la dinámica de partículas, analizando su influencia en la dispersión y en la estructura del flujo. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las principales conclusiones de la tesis y se discuten perspectivas para futuras investigaciones en el área.

Capítulo 2

Transporte y mezcla turbulenta

2.1. Turbulencia en flujos geofísicos

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la dinámica de pequeñas partículas en flujos turbulentos con estratificación estable. La motivación surge de que tanto la atmósfera como los océanos, que albergan una parte significativa de la biodiversidad terrestre, suelen presentar estas características. Los océanos y la atmósfera nocturna (en escalas de hasta 400 km) son ejemplos claros de fluidos en estado turbulento con estratificación estable, y los hallazgos de esta tesis tienen aplicación directa en ellos, especialmente en el caso oceánico ya que en una parte importante de la tesis consideraremos partículas neutralmente flotantes, que son un modelo para mucho del material particulado en los océanos. La figura 2.1 presenta una imagen capturada desde el espacio, cúmulos de fitoplancton organizados en estructuras de diversos tamaños. Estas formaciones reflejan claramente los efectos de la turbulencia, un fenómeno clave en este estudio. Asimismo, a la derecha, se aprecian ondas de gravedad en el cielo de Ciudad Universitaria, un fenómeno omnipresente en flujos con estratificación estable que será analizado en profundidad en este estudio.

En el contexto de los flujos estratificados, resulta relevante diferenciar entre aquellos con estratificación estable e inestable. Durante el día, la radiación solar que llega al planeta provoca convección, lo que tiende a desestabilizar la atmósfera; por esta razón, la atmósfera diurna no siempre mantiene una estratificación estable, pero sí lo hace durante la noche. Los océanos, por otra parte, suelen estar establemente estratificados. Un flujo se considera establemente estratificado cuando su densidad disminuye conforme se incrementa la distancia desde la superficie que lo sustenta. Ejemplos típicos de flujos que generalmente exhiben una estratificación estable incluyen la atmósfera nocturna, los océanos y la estratósfera.

En el caso de la atmósfera, el pronóstico del tiempo se realiza mediante la integración numérica de las ecuaciones que describen la evolución espacio-temporal del flujo. Sin embargo, debido a la magnitud del problema, las escalas más pequeñas, donde predomina la turbulencia, no pueden ser resueltas directamente y deben ser representadas mediante modelos (Bauer y col. 2015). Aunque este enfoque permite determinar el campo de velocidad promedio del fluido, en muchas aplicaciones es crucial calcular el transporte de material particulado, como

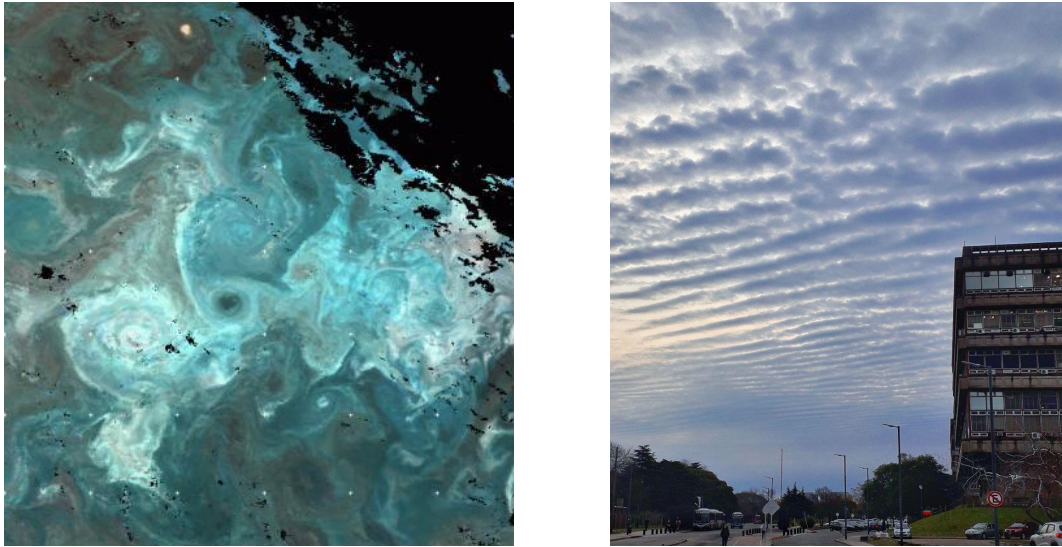


Figura 2.1: *Izquierda:* Imagen tomada por MODIS (Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer) donde se observan, con colores casi reales, una floración de cocolitóforos (fitoplancton) en la cuenca de Islandia. Se pueden ver las manchas y estructuras filamentosas de la floración. Se puede observar la formación de cúmulos de diversos tamaños. *Derecha:* Foto que muestra ondas de gravedad sobre el cielo de Ciudad Universitaria.

cenizas volcánicas o incluso trazadores del fluido. Cabe destacar que el estudio del transporte también tiene relevancia desde la perspectiva de la teoría fundamental de la turbulencia.

La atmósfera y los océanos actúan como transportadores de magnitudes de interés, como la temperatura o la concentración de agua y sal, estas magnitudes pueden ser pasivas o activas. Además, estos flujos movilizan partículas que pueden presentar o no inercia. Las partículas que se desplazan siguiendo al fluido, compartiendo tanto su velocidad como densidad en cada punto, se denominan Lagrangianas, mientras que las que tienen una dinámica propia se denominan inerciales. En esta tesis, el análisis se centrará principalmente en el estudio de partículas inerciales (aunque también se estudiarán partículas Lagrangianas en el capítulo 6). Las partículas con inercia pueden tener una densidad diferente a la del fluido y su velocidad no necesariamente coincide con la del flujo en su ubicación (Sozza y col. 2016).

Comprender y predecir con precisión la dinámica de las partículas inerciales es crucial en numerosas áreas, como por ejemplo, ante la erupción de un volcán, es esencial prever la trayectoria de las cenizas para evitar riesgos en la aviación y minimizar impactos en sectores agrícolas y ganaderos (Ichihara y col. 2023). Los aerosoles transportados en la atmósfera afectan también directamente la calidad del aire en las ciudades. Adicionalmente, la turbulencia en escalas pequeñas dentro de la atmósfera desempeña un rol clave en la formación de gotas de lluvia en las nubes (Grabowski y col. 2013; Larsen y col. 2018). En los océanos, la distribución del plancton influye en la biodiversidad marina, impactando en consecuencia a la pesca comercial (J. Taylor 2016). Otro ejemplo interesante es el estudio del Sargazo, un tipo de alga marina que puede representar un problema ambiental debido a sus altos niveles de arsénico y metales pesados al descomponerse cerca de las costas (Beron-Vera y col. 2020; Andrade-Canto y col. 2022).

En los flujos turbulentos, una amplia gama de escalas espaciales interactúa de manera no lineal, con fenómenos físicos específicos dominando en cada escala. Las escalas mayores, donde se fuerza el movimiento o se inyecta energía, determinan la dinámica principal, mientras que la disipación de energía ocurre en las escalas más pequeñas. En la atmósfera, las escalas grandes, como las sinópticas, son del orden de 100 km, mientras que las de disipación alcanzan apenas 1 cm (Consortini y col. 2003). Entre estas escalas coexisten fenómenos como vientos medios, circulación global, remolinos turbulentos y ondas de gravedad, cada uno con sus propias características temporales. Tanto la atmósfera como los océanos son fluidos geofísicos, influenciados por fuerzas externas como la de Coriolis, derivada de la rotación terrestre, y la fuerza de empuje, originada por la gravedad. En escalas intermedias, los efectos de Coriolis son despreciables, volviéndose relevantes en la atmósfera solo para escalas espaciales superiores a los 400 km. Por otro lado, la fuerza de empuje resulta significativa en escalas mayores a 100 m (P. D. Mininni y col. 2012; Mahrt 2014). Los modelos numéricos típicamente resuelven escalas a partir de 1 km, mientras que las escalas menores requieren parametrizaciones. Este análisis resalta la importancia de estudiar flujos estratificados.

Cada escala espacial en los flujos puede considerarse como un grado de libertad, lo que implica que estudiar la dinámica de la atmósfera y los océanos requiere manejar un número extremadamente alto de ellos. Por esta razón y como ya se mencionó, en los pronósticos numéricos las ecuaciones se integran solo hasta una cierta escala, reduciendo así la cantidad de grados de libertad para hacer el problema computacionalmente manejable. Este enfoque de reducción dimensional ha demostrado ser eficaz en el pasado. Un ejemplo notable es el sistema de ecuaciones "Lorenz 63", donde Lorenz redujo un flujo estratificado a solo tres grados de libertad, permitiendo estudiar numéricamente el caos en sistemas dinámicos no lineales (Lorenz 1963). Este modelo reveló hasta tres puntos fijos, que representan diferentes estados atmosféricos, y destacó que incluso en sistemas deterministas, condiciones iniciales ligeramente diferentes pueden derivar en soluciones completamente divergentes en un tiempo finito. En el caso de la atmósfera, Lorenz estimó un límite de predictibilidad de aproximadamente dos semanas, un valor que sigue siendo consistente con los estándares actuales (Lorenz 1969; Bauer y col. 2015; N. E. Sujovolsky y col. 2019b).

2.2. Ecuaciones dinámicas de los fluidos

En esta tesis se analizarán flujos turbulentos estratificados, los cuales se caracterizan por su complejidad y anisotropía. Comencemos antes por el ejemplo más simple de un flujo turbulento, la turbulencia incompresible, isótropa y homogénea. La dinámica de un fluido incompresible está gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes junto con la condición de incompresibilidad,

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

Aquí $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática con μ la viscosidad dinámica y ρ la densidad del fluido, p es la presión (escalar), y \mathbf{f} es el campo de fuerzas externas.

La ec. (2.1) describe la dinámica del campo de velocidades, determinada por el término convectivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ responsable de las interacciones no-lineales, el término de esfuerzos viscosos $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ encargado de la difusión del campo de velocidades, más los términos de presión y fuerzas externas. Estas ecuaciones pueden adimensionalizarse utilizando una velocidad característica U , una longitud característica L , y un tiempo característico $T = L/U$, los cuales dependen de la geometría general del flujo. De esta manera, se definen la velocidad adimensional $u' = u/U$, las derivadas espaciales adimensionales $\partial'_i = L\partial_i$, y la derivada temporal adimensional $\partial'_t = T\partial_t$. Para adimensionalizar la presión, se utiliza la densidad ρ (constante debido a la condición de incompresibilidad), obteniendo así $p' = p/(\rho U^2)$. Aplicando estas transformaciones, la ecuación de Navier-Stokes toma la forma:

$$\partial'_t \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}' + \mathbf{f}', \quad (2.3)$$

El parámetro adimensional $\text{Re} = \frac{LU}{\nu}$, conocido como número de Reynolds, actúa como el único parámetro de control en estas ecuaciones. Este número caracteriza la relación entre el término no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ y el término disipativo $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$. Para valores bajos de Re , los efectos disipativos predominan, lo que permite despreciar el término no lineal, y el flujo se comporta de manera lineal y laminar. A medida que Re aumenta, el término no lineal adquiere mayor importancia.

Una manera clásica de diferenciar entre un flujo laminar y uno turbulento es mediante el experimento realizado por Osborn Reynolds en 1883. En este experimento, Reynolds utilizó una tubería de vidrio por la que hizo circular agua con un flujo promedio en la dirección del eje principal. En el centro de la tubería introdujo un colorante y observó su comportamiento. Repitió el experimento variando la velocidad promedio del flujo, u_{med} . Reynolds observó que, al incrementar u_{med} , el colorante pasaba de desplazarse en línea recta a moverse de forma caótica, hasta finalmente formar un patrón turbulento.

En la figura 2.2 se presentan fotografías del experimento de Reynolds tomadas por N. H. Johannesen y C. Loewe, utilizando el mismo equipo empleado por Reynolds. Estas imágenes muestran cómo, al aumentar la velocidad, la simetría de traslación del flujo se pierde progresivamente. Es importante señalar que, a medida que el número de Reynolds crece y la turbulencia se desarrolla, algunas simetrías de los flujos laminares pueden recuperarse de manera estadística. Por este motivo, las herramientas estadísticas resultan fundamentales para el análisis de este tipo de flujos (Frisch 1995). En la atmósfera y los océanos, los valores típicos del número de Reynolds alcanzan el orden de 10^8 , lo que indica que la turbulencia domina la dinámica de estos flujos. Por lo tanto, resulta fundamental analizar el papel que desempeña el término no lineal.

Una metodología común para estudiar este término es trabajar en el espacio de Fourier, donde las variables se representan como $\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ y $p = \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. Aquí, el sombrero indica la amplitud de un modo en el espacio de Fourier y el subíndice \mathbf{k} representa el vector número de onda. Al sustituir esta descomposición en la ecuación (2.1), multiplicar por $e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}}$, e integrar sobre el volumen, se (Davidson 2013),

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}} \cdot i\mathbf{q}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} - i\mathbf{k} \hat{p}_{\mathbf{k}} - \nu k^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}. \quad (2.4)$$

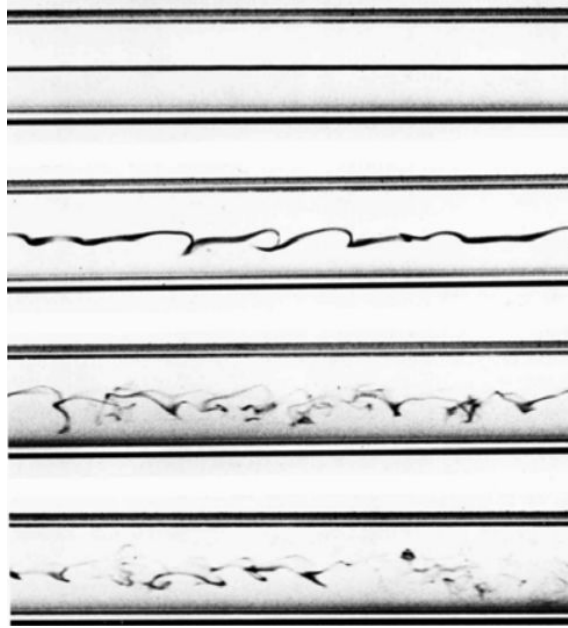


Figura 2.2: Imágenes de la experiencia de Reynolds llevada a cabo por N. H. Johannesen y C. Loewe, utilizando el mismo equipo empleado por Osborn Reynolds en su trabajo original de 1883 (Dyke y col. 1982). En las fotografías, la velocidad promedio del flujo incrementa progresivamente de arriba hacia abajo.

Esta ecuación corresponde a la forma de Navier-Stokes para cada amplitud de los modos en el espacio de Fourier. Para simplificar la notación, en esta ecuación y en adelante en esta tesis, se omiten las primas en las cantidades adimensionales, salvo cuando se indique explícitamente. Este sistema constituye un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas.

Como se mencionó en la introducción y en la sección 2.1, las escalas de un flujo pueden interpretarse como grados de libertad, y esto se evidencia de manera explícita en esta ecuación. Dado que el número de onda es $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ (donde λ es la longitud de onda), cada amplitud cuadrada $|\hat{u}_{\mathbf{k}}|^2$ representa la energía cinética asociada a la escala $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$. El término no lineal desempeña un papel clave en este sistema, ya que permite la interacción entre diferentes escalas de movimiento. Este término es el único que mezcla distintos valores de números de onda y, además, conserva la energía, transfiriéndola entre escalas sin pérdida (Davidson 2013). Para que tres modos puedan interactuar, deben cumplir la condición $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}$, lo que define una tríada de interacción. Esta tríada restringe el traspaso de energía a configuraciones donde los tres modos forman un triángulo en el espacio de Fourier.

La ecuación (2.1), en su forma original, no incluye términos de forzado y presenta disipación, lo que implica que la energía en el flujo eventualmente se disipa por completo. Para mantener el flujo energético, es posible introducir un término de forzado en forma de una fuerza en volumen \mathbf{f} , que se agrega al lado derecho de la ecuación. Este término permite inyectar energía al sistema. De este modo, al trabajar con la ecuación (2.1), se puede derivar una ecuación de balance de energía (Frisch 1995) en la forma

$$\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial t} = \varepsilon - 2\nu Z, \quad (2.5)$$

donde E_{cin} representa la energía cinética total del flujo, ε es la tasa de inyección de energía, dependiente de \mathbf{f} , y $Z = \frac{1}{2} \int |\nabla \times \mathbf{u}|^2 dV$ es la enstrofia. Es importante destacar que Z es siempre positiva, y su función principal es controlar la tasa de disipación de la energía.

Al transformar al espacio de Fourier el término disipativo de la ecuación, se observa que este es proporcional a νk^2 por la energía cinética asociada al número de onda k , donde $k = |\mathbf{k}|$ (Frisch 1995). Para valores pequeños de ν , el término disipativo es insignificante en escalas grandes (valores chicos de k), pero se vuelve predominante en las escalas pequeñas, donde k es grande. Así, la energía es inyectada en las escalas grandes del flujo y, debido a la turbulencia, fluye hacia las escalas más pequeñas a través del término no lineal, donde finalmente es disipada.

Como se mencionó anteriormente, entre las escalas de inyección y disipación de energía, esta no se crea ni se destruye, sino que se transfiere de una escala a otra. Este intervalo de escalas se conoce como "rango inercial". Basándose en esta idea, Kolmogorov propuso que el espectro de energía para la turbulencia homogénea e isotrópica en tres dimensiones sigue la relación $E(k) \sim k^{-5/3}$, apoyándose en observaciones realizadas por Richardson y en argumentos fenomenológicos (Frisch 1995). Kolmogorov planteó que el flujo de energía que atraviesa cada escala por unidad de tiempo es independiente de la escala y es igual a la tasa de inyección de energía, ε , que se mantiene constante. La energía transferida en cada escala puede describirse como el cociente entre la energía contenida en estructuras de tamaño l y el tiempo característico asociado a los movimientos en dicha escala. Esto da lugar a la relación $\varepsilon \sim v_l^2/t_l$. Por otro lado, a partir del análisis dimensional, se obtiene $t_l \sim l/v_l$, lo que implica que $\varepsilon \sim v_l^3/l$, y de aquí se deduce que $\delta v_l^2 \sim \varepsilon^{2/3} l^{2/3}$. Dado que $l \sim k^{-1}$ y el espectro de energía está relacionado como $E(k) \sim v_k^2/k$, se concluye que $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, o más específicamente, $E(k) = C_\kappa \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, donde C_κ es una constante de proporcionalidad. Estos argumentos fenomenológicos serán esenciales en los próximos capítulos para desarrollar modelos que representen el arrastre de partículas debido a la turbulencia. La figura 2.3 ilustra el espectro de Kolmogorov, destacando las escalas clave relacionadas con la inyección y disipación de energía.

Cuando un flujo es forzado desde un estado inicial de reposo, con $\mathbf{u} = 0$, inicialmente atraviesa una fase transitoria en la que la energía total se acumula principalmente en las escalas de inyección. Durante esta etapa, el flujo se desestabiliza, y el término no lineal permite que la energía comience a transferirse hacia escalas más pequeñas, donde eventualmente es disipada. Una vez que este proceso se estabiliza, la energía disipada por unidad de tiempo iguala la tasa de inyección en la ecuación (2.5), estableciendo el régimen turbulento estacionario (Davidson 2013). Este régimen será de interés en los capítulos siguientes, ya que en esta tesis, realizaremos diversas simulaciones numéricas comenzando con un estado inicial de velocidad nula. Estas simulaciones serán forzadas hasta alcanzar el régimen turbulento estacionario, y todas las cantidades turbulentas estudiadas serán calculadas dentro de este estado estacionario. En este régimen, debido a la interacción de múltiples escalas, una cantidad de interés es la longitud integral o

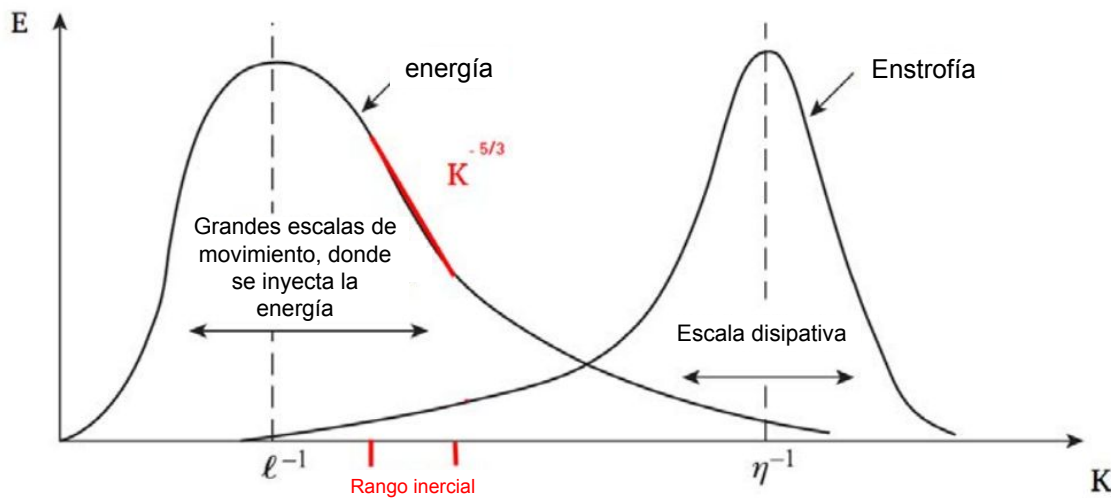


Figura 2.3: Esquema ilustrativo del espectro de Kolmogorov. La energía es introducida en la gran escala y disipada en las escalas menores. En el rango inercial, alejado de las escalas de inyección y disipación, la energía se transfiere siguiendo una ley de potencias $k^{-5/3}$ destacada en rojo. Imagen editada de (Davidson 2013).

longitud integral Euleriana, definida como,

$$L = 2\pi \frac{\int E(k)k^{-1} dk}{\int E(k) dk}, \quad (2.6)$$

donde $E(k)$ es el espectro de energía. Esta longitud proporciona una estimación de la escala espacial más relevante en la dinámica de la turbulencia isotrópica y homogénea. Además, esta escala está cerca de aquella que contiene la mayor parte de la energía del flujo, y corresponde aproximadamente a la escala donde actúa el forzado externo. Otra escala que será relevante será la escala disipativa de Kolmogorov, donde se disipa la mayor parte de la energía, definida como $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. Más adelante introduciremos un tiempo característico asociado a esta escala, que será útil para caracterizar la dinámica de partículas.

Aunque la ley fenomenológica de Kolmogorov es útil para estimar valores como u^2 y el espectro de energía, no resulta una aproximación adecuada para otros momentos estadísticos de la velocidad en flujos turbulentos. Esto se debe a que la teoría de Kolmogorov no considera la anisotropía del flujo ni el fenómeno de la intermitencia, caracterizado por la organización de la turbulencia en regiones con gradientes suaves de velocidad alternadas con áreas muy localizadas donde los gradientes son extremadamente elevados. Este comportamiento da lugar a distribuciones no Gaussianas en los gradientes de velocidad (Frisch 1995). La anisotropía y la intermitencia son fenómenos omnipresentes en los flujos geofísicos y tienen relevancia significativa en los procesos de transporte.

2.3. Aproximación de Boussinesq

El principal objeto de estudio en esta tesis son los flujos turbulentos incompresibles y estratificados. En la Tierra, estos flujos están influenciados por la fuerza gravitatoria, la cual actúa como una fuerza por unidad de volumen, dada por

$\mathbf{f}_g = g\rho(-\hat{z})$ en la ecuación (2.1), donde g es la aceleración debida a la gravedad. Como consecuencia, en estado de equilibrio, la densidad del fluido varía en la dirección vertical, manteniéndose constante en la dirección horizontal. En un flujo estático y no perturbado bajo el efecto de la gravedad, la densidad puede aproximarse mediante una relación lineal de la forma (Davidson 2013),

$$\bar{\rho} = \rho_0 + \Delta\bar{\rho}(z) = \rho_0 + \frac{d\bar{\rho}}{dz}z, \quad (2.7)$$

donde ρ_0 es la densidad media, y $\frac{d\bar{\rho}}{dz} < 0$ para que el sistema sea estable. Estas cantidades se consideran constantes, lo que implica un perfil medio de densidad que disminuye a medida que se asciende en la dirección z . Si permitimos que el perfil de densidad presente pequeñas perturbaciones, puede reescribirse como,

$$\bar{\rho} = \rho_0 + z\frac{d\bar{\rho}}{dz} + \delta\rho(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

donde $\delta\rho(\mathbf{x}) \ll \rho_0$ representa las fluctuaciones de densidad respecto al perfil medio. La evolución de la densidad total se describe mediante la ecuación de continuidad $\partial_t\bar{\rho} = \nabla \cdot (\bar{\rho}\mathbf{u})$. Para derivar las ecuaciones dinámicas en este régimen (es decir, cuando el perfil de equilibrio es perturbado ligeramente), se desprecia la variación de densidad en todos los términos de la ecuación de Navier-Stokes, excepto en el término de la fuerza restitutiva de gravedad o de empuje. Este enfoque corresponde a la aproximación de Boussinesq. Bajo esta aproximación, las ecuaciones para la evolución del campo de velocidad \mathbf{u} y las fluctuaciones de densidad $\delta\rho$ se expresan como,

$$\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\nabla(p/\rho_0) - (g/\rho_0)\delta\rho\hat{z} + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.9)$$

$$\partial_t\delta\rho + \mathbf{u} \cdot \nabla\delta\rho = (\rho_0 N^2/g)u_z + \kappa\nabla^2\delta\rho, \quad (2.10)$$

donde κ es la difusividad, y $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz}}$ es la frecuencia de Brunt-Väisälä. Este conjunto de ecuaciones constituye el sistema de Boussinesq, el cual puede reformularse reemplazando la densidad por una variable equivalente, $\zeta = \rho(g/N\rho_0)$, que representa la variación del empuje sobre cada elemento de fluido por tiempo y por unidad de masa, y tiene unidades de velocidad. Sustituyendo ρ por $\zeta(N\rho_0/g)$ en las ecuaciones (2.9) y (2.10), las ecuaciones de Boussinesq toman la forma,

$$\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} - N\zeta\hat{z} + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.11)$$

$$\partial_t\zeta + \mathbf{u} \cdot \nabla\zeta = Nu_z + \kappa\nabla^2\zeta. \quad (2.12)$$

La variable ζ , que representa la fluctuación de empuje, es análoga a la fluctuación de densidad, salvo por un factor constante. Esto permite interpretar a ζ como las fluctuaciones de densidad pero expresadas en unidades de velocidad. De manera equivalente, ζ puede considerarse como las fluctuaciones de temperatura sobre un perfil de temperatura estable, donde la constante de proporcionalidad (generalmente negativa) entre densidad y temperatura está definida por las propiedades termodinámicas del fluido. A partir de ahora, utilizaremos ζ como una

variable proporcional a la densidad y nos referiremos a ella indistintamente como fluctuación de densidad o de empuje.

En el sistema de ecuaciones (2.11) y (2.12), si N es un valor real y positivo, el flujo se clasifica como establemente estratificado. En cambio, si N no es real, el flujo sigue siendo estratificado, pero no de forma estable; en este caso, las ecuaciones pueden ser reescritas para obtener solo coeficientes reales, aunque describirán un régimen con convección. A partir de este sistema, pero en el caso inestable convectivo, Lorenz derivó su modelo reducido de la atmósfera, conocido como el sistema "Lorenz 67" discutido previamente. Como se mencionó anteriormente, esta tesis se enfoca exclusivamente en el caso donde N es real y positivo, es decir, en flujos establemente estratificados.

En este caso, es evidente que el término de fuerza de empuje, $-N\zeta\hat{z}$, actúa como una fuerza restitutiva. Si la fluctuación de densidad es positiva (es decir, si la densidad local es mayor que la del perfil estable), la fuerza de empuje será negativa. Por el contrario, cuando la fluctuación de densidad es negativa (y la densidad local es menor que la del perfil estable), la fuerza de empuje será positiva. En ambos casos, la fuerza de empuje tiende a devolver la parcela de fluido a su posición de empuje neutro. Esta fuerza restitutiva es responsable de la generación de ondas internas de gravedad.

La ecuación que describe estas ondas puede obtenerse linealizando las ecuaciones (2.11) y (2.12) en el caso ideal (es decir, con $\nu = \kappa = 0$) y derivando respecto al tiempo. El resultado es la ecuación de ondas,

$$\partial_{tt}^2 \nabla^2 u_z = -N^2 (\nabla^2 - \partial_{zz}^2) u_z, \quad (2.13)$$

que representa las ondas internas de gravedad. Estas ondas se propagan con su máxima velocidad en el plano perpendicular a la estratificación y oscilan en la dirección paralela a ella. Su relación de dispersión está dada por:

$$\omega(\mathbf{k}) = N \frac{k_{\perp}}{k}, \quad (2.14)$$

donde \mathbf{k} es el número de onda total, $k = |\mathbf{k}|$, y $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Esta relación será crucial en el capítulo 3 de esta tesis, donde desarrollaremos un modelo para describir la dispersión vertical de partículas inerciales. Es importante señalar que, a partir de la relación de dispersión, se puede observar directamente que la frecuencia máxima posible de las ondas internas es N , que corresponde a la frecuencia de Brunt-Väisälä (Davidson 2013).

De manera similar a la ecuación de Navier-Stokes, el sistema de Boussinesq también puede ser adimensionalizado. Este proceso revela dos parámetros adimensionales que controlan la dinámica del problema: el número de Reynolds, $Re = LU/\nu$, discutido previamente, y el número de Froude, $Fr = U/(LN)$. Este último mide la intensidad relativa de la turbulencia en comparación con los efectos de la estratificación, es decir, compara el término no lineal con la fuerza de empuje. Cuando $Fr \gg 1$, la estratificación es insignificante frente a la turbulencia, ya que el término no lineal domina sobre el término de empuje. En el caso $Fr \approx 1$, la estratificación comienza a ser importante, y si $Fr \ll 1$, la estratificación domina la

dinámica del flujo. En esta tesis, nos enfocamos en flujos turbulentos con estratificación, por lo que consideraremos valores de $Fr < 1$, donde tanto la turbulencia como los efectos de la estratificación son relevantes.

2.3.1. Turbulencia establemente estratificada

Como se describió en la sección 2.2, la turbulencia se caracteriza por una distribución continua de energía en diferentes escalas, que abarcan desde la escala de inyección hasta la de disipación. En el rango inercial, la energía se transfiere entre escalas a una tasa constante. En el caso de la turbulencia estratificada, la fuerza de empuje introduce modificaciones en el espectro de energía dentro de este rango. Comenzamos revisando resultados previos y escalas características importantes. Dado que esta turbulencia no es isótropa, el espectro debe descomponerse en sus dependencias paralela, $E(k_{\parallel} = k_z)$, y perpendicular, $E(k_{\perp})$, que representan la energía distribuida en planos y cilindros del espacio de Fourier, respectivamente. Para la componente perpendicular, en muchos estudios el espectro sigue la relación $E(k_{\perp}) = C_{\perp} \varepsilon^{2/3} k_{\perp}^{-5/3}$, mientras que para la componente paralela se observa $E(k_{\parallel}) = C_{\parallel} N^2 k_{\parallel}^{-3}$ (Kimura y col. 2012).

Cuando $N = 0$, estas leyes de potencia no coinciden con las de Kolmogorov para ambos espectros, lo que indica que la estratificación modifica fuertemente el comportamiento del espectro. Por lo tanto, estos espectros no son universales y varían con el grado de estratificación (Rorai y col. 2015). Un ejemplo de esto se presenta en la figura 2.4, que muestra los espectros de energía cinética paralela, perpendicular e isotrópa obtenidos de simulaciones numéricas de las ecuaciones de Boussinesq 2.11 y 2.12 para diferentes valores de Fr . Los gráficos evidencian que los espectros cambian según la intensidad de la estratificación. Además, la figura 2.4 incluye los espectros de energía potencial, definida como $E_p = \langle \zeta^2 \rangle$. Los espectros para esta energía se calculan de manera análoga a la energía cinética, pero con la variable ζ .

Existe un número de onda, conocido como el número de onda de Ozmidov, para el cual, si se superan sus valores, los efectos de la estratificación se vuelven despreciables, permitiendo que el flujo recupere su isotropía (Brethouwer y col. 2007). Este número de onda se define como,

$$k_{Oz} = \sqrt{\frac{N^3}{\varepsilon}}, \quad (2.15)$$

y permite identificar una escala asociada, $l_{Oz} = 2\pi/k_{Oz}$, tal que para escalas menores el flujo puede considerarse isotrópo. Esta escala puede entenderse directamente desde la transformada de Fourier de la ecuación (2.11). El término de empuje, $N\zeta\hat{z}$, no incluye derivadas espaciales, lo que significa que no depende del número de onda k . Por lo tanto, debe existir un valor de k donde los otros términos dominen, haciendo que la estratificación tenga un efecto insignificante sobre un elemento del fluido (para una demostración basada en argumentos fenomenológicos, véase J. Riley y col. 2008). Una conclusión fundamental para esta tesis es que, por debajo de l_{Oz} (o, de manera equivalente, para valores mayores a k_{Oz}), los efectos de la estratificación son irrelevantes, el flujo recupera su isotropía, y los espectros de energía se tornan isotrópos. En particular, el espectro paralelo

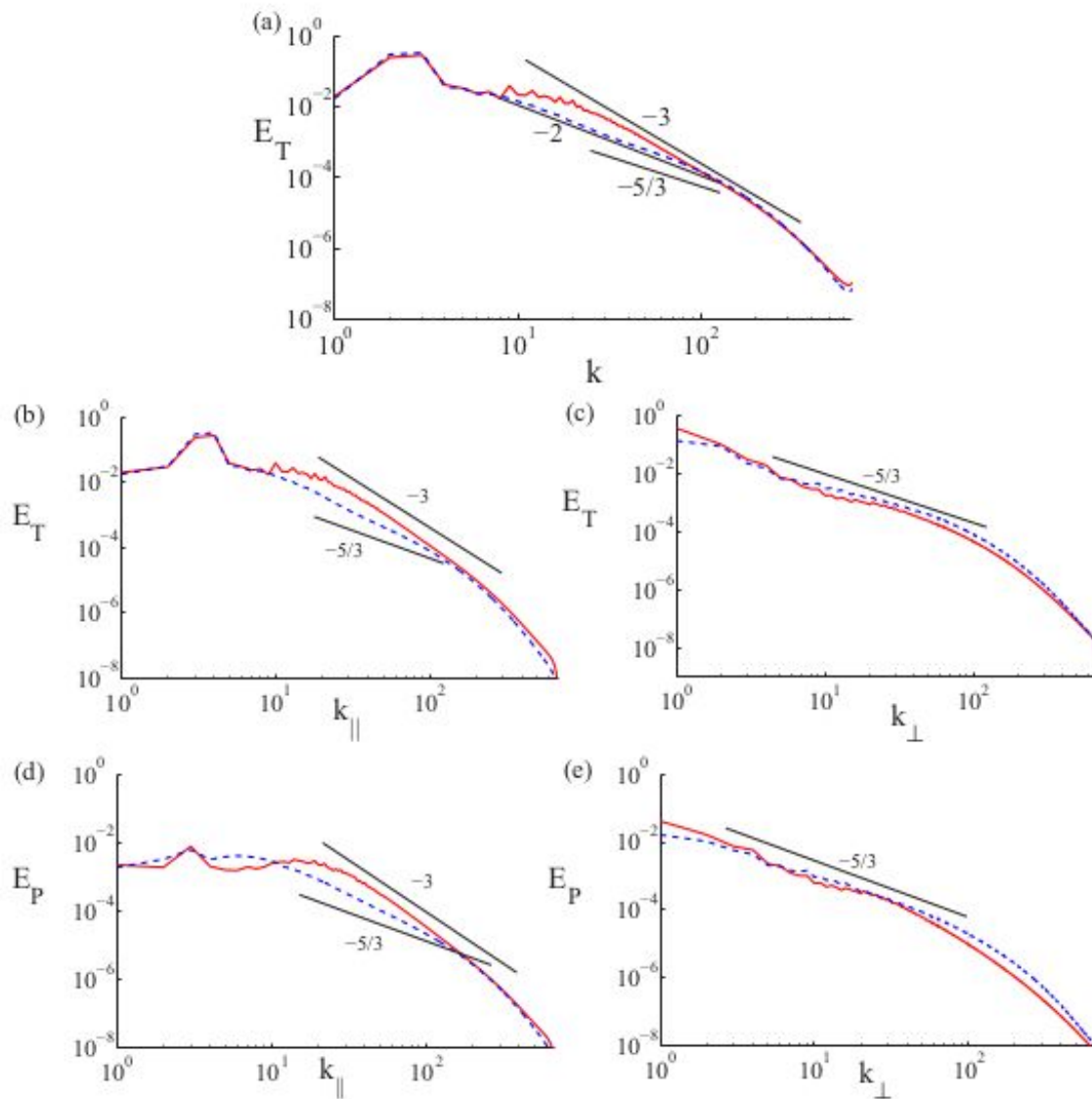


Figura 2.4: Espectros de energía obtenidos a partir de simulaciones de las ecuaciones de Boussinesq con una resolución espacial de 2048^3 puntos. Las líneas rojas continuas representan los resultados para una simulación con estratificación fuerte ($Fr = 0,03$), mientras que las líneas azules punteadas corresponden a una simulación con estratificación débil ($Fr = 0,1$). Se presentan los siguientes espectros: (a) espectro isotrópico de energía cinética $E_V(k)$, (b) espectro paralelo de energía cinética $E_V(k_{\parallel})$, (c) espectro perpendicular de energía cinética $E_V(k_{\perp})$, (d) espectro paralelo de energía potencial $E_P(k_{\parallel})$ y (e) espectro perpendicular de energía potencial $E_P(k_{\perp})$. Además, se incluyen leyes de escala como referencia para la comparación. (Rorai y col. 2015).

de la turbulencia estratificada, para longitudes menores a l_{Oz} , sigue la ley de Kolmogorov, $E(k_{\parallel}) \sim k_{\parallel}^{-5/3}$. Es importante destacar que esto solo sucede si k_{Oz} se encuentra dentro del rango inercial. Si k_{Oz} es mayor que el número de onda de disipación de Kolmogorov, el flujo no recuperará su isotropía. Como ilustración de esto, en los espectros de la figura 2.4 se muestra leyes de potencia $k_{\parallel}^{-5/3}$ de manera representativa (Rorai y col. 2015). Notar que las simulaciones menos estratificadas son compatibles con esta ley, mientras que el espectro del flujo más estratificado no lo es.

Otra escala espacialmente importante en la turbulencia estratificada es la escala de flotabilidad, definida como $L_b = U/N$. Esta escala proporciona una estimación del grosor de los estratos que se forman en estos flujos, y es particularmente útil como una longitud característica en la dirección paralela (Billant y col. 2001; Maffioli y col. 2015).

Como se discutió previamente, en esta tesis consideramos valores de $Re \gg 1$. Sin embargo, como se mencionó en la sección anterior, este parámetro no es el único que controla la dinámica de los flujos estratificados. Cuando $Fr \ll 1$, la estratificación domina sobre la turbulencia. Esto implica una interacción entre la turbulencia y la estratificación, reflejada en los valores de Re y Fr . Dado que nuestro interés radica en flujos que sean tanto turbulentos como estratificados, trabajaremos con configuraciones donde $Re \gg 1$ y $Fr < 1$. Para comparar ambos parámetros, resulta conveniente introducir el número de Reynolds de empuje, $Rb = ReFr^2$, que evalúa la intensidad relativa de la turbulencia respecto a la estratificación en la escala de empuje L_b . Si $Rb \ll 1$, la estratificación domina sobre la turbulencia; en cambio, si $Rb \gg 1$, la turbulencia prevalece sobre la estratificación. Nuestro interés se centra en el régimen donde $Rb \gtrsim 1$, que corresponde a los valores que podemos estudiar computacionalmente y que se acercan dentro de las limitaciones a las condiciones típicas de la atmósfera y los océanos. En este escenario, tanto la estratificación como la turbulencia son fundamentales para la dinámica del flujo. En el plano horizontal, la estratificación favorece el desarrollo de vientos horizontales en el flujo, mientras que en la dirección vertical se establece una competencia entre ondas internas y remolinos turbulentos.

2.3.2. Formación de estructuras y transferencia de energía

La teoría de la turbulencia permite formalizar algunos de los fenómenos descritos en la sección anterior y analizar sus causas. En la turbulencia estratificada, la anisotropía del flujo genera estructuras alargadas en la dirección horizontal y delgadas en la vertical, conocidas como estructuras tipo "panqueque". Además, se forman vientos horizontales coherentes, que pueden incrementar significativamente el transporte en esta dirección. Para estudiar estos fenómenos, es útil trabajar nuevamente en el espacio de Fourier. En este marco, la velocidad se representa como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$, la densidad $\zeta(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$, y la presión como $p(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. Con estas representaciones, el sistema de Boussinesq en el espacio de Fourier se expresa como:

$$\sum_{\mathbf{k}} \partial_t \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}} \cdot i\mathbf{q}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{k}} [i\mathbf{k} \hat{p}_{\mathbf{k}} + N \hat{\zeta}_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} - \nu k^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.16)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \partial_t \hat{\zeta}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = - \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}} \cdot i\mathbf{q}) \hat{\zeta}_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} + \sum_{\mathbf{k}} [N\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k},z} - \kappa k^2 \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.17)$$

donde nuevamente \mathbf{k} es el vector número de onda, ν es la viscosidad cinemática, κ es la difusividad, y N es la frecuencia de Brunt-Väisälä.

Este sistema permite estudiar de forma detallada cómo la anisotropía y la estratificación influyen en la dinámica del flujo y en la formación de las estructuras características. Para simplificar el análisis, se multiplica la ecuación original por $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}$ y se integra sobre el volumen. Dado que $\frac{1}{2\pi} \int dV e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, el sistema de Boussinesq en el espacio de Fourier queda expresado como (Waleffe 1993),

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) = - \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}} \cdot i\mathbf{q}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} - i\mathbf{k} \hat{p}_{\mathbf{k}} + N \hat{\zeta}_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} - \nu k^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}, \quad (2.18)$$

$$\partial_t \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}(t) = - \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}} \cdot i\mathbf{q}) \hat{\zeta}_{\mathbf{q}} + N \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k},z} - \kappa k^2 \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}, \quad (2.19)$$

que corresponde a un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas mediante los términos no lineales, para cada coeficiente $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$. En este sistema no se incluye el efecto de un forzado externo que podría inyectar energía en una o más escalas. La disipación de energía ocurre nuevamente a través de los términos disipativos, proporcionales a k^2 , y afecta principalmente a los valores grandes de $|\mathbf{k}|$, es decir, en las escalas espaciales más pequeñas. El término de presión es conservativo y, dado que se trabaja en el régimen incompresible, su función es garantizar la incompresibilidad del flujo. Además, como se mencionó en la sección 2.2, los términos no lineales también son conservativos y acoplan el número de onda \mathbf{k} con modos \mathbf{p} y \mathbf{q} . Esto significa que los términos no lineales distribuyen la energía entre las diferentes escalas espaciales, cumpliendo la relación $-\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ (o, considerando que el campo de velocidad es real, $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$). La interacción entre modos ocurre únicamente cuando esta condición se cumple, lo que resulta en la interacción solo entre modos \mathbf{k} , \mathbf{p} y \mathbf{q} . A los sistemas de las ecuaciones (2.16), (2.17), (2.18) y (2.19) se les debe incorporar el efecto de las ondas inerciales de gravedad. Esto se consigue descomponiendo las amplitudes $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$ en dos componentes: una modulación lenta asociada a los remolinos turbulentos, y una variación rápida relacionada con las ondas, proporcional a $e^{i\omega(\mathbf{k})t}$. En otras palabras, esta descomposición se logra reemplazando $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ por $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \sigma_s(\mathbf{k})t)}$, donde la relación de dispersión se escribe a partir de la ecuación (2.14) como $\sigma_s(\mathbf{k}) = s\omega(\mathbf{k})$, con $s = \pm 1$ que representa las dos polarizaciones (o direcciones de propagación) de las ondas (Waleffe 1993). Al integrar el sistema sobre un período de onda y requerir que el término no lineal no se anule, se obtiene una condición análoga a la de las triadas para los números de onda, pero aplicada a las frecuencias. Esta condición se expresa como $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} = 0$, lo que impone restricciones adicionales sobre las interacciones no lineales en presencia de ondas. De esta manera, la condición de resonancia entre modos se expresa como,

$$\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0, \quad \sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} = 0, \quad (2.20)$$

condición que también aplica a la turbulencia rotante y a la magnetohidrodinámica (MHD), ajustando la relación de dispersión (Davidson 2013). En el caso de la

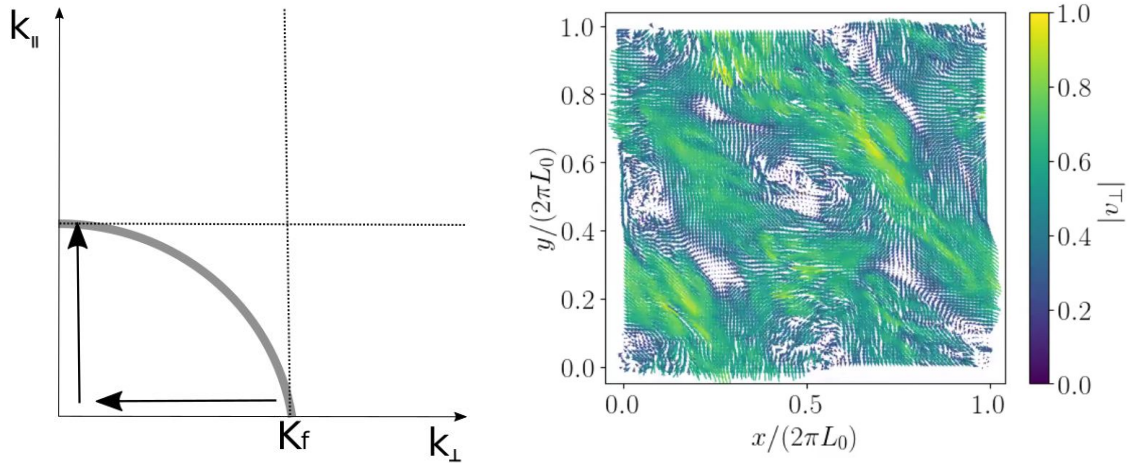


Figura 2.5: *Izquierda:* Esquema del flujo de energía en el espacio de Fourier para turbulencia estratificada. El círculo gris representa el cascarón de modos excitados por un forzado externo en $k = K_f$, mientras que las flechas indican la dirección del flujo de energía. Se observa cómo la energía se concentra en los modos con $K_{\perp} \approx 0$. Esquema adaptado de (Marino y col. 2014). *Derecha:* Corte horizontal (plano $x - y$) de la velocidad horizontal v_{\perp} obtenido a partir de una simulación del sistema de Boussinesq. Se destaca la formación de vientos medios (Reartes y col. 2023).

turbulencia estratificada, este sistema puede reescribirse utilizando la relación de dispersión como (Waleffe 1993),

$$\frac{k_{\perp}/k}{s_p q - s_q p} = \frac{p_{\perp}/p}{s_q k - s_k q} = \frac{q_{\perp}/q}{s_k p - s_p k}. \quad (2.21)$$

Es evidente que la condición $k_{\perp} = p_{\perp} = q_{\perp} = 0$ cumple trivialmente con la condición de resonancia. Esto implica que la energía se transfiere más fácilmente hacia los modos con $k_{\perp} \approx 0$, los cuales no están restringidos por esta condición. La figura 2.5 ilustra cómo la energía se distribuye en los modos de Fourier en turbulencia estratificada. En este esquema se observa que, en la dirección k_{\perp} , la energía fluye preferentemente hacia los modos con números de onda horizontal más pequeños, pero con número de onda paralelo (o vertical) más grande. Traduciendo del espacio de Fourier al espacio real, los modos de velocidad con $k_{\perp} \approx 0$ corresponden a configuraciones donde la velocidad es constante (o casi constante) en la dirección horizontal. Estos modos se asocian con movimientos lentos y de gran escala espacial en el plano horizontal, dando lugar a la formación de vientos horizontales con cizalladura vertical (Smith y col. 2002). La figura 2.5 incluye un corte horizontal (a altura constante) del campo de velocidad en el plano $x - y$ de una simulación numérica de un flujo estratificado. En este corte se puede observar el viento como una dirección predominante de la velocidad. Es importante destacar que, a diferentes alturas, la dirección del viento puede variar.

La transferencia de energía hacia modos con $k_{\perp} \approx 0$ favorece la formación de estructuras alargadas en la dirección horizontal y comprimidas en la vertical, conocidas como estructuras de tipo "panqueque" (Negretti y col. 2013; Sutyrin y col. 2017). Al igual que los vientos horizontales, estas estructuras también presentan un desacoplamiento en la dirección vertical, lo que implica que la velocidad vertical se encuentra suprimida en estos flujos.

El efecto principal de la estratificación es, precisamente, reducir la magnitud

de la velocidad vertical, pero generando un flujo con mucha variabilidad de las demás componentes de la velocidad en esa dirección. Finalmente, los flujos estratificados se caracterizan por su estabilidad en el eje vertical, lo que hace que la cuantificación de las inestabilidades verticales sea esencial para el estudio del transporte paralelo de las cantidades que el flujo arrastra.

2.3.3. Inestabilidad vertical

Como se mencionó anteriormente, la estratificación generada por un perfil estable de densidad o temperatura reduce significativamente la velocidad vertical, haciendo que el flujo sea estable en esa dirección. Sin embargo, el transporte vertical es crucial en numerosos procesos, tanto biológicos como industriales. En este contexto, para desarrollar modelos de dispersión de partículas, resulta fundamental analizar las inestabilidades verticales que pueden intensificar la limitada dispersión vertical de las partículas en estos flujos (N. E. Sujovolsky y col. 2019a).

La estabilidad vertical en estos flujos se debe al perfil estable de densidad (o temperatura). Para que se desarrollen inestabilidades verticales, las fluctuaciones locales de densidad deben superar la influencia del perfil estable. Por esta razón, una cantidad relevante es el gradiente vertical de las fluctuaciones de densidad, $\partial_z \zeta$, que representa la pendiente vertical local de dichas fluctuaciones. A partir de esta cantidad, es posible definir un parámetro que cuantifique la inestabilidad local de un flujo estratificado: el número de Richardson local (Rosenberg y col. 2015),

$$Ri_g = \frac{N(N - \partial_z \zeta)}{(\partial_z u_{\perp})^2}, \quad (2.22)$$

donde $u_{\perp} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Este parámetro evalúa, en cada punto del flujo, el grado de inestabilidad local. Si en un punto del flujo $Ri_g > 1/4$, no pueden desarrollarse inestabilidades verticales en ese lugar. Por el contrario, si $Ri_g < 1/4$, pueden generarse inestabilidades de tipo zig-zag (Augier 2011). Este tipo de flujo presenta una cizalladura vertical significativa. Sin embargo, esta inestabilidad no produce un mezclado vertical considerable. Más interesante es el caso en el que $Ri_g \leq 0$, ya que en esta situación pueden desarrollarse inestabilidades convectivas locales, generando remolinos verticales. Cuando $Ri_g \leq 0$, se cumple que $\partial_z \zeta \geq N$, lo que significa que las fluctuaciones locales de densidad se vuelven más grandes que el perfil estable, y el flujo pierde, de manera local, su estabilidad vertical característica. La convección juega un papel crucial en el transporte de las propiedades que arrastran los océanos y la atmósfera, teniendo un impacto significativo en los procesos terrestres (Zhang y col. 2019; Sohail y col. 2019; DeMott y col. 2019).

Hasta aquí, se analizó cómo en la dirección vertical de la turbulencia estratificada compiten dos fenómenos principales: las ondas internas de gravedad, que están asociadas a la estabilidad de estos flujos, y los remolinos convectivos, que representan la turbulencia. Ambos fenómenos serán estudiados en esta tesis, ya que su interacción es esencial para modelar adecuadamente la dispersión vertical de partículas. Nos resta introducir cómo se modelan partículas de diferentes tipos, y flujos multifase con material particulado, en contextos generales y geofísicos en particular.

2.4. Partículas inerciales en flujos turbulentos

El estudio de los flujos con partículas inerciales tiene una importancia significativa tanto en problemas industriales como ambientales, tales como el diseño de reactores químicos, la optimización de motores, la dispersión de plancton o contaminantes en el océano, y la formación de nubes en la atmósfera. Además, este fenómeno despierta un notable interés desde el punto de vista teórico. A pesar de muchos avances, todavía no se conoce una ecuación de movimiento adecuada para modelar con precisión la dinámica de las partículas. Generalmente, los estudios se limitan al caso de partículas puntuales (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983), y suelen requerirse simplificaciones adicionales para que las simulaciones numéricas sean viables (Balkovsky y col. 2001; J. Bec y col. 2005, 2024).

Aunque este problema puede considerarse una aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Newton, resolver directamente las ecuaciones dinámicas del fluido acopladas con las de las partículas no solo resulta extremadamente complejo, sino que aporta poca claridad. Por esta razón, desde el siglo XIX se han realizado esfuerzos para encontrar aproximaciones adecuadas que permitan expresar las ecuaciones de movimiento de partículas rígidas pequeñas en un flujo dado, bajo la forma de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependan del campo de velocidad del flujo.

El desarrollo de estas aproximaciones requiere un análisis detallado para garantizar que las suposiciones realizadas sean consistentes. Los modelos más simples consideran las partículas como trazadores pasivos, también denominados partículas Lagrangianas (N. Sujovolsky y col. 2017), que siguen las trayectorias de los elementos del fluido. Sin embargo, modelos que incorporan partículas puntuales pero con efectos de tamaño finito y con inercia ofrecen una descripción más rica de la dinámica, ya que estas partículas no están completamente subordinadas al movimiento del fluido circundante; poseen una dinámica propia, distinta de la del fluido (H. Bec J. H. y col. 2014).

Un avance clave en este campo se logró con los trabajos de Maxey y Riley (Maxey y col. 1983), quienes formularon las ecuaciones de movimiento para una partícula esférica rígida y pequeña en un flujo suave. Posteriormente, Auton et al. (Auton y col. 1988), basándose en el trabajo de Taylor (G. I. Taylor 1928), corrigieron el término de masa agregada en estas ecuaciones.

En esta sección se presenta una descripción general de la dinámica de partículas inerciales de tamaño finito en flujos turbulentos. En primer lugar, se describen los modelos más simples utilizados para representar la dinámica de las partículas, empleando la dinámica de trazadores pasivos como punto de partida. A continuación, se introduce la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol, discutiendo sus suposiciones, su rango de validez y algunas de sus implicancias fundamentales. Estos conceptos serán fundamentales a lo largo de esta tesis, en particular en el capítulo 4 donde se desarrollará un modelo para partículas flotantes de tamaño finito en flujos estratificados basado en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol.

2.4.1. Esquemas Euleriano y Lagrangiano

En la sección 2.2 presentamos la ecuación de Navier-Stokes, que describe la evolución de la velocidad del fluido en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo. Este enfoque, conocido como esquema Euleriano, permite realizar diversos análisis cuantitativos del flujo. Por ejemplo, se puede aplicar la transformada de Fourier al campo de velocidad, lo que facilita el cálculo de espectros de energía y el estudio de cómo se distribuye la energía entre las diferentes escalas del flujo.

Otra forma de analizar un flujo es mediante el esquema Lagrangiano, que se basa en seguir la trayectoria de una o varias partículas a lo largo del tiempo (Davidson 2013). Este enfoque es particularmente adecuado para estudiar problemas de dispersión. En partículas, en este esquema, se sigue el movimiento de una partícula cuya velocidad, en cada instante y ubicación, coincide con la del elemento de fluido en esa posición. A lo largo de esta tesis, utilizaremos la notación \mathbf{v} para la velocidad de las partículas y \mathbf{u} para la velocidad del fluido en el marco Euleriano. La condición para una partícula Lagrangiana se expresa como:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t), \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ representa la posición de la partícula que, en el tiempo $t = 0$, se encontraba en \mathbf{r}_0 . Más adelante, esta etiqueta será reemplazada por un subíndice para identificar cada partícula.

Este enfoque considera las partículas como trazadores pasivos, con una masa y tamaño insignificantes. Esto equivale a despreciar la inercia de las partículas y asumir que toman la velocidad del fluido circundante, adaptándose instantáneamente a cualquier cambio en la velocidad del fluido.

La suposición del marcador pasivo se usa ampliamente en la dinámica de fluidos (Ottino 1989; Aref 1994), y es una buena aproximación en varios casos. Sin embargo, hay muchas situaciones en las que no se aplica, y debemos tener en cuenta el hecho de que las partículas tienen masa y tamaño finito. Las partículas de tamaño finito no pueden ajustar sus velocidades instantáneamente a la del fluido, y además su densidad puede ser diferente de la del fluido. Por lo tanto, en general, la velocidad de estas partículas difiere de la velocidad del fluido. Esto significa que la dinámica de las partículas de tamaño finito es en muchos casos mucho más rica y compleja que la de los trazadores pasivos.

2.4.2. Modelo sencillo para la dinámica de partículas inerciales de tamaño finito

Una aproximación que resulta útil para estudiar la dinámica de partículas inerciales de tamaño finito es considerar que

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\tau_p}(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (2.24)$$

con \mathbf{v} la velocidad de la partícula, \mathbf{u} la velocidad del flujo en la posición de la partícula, y τ_p el tiempo característico de la partícula o tiempo de Stokes que esta relacionado con la inercia de la partícula, medido a partir del número de

Stokes $St = \tau_p/\tau_v$, donde $\tau_v = \sqrt{\nu/\epsilon}$ es el tiempo asociado a la escala disipativa del fluido. Para una partícula esférica, $\tau_p = (2/9)(\rho_p/\rho_f + 1/2)(a^2/\nu)$, donde a es el radio de la partícula, ρ_p es la densidad de masa de la partícula, y ρ_f la densidad del fluido. Notar que si τ_p tiende a cero se recupera el resultado de trazadores pasivos. Esta aproximación es especialmente útil para partículas con una densidad mucho mayor a la del fluido circundante, y en general para partículas muy pesadas (H. Bec J. H. y col. 2014). Físicamente, la ec. (2.24) nos dice que estas partículas intentan seguir al flujo, pero que por su inercia tienen un tiempo de respuesta a los cambios en \mathbf{u} dado por el tiempo τ_p .

2.4.3. Ecuación de Maxey-Riley-Gatignol

Para estudiar la dinámica de las partículas inerciales de tamaño finito advectadas por flujos turbulentos, es necesario formular ecuaciones simples que describan su movimiento. Las partículas de tamaño finito son objetos extendidos con sus propios límites, lo que hace que un análisis riguroso implique resolver la ecuación de Navier-Stokes para sus límites móviles. Este enfoque conlleva dificultades sustanciales debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales parciales resultantes. Afortunadamente, en ciertos casos es posible obtener una ecuación diferencial aproximada para describir el movimiento de partículas esféricas pequeñas en flujos, en la que las partículas se siguen tratando como puntuales pero los efectos del radio finito se consideran en las fuerzas. Para una partícula de radio a y masa m_p , el movimiento puede describirse razonablemente mediante la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983; Auton y col. 1988):

$$m_p \dot{\mathbf{v}} = m_f D_t \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) - \frac{1}{2} m_f \left(\dot{\mathbf{v}} - D_t \left[\mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{1}{10} a^2 \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) \right] \right) - 6\pi a \rho_f \nu \mathbf{q}(t) + (m_p - m_f) \mathbf{g} - 6\pi a^2 \rho_f \nu \int_0^t d\tau \frac{d\mathbf{q}(t)/d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}, \quad (2.25)$$

donde,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) - \frac{1}{6} a^2 \nabla^2 \mathbf{u}(t), \quad (2.26)$$

con $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ como la posición y velocidad de la partícula, respectivamente. Además, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ representa nuevamente la velocidad del flujo en la posición de la partícula, m_f es la masa de fluido desplazada por la partícula, y \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad. La derivada convectiva se define como

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla), \quad (2.27)$$

mientras que la derivada a lo largo de la trayectoria de la partícula es

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (2.28)$$

En la ecuación (2.25), el primer término del lado derecho representa la aceleración del elemento fluido en la posición $\mathbf{r}(t)$, actuando como la fuerza ejercida por el fluido sobre la partícula. El segundo término, conocido como el efecto de masa

agregada, describe la masa adicional que parece tener la partícula al mover al fluido circundante. Los siguientes dos términos representan el arrastre de Stokes y la fuerza de gravedad y empuje respectivamente. Finalmente, el término integral, denominado término de historia de Basset-Boussinesq, refleja la difusión de la vorticidad en la estela de la partícula debido a la viscosidad (Basset 1888; J. Boussinesq 1885). Adicionalmente, los factores que involucran $a^2 \nabla^2 \mathbf{u}$ en la ecuación (2.25) y (2.26) son correcciones de Faxén (Faxén 1922), que consideran la variación espacial del campo de velocidad en los extremos de la partícula para partículas ligeramente más grandes (notar que son proporcionales a a^2).

La ecuación (2.25) es válida para partículas pequeñas con números de Reynolds de la partícula bajos, calculados como $Re_p = a|\mathbf{v} - \mathbf{u}|/\nu$. Esto implica que la velocidad de deslizamiento entre las partículas y el fluido debe ser pequeña, o el radio a debe ser suficientemente pequeño. Además, el número de cizalladura de Reynolds $Re_\Gamma = a^2 \Gamma/\nu$, donde Γ es el gradiente de velocidad característico del flujo, también debe ser pequeño para que la aproximación sea válida.

2.4.4. Características generales de las partículas inerciales

Como se ha indicado previamente, las partículas inerciales exhiben una dinámica sustancialmente distinta a la de los trazadores pasivos, que siguen las trayectorias de los elementos de fluido. Al simplificar la ecuación (2.25) despreciando los términos proporcionales a a^2 (partículas mucho más pequeñas que la escala de variación del flujo), y en particular despreciando el término integral de Basset-Boussinesq se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. En contraste, la ecuación (2.23) para los trazadores pasivos es de primer orden. Esto implica que la dinámica define un espacio de fase de mayor dimensionalidad: en un espacio plano, por ejemplo, las partículas inerciales pequeñas tienen cuatro grados de libertad, mientras que los trazadores solo tienen dos.

Otra diferencia clave es que la dinámica inercial es disipativa, incluso en flujos incompresibles. El volumen del espacio de fases se contrae a una tasa d/St , donde d es la dimensionalidad del espacio, lo que resulta siempre en una contracción positiva (Cartwright y col. 2010). Este carácter disipativo posibilita la existencia de atractores en el espacio de fases, una característica ausente en las partículas no inerciales. Tal propiedad tiene profundas implicancias para la distribución global de las partículas y la acumulación y segregación de partículas en flujos turbulentos.

La densidad relativa de una partícula respecto al fluido circundante también juega un papel crucial en su dinámica. Maxey 1987, mediante un análisis perturbativo válido para partículas pequeñas, demostró que las partículas más densas que el fluido tienden a alejarse de las regiones de alta vorticidad, como los centros de remolinos turbulentos. Este efecto puede interpretarse como el resultado de una fuerza centrífuga que actúa sobre la partícula, alejándola de estas regiones. Por el contrario, las partículas más ligeras que el fluido tienden a concentrarse en los centros de vórtices. Este comportamiento, conocido como acumulación preferencial, está completamente ausente en las partículas no inerciales (Cartwright y col. 2010), y es esencial para comprender la formación de estructuras en flujos turbulentos (Zapata y col. 2024; Angriman y col. 2022a).

Con estos conceptos como base, en los capítulos siguientes se desarrollarán modelos basados en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol y se estudiará la sedimentación, la dispersión horizontal y vertical de partículas, y también modelos reducidos para el transporte de partículas en turbulencia estratificada. En el siguiente capítulo consideraremos primero el problema de la sedimentación. Luego, las características generales de las partículas inerciales neutralmente flotantes en flujos establemente estratificados serán abordadas en el capítulo 4 de esta tesis. La estratificación ejerce un impacto significativo en la dinámica de estas partículas, afectando tanto su confinamiento en capas horizontales debido a la estabilidad vertical, como su transporte horizontal impulsado por los vientos. Estos efectos serán analizados en detalle como parte de los resultados principales de la tesis.

Capítulo 3

Sedimentación y acumulación de partículas de densidad moderada en turbulencia isótropa y homogénea

Como se discutió en el capítulo previo, uno de los aspectos más importantes de las partículas inerciales en flujos turbulentos es su capacidad para concentrarse preferentemente en zonas específicas del flujo. Esta concentración preferencial, también conocida como acumulación de partículas o "clustering" en inglés, resulta fundamental no solo para comprender las propiedades básicas de la turbulencia, sino también para aplicaciones industriales (como la dinámica de aerosoles y la mezcla de polvos) y ambientales (como el transporte de contaminantes y la dinámica de gotas en nubes) (Shaw y col. 1998; Shaw 2003). La acumulación también desempeña un papel crucial en la cuantificación precisa de colisiones, coalescencia de partículas, eventos de fragmentación y transiciones de fase en flujos con partículas (Mordant y col. 2001; Saito y col. 2017; Zapata y col. 2024), ya que la distribución inhomogénea de las partículas altera su camino libre medio efectivo y, en consecuencia, su tasa de colisión. Finalmente, la concentración preferencial tiene un impacto significativo en problemas biológicos, como la cuantificación de la tasa de contacto mutuo entre diferentes especies de microorganismos marinos en el océano (De Pietro y col. 2014; Sozza y col. 2018; Del Grosso y col. 2019).

Estas problemáticas se complican aún más al considerar los efectos de la gravedad, que provoca sedimentación y puede intensificar la acumulación de partículas pesadas (H. Bec J. H. y col. 2014; Falkinhoff y col. 2020; Angriman y col. 2022a). En ausencia de gravedad, y para concentraciones promedio, los principales mecanismos que explican la acumulación de partículas pesadas son la expulsión centrífuga (Maxey y col. 1983) y el mecanismo de "barrido" o "sweep-stick" (Goto y col. 2008). El primero, que se cree dominante para partículas con baja inercia (y, por lo tanto, bajo número de Stokes), resulta en la expulsión de las partículas del núcleo de remolinos turbulentos y la acumulación en regiones de baja vorticidad del flujo portador (Maxey y col. 1983). Por su parte, el mecanismo de "sweep-stick", esperado como dominante para partículas con mucha inercia (o número de Stokes grande), conduce a la acumulación en regiones donde la aceleración lagrangiana del flujo portador es cero (Goto y col. 2008), donde la fuerza sobre las partículas (en el marco de referencia del fluido) se cancela. Evidencias de

este mecanismo para partículas pesadas han sido reportadas en experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas, como se describe en Obligado y col. 2014. Además, aunque estos dos mecanismos pueden ser dominantes para establecer la concentración media local de las partículas, también son relevantes los efectos multiescala del flujo (Bragg y col. 2015; Tom y col. 2019). Otros aspectos, como la influencia de partículas con masas moderadas, el tamaño finito de partículas grandes, o el impacto de flujos promedio o a gran escala, siguen siendo poco comprendidos (Homann y col. 2009; Fiabane y col. 2012; Angriman y col. 2020).

3.1. El rol de la gravedad en la acumulación preferencial de partículas

La gravedad tiene un impacto profundo en flujos con material particulado. Aún no está completamente claro si las partículas en un flujo turbulento caen más rápido o más lento que la velocidad terminal de Stokes, o bajo qué condiciones sucede una u otra cosa, ya que las ecuaciones que gobiernan el movimiento de las partículas pueden variar significativamente dependiendo de sus parámetros y del régimen considerado. Esto también se observa en experimentos, cuyos resultados dependen de la región del espacio de parámetros estudiada. En la mayoría de los casos, las partículas tienden a caer más rápido que la velocidad de Stokes. De hecho, observaciones indican que las gotas de lluvia caen más rápido de lo esperado (Montero-Martnez y col. 2009). Sin embargo, en turbulencia isotrópa y homogénea, también se ha reportado que los gradientes de presión pueden reducir la velocidad de sedimentación mediante un mecanismo de "barrido preferencial", mientras que la fuerza de historia de Basset-Boussinesq puede aumentar o disminuir la sedimentación dependiendo del número de Stokes (Hinsberg y col. 2017). Good y col. 2014 reportaron que las tasas de sedimentación de partículas grandes pueden reducirse por el arrastre no lineal. La mayoría de estos estudios consideran el caso de partículas pesadas, como muchos aerosoles en la atmósfera o gotas grandes que transportan virus generados al toser (Bourouiba y col. 2014). Sin embargo, en el caso de los aerosoles más pequeños en la atmósfera o de microorganismos marinos con flotabilidad casi neutra, las partículas transportadas por el flujo turbulento tienen una densidad moderada cercana a la del fluido portador. Por ejemplo, para partículas ligeramente más densas que el fluido y con efectos de arrastre no lineal, se ha reportado que la velocidad de sedimentación promedio varía entre el 6% y el 60% de la velocidad terminal de Stokes (Stout y col. 1995).

La gravedad también afecta la acumulación preferencial de partículas. Además de las diferencias reportadas en las velocidades de sedimentación, la mayoría de los estudios encontraron una acumulación preferencial más fuerte con el aumento de la aceleración gravitatoria (o la disminución del número de Froude) (H. Bec J. H. y col. 2014; Falkinhoff y col. 2020). Usualmente, en estos estudios las partículas son mucho más densas que su entorno (Hascoët y col. 2007; H. Bec J. H. y col. 2014; Baker y col. 2017; Falkinhoff y col. 2020), de modo que la gravedad y el arrastre de Stokes se convierten en las fuerzas dominantes. Recientemente, se derivó un mecanismo generalizado de "sweep-stick" en este límite, considerando el efecto de la sedimentación en la formación de cúmulos o clústeres de partículas (Falkinhoff y col. 2020). Considerar también el efecto de la masa añadida, no despreciable

para partículas con densidad moderada y resultante del desplazamiento del fluido por las partículas (Maxey y col. 1983; Cartwright y col. 2010), lleva a desviaciones estadísticas de una distribución normal en las velocidades de las partículas (Volk y col. 2008; Biferale y col. 2016). Además, los efectos de masa añadida dependen de la diferencia de densidad entre las partículas y el medio, afectando la concentración de partículas (Tagawa y col. 2011; Van Aartrijk y col. 2010). Finalmente, se ha observado que partículas con diferentes densidades pueden agruparse juntas o segregarse como resultado de las diferentes respuestas de las partículas ligeras y pesadas a las fluctuaciones turbulentas (Calzavarini y col. 2008).

En este capítulo se presenta un estudio de la sedimentación y la acumulación de partículas inerciales pequeñas en simulaciones numéricas directas (DNS) de turbulencia, utilizando un modelo basado en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983). Este modelo incluye gravedad, arrastre de Stokes y efectos de masa agregada hasta orden lineal en el radio de las partículas. Se considera un acoplamiento unidireccional entre el fluido y las partículas. Las partículas son más densas que el fluido, pero no mucho más densas (es decir, no se trabaja en el límite de partículas pesadas). A números de Reynolds y Stokes fijos, se explora el efecto de variar la razón de masa fluido-partícula, y la aceleración de la gravedad. Se observan desviaciones de la velocidad de sedimentación respecto a la velocidad terminal de Stokes en el fluido en reposo, y una dependencia no monótona de la asimetría y la curtosis de la velocidad de las partículas con el número de Froude. Además, se reporta un incremento en la acumulación de las partículas al disminuir el número de Froude y al disminuir la razón de masa fluido-partícula. Finalmente, se cuantifica el rol de los efectos de masa añadida variando artificialmente la amplitud de ese término en la ecuación de movimiento de las partículas, y los efectos de tamaño finito del dominio en la formación de cúmulos mediante la variación de la altura del dominio. El objetivo general del capítulo es comenzar a estudiar material particulado en contextos de turbulencia geofísica, empezando por el estudio de modelos para la sedimentación de partículas no muy pesadas en la atmósfera y los océanos, que sean más realistas que aquellos modelos basados solamente en las aproximación de partículas puntuales pesadas. Los resultados que se presentan en este capítulo fueron publicados en Reartes y col. 2021.

3.2. Simulaciones Numéricas

Como se mencionó previamente, este estudio se apoya en simulaciones numéricas que emplean métodos de alto orden, tal como es común en el estudio de la turbulencia, según lo discutido en el capítulo 2. En este contexto, la dinámica del flujo se resuelve junto con diversos tipos de partículas inerciales. Como en este capítulo consideraremos procesos en escalas pequeñas en flujos geofísicos, asumiremos que el flujo está en un estado turbulento isótropo y homogéneo (en los siguientes capítulos consideraremos escalas geofísicas más grandes, y por lo tanto trabajaremos con flujos turbulentos estratificados). Así, en este capítulo las simulaciones numéricas directas resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles representadas por (2.1) y (2.2), en un dominio tridimensional periódico de longitud $2\pi L_0$. Las longitudes y velocidades se consideran adimensionales,

usando una unidad de longitud L_0 y una unidad de velocidad U_0 . En este caso, la turbulencia se mantiene mediante un forzado mecánico volumétrico externo f . Este forzado consiste en un flujo aleatorio no helicoidal construido a partir de una superposición de modos de Fourier con fases aleatorias utilizando el algoritmo descrito en Pouquet y col. 1978, el cual permite controlar la cantidad total de helicidad con relativa facilidad. Se generan dos campos aleatorios con modos en el espacio de Fourier dados por

$$v_i^1(\mathbf{k}) = A(k)e^{i\phi}, \quad v_i^2(\mathbf{k}) = A(k)e^{i\phi'}, \quad (3.1)$$

donde $i = 1, 2, 3$ son las componentes cartesianas del campo, ϕ y ϕ' son fases aleatorias diferentes para cada componente i y cada vector de onda \mathbf{k} , y $A(k)$ es una amplitud usada para controlar la forma final del espectro de potencia del forzado. Luego se construyen campos incompresibles tomando

$$\mathbf{u}^{(1)} = \nabla \times \mathbf{v}^{(1)}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \nabla \times \mathbf{v}^{(2)}. \quad (3.2)$$

Finalmente se toma $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times [\mathbf{u}^{(1)}\sin(\alpha) + \mathbf{u}^{(2)}\cos(\alpha)]$ con α un parámetro que controlará la helicidad (la helicidad relativa resulta $h = \sin(2\alpha)$, siendo mínima para $\alpha = 0$ y máxima para $\alpha = \pi/4$), y se construye el forzado como $\mathbf{f}(\mathbf{k}) = \mathbf{u}^{(1)}(k)\sin(\alpha) + \mathbf{u}^{(2)}(k)\cos(\alpha) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})/k$. En este capítulo se usa $\alpha = 0$ (para no inyectar helicidad en flujo), y la fases ϕ y ϕ' del forzado son evolucionadas en el tiempo. La fuerza mecánica externa se aplica a todos los modos en la superficie en el espacio de Fourier con número de onda $k_f = 1/L_0$, y tiene fases aleatorias que varían lentamente en el tiempo con un tiempo de correlación de $\tau_f = 0,5L_0/U_0$.

Para evolucionar el campo de velocidad Euleriano \mathbf{u} del fluido en el tiempo, utilizamos GHOST, un software paralelizado desarrollado por el grupo de investigación y disponible públicamente (P. Mininni y col. 2010; Rosenberg y col. 2020). Este código emplea un método pseudoespectral para la evolución espacial y un esquema de Runge-Kutta de segundo orden para la integración temporal. En este capítulo se utiliza una resolución espacial de $N^3 = 512^3$ puntos de grilla en todas las simulaciones, donde N es la resolución lineal en cada dirección. Con respecto a los parámetros relevantes del flujo, la viscosidad cinemática se elige de manera que la escala de Kolmogorov $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \approx 0,013L_0$ esté bien resuelta. Esto resulta en $\kappa\eta \approx 2,2$, donde $\kappa = N/(3L_0)$ es el número de onda máximo resuelto. El número de Reynolds basado en la escala de Taylor es $\text{Re}_\lambda = u'\lambda/\nu \approx 180$, donde $u' = U/\sqrt{3}$ es la velocidad típica de una componente del flujo, $U = \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle^{1/2} = (2E)^{1/2}$ es la velocidad r.m.s. del flujo, E es la energía cinética media, y $\lambda = (15\nu u'^2/\varepsilon)^{1/2} \approx 0,38L_0$ es la escala de Taylor. Finalmente, la escala integral del flujo se define como $L = (2\pi/E) \int E(k)/k dk \approx 4,5L_0$, donde $E(k) = dE/dk$ es el espectro de energía, resultando en un número de Reynolds $\text{Re} = u'L/\nu \approx 2100$.

Con respecto a las partículas inerciales, utilizamos un modelo basado en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol (2.25) (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983), asumiendo que la longitud típica sobre la cual el campo de velocidad cambia significativamente es mucho mayor que el radio de la partícula a . Bajo estas hipótesis, los términos de Faxén son despreciables, y las ecuaciones de movimiento

de las partículas son

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\tau_p} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(t)] - \frac{W}{\tau_p} \hat{\mathbf{z}} + \frac{3}{2} R \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

donde, como en el capítulo previo, \mathbf{x} es la posición de la partícula, \mathbf{v} es la velocidad de la partícula, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad del fluido en la posición de la partícula, y d/dt es la derivada temporal siguiendo la trayectoria de la partícula. El tiempo de relajación de la partícula es $\tau_p = (m_p + m_f/2)/(6\pi a \rho_f \nu)$, donde m_p es la masa de la partícula y m_f es la masa del fluido desplazado. Para una partícula esférica, $\tau_p = 2a^2(1 + \gamma/2)/(9\gamma\nu)$, con $\gamma = m_f/m_p$. El parámetro W es la tasa de sedimentación de la partícula para el fluido en reposo, definido como $W = g\tau_p(1 - \gamma)/(1 + \gamma/2)$, donde g es la aceleración de la gravedad. Notar que $W/\tau_p = g(1 - \gamma)/(1 + \gamma/2)$ es la fuerza de flotabilidad por unidad de masa, independiente del tamaño de la partícula, y su signo depende del valor de γ . Finalmente, R es el parámetro de razón de masas, $R = \gamma/(1 + \gamma/2)$: $\gamma < 1$ o $R < 2/3$ corresponde a aerosoles (partículas más pesadas que el fluido), $\gamma = 1$ o $R = 2/3$ a partículas neutras, y $\gamma > 1$ o $R > 2/3$ a burbujas (partículas más ligeras que el fluido).

Recordemos que el último término en el lado derecho de la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol para $\dot{\mathbf{v}}$ en la ecuación (2.25) es el término de historia de Basset-Boussinesq. En este capítulo este término se despreciará en la evolución temporal de las partículas. A pesar de que este término es frecuentemente despreciado asumiendo que solo da lugar a un arrastre viscoso más grande (Cartwright y col. 2010) (es decir, una contribución similar al primer término en el lado derecho de la ecuación para $\dot{\mathbf{v}}$), las razones físicas para hacerlo basadas en los parámetros de las partículas no son claras. Van Hinsberg et al. (Hinsberg y col. 2017) mostraron que para partículas pequeñas con $\gamma = 10^{-2}$ este término tiene un efecto importante en la velocidad de sedimentación, mientras que para partículas más ligeras con $\gamma = 0,1$ su contribución es menor. Aquí consideraremos partículas con $\gamma = 0,1$ o mayores, y como resultado no consideraremos su efecto. El desafío numérico asociado a la resolución del término de historia de Basset-Boussinesq será abordado en el capítulo 5. Allí se demostrará que, en el caso de partículas inerciales flotantes en turbulencia establemente estratificado, existe una cota para ciertas relaciones de parámetros adimensionales que permite despreciar dicho término con un error numérico mínimo (Reartes y col. 2024).

Inicialmente distribuimos las partículas aleatoriamente en el flujo, con veloci-

Tabla 3.1: Parámetros usados para las partículas en las simulaciones con valor fijo de la gravedad g . El nombre etiqueta cada simulación, γ es la razón entre la masa del fluido desplazado y la masa de la partícula, g es la aceleración de la gravedad en unidades de U_0^2/L_0 , τ_p es el tiempo de relajación de la partícula en unidades de L_0/U_0 , St es el número de Stokes, Fr es el número de Froude de la partícula, R es el parámetro de razón de masas, y a es el radio de la partícula.

Nombre	γ	$g [U_0^2/L_0]$	$\tau_p [L_0/U_0]$	St	Fr	R	$a [L_0]$
g1γ01	0.1	1	1.2	6	0.4	0.09	0.02
g1γ02	0.2	1	1.2	6	0.4	0.18	0.03
g1γ05	0.5	1	1.2	6	0.4	0.40	0.05
g1γ08	0.8	1	1.2	6	0.4	0.57	0.06
g1γ095	0.95	1	1.2	6	0.4	0.64	0.06

Tabla 3.2: Parámetros usados para las partículas en las simulaciones con valor fijo de γ . El nombre etiqueta cada simulación, γ es la razón entre la masa del fluido desplazado y la masa de la partícula, g es la aceleración de la gravedad en unidades de U_0^2/L_0 , τ_p es el tiempo de relajación de la partícula en unidades de L_0/U_0 , St es el número de Stokes, Fr es el número de Froude de la partícula, R es el parámetro de razón de masas, y a es el radio de la partícula.

Nombre	γ	$g [U_0^2/L_0]$	$\tau_p [L_0/U_0]$	St	Fr	R	$a [L_0]$
$g05\gamma05$	0.5	0.5	1.2	6	0.8	0.4	0.05
$g1\gamma05$	0.5	1	1.2	6	0.4	0.4	0.05
$g2\gamma05$	0.5	2	1.2	6	0.2	0.4	0.05
$g4\gamma05$	0.5	4	1.2	6	0.1	0.4	0.05
$g8\gamma05$	0.5	8	1.2	6	0.05	0.4	0.05

dades iniciales iguales a la velocidad del fluido en la posición de cada partícula. Las ecuaciones de movimiento de las partículas se integran en el tiempo utilizando un método de Runge-Kutta, y la velocidad del fluido en las posiciones de las partículas se estima usando splines tridimensionales, siguiendo el método descrito en Yeung y col. 1988. Realizamos múltiples simulaciones en el estado estacionario turbulento del flujo (es decir, después de integrar el flujo forzado durante más de 30 tiempos característicos sin partículas), inyectando $n_p = 10^6$ partículas en cada simulación. En las simulaciones variamos γ o g , manteniendo fijos ν y τ_p (o, equivalentemente, el número de Stokes de las partículas). Como resultado, al cambiar γ , el radio de las partículas, a también debe ajustarse para mantener constante τ_p . De esta manera podemos cuantificar el efecto de variar la amplitud de los términos segundo y tercero en el lado derecho de la ecuación para \dot{v} en (3.3), mientras mantenemos fijo el parámetro de control del primer término.

Las simulaciones se dividen en dos conjuntos. En el primer conjunto, listado en la Tabla 3.1, presentamos cinco simulaciones con g fijo y valores de γ que varían entre 0,1 y 0,95 (es decir, para partículas 10 veces más pesadas que el fluido desplazado, hasta partículas casi neutras; notar que en todos los casos $\gamma < 1$ y, por lo tanto, consideramos partículas más pesadas que el fluido, pero no en el límite de partículas muy pesadas para el cual el tercer término en el lado derecho de la ecuación para \dot{v} se vuelve despreciable). Esto resulta en un parámetro de razón de masas R que varía de 0,09 a 0,64. En todas las simulaciones, el tiempo de relajación de las partículas es $\tau_p = 1,2L_0/U_0$, lo que da como resultado un número de Stokes de $St \approx 6$ con $\tau_\eta \approx 0,2L_0/U_0$. Los radios de las partículas varían de $a \approx 0,02L_0$ para las partículas más pesadas ($\gamma = 0,1$), hasta $a \approx 0,06L_0$ para las partículas más ligeras ($\gamma = 0,95$). Ambos valores son del orden de la escala de Kolmogorov y significativamente menores que la escala de Taylor. Podemos definir el número de Froude de las partículas como un número adimensional para cuantificar la relación entre la aceleración inercial y la gravedad que actúa sobre las partículas, con $Fr = a_\eta/g = \varepsilon^{3/4}/(g\nu^{1/4})$, donde a_η es la aceleración turbulenta (inercial) en la escala de Kolmogorov. Todas las simulaciones del primer conjunto tienen $Fr \approx 0,4$. Notar que esta definición de Fr difiere de la presentada en la sección 2.3 del capítulo anterior para un flujo estratificado, aunque conserva la misma interpretación física. En el caso del número de Froude para el fluido, cuantifica cuán estratificado ve al fluido cada parcela. En este caso, la cuantificación tiene que ver con como la partícula ve el fluido circundante.

En el segundo conjunto de simulaciones, listado en la Tabla 3.2, mantenemos fijo $\gamma = 0,5$ (es decir, la masa de las partículas es dos veces la masa del fluido desplazado, resultando en $R = 0,4$), y variamos g desde 0,5 hasta 8 en unidades de U_0^2/L_0 . Esto resulta en que el número de Froude de las partículas varíe de 0,8 a 0,05. En contextos geofísicos g está fija, así que la variación de g es usada para explorar el efecto de variar Fr , o en otras palabras, de variar la intensidad de las fuerzas sobre las partículas asociadas a la turbulencia respecto a la gravedad.

Es necesario realizar dos aclaraciones respecto de las partículas. La primera es si, para estos radios de partículas, es correcto usar la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol y resulta razonable despreocuparse de las correcciones de Faxén y Basset-Boussinesq. Los radios de las partículas en la Tabla 3.1 varían de $1,5\eta$ a $4,6\eta$. La Ecuación (3.3) requiere que el número de Reynolds de cizalla $Re_\Gamma = a^2\Gamma/\nu$ (con Γ un gradiente típico de velocidad) y el número de Reynolds de la partícula $Re_p = a\langle|\mathbf{u} - \mathbf{v}|\rangle/\nu$ sean pequeños. En las simulaciones, $Re_\Gamma \approx 0,4$ para las partículas más pequeñas y ≈ 3 para las más grandes. El número de Reynolds de las partículas es típicamente $Re_p \approx 20$ para todas las simulaciones en la Tabla 3.1, y en el rango de ≈ 10 a 30 para las tres primeras simulaciones en la Tabla 3.2. Las dos últimas simulaciones tienen $Re_p \approx 50$ y ≈ 100 respectivamente; en estas simulaciones, los efectos de arrastre no lineal podrían volverse importantes (ver Hinsberg y col. 2011 para un estudio sobre este efecto, donde también se reporta que el efecto del arrastre no lineal en la sedimentación es pequeño para partículas de densidad moderada). Finalmente, el segundo punto concierne al número de partículas considerado y la razón volumétrica de partículas $\Phi_p = n_p V_p / (2\pi L_0)^3$, con V_p es el volumen de cada partícula (es decir, la razón entre el volumen ocupado por las partículas y el volumen total del fluido). Para las partículas más pequeñas, $\Phi_p \approx 0,1$, mientras que para las más grandes, $\Phi_p > 1$. Para considerar solo un acoplamiento unidireccional entre el fluido y las partículas (en otras palabras, para poder ignorar las fuerzas que las partículas ejercen en el fluido), se necesitan razones volumétricas mucho más pequeñas (Elghobashi 1994). Por lo tanto, el número de partículas usado aquí tiene el propósito de mejorar las estadísticas de los resultados, y físicamente las simulaciones deben interpretarse como múltiples realizaciones de un gran conjunto estadístico, cada uno cargado con un número

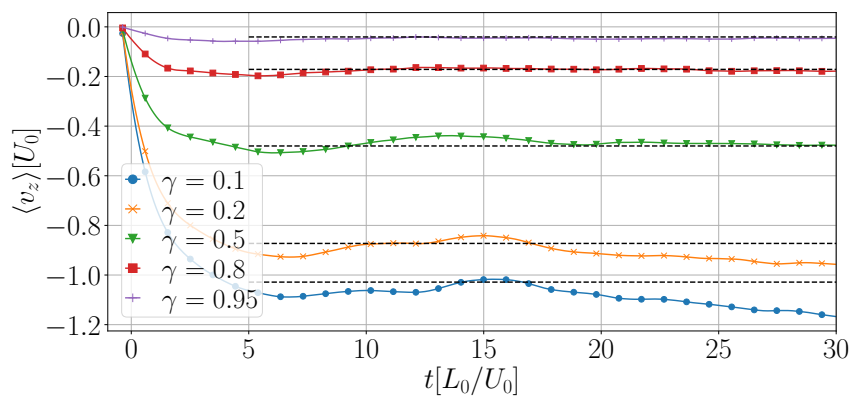


Figura 3.1: Velocidad vertical promedio de las partículas en función del tiempo, para todas las simulaciones con $Fr = 0,4$ y diferentes valores de γ (ver Tabla 3.1). Las líneas horizontales discontinuas representan la velocidad terminal teórica de Stokes para partículas cayendo en el fluido en reposo.

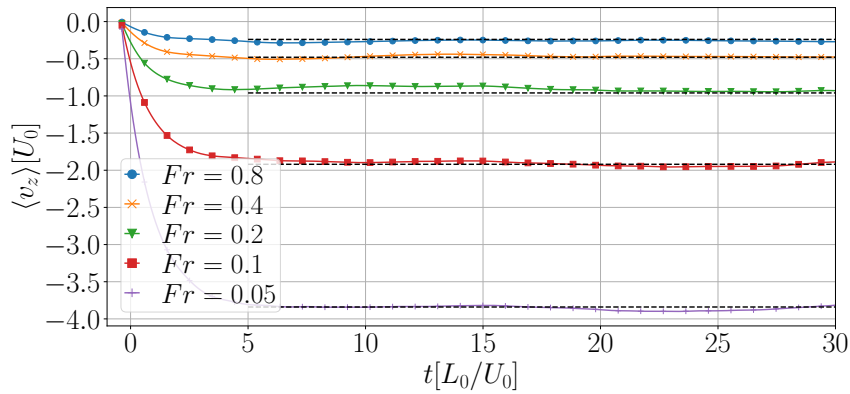


Figura 3.2: Velocidad vertical promedio de las partículas en función del tiempo, para todas las simulaciones con $\gamma = 0,5$ y diferentes valores de g y Fr (ver Tabla 3.2). Las líneas horizontales discontinuas representan la velocidad terminal teórica de Stokes para partículas cayendo en el fluido en reposo.

menor de partículas (por ejemplo, 10^3 partículas por relación). En otras palabras, las partículas deben considerarse como "partículas de prueba" que no interactúan entre sí ni afectan al fluido.

3.3. Velocidad de sedimentación

Primero consideramos la sedimentación de las partículas en el flujo turbulento estudiando la velocidad vertical promedio $\langle v_z \rangle_p(t)$ en función del tiempo, donde el subíndice p indica que el promedio se calcula sobre todas las partículas (para simplicidad, el subíndice o los corchetes angulares se omitirán cuando el promedio sobre las partículas sea claro por el contexto). Cuando el fluido está en reposo, y en el estado estacionario de las partículas ($\dot{v} = 0$), la ecuación (3.3) se reduce a:

$$v_z = v_\tau = -W = -g\tau_p \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma/2} \right). \quad (3.4)$$

Esta es la velocidad terminal de una partícula pequeña cayendo libremente en el fluido quieto, o velocidad de Stokes.

La Figura 3.1 muestra la velocidad vertical promedio de las partículas en función del tiempo durante los primeros 30 tiempos característicos de las simulaciones en la Tabla 3.1. Las líneas horizontales discontinuas representan la velocidad de Stokes en la ecuación (3.4) para cada caso. La Figura 3.2 muestra lo mismo para todas las simulaciones en la Tabla 3.2 (es decir, para $\gamma = 0,5$ fijo y variando g o Fr). Notar que en estos casos las fluctuaciones son mayores. Pero aunque la velocidad de las partículas fluctúa alrededor de la velocidad terminal de Stokes, algunos casos también muestran desviaciones sistemáticas. Tales casos, con fluctuaciones lentas y mayores, se integraron hasta $t = 60L_0/U_0$ para estimar mejor los promedios de v_z en el tiempo y sobre todas las partículas.

En Falkinhoff y col. 2020 se encontró, en el límite de partículas pesadas, que las partículas inerciales caen a través de un flujo turbulento de tal manera que la velocidad de deriva vertical es igual a la velocidad de Stokes en el sistema de referencia de la parcela de fluido localmente en movimiento, y por lo tanto, si las

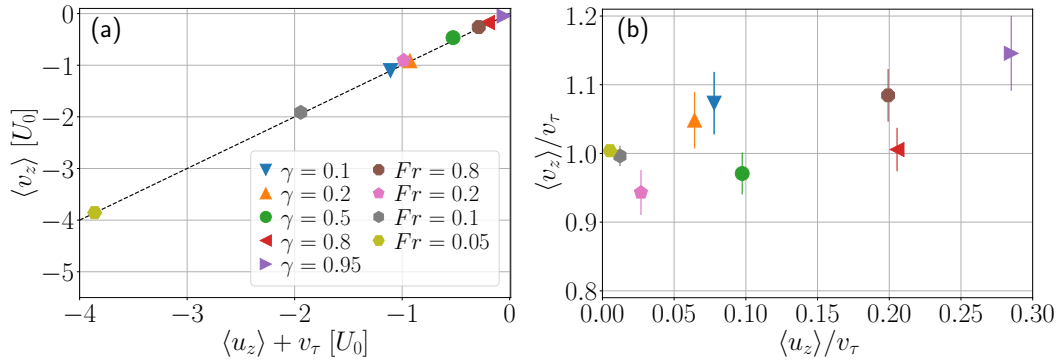


Figura 3.3: (a) Velocidad vertical promedio de las partículas $\langle v_z \rangle$, en función de la velocidad promedio del fluido en las posiciones de las partículas más la velocidad terminal de Stokes, $\langle u_z \rangle + v_\tau$. La relación de deriva en la ecuación (3.5) se muestra con la línea discontinua. (b) Velocidad vertical promedio de las partículas normalizada por la velocidad de Stokes (es decir, la anomalía en la velocidad terminal $\langle v_z \rangle / v_\tau$) en función de $\langle u_z \rangle / v_\tau$. Se incluyen barras de error como referencia. En todos los paneles, las simulaciones con diferentes valores de γ tienen $Fr = 0,4$, y las simulaciones con diferentes Fr tienen $\gamma = 0,5$.

partículas exploran preferentemente regiones con velocidades verticales positivas o negativas, la velocidad de sedimentación puede diferir de la velocidad de Stokes. Para partículas con densidad moderada, un resultado similar puede recuperarse de la ecuación (3.3) si se asume que, en promedio, $\langle Du_z/Dt \rangle \approx 0$ (es decir, que las partículas muestrean el flujo homogéneamente, y no de manera preferencial a través de trayectorias que muestren asimetría o al menos cierta preferencia en el signo de la aceleración Lagrangiana vertical). Bajo esas condiciones, de la ecuación (3.3) se sigue que en el estado estacionario

$$\langle v_z \rangle = \langle u_z \rangle + v_\tau, \quad (3.5)$$

donde $\langle u_z \rangle$ es la velocidad vertical promedio del fluido en las posiciones de las partículas. Esta ecuación parece estar más o menos satisfecha por todos los datos (ver la Figura 3.3, donde los promedios se toman sobre todas las partículas y en el tiempo, en el estado estacionario de las partículas). Sin embargo, la misma relación también puede reescribirse como

$$\langle v_z \rangle / v_\tau = 1 + \langle u_z \rangle / v_\tau, \quad (3.6)$$

lo que permite una visualización más directa de cualquier anomalía en la velocidad de sedimentación cuando se compara con la velocidad de Stokes. En este caso, las diferencias entre los datos y estas relaciones se vuelven más evidentes. De hecho, a partir de las Figuras 3.1 y 3.2 ya parece evidente que algunos conjuntos de partículas caen más rápido que la velocidad de Stokes. La Figura 3.3(b) muestra la anomalía $\langle v_z \rangle / v_\tau$ en función de $\langle u_z \rangle / v_\tau$. Se pueden observar diferencias entre $\langle v_z \rangle$ y la velocidad de Stokes de hasta $\approx 15\%$. Para $\gamma = 0,5$, los casos con valores pequeños de Fr tienen $\langle v_z \rangle / v_\tau \approx 1$, los casos con valores grandes de Fr caen $\approx 10\%$ más rápido que la velocidad de Stokes, pero para valores intermedios de g o Fr las partículas permanecen más tiempo en ciertas regiones del fluido y caen más lento. Para $Fr = 0,4$ fijo, se observa un efecto similar para valores intermedios de γ .

3.4. El efecto de la variación de la gravedad y la diferencia de masas

3.4.1. Efecto de la razón de masas

Ahora consideramos otros momentos de la velocidad de las partículas, ya que no solo nos interesan sus velocidades promedio, sino también cómo fluctúan las velocidades de las partículas alrededor de los valores promediados. La Figura 3.4 muestra las funciones de distribución de probabilidad (PDFs por sus siglas en inglés) de las componentes x y z de las velocidades de las partículas, para todas las simulaciones con $Fr = 0,4$. Por conveniencia, restamos los valores promediados en el tiempo y sobre todas las partículas, ya que $\langle v_z \rangle$ depende de γ . Se observa un incremento en la dispersión de las componentes de la velocidad a medida que γ aumenta, es decir, las velocidades de las partículas muestran fluctuaciones más grandes alrededor del promedio para valores más grandes de γ (o para masas menores). Esto puede esperarse de la ecuación (3.3); notar que el término $D\mathbf{u}/Dt$ está ponderado por el parámetro de masa R , que aumenta de 0,09 a 0,64 a medida que γ aumenta. Por lo tanto, las partículas más ligeras (es decir, partículas con $\gamma < 1$ más grande) son más sensibles a la aceleración lagrangiana del fluido, la cual puede tomar valores extremos, resultando en mayores fluctuaciones de la velocidad de las partículas. Pero, de manera interesante, también se puede observar una asimetría en las PDFs de v_z más fuerte para valores menores de γ (es decir, para partículas más pesadas que el fluido desplazado).

Para cuantificar mejor el rol de γ en la forma de estas PDFs, calculamos tres de sus momentos: la desviación estándar $\sigma_{v_i} = (\mu_{2,v_i})^{1/2}$, la asimetría $\tilde{\mu}_{3,v_i} = \mu_{3,v_i}/\sigma_{v_i}^3$, y la curtosis $\tilde{\mu}_{4,v_i} = \mu_{4,v_i}/\sigma_{v_i}^4$, donde el momento de orden n de la PDF $p(v_i)$ de la componente cartesiana i -ésima de la velocidad de las partículas se define como

$$\tilde{\mu}_{n,v_i} = \int (v_i - \langle v_i \rangle)^n p(v_i) dv_i. \quad (3.7)$$

La Figura 3.5 muestra todos estos momentos para v_x y v_z , para todas las simula-

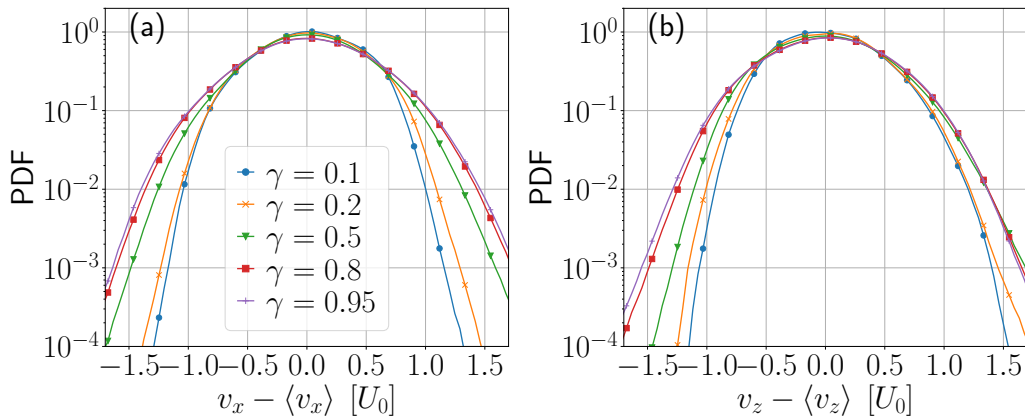


Figura 3.4: Funciones de distribución de probabilidad (PDFs) de las componentes de la velocidad de las partículas v_x (izquierda) y v_z (derecha), con $Fr = 0,4$ y diferentes valores de $\gamma < 1$. Notar el aumento en la dispersión con el incremento de γ (es decir, a medida que la masa de las partículas disminuye).

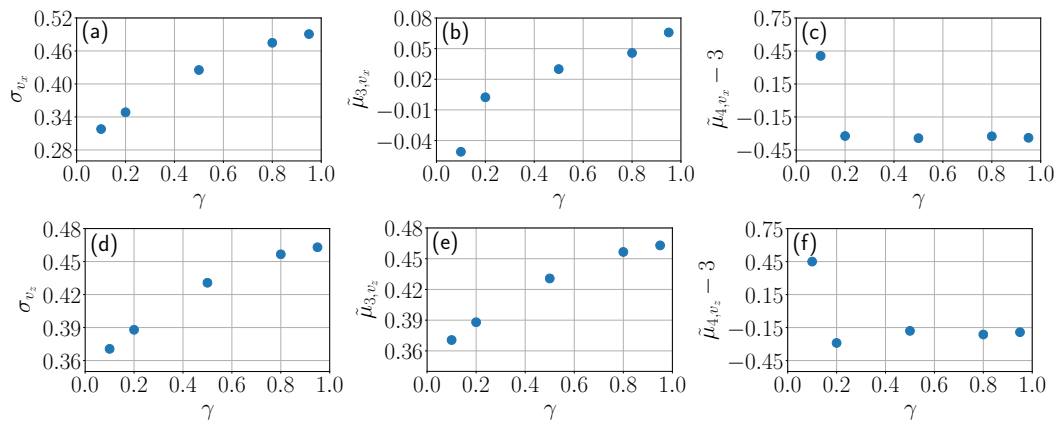


Figura 3.5: De izquierda a derecha: desviación estándar, asimetría "skewness" y curtosis de v_x en función de γ en la primera fila, y las mismas cantidades para v_z en la segunda fila. Todas las simulaciones tienen $Fr = 0,4$.

ciones con $Fr = 0,4$ fijo y γ variables.

En las Figuras 3.5(a) y (d), se observa un incremento en la desviación estándar de v_x y v_z a medida que γ aumenta, confirmando las observaciones en la Figura 3.4. La Figura 3.5(b) muestra que la PDF de v_x es aproximadamente simétrica (es decir, $\hat{\mu}_{3,v_x}$ está cerca de cero), en concordancia con las simetrías del sistema. En comparación, la Figura 3.5(e) muestra una desviación grande y sistemática en el comportamiento de $\hat{\mu}_{3,v_z}$, confirmando la asimetría observada en la Figura 3.4. Curiosamente, esta asimetría disminuye junto con γ , a medida que la asimetría en v_z se aproxima a cero, lo que puede deberse a que partículas muy pesadas son menos sensibles a las fluctuaciones turbulentas del fluido. Los valores $\hat{\mu}_{3,v_z} > 0$ también indican que es más probable encontrar partículas cayendo más rápido que la velocidad vertical promedio, que es más lento que esta velocidad (para valores pequeños de γ , o para partículas más pesadas, este resultado es similar a las observaciones de gotas de lluvia, que son mucho más pesadas que el fluido portador (ver Montero-Martnez y col. 2009). Finalmente, las Figuras 3.5(c) y (f) muestran la curtosis de v_x y v_y en función de γ ; se resta un valor de 3 a la curtosis ya que $\tilde{\mu}_4 = 3$ para una distribución gaussiana. Se observan valores más pequeños de curtosis (es decir, estadísticas ligeramente sub-gaussianas) para valores más grandes de γ . Sin embargo, las partículas con $\gamma = 0,1$ tienen $\tilde{\mu}_4 > 3$ y son débilmente leptocúrticas.

Para estudiar más a fondo las fluctuaciones en la velocidad horizontal de las partículas (es decir, perpendiculares a la dirección de la gravedad), definimos los incrementos en esta velocidad como

$$\delta v_x(\tau) = v_x(t + \tau) - v_x(t), \quad (3.8)$$

para un intervalo de tiempo dado τ . El intervalo de tiempo τ se elige como una fracción del tiempo de respuesta de Stokes τ_p . Para $\tau < \tau_p$ y para partículas pesadas, se espera que las estadísticas de $\delta v_x(\tau)$ se aproximen a una gaussiana y que las fluctuaciones se vuelvan pequeñas, ya que el arrastre filtra fluctuaciones rápidas en el campo de velocidad. Sin embargo, para partículas no tan pesadas, el término de masa añadida proporcional a la aceleración lagrangiana del fluido puede introducir fluctuaciones rápidas e intermitentes en la velocidad de las par-

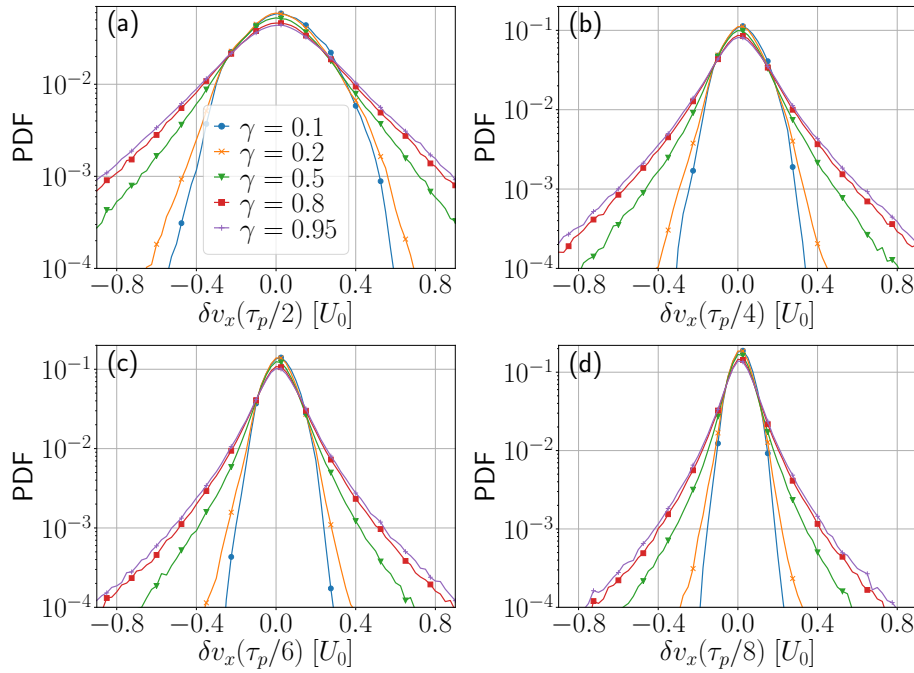


Figura 3.6: Funciones de distribución de probabilidad de las variaciones de la velocidad v_x en un intervalo de tiempo dado $\tau = \tau_p/2, \tau_p/4, \tau_p/6, \text{ y } \tau_p/8$, para partículas con $Fr = 0,4$ y para diferentes valores de γ . Notar que las colas se hacen más pesadas a medida que γ aumenta, es decir, a medida que las partículas se vuelven más ligeras.

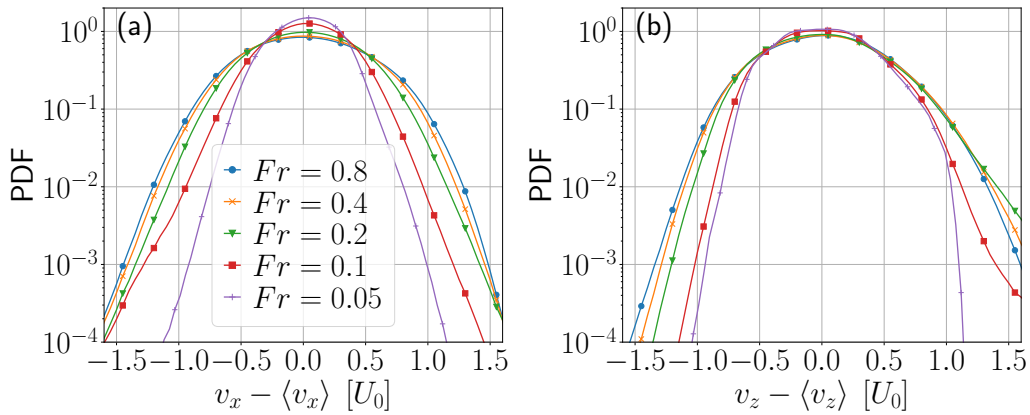


Figura 3.7: PDFs de las componentes de la velocidad de las partículas v_x (izquierda) y v_z (derecha), con $\gamma = 0,5$ y diferentes valores de Fr . Notar el aumento en la dispersión con el incremento de Fr (es decir, a medida que la aceleración inercial se vuelve comparable con la gravedad).

tículas, resultando en PDFs leptocúrticas de $\delta v_x(\tau)$. En la Figura 3.6 se muestran valores de $\tau = \tau_p/2, \tau_p/4, \tau_p/6, \text{ y } \tau_p/8$. Es importante notar que las fluctuaciones en la velocidad, en diferentes escalas temporales, está asociada a las colisiones entre partículas: a mayores fluctuaciones podemos esperar más colisiones, con un impacto en la formación de gotas o en la tasa de contacto dependiendo del tipo de partículas consideradas en un contexto geofísico.

3.4.2. Efectos del número de Froude

Ahora consideramos los momentos estadísticos de las velocidades de las partículas, pero en el caso en el que la razón de densidades de masa γ se mantiene

fija en un valor de 0,5 (es decir, las partículas son dos veces más pesadas que el fluido desplazado), y la aceleración gravitacional g se modifica con respecto a la aceleración a la escala de Kolmogorov a_η . Esto corresponde a las simulaciones en la Tabla 3.2. El número de Froude se modifica en el rango $Fr \in [0,05, 0,8]$, es decir, g varía entre $1,25a_\eta$ (para $Fr = 0,8$) y $20a_\eta$ (para $Fr = 0,05$). Notar que el efecto de este cambio en la ecuación (3.3) no es exactamente el mismo que cambiar γ . Mientras que cambiar γ (manteniendo fijo St) modifica la amplitud de los términos segundo y tercero en el lado derecho de la ecuación para $\dot{\mathbf{v}}$, cambiar g solo modifica la amplitud del segundo término mientras mantiene el tercero constante.

Las PDFs de v_x y v_z para estas simulaciones (con sus valores promedio restados) se muestran en la Figura 3.7. Se puede observar una disminución en la dispersión de la velocidad para valores menores de Fr (es decir, para valores mayores de g). Pero, de manera interesante, también observamos una asimetría en las PDFs de v_z , que es más pronunciada para valores intermedios de Fr . En otras palabras, para valores intermedios de Fr es más probable encontrar partículas cayendo más rápido que su velocidad vertical promedio.

Para cuantificar el efecto de variar Fr en los momentos de estas PDFs, volvemos al estudio de la desviación estándar, la asimetría y la curtosis de v_x y v_z , ahora en función de Fr . Las Figuras 3.8(a) y 3.8(d) muestran σ_{v_x} y σ_{v_z} para las simulaciones en la Tabla 3.2. La desviación estándar de ambas componentes de velocidad disminuye con la disminución de Fr (es decir, con el aumento de g/a_η), como también disminuía con la disminución de γ (es decir, para partículas más pesadas). La asimetría de v_x , mostrada en la Figura 3.8(b), está cerca de cero como se espera de las simetrías del sistema, y como fue el caso en las simulaciones con variación de γ . Sin embargo, la asimetría de v_z es positiva y significativamente mayor, consistente con las PDFs en la Figura 3.7. Además, $\tilde{\mu}_{3,v_z}$ crece con el aumento de Fr alcanzando un máximo cuando $g = 5a_\eta$ ($Fr = 0,2$), y luego disminuye para valores aún mayores de Fr . El primer incremento puede entenderse porque, para valores muy pequeños de Fr (valores grandes de g), las fuerzas gravitacionales se vuelven dominantes sobre la contribución del arrastre y la aceleración lagrangiana en la ecuación (4.2), y al caer las partículas más rápido a través del fluido interactúan por

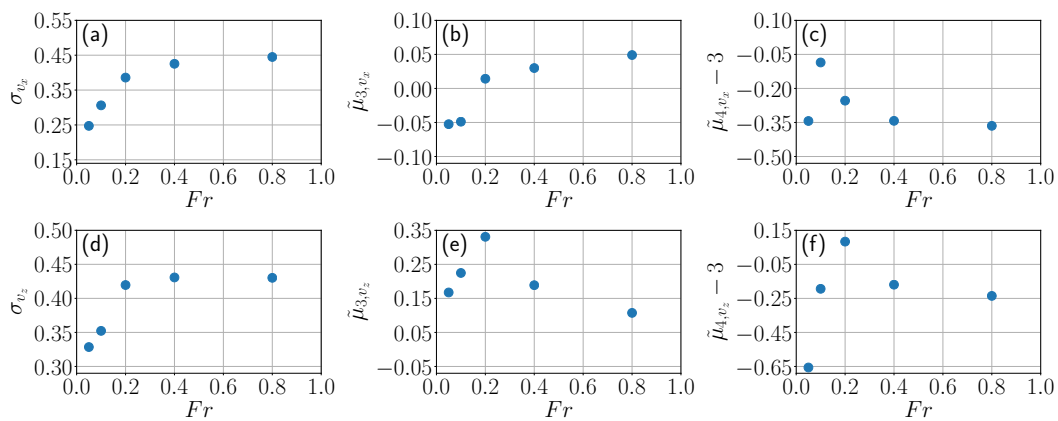


Figura 3.8: De izquierda a derecha: desviación estándar, asimetría "skewness" y curtosis de v_x en función de Fr en la primera fila, y las mismas cantidades para v_z en la segunda fila. Todas las simulaciones tienen $\gamma = 0,5$.

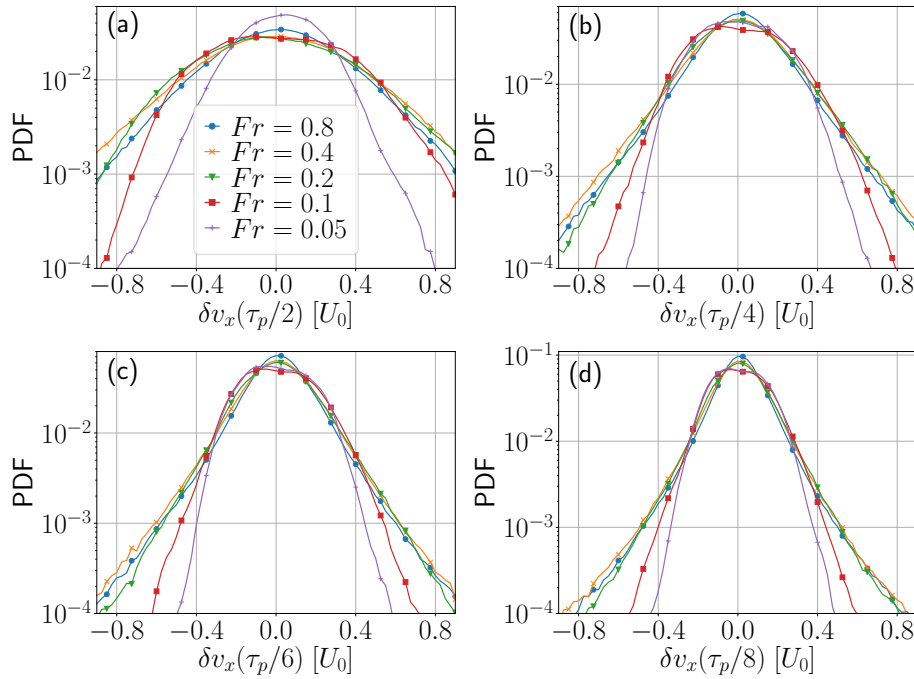


Figura 3.9: PDFs de las variaciones de la velocidad v_x en un intervalo de tiempo dado $\tau = \tau_p/2$, $\tau_p/4$, $\tau_p/6$, y $\tau_p/8$, para partículas con $\gamma = 0,5$ y diferentes valores de Fr . La dispersión disminuye para valores menores de Fr .

menos tiempo con las fluctuaciones locales del flujo. Finalmente, las Figuras 3.8(c) y 3.8(f) muestran la curtosis de v_x y v_z . Aunque el comportamiento de la curtosis es nuevamente no monótono con Fr , la mayoría de los casos son ligeramente subgaussianos excepto nuevamente para v_z en la simulación con $g = 5a_\eta$ ($Fr = 0,2$).

Finalmente, la Figura 3.9 muestra las PDFs de los incrementos en v_x para intervalos de tiempo $\tau = \tau_p/2$, $\tau_p/4$, $\tau_p/6$, y $\tau_p/8$. Las variaciones fuertes en v_x disminuyen para valores decrecientes de Fr (con las simulaciones con $Fr = 0,2$, $0,4$, y $0,8$ siendo prácticamente indistinguibles), y en particular, al compararse con las PDFs en la Figura 3.6 (con $Fr = 0,4$ fijo y diferentes valores de γ), las variaciones de velocidad para los casos con $Fr < 0,2$ son significativamente menores. Como veremos a continuación, para valores grandes de g/a_η las partículas tienden a caer a través de columnas de sedimentación, que confinan las partículas a regiones preferenciales en el flujo, resultando en una exploración reducida del flujo por parte de las partículas y también en menores variaciones en sus velocidades.

3.5. Formación de cúmulos y teselación de Voronoï

3.5.1. Acumulación y columnas de sedimentación

Para determinar y cuantificar las propiedades de acumulación de las partículas inerciales para los diferentes valores de γ y Fr , utilizamos un análisis tridimensional de teselación de Voronoï. De hecho, esta herramienta será usada para caracterizar clústers de partículas en toda la tesis. La teselación de Voronoï ha demostrado ser una herramienta útil para caracterizar la concentración preferencial de partículas (ver, por ejemplo, Monchaux y col. 2010, 2012; Obligado y col.

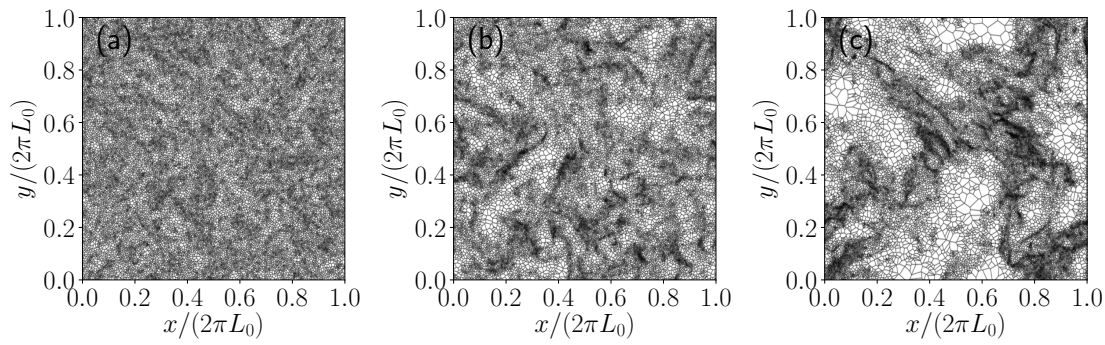


Figura 3.10: Celdas de Voronoi en un corte en el plano $x - y$ en $t \approx 50L_0/U_0$ para simulaciones con $Fr = 0,4$ y $\gamma = 0,95$ (izquierda), $0,5$ (centro) y $0,1$ (derecha).

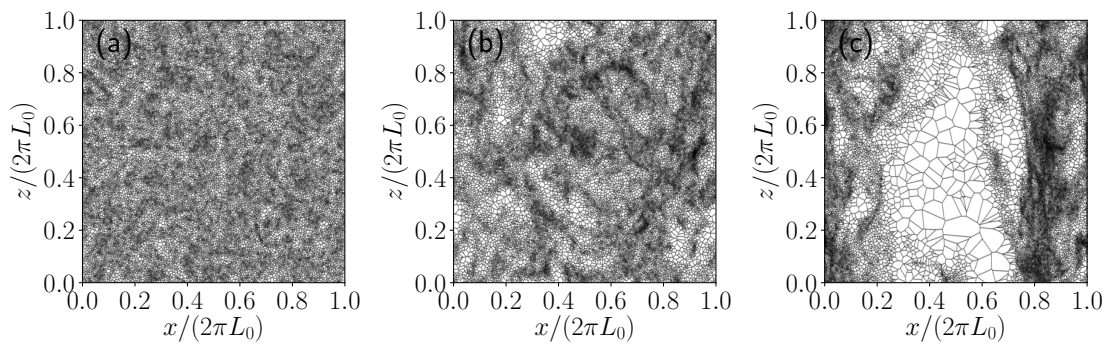


Figura 3.11: Celdas de Voronoi en un corte en el plano $x - z$ en $t \approx 50L_0/U_0$ para simulaciones con $Fr = 0,4$ y $\gamma = 0,95$ (izquierda), $0,5$ (centro) y $0,1$ (derecha). Note la formación de columnas.

2015; Sumbekova y col. 2017; Obligado y col. 2020), con la desviación estándar de los volúmenes de las celdas de Voronoi asociada a la cantidad de cúmulos de partículas (Monchaux y col. 2010, 2012; Obligado y col. 2014). Una teselación de Voronoi asigna una "celda" (o un volumen) a cada partícula, de modo que cada punto en esa celda está más cerca de esa partícula que de cualquier otra. Las celdas grandes de la teselación corresponden a vacíos (es decir, regiones con partículas muy separadas), mientras que las celdas pequeñas corresponden a partículas agrupadas que están más cerca que el promedio. Como se mencionó en la Sec. 3.2, dado que no consideramos interacciones entre partículas ni el impacto de las partículas en el flujo, el gran número de partículas se utiliza para estudiar la estadística de acumulación en la aproximación de un solo sentido (es decir, para entender cómo las partículas muestrean el flujo, independientemente de si las partículas con radio finito se superponen o no, o de si las fuerzas que las partículas deberían hacer sobre el fluido cambian la dinámica). Este último efecto es solo importante si la densidad de partículas es muy alta. Sobre el primer efecto despreciado, el de los posibles choques o la superposición de partículas, posteriormente mostraremos que la estadística de la acumulación es la misma si se consideran las 10^6 partículas en cada simulación, o si se analiza un conjunto de realizaciones del flujo con un menor y más realista número de partículas (de modo que las partículas no se superpongan). En otras palabras, para estudiar flujos con material particulado poco denso, la metodología que usamos es correcta en la medida en la que al poner muchas partículas no interactuantes solo busquemos aumentar la estadística.

Como ilustración de las estructuras que surgen como resultado de la acumula-

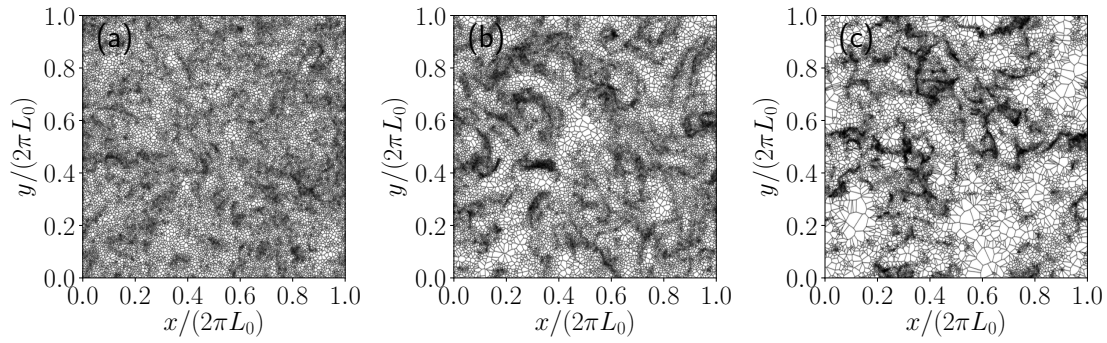


Figura 3.12: Celdas de Voronoi en un corte en el plano $x - y$ en $t \approx 50L_0/U_0$ para simulaciones con $\gamma = 0,5$ y $Fr = 0,8$ (izquierda), $0,2$ (centro) y $0,05$ (derecha).

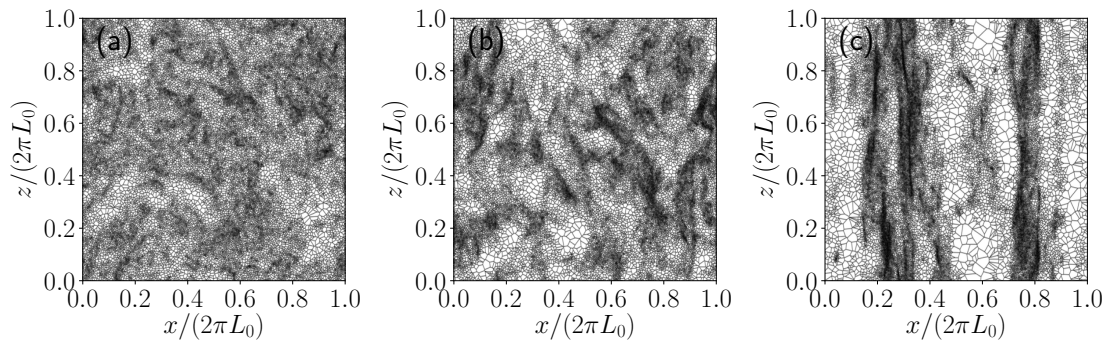


Figura 3.13: Celdas de Voronoi en un corte en el plano $x - z$ en $t \approx 50L_0/U_0$ para simulaciones con $\gamma = 0,5$ y $Fr = 0,8$ (izquierda), $0,2$ (centro) y $0,05$ (derecha).

ción de partículas que ocurre espontáneamente en un flujo turbulento, la Figura 3.10 muestra las celdas de Voronoi en un plano $x - y$ en $t \approx 50L_0/U_0$ para tres simulaciones con $Fr = 0,4$ fijo, y diferentes valores de γ : $0,95$ (es decir, partículas con densidad de masa cercana a la del fluido), $0,5$ (es decir, partículas dos veces más pesadas que el fluido), y $0,1$ (partículas 10 veces más pesadas que el fluido). A medida que γ disminuye y las partículas se vuelven más pesadas (para St fijo), aparecen parches localizados claros y oscuros. Como la densidad de partículas es inversamente proporcional a los volúmenes de las celdas (solo hay una partícula por celda), los parches oscuros corresponden a acumulaciones de partículas, mientras que los claros a vacíos. Esto es esperable: se sabe que las partículas pesadas tienden a agruparse, especialmente para números de Stokes cercanos a uno (Goto y col. 2008; Monchaux y col. 2010; Obligado y col. 2014). Notar también que la acumulación fuerte ocurre en regiones similares, especialmente para las partículas con $\gamma = 0,5$ o $0,1$ (aunque las partículas sean diferentes, con diferentes valores de γ o Fr , el flujo turbulento subyacente es el mismo para todas las partículas diferentes).

Sin embargo, el efecto de variar la razón de masas entre el fluido y la partícula γ en presencia de gravedad tiene otro efecto: las partículas pueden sedimentarse. La Figura 3.11 muestra las celdas de Voronoi en un corte en el plano $x - z$, al mismo tiempo, para las mismas simulaciones que en la Figura 3.10. Para Fr fijo, a medida que γ disminuye (es decir, a medida que la masa de las partículas aumenta), la acumulación se ordenan en columnas verticales de sedimentación a través de las cuales las partículas caen preferentemente, con grandes vacíos entre

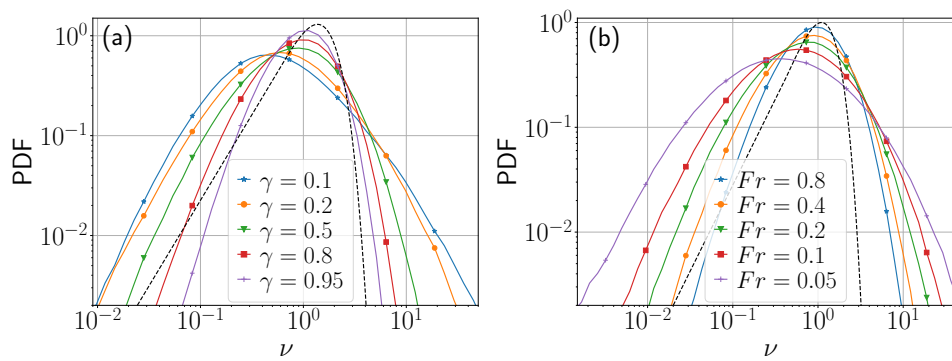


Figura 3.14: PDFs de los volúmenes de Voronoi \mathcal{V} para simulaciones con (a) diferentes valores de γ y $Fr = 0,4$ fijo, y (b) diferentes valores de Fr y $\gamma = 0,5$ fijo. La línea discontinua negra indica como referencia la PDF cuando las partículas están distribuidas aleatoriamente según un proceso de Poisson.

estas columnas (ver el caso con $\gamma = 0,1$). Esto explica las menores fluctuaciones en las velocidades de las partículas para este caso reportadas en las secciones anteriores: las partículas más pesadas exploran menos regiones del flujo a medida que sedimentan. La generación de columnas de sedimentación en presencia de gravedad, y el aumento asociado de los clústeres de partículas se ha observado antes pero en el límite de partículas pesadas (H. Bec J. H. y col. 2014; Falkinhoff y col. 2020).

Resultados similares se muestran en las Figuras 3.12 y 3.13 para simulaciones con $\gamma = 0,5$ fijo, y diferentes valores de Fr , respectivamente para cortes en los planos $x - y$ y $x - z$. En los cortes $x - y$ en la Figura 3.12 el desarrollo de cúmulos puede observarse para masas de partículas y números de Stokes fijos a medida que Fr disminuye (es decir, a medida que la gravedad aumenta en comparación con a_{η}). La formación asociada de columnas es clara en los cortes $x - z$ mostrados en la Figura 3.13, particularmente para el caso con $Fr = 0,05$. Notar que las columnas se desarrollan en este caso como en el caso de partículas más pesadas, aunque $\gamma = 0,5$ y las partículas son solo dos veces más pesadas que el fluido desplazado.

Curiosamente, existe una correlación entre la formación de estas estructuras y el comportamiento de la velocidad de sedimentación discutido en la Sec. 3.3. Por un lado, las simulaciones con columnas de sedimentación (como, por ejemplo, la simulación con $Fr = 0,4$ y $\gamma = 0,1$ en la Figura 3.11, o la simulación con $Fr = 0,05$ y $\gamma = 0,5$ en la Figura 3.13), o simulaciones sin columnas, tienen velocidades terminales iguales o mayores que la velocidad de Stokes ($\langle v_z \rangle / v_{\tau} \geq 1$) en la Figura 3.3(b). Por otro lado, las simulaciones en transición entre los dos regímenes, con columnas de vida corta o pequeñas (la simulación con $Fr = 0,4$ y $\gamma = 0,5$ en la Figura 3.11, y la simulación con $Fr = 0,2$ y $\gamma = 0,5$ en la Figura 3.13) tienen $\langle v_z \rangle / v_{\tau} < 1$ en la Figura 3.3(b), y muestran una mayor asimetría en las PDFs de v_z como se ve en las Figuras 3.7(b) y 3.8. Esto también está en acuerdo cualitativo con un mecanismo modificado de "sweep-stick" en presencia de gravedad presentado en Falkinhoff y col. 2020.

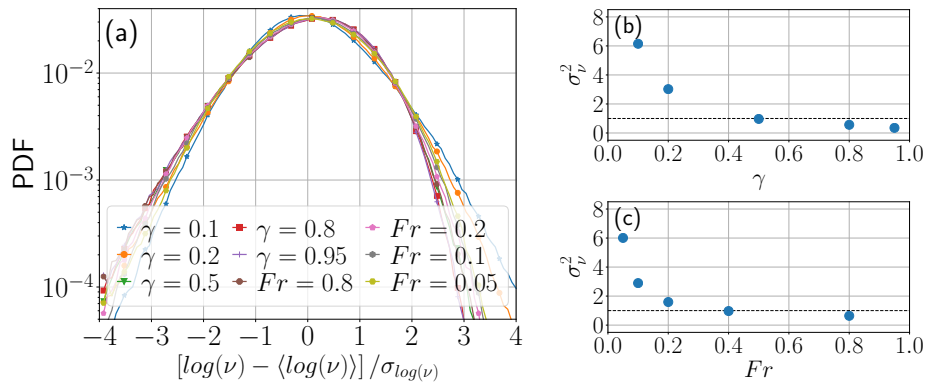


Figura 3.15: (a) PDF de los volúmenes de Voronoi \mathcal{V} para todas las simulaciones, con el logaritmo (en base 10) de los volúmenes centrados alrededor de la media y normalizados por la dispersión. Las simulaciones con valores variables de γ tienen $Fr = 0,4$, y las simulaciones con valores variables de Fr tienen $\gamma = 0,5$. (b) Varianza de los volúmenes de Voronoi, σ_V^2 , en función de γ . (c) Lo mismo en función de Fr . La línea horizontal discontinua en los paneles (b) y (c) indica $\sigma_V^2 = 1$ como referencia. Partículas ligeras o con gravedad pequeña tienen $\sigma_V^2 < 1$.

3.5.2. Estadística de los volúmenes de Voronoi

Como ya se mencionó, la formación de cúmulos puede cuantificarse a partir de las PDFs de las celdas de Voronoi y de su desviación estándar (Monchaux y col. 2010, 2012). La Figura 3.14 muestra las PDFs de los volúmenes normalizados, \mathcal{V} , de las celdas de Voronoi para todas las partículas (donde \mathcal{V} es el volumen de las celdas normalizado por el volumen promedio de las celdas, y por lo tanto es adimensional). Para $Fr = 0,4$ fijo y valores decrecientes de γ (es decir, para partículas más pesadas), las PDFs se ensanchan. Un comportamiento similar se observa para $\gamma = 0,5$ fijo a medida que Fr disminuye. Como referencia, la Figura 3.14 también muestra la PDF generada por un proceso aleatorio de Poisson (RPP por sus siglas en inglés); esta es la distribución de probabilidad que se obtiene para partículas distribuidas aleatoria y uniformemente en el espacio (Tanemura 2003; Uhlmann 2020). Las desviaciones de las PDFs con respecto a la RPP (y en particular, las colas más pesadas a la izquierda de la PDF) se consideran una indicación de la formación de cúmulos. Notar que esto corresponde a mayor probabilidad de encontrar celdas muy chicas, es decir, partículas muy juntas. Un aumento en el ancho de las PDFs, o en sus desviaciones estándar, también indica un mayor grado de acumulación de las partículas. Esto se observa en particular a medida que las partículas se vuelven más pesadas, o a medida que la gravedad aumenta en comparación con la aceleración en la escala de Kolmogorov. Esto también está de acuerdo con los resultados mostrados en las Figuras 3.11 y 3.13: para valores grandes de γ o valores pequeños de Fr , las partículas forman columnas de sedimentación que aumentan el tamaño de los cúmulos, así como de los vacíos. De hecho, en este caso, las partículas en las columnas de sedimentación están más juntas (lo que resulta en mayor probabilidad de encontrar celdas de Voronoi más pequeñas), y dado que el número de partículas es el mismo en todas las simulaciones, esto también resulta en mayor probabilidad de encontrar vacíos más grandes.

La Figura 3.15(a) muestra todas las PDFs, con el logaritmo de los volúmenes de las celdas de Voronoi centrados alrededor de su media, y normalizados por sus

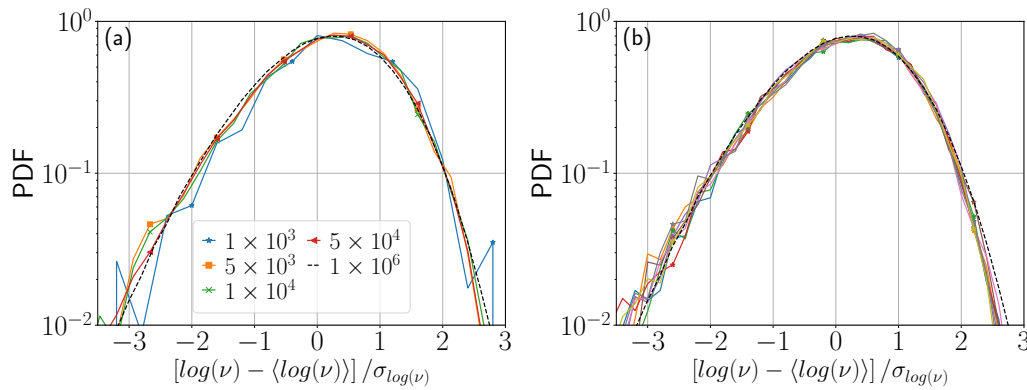


Figura 3.16: PDFs de los volúmenes de Voronoï normalizados \mathcal{V} para la simulación con $\gamma = 0,5$ y $Fr = 0,4$, con el logaritmo (en base 10), utilizando (a) un subconjunto del total de partículas, con tamaños variables de 10^3 a 10^6 partículas (el total de partículas disponibles, indicado por la línea discontinua negra; todos los tamaños de los subconjuntos utilizados están indicados en el recuadro), y (b) para diferentes subconjuntos de 10^3 partículas, comparado con la PDF para las 10^6 partículas (indicado por la línea discontinua negra).

desviaciones estándar. En estudios previos considerando partículas muy pesadas (Obligado y col. 2011; Obligado y col. 2014) se observó que cambiar los números de Reynolds y de Stokes esencialmente cambia la estadística de los volúmenes pequeños correspondientes a regiones de partículas altamente concentradas (es decir, la cola izquierda de las PDFs en la Figura 3.15), mientras que los volúmenes grandes correspondientes a vacíos (es decir, la cola derecha de las PDFs) permanecen aproximadamente insensibles a tales cambios. En nuestras simulaciones, con St y Re_λ fijos, vemos que estas colas son afectadas tanto por Fr como por γ . Además, el efecto de estos parámetros no es exactamente el mismo: aumentar la masa de las partículas hace que la probabilidad de encontrar vacíos sea mayor que en el caso cuando se aumenta la aceleración de la gravedad.

Las Figuras 3.15(b) y (c) muestran la varianza de los volúmenes de Voronoï $\sigma_{\mathcal{V}}^2$ en función de γ y Fr . Como referencia, un RPP tiene $\sigma_{\mathcal{V}} \approx 0,42$ (Tanemura 2003; Uhlmann 2020) (por lo tanto, $\sigma_{\mathcal{V}}^2 \approx 0,18$). A medida que las partículas se vuelven más pesadas, o la gravedad aumenta (Fr disminuye), $\sigma_{\mathcal{V}}^2$ se vuelve mucho mayor que este valor, indicando una acumulación de partículas más fuerte. Sin embargo, para partículas ligeras (o, en el caso de partículas con $\gamma = 0,5$ a medida que la gravedad disminuye) $\sigma_{\mathcal{V}}^2$ tiende a disminuir y volverse menor que uno, aunque incluso para $\gamma = 0,95$ todavía observamos algo de acumulación débil (es decir, $\sigma_{\mathcal{V}}^2 > 0,18$).

Para cerrar esta sección, veamos que si consideramos pocas partículas en el fluido (es decir, un número más chico de partículas que el número artificialmente grande que estamos usando para mejorar la estadística), los resultados son los mismos. En otras palabras, veamos que las propiedades estadísticas de la acumulación (cuando los volúmenes de Voronoï están normalizados por la media) son las mismas cuando se consideran razones volumétricas de partículas más realistas. La Figura 3.16(a) muestra las PDFs de los volúmenes de Voronoï para todas las simulaciones, con el logaritmo de los volúmenes centrado alrededor de la media y normalizado por la dispersión, para diferentes subconjuntos de partículas elegidas aleatoriamente de un total de 10^6 partículas. Un menor número de

partículas (y más realista si queremos material particulado poco denso), como por ejemplo 10^3 partículas, muestra la misma acumulación excepto por las mayores fluctuaciones en la PDF (esperadas como resultado de la estadística limitada). Sin embargo, cuando se considera un ensamble estadístico de 10 subconjuntos de 10^3 partículas, como se muestra en la Figura 3.16(b), las PDFs convergen a los resultados mostrados para 10^6 partículas. Note que esto no implica que variar la densidad de partículas en un fluido no afecte la sedimentación o la acumulación. De hecho, se ha demostrado (Safak y col. 2013; Sahin y col. 2017; Mora y col. 2021) que variar la concentración de partículas afecta a ambos. Lo que esto muestra, en cambio, es que para simulaciones de partículas en un fluido en un régimen diluido (el régimen descrito por nuestras ecuaciones de movimiento), cargar el flujo con un gran número de partículas "de prueba" puede mejorar la estadística al tiempo que produce los mismos resultados si las partículas se consideran como múltiples conjuntos en un ensamble estadístico. Finalmente, es interesante notar que para que esto funcione, los subconjuntos de partículas deben ser seleccionados aleatoriamente del conjunto más grande.

3.6. Desentrañando los efectos de masa añadida y tamaño del dominio

Una de las principales diferencias de este trabajo con estudios previos sobre la acumulación y la sedimentación de partículas acopladas en un solo sentido es que consideramos partículas con densidad de masa moderada, mientras que estudios como los de H. Bec J. H. y col. 2014; Falkinhoff y col. 2020 consideraron partículas pesadas. Esto da lugar a la aparición de efectos del fluido y de masa añadida en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol, controlados por el parámetro R . Para desentrañar aún más la contribución de este término en la sedimentación y la acumulación, ahora variamos R de forma independiente del resto de los parámetros. Finalmente, también mostramos que la formación de columnas de sedimentación en las simulaciones no se ve afectada por el tamaño del dominio.

3.6.1. Efecto de variar artificialmente el parámetro de razón de masas

Hasta ahora, el valor del parámetro de razón de masas, R , se ha modificado junto con γ (la razón entre la densidad del fluido y la densidad de las partículas), según $R = \gamma/(1 + \gamma/2)$. Sin embargo, γ también cambia el valor de la tasa de sedimentación para el fluido en reposo W en la ecuación (4.2), y como resultado es difícil diferenciar el efecto de cada uno de estos términos por separado en los resultados. Para estudiar el efecto de la masa añadida en la sedimentación y la acumulación, ahora variamos R de forma artificial, independientemente del valor de γ en las simulaciones (es decir, manteniendo la amplitud de todos los demás términos en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol constante). Denominaremos a este valor sintético de R como R_* . Las ecuaciones de movimiento de las partículas se definen entonces como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\tau_p} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(t)] - \frac{W}{\tau_p} \hat{z} + \frac{3}{2} R_* \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (3.9)$$

donde las expresiones de τ_p y W son las mismas que antes. Notar que esto nos permite cuantificar el efecto de la masa añadida (es decir del arrastre de parte del fluido por la partícula en movimiento) en la dinámica de las partículas. Presentamos a continuación los resultados para la simulación $g1\gamma05$ en la Tabla 3.1 (con $Fr = 0,4$, $\gamma = 0,5$, y $R = 0,4$), y para otras dos simulaciones con los mismos parámetros (es decir, manteniendo $Fr = 0,4$ y $\gamma = 0,5$) pero con $R_* = 0,2R$ o con $R_* = 1,6R$.

La Figura 3.17 muestra la velocidad vertical promedio de las partículas (promediada sobre todas las partículas) en función del tiempo, para estas simulaciones. La línea discontinua horizontal indica la velocidad terminal teórica de Stokes. Para valores más grandes de R_* , la velocidad de sedimentación real se vuelve menor que la velocidad de Stokes. En otras palabras, valores mayores de R_* resultan en una sedimentación más lenta, mientras que valores menores de R_* resultan en una sedimentación más rápida.

Este cambio puede entenderse parcialmente a partir de las PDFs de las velocidades de las partículas en estas simulaciones (ver Figura 3.18). Para v_x y v_z , valores mayores de R_* resultan en colas más pronunciadas (es decir, mayor probabilidad de encontrar valores extremos de las velocidades de las partículas). Esto es esperable, ya que $D_t \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, y se espera que la aceleración lagrangiana sea no gaussiana incluso cuando \mathbf{u} es gaussiana, resultando en velocidades de las partículas leptocúrticas. Esto confirma la observación previa de que los efectos de masa añadida favorecen el "merodeo" de las partículas y son responsables del comportamiento leptocúrtico de las PDFs. De hecho, para valores menores de R_* , las PDFs se acercan más a una distribución gaussiana. Sin embargo, y más interesante, las PDFs de v_z también se vuelven más asimétricas a medida que R_* aumenta. En otras palabras, existe una mayor probabilidad de encontrar partículas individuales cayendo más rápido que la velocidad promedio a medida que R_* aumenta. Esto da lugar a la siguiente imagen: a medida que R_* aumenta, las partículas tienden a "merodea" más (es decir, las partículas se mueven más al azar en el plano horizontal, recorren trayectorias más largas al caer, y $\langle v_z \rangle$ disminuye), pero hay más probabilidades de encontrar unas pocas partículas cayendo más rápido que la velocidad promedio. Este es el efecto de la intermitencia del flujo

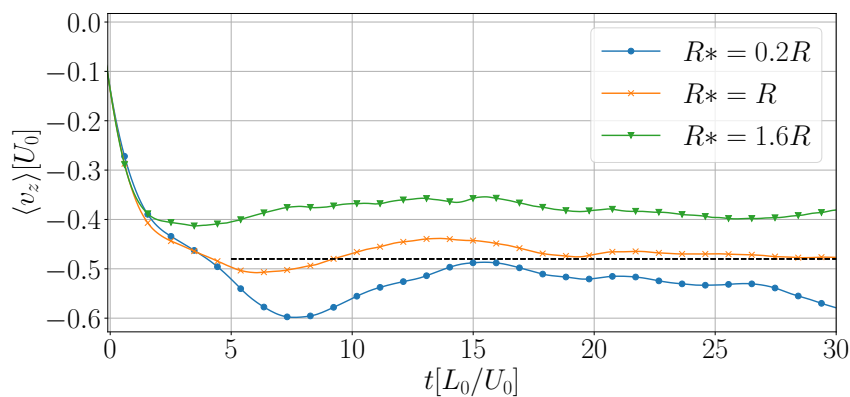


Figura 3.17: Velocidad vertical promedio de las partículas en función del tiempo, para todas las simulaciones con $Fr = 0,4$ y diferentes valores de R_* (con un valor base de $R = 0,4$). La línea discontinua horizontal indica la velocidad terminal teórica de Stokes para el fluido en reposo.

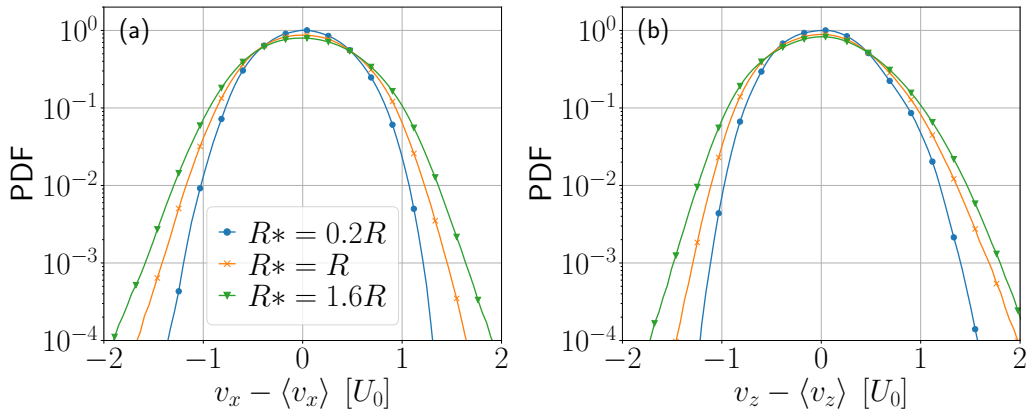


Figura 3.18: Funciones de distribución de probabilidad (PDFs) de las componentes de la velocidad de las partículas (a) v_x y (b) v_z , con $Fr = 0,4$ y diferentes valores de R_* , usando un valor base de $R = 0,4$. Notar el aumento en las colas (y en la asimetría para v_z) con el incremento de R_* .

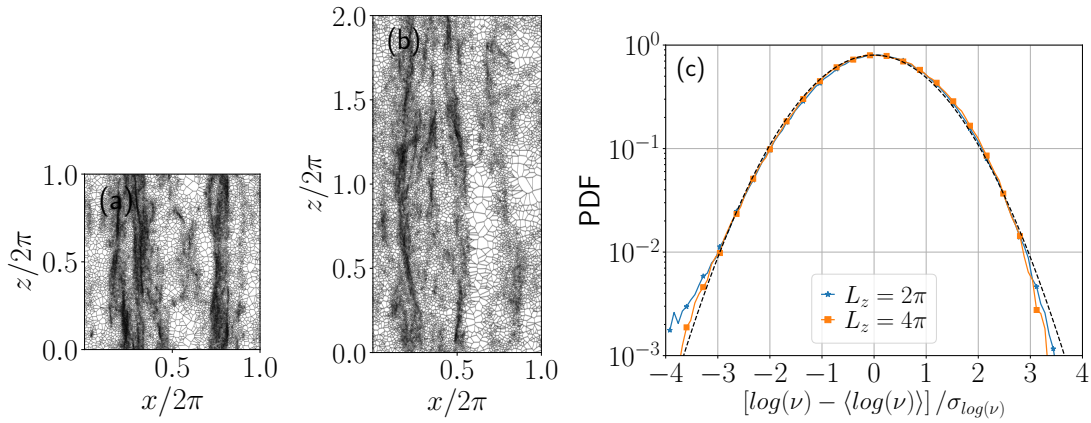


Figura 3.19: Celdas de Voronoi en un corte en el plano $x - z$ en $t \approx 50L_0/U_0$, para dos simulaciones con $\gamma = 0,5$ y $Fr = 0,05$, en (a) una simulación con un dominio cúbico de altura $L_z = 2\pi$, y (b) en una simulación con un dominio con el doble de altura. El panel (c) muestra las PDFs de los volúmenes de Voronoi normalizados \mathcal{V} , con el logaritmo (en base 10), en ambas simulaciones. La línea discontinua indica un proceso de Poisson aleatorio.

en la dinámica de las partículas, que se vuelve más relevante a medida que R_* aumenta.

3.6.2. Efecto de variar la altura del dominio

Finalmente, verificamos que la formación de columnas de sedimentación no es el resultado de efectos asociados al tamaño finito del dominio, y que no depende fuertemente de ellos. Para ello comparamos dos simulaciones: la simulación $g8\gamma05$ en un dominio periódico $(2\pi L_0)^3$ (con $\gamma = 0,5$ y $Fr = 0,05$), y una simulación con los mismos parámetros pero en un dominio periódico con tamaño $2\pi L_0 \times 2\pi L_0 \times 4\pi L_0$ (es decir, el doble de alto). En esta última simulación, para romper cualquier periodicidad 2π en z , también excitamos con una pequeña perturbación el forzado de los modos de Fourier con longitud de onda vertical $\lambda_z = 4\pi L_0$.

Las Figuras 3.19(a) y 3.19(b) muestran las celdas de Voronoi en un corte en el plano $x - z$ en $t \approx 50L_0/U_0$ para ambas simulaciones. Notar que, dado que tenemos 10^6 partículas en ambos casos, como el volumen del fluido en la segunda

simulación se duplica, la densidad de partículas (y de celdas de Voronoï) en la simulación en el dominio alargado se reduce a la mitad. A pesar de esto, observamos estructuras similares y el desarrollo de columnas de sedimentación en ambas simulaciones. La Figura 3.19(c) muestra las PDFs de los volúmenes de Voronoï \mathcal{V} en ambas simulaciones, centradas alrededor de su media y normalizadas por su dispersión. No se observan diferencias significativas entre ambas, lo que indica que las propiedades estadísticas de los cúmulos asociados a las columnas son similares y no están fuertemente afectados por efectos de dominio finito.

3.7. Discusión

En este capítulo presentamos un estudio numérico sobre la sedimentación y la acumulación de pequeñas partículas inerciales en turbulencia isótropa y homogénea, para partículas más densas que el fluido, pero no en el límite considerado con frecuencia en estudios previos, de partículas mucho más pesadas que el fluido desplazado (H. Bec J. H. y col. 2014; Falkinhoff y col. 2020). Para ello, se utilizó un modelo simple basado en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983), que incluye gravedad, arrastre de Stokes y efectos de masa añadida hasta el orden lineal en el radio de las partículas. Sin embargo, solo se consideró el acoplamiento en un sentido entre el fluido y las partículas (es decir, se despreció la fuerza que las partículas ejercen sobre el fluido); es importante destacar que el acoplamiento en ambos sentidos puede tener efectos significativos en la sedimentación a través de efectos colectivos (Huck y col. 2018), lo que constituye la primera limitación principal de nuestro estudio. Además, el número de partículas que usamos no es el de material particulado poco denso, dónde se podrían ignorar estas fuerzas. Por tanto, estas partículas deben considerarse como partículas de prueba, utilizadas en las simulaciones para mejorar la convergencia estadística, y el sistema no debe interpretarse como un flujo multifásico densamente cargado (Elghobashi 1994; Safak y col. 2013; Sahin y col. 2017; Mora y col. 2021). La segunda limitación está asociada a que despreciamos el término de Basset-Boussinesq en la dinámica de las partículas. En el capítulo 5 volveremos a este problema y estudiaremos el impacto de esta fuerza en las partículas.

Bajo estas aproximaciones, reportamos desviaciones de la velocidad de sedimentación de las partículas respecto a la velocidad terminal de Stokes en el fluido en reposo, una disminución de la desviación estándar de las velocidades de las partículas con la disminución de la razón de masas fluido-partícula y del número de Froude, y una dependencia no monótona de los momentos de orden superior de las velocidades de las partículas respecto a estos parámetros de control. La mayoría de las partículas caen, en promedio, más rápido que la velocidad terminal de Stokes. Sin embargo, en algunos casos se observa un comportamiento de "merodeo", asociado a: (1) casos con masa intermedia (en comparación con la masa del fluido desplazado) o aceleración de la gravedad intermedia (en comparación con la aceleración del fluido en la escala de Kolmogorov), (2) distribuciones sesgadas de la velocidad vertical, con una probabilidad mayor que la gaussiana de encontrar partículas cayendo más rápido que el promedio, y (3) casos transicionales en la formación de cúmulos, con columnas de sedimentación pequeñas o leves. También se observó que los efectos de masa añadida, en todos los casos pero especialmente

para partículas más ligeras o números de Froude mayores, incrementan las fuertes fluctuaciones leptocúrticas en las velocidades de las partículas. Esto se verificó también variando artificialmente la amplitud del parámetro de razón de masas, lo que indicó que este término también juega un papel relevante en los casos en que las partículas merodean.

Como en estudios previos (Monchaux y col. 2010, 2012; Obligado y col. 2015; Sumbekova y col. 2017; Obligado y col. 2020), se encontró que los teselados de Voronoï son una herramienta útil para caracterizar la formación de cúmulos. En los capítulos siguientes haremos uso extensivo de esta técnica. Usando los teselados se observó un aumento en la acumulación de las partículas al incrementar la aceleración de la gravedad y al disminuir la razón de masas fluido-partícula. En ambos casos, la acumulación más fuerte se asoció con la formación de columnas de sedimentación que atraviesan todo el volumen en la dirección vertical, a través de las cuales las partículas caen preferentemente con fluctuaciones menores que en casos sin columnas. Para partículas muy ligeras, las funciones de distribución de probabilidad de los volúmenes de Voronoï se aproximan a las de un proceso de Poisson aleatorio (es decir, el caso de partículas distribuidas aleatoria y uniformemente), aunque incluso para una razón de masas fluido-partícula de 0.95 todavía se observó una acumulación débil.

El estudio presentado en este capítulo, considerando turbulencia isótropa y homogénea, sirve para comprender la dinámica de material particulado en procesos relacionados con la microfísica de los flujos geofísicos. Para considerar escalas espaciales más grandes es necesario tomar en cuenta el efecto de la gravedad en el fluido, que resulta en la estratificación que observamos en la atmósfera estable y en los océanos. En el próximo capítulo extenderemos el estudio al caso de partículas ligeras o neutralmente flotantes en flujos turbulentos establemente estratificados (SST). En este contexto, la razón de masas entre el fluido y las partículas será igual a 1 en alguna altura de referencia, ya que, debido al empuje, las partículas tienden a permanecer en regiones del flujo con densidad similar. Mostraremos cómo esta condición genera cambios significativos en la dinámica vertical, el transporte horizontal y la acumulación preferencial.

Capítulo 4

Partículas inerciales con flotación neutra en turbulencia establemente estratificada

En el capítulo 3, exploramos los mecanismos fundamentales que explican la acumulación preferencial de partículas en flujos turbulentos isotrópicos y homogéneos (HIT). Se analizaron fenómenos característicos de las partículas inerciales, como la expulsión centrífuga y el mecanismo de "sweep-stick", mostrando cómo estos procesos influyen en la concentración inhomogénea de partículas pesadas. Además, se evaluó el impacto de la gravedad y otros efectos multiescala sobre la sedimentación y la dinámica de partículas con densidades moderadas, destacando cómo su dinámica difiere notablemente de la observada en partículas trazadoras. Estos conceptos establecen un marco de referencia clave para el análisis del presente capítulo. La dispersión de partículas inerciales por flujos turbulentos desempeña un papel fundamental en numerosos sistemas geofísicos, como la formación de nubes, la dispersión de contaminantes en la atmósfera y la dinámica del plancton en los océanos (Wyngaard 1992; D'Asaro y col. 2000; Watanabe y col. 2016; Amir y col. 2016). No obstante, la dinámica de estas partículas en dichos sistemas aún no se comprende completamente. Aunque las ecuaciones de movimiento para partículas pequeñas son conocidas (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983), el modelado del transporte de partículas en flujos geofísicos requiere simplificaciones debido a limitaciones computacionales, lo que ha llevado al uso de modelos reducidos (Wagner y col. 2019; Palmer 2019; Beron-Vera y col. 2019). Estos modelos desprecian términos importantes o realizan aproximaciones empíricas. Este capítulo está enfocado en el estudio de la dinámica y transporte de partículas pequeñas en turbulencia establemente estratificada (SST), un régimen que provee un modelo para flujos atmosféricos y oceánicos con características fundamentales que lo diferencian de HIT. Los resultados que se presentan en este capítulo fueron publicados en Reartes y col. 2023.

4.1. Diferencias entre SST y HIT

Como se detalló en el capítulo 2, la turbulencia establemente estratificada es intrínsecamente anisotrópa, lo que la distingue de HIT (E. Lindborg 2008; Marino

y col. 2014; Portwood y col. 2019). En este régimen, la estratificación reduce la velocidad vertical, confinando el flujo en movimientos cuasi-horizontales en capas, además de generar vientos horizontales con fuerte variabilidad vertical (Smith y col. 2002). Estas características permiten la coexistencia de ondas y turbulencia (Waite 2011; Maffioli 2017), y resulta en diversas leyes de escala espectrales que dependen de diversos parámetros adimensionales. Como se mencionó previamente considerar flujos estratificados nos brinda un modelo para la atmósfera y los océanos en escalas intermedias. Tanto la troposfera durante buena parte del día, como la estratosfera y los océanos están establemente estratificados. Y esta característica tiene un fuerte impacto en el transporte de partículas, como puede verse a simple vista en la dispersión del humo de una chimenea.

Desde una perspectiva lagrangiana, estudios recientes han abordado el transporte de partículas con inercia en estos flujos, mostrando que la dinámica y la acumulación preferencial de partículas dependen críticamente de la inercia y de la frecuencia de Brunt-Väisälä (Sozza y col. 2016). En particular, se ha demostrado que en flujos estratificados las partículas tienden a concentrarse en superficies isopicnicas debido al confinamiento vertical inducido por la estratificación (Sozza y col. 2016). Estos mecanismos de acumulación preferencial difieren significativamente de los mecanismos dominantes en HIT, como la expulsión centrífuga y el mecanismo de "sweep-stick" (Goto y col. 2008). Mientras que, como vimos en el capítulo anterior, las partículas pequeñas y pesadas tienden a acumularse en HIT, las partículas en turbulencia estratificada exhiben una dinámica significativamente diferente. Esto resalta la importancia de los modelos que incorporan tanto la estratificación del fluido como la inercia de las partículas. Estos hallazgos, junto con las bases teóricas y experimentales descritas en el capítulo anterior, fundamentan el análisis que se presenta en este capítulo.

El objetivo de este capítulo es estudiar la dinámica de partículas inerciales pequeñas en SST utilizando simulaciones numéricas directas (DNS) de las ecuaciones de Boussinesq acopladas con una modificación que desarrollaremos del modelo de Maxey-Riley-Gatignol (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983) con el fin de adaptarlo para considerar el efecto de la estratificación. Este análisis permitirá caracterizar el confinamiento vertical inducido por la estratificación, y los regímenes dinámicos de las partículas en función de los números de Stokes y Froude. Además, se estudiará la formación de clústeres mediante técnicas de teselación de Voronoi, explorando las regiones preferenciales de acumulación en el flujo.

4.2. Ecuaciones de movimiento

En este capítulo resolvemos numéricamente las ecuaciones de Boussinesq para un flujo incompresible, representadas por la ecuaciones (2.11) y (2.12), en un dominio periódico. Las longitudes y velocidades se consideran adimensionales, usando como antes una unidad de longitud L_0 y una unidad de velocidad U_0 .

Las partículas inerciales se modelan a partir de la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol (2.25), derivando una aproximación consistente con la realizada en el capítulo 2 para obtener las ecuaciones de Boussinesq. Además, asumiremos que la longitud típica sobre la cual el campo de velocidad cambia significativamente es mucho mayor que el radio de la partícula a , haciendo despreciables los

términos de Faxén. Recordemos que en la aproximación de Boussinesq para un flujo estratificado, las ecuaciones (2.11) y (2.12) se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes tras despreciar todas las fluctuaciones de densidad, excepto las que afectan la fuerza de empuje. Por lo tanto, para la dinámica de las partículas también consideramos solo la densidad y la masa del fluido desplazado por las partículas en términos de sus valores medios, respectivamente $\rho_f \approx \bar{\rho}_f = \rho_0$ y $m_f \approx \bar{m}_f = \rho_0 V_p$ (donde V_p es el volumen de las partículas), salvo en el término de gravedad. En ese término consideramos toda la dependencia de la densidad del fluido, $\rho_f = \rho_0 + d\bar{\rho}/dz(z-z_0) + \rho'$, para un perfil lineal de densidad de fondo. Como el flujo está establemente estratificado, $d\bar{\rho}/dz < 0$. Bajo estas aproximaciones, la ecuación para las partículas resulta en

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\bar{m}_f}{m_p} \right) &= \frac{6\pi a \bar{\rho}_f \nu}{m_p} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(t)] + \frac{3}{2} \frac{\bar{m}_f}{m_p} \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ &- g \left[1 - \frac{1}{\rho_p} \left(\rho_0 + \frac{d\bar{\rho}}{dz}(z-z_0) + \rho' \right) \right] \hat{\mathbf{z}} + \frac{6\pi a^2 \bar{\rho}_f \nu}{m_p} \int_0^t \frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{v}(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \nu (t-\tau)}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde \mathbf{x} es la posición de la partícula, \mathbf{v} es su velocidad, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad del fluido en la posición de la partícula, D/Dt es la derivada Lagrangiana, d/dt es la derivada temporal siguiendo la trayectoria de la partícula y ρ_p es la densidad de masa de la partícula (asumida esférica). En reposo, las partículas están en equilibrio (es decir, flotan neutralmente) cuando $1 - \rho_f/\rho_p = 0$.

Multiplicando y dividiendo el término de empuje en la ecuación (4.1) por ρ_0 , tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\bar{m}_f}{m_p} \right) &= \frac{6\pi a \bar{\rho}_f \nu}{m_p} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(t)] + \frac{3}{2} \frac{\bar{m}_f}{m_p} \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ &- \frac{\rho_0}{\rho_p} \left[\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}(z-z_0) + g \frac{\rho'}{\rho_0} \right] \hat{\mathbf{z}} + \frac{6\pi a^2 \bar{\rho}_f \nu}{m_p} \int_0^t \frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{v}(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \nu (t-\tau)}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde el coeficiente que multiplica al tercer término del lado derecho de la ecuación es $-N^2$, mientras que el segundo término dentro del mismo corchete puede escribirse como $N\zeta$, donde $\zeta = \rho'g/(N\rho_0)$ es la fluctuación de la densidad en unidades de velocidad. Reordenando los términos en la ecuación y usando unidades adimensionales finalmente obtenemos

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\tau_p} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(t)] - \frac{2}{3} N [N(z-z_0) - \zeta] \hat{\mathbf{z}} + \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \sqrt{\frac{3}{\pi \tau_p}} \int_0^t \frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{v}(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (4.3)$$

Esta es la ecuación general que describe la dinámica de partículas pequeñas en un flujo estratificado. Las partículas se vuelven neutralmente flotantes a una altura z_0 , en la que la densidad de las partículas y del fluido se igualan. Vale la pena destacar que cambiar la razón de masa entre el fluido y las partículas, $\gamma = \bar{m}_f/m_p$, es equivalente a cambiar el valor de referencia de la densidad media del fluido ρ_0 , lo que resulta en que las partículas tengan flotación neutra a diferente altura (o, equivalente, en una redefinición de z_0).

4.3. Estudios numéricos

Como discutimos anteriormente, la dinámica de las ecuaciones de Boussinesq está regida por el número de Reynolds Re y de Froude Fr . Además, utilizando estos parámetros también podemos definir el número de Reynolds de empuje $Rb = ReFr^2$, que proporciona una estimación de cuán turbulento es el flujo en la escala de empuje $L_b = U/N$, y juega un papel importante para caracterizar la dinámica del flujo. En este capítulo consideramos valores de parámetros típicos de flujos geofísicos. Recordemos que para $Rb \gg 1$ puede desarrollarse turbulencia estratificada fuerte, mientras que para $Rb \ll 1$, los movimientos turbulentos son fuertemente amortiguados por la viscosidad. Aunque los flujos geofísicos típicamente tienen Rb grande (observaciones en la termoclina oceánica muestran $Rb \approx 10^2$ a 10^3 (Moum 1996)), las limitaciones computacionales restringen los valores de Rb que pueden ser simulados directamente. Considerando estas limitaciones numéricas, en este trabajo estudiamos flujos con Rb entre 13 y 76. Estudios previos muestran que $Rb > 10$ es suficiente para alcanzar turbulencia fuerte en las escalas pequeñas (Ivey y col. 2008).

La escala de Ozmidov, $L_{Oz} = 2\pi/k_{Oz}$ (con $k_{Oz} = \sqrt{N^3/\epsilon}$), también juega un papel importante en la dinámica, ya que para escalas suficientemente pequeñas comparadas con L_{Oz} se espera que el flujo recupere la isotropía. Para $Rb > 1$, L_{Oz} es mayor que la escala de disipación de Kolmogorov η , y puede esperarse transporte turbulento cuasi-isótropo en las escalas dinámicas más pequeñas del flujo.

La elección de estos parámetros y del forzado determinan completamente a las simulaciones numéricas. En este capítulo, la turbulencia se mantiene mediante un forzado de Taylor-Green (Clark di Leoni y col. 2015), que genera pares de vórtices contra-rotantes a gran escala perpendiculares a la estratificación, con una capa de cizalla entre ellos. Esto genera un flujo de gran escala aproximadamente balanceado. Su expresión está dada por:

$$\mathbf{f} = f_0 \left[\sin(k_f x) \cos(k_f y) \cos(k_f z) \hat{\mathbf{x}} - \cos(k_f x) \sin(k_f y) \cos(k_f z) \hat{\mathbf{y}} \right], \quad (4.4)$$

donde f_0 es la amplitud del forzado, $k_f = 1/L_0$ es su número de onda, y L_0 una longitud unitaria. Este flujo ha sido usado previamente para estudiar turbulencia estratificada (J. J. Riley y col. 2003; N. E. Sujovolsky y col. 2019a). En el caso estratificado genera una circulación a gran escala vientos horizontales medios diferentes de cero solo en la capa de cizalla entre los vórtices de Taylor-Green. Este forzado es constante en el tiempo, por lo que no introduce nuevas escalas temporales en el sistema. El número de Froude puede considerarse como la razón entre la frecuencia resultante de estos vórtices a gran escala y la frecuencia de Brunt-Väisälä.

Las ecuaciones de Boussinesq fueron resueltas en un dominio tridimensional periódico, y al igual que para el flujo resuelto en el capítulo 3, usando un método pseudo-espectral paralelo y un esquema de Runge-Kutta de segundo orden para la integración temporal (P. Mininni y col. 2010). La ecuación para las partículas (4.3), se resolvió usando interpolación con splines de tercer orden para estimar las fuerzas en las posiciones de las partículas, junto con un método de Runge-Kutta de segundo orden para la evolución temporal (Yeung y col. 1988).

Tabla 4.1: Parámetros relevantes de las simulaciones del fluido. NT_0 es la frecuencia de Brunt-Väisälä en unidades de $T_0^{-1} = U_0/L_0$, Fr es el número de Froude, Re es el número de Reynolds, Rb es el número de Reynolds de empuje, L es la escala integral del flujo, η es la escala de Kolmogorov, L_b es la longitud de empuje, y L_{Oz} es la escala de Ozmidov. Todas las longitudes están en unidades de la longitud unitaria L_0 .

Sim.	NT_0	Fr	Re	Rb	L/L_0	η/L_0	L_b/L_0	L_{Oz}/L_0
N04	4	0.20	1900	76	1.27	0.0065	0.25	0.30
N08	8	0.12	1700	24	1.07	0.0065	0.13	0.10
N12	12	0.09	1600	13	1.00	0.0065	0.09	0.06

Tabla 4.2: Parámetros relevantes de las partículas en todas las simulaciones. St es el número de Stokes, τ_p/T_0 es el tiempo de Stokes en unidades de T_0 , a_p/η es el radio de las partículas en unidades de la escala de Kolmogorov, y Re_p son los respectivos números de Reynolds de las partículas para todas las frecuencias de Brunt-Väisälä.

Nombre	St	τ_p/T_0	a_p/η	Re_p		
				$NT_0 = 4$	$NT_0 = 8$	$NT_0 = 12$
St03	0.3	0.024	1.08	0.2	0.2	0.1
St1	1	0.076	1.85	0.7	0.5	0.2
St3	3	0.235	3.38	4.2	2.7	1.6

Realizamos varias simulaciones numéricas directas de las ecuaciones de Bousinesq con diferentes números de Froude, utilizando una resolución espacial de $N_x = N_y = 768$ y $N_z = 192$ puntos, en un dominio de longitud $L_x = L_y = 2\pi L_0$ en las direcciones horizontales, y $L_z = H = \pi L_0/2$ en la dirección vertical. Se consideraron tres frecuencias de Brunt-Väisälä diferentes (los tiempos se midieron en unidades de un tiempo característico $T_0 = L_0/U_0$; ver la Tabla 5.1 para encontrar todos los parámetros relevantes del fluido). Todas las simulaciones tienen un número de Prandtl $Pr = \nu/\kappa = 1$ (Li y col. 2021; Basu y col. 2021), que debe considerarse como un número de Prandtl efectivo turbulento. La viscosidad cinemática se eligió de modo que la escala de Kolmogorov $\eta \approx 0,0065L_0$ esté bien resuelta. Esto resulta en $\kappa\eta \approx 1,6$, donde $\kappa = N_x/(3L_0)$ es el número de onda máximo resuelto; valores de $\kappa\eta < 1$ se consideran como un criterio para tener simulaciones espacialmente bien resueltas (Donzis y col. 2010; Wan y col. 2010).

Una vez que los flujos en estas simulaciones alcanzaron un estado estacionario turbulento, distribuimos aleatoriamente partículas en una banda horizontal de ancho $H/5$ centrada en $z_0 = H/2$ (es decir, a la altura de la capa de cizalla del flujo de Taylor-Green), con velocidades iniciales iguales a la velocidad del fluido en el centro de cada partícula. En todo este capítulo, en la ecuación (4.3) de las partículas se desprecia el término de historia de Basset-Boussinesq. Sin embargo, dicho término se calculara *a posteriori* para estimar su relevancia en la dinámica. Los resultados obtenidos de esta estimación se desarrollarán en el capítulo 5. Estos resultados permitirán demostrar que en el caso de partículas inerciales flotantes en flujos establemente estratificados, existe una cota para el número de St y de Fr tal que se puede despreciar dicho término con un error mínimo (Reartes y col. 2024).

Al igual que en el capítulo anterior, las partículas están acopladas de manera unidireccional, no colisionan entre sí, y su fracción volumétrica es irrelevante

para la dinámica del flujo. En cada simulación de la Tabla 5.1 agregamos tres conjuntos de diferentes partículas con 10^6 partículas cada uno, con tres valores diferentes de τ_p (o, equivalentemente, diferentes números de Stokes), resultando en un total de 9 conjuntos de datos de partículas con diferentes valores de Fr y St . Las partículas se integraron durante casi 20 tiempos característicos del flujo a gran escala. La Tabla 5.2 lista los parámetros relevantes de todos estos conjuntos de datos, incluido el número de Reynolds de las partículas $Re_p = a|\mathbf{u} - \mathbf{v}|/\nu$ en cada caso, que en nuestras simulaciones toma valores entre 0,1 y 4,2. En principio, la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol es válida para $Re_p \lesssim 1$.

Las Tablas 5.1 y 5.2 deben leerse en conjunto, ya que, por ejemplo, podemos tener partículas con $St = 0,3$ en un flujo con $N = 4/T_0$, o las mismas partículas en un flujo con $N = 8/T_0$ o $12/T_0$. Como regla general, la fuerza de Basset-Boussinesq es menor que la fuerza de arrastre en todas las simulaciones excepto en los casos con $St = 3$; para esas partículas, el término de historia de Basset-Boussinesq se vuelve comparable al arrastre de Stokes (aunque ambos términos son menores que las fuerzas de empuje y masa añadida), y Re_p también supera la unidad. Por lo tanto, estudiar partículas con St más grandes requeriría tener al menos en cuenta la fuerza de Basset-Boussinesq (Aartrijk y col. 2010; Reartes y col. 2024), así como otras correcciones a la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol.

Para contextualizar estos valores adimensionales, consideremos el caso de flujos oceánicos. El número de Froude en el océano varía desde $\approx 10^{-2}$ para la circulación a gran escala, hasta 10^{-1} en escalas verticales del orden de $H = 1$ km (Vallis 2017). En este último caso, la frecuencia típica de Brunt-Väisälä es $N \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Usando estas escalas de longitud y tiempo para poner dimensiones en la simulación N08, las velocidades horizontales r.m.s. del fluido resultan $\approx 0,08 \text{ m s}^{-1}$, comparables a velocidades típicas en el océano de $0,1 \text{ m s}^{-1}$ (Vallis 2017). Por supuesto, la separación de escalas en las simulaciones es menor que en flujos oceánicos realistas. Como resultado, para las partículas comparamos sus escalas de tamaño y tiempo con las escalas dinámicas más pequeñas del sistema. Las partículas oceánicas en la capa de mezcla inferior o en la termoclina estacional superior tienen una escala de tiempo de Kolmogorov $\tau_\eta \approx 3 \text{ s}$, resultando en números de Stokes entre $St \approx 0,3$ a 3 , correspondientes a variaciones en el radio de las partículas entre 1 y 3 mm (Squires y col. 1995) comparadas con escalas de disipación de Kolmogorov entre $0,1$ y 10 mm (Durham y col. 2013). Además, para las partículas oceánicas en este rango de tamaños, la razón de masas es $\gamma \approx 1,003$ (McCave 1984). En el caso del fitoplancton (y en particular, del nanoplancton y microplancton), sus tamaños típicos varían entre 2 y 200 micrones (Acevedo-Trejos y col. 2015). Teniendo en cuenta que se encuentran en la capa de mezcla, el número de Stokes varía entre $St \approx 10^{-5}$ a 10^{-1} mientras que la razón a/η varía en el rango de $0,02$ a 2 . Las algas marinas proporcionan otro ejemplo para el cual se han utilizado ecuaciones de Maxey-Riley-Gatignol modificadas (en este caso, utilizando parámetros efectivos) para su modelado (Beron-Vera y col. 2019; Beron-Vera y col. 2020). Nuestra elección de parámetros se encuentra en el mismo rango que todos estos estudios.

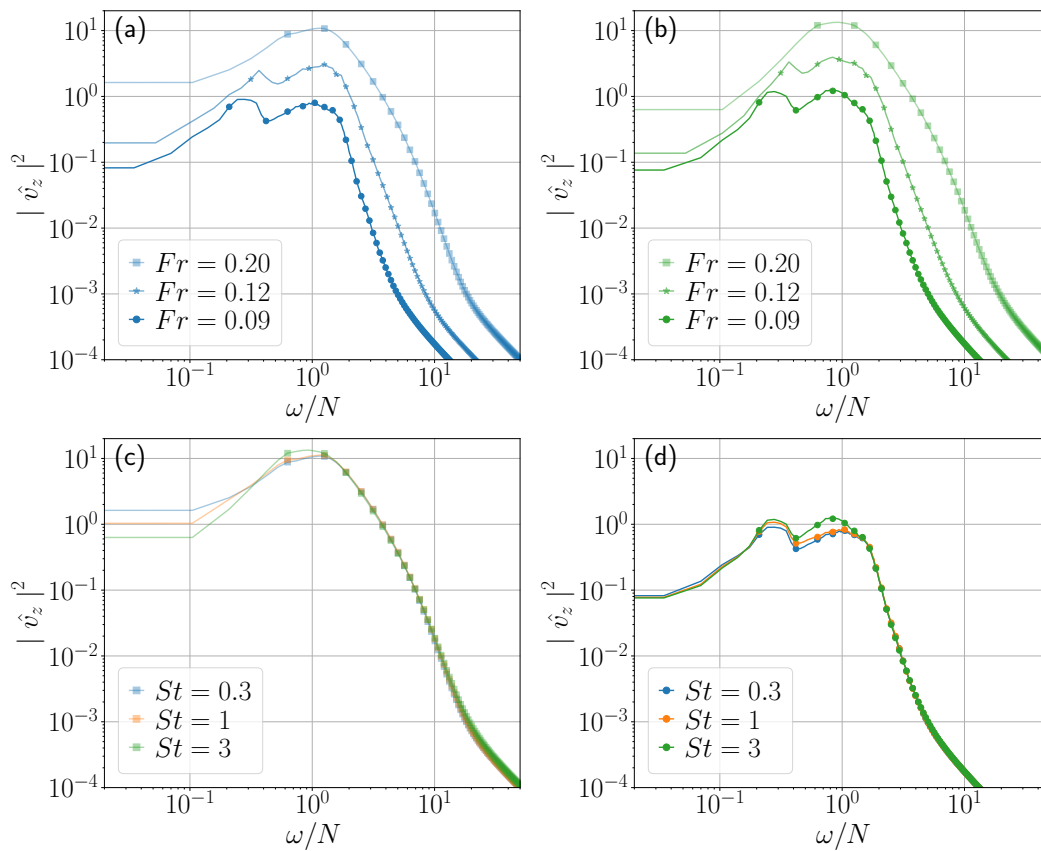


Figura 4.1: Espectros de potencia de la velocidad vertical de las partículas, para diferentes valores de los números de Froude y Stokes. (a) $St = 0,3$ y (b) $St = 3$, para diferentes Fr (indicados en los recuadros). La potencia disminuye al aumentar la estratificación. (c) $Fr = 0,20$ y (d) $Fr = 0,09$, para diferentes St (indicados en los recuadros). El valor de St tiene un efecto en la amplitud del pico principal de los espectros.

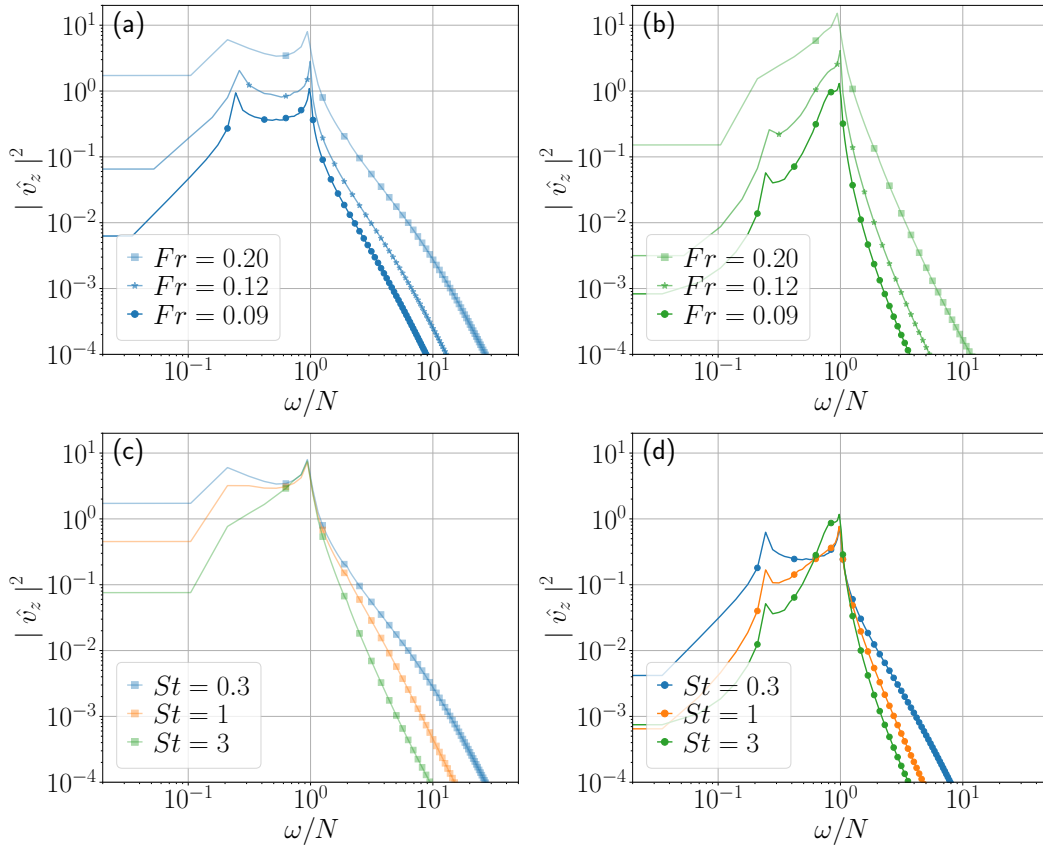


Figura 4.2: Espectro de potencia de la velocidad vertical de las partículas obtenido a partir del modelo de la ecuación (4.6) para diferentes valores de Fr y para (a) $St = 0,3$, y (b) $St = 3$. Nótese la disminución de la potencia en los espectros al disminuir Fr . Lo mismo se muestra para diferentes valores de St y para (c) $Fr = 0,20$ y (d) $Fr = 0,09$. El valor de St cambia la frecuencia del primer pico y la amplitud del segundo pico.

4.4. Espectros y modelo de desplazamiento vertical

Primero estudiamos el espectro de potencia de la velocidad vertical de las partículas en las simulaciones. La Figura 4.1 muestra este espectro para diferentes valores de los números de Froude y Stokes; las frecuencias están normalizadas por la frecuencia de Brunt-Väisälä del flujo portador. Siempre hay un pico en $\omega \approx N$, y para Fr pequeños se observa un segundo pico a frecuencias más bajas. Su posición y amplitud dependen de Fr , mientras que su amplitud depende solo débilmente de St . El pico en $\omega \approx N$ es seguido por un espectro con una caída pronunciada a frecuencias mayores, y decae lentamente para frecuencias menores.

El origen de los dos picos en los espectros puede explicarse mediante un modelo sencillo derivado de la ecuación de movimiento de las partículas. La ecuación (4.3), deprecando el termino integral de Basset-Boussinesq puede reescribirse en términos de la posición vertical de cada partícula z usando que $\dot{z} = v_z$ y $\ddot{z} = \dot{v}_z$, resultando en

$$\ddot{z} = \frac{1}{\tau_p} [u_z(\mathbf{x}, t) - \dot{z}] - \frac{2}{3}N [N(z - z_0) - \zeta] + \frac{D}{Dt}u_z(\mathbf{x}, t). \quad (4.5)$$

Reorganizando los términos en la ecuación (4.5) llegamos a la siguiente expresi-

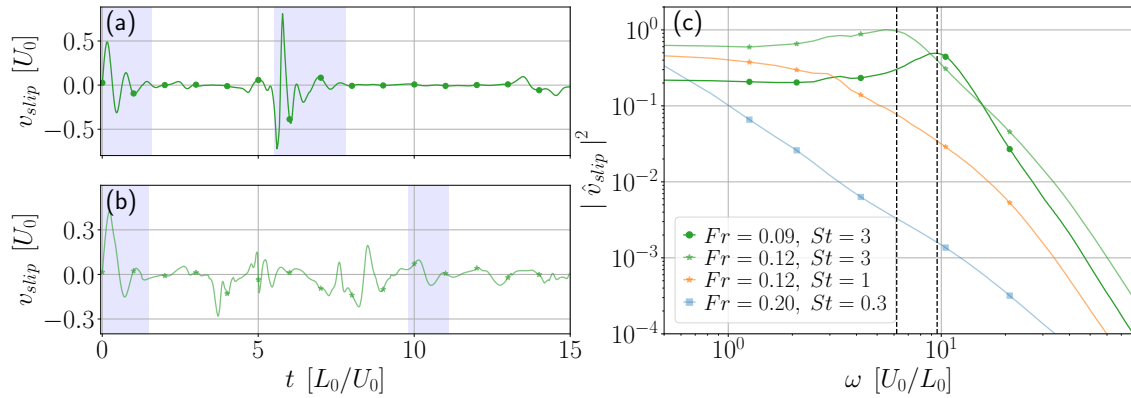


Figura 4.3: Series temporales de la velocidad de deslizamiento vertical (v_{slip}) para dos partículas con $St = 3$ en flujos estratificados con (a) $Fr = 0,09$ y (b) $Fr = 0,12$. Las regiones sombreadas indican movimientos típicos reminiscentes de oscilaciones subamortiguadas. (c) Espectro de potencia de la velocidad de deslizamiento vertical de las partículas, para diferentes valores de Fr y St (ver recuadro). Las partículas sobreamortiguadas no presentan picos en el espectro, mientras que las partículas subamortiguadas muestran un pico a las frecuencias indicadas por las líneas discontinuas verticales.

sión,

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau_p} \dot{z} + \frac{2}{3} N^2 z = \ddot{z}_{wav} + \frac{1}{\tau_p} \dot{z}_{wav} + \frac{2}{3} N^2 z_{wav}, \quad (4.6)$$

donde asumimos que los desplazamientos verticales de los elementos del fluido son causados por ondas internas de gravedad, y entonces definimos $z_{wav} = z_0 + \zeta/N$, $\dot{z}_{wav} = u_z(\mathbf{x}, t)$ y $\ddot{z}_{wav} = Du_z/Dt$. La ecuación (4.6) corresponde a un oscilador amortiguado forzado, con una frecuencia natural del sistema $\sqrt{2/3}N$, una constante de amortiguamiento $(2\tau_p)^{-1}$, y un forzado $f_{wav} = \ddot{z}_{wav} + \dot{z}_{wav}/\tau_p + 2N^2 z_{wav}/3$. La frecuencia del sistema amortiguado es $\Omega^2 = 2N^2/3 - (2\tau_p)^{-2}$. Para partículas con inercia pequeña, esto resulta en un sistema sobreamortiguado (es decir, $\Omega^2 < 0$) y, cuando son perturbadas, las partículas decaen lentamente a la posición de equilibrio siguiendo los elementos del fluido. En cambio, las partículas con inercia grande resultan en un amortiguamiento débil ($\Omega^2 > 0$), y las partículas perturbadas oscilan alrededor del equilibrio mientras decaen, siguiendo solo débilmente los elementos del fluido. De hecho, la dependencia de la frecuencia de oscilación con τ_p está en acuerdo cualitativo con los resultados en la figura 4.1(c) y (d); nótese que a medida que St aumenta, el pico principal del espectro se desplaza de $\omega \approx N$ a frecuencias más bajas (como referencia, para $St = 3$ la ecuación (4.6) predice una frecuencia $\Omega \approx 0,82N$).

La ecuación (4.6) puede integrarse numéricamente si se prescribe f_{wav} . Como no conocemos la evolución precisa de u_z para cada elemento de fluido, asumimos que u_z es un proceso aleatorio con algún espectro. El espectro de la velocidad vertical del fluido en muchos flujos estratificados es compatible con el espectro de Garrett-Munk, como se observa en mediciones oceánicas (D'Asaro y col. 2007) y en simulaciones numéricas (N. E. Sujovolsky y col. 2019a). Este espectro es plano para frecuencias $\omega \leq N$, resultando de la superposición aleatoria de ondas internas de gravedad, seguido por una ley de potencia decreciente para $\omega > N$ causado por la turbulencia. Por lo tanto, consideramos una superposición aleatoria

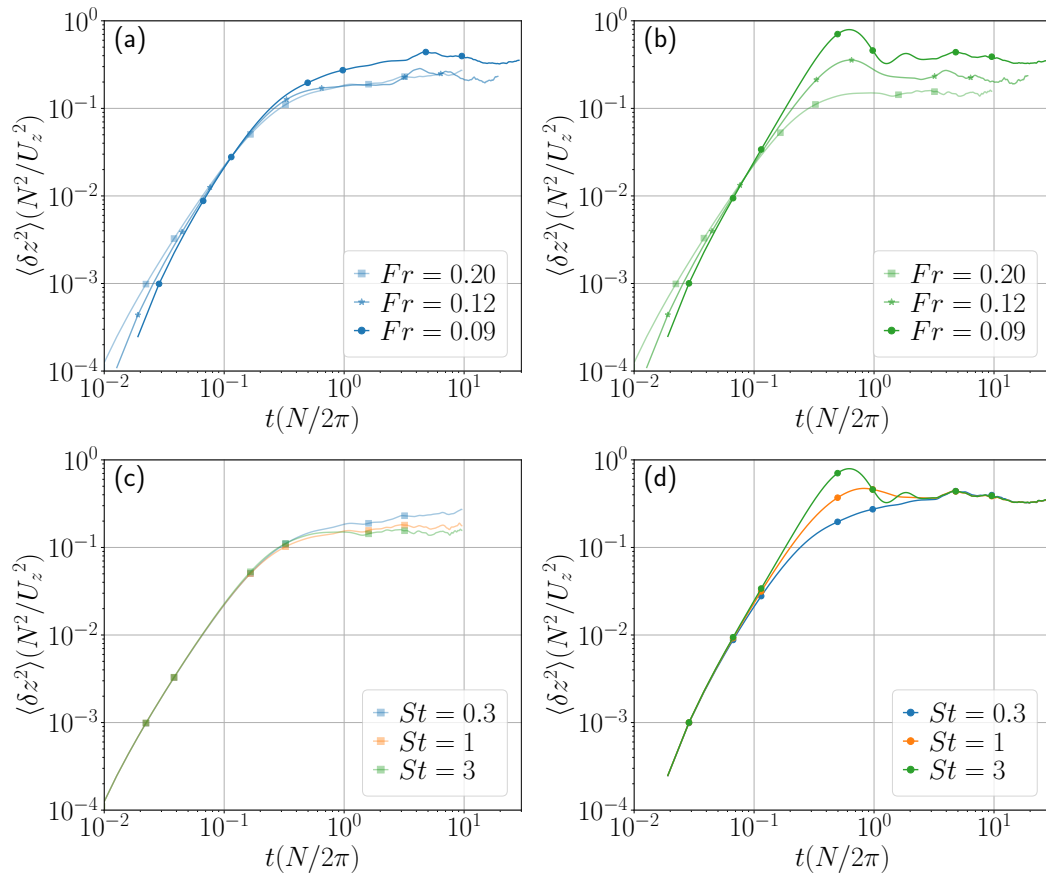


Figura 4.4: Desplazamiento cuadrático medio vertical $\langle \delta z^2 \rangle$ de las partículas en función del tiempo para diferentes valores de Fr y para (a) $St = 0,3$ y (b) $St = 3$. Además, para diferentes valores de St para (c) $Fr = 0,20$ y (d) $Fr = 0,09$. En todos los casos, δz^2 está normalizado por U_z^2/N^2 . El tiempo está normalizado por el periodo de Brunt-Väisälä $2\pi/N$.

de osciladores de la forma

$$z_{wav} = u_0 \operatorname{Re} \left(\sum_{\omega}^{N \geq \omega > N/4} \frac{e^{i\omega t + \phi_\omega}}{\omega} + \sum_{\omega}^{\omega > N} N \frac{e^{i\omega t + \phi_\omega}}{\omega^2} \right), \quad (4.7)$$

donde ϕ_ω son fases aleatorias, y u_0 es una amplitud elegida para que \dot{z}_{wav} tenga el mismo valor r.m.s. que el de u_z en las simulaciones numéricas. El espectro de potencia de \dot{z}_{wav} resultante de usar la ecuación 4.7 es compatible con las observaciones oceánicas del espectro de Garret-Munk (D'Asaro y col. 2000; D'Asaro y col. 2007). En otras palabras, este proceso hace que \dot{z}_{wav} sea una variable aleatoria compatible con ese espectro.

La Figura 4.2 muestra el espectro de potencia obtenido tras integrar la ecuación (4.6) utilizando el proceso aleatorio de la ecuación 4.7 como forzado, para diferentes valores de la frecuencia de Brunt-Väisälä y del número de Stokes. Los espectros son cualitativamente similares a los mostrados en la figura 4.1. Los espectros exhiben dos picos, siendo el principal (el segundo) cercano a $\omega \approx N$. Para un Fr fijo, al aumentar St, este pico se ensancha hacia frecuencias más bajas. El primer pico, a frecuencias menores, aumenta en amplitud a medida que Fr disminuye, y aparece en frecuencias similares a las de la figura 4.1. Es natural preguntarse si estos picos son causados por el forzado o por las oscilaciones amortiguadas de las partículas. Al cambiar el forzado pero manteniendo el espectro de Garrett-Munk para u_z (por ejemplo, estableciendo $f_{wav} = \ddot{z}_{wav}$), se obtienen los mismos resultados cualitativos. Esto indica que los picos en los espectros están al menos parcialmente asociados a la dinámica amortiguada de las partículas. Finalmente, cambiar la frecuencia de corte inferior en la ecuación (4.7) (es decir, la elección de un corte en $\omega > N/4$) no afecta la posición del pico principal cercano a $\omega \approx N$ ni el espectro a frecuencias más altas, aunque tiene un efecto menor en la posición del primer pico a frecuencias más bajas. En resumen, el segundo pico en la frecuencia de Brunt-Väisälä es generado por las ondas de gravedad que mueven verticalmente a las partículas, mientras que el primero es causado por el cambio de frecuencia generado por el amortiguamiento.

La ecuación (4.6) también puede reescribirse en términos de la velocidad de deslizamiento vertical de las partículas, $v_{slip} = u_z - v_z$. Tomando $y = z - z_{wav}$, la ecuación (4.6) resulta en la ecuación de un oscilador armónico amortiguado homogéneo. Como antes, la frecuencia de oscilación resultante es $\Omega^2 = 2N^2/3 - (2\tau_p)^{-2}$, con una tasa de decaimiento exponencial $(2\tau_p)^{-1}$. Dado que $\dot{y} = v_{slip}$, podemos esperar que la velocidad de deslizamiento vertical de las partículas exhiba oscilaciones sobreamortiguadas o subamortiguadas dependiendo del signo de Ω^2 . La figura 4.3 muestra v_{slip} para partículas en las simulaciones numéricas con $St = 3$ ($\tau_p = 0,235T_0$) en fluidos estratificados con $N = 12/T_0$ y $8/T_0$. En ambos casos se tiene $\Omega^2 > 0$, y se pueden identificar en la serie temporal dinámicas características de oscilaciones subamortiguadas. El espectro de potencia de v_{slip} para múltiples simulaciones, también mostrado en la figura 4.3, presenta picos en el valor esperado de Ω en estas dos simulaciones, mientras que en las simulaciones con $\Omega^2 < 0$ no se observan picos. Por lo tanto, la dinámica de las partículas individuales es compatible con la de osciladores amortiguados forzados aleatoriamente, donde tanto τ_p como N controlan el régimen dinámico de las partículas. Este último resultado será relevante en el desarrollo del capítulo 5.

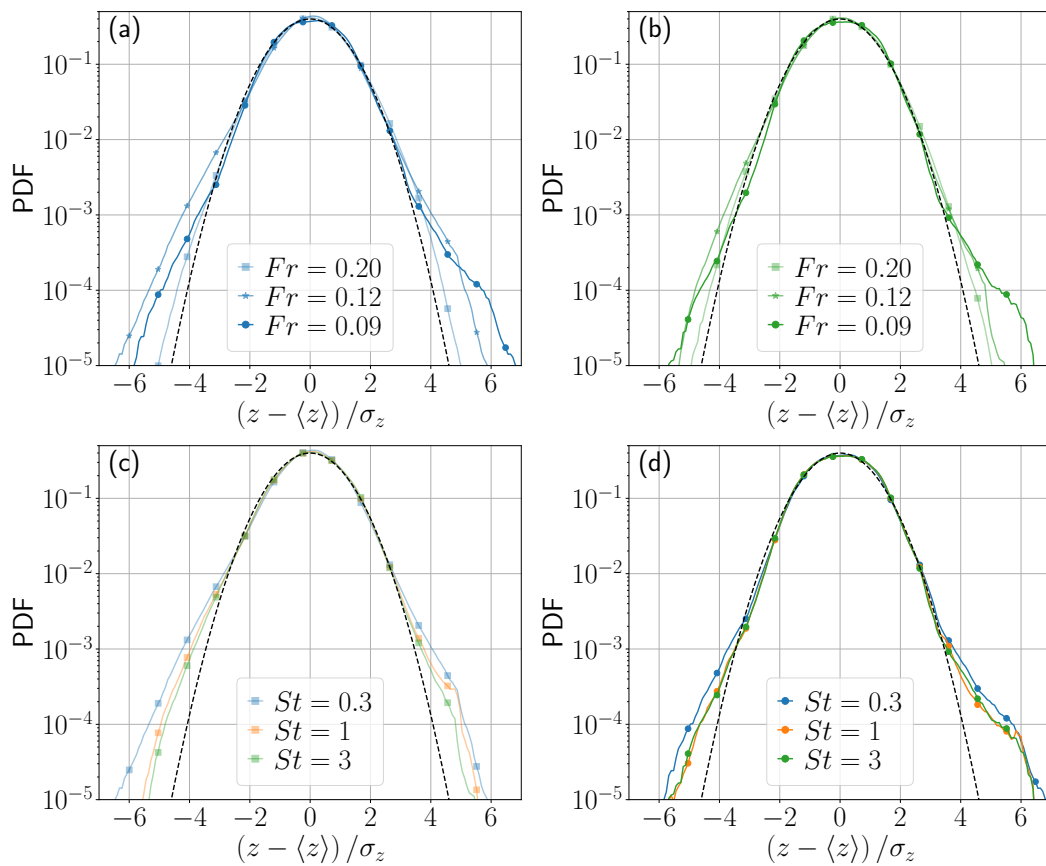


Figura 4.5: Funciones de densidad de probabilidad (PDFs) de la posición z de las partículas para diferentes valores de Fr con (a) $St = 0,3$ y (b) $St = 3$. Lo mismo para diferentes valores de St y para (c) $Fr = 0,20$ y (d) $Fr = 0,09$. Las líneas negras discontinuas indican como referencia una distribución normal.

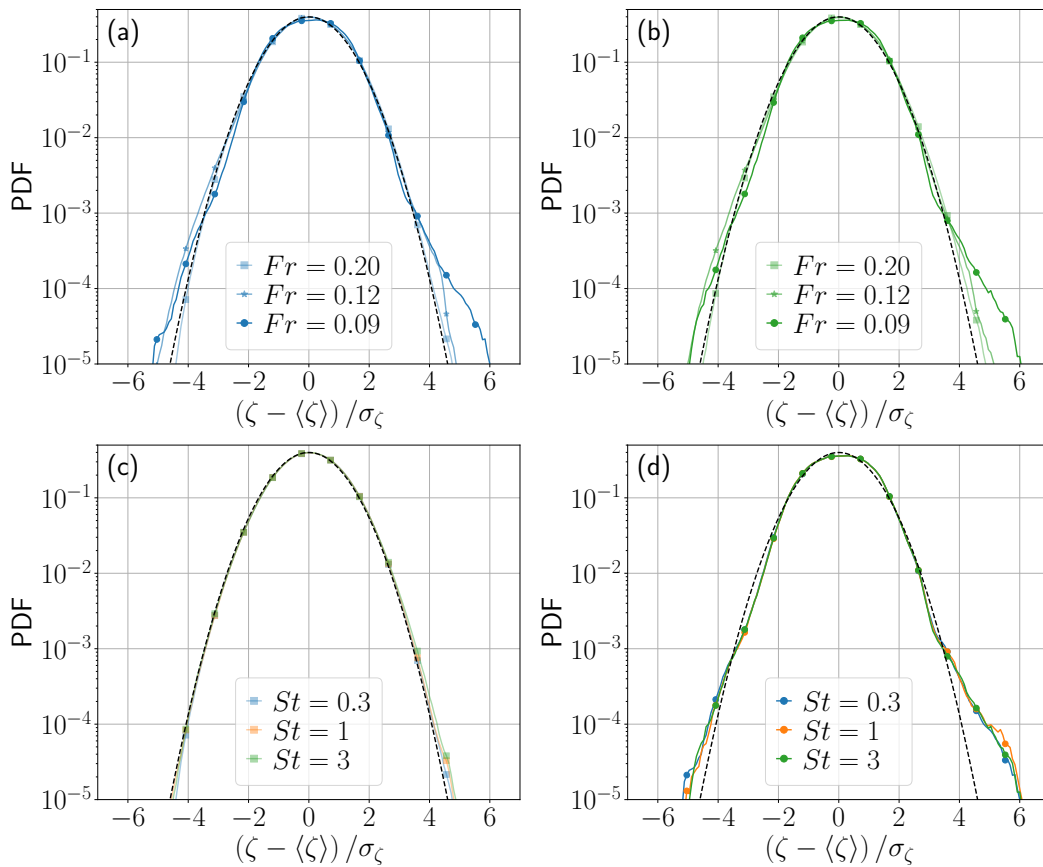


Figura 4.6: Funciones de densidad de probabilidad de las fluctuaciones de densidad reescaladas ζ en las posiciones de las partículas, en simulaciones con diferentes Fr y (a) $St = 0,3$, (b) $St = 3$. Lo mismo para partículas con diferentes St en flujos con (c) $Fr = 0,20$ y (d) $Fr = 0,09$. Las líneas negras discontinuas indican una distribución normal.

4.5. Dispersión vertical de partículas inerciales

La estratificación limita los movimientos verticales de las partículas, restringiendo severamente la dispersión vertical, y resultando en la saturación de los desplazamientos cuadráticos medios verticales de las partículas con el tiempo. Modelos lineales predicen que esta saturación ocurre después de $t \approx 2\pi/N$ (es decir, después de un periodo de las ondas de gravedad), ya que los desplazamientos de las partículas son restringidos verticalmente por la estratificación, llevando a movimientos oscilatorios alrededor del equilibrio de flotabilidad neutra (Nicolleau y col. 2000). Esto fue confirmado en simulaciones numéricas con valores de Rb moderados (E. Lindborg 2008). Estudios posteriores sobre la dispersión vertical de trazadores en flujos establemente estratificados (Aartrijk y col. 2008b; N. E. Sujovolsky y col. 2019a), y de partículas neutras pequeñas con St pequeños (Aartrijk y col. 2010), confirmaron explícitamente la saturación en la dispersión vertical cuadrática media. Para partículas inerciales con flotabilidad neutra, se encontró además que la saturación es más rápida y fuerte que para trazadores Lagrangianos (Aartrijk y col. 2010).

La Figura 4.4 muestra el desplazamiento cuadrático medio vertical de las partículas en nuestras simulaciones, definido como $\langle \delta z^2(t) \rangle = \langle [z_i(t) - z_i(0)]^2 \rangle_i$ (donde el subíndice i indica que el promedio se calcula sobre todas las partículas), para

diferentes valores de Fr y St . El tiempo está normalizado por $2\pi/N$ y $\langle \delta z^2(t) \rangle$ está normalizado por $(U_z/N)^2$, donde U_z es la velocidad vertical r.m.s. Euleriana del fluido en el estado turbulento estacionario. Con esta normalización, las curvas colapsan desde $t = 0$ hasta $t \lesssim 2\pi/N$, en un intervalo de tiempo con comportamiento balístico de las partículas. El final de este régimen en un tiempo proporcional al periodo de las ondas $2\pi/N$, en lugar del tiempo lagrangiano de recirculación de los remolinos, indica que los desplazamientos verticales más rápidos son causados por las partículas inerciales siguiendo las ondas internas de gravedad. Además, se observa un exceso en los desplazamientos verticales (es decir, $\langle \delta z^2 \rangle$ alcanza valores más altos en su máximo al final de esta etapa balística) a medida que el valor de St (la inercia de las partículas) aumenta. Después de este máximo, las partículas inerciales oscilan alrededor de su posición de equilibrio, mostrando una meseta en los desplazamientos cuadráticos medios verticales, como también se reportó en Aartrijk y col. 2010. La amplitud de la meseta depende débilmente de St y fuertemente de Fr . Esto difiere del caso de los trazadores (es decir, partículas sin inercia) en flujos estratificados, que para Rb suficientemente grandes muestran cierta dispersión vertical lenta en tiempos tardíos, causada por remolinos turbulentos o por difusión molecular (N. E. Sujovolsky y col. 2019a).

El confinamiento de las partículas alrededor de una capa también puede caracterizarse usando la función de densidad de probabilidad (PDF por sus siglas en inglés) de encontrar una partícula a una altura dada, ya sea en términos de z , o de la densidad del fluido en cada posición de partícula (es decir, cuán lejos está la partícula de la isopícnica de equilibrio). La figura 4.5 muestra la PDF de z de cada partícula para diferentes valores de Fr y St , centrada en el valor medio y normalizada por su dispersión. Es interesante notar que a medida que el valor de Fr disminuye, aumenta la asimetría en la cola de la PDF. Aunque no se puede descartar un único evento grande como causa de esta asimetría, se han reportado PDFs sesgadas de larga duración para la velocidad vertical del fluido en Rorai y col. 2014. Estas pueden asociarse a la ocurrencia de corrientes verticales extremas en flujos establemente estratificados para valores de Fr en el rango $\approx 0,05$ a $0,30$ (Feraco y col. 2018), que pueden causar deambulaciones verticales más frecuentes y mayores de las partículas. La Figura 4.6 muestra las mismas PDFs pero en términos de las fluctuaciones de densidad reescaladas ζ en las posiciones de las partículas, también centradas en el valor medio y normalizadas por la dispersión. Estas PDFs son más cercanas a una distribución Gaussiana y menos sensibles a St , pero aún muestran colas asimétricas para $Fr = 0,09$.

A partir de la figura 4.4, parece evidente que las partículas están confinadas en una capa más estrecha a medida que Fr disminuye, aunque esto no es evidente en las figuras 4.5 y 4.6 ya que las PDFs en esas figuras están normalizadas por sus desviaciones estándar. La Figura 4.7 muestra las desviaciones estándar en z y ζ de las partículas, σ_z y σ_ζ respectivamente, en función de Fr^{-1} , para todos los valores de St considerados. Nótese que ambas desviaciones (que pueden considerarse como una medida de la altura de la capa de confinamiento) son una fracción de L_b , y disminuyen conforme Fr se reduce. El comportamiento de σ_z también depende de St en casos de estratificación débil. Sozza y col. 2018 observaron que para valores grandes de Fr , σ_z es mayor para tiempos de respuesta de partículas τ_p más largos (es decir, mayores valores de St), lo opuesto a lo encontrado aquí.

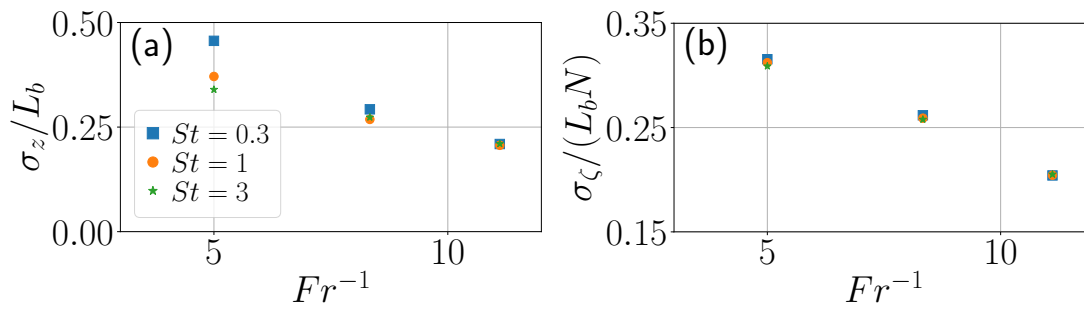


Figura 4.7: Desviaciones estándar de (a) las posiciones de las partículas en z normalizadas por la longitud de empuje, y (b) las variaciones de densidad del fluido en las posiciones de las partículas, ζ , normalizadas por la longitud de empuje y la frecuencia de Brunt-Väisälä, en función del inverso del número de Froude.

El efecto reportado en Sozza y col. 2018 resulta de que en sus simulaciones las partículas con mayor inercia permanecen suspendidas en la posición de equilibrio por más tiempo. En este estudio, los vientos medios en la capa de cizalla del flujo de Taylor-Green generan un efecto diferente. Las partículas con mayor inercia son menos afectadas por los movimientos verticales rápidos y, en su lugar, siguen los movimientos horizontales más lentos, promediando las fluctuaciones verticales a medida que se desplazan. Esto se evidencia en la figura 4.1, donde se observa que para $St = 0,3$ el pico principal del espectro de potencia de la velocidad vertical de las partículas está por encima de la unidad, mientras que para $St = 3$ el pico está por debajo de la unidad. Esto confirma que las partículas con menor inercia son afectadas en mayor medida por los desplazamientos verticales rápidos del fluido, mientras que las partículas con mayor inercia son menos influenciadas por ellos. Por lo tanto, el comportamiento de σ_z con St para valores grandes de Fr no es universal y probablemente depende de las características del flujo. Sin embargo, la situación es diferente para σ_ζ , como se muestra en la figura 4.4(b): $\sigma_z/(L_b N)$ parece depender linealmente con Fr^{-1} y es independiente de St , al menos en el rango de parámetros considerados. Esto implica que la dispersión de las partículas alrededor de la isopicna disminuye linealmente con el aumento de la frecuencia de Brunt-Väisälä (y por lo tanto, con la estratificación).

4.6. Formación de clústeres y teselación de Voronoi

El confinamiento vertical de las partículas en la isopicna influye significativamente en la formación de clústeres. La acumulación de partículas ha sido observada en muchos flujos oceánicos. Por ejemplo, el fitoplancton puede formar estructuras horizontales complejas con tamaños del orden del kilómetro (Martin 2003; Durham y col. 2013), así como capas delgadas a profundidades que coinciden con regiones con fuertes gradientes de densidad del fluido y cizalla vertical, características típicas de la base de la capa de mezcla (Johnston y col. 2009). Otro caso conocido es el del sargazo, un tipo de alga marina que proporciona hábitat para la fauna marina, pero que también puede contener altos niveles de arsénico y metales pesados, generando problemas ambientales graves al descomponerse cerca de las costas (Beron-Vera y col. 2020; Andrade-Canto y col. 2022).

Para cuantificar la acumulación horizontal de partículas en nuestras simu-

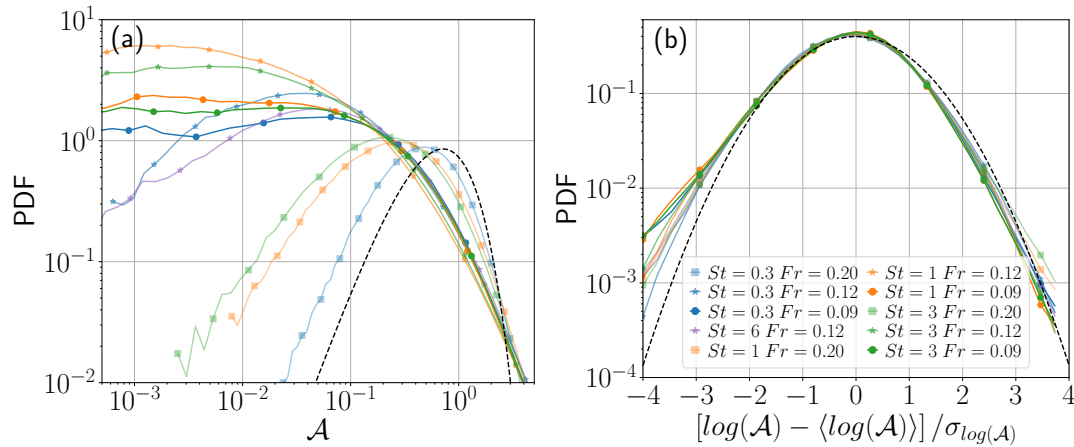


Figura 4.8: (a) Función de densidad de probabilidad (PDF) del área normalizada de Voronoï \mathcal{A} para diferentes valores de Fr y St. (b) Mismas PDFs en función del logaritmo (en base 10) del área, centrada alrededor de su media, y normalizada por su desviación estándar. La línea negra discontinua indica como referencia un proceso de Poisson aleatorio, es decir, la PDF de partículas distribuidas aleatoriamente. Nótese que, además de las simulaciones discutidas hasta ahora, se añade una nueva simulación con $St = 6$ y $Fr = 0,12$ en esta figura, para confirmar que, para Fr fijo, la máxima formación de clústeres ocurre para valores intermedios de St.

laciones, al igual que en el capítulo anterior, utilizamos teselados de Voronoï. Recordemos que un teselado de Voronoï asigna una celda a cada partícula, de modo que cada punto dentro de esa celda está más próximo a esa partícula que a cualquier otra. Las celdas grandes corresponden a regiones con baja concentración de partículas (vacíos), mientras que las celdas pequeñas indican regiones con cúmulos de partículas. En este capítulo nos restringimos a teselados 2D, dado que la mayoría de las partículas permanecen en capas delgadas por los mecanismos ya discutidos en la sección anterior (Pugliese y col. 2022). Para ello, proyectamos todas las partículas en un plano, y consideramos solo sus coordenadas x e y .

La Figura 4.8 muestra las funciones de densidad de probabilidad de las áreas normalizadas de las celdas de Voronoï, $\mathcal{A} = A/\langle A \rangle$, donde A es el área de cada celda. La figura también incluye como referencia la PDF de un proceso de Poisson aleatorio 2d (RPP), que corresponde a partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio (Tanemura 2003; Uhlmann 2020). Como hicimos en el capítulo 3, el primer cruce desde la izquierda entre las PDFs y el RPP se utiliza para definir clústeres: un exceso de celdas más pequeñas que las predichas por el proceso de Poisson indica una acumulación espacial de partículas en ciertas regiones del flujo.

Nótese que las partículas en el flujo con $Fr = 0,20$ están más cercanas al comportamiento de un RPP. Esto es esperable, dado que partículas pequeñas y neutras no forman clústeres en el límite de turbulencia isótropa y homogénea (es decir, cuando $Fr \rightarrow \infty$, como vimos en el capítulo 3 (Reartes y col. 2021; Fiabane y col. 2012)). Más importante aún, el acumamiento de partículas aumenta rápidamente a medida que Fr disminuye. La mayor acumulación (indicada por las fuertes colas a la izquierda de las PDFs) se obtiene para una estratificación intermedia con $Fr = 0,12$ y $St = 1$. Esto indica que aunque el aumento en la estratificación favorece la formación de clústeres, su efecto no es monótono con Fr ni con St. Para confirmar que la máxima acumulación ocurre en las cercanías de $St = 1$, se presenta en la misma figura una nueva simulación (no discutida

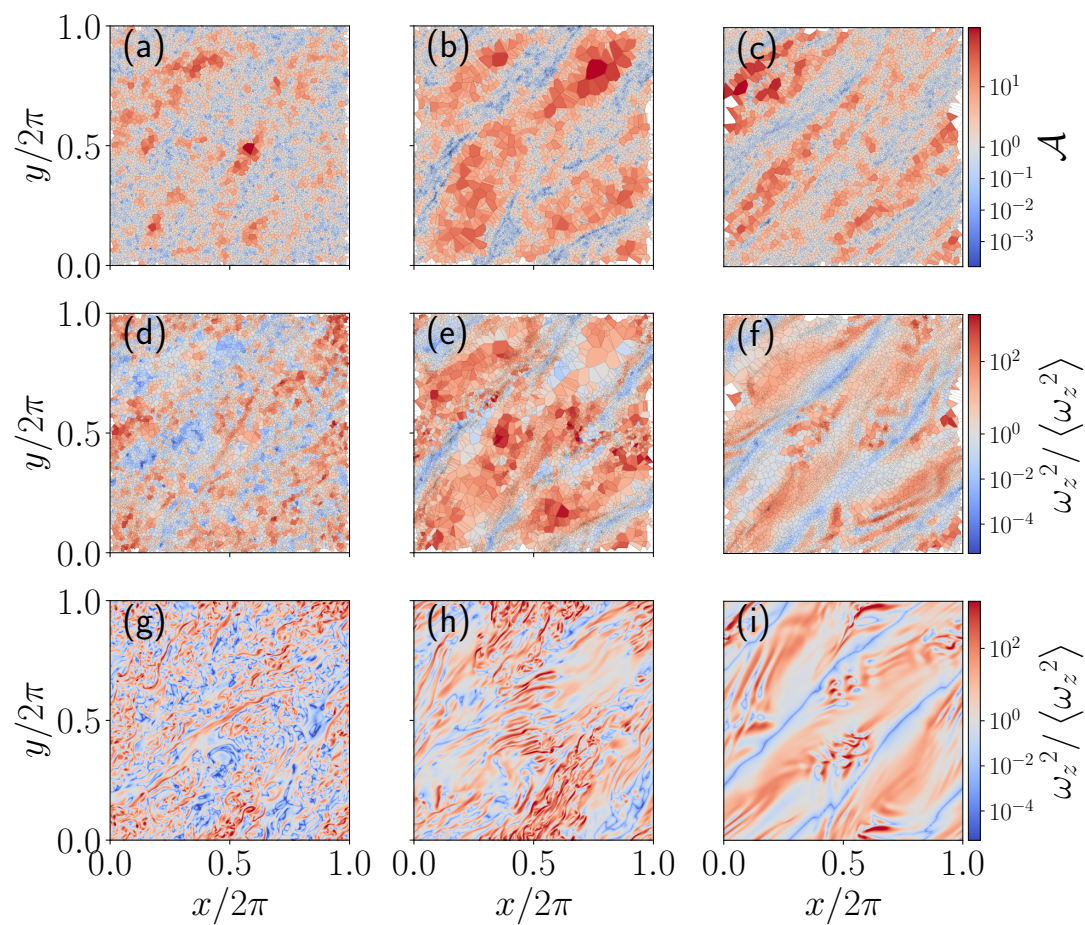


Figura 4.9: Comparación entre las áreas de Voronoï de las partículas \mathcal{A} y la vorticidad vertical del flujo. La primera fila muestra las áreas de Voronoï de 10^4 partículas con $St = 0,3$, para (a) $Fr = 0,20$, (b) $0,12$ y (c) $0,09$. En la fila del medio se muestra, la vorticidad vertical cuadrática ω_z^2 normalizada por su valor medio promediada sobre las áreas de Voronoï, para los mismos tres valores de Fr , respectivamente en (d), (e) y (f). La fila inferior muestra la resolución completa de ω_z^2 para los tres valores de Fr en (g), (h) e (i).

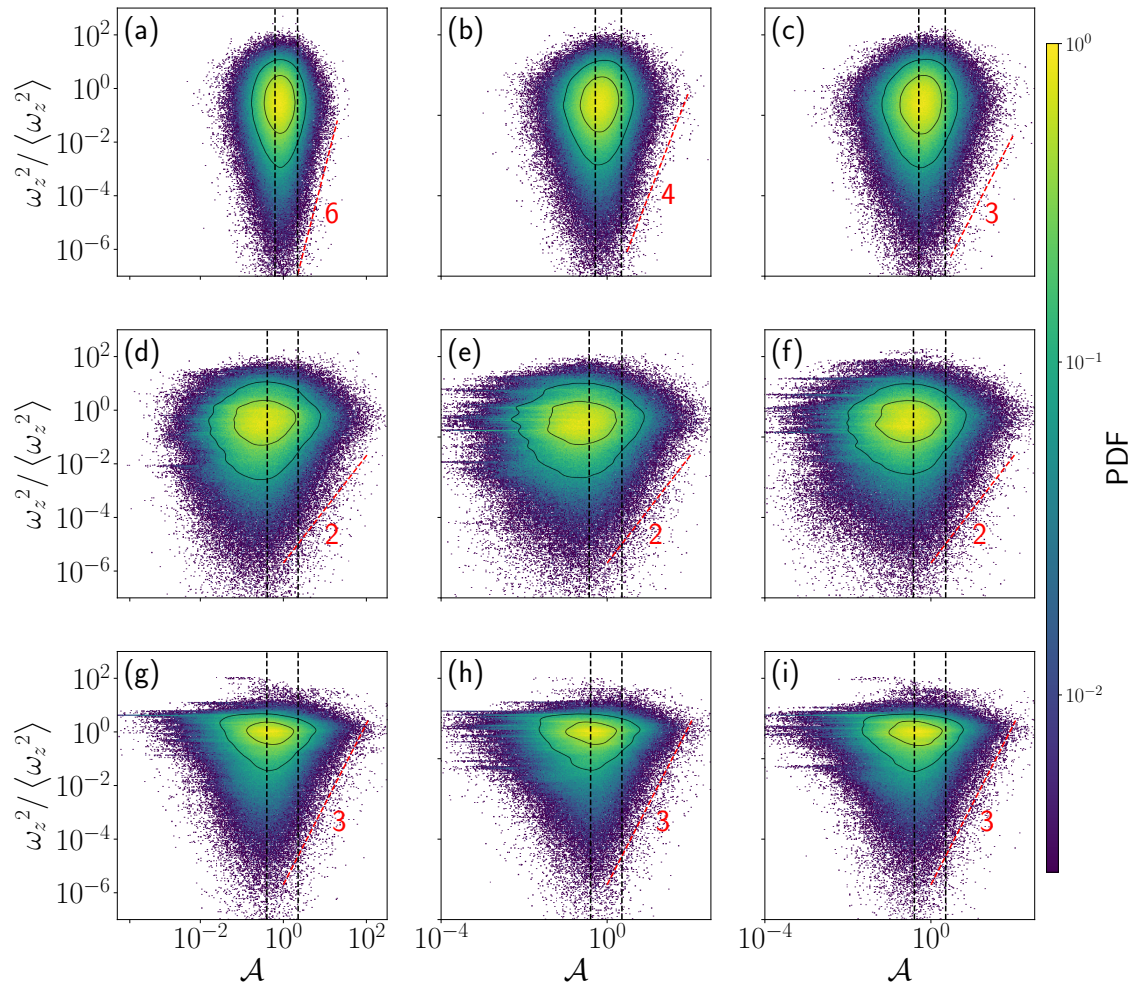


Figura 4.10: Función de densidad de probabilidad (PDF) conjunta de \mathcal{A} y ω_z^2 . De izquierda a derecha, $St = 0,3, 1, \text{ y } 3$. De arriba a abajo, $Fr = 0,20, 0,12, \text{ y } Fr = 0,09$. Como ejemplo, el panel (a) tiene $St = 0,3$ y $Fr = 0,20$, (b) tiene $St = 1$ y $Fr = 0,20$, (c) tiene $St = 3$ y $Fr = 0,20$, (d) tiene $St = 0,3$ y $Fr = 0,12$, y así sucesivamente. Las líneas discontinuas verticales, de izquierda a derecha, indican respectivamente el primer y segundo cruce de las PDFs de \mathcal{A} con el RPP. Varias pendientes se indican con curvas discontinuas rojas solo como referencia.

previamente) con $St = 6$ y $Fr = 0,12$, la cual (aunque para este valor de St la omisión de la fuerza de Basset-Boussinesq es menos justificable) muestra una menor acumulación y permite la comparación con otras partículas con diferentes valores de St y el mismo Fr .

Los clústeres parecen formarse en regiones del flujo con baja vorticidad vertical, lo que sugiere que su origen está relacionado con la expulsión centrífuga en los vórtices (Maxey y col. 1983; Gatignol 1983). Para ilustrarlo, la figura 4.9 muestra las áreas de Voronoi de un subconjunto aleatorio de 10^4 partículas con $St = 0,3$, en tres simulaciones con $Fr = 0,20, 0,12$ y $0,09$. Las regiones rojas en los paneles (a), (b) y (c) corresponden a celdas mayores que el promedio (vacíos), mientras que las regiones azules representan celdas más pequeñas que el promedio (clústeres). Los paneles (d), (e) y (f) muestran la vorticidad vertical cuadrática ω_z^2 , promediada en cada celda de Voronoi y normalizada por su valor medio. Como referencia, los paneles inferiores presentan la misma vorticidad en resolución completa (es decir, sin promediar en las celdas de Voronoi). Se observa una correlación

entre estas representaciones: las regiones de baja vorticidad parecen coincidir con áreas de Voronoï más pequeñas, especialmente para valores bajos de Fr . Un comportamiento similar ya había sido reportado para el caso de partículas pesadas en turbulencia estratificada en Aartrijk y col. 2008a.

Finalmente, la Figura 4.10 confirma esta correlación mostrando las PDFs conjuntas de \mathcal{A} y ω_z^2 para todas las simulaciones y partículas. En los paneles, las líneas discontinuas verticales indican, de izquierda a derecha, los primeros y segundos cruces de las PDFs de \mathcal{A} con el RPP (es decir, los valores de \mathcal{A} por debajo y por encima de los cuales las celdas corresponden respectivamente a partículas acumuladas y a vacíos). Se observa que las partículas en los vacíos tienden a estar en regiones con mayor vorticidad, y la correlación se hace más evidente a medida que Fr disminuye. Como referencia, en la figura se indican diferentes pendientes con líneas rectas. Nótese que, para estratificación fuerte ($Fr = 0,09$), la forma de las PDFs se vuelve casi independiente del valor de St . En general, la correlación entre áreas grandes de Voronoï y regiones de alta vorticidad aparece de manera independiente del número de Stokes en los casos con estratificación fuerte.

4.7. Conclusiones

En este capítulo presentamos un estudio numérico del transporte y la acumulación espacial de partículas inerciales ligeras y neutras en turbulencia establemente estratificada, utilizando como base a la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol para partículas pequeñas para construir un modelo consistente con las aproximaciones de Boussinesq. Mostramos que en el caso estratificado, la ecuación puede escribirse como la de un oscilador amortiguado forzado, con dos regímenes controlados por el cuadrado de la inversa del tiempo característico de respuesta de las partículas, τ_p^{-2} , y la frecuencia de Brunt-Väisälä del flujo, N . Cuando el primero es mayor, las partículas están sobreamortiguadas, mientras que cuando el segundo es mayor, las partículas están subamortiguadas. Esto da lugar a la aparición de dos picos en el espectro de potencia de la velocidad vertical de las partículas, teniendo el pico principal una frecuencia $\Omega \approx [2N^2/3 - (2\tau_p)^{-2}]^{-1/2}$.

Como se observó en estudios previos de partículas ligeras y pesadas en turbulencia establemente estratificada (Aartrijk y col. 2008a, 2010), la dispersión vertical de las partículas está fuertemente confinada en capas. El ancho del confinamiento depende de los números de Stokes y de Froude. Sin embargo, cuando se estudia el confinamiento en términos de las isopícnas de densidad, el ancho se vuelve independiente del número de Stokes de las partículas (al menos, en el rango de parámetros considerados en este estudio) y varía solo con la frecuencia de Brunt-Väisälä.

Este confinamiento vertical también tiene un fuerte impacto en la acumulación de las partículas y en el mecanismo físico detrás de la formación de clústeres. Mostramos que un teselado bidimensional de Voronoï puede utilizarse para estudiar los clústeres; estudios previos que utilizan otros métodos para partículas confinadas verticalmente pueden encontrarse en Aartrijk y col. 2008a; De Pietro y col. 2014. Nuestro análisis indica que en flujos suficientemente estratificados, la formación de clústeres está gobernada por la expulsión centrífuga de partículas de los vórtices, independientemente de si el número de Stokes es menor o mayor

que la unidad. Además, la acumulación se incrementa notablemente a medida que aumenta la estratificación, y este incremento ocurre también cuando solo se consideran las posiciones bidimensionales de las partículas, es decir, independientemente del confinamiento vertical de las partículas. Este resultado puede ser importante para calcular colisiones de partículas y las interacciones partícula-turbulencia en problemas atmosféricos (Shaw y col. 1998; Shaw 2003), y en flujos oceánicos donde es común observar parches de fitoplancton y nutrientes (Squires y col. 1995; Martin 2003; Durham y col. 2013). El resultado también recuerda observaciones de acumulación en flotadores en flujos con superficie libre, donde la circulación del flujo a gran escala puede desempeñar un papel importante en la acumulación de partículas (Del Grosso y col. 2019).

En este capítulo despreciamos a la fuerza integral de Basset-Boussinesq. Esta fuerza suele despreciarse dada su complejidad, pero nada garantiza físicamente que realmente lo sea en el rango de parámetros relevantes para el material particulado en flujos geofísicos. En el siguiente capítulo atacaremos este problema, y proveeremos cotas para el error que se comete al ignorar esta fuerza.

Capítulo 5

La fuerza de Basset-Boussinesq en flujos estratificados

A lo largo de esta tesis se ha discutido sobre las dificultades para resolver la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol en un contexto geofísico, y en particular sobre los problemas asociados a la resolución del término de historia de Basset-Boussinesq. En este capítulo, presentamos un resultado exacto que permite determinar en qué casos este término puede ser despreciado, en el contexto de material particulado en flujos establemente estratificados.

Si bien la dinámica de partículas inerciales en flujos turbulentos ha sido ampliamente estudiada, persisten interrogantes fundamentales sobre su comportamiento en entornos geofísicos. En particular, los flujos con estratificación estable presentan desafíos adicionales debido a su anisotropía y la coexistencia de ondas internas con estructuras turbulentas (J. J. Riley y col. 2003; Marino y col. 2014; Portwood y col. 2019). Se ha observado que la estratificación modula la dispersión de partículas, afectando la formación de clústeres y la eficiencia del transporte vertical y horizontal (Sozza y col. 2016; Reartes y col. 2023). En este contexto, la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol ha sido una herramienta fundamental para describir la dinámica de partículas inerciales en diversos regímenes (Gatignol 1983; Aartrijk y col. 2010), como vimos también en el capítulo previo. Sin embargo, debido a la complejidad del término de historia de Basset-Boussinesq, este es frecuentemente descartado en aplicaciones prácticas sin una buena justificación para hacerlo. Pero la difusión de la vorticidad en torno a las partículas a lo largo de sus trayectorias, descrita por la fuerza de Basset-Boussinesq, introduce efectos retardados que pueden ser relevantes en ciertos regímenes del flujo. Estudios previos han propuesto métodos para reducir el costo computacional de calcular este término (Hinsberg y col. 2011), pero su impacto en flujos estratificados sigue siendo un tema abierto de investigación.

En este capítulo presentaremos un análisis detallado sobre la influencia del término de historia en partículas neutramente flotantes en turbulencia establemente estratificada. Específicamente, discutiremos condiciones bajo las cuales su contribución puede ser despreciada sin introducir errores significativos en la dinámica de las partículas. Estos resultados permitirán mejorar la parametrización de modelos reducidos y contribuir a una comprensión más precisa del transporte de partículas en flujos geofísicos. Los resultados presentados en este capítulo

fueron publicados en Reartes y col. 2024

5.1. Cotas para la fuerza de Basset-Boussinesq

El término de historia de Basset-Boussinesq describe el arrastre generado sobre la partícula por la estela de vorticidad que se desprende de la misma, a medida que la partículas se desliza por el fluido. Justamente por esto, involucra una integral en el tiempo que complejiza su cálculo, y que representa la memoria generada por dicha estela.

La integral en el término de historia de Basset-Boussinesq en la ecuación (4.3) puede escribirse como una convolución entre una función $\mathbf{g}(t)$ y un núcleo $K_{\text{BB}}(t)$, de la forma:

$$\int_{-\infty}^t K_{\text{BB}}(t-\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau, \quad (5.1)$$

donde

$$\mathbf{g}(t) = \frac{d\mathbf{h}(t)}{dt}, \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t) - \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\text{slip}}(t), \quad K_{\text{BB}}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (5.2)$$

Nótese que $\mathbf{h}(t)$ representa la velocidad relativa entre la partícula y el fluido, suponiendo que se omiten las correcciones de Faxén. Tanto el término de Stokes en la ecuación (4.3), que puede escribirse como $\mathbf{h}(t)/\tau_p$, como el término de historia de Basset-Boussinesq dependen de la inercia de la partícula. Por lo tanto, resulta razonable establecer una cota superior para la fuerza de Basset-Boussinesq en relación con la fuerza de Stokes.

En el caso más general (sin estratificación), Van Hinsberg et al. Hinsberg y col. 2011 demostraron que la fuerza de Basset-Boussinesq es finita en cualquier instante de tiempo, siempre que se cumplan ciertas condiciones sobre $\mathbf{h}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$. Específicamente, $\mathbf{h}(t)$ debe ser una función continua y su derivada debe existir casi en todas partes. Además, la norma infinito de ambas funciones debe ser finita:

$$\mathbf{h} \in C^0, \quad \|\mathbf{h}\|_{\infty} = B_1, \quad \|\mathbf{g}\|_{\infty} = B_2, \quad (5.3)$$

donde la norma infinito se define como

$$\|\mathbf{h}\|_{\infty} = \inf\{C \geq 0 : |\mathbf{h}(t)| \leq C \text{ casi en todas partes}\}, \quad (5.4)$$

donde $|\cdot|$ representa la norma vectorial usual. Suponiendo que estas condiciones se cumplen para partículas en flujos turbulentos con $\mathbf{h}(t) = \mathbf{v}_{\text{slip}}(t)$, se puede obtener una cota superior para la fuerza de Basset-Boussinesq \mathbf{F}_{BB} . La integral de convolución se divide en dos partes para controlar tanto la singularidad del núcleo como la contribución de la cola de la integral:

$$\frac{|\mathbf{F}_{\text{BB}}|}{c_{\text{BB}}} \leq 4\sqrt{B_1 B_2}, \quad (5.5)$$

donde $c_{\text{BB}} = \sqrt{3/(\pi\tau_p)}$. Esta cota es válida para cualquier instante de tiempo.

Nos interesa encontrar una cota útil para problemas geofísicos, en término de parámetros medibles en el flujo. Como vimos en el capítulo anterior, en el caso estratificado la ecuación (4.3) puede reescribirse como:

$$\ddot{\mathbf{x}}_p + \frac{1}{\tau_p} \dot{\mathbf{x}}_p + \frac{2}{3} N^2 z_p \hat{z} = \mathbf{F}(t), \quad (5.6)$$

donde

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)}{\tau_p} + \frac{2N}{3} [Nz_0 + \zeta] \hat{z} + \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) + \sqrt{\frac{3}{\pi\tau_p}} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, \tau) - \dot{\mathbf{x}}_p(\tau)]}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (5.7)$$

es una fuerza que actúa sobre cada partícula y que depende de la velocidad y la densidad del fluido. La ecuación (5.7) incluye todas las fuerzas ejercidas por el fluido sobre la partícula en la ecuación (4.3).

En la componente vertical, la ecuación (5.6) describe un oscilador amortiguado forzado con frecuencia $\sqrt{2/3}N$ y coeficiente de amortiguamiento $1/(2\tau_p)$ (Reartes y col. 2023). Como en un flujo estratificado en la dirección vertical hay fluctuaciones rápidas en la velocidad de las partículas, tiene sentido continuar el análisis con esta componente de la ecuación. En el capítulo anterior (Reartes y col. 2023) se demostró que, suponiendo que en un flujo estratificado la velocidad vertical del fluido está dominada por ondas internas de gravedad, y aproximando los desplazamientos de los elementos de fluido mediante estas ondas, $z_f = z_0 + \zeta/N$, $\dot{z}_f = w(\mathbf{x}_p(t), t)$ y $\ddot{z}_f = Dw/Dt$, donde $w = u_z$ es la componente vertical de la velocidad del fluido, la componente vertical de la ecuación (4.3) se puede escribir como

$$(\ddot{z}_p - \ddot{z}_f) + \frac{1}{\tau_p} (\dot{z}_p - \dot{z}_f) + \frac{2}{3} N^2 (z_p - z_f) = \mathbf{F}_{BB} \cdot \hat{z}. \quad (5.8)$$

Los primeros tres términos de la ecuación 5.8 se absorben en el lado izquierdo, dejando solo la fuerza de Basset-Boussinesq \mathbf{F}_{BB} en el lado derecho. La solución homogénea de esta ecuación, despreciando la amortiguación (ya que buscamos cotas superiores para las velocidades y fuerzas viscosas sobre la partícula), es $z_p - z_f = A_0 \exp(i\sqrt{2/3}Nt)$, por lo que podemos aproximar la velocidad de deslizamiento vertical como $w_{slip} = \mathbf{v}_{slip} \cdot \hat{z} = W_0 \exp(i\sqrt{2/3}Nt)$. La componente vertical de la fuerza de Stokes se puede escribir entonces como

$$\mathbf{F}_{St} \cdot \hat{z} = \frac{W_0}{\tau_p} e^{i\sqrt{2/3}Nt}. \quad (5.9)$$

Reemplazando la velocidad de deslizamiento vertical en la componente vertical de la fuerza de Basset-Boussinesq se obtiene

$$\mathbf{F}_{BB} \cdot \hat{z} = \sqrt{\frac{3}{\pi\tau_p}} \int_{-\infty}^t d\tau K_{BB}(t-\tau) i\sqrt{\frac{2}{3}} N W_0 e^{i\sqrt{2/3}N\tau}, \quad (5.10)$$

donde se usó que la componente vertical de la función de convolución en el término de historia es $g_z(t) = dw_{slip}/dt = i\sqrt{2/3}N w_{slip}(t)$.

A partir de los resultados obtenidos, podemos proceder a derivar cotas superiores para las distintas fuerzas que actúan sobre las partículas en el caso estratificado,

utilizando las ecuaciones (5.2), (5.4), (5.9) y (5.10). Dado que las fluctuaciones de la velocidad vertical son más rápidas y sus derivadas temporales son mayores que en la dirección horizontal, continuaremos trabajando con las componentes verticales de las fuerzas de Stokes y de Basset-Boussinesq. Imponiendo las condiciones de la ecuación (5.4) a la componente vertical, se obtiene

$$\|\mathbf{F}_{\text{St}} \cdot \hat{z}\|_{\infty} = \left\| \frac{W_0}{\tau_p} e^{i\sqrt{2/3}Nt} \right\|_{\infty} = \frac{B_{1z}}{\tau_p}, \quad (5.11)$$

$$B_{2z} = \left\| i\sqrt{\frac{2}{3}}N W_0 e^{i\sqrt{2/3}Nt} \right\|_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{3}}N B_{1z}. \quad (5.12)$$

donde B_{1z} y B_{2z} son constantes finitas equivalentes a las de la ecuación 5.5. Aplicando la cota obtenida en la ecuación (5.5) solo a la componente vertical de la fuerza de Basset-Boussinesq obtenemos:

$$\|\mathbf{F}_{\text{BB}} \cdot \hat{z}\|_{\infty} \leq 4c_{\text{BB}}\sqrt{B_{1z}B_{2z}} \quad (5.13)$$

$$= 4\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{3N}{\pi\tau_p}(\tau_p\|\mathbf{F}_{\text{St}} \cdot \hat{z}\|_{\infty})^2} \quad (5.14)$$

$$\leq 4\sqrt{N\tau_p}\|\mathbf{F}_{\text{St}} \cdot \hat{z}\|_{\infty}, \quad (5.15)$$

y por lo tanto:

$$\frac{\|\mathbf{F}_{\text{BB}} \cdot \hat{z}\|_{\infty}^2}{\|\mathbf{F}_{\text{St}} \cdot \hat{z}\|_{\infty}^2} \leq 16N\tau_p. \quad (5.16)$$

En otras palabras, el máximo de la fuerza de Basset-Boussinesq en la dirección vertical es menor o igual a $N\tau_p$ por el máximo de la fuerza de Stokes en esta dirección. Asumiendo que en flujos suficientemente estratificados las componentes verticales de las fuerzas dominan la dinámica de las partículas, podemos definir un número adimensional:

$$S_b = N\tau_p, \quad (5.17)$$

que en adelante llamaremos número de Stokes de empuje, ya que representa la relación entre el tiempo de respuesta de la partícula y el periodo de Brunt-Väisälä. Es posible demostrar que $S_b \sim St/Rb^{1/2}$, lo que proporciona una medida de la inercia de las partículas relativa a la intensidad de la turbulencia en la escala de empuje. Se espera que para valores suficientemente pequeños de S_b , el efecto de la fuerza de Basset-Boussinesq sea despreciable. Es decir, si $S_b < 1$, entonces la fuerza de Basset-Boussinesq puede ignorarse. Esto ocurre con partículas con poca inercia, o flujos no muy estratificados.

Es importante destacar que la cota dada por la ecuación (5.16) solo es válida cuando el fluido está estratificado y no se cumple en el límite de un fluido isótropo y homogéneo con $N = 0$. Esto se debe a que la ecuación (5.6) describe un oscilador amortiguado forzado solo en el primer caso. Además, al derivar la ecuación (5.11), asumimos que las fluctuaciones de la velocidad del fluido en la dirección vertical son más rápidas que en la dirección horizontal, lo que equivale a suponer que el número de Froude del fluido $Fr < 1$.

Tabla 5.1: Parámetros relevantes de las simulaciones del fluido. NT_0 es la frecuencia de Brunt-Väisälä en unidades de $T_0^{-1} = U_0/L_0$, Fr es el número de Froude, Re es el número de Reynolds, Rb es el número de Reynolds de empuje, L es la escala integral del flujo, η es la escala de Kolmogorov, L_b es la longitud de empuje y L_{Oz} es la escala de Ozmidov. Todas las longitudes están en unidades de la longitud de referencia L_0 .

Sim.	NT_0	Fr	Re	Rb	L/L_0	η/L_0	L_b/L_0	L_{Oz}/L_0
N04	4	0.19	3600	130	1.22	0.0045	1.51	0.35
N08	8	0.11	2300	28	0.90	0.0050	0.63	0.17
N12	12	0.07	2500	12	0.97	0.0051	0.44	0.12
N20	20	0.05	2400	6	0.91	0.0048	0.25	0.07

Tabla 5.2: Parámetros de las partículas en todas las simulaciones. St es el número de Stokes, τ_p/T_0 es el tiempo de Stokes en unidades de T_0 , a_p/η es el radio de la partícula en unidades de la escala de Kolmogorov, Re_p es el número de Reynolds de la partícula y Sb es el número de Stokes de empuje en todas las simulaciones del fluido.

Nombre	St	τ_p/T_0	a_p/η	Re_p				Sb			
				N04	N08	N12	N20	N04	N08	N12	N20
St03	0.3	0.02	0.95	0.19	0.15	0.07	0.05	0.08	0.19	0.28	0.43
St1	1	0.07	1.70	0.72	0.52	0.22	0.12	0.25	0.64	0.94	1.40
St3	3	0.21	3.00	2.70	2.00	0.75	0.40	0.75	1.90	2.80	4.30
St6	6	0.43	4.20	6.70	4.80	1.70	0.33	1.50	3.80	5.60	8.60

5.2. Simulaciones numéricas

Ahora centramos nuestra atención en la validación numérica de la condición obtenida en la Sección 5.1 para regímenes en los cuales la fuerza de Basset-Boussinesq puede ser despreciada o no. Para ello, realizamos varias simulaciones numéricas de turbulencia estratificada estable (ver la Tabla 5.1), cada una de ellas con diferentes partículas (ver la Tabla 5.2). Las ecuaciones del fluido bajo la aproximación de Boussinesq y la ecuación de las partículas fueron resueltas de igual forma que en el capítulo 4. Pero ahora la fuerza de Basset-Boussinesq se calculó utilizando el método de segundo orden descrito por Hinsberg y col. 2011. Verificamos explícitamente que los errores en este esquema numérico para la integración de la fuerza de Basset-Boussinesq permanecieran pequeños, comparando con la integración explícita de una fracción reducida de las partículas en simulaciones con los mismos parámetros de fluido y partículas.

El fluido estratificado se forzó con el forzado de Taylor-Green usado anteriormente, en un dominio con tamaño $L_x = L_y = 2\pi L_0$ en las direcciones horizontales y $L_z = H = \pi L_0/2$ en la dirección vertical, usando una resolución espacial de $N_x = N_y = 768$ y $N_z = 192$ puntos. Las partículas se inicializaron aleatoriamente en una franja horizontal de ancho $H/5$, centrada alrededor de $z_0 = H/2$, en un momento en que los flujos habían alcanzado un estado turbulento estacionario (es decir, después de integrar el flujo durante más de 60 tiempos característicos a gran escala). Las velocidades iniciales de las partículas coincidían con la velocidad del fluido en el centro de cada partícula. Las partículas estaban acopladas unidireccionalmente, funcionando esencialmente como partículas de prueba. No colisionaban entre sí ni retroalimentaban la dinámica del flujo. En cada simulación de fluido, en la Tabla 5.1, se introdujeron cuatro conjuntos de partículas (ver

Tabla 5.2), cada uno con 25000 partículas, caracterizadas por diferentes valores de τ_p . Las partículas se integraron por más de 15 tiempos característicos a gran escala (las simulaciones con partículas con $St = 6$ se extendieron al doble de este tiempo, ya que las partículas con mayor inercia tienen un tiempo de relajación más prolongado).

Además, para cada conjunto de partículas, se realizaron en realidad dos integraciones numéricas, resolviendo la ecuación (4.3) con y sin el término de historia de Basset-Boussinesq (denominadas en adelante respectivamente como "w/H" y "w/oH", por los términos "with" y "without" en inglés). Esto resultó en un total de 32 conjuntos de datos de partículas, cada uno con sus respectivos números de Reynolds, Froude y Stokes.

Como en los capítulos anteriores, la dinámica de las partículas se caracteriza mediante dos números adimensionales:

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_\eta}, \quad Re_p = \frac{a|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{\nu}, \quad (5.18)$$

donde St es el número de Stokes mencionado previamente, τ_η es el tiempo de disipación de Kolmogorov definido anteriormente, y Re_p es el número de Reynolds de la partícula.

Las Tablas 5.1 y 5.2 proporcionan todos estos números adimensionales y las escalas características del fluido en cada una de las simulaciones. Es importante notar que estas tablas deben leerse en conjunto, ya que, por ejemplo, se pueden tener partículas con $St = 0,3$ en un flujo con $N = 4/T_0$ (con o sin el término de historia de Basset-Boussinesq), o las mismas partículas en un flujo con $N = 8/T_0$, $12/T_0$ o $20/T_0$.

Para contextualizar la elección de los parámetros con la misma metodología que en el capítulo previo, cabe destacar que en los flujos oceánicos el número de Froude varía desde $Fr \approx 10^{-2}$ a gran escala, hasta $Fr \approx 10^{-1}$ en escalas verticales del orden de $H = 1$ km (Vallis 2017). Recordando que la frecuencia de Brunt-Väisälä típica en el océano es $N \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, al poner unidades en la simulación N08 con $Fr = 0,11$, los valores de N y $H = 1$ km establecen $L_0 = 637$ m (es decir, el dominio numérico tiene un tamaño de $4 \times 4 \times 2 \text{ km}^3$) y $T_0 = 8000$ s. Usando estas unidades, la simulación presenta velocidades horizontales r.m.s. de $\approx 0,08 \text{ m s}^{-1}$, comparables a las velocidades típicas en el océano de $0,1 \text{ m s}^{-1}$ (Vallis 2017).

Los números de Stokes considerados para las partículas en la Tabla 5.2 también se encuentran dentro de los valores típicos discutidos para el océano en la sección 4.2. Sin embargo, como antes, la separación de escalas en las simulaciones es mucho menor que en flujos oceánicos realistas. Como resultado, para las partículas solo se pueden comparar sus escalas de tiempo características con aquellas de las escalas dinámicas más pequeñas del fluido resueltas en la simulación, con el objetivo principal de validar las cotas en la sección 5.1. Alcanzar separaciones de escalas realistas para flujos geofísicos (junto con valores realistas del número de Prandtl, que aquí se ha fijado en 1) es imposible con las capacidades computacionales actuales, lo que constituye una limitación de este estudio que debe tenerse en cuenta.

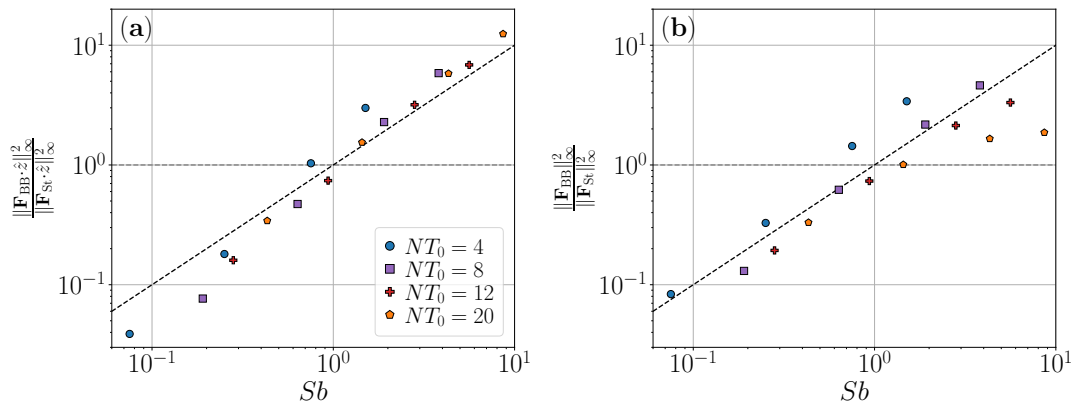


Figura 5.1: (a) Relación entre la norma infinito al cuadrado de la componente vertical de la fuerza de Basset-Boussinesq y la fuerza de Stokes, en función del número de Stokes de empuje Sb para todas las partículas y simulaciones. Se muestra una relación lineal con pendiente 1 como referencia. (b) Misma relación considerando la norma infinito de todas las componentes cartesianas de ambas fuerzas.

5.3. Validación numérica de la cota

5.3.1. Relación entre las fuerzas y el número de Stokes de empuje

La primera prueba directa de la validez de la cota dada por la ecuación (5.16) considera la intensidad de las fuerzas en todas las simulaciones con partículas que incluyen a la fuerza de Basset-Boussinesq. Para estimar $\|\mathbf{F}_{BB}\|_{\infty}$, $\|\mathbf{F}_{BB} \cdot \hat{z}\|_{\infty}$, $\|\mathbf{F}_{St}\|_{\infty}$ y $\|\mathbf{F}_{St} \cdot \hat{z}\|_{\infty}$, se calculó el máximo del módulo de la componente vertical de cada fuerza para cada partícula en las simulaciones en todos los tiempos, y luego se computó el valor promedio de $\|\mathbf{F}_{BB}\|_{\infty}^2 / \|\mathbf{F}_{St}\|_{\infty}^2$ y de $\|\mathbf{F}_{BB} \cdot \hat{z}\|_{\infty}^2 / \|\mathbf{F}_{St} \cdot \hat{z}\|_{\infty}^2$ sobre todas las partículas y para cada valor de Sb . Los resultados se muestran en la figura 5.1. Cabe notar que $\|\mathbf{F}_{BB} \cdot \hat{z}\|_{\infty}^2 / \|\mathbf{F}_{St} \cdot \hat{z}\|_{\infty}^2 < 1$ cuando $St < 1$. La condición de que $\|\mathbf{F}_{BB}\|_{\infty}^2 / \|\mathbf{F}_{St}\|_{\infty}^2$ sea pequeña también está acotada por St , confirmando que la componente vertical de la fuerza de Basset-Boussinesq es la más grande, y que es la componente de interés para obtener una cota sobre el efecto de esta fuerza en la dinámica de las partículas en flujos estratificados.

5.3.2. Efecto de la fuerza de Basset-Boussinesq en la dispersión de partículas

El siguiente análisis estudia el desplazamiento de las partículas en el flujo turbulento, considerando o descartando la fuerza de Basset-Boussinesq. Dado que en la dirección vertical las partículas con flotabilidad neutra están confinadas en una capa estrecha (independientemente de si el término de historia está presente o no), comparamos sus desplazamientos cuadráticos medios en la dirección horizontal:

$$\delta_i^{(j)2}(t) = \langle [x_i(t) - x_i(0)]^2 \rangle, \quad (5.19)$$

donde el subíndice $i = 1, 2$ representa las coordenadas x o y , y el superíndice j indica si la integración numérica de las partículas se realizó con ("w/H") o sin ("w/oH") el término de historia. La figura 5.2 muestra la razón entre los

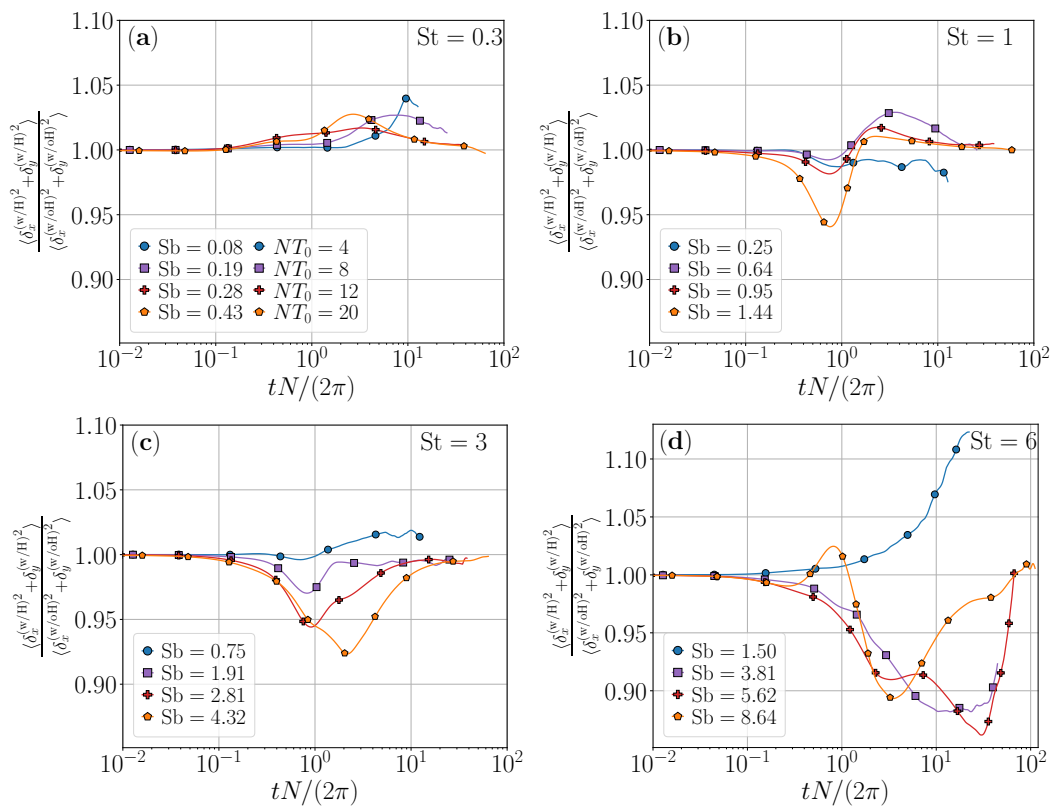


Figura 5.2: Relación de la dispersión cuadrática media horizontal de las partículas considerando el término de historia (w/H) y sin el término de historia (w/oH), en función del tiempo, para partículas en flujos con diferentes números de Froude y Stokes: (a) $St = 0,3$, (b) $St = 1$, (c) $St = 3$ y (d) $St = 6$. Las etiquetas en el primer panel indican la frecuencia de Brunt-Väisälä para todos los paneles. Los valores de Sb para las partículas se presentan en cada panel.

desplazamientos cuadrados medios horizontales promediados sobre todas las partículas, con y sin el término de historia, $\langle \delta_x^{(w/H)^2} + \delta_y^{(w/H)^2} \rangle / \langle \delta_x^{(w/oH)^2} + \delta_y^{(w/oH)^2} \rangle$, en función del tiempo para diferentes números de Froude y Stokes. Si el efecto del término de historia es despreciable, las trayectorias de las partículas deberían ser las mismas, y esta razón debe ser igual a uno.

Se observa que en tiempos pequeños comparados con el periodo de Brunt-Väisälä, $2\pi/N$, la razón en la figura 5.2 permanece cercana a la unidad. Sin embargo, a medida que el tiempo se acerca a $2\pi/N$, surgen diferencias en la dispersión horizontal cuadrática media. Para valores pequeños de St (correspondientes a τ_p pequeños) y valores grandes de Fr (es decir, valores pequeños de N , pero con $Fr < 1$), la razón se mantiene cerca de la unidad y el error entre las partículas w/H y w/oH permanece por debajo del 4%. A medida que aumenta St, la razón se desvía de la unidad. Para valores fijos de St, la razón también aumenta a medida que Fr disminuye. Este incremento en las diferencias entre w/H y w/oH es compatible con el aumento de Sb. Para valores grandes de Sb, el error en la dispersión horizontal está entre 10% y 15%, dependiendo del valor de Fr. Sin embargo, cuando $Sb < 1$, los errores en la diferencia cuadrática media al descartar la fuerza de Basset-Boussinesq permanecen consistentemente por debajo del 5%.

Es notable que en muchos casos los mayores errores tienen lugar en tiempos intermedios. Aartrijk y col. 2010 ya reportaron que en flujos estratificados se desarrollan diferentes regímenes en la dispersión vertical y horizontal de partículas, con la fuerza de Basset-Boussinesq teniendo un impacto significativo en la evolución y duración de los transitorios en tiempos cercanos al periodo de Brunt-Väisälä.

5.3.3. Influencia de la fuerza de Basset-Boussinesq en la velocidad de las partículas

Ahora consideramos el efecto del término de historia de Basset-Boussinesq en la velocidad de las partículas. Para ello, analizamos nuevamente las componentes horizontales (o perpendiculares), y definimos las variaciones cuadráticas medias de velocidad como

$$v_{\perp}^{(j)2}(t) = \langle [v_x(t) - v_x(0)]^2 \rangle + \langle [v_y(t) - v_y(0)]^2 \rangle, \quad (5.20)$$

donde el superíndice j indica si la integración se realizó con ("w/H") o sin ("w/oH") el término de historia, y donde el promedio se calcula sobre todas las partículas. Luego, podemos considerar el valor absoluto de la diferencia entre los casos w/H y w/oH , $|(v_{\perp}^{(w/H)})^2 - (v_{\perp}^{(w/oH)})^2|$, normalizado por el promedio de sus valores cuadráticos medios,

$$\frac{|(v_{\perp}^{(w/H)})^2 - (v_{\perp}^{(w/oH)})^2|}{|(v_{\perp}^{(w/H)})^2 + (v_{\perp}^{(w/oH)})^2|/2}, \quad (5.21)$$

en función del tiempo (ver la figura 5.3).

Al igual que en el caso de la dispersión cuadrática media horizontal, la diferencia entre las variaciones de velocidad con y sin la fuerza de Basset-Boussinesq

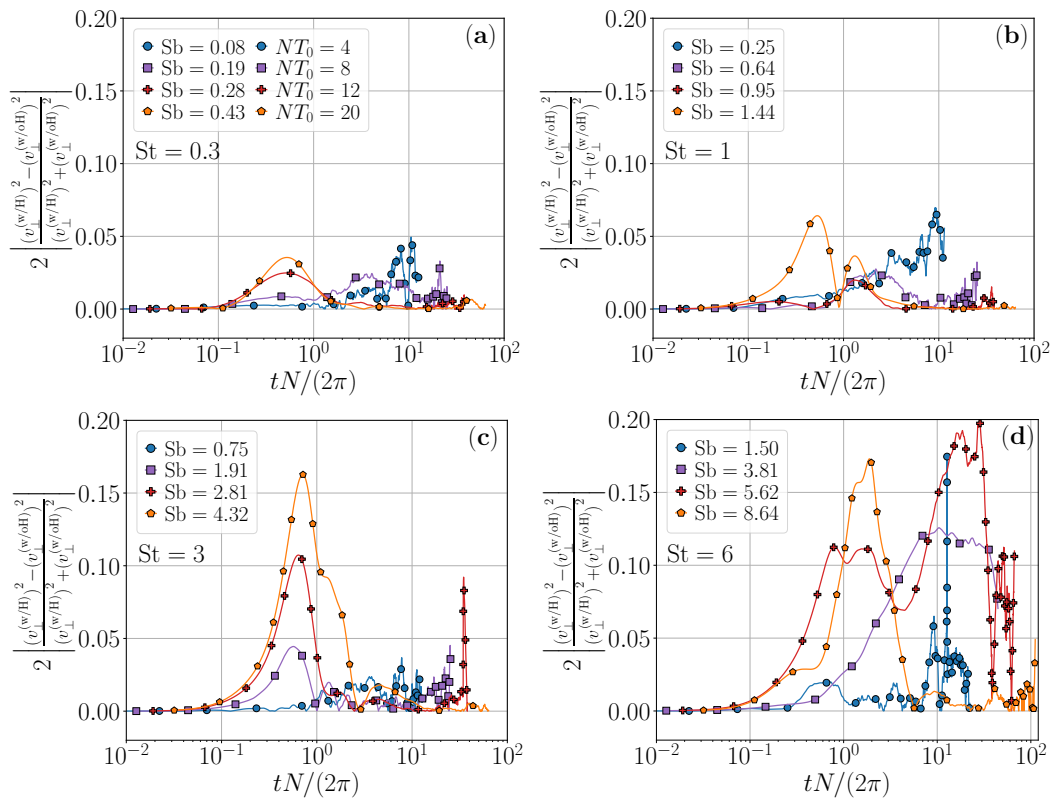


Figura 5.3: Diferencia normalizada entre las variaciones cuadráticas medias de velocidad en los casos con y sin el término de historia (respectivamente w/H y w/oH), en función del tiempo, para partículas en flujos con diferentes números de Froude y Stokes (St): (a) $St = 0,3$, (b) $St = 1$, (c) $St = 3$ y (d) $St = 6$. Las etiquetas en el primer panel indican la frecuencia de Brunt-Väisälä para todos los paneles. Los valores de Sb para las partículas se presentan en cada panel.

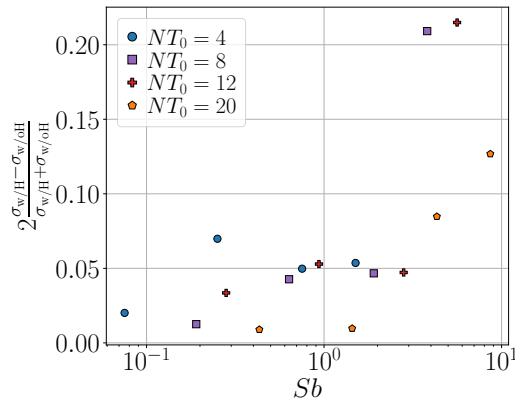


Figura 5.4: Valor absoluto de las diferencias entre las desviaciones estándar de las áreas de Voronoi, normalizadas por el promedio de las desviaciones estándar, para partículas considerando y descartando el término de historia (respectivamente w/H y w/oH), en función de Sb . Se observa un incremento en las diferencias a medida que Sb aumenta, lo que resalta el desacuerdo creciente en la distribución espacial de las partículas y su acumulación a medida que Sb crece.

permanece pequeña en tiempos iniciales, y crece a medida que el tiempo se acerca a $2\pi/N$. El error en las velocidades aumenta con el incremento del número de Stokes y con la disminución del número de Froude. En los casos con $Sb < 1$, el error en las velocidades es inferior al 6%, mientras que en los casos donde esta condición no se cumple, el error aumenta hasta aproximadamente un 20%.

El aumento de este error en tiempos intermedios es consistente con lo observado previamente en la dispersión horizontal de las partículas en la figura 5.2. Finalmente, cabe destacar que el tiempo del primer máximo en este error también depende del valor de St , lo cual concuerda con observaciones previas sobre la extensión temporal del comportamiento balístico inicial en la dinámica de partículas en flujos estratificados (Reartes y col. 2023).

5.3.4. Efecto de la fuerza de Basset-Boussinesq en la acumulación de partículas

A lo largo de esta tesis se estudió cómo el confinamiento vertical de las partículas con flotabilidad neutra en capas delgadas debido a la estratificación tiene un impacto significativo en la acumulación de partículas inerciales (Reartes y col. 2023). Esta agregación es relevante en flujos oceánicos, donde incluso la dinámica de partículas grandes a menudo se modela utilizando versiones modificadas empíricamente de la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol. Un ejemplo es el estudio del Sargazo, un tipo de alga marina que sirve de hábitat para fauna marina, pero que también puede representar un problema ambiental debido a sus altos niveles de arsénico y metales pesados al descomponerse cerca de las costas (Beron-Vera y col. 2020; Andrade-Canto y col. 2022). Otro ejemplo es el fitoplancton, que se agrupa formando estructuras complejas que se extienden por kilómetros (Martin 2003; Durham y col. 2013), generando capas delgadas a profundidades correlacionadas con regiones de fuertes gradientes de densidad del fluido y cizalladura vertical, ocurriendo típicamente cerca del fondo de la capa de mezcla oceánica (Johnston y col. 2009).

Para cuantificar el efecto de considerar o descartar la fuerza de Basset-Boussinesq

en la agrupación de partículas, utilizamos nuevamente la teselación de Voronoï. Así, calculamos la desviación estándar de las áreas de las celdas de Voronoï en simulaciones con el término de historia, $\sigma_{w/H}$, y sin el término de historia, $\sigma_{w/oH}$. Recordemos que una mayor dispersión en las áreas implica que las partículas forman más clústeres, mientras que una menor dispersión indica una distribución más homogénea. La figura 5.4 muestra el valor absoluto de la diferencia entre estas dos desviaciones, normalizada por el promedio de las desviaciones estándar. Para $S_b < 1$ el error al comparar los casos w/H y w/oH se mantiene por debajo del 7%, con la mayoría de las simulaciones presentando errores inferiores al 4%. Sin embargo, para $S_b > 1$ el error en el nivel de acumulación aumenta rápidamente con S_b , alcanzando valores que superan el 20%. Esta tendencia resalta el creciente desacuerdo en el cálculo de la acumulación de partículas cuando $S_b > 1$. Así, las cotas obtenidas en la sección 5.1 también son útiles para estimar las condiciones bajo las cuales la fuerza de Basset-Boussinesq no puede ser descartada en el estudio de la agregación de partículas.

5.4. Conclusiones

En este capítulo se obtuvo una cota útil para determinar bajo qué condiciones la fuerza de Basset-Boussinesq en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol para partículas inerciales puede ser despreciada, cuando las partículas están inmersas en un flujo estratificado y se encuentran en el entorno de su nivel de flotabilidad neutra. La cota es válida solo para fluidos suficientemente estratificados con $Fr < 1$, es decir, no es válida ni debe aplicarse en el límite $N \rightarrow 0$ de flujos isótropos y homogéneos. La cota motivó la definición de un nuevo número adimensional que llamamos número de Stokes de empuje, $S_b = N\tau_p$, que representa el número de Stokes de las partículas en la escala de empuje del fluido, es decir, la razón entre el tiempo de respuesta de la partícula y el periodo de Brunt-Väisälä. Para valores suficientemente pequeños de S_b , el efecto de la fuerza de Basset-Boussinesq se vuelve despreciable.

Esta condición fue validada mediante simulaciones numéricas directas de partículas pequeñas en flujos turbulentos establemente estratificados, explorando el espacio de parámetros variando el número de Froude del fluido y el número de Stokes de las partículas. La integración numérica de las partículas también se realizó considerando y descartando la fuerza de Basset-Boussinesq en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol, para cuantificar las diferencias entre ambos casos.

A partir de la teoría y de las simulaciones numéricas, se calculó la norma infinito de las fuerzas que actúan sobre las partículas y se demostró que la norma infinito de la fuerza de Basset-Boussinesq se vuelve menor que la de la fuerza de Stokes cuando $S_b < 1$. Se consideraron tres observables adicionales: la dispersión de partículas individuales (es decir, la distancia cuadrática media recorrida por las partículas), la velocidad cuadrática media de las partículas y la agrupación de partículas. En todos los casos, las diferencias entre las simulaciones con y sin la fuerza de Basset-Boussinesq fueron pequeñas cuando $S_b < 1$, y crecieron rápidamente con S_b cuando $S_b > 1$. Por lo tanto, la fuerza de Basset-Boussinesq debe considerarse en flujos estratificados solo para partículas con inercia muy grande, o cuando la estratificación es demasiado intensa. Los resultados permiten

estimar las condiciones bajo las cuales esta fuerza se vuelve relevante en diferentes contextos geofísicos (Martin 2003; Aartrijk y col. 2008b, 2010; Beron-Vera y col. 2020; Andrade-Canto y col. 2022; Ichihara y col. 2023; O'Brien y col. 2023). Es interesante que para parámetros típicos de flujos oceánicos, incluso partículas de 50 mm de radio tienen $S_b \approx 0,1$, lo que justifica la omisión de la fuerza de Basset-Boussinesq en la mayoría de los casos.

Ahora y como resultado de esta tesis, contamos con modelos para describir diferentes tipos de partículas (trazadores, partículas inerciales, y partículas inerciales neutralmente flotantes) en contextos geofísicos, en flujos isótropos y homogéneos para modelar las escalas más pequeñas, y en casos estratificados para escalas más grandes. Sabemos también cuál es la dinámica de estas partículas, y bajo qué condiciones podemos despreñar ciertas fuerzas. En el siguiente capítulo estudiaremos el efecto de los eventos extremos en flujos estratificados y como estos afectan el transporte de partículas.

Capítulo 6

Efecto de los eventos extremos en el transporte de material particulado

A lo largo de esta tesis vimos como el transporte de material particulado en flujos turbulentos es un fenómeno clave en una variedad de sistemas geofísicos, desde la atmósfera nocturna hasta los océanos. En estos entornos, la estratificación estable impone restricciones al transporte vertical, favoreciendo la formación de estructuras coherentes y modulando el mezclado. Sin embargo, dentro de este marco, la ocurrencia de eventos extremos (fluctuaciones intermitentes de gran amplitud en la velocidad y temperatura) puede inducir comportamientos no triviales en la dispersión y acumulación de partículas (Feraco y col. 2018; Marino y col. 2022).

Estudios recientes han demostrado que en flujos estratificados existe un régimen de intermitencia en escalas grandes, en el cual la interacción entre la turbulencia y las ondas internas de gravedad genera fluctuaciones verticales intensas (Feraco y col. 2018). Estas fluctuaciones, que emergen en un rango de números de Froude típicos de la atmósfera y los océanos, pueden desencadenar eventos de mezclado localizados y amplificar la disipación de energía cinética y potencial (Marino y col. 2022). En particular, se ha identificado una transición abrupta en la intermitencia del flujo, con una fuerte desviación de la estadística gaussiana en la velocidad vertical y la temperatura potencial, indicando la presencia de ráfagas de transporte intenso cuando el número de Froude del flujo es menor a 0,1.

Desde el punto de vista de la dinámica de partículas Lagrangianas e inerciales, estos eventos extremos pueden modificar drásticamente los patrones de transporte y dispersión. En turbulencia homogénea e isotrópica (HIT), las partículas suelen distribuirse de manera inhomogénea debido a mecanismos de acumulación preferencial, como la expulsión centrífuga de partículas de regiones con alta vorticidad. Sin embargo, en flujos estratificados, los eventos extremos pueden inducir corrientes verticales intensas, afectando la sedimentación y la distribución de partículas (Marino y col. 2022). Se ha observado que aproximadamente el 10% del dominio fluido puede contener hasta el 50% de la disipación total de energía en presencia de estos eventos, sugiriendo una modulación significativa en la eficiencia del transporte de material particulado (Marino y col. 2022).

El objetivo de este capítulo es analizar el impacto de los eventos extremos

Tabla 6.1: Parámetros relevantes de las simulaciones del fluido. TG y RND son los dos forzados usados. N_x , N_y y N_z son el número de puntos usado en cada dirección en la malla espacial, NT_0 es la frecuencia de Brunt-Väisälä en unidades de $T_0^{-1} = U_0/L_0$, Fr es el número de Froude, Re es el número de Reynolds, Rb es el número de Reynolds de empuje, L es la escala integral del flujo, η es la escala de Kolmogorov, L_b es la longitud de empuje y L_{Oz} es la escala de Ozmidov. Todas las longitudes están en unidades de la longitud de referencia L_0 .

Forzado	$N_x = N_y$	N_z	NT_0	Fr	Re	Rb	L/L_0	η/L_0	L_b/L_0	L_{Oz}/L_0
TG	768	192	8	0.1	2600	24	1.05	0.005	0.63	0.17
RND	1024	1024	5	0.05	7200	18	2.50	0.006	0.75	0.05

en la dispersión de partículas en flujos turbulentos en regímenes estratificados. Para simplificar el estudio y reducir el espacio de parámetros, en este capítulo consideraremos solo partículas Lagrangianas (o trazadoras). Se explorará cómo la intermitencia y la aparición de ráfagas intensas en el flujo afectan la dispersión de pares de partículas y la estadística de los tiempos de tránsito. Para ello, se emplearán simulaciones numéricas directas basadas en las ecuaciones de Boussinesq, permitiendo una caracterización detallada del transporte inducido por eventos extremos. Los resultados de este capítulo se realizaron en colaboración con el grupo de Raffaele Marino en École Centrale de Lyon en Francia, y serán publicados en un trabajo que se encuentra en preparación.

6.1. Simulaciones numéricas

Como hemos visto a lo largo de esta tesis, la dinámica de las ecuaciones de Boussinesq está controlada por el número de Reynolds, Re, y de Froude, Fr. En este capítulo, la elección de los valores del número de Froude en las simulaciones se realizó con base en estudios previos que han identificado un rango óptimo donde se maximiza la ocurrencia de eventos extremos en flujos establemente estratificados. En particular, Feraco y col. 2018 demostraron que en flujos turbulentos establemente estratificados la intermitencia a gran escala se intensifica en el intervalo $0,05 < Fr < 0,3$, alcanzando un máximo alrededor de $Fr \approx 0,08$. En este régimen, las fluctuaciones de la velocidad vertical y la temperatura potencial presentan colas anchas en sus distribuciones de probabilidad, lo que indica la presencia de fuertes ráfagas verticales localizadas en espacio y tiempo. Este tipo de ráfagas han sido observadas, por ejemplo, en observaciones de radar en la mesosfera polar (Chau y col. 2021).

La caracterización de estos eventos se llevó a cabo en Feraco y col. 2018 mediante simulaciones numéricas directas (DNS) de las ecuaciones de Boussinesq, revelando que la kurtosis de la velocidad vertical Lagrangiana alcanza su valor máximo en $Fr \approx 0,08$, con valores significativamente superiores a la referencia gaussiana ($K_w \gg 3$). Con base en estos resultados, las simulaciones realizadas en este capítulo se llevaron a cabo en un rango de números de Froude comprendido dentro de estos valores críticos, con el objetivo de capturar con precisión los efectos de los eventos extremos en la dispersión de partículas. Al seleccionar estos valores, se garantiza que los regímenes analizados reflejen la dinámica deseada.

Se realizaron dos simulaciones numéricas con diferentes resoluciones espaciales y forzados mecánicos (ver tabla 6.1). En la primera simulación, llamada TG,

la turbulencia se mantiene mediante un forzado de Taylor-Green (TG) como el usado en el capítulo 4, con una resolución espacial de $N_x = N_y = 768$ y $N_z = 192$ puntos de malla. El dominio tiene dimensiones $L_x = L_y = 2\pi L_0$ en las direcciones horizontales y $L_z = H = \pi L_0/2$ en la dirección vertical, donde L_0 es una unidad de longitud. La segunda simulación, llamada RND, se llevó a cabo en un dominio cúbico con $N_x = N_y = N_z = 1024$ puntos de malla y dimensiones $L_x = L_y = L_z = 2\pi L_0$. En este caso se utilizó un forzado aleatorio isótropo tridimensional, basado en el trabajo de Pouquet y col. 1978, cuya descripción detallada ya se presentó en el capítulo 3.

A diferencia del forzado de TG, el forzado RND no induce la formación de estructuras coherentes de gran escala en el flujo. En presencia de estratificación, este mecanismo de forzado favorece el desarrollo de vientos horizontales con cizalladura vertical en todo el dominio, y excita ondas de gravedad de gran amplitud, modulando la dinámica del flujo de una manera distinta a la del forzado TG. Mientras que el forzado TG genera regiones localizadas con alta cizalladura vertical y promueve la formación de inestabilidades turbulentas, lo que permite estudiar la interacción entre estructuras coherentes y la dispersión de partículas, el forzado RND impone una distribución homogénea de la energía, permitiendo analizar el transporte en un régimen dominado por vientos y ondas de gravedad sin la influencia de grandes vórtices organizados. De esta forma, ambos forzados proporcionan enfoques complementarios para caracterizar distintos mecanismos de transporte en turbulencia estratificada.

A estos flujos se agregaron partículas Lagrangianas, integrando la ecuación 2.23. La elección de usar partículas trazadoras se justifica no solo como una simplificación, sino también porque en este capítulo nos interesan escenarios atmosféricos y oceánicos en los que las propiedades y parámetros Lagrangianas nos dan una primera estimación general del transporte turbulento (Falkovich y col. 2001). Las partículas se inicializaron aleatoriamente en toda la caja, en un momento en que los flujos habían alcanzado un estado turbulento estacionario. Las velocidades iniciales de las partículas coinciden con la velocidad del fluido en el centro de cada partícula. Al tratarse de partículas Lagrangianas, su velocidad será la del elemento de fluido para todo tiempo. En cada simulación de fluido en la Tabla 6.1 se introdujeron 10^6 partículas para TG, y $1,5 \times 10^6$ partículas para RND. Las simulaciones con las partículas se integraron por más de 100 períodos de Brunt-Väisälä.

6.2. Definición de eventos extremos

Estudiaremos el efecto de los eventos extremos sobre el transporte de partículas. Para ello, es necesario definir un criterio que determine cuándo una partícula atraviesa (o no) un evento extremo. Consideramos que una partícula experimenta un evento extremo cuando su velocidad vertical supera el umbral de $4\sigma_{v_z}$ en un instante de tiempo t , donde σ_{v_z} es la desviación estándar instantánea de la velocidad vertical, obtenida de la distribución de probabilidad de v_z de todos los elementos de fluido. El tiempo total que una partícula pasa en eventos extremos se calcula como la suma de todas las ocurrencias en las que se cumple esta condición, multiplicada por el paso temporal. Normalizando este tiempo por el período de

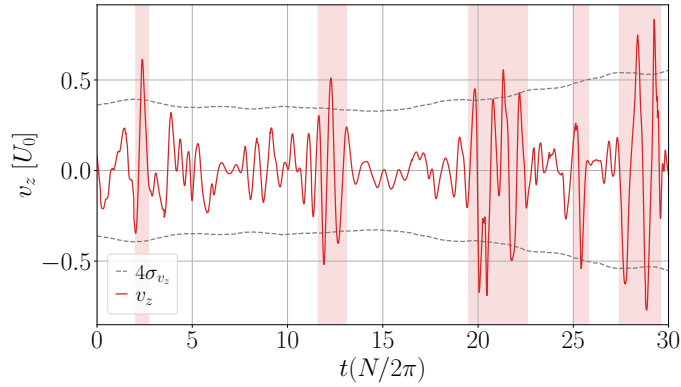


Figura 6.1: Velocidad vertical v_z en función del tiempo normalizado por el período de Brunt-Väisälä. Se define un evento extremo cuando la velocidad vertical de la partícula supera $4\sigma_{v_z}$ (línea punteada), donde σ_{v_z} es la desviación estándar de v_z . El tiempo total durante el cual una partícula atraviesa eventos extremos a lo largo de la evolución de su dinámica se obtiene al sumar todas estas ocurrencias (región sombreada en rojo).

Brunt-Väisälä, obtenemos el tiempo de cada partícula en eventos extremos en unidades del período fundamental de las ondas, $\tau_{exev} = \sum_i n_i \delta t(N/2\pi)$ (ver la figura 6.1). A partir de esta definición, clasificamos las partículas en dos subconjuntos relevantes: el primero está compuesto por aquellas que atraviesan eventos extremos en al menos un periodo de la onda, es decir, aquellas que cumplen $\tau_{exev} > 1$. El segundo subconjunto corresponde a las partículas que nunca experimentan eventos extremos, a las que definimos como aquellas que mantienen su velocidad vertical por debajo de $2,5\sigma_{v_z}$ durante toda su evolución.

La definición de estos dos subconjuntos de partículas se fundamenta en la existencia de variedades invariantes en la turbulencia estratificada, estructuradas en un espacio de fases donde la evolución de los elementos de fluido es lenta o rápida de acuerdo a la región explorada por las partículas (N. E. Sujovolsky y col. 2019b, 2020). Estudios previos han demostrado que los elementos fluido en turbulencia estratificada pueden alternar entre dos estados principales: uno dominado por ondas internas, donde la dinámica es oscilatoria y el transporte vertical es inhibido, y otro caracterizado por la aparición de inestabilidades locales que permiten una disrupción abrupta del régimen ondulatorio y una disipación más eficiente de la energía (N. E. Sujovolsky y col. 2019b). En este contexto, el subconjunto de partículas Lagrangianas que atraviesan eventos extremos corresponde a aquellas que logran escapar transitoriamente de la variedad invariante asociada a las ondas internas, y alcanzar regiones del espacio de fases donde el transporte vertical se intensifica y la disipación es más eficiente. Por otro lado, el subconjunto de partículas Lagrangianas que nunca atraviesan eventos extremos permanece dentro de la variedad invariante asociada al régimen ondulatorio, experimentando una evolución más restringida y una menor interacción con estructuras turbulentas (N. E. Sujovolsky y col. 2020). Esta clasificación nos permitirá entender los mecanismos de transporte en turbulencia estratificada, ya que permite distinguir entre partículas que contribuyen activamente a la redistribución de energía y material en el flujo, y aquellas que permanecen confinadas en estados de baja movilidad (N. E. Sujovolsky y col. 2019b).

Con estos criterios quedan entonces definimos dos subconjuntos de partícu-

las: el subconjunto de partículas que claramente atraviesan eventos extremos, denotado como $\#n_X$, y el subconjunto de partículas que nunca atraviesan eventos extremos, denotado como $\#n_{NX}$. En cada simulación, aproximadamente el 30% del total de las partículas pertenece a $\#n_X$, mientras que el $\approx 35\%$ corresponde a $\#n_{NX}$. Esta clasificación nos proporciona además dos conjuntos de partículas con tamaños comparables, permitiendo un análisis estadístico robusto de sus diferencias dinámicas.

6.3. Dispersión de pares de partículas

El estudio de la dispersión de pares de partículas es fundamental para el entendimiento de la turbulencia, ya que permite caracterizar cómo las estructuras del flujo afectan la evolución de la separación entre partículas en diferentes escalas (Salazar y col. 2009; Bourgoïn 2015), y cómo ocurren los procesos de difusión y mezcla (Falkovich y col. 2001). En particular, la dispersión vertical en flujos estratificados es un proceso clave en la dinámica de la atmósfera y los océanos, donde la estratificación limita el transporte vertical y genera anisotropía en la evolución de la separación de partículas (N. E. Sujovolsky y col. 2019a; Ollitrault y col. 2005).

La dispersión de pares se analiza a partir de la evolución temporal de la separación relativa $r(t)$ entre dos partículas, la cual está gobernada por la ecuación $dr/dt = w(t)$, donde $w(t)$ es la velocidad relativa entre las partículas. La media cuadrática de la separación, $\langle r^2(t) \rangle$, donde el promedio se calcula sobre pares de partículas, caracteriza distintos regímenes de dispersión según la escala espacial y temporal. En escalas pequeñas, dentro del régimen disipativo, la separación de partículas está dominada por las tasas de deformación del flujo, mientras que en el subrango inercial ($\eta \ll r \ll L_0$) la dispersión sigue la ley de Richardson-Obukhov (siempre que la turbulencia sea isotrópica y homogénea), $\langle r^2(t) \rangle \sim g\epsilon t^3$, donde ϵ es la tasa de disipación de energía y g es una constante universal (J. Bec y col. 2010; Bourgoïn 2015). Sin embargo, la dispersión de partículas en turbulencia estratificada presenta un comportamiento altamente anisotrópico, con una clara diferencia entre la dispersión horizontal y vertical, lo que genera desviaciones de los modelos clásicos desarrollados para turbulencia homogénea e isotrópica (N. E. Sujovolsky y col. 2019a; Salazar y col. 2009). Mientras que en este caso la dispersión horizontal muestra un crecimiento prolongado en el tiempo, la dispersión vertical experimenta una fase inicial de crecimiento, seguida de un régimen de saturación y, finalmente, una transición a un comportamiento difusivo para tiempos muy largos (Aartrijk y col. 2008b).

Nos concentramos entonces en la dispersión vertical de pares, ya que además esta es la dirección importante para comprender el transporte vertical en la atmósfera y el océano. Definimos la separación vertical entre pares de partículas i y j como

$$\zeta(t) = z_i(t) - z_j(t), \quad (6.1)$$

donde al calcular valores medios promediaremos sobre todos los pares de partículas i, j que estén inicialmente más cerca que alguna separación inicial ζ_0 . En la figura 6.2 se observa la evolución temporal de la dispersión vertical de pares de

partículas con una separación inicial $\zeta_0 \sim 10\eta$, evaluada tanto para el conjunto total de partículas como para los subconjuntos con y sin eventos extremos definidos previamente. La dispersión se mide a través de la media cuadrática de la separación vertical, $\langle \zeta^2(t) \rangle$, normalizada por la escala de disipación η . Se comparan los resultados obtenidos en las simulaciones RND y TG, lo que permite analizar cómo la estructura del forzado influye en la dinámica de dispersión. En ambos casos se observa que las partículas pertenecientes al subconjunto $\#n_X$, aquellas que atraviesan eventos extremos, exhiben una dispersión significativamente mayor en comparación con el subconjunto $\#n_{NX}$, compuesto por partículas que nunca experimentan eventos extremos. Esto es particularmente notorio en el exponente asociado a la dispersión (es decir el exponente t^α con el que crece la dispersión vertical en el tiempo). Si bien en todos los casos es subdifusivo (exponente menor a 1), para el conjunto $\#n_X$ la potencia es más grande. Notar que para un proceso browniano, es decir, con difusión normal, $\langle \zeta^2(t) \rangle^{1/2} \sim t^{1/2}$, por lo que su cuadrado crece linealmente en el tiempo. Cualquier otro exponente corresponde a una difusión anómala.

Otro efecto interesante es el que se observa en la simulación TG, donde se distingue un cambio en la dispersión cuando la separación alcanza la escala de empuje L_b , donde la dispersión vertical tiende a un régimen difusivo con crecimiento proporcional a t , sugiriendo una transición en la dinámica de transporte. Este comportamiento concuerda con estudios previos que indican que la estratificación impone un límite superior a la dispersión vertical, regulando la interacción entre la turbulencia y las ondas internas (N. E. Sujovolsky y col. 2019a; Aartrijk y col. 2008b).

Además, la comparación entre los forzados revela diferencias significativas en la evolución de la dispersión vertical. En el caso de RND, la dispersión muestra un crecimiento sostenido en el tiempo, lo cual es esperable dado que este forzado trata de excitar un flujo turbulento más isotrópo, sin estructuras dominantes que restrinjan el transporte de partículas. En contraste, en TG la dispersión está fuertemente modulada por la estratificación y cizalladura vertical, lo que indica que la organización del flujo influye directamente en la eficiencia del transporte vertical. En particular, la formación de estructuras coherentes de gran escala en TG tiende a inhibir la dispersión de partículas, restringiendo su movimiento y favoreciendo la acumulación en regiones específicas del flujo. La saturación en el crecimiento de $\langle \zeta^2(t) \rangle$ para tiempos largos en el caso de partículas sin eventos extremos (ver la figura 6.2(a)), y el freno en el crecimiento de la dispersión de pares, se asocia con la estructura en capas característica del flujo estratificado y reflejan la restricción impuesta por la estratificación sobre el transporte vertical (Aartrijk y col. 2008b). Estas diferencias entre ambos forzados subrayan el papel fundamental de la estructura del flujo en la dispersión de partículas en turbulencia estratificada, reforzando la importancia de los eventos extremos en la redistribución de material en el medio.

Para entender mejor la dispersión de pares de partículas en turbulencia estratificada estudiamos también las diferencias entre las distribuciones de los subconjuntos de partículas definidos previamente. En la figura 6.3 se presenta la distribución de probabilidad (PDF) de la separación vertical ζ^2 , normalizada por su valor medio $\langle \zeta^2 \rangle$ en cada tiempo. Se comparan los resultados para el conjunto

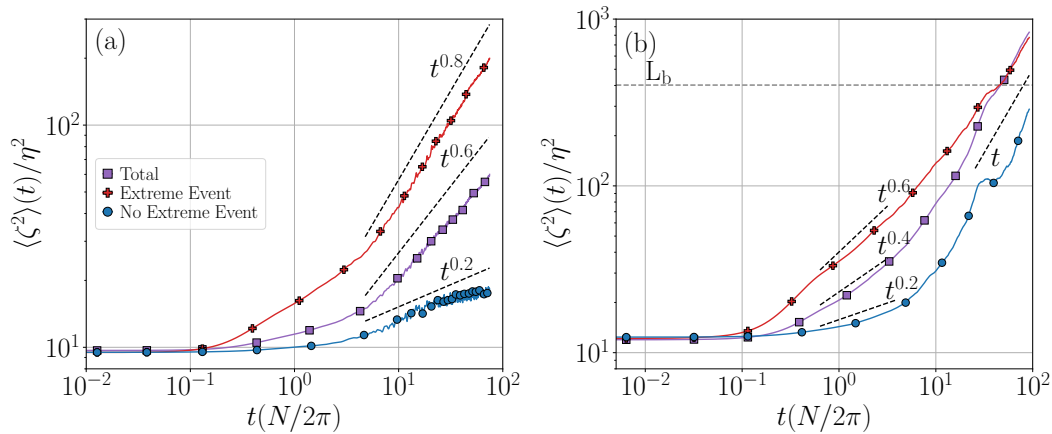


Figura 6.2: Dispersión de pares de partículas, $\langle \zeta^2 \rangle(t)$, normalizada por η en función del tiempo para el total de las partículas, para el subconjunto que experimenta eventos extremos ($\#n_X$) y para el subconjunto que no los experimenta ($\#n_{NX}$). La figura (a) corresponde a la simulación con forzado RND, mientras que la figura (b) muestra los resultados para la simulación con forzado TG. En ambos casos, el subconjunto $\#n_X$ exhibe una mayor dispersión, mientras que $\#n_{NX}$ presenta valores significativamente menores. En la simulación TG se observa que a medida que la separación alcanza la escala de empuje, la dispersión tiende a un régimen difusivo para todos los tipos de partículas.

total de partículas, el subconjunto $\#n_X$ y el $\#n_{NX}$, considerando tiempos mayores a $\tau = 2\pi/N$. La figura 6.3(a) corresponde a la simulación con RND, mientras que la figura 6.3(b) muestra los resultados para la simulación TG. En ambos casos se observa que la PDF de la dispersión de pares exhibe colas extendidas, especialmente para las partículas en el subconjunto $\#n_X$. Esta característica indica la presencia de eventos de separación extrema, donde algunas partículas experimentan una dispersión vertical mucho más intensa que el valor promedio. En contraste, las partículas del subconjunto $\#n_{NX}$ presentan una mayor probabilidad de permanecer con valores de separación por debajo de la media, lo que sugiere que su transporte vertical está más restringido por la estratificación, en particular, la probabilidad de encontrar separaciones por debajo de la media para el caso $\#n_{NX}$ es mucho mayor que en $\#n_X$.

Este comportamiento es similar al que ocurre para dispersión en turbulencia isotrópica y homogénea, donde la PDF de la separación de pares se aleja de una distribución gaussiana y muestra colas largas debido a la intermitencia del flujo y la acción de estructuras coherentes (Salazar y col. 2009). En el contexto de la turbulencia estratificada, la dispersión vertical está modulada por la presencia de ondas internas y cizalladura vertical, lo que introduce una anisotropía adicional en la estadística de la separación de partículas (N. E. Sujovolsky y col. 2019a; Clark di Leoni y col. 2015).

Finalmente la comparación entre los forzados revela diferencias clave en la PDF de la dispersión de pares de partículas. En la simulación con forzado RND, la dispersión vertical exhibe una mayor probabilidad de alcanzar valores elevados de separación, lo que se traduce en una distribución más amplia y en colas extendidas en la PDF. Este comportamiento indica que en presencia de un forzado más isotrópico, sin estructuras coherentes dominantes, los eventos de dispersión extrema ocurren con mayor frecuencia. En contraste, en el caso del forzado TG, la

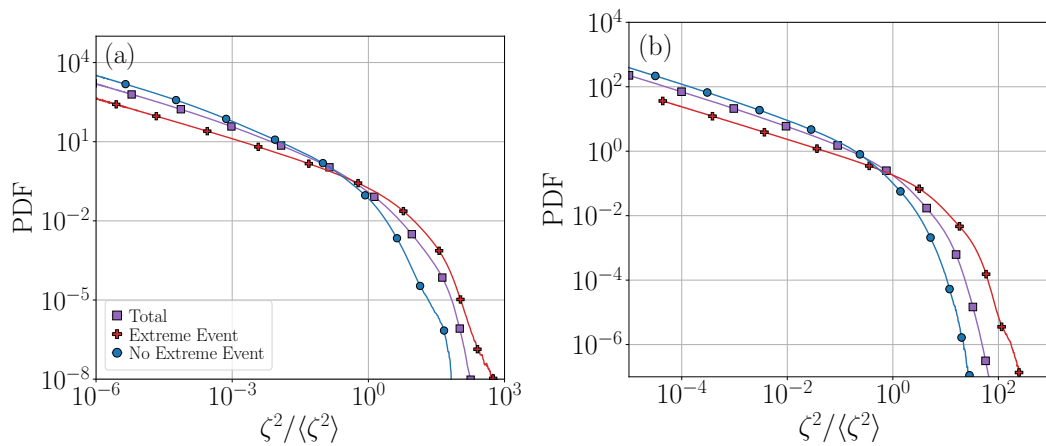


Figura 6.3: Distribución de probabilidad (PDF) de la dispersión de pares de partículas en la dirección vertical, representada como ζ^2 , normalizada por su valor medio $\langle \zeta^2 \rangle$. Se presentan los resultados para el conjunto total de partículas, el subconjunto de partículas que experimenta eventos extremos (n_X) y el subconjunto que no los experimenta (n_{NX}), considerando para el cálculo tiempos mayores a $\tau = 2\pi/N$. La figura (a) corresponde a la simulación con forzado RND, mientras que la figura (b) muestra los resultados para la simulación TG. En ambos casos las partículas que atraviesan eventos extremos tienen una mayor probabilidad de alcanzar desplazamientos verticales superiores al promedio, mientras que las partículas que nunca atraviesan eventos extremos muestran una mayor probabilidad de presentar valores inferiores a la media.

dispersión está fuertemente influenciada por el flujo medio y por la cizalladura vertical, lo que conduce a una mayor acumulación de ζ en regiones de baja dispersión y a un decaimiento más pronunciado en las colas de la PDF. Esto sugiere que la organización del flujo y la estructura del forzado no solo influyen en la eficiencia del transporte vertical, sino también en la probabilidad de encontrar eventos de separación extrema, con el forzado TG imponiendo restricciones adicionales a la dispersión en comparación con RND.

6.4. Exponentes de Lyapunov de tiempo finito y estructuras coherentes Lagrangianas

Como vimos, el estudio del transporte de partículas en flujos turbulentos estratificados requiere una caracterización precisa de las estructuras que organizan la dinámica del flujo. Si bien los métodos Eulerianos permiten detectar vórtices y estructuras en el campo de velocidad instantáneo, estos métodos presentan limitaciones cuando se trata de analizar la evolución del transporte a lo largo del tiempo. En este contexto, los exponentes de Lyapunov de tiempo finito (FTLEs, por sus siglas en inglés) y las estructuras coherentes Lagrangianas (LCSs, por sus siglas en inglés) proporcionan un marco matemático sólido para identificar superficies materiales que actúan como barreras al transporte o como regiones donde la mezcla es más eficiente (Haller 2015).

El estudio de las LCSs y los FTLEs ha evolucionado significativamente en las últimas décadas, proporcionando herramientas para analizar la dinámica del transporte en turbulencia. Los primeros estudios en la caracterización de estas estructuras en flujos caóticos y turbulentos se remontan a los trabajos de Aref 1984, quien demostró cómo la teoría del caos aplicada a fluidos puede

utilizarse para comprender la mezcla y la organización del transporte en flujos no estacionarios. Posteriormente, Pierrehumbert (1991) y Ottino (1989) extendieron estas ideas al estudio de la mezcla en flujos geofísicos y químicos, demostrando que la existencia de estructuras coherentes en el espacio de fases influye fuertemente en la dispersión de trazadores (Pierrehumbert 1991; Ottino 1989).

La formulación moderna de las LCSs, basada en la maximización de los exponentes de Lyapunov de tiempo finito, fue introducida en los trabajos de Haller (2001, 2002), donde se estableció un marco matemático para identificar estas estructuras en flujos no estacionarios (Haller 2001; Haller 2002). En estos estudios se demostró que las LCSs pueden clasificarse en estructuras atractoras y repulsoras, dependiendo de la dinámica de estiramiento local del fluido. Esta idea ha sido ampliamente validada en estudios numéricos y experimentales, mostrando que las regiones de alto FTLE tienden a coincidir con barreras al transporte en sistemas turbulentos (Shadden y col. 2005). En el contexto de la turbulencia estratificada, los trabajos de Boffetta et al. (2007) y de Ruppert-Felsot et al. (2009) analizaron cómo la presencia de ondas internas y cizalladura vertical modifica la estructura de las LCSs (Boffetta y col. 2001; Mathur y col. 2007). Estos estudios encontraron que la estratificación introduce anisotropía en la dinámica de transporte, haciendo que las estructuras coherentes en flujos estratificados presenten una mayor persistencia en el tiempo en comparación con flujos isotrópos. Más recientemente, Haller y Beron-Vera (2012) aplicaron este enfoque al estudio de vórtices oceánicos, identificando que las LCSs pueden actuar como barreras dinámicas que regulan la dispersión de masas de agua en escalas grandes (Haller y col. 2012).

Como se mencionó, el enfoque clásico para detectar LCSs se basa en el cálculo de FTLEs, que mide la tasa de estiramiento exponencial entre trayectorias cercanas en un flujo dado. En términos matemáticos, el FTLE se calcula aquí a partir de la separación de los pares de partículas,

$$\lambda(\zeta_0, t_0, t) = \frac{1}{|t - t_0|} \ln(\zeta(t)/\zeta_0) \quad (6.2)$$

donde λ es el coeficiente de Lyapunov. Valores altos del FTLE indican regiones donde pequeñas perturbaciones en las posiciones iniciales de las partículas llevan a grandes diferencias en sus trayectorias, lo que sugiere la presencia de superficies que repelen o atraen material, es decir, LCSs (Haller 2015).

La figura 6.4 muestra la evolución temporal del valor medio del coeficiente de Lyapunov de tiempo finito para el total de las partículas en cada simulación, así como para los subconjuntos $\#n_X$ y $\#n_{NX}$. En la figura 6.4(a) se presentan los resultados obtenidos en la simulación con forzado RND, mientras que la figura 6.4(b) corresponde a la simulación con forzado TG. En ambos casos, el subconjunto $\#n_X$ exhibe valores considerablemente más elevados de $\langle \lambda \rangle$, lo que sugiere una mayor predominancia de trayectorias repulsivas dentro de este grupo de partículas. Para tiempos largos el valor de $\langle \lambda \rangle$ tiende a cero, lo que es esperable dado que, una vez que los pares de partículas alcanzan separaciones suficientemente grandes, su distancia media se estabiliza y dejan de experimentar un crecimiento exponencial en su separación. A tiempos cortos se observa un máximo en el coeficiente de Lyapunov, λ , en tiempos correspondientes al tiempo de separación balístico de partículas. Este tiempo se asocia al régimen inicial en el que las partículas aún

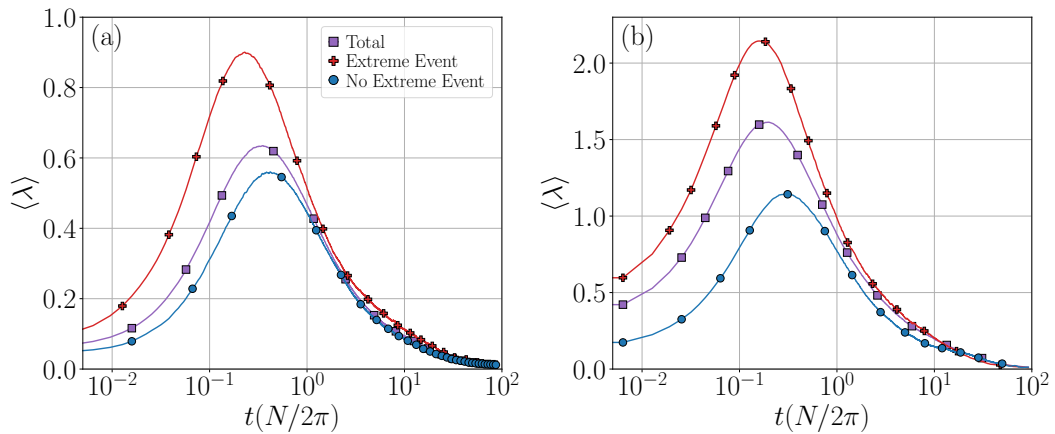


Figura 6.4: Valor medio del coeficiente de Lyapunov de tiempo finito, $\langle \lambda \rangle$, en función del tiempo para el conjunto total de partículas, el subconjunto que experimenta eventos extremos ($\#n_X$) y el subconjunto que no los experimenta ($\#n_{NX}$). La figura (a) corresponde a la simulación con forzado RND, mientras que la figura (b) muestra los resultados para la simulación con forzado TG. En ambos casos, el subconjunto $\#n_X$ presenta valores significativamente más altos de $\langle \lambda \rangle$, lo que indica una mayor presencia de trayectorias repulsivas en este subconjunto.

no han sido completamente influenciadas por la turbulencia, y su separación es dominada por su velocidad inicial, lo que genera un crecimiento rápido y casi lineal en la distancia entre ellas (N. E. Sujovolsky y col. 2019a; Reartes y col. 2023). El hecho de que el subconjunto n_X sea el que alcanza los valores más altos de λ indica una correlación clara entre los eventos extremos y la presencia de trayectorias altamente repulsivas. Este efecto es aún más pronunciado en la simulación con forzado TG, donde el coeficiente de Lyapunov alcanza valores que duplican los observados en la simulación con forzado RND. Esta diferencia sugiere que la dinámica de las partículas en el caso TG está fuertemente afectada por la presencia de estructuras coherentes, que refuerzan la separación rápida de trayectorias y amplifican la dispersión.

Las figuras 6.5 y 6.6 presentan las trayectorias de las partículas en las simulaciones RND y TG respectivamente, en un corte de una sección x-z, resaltando la relación entre las estructuras coherentes Lagrangianas y la ocurrencia de eventos extremos. En cada caso, la figura (a) colorea las trayectorias según los valores de FTLE, diferenciando entre regiones del flujo con variedades repulsivas (FTLE positivo) y atractivas (FTLE negativo), mientras que en la figura (b) las trayectorias se clasifican en función de si las partículas experimentan eventos extremos o no. Se observa una clara correlación entre las trayectorias repulsivas y aquellas que atraviesan eventos extremos, lo que indica que los eventos extremos juegan un papel determinante en la modulación del transporte vertical en estos flujos. Esto concuerda con estudios previos que indican que las regiones de alto FTLE suelen coincidir con zonas de intensa deformación del flujo, donde pequeñas diferencias iniciales en la posición de las partículas se amplifican exponencialmente, facilitando la separación de trayectorias (Haller 2015). En el caso de la simulación TG, la presencia de estructuras coherentes es aún más evidente, con regiones bien definidas de trayectorias repulsivas que coinciden con la mayor concentración de eventos extremos. Este resultado refuerza la idea de que las LCSs no solo organizan el transporte del flujo, sino que también pueden actuar como catalizadores de la

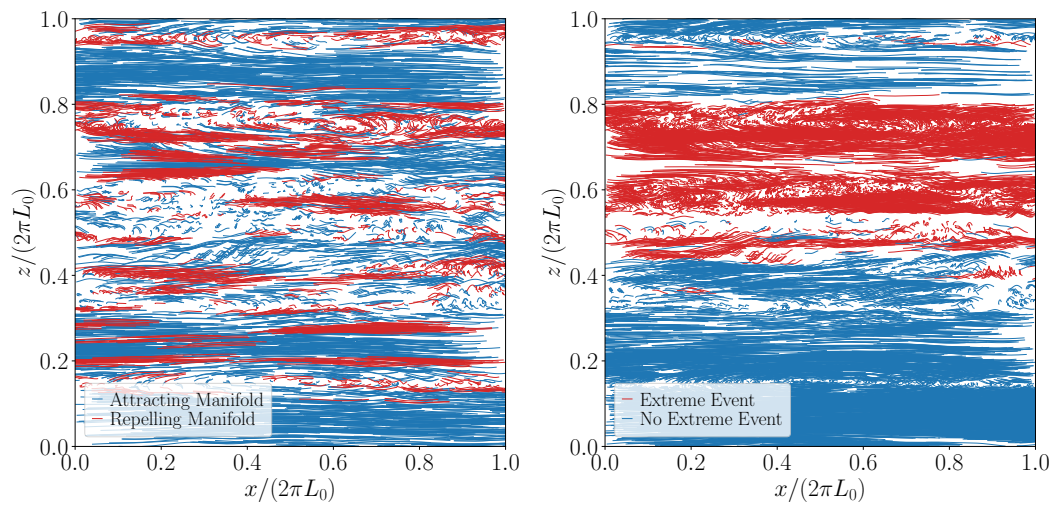


Figura 6.5: Trayectoria de partículas durante un periodo de tiempo $\tau = 2\pi/N$ para la simulación RND. En la figura (a) el color rojo representa trayectorias con valores de FTLE positivos, indicando variedades repulsivas del flujo, mientras que el color azul corresponde a trayectorias con valores de FTLE negativos, asociadas a variedades atractivas. En la figura (b) se muestran las mismas trayectorias, pero aquí el color rojo indica las partículas que atraviesan eventos extremos, mientras que el color azul representa aquellas que no los experimentan. Se observa una fuerte correlación entre ambos casos, lo que sugiere que las trayectorias repulsivas identificadas por los FTLEs están estrechamente relacionadas con la ocurrencia de eventos extremos.

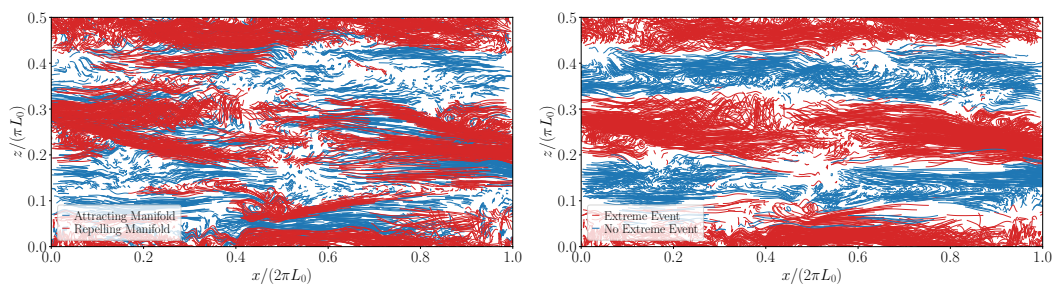


Figura 6.6: Trayectoria de partículas durante un periodo de tiempo $\tau = 2\pi/N$ para la simulación TG. En la figura (a) el color rojo representa trayectorias con valores de FTLE positivos, indicando variedades repulsivas del flujo, mientras que el color azul corresponde a trayectorias con valores de FTLE negativos, asociadas a variedades atractivas. En la figura (b) se muestran las mismas trayectorias, pero aquí el color rojo indica las partículas que atraviesan eventos extremos, mientras que el color azul representa aquellas que no los experimentan. Se observa una fuerte correlación entre ambos casos, mayor incluso que en el caso de RDN, lo que confirma que las trayectorias repulsivas identificadas por los FTLEs están estrechamente relacionadas con la ocurrencia de eventos extremos.

alta ocurrencia de eventos extremos en la dispersión de partículas. La concentración de eventos extremos en regiones específicas del flujo sugiere la existencia de parches de alta intermitencia, similares a los observados en turbulencia atmosférica (Rodríguez Imazio y col. 2023). Estos parches, caracterizados por tasas de disipación elevadas y fluctuaciones intensas de la velocidad, pueden amplificar localmente la dispersión de partículas, reforzando la conexión entre estructuras coherentes y transporte intermitente.

Cabe destacar entonces que en turbulencia estratificada, estas estructuras pueden actuar tanto como barreras dinámicas que restringen la mezcla en ciertas regiones (Haller 2015), como corredores preferenciales que favorecen el intercambio de material entre distintas capas del fluido. La observación de que las trayectorias repulsivas identificadas por los FTLEs están asociadas con eventos extremos confirma que estas regiones del flujo tienen un impacto significativo en la dinámica de dispersión vertical. En particular, en la simulación TG, donde la cizalladura y las estructuras organizadas dominan la dinámica (N. E. Sujovolsky y col. 2018), el efecto de estas regiones es más pronunciado, lo que puede explicar la mayor prevalencia de trayectorias altamente inestables en comparación con la simulación RND.

6.5. Relación de los eventos extremos con la disipación

El estudio de la disipación de energía en turbulencia estratificada ha revelado que la dinámica de estos flujos está dominada por la presencia de regiones altamente intermitentes, donde la tasa de disipación y la enstrofia (es decir, el cuadrado de la vorticidad) alcanzan valores mucho mayores que en el resto del dominio. Estas regiones de alta intermitencia han sido identificadas en simulaciones numéricas y observaciones atmosféricas, mostrando que pueden desempeñar un papel clave en la redistribución de energía en estos sistemas (Pearson y col. 2018; Marino y col. 2022; Rodríguez Imazio y col. 2023). En particular, estudios recientes han mostrado que la presencia de ráfagas verticales extremas es un mecanismo fundamental en la formación de estas regiones. Estas ráfagas, que aparecen de manera localizada en el tiempo y en el espacio, pueden generar turbulencia intensa, incrementando la disipación de energía y modulando su distribución estadística (Marino y col. 2022). Se ha observado que, en regímenes geofísicamente relevantes, aproximadamente el 10% del volumen del flujo puede concentrar hasta el 50% de la disipación global, lo que resalta la importancia de estos eventos en el balance energético de la turbulencia estratificada (Feraco y col. 2018).

Desde una perspectiva observacional, la existencia de parches de alta intermitencia ha sido confirmada mediante mediciones de turbulencia en la atmósfera. Datos obtenidos a bordo de un avión de investigación en la estratosfera han mostrado que la turbulencia de aire claro (CAT) exhibe un carácter altamente fragmentado, con regiones bien definidas de intensa disipación separadas por zonas de menor actividad (Rodríguez Imazio y col. 2023). Estos parches pueden presentar una estructura espectral diferente dentro de un mismo evento, lo que indica que distintos mecanismos modulan la disipación en cada región. En particular, se ha

observado que la correlación entre la velocidad vertical y temperatura potencial es un factor clave en la generación de estas estructuras, sugiriendo que la interacción entre las ondas internas y la turbulencia es un mecanismo fundamental en la aparición de intermitencia extrema.

El vínculo entre la enstrofía, la disipación de energía y los eventos extremos ha sido explorado recientemente en simulaciones de alta resolución de flujos estratificados, donde se ha encontrado que la presencia de ráfagas verticales puede alterar significativamente la eficiencia de disipación de la energía. La correlación entre los picos de enstrofía y las regiones de alta disipación confirma que estos eventos extremos no solo contribuyen a la generación de turbulencia, sino que también modulan la transferencia de energía entre escalas (Marino y col. 2022; Feraco y col. 2018).

En flujos estratificados, la enstrofía puede amplificarse en regiones donde la cizalladura y la estratificación conducen a la formación de capas delgadas altamente turbulentas (Feraco y col. 2018). Estas capas pueden actuar como regiones de intenso mezclado y transferencia de energía, promoviendo la aparición de eventos de disipación localizada. Los estudios numéricos presentados en este capítulo muestran que la relación entre la enstrofía y la intermitencia extrema es aún más pronunciada en flujos con estructuras coherentes bien definidas. En particular, y como veremos a continuación, en la simulación TG se observa un aumento significativo de la enstrofía en las partículas que experimentan eventos extremos, alcanzando valores mucho mayores que en la simulación RND. Este comportamiento sugiere que las estructuras coherentes características del forzado TG no solo organizan la dinámica del flujo, sino que también amplifican la intermitencia y la disipación local de energía. En este sentido, la presencia de vórtices coherentes puede facilitar la formación de zonas de alta cizalladura, promoviendo la aparición de estos parches intermitentes.

En la figura 6.7 se presenta la evolución temporal de la enstrofía en la posición de las partículas Lagrangianas, para el conjunto total de partículas para el subconjunto que experimenta eventos extremos y para el subconjunto que no los experimenta. Los valores están promediados sobre todas las partículas en cada subconjunto. Se observa que el subconjunto de partículas que atraviesa eventos extremos presenta valores significativamente más altos de enstrofía, lo que confirma que la disipación de energía está altamente localizada en estas regiones del flujo. Este efecto es aún más pronunciado en la simulación TG. Estos resultados refuerzan la idea de que los parches de alta intermitencia son una característica fundamental de la turbulencia estratificada y desempeñan un papel clave en la redistribución de la energía en el sistema. Al concentrar la disipación en regiones específicas, estos parches influyen fuertemente en la dinámica del transporte de partículas y en la evolución de la turbulencia en escalas más grandes.

6.6. Conclusiones

En el presente capítulo se ha explorado en detalle la relación entre los eventos extremos en turbulencia estratificada y sus efectos en la dispersión de partículas, analizando la influencia de estructuras coherentes, la dinámica de los exponentes de Lyapunov de tiempo finito (FTLEs), y la disipación de energía en estos sistemas.

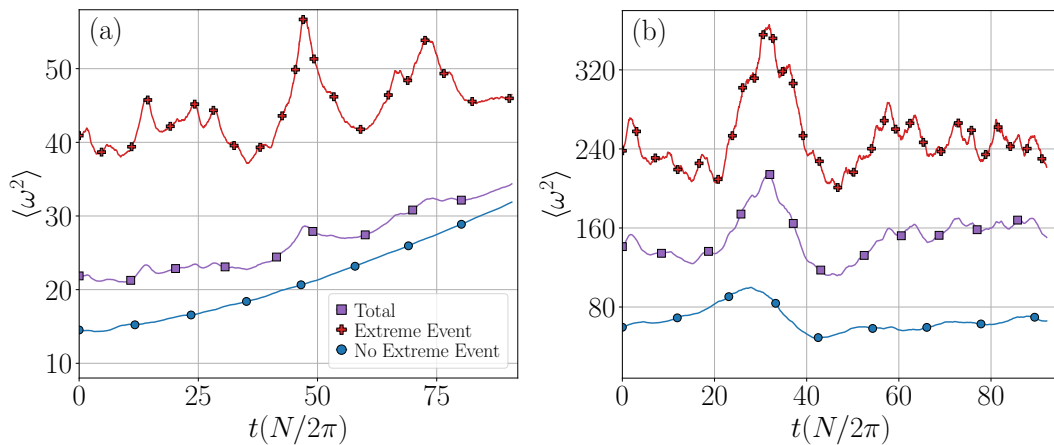


Figura 6.7: Evolución temporal de la enstrofia media en la posición de las partículas Lagrangianas para el conjunto total de partículas, para el subconjunto que experimenta eventos extremos ($\#n_X$) y para el subconjunto que no los experimenta ($\#n_{NX}$). La figura (a) corresponde a la simulación con forzado RND, mientras que la figura (b) muestra los resultados para la simulación con forzado TG. El crecimiento de la vorticidad en el tiempo en el caso (a) se debe a que la simulación con forzado RND genera fuertes vientos horizontales excitados por las ondas. En ambos casos, el subconjunto $\#n_X$ exhibe valores de enstrofia significativamente superiores al valor medio, mientras que el subconjunto $\#n_{NX}$ presenta valores considerablemente menores. Esto sugiere que los eventos extremos ocurren predominantemente en regiones del flujo caracterizadas por una mayor disipación de energía, ya que la disipación total en el fluido es proporcional a su enstrofia.

A partir de un enfoque Lagrangiano hemos identificado que la dispersión de pares de partículas está fuertemente modulada por regiones del flujo donde ocurren eventos de intensa disipación de energía, estableciendo un vínculo entre eventos extremos, estructuras coherentes y transporte de partículas.

El análisis de la dispersión de pares de partículas reveló que los eventos extremos tienen un impacto significativo en la separación de partículas en la dirección vertical. Se observó que las partículas que atraviesan eventos extremos del flujo exhiben tasas de dispersión considerablemente más altas que aquellas que no los experimentan. Además, en la simulación con forzado TG, donde la presencia de estructuras coherentes es más prominente, la dispersión se ve aún más amplificada, sugiriendo que la organización de gran escala del flujo influye en la eficiencia del transporte Lagrangiano.

El estudio de los FTLE confirmó que los eventos extremos ocurren en regiones con valores grandes de FTLE, lo que indica la presencia de trayectorias altamente repulsivas en estas zonas del flujo. Esto sugiere que los eventos extremos no son completamente aleatorios, sino que están organizados espacialmente por las estructuras del flujo, actuando como barreras dinámicas que moldean la dinámica de dispersión. Además, la fuerte correlación entre los FTLE y los eventos extremos refuerza la idea de que estas regiones del flujo no solo aumentan la dispersión de partículas, sino que también regulan la intermitencia en la transferencia de energía. Con respecto a la formación de estructuras coherentes, se encontró que la turbulencia estratificada exhibe regiones donde el transporte está correlacionado con la disipación local de energía. Esto no solo organiza la dinámica del flujo, sino que también juega un papel clave en la redistribución de energía y en la aparición de eventos extremos. En la simulación TG, estas estructuras son más persistentes

y presentan una mayor capacidad para concentrar eventos de disipación intensa, lo que se refleja en una mayor enstrofía y en la intensificación de los eventos extremos.

Se observó también que el subconjunto de partículas que experimenta eventos extremos presenta valores de enstrofía significativamente más altos en comparación con el resto de las partículas, confirmando que estos eventos ocurren en zonas del flujo donde la energía se disipa de manera más intensa. En este sentido, se ha mostrado que la disipación y la dispersión están estrechamente relacionadas: las regiones donde la disipación es mayor coinciden con aquellas donde la dispersión de partículas es más pronunciada, estableciendo un vínculo clave entre la dinámica energética del flujo y el transporte.

Finalmente, el análisis indica que estos eventos de alta disipación son intermitentes y ocurren en parches bien definidos del flujo, lo que sugiere que el transporte y la disipación en turbulencia estratificada no son procesos homogéneos, sino que están dominados por regiones donde la interacción entre ondas internas y turbulencia genera fluctuaciones extremas. Estos hallazgos son consistentes con observaciones en la atmósfera, donde se ha reportado que la turbulencia de aire claro (CAT) se organiza en regiones bien definidas de alta disipación separadas por zonas de menor actividad (Rodríguez Imazio y col. 2023).

Capítulo 7

Conclusiones

Esta tesis se centró en el estudio de la dinámica del transporte de material particulado en flujos turbulentos establemente estratificados (SST) y en turbulencia isótropa y homogénea (HIT), con un enfoque particular en cómo modelar correctamente material particulado en flujos geofísicos, en la dispersión, transporte, acumulación y sedimentación de partículas inerciales, y en la comprensión del efecto que generan los eventos extremos sobre la dinámica del transporte. Para el análisis numérico, se llevaron a cabo simulaciones numéricas directas basadas en las ecuaciones de Boussinesq y Navier-Stokes, en las cuales se inyectaron millones de partículas, tanto trazadoras como inerciales, que evolucionaron en diferentes configuraciones de flujo. Se exploró un amplio rango de parámetros, variando la estratificación del flujo, la inercia de las partículas y la relación de masa entre el flujo y las partículas. Estas simulaciones permitieron cuantificar propiedades estadísticas clave del transporte de partículas y su evolución dinámica en función de la estructura del flujo. A partir de estos resultados, se desarrollaron modelos teóricos para describir la dinámica de las partículas en diversos tipos de flujos, modelos efectivos que permitieron comprender la interacción entre el flujo y las partículas, así como cotas que permiten explorar los límites de validez de estos modelos. Además, se analizaron los mecanismos físicos que controlan la dispersión de partículas en distintos regímenes turbulentos, considerando la interacción entre la turbulencia, la estratificación y los eventos de disipación intensa, con especial enfoque en la predicción de su impacto en el transporte de material particulado en flujos geofísicos.

El estudio se estructuró en varias fases. Luego de introducir conceptos fundamentales sobre la dinámica de flujos geofísicos en el capítulo 2, en el capítulo 3 se estudió la sedimentación y acumulación de partículas inerciales pequeñas en escalas chicas del flujo, considerando para este fin un flujo turbulento isótropo y homogéneo. Se analizó el comportamiento de partículas más densas que el fluido, pero sin alcanzar el régimen de partículas extremadamente pesadas. Se investigó cómo γ y Fr , es decir, la relación de masa entre el fluido y las partículas y la relación entre las fuerzas inerciales y de gravedad en el fluido, afectan la formación de columnas de sedimentación, así como el papel que juega en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol el término de masa agregada en la dinámica de las partículas. Los resultados de este capítulo fueron publicados en Reartes y col. 2021. En el capítulo 4 se exploró el caso de partículas ligeras neutralmente

flotantes, donde la razón de masa fluido-partícula es igual a 1. Para dicho fin consideramos escalas más grandes de flujos geofísicos, es decir, consideramos flujos turbulentos establemente estratificados (SST). Para ello se construyó un modelo basado en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol, donde se aproximó el término de empuje vertical de manera consistente con la aproximación de Boussinesq, permitiendo que las partículas floten en regiones del fluido con su misma densidad. Se analizó cómo esta condición modifica la dinámica del transporte vertical y horizontal, confinando verticalmente las partículas, y se estudió la acumulación preferencial de partículas, observando que esta ocurre en regiones de baja vorticidad. Estos resultados fueron reportados en Reartes y col. 2023. En el capítulo 5 se obtuvo una cota útil para determinar bajo qué condiciones la fuerza de Basset-Boussinesq en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol para partículas inerciales puede ser despreciada, cuando las partículas están inmersas en un flujo estratificado y se encuentran en su nivel de flotabilidad neutra. Esta cota es válida solo para fluidos suficientemente estratificados con baja inercia. A partir de este análisis, se definió el número adimensional de Stokes de empuje, $S_b = N\tau_p$, que cuantifica la relación entre el tiempo de respuesta de la partícula y el período de Brunt-Väisälä. Mediante simulaciones numéricas directas, se validó que cuando $S_b < 1$ la fuerza de Basset-Boussinesq es despreciable en comparación con la de Stokes, mientras que para $S_b > 1$ su efecto crece rápidamente. Estos resultados fueron publicados en Reartes y col. 2024. Finalmente, en el capítulo 6, se exploró la relación entre los eventos extremos en SST y sus efectos en la dispersión de partículas. Se encontró que la dispersión de pares de partículas está altamente modulada por regiones del flujo donde ocurren eventos de intensa disipación de energía, estableciendo un vínculo entre eventos extremos, estructuras coherentes y transporte Lagrangiano. Un manuscrito con estos resultados se encuentra en preparación.

El primer resultado de esta tesis es la identificación de los mecanismos que gobiernan la sedimentación y acumulación de partículas inerciales con masa intermedia en turbulencia isotrópica y homogénea. Se encontró que la velocidad de caída de las partículas se desvía sistemáticamente de la velocidad terminal de Stokes, con la mayoría de las partículas cayendo más rápido, aunque en ciertos regímenes exhiben un comportamiento de "merodeo" relacionado con fluctuaciones turbulentas y los efectos de masa añadida (H. Bec J. H. y col. 2014; Falkinhoff y col. 2020; Monchaux y col. 2010). Además, se mostró que la formación de columnas de sedimentación está influenciada por la relación de masa fluido-partícula y el número de Froude, estableciendo nuevas bases para comprender la acumulación preferencial de partículas no muy pesadas en flujos turbulentos.

Otro resultado relevante es la caracterización del transporte de partículas inerciales ligeras en turbulencia establemente estratificada. Se demostró que la dispersión vertical está confinada en capas de flotabilidad neutra, cuyo espesor es independiente del número de Stokes cuando se analiza en términos de isopícnas de densidad. Asimismo, se encontró que la acumulación preferencial de partículas en SST está dominada por la expulsión centrífuga de vórtices, lo que explica la formación de cúmulos en regiones de baja vorticidad (Shaw y col. 1998; Shaw 2003). Estos hallazgos son fundamentales para el modelado de la dispersión de y el cálculo de tasa de contacto de aerosoles y partículas biológicas en sistemas

geofísicos (Squires y col. 1995; Martin 2003; Durham y col. 2013).

Un tercer resultado importante es la determinación de una cota para la amplitud de la fuerza de Basset-Boussinesq en la ecuación de Maxey-Riley-Gatignol en flujos estratificados. Como se mencionó previamente, se definió el número de Stokes de empuje S_b y se demostró que para $S_b < 1$ la contribución de la fuerza de Basset-Boussinesq es insignificante en comparación con la de Stokes, mientras que para $S_b > 1$ su efecto se amplifica considerablemente. Este resultado permite precisar bajo qué condiciones la fuerza de Basset-Boussinesq puede ser ignorada en simulaciones numéricas y modelos de partículas neutralmente flotantes. En partículas, para parámetros característicos de flujos y material particulado oceánico, la fuerza de Basset-Boussinesq es despreciable casi siempre.

Finalmente, se encontró que los eventos extremos en SST modulan significativamente la dispersión de pares de partículas, con la disipación de energía actuando como un mecanismo clave en la organización del transporte Lagrangiano. Se mostró que estos eventos no son completamente aleatorios, sino que están espacialmente correlacionados con estructuras coherentes del flujo, lo que refuerza la idea de que las regiones de alta disipación no solo aceleran la dispersión de partículas, sino que también regulan la intermitencia en la transferencia de energía, consistentemente con observaciones en la atmósfera (Rodríguez Imazio y col. 2023). Este hallazgo proporciona una nueva perspectiva sobre la relación entre eventos extremos, estructuras turbulentas, y transporte de partículas en la atmósfera y los océanos.

Los resultados de esta tesis no solo contribuyen al desarrollo de modelos más precisos de transporte de partículas en flujos estratificados, sino que también establecen una base sólida para futuras investigaciones en la dinámica de fluidos geofísicos. La conexión entre eventos extremos, estructuras coherentes y el transporte de partículas plantea preguntas fundamentales sobre la naturaleza de la turbulencia en entornos naturales, y su impacto en sistemas ambientales y climáticos. Continuar explorando estos efectos permitirá avanzar en la comprensión de la dinámica de partículas en flujos turbulentos, y mejorar la capacidad predictiva de los modelos de transporte de material particulado en la atmósfera y los océanos.

Bibliografía

- Aartrijk, M. van y Clercx, H. J. H. (ene. de 2010). «Vertical dispersion of light inertial particles in stably stratified turbulence: The influence of the Basset force». En: *Physics of Fluids* 22, págs. 1-10.
- (jun. de 2008a). «Preferential Concentration of Heavy Particles in Stably Stratified Turbulence». En: *Phys. Rev. Lett.* 100 (25), pág. 254501.
- Aartrijk, M. van, Clercx, H. J. H. y Winters, K. B. (feb. de 2008b). «Single-particle, particle-pair, and multiparticle dispersion of fluid particles in forced stably stratified turbulence». En: *Physics of Fluids* 20, pág. 025104.
- Acevedo-Trejos, E., Brandt, G., Bruggeman, J. y Merico, A. (mar. de 2015). «Mechanisms shaping size structure and functional diversity of phytoplankton communities in the ocean». En: *Scientific Reports* 5.
- Alexakis, A., Marino, R., Mininni, P. D., Kan, A. van, Foldes, R. y Feraco, F. (2024). «Large-scale self-organization in dry turbulent atmospheres». En: *Science* 383.6686, págs. 1005-1009.
- Amir, G., Bar, N., Eidelman, A., Elperin, T., Kleorin, N. y Rogachevskii, I. (ago. de 2016). «Turbulent thermal diffusion in strongly stratified turbulence: Theory and experiments». En: *Physical Review Fluids* 2, pág. 064605.
- Andrade-Canto, F., Beron-Vera, F., Goni, G., Karrasch, D., Olascoaga, M. y Triñanes, J. (ene. de 2022). «Carriers of Sargassum and mechanism for coastal inundation in the Caribbean Sea». En: *Physics of Fluids* 34, pág. 016602.
- Angriman, S., Mininni, P. y Cobelli, P. (jun. de 2020). «Velocity and acceleration statistics in particle-laden turbulent swirling flows». En: *Physical Review Fluids* 5, pág. 064605.
- Angriman, S., Ferran, A., Zapata, F., Cobelli, P. J., Obligado, M. y Mininni, P. D. (2022a). «Clustering in laboratory and numerical turbulent swirling flows». En: *Journal of Fluid Mechanics* 948, A30.
- Angriman, S., Mininni, P. D. y Cobelli, P. J. (jun. de 2022b). «Multitime structure functions and the Lagrangian scaling of turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 7, pág. 064603.
- Aref, H. (jun. de 1994). «Chaos applied to fluid mixing». En: *Chaos Solitons Fractals* 4.
- Aref, H. (1984). «Stirring by chaotic advection». En: *Journal of Fluid Mechanics* 143, págs. 1-21.
- Augier P. y Billant, P. (2011). «Onset of secondary instabilities on the zigzag instability in stratified fluids». En: *Journal of Fluid Mechanics* 682, págs. 120-131.
- Auton, T., Hunt, J. y Prud'Homme, M. (dic. de 1988). «Force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow». En: *Journal of Fluid Mechanics* 197.

- Baker, L., Frankel, A., Mani, A. y Coletti, F. (dic. de 2017). «Coherent clusters of inertial particles in homogeneous turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 833, págs. 364-398.
- Balkovsky, E., Falkovich, G. y Fouxon, A. (abr. de 2001). «Intermittent Distribution of Inertial Particles in Turbulent Flows». En: *Physical review letters* 86.
- Basset, A. (ene. de 1888). «On motion of a sphere in a viscous liquid». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 179.
- Basu, S. y Holtslag, A. A. (2021). «Turbulent Prandtl number and characteristic length scales in stably stratified flows: steady-state analytical solutions». En: *Environmental Fluid Mechanics* 21.6, págs. 1273-1302.
- Bauer Peter Thorpe, A. y Brunet, G. (2015). «The quiet revolution of numerical weather prediction». En: *Nature* (7567), págs. 47-55.
- Bec J. and Homann, H. y Ray, S. (ene. de 2014). «Gravity-Driven Enhancement of Heavy Particle Clustering in Turbulent Flow». En: *Physical review letters* 112.
- Bec, J., Biferale, L., Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., Lanotte, A., Musacchio, S. y Toschi, F. (ago. de 2005). «Acceleration statistics of heavy particles in turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 550.
- Bec, J., Biferale, L., Lanotte, A. S., Scagliarini, A. y Toschi, F. (2010). «Turbulent pair dispersion of inertial particles». En: *Journal of Fluid Mechanics* 645, págs. 497-528.
- Bec, J., Gustavsson, K. y Mehlig, B. (2024). «Statistical Models for the Dynamics of Heavy Particles in Turbulence». En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 56. Volume 56, 2024, págs. 189-213.
- Beron-Vera, F. J. y Miron, P. (2020). «A minimal MaxeyRiley model for the drift of Sargassum rafts». En: *Journal of Fluid Mechanics* 904, A8.
- Beron-Vera, F. J., Olascoaga, M. J. y Miron, P. (2019). «Building a Maxey-Riley framework for surface ocean inertial particle dynamics». En: *Physics of Fluids* 31, pág. 096602.
- Biferale, L., Bonaccorso, F., Mazzitelli, I., Hinsberg, M. van, Lanotte, A., Musacchio, S., Perlekar, P. y Toschi, F. (nov. de 2016). «Coherent Structures and Extreme Events in Rotating Multiphase Turbulent Flows». En: *Physical Review X* 6, pág. 041036.
- Billant, P. y Chomaz, J.-M. (jun. de 2001). «Self-similarity of strongly stratified inviscid flows». En: *Physics of Fluids - PHYS FLUIDS* 13.
- Boffetta, G., Lacorata, G., Redaelli, G. y Vulpiani, A. (2001). «Detecting barriers to transport: a review of different techniques». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 159.1, págs. 58-70.
- Bourgoin, M. (2015). «Turbulent pair dispersion as a ballistic cascade—phenomenology». En: *Journal of Fluid Mechanics* 772, págs. 678-704.
- Bourouiba, L., Dehandschoewercker, E. y Bush, J. W. (2014). «Violent expiratory events: on coughing and sneezing». En: *Journal of Fluid Mechanics* 745, págs. 537-563.
- Bragg, A. D., Ireland, P. J. y Collins, L. R. (ago. de 2015). «Mechanisms for the clustering of inertial particles in the inertial range of isotropic turbulence». En: *Physical Review E* 92.2.
- Brethouwer, G., Billant, P., Lindborg, E. y Chomaz, J.-M. (2007). «Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows». En: *Journal of Fluid Mechanics* 585, págs. 343-368.

- Calzavarini, E., Cencini, M., Lohse, D. y Toschi, F. (sep. de 2008). «Quantifying Turbulence-Induced Segregation of Inertial Particles». En: *Physical Review Letters* 101, pág. 084504.
- Cartwright, J., Feudel, U., Károlyi, G., Moura, A., Piro, O. y Tél, T. (abr. de 2010). «Dynamics of Finite-Size Particles in Chaotic Fluid Flows». En: *Understanding Complex Systems* 10.
- Chau, J. L., Marino, R., Feraco, F., Urco, J. M., Baumgarten, G., Lübken, F.-J., Hocking, W. K., Schult, C., Renkwitz, T. y Latteck, R. (2021). «Radar Observation of Extreme Vertical Drafts in the Polar Summer Mesosphere». En: *Geophysical Research Letters* 48.16, e2021GL094918.
- Clark di Leoni, P. y Mininni, P. D. (2015). «Absorption of waves by large-scale winds in stratified turbulence». En: *Phys. Rev. E* 91.3, pág. 033015.
- Consortini, A., Sun, Y. Y., Innocenti, C. y Li, Z. P. (2003). «Measuring inner scale of atmospheric turbulence by angle of arrival and scintillation». En: *Optics Communications* 216.1, págs. 19-23.
- D'Asaro, E., Lien, R. C. y Henyey, F. (2007). «High-Frequency Internal Waves on the Oregon Continental Shelf». En: *Journal of Physical Oceanography* 37, págs. 1-12.
- D'Asaro, E. y Lien, R.-C. (mar. de 2000). «Lagrangian Measurements of Waves and Turbulence in Stratified Flows». En: *J. Phys. Oceanogr.* 20, págs. 641-655.
- Davidson, P. A. (2013). *Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids*. Cambridge University Press, pág. 695.
- De Pietro, M., Hinsberg, M. van, Biferale, L., Clercx, H., Perlekar, P. y Toschi, F. (nov. de 2014). «Clustering of vertically constrained passive particles in homogeneous, isotropic turbulence». En: *Physical Review E* 91, pág. 053002.
- Del Grosso, N. F., Cappelletti, L. M., Sujovolsky, N. E., Mininni, P. D. y Cobelli, P. J. (jul. de 2019). «Statistics of single and multiple floaters in experiments of surface wave turbulence». En: *Physical Review Fluids* 4.7.
- DeMott, C. A., Klingaman, N. P., Tseng, W.-L., Burt, M. A., Gao, Y. y Randall, D. A. (2019). «The Convection Connection: How Ocean Feedbacks Affect Tropical Mean Moisture and MJO Propagation». En: *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 124.22, págs. 11910-11931.
- Donzis, D. y Yeung, P. (2010). «Resolution effects and scaling in numerical simulations of passive scalar mixing in turbulence». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 239, págs. 1278-1287.
- Durham, W. M., Climent, E., Barry, M., Lillo, F. D., Boffetta, G., Cencini, M. y Stocker, R. (2013). «Turbulence drives microscale patches of motile phytoplankton». En: *Nature Communications* 4, pág. 2148.
- Dyke, M. van y White, F. M. (dic. de 1982). «An Album of Fluid Motion». En: *Journal of Fluids Engineering* 104.4, págs. 542-543.
- E. Lindborg, G. B. (feb. de 2008). «Vertical dispersion by stratified turbulence». En: *J. Fluid Mech.* 614, págs. 303-314.
- Elghobashi, S. (1994). «On predicting particle-laden turbulent flows». En: *Applied Scientific Research* 52.4, págs. 309-329.
- Falkinhoff, F., Oblgado, M., Bourgoïn, M. y Mininni, P. (abr. de 2020). «Preferential concentration of free-falling heavy particles in turbulence». En: *Physical Review Letters*, pág. 064504.
- Falkovich, G., Gaw dzki, K. y Vergassola, M. (nov. de 2001). «Particles and fields in fluid turbulence». En: *Rev. Mod. Phys.* 73 (4), págs. 913-975.

- Faxén, H. (abr. de 1922). «Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist». En: *Annalen der Physik* 89.
- Feraco, F., Marino, R., Pumir, A., Primavera, L., Mininni, P. D., Pouquet, A. y Rosenberg, D. (2018). «Vertical drafts and mixing in stratified turbulence: Sharp transition with Froude number». En: *EPL (Europhysics Letters)* 123.4, pág. 44002.
- Fiabane, L., Zimmermann, R., Volk, R., Pinton, J. y Bourgoïn, M. (mayo de 2012). «Clustering of finite-size particles in turbulence». En: *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 86, pág. 035301.
- Frisch, U. (nov. de 1995). *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*.
- Fry, R. L. (1926). «Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph». En: *Proc. R. Soc. Lond.* 110.20, págs. 709-737.
- Gatignol, R. (ene. de 1983). «The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow». En: *Theoretical and Applied Mechanics Letters* 1.
- Good, G., Ireland, P., Bewley, G., Bodenschatz, E., Collins, L. y Warchaft, Z. (nov. de 2014). «Settling regimes of inertial particles in isotropic turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 759, págs. 1-12.
- Goto, S. y Vassilicos, J. (mar. de 2008). «Sweep-Stick Mechanism of Heavy Particle Clustering in Fluid Turbulence». En: *Physical Review Letters* 100, pág. 054503.
- Grabowski, W. W. y Wang, L.-P. (2013). «Growth of Cloud Droplets in a Turbulent Environment». En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 45, págs. 293-324.
- Haller, G. (2001). «Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 149.4, págs. 248-277.
- Haller, G. (2002). «Lagrangian coherent structures from approximate velocity data». En: *Physics of Fluids* 14, págs. 1851-1861.
- (2015). «Lagrangian Coherent Structures». En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 47, págs. 137-162.
- Haller, G. y Beron-Vera, F. J. (2012). «Geodesic theory of transport barriers in two-dimensional flows». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 241.20, págs. 1680-1702.
- Hascoët, E. y Vassilicos, J. (ene. de 2007). «Turbulent clustering of inertial particles in the presence of gravity». En: *Physical Review E* 103, págs. 482-484.
- Hinsberg, M. van, Clercx, H. y Toschi, F. (feb. de 2017). «Enhanced settling of nonheavy inertial particles in homogeneous isotropic turbulence: The role of the pressure gradient and the Basset history force». En: *Physical Review E* 95, pág. 023106.
- Hinsberg, M. van, Thije Boonkkamp, J. ten y Clercx, H. (feb. de 2011). «An efficient, second order method for the approximation of the Basset history force». En: *Journal of Computational Physics* 230.4, págs. 1465-1478.
- Homann, H. y Bec, J. (sep. de 2009). «Finite-size effects in the dynamics of neutrally buoyant particles in turbulent flow». En: *Journal of Fluid Mechanics* 651, págs. 81-91.
- Huck, P. D., Bateson, C., Volk, R., Cartellier, A., Bourgoïn, M. y Aliseda, A. (2018). «The role of collective effects on settling velocity enhancement for inertial particles in turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 846, págs. 1059-1075.

- Ichihara, M., Mininni, P. D., Ravichandran, S., Cimarelli, C. y Vagasky, C. (2023). «Multiphase turbulent flow explains lightning rings in volcanic plumes». En: *Nature Communications Earth and Environment* 4.2.
- Ivey, G., Winters, K. y Koseff, J. (2008). «Density Stratification, Turbulence, but How Much Mixing?» En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 40.1, págs. 169-184.
- J. Boussinesq, J. (ene. de 1885). «Sur la résistance qu'oppose un fluide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables». En: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 100.
- Johnston, T. M. S. y Rudnick, D. L. (mar. de 2009). «Observations of the Transition Layer». En: *Journal of Physical Oceanography* 39, págs. 780-797.
- Kimura, Y. y Herring, J. R. (2012). «Energy spectra of stably stratified turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 698, págs. 19-50.
- Kovács, A., Leelssy, Á., Tettamanti, T., Esztergár-Kiss, D., Mészáros, R. y Lagzi, I. (2021). «Coupling traffic originated urban air pollution estimation with an atmospheric chemistry model». En: *Urban Climate* 37, pág. 100868.
- Larsen, M. L., Shaw, R. A., Kostinski, A. B. y Glienke, S. (2018). «Fine-Scale Droplet Clustering in Atmospheric Clouds: 3D Radial Distribution Function from Airborne Digital Holography». En: *Phys. Rev. Lett.* 121 (20), pág. 204501.
- Li, Y., Ries, F., Leudesdorff, W., Nishad, K., Pati, A., Hasse, C., Janicka, J., Jakirli, S. y Sadiki, A. (2021). «Non-equilibrium wall functions for large Eddy simulations of complex turbulent flows and heat transfer». En: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 88, pág. 108758.
- Lorenz, E. N. (1963). «Deterministic Nonperiodic Flow». En: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, págs. 130-141.
- (1969). «The predictability of a flow which possesses many scales of motion». En: *Tellus* 21, págs. 289-307.
- Maalouly, M., Lapeyre, G., Cozian, B., Mompean, G. y Berti, S. (dic. de 2023). «Particle dispersion and clustering in surface ocean turbulence with ageostrophic dynamics». En: *Physics of Fluids* 35.12, pág. 126601.
- Maffioli, A. (oct. de 2017). «Vertical spectra of stratified turbulence at large horizontal scales». En: *Physical Review Fluids* 2, pág. 104802.
- Maffioli, A. y Davidson, P. (2015). «Dynamics of stratified turbulence decaying from a high buoyancy Reynolds number». En: *Journal of Fluid Mechanics* 786, págs. 210-233.
- Mahrt, L. (2014). «Stably Stratified Atmospheric Boundary Layers». En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 49, págs. 23-45.
- Marino, R., Mininni, P. D., Rosenberg, D. L. y Pouquet, A. (ago. de 2014). «Large-scale anisotropy in stably stratified rotating flows». En: *Phys. Rev. E* 90 (2), pág. 023018.
- Marino, R., Feraco, F., Primavera, L., Pumir, A., Pouquet, A., Rosenberg, D. y Mininni, P. D. (mar. de 2022). «Turbulence generation by large-scale extreme vertical drafts and the modulation of local energy dissipation in stably stratified geophysical flows». En: *Phys. Rev. Fluids* 7, pág. 033801.
- Martin, A. (mayo de 2003). «Phytoplankton patchiness: the role of lateral stirring and mixing». En: *Progress in Oceanography* 57, págs. 125-174.

- Mathur, M., Haller, G., Peacock, T., Ruppert-Felsot, J. E. y Swinney, H. L. (abr. de 2007). «Uncovering the Lagrangian Skeleton of Turbulence». En: *Phys. Rev. Lett.* 98, pág. 144502.
- Maxey, M. y Riley, J. (abr. de 1983). «Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow». En: *Physics of Fluids* 26, págs. 883-889.
- Maxey, M. (ene. de 1987). «The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields». En: *Journal of Fluid Mechanics* 174.
- McCave, I. (abr. de 1984). «Size spectra and aggregation of suspended particles in the deep ocean». En: *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers* 31, págs. 329-352.
- Mininni, P., Rosenberg, D., Reddy, R. y Pouquet, A. (mar. de 2010). «A hybrid MPI-OpenMP scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence». En: *Parallel Computing* 37, págs. 316-326.
- Mininni, P. D., Rosenberg, D. y Pouquet, A. (2012). «Isotropization at small scales of rotating helically driven turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 699, págs. 263-279.
- Monchaux, R., Bourgoïn, M. y Cartellier, A. (oct. de 2010). «Preferential concentration of heavy particles: A Voronoï analysis». En: *Physics of Fluids* 22, pág. 103304.
- (abr. de 2012). «Analyzing preferential concentration and clustering of inertial particles in turbulence». En: *International Journal of Multiphase Flow* 40, págs. 1-18.
- Montero-Martinez, G., Kostinski, A. B., Shaw, R. A. y Garca-Garca, F. (2009). «Do all raindrops fall at terminal speed?» En: *Geophysical Research Letters* 36.11, pág. L11818.
- Mora, D. O., Obligado, M., Aliseda, A. y Cartellier, A. (2021). «Effect of Re_λ and Rouse numbers on the settling of inertial droplets in homogeneous isotropic turbulence». En: *Physical Review Fluids* 6.4, pág. 044305.
- Mordant, N., Metz, P., Michel, O. y Pinton, J.-F. (dic. de 2001). «Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence». En: *Physical Review Letters* 87, pág. 214501.
- Moum, J. N. (1996). «Energy-containing scales of turbulence in the ocean thermocline». En: *Journal of Geophysical Research* 101.101, págs. 14095-14109.
- Negretti, M. E. y Billant, P. (2013). «Stability of a Gaussian pancake vortex in a stratified fluid». En: *Journal of Fluid Mechanics* 718, págs. 457-480.
- Nicolleau, F. y Vassilicos, J. C. (2000). «Turbulent diffusion in stably stratified non-decaying turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 410, págs. 123-146.
- O'Brien, S., Rauert, C., Ribeiro, F., Okoffo, E. D., Burrows, S. D., O'Brien, J. W., Wang, X., Wright, S. L. y Thomas, K. V. (2023). «There's something in the air: A review of sources, prevalence and behaviour of microplastics in the atmosphere». En: *Science of The Total Environment* 874, pág. 162193.
- Obligado, M., Teitelbaum, T., Cartellier, A., Mininni, P. y Bourgoïn, M. (abr. de 2014). «Preferential concentration of heavy particles in turbulence». En: *Journal of Turbulence* 15, págs. 293-310.
- Obligado, M., Cartellier, A., Aliseda, A., Calmant, T. y Palma, N. de (2020). «Study on preferential concentration of inertial particles in homogeneous isotropic turbulence via big-data techniques». En: *Physical Review Fluids* 5, pág. 024303.

- Obligado, M., Missaoui, M., Monchaux, R., Cartellier, A. y Bourgoïn, M. (2011). «Reynolds number influence on preferential concentration of heavy particles in turbulent flows». En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 318, pág. 052015.
- Obligado, M., Cartellier, A. y Bourgoïn, M. (2015). «Experimental detection of superclusters of water droplets in homogeneous isotropic turbulence». En: *EPL (Europhysics Letters)* 112, pág. 54004.
- Ollitrault, M., Gabillet, C. y De Verdière, A. C. (2005). «Open ocean regimes of relative dispersion». En: *Journal of Fluid Mechanics* 533, págs. 381-407.
- Ottino, J. M. (ene. de 1989). *The Kinematics Of Mixing: Stretching, Chaos, And Transport*. Vol. 3.
- Palmer, T. (2019). «Stochastic weather and climate models». En: *Nature Reviews Physics* 1, págs. 463-471.
- Pearson, B. y Fox-Kemper, B. (feb. de 2018). «Log-Normal Turbulence Dissipation in Global Ocean Models». En: *Phys. Rev. Lett.* 120 (9), pág. 094501.
- Pierrehumbert, R. T. (mayo de 1991). «Largescale horizontal mixing in planetary atmospheres». En: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 3.5, págs. 1250-1260.
- Portwood, G. D., Bruyn Kops, S. de y Caulfield, C. (2019). «Asymptotic dynamics of high dynamic range stratified turbulence». En: *Physical Review Letters* 122, pág. 194504.
- Pouquet, A. y Patterson, G. (ene. de 1978). «Numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 85, págs. 305-323.
- Pugliese, F. y Dmitruk, P. (abr. de 2022). «Test Particle Energization of Heavy Ions in Magnetohydrodynamic Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 929, pág. 4.
- Reartes, C. y Mininni, P. (nov. de 2021). «Settling and clustering of particles of moderate mass density in turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 6 (11), pág. 114304.
- Reartes, C. y Mininni, P. D. (mayo de 2023). «Dynamical regimes and clustering of small neutrally buoyant inertial particles in stably stratified turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 8 (5), pág. 054501.
- (oct. de 2024). «Bounds to the Basset-Boussinesq force on particle laden stratified flows». En: *Physics of Fluids* 36.10, pág. 106605.
- Riley, J. y Lindborg, E. (jul. de 2008). «Stratified Turbulence: A Possible Interpretation of Some Geophysical Turbulence Measurements». En: *Journal of The Atmospheric Sciences - J ATMOS SCI* 65.
- Riley, J. J. y Bruyn Kops, S. M. de (jul. de 2003). «Dynamics of turbulence strongly influenced by buoyancy». En: *Physics of Fluids* 15.7, págs. 2047-2059.
- Rodríguez Imazio, P., Mininni, P. D., Godoy, A., Rivaben, N. y Dörnbrack, A. (2023). «Not All Clear Air Turbulence Is Kolmogorov The Fine-Scale Nature of Atmospheric Turbulence». En: *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 128.2, e2022JD037491.
- Rorai, C., Mininni, P. D. y Pouquet, A. (2014). «Turbulence comes in bursts in stably stratified flows». En: *Physical Review E* 89, pág. 043002.
- (jul. de 2015). «Stably stratified turbulence in the presence of large-scale forcing». En: *Phys. Rev. E* 92 (1), pág. 013003.
- Rosenberg, D., Mininni, P. D., Reddy, R. y Pouquet, A. (feb. de 2020). «GPU Parallelization of a Hybrid Pseudospectral Geophysical Turbulence Framework Using CUDA». En: *Atmosphere* 11.2, pág. 178.

- Rosenberg, D., Pouquet, A., Marino, R. y Mininni, P. D. (mayo de 2015). «Evidence for Bolgiano-Obukhov scaling in rotating stratified turbulence using high-resolution direct numerical simulations». En: *Physics of Fluids* 27.5, pág. 055105.
- Safak, I., Allison, M. y Sheremet, A. (feb. de 2013). «Floc variability under changing turbulent stresses and sediment availability on a wave energetic muddy shelf». En: *Continental Shelf Research* 53, págs. 1-10.
- Sahin, C., Verney, R., Sheremet, A. y Voulgaris, G. (2017). «Acoustic backscatter by suspended cohesive sediments: Field observations, Seine Estuary, France». En: *Continental Shelf Research* 134, págs. 39-51.
- Saito, I. y Gotoh, T. (dic. de 2017). «Turbulence and cloud droplets in cumulus clouds». En: *New Journal of Physics* 20, pág. 023001.
- Salazar, J. P. y Collins, L. R. (2009). «Two-Particle Dispersion in Isotropic Turbulent Flows». En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 41, págs. 405-432.
- Shadden, S. C., Lekien, F. y Marsden, J. E. (2005). «Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 212.3, págs. 271-304.
- Shaw, R. A., Reade, W. C., Collins, L. R. y Verlinde, J. (1998). «Preferential concentration of cloud droplets by turbulence: Effects on the early evolution of cumulus cloud droplet spectra». En: *Journal of the Atmospheric Sciences* 55, págs. 1965-1976.
- Shaw, R. A. (2003). «Particle-turbulence interactions in atmospheric clouds». En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 35, págs. 183-227.
- Smith, L. y Waleffe, F. (ene. de 2002). «Generation of slow large scales in forced rotating stratified turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 451, págs. 145-168.
- Sohail, T., Vreugdenhil, C. A., Gayen, B. y Hogg, A. M. (2019). «The Impact of Turbulence and Convection on Transport in the Southern Ocean». En: *Journal of Geophysical Research: Oceans* 124.6, págs. 4208-4221.
- Sozza, A., De Lillo, F. y Boffetta, G. (2018). «Inertial floaters in stratified turbulence». En: *EPL (Europhysics Letters)* 121.1, pág. 14002.
- Sozza, A., De Lillo, F., Musacchio, S. y Boffetta, G. (sep. de 2016). «Large-scale confinement and small-scale clustering of floating particles in stratified turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 1 (5), pág. 052401.
- Squires, K. D. y Yamazaki, H. (nov. de 1995). «Preferential concentration of marine particles in isotropic turbulence». En: *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers* 42, págs. 1989-2004.
- Stout, J., Arya, S. y Genikhovich, E. (nov. de 1995). «The Effect of Nonlinear Drag on the Motion and Settling Velocity of Heavy Particles». En: *Journal of The Atmospheric Sciences* 52, págs. 3836-3848.
- Sujovolsky, N. E. y Mininni, P. D. (2019a). «Vertical dispersion of Lagrangian tracers in fully developed stably stratified turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 4, pág. 014503.
- Sujovolsky, N., Mininni, P. y Rast, M. (mayo de 2017). «Single-particle dispersion in stably stratified turbulence». En: *Physical Review Fluids* 3.
- Sujovolsky, N. E., Mindlin, G. B. y Mininni, P. D. (2019b). «Invariant manifolds in stratified turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 4 (5), pág. 052402.

- Sujovolsky, N. E. y Mininni, P. D. (jun. de 2020). «From waves to convection and back again: The phase space of stably stratified turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 5, pág. 064802.
- Sujovolsky, N. E., Mininni, P. D. y Pouquet, A. (ago. de 2018). «Generation of turbulence through frontogenesis in sheared stratified flows». En: *Physics of Fluids* 30.8, pág. 086601.
- Sumbekova, S., Cartellier, A., Aliseda, A. y Bourgoïn, M. (2017). «Preferential concentration of inertial sub-Kolmogorov particles: The roles of mass loading of particles, Stokes numbers, and Reynolds numbers». En: *Physical Review Fluids* 2, pág. 024302.
- Sutyrin, G. G. y Radko, T. (mar. de 2017). «The fate of pancake vortices». En: *Physics of Fluids* 29.3, pág. 031701.
- Tagawa, Y., Prakash, V., Calzavarini, E., Sun, C. y Lohse, D. (abr. de 2011). «Three-dimensional Lagrangian Voronoi analysis for clustering of particles and bubbles in turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 693, págs. 203-1367.
- Tanemura, M. (2003). «Statistical Distributions of Poisson Voronoi Cells in Two and Three Dimensions». En: *Forma* 18, págs. 221-247.
- Taylor, G. I. (ene. de 1928). «The Forces on a Body Placed in a Curved or Converging Stream of Fluid». En: *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 120.
- Taylor, J. (mayo de 2016). «Turbulent mixing, restratification, and phytoplankton growth at a submesoscale eddy». En: *Geophys. Research Lett.* 4, págs. 5784-5792.
- Thomson, D. J. y Wilson, J. D. (2013). «History of Lagrangian Stochastic Models for Turbulent Dispersion». En:
- Tom, J. y Bragg, A. D. (mayo de 2019). «Multiscale preferential sweeping of particles settling in turbulence». En: *Journal of Fluid Mechanics* 871, págs. 244-270.
- Uhlmann, M. (2020). «Voronoi tessellation analysis of sets of randomly placed finite-size spheres». En: *Physica A* 555, pág. 124618.
- Vallis, G. K. (2017). *Atmospheric and oceanic fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Van Aartrijk, M. y Clercx, H. (ene. de 2010). «Vertical dispersion of light inertial particles in stably stratified turbulence: The influence of the Basset force». En: *Physics of Fluids* 22, pág. 013301.
- Volk, R., Calzavarini, E., Verhille, G., Lohse, D., Mordant, N., Pinton, J. y Toschi, F. (ago. de 2008). «Acceleration of heavy and light particles in turbulence: Comparison between experiments and direct numerical simulations». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 237, págs. 2084-2089.
- Wagner, P., Rühls, S., Schwarzkopf, F. U., Koszalka, I. M. y Biastoch, A. (2019). «Can Lagrangian tracking simulate tracer spreading in a high-resolution Ocean General Circulation Model?» En: *Journal of Physical Oceanography* 49, págs. 1141-1157.
- Waite, M. L. (jun. de 2011). «Stratified turbulence at the buoyancy scale». En: *Phys. Fluids* 23, pág. 066602.
- Waleffe, F. (mar. de 1993). «Inertial transfers in the helical decomposition». En: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 5.3, págs. 677-685.
- Wan, M., Oughton, S., Servidio, S. y Matthaeus, W. H. (2010). «On the accuracy of simulations of turbulence». En: *Physics of Plasmas* 17, pág. 082308.

-
- Watanabe, T., Riley, J., Bruyn Kops, S. de, Diamessis, P. y Zhou, Q. (jun. de 2016). «Turbulent/non-turbulent interfaces in wakes in stably stratified fluids». En: *Journal of Fluid Mechanics* 797, R1-1-R1-11.
- Wyngaard, J. (1992). «Turbulence in the Atmosphere». En: *Physical Review Fluids* 24, pág. 205.
- Yeung, P. y Pope, S. (1988). «An algorithm for tracking fluid particles in numerical simulations of homogeneous turbulence». En: *Journal of Computational Physics* 79.2, págs. 373-416.
- Zapata, F., Angriman, S., Ferran, A., Cobelli, P., Obligado, M. y Mininni, P. D. (mar. de 2024). «Turbulence Unsteadiness Drives Extreme Clustering». En: *Physical Review Letters* 132.10, pág. 104005.
- Zhang, L., Delworth, T., Cooke, W. y Yang, X. (ene. de 2019). «Natural variability of Southern Ocean convection as a driver of observed climate trends». En: *Nature Climate Change* 9.