



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

**Energización de iones en turbulencia de plasmas: enfoque  
magnetohidrodinámico y cinético**

Tesis presentada para optar al título de Doctor  
en la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

**Lic. Facundo Leonel Pugliese**

Director: Dr. Pablo Dmitruk

Consejero de Estudios: Dr. Pablo Balenzuela

Lugar de trabajo: Instituto de Física Interdisciplinaria y Aplicada

Buenos Aires, Argentina - 14 de Abril de 2025



*A mis padres: Jorge y Viviana*



# Energización de iones en turbulencia de plasmas: enfoque magnetohidrodinámico y cinético

## Resumen

La turbulencia es un fenómeno observable en casi todos los flujos de la naturaleza, tanto neutros como cargados. Se da como consecuencia de la interacción no lineal entre los distintos grados de libertad del sistema, permitiendo el transporte de energía entre escalas. En la imagen habitual, esta cascada de energía se da desde la escala de inyección hacia escalas más pequeñas, donde eventualmente es disipada como calor. Aunque en flujos neutros la disipación se da principalmente por colisiones entre las partículas o moléculas que lo componen, en flujos cargados como los plasmas la dinámica puede ser mucho más rica. Para plasmas poco densos como el viento solar, el efecto de las colisiones puntuales entre partículas es despreciable y cualquier mecanismo de disipación de energía debe ser inherentemente colectivo.

Muchas de las propuestas existentes en la literatura dependen en mayor o menor medida de la producción de partículas supraenergéticas que escapan del plasma como rayos cósmicos, llevándose consigo parte de la energía del sistema. Si bien se conocen múltiples mecanismos eficientes para la aceleración de partículas, como la reconexión magnética y los choques no colisionales, estos no son inherentemente turbulentos (aunque pueden verse propiciados por la presencia de turbulencia). El objetivo de esta tesis es estudiar mecanismos de aceleración de partículas cargadas en presencia de turbulencia, puntualmente iones, mediante simulaciones numéricas directas.

Como primera aproximación al problema, trabajaremos con partícula de prueba inmersas en un plasma modelado con la aproximación magnetohidrodinámica (MHD). A pesar de estar cargadas, las partículas de prueba no generan campos electromagnéticos propios, sino que solo responden a los dados por el modelo MHD. Comenzaremos estudiando la dinámica de iones con distintas cocientes de carga y masa e identificaremos un mecanismo dominante de acumulación y aceleración, cuya eficiencia depende de este cociente. Luego, mostraremos que este mecanismo es inherentemente turbulento, comparando con simulaciones de MHD linealizado. En el modelo MHD linealizado, el plasma está compuesto por múltiples tipos de onda con las que las partículas pueden entrar en resonancia, ganando energía. Compararemos ambos mecanismos en distintos regímenes y mostraremos que la presencia de ondas es disruptiva para la aceleración de protones, pues interfiere con el mecanismo turbulento.

Finalmente, desarrollaremos un código cinético híbrido de tipo *particle-in-cell* (PIC), donde los protones tienen campo electromagnético propio pero los electrones se modelan como un fluido sin masa. Compararemos la aceleración de protones en este modelo cinético con la previamente estudiada en MHD. Veremos que aunque la aproximación de partículas de prueba produce resultados cualitativamente similares a los del modelo cinético, arroja aceleraciones mayores y sobreestima la población de protones supraenergéticos.

**Palabras clave:** *plasma; aceleración de partículas cargadas; turbulencia; teoría cinética; simulaciones numéricas directas.*



# Ion energization in plasma turbulence: magnetohydrodynamic and kinetic approach

## Abstract

Turbulence is a phenomenon observable in almost all natural flows, both neutral and charged. It arises as a consequence of the nonlinear interaction between the system's different degrees of freedom, allowing the transport of energy across scales. In the usual picture, this energy cascade occurs from the injection scale to smaller scales, where it is eventually dissipated as heat. While in neutral flows dissipation mainly occurs due to collisions between the particles or molecules that comprise it, in charged flows such as plasmas, the dynamics can be much richer. For low-density plasmas such as the solar wind, the effect of particle-particle collisions is negligible, and any energy dissipation mechanism must inherently be collective.

Many of the existing proposals in the literature rely to varying degrees on the production of suprathermal particles that escape the plasma as cosmic rays, carrying away part of the system's energy. Although multiple efficient particle acceleration mechanisms are known, such as magnetic reconnection and collisionless shocks, these are not inherently turbulent (though they may be facilitated by the presence of turbulence). The goal of this thesis is to study mechanisms for the acceleration of charged particles, specifically ions, in the presence of turbulence through direct numerical simulations.

As a first approach to the problem, we will work with test particles immersed in a plasma modeled using the magnetohydrodynamic (MHD) approximation. Although the test particles are charged, they do not generate their own electromagnetic fields but only respond to those given by the MHD model. We will begin by studying the dynamics of ions with different charge-to-mass ratios and will identify a dominant accumulation and acceleration mechanism, whose efficiency depends on this ratio. Then, we will show that this mechanism is inherently turbulent by comparing it with linearized MHD simulations. In the linearized MHD model, the plasma is composed of multiple types of waves with which the particles can resonate, gaining energy. We will compare both mechanisms in different regimes and show that the presence of waves is disruptive for proton acceleration, as it interferes with the turbulent mechanism.

Finally, we will develop a hybrid kinetic code of the particle-in-cell (PIC) type, where protons have their own electromagnetic fields but electrons are modeled as a massless fluid. We will compare proton acceleration in this kinetic model with that previously studied in MHD. We will see that, although the test particle approach produces qualitatively similar results to the kinetic model, it yields higher accelerations and overestimates the population of suprathermal protons.

**Keywords:** *plasma; charged particle acceleration; turbulence; kinetic theory; direct numerical simulations.*



## Agradecimientos

Que mi nombre esté en la portada no significa que esta tesis sea puramente mérito mío. Empezando por lo técnico, quiero agradecer a la educación pública argentina, especialmente a la Universidad de Buenos Aires. A la UBA le debo mi título de grado cómo físico y la posibilidad de hacer mi doctorado, formándome con un nivel de excelencia a cuya altura espero algún día estar. Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, le agradezco por financiarme durante estos largos años. Hacer un doctorado es un trabajo de tiempo completo y esa beca doctoral me permitió dedicarme a él de lleno.

Desde un punto de vista más personal, le agradezco a Pablo Dmitruk por estos años de dirección, charlas y, ante todo, paciencia. Mi llegada a este doctorado tuvo sus vaivenes, pero Pablo me tomó como estudiante sin dudarlo y jamás me hizo sentir menos que bienvenido. Otro gran formador en esta etapa fue Pablo Mininni, no solo en cuestiones técnicas de la física, sino en ética y política científica en general. Les debo a ellos enseñarme cual es el rol de un doctor en física en los tiempos que corren. No quiero olvidar a mi consejero de estudios Pablo Balenzuela, que me acompañó durante esa primera transición y siempre ha estado atento a mi progreso.

En estos años, he aprendido también que el ámbito científico es inherentemente social y nada refleja esto más que mis compañeros de doctorado, mis miniflipers. Con ellos he reido, insultado y aprendido, porque hay una complicidad que solo se tiene con aquellos que están pasando por lo mismo que uno. La frustración es moneda corriente y los logros están muy espaciados, así que es importante tener una red de gente que haga estas esperas más amenas. Listar el vasto apoyo que cada uno me dio sería impráctico, pero no dedicar al menos una línea sería injusto. A Mauro, por compartirme su conocimiento y escuchar mis berrinches. A Sofi, por ser un ejemplo de la dedicación y sus frutos. A Chris, por hacerme reír tanto y transmitir una paz que me encantaría poder emular. A Manu Etchevest, por estar siempre ahí para compartir mis quejas y frustraciones. A Maia, por ser una reina y siempre correrme para donde disparo. A Flor, por esas charlas que me ayudaron a seguir adelante. A Juli, por mostrarme cómo la pasión lleva a la excelencia. A Berna, por estar siempre dispuesto a charlar y a decirme si estoy siendo un boludo. A Manu Noseda, por su capacidad de darme un enfoque sobre las cosas que jamás hubiese podido considerar. Y a Rami, miniflipper honorario, por ser un charlista comodín, sea hablando de ciencia, pedagogía, deporte o cuestiones personales.

Por fuera de lo académico, hubieron personas poniéndome el hombro para que no afloje, a pesar de que quizás les cuesta entender que *si es para tanto*. A esas personas, les debo un agradecimiento de corazón. A mis amigos de la carrera, Bryan, Rober, Romi, Nico y Gab (si, también Gab), que siempre están ahí para hacerme compañía y tener alguna charla con la combinación correcta entre técnica y distendida. A mis amigos de la vida, Manu, Fede y Rodri, que siempre están ahí para *no* tener una charla técnica (excepto cuando me pongo intenso) y ayudarme a desconectar de la locura que puede ser un doctorado. A Manuela, que ha aguantado mis idas y vueltas, mis llantos y rabietas, con tanto amor que no puedo sino preguntarme si lo merezco. Me ha permitido seguir adelante en más aspectos de los ataúnen a esta tesis. Y finalmente, a mis padres Jorge y Viviana y a mi hermana Milena. Mi familia me apoyó desde el minuto cero en mi desquiciada decisión de ser físico, no solo con apoyo económico sino con un acompañamiento indispensable. Desde afuera, la UBA puede parecer inmensa e intimidante y les debo a ellos transmitirme la confianza de que estaba a mi alcance.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Dinámica de partículas cargadas . . . . .	5
2.1.1. Fuerza de Lorentz . . . . .	5
2.1.2. Aproximación de centro guía . . . . .	6
2.1.3. Espejos magnéticos y ángulo de inclinación . . . . .	8
2.1.4. Energización en presencia de anisotropía . . . . .	9
2.2. Modelos cinéticos de plasmas . . . . .	11
2.2.1. ¿Qué es un plasma? . . . . .	11
2.2.2. Ecuaciones de Vlasov-Maxwell . . . . .	12
2.2.3. Momentos de la ecuación de Vlasov y equilibrio local . . . . .	14
2.2.4. Modelo híbrido . . . . .	15
2.2.5. Método <i>particle-in-cell</i> (PIC) . . . . .	17
2.3. Magnetohidrodinámica . . . . .	19
2.3.1. Derivación . . . . .	19
2.3.2. Propiedades y fenomenología . . . . .	20
2.3.3. Ondas magnetohidrodinámicas . . . . .	21
2.3.4. Método pseudo-espectral . . . . .	22
2.4. Turbulencia . . . . .	25
2.4.1. Cascada de energía . . . . .	25
2.4.2. Espectro de Kolmogorov . . . . .	26
2.4.3. Turbulencia en plasmas . . . . .	27
<b>3. Energización de partículas de prueba</b>	<b>31</b>
3.1. Parámetros de las simulaciones . . . . .	31
3.2. El rol de las estructuras . . . . .	34
3.2.1. Desplazamiento y energización . . . . .	34
3.2.2. Modelo de centro guía . . . . .	36
3.2.3. Concentración preferencial . . . . .	38
3.3. El rol de las ondas . . . . .	46
3.3.1. Lineal contra no lineal . . . . .	46
3.3.2. Impacto del tiempo de correlación del forzado . . . . .	51
<b>4. Comparación con modelos cinéticos</b>	<b>55</b>
4.1. Implementación de módulo PIC híbrido en GHOST . . . . .	55
4.1.1. Evolución temporal . . . . .	55
4.1.2. Descomposición del dominio . . . . .	58
4.1.3. Verificación . . . . .	60
4.2. Relevancia de la interacción autoconsistente . . . . .	63
4.2.1. Parámetros de las simulaciones . . . . .	63
4.2.2. Caso 2,5D . . . . .	65

4.2.3. Caso 3D . . . . .	70
<b>5. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>73</b>
A. Funciones de peso	77
B. Solapamiento	79
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Excepto cerca de los electrodos, donde hay láminas que contienen muy pocos electrones, el gas ionizado contiene iones y electrones en números aproximadamente iguales, por lo que la carga espacial resultante es muy pequeña. Usaremos el nombre de *plasma* para describir esta región que contiene cargas equilibradas de iones y electrones.

Irving Langmuir, *Oscillations in ionized gases*, 1928

Las primeras observaciones de gases ionizados son tan antiguas como la humanidad misma, siendo parte de los fenómenos más espectaculares de la naturaleza. Están presentes en las descargas eléctricas durante una tormenta y en el fuego de los incendios que estas mismas generan. Conforman el sol que nos ilumina a diario, las estrellas que nos guían en la noche y las auroras que nos fascinan. La característica clave común a todos estos fenómenos es la emisión de luz.

Las primeras observaciones de laboratorio corresponden a experimentos de rayos catódicos en tubos de vacío. En 1879 Sir William Crookes, uno de los pioneros en el área, bautizó este cuarto estado de la materia como *materia radiante* (Crookes 1879). Los primeros estudios sistemáticos de este estado fueron liderados por Irving Langmuir, culminando en su trabajo seminal de 1928 (Langmuir 1928). Allí acuñó el término *plasma*, notando que la descarga actúa como un sustrato sobre el cual se mueven los iones y los electrones, análogamente a como lo hacen los glóbulos rojos y blancos en el plasma sanguíneo (Mott-Smith 1971). Desde entonces, se han identificado gases ionizados en múltiples contextos, concluyendo eventualmente que constituye casi la totalidad de la materia visible en el universo.

Toda estrella, incluido nuestro propio Sol, es un gas ionizado amalgamado por su propia atracción gravitatoria. La tesis doctoral de Cecilia Payne-Gaposchkin en 1925 contiene la primera explicación completa del espectro de emisión del Sol en términos de su composición iónica. A pesar de su incredulidad, logró demostrar que el Sol está compuesto principalmente por hidrógeno ionizado  $H^+$  (*protones*). En 1942, Hannes Alfvén mostró que en un fluido conductor (como un gas ionizado) pueden existir ondas electromagnéticas-hidrodinámicas, que bautizó como *magnetohidrodinámicas* (Alfvén 1942) y propuso cómo una posible explicación para la dinámica de las manchas solares. Enrico Fermi tomó estas ondas magnéticas como una fuente de aceleración de partículas cargadas en el espacio interestelar, dando un posible origen de *rayos cósmicos* (Fermi 1949).

En 1958, Eugene Parker probó que no existe solución hidrostática posible para esta atmósfera solar, mostrando la existencia del *viento solar* (Parker 1958). Su existencia fue confirmada mediante mediciones de la misión Mariner 2 de la Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio (NASA, por sus siglas en inglés) estadounidense durante su trayecto hacia Venus (Neugebauer y Snyder 1962) y es monitoreado constantemente desde entonces. El viento solar se expande a velocidad supersónica  $U_0 \sim 400$  km/s hasta aproximadamente 100 AU (unidad astronómica, con 1 AU = distancia Sol-Tierra), marcando el límite de la heliosfera. En ausencia de fuentes de calor, se esperaría que esta expansión sea adiabática, pero observaciones por Voyager I y II han mostrado que el viento solar se enfriá más lentamente (Wang y J. D. Richardson 2001), contradicción conocida como el problema de la aceleración del viento solar. Este viene aparejado con el problema del calentamiento coronal, según el cual existe un gran salto de temperatura entre la cromosfera y la corona solar. Esto es llamativo porque habitualmente la temperatura del Sol se reduce con la

distancia al núcleo, pasando de  $T \sim 1.5 \times 10^7$  K hasta  $T \sim 5 \times 10^3$  K en la cromosfera, pero volviendo a aumentar hasta  $T \sim 10 \times 10^5$  K en la corona.

Ambos problemas apuntan a la existencia de mecanismos de calentamiento del plasma y un candidato viable sería la disipación de energía por turbulencia. Tanto la corona como el viento solar se encuentran en un régimen turbulento, con espectros de energía compatibles con leyes de escala como la de Kolmogorov (Kolmogorov 1941; Coleman 1968). Este régimen se caracteriza por generar un flujo de energía cinética y/o magnética hacia escalas más pequeñas, donde efectos disipativos como viscosidad o resistividad se maximizan y la transforman en calor. Para el viento solar, esto ocurre en las escalas iniciales de protones y electrones, en ausencia de colisiones y, por lo tanto, implica estructuras coherentes (Bruno et al. 2007; Perri et al. 2012; Perrone et al. 2016), intermitencia (Bruno et al. 2001; Greco et al. 2012; Zhdankin et al. 2012) y producción de partículas energéticas (Parker y Tidman 1958; Tassein et al. 2013; Tassein et al. 2015).

A pesar del constante monitoreo del viento solar por misiones espaciales, existe un activo debate sobre las características de la turbulencia por debajo de la escala iónica (protónica), donde la descripción MHD y su correspondiente espectro de Kolmogorov pierden validez. Para escalas menores a la protónica, el espectro de energía magnética presenta un quiebre hacia una ley de potencias más empinada (R. J. Leamon et al. 1998; Smith et al. 2006), aunque este nuevo índice espectral no está perfectamente determinado. Además, el espectro del campo eléctrico allí se separa del espectro magnético, mostrando mayor intensidad y un decaimiento más lento, fundamental a la hora de energizar partículas (Bale et al. 2005; Mattheini et al. 2016). Estos cambios se deben a procesos cinéticos que cobran importancia en esas escalas, como reconexión magnética, anisotropías en la temperatura o calentamiento diferencial de iones. El espectro es aún menos comprendido en escalas electrónicas, pero se sabe que es mucho más empinado, con evidencias que apuntan a un decaimiento exponencial (Alexandrova et al. 2009, 2012; Sahraoui et al. 2013; Sahraoui et al. 2020).

Según el argumento original de Fermi, uno de los posibles mecanismos para la producción de partículas energéticas sería la interacción resonante con ondas de Alfvén viajeras. Este argumento fue posteriormente refinado y colectado en la Teoría Casi Lineal (TCL), dando condiciones claras para esta resonancia (Stix 1992). Sin embargo, este tipo de cálculos dependen de la predominancia de la dinámica ondulatoria en el plasma, régimen conocido como turbulencia débil (Chandran 2005, 2008). En este contexto, cada campo puede descomponerse como un valor medio de referencia más una fluctuación de baja amplitud descripta como una suma de ondas débilmente interactuantes. Este régimen, sin embargo, no es capaz de capturar procesos de turbulencia fuerte (Pouquet y Yokoi 2022), donde la dinámica comienza a ser dominada por estructuras coherentes y fluctuaciones intermitentes no propagantes en lugar de ondas.

Las interacciones de partículas con estas estructuras coherentes son muy complejas, y aún no existe un modelo definitivo para predecir las tasas de energización de partículas (Bieber et al. 2004; Ruffolo et al. 2008). En general, las partículas son capaces de explotar los campos eléctricos presentes en estas estructuras para obtener altas tasas de energización. Dentro de estos modelos, el uso de partículas de prueba es un enfoque popular y relativamente económico para calcular la energización, en el cual las partículas no generan campos electromagnéticos, sino que simplemente reaccionan a los campos impuestos externamente. Por lo tanto, la validez de sus predicciones está determinada principalmente por cuán realista es el modelado de los campos electromagnéticos externos, ya sea mediante turbulencia sintética (Ruffolo et al. 2006; Minnie et al. 2007; Dalena et al. 2012; Tautz y Dosch 2013; Dalena et al. 2014) o aquella obtenida mediante simulaciones numéricas directas de distintos modelos (Dmitruk et al. 2004a; Dmitruk y Mattheus 2006; Lehe et al. 2009; Teaca et al. 2014; C. A. González et al. 2016, 2017; Pezzi et al. 2022). Mientras que el primero es computacionalmente económico y capaz de capturar estadísticas globales, como los coeficientes de difusión, el segundo es más adecuado para reproducir estructuras comúnmente presentes en el plasma, que pueden ser muy relevantes en la energización de partículas (Greco et al. 2014; Perrone et al. 2020; Lemoine 2021; Pezzi et al. 2022; Lotekar et al. 2022; Vinogradov et al. 2024).

En las escalas más grandes, el modelo magnetohidrodinámico (MHD) provee una buena descripción de los plasmas espaciales, incluyendo la corona y el viento solar. Este modelo es capaz de generar y evolucionar de forma consistente tanto las estructuras coherentes como las ondas y permite describir de turbulencia fuerte a débil, incluyendo todos los regímenes intermedios. Es por esto que este enfoque suele considerarse más realista a la hora de estudiar la energización

de partículas de prueba. En presencia de un campo magnético guía, esta energización es principalmente perpendicular para iones y paralela para electrones (Dmitruk et al. 2004a). Aunque esta anisotropía ha sido observada consistentemente, no existe completo acuerdo sobre cuales son los mecanismos responsables de esto. Las partículas de prueba se usan más comúnmente para estudiar la dinámica de partículas cargadas de alta energía pero baja concentración, a fin de que su efecto sobre los campos externos no sea notable y no sea necesario tener en cuenta sus campos electromagnéticos intrínsecos. Esta es la población de partículas que asociaríamos a rayos cósmicos, cuya energía es muy superior al grueso de las partículas que componen el plasma, pudiendo ser consideradas como casi independientes del mismo.

Estos rayos cósmicos no son el único producto del calentamiento no colisional en un plasma, sino también otras partículas supratérmicas con considerablemente menos energía y mayor concentración. Para capturar esta producción, son necesarios modelos cinéticos auto-consistentes capaces de considerar la retroalimentación de las partículas sobre los campos (Servidio et al. 2017; Howes 2017). Uno de los más importantes corresponde a acomplir las ecuaciones de Vlasov para cada especie de partícula cargada con las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, modelo conocido como Vlasov-Maxwell. Este permite resolver completamente tanto la dinámica de los iones como la de los electrones, siendo estos últimos los que poseen escalas características considerablemente más pequeñas, lo que exige resoluciones espaciales y temporales más altas a la hora de hacer simulaciones numéricas directas (SND). Cuando el interés se centra principalmente en los iones, este aumento en la resolución eleva el costo computacional, limitando el tamaño de las simulaciones sin necesariamente aportar más información relevante sobre la física de los iones. Para contrarrestar esto, se han desarrollado modelos híbridos donde solo los iones son tratados cinéticamente mientras que los electrones son tratados como un fluido, generalmente sin masa. Estos modelos no solo reducen significativamente el costo computacional, sino que también arrojan resultados consistentes con observaciones en el viento solar (Servidio et al. 2014; Trotta et al. 2022) y simulaciones completamente cinéticas (Birn et al. 2001; Le et al. 2016; C. González et al. 2023) a la hora de reproducir fenómenos a escala de iones.

Uno de los enfoques para implementar numéricamente modelos involucra computar directamente la función de distribución de iones en el espacio de fases  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  resolviendo un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para esto, algunos métodos discretizan el espacio de fases 6D análogamente al dominio real 3D, aplicando allí métodos de diferencias finitas (Valentini et al. 2007; Muñoz et al. 2018; Pezzi et al. 2019). Otros métodos lo hacen de forma pseudoespectral, usando funciones de Hermite en espacio de velocidades donde los operadores diferenciales son más sencillos de expresar (Camporeale et al. 2016). Sin embargo, el método a utilizar en esta tesis corresponde al de partícula en celda (PIC, por sus siglas en inglés), donde el modelado de los iones se hace a través de macropartículas que representan un cierto volumen en el espacio de fases (Lipatov 2002). Este método es conceptualmente simple y de relativamente fácil implementación, siendo uno de los más antiguos y reconocidos a la hora de modelar cinéticamente plasmas. En virtud de trabajar directamente con partículas que siguen las ecuaciones de Newton, la descripción es inherentemente cinética. Sin embargo, para obtener  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  es necesario computarla directamente a partir de las macropartículas, lo cual puede ser computacionalmente costoso y poco preciso debido al ruido disparo introducido por el muestreo finito de partículas. Sin embargo, la mayoría de los observables de interés en un plasma pueden obtenerse sin necesidad de conocer explícitamente  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , volviendo este método extremadamente versátil.

Esta tesis se estructura de la siguiente manera: el próximo capítulo contiene el marco teórico necesario para fundamentar el trabajo. Daremos un punteo sobre la dinámica de partículas cargadas seguido por descripciones cinéticas y de fluido de plasmas. Además, discutiremos propiedades generales de la turbulencia y los métodos numéricos utilizados para resolverla. Los siguientes dos capítulos tratarán los resultados principales de esta tesis, primero comparando el rol de estructuras y ondas en energización de partículas de prueba y luego energización en modelos híbridos autoconsistentes y su comparación con partículas de prueba. En el último capítulo, discutiremos estos resultados, su relevancia y posibles ramificaciones.



# Capítulo 2

## Marco teórico

Las líneas de fuerza magnéticas pueden considerarse como cuerdas elásticas según la imagen mecánica usual de los fenómenos electrodinámicos. En vista de la conductividad infinita, todo movimiento (perpendicular al campo) del líquido en relación con las líneas de fuerza está prohibido porque produciría corrientes de Foucault infinitas. Así, la materia del líquido está “atada” a las líneas de fuerza...

Hannes Alfvén, *On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves*, 1942

En este capítulo hablaremos sobre la descripción de sistemas compuestos por partículas cargadas. Comenzaremos analizando la dinámica de cargas frente a campos electromagnéticos impuestos externamente. Estos campos externos son indiferentes a la dinámica de estas cargas, por lo que las llamaremos *partículas de prueba*.

Luego pasaremos a una descripción de tipo cinética, considerando poblaciones enteras de distintas especies de partículas y su reacción a los campos que ellas mismas generan. A partir de ella, construiremos sucesivamente descripciones de tipo fluido para las distintas especies, pasando por una descripción híbrida antes de llegar a la descripción magnetohidrodinámica del plasma. Discutiremos la fenomenología que surge a partir de estos modelos, con especial énfasis en la turbulencia.

### 2.1. Dinámica de partículas cargadas

#### 2.1.1. Fuerza de Lorentz

En presencia de un campo electromagnético, la dinámica de una partícula cargada está dictada por la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en vacío,  $q$  es la carga de la partícula,  $\mathbf{v}$  su velocidad y  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son los campos eléctrico y magnético en la posición de la partícula, respectivamente. Vemos que el campo eléctrico siempre aporta una componente de fuerza paralela a él mismo, mientras que la fuerza magnética es perpendicular tanto a la velocidad como al propio campo magnético. Entre otras cosas, esto implica que la fuerza magnética es incapaz de generar trabajo, al ser su potencia  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_M = 0$ .

Es posible interpretar la fuerza magnética en analogía con la cinemática de un cuerpo rígido. Sabemos que para un punto material arbitrario ubicado en  $\mathbf{r}$  sujeto a una rotación rígida dada por  $\boldsymbol{\Omega}$ , la velocidad está dada por  $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Recordando la segunda ley de Newton, vemos que algo completamente análogo ocurre para la velocidad  $\dot{\mathbf{v}} = (-q/mc)\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ , donde  $m$  es la masa de la partícula. Por lo tanto, podemos interpretar la fuerza magnética como una rotación rígida instantánea en el espacio de velocidades.

Esta rotación se da sobre el plano perpendicular a  $\mathbf{B}$ , mientras que la componente paralela no se ve afectada. Para un campo magnético uniforme y estacionario, esta fuerza magnética genera un

movimiento circular uniforme (MCU) en el plano perpendicular a  $\mathbf{B}$  y un movimiento rectilíneo uniforme (MCU) en la dirección paralela a  $\mathbf{B}$ . La superposición de estos movimientos genera una trayectoria helicoidal orientada en la dirección de  $\mathbf{B}$ , como muestra la figura 2.1(a).

Este MCU tiene una *frecuencia de ciclotrón*

$$\Omega_c = \frac{|q\mathbf{B}|}{mc}, \quad (2.2)$$

también conocida como *girofrecuencia*. El signo de  $q$  determina el sentido de giro: horario para  $q > 0$  y antihorario para  $q < 0$ . Esta frecuencia tiene asociado su *giroperiodo*

$$\tau_c = \frac{2\pi}{\Omega_c} = \frac{2\pi mc}{|q\mathbf{B}|}, \quad (2.3)$$

y su *giroradio* o *radio de ciclotrón*

$$R_c = \frac{|\mathbf{v}_\perp|}{\Omega_c} = \frac{mc|\mathbf{v}_\perp|}{|q\mathbf{B}|}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{v}_\perp$  es la componente de  $\mathbf{v}$  perpendicular a  $\mathbf{B}$ .

Agregando un campo eléctrico también uniforme y estacionario esta dinámica cambia levemente. Vemos que un cambio de variables  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/|\mathbf{B}|^2$  transforma (2.1) en

$$\dot{\mathbf{v}}' = \frac{q}{m} \left[ (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}} + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B} \right],$$

donde usamos la propiedad del doble producto vectorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  y definimos el versor dirección del campo magnético  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ .

Vemos entonces que la componente de  $\mathbf{v}'$  paralela a  $\mathbf{B}$  se ve acelerada con la componente paralela de  $\mathbf{E}$ . Al ser esta aceleración constante, tenemos un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUV). Por otro lado, la componente perpendicular de  $\mathbf{v}'$  está sujeta a la misma ecuación de antes, por lo que sigue un MCU en el plano perpendicular. Podemos recuperar la velocidad original  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}_D$  donde

$$\mathbf{V}_D = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \quad (2.5)$$

es una *velocidad de deriva* constante y perpendicular a  $\mathbf{B}$ . Concluimos entonces que la cinemática es una superposición de MRU (dados por  $\mathbf{V}_D$ ) y MCU en el plano perpendicular a  $\mathbf{B}$  junto con un MRUV en la dirección paralela a  $\mathbf{B}$ . En la figura 2.1(b), se muestra esta deriva proyectada sobre el plano perpendicular a  $\mathbf{B}$ .

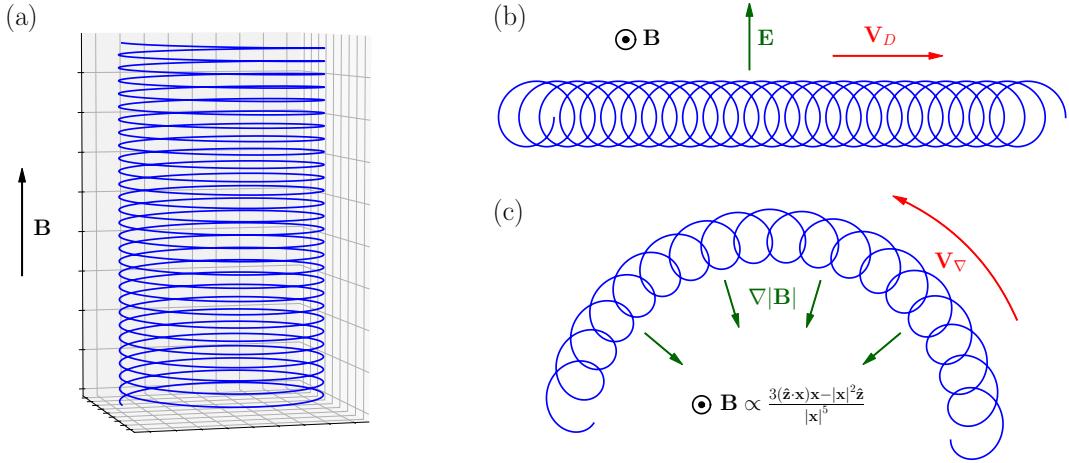
### 2.1.2. Aproximación de centro guía

El método anterior puede generalizarse aún para el caso de campos electromagnéticos no uniformes. Empecemos por notar que tanto el giroperiodo  $\tau_c$  (2.3) como el giroradio  $R_c$  (2.4) escalan como  $\sim mc/|q\mathbf{B}|$ . Por lo tanto, si estas escalas espacio-temporales son menores que las escalas características de variación de los campos electromagnéticos, es posible aproximar los campos percibidos por la partícula por una expansión de Taylor de bajo orden. En este régimen se dice que las partículas se encuentran *magnetizadas*, pues suele darse en presencia de campos magnéticos intensos.

La aproximación de orden 0, donde asumimos ambos campos como uniformes, es la que arrojó la velocidad de deriva (2.5). La partícula está sujeta a un MCU alrededor de un centro que se desplaza, que en este caso sigue una trayectoria parabólica: un MRUV en  $\hat{\mathbf{B}}$  y un MRU en la dirección de  $\mathbf{V}_D$ . La idea de este método es asumir que incluso a ordenes mayores, la partícula seguirá moviéndose en un MCU alrededor de un *centro guía*. La dinámica de este centro guía se complicará a medida que se aumente el orden de la aproximación, pero se mantiene la visión de que la trayectoria será una helicoidal orientada a lo largo de las líneas de campo magnético con una pequeña deriva lateral.

Siguiendo esta idea, la posición  $\mathbf{x}(t)$  de una partícula cargada puede aproximarse según

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_g(t), \quad \frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = \mathbf{V}_D(\mathbf{x}_c(t), t), \quad (2.6)$$



**Figura 2.1:** Visualización de las trayectorias (azul) de una partícula cargada en distintas configuraciones de campo electromagnético. (a) Helicoide correspondiente al caso  $E = 0$  y  $B$  constante. (b) Proyección sobre el plano perpendicular a  $B$  constante, mostrando la deriva ante un campo eléctrico  $E$  constante. (c) Partícula con  $v_{\parallel} = 0$  sobre el plano ortogonal a un campo magnético  $B$  dipolar, cuyo módulo tiene un gradiente radial y, por lo tanto, una velocidad de deriva  $V_V$  azimuthal.

donde  $\mathbf{x}_g(t)$  es un movimiento circular con frecuencia  $\Omega_c$  y radio  $R_c$ , en principio constantes durante al menos un giroperiodo  $\tau_c$ . Cómo vemos, esta aproximación así escrita impone  $v_{\parallel} = 0$  (componente de  $\mathbf{v}$  paralela a  $\mathbf{B}$ ), lo cual no es razonable. En principio, la dinámica de esta componente no es simple de computar, pero usando la expresión (2.6), es posible obtener algunas aproximaciones.

Para fluctuaciones de campo eléctrico la corrección a siguiente orden para la  $\mathbf{V}_D$  (2.5) es

$$\mathbf{V}_E = \left(1 + \frac{1}{4} R_c^2 \nabla^2\right) c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}. \quad (2.7)$$

Esto nos muestra que las correcciones por variación del campo eléctrico son cuadráticas en el giroradio  $\mathcal{O}(R_c^2)$ , sin que exista un caso intermedio  $\mathcal{O}(R_c)$ . Esto implica que para  $R_c \ll \ell$  con  $\ell$  una distancia característica de variación de los campos, estas correcciones serán subdominantes.

Algo análogo ocurre con las derivas asociadas a fluctuaciones del campo magnético. Dos de las más conocidas son la debida a un gradiente en la intensidad del campo ( $\nabla|B| \neq 0$ )

$$\mathbf{V}_V = \frac{mc}{2q|\mathbf{B}|} |\mathbf{v}_{\perp}|^2 \frac{\nabla|\mathbf{B}| \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}, \quad (2.8)$$

y la debida a la curvatura de las líneas de campo magnético

$$\mathbf{V}_C = \frac{mc}{q|\mathbf{B}|} v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}, \quad (2.9)$$

donde  $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{B}}$  y  $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}}$  es la curvatura local de  $\mathbf{B}$ : su módulo corresponde al inverso del radio de curvatura. Es fácil ver que  $|\mathbf{V}_V| \sim |\mathbf{v}_{\perp}|R_c/\ell = \mathcal{O}(R_c)$  donde  $\ell = |\mathbf{B}|/|\nabla|\mathbf{B}|$  es la distancia característica de variación de  $|\mathbf{B}|$ . Vemos entonces que esta deriva será dominante respecto a  $\mathbf{V}_E$ , pero aún así pequeña respecto a  $\mathbf{V}_D$  excepto para partículas con excepcional energía cinética perpendicular  $\varepsilon_{\perp} = |\mathbf{v}_{\perp}|^2$ . Podemos apreciar un ejemplo de esta deriva en la figura 2.1(c) para el caso de un campo magnético dipolar y dinámica puramente perpendicular a la dirección del dipolo. Algo similar ocurre con  $\mathbf{V}_C$ , pues  $|\mathbf{V}_C| \sim v_{\parallel}^2/\ell\Omega_c$  donde en este caso  $\ell$  representa el radio de curvatura, por lo que solo será relevante para partículas con una energía cinética paralela  $\varepsilon_{\parallel} = v_{\parallel}^2$  excepcionalmente alta.

En esta tesis, estamos interesados en el caso en que existe un campo guía intenso, tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$  con  $\mathbf{B}_0$  constante y  $|\mathbf{B}_0| \gg |\mathbf{b}|$ . Bajo esta hipótesis, ambas escalas características serán grandes pues  $|\mathbf{B}_0| \approx |\mathbf{B}|$  y  $\hat{\mathbf{B}} \approx \hat{\mathbf{B}}_0$  y sus variaciones lentas, volviendo estas derivas aún menos relevantes.

### 2.1.3. Espejos magnéticos y ángulo de inclinación

Otra aproximación muy conocida es la que da origen a los *espejos magnéticos* (Roederer y Zhang 2013; F. F. Chen 2016). Consideremos una región del espacio donde el campo magnético es axisimétrico  $\partial/\partial\varphi = 0$  y sin componente azimutal  $B_\varphi = 0$ . Si consideramos que  $\mathbf{x}_c$  se encuentra sobre este eje de simetría, la condición  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  nos permite encontrar una expresión simple para  $B_r$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \implies B_r = -\frac{1}{r} \int_0^r r' \frac{\partial B_z}{\partial z} dr' \approx -\frac{1}{2} r \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0}, \quad (2.10)$$

donde usamos que  $r \leq R_c \ll \ell_r$  con  $\ell_r \sim B_z/\partial_r B_z$  la escala característica de variación radial de  $B_z$ . La componente  $z$  de la fuerza magnética es entonces

$$F_z = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z = q(v_r B_\varphi - v_\varphi B_r) \approx \frac{1}{2} q v_\varphi r \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0}.$$

Esta fuerza, sin embargo, oscilará junto con  $v_\varphi$ , por lo que no es muy indicativa de la dinámica del sistema. En línea con la hipótesis anterior  $R_c \ll \ell_r$ , podemos promediar esta fuerza en un giroperíodo  $\tau_c$ . Durante este tiempo, la partícula avanzará  $\sim v_z \tau_c \ll \ell_z$  donde  $\ell_z$  es la distancia característica de variación del campo magnético a lo largo del eje. Por lo tanto, podemos aproximar su trayectoria como circular y en su lugar promediar sobre un círculo de radio  $R_c$

$$\langle F_z \rangle = \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} F_z dt' \approx \frac{1}{2\pi R_c} \oint F_z d\ell = \frac{1}{2\pi R_c} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} q v_\varphi R_c \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0} R_c d\varphi = -\frac{m|\mathbf{v}_\perp|^2}{2|\mathbf{B}|} \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0}$$

donde usamos (2.10),  $v_\varphi = -\text{sg}(q)|\mathbf{v}_\perp|$  y la definición de  $R_c$  (2.4). Esto nos permite definir el *momento magnético*

$$\mu = \frac{m|\mathbf{v}_\perp|^2}{2|\mathbf{B}|}. \quad (2.11)$$

Sobre el eje de simetría, tenemos  $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$  dada la hipótesis inicial  $B_\varphi = 0$  y (2.10), por lo que podemos escribir

$$v_z \frac{dv_z}{dt} \approx -v_z \mu \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0} \approx -\mu \frac{dB_z}{dt} = -\mu \frac{d|\mathbf{B}|}{dt}, \quad (2.12)$$

donde  $B_z = |\mathbf{B}|$  está evaluado en la posición del centro guía  $\mathbf{x}_c$  y usamos la definición de derivada direccional. Por lo tanto, esta derivada  $dB_z/dt$  refiere a la variación del campo experimentado por la partícula, despreciando variaciones temporales propias del campo ( $\partial B_z/\partial t \approx 0$ ).

Por otro lado, en ausencia de campo eléctrico sabemos que la energía cinética total se conserva

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_\perp|^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \right) = \frac{d}{dt} (|\mathbf{B}| \mu) - \mu \frac{d|\mathbf{B}|}{dt} = |\mathbf{B}| \frac{d\mu}{dt} \quad (2.13)$$

donde la descompusimos en componente paralela y perpendicular y usamos (2.12). Por lo tanto, bajo estas hipótesis  $\mu$  es una constante de movimiento, volviéndolo uno de los *invariantes adiabáticos* de la partícula. Los demás invariantes no son particularmente relevantes para esta tesis y tampoco resulta trivial que estas hipótesis se cumplan en presencia de turbulencia. Cuando se cumplen, pueden dar origen a confinamiento por espejos magnéticos: una partícula debe incrementar su  $|\mathbf{v}_\perp|$  para poder acceder a regiones de alto  $|\mathbf{B}|$ , lo cual por conservación de la energía solo puede ocurrir en detrimento de  $|v_z|$ . Si la partícula no dispone de suficiente  $|v_z|$  (energía cinética), no podrá acceder a regiones con campos magnéticos intensos.

En el fondo, la efectividad de este confinamiento no depende de la energía cinética sino del ángulo de la velocidad respecto al campo magnético, conocido como *ángulo de inclinación* (en inglés, *pitch angle*) y correspondiente al ángulo polar en coordenadas esféricas. Por lo tanto,  $v_z = |\mathbf{v}| \cos \theta$  con  $\theta$  el ángulo de inclinación y podemos escribir el momento magnético como  $\mu = \varepsilon \sin^2 \theta / |\mathbf{B}|$  donde  $\varepsilon = m|\mathbf{v}|/2$  la energía cinética de la partícula. Supongamos que la partícula tiene un momento magnético inicial  $\mu_0 = \varepsilon_0 \sin^2 \theta_0 / B_0$ . Para que la partícula acceda a una región con  $|\mathbf{B}|$ , dado que  $\varepsilon = \varepsilon_0$  en ausencia de campo eléctrico, el nuevo ángulo de inclinación debe ser

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \theta_0 \frac{|\mathbf{B}|}{B_0} \leq 1 \implies |\mathbf{B}| \leq \frac{B_0}{\sin^2 \theta_0},$$

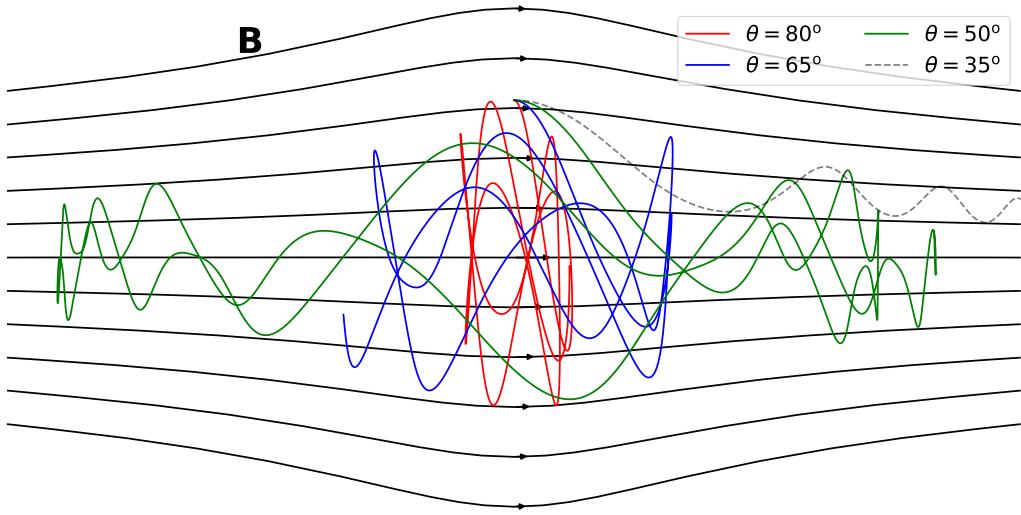


Figura 2.2: Corte paralelo de un espejo magnético axisimétrico  $\mathbf{B} = B_r(r, z)\hat{\mathbf{r}} + B_z(r, z)\hat{\mathbf{z}}$ . En negro se muestran las líneas de campo magnético mientras que los colores indican trayectorias para partículas con la misma energía inicial pero distinto ángulo de inclinación.

y por lo tanto la partícula no podrá acceder regiones con campo magnético demasiado intenso. Podemos ver un ejemplo de este confinamiento en la figura 2.2 para un campo magnético artificial, donde integramos la trayectoria de múltiples partículas con la misma energía cinética inicial pero distinto ángulo de inclinación. Vemos que la configuración de tipo *cuello de botella* impide que las partículas con  $\theta \gtrsim 50^\circ$  escapen de la región observada.

#### 2.1.4. Energización en presencia de anisotropía

Cómo mencionamos previamente, nos interesa el caso en que existe un campo magnético guía presente  $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$  con  $B_0$  una constante, tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ . Esta dirección privilegiada motiva una descomposición de la dinámica en paralela y perpendicular, tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$  donde  $\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}}$ . La ecuación de Newton bajo la fuerza de Lorentz (2.1) puede descomponerse entonces cómo

$$\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{z}} \right) \hat{\mathbf{z}} = (\alpha [c\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b})] \cdot \hat{\mathbf{z}}) \hat{\mathbf{z}} = \alpha [c\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}} + (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{z}}] \hat{\mathbf{z}},$$

donde usamos que  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \perp \hat{\mathbf{z}}$  y definimos  $\alpha = q/mc$  por simplicidad. Usando la propiedad cíclica  $(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}$  y la descomposición de  $\mathbf{v}$  junto con una análoga para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{b}$  obtenemos

$$\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \alpha [c\mathbf{E}_\parallel + (\mathbf{b}_\perp \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \hat{\mathbf{z}}]. \quad (2.14)$$

Podemos hacer lo mismo para la componente perpendicular, definida como  $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel$

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \alpha [c(\mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{b} - (\mathbf{b}_\perp \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \hat{\mathbf{z}}],$$

donde vemos que aparece naturalmente  $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel$ . Los 2 términos siguientes resultan

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 &= (\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_0, \\ \mathbf{v} \times \mathbf{b} &= (\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) \times (\mathbf{b}_\perp + \mathbf{b}_\parallel) = \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b}_\perp + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{b}_\perp, \end{aligned}$$

por lo que agrupando tenemos

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \alpha [c\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}_\perp \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{b}_\perp) + \mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{b}_\perp - (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b}_\perp) \cdot \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}]. \quad (2.15)$$

A partir de (2.14) y (2.15) podemos obtener ecuaciones para la energía paralela  $\varepsilon_\parallel$  y perpendicular  $\varepsilon_\perp$

$$\frac{d\varepsilon_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}_\parallel|^2 \right) = \mathbf{v}_\parallel \cdot \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \alpha [cE_\parallel v_\parallel + (\mathbf{b}_\perp \times \mathbf{v}_\parallel) \cdot \mathbf{v}_\perp] \equiv \mathcal{P}_\parallel + \mathcal{P}_\times, \quad (2.16)$$

$$\frac{d\varepsilon_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}_{\perp}|^2 \right) = \mathbf{v}_{\perp} \cdot \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \alpha [c\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} - (\mathbf{b}_{\perp} \times \mathbf{v}_{\parallel}) \cdot \mathbf{v}_{\perp}] \equiv \mathcal{P}_{\perp} - \mathcal{P}_{\times}, \quad (2.17)$$

donde definimos las potencias paralela  $\mathcal{P}_{\parallel}$ , perpendicular  $\mathcal{P}_{\perp}$  y cruzada  $\mathcal{P}_{\times}$ . Las primeras dos corresponden al trabajo del campo eléctrico en esa dirección, mientras  $\mathcal{P}_{\times}$  refiere a un término de intercambio entre energía paralela y perpendicular mediado por las fluctuaciones perpendiculares del campo magnético  $\mathbf{b}_{\perp}$ . Podemos reexpresar esta potencia cómo

$$\mathcal{P}_{\times} = \alpha(\mathbf{b}_{\perp} \times \mathbf{v}_{\parallel}) \cdot \mathbf{v}_{\perp} = \alpha(\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \mathbf{b}_{\perp}, \quad (2.18)$$

donde vemos que el intercambio se maximiza cuando  $\mathbf{b}_{\perp} \parallel (\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{v}_{\perp})$ . Geométricamente, sabemos que este producto mixto representa el volumen (orientado) del paralelepípedo formado por los 3 vectores  $\mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{b}_{\perp}$ . Como  $\mathbf{v}_{\parallel}$  y  $\mathbf{v}_{\perp}$  ya son perpendiculares entre si, tenemos simplemente  $|\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{v}_{\perp}| = v_{\parallel} v_{\perp}$ , por lo que  $\mathcal{P}_{\times} = \alpha v_{\parallel} v_{\perp} b_{\perp} \cos \varphi$  con  $\varphi$  el ángulo entre  $\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{v}_{\perp}$  y  $\mathbf{b}_{\perp}$ . En términos del ángulo de inclinación  $\theta$  respecto a  $\mathbf{B}_0$  tenemos  $v_{\parallel} = |\mathbf{v}| \cos \theta$  y  $v_{\perp} = |\mathbf{v}| \sin \theta$ , por lo que

$$\mathcal{P}_{\times} = \alpha \frac{v^2}{2} \sin(2\theta) b_{\perp} \cos \varphi = \varepsilon \sin(2\theta) \alpha b_{\perp} \cos \varphi, \quad (2.19)$$

donde  $\varepsilon = |\mathbf{v}|^2/2$  es la energía cinética total. Dada la dependencia con el ángulo de inclinación  $\theta$  podemos identificar esta tasa de intercambio de energía con la conocida dispersión del ángulo de inclinación (en inglés, *pitch angle scattering*).

## 2.2. Modelos cinéticos de plasmas

Habiendo estudiado la dinámica de partículas individuales, pasamos ahora a estudiar su comportamiento colectivo. En esta sección, presentaremos modelos para describir la mutua interacción de un número macroscópico de partículas cargadas, puntualmente en el contexto de un plasma.

### 2.2.1. ¿Qué es un plasma?

No todo sistema compuesto por partículas cargadas es un plasma. Más aún, no todo gas ionizado es necesariamente un plasma, pues todo gas tiene un grado no nulo de ionización (C. H. K. Chen et al. 2013, Capítulo 1). Un plasma es un gas casineutral compuesto tanto por partículas cargadas como neutras que exhibe comportamiento colectivo. Los conceptos clave en esta definición son casineutralidad y comportamiento colectivo.

Casineutralidad refiere a la propiedad de apantallar potenciales eléctricos. Esquemáticamente, notamos que cualquier carga aislada tenderá a atraer eléctricamente cargas opuestas hasta que la repulsión de estas nuevas cargas compense la atracción de la carga original. En ese momento, la carga neta se vuelve prácticamente nula y decimos que el potencial original fue apantallado. Este apantallamiento no es absoluto, sino que es efectivo a partir de una cierta *longitud de Debye* (C. H. K. Chen et al. 2013, Capítulo 1)

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{K_B T}{4\pi n q^2}}, \quad (2.20)$$

donde  $K_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  es la temperatura del sistema,  $n$  es la densidad media de partículas y  $q$  su carga. Decimos entonces que dos cargas separadas por una distancia mayor a  $\lambda_D$  no interactúan eléctricamente. Para distancias menores a  $\lambda_D$ , la interacción eléctrica es dominante e intensa, cualidades que podemos asociar a una colisión. Para que este apantallamiento sea posible, es necesario que las partículas cargadas interactúen entre sí más de lo que interactúan con las partículas neutras del sistema. Esto suele poner cotas mínimas a la fracción de ionización del sistema, que en los contextos astrofísicos de interés para esta tesis, se cumplen siempre.

Otra condición necesaria para el apantallamiento es que cada carga tenga suficientes cargas opuestas en su vecindad, lo cual se cuantifica con el llamado *parámetro de plasma*

$$N_D = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 n, \quad (2.21)$$

que corresponde al número medio de partículas en una esfera de radio  $\lambda_D$ . Cuando  $N_D \gg 1$ , el sistema no solo dispone de casineutralidad sino que además presenta comportamiento colectivo. Disponer de este gran número de partículas permite que el sistema genere desbalances locales de carga o incluso corrientes, dando origen a campos electromagnéticos. Al ser estos campos de largo alcance, la dinámica depende no solo de condiciones locales sino de aquellas en regiones alejadas, dando origen a un comportamiento colectivo.

Un ejemplo sencillo de este comportamiento colectivo son las oscilaciones de plasma frío (Langmuir 1928). Consideremos un plasma estático y uniforme perturbado por un campo eléctrico inicialmente sinusoidal  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t = 0) = E_0 \exp(i k x) \hat{\mathbf{x}}$ . Este sistema es esencialmente unidimensional, por lo que dejaremos de lado la notación vectorial. Proponemos entonces una solución compleja  $E(x, t) = E_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ , con el objetivo de hallar  $\omega(k)$ . Si consideramos el límite de plasma frío, todas las partículas comienzan con velocidad 0, por lo que rápidamente se acoplan a la dinámica del campo. La ecuación de Newton resulta

$$m\dot{v} = qE \implies v = i \frac{q}{\omega m} E_0 e^{i(kx_0 - \omega t)}, \quad (2.22)$$

donde tomamos la posición de la partícula como aproximadamente constante  $x(t) \approx x_0$ , teniendo en mente la solución oscilatoria e inspirados en el modelo del centro guía de la sección 2.1.2. La conservación de la carga impone

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i\omega E}{4\pi} \right), \quad (2.23)$$

donde  $j$  es la densidad de corriente,  $\rho_c$  la densidad de carga y usamos la Ley de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_c$  junto con el reemplazo  $\partial_t \rightarrow -i\omega$  en virtud de (2.22). La densidad de corriente puede escribirse en términos de la velocidad como  $j \approx qn_0v$  donde  $n_0$  es la densidad inicial de partículas y usando (2.22) junto con (2.23)

$$ik \left[ i \frac{q^2 n_0}{\omega m} - \frac{i\omega}{4\pi} \right] E_0 = 0, \quad (2.24)$$

donde usamos la forma ondulatoria para reemplazar  $\partial_x \rightarrow ik$  y simplificamos las exponentiales. Es inmediato ver que la única solución no trivial ( $E_0 \neq 0$ ) corresponde a la *frecuencia de plasma*

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi n_0 q^2}{m}}, \quad (2.25)$$

asociada a las ondas de Langmuir. Es importante notar que nunca especificamos el tipo de partícula cargada, por lo que cada especie tendrá su propia frecuencia de plasma, determinada únicamente por su carga  $q_s$ , su masa  $m_s$  y su densidad media  $n_0$ . Dada esta frecuencia, es inmediato construir una longitud asociada tomando en cuenta la velocidad de la luz  $c$

$$d = \frac{c}{\omega} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_0 q^2}}, \quad (2.26)$$

conocida como *longitud de penetración* o *longitud inercial*. En general, esta es la escala a partir de la cual las partículas exhiben comportamientos cinéticos, desacoplándose del flujo medio subyacente (ver a continuación).

## 2.2.2. Ecuaciones de Vlasov-Maxwell

Existen múltiples formas de describir un sistema de partículas interactuantes desde el punto de vista de la mecánica estadística. En su forma más general, un sistema de  $N$  partículas clásicas idénticas puede describirse mediante una densidad de probabilidad  $f_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$ , donde  $\mathbf{x}_i$  y  $\mathbf{p}_i$  son la posición y el momento de la  $i$ -esima partícula, respectivamente. El Teorema de Liouville (Goldstein et al. 2002, Capítulo 9) determina la evolución de esta densidad de probabilidad en este espacio de fases  $6N$  dimensional, pero esto resulta poco práctico si nos interesan sistemas macroscópicos con  $N \gg 1$ . Para tan alta dimensionalidad, este problema resulta intratable.

Es posible reducir la dimensionalidad de este espacio mediante la jerarquía BBGKY (en honor a Bogoliubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon) (D. C. Montgomery et al. 1965, Capítulo 4), donde obtenemos ecuaciones para la densidad de probabilidad de  $\ell \leq N$  partículas  $f_\ell(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\ell, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_\ell, t)$ . Estas ecuaciones, sin embargo, están acopladas y no es posible darles clausura, pues habitualmente  $f_\ell$  depende explícitamente de  $f_{\ell+1}$ . De un punto de vista formal, esto eventualmente obliga a resolver hasta  $f_N$ , por lo cual es equivalente al problema original. No obstante, esta formulación da un marco claro a partir del cual aproximar  $f_\ell$ : necesitamos alguna hipótesis sobre  $f_{\ell+1}$  para forzar una clausura temprana del sistema de ecuaciones.

Idealmente, buscamos limitarnos al caso  $\ell = 1$  y obtener la función de distribución de una única partícula  $f_1 \equiv f$ , donde la dimensionalidad del problema es siquiera tratable. Sin embargo, cualquier distribución de una única partícula es incapaz de modelar correctamente la interacción entre dos o más partículas. Cómo mencionamos en la sección 2.2.1, podemos separar estas interacciones en aquellas con campos electromagnéticos de largo alcance generados colectivamente y las colisiones. Si nos concentramos en escalas  $L \gg \lambda_D$ , es posible despreciar las colisiones y tratar solo con los campos magnéticos de largo alcance. Esto arroja la ecuación de Vlasov no colisional

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + q_s \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  es la velocidad y el índice  $s$  denota la especie de partícula en cuestión, si consideramos un plasma compuesto por múltiples poblaciones (e.g., electrones, protones, iones pesados). Las partículas de cada especie son idénticas entre si desde un punto de vista clásico, con una misma carga  $q_s$  y masa  $m_s$ . Esta es una ecuación de conservación del número de partículas (de cada especie) en el espacio de fases, asumiendo que su dinámica está dictada por la fuerza de Lorentz (2.1).

Para completar la descripción, es necesario determinar los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$ , para lo cual utilizamos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_c, \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.31)$$

donde  $\rho_c$  es la densidad de carga y  $\mathbf{j}$  es la densidad de corriente. Estas densidades están relacionadas con los primeros dos momentos de la distribución de partículas.

$$\begin{aligned} \rho_c(\mathbf{x}, t) &= \sum_s q_s n_s(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \sum_s q_s n_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \end{aligned}$$

donde  $n_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  es la densidad de partículas y  $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$  es la velocidad media, tal que  $\int n_s(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = N_s$  el número total de partículas de la especie  $s$ .

Nótese que aún no determinamos la relación entre la velocidad  $\mathbf{v}$  y el momento  $\mathbf{p}$ . Dado que la fuerza de Lorentz tiene la misma forma tanto para el caso relativista como para el Newtoniano, la elección recae exclusivamente en cómo se relacionan  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{p}$ . En principio, las ecuaciones de Maxwell son invariantes de Lorentz, por lo que deberíamos tomar  $\mathbf{p} = m_s \gamma(\mathbf{v}) \mathbf{v}$ , donde  $\gamma(\mathbf{v}) = (1 - |\mathbf{v}|^2/c^2)^{-1/2}$  es el factor de Lorentz.

En el contexto de este trabajo, sin embargo, nos limitaremos a descripciones no relativistas del plasma, por lo que tomaremos la relación más usual  $\mathbf{p} = m_s \mathbf{v}$  de la mecánica Newtoniana. Esto vuelve (2.27) invariante de Galileo si agregamos la corrección habitual  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} - \mathbf{U} \times \mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{U}$  es la velocidad del nuevo sistema de referencia. Para solucionar la contradicción con la invarianza de Lorentz (2.28)-(2.31), usaremos que las partículas tienen velocidades  $|\mathbf{v}| \ll c$ , por lo que podemos despreciar los campos de radiación. Esto es similar a tomar una hipótesis *casiestacionaria*, donde descartamos el término de corriente de desplazamiento  $\propto \partial_t \mathbf{E}$  de (2.31).

Dado que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{v}$  son proporcionales, podemos redefinir la distribución en términos de  $\mathbf{v}$  re-normalizando apropiadamente. El sistema clásico newtoniano entonces está compuesto por la ecuación de Vlasov

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.32)$$

las ecuaciones de Maxwell (2.28)-(2.30), la ley de Ampere modificada

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.33)$$

y las fuentes

$$\rho_c(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s n_s(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s n_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.35)$$

Este sistema de ecuaciones es implícitamente cuadrático en  $f_s$ . Esto se debe a que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son lineales en  $f_s$  como consecuencia de la linealidad de las ecuaciones de Maxwell (2.28) y (2.33) con las fuentes. Más aún, las fuentes involucran a todas las especies, por lo que el tercer término de (2.32) uno que acopla las  $f_s$  de las distintas especies.

### 2.2.3. Momentos de la ecuación de Vlasov y equilibrio local

Como dijimos, los campos de densidad  $n_s(\mathbf{x}, t)$  y velocidad  $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$  son los primeros dos momentos de la distribución de partículas. Estos momentos se computan integrando en espacio de velocidades y podemos obtener sus ecuaciones de evolución a partir de (2.32). La primer ecuación se obtiene integrando directamente la ecuación  $\int (2.32) d\mathbf{v}$ ,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0. \quad (2.36)$$

Esta ecuación implica la conservación del número de partículas en el espacio real y se la conoce como ecuación de continuidad. Integrando  $\int m_s \mathbf{v} (2.32) d\mathbf{v}$  obtenemos la ecuación de Euler

$$m_s n_s \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s \right] = -\nabla \cdot \mathbf{P}_s + q_s n_s \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_s}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.37)$$

donde aparece el tensor presión de la especie  $s$

$$\mathbf{P}_s(\mathbf{x}, t) = m_s \int [\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)] [\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)] f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.38)$$

Este tensor presión mide la desviación de las velocidades respecto a la media y tiene unidades de densidad de energía. Es posible relacionarlo con la temperatura a través de

$$T_s(\mathbf{x}, t) = \frac{\text{Tr} [\mathbf{P}_s(\mathbf{x}, t)]}{3n_s(\mathbf{x}, t)} = \frac{m_s}{3n_s(\mathbf{x}, t)} \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)|^2 f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \equiv \frac{m_s}{3} \langle |\mathbf{v} - \mathbf{u}_s|^2 \rangle_s \quad (2.39)$$

donde definimos el valor medio en espacio de velocidades  $\langle \bullet \rangle_s = \int \bullet f_s d\mathbf{v} / n_s$  y dejamos de lado la constante de Boltzmann  $K_B$ , expresando la temperatura directamente en unidades de energía. En esta notación, tenemos  $\mathbf{u}_s = \langle \mathbf{v} \rangle_s$  y  $\mathbf{P}_s = m_s n_s \langle [\mathbf{v} - \mathbf{u}_s] [\mathbf{v} - \mathbf{u}_s] \rangle_s$ .

Ambas ecuaciones (2.36) y (2.37) describen la derivada temporal de cada momento siempre en términos de momentos superiores:  $\partial_t n_s$  depende de  $\mathbf{u}_s$  mientras que  $\partial_t \mathbf{u}_s$  depende de  $\mathbf{P}_s$ . Una ecuación para  $\partial_t \mathbf{P}_s$  generada con un método análogo dependerá del tensor compuesto por momentos de orden 3 y así sucesivamente. Este es un conocido problema de clausura, muy similar al que ocurre en la jerarquía BBGKY (ver sección 2.2.2) y en otros problemas no lineales.

Para poder cerrar tempranamente este sistema de ecuaciones, es necesario aplicar clausuras termodinámicas. Esto implica que existe una escala del problema en la cual los elementos materiales están en equilibrio termodinámico. En gases clásicos, este equilibrio suele alcanzarse mediante colisiones entre las partículas, que llevan al sistema a una distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{n_s(\mathbf{x}, t)}{[(2\pi)^3 \det \mathbf{S}_s(\mathbf{x}, t)]^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{S}_s^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot [\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)] \right\}, \quad (2.40)$$

donde  $\mathbf{S}_s$  es el tensor de correlación de las distintas componentes de las desviaciones  $\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$ . Podemos relacionarlo con el tensor de presiones  $\mathbf{P}_s(\mathbf{x}, t) = m_s n_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{S}_s(\mathbf{x}, t)$  y, por lo tanto, su traza cumple  $\text{Tr} [\mathbf{S}_s] = 3T_s / m_s$ . Más aún, al ser  $\mathbf{S}_s$  simétrico como  $\mathbf{P}_s$ , existen 3 direcciones ortogonales para las cuales se pueden definir temperaturas  $T_s^{(1)}$ ,  $T_s^{(2)}$  y  $T_s^{(3)}$ . Para sistemas isótropos se tiene  $T_s^{(1)} = T_s^{(2)} = T_s^{(3)} = T_s$ , por lo que esta descomposición es más relevante para problemas anisótropos. Veremos que un campo magnético uniforme es capaz de inducir esta anisotropía de modo que, por ejemplo,  $T_s^{(1)} = T_s^{\parallel}$  y  $T_s^{(2)} = T_s^{(3)} = T_s^{\perp}$ . Independientemente de esta diagonalización, siempre es posible definir la temperatura de cada componente  $\ell$  de la velocidad como

$$T_\ell = \frac{\mathbf{P}_{\ell\ell}(\mathbf{x}, t)}{n(\mathbf{x}, t)} = \frac{m}{n(\mathbf{x}, t)} \int [v_\ell - u_\ell(\mathbf{x}, t)]^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \equiv \frac{m}{3} \langle [v_\ell - u_\ell(\mathbf{x}, t)]^2 \rangle \quad (2.41)$$

donde hemos omitido los subíndices de especie  $s$  por simplicidad, tal que su promedio da la temperatura definida en (2.39)  $T = (T_x + T_y + T_z)/3$ .

Definidas la temperatura y la presión, podemos discutir la termodinámica del sistema. En particular, un parámetro relevante es el  $\beta$  de plasma de cada especie, dado por el cociente entre presión térmica y magnética, esta última definida como  $p_M = |\mathbf{B}_0|^2/8\pi$ , tal que

$$\beta_s = \frac{8\pi n_s T_s}{|\mathbf{B}_0|^2}, \quad (2.42)$$

donde interpretamos  $n_s T_s = \text{Tr} [\mathbf{P}_s(\mathbf{x}, t)]/3$  como una presión media. Este parámetro se usa como medida de magnetización de la especie  $s$ . En general, especies con  $\beta_s \gg 1$  tendrán una dinámica dominada por fenómenos netamente termodinámicos, como las colisiones. En contraposición, el campo magnético será relevante para especies con  $\beta_s \lesssim 1$ , generando fenómenos colectivos sin necesidad de colisiones.

En principio, las colisiones necesarias para alcanzar la termalización no están consideradas directamente en las ecuaciones de Vlasov-Maxwell, por lo que su uso requiere ciertas hipótesis *ad hoc*. Dado un gas colisional, existe un *camino libre medio*  $\lambda_s \sim (\sigma_s n_s)^{-1}$  donde  $\sigma_s$  es la sección eficaz y  $n_s$  es la densidad volumétrica de partículas. Volúmenes mayores a  $\lambda_s^3$  estarán compuestos por partículas colisionando entre sí y por lo tanto en equilibrio termodinámico local. Por lo tanto, este modelo de fluido solo sería válido para la especie  $s$  en escalas espaciales  $\ell \gg \lambda_s$ . Sin embargo, en muchos plasmas este tipo de colisión frontal es sumamente improbable ( $\lambda_s \gtrsim L$ ) y la termalización se da mediante otros mecanismos. En particular, puede darse en distintas escalas para cada especie de partículas, pues cada especie tiene escalas espaciales y temporales propias. Ejemplos de estas escalas serían el giorradio  $R_c$  (2.4) y el giroperíodo  $\tau_c$  (2.2) o la frecuencia de plasma  $\omega_p$  (2.25) y la longitud de penetración  $d$  (2.26).

#### 2.2.4. Modelo híbrido

Muchos plasmas se forman por ionización de materiales habitualmente neutros: están compuesto por iones positivos y electrones negativos. Al estar los iones compuestos de protones y neutrones con masa  $m_n \approx m_p \gg m_e$  la masa de estos iones  $m_i$  también es mucho mayor a  $m_e$ , donde  $m_n \approx 939,6\text{MeV}/c^2$ ,  $m_p \approx 938,3\text{MeV}/c^2$  y  $m_e \approx 511,0\text{keV}/c^2$  son las masas del neutrón, protón y electrón, respectivamente (National Institute of Standards and Technology (NIST) 2025). En otras palabras, la inercia electrónica es despreciable frente a la iónica y los electrones tienden a reaccionar a perturbaciones externas mucho más rápido. En particular, tanto el giorradio como el giroperiodo de los electrones es mucho menor al de los protones  $\tau_{ce}/\tau_{cp} = R_{ce}/R_{cp} \propto m_e/m_p \ll 1$  y, por lo tanto, al de cualquier ion<sup>2</sup>. Algo similar ocurre con la longitud de penetración y frecuencia de plasma  $d_e/d_i = \omega_{pi}/\omega_{pe} = \sqrt{m_e/m_i} \ll 1$ .

Por lo tanto, si estamos interesados en estudiar escalas  $d_e, R_{ce} \lesssim L \lesssim d_i, R_{ci}$ , podemos tratar a los electrones como un fluido en equilibrio termodinámico local a la vez que retenemos el carácter cinético de los iones. En particular, dada la composición del viento solar, nos interesa un plasma compuesto por electrones y protones. Podemos entonces usar ecuaciones de fluido (2.36) y (2.37) para los electrones ( $s = e$ ) y la ecuación de Vlasov (2.32) para los protones ( $s = p$ ) junto con las ecuaciones de Maxwell (2.28), (2.29), (2.30) y (2.33), lo que se conoce como modelo híbrido.

Antes de seguir, notemos que existe cierta contradicción entre la aproximación casiestacionaria que lleva de (2.31) a (2.33) y la conservación de la carga.

$$0 = \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho_c}{\partial t},$$

donde usamos que  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  por (2.33). La aproximación casiestacionaria impide la variación temporal de  $\rho_c$  y la solución más simple es imponer  $\rho_c(\mathbf{x}, t) = 0$ . Esta condición es un desprendimiento de la *casineutralidad* introducida en la sección 2.2.1. Para un plasma de protones y electrones la ecuación (2.34) implica

$$n_e(\mathbf{x}, t) = n_p(\mathbf{x}, t). \quad (2.43)$$

Esta condición modifica la definición de la densidad de corriente (2.35)

$$\mathbf{j} = n_p e (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e) \quad (2.44)$$

<sup>1</sup>En el viento solar a distancia de 1AU del sol, se estima  $\lambda_s \sim 3\text{AU}$  mientras que  $d_p \sim R_{cp} \sim 150\text{km}$  y  $d_p \sim R_{ce} \sim 3\text{km}$  (Verscharen et al. 2019).

<sup>2</sup>Hemos asumido velocidades similares para ambas especies, lo cual no es necesariamente cierto en algunos contextos.

donde usamos que  $e = q_p = -q_e$  es la carga del electrón (en módulo). En particular, vemos que  $n_e \mathbf{u}_e = n_p \mathbf{u}_p - \mathbf{j}/e$  y por lo tanto la ecuación de continuidad electrónica se cumple trivialmente

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = \frac{\partial n_p}{\partial t} + \nabla \cdot (n_p \mathbf{u}_p) - \frac{1}{e} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

en consecuencia a la ecuación de continuidad (2.36) protónica ( $s = p$ ) y  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  por (2.33).

Esta serie de aproximaciones no termina aquí, pues podemos ver de (2.44) que la velocidad del flujo electrónico  $\mathbf{u}_e$  está únicamente definida dados  $\mathbf{u}_p$  y  $\mathbf{B}$ . Por lo tanto, en principio la ecuación de Euler (2.37) que dicta la evolución de  $\mathbf{u}_e$  podría entrar en conflicto con la ley de Faraday (2.30) y la ecuación de Vlasov protónica (2.32) que determinan, indirectamente, la evolución de  $\mathbf{u}_p$  y  $\mathbf{B}$ . Para evitar esto, aprovechamos que bajo la hipótesis casiestacionaria no disponemos de una ecuación de evolución para  $\mathbf{E}$  y que la ley de Gauss (2.31) perdió sentido al ser  $\rho_c \equiv 0$ . Esto nos da la libertad de despejar  $\mathbf{E}$  a partir de la ecuación de Euler (2.37) para electrones ( $s = e$ )

$$\mathbf{E} = -\frac{m_e}{e} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e \right] - \frac{1}{en_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e - \frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B}, \quad (2.45)$$

conocida como la ley de Ohm generalizada. Siguiendo el argumento inicial de inercia electrónica despreciable, es habitual anular el término  $\propto m_e/e$ , dado que mantenerlo puede requerir resolver ecuaciones elípticas para evolucionar  $\mathbf{B}$  (Andrés et al. 2014; Muñoz et al. 2018). Esta expresión requiere aún una clausura termodinámica para el tensor de presiones  $\mathbf{P}_e$ . Aquí asumiremos una presión isótropa  $\mathbf{P}_e = p_e \mathbf{1}$  con  $\mathbf{1}$  el tensor identidad y politrópica  $p_e \propto n_e^{-\gamma}$ , donde  $\gamma$  es el exponente politrópico (usualmente  $\gamma = 5/3$  para el caso adiabático).

Armados con esto, podemos llegar a un sistema de ecuaciones donde la dinámica electrónica queda completamente dictada por la dinámica de los protones y el campo magnético. El sistema de ecuaciones resulta

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m_p} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{en_e} \left[ \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p_e \right] - \frac{\mathbf{u}_p}{c} \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{en_e}, \quad (2.47)$$

$$p_e n_p^{-\gamma} = \text{const.}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left[ \left( \mathbf{u}_p - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) \times \mathbf{B} \right], \quad (2.49)$$

donde usamos que  $n_e = n_p$  y que  $n_e^{-1} \nabla p_e$  puede escribirse como el gradiente de algún funcional presión al ser  $p_e$  una función de  $n_e$ , por lo que su rotor es automáticamente nulo. A estas ecuaciones se suman (2.29) y (2.33) y las definiciones de  $n_p$  y  $\mathbf{u}_p$  según (2.34) y (2.35).

A partir de este sistema de ecuaciones podemos derivar densidades de energía asociadas a los distintos campos

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} m_p n_p \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle_p = \frac{1}{2} m_p n_p |\mathbf{u}_p|^2 + \frac{1}{2} m_p n_p \langle |\mathbf{v} - \mathbf{u}_p|^2 \rangle_p \equiv \mathcal{E}_c(\mathbf{x}, t) + \mathcal{E}_T(\mathbf{x}, t), \quad (2.50)$$

$$\mathcal{E}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{B}|^2, \quad (2.51)$$

$$\mathcal{E}_e(\mathbf{x}, t) = \frac{p_e}{\gamma - 1}, \quad (2.52)$$

donde sepáramos la energía cinética total de los protones  $\mathcal{E}_p$  en la energía cinética del flujo medio  $\mathcal{E}_c$  (o energía cinética a gran escala) y la energía de las fluctuaciones o térmica  $\mathcal{E}_T$ <sup>3</sup>. La energía magnética es  $\mathcal{E}_m$  mientras que la energía térmica electrónica es  $\mathcal{E}_e$ . Promediando estas densidades en toda la caja (lo cual denotaremos como  $\langle \bullet \rangle$ ) obtenemos ecuaciones de balance globales

$$\frac{d\langle \mathcal{E}_p \rangle}{dt} = \langle en_p \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{E} \rangle, \quad (2.53)$$

<sup>3</sup>Usando (2.39), podemos expresar  $\mathcal{E}_T = (3/2)n_p T_p$ , en completa analogía con la densidad energía interna de un gas ideal en equilibrio termodinámico.

$$\frac{d\langle \mathcal{E}_m \rangle}{dt} = -\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle e n_e \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{E} \rangle - \langle e n_p \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{E} \rangle, \quad (2.54)$$

$$\frac{d\langle \mathcal{E}_e \rangle}{dt} = -\langle p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e \rangle = \langle \mathbf{u}_e \cdot \nabla p_e \rangle, \quad (2.55)$$

para las cuales usamos que los flujos sobre la superficie del volumen se anulan. Definiendo una energía total  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e$ , sumando (2.53)-(2.55) y usando la expresión de  $\mathbf{E}$  dada por (2.47), se obtiene una conservación global de  $\mathcal{E}$ .

### 2.2.5. Método *particle-in-cell* (PIC)

El método de partícula en celda (*particle-in-cell*, PIC) consiste en expresar la función de distribución como una superposición de  $N_s$  macropartículas

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{j=1}^{N_s} w_j S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t)), \quad (2.56)$$

ubicadas en el punto  $(\mathbf{x}_j(t), \mathbf{v}_j(t))$  del espacio de fases. Consideramos que estas macropartículas representan una colección de partículas cercanas en el espacio de fases, ocupando un volumen espacial dado por la función de forma  $S$  (*shape*, en inglés). Todas las partículas de la colección tienen una misma velocidad (identificado por la función delta de Dirac  $\delta$ ) para que el paquete no se disperse. La cantidad de partículas en cada colección está determinado por su peso  $w_j$  (*weight*, en inglés).

Existen múltiples elecciones posibles para la función de forma  $S$ , pero la más habitual surge de tomar una  $\delta$  (correspondiente al caso de partícula puntual) y aplicar sucesivas convoluciones contra la *función galera*

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta^D} \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{x}\|_\infty > \Delta/2 \end{cases} \quad (2.57)$$

donde  $D$  es la dimensión del espacio,  $\Delta$  es una escala espacial característica y  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_D|\}$  es la norma infinita. Llamamos *orden de la interpolación* al número de veces que esta convolución se aplica. En el contexto de la matemática y el procesamiento gráfico, esta familia de funciones es conocida como *B-splines* (R. y Boor 1980, Capítulo 9). Dado que las funciones semilla  $\delta$  y  $\Pi$  son pares (simétricas respecto a  $\mathbf{x} = 0$ ), todas las funciones de esta familia lo serán. En el caso 2D, vemos que funciones de mayor orden son más suaves y emulan mejor la simetría esférica esperable de una partícula, lo cual también ocurrirá en 3D (ver más adelante).

Cada una de estas macropartículas debe cumplir la ecuación de Vlasov (2.32), por lo que tomando momentos obtenemos ecuaciones de Newton para cada una

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{v}_j, \quad \dot{\mathbf{v}}_j = \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E}_j + \frac{\mathbf{v}_j}{c} \times \mathbf{B}_j \right), \quad (2.58)$$

donde  $\mathbf{E}_j$  y  $\mathbf{B}_j$  son los campos efectivos (o interpolados) que sienten las partículas

$$\mathbf{E}_j = \int \mathbf{E}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) d\mathbf{x}, \quad (2.59)$$

y lo propio para  $\mathbf{B}_j$ . Estas interpolaciones equivalen a convolucionar el campo contra la función de forma  $S$  y evaluar en  $\mathbf{x}_j$ .

Es importante notar que la representación del método PIC es inherentemente Lagrangiana: cada macropartícula tiene propiedades asociadas (masa, carga, impulso, energía, por mencionar algunas) que acarrea consigo a lo largo de su movimiento. Esto es completamente independiente de cómo se representen los campos, que en principio son Eulrianos. Hablaremos en mayor detalle de esta representación cuando discutamos el método pseudoespectral en la sección 2.3.4. Por ahora, basta considerar el caso en que los campos están definidos sobre una grilla cuadrada de tamaño  $\Delta$  (idéntico al asociado a  $\Pi$ ). Consideraremos  $N$  de estas celdas, cada una determinada por una coordenada  $\mathbf{X}_n$  (usaremos temporalmente mayúsculas para distinguirlas de la posición de las macropartículas)  $n = 1, \dots, N$  y volumen  $\Delta^D$ .

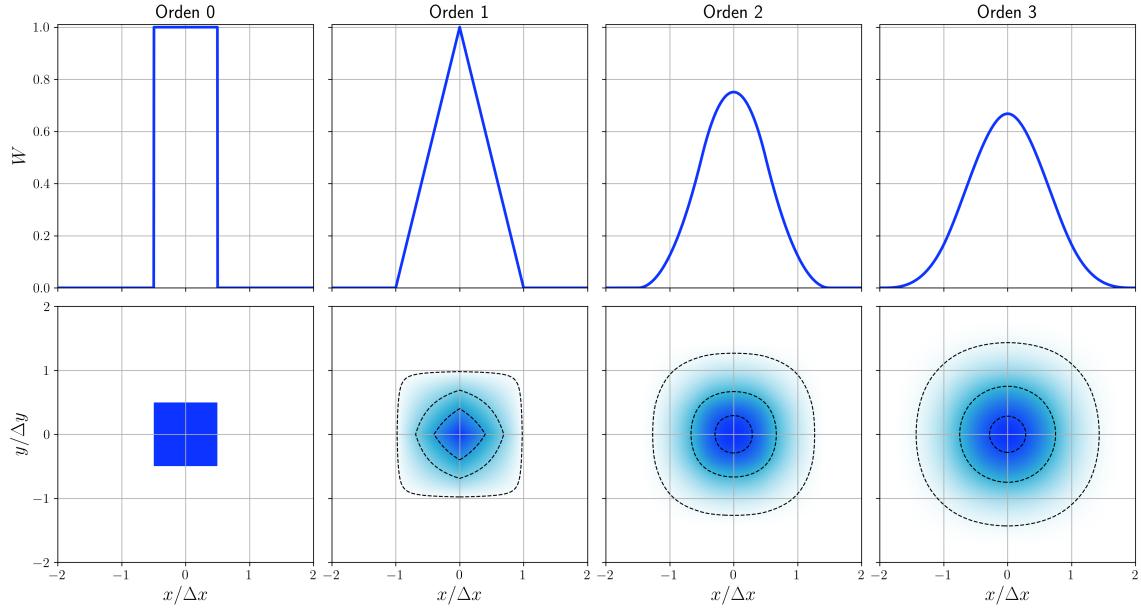


Figura 2.3: Funciones peso para los primeros 4 ordenes de aproximación, tanto en 1D (paneles superiores) como 2D (paneles inferiores). Vemos que tienden a ser más suaves y con mayor simetría esférica a medida que aumenta el orden.

Al estar la grilla discretizada, consideramos que los campos son constantes en el interior de la celda  $n$  (definida por  $\mathbf{X}_n$ ). Estos campos constantes a trozos pueden expresarse como una suma de funciones galera centradas en cada punto de grilla

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{X}_n) \Pi(\mathbf{x} - \mathbf{X}_n) \Delta, \quad (2.60)$$

donde  $G$  es un campo Euleriano arbitrario. Bajo esta definición, es posible reescribir la interpolación definida en (2.59) como

$$G_j = \sum_{n=1}^N \int G(\mathbf{X}_n) \Pi(\mathbf{x} - \mathbf{X}_n) \Delta S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) d\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{X}_n) W(\mathbf{X}_n - \mathbf{x}_j(t)) \quad (2.61)$$

donde  $W \equiv \Pi * S \Delta$  es la *función peso* (*weight function*, en inglés), obtenida de convolucionar la función de forma  $S$  con la función galera  $\Pi$ . Dada la definición de  $S$  como una secuencia de convoluciones con  $\Pi$ ,  $W$  sería simplemente la siguiente función en la familia de *B-splines*. En la figura 2.3 podemos observar las primeras funciones  $W$  de esta familia en sus versiones unidimensional y bidimensional.

Análogamente, es posible obtener equivalentes Eulerianos de las propiedades de partícula definidos sobre esta grilla mediante el *depósito*, que implica usar la definición de  $f_s$  según (2.56) para calcular los valores medios  $\langle \bullet \rangle_s$ . Si tenemos una propiedad de macropartícula  $g(\mathbf{v})$ , podemos obtener la densidad media de esta propiedad como

$$n_s \langle g(\mathbf{v}) \rangle_s = \sum_{n=1}^{N_p} w_j g(\mathbf{v}_j) S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)). \quad (2.62)$$

Por ejemplo, para  $g(\mathbf{v}) = 1$  tenemos simplemente  $n_s$ , para  $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  tenemos  $n_s \mathbf{u}_s$  y así sucesivamente. Estos campos Eulerianos, sin embargo, son continuos. Podemos obtener los valores sobre el punto de grilla  $\mathbf{X}_n$  promediando sobre la celda completa. Esto equivale a convolucionar contra la función galera, por lo que nuevamente obtenemos una expresión en términos de la función peso

$$[n_s \langle g(\mathbf{v}) \rangle_s](\mathbf{X}_n, t) = \sum_{n=1}^{N_p} w_j g(\mathbf{v}_j) W(\mathbf{X}_n - \mathbf{x}_j(t)). \quad (2.63)$$

Más detalles técnicos sobre las funciones de peso  $W$  y su efecto sobre los depósitos pueden verse en el apéndice A.

## 2.3. Magnetohidrodinámica

En la sección anterior introdujimos el modelo híbrido donde los protones son tratados como partículas (cinéticamente) y los electrones como un fluido sin masa. En esta sección, vamos considerar también a los protones como un fluido, para obtener así el modelo de único fluido conocido como magnetohidrodinámica (MHD).

### 2.3.1. Derivación

Comenzaremos tomando las ecuaciones para los dos primeros momentos de la ecuación de Vlasov para protones ( $s = p$ ): la ecuación de continuidad (2.36) y la ecuación de Euler (2.37). Por convención, multiplicaremos la ecuación (2.36) por  $m_p$  y definiremos la densidad de masa  $\rho = m_p n_p$ , teniendo en mente que los electrones no aportan. También renombraremos  $\mathbf{u}_p$  como  $\mathbf{u}$ , al notar que  $\mathbf{u}_e$  no es realmente un grado de libertad sino que está definido en términos de los demás. Con estas consideraciones, la ecuación de continuidad en MHD resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.64)$$

Para la ecuación de Euler (2.37) necesitamos utilizar la ley de Ohm generalizada (2.47) tal que

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\nabla \cdot \mathbf{P}_p + e n_e \left( \frac{1}{e n_e} \left[ \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p_e \right] - \frac{\mathbf{u}_p}{c} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{u}_p}{c} \times \mathbf{B} \right) \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\nabla \cdot (\mathbf{P}_p + \mathbf{1} p_e) + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{c} \end{aligned}$$

donde usamos que  $n_p = n_e$  por cuasineutralidad. Nuevamente, surge el problema de clausura con la presión, por lo que la asumimos isótropa  $\mathbf{P}_p = \mathbf{1} p_p$  y politrópica similarmente a la electrónica  $p_p \propto n_p^\gamma$ . Esto nos permite definir una presión total  $p = p_p + p_e \propto n_p^\gamma \propto \rho^\gamma$ , donde usamos que  $p_p \propto n_p^\gamma$  y  $p_e \propto n_e^\gamma = n_p^\gamma$ . Es habitual agregar una cierta disipación viscosa para imponer una escala mínima en el problema (discutiremos esto con mayor detalle en la sección 2.4). Con todo esto, resulta

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{c} + \mu \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right], \quad (2.65)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica.

Por las mismas razones, agregamos una resistividad  $\eta$  a la ley de Ohm (2.47)

$$\mathbf{E} = - \left[ \left( \mathbf{u} - \frac{\epsilon_H}{\rho} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{B} \right] - \frac{\epsilon_H}{\rho} \nabla p_e + \eta \mathbf{j} \quad (2.66)$$

donde  $\epsilon_H = m_p/e$  es el parámetro de Hall y es habitual tomar  $p_e = p/2$ , que equivale a asumir equilibrio térmico entre ambas especies ( $T_e = T_p$ ). Esto lleva a una ecuación de inducción

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[ \left( \mathbf{u} - \frac{\epsilon_H}{\rho} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{B} \right] + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.67)$$

y cerramos el sistema con la relación politrópica

$$p \rho^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma} \quad (2.68)$$

donde  $p_0$  y  $\rho_0$  son una presión y densidad de masa de referencia, respectivamente.

Este modelo dispone de densidades de energía similares a las del modelo híbrido definidas en (2.50), (2.51) y (2.52). Más aún, la energía de flujo medio  $\mathcal{E}_c$  (reemplazando  $m_p n_p$  por  $\rho$  y  $\mathbf{u}_p$  por  $\mathbf{u}$ ) y magnética  $\mathcal{E}_m$  son idénticas, mientras que la energía térmica y la electrónica se combinan en una única energía interna

$$\mathcal{E}_{T+e} = \frac{p}{\gamma - 1} = \frac{p_p + p_e}{\gamma - 1}. \quad (2.69)$$

Sin embargo, la existencia de términos disipativos genera correcciones en las ecuaciones de balance globales (2.53), (2.54) y (2.55), que aquí resultan

$$\frac{d\langle \mathcal{E}_c \rangle}{dt} = -\langle \mathbf{u} \cdot \nabla p \rangle + \left\langle \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} \right\rangle - \mu \langle |\omega|^2 + \frac{4}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \rangle, \quad (2.70)$$

$$\frac{d\langle \mathcal{E}_m \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} \right\rangle - \eta \langle |\mathbf{j}|^2 \rangle, \quad (2.71)$$

$$\frac{d\langle \mathcal{E}_{T+e} \rangle}{dt} = -\langle p \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \cdot \nabla p \rangle, \quad (2.72)$$

mostrando que  $\mu$  y  $\eta$  efectivamente corresponden a disipación. Al sumar estas ecuaciones (2.70)-(2.72) para obtener el balance  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{T+e}$ , vemos que estos términos disipativos persisten.

### 2.3.2. Propiedades y fenomenología

En ausencia de condiciones de contorno, el sistema de ecuaciones dado por (2.64), (2.65), (2.67) y (2.68) está caracterizado por 4 números adimensionales. Reescribimos  $\mathbf{x} = L_0 \mathbf{x}'$  y  $t = t_0 t'$  y los campos cómo  $\rho = \rho_0 \rho'$ ,  $\mathbf{u} = U_0 \mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{B}'$  y  $p = p_0 p'$  donde tomaremos como convención que las magnitudes primadas son adimensionales. En el Sistema Cégesimal de Unidades (CGS) usado en esta tesis, solo disponemos de 3 unidades fundamentales: centímetro (longitud), gramo (masa) y segundo (tiempo). Por lo tanto, podemos sin pérdida de generalidad relacionar muchas de estas magnitudes dimensionales: la convención habitual es  $U_0 = L_0/t_0$  y  $B_0 = U_0 \sqrt{4\pi \rho_0}$ . Aunque en principio podríamos deshacernos de una magnitud más, aquí la dejaremos libre al considerar que  $L_0$  viene dada por el dominio espacial de interés.

Operando con esta formulación y abandonando las primas por simplicidad, obtenemos el sistema de ecuaciones adimensionalizado

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\frac{1}{\gamma M_s^2} \nabla p + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{R_e} \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right], \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[ \left( \mathbf{u} - \frac{\tilde{\epsilon}_H}{\rho} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{B} \right] + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.74)$$

$$p = \rho^{-\gamma}, \quad (2.75)$$

donde omitimos escribir la ecuación de continuidad (2.64) ya que es idéntica. Los números adimensionales resultan el número de Mach

$$M_s = \frac{U_0}{c_s}, \quad c_s = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (2.76)$$

con  $c_s$  la velocidad del sonido, el parámetro de Hall

$$\tilde{\epsilon}_H = \frac{d_p}{L_0}, \quad d_p = \frac{m_p c}{e \sqrt{4\pi \rho_0}}, \quad (2.77)$$

y los números de Reynolds cinético

$$R_e = \frac{U_0 L_0 \rho_0}{\mu} = \frac{U_0 L_0}{\nu}, \quad (2.78)$$

con  $\nu = \mu/\rho_0$  la viscosidad cinemática y el número de Reynolds magnético

$$R_m = \frac{U_0 L_0}{\eta}. \quad (2.79)$$

El número de Mach  $M_s$  controla la compresibilidad del flujo, recuperando un fluido incompresible en el límite  $M_s \rightarrow 0$ , donde la velocidad del sonido  $c_s \rightarrow \infty$ . Esto permite corregir desbalances de presión inmediatamente, con variaciones infinitesimales de densidad. Finalmente, el parámetro de

Hall adimensional controla la separación entre la escala integral  $L_0$  y la longitud inercial protónica  $d_p$ , a partir de la cual la dinámica de los protones adquiere mayor relevancia.

Ambos números de Reynolds controlan la intensidad de los términos no lineales respecto a los lineales. El límite  $R_e, R_m \rightarrow \infty$  resulta no disipativo ( $\mu, \eta \rightarrow 0$ ) y totalmente dominado por la dinámica no lineal. Cabe remarcar, sin embargo, que estos números de Reynolds están asociados a escalas características y en un mismo flujo podrían tomar diferentes valores (y, por consiguiente, distintos regímenes) si coexisten diferentes escalas. Normalmente, a medida que los números de Reynolds incrementan, la dinámica se vuelve más caótica y compleja, desarrollando turbulencia más intensa, como discutiremos en la sección 2.4. Allí veremos también que estos números controlan la separación entre la escala integral  $L_0$  y la escala de disipación  $l_d$ . Es clave notar que en cualquier flujo real esta escala es finita, por lo que  $R_e, R_m \rightarrow \infty$  es solo una idealización.

En contraposición, el límite  $R_e, R_m \rightarrow 0$  corresponde a un sistema laminar dominado por la viscosidad y la resistividad. Considerando el caso  $\tilde{\epsilon}_H \rightarrow 0$ , obtenemos el límite de MHD ideal, donde valen los Teoremas de Alfvén (Davidson 2001, Capítulo 5). El primero de estos teoremas corresponde al congelamiento de las líneas magnéticas.

**Teorema de Alfvén 1** Los elementos de fluido sobre una línea de campo magnético a un dado tiempo continúan estandolando para todo tiempo posterior.

**Teorema de Alfvén 2** El flujo magnético a través de cualquier curva material desplazándose con el fluido se conserva.

Así, las líneas de campo magnético están aferradas al flujo, siendo advectadas por el mismo como si fuesen elementos materiales. Decimos que las líneas de campo están “congeladas” en el flujo. En particular, esto fija la topología de las líneas, evitando que estas se crucen o cambien de configuración. El segundo teorema ataña a la expansión y compresión de tubos de flujo magnético, fenómeno muy relevante en la dinámica de la corona solar. En principio, estos teoremas no requieren  $R_e \rightarrow \infty$ , sino basta que  $R_m \rightarrow \infty$ .

Aún en el límite de  $R_m \gg 1$  (baja resistividad), pueden existir regiones donde el término  $\nabla^2 \mathbf{B}$  es tan grande que compensa el bajo valor de la resistividad  $\eta$ . En estas regiones el congelamiento se viola y las líneas de campo magnético comienzan a difundir, libres de cruzarse y reconectarse. Este tipo de *reconexión magnética* está muy presente en regiones donde existen fuertes gradientes perpendiculares a  $\mathbf{j} \propto \nabla \times \mathbf{B}$ , conocidas como *hojas de corriente*. Esto se debe a que son estructuras finas y casi bidimensionales sobre las cuales circula una alta  $\mathbf{j}$ , normalmente alineadas al campo magnético local. En estas hojas de corriente, la tasa de disipación de energía magnética  $\eta |\mathbf{j}|^2$  se maximiza y surgen fuertes campos eléctricos producto del término resistivo de (2.66), que generan haces de partículas energéticas.

### 2.3.3. Ondas magnetohidrodinámicas

Es posible estudiar el sistema de ecuaciones (2.64)-(2.68) analizando las soluciones al problema lineal. Esto implica tomar pequeñas perturbaciones a un estado de equilibrio uniforme dado por  $\rho = \rho_0$ ,  $\mathbf{u} = 0^4$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ , que son soluciones triviales. Planteamos entonces pequeñas desviaciones respecto a este equilibrio  $\rho = \rho_0(1 + r)$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$  con  $r \ll 1$  y  $|\mathbf{b}| \ll |\mathbf{B}_0|$ . A la hora de estudiar estas soluciones, es habitual despreciar los términos disipativos, equivalente a tomar  $\mu = 0 = \eta$ , pues solo suman un decaimiento exponencial a la dinámica ondulatoria. Si nos quedamos a primer orden en estos campos  $r$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{b}$ , la ecuación de continuidad resulta

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.80)$$

Linealizando la relación politrópica (2.68) obtenemos  $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma \approx p_0(1 + \gamma r)$ . Combinando esto con el hecho de que  $(4\pi/c)\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{b}$  podemos reescribir (2.65) como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \nabla r + \frac{(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0}{4\pi \rho_0}, \quad (2.81)$$

<sup>4</sup>Considerar un  $\mathbf{U}_0$  uniforme es irrelevante, pues está a una transformación de Galileo del sistema en reposo.

donde aparece naturalmente la velocidad del sonido  $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ . Finalmente, la ecuación de inducción (2.67) resulta

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times \left[ \left( \mathbf{u} - \frac{\epsilon_H c}{4\pi\rho_0} \nabla \times \mathbf{b} \right) \times \mathbf{B}_0 \right]. \quad (2.82)$$

Es posible encontrar soluciones oscilatorias a este sistema de ecuaciones mediante la transformada de Fourier. La idea es proponer soluciones de la forma  $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)\}$  donde  $\psi \in \{r, u_x, u_y, u_z, b_x, b_y, b_z\}$  y  $\psi_0 \in \mathbb{C}$ , tal que el operador gradiente se vuelva  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$  y la derivada temporal  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ . Antes de introducir estas soluciones en las ecuaciones (2.80)-(2.82), pasaremos a variables afluénicas definiendo  $\mathbf{v} = \mathbf{b}/\sqrt{4\pi\rho_0}$  y  $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$

$$\omega r_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.83)$$

$$\omega \mathbf{u}_0 = c_s^2 \mathbf{k} r_0 - (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_0) \times \mathbf{v}_A, \quad (2.84)$$

$$\omega \mathbf{v}_0 = -\mathbf{k} \times [(\mathbf{u}_0 - id_p \mathbf{k} \times \mathbf{v}_0) \times \mathbf{v}_A] \quad (2.85)$$

donde  $d_p = cm_p/\sqrt{4\pi\rho_0 e^2} = \epsilon_H c/\sqrt{4\pi\rho_0}$  es la longitud inercial protónica (también llamada escala de Hall en este contexto). Este sistema de ecuaciones puede pensarse como un problema lineal en  $\mathcal{Y} = (r_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)^T \in \mathbb{C}^7$ . En particular, podemos plantearlo como un problema de autovalores de la forma  $\mathbf{A}(\mathbf{k})\mathcal{Y} = \omega(\mathbf{k})\mathcal{Y}$  con  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{7 \times 7}$ . Por simplicidad, en este trabajo nos limitaremos al caso  $d_p = 0$  (hablaremos un poco del caso  $d_p > 0$  más adelante). En este límite, disponemos de 3 modos normales de oscilación, ignorando un modo espectral de  $\omega = 0$  que viola la condición  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ . El primer modo son las conocidas ondas de Alfvén (Alfvén 1942), que corresponden a modos incompresibles ( $r_0 = 0$ ) del plasma

$$\omega_A^2 = (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k})^2 = |\mathbf{v}_A|^2 k_{\parallel}^2, \quad (2.86)$$

donde definimos la componente de  $\mathbf{k}$  paralela al campo guía  $k_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0$ . Luego, tenemos dos modos magnetosónicos compresibles, uno rápido  $\omega_F$  (*fast*, en inglés) y otro lento  $\omega_S$  (*slow*, en inglés)

$$\omega_{F,S}^2 = \frac{c_s^2 + |\mathbf{v}_A|^2}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{2|\mathbf{v}_A|c_s}{c_s^2 + |\mathbf{v}_A|^2} \right)^2 \left( \frac{k_{\parallel}}{|\mathbf{k}|} \right)^2} \right] |\mathbf{k}|^2. \quad (2.87)$$

Es inmediato notar que todos estos modos son dispersivos y su velocidad de fase depende fuertemente del ángulo entre  $\mathbf{k}$  y el campo guía  $\mathbf{B}_0$ . En particular, las ondas magnetosónicas rápidas pueden alcanzar velocidades de fase  $\sqrt{c_s^2 + |\mathbf{v}_A|^2} \geq c_s, |\mathbf{v}_A|$ , por lo que es la máxima velocidad posible de cualquiera de estas ondas.

Para  $d_p$  finito surgen ondas de radio silbido (o *whistler*, en inglés), donde la frecuencia escala como  $\omega \sim |\mathbf{v}_A|d_p k^2$ . Veamos esto para el caso incompresible ( $r_0 = 0$ ), donde obtenemos dos modos

$$|\omega_{\pm}| = \frac{|\mathbf{v}_A|d_p k_{\parallel} |\mathbf{k}|}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{d_p^2 |\mathbf{k}|^2}} \pm 1 \right). \quad (2.88)$$

Vemos entonces que efectivamente en el límite  $d_p |\mathbf{k}| \gg 1$  tenemos  $|\omega_{\pm}| \propto |\mathbf{v}_A|d_p k_{\parallel} |\mathbf{k}| \propto |\mathbf{k}|^2$ , ondas cuya velocidad de fase crece como  $\sim |\mathbf{k}|$ . Estos *whistlers* son relevantes para  $|\mathbf{k}|d_p \gtrsim 1$  y tienen una dinámica muy rápida, que puede no ser trivial de resolver numéricamente (ver sección 2.3.4, a continuación).

### 2.3.4. Método pseudo-espectral

En el contexto de esta tesis, estaremos interesados en plasmas no confinados que llenan todo el espacio  $\mathbb{R}^d$ . Esta elección tiene como objetivo poder estudiar la dinámica turbulenta en su estado más puro, evitando efectos introducidos por condiciones de contorno (Fontana 2022). En particular, consideraremos un sistema  $2\pi$ -periódico en todas direcciones, tal que cualquier campo  $g(\mathbf{x}, t)$  cumple

$$g(\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{m}, t) = g(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.89)$$

Por lo tanto, basta estudiar la dinámica en un cubo  $d$ -dimensional de lado  $2\pi$  que matemáticamente podemos describir cómo  $\mathcal{B} = [0, 2\pi]^d$ . Esta elección es sin pérdida de generalidad, pues es posible pasar a recintos no cúbicos mediante un reescalamiento de las distintas componentes de  $\mathbf{x}$ . Un campo  $g$  que cumple (2.89) puede ser escrito en serie de Fourier (Folland 2009, Capítulo 2)

$$g(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.90)$$

Además, este campo  $g$  debe ser de cuadrado integrable, que equivale a tener norma  $L^2$  finita

$$\|g\| = \left( \int_{\mathcal{B}} |g(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad (2.91)$$

donde omitimos la dependencia temporal por simplicidad. Decimos entonces que  $g$  pertenece al conjunto  $L^2 \mathcal{B}$ , cuyo producto interno asociado es

$$\langle g | h \rangle = \int_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}) h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2\pi \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_{\mathbf{k}} \hat{h}_{\mathbf{k}}^*, \quad (2.92)$$

donde el asterisco  $*$  denota el conjugado complejo, tal que  $\|g\|^2 = \langle g | g \rangle$ .

Por su parte, los coeficientes  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  pueden obtenerse tomando producto interno con los elementos de la base Fourier

$$\hat{g}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \langle g | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (2.93)$$

En particular, vemos rápidamente que para  $g \in \mathbb{R}$  debe ser  $\hat{g}_{\mathbf{k}}^* = \hat{g}_{-\mathbf{k}}$  (condición de hermiticidad). Para una función  $g \in C^m$  (i.e., tiene  $m$  derivadas continuas), estos coeficientes decaen polinómicamente  $\hat{g}_{\mathbf{k}} = \mathcal{O}(|\mathbf{k}|^{-(m+1)})$ . Si la función  $g \in C^\infty$ , este decaimiento es exponencial, propiedad conocida como *convergencia espectral*. Otras bases además de la de Fourier presentan esta propiedad, como la de Hermite y la de Chebyshev (Canuto et al. 1988, Capítulo 2). En general, cualquier familia de autofunciones de un problema de Sturm-Liouville con ciertas condiciones de contorno formará una base con convergencia exponencial bajo alguna norma. La principal ventaja de la base de Fourier es su representación del operador gradiente

$$(\widehat{\nabla g})_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k} \hat{g}_{\mathbf{k}} \quad (2.94)$$

por lo que los operadores divergencia y rotor se vuelven simplemente  $\mathbf{k} \cdot$  y  $\mathbf{k} \times$ , como mostramos en la sección anterior. Por lo tanto, dados los coeficientes  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$ , es sencillo calcular derivadas espaciales de la función  $g$ .

Sin embargo, aunque estos coeficientes  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  sean discretos, siguen siendo infinitos. Cómo todo método numérico está limitado a una cantidad finita de información, la cantidad de modos computable debe ser finita también. Análogamente, la cantidad de puntos  $\mathbf{x}$  sobre los que puede computarse  $g$  también es finita. Con esto en mente, definimos el conjunto de funciones con  $N$  modos en cada dirección  $S_N = \{G \in L^2 \mathcal{B} \mid \widehat{G}_{\mathbf{k}} = 0 \forall \mathbf{k} \notin \mathbb{Z}_N^d\}$  donde  $\mathbb{Z}_N = \{-N/2, \dots, 0, \dots, N/2 - 1\}$  y asumimos  $N$  par por simplicidad<sup>5</sup>. La generalización al caso en que cada dirección tiene una cantidad distinta de modos es trivial y aquí solo complicaría la notación. Buscamos entonces una aproximación  $g_N \in S_N$  tal que

$$g_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_N^d} \tilde{g}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.95)$$

donde es importante notar que, en principio,  $\tilde{g}_{\mathbf{k}} \neq \hat{g}_{\mathbf{k}}$ . Lo que realmente buscamos es que  $g_N(\mathbf{x}_j) = g(\mathbf{x}_j)$  sobre los puntos  $\mathbf{x}_j = \pi + \mathbf{j} \Delta x$  con  $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}_N^d$  y  $\Delta x = 2\pi/N$  la resolución. La elección de estos *puntos de colocación*  $\mathbf{x}_j$  no es arbitraria, sino que son aquellos sobre los cuales puede construirse una cuadratura gaussiana que nos asegura (Canuto et al. 1988, Capítulo 3)

$$\tilde{g}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \langle g_N | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{N^d} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}_N^d} g(\mathbf{x}_j) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j}. \quad (2.96)$$

<sup>5</sup>Si no lo fuese, reemplazamos los límites inferior y superior por  $[N/2]$  y  $[N/2] - 1$ , respectivamente.

donde usamos que  $g_N(\mathbf{x}_j) = g(\mathbf{x}_j)$ . En principio, este cálculo exigiría  $\mathcal{O}(N^{2d})$  operaciones, pues tenemos  $N^d$  posibles  $\mathbf{k}$  y cada suma en (2.96) tiene  $N^d$  términos. Sin embargo, existen algoritmos rápidos para computar la transformada de Fourier que aprovechan la periodicidad de la función  $e^{i\phi}$  para minimizar el número de operaciones (Cooley y Tukey 1965). Estos algoritmos de tipo *dividir y conquistar* (Cormen et al. 2009, Capítulo 4) son colectivamente conocidos como *transformadas rápidas de Fourier* (FFTs, por sus siglas en inglés) y permiten computar todos los coeficientes en (2.96) en  $\mathcal{O}(N^d \log N)$  operaciones (Cormen et al. 2009, Capítulo 30). Los mismos algoritmos pueden usarse para computar la función  $g$  sobre los puntos de colocación  $\mathbf{x}_j$  mediante (2.95).

Estas FFTs son fundamentales a la hora de computar los términos no lineales como los que aparecen en (2.64), (2.65) y (2.67). Normalmente, calcular el producto de dos funciones  $g, h \in S_N$  tiene un costo  $\mathcal{O}(N^d)$  si conocemos sus valores en los puntos de colocación  $(gh)(\mathbf{x}_j) = g(\mathbf{x}_j)h(\mathbf{x}_j)$ . La FFT nos permite recuperar  $g(\mathbf{x}_j)$  y  $h(\mathbf{x}_j)$  en  $\mathcal{O}(N^d \log N)$ , realizar el producto en  $\mathcal{O}(N^d)$  y, si es necesario, obtener los  $(\widehat{gh})_{\mathbf{k}}$  en  $\mathcal{O}(N^d \log N)$ . El cálculo de los términos no lineales trae acarreado consigo el problema del solapamiento, que describimos en mayor detalle en el apéndice B. Por otro lado, las derivadas espaciales, como mostramos en (2.94), pueden computarse también en  $\mathcal{O}(N^d \log N)$  haciendo este proceso de transformar y antitransformar Fourier. Esto significa que las derivadas temporales de (2.64), (2.65) y (2.67) pueden computarse paso a paso en  $\mathcal{O}(dN^d \log N)$ . En particular, podemos agrupar los valores de los campos en  $\mathcal{Y}_j = (\rho(\mathbf{x}_j, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t), \mathbf{b}(\mathbf{x}_j, t))$  y reescribir el sistema de ecuaciones como

$$\dot{\mathcal{Y}} = \mathcal{L}(\mathcal{Y}, t) \quad (2.97)$$

donde  $\mathcal{Y}$  es un vector cuyas entradas son  $\mathcal{Y}_j$  y  $\mathcal{L}$  es el operador espacial, cuyo costo computacional es  $\mathcal{O}(N^d \log N)$ . Este enfoque en el cual sepáramos el operador espacial  $\mathcal{L}$  de la derivada temporal es conocido como *método de líneas*. Luego, basta elegir algún esquema para realizar la evolución temporal de  $\mathcal{Y}(t)$ . En esta tesis, esta evolución será la dada por un método de Runge-Kutta de orden 2 (Iserles 2008, Capítulo 3) dado por

$$\begin{cases} \mathcal{K}_1 = \mathcal{L}(\mathcal{Y}(t_n), t_n) \Delta t / 2 \\ \mathcal{K}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{Y}(t_n) + \mathcal{K}_1, t_{n+1/2}) \Delta t \\ \mathcal{Y}(t_{n+1}) = \mathcal{Y}(t_n) + \mathcal{K}_2 \end{cases} \quad (2.98)$$

donde  $\Delta t$  es el paso temporal y  $t_n = n\Delta t$  son los tiempos discretizados. Intuitivamente, este esquema busca dar una estimación razonable para  $\mathcal{L}$  a tiempo  $t_{n+1/2}$ , tal que la evolución final sea centrada (hablaremos más en detalle de esto en la sección 4.1.1).

Este esquema de evolución temporal es explícito, lo cual simplifica su implementación y reduce el costo computacional pero impone ciertas limitaciones sobre el valor del paso temporal  $\Delta t$ . Puntualmente, tenemos la condición de Courant, Friedrichs y Levy (CFL; Courant et al. 1928) que para una correcta resolución de los términos no lineales impone

$$\frac{U \Delta t}{\Delta x} \leq C_1 \quad (2.99)$$

donde  $C_1$  es una constante de orden 1 que depende del esquema temporal en cuestión y  $U = \max\{|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|, c_s, |\mathbf{v}_A|\}$  (usando unidades alfvénicas para el campo magnético) es la máxima velocidad a la que una perturbación puede advecirse. Incluyendo el término de Hall ( $d_p \neq 0$ ) aparece también la velocidad de los *whistlers*, que suele ser dominante. Una condición similar se da para los términos disipativos o difusivos (aquellos que involucran  $\nabla^2$ )

$$\frac{\xi \Delta t}{\Delta x^2} \leq C_2 \quad (2.100)$$

donde  $C_2$  es otra constante de orden 1 y  $\xi = \max\{v, \eta\}$  es la máxima tasa de difusión.

En esta tesis, estamos interesados en casos de turbulencia fuerte donde  $\xi \rightarrow 0$  y, por lo tanto, la condición más restrictiva suele ser (2.99). En la práctica,  $U$  varía en el tiempo a medida que el sistema evoluciona, por lo que elegir el  $\Delta t$  correcto es una cuestión de prueba y error. Afortunadamente, cualquier violación de esta condición implica que el sistema es inestable y las soluciones divergen en una cantidad finita de pasos. Por lo tanto, para identificar un  $\Delta t$  apropiado basta asegurarse que la simulación no diverja. En la práctica, la condición (2.99) es más una regla para saber cómo reescalar el paso temporal a medida que cambia el número de modos  $N$  (i.e.,  $\Delta t \sim \Delta x \sim N^{-1}$ ) o alguna velocidad característica como  $c_s$  o  $|\mathbf{v}_A|$  (i.e.,  $\Delta t \sim U^{-1}$ ).

## 2.4. Turbulencia

En la actualidad, carecemos de una teoría unificada sobre la turbulencia. Existen resultados para múltiples sistemas puntuales, en muchos casos de naturaleza estadística y dependientes en hipótesis físicas basadas en evidencia empírica. En esta sección nos concentraremos en algunos de estos aspectos puntuales pertinentes a turbulencia de plasmas.

### 2.4.1. Cascada de energía

Por simplicidad, comenzaremos considerando flujos neutros e incompresibles, pues contienen la mínima complejidad necesaria para estudiar los fenómenos turbulentos que serán de interés en esta tesis. Esto equivale a tomar el modelo MHD de la sección 2.3 en el límite  $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_0$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.102)$$

donde  $\nu = \mu/\rho_0$  es el coeficiente de viscosidad cinemática,  $P = p/\rho_0$  es una redefinición de la presión y  $\mathbf{f}$  es un forzado mecánico que inyecta energía cinética en el sistema para contrarrestar la disipación. En este límite, la relación politrópica (2.68) carece de sentido, por lo que  $P$  se obtiene tomando divergencia en la ecuación (2.102)

$$\nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla^2 P, \quad (2.103)$$

donde usamos que el operador divergencia  $\nabla \cdot$  commuta con los operadores  $\partial_t$  y  $\nabla^2$  junto con la ecuación (2.101). También asumimos que el forzado es incompresible ( $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ ) pues siempre podemos expresarlo mediante una descomposición de Helmholtz  $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \Phi$  y absorber el potencial  $\Phi$  dentro de la presión  $P$ . La ecuación (2.103) es un problema de Laplace, que dado un conjunto de condiciones de contorno tiene solución única.

Siguiendo el espíritu del método pseudo-espectral de la sección 2.3.4, consideraremos estas condiciones de contorno como periódicas, por lo que escribiremos ambos campos en base Fourier. En esta base, la presión y su gradiente son simplemente

$$\widehat{P}_{\mathbf{k}} = \frac{i\mathbf{k} \cdot \widehat{[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]}}{|\mathbf{k}|^2} \implies \widehat{(-\nabla P)}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \widehat{[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]}$$

donde identificamos el producto entre vectores  $\mathbf{k}\mathbf{k}$  como un tensor simétrico de rango 2 (también llamado producto externo) con entradas  $(\mathbf{k}\mathbf{k})_{ij} = k_i k_j$ .

Para computar la transformada del término cuadrático, usamos el Teorema de la Convolución (ver detalles en el apéndice B), que dicta que la transformada del producto es la convolución de las transformadas. Juntando todo esto sobre la ecuación (2.102) y transformando Fourier resulta

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}\right) \cdot \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} i(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}, \quad (2.104)$$

donde usamos que  $(\widehat{\nabla \mathbf{u}})_{\mathbf{q}} = i\mathbf{q}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}}$  y el Teorema de la Convolución (B.2). La ecuación (2.104) muestra una propiedad interesante de todas las ecuaciones no lineales: la interacción entre distintos modos. Puesto de otra forma, aún si a un dado tiempo tenemos  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0$  para algún  $\mathbf{k}$ , basta que existan dos modos no nulos  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}} \neq 0$  y  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} \neq 0$  con  $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}$  para que  $\partial_t \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \neq 0$ . Esto implica que el sistema puede desarrollar modos que no existían originalmente, aún sin estar forzados externamente. Esta propiedad del sistema de desarrollar escalas propias es una condición necesaria para la turbulencia, pero no es en principio obvio si estas escalas serán mayores o menores a las forzadas u originalmente presentes. En la imagen original de Richardson (L. F. Richardson 2007), las escalas desarrolladas son siempre menores, las estructuras grandes partiendose en estructuras más y más chicas, en lo que se conoce como una *cascada directa de energía*. Si, por el contrario, las estructuras chicas se agrupasen para formar estructuras más grandes, hablamos de una *cascada inversa de energía*.

Formalicemos esto siguiendo el enfoque de Obukhov 1941. En este límite de hidrodinámica incompresible, tenemos  $\mathcal{E}_m = 0 = \mathcal{E}_{T+e}$  y  $\mathcal{E}_c = \rho_0 \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle / 2$  y la ecuación de balance global se convierte en

$$\frac{d\langle |\mathbf{u}|^2 / 2 \rangle}{dt} = -\nu \langle |\omega|^2 \rangle + \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle. \quad (2.105)$$

En particular, podemos reescribir este valor medio como la norma de  $\mathbf{u} \in L^2 \mathcal{B}$ , tal que

$$\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle \propto \sum_{\mathbf{k}} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2$$

donde usamos la expresión (2.92) y generalizamos el producto interno para campos vectoriales  $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle = \langle u_x | u_x \rangle + \langle u_y | u_y \rangle + \langle u_z | u_z \rangle$ . Por lo tanto, podemos interpretar  $|\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2 / 2$  como una medida de la cantidad de energía cinética en el modo  $\mathbf{k}$ . Multiplicando (2.104) por  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^* = \hat{\mathbf{u}}_{-\mathbf{k}}$ , encontramos una ecuación de evolución para esta energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2}{2} \right) = -\hat{\mathbf{u}}_{-\mathbf{k}} \cdot \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \right) \cdot \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} i(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} - \nu |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2 + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{-\mathbf{k}} \quad (2.106)$$

Podemos anular el término que contiene el tensor  $\mathbf{k}\mathbf{k}$  notando que la condición de incompresibilidad (2.101) en espacio Fourier es  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0$  y, por lo tanto,  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{-\mathbf{k}} = (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}})^* = 0$ . El último paso consiste en tomar (2.106) y sumar sobre todos los modos  $\mathbf{k}$  con  $|\mathbf{k}| \leq \kappa$ . Esto es similar, aunque no idéntico, a proyectar los campos sobre  $S_N$  como hicimos en la sección 2.3.4<sup>6</sup>. Obtenemos entonces

$$\frac{\partial \Xi_{\kappa}}{\partial t} = -\Pi_{\kappa} - \nu \Omega_{\kappa} + \mathcal{F}_{\kappa} \quad (2.107)$$

donde definimos la energía cinética

$$\Xi_{\kappa} = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}| \leq \kappa} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2.108)$$

y la enstrofía

$$\Omega_{\kappa} = \sum_{|\mathbf{k}| \leq \kappa} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2.109)$$

almacenada en escalas  $\gtrsim \kappa^{-1}$ . Tenemos además la tasa de inyección de energía en escalas  $\gtrsim \kappa^{-1}$

$$\mathcal{F}_{\kappa} = \sum_{|\mathbf{k}| \leq \kappa} \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{-\mathbf{k}}, \quad (2.110)$$

y flujo de energía a través del cascarón  $|\mathbf{k}| = \kappa$

$$\Pi_{\kappa} = \sum_{|\mathbf{k}| \leq \kappa} \sum_{\mathbf{q}} i(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}) (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{-\mathbf{k}}). \quad (2.111)$$

Decimos que  $\Pi_{\kappa}$  es un flujo porque se anula cuando  $\kappa \rightarrow \infty$ , lo cual indica que no tiene efectos globales sobre la energía, sino que solo la redistribuye entre las distintas escalas. Este es el término que asociamos a la cascada de energía a través de la escala  $\kappa$ .

## 2.4.2. Espectro de Kolmogorov

La ecuación (2.107) nos dice que, en estado estacionario ( $\partial_t \Xi_{\kappa} = 0$ ), la cascada de energía debe balancearse con la inyección y la disipación. Normalmente, el forzado mecánico se encuentra restringido a una rango de escalas  $\gtrsim \ell_I$ , tal que  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}} = 0$  si  $|\mathbf{k}| \geq \kappa_I$  con  $\kappa_I \sim \ell_I^{-1}$  y por lo tanto  $\mathcal{F}_{\kappa} = \mathcal{F}_{\kappa_I}$  para  $\kappa \geq \kappa_I$ . Definimos este valor límite como la tasa de inyección de energía  $\varepsilon = \mathcal{F}_{\kappa_I} = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle$ , que sabemos por (2.106) debe coincidir con la tasa de disipación  $\nu \langle |\omega|^2 \rangle = \nu \Omega_{\kappa \rightarrow \infty}$ .

Por otro lado, el término disipativo es

$$\nu \Omega_{\kappa} = \nu \sum_{|\mathbf{k}| \leq \kappa} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2 \leq \nu \kappa^2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq \kappa} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2 = 2\nu \kappa^2 \Xi_{\kappa},$$

<sup>6</sup>En espacio Fourier, la condición  $|\mathbf{k}| \leq \kappa$  genera una esfera, mientras que los modos  $\mathbf{k}$  asociados a  $S_N$  forman un cubo.

lo cual nos da una intuición de que este término debe volverse más importante en escalas más chicas. En una reformulación de las hipótesis de Kolmogorov 1941, podemos considerar que existe un  $\kappa_d$  a partir del cual  $\nu\Omega_\kappa$  se vuelve relevante o incluso dominante. Para  $\kappa < \kappa_d$ , podemos despreciarlo ( $\nu\Omega_\kappa \approx 0$ ). En el límite  $R_e \gg 1$  ( $\nu \rightarrow 0$ ), esperamos que  $\kappa_I < \kappa_d$ : la energía se inyecta en escalas más grandes y se disipa en las pequeñas. Existe un rango  $\kappa_I < \kappa < \kappa_d$  donde debe cumplirse  $\Pi_\kappa \approx \mathcal{F}_\kappa = \varepsilon$  y, por lo tanto, el flujo de energía es constante.

En este rango  $\kappa_I < \kappa < \kappa_d$  el único parámetro relevante es la tasa de inyección  $\varepsilon$ . Asumiendo además isotropía, esperamos que la energía  $|\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2$  dependa solamente de  $|\mathbf{k}| = \kappa$ . Mediante análisis dimensional, notando que  $[\varepsilon] = L^2 T^{-3}$ ,  $[\kappa] = L^{-1}$  y  $[\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^2] = L^2 T^{-2}$ , debe ser

$$|\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2 \approx C(\varepsilon/\kappa)^{2/3}, \quad (2.112)$$

donde  $C$  es alguna constante numérica universal. De forma similar, definiendo el espectro de energía  $E(k)$  tal que  $\int_0^\kappa E(k) dk = \mathcal{E}_c$ , podemos estimarlo cómo

$$E(\kappa) \sim \frac{|\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2}{\kappa} \sim \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (2.113)$$

conocido como el espectro de Kolmogorov. En principio, este espectro es solo válido para casos de turbulencia isotropa y homogénea, pero su utilidad muchas veces se extiende más allá.

Finalmente, podemos utilizar lo construido para estimar  $\kappa_d$ . En esta escala, esperamos que la disipación compense la inyección de energía  $\varepsilon$ , tal que  $\nu\Omega_{\kappa_d} \approx \varepsilon$ . Dado el resultado de la ecuación (2.113) y la definición de  $\Omega_\kappa$  dada por (2.109), vemos que el sumando escala como  $\sim |\mathbf{k}|^{4/3}$ , por lo que los últimos términos serán dominantes. Podemos entonces estimar  $\Omega_{\kappa_d} \approx C\nu\varepsilon^{2/3}\kappa_d^{4/3}$  y despejar

$$\kappa_d \sim \left( \frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/4}. \quad (2.114)$$

Por debajo de esta escala  $l_d \sim \kappa_d^{-1}$ , los efectos disipativos serán dominantes y el sistema se vuelve lineal, con un decaimiento exponencial de la energía. Por lo tanto, a todo fin práctico, basta con resolver los modos con  $|\mathbf{k}| \lesssim \kappa_d$  para representar apropiadamente la dinámica del sistema. Cuando esta condición no se cumple, no existe una escala donde pueda disiparse toda la energía que trae la cascada y por lo tanto esta empieza a acumularse en los números de onda con mayor  $|\mathbf{k}|$ . Esta acumulación de energía puede inducir fluctuaciones de alta frecuencia en los campos que violen la condición CFL (2.99), arruinando la simulación.

### 2.4.3. Turbulencia en plasmas

La turbulencia en fluidos cargados tiene algunas diferencias respecto al caso neutro. Principalmente, la existencia de un campo magnético guía introduce anisotropía de gran escala, alargando las estructuras a lo largo de la dirección de este campo. Además, el agregado de componentes electromagnéticos introduce conservaciones ideales adicionales, no solo energías sino también invariantes helicoidales (Davidson 2001, Capítulo 9). Consideremos el modelo MHD de la sección 2.3, ignorando el término de Hall ( $\epsilon_H = 0$ ) por simplicidad, donde surge cómo nuevo invariante la helicidad magnética

$$H_m = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle, \quad (2.115)$$

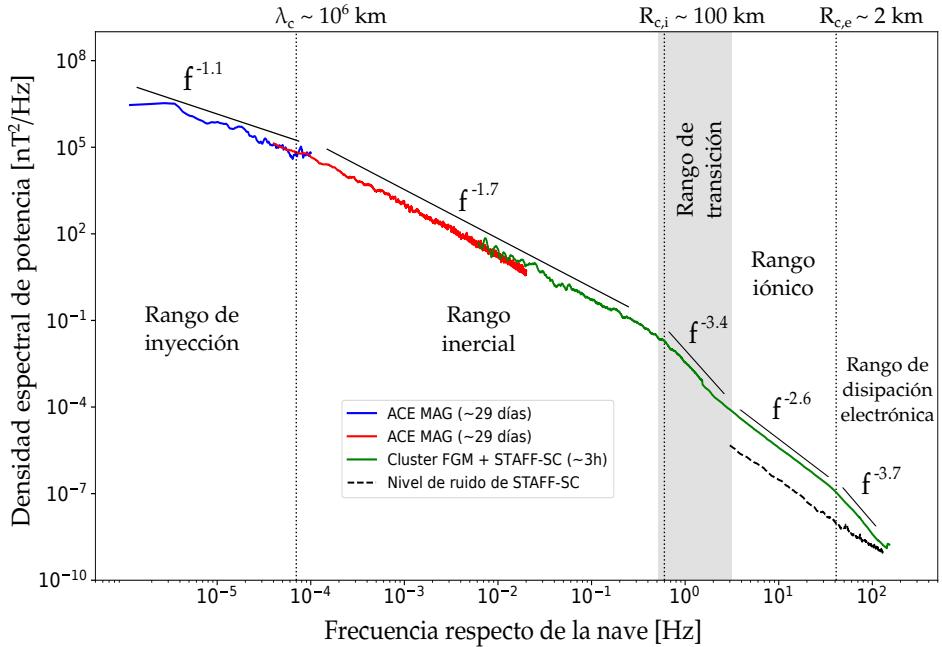
donde  $\mathbf{A}$  es el potencial vector  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Además, si consideramos incompresibilidad, se suma la helicidad cruzada

$$H_c = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \rangle. \quad (2.116)$$

Estas restricciones adicionales introducen distinta fenomenología a la turbulencia.

La principal propiedad del campo magnético guía  $\mathbf{B}_0 = |\mathbf{B}_0| \hat{\mathbf{z}}$  es su tendencia a bidimensionalizar la dinámica. Siguiendo el argumento de Kraichnan y D. Montgomery 1980, empezamos notando que un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_0$  no afecta el movimiento enteramente paralelo o enteramente perpendicular. Esto se debe a que en el caso ideal ( $\nu = 0 = \eta$ ) la ecuación de inducción (2.67) es simplemente

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}),$$



**Figura 2.4:** Espectro de energía magnética del viento solar obtenidas por las misiones espaciales ACE y Cluster, mostrando una cascada de energía a lo largo de casi 8 ordenes de magnitud que resume la discusión de esta sección. Adaptada de Sahraoui et al. 2020.

donde descompusimos  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ . Si tenemos inicialmente  $\mathbf{b} = 0$ , se anulará la fuerza de Lorentz sobre el fluido  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  pues  $\mathbf{j} \propto \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{b} = 0$  y la única fuente de  $\mathbf{b}$  será  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)$ . Vemos entonces que si inicialmente tenemos  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{B}_0$ , el campo magnético se mantendrá constante y no habrá fuerza magnética.

Por su parte, un movimiento enteramente perpendicular  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$  tampoco tendrá efecto, pues la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}, \quad (2.117)$$

nos indica que para  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$  tenemos  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = |\mathbf{B}_0| \partial_z \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}_0 = -(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}_0$  donde usamos que la dinámica es perpendicular. Si asumimos el flujo como incompresible,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  y este término se anula por completo.

Por lo tanto, vemos que  $\mathbf{B} = |\mathbf{B}_0| \hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$  es solución. La aparición de una dependencia paralela ( $\partial_z \mathbf{u} \neq 0$ ) tenderá a deformar las líneas de campo magnético, excitando ondas de Alfvén con frecuencia dada por (2.86) y consecuentemente disipación Ohmica, relajando nuevamente al estado bidimensional. Aún en presencia de inyección de energía constante, el campo magnético guía tenderá a bidimensionalizar la dinámica del sistema, con mayor o menor grado de éxito dependiendo de su intensidad.

Con esta discusión en mente, un análisis similar al de la sección (2.4.2) permite obtener el espectro de energía en términos del número de onda  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + k_\parallel \hat{\mathbf{z}}$  como (Goldreich y Sridhar 1995)

$$E(k_\perp) \sim C \varepsilon^{2/3} k_\perp^{-5/3}, \quad (2.118)$$

$$E(k_\parallel) \sim C(\varepsilon / |\mathbf{v}_A|) k_\parallel^{-2}, \quad (2.119)$$

con  $k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$ ,  $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$  la velocidad de Alfvén,  $\varepsilon = \nu \langle |\omega|^2 \rangle + \eta \langle |\mathbf{j}|^2 \rangle$  la tasa de disipación de energía y  $C$  una constante de orden 1. Es inmediato notar que (2.118) es idéntico al espectro de Kolmogorov (2.113), mientras que (2.119) decae más rápido con  $k_\parallel$ . Considerando además que (2.119) escala como  $\sim 1/|\mathbf{B}_0|$ , en el límite de campo magnético intenso esperamos recuperar un espectro isótropo  $E(k)$  similar a (2.113) al tener energía en modos  $k^2 = k_\perp^2 + k_\parallel^2 \approx k_\perp^2$ , en especial para las escalas más pequeñas. Es por esto que a lo largo de esta tesis compararemos los espectros magneto hidrodinámicos directamente con el de Kolmogorov.

Más aún, en el caso de turbulencia bidimensional, existe un invariante adicional  $\langle |A|^2 \rangle$  que exhibe cascada inversa (de las escalas pequeñas a las escalas grandes), por lo que esperamos cierta transferencia de energía hacia las grandes escalas en presencia de un campo magnético guía intenso. Este tipo de turbulencia es clave a la hora de generar las hojas de corriente mencionadas en la sección 2.3.2, cuya longitud transversal puede ser considerable aún teniendo un espesor  $\sim l_d \sim 1/k_d$ .

En escalas comparables o menores a  $d_p$ , esta imagen se modifica por múltiples razones: el efecto Hall deja de ser despreciable, el flujo puede adquirir compresibilidad y aparecen efectos cinéticos. Esto genera una imagen donde la turbulencia está dominada no por ondas de Alfvén, sino por ondas de Alfvén cinéticas (Bale et al. 2005; Sahraoui et al. 2010; Salem et al. 2012; C. H. K. Chen et al. 2013), arrojando espectros con exponentes compatibles con  $-2,8$ . Estos espectros son considerablemente más empinados y han sido ampliamente observados en el viento solar (Sahraoui et al. 2020). Aunque no existe una teoría completa de turbulencia en este rango, esperamos que muchas de las propiedades del caso MHD provean una estructura conceptual para atacar este problema.

La figura 2.4 contiene un espectro de energía magnética obtenido mediante las misiones espaciales ACE y Cluster en el viento solar. Es posible pasar del dominio de frecuencia  $f$  al dominio espacial  $\lambda^{-1}$  (con  $\lambda$  es la longitud de onda) mediante la hipótesis de Taylor  $f = U_0/\lambda$  donde  $U_0 \sim 400$  km/s es la velocidad del viento solar. Podemos apreciar los rangos discutidos en esta sección, empezando por el rango inercial con flujo de energía constante de unos 5 ordenes de magnitud limitado por la escala iónica  $R_{c,i}$  y la escala de correlación  $\lambda_C$ . En este rango vemos un exponente compatible con el  $-5/3$  predicho por (2.118) pues en el viento solar existe un campo magnético guía intenso dado por la espiral de Parker (Parker y Tidman 1958). A partir de  $kR_{c,i} \sim 1$  tenemos el rango iónico con espectro  $\sim k^{-8/3}$  hasta  $kR_{c,i} \sim 1$ , donde comienza el rango electrónico y la energía se disipa en calor. Este rango electrónico es aún menos comprendido y no será relevante para esta tesis, donde nos interesan escalas con  $kR_{c,e} \lesssim 1$ . Existe un cuarto rango de inyección para  $k\lambda_C \lesssim 1$  con su característico espectro  $f^{-1}$ , cuyo origen aún es ampliamente debatido por la comunidad y también excede el alcance de este trabajo.



## Capítulo 3

# Energización de partículas de prueba

Propongo en la presente nota discutir una hipótesis [...] según la cual los rayos cósmicos se originan y se aceleran principalmente en el espacio interestelar, aunque se supone que los campos magnéticos impiden que salgan de los límites de la galaxia. El principal proceso de aceleración se debe a la interacción de las partículas cósmicas con campos magnéticos errantes que, según Alfvén, ocupan los espacios interestelares.

Enrico Fermi, *On the origin of the cosmic radiation*, 1949

Cómo primer aproximación a comprender los mecanismos de energización de partículas cargadas, estudiaremos la dinámica de partículas de prueba inmersas en un plasma turbulento. Cómo dijimos previamente, la interacción de estas partículas con el plasma es unilateral: se mueven según los campos electromagnéticos generados por el plasma, que evoluciona independientemente.

Esta aproximación es razonable cuando la concentración de partículas es baja en el plasma o, equivalentemente, una densidad de partículas de prueba muy inferior a la de las partículas que componen el plasma. Así, la contribución de estas partículas al campo electromagnético total es despreciable. Libradas a esta interacción unilateral, las partículas pueden ganar energía cinética indefinidamente, pues son incapaces de ejercer trabajo sobre el plasma o emitir radiación. Por lo tanto, todo uso de esta aproximación debe estar acotado en el tiempo para evitar que alcancen una velocidad suficiente donde los efectos radiativos sean apreciables.

### 3.1. Parámetros de las simulaciones

Los estudios de este capítulo están basados en simulaciones numéricas directas (SND), donde evolucionamos el plasma acorde a (2.64)-(2.68) mediante el método pseudo-espectral descripto en la sección 2.3.4 para una caja periódica de tamaño  $L_{\text{caja}} = 2\pi$ . Estas simulaciones se realizaron con el código GHOST (Mininni et al. 2011) en la computadora de Cálculo de Alto Rendimiento DIRAC del departamento de Física de la Universidad de Buenos Aires. Su resolución espacial es de  $N^3 = 512^3$  modos de Fourier y su evolución temporal se da mediante el método de Runge-Kutta de orden 2 descripto en la sección 2.3.4. Los efectos de solapamiento (o *aliasing*, en inglés) son removidos mediante el uso de la regla de los dos tercios (Orszag 1971), por lo que el modo más alto resuelto por la simulación es  $k_{\text{max}} = N/3 = 171$  (más detalles en el apéndice B). La viscosidad  $\mu$  y la resistividad  $\eta$  son elegidas de forma de poder asegurar la correcta resolución de las escalas más pequeñas  $k_{\text{max}} \gtrsim k_d$ , donde  $k_d = (\epsilon_d(\rho_0/\mu)^3)^{1/4}$  es el número de onda de disipación de Kolmogorov,  $\epsilon_d$  la tasa de disipación de energía y  $\rho_0$  una densidad de masa característica. A partir de esto podemos definir la escala de disipación  $l_d = 2\pi/k_d$ . Para estos parámetros, el sistema tiene números de Reynolds  $R_e = R_m \sim 2300$ .

El plasma es llevado a un estado estacionario usando un forzado mecánico  $\mathbf{f}$  y electromecánico  $\nabla \times \mathbf{m}$  en las ecuaciones (2.65) y (2.67), respectivamente, con el objetivo de compensar la disipación. Estos forzados son generados en espacio Fourier, teniendo módulo constante y fase aleatoria en los modos con  $2 \leq |\mathbf{k}| \leq 3$  cada cierto tiempo de correlación  $\tau_f$ . Para tiempos intermedios ( $t/\tau_f \notin \mathbb{N}$ ), el forzado se obtiene como una interpolación lineal entre el forzado previo en  $t_\ell = \ell\tau_f$  y un forzado

Tabla 3.1: Parámetros de los estados estacionarios obtenidos para las 3 simulaciones CMHD de este capítulo.

ID	$\tau_f/\tau_c$	$L_{\text{caja}}/L_0$	$L_0/l_d$	$B_0/b_0$	$u_{rms}/v_0$	$R_e$
NL1	$1,146 \times 10^1$	2.53	59.79	8.97	1.73	2373
NL2	$1,146 \times 10^0$	2.43	54.69	9.16	1.71	2419
NL3	$2,865 \times 10^{-1}$	2.83	65.86	8.49	1.49	2242

futuro en  $t_{\ell+1} = (\ell + 1)\tau_f$ . Esto asegura que el forzado sea continuo tanto en tiempo como en espacio, evitando que introduzca fluctuaciones artificialmente bruscas en la dinámica del plasma. Este tiempo de correlación es relevante para la dinámica del plasma, por lo que estudiamos su efecto en la sección 3.3. Sin embargo, la amplitud de los forzados se ajusta en cada simulación para que todas tengan niveles de energía (tanto cinética como magnética) similares.

Las escalas espaciales y temporales de cada simulación se definen individualmente, aunque siempre son similares entre si. Para la longitud característica, usamos el tamaño de la caja  $L_{\text{caja}}$  o la escala de inyección de energía  $L_0 = 2\pi \int (E(k)/k)dk / \int E(k)dk$  donde  $E(k)$  es el espectro isótropo de energía total. Para la escala de velocidad, podríamos la raíz del valor cuadrático medio  $u_{rms} = \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$  (*root mean squared value*, en inglés). Sin embargo, usamos la velocidad de Alfvén de las fluctuaciones de campo magnético  $v_0 = b_{rms} / \sqrt{4\pi\rho_0}$ , donde  $b_{rms} = \langle |\mathbf{b}|^2 \rangle^{1/2}$ . Para la escala temporal, usamos bien el tiempo de rotación de los remolinos más grandes  $t_0 = L_0/v_0$  o el giroperiodo de las partículas  $\tau_c = 2\pi m/q|\mathbf{B}_0|$ , dependiendo de si estamos analizando propiedades del plasma o de las partículas. Finalmente, para la masa usamos la densidad de referencia  $\rho_0$  que, junto con una presión de referencia  $p_0$ , permiten definir una velocidad del sonido característica  $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ .

El campo guía estará orientado en la dirección  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ , definiendo una velocidad de Alfvén  $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ . En todas las simulaciones, se buscó que  $B_0/b_0 \approx 9$  para compatibilizarlo con observaciones en el viento solar (Hadid et al. 2017; Andrés et al. 2022) y se trabajó en el límite de plasma magnetizado, con un  $\beta = p_0/(B_0^2/8\pi) = (2/\gamma)(c_s/v_A)^2 = 0.53$  idéntico para todas las simulaciones, donde  $\gamma = 5/3$  es el exponente adiabático. En este capítulo, generamos 3 estados estacionarios para las ecuaciones de MHD compresible (CMHD) (2.64)-(2.68), que identificamos como NL1, NL2 y NL3 (por no lineal). La principal diferencia entre estas simulaciones es el tiempo de correlación del forzado  $\tau_f$ , que genera estados levemente distintos y será central en la sección 3.3. Los valores exactos de las distintas magnitudes del plasma pueden apreciarse en la Tabla 3.1, donde se ve que son comparables.

Por su parte, las partículas se moverán acorde a la segunda ley de Newton, bajo la acción de la fuerza de Lorentz (2.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (3.1)$$

El campo magnético  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$  es el obtenido mediante la integración de las ecuaciones (2.64)-(2.68) y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  dado por la Ley de Ohm generalizada (2.66). Durante este capítulo, ignoramos el término de Hall a la hora de evolucionar el campo magnético tomando  $\epsilon_H = 0$  en (2.67), pero no necesariamente en el campo eléctrico (2.66) usado para evolucionar las partículas. Aunque esto sea inconsistente, vemos que no es particularmente relevante, la mayor inconsistencia reside en la aproximación de carga de prueba. Para evaluar los campos en la posición exacta de la partícula, GHOST utiliza una interpolación de orden 3, similar a los *B-splines* de la sección 2.2.5.

En todos los casos, se usaron  $5 \times 10^5$  partículas, inyectadas una vez alcanzado el estacionario ( $t = 0$ ) y evolucionando en paralelo a los campos. Las partículas están inicialmente distribuidas uniformemente en la caja, con una distribución de velocidades gaussiana comparable a las velocidades características del plasma. El tipo de partícula en cuestión estará determinado por su cociente carga-masa  $q/m$ , dado que esa es la magnitud relevante en la ley de Newton (3.1). Adimensionalizando esta ecuación con  $v_0$  para la velocidad,  $L_0$  para la longitud,  $b_0 = v_0 \sqrt{4\pi\rho_0}$  para el campo magnético y  $E_0 = v_0 b_0 / c$  para el campo eléctrico, obtenemos

$$\dot{\mathbf{v}}' = \alpha (\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'), \quad \alpha = \frac{q}{e} \frac{m_p}{m} \frac{L_0}{d_p}, \quad (3.2)$$

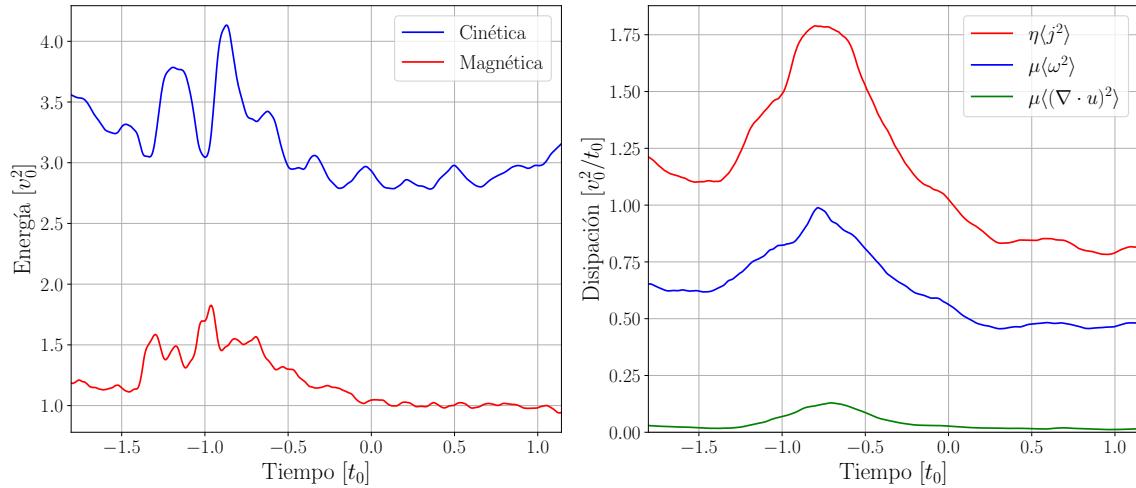


Figura 3.1: Energía (izquierda) y disipación (derecha) como función del tiempo, tanto previamente ( $t < 0$ ) como una vez alcanzado el estacionario  $t > 0$ . Las partículas de prueba se inyectan en  $t = 0$ .

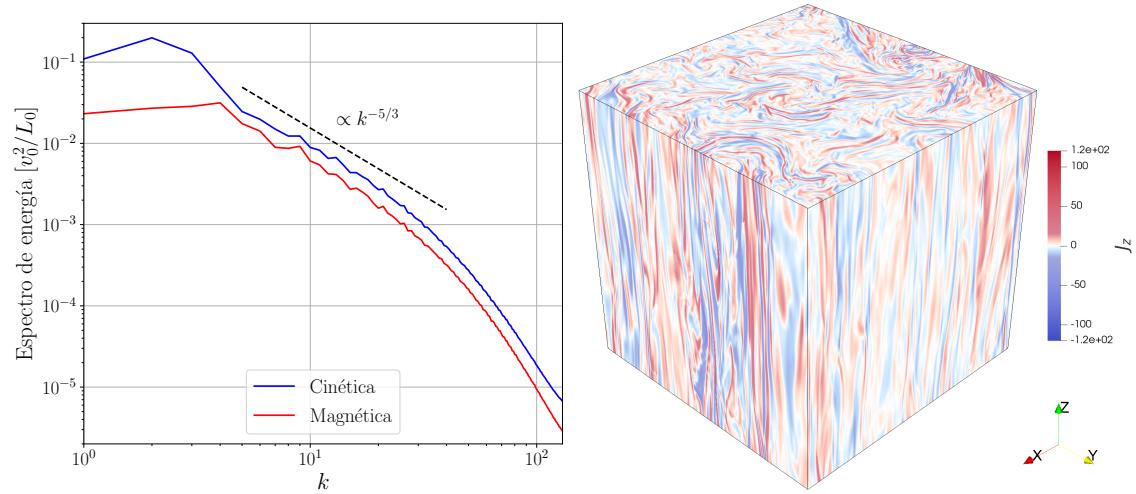


Figura 3.2: (Izquierda) Espectros de energía promediado a lo largo del estacionario ( $t > 0$ ), junto con la ley de potencias de Kolmogorov. (Derecha) Visualización 3D de la corriente paralela a  $\mathbf{B}_0$ , mostrando turbulencia y hojas de corriente.

donde  $e$  es la carga del protón (y del electrón, en módulo),  $m_p$  es la masa del protón y  $d_p = cm_p/\sqrt{4\pi\rho_0e^2}$  es la longitud inercial protónica y las primas denotan magnitudes adimensionales. Aquí tomamos  $d_p = l_d$ , donde  $l_d = 2\pi/k_d$  es la escala de disipación, dada la evidencia observacional de que en el viento solar  $d_p \sim l_d$  (R. Leamon et al. 1998). En estas simulaciones, para protones tomamos  $\alpha_p = L_0/l_d = 60$  como valor representativo (ver Tabla 3.1). A partir de  $\alpha_p$ , podemos obtener el parámetro de Hall  $\epsilon_H$ , cuando sea necesario.

A modo ilustrativo, la figura 3.1 muestra la evolución de la energía (ignorando el factor  $1/2$  y con  $\mathbf{b}$  en unidades alfvénicas, por simplicidad) y disipación a lo largo del tiempo para la simulación NL1. Los tiempos  $t < 0$  corresponden a estados transitorios del plasma, previos a alcanzar el estado estacionario, donde estas magnitudes se mantienen estables. En particular, puede verse el pico de disipación en  $t \approx -0.7t_0$  que indica que la energía, inicialmente inyectada en modos  $2 \leq |\mathbf{k}| \leq 3$ , ha poblado la totalidad del espectro.

A su vez, en la figura 3.2 se muestran espectros cinéticos y magnéticos isótropos promediados en  $t > 0$ , con la ley de potencias de Kolmogorov como referencia para indicar la cascada de energía bien establecida. Finalmente, se observa allí también una representación tridimensional del campo de corriente paralela al campo guía  $\mathbf{B}_0 \parallel \hat{\mathbf{z}}$ , donde se ven claramente las hojas de corriente elongadas a lo largo de esta dirección con un ancho característico  $\sim l_d$ . Podemos ver la formación de estructuras caóticas y de múltiples escalas, que identificamos con el régimen de turbulencia fuerte. Las demás simulaciones NL2 y NL3 tienen un comportamiento muy similar.

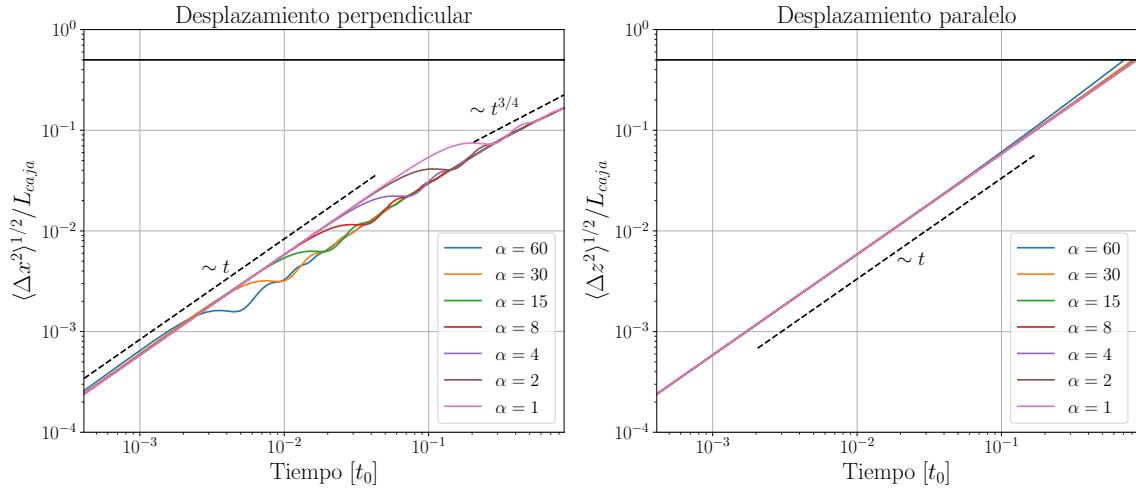


Figura 3.3: Desplazamiento cuadrático medio en la dirección perpendicular (izquierda) y paralela (derecha). La línea negra horizontal muestra  $L_{caja}/2$ ; el criterio de corte para la simulación.

### 3.2. El rol de las estructuras

En esta sección trabajaremos exclusivamente con el estado estacionario obtenido en NL1. Nuestro interés se centra en estudiar la dinámica de iones con distinto  $\alpha = (q/e)(m_p/m)(L_0/d_p)$  en este plasma turbulento. Cómo mencionamos en la sección 2.2.4, todo ion tiene cocientes  $q/m$  menores o iguales al de los protones (iones de hidrógeno  $H^+$ ), pues elementos más pesados pueden tener neutrones que aportan masa sin aportar carga. Por lo tanto, estudiaremos partículas con  $\alpha \leq \alpha_p = 60$ . Todas estas partículas serán inmersas en exactamente el mismo estado estacionario (NL1) con la misma distribución espacial y de velocidades, con una energía cinética media  $\langle v_i^2 \rangle \approx 2,2v_0^2$  (un valor intermedio entre  $v_0^2$  y  $u_{rms}^2 \approx 3v_0^2$ , véase tabla 3.1) donde  $i$  es la componente y  $\langle \bullet \rangle$  indica promedio sobre las partículas. De esta forma, nos aseguramos que toda diferencia en la dinámica se origina exclusivamente por el cambio de  $q/m$  (a través de  $\alpha$ ).

#### 3.2.1. Desplazamiento y energización

Comenzamos estudiando el desplazamiento cuadrático medio de los iones en el plasma. Dada la simetría azimutal del problema, distinguiremos entre la dirección paralela  $z$  y una de las direcciones perpendiculares  $x$  (elegir  $y$  arroja los mismos resultados). En la figura 3.3 podemos ver los desplazamientos en ambas direcciones. En el panel izquierdo, el desplazamiento perpendicular comienza de manera balística ( $\langle \Delta x^2 \rangle \propto t^2$ ), colapsando posteriormente en una curva sub-balística ( $\langle \Delta x^2 \rangle \propto t^\alpha$  con  $\alpha < 1$ ) en diferentes momentos. Aunque ambos regímenes son idénticos para cada  $\alpha$ , los tiempos de transición son proporcionales al giroperíodo  $\tau_c \sim 1/\alpha$ , lo que sugiere que este comportamiento inicial se debe a efectos de la giración. Durante el desplazamiento sub-balístico, las oscilaciones desaparecen y las curvas se vuelven indistinguibles. Esto sugiere, como mostraremos más adelante, que el mecanismo de difusión perpendicular es en su mayoría independiente de  $\alpha$  a medida que el tiempo avanza. Este no es el caso para el desplazamiento paralelo en el panel derecho, donde la pendiente de las curvas aumenta ligeramente con  $\alpha$ . Además, los desplazamientos paralelos muestran una difusión balística o super-balística a lo largo de toda la simulación.

Todas las curvas en la figura 3.3 se dibujan hasta que  $\langle \Delta z^2 \rangle^{1/2} \approx L_{caja}/2$ , cuando se detiene la simulación. Seleccionamos este criterio para definir el tiempo de salida  $t_e^{(\alpha)}$  porque la componente paralela del desplazamiento es dominante  $\langle \Delta z^2 \rangle^{1/2} \sim 3\langle \Delta x^2 \rangle^{1/2}$ . Esta duración fue suficiente para que las partículas interactuaran con múltiples estructuras, y los resultados no se ven afectados cualitativamente cuando se elige  $\langle \Delta z^2 \rangle^{1/2} \approx L_{caja}$  en su lugar. Los tiempos de salida disminuyen (lentamente) con  $\alpha$ , variando desde  $t_e^{(60)} \approx 0,71t_0$  hasta  $t_e^{(1)} \approx 0,86t_0$ . A ese tiempo, ninguna partícula había recorrido toda la caja en la dirección  $x$ , y menos del 5 % de las partículas lo habían hecho en la dirección  $z$ .

Pasamos ahora a estudiar la energía cinética de los iones, la cual se muestra en la figura 3.4

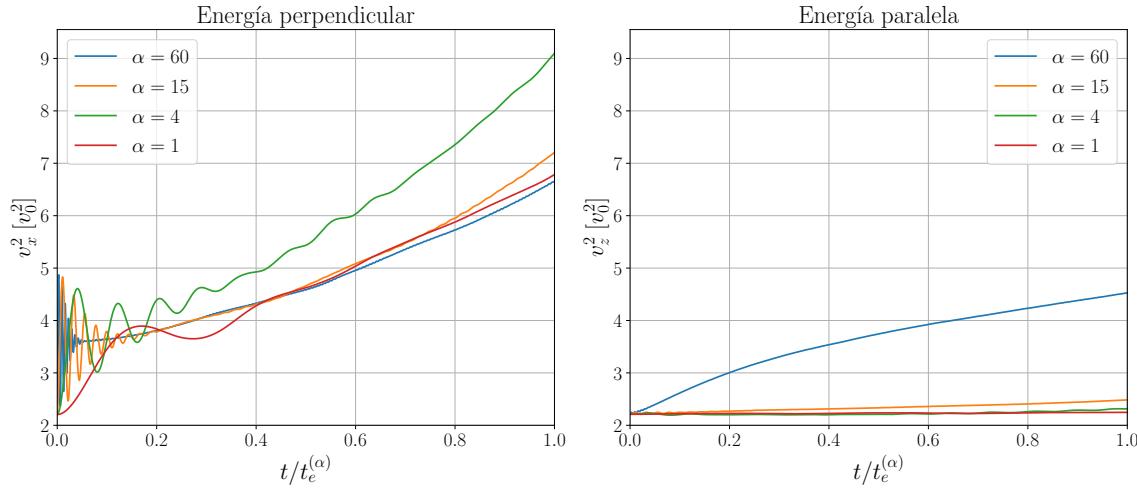


Figura 3.4: Energía media de los iones en la dirección perpendicular (izquierda) y paralela (derecha) para valores de  $\alpha$  selectos. Para cada uno, el tiempo está normalizado por el tiempo de salida.

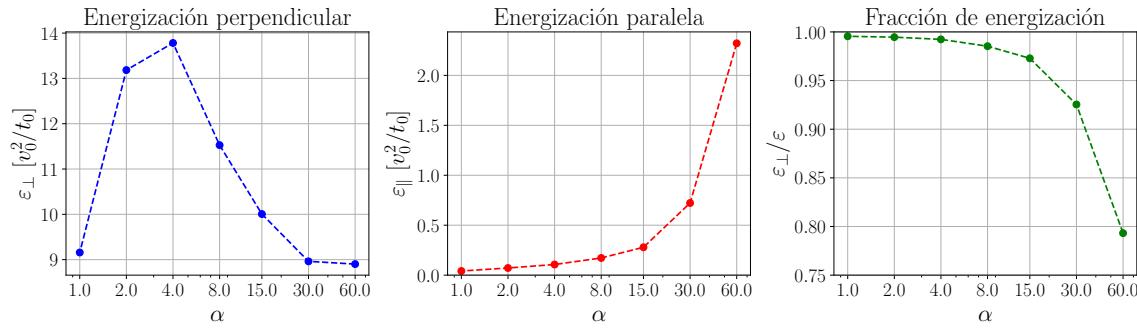


Figura 3.5: Tasa de energización perpendicular (izquierda) y paralela (centro) a tiempo final  $t = t_e^{(\alpha)}$  como función de  $\alpha$ . (Derecha) Fracción de la tasa de energización total que va a la componente perpendicular.

para algunos valores selectos de  $\alpha$ . El panel izquierdo corresponde a la energía perpendicular (por unidad de masa)  $v_x^2$ , mientras que el panel derecho corresponde a la energía paralela  $v_z^2$ . Aunque ambas componentes comienzan con la misma energía media  $\langle v_i^2 \rangle_0 \approx 2.2v_0^2$ , la componente perpendicular tiene un rápido incremento oscilatorio hasta que las oscilaciones cesan (como antes, relacionado con la giración) alrededor de un valor cercano a la energía cinética del fluido  $u_{rms}^2 \approx 3v_0^2$ , seguido de un aumento sostenido. En contraste, la energización paralela aumenta con  $\alpha$ , pero es insignificante excepto para los valores más altos de  $\alpha$ . Para iones pesados (aquellos con  $\alpha < \alpha_p$ ), la energización perpendicular es dominante, pero la dependencia con  $\alpha$  no es tan clara.

Para entender esto, en la figura 3.5 se muestra la tasa de energización (de ahora en más, energización) en cada componente, definida según

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle_e^{\alpha}}{t_e^{\alpha}}, \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle_e^{\alpha}}{t_e^{\alpha}} \quad (3.3)$$

donde  $\langle \Delta v_j^2 \rangle_e^{\alpha}$  es la diferencia entre la energía cinética media a tiempo  $t_e^{(\alpha)}$  y la inicial. Vemos claramente que la energización paralela incrementa monótonamente con  $\alpha$  mientras que la energización perpendicular tiene un comportamiento variable con un máximo en  $\alpha \approx 4$ .

Como han mostrado trabajos previos (Dmitruk et al. 2004b; Lehe et al. 2009), la energización tiende a ser principalmente paralela para valores altos de  $\alpha \sim \Omega_c$  (por ejemplo, para electrones) y principalmente perpendicular para valores bajos de  $\alpha$  (por ejemplo, para protones). Esto se debe a la interacción de las partículas con las hojas de corriente y otras estructuras de tamaño  $\sim l_d$  (González et al. 2016, 2017). Las partículas con bajo  $\alpha$  tienen un giroradio  $R_c = |\mathbf{v}_{\perp}|/\alpha B_0$  alto y no pueden aprovechar la coherencia del campo eléctrico  $E_z \sim \eta j_z$  dentro de una hoja de corriente como lo hacen las partículas con  $R_c \lesssim l_d$ . Por otro lado, para  $R_c \lesssim l_d$ , las partículas dentro de una hoja de corriente experimentan un campo  $E_{\perp}$  casi constante, cuya fuerza neta promedia a 0 en un

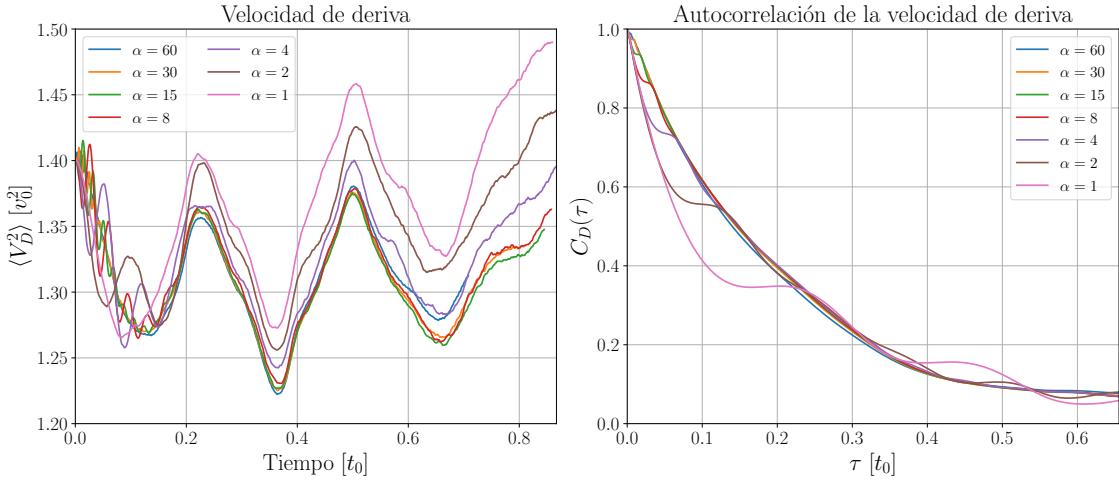


Figura 3.6: Valor cuadrático medio (izquierda) y autocorrelación (derecha) de la velocidad de deriva experimentada por las partículas como función del tiempo para todos los valores de  $\alpha$ .

giroperíodo dado, y resulta en una pequeña energización perpendicular. Además, el aumento de  $R_c$  permite a las partículas explorar regiones más grandes del plasma en busca de mayores gradientes de  $E_\perp$ . Así, la energización perpendicular aumenta a medida que  $\alpha$  disminuye. No obstante, esto no puede sostenerse indefinidamente, ya que sabemos que en el límite  $\alpha \rightarrow 0$  no hay interacción y ambas energizaciones deben ser nulas. Dado que  $\varepsilon_\perp(\alpha)$  debe ser una función suave y no nula con  $\varepsilon_\perp = 0$  para  $\alpha = 0$  y  $\alpha \rightarrow \infty$ , debe haber al menos un máximo  $\alpha_c$ . Con esto en mente, esperamos que la energización perpendicular para valores muy pequeños de  $\alpha$  aumente a medida que la intensidad de la interacción crece hasta este valor crítico  $\alpha_c$ . A partir de este  $\alpha_c$ , la reducción en  $R_c$  comienza a anular el efecto de  $E_\perp$ .

En resumen, la competencia entre la intensidad de la interacción (relevante para altos valores de  $\alpha$ ) y la exploración/explotación (relevante para bajos valores de  $\alpha$ ) produce uno o más máximos para  $\varepsilon_\perp(\alpha)$ . En el contexto de este trabajo, parecería que uno de esos máximos es  $\alpha_c \approx 4$ . Para independizar nuestro análisis de esta competencia, graficamos la razón entre la energización perpendicular  $\varepsilon_\perp$  y la energización total  $\varepsilon = \varepsilon_\perp + \varepsilon_\parallel$  en el panel derecho de la figura 3.5; esta razón representa la fracción de energía que termina en la componente perpendicular, independientemente de la energización total. De esta manera, eliminamos el factor de la intensidad de interacción y nos enfocamos solo en el aspecto geométrico/estructural, que claramente beneficia la energización paralela a medida que  $\alpha$  aumenta. Es en términos de esta interpretación que podemos afirmar que la energización perpendicular se vuelve dominante (aunque no necesariamente mayor) para valores bajos de  $\alpha$ .

### 3.2.2. Modelo de centro guía

Como se muestra en la figura 3.3, el comportamiento del desplazamiento perpendicular se vuelve independiente de  $\alpha$ . Esto sugiere la presencia de un mecanismo que le otorga a las partículas una velocidad independiente del valor de  $\alpha$ . La velocidad de deriva en un campo eléctrico y magnético constante dada por la ecuación (2.5) sería un posible candidato. Aunque el campo magnético  $\mathbf{B}$  podría ser aproximadamente constante dado el fuerte campo guía  $\mathbf{B}_0$ , esto no es inmediato para el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , incluso para partículas con  $R_c \ll l_d$ . Esta aproximación modela el movimiento de las partículas siempre que los tiempos y las escalas características de los campos sean mucho mayores que el giroperíodo y el radio de giro de las partículas, respectivamente. Aunque la dependencia de  $\alpha$  no es explícita en la ecuación (2.5), puede estar implícita en las posiciones  $\mathbf{x}_i$  de las partículas, afectando la velocidad de deriva  $\mathbf{V}_D$  experimentada por la partícula (interpretando  $\mathbf{V}_D(\mathbf{x})$  como un campo vectorial).

Para responder a esta pregunta, en el panel izquierdo de la figura 3.6 mostramos el valor cuadrático medio de  $\mathbf{V}_D$  experimentado por partículas con diferentes  $\alpha$ , confirmando una débil dependencia de  $\alpha$ . En esta aproximación  $\mathbf{V}_D$  corresponde a la velocidad del centro guía de la partícula. Como mencionamos en la sección 3.2.2, estas expresiones para  $\mathbf{V}_D$  solo son relevantes en la dirección perpendicular al campo magnético (que podemos asumir en  $\hat{\mathbf{z}}$ ), por lo que solo tiene

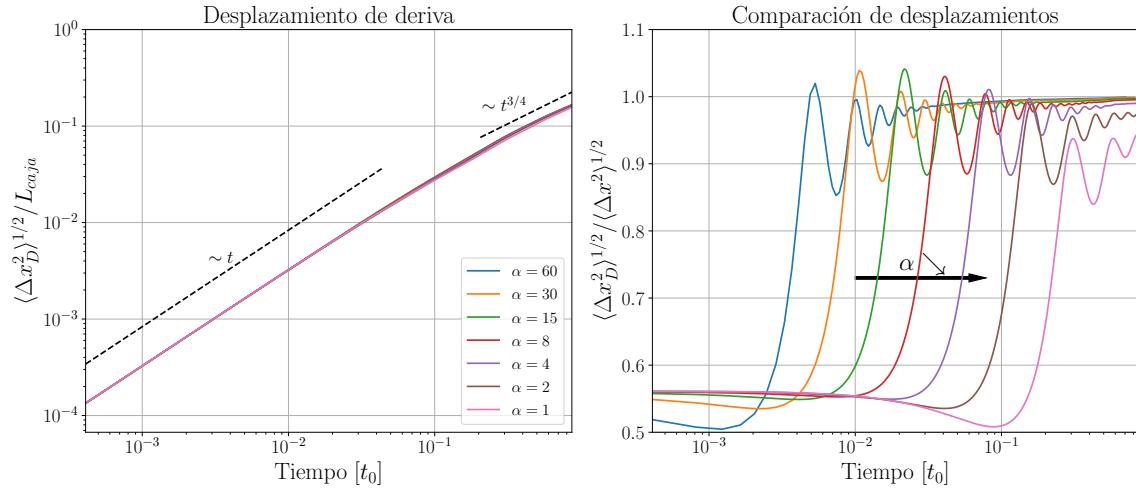


Figura 3.7: Raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio predicho por el modelo de centro guía (izquierda) y su cociente con el verdadero desplazamiento (derecha) como función del tiempo, para todos los valores de  $\alpha$ .

sentido analizar  $\mathbf{V}_{D\perp}$ . Para poder reproducir la dinámica balística ( $\langle \Delta x^2 \rangle^{1/2} \sim t$ ) seguida de una sub-balística ( $\langle \Delta x^2 \rangle^{1/2} \sim t^{3/4}$ ), esta velocidad de deriva debe disponer de cierta coherencia. Para confirmar esto, calculamos la función de autocorrelación de la velocidad de deriva perpendicular

$$C_D(\tau) = \frac{\langle \mathbf{V}_{D\perp}(t) \cdot \mathbf{V}_{D\perp}(t + \tau) \rangle_t}{\langle |\mathbf{V}_{D\perp}(t)|^2 \rangle_t}, \quad (3.4)$$

donde  $\langle \bullet \rangle_t$  representa el promedio sobre todas las partículas y todos los tiempos  $0 \leq t \leq t_c^{(\alpha)} - \tau$ . Esta autocorrelación se muestra en el panel derecho de la figura 3.6 y parece ser débilmente dependiente en  $\alpha$ . Como antes, hay un comportamiento inicial para  $t \lesssim \tau_c$  debido a la giración de la partícula, seguido de un colapso hacia un comportamiento común, muy probablemente relacionado con la evolución de  $\mathbf{V}_D$ . Definiendo el tiempo  $\tau_A$  cuando  $C_D(\tau_A) = 0,1$  como el tiempo de autocorrelación, obtenemos un valor comparable al tiempo de rotación de gran escala  $\tau_A \approx t_0/2$ , lo que refuerza su interpretación como un tiempo característico del campo de velocidad de deriva. Para la mayoría de los valores de  $\alpha$ , este tiempo de autocorrelación es mucho mayor que el giroperíodo de la partícula  $\tau_A/\tau_c \approx 2\alpha$ , lo que proporciona una herramienta para cuantificar la aplicabilidad del modelo de centro guía.

Con esto en mente, proponemos calcular una posición de deriva  $\mathbf{x}_D$  para cada partícula

$$\frac{d\mathbf{x}_{D,j}}{dt} = \mathbf{V}_D(\mathbf{x}_j, t) \implies \mathbf{x}_{D,j} = \mathbf{x}_j(0) + \int_0^t \mathbf{V}_D(\mathbf{x}_j(t'), t') dt' \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{x}_j(t)$  es la posición real de la partícula y  $\mathbf{x}_{D,j}$  la posición de deriva de la partícula  $j$ . Al ser  $\mathbf{x}_j(t)$  conocido, integramos numéricamente la ecuación (3.5) para obtener  $\mathbf{x}_{D,j}(t)$ . El desplazamiento perpendicular de esta posición de deriva puede apreciarse en el panel izquierdo de la figura 3.7, junto con un gráfico del cociente  $\langle \Delta x_D^2 \rangle^{1/2} / \langle \Delta x^2 \rangle^{1/2}$  a modo de comparación. Vemos que este desplazamiento de deriva carece de oscilaciones, lo cual es consistente con su interpretación como el centro guía. Debido a este hecho, la discrepancia es más notable en los tiempos iniciales, antes de que la giración se promedie y las partículas alcancen su velocidad de deriva (comparable a la velocidad característica del plasma). Esto explica el aumento repentino inicial en la energía perpendicular en la figura 3.4. Para tiempos posteriores, los cocientes para  $\alpha \geq 4$  convergen en un 98 % a 1, mostrando que este modelo de centro guía explica la mayor parte del desplazamiento; incluso para  $\alpha = 1, 2$  la discrepancia es menor al 10 %. Recordando el resultado previo de la autocorrelación, podemos notar  $\alpha = 1, 2$  tienen  $\tau_c \sim \tau_A$ , lo cual explica porque esta aproximación puede no ser del todo apropiada. Cabe destacar que el comportamiento balístico inicial es capturado por este modelo, lo que muestra que no es solo debido a la giración.

Hasta ahora nos hemos abstenido de analizar la velocidad de deriva paralela y el desplazamiento porque la giración de las partículas está casi completamente confinada al plano perpendicular. Como se muestra en la figura 3.3, el movimiento en la dirección paralela es balístico o ligeramente

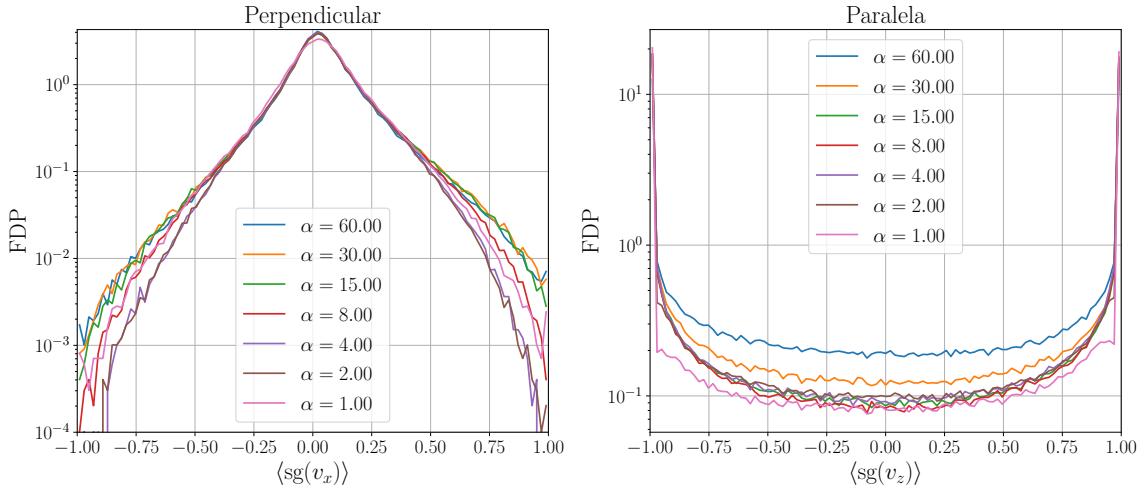


Figura 3.8: Funciones de densidad de probabilidad de la dirección media de la velocidad para la componente perpendicular (izquierda) y paralela (derecha), para todos los valores de  $\alpha$ .

super-balístico, lo cual no puede explicarse mediante una velocidad de deriva estacionaria. Para mostrar esto, calculamos la dirección media de la velocidad de cada partícula  $j$  (y para cada componente) a lo largo de su evolución, utilizando la función signo

$$\langle \text{sg}(\mathbf{v}_j) \rangle = \frac{1}{t_e^{(\alpha)}} \int_0^{t_e^{(\alpha)}} \text{sg}(\mathbf{v}_j(t)) dt \approx \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \text{sg}(\mathbf{v}_j(t_i)) \quad (3.6)$$

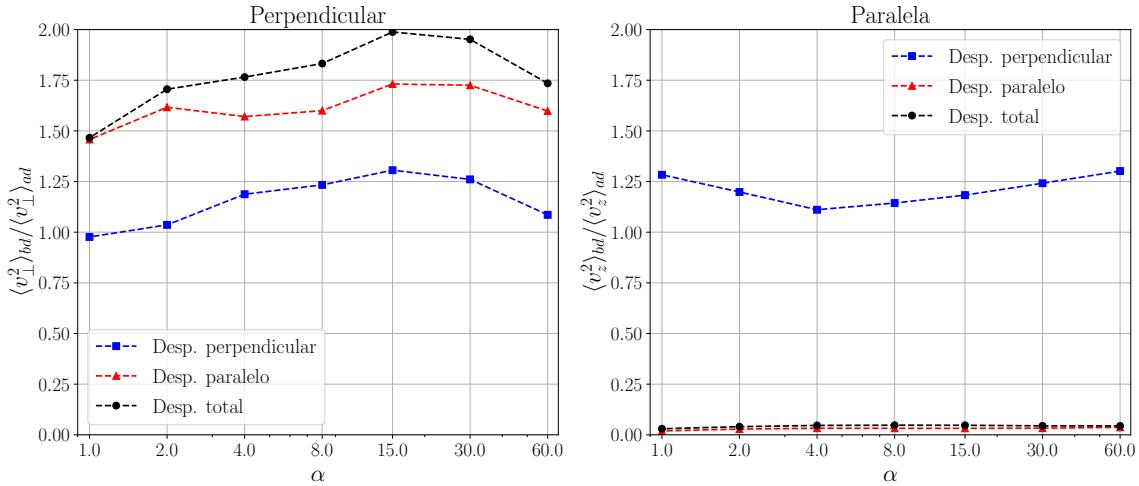
donde  $N_t$  es la cantidad de pasos temporales y  $t_i$  los tiempos discretos en los cuales tenemos datos.

En la figura 3.8 podemos ver la función de densidad de probabilidad (FDP) de  $\langle \text{sg}(v_x) \rangle$  y  $\langle \text{sg}(v_z) \rangle$ , con comportamientos sumamente distintos. En la perpendicular, la dirección de la velocidad alterna rápidamente dada la giración de las partículas, generando un fuerte pico en  $\langle \text{sg}(v_x) \rangle = 0$ . Por otro lado, en la paralela las partículas están concentradas en  $\langle \text{sg}(v_z) \rangle = \pm 1$ , mostrando que los cambios de sentido del movimiento son muy poco habituales, aunque no inexistentes.

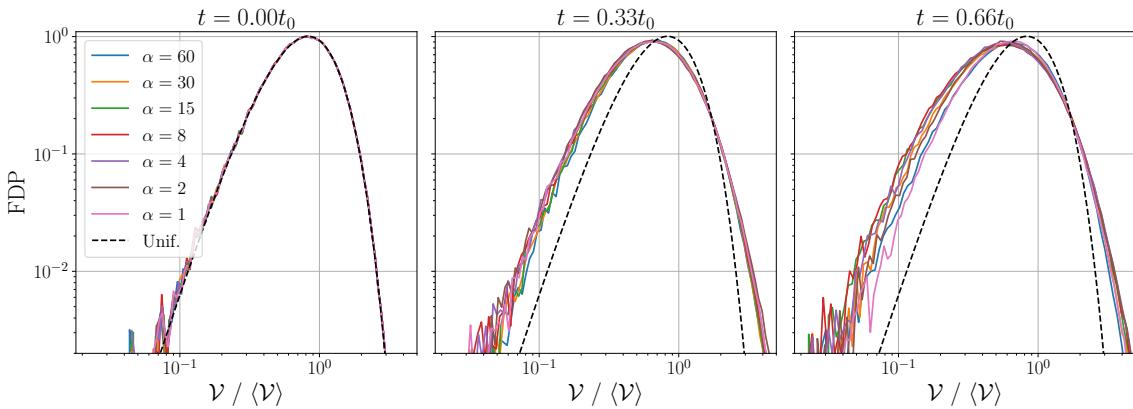
Para concluir esta sección, buscamos la relación entre el desplazamiento y la energización. En los tiempos finales  $t_e^{(\alpha)}$ , calculamos el desplazamiento y la energía (en cada componente) para todas las partículas y las separamos de acuerdo con el primero. Tomamos el 20 % de las partículas con mayores desplazamientos (ad, por alto desplazamiento) y el 20 % con menores desplazamientos (bd, por bajo desplazamiento) de acuerdo con cada dirección, y luego combinados (desplazamiento total). Posteriormente, calculamos su energía media, cuyo cociente se muestra en la figura 3.9 para los diferentes valores de  $\alpha$ . En el panel derecho, vemos que la energización paralela aumenta con un alto desplazamiento paralelo, pero disminuye con un alto desplazamiento perpendicular. El primer resultado es consistente con la figura 3.8, ya que las partículas que no cambian de dirección de movimiento tienen mayor  $|\Delta z|$  a medida que  $|v_z|$  aumenta. El segundo se puede entender al considerar que la energización paralela se debe principalmente a las hojas de corriente, que están elongadas en la dirección paralela pero son delgadas en la dirección perpendicular. Por lo tanto, el desplazamiento perpendicular puede fácilmente sacar a las partículas de estas hojas, reduciendo su energización paralela. Por otro lado, la energización perpendicular aumenta con un bajo desplazamiento, principalmente en la dirección paralela. Dejamos la interpretación de este fenómeno para la próxima sección.

### 3.2.3. Concentración preferencial

Ponemos ahora nuestra atención en las ligeras discrepancias en la velocidad de deriva experimentada por diferentes valores de  $\alpha$ . Como se mencionó, dado que todas las partículas para todos los  $\alpha$  están inmersas en los mismos campos y que la velocidad de deriva  $\mathbf{V}_D$  es independiente de  $\alpha$ , la única forma en que las partículas con diferentes  $\alpha$  podrían experimentar distintas velocidades de deriva es a través de su distribución espacial. Si las partículas mantuvieran su distribución



**Figura 3.9:** Cociente entre la energía cinética media en partículas de alto desplazamiento (ad) y bajo desplazamiento (bd) como función de  $\alpha$  y a tiempo final  $t = t_e(\alpha)$ , tanto para la componente perpendicular (izquierda) como paralela (derecha).



**Figura 3.10:** Funciones de densidad de probabilidad de los volúmenes de celda (normalizados) para distintos tiempos, para todos los valores de  $\alpha$ . La línea punteada corresponde a una distribución uniforme.

inicial uniforme en el espacio, todas las curvas de la figura 3.6 deberían colapsar. Por lo tanto, esperamos una desviación de la uniformidad, que podríamos identificar con regiones de concentración preferencial.

Para cuantificar esta concentración preferencial, usaremos el método de teselados de Voronoi y compararemos la estadística de volúmenes contra una distribución uniforme dada por un proceso aleatorio de Poisson (PAP o RPP por *Random Poisson Process*, en inglés; Monchaux et al. 2010; Obligado et al. 2014; Uhlmann 2020; Reartes y Mininni 2021; Angriman et al. 2022; Zapata et al. 2024). Un teselado de Voronoi consiste en fraccionar el dominio en celdas, una por cada partícula, tal que todos los puntos de la celda estén más cerca de esa partícula que de cualquier otra. El volumen  $\mathcal{V}_i$  de cada celda puede interpretarse como el inverso de la densidad local de partículas. Por lo tanto, un alto  $\mathcal{V}_i$  está asociado con vacíos y un bajo  $\mathcal{V}_i$  con cúmulos.

Luego calculamos la FDP de los volúmenes normalizados  $\mathcal{V}/\langle \mathcal{V} \rangle$  y la comparamos con la FDP de un PAP correspondiente al caso uniforme. En la figura 3.10 mostramos estas FDP para todos los  $\alpha$  en los tiempos  $t = 0$  (inicial),  $t = 0,33t_0$  (intermedio) y  $t = 0,66t_0$  (cercano al final). A medida que avanza el tiempo, la distribución se desvía de la correspondiente al caso uniforme, aunque no al mismo ritmo para todos los  $\alpha$ .

Para cuantificar esta idea, computamos la varianza de los volúmenes normalizados  $\sigma_{\mathcal{V}}^2$  para cada distribución y la comparamos con el valor conocido de la PAP  $\sigma_{\mathcal{V}}^2 \approx 0,18$ . Esta varianza incrementa a medida que la FDP se aleja de una distribución uniforme, según muestra la figura 3.11. Para la mayoría de los valores de  $\alpha$ ,  $\sigma_{\mathcal{V}}^2$  aumenta con el tiempo a tasa decreciente, mostrando un reordenamiento inicial explosivo seguido de un lento asentamiento. A tiempo final  $t = 0,66t_0$  la

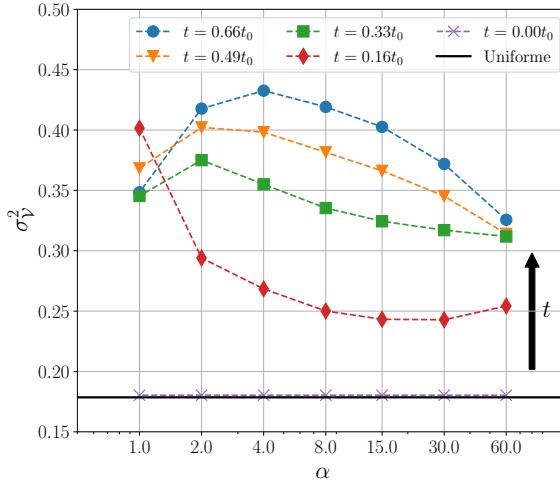


Figura 3.11: Desvío estándar del volumen de celda normalizado como una función de  $\alpha$  para distintos tiempos. La línea punteada marca el valor correspondiente a una distribución uniforme.

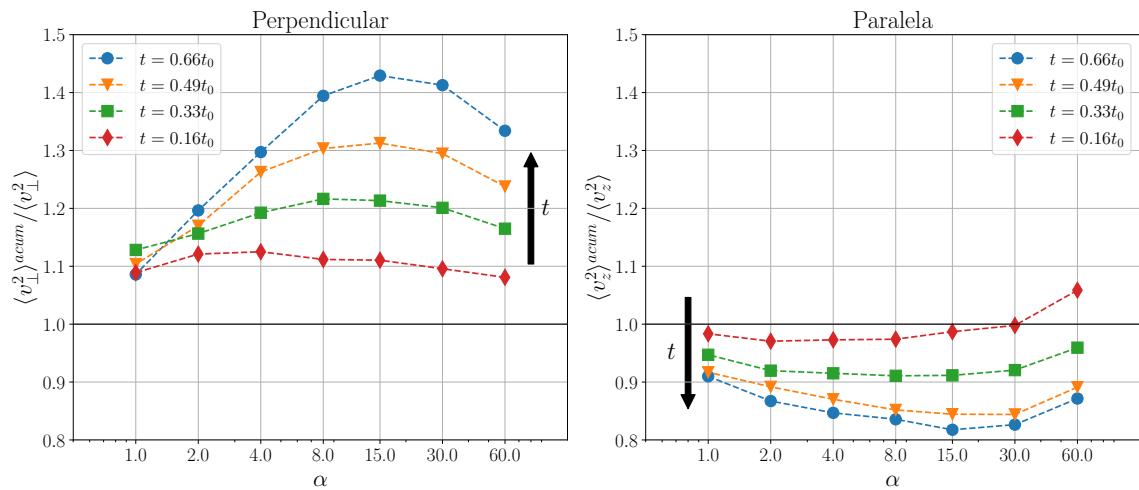


Figura 3.12: Cociente entre la energía cinética media de las partículas acumuladas y del total de la población como función de  $\alpha$  y para distintos tiempos, tanto para la componente perpendicular (izquierda) como paralela (derecha).

curva tiene un claro máximo, nuevamente localizado en  $\alpha = 4$ , lo cual induce a analizar la relación entre energización y acumulación.

Para esto, requerimos una forma de determinar cuales partículas están *acumuladas* y cuales no. Consideraremos que la partícula  $i$  está acumulada si su volumen  $\mathcal{V}_i$  es menor que un cierto volumen crítico  $\mathcal{V}_c$ . Elegimos este  $\mathcal{V}_c$  como la intersección a izquierda entre la FDP de ese  $\alpha$  y la FDP del caso uniforme. Para este criterio, las pequeñas desviaciones vistas en la figura 3.10 arrojan una fracción considerable de partículas acumuladas ( $\sim 20\%$ ).

Aplicamos este criterio para cada  $\alpha$  a ciertos tiempos y calculamos las energías cinéticas medias  $\langle v_{\perp}^2 \rangle^{\text{acum}}$  y  $\langle v_z^2 \rangle^{\text{acum}}$  de las partículas acumuladas. En la figura 3.12 se muestra el cociente entre estas energías medias y la correspondiente energía media del sistema completo de partículas. Claramente, las partículas acumuladas tienen, en promedio, una mayor energía perpendicular y una menor energía paralela, especialmente a medida que avanza el tiempo. Esto sugiere la existencia de regiones donde las partículas se concentran y experimentan alta energización perpendicular.

Hasta ahora hemos identificado tres fenómenos distintos en la dinámica de partículas de prueba:

- (a) Alta (baja) energización perpendicular (paralela).
- (b) Bajo desplazamiento.
- (c) Concentración preferencial (acumulación).

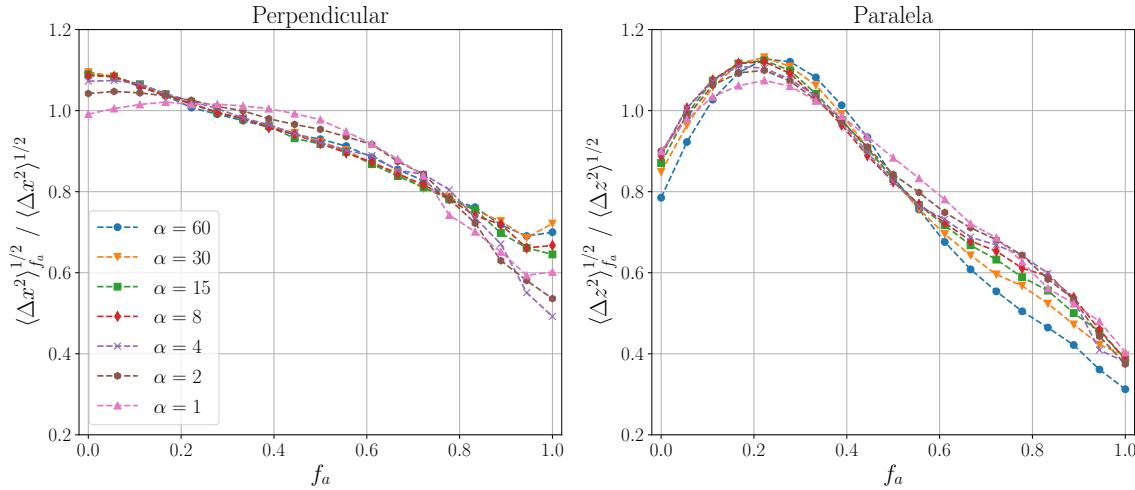


Figura 3.13: Raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio como función de la fracción de tiempo que la partícula pasa acumulada para todos los valores de  $\alpha$ , tanto para la componente perpendicular (izquierda) como paralela (derecha). Normalizada por la raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio del total de la población.

Hemos relacionado (a) con (b) a través de la figura 3.9 y (a) con (c) a través de la figura 3.12. Esto sugiere que (b) y (c) podrían estar relacionadas también y entonces la acumulación sería consecuencia de un fenómeno de captura, lo cual también reduciría el desplazamiento.

Para confirmar esta intuición, calculamos la fracción del tiempo  $f_a$  durante el cual cada partícula se encuentra acumulada. Luego agrupamos a las partículas en base a sus valores de  $f_a$ , calculamos el desplazamiento medio final (a  $t = t_e^{(\alpha)}$ ) para cada grupo y lo comparamos con el de la población completa. En la figura 3.13 podemos ver una relación mayormente decreciente entre desplazamiento y  $f_a$ , con débil dependencia en  $\alpha$ . Esto nos dice que las partículas viajan mucho menos (hasta un  $\sim 50\%$ ) a medida que pasan más tiempo acumuladas; están atrapadas en estas regiones. No obstante, el máximo en  $f_a \approx 0.2$  en la componente paralela muestra que también las partículas que nunca se acumulan viajan poco ( $\sim 15\%$ ).

Hemos confirmado entonces la existencia de regiones que atrapan y energizan perpendicularmente partículas cargadas. Sin embargo, no hemos aún encontrado cual es la propiedad especial de estas regiones ni el mecanismo detrás de estos fenómenos. Con esto en mente, analizamos los campos experimentados por partículas acumuladas en contraste con aquellos que una hipotética distribución uniforme experimentaría. Empezando por la acumulación, podemos notar que la ecuación (3.5) es idéntica a la ecuación de evolución de un elemento de fluido (un trazador) en un campo de velocidades  $\mathbf{V}_D(\mathbf{x}, t)$  (basta cambiar  $\mathbf{x}_j$  por  $\mathbf{x}_{D,j}$ ). Es sabido que los trazadores solo pueden vaciar o acumularse en regiones con divergencia positiva o negativa, respectivamente (Balkovsky et al. 2001; Falkovich et al. 2001; Bec et al. 2004; Dhanagare et al. 2014).

Habiendo mostrado que este modelo reproduce el desplazamiento de las partículas en el plano perpendicular en la sección 3.2.2, esperamos que la analogía aplique en el caso 2D. En el panel izquierdo de la figura 3.14, mostramos el valor medio de la divergencia perpendicular  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V}_D \equiv \partial_x V_{D,x} + \partial_y V_{D,y} = \nabla \cdot \mathbf{V}_D - \partial_z V_{D,z}$  experimentada por las partículas, para distintos tiempos y valores de  $\alpha$ . Dado que la divergencia media del campo es nula, normalizamos utilizando la desviación estándar para cuantificar la relevancia. Es claro que las partículas tienden a acumularse en regiones con divergencia perpendicular negativa ( $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V}_D < 0$ ), según lo esperado. En el panel derecho de la figura 3.14 mostramos la divergencia perpendicular del campo de velocidades MHD  $\mathbf{u}$ , con un comportamiento muy similar. Esto se debe a la relación entre  $\mathbf{V}_D$  y  $\mathbf{u}_{\perp}$ , que podemos ver introduciendo la ley de Ohm (2.66) en la definición de la velocidad de deriva (2.5) y expandiendo

$$\mathbf{V}_D \approx \mathbf{u}_{\perp} - \frac{\epsilon_H}{\rho} \mathbf{j}_{\perp} + \frac{1}{|\mathbf{B}|} \left[ \eta \mathbf{j}_{\perp} - \frac{\epsilon_H}{\rho} \nabla_{\perp} p_e \right] \times \hat{\mathbf{z}} \quad (3.7)$$

donde aproximamos la dirección del campo magnético  $\mathbf{B}/|\mathbf{B}| \approx \hat{\mathbf{z}}$  como la del campo guía. El último y anteúltimo término son proporcionales a  $|\mathbf{B}|^{-1} \approx B_0^{-1}$  y  $\epsilon_H = 1/60$ , respectivamente, los cuales deberían ser despreciables. El hecho de que se cumpla  $\langle |\mathbf{V}_D - \mathbf{u}_{\perp}|^2 \rangle \leq 0,02 \langle |\mathbf{V}_D|^2 \rangle^{1/2} \langle |\mathbf{u}_{\perp}|^2 \rangle^{1/2}$  para

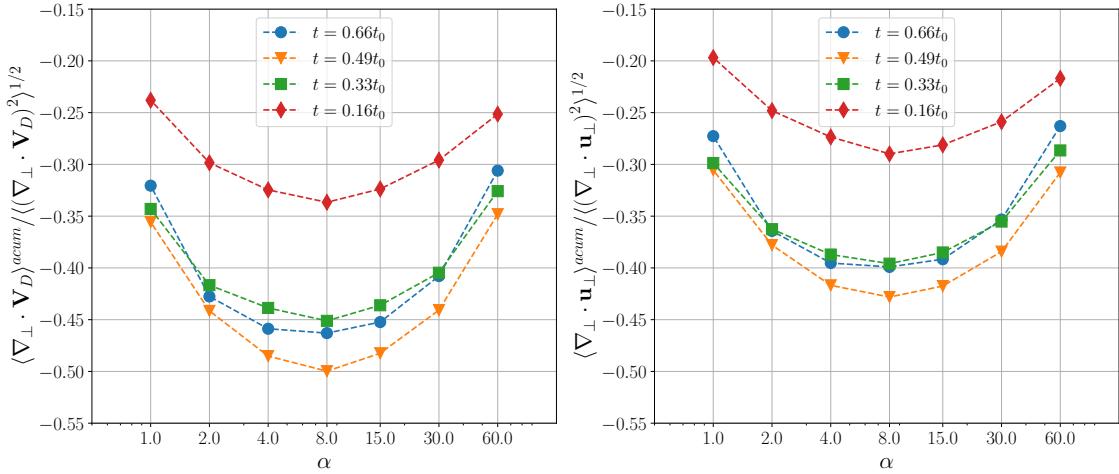


Figura 3.14: Divergencia perpendicular media de la velocidad de deriva  $\mathbf{V}_D$  (izquierda) y del campo de velocidades  $\mathbf{u}$  (derecha) como función de  $\alpha$  experimentada por las partículas acumuladas, normalizado por la raíz del valor cuadrático medio del campo.

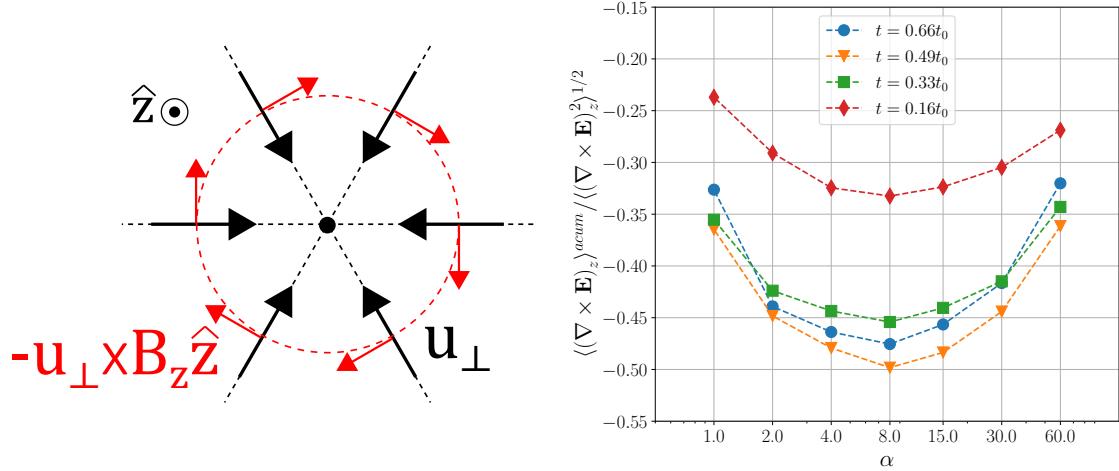


Figura 3.15: Esquema del mecanismo propuesto para la captura y energización de iones (izquierdo) y valor medio de la componente paralela del rotor del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  (derecho) experimentado por las partículas acumuladas, normalizado por la raíz del valor cuadrático medio del campo.

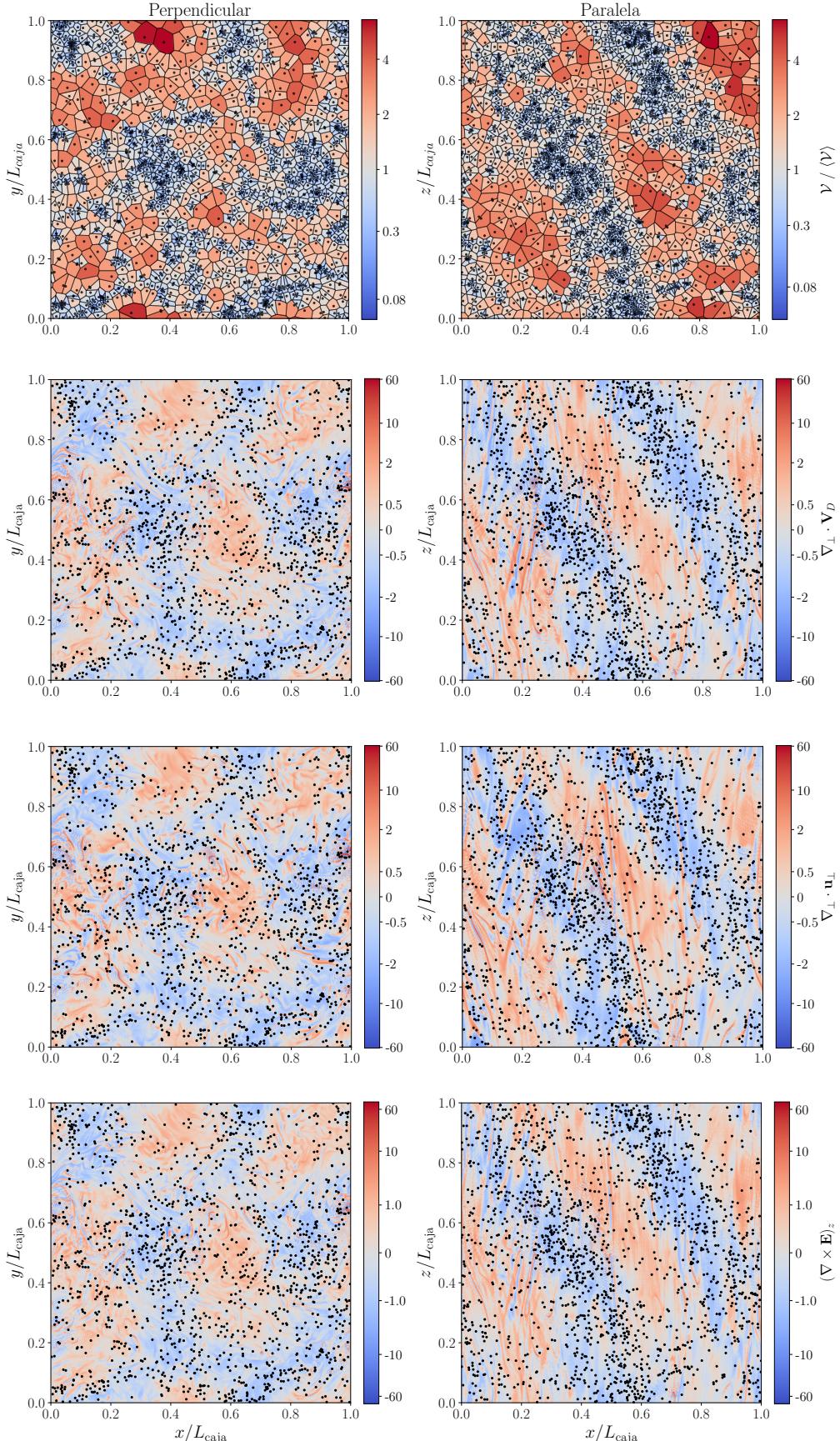
todo tiempo confirma esta observación. Esto es relevante pues, aunque las partículas sigan  $\mathbf{V}_D$ , podemos trabajar más fácilmente con  $\mathbf{u}_{\perp}$  como una aproximación razonable.

Esta similitud es el nexo que conecta la acumulación con la energización perpendicular excepcional. En el panel izquierdo de la figura 3.15, ilustramos un escenario ideal para  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp} < 0$ , donde las líneas de corriente convergen a un único punto. Este campo de velocidades  $\mathbf{u}_{\perp}$  genera un campo eléctrico inducido perpendicular  $\mathbf{E}_{\perp}^{\text{ind}} = -\mathbf{u}_{\perp} \times B_z \hat{\mathbf{z}}$  que rota en sentido horario dado que  $B_z = B_0 + b_z > 0$  (pues  $B_0 \gg b_{rms}$ ). Esta rotación horaria es equivalente a  $[\nabla \times \mathbf{E}]_z < 0$ , lo cual se cumple para las partículas acumuladas como muestra el panel derecho de la figura 3.15. De hecho, la clara similitud con la figura 3.14 se debe a que

$$[\nabla \times \mathbf{E}_{\perp}^{\text{ind}}]_z \approx -[\nabla \times (\mathbf{u} \times B_0 \hat{\mathbf{z}})]_z = B_0 \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}$$

Todo ion atrapado en esta región también girará en sentido horario, resultando en una potencia positiva  $\mathcal{P}_{\perp} = \alpha \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} > 0$  y considerable energización. En condiciones menos ideales, este alineamiento no será perfecto, pero debería ser suficientemente dominante como para asegurar una energización neta a lo largo de un giroperiodo completo, en una resonancia de tipo *betatron* (Swann 1933; Dalena et al. 2014).

Podemos visualizar el análisis anterior en la figura 3.16, donde mostramos el teselado de Voronoi (coloreando cada celda por su volumen) junto con los campos subyacentes  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V}_D$ ,  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}$  y  $[\nabla \times \mathbf{E}]_z$ .



**Figura 3.16:** Teselados de Voronoi con celdas coloreadas acorde a su volumen, divergencia perpendicular de la velocidad de deriva  $\nabla_D$ , divergencia perpendicular del campo de velocidad  $\mathbf{u}$  y componente paralela del rotor del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , para cortes perpendiculares y paralelos, de arriba hacia abajo.

para un corte perpendicular ( $z = L_{\text{caja}}/2$ ) y otro paralelo ( $y = L_{\text{caja}}/2$ ) a tiempo  $t = 0,66t_0$  para  $\alpha = 4$ . La similitud entre los tres campos escalares es clara, como mostramos previamente. Sin embargo, más relevante aún es la correlación entre la alta concentración de partículas (bajo volumen de celda) y la negatividad de los campos. Aunque esto está presente en ambas direcciones, es más apreciable en la dirección paralela, probablemente porque las estructuras son más elongadas a lo largo del eje  $z$ .

No obstante, este mecanismo no nos dice nada sobre la dinámica de la componente paralela y de hecho se invalida si las partículas no se encuentran confinadas también en esta dirección. Cómo vimos en la figura 3.8, el movimiento paralelo tiende a mantener su dirección, lo cual implica que solo partículas con bajo  $|v_z|$  pueden estar suficiente tiempo en estas regiones para explotar su energización perpendicular. El panel derecho de la figura 3.9 está en concordancia con esta observación. Repitiendo un análisis similar al anterior con el campo escalar  $b_z$  (no mostrado) se observa también que las partículas tienden a acumularse en regiones con  $b_z < 0$ . Dado que  $B_0 \gg |\mathbf{b}|$ , a primer orden  $|\mathbf{B}| \approx B_0 + b_z$ , por lo que las partículas se acumulan en regiones de campo magnético débil. Esto sugiere un mecanismo de tipo espejo magnético (ver sección 2.1.3) como candidato al confinamiento paralelo e implicaría que baja energización paralela es un requisito para la acumulación en lugar de una consecuencia de la misma.

Con este modelo a mano, podemos explicar el máximo en la figura 3.11 (panel derecho) y, en consecuencia, del máximo de la figura 3.5 (panel izquierdo). En base al argumento anterior, el requisito de bajo  $|v_z|$  para poder acumularse es claramente difícil de cumplir para partículas con alto  $\alpha$ , pues vemos en la figura 3.4 que tienden a tener alta energía cinética paralela. Por otro lado, las partículas con bajo  $\alpha$  exhiben las mayores desviaciones respecto al modelo de centro guía, como se muestra en la figura 3.7, y por lo tanto, no están completamente atrapadas como lo estaría un verdadero trazador. Otra forma de ver esto es notando que partículas con bajo  $\alpha$  tienen mayor giroradio  $R_c \sim 1/\alpha$ , que aumenta la probabilidad de que la partícula abandone la región a lo largo de un giroperiodo. En todo caso, esta competencia es reminisciente a aquella que mencionamos al final de la sección 3.2.1 y probablemente la refuerce.

Finalizamos este análisis revisitando el inesperado máximo en la componente paralela de la figura 3.13. Dado que un bajo  $|v_z|$  es un requisito para la acumulación, esto muestra que en ciertos casos un bajo desplazamiento paralelo puede ir en detrimento de la acumulación. Aunque en principio pueda ser contradictorio, es posible reconciliar estas afirmaciones concluyendo que la posición inicial de las partículas determina si son o no capaces de explotar este mecanismo. Partículas que empiezan lejos de estas regiones pueden nunca alcanzarlas sin adquirir previamente una mayor velocidad paralela; esto les permite explorar la caja pero impide que la captura sea efectiva o duradera. Este es probablemente el tipo de partículas con  $f_a \approx 0,2$  en la figura 3.13, aquellas que debieron recorrer la mayor distancia para alcanzar estas regiones y, en consecuencia, son incapaces de explotarlas tanto.

A lo largo de esta sección, la variación del parámetro  $\alpha$  de los iones nos permitió vislumbrar un mecanismo de energización de iones dominante en plasmas con los parámetros estudiados. Un mayor  $\alpha$  aumenta la intensidad de la interacción, pero también reduce el giroradio  $R_c \propto 1/\alpha$  de las partículas, magnetizándolas y forzándolas a seguir más fielmente las líneas de campo magnético. En la componente paralela, ambos efectos incrementan la energización, pues facilita que las partículas se mantengan dentro de las hojas de corriente explotando su aceleración  $\alpha E_z$ . En contraposición, para la energización paralela estos dos factores entran en competencia, dando lugar a un máximo para  $\alpha_c \approx 4$ . Al considerar la fracción de la energía total correspondiente a cada componente, eliminamos el efecto de la intensidad de la interacción y confirmamos que la disminución de  $\alpha$  implica una energización predominantemente perpendicular.

Entender el desplazamiento de las partículas es fundamental para explicar la diferencia de energización entre ambas componentes y comprender el funcionamiento de estas estructuras. En la componente paralela, el desplazamiento ligeramente superbalístico indica que los iones tienden a mantener su dirección de movimiento inicial a lo largo del campo guía, más una pequeña energización. En la perpendicular, el desplazamiento super-difusivo y débilmente dependiente de  $\alpha$  puede explicarse mayormente mediante una velocidad de deriva  $\mathbf{V}_D$  dada por (2.5) con tiempo de correlación no nulo. Este modelo predice zonas de acumulación donde  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V}_D < 0$ , lo cual confirmamos mediante un análisis de Voronoi. Partículas en estas regiones no solo experimentan bajo desplazamiento (están atrapadas), sino que además tienen alta energización perpendicular.

Esto último se debe a la alineación del campo eléctrico allí presente con la giración horaria de las partículas (resonancia betatrón), pues  $(\nabla \times \mathbf{E})_z \sim B_0 \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V}_D < 0$ . Aunque podría ser tentador relacionar estas estructuras directamente con la compresibilidad del flujo, mecanismos similares han sido observados en flujos incompresibles (Boffetta et al. 2005; Cressman et al. 2007; Stepanov et al. 2020), siempre que la dinámica pueda aproximarse razonablemente como bidimensional<sup>1</sup>. La compresibilidad, sin embargo, podría propiciar la formación de estas estructuras.

Este mecanismo, aunque muy eficiente para energizar perpendicularmente, tiene corta duración. A medida que la energía perpendicular aumenta, la dispersión en el ángulo de inclinación (ver sección 2.1.4) puede transferir parte de esta energía a la componente paralela, permitiendo que la partícula escape verticalmente. Incluso si esto no ocurre, el radio de giro aumenta junto con la energía hasta que eventualmente es comparable al tamaño de la región, permitiéndole escapar. La competencia previamente mencionada se manifiesta en que las partículas con  $\alpha$  intermedio ( $\alpha \approx 8$ ) son atrapadas más eficientemente, ya que las partículas con  $\alpha$  alto pueden alcanzar más fácilmente el  $v_z$  necesario para escapar, mientras que las de  $\alpha$  bajo son menos influenciadas por  $\mathbf{V}_D$  debido a su mayor radio de giro. En particular, este mecanismo de captura solo es aplicable a partículas más pesadas que los protones, para las cuales la velocidad de deriva es comparable a su velocidad paralela y resulta fundamental para comprender su dinámica.

---

<sup>1</sup>Incluso bajo la condición  $\nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0$ , es posible tener  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V}_D < 0$  si  $\partial_z V_{D,z} > 0$ .

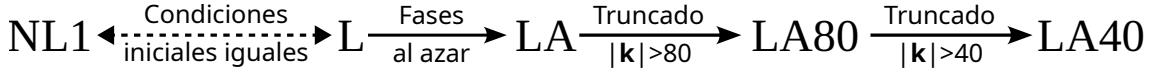


Figura 3.17: Esquema mostrando cómo se construyen las condiciones iniciales de cada simulación lineal a partir de NL1.

### 3.3. El rol de las ondas

En esta sección, continuaremos haciendo uso de la simulación NL1, pero fijaremos  $\alpha = 60$  (protones) dejando los demás parámetros idénticos. En particular, nos interesa estudiar el rol que las ondas presentes en el plasma tienen a la hora de energizar protones. Además, haremos uso también de las simulaciones NL2 y NL3, con el objetivo de identificar el impacto que el tiempo de correlación del forzado  $\tau_f$  tiene en la dinámica. Todas las simulaciones se integran durante  $\sim 300\tau_c$ .

#### 3.3.1. Lineal contra no lineal

Comenzaremos comparando la energización de protones en la simulación NL1 con la de simulaciones de CMHD linealizado, dado por las ecuaciones (2.80)-(2.82). Para ello modificamos el código GH0ST anulando todos los términos no lineales. Al ser lineales, estas ecuaciones carecen de cascada de energía, por lo que ningún modo fuera del cascarón  $2 \leq |\mathbf{k}| \leq 3$  recibirá energía del forzado. Esto sumado a la ausencia de disipación vuelve innecesaria la existencia de un forzado, por lo que estas simulaciones son perfectamente conservativas. Más aún, usaremos un método de Runge-Kutta de orden 4 para la integración temporal, al ser el método de orden 2 inestable en ausencia de disipación. Por otro lado, estas simulaciones no requieren el uso de FFTs para resolver convoluciones en espacio Fourier, lo que las vuelve considerablemente más rápidas que su contraparte no lineal.

Todas las simulaciones lineales usan alguna variación de estas condiciones iniciales obtenidas de NL1 (turbulencia desarrollada), según se resume en la figura 3.17. Esto es, se realiza una corrida NL1 hasta un estado estacionario y se toma este estado como condición inicial. La simulación L utiliza exactamente este estado alcanzado por NL1 como condición inicial, mientras que para LA se modifican la fase de los modos Fourier aleatoriamente. Esto se logra transformando cada modo Fourier  $\psi_{\mathbf{k}} \rightarrow e^{i\phi_{\mathbf{k}}}\psi_{\mathbf{k}}$  para cada campo escalar  $\rho$ ,  $u_j$  y  $b_j$ , donde  $\phi_{\mathbf{k}}$  son fases aleatorias uniformemente distribuidas y elegidas independientemente para cada  $\psi_{\mathbf{k}}$ . Luego, se imponen las condiciones necesarias sobre los campos resultantes (i.e., hermiticidad y gauge de Coulomb). Estas dos primeras simulaciones inician con exactamente el mismo espectro de energía que NL1 (ver figura 3.2), pero las fases aleatorias en LA destruyen toda correlación y estructura presentes en las condiciones iniciales de NL1 (Kuramoto 1984; Alexakis et al. 2007). En la figura 3.18 se muestran cortes perpendiculares de  $j_z$  para las condiciones iniciales de L y LA. La simulación L tiene estructuras coherentes en forma de hojas de corriente que son destruidas en LA, dejando en su lugar una estructura granular aleatoria. Las últimas dos simulaciones LA80 y LA40 usan los mismos modos Fourier que LA, pero imponiendo  $\psi_{\mathbf{k}} = 0$  para  $|\mathbf{k}| > 80$  y  $|\mathbf{k}| > 40$ , respectivamente. Cómo este truncado reduce levemente la energía total, compensamos reescalando uniformemente todos los coeficientes, preservando la estructura de ley de potencias del espectro.

Comenzamos comparando la evolución de la energía cinética media de las partículas, separando nuevamente en la componente perpendicular y la paralela al campo magnético guía, en la figura 3.18. En todos los casos, la energización perpendicular es mucho mayor que la paralela, según lo habitual. En ambas componentes, el caso lineal L presenta una energización mucho menor respecto al caso no lineal NL1. No obstante, las fases aleatorias de LA parecen aumentar mucho la energización, logrando superar incluso la de NL1. El truncado en  $|\mathbf{k}| = 80$  (LA80) cambia muy poco esto, pero el truncado en  $|\mathbf{k}| = 40$  (LA40) reduce notoriamente la energización, llevándola a niveles comparables con la simulación L. Más aún, en los casos perpendiculares las simulaciones lineales muestran un comportamiento difusivo o subdifusivo (en espacio de velocidades)  $\langle v_x^2 \rangle \sim t^a$  con  $a \lesssim 1$ . Esto sugiere que en las simulaciones lineales el mecanismo subyacente para la energización es análogo a un movimiento browniano, con incrementos de energía delta correlacionados. En esta analogía, las partículas tendrían interacciones muy fuertes y localizadas en el tiempo con los campos del plasma. En el contexto de la teoría casi lineal (Stix 1992), esta fuerte interacción puede pensarse cómo una resonancia con alguna onda específica presente en el sistema. Esta alta energización rápidamente remueve a la partícula de la condición de resonancia en pocos

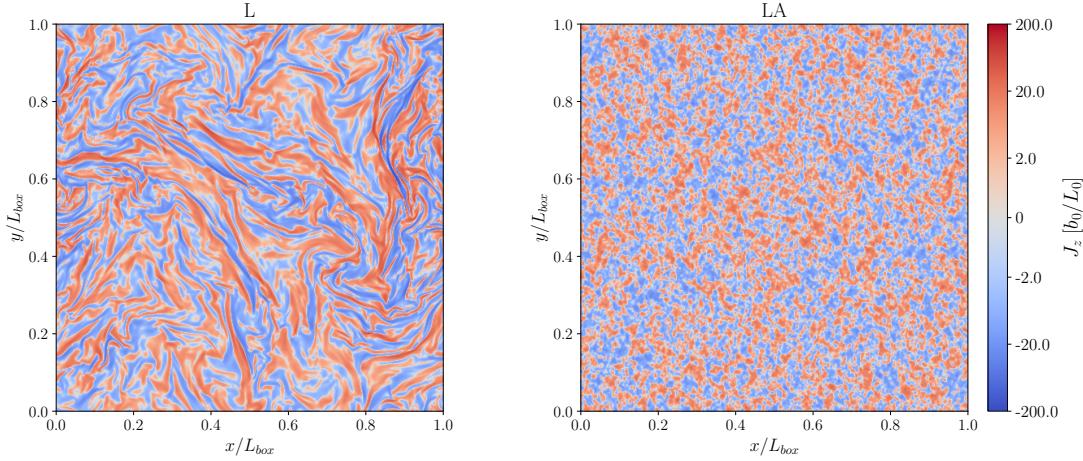


Figura 3.18: Corte perpendicular de la corriente de densidad  $j_z$  a  $t = 0$  (condición inicial) para las simulaciones L y LA, mostrando cómo las fases aleatorias destruyen las estructuras coherentes (hojas de corriente) del plasma.

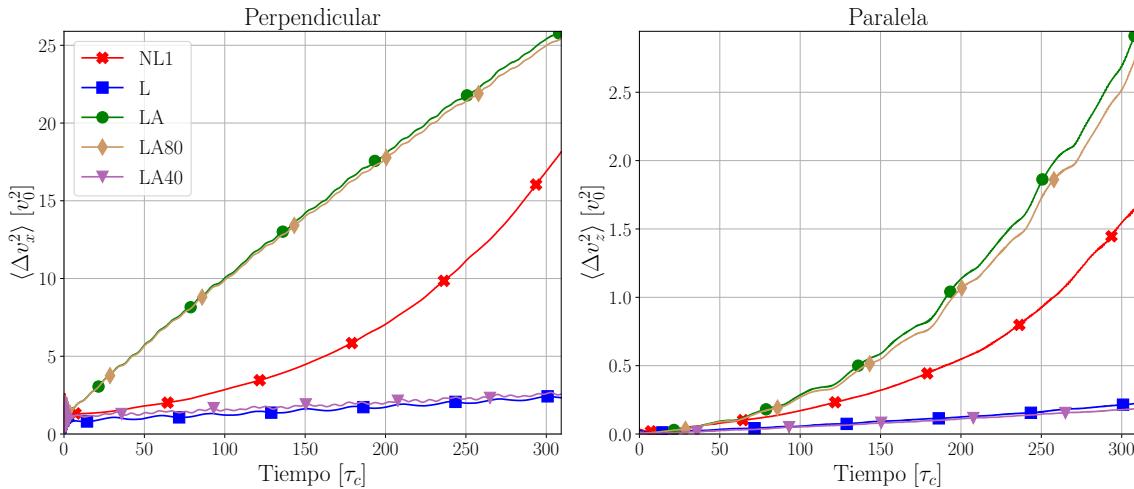
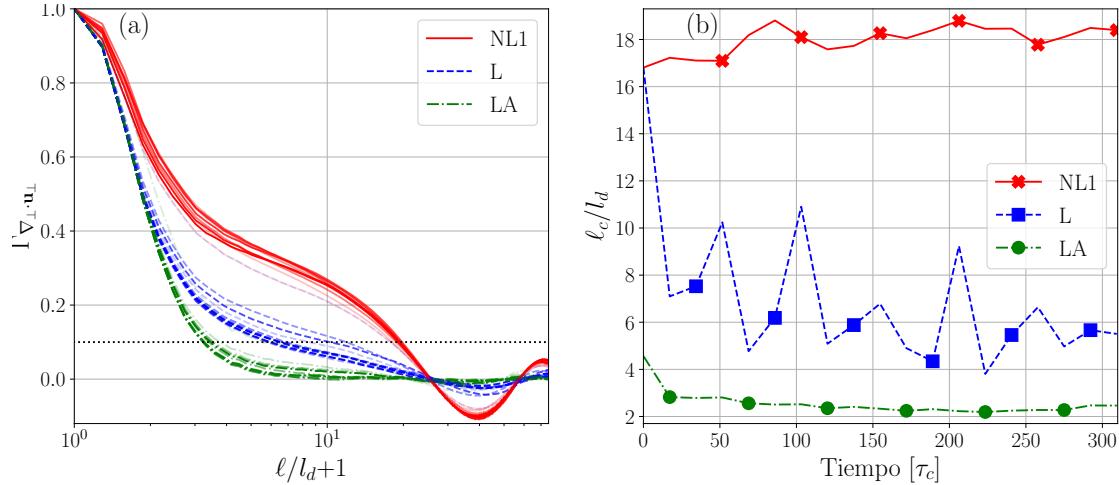


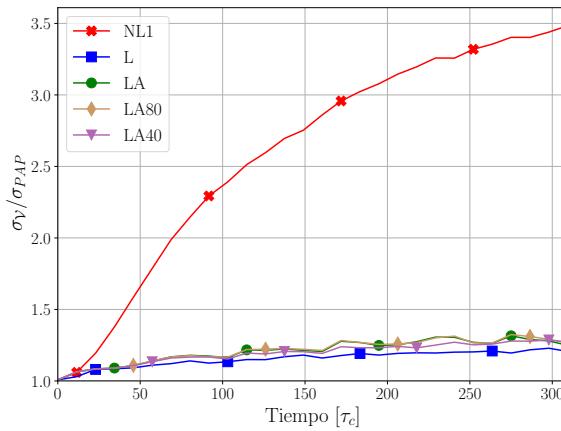
Figura 3.19: Evolución temporal de la energía cinética media en la dirección perpendicular (izquierda) y paralela (derecha), tanto para la simulación no lineal como para las lineales.

giroperiodos, asegurando que la interacción esté localizada en el tiempo.

Por otro lado, la energización en el caso no lineal es superdifusivo, lo cual está relacionado con la interacción entre partículas y estructuras coherentes presentes en el plasma, según discutimos en la sección 3.2. Con esto en mente, podemos relacionar la caída en la energización cuando  $\text{NL1} \rightarrow \text{L}$  con la desaparición de estructuras en el plasma debido a la evolución lineal. En las relaciones de dispersión de las ondas de Alfvén (2.86) y magnetosónicas (2.87), vemos que las ondas en CMHD son dispersivas (i.e., la velocidad de grupo y fase no coinciden) y, por lo tanto, cualquier estructura presente en el sistema al inicio tenderá a desarmarse. Para confirmar esto, calculamos la función de autocorrelación radial de dos puntos  $\Gamma$  del campo  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}$  en el plano perpendicular al campo magnético guía. En la figura 3.20(a), mostramos la autocorrelación para múltiples tiempos (colores más oscuros representan tiempos posteriores). De estas curvas, calculamos la longitud de autocorrelación  $\ell_c$ , definida en este caso como el desplazamiento para el cual la autocorrelación cae debajo del 10% (línea negra punteada). En la figura 3.20(b), mostramos la longitud de autocorrelación  $\ell_c$  como función del tiempo, donde notamos que para NL1 tenemos  $\ell_c \approx 18l_d$  a lo largo de toda la simulación. Por otro lado, para la simulación L comienza con el mismo valor pero rápidamente decae a  $\ell_c \approx 8l_d$  y luego decae lentamente hacia el valor de la simulación LA ( $\ell_c \approx 2l_d$ ). El bajo valor de  $\ell_c$  en la simulación LA confirma que las fases aleatorias destruyen toda correlación en el sistema, pues la longitud de correlación es comparable con la escala mínima del sistema  $l_d$ . Por lo tanto, vemos cómo la evolución lineal elimina las estructuras inicialmente presentes en el campo en menos de  $20\tau_c$ , evitando que las partículas puedan explotar los mecanismos de energización



**Figura 3.20:** (a) Autocorrelación radial a dos puntos  $\Gamma$  del campo escalar  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}$  en el plano perpendicular al campo magnético guía para distintos tiempos (colores más oscuros representan tiempos posteriores) como función del desplazamiento  $\ell$  normalizado por  $l_d$ , para las simulaciones NL1, L y LA. La línea negra punteada marca donde la autocorrelación cae debajo del 10 %, definiendo  $\ell_c$ . (b) Longitud de autocorrelación  $\ell_c$ , normalizada por  $l_d$ , como función del tiempo.

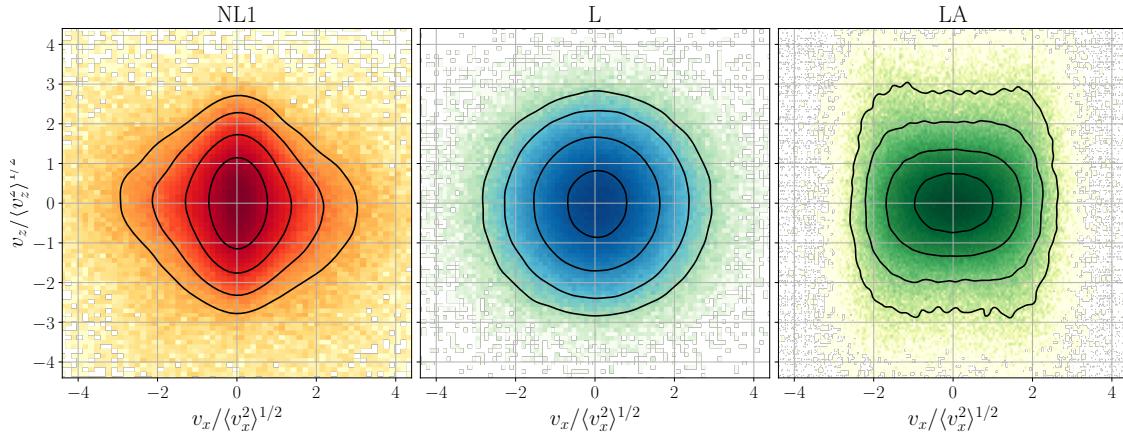


**Figura 3.21:** Desvío estándar de los volúmenes de Voronoi normalizados por el desvío estándar del caso uniforme como función del tiempo, tanto para la simulación no lineal como para las lineales

descriptos en la sección 3.2. Para completar este argumento, en la figura 3.21 mostramos el desvío estándar de los volúmenes de Voronoi como función del tiempo. Vemos que la simulación NL1 rápidamente aumenta su acumulación mientras que las simulaciones lineales se mantienen muy cerca del caso uniforme. El lento incremento de  $\sigma_V$  puede indicar que el mecanismo aún sobrevive en pequeñas escalas, pero dada la energización difusiva de la figura 3.19 consideramos este efecto secundario.

Nos volcamos ahora a comparar entre si la energización de las simulaciones lineales. Habiendo descartado la interacción con estructuras como mecanismo dominante, nos queda la resonancia onda-partícula. La primer observación es que las fases aleatorias  $L \rightarrow LA$  parecen incrementar enormemente la energización. Este hecho principalmente muestra la importancia de la hipótesis de mezcla de fases en TCL. La simulación L claramente no cumple esta hipótesis, pues sus condiciones iniciales son el producto de una evolución turbulenta no lineal y por lo tanto exhiben alta correlación entre las fases. Alternativamente, podemos visualizar la interacción onda-partícula como una conjunción de resonancia en términos de frecuencia y un alineamiento inicial entre el campo y la velocidad de la partícula. Este alineamiento es más fácil de cumplir bajo la hipótesis de mezcla de fases, mientras que para un estado turbulento las fases no logran llenar todo valor posible para todas las frecuencias.

Podemos visualizar los distintos mecanismos de energización computando la función de densidad de probabilidad (FDP) bidimensional de la velocidad de las partículas al final de cada simulación. La clara diferencia geométrica en las FDP mostradas en la figura 3.22, sugiere que cada



**Figura 3.22:** FDP bidimensional de la velocidad de las partículas, normalizada por su desvío estándar, a tiempo final para las simulaciones NL1, L y LA (a izquierda a derecha). Las curvas de nivel exhiben distintas geometrías, implicando distintos mecanismos subyacentes de energización.

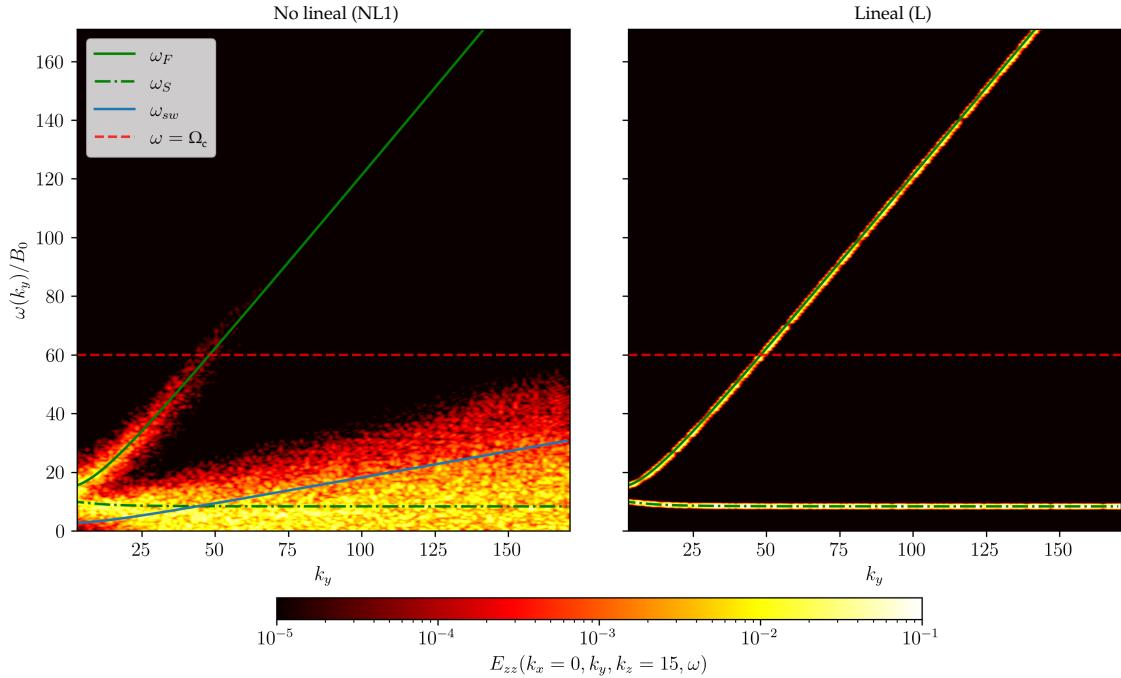
mechanismo es fundamentalmente distinto, al estar las velocidades normalizadas por su desvío estándar. Esta normalización remueve la notoria anisotropía en la energización (ver figura 3.19) y nos permite concentrarnos en las propiedades estadísticas. Cerca del origen, todas las distribuciones tienen curvas de nivel elípticas (aunque con distintos focos). A medida que nos alejamos del origen, cada distribución cambia significativamente. En particular, para la simulación NL1, tienden a rombos, reminscentes a mantener constante la norma 1 (i.e.,  $|v_x| + |v_z|$ ), sugiriendo que alta energización perpendicular y paralela en forma simultánea es improbable, como esperamos de estas estructuras (partículas con alto  $|v_z|$  son difíciles de capturar). Para la simulación L, las formas son claramente circulares, que corresponde a una norma 2 constante (i.e.,  $v_x^2 + v_z^2$ ) o energía cinética. Esto es consistente con dos variables gaussianas independientes, como se esperaría de un proceso difusivo en espacio de velocidades. Finalmente, para la simulación LA la situación es menos clara, con formas similares a rectángulos reminscentes a una norma  $\infty$  constante (i.e.,  $\max\{|v_x|, |v_z|\}$ ).

Volviendo a la figura 3.18, al comparar la simulación LA con sus versiones truncadas LA80 y LA40, notamos que el primer truncado (LA→LA80) tiene muy poco efecto en la energización, implicando que las partículas resuenan principalmente con ondas de  $|\mathbf{k}| < 80$ . Más aún, el segundo truncado LA80→LA40 reduce la energización por debajo incluso de la simulación L, mostrando que las partículas resuenan con ondas de  $|\mathbf{k}| > 40$ . Las FDP bidimensionales de velocidades para las simulaciones LA80 y LA40 (no mostradas aquí) son muy similares a las de LA y L de la figura 3.22, respectivamente. Aunque la similitud entre LA80 y LA es esperable, la de LA40 y L no es obvia y parece mostrar que ambas simulaciones comparten un mismo mecanismo de energización. Este último hecho implica que cambios en la distribución de fases de las ondas pueden ser tan importantes como cambios en el espectro de energía.

Con el objetivo de distinguir entre la presencia de ondas y estructuras en el plasma e investigar cual domina la dinámica, haremos uso de espectros espaciotemporales (Clark di Leoni et al. 2015; Andrés et al. 2017; Brodiano et al. 2021). Esto consiste en calcular el espectro en número de onda y frecuencia para todos los modos Fourier presentes en la simulación. Así, es posible distinguir modos que satisfacen una dada relación de dispersión (que asociamos con ondas) de aquellos asociados con estructuras no lineales o remolinos turbulentos y cuantificar la cantidad de energía que cada uno lleva. El espectro espaciotemporal de energía magnética se define según

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} \hat{B}_i^*(\mathbf{k}, \omega) \hat{B}_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.8)$$

donde  $\hat{B}_i(\mathbf{k}, \omega)$  es la transformada Fourier en tiempo y espacio de la componente  $i$  del campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$  y el asterisco es complejo conjugado. En esta notación, el espectro de energía magnética es la traza del tensor  $E_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ . Como el campo magnético guía  $\mathbf{B}_0$  apunta en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ , en la práctica consideraremos los casos  $i = j = y$  o  $i = j = z$  para identificar distintas ondas basadas en su polarización (transversal o longitudinal al campo guía). En todos los casos, la frecuencia de



**Figura 3.23:** Espectro espaciotemporal  $E_{zz}(k_x = 0, k_y, k_z = 15, \omega)$  para las fluctuaciones de campo magnético paralelas a  $\mathbf{B}_0$  para las simulaciones NL1 (izquierda) y L (derecha). Se muestran las relaciones de dispersión magnetosónicas (los modos de Alfvén están ausentes en esta dirección) junto con la girofrecuencia  $\Omega_c$  de las partículas y la frecuencia de barrido  $\omega_{sw}$ .

adquisición temporal es al menos 2 veces mayor que la frecuencia de la onda más rápida ( $\omega_f(\mathbf{k})$  con  $|\mathbf{k}| = k_{max}$  y  $k_{\parallel} = 0$ ) y el tiempo total de adquisición mayor que el periodo de la onda más lenta (ignorando modos con  $\omega = 0$ ). Es importante mencionar también que asumiremos que la energía concentrada alrededor de la relación de dispersión puede ser explicada por teorías lineales y de turbulencia débil (Chandran 2005, 2008), mientras que cualquier ensanchamiento es una señal de turbulencia fuerte que requiere una teoría no lineal completa para ser entendido.

La figura 3.23 muestra el espectro espaciotemporal de la energía magnética paralela  $E_{zz}(k_x = 0, k_y, k_z = 15, \omega)$  para las simulaciones NL1 y L<sup>2</sup>. Las ondas de Alfvén, al ser transversales, no tienen componente en esta dirección, por lo que solo mostramos las relaciones de dispersión de las ondas magnetosónicas. También mostramos la girofrecuencia característica  $\Omega_c = \alpha B_0$ , que se encuentra entre  $40 < |\mathbf{k}| < 80$  y la frecuencia de barrido (en inglés, *sweeping*)  $\omega_{sw} = U_{rms}|\mathbf{k}|$ , que interpretamos como la variación temporal de las estructuras advectadas por el flujo (Lugones et al. 2016). Según lo esperado, para la simulación lineal L, la energía magnética está finamente localizada alrededor de las ramas magnetosónicas, mientras que en la simulación no lineal NL1, la energía se acumula principalmente en las ramas magnetosónicas lentas para todos los números de onda. Una pequeña fracción de esta energía se ubica a lo largo de la rama magnetosónica rápida para números de onda bajos. Sin embargo, en el caso no lineal, la mayor parte de la energía está distribuida a lo largo del espectro debido a la dinámica turbulenta.

La ausencia de efectos de barrido en la simulación L es útil para entender su baja energización. Como mostramos en la figura 3.20, la correlación decae rápidamente durante la evolución lineal pero aún así no alcanza al caso de LA, lo que implica que algunas estructuras pueden sobrevivir más tiempo. La ausencia de barrido debido a la evolución lineal implica que estas estructuras supervivientes no son advectadas por el flujo. No obstante, las partículas si son advectadas, lo cual vuelve la captura más difícil y evita que las estructuras supervivientes puedan energizar efectivamente las partículas.

<sup>2</sup>Las demás simulaciones lineales tienen espectros idénticos a L, a lo sumo truncados.

Tabla 3.2: Resumen de resultados para las simulaciones no lineales, variando el tiempo de correlación del forzado  $\tau_f$ .

ID	$\tau_f/\tau_c$	$\ell_c/l_d$	$\langle \Delta v_x^2 \rangle/v_0^2$	$\sigma_V/\sigma_{PAP}$	$\langle S \rangle/\tau_c$
NL1	$1,146 \times 10^1$	18.0	24.3	1.87	2.23
NL2	$1,146 \times 10^0$	15.2	20.3	1.98	2.13
NL3	$2,865 \times 10^{-1}$	14.4	15.6	1.70	1.85

### 3.3.2. Impacto del tiempo de correlación del forzado

Pasamos ahora a analizar los resultados de las simulaciones NL2 y NL3, cuya diferencia con NL1 es el tiempo de correlación del forzado  $\tau_f$  (ver tabla 3.1). La energización es cualitativamente similar a la de NL1 (ver figura 3.19), pero no cuantitativamente. Lo mismo ocurre para la longitud de autocorrelación  $\ell_c$  y el desvío estándar de los volúmenes  $\sigma_V$ , resumido en la tabla 3.2 (la energización perpendicular  $\langle \Delta v_x^2 \rangle$  y  $\sigma_V$  están calculados al final de la simulación). Vemos que tanto la energización como la longitud de autocorrelación decrecen junto con  $\tau_f$ , mientras que  $\sigma_V$  carece de una tendencia clara y parece mantenerse constante. La reducción de  $\ell_c/l_d$  era esperable, pues un forzado más rápido (con tiempo de correlación más corto) evita que las estructuras sean estables, sea por falta de tamaño o intensidad. Luego, podríamos concluir que las partículas tienden a acumularse de forma similar en todos los casos, pero su capacidad de explotar el mecanismo de energización decrece junto con  $\tau_f$ .

Para cuantificar la interacción de partículas con estructuras que incluya información de la dinámica individual, computamos teselados de Voronoi para cada paso temporal y en cada uno determinamos que partículas están acumuladas (usando el criterio de acumulación explicado en 3.2.3). Cómo muestra la figura 3.21, este proceso de acumulación toma cierto tiempo en estabilizarse y por lo tanto la etiqueta de “acumulada” puede no significar mucho inicialmente. Para el final de la simulación, “acumulada” es prácticamente equivalente a “atrapada en una estructura”. Entonces, podemos determinar cuando y donde las partículas se están acumulando y así calcular cuánto tiempo ininterrumpido pasan acumuladas. Definimos una racha como un intervalo de tiempos (discretos) para el cual la partícula está acumulada y la longitud de este intervalo como  $S$ . En particular, calculamos la longitud media de estas rachas  $\langle S \rangle$  para cada simulación promediando sobre todas las rachas de todas las partículas. Este resultado se muestra en la última columna de la tabla 3.2. En promedio, las partículas están acumuladas durante dos giroperiodos en todos los casos, pero este valor decrece con  $\tau_f$ . Esto muestra que a pesar de que la acumulación es instantáneamente similar para todas las simulaciones, hay una mayor tasa de intercambio (entre partículas acumuladas y no acumuladas) en aquellas con bajo  $\tau_f$ . Esto sugiere que los cúmulos se vuelven más susceptibles e inestables para tiempos de correlación bajos. Para bajos  $\tau_f$ , el forzado rápidamente cambiante puede ser experimentado como golpes bruscos por las partículas, removiéndolas de las estructuras que las atrapan.

Para profundizar este análisis de rachas, lo relacionamos directamente con la energización de partículas. Para esto, separamos nuestros datos en intervalos de duración  $n\tau_c$  con  $n = 1, 2, 3$  y seleccionamos partículas que se mantengan acumuladas durante este tiempo (aquellas con rachas contenidas en el intervalo en cuestión). Para estas partículas, calculamos su energización perpendicular durante estos intervalos y lo graficamos en la figura 3.24. Podemos ver que tras  $\sim 100\tau_c$  (suficiente para que la acumulación se establezca), la energización se vuelve exponencial en el tiempo.

Para entender esto, proponemos un modelo muy simple para la interacción con estas estructuras. Usando la formulación introducida en la sección 2.1.4, podemos estimar la potencia neta  $\mathcal{P}_\perp$  entregada por el campo eléctrico a lo largo de un giroperiodo. Recordando que una partícula acumulada tiene bajo  $v_z$  y que la girofrecuencia de las partículas es alta respecto a las variaciones de campo electromagnético, podemos estimar el valor medio usando una aproximación análoga a la de la sección 2.1.3,

$$\langle \mathcal{P}_\perp \rangle = \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} \alpha \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp dt \approx \frac{\alpha}{\tau_c} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_\perp \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\alpha}{\tau_c} \iint_{S(\mathcal{C})} (\nabla \times \mathbf{E}_\perp) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.9)$$

donde  $\mathcal{C}$  es la trayectoria de la partícula aproximada por un círculo de radio  $R_c$  y usamos el teorema

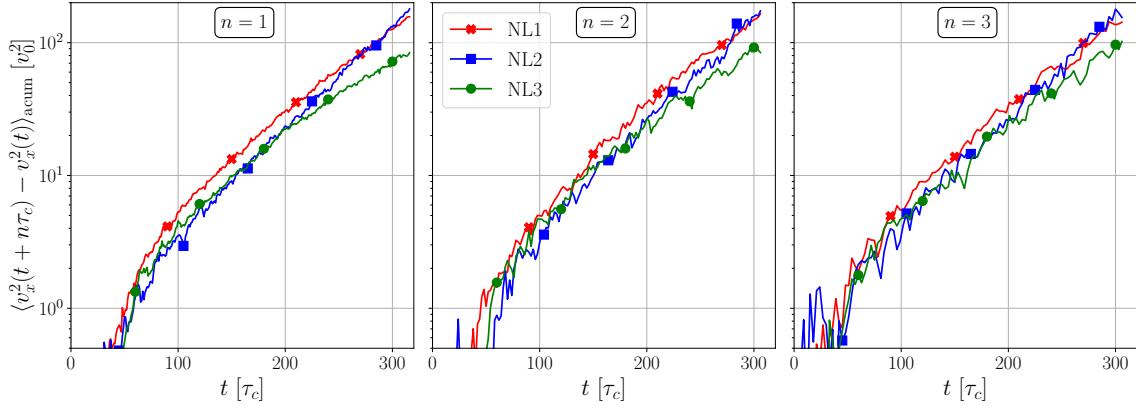


Figura 3.24: Energización perpendicular media de las partículas acumuladas durante intervalos de duración  $n\tau_c$  ( $n = 1, 2, 3$ ) para distintos tiempos a lo largo de cada simulación.

de Stokes con un signo negativo teniendo en cuenta la giración horaria de los protones. Para un campo magnético guía intenso, podemos aproximar (2.66) cómo  $\mathbf{E}_\perp \approx -\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}_0$  y al ser  $d\mathbf{S} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ , podemos calcular su componente  $z$  cómo

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z \approx B_0 \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp,$$

donde usamos la ecuación (2.117) para  $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp$ . Expandiendo la integral (3.9) al orden más bajo en  $R_c$ , obtenemos

$$\langle \mathcal{P}_\perp \rangle \approx -\frac{\alpha^2 B_0^2}{2\pi} \iint_{S(C)} \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp d\mathbf{S} \approx -\frac{\alpha^2 B_0^2}{2\pi} \pi R_c^2 \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp. \quad (3.10)$$

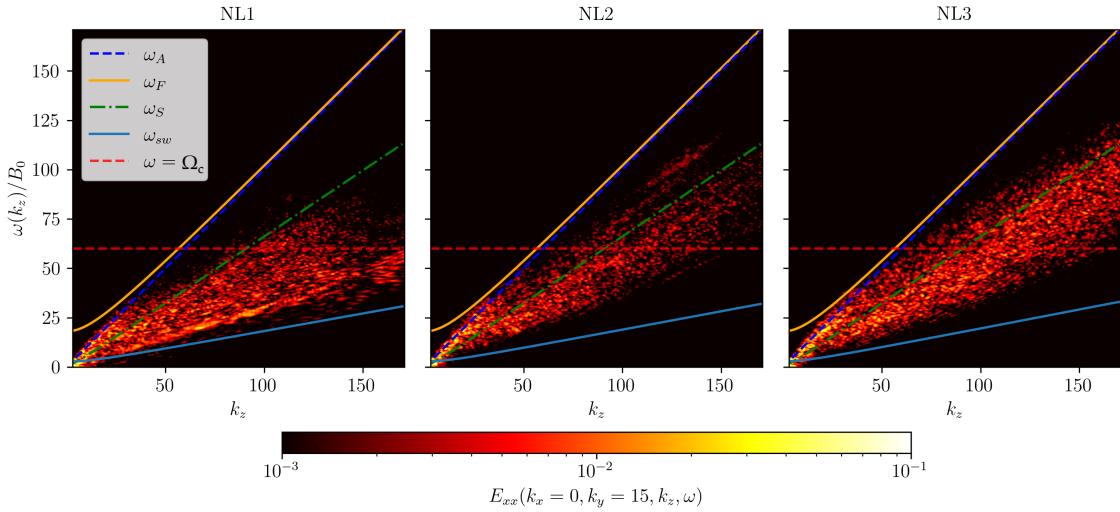
Usando que  $R_c = |\mathbf{v}_\perp|/\alpha B_0$  y  $\varepsilon_\perp = |\mathbf{v}_\perp|^2/2$  podemos estimar la tasa de energización cómo

$$\frac{d\varepsilon_\perp}{dt} = \lambda \varepsilon_\perp, \quad \lambda = -\nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp, \quad (3.11)$$

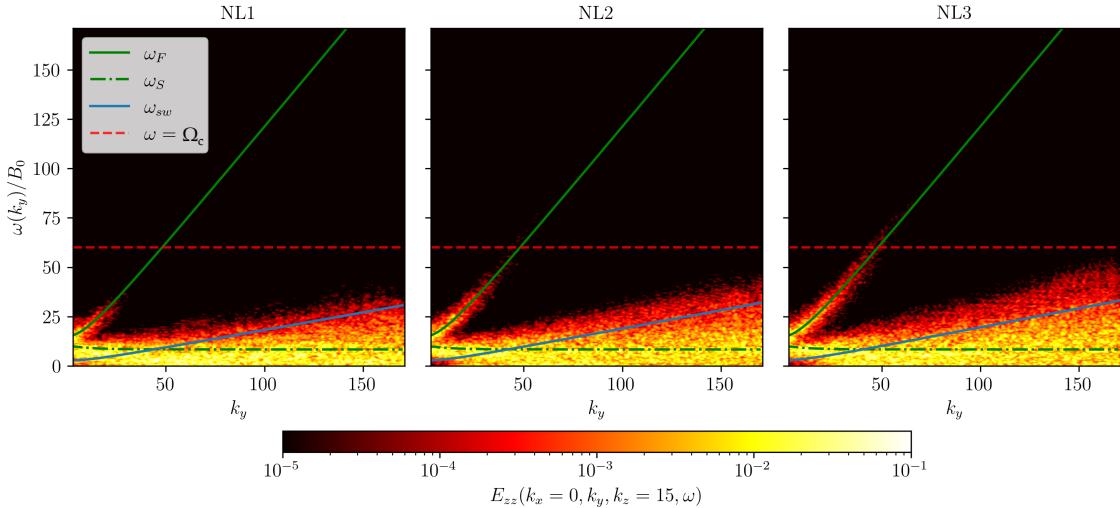
que para  $\nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp < 0$  y aproximadamente constante predice un crecimiento exponencial para  $\varepsilon_\perp$ . Este modelo simplificado captura la resonancia de tipo betatron que introdujimos en la sección 3.2.3 para explicar la relación entre acumulación y energización.

Las pendientes de la figura 3.9 representan este  $\lambda$  y son bastante similares, sugiriendo una tasa de energización similar para todas las partículas acumuladas. La diferencia en la energización observada en la tabla 3.2 debe entonces estar relacionada con el tiempo que cada partícula está acumulada, cómo indica  $\langle \mathcal{S} \rangle$ . Existen básicamente tres formas en que una partícula puede escapar de una estructura: (a) escapando verticalmente gracias a un alto  $v_z$ , (b) alcanzando el máximo giroradio permitido por la estructura o (c) siendo empujada por alguna fluctuación. Descartamos la opción (a) al notar que todas las partículas tienen una energización paralela muy similar (no mostrado aquí). La opción (b) implicaría que el giroradio  $R_c = |\mathbf{v}_\perp|/\alpha B_0$  es comparable al tamaño de las estructuras, que podríamos identificar con  $\ell_c$  y sería razonable dada su dependencia en  $\tau_f$  (ver tabla 3.2). Podemos estimar la energía cinética necesaria para esto cómo  $|\mathbf{v}_\perp|^2 \sim (\alpha B_0 \ell_c)^2 \sim 1600 v_0^2$ , lo cual es alcanzado por menos de 1 de cada  $10^4$  partículas y, por lo tanto, no puede ser la causa dominante. Esto deja (c) cómo la última opción, sugiriendo que las estructuras son menos robustas ante fluctuaciones y, en algún sentido, más débiles. En la dicotomía de ondas contra turbulencia, podríamos atribuir esta debilidad al predominio de las ondas sobre las estructuras.

Podemos cuantificar esta relevancia de las ondas mediante espectros espaciotemporales magnéticos. La figura 3.25 muestra el espectro espaciotemporal de la fluctuación perpendicular del campo magnético  $E_{xx}(k_x = 0, k_y = 15, k_z, \omega)$  para las simulaciones NL1, NL2 y NL3. Para facilitar la comparación, mostramos la relación de dispersión de las ondas de Alfvén (2.86) y las ondas magnetosónicas lentas y rápidas (2.87). Marcamos también la girofrecuencia  $\Omega_c$  de la partícula y la frecuencia de barido  $\omega_{sw}$ . Observamos que la energía está principalmente localizada alrededor de la rama lenta y, en menor medida, la de Alfvén. Más aún, a medida que  $\tau_f$  disminuye (i.e., pasamos de NL1 a NL3), la energía alrededor de los modos ondulatorios incrementa para valores de  $k_z$



**Figura 3.25:** Espectro espaciotemporal  $E_{xx}(k_x = 0, k_y = 15, k_z, \omega)$  de las fluctuaciones de campo magnético perpendiculares a  $\mathbf{B}_0$ . Se muestran las relaciones de dispersión de las ondas de Alfvén  $\omega_A$ , de las ondas magnetosónicas lentes  $\omega_S$  y de las ondas magnetosónicas rápidas  $\omega_F$ . Incluimos la frecuencia de giro de las partículas  $\Omega_c$  y la frecuencia de barrido  $\omega_{sw}$ .



**Figura 3.26:** Espectro espaciotemporal  $E_{zz}(k_x = 0, k_y, k_z = 15, \omega)$  de las fluctuaciones de campo magnético perpendiculares a  $\mathbf{B}_0$ . Se muestran las relaciones de dispersión de las ondas magnetosónicas rápidas  $\omega_F$  y de las ondas magnetosónicas lentes  $\omega_S$ . Incluimos la frecuencia de giro de las partículas  $\Omega_c$  y la frecuencia de barrido  $\omega_{sw}$ .

menores. De hecho, vale la pena notar que a medida que incrementamos el tiempo de correlación la energía tiende a desplazarse levemente hacia la frecuencia de barrido. Este resultado es compatible con el comportamiento de  $\ell_c/l_d$ , pues la energía de barrido está principalmente relacionada con las estructuras no lineales (ver tabla 3.2).

Para analizar los modos magnetosónicos, estudiamos el espectro espacio-temporal de las fluctuaciones magnéticas paralelas al campo guía  $E_{zz}(k_x = 0, k_y, k_z = 15, \omega)$  en la figura 3.26, mostrando la misma tendencia observada en la figura 3.25. De hecho, la energía alrededor de la rama magnetosónica rápida decrece notoriamente a medida que aumentamos  $\tau_f$ . Desafortunadamente, la rama magnetosónica lenta está completamente sumergida en la región de barrido, por lo que no podemos concluir nada sobre la variación de energía magnética alrededor de ella.

En esta sección, encontramos que la energización en el caso lineal es mucho menor que en el caso no lineal, pero solo cuando las fases de los campos se encuentran correlacionadas. Esto nos permite reinterpretar el papel de las fases en la energización de partículas, ya que usualmente se consideran secundarias en comparación con el espectro de energía. Además, este resultado muestra que la evolución lineal, sin importar cuán realista sea el espectro, no puede reproducir

fielmente la energización observada en una evolución no lineal. En particular, demostramos que las interacciones onda-partícula ocurren principalmente en modos con  $40 < |\mathbf{k}| < 80$ , lo cual, para ondas de Alfvén, es consistente con  $\omega_A \approx \Omega_c$ . Esto podría estar relacionado con la energización de Fermi de segundo orden,  $\omega \pm k_z v_z = \Omega_c$ , en el límite razonable  $\Omega_c \gg k_z v_z$ . Por otro lado, la energización de Fermi de primer orden ( $\omega = \pm k_z v_z$ ) requiere  $|v_z| \approx v_A \approx 9v_0$ , lo cual no es probable dada la energización paralela observada en la figura 3.19, ya que la energía media de las partículas es mucho menor que  $(9v_0)^2$ . Podemos aplicar un razonamiento análogo para las ondas magnetosónicas rápidas, cuya frecuencia  $\omega_F$  y velocidad resonante  $\omega_F/k_z$  son aún mayores. Por otro lado, la energización de Fermi de primer orden es más probable en las ondas magnetosónicas lentas y es el único mecanismo posible en la simulación LA40.

El hecho de que las simulaciones L y LA40 presenten mecanismos y tasas de energización similares es sorprendente, ya que refuerza aún más el papel de las fases en la energización de partículas. Si las ondas magnetosónicas lentas son responsables de la energización en la simulación LA40, también deberían serlo en la simulación L. Sin embargo, esto es poco probable, ya que la distribución de fases y energía es diferente en cada caso, debido a que la aleatorización de fases tiende a decorrelacionar y distribuir uniformemente la energía entre las distintas ramas. De acuerdo con nuestros resultados, la distribución de fases parece ser muy importante para ondas de gran longitud de onda, pero prácticamente irrelevante para ondas de longitud de onda pequeña. Este resultado sugiere que la visión simplificada de partículas resonando con una sola onda a la vez puede ser engañosa, y que quizás el ensanchamiento de la resonancia se vea amplificado en espectros tan complejos. Las FDPs de la figura 3.22 parecen indicar que la energización en los casos L/LA40 y LA/LA80 es fundamentalmente distinta.

En contraposición, mostramos que la energización de una partícula atrapada en una de las estructuras identificada en la sección anterior es exponencial. En base a este modelo, estas estructuras pueden asociarse a tubos de flujo en contracción, predominantemente paralelos al campo magnético guía, advectados por el flujo (Kagan et al. 2013; Du et al. 2018). Este mecanismo solo existe en las simulaciones no lineales, pues la linealización anula la advección e impide la captura de los iones. Estas estructuras son más eficientes a la hora de atrapar partículas cuando el tiempo de correlación del forzado  $\tau_f$  es mayor, incrementando la energización neta. En particular, forzados con mayor  $\tau_f$  parecen tener menos energía en las ramas magnetosónica rápida y Alfvénica, a la vez que incrementan la energía en la región de barido. Combinando ambas observaciones, concluimos que forzados de alta frecuencia (bajo  $\tau_f$ ) tienden a inducir más ondas en el sistema, no solo quitando energía de las estructuras sino también facilitando que las fluctuaciones expulsen a las partículas atrapadas por ellas. Por lo tanto, la energización de las partículas decrece a medida que aumenta la fracción de energía en ondas, confirmando que las estructuras juegan un papel protagónico.

## Capítulo 4

# Comparación con modelos cinéticos

Así, la presencia de iones y electrones supratérmicos es ampliamente observada en la naturaleza, y siempre parece originarse en regiones de plasmas suficientemente agitados que contienen campos magnéticos.

Eugene Parker & Derek Tidman, *Suprathermal particles*, 1958

Habiendo estudiado la energización de partículas de prueba con interacción unilateral de los campos electromagnéticos turbulentos sobre las partículas, pasamos ahora a un enfoque autoconsistente. Este enfoque se basa en el modelo cinético híbrido donde los protones son considerados cinéticamente y los electrones como fluido, ambos interactuando bilateralmente con los campos electromagnéticos según lo descripto en la sección 2.2.4. Esta interacción bilateral inevitablemente reducirá la energización, al imponer limitaciones como la conservación de la energía total.

En este capítulo, nos concentraremos en el módulo híbrido de partícula en celda, empezando por explicar y justificar su correcto funcionamiento. Luego, lo utilizamos en un estudio comparativo para evaluar la validez de la aproximación de partícula de prueba. Tomando el modelo híbrido como verdad fundamental, analizamos que fenomenología física se pierde al tomar la interacción como unilateral.

### 4.1. Implementación de módulo PIC híbrido en GHOST

En esta sección se describe de la implementación del módulo híbrido de partícula en celda (HPIC, por sus siglas en inglés) en el código GHOST. Se explican los algoritmos utilizados para la evolución y paralelización, seguido de una sección donde verificaremos que el módulo es capaz de reproducir la física de plasmas no colisionales a escala protónica.

#### 4.1.1. Evolución temporal

Empecemos considerando cómo evolucionar la ecuación de Newton de las partículas (2.58), asumiendo los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  como dados. El estándar utilizado en la comunidad es el algoritmo de Boris (Boris 1970). Este método es de tipo salto de rana (*leapfrog*, en inglés), lo cual implica que la posición y velocidad se evalúan en distintos tiempos, por lo que buscamos calcular  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$  y  $\mathbf{v}_{n-1/2} = \mathbf{v}(t_n - \Delta t/2)$  donde  $\Delta t$  es el paso temporal y  $t_n = n\Delta t$  el tiempo en cuestión. Estos métodos permiten obtener fácilmente esquemas simétricos, lo cual asegura la reversibilidad temporal y, en este caso particular, vuelve al algoritmo *simpléctico*<sup>1</sup> (Qin et al. 2013). De esta forma, se asegura que el balance de energía se cumple con muy alta precisión, alcanzando la precisión de máquina en ausencia de campo eléctrico.

<sup>1</sup>En realidad, el algoritmo preserva el volumen de fases a lo largo de la evolución, que es condición necesaria pero no suficiente para ser considerado simpléctico. Al ser esta preservación la propiedad más importante de un algoritmo simpléctico, en esta tesis dejaremos de lado la sutil distinción.

El esquema de Boris puede escribirse cómo

$$\frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t} = \mathbf{v}_{n+1/2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\mathbf{v}_{n+1/2} - \mathbf{v}_{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E}_n + \frac{\mathbf{v}_{n+1/2} + \mathbf{v}_{n-1/2}}{2} \times \mathbf{B}_n \right), \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}(\mathbf{x}_n, t_n)$  y  $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}(\mathbf{x}_n, t_n)$ . En principio, este esquema es implícito pues  $\mathbf{v}_{n+1/2}$  aparece a ambos lados de (4.2). Sin embargo, al ser lineal es posible obtener una solución exacta, que por simplicidad escribimos cómo

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{q}{m} \mathbf{E}_n, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \frac{2}{1 + |\phi_n|^2} (\mathbf{v}^- \times \phi_n + \mathbf{v}^-) \times \phi_n, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{\Delta t}{2} \frac{q}{m} \mathbf{E}_n, \quad (4.5)$$

donde  $\phi_n = \Delta t q \mathbf{B}_n / 2m$  es el vector de rotación asociado a  $\mathbf{B}_n$ . El algoritmo finaliza aplicando (4.1) para obtener  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{v}_{n+1/2}$ .

A pesar de todas sus ventajas, el hecho de no disponer  $\mathbf{x}_n$  y  $\mathbf{v}_n$  impide realizar los depósitos (2.63) a tiempo  $t_n$ <sup>2</sup>. En muchos códigos (Matthews 1994; Muñoz et al. 2018; Bird et al. 2022), se obtienen valores intermedios para la velocidad mediante interpolaciones cómo, por ejemplo,  $\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_{n+1/2} + \mathbf{v}_{n-1/2})/2$ . Muchos de estos códigos también usan grillas escalonadas (*staggered grids*, en inglés) donde el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  se evalúan en grillas entrelazadas, tal que no es posible conocer ambos campos en el mismo punto. Al haber nacido en el contexto de fluidos, GHOST pone especial protagonismo en los campos, por lo que cualquier módulo agregado debe respetar esa filosofía. Puntualmente, la idea de que todos los campos son conocidos para los mismos tiempos y puntos de grilla entra en contradicción con lo mencionado previamente.

Con esto en mente, proponemos modificar el esquema de Boris anterior para que opere correctamente dentro del Runge-Kutta 2 (RK2) del método pseudoespectral utilizado para evolucionar los campos descripto en la sección 2.3.4. La idea fundamental es hacer un nexo entre los pasos intermedios del algoritmo de Boris (4.3)-(4.5) y el paso intermedio de RK2. Por lo tanto, consideraremos  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$ ,  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}(t_n)$ ,  $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}(\mathbf{x}_n, t_n)$  y  $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}(\mathbf{x}_n, t_n)$  donde  $n$  puede ser semi-entero para tener así en cuenta el paso intermedio. Asumiendo que al inicio de cada paso temporal disponemos de las posiciones  $\mathbf{x}_n$  y velocidades  $\mathbf{v}_n$  de cada partícula y el campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_n)$ , proponemos cómo esquema

1. Realizar el depósito a tiempo  $t_n$  utilizando  $\mathbf{x}_n$  y  $\mathbf{v}_n$  para obtener los campos  $n_p(\mathbf{x}, t_n)$  y  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t_n)$ .
2. Computar el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_n)$  utilizando  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_n)$ ,  $n_p(\mathbf{x}, t_n)$  y  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t_n)$  en (2.47) y (2.48).
3. Evolucionar medio paso temporal el campo magnético utilizando  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_n)$  para obtener  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$ . Esto corresponde al primer paso del esquema de RK2 (2.98) sobre la ecuación de inducción (2.49).
4. Evolucionar  $\mathbf{x}_n$  y  $\mathbf{v}_n$  medio paso temporal mediante

$$\mathbf{x}_{n+1/2} = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_n, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{4} \frac{q}{m} \mathbf{E}_n, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \frac{2}{1 + |\phi_n|^2} (\mathbf{v}^- \times \phi_n + \mathbf{v}^-) \times \phi_n, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{\Delta t}{4} \frac{q}{m} \mathbf{E}_n, \quad (4.9)$$

donde  $\phi_n = \Delta t q \mathbf{B}_n / 4m$ .

<sup>2</sup>Con excepción de la densidad  $n_p$  correspondiente a  $g(\mathbf{v}) = 1$ .

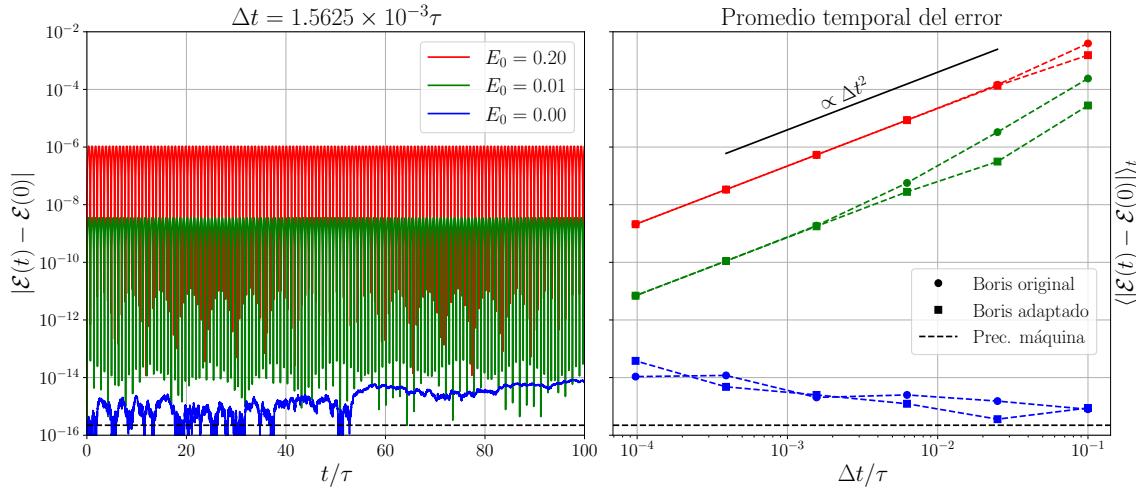


Figura 4.1: (Izquierda) Conservación de la energía para distintos valores de  $E_0$  durante los primeros 100 giroperiodos para el algoritmo propuesto. (Derecha) Escaleo del error promedio en la conservación como función del paso temporal  $\Delta t$ , comparando el algoritmo propuesto con el original de Boris.

5. Realizar el depósito a tiempo  $t_{n+1/2}$  utilizando  $\mathbf{x}_{n+1/2}$  y  $\mathbf{v}_{n+1/2}$  para obtener los campos  $n_p(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$  y  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$ .
6. Computar el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$  utilizando  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$ ,  $n_p(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$  y  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$  en (2.47) y (2.48).
7. Evolucionar un paso temporal el campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_n)$  utilizando  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$  para obtener  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ . Esto corresponde al segundo paso del esquema de RK2 (2.98) sobre la ecuación de inducción (2.49).
8. Evolucionar  $\mathbf{x}_n$  y  $\mathbf{v}_n$  un paso temporal completo mediante

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2} \frac{q}{m} \mathbf{E}_{n+1/2}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \frac{2}{1 + |\phi_{n+1/2}|^2} (\mathbf{v}^- \times \phi_{n+1/2} + \mathbf{v}^-) \times \phi_{n+1/2}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}^+ + \frac{\Delta t}{2} \frac{q}{m} \mathbf{E}_{n+1/2}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \frac{\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n}{2}, \quad (4.13)$$

donde  $\phi_{n+1/2} = \Delta t q \mathbf{B}_{n+1/2} / 2m$ .

Analicemos un poco este algoritmo, concentrandonos en los pasos 4 y 8 correspondientes al algoritmo de Boris modificado. Los primeros 3 pasos corresponden a la primera fase del esquema RK2, que utilizamos para obtener una estimación de  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$ . Claramente, esto no basta para aplicar el algoritmo de Boris original, pues no solo falta el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$ , sino además el  $\mathbf{x}_{n+1/2}$  donde evaluarlos. Para remediar esto, en el paso 4 estimamos  $\mathbf{x}_{n+1/2}$  y  $\mathbf{v}_{n+1/2}$  aplicando un el algoritmo de Boris a medio paso ( $\Delta t \rightarrow \Delta t/2$ ) pero evaluando los campos electromagnéticos a tiempo y posición iniciales en vez de intermedias. Esto ciertamente niega parte de las virtudes del esquema de Boris, pero resulta de todos modos una estimación razonable, como veremos en las pruebas más adelante. Los siguientes pasos 5 y 6 nos permiten obtener el  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$  faltante, junto con el paso 7 que cierra la segunda fase del esquema RK2. Nótese entonces que tenemos estimaciones de todos los ingredientes necesarios para aplicar el esquema de Boris original (4.3)-(4.5). Hacemos esto mismo en el paso 8, cambiando la estimación original de  $\mathbf{v}_{n+1/2}$  por  $(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)/2$ . Esto se debe a que todas estas estimaciones intermedias a tiempo  $t_{n+1/2}$  son considerablemente menos confiables que las estimaciones a tiempo final  $t_{n+1}$ . Más aún, nótese que en el paso 8 no hacemos uso de  $\mathbf{x}_{n+1/2}$  y  $\mathbf{v}_{n+1/2}$  más que para computar e interpolar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ : el punto de partida sobre el que se suma el incremento es siempre  $\mathbf{x}_n$  y  $\mathbf{v}_n$ . Es por este tipo de aspectos que consideramos este esquema como un híbrido entre RK2 y Boris y lo llamamos algoritmo de Boris adaptado. Este algoritmo

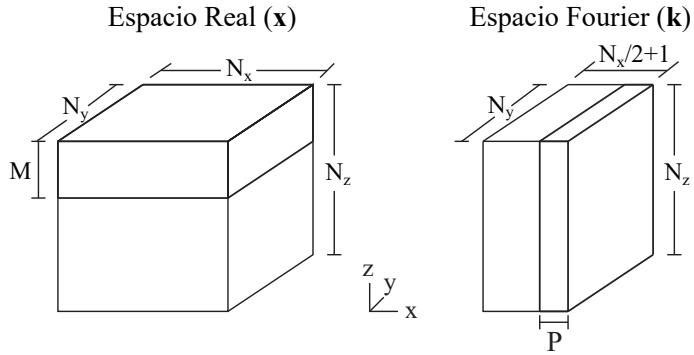


Figura 4.2: Descomposición en fetas utilizada por el método pseudoespectral implementado en GHOST, tanto en espacio real como Fourier. Véase el texto para las definiciones de los distintos parámetros. Adaptada de Mininni et al. 2011

es también de orden 2 y, a pesar de no ser exactamente simpléctico ni reversible temporalmente, hereda mucha de la robustez del algoritmo de Boris original. Aunque trivial, es importante notar que en caso de campos electromagnéticos uniformes, este nuevo algoritmo es idéntico al original.

Como primera prueba, consideremos un campo electromagnético dado externamente y estudie- mos la dinámica de una única partícula. A modo de verificación, usaremos el diagnóstico empleado en Qin et al. 2013, comparando el algoritmo de Boris original con el aquí propuesto. Al no necesitar evolucionar los campos electromagnéticos, el algoritmo reduce simplemente a los pasos 4 y 8. En unidades arbitrarias, los campos utilizados son

$$\mathbf{B}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad \phi(x, y) = \frac{E_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \mathbf{E} = E_0 \frac{x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (4.14)$$

donde  $\phi$  es el potencial electrostático, tal que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . La energía de la partícula es una magnitud conservada y toma la forma

$$\mathcal{E} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \phi(\mathbf{x}). \quad (4.15)$$

En la figura 4.1 podemos observar la variación de esta energía mecánica para 3 valores distintos de  $E_0$  durante los primeros 100 giroperiodos de evolución. Para el caso sin campo eléctrico, la conservación se da prácticamente a precisión de máquina, con una leve acumulación de error tras  $\sim 50\tau$  mientras que en los otros 2 casos el error se mantiene acotado, poniendo de manifiesto su estabilidad. En el panel derecho, podemos observar cómo escala el error medio en función del paso temporal utilizado para ambos métodos. Ignorando las fluctuaciones para  $\Delta t$  altos, ambos métodos tienen un desempeño idéntico.

#### 4.1.2. Descomposición del dominio

Pasamos ahora a detallar cómo se realizan las interpolaciones y depósitos necesarias para evolucionar el sistema. En particular, nos interesa un algoritmo paralelizable, capaz de ser ejecutado en múltiples procesadores simultáneamente, cada uno de ellos cargando parte del costo computacional. En su concepción original, GHOST descompone el dominio espacial tridimensional en fetas bidimensionales, asignando una feta a cada procesador (Mininni et al. 2011). En espacio Fourier, realiza una descomposición similar pero a lo largo de una dirección ortogonal, para poder así paralelizar las FFTs. En el contexto del módulo PIC, solo nos importa la primera de estas descomposiciones, pues toda la información de las partículas corresponde al dominio espacial. En la figura 4.2 esta esquematizada esta descomposición tanto en espacio real como Fourier, donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  son las resoluciones en cada dirección. Para una descomposición en  $n$  procesadores, cada uno tendrá una feta de base  $N_x \times N_y$  y altura  $M = N_z/n$  en la dirección restante<sup>3</sup>. Análogamente, en espacio Fourier serán fetas de base  $N_y \times N_z$  y espesor  $P = (N_x/2 + 1)/n$ .

El código GHOST dispone ya de un módulo para el tratamiento de partículas Lagrangianas, iniciales y de prueba, este último utilizado para las simulaciones del capítulo 3. Estos módulos se

<sup>3</sup>Asumiremos que  $N_z$  es un múltiplo entero de  $n$  por simplicidad. En general, el  $i$ -ésimo procesador ( $i = 0, \dots, n-1$ ) tendrá  $M_i = q + \delta_i$  con  $\delta_i = 1$  si  $i < r$  y  $\delta_i = 0$  sino, donde  $q$  y  $r$  son el cociente y resto de dividir  $N_z$  por  $n$  (i.e.  $N_z = qn + r$  con  $0 \leq r < n$ ).

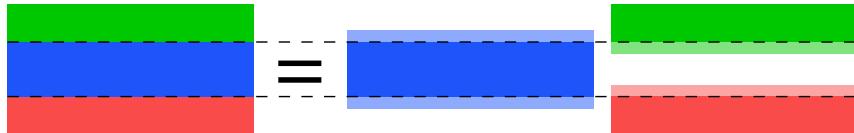


Figura 4.3: (Izquierda) Esquema de la descomposición del dominio (caso 2D) indicando un dominio central (azul) junto con sus 2 dominios adyacentes (verde y rojo). (Derecha) Disgregado de los dominios por separado, indicando sus regiones fantasma superpuestas en tono más claro.

basan en la descomposición anterior, distribuyendo las partículas entre los distintos procesadores tal que cada uno disponga de las partículas dentro de su feta. Sin embargo, partículas muy cercanas a los bordes pueden requerir información fuera de la feta a la hora de interpolar. Es por esto que estos módulos utilizan *regiones fantasma* por fuera del dominio propio del procesador, a modo de disponer de una copia parcial de la información de los procesadores adyacentes. Son así llamadas porque cada procesador puede verlas y usar su información, pero es incapaz de modificarlas. En la figura 4.3 podemos ver una representación esquemática de estas regiones fantasma para un procesador y sus dos procesadores adyacentes (inferior y superior). La información correspondiente a estas regiones fantasma puede entonces usarse para completar las interpolaciones (2.59) necesarias para PIC. Al final de cada paso temporal y cada paso intermedio (ver sección anterior), los procesadores comunican sus regiones fantasma a los procesadores adyacentes para mantener así la información actualizada.

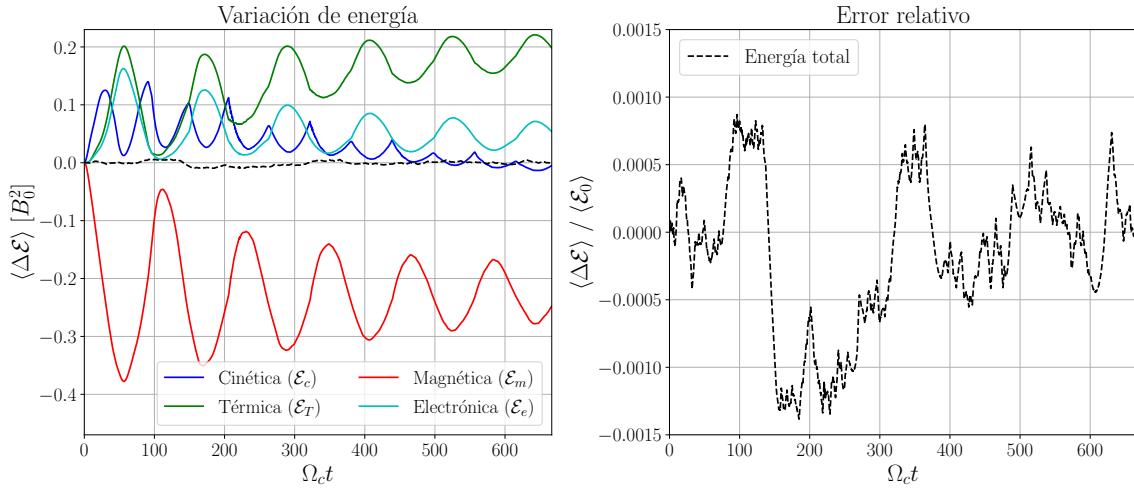
Todas las funcionalidades descriptas hasta ahora estaban ya presentes en GHOST, por lo que pudieron ser trasladadas al módulo PIC con relativamente poco esfuerzo. Más aún, GHOST dispone de algoritmos para que cada procesador detecte cuando una partícula escapa de su dominio y así pueda ser reasignada. Sin embargo, en su formulación original esto implica una comunicación todos-con-todos donde los procesadores hacen una puesta en común. Allí, construyen una misma lista con toda la información de todas las partículas y luego cada uno busca aquellas que le correspondan. Esto implica que, en principio, cada procesador necesita tener asignada suficiente memoria<sup>4</sup> como para almacenar todas las partículas, lo cual es posible únicamente para simulaciones con pocas partículas como las del capítulo anterior. Para simulaciones PIC, el número de partículas es considerablemente mayor, por lo que es habitual que los procesadores no dispongan de suficiente memoria para aplicar este método.

Frente a esto, implementamos algoritmos de intercambio de partículas a primeros vecinos. En esta formulación, el procesador se asegura de enviar la información de la partícula saliente al procesador adyacente que corresponda, dependiendo de si escapó del dominio por arriba o por debajo. Esta comunicación, al igual que el de las regiones fantasma, no es todos-con-todos, sino de a pares tal que ningún procesador deba comunicarse con más que sus dos vecinos, reduciendo considerablemente el tiempo de comunicación. Más importante aún, esto reduce considerablemente la memoria necesaria. Sin embargo, ya no es posible en principio saber cuanta memoria requerirá cada procesador para ejercutar su evolución, pues siempre es posible que todas las partículas terminen acumuladas en un mismo dominio. Para solucionar este problema, implementamos un uso de memoria dinámico para cada procesador. Cada procesador comienza la simulación con la memoria exacta que necesita para almacenar las partículas que le corresponden inicialmente más un 10 % adicional para tomar en cuenta pequeñas fluctuaciones. Sin embargo, si en algún momento esta memoria se encuentra completamente utilizada y el procesador debe recibir nuevas partículas, expandirá esta memoria en un 10 % adicional, pausando temporalmente la evolución. Esta pausa no es despreciable, por lo que el valor de 10 % fue elegido como un compromiso entre entre la necesidad de minimizar la cantidad de expansiones y el consumo neto de memoria. En contraposición, cada una cierta cantidad de pasos temporales<sup>5</sup>, cada procesador revisa cuanta memoria tiene sin utilizar y la contrae en múltiplos del 10 % original hasta tener la cantidad necesaria (más un pequeño margen, como se mencionó anteriormente). Esta contracción es fundamental, pues habitualmente la memoria es un recurso compartido entre múltiples procesadores y esta es una forma de devolverlo al conjunto, tal que posteriormente pueda ser usada por otro procesador.

El ingrediente faltante para poder implementar el algoritmo de la sección anterior es la ca-

<sup>4</sup>Nos referimos a la memoria de acceso aleatorio (RAM, por sus siglas en inglés). Un nodo de cómputo moderno tiene habitualmente entre 64GB y 256GB, compartida entre sus procesadores tal que cada uno dispone de ~2GB.

<sup>5</sup>Por defecto, son 100 pasos, pero esto es configurable dentro del código.



**Figura 4.4:** (Izquierda) Evolución de las distintas energías en una simulación cinética híbrida unidimensional, con una energía total aproximadamente constante. (Derecha) Error relativo de la energía total, mostrando que el error se mantiene acotado y tolerable.

pacidad de hacer depósitos de las distintas propiedades de partícula. Al igual que una partícula puede necesitar información fuera del dominio para poder interpolar un campo sobre ella, su depósito puede afectar puntos de grilla fuera del dominio. Puntualmente, para una simulación con funciones de forma de orden  $\ell$ , tanto la interpolación como el depósito interactúan con  $\ell + 1$  puntos de grilla en cada dirección, para un total de  $(\ell + 1)^d$  puntos de grilla totales con  $d$  la dimensión del problema (véase apéndice A). Por lo tanto, en general basta tomar regiones fantasma de altura  $\lceil (\ell + 1)/2 \rceil$ , que para los ordenes más habituales reduce a 1 para  $\ell = 0, 1$  y 2 para  $\ell = 2, 3$ . Tanto la interpolación como el depósito tienen el mismo alcance, por lo que las regiones fantasma también resuelven este problema. Con esto en mente, cada vez que se realiza un depósito, cada procesador depositará las propiedades de sus partículas dentro de su dominio y también en su región fantasma. Luego, se comunicará con sus vecinos, intercambiando regiones fantasma y sumándolas al depósito hecho en su propio dominio, completando así el proceso.

#### 4.1.3. Verificación

Habiendo verificado que el método es robusto para campos magnéticos impuestos externamente en la sección 4.1.1, pasamos ahora al caso autoconsistente. Consideraremos algunas pruebas utilizadas en Muñoz et al. 2018 para verificar que el módulo es capaz de reproducir la dinámica conocida de plasmas no colisionales a escala iónica. Al igual que en ese trabajo, nos concentraremos en simulaciones unidimensionales y funciones de peso de orden 1 para poder utilizar resoluciones moderadas sin pagar un alto tiempo de cómputo. A pesar de que la dependencia sea unidimensional, los campos y velocidades seguirán trabajándose como tridimensionales.

Empezaremos por la más fundamental de estas pruebas: la conservación de la energía  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_T + \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e$  con las energías definidas según las ecuaciones (2.50), (2.51) y (2.52). Como nos interesa principalmente la estabilidad a largo plazo, inicializamos una simulación unidimensional de resolución  $N = 1024$  y 2500 partículas por celda (ppc) y un grillado uniforme de tamaño  $\Delta x \sim d_p/4$  capaz de resolver la dinámica protónica. Consideraremos un campo guía perpendicular  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{y}}$  y fluctuaciones magnéticas con energía  $\langle |\mathbf{b}|^2 \rangle = B_0^2$  en un cascarón en espacio Fourier con  $1 \leq |\mathbf{k}| \leq 2$  con fases al azar. Usaremos un paso temporal  $\Omega_c \Delta t \approx 4.4 \times 10^{-5}$  donde  $\Omega_c = qB_0/mc$  es la frecuencia de ciclotrón característica, que nos asegura unos 14000 pasos por giroperíodo característico<sup>6</sup>. Tomando en cuenta ambas componentes, inicializamos al sistema con una distribución de Maxwell-Boltzmann (2.40) en reposo ( $\mathbf{u}_p \equiv 0$ ) con temperatura isótropa  $T_p$  tal que  $\beta_p = \beta_e = 1$  (véase definición de  $\beta_s$  en (2.42)). Según lo discutido en la sección 2.4, este sistema experimenta una cascada de energía hacia escalas más chicas, activando modos de mayor frecuencia. En la figura 4.4, podemos ver la evolución de la variación de cada energía, incluyendo la total durante aproximadamente

<sup>6</sup>En principio, este paso temporal  $\Delta t$  podría parecer excesivamente pequeño. Sin embargo, dadas las fluctuaciones, es posible que algunas partículas experimenten hasta  $\sim 4B_0$ , donde pasaríamos a  $\sim 3500$  pasos por giroperíodo. El objetivo es poder resolver correctamente incluso estos casos extremos.

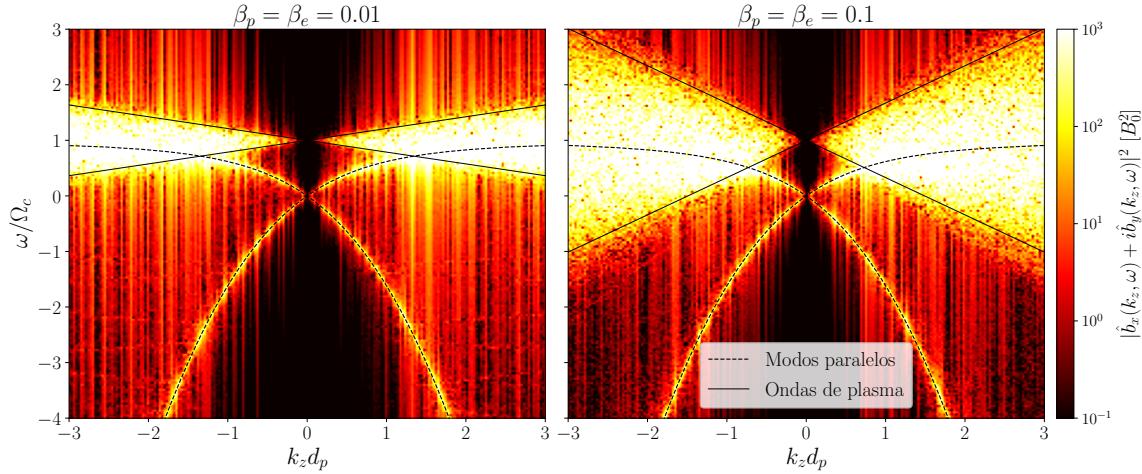


Figura 4.5: Espectro espacio temporal del campo  $b_x + ib_y$  obtenido con el módulo cinético híbrido, mostrando modos paralelos y ondas de plasma según predice la teoría.

100 giroperiodos. En el panel izquierdo, vemos que todas las energías oscilan con un periodo característico de aproximadamente 20 giroperiodos, mientras que la energía total se mantiene aproximadamente constante. En el panel derecho, vemos la variación relativa de la energía total, que oscila alrededor de 0 y en promedio resulta aproximadamente  $5 \times 10^{-4}$ , algo mayor que la precisión de máquina<sup>7</sup> pero tolerable.

Pasaremos ahora a estudiar la dinámica oscilatoria de sistemas ante pequeñas perturbaciones respecto al equilibrio. Tomaremos un plasma en reposo con campo guía paralelo  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$  y con distintos valores de  $\beta_p = \beta_e$  (equilibrio térmico entre especies). Este sistema genera modos paralelos, ondas circulares que pueden tener polarización izquierda o derecha y pueden identificarse analizando el campo complejo  $b_x + ib_y$  donde  $i$  es la unidad imaginaria. Su frecuencia viene dada por la relación de dispersión (Muñoz et al. 2018)

$$(k_z d_p)^2 = \frac{(\omega / \Omega_c)^2}{1 \pm \omega / \Omega_c}, \quad (4.16)$$

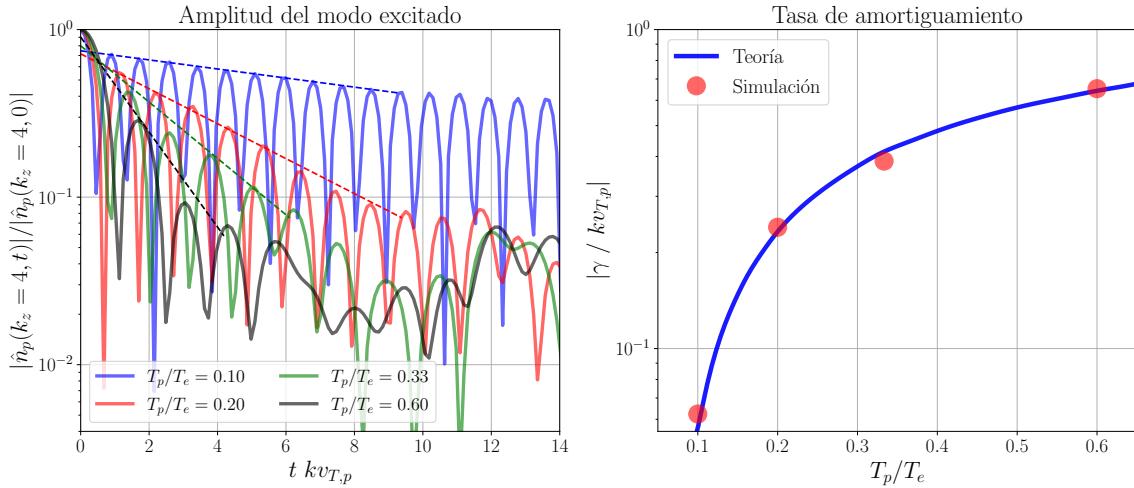
donde  $\Omega_c = qB_0/mc$  es la frecuencia de ciclotrón característica y  $\pm$  indica la polarización. Estas polarizaciones derecha e izquierda también son conocidas como ondas *whistler* y onda ion-ciclotrón Alfvénica y corresponden a extenciones cinéticas de las discutidas en la sección 2.3.3. Además, dada la velocidad térmica finita de las partículas se generan también ondas de plasma con un amplio rango de frecuencias. Para una distribución de Maxwell-Boltzmann, estas frecuencias están aproximadamente acotadas por (Muñoz et al. 2018)

$$\frac{\omega}{\Omega_c} = 1 \pm 3\sqrt{\beta_p d_p k_z}, \quad (4.17)$$

donde reescribimos el radio de ciclotrón térmico como  $R_c = v_{T,p}/\Omega_c = \sqrt{\beta_p} d_p$  y  $v_{T,p} = \sqrt{T_p/m_p}$  es la velocidad térmica de los protones (ver sección 2.2.3).

Para excitar estas ondas, usaremos el ruido de disparo producido por el número finito de partículas (*particle shot noise*, en inglés), que implica que ninguna de las magnitudes depositadas será realmente uniforme, sino que estará perturbada por fluctuaciones en todo el espectro de frecuencias espaciales. Este ruido decrece a medida que aumentamos el ppc y el orden de la función de forma, por lo que para mantenerlo apreciable trabajaremos con 512 ppc y orden 1. Finalmente, usaremos una resolución  $N = 1024$  puntos grilla con tamaño  $\Delta x \sim d_p/5$  y un paso temporal  $\Omega_c \Delta t \approx 3 \times 10^{-4}$ , asegurando 18000 pasos por giroperíodo y  $\omega_{\max} \Delta t \approx 3 \times 10^{-2}$  donde  $\omega_{\max} = \Omega_c (k_{\max} d_p)^2$  es la máxima frecuencia posible según (4.17). Aunque pueda parecer excesivamente pequeño, vemos que es necesario para poder resolver la dinámica de los *whistler* más rápidos. En la figura 4.5 podemos observar un espectro espaciotemporal (análogo a los utilizados en la sección 3.3) junto con las relaciones de dispersión (4.16) y (4.17), mostrando que el código es

<sup>7</sup>Estas simulaciones utilizan precisión simple, para la cual el error de máquina se encuentra en  $\sim 10^{-7}$ .



**Figura 4.6:** (Izquierda) Amplitud del modo excitado inicialmente  $k = 4$  para distintos cocientes de temperatura  $T_p/T_e$  (línea continua) junto con ajustes exponenciales sobre los picos (línea a trazos) mostrando amortiguamiento de Landau. (Derecha) Tasas de decaimiento obtenidas de los ajustes exponenciales junto con predicción teórica del modelo linealizado.

capaz de resolver estas ondas correctamente. Inevitablemente, el bajo valor de ppc genera ruido en el espectro de hasta 2 ordenes de magnitud menor que los modos principales (más detalles en el apéndice A).

Para finalizar esta sección, estudiaremos el caso icónico de amortiguamiento de Landau (D. C. Montgomery et al. 1965, Capítulo 5). Nuevamente, siguiendo Muñoz et al. 2018, hacemos 4 simulaciones con distinto valor de  $T_p/T_e$ , en ausencia de campo magnético, con una perturbación inicial en la densidad

$$n_p(x, 0) = n_0 [1 + \epsilon \cos(kx)], \quad k = m \frac{2\pi}{L}, \quad (4.18)$$

donde  $n_0$  es la densidad de referencia,  $\epsilon = 0,03$  es la amplitud de la perturbación inicial,  $m = 4$  es el modo elegido y  $L$  el tamaño del dominio. Estas simulaciones tienen resolución  $N = 256$  y 4000ppc. En ausencia de campo magnético, el giroperíodo  $\Omega_c$  carece de sentido y  $d_p$  desaparece de la ecuación de Newton (2.58) al usar (2.47). Por lo tanto, la escala espacial y temporal del sistema vienen dadas por  $L$  y  $kv_{T,p}$  con  $v_{T,p} = \sqrt{T_p/m_p}$  la velocidad térmica. En la figura 4.6, podemos observar la evolución de la amplitud del modo excitado  $k = 4$  (tomamos  $L = 2\pi$  por simplicidad). Vemos un claro decaimiento exponencial inicialmente, seguido de una dinámica más caótica probablemente inducida por los efectos no lineales del sistema. Además, vemos que las tasas de decaimiento obtenidas de los ajustes exponenciales sobre los picos se corresponden con lo predicho por la teoría

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x - \xi_p)^2} dx = -2 \frac{T_p}{T_e}, \quad (4.19)$$

donde  $\xi_p = (\omega + i\gamma)/\sqrt{2k}v_{T,p}$  con  $\omega$  la frecuencia de oscilación y  $\gamma$  la tasa de disipación.

Vemos entonces con estas pruebas que el módulo es capaz de reproducir correctamente múltiples fenómenos cinéticos de plasmas a escala de protones. Aunque no se muestren aquí, realizamos otras de las pruebas propuestas en Muñoz et al. 2018, que consideramos menos relevantes, y obtuvimos resultados compatibles con la dinámica esperada. Teniendo entonces seguridad respecto al código, pasamos ahora a utilizarlo en un estudio físico novedoso en la próxima sección.

## 4.2. Relevancia de la interacción autoconsistente

En esta sección haremos uso del módulo híbrido de partícula en celda (HPIC, por sus siglas en inglés) descripto en las secciones 2.2.4 y 2.2.5, con el objetivo de comparar esta descripción autoconsistente con el enfoque de partículas de prueba. Los campos electromagnéticos para las partículas de prueba serán provistos por el modelo compresible Hall MHD (CHMHD) descripto por las ecuaciones (2.64)-(2.68), esta vez para un parámetro de Hall finito (ver más abajo). La formulación jerárquica y constructiva de los modelos híbrido y magnetohidrodinámico de las secciones 2.2.4 y 2.3.1, respectivamente, permiten una comparación directa de los campos y parámetros en ambos modelos. Para simplificar la notación, en esta sección minimizaremos el uso de subíndices para denotar especies: a menos que se explice lo contrario, nos referimos a magnitudes protónicas.

### 4.2.1. Parámetros de las simulaciones

Empezando por las escalas características, para la densidad de partículas y la densidad de masa, usaremos de referencia  $n_0$  y  $\rho_0 = m_p n_0$ . La existencia de un campo guía  $\mathbf{B}_0$  nos permite definir un tiempo característico en términos de la girofrecuencia protónica  $\Omega_c = e|\mathbf{B}_0|/m_p c$ , con un periodo asociado  $\tau_c = 2\pi/\Omega_c$ . Además, podemos definir una velocidad característica  $v_A = |\mathbf{B}_0|/\sqrt{4\pi\rho_0}$ , correspondiente a la velocidad de propagación de las ondas de Alfvén (ver sección 2.3.3). A partir de estas elecciones surge naturalmente la longitud inercial protónica  $d_p = v_A/\Omega_c = c\sqrt{m_p/4\pi n_0 e^2}$ , la cual es independiente del campo guía. Esta longitud de inercia protónica  $d_p$  coincide con la llamada escala de Hall, por debajo de la cual las ondas de tipo *whistler* se vuelven relevantes y pueden aparecer efectos cinéticos.

Las escalas definidas anteriormente están relacionadas con los protones y pertenecen a las escalas cinéticas del plasma. Sin embargo, las características globales del flujo tienen sus propias escalas características, como la escala de inyección de energía  $L_0 = 2\pi \int (E(k)/k) dk / \int E(k) dk$ , donde  $E(k)$  es el espectro de energía isotrópico. Ambos campos,  $\mathbf{u}_p$  y  $\mathbf{b}$ , definen velocidades características de fluctuación  $u_0 = \langle |\mathbf{u}_p|^2 \rangle^{1/2}$  y  $v_0 = \langle |\mathbf{b}|^2 / 4\pi\rho_0 \rangle^{1/2}$ , así como sus tiempos de rotación correspondientes a través de  $L_0$ . Es importante notar que, para simplificar, de aquí en adelante trabajaremos con el campo magnético en unidades Alfvénicas (es decir,  $\mathbf{b}$  debe entenderse como  $\mathbf{b}/\sqrt{4\pi\rho_0}$ ). Para el modelo CHMHD, la adición de  $\mu$  y  $\eta$  da lugar a un número de Reynolds  $R_e = \rho_0 u_0 L_0 / \mu$  y su contraparte magnética  $R_m = u_0 L_0 / \eta$ . También existe un número de Prandtl magnético  $Pr = \mu/\rho_0\eta$ , que tomaremos igual a 1 en todas nuestras simulaciones tal que  $R_e = R_m$ .

Otro parámetro importante es el  $\beta$  del plasma, definido como la razón entre la presión térmica y la presión magnética:  $\beta = 8\pi p_0 / |\mathbf{B}_0|^2 = 2(p_0/\rho_0)/v_A^2$ . Para modelos fluidos como CHMHD, es más natural relacionar  $p_0/\rho_0$  con la velocidad del sonido  $c_s$  mediante  $c_s^2 = \gamma p_0/\rho_0$ . Esta elección arroja  $\beta = (2/\gamma)(c_s/v_A)^2$ , lo que puede interpretarse en términos del número de Mach de las ondas de Alfvén propagantes. Como introdujimos en la sección 2.2.3, cada especie tiene su propio  $\beta$  de plasma y ambos contribuyen a la presión total de modo que  $\beta = \beta_p + \beta_e$ . Para descripciones cinéticas, es más común utilizar las velocidades térmicas  $v_T = \sqrt{T/m}$ , de modo que  $p_{p,0}/\rho_0 = T_p/m_p = v_{T,p}^2$ . Por lo tanto, en el modelo híbrido es más natural escribir  $\beta = (v_{T,p}/v_A)^2 + \beta_e$ , donde  $v_{T,p}$  y  $\beta_e$  son los parámetros relevantes en la simulación para establecer la distribución inicial de partículas y  $p_{e,0}$  (ver más abajo). Además, en la descripción cinética también tenemos el radio de ciclotrón térmico  $R_c = v_{T,p}/\Omega_c = \sqrt{\beta_p} d_p$ .

Para configurar las simulaciones, comenzaremos construyendo un estado turbulento estacionario utilizando un forzado puramente electromotriz  $\nabla \times \mathbf{m}$  (para asegurar que  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ ), el cual se agrega en el lado derecho de la ecuación (2.67). Este forzado se genera en espacio Fourier con fases aleatorias y amplitud constante en modos con  $1 \leq |\mathbf{k}| \leq 2$ , con un tiempo de correlación  $\tau_f \approx 4,5\Omega_c^{-1}$ . A diferencia del utilizado en la sección 3.1, este forzado no es interpolado en el tiempo para asegurar continuidad, sino que sus fases se generan en cada paso, manteniendo cierta correlación con las fases (determinado por  $\tau_f$ ).

Llevamos a cabo este proceso en dos casos. Primero, para una simulación 2,5D con resolución  $N_x \times N_y \times N_z = 512 \times 512 \times 1$ , donde los campos vectoriales tienen sus tres componentes pero solo dependen de  $x, y$  (es decir, el plano perpendicular a  $\mathbf{B}_0$ ). En esta simulación, fijamos  $L_{\text{caja}} \approx 140d_p$ , de modo que  $k_{\min}d_p \approx 4,5 \times 10^{-2}$  y  $k_{\max}d_p \approx 7,7$ , lo que proporciona aproximadamente una década completa de escalas tanto por encima como por debajo de la longitud inercial protónica  $d_p$ .

Tabla 4.1: Parámetros de las condiciones iniciales utilizadas para las simulaciones CHMHD y HPIC.

ID	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_{\text{caja}}/d_p$	$L_0/d_p$	$v_A/v_0$	$v_A/u_0$	$R_e = R_m$
2,5D	$512 \times 512 \times 1$	140	84.4	3.24	4.55	8340
3D	$128 \times 128 \times 48$	34.9	21.4	4.80	3.69	750

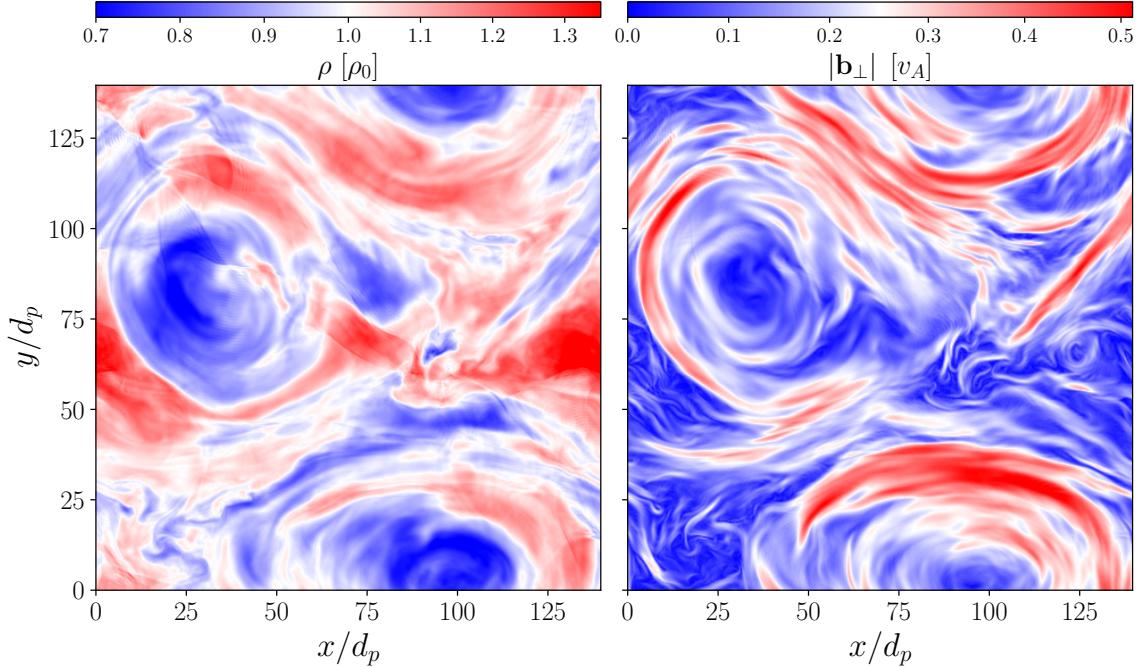
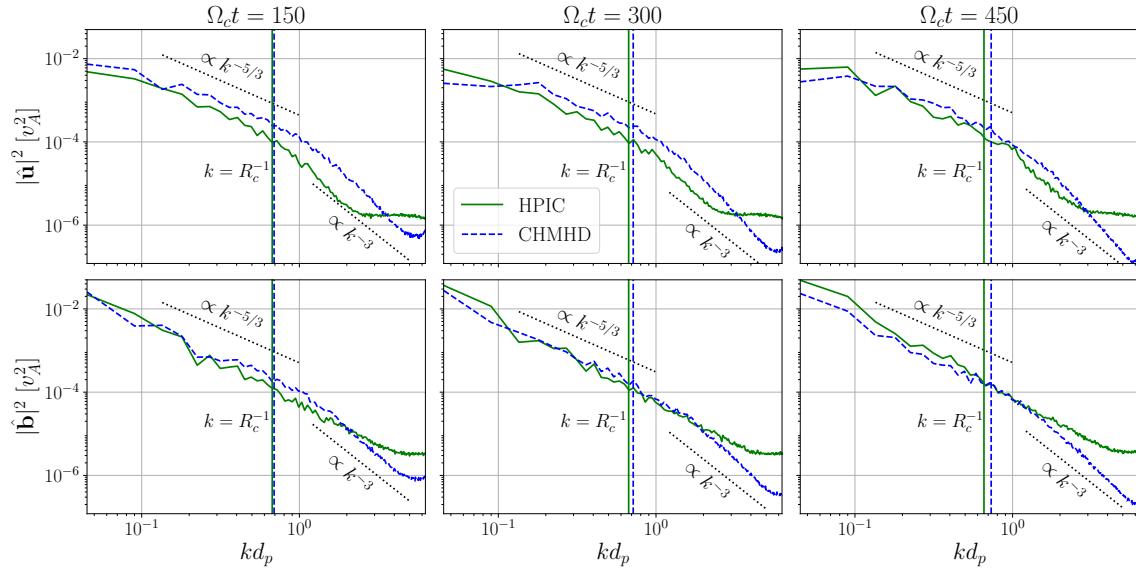


Figura 4.7: Densidad  $\rho$  and fluctuaciones perpendiculares del campo magnético  $|\mathbf{b}_\perp|$  obtenidas para el estacionario CHMHD y utilizados como condiciones iniciales para las simulaciones 2,5D. Pueden observarse estructuras coherentes de múltiples tamaños, incidiendo un régimen de turbulencia fuerte.

En segundo lugar, realizamos una simulación 3D con una resolución reducida en la dirección del campo guía,  $N_x \times N_y \times N_z = 128 \times 128 \times 48$ , con  $L_{\text{caja}} \approx 35d_p$ , de modo que  $k_{\min}d_p \approx 1.8 \times 10^{-1}$  y  $k_{\max}d_p \approx 7.6$ . Si bien este rango es considerablemente más pequeño, nuestro principal interés es verificar que los resultados en 2,5D se mantienen al pasar a 3D. Estos y otros parámetros relevantes de ambas simulaciones se resumen en la Tabla 4.1. Además, se fijó  $\beta_e = \beta_p \approx 0.47$ , lo cual implica un giroradio térmico inicial comparable a la longitud inercial protónica:  $R_c = \sqrt{\beta_p}d_p \approx 0.7d_p$ .

Nótese que el cociente entre la fluctuación magnética y el campo guía es  $\langle |\mathbf{b}| \rangle^{1/2} / |\mathbf{B}_0| = v_0/v_A \sim 1/4$  en ambas simulaciones, lo que indica un campo magnético fuerte. Esto nos permite tratar el sistema como casi bidimensional, con una débil dependencia en la coordenada paralela  $z$ . Si bien las fluctuaciones son débiles, el sistema evoluciona naturalmente hacia un estado de turbulencia fuerte, como se muestra en la figura 4.7 para la simulación 2,5D. Estructuras coherentes, como ondas de choque y vórtices, están presentes en una amplia gama de escalas, desde la escala de inyección hasta la escala más pequeña resuelta (en CHMHD, la escala de disipación). Las estructuras más grandes son no propagantes y persisten durante la mayor parte de la simulación (ver más adelante).

Una vez que se alcanza el estado estacionario de la simulación CHMHD, se introducen partículas en el sistema. Las partículas se distribuyen uniformemente dentro del dominio, formando su propia subgrilla dentro de cada celda. Para la simulación 2,5D utilizamos 625 ppc, mientras que para la simulación 3D usamos 512 ppc. Dado que cada celda tiene la misma cantidad de partículas, emulamos la densidad inicial  $\rho$  ajustando el peso de cada partícula  $w_j = \rho(\mathbf{x}_j, t)/m_p$  en la ecuación (2.56). Si bien este proceso no es perfecto, la densidad resultante  $m_p n_p$  presenta pequeñas desviaciones respecto a  $\rho$  (puntualmente,  $\langle (m_p n_p - \rho)^2 \rangle^{1/2} \leq 1.6 \times 10^{-2} \rho_0$  en ambas simulaciones). De manera similar, la velocidad  $\mathbf{v}_j$  de cada partícula se inicializa muestreando una distribución de Maxwell-Boltzmann (2.40) con media  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$  y temperatura  $T_p(\mathbf{x}_j)$ , definida a través de  $T_p = m_p p_p / \rho$  y  $p_p = p/2$  junto con la hipótesis adiabática de la ecuación (2.68). Finalmente, el orden de la



**Figura 4.8:** Espectro de energía cinética (panel superior) y magnética (panel inferior) a tiempos selectos a lo largo de ambas simulaciones CHMHD y HPIC. Puede apreciarse un claro espectro de Kolmogorov  $kd_p \lesssim 1$ , indicando que ambas simulaciones tienen un flujo a gran escala similar. Se muestra también el valor  $k = R_c^{-1}$  correspondiente al giroradio térmico  $R_c = v_{T,p}/\Omega_p$  de cada simulación.

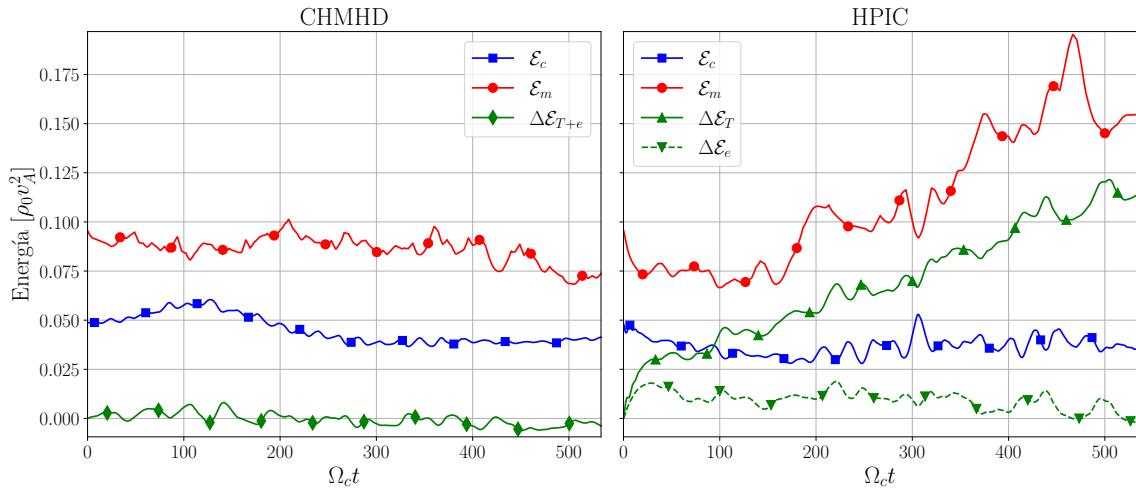
función de forma S se establece en 3, lo que permite una rápida convergencia en ppc en ausencia de gradientes de densidad pronunciados, gracias a la baja compresibilidad del sistema.

Dadas las condiciones iniciales para partículas y campos, la simulación se divide en dos casos. En el primero, el modelo CHMHD continúa su evolución y las partículas evolucionan siguiendo la ecuación (2.58), reaccionando a los campos CHMHD pero sin afectarlos (es decir, la aproximación de partículas de prueba). En el segundo, las partículas representan los protones en el modelo HPIC y evolucionan de forma autoconsistente según lo descrito en la sección 2.2.5. Aunque la disipación no está presente, mantenemos el forzado para asegurar que ambas simulaciones tengan dinámicas similares a gran escala, incluso si esto inyecta energía en las simulaciones HPIC (ver más adelante). Todos los demás parámetros se mantienen iguales en ambos casos y la integración se lleva a cabo dentro de un cuadrado periódico en el caso 2,5D y un cubo periódico en el caso 3D.

#### 4.2.2. Caso 2,5D

Comenzamos graficando los espectros de energía cinética y energía magnética para ambas simulaciones en varios tiempos seleccionados en la figura 4.8. En todos los casos, se observa claramente un espectro de Kolmogorov para  $kd_p \lesssim 1$ , que luego da paso a un espectro más empinado, diferente en cada simulación. Según lo esperado, la simulación HPIC exhibe un espectro plano debido al ruido de disparo de partículas a altos valores de  $k$ , mitigable aumentando el valor de ppc (ver apéndice A). Esto implica que el flujo a gran escala en ambas simulaciones es estadísticamente similar, especialmente para el campo magnético. Por lo tanto, podemos comparar estas simulaciones sabiendo que cualquier diferencia se deberá principalmente a efectos cinéticos y a la aproximación de partícula de prueba. También mostramos el giroradio térmico de los protones en esos tiempos, el cual es bastante similar a su longitud inercial  $d_p$ . Esto es consistente con el valor inicial de  $R_c \approx 0,7d_p$  y con el hecho de que la energización de las partículas es modesta (ver más adelante).

Ahora, nos enfocamos en las energías medias en ambas simulaciones, definidas en (2.50)-(2.52) y (2.69), cuya evolución en el tiempo se muestra en la figura 4.9. Omitiremos la notación  $\langle \rangle$  y multiplicaremos todas las energías por 2 para simplificar. Para mostrar todas las energías en la misma escala, restamos el valor inicial de las energías térmica  $\mathcal{E}_T$  y electrónica  $\mathcal{E}_e$ , las cuales comienzan en el mismo valor  $\approx 1,42\rho_0v_A^2$ , mucho mayor al del resto. En primer lugar, en el panel izquierdo podemos confirmar que el estado alcanzado es estacionario bajo el modelo CHMHD, ya que todas las energías fluctúan principalmente alrededor de sus valores iniciales. Esto no ocurre en el caso HPIC, donde hay una rápida redistribución inicial de la energía ( $\Omega_c t \lesssim 30$ ) seguida de un



**Figura 4.9:** Evolución de las diferentes energías para las simulaciones CHMHD (izquierda) y HPIC (derecha).  $\mathcal{E}_c$  se refiere a la energía cinética a gran escala,  $\Delta\mathcal{E}_{T+e}$  es la variación de la energía térmica (de protones y electrones) en el caso CHMHD,  $\Delta\mathcal{E}_T$  es la variación de la energía térmica de los protones en el caso HPIC,  $\Delta\mathcal{E}_e$  es la variación de la energía térmica de los electrones en el caso HPIC, y  $\mathcal{E}_m$  es la energía magnética de las fluctuaciones. Aunque en CHMHD la inyección de energía se equilibra con la disipación y las energías permanecen estacionarias, en HPIC la energía inyectada se convierte principalmente en energía térmica y magnética, mientras que el resto permanecen estacionarias.

intervalo de  $\sim 100\Omega_c^{-1}$  en el que la energía magnética y electrónica permanecen constantes mientras que la energía cinética a gran escala disminuye. Después de eso, la energía magnética comienza a aumentar, mientras que la energía cinética y electrónica permanecen constantes. Durante toda la simulación, la energía térmica aumenta de manera continua, lo que sugiere algún tipo de disipación no colisional.

En el caso HPIC, el hecho de que tanto la energía magnética como la térmica aumenten hasta el final de la simulación se debe a la inyección constante de energía por el forzado electromotriz. Para comprender este proceso, calculamos la energía inyectada

$$\mathcal{I}(t) = \int_0^t \langle \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{m} \rangle dt', \quad (4.20)$$

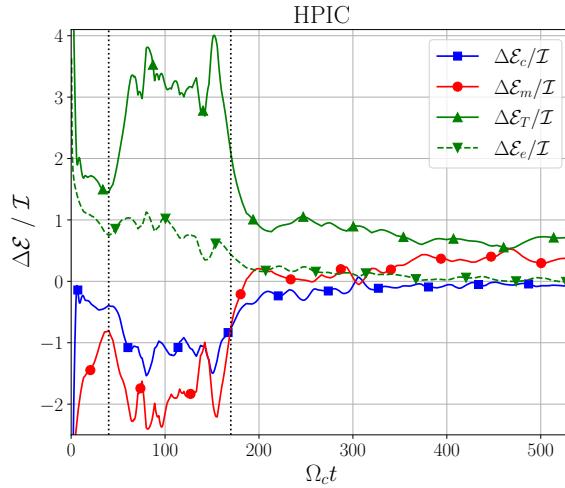
donde  $\langle \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{m} \rangle$  es la tasa media de inyección de energía. La figura 4.10 muestra la variación total de cada energía  $\Delta\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0)$  normalizada por la energía total inyectada acumulada  $\mathcal{I}(t)$ <sup>8</sup>. Los tres regímenes discutidos previamente se observan claramente aquí, con algunas etapas intermedias. Como se mencionó anteriormente, el primer régimen corresponde a una rápida redistribución de energía, probablemente debido a una reorganización inicial del sistema al partir de condiciones iniciales no completamente estables para HPIC. Durante la segunda etapa,  $\mathcal{E}_T$  recibe aproximadamente 3 veces la energía inyectada a expensas de  $\mathcal{E}_c$  y  $\mathcal{E}_m$ . En la última etapa,  $\mathcal{E}_c$  y  $\mathcal{E}_e$  permanecen constantes, de modo que toda la energía inyectada se divide entre  $\mathcal{E}_m$  ( $\sim 30\%$ ) y  $\mathcal{E}_T$  ( $\sim 70\%$ ). Este hecho apunta a algún mecanismo de disipación no colisional, en el cual la mayor parte de la energía inyectada se convierte en energía térmica, que generalmente identificamos como calor.

En esta tesis, proponemos inestabilidades cinéticas, particularmente la inestabilidad espejo, como un posible mecanismo de disipación no colisional. La expresión  $T_\perp/T_\parallel \gtrsim 1 + \beta_\parallel^{-1}$  captura aproximadamente la condición para la inestabilidad de espejo y  $T_\perp/T_\parallel \lesssim 1 - \beta_\parallel^{-1}$  la inestabilidad de manguera (*firehose*, en inglés), donde

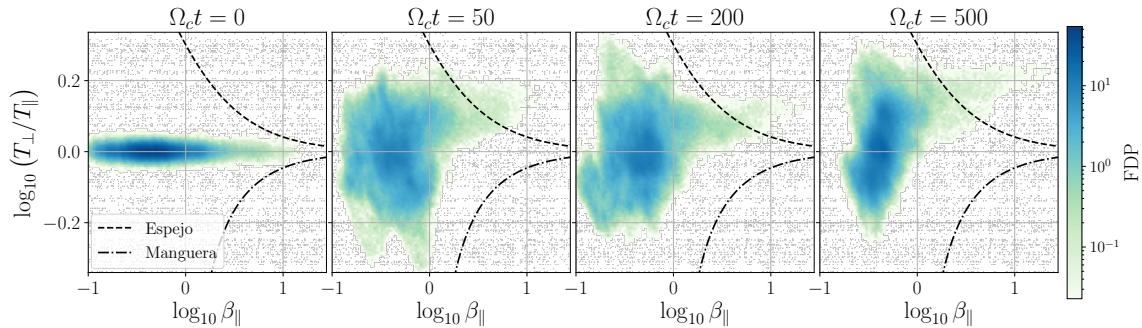
$$\beta_\parallel = \frac{8\pi p_\parallel}{|\mathbf{B}|^2} = \frac{8\pi n_p T_\parallel}{|\mathbf{B}|^2}, \quad (4.21)$$

y definimos  $T_\perp = (T_x + T_y)/2$  y  $T_\parallel = T_z$ . En la figura 4.11, mostramos la función de densidad de probabilidad (FDP) de los campos Eulerianos junto con los límites aproximados de ambas

<sup>8</sup>En principio, esta magnitud es igual a la variación de energía total  $\Delta\mathcal{E}_{\text{total}}(t) = \mathcal{E}_{\text{total}}(t) - \mathcal{E}_{\text{total}}(0)$ , pero consideramos que el enfoque de energía inyectada es más claro e interpretable.



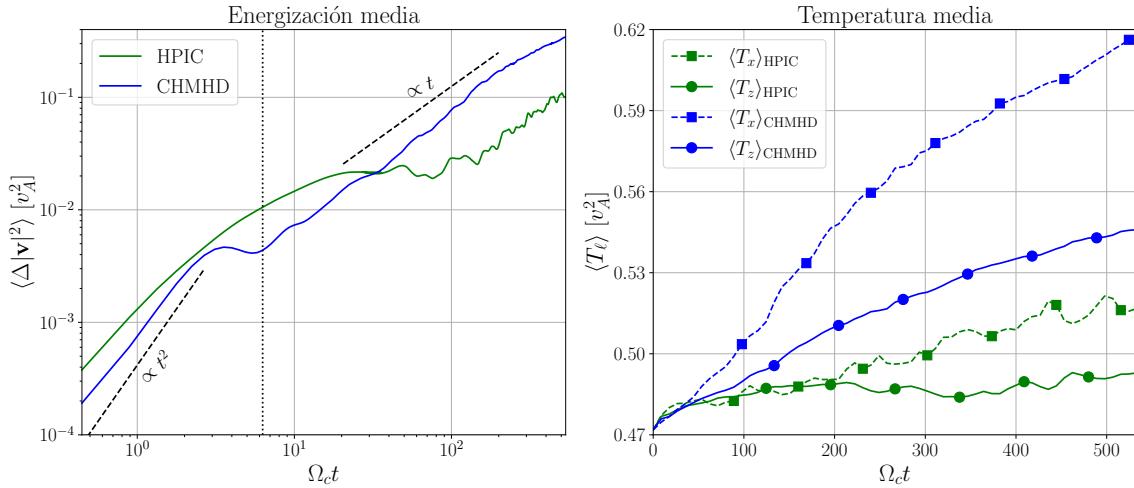
**Figura 4.10:** Aumento de energía normalizado por la inyección para el caso HPIC. Inicialmente, hay una rápida redistribución de energía para  $\Omega_c t \lesssim 30$ , seguida de un intervalo donde la energía cinética y magnética se convierten en energía térmica para  $30 \lesssim \Omega_c t \lesssim 100$ . Para  $\Omega_c t \gtrsim 100$ , la energía inyectada se divide en aproximadamente un  $\sim 70\%$  de energía térmica y un  $\sim 30\%$  de energía magnética.



**Figura 4.11:** FDP de la anisotropía de temperatura  $T_{\perp}/T_{\parallel}$  como función del  $\beta_{\parallel}$  a distintos tiempos para la HPIC. Se muestran también los umbrales para las inestabilidades de espejo (línea ralda) y manguera (línea con puntos y rallas).

inestabilidades en diferentes momentos de la evolución HPIC. Inicialmente, el sistema se encuentra dentro de la zona de estabilidad, pero para  $\Omega_c t \gtrsim 50$ , algunas regiones del plasma cruzan el umbral de la inestabilidad espejo. Sin embargo, el umbral de la inestabilidad de manguera nunca es cruzado. Aunque no se muestra aquí, la mayoría de estos cruces ocurren en regiones específicas del sistema, probablemente relacionadas con algunas estructuras no propagantes presentes en esas zonas. Estas excursiones fuera de la región de estabilidad son breves, con una duración característica de alrededor de  $20\Omega_c^{-1}$ . Lo más probable es que la inyección constante de energía esté impulsando este efecto, sacando partes del plasma de la zona de estabilidad para que la inestabilidad espejo las fuerce de vuelta, transformando energía en calor en el proceso.

Ahora nos enfocamos en cómo se distribuye este calentamiento y en las diferencias entre el caso de partículas de prueba en CHMHD y el caso HPIC. En el panel izquierdo de la figura 4.12, mostramos la energización total de las partículas (equivalente a  $\Delta(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_T)$  en el caso HPIC) en función del tiempo. Inicialmente, ambos casos presentan un rango balístico  $\propto t^2$  muy similar (en el espacio de velocidades), pero después de unas pocas giraciones, las partículas de prueba en CHMHD superan a sus contrapartes autoconsistentes en HPIC. Este intervalo balístico en el caso HPIC coincide aproximadamente con la redistribución inicial de energía ( $\Omega_c t \lesssim 30$ ). Luego, sigue un periodo casi estacionario correspondiente a la segunda etapa descrita previamente, donde la energía cinética del flujo se convierte en energía térmica, manteniendo constante la energía cinética total. Para  $\Omega_c t \gtrsim 100$ , consistente con el régimen donde  $\sim 70\%$  de la energía inyectada se convierte en térmica, las partículas en el caso HPIC alcanzan una pendiente comparable a las partículas de prueba en CHMHD, indicando un régimen difusivo. Sin embargo, esta energización no distingue entre el flujo a gran escala y las fluctuaciones térmicas. Por ello, en el panel derecho de la figura 4.12, mostramos solo las energías térmicas  $T_{\ell}$  definidas en (2.41), donde  $\ell$  indica la dirección,



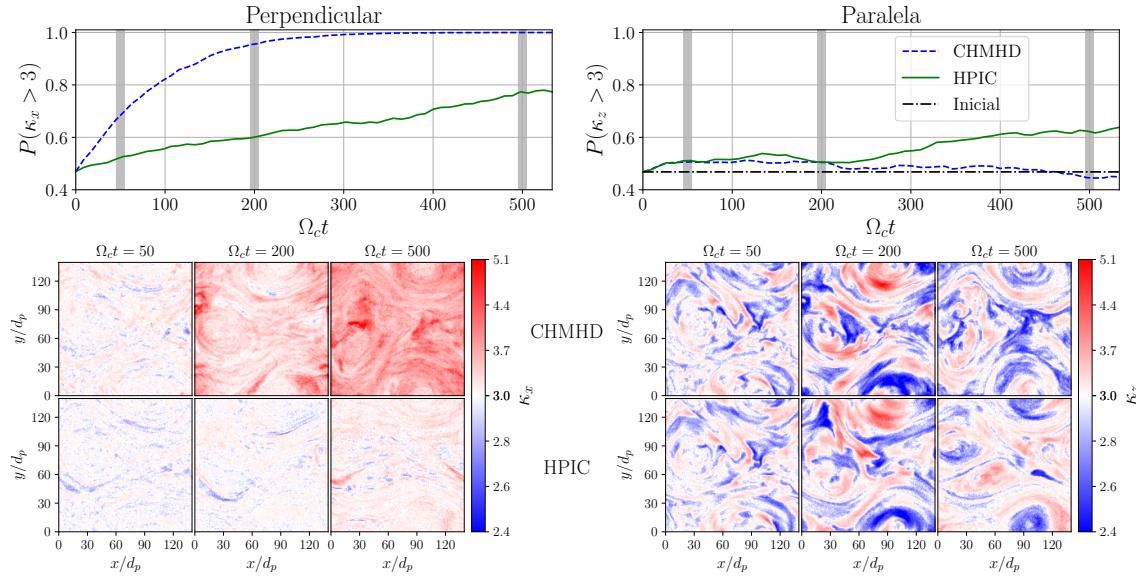
**Figura 4.12:** (Izquierda) Energización media de los protones como función del tiempo para ambos modelos, revelando un rango inicial balístico seguido de un régimen difusivo. (Derecha) Temperatura media en cada dirección como función del tiempo para ambos modelos, mostrando aproximadamente el doble de incremento en la componente perpendicular respecto a la paralela. Ambas figuras muestran mayor energización en el caso CHMHD.

promediadas en todo el dominio. Según lo esperable, ambos casos muestran temperaturas más altas en dirección perpendicular ( $x$ , con resultados similares en  $y$ ) que en la dirección paralela ( $z$ ). En particular,  $\Delta\langle T_x \rangle \approx 2\Delta\langle T_z \rangle$ . No obstante, las partículas de prueba experimentan un incremento de temperatura aproximadamente 3 veces mayor (en ambas direcciones) que sus contrapartes autoconsistentes, lo cual es casi idéntico a la diferencia en energización total mostrada en el panel izquierdo. Esto sugiere que, en ambos casos, casi toda la energización de las partículas se convierte en energía térmica. Para el caso HPIC, esto era de esperarse, ya que la figura 4.9 muestra que la energía cinética del flujo se mantiene aproximadamente constante. Para el caso CHMHD, sin embargo, esto no es trivial, ya que la velocidad media de las partículas de prueba  $\mathbf{u}_p$  no necesariamente coincide con la velocidad del fluido  $\mathbf{u}$ . Aunque no se muestra aquí, ambos campos son muy similares al inicio de la simulación CHMHD y con el tiempo se diferencian considerablemente, aunque conservan propiedades estadísticas similares, como su energía media y espectro a gran escala.

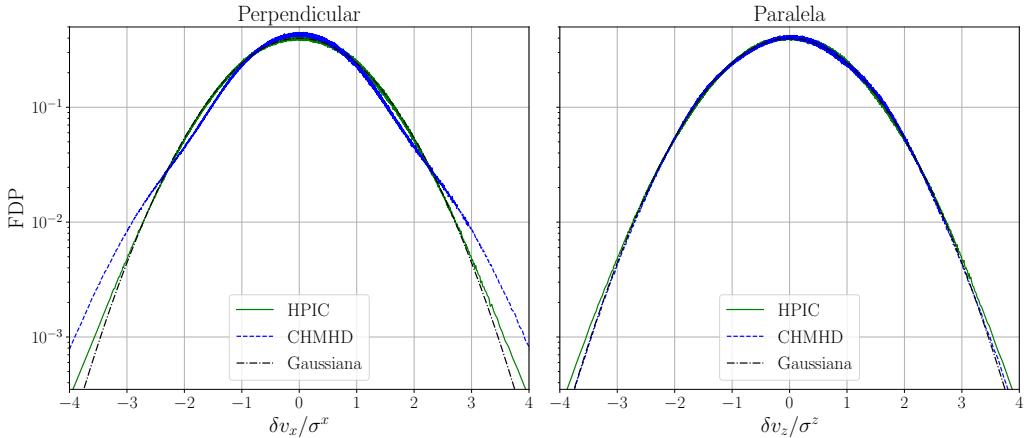
Para cuantificar la producción de partículas supratérmicas, analizamos su distribución de velocidades. En particular, nos interesa determinar cuántas partículas tienen una energía cinética superior a la esperada en una distribución de Maxwell-Boltzmann (gaussiana). Dado que las partículas en diferentes regiones del dominio poseen velocidades medias y temperaturas distintas, en lugar de calcular directamente la FDP global, proponemos evaluar el campo de *kurtosis*  $\kappa_\ell$  de la componente  $\ell$ , definido como

$$\kappa_\ell(\mathbf{x}, t) = \frac{\langle (v_\ell - u_{p,\ell})^4 \rangle_p}{\langle (v_\ell - u_{p,\ell})^2 \rangle_p^2}, \quad (4.22)$$

con  $\langle \bullet \rangle_p$  definido en la ecuación (2.39), sabiendo que para la distribución de Maxwell-Boltzmann de la ecuación (2.40) se tiene  $\kappa_\ell = 3$ . Valores más altos de kurtosis indican una mayor fracción de partículas supratérmicas en esa región del dominio. Para analizar la evolución de este campo, los paneles superiores de la figura 4.13 muestran la fracción de puntos de grilla con  $\kappa_\ell > 3$  para cada dirección. Inicialmente, todas las distribuciones comienzan con  $P(\kappa_\ell > 3) \approx 0.47$ , debido al inevitable ruido de tamaño finito en la distribución gaussiana inicial. En la dirección perpendicular, ambas simulaciones muestran un aumento con el tiempo, aunque el caso de partículas de prueba en CHMHD alcanza rápidamente una probabilidad de 1. Esto implica que no hay una sola región en el dominio sin una fracción considerable de partículas supratérmicas. En el caso HPIC, el aumento es más moderado, pero no parece detenerse durante la simulación, probablemente debido a la inyección constante de energía. En la dirección paralela, ocurre lo opuesto: en CHMHD la fracción fluctúa en torno al valor inicial, mientras que en HPIC se observa un leve incremento, aunque menor que en la dirección perpendicular. La distribución espacial de estas partículas supratérmicas puede apreciarse en los paneles inferiores de la figura 4.13. Aquí, las regiones en rojo indican la presencia de partículas supratérmicas, confirmando que en CHMHD las partículas de prueba



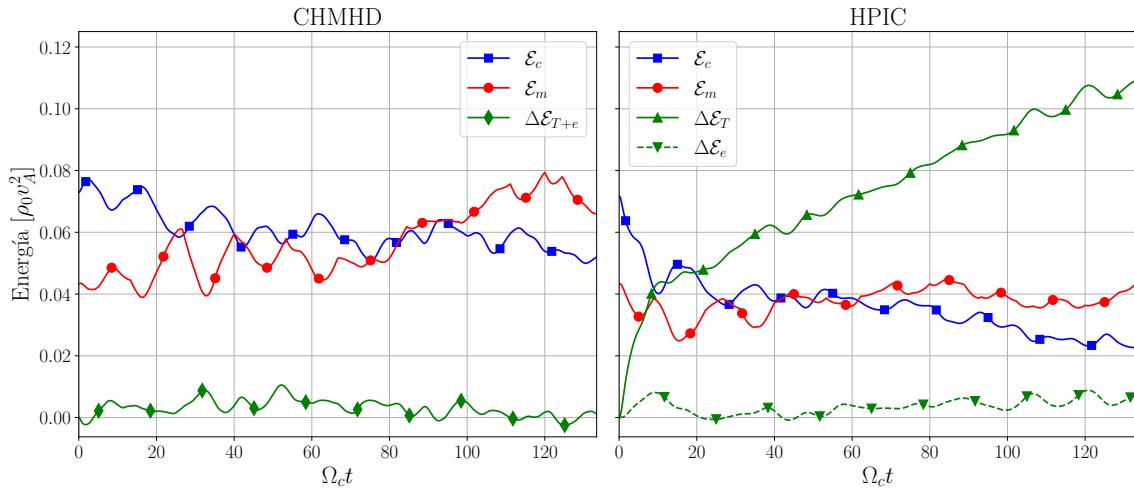
**Figura 4.13:** (Paneles superiores) Fracción de puntos de grilla con kurtosis  $\kappa_\ell > 3$  de la FDP de velocidad para las componentes perpendicular (izquierda) y paralela (derecha). (Paneles inferiores) Componentes perpendicular (izquierda) y paralela (derecha) del campo de kurtosis a tiempos diferentes, tanto para CHMHD como HPIC.



**Figura 4.14:** FDPs de las fluctuaciones de velocidad normalizadas (definición en el texto) al final de cada simulación, tanto para la componente perpendicular (izquierda) y paralela (derecha). El caso CHMHD muestra colas más pesadas en la dirección perpendicular pero es gaussiana en la paralela. El caso HPIC tiene colas pesadas en ambas direcciones.

eventualmente pueblan toda la caja en la dirección perpendicular. En la dirección paralela, en cambio, las partículas supratérmicas se organizan en estructuras que recuerdan a las presentes en el sistema (vease figura 4.7). Esta estructura subyacente está presente en todos los casos, aunque no parece limitar la localización de partículas supratérmicas en la componente perpendicular. Vemos entonces que la aproximación de partículas de prueba no solo sobreestima el aumento de temperatura, sino que también genera una población supratérmica mucho mayor (menor) en la dirección perpendicular (paralela).

Para concluir este análisis, en la figura 4.14 mostramos la FDP global de las velocidades normalizadas al final de la simulación. Esta normalización se logra restando el flujo medio local y dividiendo por las velocidades térmicas locales en cada dirección, de modo que  $\delta \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$  y  $\sigma_j^\ell = \sqrt{T_\ell(\mathbf{x}_j)}$ . Las observaciones previas pueden verse claramente aquí: ambas simulaciones presentan colas más pesadas que la distribución gaussiana en la dirección perpendicular, especialmente para el caso CHMHD. En la dirección paralela, la distribución de CHMHD es prácticamente indistinguible de la gaussiana, mientras que en HPIC las colas son ligeramente más pesadas. Vemos que este enfoque promedia sobre todo el dominio, perdiendo la información sobre la distribución espacial y proporcionando resultados similares a  $P(\kappa_\ell)$  en la figura 4.13. Por lo tanto, podríamos concluir que en el caso CHMHD no se crean partículas supratérmicas en la dirección paralela,



**Figura 4.15:** Evolución de las distintas energías para las simulaciones 3D CHMHD (izquierda) y HPIC (derecha). En CHMHD, la inyección es balanceada con la disipación y las energías se mantienen estacionarias, mientras que en HPIC, la energía inyectada se convierte principalmente en energía térmica mientras que el resto se mantiene estacionario (en contraposición al caso 2,5D donde la energía magnética también aumenta).

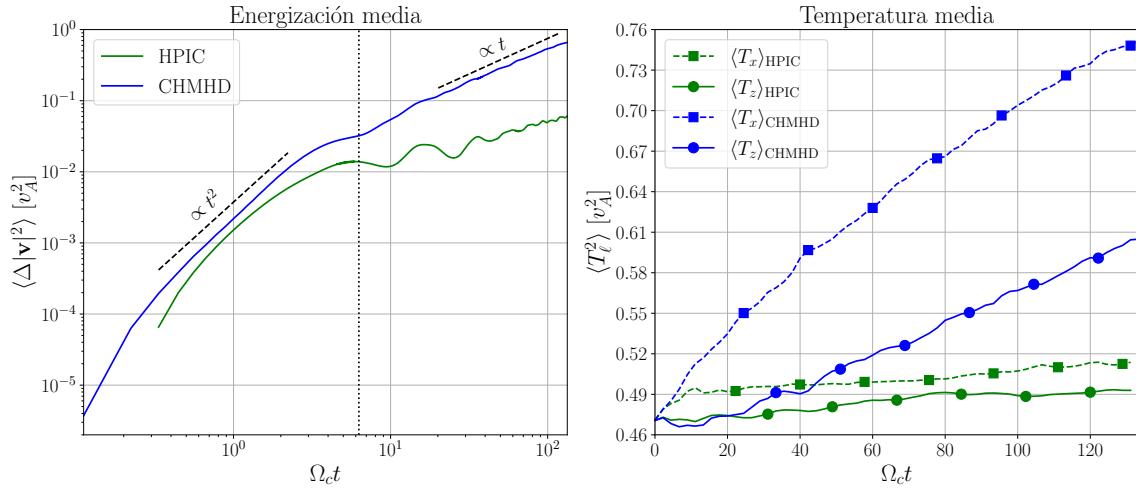
sino que simplemente se redistribuyen. Esto podría ser consecuencia de la aproximación 2,5D, donde se descartan variaciones en la dirección paralela. Sin embargo, es notable que las partículas autoconsistentes del caso HPIC logren desarrollar poblaciones supratérmicas adicionales a pesar de esta limitación.

#### 4.2.3. Caso 3D

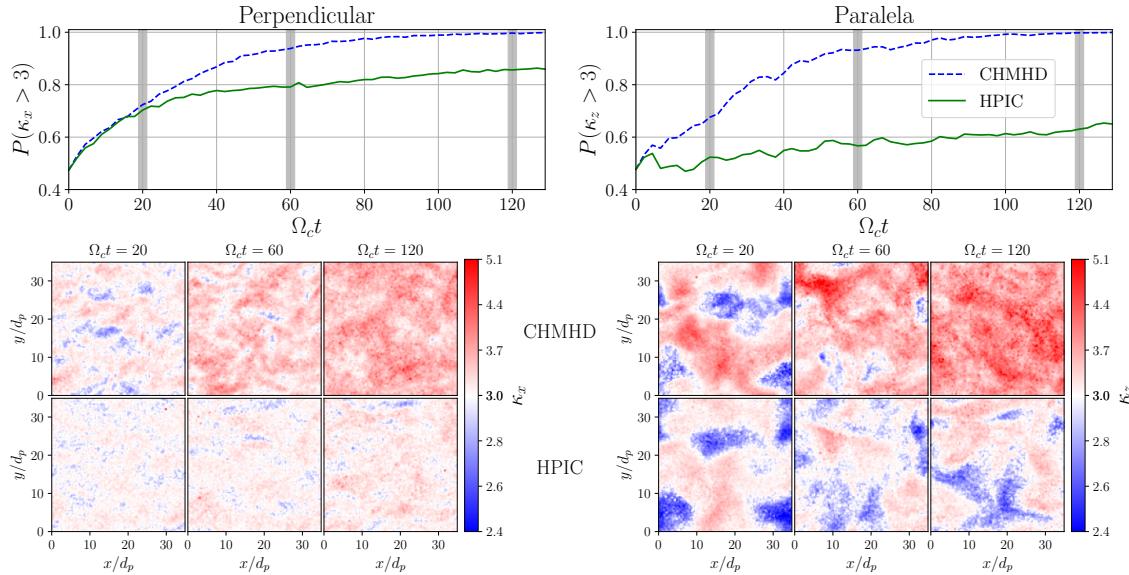
Repetimos parte del análisis para el caso 3D, con una resolución más baja debido a limitaciones computacionales. La menor resolución implica una separación diferente entre escalas, en particular entre la escala de inyección y la escala protónica, además de una duración más corta de la simulación (medida en  $\Omega_c^{-1}$ ). Esto inevitablemente modifica algunos resultados, por lo que nuestro enfoque es principalmente cualitativo. Comenzamos mostrando en la figura 4.15 la evolución de la energía en ambos casos. El caso CHMHD es bastante similar a su contraparte 2,5D, manteniéndose en un estado estacionario (aunque la energía cinética del fluido es ahora mayor que la energía magnética). El caso HPIC, en cambio, presenta diferencias significativas, especialmente en tiempos tardíos. La reorganización inicial dura aproximadamente  $15\Omega_c^{-1}$ , pero luego la energía magnética se mantiene estacionaria mientras que la energía cinética del fluido disminuye ligeramente. Por otro lado, la energía térmica aumenta de manera continua a lo largo de toda la simulación, lo que sugiere que toda la energía inyectada se convierte en calor. Esto puede entenderse recordando que en esta simulación 3D la escala de inyección está mucho más cerca de la escala protónica:  $k_{\text{iny}}d_p \approx 1,8 \times 10^{-1}$  en contraposición a  $k_{\text{iny}}d_p \approx 4,5 \times 10^{-2}$  en el caso 2,5D. Esto reduce el rango de la cascada MHD y facilita su transición a la escala sub-protónica, donde la energía se convierte en energía térmica.

Ahora nos enfocamos en la energización de partículas, mostrada en la figura 4.16. El incremento cuadrático inicial en el panel izquierdo es muy similar, aunque el caso HPIC presenta una disminución inicial (i.e.,  $\langle \Delta|\mathbf{v}|^2 \rangle < 0$ ) que no se muestra. A tiempo posterior, la energización en HPIC parece ser más lenta (subdifusiva) en comparación con la simulación 2,5D. Más interesante es la evolución de la temperatura media en el panel derecho, donde observamos que el aumento de temperatura en HPIC es muy similar al de su contraparte 2,5D. Sin embargo, en el caso CHMHD, las partículas de prueba aumentan su temperatura mucho más (aproximadamente el doble) en comparación con su contraparte 2,5D y alrededor de 6 veces más que en el caso HPIC. Las relaciones entre los incrementos paralelos y perpendiculares dentro de cada caso permanecen prácticamente iguales. Por lo tanto, vemos que el cambio de 2,5D a 3D tiene un efecto mucho más significativo en las partículas de prueba que en las partículas autoconsistentes.

Repetimos ahora el cálculo y el análisis del campo de kurtosis para los casos 3D. Esto se muestra en la figura 4.17, donde se observan varias diferencias con respecto al caso 2,5D de la figura 4.13. En la dirección perpendicular, en el caso 3D vemos que ambas fracciones son más parecidas y, en



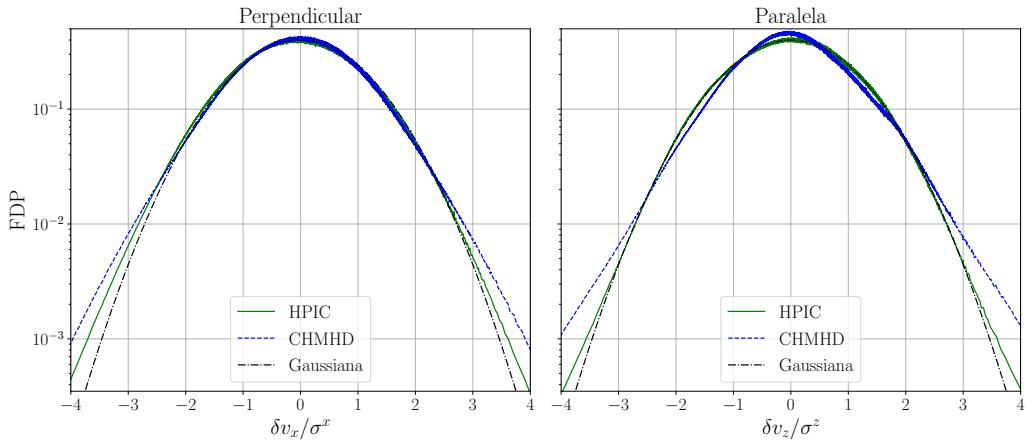
**Figura 4.16:** (Izquierda) Energización media de los protones como función del tiempo para ambos modelos para el caso 3D, revelando un rango inicial balístico seguido de un régimen difusivo. (Derecha) Temperatura media en cada dirección como función del tiempo para ambos modelos. Los resultados son similares a los de la figura 4.12, pero aquí las partículas de prueba de CHMHD ganan  $\sim 3$  veces más energía mientras que para HPIC la ganancia es similar.



**Figura 4.17:** (Paneles superiores) Fracción de puntos de grilla con  $\kappa_\ell > 3$  de la FDP de velocidad para las componentes perpendicular (izquierda) y paralela (derecha) para los casos 3D. (Paneles inferiores) Componentes perpendicular (izquierda) y paralela (derecha) del campo de kurtosis en cortes  $z = L_{\text{caja}}/2$  a distintos tiempos, tanto para CHMHD como HPIC.

tiempos tempranos ( $\Omega_c t \lesssim 20$ ), incluso indistinguibles. Sin embargo, aparecen diferencias en su distribución espacial, mostrando que CHMHD alcanza valores más extremos. Hacia el final de la simulación, CHMHD nuevamente alcanza un punto donde todo el dominio está poblado por partículas supratérmicas, mientras que HPIC parece estabilizarse en  $\sim 85\%$ , un poco más alto que en el caso 2,5D. En la dirección paralela, CHMHD se comporta de manera muy similar a la dirección perpendicular, en fuerte contraste con su contraparte 2,5D. No obstante, el caso HPIC se asemeja a su versión 2,5D, alcanzando un nivel comparable al final de la simulación. La distribución espacial vuelve a ser relevante, especialmente en la componente paralela, lo que sugiere una localización preferencial de las partículas supratérmicas. Algo similar ocurre en las velocidades normalizadas de la figura 4.18, donde el caso HPIC 3D es casi indistinguible de su versión 2,5D de la figura 4.14, en particular en la componente paralela. Por otro lado, el caso CHMHD muestra diferencias significativas en la componente paralela, pero menores en la perpendicular.

En esta sección, hemos mostrado que la aproximación de partícula de prueba (CHMHD) sobreestima la energización respecto a una formulación autoconsistente (HPIC). Aunque esto pueda resultar obvio dadas las restricciones que el enfoque autoconsistente impone (como la conservación



**Figura 4.18:** FDPs de las fluctuaciones de velocidad normalizadas (definición en el texto) al final de cada simulación, tanto para la componente perpendicular (izquierda) y paralela (derecha) para las simulaciones 3D. El caso CHMHD muestra colas más pesadas ambas direcciones respecto a HPIC, que tampoco es Gaussiana. Para el caso HPIC, las FDPs son muy similares al caso 2,5D de la figura 4.14.

de la energía total), dimos una caracterización cuantitativa de la sobreestimación. Inicialmente, la temperatura media es muy similar por aproximadamente  $50\Omega_i^{-1}$  en 2,5D (ver panel derecho de la figura 4.12) y  $10\Omega_i^{-1}$  en 3D (ver panel derecho de la figura 4.16), lo que en ambos casos equivale a  $\sim 0,13t_0$ , con  $t_0 = L_0/u_0$  el tiempo de rotación de los remolinos más grandes. Posteriormente, las partículas de prueba de CHMHD se calientan considerablemente más, especialmente en el caso 3D, mientras que las partículas de HPIC presentan tasas de calentamiento similares en 2,5D y 3D. Sin embargo, todas las simulaciones muestran que  $\Delta\langle T_x \rangle \sim 2\Delta\langle T_z \rangle$ , lo que indica que la aproximación de partículas de prueba es capaz de capturar la dirección preferencial de calentamiento. Incidentalmente, notamos la importancia de la separación entre la escala de inyección y protónica  $k_{\text{iny}}d_p$  en la energización autoconsistente.

Las figuras 4.13 y 4.17 muestran que las distribuciones de partículas supratérmicas se separan rápidamente, en la mayoría de los casos incluso más rápido que la temperatura media. Esto implica que, en el caso de partículas de prueba, la distribución de velocidades desarrolla colas más pesadas, lo que indica una mayor fracción de partículas supratérmicas en comparación con el caso autoconsistente. En otras palabras, la aproximación de partículas de prueba captura peor los momentos de orden superior. Adicionalmente, las simulaciones HPIC arrojan resultados muy robustos al pasar de 2,5D a 3D, mostrando partículas supratérmicas en ambas direcciones pero principalmente en la perpendicular. En cambio, las simulaciones CHMHD presentan esta robustez solo en la dirección perpendicular, mientras que en la paralela la distribución es mayormente Gaussiana en 2,5D, pero en 3D aumenta su población supratérmica de manera similar a la dirección perpendicular. Esto sugiere que las fluctuaciones a lo largo del campo guía son necesarias para que las partículas de prueba desarrollen una población supratérmica en esa dirección, pero son mayormente irrelevantes para las partículas autoconsistentes. Esto implicaría que las partículas autoconsistentes logran explotar mecanismos de energización paralela inaccesibles para las partículas de prueba, probablemente de origen cinético, como la inestabilidad espejo propuesta previamente. Esto se refuerza notando que el caso HPIC desarrolla partículas supratérmicas solo en regiones específicas del plasma, mientras que en el caso CHMHD estas ocupan todo el dominio rápidamente (ver figuras 4.13 y 4.17). Nuestros resultados muestran que, incluso si se tiene en cuenta la tasa de calentamiento normalizando las distribuciones de velocidades como en las figuras 4.14 y 4.18, la aproximación de partículas de prueba seguiría prediciendo una mayor concentración de partículas supratérmicas.

## Capítulo 5

# Conclusiones y perspectivas

Pero sí parece apropiado enfatizar que se debe tener mucho cuidado al interpretar los fenómenos del mundo real en términos de soluciones asintóticas de tratamientos estadísticos aproximados de la teoría idealizada. En algunos casos, la teoría idealizada puede ser más válida para proporcionar un lenguaje para la discusión en lugar de una verdadera explicación.

Robert Kraichnan & David Montgomery, *Two-dimensional turbulence*, 1980

A lo largo de esta tesis, hemos estudiado la energización de iones (principalmente protones) mediante múltiples enfoques, primero desde la (supuesta) dicotomía de estructuras contra ondas y luego desde la interacción unilateral contra bilateral. Ambos enfoques son fundamentales para entender los mecanismos de calentamiento en turbulencia de plasmas no colisionales y, en menor medida, la dinámica de rayos cósmicos.

En el contexto de interacción unilateral correspondiente a partículas de prueba (capítulo 3), el uso de simulaciones numéricas directas (SND) nos permitió obtener estados de turbulencia magneohidrodinámica realistas. En estos estados, observamos que la energización está fuertemente influenciada por estructuras que identificamos como tubos de flujo magnético en compresión. El flujo medio de plasma atrae a los iones hacia estas estructuras, cuya compresión genera un campo eléctrico horario alineado a la giración, maximizando la energización. Este mecanismo es inherentemente no lineal, pues no solo requiere la formación de una estructura coherente sino también la presencia de advección no uniforme en el plasma. Los tubos de flujo magnético juegan un rol importante en la dinámica de la corona solar, donde sufren considerable deformación y recombinación. Esto último lleva a eyecciones de masa coronal donde se genera gran cantidad de partículas energéticas. El mecanismo aquí propuesto apuntaría a una producción suplementaria durante la deformación de estos tubos, menos abrupta pero sistemática. Fuera de la corona solar, estas estructuras estarán presentes en el viento solar gracias a la turbulencia, aportando un mecanismo adicional al calentamiento no colisional allí observado. Las tasas de energización para distintos iones (distintos cocientes entre carga y masa, representado por su  $\alpha$ ) aquí halladas no deberían tomarse como referencia, pues podrían ser altamente dependientes de los números de Reynolds asociados al estado turbulento. Sin embargo, el hecho de que este mecanismo genere distinta energización para distintos iones es consistente con el calentamiento diferencial observado en el viento solar.

La linealización de las ecuaciones magnetohidrodinámicas permite eliminar este mecanismo y concentrarnos pura y exclusivamente en el rol de las ondas. Al utilizar condiciones iniciales turbulentas alcanzadas por la evolución no lineal de MHD, el espectro obtenido es realista, siguiendo la ley de escala de Kolmogorov. Más aún, las fases en espacio Fourier resultan fuertemente correlacionadas por la presencia de estructuras coherentes en el plasma. Aunque las estructuras se desarmen rápidamente, esta correlación persiste y reduce la energización de protones considerablemente. Solo aleatorizando estas fases es posible obtener una energización mayor a la del caso no lineal, ya que el mecanismo subyacente de energización y la condición de resonancia entre ondas y partículas parecen estar fuertemente influenciadas por la distribución de fases en el sistema. En algunos casos, las fases resultan tan relevantes como el propio espectro de energía, lo cual va en

contra de la mayor parte de los modelos, que ponen el foco en el espectro y dejan de lado las fases, limitándose a considerarlas aleatorias. Independientemente de esto, en todos los casos lineales la energización perpendicular es siempre difusiva ( $\langle |\Delta v_{\perp}|^2 \rangle \propto t$ ), pero superdifusiva ( $\langle |\Delta v_{\perp}|^2 \rangle \propto t^a$  con  $a > 1$ ) para el caso no lineal, mostrando que estas estructuras son más eficientes a largo plazo.

La linealización, sin embargo, es un método artificial y extremo para inducir ondas en un sistema. El modelo no lineal completo genera naturalmente estados turbulentos donde estas ondas pueden coexistir con estructuras coherentes (propagantes o no). Mediante el tiempo de correlación  $\tau_f$  del forzado externo, vimos que es posible controlar la cantidad de ondas en el plasma. Así, generamos 3 estados turbulentos con distinta proporción de energía entre ondas y estructuras, a modo de poder distinguir la relevancia de cada una en la energización de protones. Mediante espectros espaciotemporales, hallamos que forzados más rápidos (menor  $\tau_f$ ) generan estados turbulentos con más energía alrededor de las relaciones de dispersión de ondas magnetosónicas rápidas y Alfvénicas. Esto ocurre en detrimento de la energía asociada a estructuras coherentes, probablemente porque estas fluctuaciones rápidas atentan contra su estabilidad. A su vez, estos estados generan menor energización de protones, reforzando la idea de que los mecanismos ondulatorios son menos eficientes que aquellos asociados a estructuras coherentes. Más aún, notamos que la mayor presencia de ondas en el sistema puede interferir con el mecanismo de tubo de flujo en compresión observado, liberando a las partículas de su captura. Bajo la hipótesis de que energizar protones es análogo a disipar energía térmicamente, esta imagen es compatible con la concepción habitual en turbulencia de flujos neutros, donde la disipación de energía viene dada por estructuras (normalmente remolinos) de pequeña escala.

No obstante, no es inmediato cómo estas consideraciones se traducirían en el caso de rayos cósmicos, cuya energía cinética es considerablemente mayor y para los cuales este mecanismo de captura podría ser notoriamente menos eficiente. Es para estos rayos cósmicos que la hipótesis de partícula de prueba es más apropiada, dada su alta energía y baja concentración. Al eliminar uno de los acoplamientos (es decir, el efecto de las partículas sobre los campos), facilitamos que las partículas se liberen de la influencia de los campos del plasma: solo necesitan suficiente energía cinética para hacer que la aceleración debida al campo electromagnético de pequeña escala (turbulento) sea despreciable. Por el contrario, el calentamiento no colisional generalmente ocurre a escala mesoscópica y, por lo tanto, involucra una mayor concentración de partículas. Su efecto sobre los campos electromagnéticos puede no ser despreciable, exigiendo un tratamiento autoconsistente para la dinámica de los protones. Si se mantiene el acoplamiento (como en el caso autoconsistente), una gran energía cinética podría no ser suficiente, ya que una alta concentración de partículas supratérmicas generaría a su vez campos electromagnéticos más fuertes, limitando la aceleración.

En el capítulo 4, vimos que esta limitación parece manifestarse no solo en una menor energización media, sino también en una reducción de la probabilidad de velocidades extremas. Para esto, describimos la implementación de un módulo de partícula en celda (PIC) sobre el código pseudoespectral GHOST. Por un lado, utilizamos este módulo junto con una descripción magnetohidrodinámica compresible con efecto Hall (CHMHD) a modo de obtener una descripción de tipo partícula de prueba comparable con aquella del capítulo 3. Por otro lado, también lo utilizamos en un modelo cinético híbrido para obtener una descripción autoconsistente del plasma a escala protónica y comparamos ambos enfoques. Para cuantificar la desviación respecto a la gaussianidad de la distribución de velocidades de los protones, introdujimos el campo de kurtosis  $\kappa(x, t)$ , notando que  $\kappa > 3$  indica la presencia de partículas supratérmicas.

Con todo esto, pudimos determinar que la aproximación de partícula de prueba sobreestima la energización media, especialmente a largo plazo. Sin embargo, notamos también que es capaz de captar los regímenes balístico ( $\langle |\Delta v_{\perp}|^2 \rangle \propto t^2$ ) y difusivo del modelo autoconsistente. También es capaz de capturar las tasas de energización relativa entre las componentes paralela y perpendicular. En ese aspecto, podemos decir que la aproximación de partícula de prueba es capaz de capturar cualitativamente la dinámica del calentamiento, aunque no cuantitativamente. Sin embargo, notamos que los momentos de mayor orden (como la kurtosis) son peor capturados por esta aproximación, pues arroja una notoria sobreestimación de la concentración de partículas supratérmicas. En este aspecto, parecería que la interacción bilateral (autoconsistente) es necesaria para detener la energización de las partículas más extremas. A su vez, el modelo autoconsistente parece capaz de acceder a mecanismos ausentes en el modelo magnetohidrodinámico, como evidencia la generación de partículas supratérmicas en la dirección paralela del caso 2,5D (ver figura 4.13). Además, arroja

resultados muy robustos ante el cambio 2,5D  $\rightarrow$  3D tanto en términos de energización media como concentración de partículas supratérmicas, lo cual es esperable dada la bidimensionalización del flujo en presencia del campo magnético guía intenso. Esto no ocurre para partículas de prueba, poniendo en duda su aplicabilidad más allá de la estimación de las tasas de energización.

Las distribuciones de energías más modestas del modelo autonconsisnte, aunque más realistas, nos indican que estas simulaciones no contienen partículas que puedan considerarse rayos cósmicos. Esto ocurre a pesar de que, en principio, el enfoque autoconsistente debería ser capaz de capturar también la producción y dinámica de rayos cósmicos. En principio, la posibilidad de formación de haces de partículas de alta energía y la interacción de estos con el plasma podría llevar al desprendimiento de una pequeña población de partículas similares a rayos cósmicos. Esto, sin embargo, atañe a una fracción tan pequeña que es difícil de observar sin un aumento considerable en el número de partículas utilizadas en la simulación. Desde este punto de vista, la interacción unilateral simplemente sobreestima tanto la concentración de partículas supratérmicas que vuelven este efecto apreciable para un número de partículas mucho más modesto.

Todo esto apunta a que el enfoque magnetohidrodinámico es incapaz de capturar ciertos fenómenos cinéticos (como la inestabilidad de espejo) relevantes en el calentamiento, sea a favor o en detrimento. El mecanismo de captura y energización propuesto en el capítulo 3 no fue observado en la simulación HPIC autoconsistente ni en la CHMHD con partículas de prueba. Probablemente, esto se deba al rango de escalas elegido, pues una comparación entre los espectros 3.2 y 4.8 muestra que el primero tiene un rango inercial (compatible con espectro de Kolmogorov) mucho mayor. Esto es inevitable, pues dada una resolución fija ( $N = 512$ ) la única forma de obtener un rango subprotónico es a expensas del rango inercial. Es posible que estas estructuras estén ausentes si el rango inercial no es suficientemente extenso. Esto amerita un futuro estudio con mayor resolución, a modo de determinar si estas tubos de flujo en compresión están presentes en el modelo cinético autoconsistente. Aún si existiesen, la introducción de efectos cinéticos podría afectar notoriamente su eficiencia de captura y energización, pues la presión térmica generada por este calentamiento puede rápidamente destruir la estructura.

En particular, podríamos descartar el análisis de Voronoi, pues realmente no es más que una estimación de la densidad de partículas  $n_p(\mathbf{x}, t)$ . En las simulaciones del capítulo 3, tendríamos el equivalente a  $ppc = 5 \times 10^5 / 512^3 \approx 3 \times 10^{-3} \ll 1$ , insuficiente para realizar los depósitos. Simulaciones con  $ppc$  comparables a las del capítulo 4 permitirían vislumbrar más claramente la estructura fina de  $n_p$  y correlacionarla mejor con las estructuras subyacentes. Adicionalmente, el estado del arte en simulaciones PIC en general trabaja con un valor de  $ppc$  hasta 2 órdenes mayor al utilizado en esta tesis. Para tan considerable  $ppc$ , esperamos que la métrica de no gaussianidad dada por  $\kappa(\mathbf{x}, t)$  sea sumamente robusta, complementando la determinación fina de la estructura espacial de la producción de partículas supratérmicas. Más aún, podría habilitarnos a observar partículas supraenergéticas a niveles comparables a rayos cósmicos, que esperaríamos tengan un comportamiento similar a partículas de prueba dada su alta energía y baja concentración.



## Apéndice A

# Funciones de peso

Cómo introdujimos en la sección 2.2.5 las funciones de peso  $W$  pueden obtenerse mediante la convolución sucesiva de funciones galera  $\Pi$  definidas según (2.57). Las primeras de estas funciones de peso pueden visualizarse en la figura 2.3, pero aquí daremos la expresión exacta de algunas de ellas. Llamando  $W_\ell$  a la función de peso de orden  $\ell$ , tenemos simplemente que  $W_0(\mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x})\Delta$ . Intuitivamente, vemos que esta función peso simplemente asignará el valor 1 (todo su peso) al punto de grilla más cercano, también conocido como criterio de *vecino más cercano*. Para las siguientes funciones, es más práctico notar que la función de peso siempre podrá descomponerse en el producto de funciones de peso unidimensionales adimensionalizadas por el tamaño de grilla  $\Delta$

$$W_\ell(x, y, z) = W_\ell\left(\frac{x}{\Delta}\right)W_\ell\left(\frac{y}{\Delta}\right)W_\ell\left(\frac{z}{\Delta}\right), \quad (\text{A.1})$$

por lo que basta analizar el caso 1D con  $\Delta = 1$ . La siguiente función en la familia es

$$W_1(x) \equiv \Lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 1+x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

Vemos que esta función asigna fracciones de 1 a los dos puntos de grilla más cercanos, pesando linealmente la distancia a cada una. Las siguientes dos funciones son bastante más complejas y difíciles de interpretar, pero las incluimos por completitud

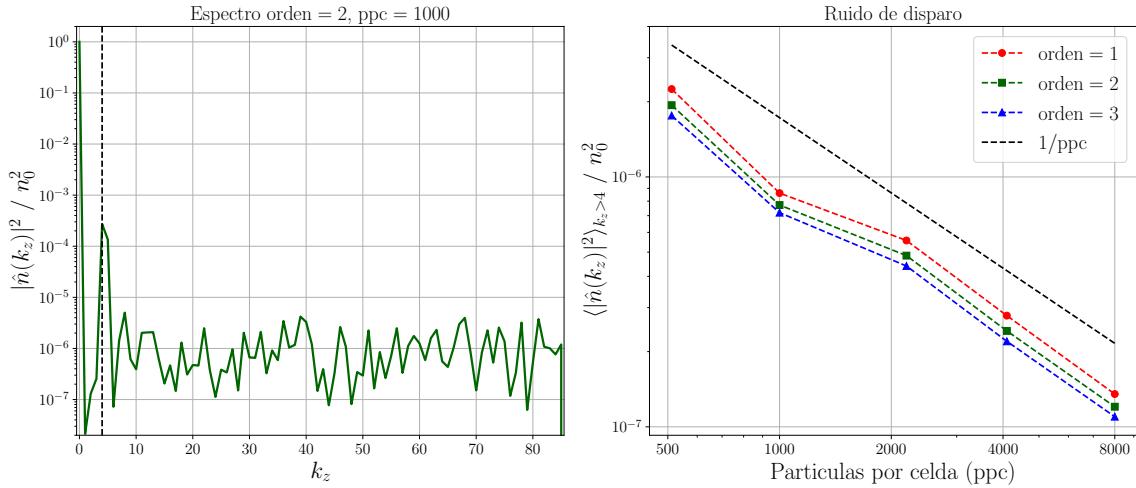
$$W_2(x) = \frac{1}{8} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -3/2 \\ (3+2x)^2 & \text{si } -3/2 < x \leq -1/2 \\ 6-8x^2 & \text{si } -1/2 < x \leq 1/2 \\ (3-2x)^2 & \text{si } 1/2 < x \leq 3/2 \\ 0 & \text{si } 3/2 < x \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

$$W_3(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ (2+x)^3 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 4-3x^3-6x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 4+3x^3-6x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ (2-x)^3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

Podemos notar que estas funciones tienen un dado alcance, pues tienen valor no nulo para los  $\ell + 1$  puntos de grilla más cercanos. Sobre estos puntos, estas funciones asignan una fracción de su peso, tal que la suma del total es 1. Si  $x_0, \dots, x_\ell$  son estos puntos, podemos expresar esto

$$\sum_{n=0}^{\ell} W_\ell(x - x_n) = 1, \quad (\text{A.5})$$

para todo  $x$ . Es interesante notar que para  $\ell \leq 1$ , tenemos  $W_\ell(0) = 1$ , lo que muestra que si una partícula está ubicada en el centro del punto de grilla, asignará todo su peso allí. Esto no ocurre



**Figura A.1:** (Izquierda) Espectro de la densidad depositada, mostrando el ruido de disparo, y (derecha) la dependencia de su amplitud media para distintos valores de ppc y orden de la función peso.

para  $\ell > 1$ , mostrando que efectivamente las partículas tienen volumen, integrando el valor del campo en toda una región.

Además de notar que estas funciones son pares (invariantes ante  $x \rightarrow -x$ ), notamos que son más suaves a medida que aumentamos  $\ell$  (ver figura 2.3). Puntualmente, podemos probar que  $W_\ell \in C^{\ell-1}$  para  $\ell \geq 1$ , teniendo en mente que  $W_0$  es discontinua. El efecto de esta suavidad es importante a la hora de reproducir perfiles de densidad. Generalmente, funciones de orden más alto implican partículas más grandes, por lo que tienen problemas a la hora de reproducir gradientes bruscos en las magnitudes depositadas.

El hecho de que el número de partículas sea finito implica que los depósitos tendrán un cierto ruido, conocido como el ruido de disparo (*particle shot noise*, en inglés). Al ser un error de naturaleza estadística, la amplitud de este ruido suele escalar como  $1/\sqrt{N}$  donde  $N$  es el número total de partículas. A su vez, notando que el depósito implica una convolución con la función de forma  $S_\ell$ <sup>1</sup>, el Teorema de la Convolución (B.2) nos dice que la amplitud de este ruido dependerá de la transformada Fourier de  $W_\ell$ . Sabiendo que  $\hat{\Pi}(k) \propto \text{sinc}(k)$  y usando nuevamente el teorema de la convolución, sabemos que

$$\hat{W}_\ell(k) \propto [\text{sinc}(k)]^{\ell+1} \sim k^{-(\ell+1)}. \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, esperamos que este ruido en el espectro cuadrado (densidad de energía) decaiga exponencialmente con el orden  $\ell$  e inversamente con  $\text{ppc} \propto N$ . Para verificar esto, inicializamos un sistema unidimensional con partículas distribuidas uniformemente y al alzar. Agregamos una pequeña modulación sobre los pesos  $w_j$  en el modo  $k = 4$ , idéntico al caso de amortiguamiento de Landau de la sección 4.1.3. Luego, las depositamos para obtener su densidad  $n(x)$  utilizando (2.63) para  $g(\mathbf{v}) = 1$  y calculamos su espectro. En la figura A.1, podemos observar un ejemplo de este espectro para un dado orden y ppc, donde vemos que efectivamente existe un ruido constante poblando todas las frecuencias. Más importante aún, vemos el comportamiento de la amplitud media de este ruido como función del valor de ppc. El comportamiento exponencial es difícil de verificar al tener solo 3 ordenes<sup>2</sup>, pero los resultados obtenidos son consistentes con él.

El costo computacional escala linealmente con el valor de ppc (lineal en el número de partículas), pero polinómicamente en el orden  $\ell$ . Esto se debe a que cada depósito/interpolación opera sobre  $\ell + 1$  puntos de grilla, que en  $d$  dimensiones implica  $(\ell + 1)^d$  operaciones. Por lo tanto, en ausencia de fuertes gradientes y a partir de un dado valor de ppc, es más económico aumentar el orden de la función, al reducir este ruido exponencialmente.

<sup>1</sup>Pues  $W_\ell = \Pi * S_\ell$ , con  $S_\ell$  definido de forma análoga.

<sup>2</sup>El caso  $\ell = 0$  tiene error nulo, pues al ser un criterio de vecino más cercano, al ser ppc una constante el ruido es nulo. Esto es un artefacto del método utilizado para distribuir las partículas.

## Apéndice B

### Solapamiento

Cómo introdujimos en la sección 2.3.4, los coeficientes Fourier de  $g$  y  $g_N$  no coinciden en principio y podemos verlo introduciendo la expansión (2.90) en la definición de  $\tilde{g}_k$  (2.96), que arroja

$$\tilde{g}_k = \hat{g}_k + \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_N^d \\ \mathbf{m} \neq 0}} \hat{g}_{\mathbf{k} + \mathbf{m}N}. \quad (\text{B.1})$$

Decimos entonces que los modos  $\mathbf{k} + \mathbf{m}N$  se solapan (*alias*, en inglés) con el modo  $\mathbf{k}$ , volviéndose indistinguibles de él. En la figura B.1 podemos ver un ejemplo unidimensional para  $N = 5$  donde los modos  $k = 7$  y  $k = 12$  se solapan con el modo  $q = 2 \in \mathbb{Z}_5$ . Esto es un problema, pues contamina la dinámica del modo  $\mathbf{k}$  con aquella de los modos  $\mathbf{k} + \mathbf{m}N$ , posiblemente generando comportamientos poco físicos.. En el límite  $N \rightarrow \infty$ , dada la convergencia espectral, estos modos solapados  $\hat{g}_{\mathbf{k} + \mathbf{m}N} \rightarrow 0$  y, por lo tanto,  $\tilde{g}_k \rightarrow \hat{g}_k$ . Este solapamiento (*aliasing*, en inglés) se ve intensificado por la presencia de no linealidades. Veamos esto aplicando el Teorema de la Convolución (Folland 2009, Capítulo 7) tenemos

$$\widehat{(gh)}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_{\mathbf{q}} \hat{h}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}. \quad (\text{B.2})$$

Consideremos que ambos campos carecen de solapamiento, tal que  $\tilde{g}_k = \hat{g}_k$  y  $\tilde{h}_k = \hat{h}_k$ , lo cual ocurre para  $g_N = g$  y  $h_N = h$ . En particular, tenemos  $\hat{g}_k = 0 = \hat{h}_k$  para  $\mathbf{k} \notin \mathbb{Z}_N^d$  y la sumatoria de (B.2) sobre  $\mathbb{Z}^d$  puede reemplazarse por una sobre  $\mathbb{Z}_N^d$ . A pesar de esto,  $gh$  tendrá modos fuera de  $\mathbb{Z}_N^d$ , como por ejemplo  $\mathbf{n} = (-N, -N, ..)$

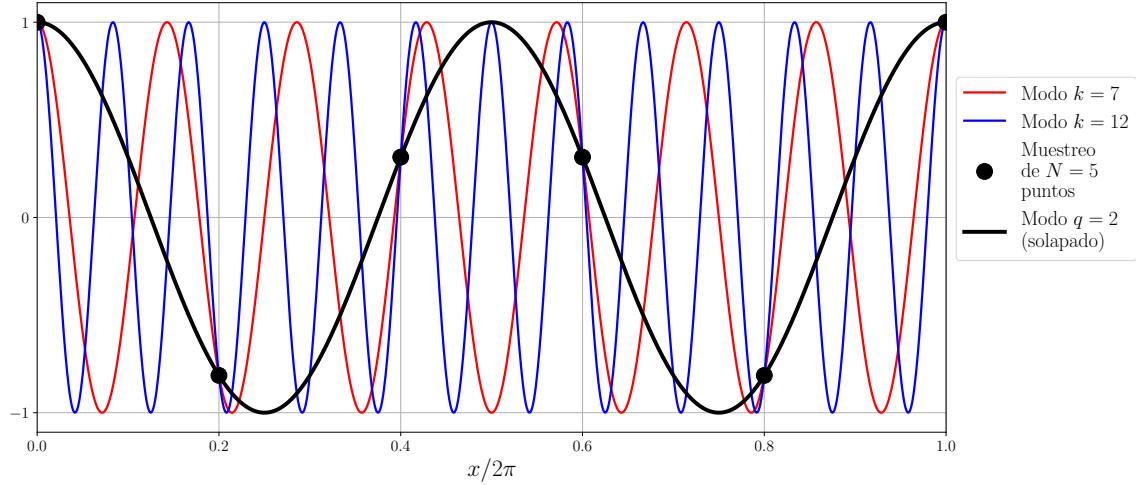
$$\widehat{(gh)}_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}_N^d} \hat{g}_{\mathbf{q}} \hat{h}_{\mathbf{n}-\mathbf{q}} = \hat{g}_{\mathbf{n}/2} \hat{h}_{\mathbf{n}/2},$$

donde notamos que  $\mathbf{q}, \mathbf{n} - \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_N^d$  si y solo si  $\mathbf{q} = \mathbf{n}/2$ . En general, tendremos  $\widehat{(gh)}_{\mathbf{k}} \neq 0$  para  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{2N}^d$ , por lo que inevitablemente tendremos solapamiento al querer reexpresarlo con modos en  $\mathbb{Z}_N^d$ .

La solución más ingenua para eliminar este solapamiento sería anular los modos que puedan salir de  $\mathbb{Z}_N^d$  al sumarse. Algorítmicamente, esto equivaldría a tomar  $\hat{g}_k = 0 = \hat{h}_k$  para  $\mathbf{k} \notin \mathbb{Z}_M^d$  donde  $M = \lfloor N/2 \rfloor$ , lo cual reduce a la mitad el número de modos disponibles y, en consecuencia, la resolución. Sin embargo, en 1971 Orszag propuso su regla de los dos tercios al mostrar que basta tomar  $M = \lfloor 2N/3 \rfloor$ , permitiendo retener mayor número de modos (Orszag 1971). Podemos ver esto notando que, usando (B.2), el máximo  $\mathbf{k}$  (en módulo) para el cual  $\widehat{(gh)}_{\mathbf{k}} \neq 0$  será el construido por  $\mathbf{q} = (-\lfloor M/2 \rfloor, -\lfloor M/2 \rfloor, ..)$  y resulta  $\mathbf{k} = (-2\lfloor M/2 \rfloor, -2\lfloor M/2 \rfloor, ..) \in \mathbb{Z}_N^d$ . Este modo  $\mathbf{k}$  se solapará con el modo  $\mathbf{p} = (-2\lfloor M/2 \rfloor + N, -2\lfloor M/2 \rfloor + N, ..) \in \mathbb{Z}_N^d$ , pues  $2\lfloor M/2 \rfloor \leq M < N$  junto con  $M > \lfloor N/2 \rfloor$  implican  $0 < N - 2\lfloor M/2 \rfloor < \lfloor N/2 \rfloor$ . Sin embargo,  $\mathbf{p} \notin \mathbb{Z}_M^d$ , ya que en virtud de  $2\lfloor M/2 \rfloor \leq M \leq 2N/3$  tenemos

$$N - 2\lfloor M/2 \rfloor \geq N/3 \geq \lfloor 2N/3 \rfloor / 2 = M/2 \geq \lfloor M/2 \rfloor$$

donde usamos múltiples veces que  $\lfloor x \rfloor \leq x \forall x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, este modo pertenecerá a los anulados al imponer  $\widehat{(gh)}_{\mathbf{k}} = 0 \forall \mathbf{k} \notin \mathbb{Z}_M^d$ . Este proceso se conoce como desolapamiento (en inglés, *dealiasing*).



**Figura B.1:** Solapamiento en el caso unidimensional para  $N = 5$ . Vemos que el muestreo a  $N$  puntos no permite distinguir los modos  $k = 7$  y  $k = 12$  del modo  $q = 2 \in \mathbb{Z}_5$ .

Sin embargo, pueden existir no linealidades de mayor orden: aquellas que se construyen multiplicando  $p$  funciones en  $S_N$ . Para estas no linealidades polinómicas, es necesario truncar la expansión en  $M_p = \lfloor 2N/(p+1) \rfloor$ . Alternativamente, es posible descomponer el producto de  $p$  elementos en  $p-1$  productos de 2 elementos, aplicando desolapamiento luego de cada uno. Esto último permite retener un mayor número de modos, pero puede ser menos fiel a la dinámica real del problema. En todo caso, no linealidades que no son el resultado de productos no son alcanzadas por este método, cómo serían los cocientes (i.e., por  $\rho$  en (2.66)) o las potencias no enteras (i.e.,  $p \propto \rho^\gamma$  con  $\gamma = 5/3$ ). No existe un método seguro para estas no linealidades, pero normalmente si  $\rho$  no varía demasiado es posible expandir estos términos en una serie de Taylor truncada, recuperando no linealidades polinómicas. Esto permite usar la regla de los dos tercios con cierta robustez, manteniendo el solapamiento en niveles manejables.

# Bibliografía

- Alexakis, A., Mininni, P. D. y Pouquet, A. (ago. de 2007). «Turbulent cascades, transfer, and scale interactions in magnetohydrodynamics». En: *New Journal of Physics* 9.8, págs. 298-298. doi: 10.1088/1367-2630/9/8/298.
- Alexandrova, O., Lacombe, C., Mangeney, A., Grappin, R. y Maksimovic, M. (nov. de 2012). «SOLAR WIND TURBULENT SPECTRUM AT PLASMA KINETIC SCALES». En: *The Astrophysical Journal* 760.2, pág. 121. doi: 10.1088/0004-637x/760/2/121.
- Alexandrova, O., Saur, J., Lacombe, C., Mangeney, A., Mitchell, J., Schwartz, S. J. y Robert, P. (oct. de 2009). «Universality of Solar-Wind Turbulent Spectrum from MHD to Electron Scales». En: *Physical Review Letters* 103.16. doi: 10.1103/physrevlett.103.165003.
- Alfvén, H. (oct. de 1942). «Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves». En: *Nature* 150.3805, págs. 405-406. doi: 10.1038/150405d0.
- Andrés, N., Clark di Leoni, P., Mininni, P. D., Dmitruk, P. A., Sahraoui, F. y Matthaeus, W. (2017). «Interplay between Alfvén and magnetosonic waves in compressible magnetohydrodynamics turbulence». En: *Physics of Plasmas* 24.10, pág. 102314.
- Andrés, N., Sahraoui, F., Huang, S., Hadid, L. Z. y Galtier, S. (mayo de 2022). «The incompressible energy cascade rate in anisotropic solar wind turbulence». En: *Astronomy & Astrophysics* 661, A116. doi: 10.1051/0004-6361/202142994.
- Andrés, N., Gonzalez, C., Martin, L., Dmitruk, P. y Gómez, D. (dic. de 2014). «Two-fluid turbulence including electron inertia». En: *Physics of Plasmas* 21.12. doi: 10.1063/1.4903907.
- Angriman, S., Ferran, A., Zapata, F., Cobelli, P. J., Obligado, M. y Mininni, P. D. (2022). «Clustering in laboratory and numerical turbulent swirling flows». En: *Journal of Fluid Mechanics* 948, A30. doi: 10.1017/jfm.2022.713.
- Bale, S. D., Kellogg, P. J., Mozer, F. S., Horbury, T. S. y Reme, H. (jun. de 2005). «Measurement of the Electric Fluctuation Spectrum of Magnetohydrodynamic Turbulence». En: *Physical Review Letters* 94.21. doi: 10.1103/physrevlett.94.215002.
- Balkovsky, E., Falkovich, G. y Fouxon, A. (abr. de 2001). «Intermittent Distribution of Inertial Particles in Turbulent Flows». En: *Physical review letters* 86, págs. 2790-3. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.2790.
- Bec, J., Gawłdzki, K. y Horvai, P. (jun. de 2004). «Multifractal Clustering in Compressible Flows». En: *Phys. Rev. Lett.* 92 (22), pág. 224501. doi: 10.1103/PhysRevLett.92.224501.
- Bieber, J. W., Matthaeus, W. H., Shalchi, A. y Qin, G. (mayo de 2004). «Nonlinear guiding center theory of perpendicular diffusion: General properties and comparison with observation». En: *Geophysical Research Letters* 31.10. doi: 10.1029/2004gl1020007.
- Bird, R., Tan, N., Luedtke, S. V., Harrell, S. L., Taufer, M. y Albright, B. (abr. de 2022). «VPIC 2.0: Next Generation Particle-in-Cell Simulations». En: *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 33.4, págs. 952-963. doi: 10.1109/tpds.2021.3084795.
- Birn, J., Drake, J. F., Shay, M. A., Rogers, B. N., Denton, R. E., Hesse, M., Kuznetsova, M., Ma, Z. W., Bhattacharjee, A., Otto, A. y Pritchett, P. L. (mar. de 2001). «Geospace Environmental Modeling (GEM) Magnetic Reconnection Challenge». En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 106.A3, págs. 3715-3719. doi: 10.1029/1999ja900449.
- Boffetta, G., Davoudi, J. y Lillo, F. D. (2005). «Multifractal clustering of passive tracers on a surface flow». En: *EPL* 74, págs. 62-68.
- Boris, J. (1970). En: *Proceedings of the Fourth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*.
- Brodiano, M., Andrés, N. y Dmitruk, P. (dic. de 2021). «Spatiotemporal Analysis of Waves in Compressively Driven Magnetohydrodynamics Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 922.2, pág. 240. doi: 10.3847/1538-4357/ac2834.

- Bruno, R., Carbone, V., Veltri, P., Pietropaolo, E. y Bavassano, B. (oct. de 2001). «Identifying intermittency events in the solar wind». En: *Planetary and Space Science* 49.12, págs. 1201-1210. doi: 10.1016/s0032-0633(01)00061-7.
- Bruno, R., D'Amicis, R., Bavassano, B., Carbone, V. y Sorriso-Valvo, L. (dic. de 2007). «Scaling laws and coherent structures in the solar wind». En: *Planetary and Space Science* 55.15, págs. 2233-2238. doi: 10.1016/j.pss.2007.05.005.
- Camporeale, E., Delzanno, G., Bergen, B. y Moulton, J. (ene. de 2016). «On the velocity space discretization for the Vlasov–Poisson system: Comparison between implicit Hermite spectral and Particle-in-Cell methods». En: *Computer Physics Communications* 198, págs. 47-58. doi: 10.1016/j.cpc.2015.09.002.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. y Zang, T. A. (1988). *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-84108-8.
- Chandran, B. D. (2005). «Weak compressible magnetohydrodynamic turbulence in the solar corona». En: *Physical Review Letters* 95.26, pág. 265004.
- (2008). «Weakly turbulent magnetohydrodynamic waves in compressible low- $\beta$  plasmas». En: *Physical review letters* 101.23, pág. 235004.
- Chen, C. H. K., Boldyrev, S., Xia, Q. y Perez, J. C. (mayo de 2013). «Nature of Subproton Scale Turbulence in the Solar Wind». En: *Physical Review Letters* 110.22. doi: 10.1103/physrevlett.110.225002.
- Chen, F. F. (2016). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-22309-4.
- Clark di Leoni, P., Mininni, P. D. y Brachet, M. E. (2015). «Spatiotemporal detection of Kelvin waves in quantum turbulence simulations». En: *Physical Review A* 92.6, pág. 063632.
- Coleman Jr., P. J. (ago. de 1968). «Turbulence, Viscosity, and Dissipation in the Solar-Wind Plasma». En: *The Astrophysical Journal* 153, pág. 371. doi: 10.1086/149674.
- Cooley, J. W. y Tukey, J. W. (1965). «An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series». En: *Mathematics of Computation* 19.90, págs. 297-301. doi: 10.1090/s0025-5718-1965-0178586-1.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. y Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms, Third Edition*. 3rd. The MIT Press.
- Courant, R., Friedrichs, K. y Lewy, H. (dic. de 1928). «Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik». En: *Mathematische Annalen* 100.1, págs. 32-74. doi: 10.1007/BF01448839.
- Cressman, J., Goldburg, W. y Schumacher, J. (ene. de 2007). «Dispersion of tracer particles in a compressible flow». En: *EPL (Europhysics Letters)* 66, pág. 219. doi: 10.1209/epj/i2003-10187-x.
- Crookes, W. (1879). *On radiant matter a lecture delivered to the British Association for the Advancement of Science, at Sheffield, Friday, August 22, 1879 / by William Crookes*. [s.n.], doi: 10.5962/bhl.title.32913.
- Dalena, S., Greco, A., Rappazzo, A. F., Mace, R. L. y Matthaeus, W. H. (jul. de 2012). «Magnetic moment nonconservation in magnetohydrodynamic turbulence models». En: *Phys. Rev. E* 86 (1), pág. 016402. doi: 10.1103/PhysRevE.86.016402.
- Dalena, S., Rappazzo, A. F., Dmitruk, P., Greco, A. y Matthaeus, W. H. (mar. de 2014). «Test-particle Acceleration in a Hierarchical Three-dimensional Turbulence Model». En: *ApJ* 783.2, 143, pág. 143. doi: 10.1088/0004-637X/783/2/143. arXiv: 1402.3745 [astro-ph.SR].
- Davidson, P. A. (mar. de 2001). *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9780511626333.
- Dhanagare, A., Musacchio, S. y Vincenzi, D. (2014). «Weak-strong clustering transition in renewing compressible flows». En: *Journal of Fluid Mechanics* 761, págs. 431-442. doi: 10.1017/jfm.2014.634.
- Dmitruk, P. y Matthaeus, W. H. (2006). «Structure of the electromagnetic field in three-dimensional Hall magnetohydrodynamic turbulence». En: *Physics of Plasmas* 13.4, pág. 042307.
- Dmitruk, P., Matthaeus, W. H. y Seenu, N. (dic. de 2004a). «Test Particle Energization by Current Sheets and Nonuniform Fields in Magnetohydrodynamic Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 617.1, págs. 667-679. doi: 10.1086/425301.
- (dic. de 2004b). «Test Particle Energization by Current Sheets and Nonuniform Fields in Magnetohydrodynamic Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 617.1, págs. 667-679. doi: 10.1086/425301.

- Du, S., Guo, F., Zank, G. P., Li, X. y Stanier, A. (oct. de 2018). «Plasma Energization in Colliding Magnetic Flux Ropes». En: *The Astrophysical Journal* 867.1, pág. 16. doi: 10.3847/1538-4357/aae30e.
- Falkovich, G., Gawędzki, K. y Vergassola, M. (nov. de 2001). «Particles and fields in fluid turbulence». En: *Rev. Mod. Phys.* 73 (4), págs. 913-975. doi: 10.1103/RevModPhys.73.913.
- Fermi, E. (abr. de 1949). «On the Origin of the Cosmic Radiation». En: *Phys. Rev.* 75 (8), págs. 1169-1174. doi: 10.1103/PhysRev.75.1169.
- Folland, G. (2009). *Fourier Analysis and Its Applications*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society.
- Fontana, M. (sep. de 2022). «El problema del geodinamo : modelado numérico con métodos de alto orden». Tesis doct. Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
- Goldreich, P. y Sridhar, S. (ene. de 1995). «Toward a theory of interstellar turbulence. 2: Strong alfvenic turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 438, pág. 763. doi: 10.1086/175121.
- Goldstein, H., Poole, C., Safko, J. y Addison, S. R. (jun. de 2002). «Classical Mechanics, 3rd ed.» En: *American Journal of Physics* 70.7, págs. 782-783. doi: 10.1119/1.1484149.
- González, C. A., Dmitruk, P., Mininni, P. D. y Matthaeus, W. H. (ago. de 2016). «On the compressibility effect in test particle acceleration by magnetohydrodynamic turbulence». En: *Physics of Plasmas* 23.8, 082305, pág. 082305. doi: 10.1063/1.4960681. arXiv: 1605.02811 [physics.plasm-ph].
- (nov. de 2017). «Test Particle Energization and the Anisotropic Effects of Dynamical MHD Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 850.1, pág. 19. doi: 10.3847/1538-4357/aa8c02.
- González, C., Innocenti, M. E. y Tenerani, A. (abr. de 2023). «Particle-in-cell simulations of Alfvén wave parametric decay in a low-beta plasma». En: *Journal of Plasma Physics* 89.2. doi: 10.1017/s0022377823000120.
- Greco, A., Artemyev, A. y Zimbardo, G. (2014). «Proton acceleration at two-dimensional dipolarization fronts in the magnetotail». En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 119.11, págs. 8929-8941. doi: <https://doi.org/10.1002/2014JA020421>. eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/2014JA020421>.
- Greco, A., Matthaeus, W. H., D'Amicis, R., Servidio, S. y Dmitruk, P. (mar. de 2012). «EVIDENCE FOR NONLINEAR DEVELOPMENT OF MAGNETOHYDRODYNAMIC SCALE INTERMITTENCY IN THE INNER HELIOSPHERE». En: *The Astrophysical Journal* 749.2, pág. 105. doi: 10.1088/0004-637X/749/2/105.
- Hadid, L. Z., Sahraoui, F. y Galtier, S. (mar. de 2017). «Energy Cascade Rate in Compressible Fast and Slow Solar Wind Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 838.1, pág. 9. doi: 10.3847/1538-4357/aa603f.
- Howes, G. G. (mayo de 2017). «A prospectus on kinetic heliophysics». En: *Physics of Plasmas* 24.5. doi: 10.1063/1.4983993.
- Iserles, A. (nov. de 2008). *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9780511995569.
- Kagan, D., Milosavljević, M. y Spitkovsky, A. (ago. de 2013). «A FLUX ROPE NETWORK AND PARTICLE ACCELERATION IN THREE-DIMENSIONAL RELATIVISTIC MAGNETIC CONNECTION». En: *The Astrophysical Journal* 774.1, pág. 41. doi: 10.1088/0004-637X/774/1/41.
- Kolmogorov, A. (ene. de 1941). «The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers». En: *Akademii Nauk SSSR Doklady* 30, págs. 301-305.
- Kraichnan, R. H. y Montgomery, D. (mayo de 1980). «Two-dimensional turbulence». En: *Reports on Progress in Physics* 43.5, págs. 547-619. doi: 10.1088/0034-4885/43/5/001.
- Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-69689-3.
- Langmuir, I. (ago. de 1928). «Oscillations in Ionized Gases». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 14.8, págs. 627-637. doi: 10.1073/pnas.14.8.627.
- Le, A., Daughton, W., Karimabadi, H. y Egedal, J. (mar. de 2016). «Hybrid simulations of magnetic reconnection with kinetic ions and fluid electron pressure anisotropy». En: *Physics of Plasmas* 23.3. doi: 10.1063/1.4943893.
- Leamon, R., Smith, C., Ness, N., Matthaeus, W. y Wong, H. (mar. de 1998). «Observational constraints on the dynamics of the interplanetary magnetic field dissipation range». En: *Journal of Geophysical Research* 103, págs. 4775-4787. doi: 10.1029/97JA03394.

- Leamon, R. J., Matthaeus, W. H., Smith, C. W. y Wong, H. K. (nov. de 1998). «Contribution of Cyclotron-resonant Damping to Kinetic Dissipation of Interplanetary Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 507.2, págs. L181-L184. doi: 10.1086/311698.
- Lehe, R., Parrish, I. J. y Quataert, E. (nov. de 2009). «THE HEATING OF TEST PARTICLES IN NUMERICAL SIMULATIONS OF ALFVÉNIC TURBULENCE». En: *ApJ* 707.1, págs. 404-419. doi: 10.1088/0004-637x/707/1/404.
- Lemoine, M. (sep. de 2021). «Particle acceleration in strong MHD turbulence». En: *Phys. Rev. D* 104 (6), pág. 063020. doi: 10.1103/PhysRevD.104.063020.
- Lipatov, A. S. (2002). *The Hybrid Multiscale Simulation Technology*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-05012-5.
- Lotekar, A. B., Vasko, I. Y., Phan, T., Bale, S. D., Bowen, T. A., Halekas, J., Artemyev, A. V., Khotyaintsev, Y. V. y Mozer, F. S. (abr. de 2022). «Kinetic-scale Current Sheets in Near-Sun Solar Wind: Properties, Scale-dependent Features and Reconnection Onset». En: *The Astrophysical Journal* 929.1, pág. 58. doi: 10.3847/1538-4357/ac5bd9.
- Lugones, R., Dmitruk, P. A., Mininni, P. D., Wan, M. y Matthaeus, W. H. (2016). «On the spatio-temporal behavior of magnetohydrodynamic turbulence in a magnetized plasma». En: *Physics of Plasmas* 23.11, pág. 112304.
- Matteini, L., Alexandrova, O., Chen, C. H. K. y Lacombe, C. (dic. de 2016). «Electric and magnetic spectra from MHD to electron scales in the magnetosheath». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 466.1, págs. 945-951. doi: 10.1093/mnras/stw3163.
- Matthews, A. P. (mayo de 1994). «Current Advance Method and Cyclic Leapfrog for 2D Multispecies Hybrid Plasma Simulations». En: *Journal of Computational Physics* 112.1, págs. 102-116. doi: 10.1006/jcph.1994.1084.
- Mininni, P. D., Rosenberg, D., Reddy, R. y Pouquet, A. (2011). «A hybrid MPI-OpenMP scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence». En: *Parallel Computing* 37.6, págs. 316-326. doi: <https://doi.org/10.1016/j.parco.2011.05.004>.
- Minnie, J., Bieber, J. W., Matthaeus, W. H. y Burger, R. A. (jul. de 2007). «On the Ability of Different Diffusion Theories to Account for Directly Simulated Diffusion Coefficients». En: *The Astrophysical Journal* 663.2, págs. 1049-1054. doi: 10.1086/518765.
- Monchaux, R., Bourgoin, M. y Cartellier, A. (2010). «Preferential concentration of heavy particles: A Voronoï analysis». En: *Physics of Fluids* 22.10, pág. 103304. doi: 10.1063/1.3489987. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.3489987>.
- Montgomery, D. C., Tidman, D. A. y Pytte, A. (mayo de 1965). «Plasma Kinetic Theory». En: *American Journal of Physics* 33.5, págs. 415-415. doi: 10.1119/1.1971595.
- Mott-Smith, H. M. (sep. de 1971). «History of “Plasmas”». En: *Nature* 233.5316, págs. 219-219. doi: 10.1038/233219a0.
- Muñoz, P., Jain, N., Kilian, P. y Büchner, J. (mar. de 2018). «A new hybrid code (CHIEF) implementing the inertial electron fluid equation without approximation». En: *Computer Physics Communications* 224, págs. 245-264. doi: 10.1016/j.cpc.2017.10.012.
- National Institute of Standards and Technology (NIST) (2025). *Atomic and nuclear constants*. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Category?view=html&Atomic+and+nuclear.x=97&Atomic+and+nuclear.y=11> (visitado 12-02-2025).
- Neugebauer, M. y Snyder, C. W. (dic. de 1962). «Solar Plasma Experiment». En: *Science* 138.3545, págs. 1095-1097. doi: 10.1126/science.138.3545.1095.b.
- Obligado, M., Teitelbaum, T., Cartellier, A., Mininni, P. y Bourgoin, M. (2014). «Preferential concentration of heavy particles in turbulence». En: *Journal of Turbulence* 15.5, págs. 293-310. doi: 10.1080/14685248.2014.897710. eprint: <https://doi.org/10.1080/14685248.2014.897710>.
- Obukhov, A. (1941). «Spectral energy distribution in a turbulent flow». En: *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Geogr. i. Geofiz* 5, págs. 453-466.
- Orszag, S. A. (1971). «Numerical Simulation of Incompressible Flows Within Simple Boundaries. I. Galerkin (Spectral) Representations». En: *Studies in Applied Mathematics* 50.4, págs. 293-327. doi: <https://doi.org/10.1002/sapm1971504293>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/sapm1971504293>.
- Parker, E. N. (nov. de 1958). «Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields.» En: *The Astrophysical Journal* 128, pág. 664. doi: 10.1086/146579.
- Parker, E. N. y Tidman, D. A. (sep. de 1958). «Suprathermal Particles». En: *Phys. Rev.* 111 (5), págs. 1206-1211. doi: 10.1103/PhysRev.111.1206.

- Perri, S., Goldstein, M. L., Dorelli, J. C. y Sahraoui, F. (nov. de 2012). «Detection of Small-Scale Structures in the Dissipation Regime of Solar-Wind Turbulence». En: *Physical Review Letters* 109.19. doi: 10.1103/physrevlett.109.191101.
- Perrone, D., Alexandrova, O., Mangeney, A., Maksimovic, M., Lacombe, C., Rakoto, V., Kasper, J. C. y Jovanovic, D. (jul. de 2016). «COMPRESSIVE COHERENT STRUCTURES AT ION SCALES IN THE SLOW SOLAR WIND». En: *The Astrophysical Journal* 826.2, pág. 196. doi: 10.3847/0004-637x/826/2/196.
- Perrone, D., Bruno, R., D'Amicis, R., Telloni, D., Marco, R. D., Stangalini, M., Perri, S., Pezzi, O., Alexandrova, O. y Bale, S. D. (dic. de 2020). «Coherent Events at Ion Scales in the Inner Heliosphere: Parker Solar Probe Observations during the First Encounter». En: *The Astrophysical Journal* 905.2, pág. 142. doi: 10.3847/1538-4357/abc480.
- Pezzi, O., Blasi, P. y Matthaeus, W. H. (mar. de 2022). «Relativistic Particle Transport and Acceleration in Structured Plasma Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 928.1, pág. 25. doi: 10.3847/1538-4357/ac5332.
- Pezzi, O., Cozzani, G., Califano, F., Valentini, F., Guarriasi, M., Camporeale, E., Brunetti, G., Retinò, A. y Veltri, P. (oct. de 2019). «ViDA: a Vlasov–DArwin solver for plasma physics at electron scales». En: *Journal of Plasma Physics* 85.5. doi: 10.1017/s0022377819000631.
- Pouquet, A. y Yokoi, N. (2022). «Helical fluid and (Hall)-MHD turbulence: a brief review». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 380.2219, pág. 20210087.
- Qin, H., Zhang, S., Xiao, J., Liu, J., Sun, Y. y Tang, W. M. (ago. de 2013). «Why is Boris algorithm so good?». En: *Physics of Plasmas* 20.8. doi: 10.1063/1.4818428.
- R. J. y Boor, C. de (ene. de 1980). «A Practical Guide to Splines». En: *Mathematics of Computation* 34.149, pág. 325. doi: 10.2307/2006241.
- Reartes, C. y Mininni, P. D. (nov. de 2021). «Settling and clustering of particles of moderate mass density in turbulence». En: *Phys. Rev. Fluids* 6 (11), pág. 114304. doi: 10.1103/PhysRevFluids.6.114304.
- Richardson, L. F. (2007). *Weather Prediction by Numerical Process*. 2.<sup>a</sup> ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press.
- Roederer, J. y Zhang, H. (nov. de 2013). *Dynamics of Magnetically Trapped Particles*. Vol. 403. Springer, Berlin, Heidelberg, págs. 12-21. doi: 10.1007/978-3-642-41530-2.
- Ruffolo, D., Chuychai, P. y Matthaeus, W. H. (jun. de 2006). «Random Walk of Magnetic Field Lines in Nonaxisymmetric Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 644.2, págs. 971-980. doi: 10.1086/503625.
- Ruffolo, D., Chuychai, P., Wongpan, P., Minnie, J., Bieber, J. W. y Matthaeus, W. H. (oct. de 2008). «Perpendicular Transport of Energetic Charged Particles in Nonaxisymmetric Two-Component Magnetic Turbulence». En: *The Astrophysical Journal* 686.2, págs. 1231-1244. doi: 10.1086/591493.
- Sahraoui, F., Goldstein, M. L., Belmont, G., Canu, P. y Rezeau, L. (sep. de 2010). «Three Dimensional Anisotropic $\langle mml:math xmlns:mml="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">\langle mml:mi>k\langle /mml:mi>\langle /mml:math>$ Spectra of Turbulence at Subproton Scales in the Solar Wind». En: *Physical Review Letters* 105.13. doi: 10.1103/physrevlett.105.131101.
- Sahraoui, F., Huang, S. Y., Belmont, G., Goldstein, M. L., Rétino, A., Robert, P. y De Patoul, J. (oct. de 2013). «SCALING OF THE ELECTRON DISSIPATION RANGE OF SOLAR WIND TURBULENCE». En: *The Astrophysical Journal* 777.1, pág. 15. doi: 10.1088/0004-637x/777/1/15.
- Sahraoui, F., Hadid, L. y Huang, S. (feb. de 2020). «Magnetohydrodynamic and kinetic scale turbulence in the near-Earth space plasmas: a (short) biased review». En: *Reviews of Modern Plasma Physics* 4.1. doi: 10.1007/s41614-020-0040-2.
- Salem, C. S., Howes, G. G., Sundkvist, D., Bale, S. D., Chaston, C. C., Chen, C. H. K. y Mozer, F. S. (ene. de 2012). «IDENTIFICATION OF KINETIC ALFVÉN WAVE TURBULENCE IN THE SOLAR WIND». En: *The Astrophysical Journal* 745.1, pág. L9. doi: 10.1088/2041-8205/745/1/19.
- Servidio, S., Chasapis, A., Matthaeus, W. H., Perrone, D., Valentini, F., Parashar, T. N., Veltri, P., Gershman, D., Russell, C. T., Giles, B., Fuselier, S. A., Phan, T. D. y Burch, J. (nov. de 2017). «Magnetospheric Multiscale Observation of Plasma Velocity-Space Cascade: Hermite Representation and Theory». En: *Physical Review Letters* 119.20. doi: 10.1103/physrevlett.119.205101.

- Servidio, S., Osman, K. T., Valentini, F., Perrone, D., Califano, F., Chapman, S., Matthaeus, W. H. y Veltri, P. (ene. de 2014). «PROTON KINETIC EFFECTS IN VLASOV AND SOLAR WIND TURBULENCE». En: *The Astrophysical Journal* 781.2, pág. L27. doi: 10.1088/2041-8205/781/2/127.
- Smith, C. W., Hamilton, K., Vasquez, B. J. y Leamon, R. J. (jun. de 2006). «Dependence of the Dissipation Range Spectrum of Interplanetary Magnetic Fluctuations on the Rate of Energy Cascade». En: *The Astrophysical Journal* 645.1, págs. L85-L88. doi: 10.1086/506151.
- Stepanov, D., Ryzhov, E., Berloff, P. y Koshel, K. (jul. de 2020). «Floating tracer clustering in divergent random flows modulated by an unsteady mesoscale ocean field». En: *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 114, págs. 1-25. doi: 10.1080/03091929.2020.1786551.
- Stix, T. H. (1992). *Waves in plasmas*. American Institute of Physics.
- Swann, W. F. (feb. de 1933). «A Mechanism of Acquisition of Cosmic-Ray Energies by Electrons». En: *Physical Review* 43.4, págs. 217-220. doi: 10.1103/PhysRev.43.217.
- Tautz, R. C. y Dosch, A. (2013). «On numerical turbulence generation for test-particle simulations». En: *Physics of Plasmas* 20.2, pág. 022302. doi: 10.1063/1.4789861. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.4789861>.
- Teaca, B., Weidl, M., Jenko, F. y Schlickeiser, R. (mar. de 2014). «Acceleration of Particles in Imbalanced Magnetohydrodynamic Turbulence». En: *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 90, pág. 021101. doi: 10.1103/PhysRevE.90.021101.
- Tessein, J. A., Matthaeus, W. H., Wan, M., Osman, K. T., Ruffolo, D. y Giacalone, J. (sep. de 2013). «ASSOCIATION OF SUPRATHERMAL PARTICLES WITH COHERENT STRUCTURES AND SHOCKS». En: *The Astrophysical Journal* 776.1, pág. L8. doi: 10.1088/2041-8205/776/1/18.
- Tessein, J. A., Ruffolo, D., Matthaeus, W. H., Wan, M., Giacalone, J. y Neugebauer, M. (oct. de 2015). «EFFECT OF COHERENT STRUCTURES ON ENERGETIC PARTICLE INTENSITY IN THE SOLAR WIND AT 1 AU». En: *The Astrophysical Journal* 812.1, pág. 68. doi: 10.1088/0004-637x/812/1/68.
- Trotta, D., Pecora, F., Settino, A., Perrone, D., Hietala, H., Horbury, T., Matthaeus, W., Burgess, D., Servidio, S. y Valentini, F. (jul. de 2022). «On the Transmission of Turbulent Structures across the Earth's Bow Shock». En: *The Astrophysical Journal* 933.2, pág. 167. doi: 10.3847/1538-4357/ac7798.
- Uhlmann, M. (2020). «Voronoi tessellation analysis of sets of randomly placed finite-size spheres». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 555, pág. 124618. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124618>.
- Valentini, F., Trávníček, P., Califano, F., Hellinger, P. y Mangeney, A. (jul. de 2007). «A hybrid-Vlasov model based on the current advance method for the simulation of collisionless magnetized plasma». En: *Journal of Computational Physics* 225.1, págs. 753-770. doi: 10.1016/j.jcp.2007.01.001.
- Verscharen, D., Klein, K. G. y Maruca, B. A. (dic. de 2019). «The multi-scale nature of the solar wind». En: *Living Reviews in Solar Physics* 16.1. doi: 10.1007/s41116-019-0021-0.
- Vinogradov, A., Alexandrova, O., Démoulin, P., Artemyev, A., Maksimovic, M., Mangeney, A., Vasiliev, A., Petrukovich, A. A. y Bale, S. (ago. de 2024). «Embedded Coherent Structures from Magnetohydrodynamics to Sub-ion Scales in Turbulent Solar Wind at 0.17 au». En: *The Astrophysical Journal* 971.1, pág. 88. doi: 10.3847/1538-4357/ad5288.
- Wang, C. y Richardson, J. D. (dic. de 2001). «Energy partition between solar wind protons and pickup ions in the distant heliosphere: A three-fluid approach». En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 106.A12, págs. 29401-29407. doi: 10.1029/2001ja000190.
- Zapata, F., Angriman, S., Ferran, A., Cobelli, P., Obligado, M. y Mininni, P. D. (mar. de 2024). «Turbulence Unsteadiness Drives Extreme Clustering». En: *Physical Review Letters* 132.10. doi: 10.1103/physrevlett.132.104005.
- Zhdankin, V., Boldyrev, S., Mason, J. y Perez, J. C. (abr. de 2012). «Magnetic Discontinuities in Magnetohydrodynamic Turbulence and in the Solar Wind». En: *Physical Review Letters* 108.17. doi: 10.1103/physrevlett.108.175004.