UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Problemas nodales inversos

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Martina Guadalupe Oviedo

Director de tesis: Juan Pablo Pinasco.
Consejero de estudios: Pablo Ferrari.

Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló. UBA-CONICET.
Fecha de defensa: 7 de octubre de 2024.
Buenos Aires, julio 2024.

A mis abuelos

Problemas nodales inversos
(Resumen)

Esta tesis doctoral compendia la investigación de distintos problemas inversos nodales. Comenzamos enfocándonos en un problema inverso para una ecuación diferencial ordinaria singular en la semirrecta positiva, donde demostramos que los datos nodales de las autofunciones son suficientes para caracterizar el coeficiente de peso. Luego extendemos este método para caracterizar el potencial en la ecuación de Schrödinger estacionaria. Continuamos estudiando el problema inverso nodal para un operador de Sturm-Liouville en grafos cuánticos, donde nuevamente demostramos que es posible caracterizar el potencial a partir de los datos nodales de las autofunciones. Finalmente, exploramos el espectro de Fučík para laplacianos de medida geométrica, abordando la existencia de curvas continuas y monótonas en dicho espectro para luego resolver el problema nodal inverso asociado.

Palabras Claves: Problemas inversos. Operadores de Sturm-Liouville. Dominios nodales.

Inverse nodal problems

(Abstract)

This doctoral thesis encompasses the investigation of diverse inverse nodal problems. We begin by focusing on an inverse problem for a singular ordinary differential equation on the positive half-line, where we demonstrate that the nodal data of eigenfunctions suffice to characterize the weight coefficient. We then extend this method to characterize the potential in the stationary Schrödinger's equation. Subsequently, we delve into the nodal inverse problem for a Sturm-Liouville operator on quantum graphs, where we once again demonstrate the feasibility of characterizing the potential from the nodal data of eigenfunctions. Finally, we explore the Fučík spectrum for measure-geometric Laplacians, addressing the existence of continuous and monotonic curves within this spectrum before solving the associated nodal inverse problem.

Key words: Inverse problems. Sturm-Liouville operators. Nodal domains.

Agradecimientos

A mi director, Juan Pablo Pinasco.

A todos los docentes que me formaron compartiendo sus conocimientos sin mezquindad alguna.

A Natalia y a Carlo, por el trabajo compartido con feliz compañerismo. A Natalia, también por convertirse en mi familia en esta ciudad.

A Micaela y a mis amigas.

Al Estado argentino.

Muy especialmente, a mi familia.

Índice general

Resumen v

Abstract vii

Agradecimientos ix

1. Introducción 1

1.1. Organización y contextualización de los problemas abordados 4

1.2. Publicaciones relacionadas 10

1.3. Notación 10

2. Preliminares 12

2.1. Autovalores y autofunciones para ecuaciones diferenciales ordinarias 12

2.1.1. Teoría de Sturm-Liouville general en intervalos acotados 12

2.1.2. Autovalores y autofunciones para un problema de Sturm-Liouville definido en la semirrecta 13

2.1.3. Autovalores y autofunciones para la ecuación de Schrödinger estacionaria 15

2.1.4. Autovalores y autovectores de una ecuación diferencial ordinaria definida en un grafo estrella 16

2.2. Aspectos fundamentales de teoría de la medida 18

2.2.1. Operadores de Kreĭn-Feller y espacios de funciones 18

3. Problemas inversos nodales para problemas singulares en la semirrecta 23

3.1. Resultado principal 24

3.2. Problema inverso para la ecuación de Schrödinger 29

4. Problemas nodales inversos en grafos cuánticos 32

4.1. Resultados principales 33

5. Problema nodal inverso en el espectro de Fučik para Laplacianos de medida geométrica 42

5.1. Caracterización del soporte de la medida 44

5.2. Caracterización del peso 46

6. Redes neuronales 51

6.1. Experimentos 52

6.1.1. Arquitectura de la red 52

6.1.2. Conjunto de entrenamiento 53

6.1.3. Descripción del programa 54

6.2. Resultados 57

7. Conclusiones 59

A. El espectro de Fučík para Laplacianos de medida geométrica 62

A.1. Notación 63

A.2. Herramientas de análisis no lineal 64

A.3. Condición de Palais-Smale y autovalores 66

A.4. Autovalores del operador de Kreĭn-Feller 67

A.5. La parte trivial del espectro de Fučík 69

A.6. El espectro de Fučík 69

A.6.1. Una cota para las curvas 71

1

Introducción

En 1980 Joyce McLaughlin introdujo el siguiente problema: considera una ecuación de Sturm-Liouville en el intervalo $[0,1]$ con condiciones de borde de Dirichlet

$$\begin{cases} (-\Delta + q(x))u = \lambda u & x \in [0,1] \qquad \int_0^1 q(x)dx = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

en donde q es una función en $L^2([0,1])$ cuya integral es nula, y se pregunta si puede recuperar dicha función. Ella resuelve el problema utilizando información muy precisa sobre la ubicación de los ceros de todas las autofunciones: suponiendo que x_i^n es el $i-$ésimo cero de la $n-$ésima autofunción entonces

$$x_i^{(n)} = \frac{i\pi}{s_n} + \frac{1}{2s_n^2}\int_0^{x_i^{(n)}} q(y)dy - \frac{1}{2s_n^2}\int_0^{x_i^{(n)}} cos(2s_n y)q(y)dy + O\left(\frac{1}{s_n^3}\right). \tag{1.2}$$

Además, utiliza la siguiente fórmula asintótica para los autovalores:

$$s_n = n\pi + \frac{1}{s_n}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 q(y)dy + \frac{1}{2cos(s_n)}\int_0^1 cos(s_n(1-2y)q(y)dy)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{1.3}$$

donde $s_n = \sqrt{\lambda_n}$. Obteniendo así que si l_j^n es la medida del $j-$ésimo dominio nodal, $(x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)})$, de la $n-$ésima autofunción, y $x \in (x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)})$, se tiene una aproximación de q dada por

$$\hat{q}(x) = 2\lambda_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}l_j^n}{\pi} - 1\right) + o(1),$$

ver [61], [62], [63].

Este método se extiende también al problema generalizado de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\rho(x)u \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

en donde se asume que $\|\rho\|_1 = 1$, y posteriormente se ha generalizado a muchos problemas de Sturm Liouville en intervalos acotados, que son los únicos donde las fórmulas (1.2) y (1.3) se conocen con la precisión que el método requiere.

Otros métodos que se han utilizado para resolver el problema nodal inverso asociado a (1.4) son los que exponemos a continuación:

En 1988, Shen, [84] consideró el problema (1.4) siendo ρ una función estrictamente positiva de modo tal que $\rho \in C^2([0,1])$ y estudió la longitud de los intervalos nodales, en particular del más pequeño y el más grande de ellos, y mostró que vale la siguiente fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j^n) = \frac{\int_0^1 f(x)\sqrt{\rho(x)}dx}{\int_0^1 \sqrt{\rho(x)}dx}, \tag{1.5}$$

siendo $\{x_i^n\}_{i=1}^n$ los ceros de la $n-$ésima autofunción en el intervalo $(0,1]$ y $f \in C^1([0,1])$. De este modo y teniendo en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n n^{-2} = \frac{\pi^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{\rho(x)}dx\right)^2} \tag{1.6}$$

logran calcular todos los momentos c_n de $\sqrt{\rho(x)}$, dado que

$$c_n = \int_0^1 x^n \sqrt{\rho(x)}dx$$

puede ser obtenido tomando $f(x) = x^n$ en (1.5). De este modo, utilizando teoría de momentos, logra determinar $\sqrt{\rho(x)}$ a partir de c_n.

Más adelante, en 1995, Shen y Tsai [85] logran construir una sucesión de funciones lineales a trozos $\{f_n\}_{n\geq 1}$ que converge absolutamente a $f(x) = 1/\sqrt{\rho(x)}$. Una de las principales hipótesis de este trabajo es, nuevamente, considerar a ρ como una función estrictamente positiva tal que $\rho \in C^2([0,1])$, además asumen que conocen una subsucesión de autovalores del problema, $\{\lambda_{n_j}\}_{j\geq 1}$, y los ceros de sus respectivas autofunciones. Considerar que $\rho \in C^2([0,1])$ es fundamental en esta prueba dado que es un hecho que se utiliza fuertemente al hallar aproximaciones para $f'(x)$ y $f''(x)$.

Martinez-Finkelshtein [59], en el 2001, enfocado en dar una aproximación de la distribución de los ceros de las autofunciones del problema

$$-u''(x) = S(x)u(x)$$

en un intervalo $[\alpha,\beta]$ utilizando el método WKB, prueba al realizar un cambio de variables en la ecuación que si se asume que

$$\left|\frac{4S(x)S''(x) - 5[S'(x)]^2}{16[S(x)]^3}\right| \ll 1$$

entonces se obtiene una aproximación de la solución $u(x)$

$$u^{WKB}(x) = AS(x)^{-1/4}\,\mathrm{sen}\left(\int_{\alpha}^{x}\sqrt{S(t)}dt + B\right) \qquad x \in [\alpha,\beta]. \tag{1.7}$$

Considerando el caso en el que $S(x) = \lambda\rho(x)$, utilizando el comportamiento asintótico de λ_n (1.6) y teniendo en cuenta que los ceros, $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots$, de (1.7) coinciden con los de la función $sen(x)$ y satisfacen que

$$\int_{\alpha}^{x_k}\sqrt{\lambda\rho(t)}dt = k\pi - B,$$

es posible determinar $\rho(x)$.

En el 2016, Pinasco y Scarola [74, 75, 76] enfocaron el problema en términos de una sucesión de medidas empíricas $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$, donde μ_n está definida por una suma (normalizada) de deltas de Dirac de igual masa localizadas en los ceros, $\{x_j^n\}_{j=0}^n$, de la enésima autofunción, es decir

$$\mu_n(x) = \frac{\#\{x_j^n < x,\ 0 \leq j \leq n\}}{n+1}.$$

La medida límite que se obtiene para esta sucesión permite recuperar el coeficiente ρ si se asume que ρ es una función no negativa tal que $\int_0^1 \sqrt{\rho(x)}dx = 1$, pues

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \frac{\int_0^x \sqrt{\rho(t)}dt}{\int_0^1 \sqrt{\rho(t)}dt}.$$

Si bien esto aumenta la clase de problemas inversos que pueden resolverse (coeficientes que cambian de signo, problemas en la semirrecta, problemas en dominios fractales), la existencia de dicho límite depende de conocer una estimación asintótica de la forma

$$s_n = \|\sqrt{\rho}\|_1 n\pi + O(1)$$

para $s_n = \sqrt{\lambda_n}$.

En esta tesis nos planteamos estudiar una serie de problemas de Sturm-Liuville para los cuales no se conoce una estimación asintótica a priori para los autovalores. En principio, nada hace pensar que sería posible resolver el problema, pero el siguiente argumento nos puede convencer de su factibilidad.

Consideremos dos ceros consecutivos x_j^n, x_{j+1}^n de la n-ésima autofunción del problema (1.1). Si estos están suficientemente cerca, podemos suponer que $q \approx c_j$, una constante, debido a la continuidad de q. Por otra parte, tenemos que $(\lambda_n - c_j)$ debe coincidir con π^2/l_j^2, el primer autovalor del problema a coeficientes constantes en el intervalo $[x_j^n, x_{j+1}^n]$. En lugar de utilizar las fórmulas asintóticas anteriores, podemos observar que tenemos n ecuaciones lineales que involucran $n+1$ incógnitas, las n constantes c_j $(1 \leq j \leq n)$ y el autovalor λ_n.

Si conseguimos una ecuación adicional, podremos despejar las constantes c_j y el autovalor. Aquí entra en juego un dato que no ha sido utilizado y que permite obtener una nueva ecuación, la

la naturaleza de la función σ en este problema, que nos permite obtener una nueva ecuación para el $n-$ésimo autovalor,

$$\lambda_n = \lambda_n - \int_0^1 q(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} l_j^n(\lambda_n - c_j),$$

obteniendo una ecuación extra

$$\lambda_n \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2}{l_j^n}.$$

Si bien obtuvimos $n+1$ ecuaciones para $n+1$ incógnitas, podría parecer insuficiente para resolver el problema, ya que tenemos n datos iniciales, las longitudes de los dominios nodales. Pero la normalización de q nos reduce también una incógnita, sólo tenemos $n-1$ constantes libres c_j.

El desafío principal entonces es mantener controlados los errores en las aproximaciones que se han hecho. Si logramos esto se tiene un ventaja adicional: el problema a resolver no involucra información externa (el comportamiento asintótico de los autovalores, o la localización de los ceros), sólo depende de los dominios nodales y se tiene un algoritmo explícito que genera una aproximación constante a trozos del coeficiente de la ecuación a partir de las longitudes de los dominios nodales.

Por otra parte, esta simplificación del enfoque nos permite suponer, debido al Teorema de aproximación universal, que es recuperar la función deseada utilizando una red neuronal adecuada, problema que también exploraremos hacia al final de esta tesis.

1.1. Organización y contextualización de los problemas abordados

Presentamos a continuación los problemas que hemos estudiado y los correspondientes resultados que hemos obtenidos haciendo uso de los resultados preliminares presentados en el capítulo 2.

En el capítulo 3 abordaremos el problema nodal inverso para la siguiente ecuación diferencial ordinaria ponderada, definida en la semirrecta $(0, \infty)$:

$$-u'' = \lambda\sigma(t)u, \qquad t \geq 0, \tag{1.8}$$

con condiciones de borde

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}} = 0. \tag{1.9}$$

Aquí, λ es un autovalor real, y asumiremos las siguientes hipótesis para la función de peso σ:

(H1) σ es una función continua y estrictamente positiva.

(H2) $t\sigma(t) \in L^1([0, \infty))$.

(H3) $\int_0^\infty \sigma(t)dt = 1$.

El estudio en profundidad de la ecuación (1.8) fue introducido por Einar Hille en [44], quien demostró la existencia de una sucesión de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, en la que cada autovalor es simple y cualquier autofunción u_n asociada a λ_n tiene exactamente n ceros en $[0,\infty)$.

Para obtener estos resultados no es necesario asumir la monotonía de σ y tampoco que $t^2\sigma(t) \in L^1([0,+\infty))$, sin embargo bajo estas dos hipótesis adicionales se pueden obtener estimaciones asintóticas para el comportamiento de los autovalores como la que se muestra a continuación

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\int_0^\infty \sqrt{\sigma}dt}\right)^2 + o(n^2). \tag{1.10}$$

Fueron dadas varias demostraciones distintas para esta fórmula: la primera fue publicada por Hille en [44]; posteriormente, Birman, Laptev, Naimark y Solomyak dieron otra demostración en [10, 66]; y se dieron otras dos pruebas en [72, 79]. Además, asumiendo solo que $t\sigma(t) \in L^1([0,\infty))$, se ha obtenido otro tipo de expresión para el comportamiento asintótico de los autovalores,

$$cn^\alpha < \lambda_n < Cn^\alpha,$$

para algunas constantes positivas c, C, y $\alpha < 2$. En algunos pocos casos el exponente y las constantes son conocidas en detalle, y se calculan utilizando determinadas familias de funciones, véase Hille [44] y Elias [26], por lo que buscar otra forma de solucionar el problema resulta conveniente.

Llamemos X al conjunto nodal del problema (1.8)-(1.9), que puede indexarse de la siguiente manera:

$$X = \left\{\{x_j^n\}_{n\geq 1, 1\leq j\leq n} : 0 = x_1^n < \cdots < x_j^n < \cdots < x_n^n,\ u_n(x_j^n) = 0\right\},$$

siendo u_n la n-ésima autofunción del problema (1.8). Interesados en la caracterización de σ en términos del conjunto X y sin utilizar el comportamiento asintótico de los autovalores, obtuvimos el resultado principal del capítulo:

Teorema. *Sea X el conjunto nodal del problema (1.8)-(1.9), con σ satisfaciendo las condiciones $(H1)$-$(H3)$. Entonces, a partir de X podemos obtener una sucesión de funciones $\{\sigma^j\}_{j\geq 1}$ tal que $\|\sigma - \sigma^j\|_1 \to 0$ cuando $j \to \infty$. Además, si*

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0, \tag{1.11}$$

también tenemos que $\|\sigma - \sigma^j\|_\infty \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Luego, en la sección 3.2 mostraremos brevemente que esta técnica que hemos desarrollado puede aplicarse para la caracterización del potencial $V(x)$ en la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$-u'' + V(x)u = \lambda u \qquad x \in \mathbb{R}$$

siendo $V(x)$ un potencial continuo que cumple con determinadas hipótesis y suponiendo que la solución cumple con la siguiente condición de contorno:

$$u(x) \to 0 \text{ cuando } |x| \to +\infty.$$

La ecuación diferencial

$$\varepsilon^2 u'' = (V(x) - E)u(x), \qquad \lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \tag{1.12}$$

ha sido ampliamente estudiada debido a su relevancia en la mecánica cuántica. Si $V(x)$ crece de manera monótona cuando $|x| \to +\infty$, la misma describe la amplitud de probabilidad $u(x)$ de una partícula con energía E confinada y potencial $V(x)$. Se tienen las siguientes fórmulas asintóticas para los autovalores, E_n, de la ecuación (1.12):

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_A^B \sqrt{E_n - V(x)}dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + O(\varepsilon), \tag{1.13}$$

en donde A y B son los puntos de retorno de la partícula, es decir las soluciones de $V(x) - E = 0$. Esta ecuación para los autovalores es asintóticamente exacta si consideramos $\varepsilon \ll 1$ cuando se fija el nivel de energía, E.

Así mismo, si en lugar de fijar el nivel de energía consideramos ε fijo, en esta tesis consideraremos $\varepsilon = 1$, tenemos la siguiente fórmula asintótica para los autovalores:

$$\int_A^B \sqrt{E_n - V(x)}dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.14}$$

Motivados por poder caracterizar al potencial $V(x)$ sin hacer uso de estas fórmulas, y suponiendo que el mismo cumple las siguientes hipótesis:

(H1) $V''(t) > 0$

(H2) $V'(t) < 0$ cuando $t < 0$ y $V'(t) > 0$ cuando $t > 0$

(H3) $V(t) \to \infty$ cuando $|t| \to +\infty$,

obtuvimos el siguiente resultado que asegura la resolución del problema inverso.

Teorema. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon)$ tal que los ceros de u_n para $n \geq n(\varepsilon)$ permiten reconstruir $\tilde{V}_n(x)$ tal que*

$$\|V - \tilde{V}_n\|_\infty < O(\varepsilon).$$

En el capítulo 4 mostraremos que, también, conocer el conjunto de ceros de las autofunciones es suficiente para recuperar el potencial, q, de un operador de Sturm-Liouville definido sobre un grafo estrella. La teoría de Sturm-Liouville en grafos cuánticos se puede encontrar en el trabajo de Berkolaiko y Kuchment [6] y las referencias incluidas allí, en las que se estudian varios resultados sobre la teoría espectral, autovalores y diferentes condiciones en vértices, junto con aplicaciones concretas y muchos otros problemas.

Dado un conjunto de vértices $V = \{v, v_1, \ldots, v_N\}$, $N \geq 2$, consideramos el grafo estrella Γ donde v es el nodo central y cada arista $e_j \in E = \{e_1, \ldots, e_N\}$ conecta a v con los nodos v_j. Si la arista e_j es un segmento de longitud l_j, entonces las funciones definidas en esta arista se pueden identificar con funciones definidas en el intervalo $[0, l_j]$, donde $u_j(v) = u_j(l_j)$. Consideramos un operador de Sturm-Liouville en cada arista e_j,

$$-u_j''(x) + q_j(x)u_j(x) = \lambda u_j(x), \qquad x \in (0, l_j), 1 \leq j \leq N, \tag{1.15}$$

junto con condiciones de borde de Dirichlet en los vértices de grado 1,

$$u_j(0) = 0, \ 1 \leq j \leq N, \tag{1.16}$$

satisfaciendo una condición de continuidad en el nodo central, v,

$$u_1(l_1) = u_2(l_2) = \cdots = u_N(l_N), \tag{1.17}$$

y también una condición de contorno tipo δ en v,

$$\sum_{j=1}^{N} u_j'(l_j) = \alpha u(v). \tag{1.18}$$

Omitimos el subíndice en $u(v)$ ya que todas las funciones u_j tienen el mismo valor en v. Observemos que $\alpha = 0$ es la condición de Kirchhoff, que corresponde a un equilibrio de fuerzas de tensión, o flujos, a través de v. La condición $\alpha = \infty$ es equivalente a imponer otra condición de Dirichlet en l_j para cada j, obteniendo así un conjunto de intervalos disjuntos.

Asumimos que las funciones q_j son continuas en el nodo central y satisfacen la condición de normalización

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} q_j(x)dx = 0. \tag{1.19}$$

La teoría espectral para grafos cuánticos presenta diferencias interesantes con la teoría clásica de Sturm-Liouville. Por ejemplo, podemos tener autovalores múltiples o una autofunción puede ser idénticamente cero en algunas aristas. Sin embargo, la simplicidad de los autovalores y la no nulidad de las autofunciones se cumplen de manera genérica, [8]. En resumen, dado un grafo Γ con N aristas podemos considerar el conjunto de longitudes posibles de las N aristas, el ortante positivo de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^N_{>0}$, existirá una intersección numerable de conjuntos abiertos densos tal que el grafo correspondiente tiene autovalores simples y el soporte de las correspondientes autofunciones coincide con Γ.

Expondremos el siguiente resultado para la caracterización de q cuando las autofunciones no se anulan en ningún eje:

Teorema. *Sea Γ un grafo estrella tal que el soporte de cualquier autofunción del problema* (1.15)-(1.18) *coincide con Γ. Sea X el conjunto nodal asociado a dicho problema*

$$X = \cup_{k\geq 1} X_k, \quad X_k = \{x_n^{z(k)} \ : \ k \geq 1 \text{ y } 0 \leq n \leq z(k)\},$$

en donde X_k es el conjunto de ceros de la k-ésima autofunción. Sean $q \in C[0,1]$ tal que satisface la condición (1.19)*. Entonces, q está determinado de manera única y puede ser recuperado a partir de X.*

Como veremos, la multiplicidad de los autovalores no será un problema para caracterizar q. En cambio, cuando existen autofunciones que se anulan en algunos ejes el problema puede ser resuelto bajo algunas supocisiones extras: imponiendo la existencia de una subsucesión de autofunciones no nulas o conociendo las integrales de q_j en cada eje. Resumiremos ambas formas de solucionar esta situación en los siguientes teoremas:

Teorema. *Sea Γ un grafo estrella y una subsucesión de autofunciones $\{u_{i_k}\}_{k\geq 1}$ del problema* (1.15)-(1.18) *tal que el soporte de cada u_{i_k} coincide con Γ. Sea $\tilde{X}$ el conjunto nodal de estas autofunciones,*

$$X = \cup_{k\geq 1} X_k, \quad X_k = \{x_n^{z(i_k)} \ : \ k \geq 1 \text{ y } 0 \leq n \leq z(i_k)\},$$

donde X_k es el conjunto de ceros de la i_k-ésima autofunción. Sea $q \in C[0,1]$ tal que satisface la condición (1.19)*. Entonces, q está univocamente determinado y puede ser recuperado a partir de X.*

Teorema. *Sea Γ un grafo estrella y sea $\{u_k\}_{k\geq 1}$ la sucesión de autofunciones del problema* (1.15)-(1.18)*. Sea $\tilde{X}$ el conjunto nodal de estas autofunciones,*

$$\tilde{X} = \cup_{k\geq 1} X_k, \quad X_k = \{x_n^{z(k)} \ : \ k \geq 1 \text{ y } 0 \leq n \leq z(k)\},$$

donde X_k es el conjunto de ceros de la k-ésima autofunción. Sea $q \in C[0,1]$, y sean $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^{l_j} q_j(x)dx = a_j, \qquad 1 \leq j \leq N.$$

Entonces, q está determinado de manera única y puede ser recuperado a partir de $\tilde{X}$ y $\{a_j\}_{j=1}^N$.

Es importante destacar que trabajos previos que abordaron el problema nodal inverso en grafos cuánticos no consideran en su análisis el problema de la multiplicidad de los autovalores ni la posibilidad de que las autofunciones se anulen. Adicionalmente, a diferencia de estos trabajos en los que se obtuvieron las estimaciones a partir de fórmulas de Prüfer para los autovalores, nuestra demostración proporciona un algoritmo explícito para reconstruir q desde cero, no asumimos ninguna estimación a priori sobre el comportamiento de λ_n.

En el capítulo 5 resolveremos el problema inverso asociado a la ecuación del $\mu-$Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Comenzaremos por mostrar los resultados que detallamos a continuación, los mismos nos permitiran tener una caracterización del soporte de una medida no atómica, μ.

Teorema. *Consideremos el cono*

$$C = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 0,\, \beta > 0,\; s_1\alpha < \beta < s_2\alpha\right\}$$

para constantes positivas s_1 y s_2 y sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones propias de Fučík del problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1.21}$$

asociadas a los autovalores $\{(\alpha_n,\beta_n)\}_{n\geq 1} \in \Sigma \cap C$, con $\alpha_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.

Sean $\{x_j^n\}_{1\leq j\leq n+1}$ los puntos nodales de la n-ésima función propia. Introduzcamos las medidas de probabilidad discretas

$$dZ_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1} \delta_{x_j^n},$$

y llamemos $Z_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ a la función de distribución acumulativa,

$$Z_n(x) = \int_0^x dZ_n.$$

Entonces, existe una subsucesión de $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ que converge puntualmente a una función $Z : \mathbb{R} \to [0,1]$, además, esta función es constante en el complemento de K_μ, siendo K_μ el suporte de μ.

Definiremos además

$$N_n(x_0,\delta) = \#\left\{\{x_j^n\}_{1\leq j\leq n+1} \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)\right\}$$

para obtener los resultados que siguen.

Teorema. *Sea $S_\mu = \{\{x_j^n\}_{1\leq j\leq n+1}\}_{n\geq 1}$ el conjunto de puntos nodales de las autofunciones $\{u_n\}_{n\geq 1}$ del problema (1.20).*

I. *Si $x_0 \in K_\mu^c$ y $\eta = dist(x_0, K_\mu)$, entonces, para cualquier $\delta < \eta$, $N_n(x_0,\delta) \leq 1$.*

II. *Si $x_0 \in K_\mu$, entonces, para cualquier $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} N_n(x_0,\delta) = \infty.$$

Para continuar con la obtención de nuestro resultado principal haremos uso del espectro de Fučik asociado a la ecuación (1.20). Hemos obtenido conclusiones en el tema que nos aportarán las herramientas necesarias para hacerlo, las mismas se presentan en el apéndice A. El teorema principal del capítulo establece condiciones suficientes para la caracterización de la función $m(x)$ y establace lo siguiente:

Teorema. *Sea Σ el espectro de Fučík del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Asumamos que m es continua en $[0,1]$ y consideremos el cono

$$C = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 0,\, \beta > 0,\; s_1\alpha < \beta < s_2\alpha\right\}$$

para constantes positivas s_1, s_2. Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de autofunciones de Fučík asociadas a los autovalores $\{(\alpha_n,\beta_n)\}_{n\geq 1} \in \Sigma \cap C$, tal que $\alpha_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Supongamos también que $u_n'(0) > 0$, de modo que u_n en el primer dominio nodal es positiva. Dado X, el conjunto de ceros asociados a $\{u_n\}_{n\geq 1}$, podemos recuperar hasta un múltiplo de $m(x)$, $cm(x)$ siendo c una constante, en el soporte de μ.

1.2. Publicaciones relacionadas

Hemos publicado los artículos que siguen en cuanto el tema pertinente:

- Oviedo, M., Pinasco, J.P.: Inverse nodal problems for singular problems in the half-line. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana **29**(3), 56 (2023)
- Oviedo, M., Pinasco, J.P.: Inverse nodal problems for Sturm–Liouville operators on quantum star graphs. Mathematical Methods in the Applied Sciences **46**(8),19062-19073 (2023)
- Oviedo, M., Pinasco, J.P., Scarola, C: The Fučík Spectrum for One Dimensional Kreĭn–Feller Operators. Mediterranean Journal of Mathematics **20**(3), 133 (2023)

1.3. Notación

Denotamos por σ, s y r a las funciones peso, las mismas pertenecen a $C([a,b])$, el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo $[a,b]$. Llamaremos q o V a los potenciales involucrados, dependiendo de la notación habitual del problema. Denotamos por $L^\infty([a,b])$ al conjunto de funciones medibles esencialmente acotadas en el intervalo $[a,b]$. y por $L^1([a,b])$ al conjunto de funciones integrables de Lebesgue en $[a,b]$.

Utilizamos las letras u, v, w para denotar soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias, y u' denota la derivada respecto a t o x según corresponda. Las letras griegas $\lambda, \mu, \zeta, \xi, \chi$, son utilizadas para diferentes problemas de autovalores, y c, C son constantes positivas.

Denotamos $\{x_j^n\}_{1\leq j\leq n}$ a los n ceros o *puntos nodales* de una autofunción u_n, que definen $n-1$ *dominios nodales*, entendiendo como dominio nodal al intervalo que queda definido por dos ceros consecutivos de una autofunción.

La notación específica utilizada para denotar a los operadores que nos permiten desarrollar la teoría expuesta en el apéndice, A, será introducida allí.

2

Preliminares

En el presente capítulo, expondremos los resultados previamente establecidos que otorgan el marco teórico necesario para contextualizar y fundamentar las contribuciones originales que se presentan en esta tesis.

2.1. Autovalores y autofunciones para ecuaciones diferenciales ordinarias

A continuación recordaremos los resultados principales de la teoría de Sturm-Liouville para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Haremos un recorrido de los distintos resultados obtenidos según el dominio en el que se defina le ecuación.

2.1.1. Teoría de Sturm-Liouville general en intervalos acotados

Repasemos los teoremas que aseguran la existencia de autovalores, cuáles son los ceros de las autofunciones y resultados de oscilación y comparación cuando la ecuación de encuentra definida en un intervalo acotado $[a, b]$.

Teorema 2.1 (**Sturm-Liouville**). *Los autovalores del problema de Sturm-Liouville dado por:*

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda\sigma(x)u(x) & x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

forman una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *creciente,* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$. *de modo tal que* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Además, las autofunciones asociadas a* λ_n *forman un subespacio unidimensional, y cualquier autofunción* u_n *tiene exactamente* $n + 1$ *ceros en* $[a, b]$.

Adicionalmente, en el caso en el que $q \equiv 0$ y $\sigma \equiv \sigma_0$, tenemos las siguientes fórmulas exactas para los autovalores y sus correspondientes autofunciones:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\sigma_0 (b-a)^2}, \qquad u_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{\sqrt{\sigma_0}(b-a)}\right).$$

Observemos que los ceros de u_n están dados por $x_j = \frac{j\sqrt{\sigma_0}(b-a)}{n}$ para $0 \leq j \leq n$.

Teorema 2.2 (**Separación**). *Supongamos que u_1 y u_2 son soluciones linealmente independientes de*

$$u''(x) + r(x)u(x) = 0.$$

Entonces:

i. Los ceros de las soluciones no triviales de la ecuación son simples y aislados.

ii. Sean $x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $u_1(x_1) = u_1(x_2) = 0$ y $u_1(x) \neq 0$ si $x \in (x_1, x_2)$, entonces u_2 tiene exactamente un cero en (x_1, x_2).

Teorema 2.3 (**Comparación**). *Sean $u_j(x)$, $j = 1,2$ soluciones no triviales de las ecuaciones*

$$-u_j''(x) = r_j(x)u_j(x), \quad r_1(x) \leq r_2(x), \quad j = 1,2, \quad x \in [a,b],$$

tal que $r_j \in C([a,b])$, $\quad j = 1,2$. Supongamos que $x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $u_1(x_1) = u_1(x_2) = 0$ y $u_1(x) \neq 0$ si $x \in (x_1, x_2)$. Entonces existe $\tilde{x} \in (a,b)$ tal que $u_2(\tilde{x}) = 0$. En otras palabras, entre dos ceros consecutivos de u_1, existe al menos un cero de u_2, a menos que $r_1 \equiv r_2$ y $u_1 \equiv u_2$.

Teorema 2.4 (**Comparación para autovalores**). *Si λ_k y μ_k son los k-ésimos autovalores de*

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda s(x)u(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -v''(x) = \mu r(x)v(x) \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}, \qquad x \in [a,b]$$

respectivamente, en donde s, $r \in C([a,b])$ siendo $s(x) \leq r(x)$, entonces $\lambda_k \geq \mu_k$.

Observación 2.5. Utilizaremos estos teoremas a lo largo de toda la tesis principalmente de la siguiente manera: dadas u_k y u_j, dos autofunciones asociadas a $\lambda_k < \lambda_j$, entre dos ceros de u_k tenemos al menos un cero de u_j.

Una prueba de estos resultados se puede encontrar en [37].

2.1.2. Autovalores y autofunciones para un problema de Sturm-Liouville definido en la semirrecta

Takaŝi y Naito probaron en [53] que dada una ecuación diferencial de la forma

$$(|u'|^\alpha \operatorname{sgn} u')' + \lambda\sigma(t)|u|^\alpha \operatorname{sgn} u = 0, \qquad t \geq a \tag{2.2}$$

en donde $\alpha > 0$ es una constante, $\lambda > 0$ es un parámetro y $\sigma(t)$ es una función continua y positiva definida en el intervalo $[a, \infty)$, se puede obtener información precisa acerca del número de ceros para las soluciones $u(t)$ de (2.2) que cumplan con que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}} = 0. \tag{2.3}$$

Para el caso en que $\alpha = 1$, se presenta la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$u'' + \lambda\sigma(t)u = 0, \quad t \geq a.$$

Esta ecuación constituye el núcleo de uno de los problemas investigados en esta tesis.

Es conocido que si adicionamos condiciones iniciales del tipo $u(b) = x_0 \in \mathbb{R}$, $u'(b) = x_1 \in \mathbb{R}$ $(b \geq a)$ la ecuación (2.2) tiene solución única en el intervalo $[a, \infty)$. Está claro además que si $u(t)$ es una solución no trivial entonces tendrá una cantidad finita de ceros en la semirrecta $[a, \infty)$ o bien una cantidad infinita concentrados en $t = \infty$. En el primer caso las soluciones son llamadas *soluciones oscilatorias* y en el segundo, *soluciones no oscilatorias*. De hecho, se pueden establecer teoremas de separación y comparación del tipo Sturm para la ecuación (2.2), ver [25]. De este modo las soluciones no triviales de la misma serán todas no oscilatorias u oscilatorias. Si ocurre lo primero, diremos que la ecuación (2.2) es no oscilatoria y en segundo caso, que es oscilatoria. Además, dicha ecuación será *fuertemente no oscilatoria* (respectivamente, *fuertemente oscilatoria*) si (2.2) es no oscilatoria (respectivamente, oscilatoria) para cada $\lambda > 0$.

La caracterización de las soluciones de (2.2), y por lo tanto de (2.1.2), fue publicada en [54] y dada en el siguiente teorema:

Teorema. *Considere la ecuación* (2.2)*, entonces*

I. *La ecuación es fuertemente no oscilatoria si y sólo si*

$$\int_a^\infty \sigma(t)dt < +\infty \text{ y } \lim_{t\to\infty} t \int_t^\infty \sigma(s)ds = 0. \tag{2.4}$$

II. *La ecuación es fuertemente oscilatoria si y sólo si*

$$\int_a^\infty \sigma(t)dt = +\infty \text{ y } \lim_{t\to\infty} t \int_t^\infty \sigma(s)ds = +\infty. \tag{2.5}$$

Estamos interesados en trabajar con soluciones no oscilatorias debido a que haremos uso del conjunto de ceros de las autofunciones. El siguiente teorema, dado en [53] asegura la existencia y unicidad de una solución de este tipo, $u_\lambda(t)$, que cumple con la condición (2.3).

Teorema. *Sea $\alpha > 0$ y $\sigma(t)$ tal que satisface* (2.4)*, entonces para cada $\lambda > 0$ existe una solución no oscilatoria de* (2.2)*, $u_\lambda(t)$, que satisface* (2.3)*. Es más, si $\alpha \geq 0$ entonces dicha solución está univocamente determinada, salvo múltiplos no nulos de la misma.*

Para las soluciones $u_\lambda(t)$ obtenidas en el teorema anterior, Kusano y Naito lograron establecer el siguiente teorema en [53] en relación con la cantidad de ceros de las soluciones.

Teorema. *Sean $\alpha \geq 1$ y $\sigma(t)$ tal que satisface (2.4). Entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de autovalores positivos con las siguientes propiedades*

I. $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

II. *Si $\lambda \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $u_\lambda(t)$ tiene exactamente $n-1$ ceros en el intervalo abierto (a, ∞) y $u_\lambda(a) \neq 0$.*

III. *Si $\lambda = \lambda_n$ $n = 1, 2, \ldots$, entonces $u_\lambda(t)$ tiene exactamente $n-1$ ceros en el intervalo abierto (a, ∞) y $u_\lambda(a) = 0$.*

Este resultado será fundamental para dar respuesta al problema planteado en el capítulo 3.

2.1.3. Autovalores y autofunciones para la ecuación de Schrödinger estacionaria

Si ahora consideramos la siguiente ecuación

$$u'' = (V(x) - E)u(x), \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0,$$

se puede probar que si el potencial satisface las siguientes hipótesis

(H1) $V''(x) > 0$

(H2) $V'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y $V'(x) > 0$ cuando $x > 0$

(H3) $V(x) \to \infty$ cuando $|x| \to +\infty$,

entonces existen infinitos autovalores $\{E_n\}_{n\geq 1}$, y los mismos son tales que $E_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Condensaremos este y otros resultados de utilidad, que se pueden hallar en las secciones 7.7.4, 7.12, 8.1 de [88], en el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Consideremos el problema*

$$u'' = (V(x) - E)u(x), \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

siendo $V(x)$ un potencial que cumple con lo descrito anteriormente. Entonces existe una sucesión de autovalores positivos, $\{E_n\}_{n\geq 1}$, que cumplen con las siguientes propiedades:

I. $0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_n < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} E_n = +\infty$

II. *Si $E \in (E_{n-1}, E_n)$ entonces $u_E(x)$ tiene exactamente $n-1$ ceros en $(-\infty, +\infty)$.*

III. *Si $E = E_n$ $n = 1, 2, \ldots$ entonces la función asociada a este valor, u_n, tiene exactamente n ceros en* $(-\infty, +\infty)$.

La siguiente observación sobre el potencial de la ecuación será de gran utilidad para los resultados que siguen:

Observación 2.7. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\min_{t\in\mathbb{R}} V(t) = 1$. En efecto, dada la ecuación 3.14 podemos reescalarla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} -u'' &= (\lambda - V(t))u \\ &= (\lambda + \min_{t\in\mathbb{R}} V(t) - 1 - V(t) - \min_{t\in\mathbb{R}} V(t) + 1)u \\ &= (\mu - \bar{V}(t))u. \end{aligned}$$

En donde $\mu = \lambda - \min_{t\in\mathbb{R}} V(t) + 1$ y $\bar{V}(t) = V(t) - \min_{t\in\mathbb{R}} V(t) + 1$, y por lo tanto $\min_{t\in\mathbb{R}} \bar{V}(t) = 1$.

A continuación, haremos una observación sobre la ubicación de los ceros de las autofunciones que será esencial al momento de resolver nuestro problema inverso:

Observación 2.8. Consideremos la ecuación $V(x) - E_n = 0$ (para fijar ideas estamos considerando el n-ésimo autovalor aunque el mismo razonamiento podría hacerse con E). Como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es tal que $\lim_{n\to+\infty} E_n = +\infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $E_n > 1$, si tenemos en cuenta que hemos reescalado $V(x)$ de modo tal que $\min_{x\in\mathbb{R}} = 1$ y las hipótesis que cumple el potencial, entonces $V(x) - E_n = 0$ tiene dos soluciones a las que llamaremos A y B, sin pérdida de generalidad supongamos que $A < B$. Debido a que $V(x) - E_n > 0$ sólo en (A, B), se puede concluir que los n ceros de la $n-$ésima autofunción se hallan en este intervalo, definido como mencionamos.

2.1.4. Autovalores y autovectores de una ecuación diferencial ordinaria definida en un grafo estrella

Sea $\Gamma = (V, E)$ de modo tal $V = \{v, v_1, \ldots, v_N\}$, $N \geq 2$ y $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$ un grafo estrellado cuyo nodo central es v y e_j, la arista que conecta a v con nu_j. Sea l_j la longitud de dicha arista, entonces las funciones allí definidas se pueden identificar con funciones definidas en el intervalo $[0, l_j]$, donde $u_j(v) = u_j(l_j)$. Consideramos la ecuación asociada a un operador de Sturm-Liouville en cada arista e_j, con la interpretación que acabamos de sugerir,

$$-u_j''(x) + q_j(x)u_j(x) = \lambda\, u_j(x), \qquad x \in (0, l_j), 1 \leq j \leq N, \tag{2.6}$$

junto con condiciones de borde de Dirichlet en los vértices de grado 1,

$$u_j(0) = 0,\ 1 \leq j \leq N, \tag{2.7}$$

satisfaciendo una condición de continuidad en el nodo central, v,

$$u_1(l_1) = u_2(l_2) = \cdots = u_N(l_N), \tag{2.8}$$

y también una condición de contorno tipo δ en v,

$$\sum_{j=1}^{N} u_j'(l_j) = \alpha u(v). \tag{2.9}$$

Con el fin de simplificar la notación, omitimos el subíndice en $u(v)$ ya que todas las funciones u_j tienen el mismo valor en v. Además, llamaremos $q, u : \Gamma \to \mathbb{R}$ a las funciones

$$\begin{aligned} q(x) &:= q_j(x) \qquad \text{si } x \in [0, l_j], \\ u(x) &:= u_j(x) \qquad \text{si } x \in [0, l_j]. \end{aligned}$$

De manera similar, escribiremos

$$\int_\Gamma q(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} q_j(x)dx.$$

Las autofunciones correspondientes, u_k, pertenecen a

$$\mathcal{H}(\Gamma) = \bigoplus_{j=1}^{N} H^2([0, l_j]).$$

Utilizando técnicas clásicas, se demuestra que existe una sucesión de autovalores aislados $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ de multiplicidad finita, y $\lambda_i \to \infty$ conforme $i \to \infty$. Estos resultados y otros referidos a la teoría espectral en grafos pueden encontrarse en el trabajo de Berkolaiko y Kuchment [6], en particular en el Teorema 3.1.1.

Además, para trabajar sobre $G = (V, E)$ tenemos el siguiente resultado que permitirá comparar el primer autovalor asociado a dos problemas de este tipo:

Teorema 2.9 (**Comparación para grafos**). *Sean* (λ_1, u_1) *y* (η_1, v_1) *los pares correspondientes al primer autovalor y autofunción de los problemas*

$$\begin{aligned} -u''(x) + q_1(x)u(x) &= \lambda u(x), \\ -v''(x) + q_2(x)v(x) &= \eta v(x), \end{aligned}$$

respectivamente, definidos en Γ*, satisfaciendo las condiciones de borde y continuidad* (2.7)*,* (2.8)*, y* (2.9)*. Supongamos que* q_1 *y* q_2 *son funciones continuas y que* $q_1(x) \leq q_2(x)$ *en* Γ*. Entonces* $\lambda_1 \leq \eta_1$*.*

Demostración. Utilizando la caracterización variacional de autovalores, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \text{mín}\Big\{ \int_\Gamma w'^2(x) + q_1 w^2(x)dx, \quad w \in \mathcal{H}, \int_\Gamma w^2(x)dx = 1 \Big\}, \\ \eta_1 &= \text{mín}\Big\{ \int_\Gamma w'^2(x) + q_2 w^2(x)dx, \quad w \in \mathcal{H}, \int_\Gamma w^2(x)dx = 1 \Big\}. \end{aligned}$$

Dado que $q_1 \leq q_2$, entonces

$$\int_\Gamma w'^2(x) + q_1 w^2(x)dx \leq \int_\Gamma w'^2(x) + q_2 w^2(x)dx$$

para cualquier $w \in \mathcal{H}$, y la prueba está completa. □

Utilizaremos todos estos resultados en el capítulo 4

2.2. Aspectos fundamentales de teoría de la medida

Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de conjuntos de Borel en la recta real $\mathbb{R}$, y $\mathcal{M}$ la clase de medidas de probabilidad positiva, no atómicas y de Borel, es decir, $\mu \in \mathcal{M}$ es una función positiva y σ-aditiva, que satisface que $\mu(\mathbb{R}) = 1$ y tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

El soporte de la medida es el conjunto donde la medida está concentrada, lo denotaremos como K_μ. Más formalmente, K_μ es el conjunto cerrado más pequeño tal que $\mu(\mathbb{R} \setminus K_\mu) = 0$. Notemos que $x \in K_\mu$ si y solo si $\mu([x - r, x + r]) > 0$ para todo $r > 0$.

Definiremos a continuación el Laplaciano Δ_μ asociado a una medida μ, y necesitaremos restringirlo a subconjuntos de K_μ. Como es habitual, definimos la restricción de la medida μ a un subconjunto A como

$$\mu|_A(X) := \mu(A \cap X).$$

Con el afán de simplificar la notación, aún denotaremos por μ a la restricción.

En la misma línea, vale la pena señalar que si agregamos finitos puntos a $K = K_\mu$ con masa cero, aún obtenemos un conjunto compacto $\hat{K}$, tal que podemos extender μ a $\hat{K}$, y tenemos una medida de Borel, no atómica y de probabilidad, que aún denotaremos como μ. Usaremos esta extensión, que es directa, cuando consideremos subconjuntos de $(0, 1)$ y espacios de funciones que toman valores específicos en 0 o en 1.

Nos interesan especialmente las medidas fractales, esencialmente medidas de Borel, no atómicas, con un soporte singular $K \subset [0, 1]$. Ejemplos típicos de tales medidas son las convoluciones de Bernoulli y medidas autoafines más generales. Sin embargo, no estamos limitados a conjuntos o medidas autoafines, no entramos en los detalles de sus dimensiones. Para más detalles sobre estos temas, sugerimos consultar [28, 60].

2.2.1. Operadores de Kreĭn-Feller y espacios de funciones

Sea $\mu \in \mathcal{M}$, el operador Laplaciano $-\Delta_\mu$ es un operador generalizado de segundo orden

$$-\Delta_\mu u := -\frac{d}{d\mu}\frac{d}{dx}u,$$

que se puede obtener utilizando la definición de la derivada de Feller dada en [30], o en términos de un operador integral de Volterra-Stieltjes introducido por Kreĭn [52]: decimos que $-\Delta_\mu u = f$ si y sólo si

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \int_0^x \int_0^y f(t)d\mu(t)dy$$

para alguna función $f \in L^2_\mu([0,1])$ representando con $u'(0)$ es la derivada a derecha evaluada, ver [11], Teorema 3.1.

El problema de autovalores para los operadores de Kreĭn-Feller fue estudiado extensamente en [11, 22, 34, 35, 68, 69], por citar algunos trabajos, incluyendo fractales clásicos y conjuntos más complejos que pueden permitir solapamientos. En nuestra investigación seguimos el enfoque utilizado por Freiberg en [33], comenzando con el siguiente espacio de funciones:

$$\mathcal{D}^1_{\mathcal{L}} = \left\{u : [0,1] \to \mathbb{R} : \exists v \in L_2([0,1]),\ u(x) = u(0) + \int_0^x v(y)dy;\ x \in [0,1]\right\}.$$

Aquí $u' = \dfrac{du}{dx} = v$ es la derivada débil de u; en este caso, $\mathcal{D}^1$ coincide con el espacio de Sobolev $W^{1,2}$.

Ahora, consideremos una medida de Borel no atómica y normalizada μ en $[0,1]$ con soporte compacto $K \subset [0,1]$, con $0, 1 \in K$, repitiendo la construcción anterior con respecto a esta medida definimos:

$$\mathcal{D}^{1,2}_\mu = \left\{u \in \mathcal{D}^1_{\mathcal{L}} : \exists f \in L_2(K,\mu),\ u'(x) = u'(0) + \int_0^x f(y)d\mu(y);\ x \in K\right\}.$$

Si dotamos a este último espacio con la siguiente norma

$$\|u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}_\mu} = \int_0^1 u'^2(x)dx + \int_0^1 u^2(x)d\mu(x), \tag{2.10}$$

obtenemos un espacio de Sobolev. En [33], Proposición 2.4, Freiberg demuestra que $\mathcal{D}^{1,2}_\mu \subset D^1_{\mathcal{L}} \subset C([0,1]) \subset L_2(K,\mu) \cap L_2([0,1])$, además f es única en $L_2([0,1],\mu)$ y $f = \Delta_\mu u$.

Considerando ahora solo aquellas funciones en $\mathcal{D}^{1,2}_\mu$ que satisfacen la condición de contorno de Dirichlet, definimos

$$\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu} = \left\{u \in \mathcal{D}^{1,2}_\mu : u(0) = u(1) = 0\right\}.$$

Tomando la norma (2.10), se puede demostrar que $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ es un espacio de Hilbert, que es el dominio de la forma bilineal

$$\mathcal{E}(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Cabe destacar que las funciones en $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ tienen una derivada distribucional en $L^2([0,1])$. Luego, podemos tratar a $-\Delta_\mu u$ como una distribución que actúa sobre funciones continuamente diferenciables v con soporte compacto en $(0,1)$, es decir, $v \in C^1_0((0,1))$, de la siguiente manera:

$$\int_0^1 (-\Delta_\mu u)v d\mu = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Más formalmente, diremos que $u \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ es una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = f(x,u) \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases}$$

si para cualquier función test $v \in C^1_0((0,1))$ tenemos que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int f(y,u)v(y)d\mu(y).$$

Vale la pena señalar algunos resultados y sus consecuencias en este contexto:

- La ley del producto para derivadas, la fórmula de integración por partes y la unicidad de la representación con una derivada en L^2 siguen siendo válidas;
- La fórmula de Gauss-Green asegura que el Laplaciano generalizado $-\Delta_\mu$ es un operador positivo y simétrico;
- El núcleo de Green y el operador resolvente fueron estudiados en [34], y el teorema espectral para operadores compactos aplicado a $(-\Delta_\mu)^{-1}$ implica la existencia de una secuencia creciente de autovalores positivos $\{\lambda^\mu_k\}_{k\geq 1}$ para condiciones de contorno de Dirichlet cero (otra para condiciones de contorno de Neumann cero), tal que $\lambda^\mu_k \nearrow +\infty$ cuando $k \to +\infty$ de modo tal que las autofunciones correspondientes pertenecen a $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ (respectivamente, a $\mathcal{D}^{1,2}_{\mu}$), ver [33] y [35].

El siguiente lema implica que las funciones $u \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ son continuas:

Lema 2.10. *Sea $u \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$. Entonces $u' \in L^2([0,1])$, y*

$$u(x) = u(c) + \int_c^x u'(y)dy$$

para cualquier c, $x \in (0,1)$. Además, si $J \subset K^c_\mu \cap [0,1]$, la restricción de u a J, $u|_J$ es una función lineal.

Como resultado de este lema, la desigualdad de Poincaré sigue como en el entorno clásico e implica la equivalencia de las normas en $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$.

Lema 2.11. *Sea $u \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$. Entonces*

$$\int_0^1 u^2 d\mu \leq C \int_0^1 u'^2 dx.$$

En particular,

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}} \leq C\|u'\|_2 = C\mathcal{E}(u,u).$$

Demostración. Tomando $c = 0$ en el Lema 2.10 y aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq \int_0^x |u'(y)|dy \\ &\leq \left(\int_0^1 |u'(y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_0^1 dy\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, elevando ambos lados de la desigualdad al cuadrado e integrando ahora en $[0, 1]$ con respecto a la medida μ, obtenemos:

$$\int_0^1 |u(x)|^2 d\mu(x) \leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |u'(y)|^2 dy\right] d\mu(x) = \mu([0, 1]) \int_0^1 |u'(y)|^2 dy,$$

y el lema queda demostrado. □

El Lema 2.10 implica que una función en $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ podría ser constante en algunas partes del dominio, o podría tener un cero fuera del soporte K_μ. Sin embargo, los extremos de las soluciones siempre se alcanzan en K_μ. En [77] se da una prueba para el lema que enunciamos a continuación.

Lema 2.12. *Sea u una solución de $-\Delta_\mu u = m(x)u$, donde $m \in C([0, 1])$. Entonces, $|u|$ alcanza su máximo en algún punto $c \in K_\mu$.*

La caracterización de minimax de Rayleigh-Ritz de Courant y Fischer proporciona una prueba alternativa de la existencia de autovalores, aunque depende de la ortogonalidad.

Teorema 2.13. *Sea $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ los autovalores de Dirichlet del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = \lambda m(x)u & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \text{mín}\{R(u) : u \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}\} \\ \lambda_n &= \text{mín}\{R(u) : u \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu} \cap \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^\perp\},\end{aligned}$$

donde $R(u)$ es el cociente de Rayleigh

$$R(u) = \frac{\int_0^1 u'^2(x)dx}{\int_0^1 m(x)u^2(x)d\mu(x)}.$$

Finalmente, resumamos aquí la teoría de Sturm-Liouville desarrollada para operadores de Kreĭn-Feller en las Proposiciones 2.1 en [11] y 2.5 en [35]:

Teorema 2.14. *Sea* $\{(\lambda_n^m, u_n^m)\}_{n\geq 1}$ *la sucesión de autovalores y las correspondientes autofunciones del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda m(x)u, & x \in [0,1] \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases}$$

Entonces, se cumplen los siguientes resultados:

- *Simplicidad: el conjunto de autofunciones asociado a cada autovalor* λ_n^m *es un subespacio unidimensional de* $\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}$.
- *Ceros: cualquier autofunción* u_n *tiene* $n+1$ *ceros simples en* $[0,1]$.
- *Comparación: dadas dos funciones continuas* $m_1 < m_2$*, tenemos* $\lambda_n^{m_1} > \lambda_n^{m_2}$.
- *Oscilación: si* u_λ *es cualquier solución de* $-\Delta_\mu = \lambda mu$*, y* $\lambda_n^m < \lambda$*, existe al menos un cero de* u_λ *entre dos ceros consecutivos de* u_n^m.

3

Problemas inversos nodales para problemas singulares en la semirrecta

En este capítulo resolveremos el problema nodal inverso para la siguiente ecuación diferencial ordinaria con peso:

$$-u'' = \lambda\sigma(t)u \qquad t \geq 0, \tag{3.1}$$

con condiciones de borde

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}} = 0. \tag{3.2}$$

Aquí, λ es un parámetro real, y la función de peso σ satisface:

(H1) σ es una función continua y estrictamente positiva.

(H2) $t\sigma(t) \in L^1([0,\infty))$.

(H3) $\int_0^\infty \sigma(t)dt = 1$.

Sea X el conjunto nodal del problema (3.1)-(3.2), el cual puede ser indexado como una doble sucesión de la siguiente manera

$$X = \Big\{\{x_j^n\}_{n\geq 1, 1\leq j\leq n} : 0 = x_1^n < \cdots < x_j^n < \cdots < x_n^n,\ u_n(x_j^n) = 0\Big\}.$$

Estamos interesados en la caracterización de σ en función del conjunto de nodos X, para esto será fundamental tener el siguiente resultado:

Lema 3.1. *Sean x_j^n, x_{j+1}^n dos ceros consecutivos de la autofunción u_n del problema* (3.1)-(3.2)*, entonces $|x_{j+1}^n - x_j^n| \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Sea $\sigma_0 = \text{mín}\{\sigma(x) : x \in [0, b]\}$. La prueba es consecuencia del caso del problema de autovalores para coeficiente constante (2.1.1), la expresión conocida para los ceros bajo dicha suposición y el Teorema 2.3. □

Observación 3.2. El resultado anterior para el problema (3.1)-(3.2) se cumple para cualquier j fijo, aunque la cota no es uniforme en j ya que

$$\sigma_0(b) = \text{mín}\{\sigma(x) : x \in [0, b]\} \to 0 \text{ a medida que } b \to \infty.$$

3.1. Resultado principal

Teorema 3.3. *Sea X el conjunto nodal del problema (3.1)-(3.2), con σ satisfaciendo las condiciones $(H1)$-$(H3)$. Entonces, a partir de X podemos obtener una sucesión de funciones $\{\sigma^j\}_{j\geq 1}$ tal que $\|\sigma - \sigma^j\|_1 \to 0$ cuando $j \to \infty$. Además, si*

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0, \tag{3.3}$$

entonces también tenemos que $\|\sigma - \sigma^j\|_\infty \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Observación 3.4. Es relevante notar que la función σ no es necesariamente monótona.

Demostración. Hagamos un bosquejo de la idea de la prueba antes de presentarla de forma detallada. Para encontrar la sucesión de funciones $\{\sigma^j\}_{j\geq 1}$ que cumplen lo enunciado en el Teorema 3.3, demostraremos primero la existencia de una sucesión de funciones $\{s^{j,m}\}_{m\geq 1}$ definidas en términos de los ceros de las autofunciones. Esta sucesión convergerá en $L^\infty([0, j])$ hacia una función s^j, siendo

$$s^j(t) = \frac{\sigma|_{[0,j]}(t)}{\|\sigma|_{[0,j]}\|_1}.$$

Con este fin, introduciremos primero algunos problemas auxiliares de autovalores.

Posteriormente, definiremos σ^j en $[0, \infty)$ de la siguiente manera:

$$\sigma^j(t) = \begin{cases} s^j(t) & t \in [0, j] \\ f^j(t) & t \in (j, j + 1/j] \\ 0 & t \in (j + 1/j, \infty) \end{cases}$$

donde f^j puede ser cualquier función continua que cumple con $f^j(j) = s^j(j)$, $f^j(j + 1/j) = 0$, y

$$\int_j^{j+1/j} f^j(t)dt < \frac{1}{j}.$$

Por la forma en que hemos definido esta función, claramente podemos suponer que f^j no es creciente.

Finalmente, la convergencia en L^1 es obtenida utilizando que $\|\sigma|_{[0,j]}\|_1 \to 1$ cuando $j \to \infty$ y controlando los términos de error. De hecho, la prueba también muestra la convergencia en L^∞ sobre conjuntos compactos, ya que tenemos la convergencia en $L^\infty([0, j])$. Sin embargo, para demostrar la convergencia en $L^\infty([0, \infty))$, necesitaremos que $\sigma(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, ya que no podemos controlar uniformemente las funciones f_j, y asumir que $\sigma \in L^\infty$ no es suficiente.

Problemas de autovalores auxiliares: Comencemos considerando $\sigma|_{[0,1]}$, la restricción de σ al intervalo $[0, 1]$.

Nombraremos como $x_j^{n(1)}$ al j–ésimo cero de la n-ésima autofunción del problema (3.1)-(3.2) que cumpla con que $x_j^{n(1)} \in [0, 1]$. Tomemos en cuenta la familia de intervalos nodales $\{J_i^{n(1)}\}_{1\le i\le n(1)}$, $J_i^{n(1)} = [x_{i-1}^{n(1)}, x_i^{n(1)}]$, asociados a esta solución, de forma tal que $J_i^{n(1)} \subset [0, 1]$. El Lema 3.1 implica que fijando m, un número entero, podemos tomar n suficientemente grande de modo que

$$\text{máx}\left\{|1 - x_{n(1)}^{n(1)}|, \underset{1\le i\le n(1)}{\text{máx}} \{|x_i^{n(1)} - x_{i-1}^{n(1)}|\}\right\} < \frac{1}{m}. \tag{3.4}$$

Introduzcamos ahora una familia de problemas de autovalores auxiliares, considerando en cada intervalo $J_i^{n(1)}$ el problema de coeficientes constantes

$$\begin{cases} -u'' = \Lambda u, \\ u(x_{i-1}^{n(1)}) = u(x_i^{n(1)}) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Definimos como $\Lambda_1(J_i^{n(1)})$ al primer autovalor del problema (3.5) para cada $1 \le i \le n(1)$.

Una estimación para el autovalor λ_n: Antes de continuar, definamos

$$L^m = \sum_{i=1}^{n(1)} \Lambda_1(J_i^{n(1)})|J_i^{n(1)}|.$$

Sabemos que existirán cotas inferiores y superiores (desconocidas) para σ en cada intervalo $J_i^{n(1)}$,

$$c_i = \text{mín}\{\sigma|_{[0,1]}(x) : x \in J_i^{n(1)}\}, \quad C_i = \text{máx}\{\sigma|_{[0,1]}(x) : x \in J_i^{n(1)}\}.$$

Dado que σ es una función continua, $\sigma|_{[0,1]}$ será uniformemente continua y dado ε (lo llamaremos ε_m por conveniencia) existirá $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left|\sigma|_{[0,1]}(x) - \sigma|_{[0,1]}(y)\right| < \varepsilon_m \tag{3.6}$$

siempre que $|x-y| < 1/m$. Además

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0. \tag{3.7}$$

Consideremos ahora a ζ_1 y ξ_1, los primeros autovalores de los problemas

$$\begin{cases} -v'' = \zeta c_i v, \\ v(x_{i-1}^{n(1)}) = v(x_i^{n(1)}) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -v'' = \xi C_i v \\ v(x_{i-1}^{n(1)}) = v(x_i^{n(1)}) = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

respectivamente. Los mismos serán tales que $\xi_1 \le \lambda_n \le \zeta_1$, pues $c_i \le \sigma \le C_i$ en $J_i^{n(1)}$. Esto se debe al punto *iv* del Teorema 2.4.

Por otro lado, $\zeta_1 c_i = \xi_1 C_i = \Lambda_1(J_i^{n(1)})$, pues (3.5) y (3.8) son problemas a coeficientes constantes. Por lo tanto,

$$\lambda_n c_i \le \Lambda_1(J_i^{n(1)}) \le \lambda_n C_i, \tag{3.9}$$

y, de este modo, tenemos que

$$\lambda_n\Big(\sum_{i=1}^{n(1)} c_i |J_i^{n(1)}|\Big) \le L^m \le \lambda_n\Big(\sum_{i=1}^{n(1)} C_i |J_i^{n(1)}|\Big). \tag{3.10}$$

Dado que σ es una función continua, estas cotas resultan ser sumas superiores e inferiores de Riemann, y utilizando que $C_i - c_i \le \varepsilon_m$ junto con el hecho de que

$$1 - \frac{1}{m} \le \sum_{i=1}^{n(1)} |J_i^{n(1)}| \le 1$$

resulta que

$$\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - O\Big(\varepsilon_m + \frac{1}{m}\Big) \le \frac{L^m}{\lambda_n} \le \|\sigma|_{[0,1]}\|_1 + O\Big(\varepsilon_m + \frac{1}{m}\Big). \tag{3.11}$$

Notemos que

$$\int_0^1 \sigma(t)dt = \int_0^{x_{n(1)}} \sigma(t)dt + \int_{x_{n(1)}}^1 \sigma(t)dt,$$

donde el primer término de esta suma se puede comparar con las sumas de Riemann que tenemos arriba, mientras que la segunda está acotada uniformemente por $O(1/m)$, ya que σ alcanza un máximo en $[0,1]$.

Caracterización de una función de peso s^1 definida en $[0,1]$*:* Observemos primero que para cualquier m, existe n_0 tal que los ceros en $[0,1]$ de cualquier autofunción con $n \ge n_0$ satisfacen (3.4), además el límite (3.7) implica que existirá algún m_1 tal que

$$\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - O\Big(\varepsilon_m + \frac{1}{m}\Big) > 0.$$

cuando $m > m_1$.

Teniendo esto en cuenta, definiremos una sucesión de funciones por partes, $\{s^{1,m}\}_{m\geq m_1}$, para luego probar que la misma cumple que $s^{1,m} \to \sigma|_{[0,1]}/\|\sigma|_{[0,1]}\|_1$ en $L^\infty([0,1])$ (y por lo tanto en $L^1([0,1])$) conforme $m \to \infty$.

Definimos $s^{1,m}$ utilizando L^m y $|J_j^{n(1)}|$ de la siguiente manera:

$$s^{1,m}(t) = \begin{cases} \frac{\Lambda_1(J_i^{n(1)})}{L^m} & t \in J_i^{n(1)}, 1 \leq i \leq n(1) \\ \frac{\Lambda_1(J_{n(1)}^{n(1)})}{L^m} & t \in [x_{n(1)}, 1]. \end{cases}$$

Estos valores se pueden calcular ya que solo utilizamos el primer autovalor del problema definido en intervalos conocidos.

Utilizando las cotas (3.9), (3.10) y (3.11) y tomando $t \in J_i^{n(1)}$ tenemos

$$\begin{aligned} s^{1,m}|_{J_i^{n(1)}}(t) \leq & \frac{\lambda_n C_i}{\lambda_n\Big(\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - O(\varepsilon_m + 1/m)\Big)} \\ = & \frac{C_i}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - O(\varepsilon_m + 1/m)} \\ \leq & \frac{\sigma(t) + \varepsilon_m}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - O(\varepsilon_m + 1/m)}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} s^{1,m}|_{J_i^{n(1)}}(t) - \frac{\sigma(t)}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1} \leq & \frac{\sigma(t) + \varepsilon_m}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - O(\varepsilon_m + 1/m)} - \frac{\sigma(t)}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1} \\ = & \frac{\varepsilon_m\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 + O(\varepsilon_m + 1/m)\sigma(t)}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1(\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - O(\varepsilon_m + 1/m))}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De manera análoga, si utilizamos ahora las cotas inferiores obtenidas en (3.9), (3.10) y (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned} s^{1,m}|_{J_i^{n(1)}}(t) \geq & \frac{\lambda_n c_i}{\lambda_n\Big(\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 + O(\varepsilon_m + 1/m)\Big)} \\ = & \frac{c_i}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 + O(\varepsilon_m + 1/m)} \\ \geq & \frac{\sigma(t) - \varepsilon_m}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 + O(\varepsilon_m + 1/m)}, \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} s^{1,m}|_{J_i^{n(1)}}(t) - \frac{\sigma(t)}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1} \geq & \frac{\sigma(t) - \varepsilon_m}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 + O(\varepsilon_m + 1/m)} - \frac{\sigma(t)}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1} \\ = & \frac{-\varepsilon_m\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 - \sigma(t)O(\varepsilon_m + 1/m)}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1(\|\sigma|_{[0,1]}\|_1 + O(\varepsilon_m + 1/m))}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Observemos que en ambas desigualdades, (3.12) y (3.13), la parte derecha se encuentra uniformemente acotada para todo $t \in [0, 1]$ ya que $\sigma|_{[0,1]}(t)$ es una función acotada. Dichas desigualdades implican que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| s^{1,m}|_{J_i^{n(1)}}(t) - \frac{\sigma(t)}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1} \right\|_\infty = 0.$$

Sea

$$s^1 := \frac{\sigma|_{[0,1]}}{\|\sigma|_{[0,1]}\|_1}.$$

Probamos entonces que $s^{1,m} \to s^1$ en $L^\infty([0, 1])$ y por lo tanto en $L^1([0, 1])$.

Caracterización de un peso s^j definido en $[0, j]$*:* Podemos repetir todos los argumentos anteriores en $[0, j]$, obteniendo una sucesión $\{s^{j,m}\}_{m\geq m_1}$ tal que

$$s^{j,m} \to s^j := \frac{\sigma|_{[0,j]}}{\|\sigma|_{[0,j]}\|_1}$$

tanto en $L^\infty([0, j])$ como en $L^1([0, j])$.

La convergencia a σ: Recordemos que las funciones pertenecientes a la sucesión $\{s^j\}_{j\geq 1}$ están definidas en $[0, j]$, por lo que necesitamos extenderlas a la semirrecta, $[0, \infty)$. Con este propósito, definimos σ^j en $[0, \infty)$ de la siguiente manera:

$$\sigma^j(t) = \begin{cases} s^j(t) & t \in [0, j] \\ f^j(t) & t \in (j, j + 1/j] \\ 0 & t \in (j + 1/j, \infty) \end{cases}$$

donde f^j es una función continua no creciente que satisface $f^j(j) = s^j(j)$, $f^j(j + 1/j) = 0$, y

$$\int_j^{j+1/j} f^j(t)dt < \frac{1}{j}.$$

Probemos primero la convergencia en $L^1([0, \infty))$. Fijemos $\varepsilon > 0$, y mostremos que existe algún j_0 tal que $\|\sigma - \sigma^j\|_{L^1([0,\infty))} \leq 4\varepsilon$ para cualquier $j \geq j_0$.

Como $\sigma \in L^1([0, \infty))$, entonces existe j_0 tal que

$$\int_j^\infty \sigma(t)dt < \varepsilon, \quad \text{y} \quad \frac{1}{j} < \varepsilon$$

para cualquier $j \geq j_0$.

Así, para $j \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\sigma^j(t) - \sigma(t)|dt = &\int_0^j \left|\frac{\sigma(t)}{\|\sigma|_{[0,j]}\|_1} - \sigma(t)\right|dt + \int_j^{j+1/j} |f^j(t) - \sigma(t)|dt \\ &+ \int_{j+1/j}^\infty \sigma(t)dt \\ \leq &\frac{1 - \|\sigma|_{[0,j]}\|_1}{\|\sigma|_{[0,j]}\|_1} \int_0^j \sigma(t)dt + \frac{1}{j} + 2\varepsilon \\ \leq &4\varepsilon.\end{aligned}$$

Obtenemos la convergencia en $L^\infty([0,\infty])$ utilizando la hipótesis (3.3). Entonces, existe algún j_0 tal que $\sigma(t) < \varepsilon$ para cualquier $t \geq j_0$, y

$$\int_0^j \sigma(t)\, dt > 1 - \varepsilon$$

cuando $j > j_0$. Por lo que si $j > j_0$ obtenemos que

$$|\sigma^j(t) - \sigma(t)| \leq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq j \\ 3\varepsilon & \text{si } j \leq t \leq j + \frac{1}{j} \\ \varepsilon & \text{si } t \geq j + \frac{1}{j}, \end{cases}$$

utilizando la desigualdad triangular.

$$|s^j(t) - \sigma(t)| \leq |f^j(t)| + |\sigma(t)| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \varepsilon$$

si $t \in (j, j + 1/j)$.

De este modo concluye la demostración. □

Hemos demostrado entonces que es posible recuperar $q(x)$, bajo ciertas hipótesis para el peso, a partir del dominio nodal de las autofunciones. Es natural preguntarse si es posible extender este método cuando la ecuación está definida en toda la recta real. La respuesta es afirmativa y presentamos una idea en la siguiente sección.

3.2. Un problema relacionado: ecuación de Schrödinger estacionaria

Consideremos el problema

$$-u'' + V(x)u = \lambda u \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

tal que

$$u(x) \to 0 \text{ cuando } |x| \to +\infty \tag{3.15}$$

en donde $V(x)$ es un potencial continuo en $\mathbb{R}$ que cumple:

(H1) $V''(x) > 0$

(H2) $V'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y $V'(x) > 0$ cuando $x > 0$

(H3) $V(x) \to \infty$ cuando $|x| \to +\infty$

Teorema 3.5. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon)$ tal que los ceros de u_n para $n \geq n(\varepsilon)$ permiten construir una función $\tilde{V}_n(x)$ tal que*

$$\|V - \tilde{V}_n\|_\infty < O(\varepsilon).$$

Demostración. Sea X el conjunto que contiene todos los ceros de todas las autofunciones del problema (3.14)

$$X = \Big\{\{x_j^n\}_{n\geq 1, 1\leq j\leq n} : x_1^n < \cdots < x_j^n < \cdots < x_n^n,\ u_n(x_j^n) = 0\Big\}.$$

Problemas de autovalores auxiliares: Consideremos $V|_{[-1,1]}$, la restricción del potencial al intervalo $[-1, 1]$. Continuando con la notación introducida en el capítulo 3, denotamos como $x_j^{n(1)}$ al $j-$ésimo cero de la n-ésima autofunción del problema (3.14) que cumpla con que $x_j^{n(1)} \in [-1, 1]$ y sea $\{J_i^{n(1)}\}_{j=1}^{n(1)}$ la familia de intervalos nodales $J_i^{n(1)} = [x_{i-1}^{n(1)}, x_i^{n(1)}]$. Observemos que $J_i^{n(1)} \subset [-1, 1]$. Del mismo modo, el Lema 3.1 implica que fijando m, un número entero, podemos tomar n suficientemente grande tal que

$$\text{máx}\left\{|-1 - x_1^{n(1)}|, |1 - x_{n(1)}^{n(1)}|, \underset{2\leq i\leq n(1)}{\text{máx}}\{|x_i^{n(1)} - x_{i-1}^{n(1)}|\}\right\} < \frac{1}{m}. \tag{3.16}$$

Introduzcamos ahora una familia de problemas de autovalores auxiliares, considerando en cada intervalo $J_i^{n(1)}$ los problemas

$$\begin{cases} -w'' = \Lambda w, \\ w(x_{i-1}^{n(1)}) = w(x_i^{n(1)}) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} -u'' = (\lambda_n - V(t))u, \\ u(x_{i-1}^{n(1)}) = u(x_i^{n(1)}) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Recordemos que el problema (3.17) ha sido estudiado en profundidad y sabemos que el primer autovalor, que notaremos como $\Lambda_1(J_i^{n(1)})$, será

$$\Lambda_1(J_i^{n(1)}) = \frac{\pi^2}{(s_{i+1} - s_i)^2}.$$

Una estimación para λ_n: Por otro lado, como $V(x)|_{[-1,1]}$ es uniformemente continua, dado ε existirá δ y una constante V_i^n tal que si $x \in J_i^{n(1)}$ y $|J_i^{n(1)}| < \delta$ entonces

$$|V|_{J_i^{n(1)}} - V_i^n| < \varepsilon, \tag{3.19}$$

por lo que

$$V_i^n - \varepsilon < V|_{J_i^{n(1)}} < V_i^n + \varepsilon. \tag{3.20}$$

Observemos, además, que si el intervalo es tal que $0 \in J_{j_0}^n(1)$, entonces debido a la observación 2.7 podemos considerar $V_{j_0}^n = 1$ y tenemos que

$$|V|_{J_{j_0}^{n(1)}} - 1| < \varepsilon. \tag{3.21}$$

Sea η una constante, consideremos ahora la siguiente familia de problemas definidos en los intervalo nodales, $J_i^{n(1)}$

$$\begin{cases} -v'' = (\eta - V_i^n - \varepsilon)v \\ v(x_{i-1}^{n(1)}) = v(x_i^{n(1)}) = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Además, dado que $\eta - V_i^n - \varepsilon$ es una constante y los problemas (3.22) y (3.18) se encuentran definidos en el mismo intervalo con las mismas condiciones de borde tendremos que $\Lambda = \eta - V_i^n - \varepsilon$ y debido a (3.20)

$$\eta - V_i^n - \varepsilon < \eta - V|_{J_i^{n(1)}}. \tag{3.23}$$

Sabemos que la solución de la ecuación que se corresponde con el término izquierdo de la desigualdad (3.22), tiene dos ceros ubicados en los bordes del intervalo $J_i^{n(1)}$, por lo que suponer λ_n es tal que $\lambda_n < \lambda$ constituye un absurdo (de este modo dicha solución se anularía en algún punto dentro del intervalo $J_i^{n(1)}$). Entonces, $\lambda \leq \lambda_n$ y

$$\Lambda_1(J_i^{n(1)}) = \lambda - V_j^n - \varepsilon \leq \lambda_n - v_j^n - \varepsilon. \tag{3.24}$$

De manera análoga, tenemos que

$$\lambda_n - V_i^n + \varepsilon \leq \Lambda_1(J_i^{n(1)}).$$

De este modo, obtenemos la siguiente estimación para λ_n

$$\lambda_n = \Lambda_1(J_i^{n(1)}) + V_i^n + O(\varepsilon). \tag{3.25}$$

Además, si consideramos a j_0 como el índice que corresponde al intervalo que satisface $0 \in J_{j_0}^{n(1)}$ entonces

$$\lambda_n = \Lambda_1(J_{j_0}^{n(1)}) + 1 + O(\varepsilon). \tag{3.26}$$

Como consecuencia de (3.25) y (3.26), tenemos que

$$V_i^n = \Lambda_1(J_{j_0}^{n(1)}) + 1 - \Lambda_1(J_1^{n(1)}) + O(\varepsilon).$$

Hemos obtenido así una aproximación del potencial en cada intervalo J_i^n y, de este modo, logramos tener una aproximación del mismo mediante una función constante a trozos en el intervalo $[-1, 1]$. Del mismo modo obtendremos una aproximación para el intervalo $[-j, j]$, $j \in \mathbb{N}$. Los detalles de la convergencia son análogos a los presentados en el Teorema 3.3. □

De este modo podemos concluir que la técnica que hemos desarrollado permite resolver también problemas en los que la medida de los dominios nodales no tienden necesariamente a cero.

4

Problemas nodales inversos para ecuaciones de Sturm-Liouville en grafos cuánticos estrella

Sea $\Gamma = (V, E)$ de modo tal $V = \{v, v_1, \ldots, v_N\}$, $N \geq 2$ y $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$ un grafo estrellado cuyo nodo central es v y e_j, la arista que conecta a v con v_j. Sea l_j la longitud de dicha arista. Las funciones definidas en esta arista se pueden identificar con funciones definidas en el intervalo $[0, l_j]$, donde $u_j(v) = u_j(l_j)$. Consideramos un operador de Sturm-Liouville en cada arista e_j,

$$-u_j''(x) + q_j(x)u_j(x) = \lambda u_j(x), \qquad x \in (0, l_j), 1 \leq j \leq N, \tag{4.1}$$

junto a condiciones de borde de Dirichlet en los vértices de grado 1,

$$u_j(0) = 0, \ 1 \leq j \leq N, \tag{4.2}$$

satisfaciendo una condición de continuidad en el nodo central, v,

$$u_1(l_1) = u_2(l_2) = \cdots = u_N(l_N), \tag{4.3}$$

y también una condición de contorno tipo δ en v,

$$\sum_{j=1}^{N} u_j'(l_j) = \alpha u(v). \tag{4.4}$$

Omitimos el subíndice en $u(v)$ ya que todas las funciones u_j tienen el mismo valor en v. Asumimos, además, que las funciones q_j son continuas en el nodo central y satisfacen las condiciones de normalización

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} q_j(x)dx = 0. \tag{4.5}$$

A su vez, la continuidad de q_j implica la existencia de una constante Q tal que $|q_j(x)| \leq Q$ para cualquier $x \in e_j$, y $1 \leq j \leq N$.

Habiendo contextualizado el problema, estamos en condiociones de presentar y demostrar los tres resultados principales de este capítulo, pero antes demos lugar a las siguientes observaciones.

Observación 4.1. El Teorema 2.3 implica que si consideramos los problemas de autovalores en un intervalo dado $[a, b]$,

$$\begin{cases} -u_1''(x) + q_1(x)u_1(x) = \lambda u_1(x), \\ u_1(a) = u_1(b) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -u_2''(x) + q_2(x)u_2(x) = \eta u_2(x), \\ u_2(a) = u_2(b) = 0, \end{cases}$$

donde $q_2(x) \leq q_1(x)$, el primer autovalor satisface $\eta_1 < \lambda_1$ y la igualdad se da si y solo si $q_1 \equiv q_2$. Para verificar esto, si $\lambda_1 \leq \eta_1$ entonces $r_1(x) = \lambda_1 - q_1(x) < \eta_1 - q_2(x) = r_2(x)$ lo cual supone una contradicción usando el Teorema 2.3, ya que la autofunción asociada a η_1 no tiene ceros entre a y b.

Observación 4.2. Utilizaremos, además, el Teorema 2.3 de la siguiente manera: dados u_i y u_k, dos autofunciones asociadas a $\lambda_i < \lambda_k$, entre dos ceros de u_i tenemos al menos un cero de u_k, ya que $\lambda_i - q_j(x) < \lambda_k(x) - q_j(x)$ para $1 \leq j \leq N$.

4.1. Resultados principales

Antes de comenzar con la exposición de nuestro resultados, presentamos el siguiente lema que será clave para la demostración de los mismo:

Lema 4.3. *Sea $\delta > 0$ un parámetro fijo y X_k el conjunto de ceros de la autofunción u_k asociada al problema (4.1)-(4.4). Entonces existe k_0 tal que $(a, a + \delta) \cap X_k \neq \emptyset$ para cualquier intervalo $[a, a + \delta] \subset [0, l_j]$ y cualquier $k > k_0$.*

Demostración. Consideremos el problema auxiliar definido en el intervalo $[0, l_j]$,

$$-w'' = (\eta - Q)w,$$

donde η es un parámetro real y Q es una constante tal que $|q_j(x)| \leq Q$ para cualquier $x \in [0, l_j]$, $1 \leq j \leq N$. $w = \operatorname{sen}(\sqrt{\eta + Q}x)$ es una solución que satisface que $w(0) = 0$. Los ceros de w, $\{y_n\}_{1 \leq n \leq z(\eta)}$, están dados por $y_n = n\pi/\sqrt{\eta + Q}$, con $1 \leq n \leq z(\eta)$, por lo que

$$|y_{j+1} - y_j| = \frac{\pi}{\sqrt{\eta + Q}} \xrightarrow{\eta \to \infty} 0.$$

En particular, dado $\delta > 0$, podemos elegir η_j lo suficientemente grande de manera que w tenga al menos dos ceros en $[a, a + \delta]$.

Por otro lado, dado que los autovalores $\{\lambda_k\}_{n \geq 1}$ del problema (4.1)-(4.4) tienden a infinito y $\lambda_k - Q \leq \lambda_k - q(x)$, podemos tomar k_0 de manera que $\lambda_k \geq \eta_j$ para cualquier $k \geq k_0$. El teorema de comparación 2.3 implicará que u_k tiene al menos un cero en $[a, a + \delta]$, es así como la prueba está completa. □

Observación 4.4. Notemos que basta tomar $a = l_j - \delta$ para asegurar que existe n_0 tal que cualquier autofunción u_n con $n \geq n_0$ tendrá al menos un cero en $(l_j - \delta, l_j)$.

A continuación presentaremos nuestro primer resultado, el mismo nos permite caracterizar el peso cuando todas las autofunciones no se anulan en el grafo:

Teorema 4.5. *Sea Γ un grafo estrella tal que el soporte de cualquier autofunción del problema (4.1)-(4.4) coincide con Γ. Sea X el conjunto nodal*

$$X = \cup_{k\geq 1} X_k, \quad X_k = \{x_n^{z(k)} \ : \ k \geq 1 \ y \ 0 \leq n \leq z(k)\},$$

donde X_k es el conjunto de ceros de la k-ésima autofunción. Sea $q \in C[0,1]$ satisfaciendo la condición (4.5). Entonces, q está unívocamente determinada y puede ser recuperado a partir de X.

Demostración. Con el fin de caracterizar q, definiremos una sucesión de funciones por partes $\{q_m\}_{m\geq 1}$ y demostraremos que $q_m \to q$ en L^∞ cuando $m \to \infty$.

Observemos que q es una función continua y como Γ es compacto, q es uniformemente continua sobre Γ, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|q(x) - q(y)| < \varepsilon \qquad \text{si } |x - y| < \delta(\varepsilon).$$

Por lo tanto, fijemos $\varepsilon > 0$, el correspondiente $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ y utilizando el Lema 4.3, elegimos $k_0 = \text{máx}_j\{k_{0,j}\}$ de manera que la longitud nodal entre cualquier par de ceros consecutivos de una autofunción en la misma arista sea menor que δ para cada arista en Γ. Además, la distancia entre el último cero en cada arista y el centro de la estrella es menor que $\delta(\varepsilon)$.

Paso 1, una partición de Γ: Introducimos la familia de intervalos nodales $F = \{J_h^k\}_{1\leq h\leq z(k)}$, aquí el índice $z(k)$ indica el total de dominios nodales en Γ. Si notamos como $n(j)$ la cantidad de nodos que se encuentran en la arista j,

$$F = \cup_{j=1}^N \Big\{[0, x_{1,j}^{z(k)}], [x_{1,j}^{z(k)}, x_{2,j}^{z(k)}], \ldots, [x_{n(j)-1,j}^{z(k)}, x_{n(j),j}^{z(k)}]\Big\}.$$

Para $k \geq k_0$ tenemos que $max_h|J_h^k| < \delta$.

Observemos que obtendremos un grafo estrella residual $\Gamma^\delta = \Gamma \setminus F$, la longitud de cada una de las aristas de este grafo será menor que δ.

Paso 2, problemas auxiliares: Comencemos por introducir una familia de problemas auxiliares de autovalores en cada intervalo $J_h^k \in F$:

$$\begin{cases} -u''(x) = \Lambda^h u(x), \\ u(x_{h-1,j}^{z(k)}) = u(x_{h,j}^{z(k)}) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Consideremos también el problema (4.1)-(4.4) aunque ahora definido el grafo residual, en Γ^δ:

$$\begin{cases} -u''(x) = \Lambda^\Gamma u(x), \ x \in \Gamma^\delta, \\ u^j(x_{n(j),j}^{z(k)}) = 0, \ 1 \leq j \leq N, \\ u^1(l_1) = u^2(l_2) = \cdots = u^N(l_N), \\ \sum_{j=1}^N u^{j\prime}(l_j) = \alpha u(\nu). \end{cases} \tag{4.7}$$

Sea Λ_1^h el primer autovalor del problema (4.6) para cada $J_h^k \in F$, y Λ_1^Γ el primer autovalor del problema (4.7).

Paso 3, más problemas auxiliares y relaciones entre autovalores:

Dado que q es una función continua en J_h^k, existen cotas inferiores y superiores en cada intervalo, digamos

$$q_h = \text{mín}\{q(x) : x \in J_h^k\}, \qquad Q_h = \text{máx}\{q(x) : x \in J_h^k\}.$$

Además, la continuidad uniforme de q y la elección de δ implica que $|Q_h - q_h| < \varepsilon$.

Observemos que los primeros autovalores ζ_1 y ξ_1 de los problemas

$$\begin{cases} -u'' + q_h u = \zeta u, \\ u(x_{h-1,j}^{z(k)}) = u(x_{h,j}^{z(k)}) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -v'' + Q_h = \xi v \\ u(x_{h-1,j}^{z(k)}) = u(x_{h,j}^{z(k)}) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

serán tales que

$$\zeta_1^h \leq \lambda_k \leq \xi_1^h \tag{4.9}$$

debido al Teorema de Comparación 2.3 (ver Observación 4.1).

Por otro lado, dado que (4.6) y (4.8) son problemas de coeficientes constantes, tenemos que

$$\zeta_1^h - q_h = \Lambda_1^h = \xi_1^h - Q_h. \tag{4.10}$$

Del mismo modo y utilizando el Teorema 2.9, al considerar los problemas en el grafo residual

$$\begin{cases} -u'' + q_\Gamma u = \zeta^\Gamma u, \\ u^j(x_{n(j),j}^{z(k)}) = 0, \ 1 \leq j \leq N, \\ u^1(l_1) = u^2(l_2) = \cdots = u^N(l_N), \\ \sum_{j=1}^N u^{j'}(l_j) = \alpha u(v). \end{cases} \quad \begin{cases} -v'' + Q_\Gamma = \xi^\Gamma v \\ v^j(x_{n(j),j}^{z(k)}) = 0, \ 1 \leq j \leq N, \\ v^1(l_1) = v^2(l_2) = \cdots = v^N(l_N), \\ \sum_{j=1}^N v^{j'}(l_j) = \alpha v(v), \end{cases} \tag{4.11}$$

donde q_Γ y Q_Γ son cotas inferiorers y superiores de q en Γ^δ respectivamente, tenemos que

$$\zeta_1^\Gamma - q_\Gamma = \Lambda_1^\Gamma = \xi_1^\Gamma - Q_\Gamma. \tag{4.12}$$

Paso 4, una estimación para λ_k: Definamos

$$L_k = \Lambda_1^\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{j=1}^{z(k)} \Lambda_1^h |J_h^k|,$$

donde $|\Gamma^\delta|$ es la suma de las longitudes de las aristas del grafo Γ^δ. A continuación probaremos que $|L_k - \lambda_k||\Gamma| \leq \varepsilon|\Gamma|$.

Al utilizar las igualdades (4.10) y (4.12),

$$
\begin{aligned}
L_k =& \Lambda_1^\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{h=1}^{z(k)} \Lambda_1^h |J_h^k| \\
=& (\xi_1^\Gamma - Q_\Gamma)|\Gamma^\delta| + \sum_{h=1}^{z(k)} (\xi_1^h - Q_h)|J_h^k| \\
=& \xi_1^\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{h=1}^{z(k)} \xi_1^h |J_h^k| - Q_\Gamma |\Gamma^\delta| - \sum_{h=1}^{z(k)} Q_h |J_h^k| \\
\geq& \lambda_k |\Gamma| - \varepsilon |\Gamma|.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
L_k =& \Lambda_1^\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{h=1}^{z(k)} \Lambda_1^h |J_h^k| \\
=& (\zeta_1^\Gamma - q_\Gamma)|\Gamma^\delta| + \sum_{h=1}^{z(k)} (\zeta_1^h - q_h)|J_h^k| \\
=& \zeta_1^\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{h=1}^{z(k)} \zeta_1^h |J_h^k| - q_\Gamma |\Gamma^\delta| - \sum_{h=1}^{m} q_h |J_h^k| \\
\leq& \lambda_k |\Gamma| + \varepsilon |\Gamma|.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

El primer término en las desigualdades (4.13) y (4.14) sigue de las desigualdades presentadas en (4.9), y el segundo es consecuencia del teorema del valor medio para integrales,

$$
\int_{J_h^k} q(x)dx = q(x_h)|J_h^k|
$$

junto con la integral en las aristas en Γ^δ. En efecto,

$$
\begin{aligned}
0 =& \int_{\Gamma^\delta} q(x)dx + \sum_{h\geq 1} \int_{J_h^k} q(x)dx \\
=& \; q(x_\Gamma)|\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1} q(x_h)|J_h^k| \\
=& \; q(x_\Gamma)|\Gamma^\delta| - Q_\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1} (q(x_h) - Q_h)|J_h^k| \\
& + Q_\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1} Q_h |J_h^k| \\
\geq& \; -\varepsilon|\Gamma| + Q_\Gamma |\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1} Q_h |J_h^k|
\end{aligned}
$$

pues $|q(x_\Gamma) - Q_\Gamma| < \varepsilon$ y $|q(x_h) - Q_h| < \varepsilon$. Además,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma^\delta} q(x)dx + \sum_{h\geq 1} \int_{J_h^k} q(x)dx \\
&= q(x_\Gamma)|\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1} q(x_h)|J_h^k| \\
&= q(x_\Gamma)|\Gamma^\delta| - q_\Gamma|\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1}(q(x_h) - q_h)|J_h^k| \\
&\quad + q_\Gamma|\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1} q_h|J_h^k| \\
&\leq \varepsilon|\Gamma| + q_\Gamma|\Gamma^\delta| + \sum_{h\geq 1} q_h|J_h^k|.
\end{aligned}$$

La justificación de la desigualdad es análoga a la anterior.

Obtenemos, entonces, utilizando (4.13) y (4.14) que

$$(\lambda_k - \varepsilon)|\Gamma| \leq L_k \leq (\lambda_k + \varepsilon)|\Gamma|, \tag{4.15}$$

tal como se deseaba.

Paso 5, una aproximación q_ε: Definamos una función q_ε en Γ, constante en cada dominio nodal J_h^k y en Γ^1,

$$q_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{L_k}{|\Gamma|} - \Lambda_1^h, & x \in J_h^k, \\ \frac{L_k}{|\Gamma|} - \Lambda_1^\Gamma, & x \in \Gamma^\delta. \end{cases} \tag{4.16}$$

Recordemos primero las desigualdades (4.9), (4.10), (4.12), (4.15):

$$\zeta_1^h - q_h = \Lambda_1^h = \xi_1^h - Q_h,$$

$$\zeta_1^\Gamma - q_\Gamma = \Lambda_1^\Gamma = \xi_1^\Gamma - Q_\Gamma,$$

$$\zeta_1^h \leq \lambda_k \leq \xi_1^h,$$

$$\zeta_1^\Gamma \leq \lambda_k \leq \xi_1^\Gamma,$$

$$\left|\lambda_k - \frac{L_k}{|\Gamma|}\right| \leq \varepsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned} q_\varepsilon^h(x) &= \frac{L_k}{|\Gamma|} - \Lambda_1^h \\ &= \frac{L_k}{|\Gamma|} - \lambda_k + \lambda_k - \Lambda_1^h \\ &\leq \varepsilon + \lambda_k - \Lambda_1^h \\ &= \varepsilon + \lambda_k - \xi_1^h + Q_h \\ &\leq \varepsilon + \xi_1^h - \xi_1^h + Q_h \\ &\leq Q_h + \varepsilon. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$q_\varepsilon^h(x) \geq q_h - \varepsilon,$$

y recordando que $Q_h - q_h < \varepsilon$, obtenemos

$$|q_\varepsilon^h(x) - q(x)| < 2\varepsilon$$

para cualquier $x \in J_h^k$.

Finalmente, podemos repetir el argumento para $q_\varepsilon^\Gamma(x)$ y obtenemos

$$q_\Gamma - \varepsilon \leq q_\varepsilon^\Gamma(x) \leq Q_\Gamma + \varepsilon.$$

Paso 6, una sucesión $\{q_m\}_{m\geq 1}$ y su convergencia a q: Para cualquier $m \geq 1$, elijamos $\varepsilon = 1/m$ y el correspondiente δ tal que $|q(x) - q(y)| < 1/m$ siempre que $|x - y| < \delta$, elijamos $k(m)$ de manera que las longitudes de los conjuntos nodales de la función propia $u_{k(m)}$ sean menores que δ, al igual que las aristas del grafo complementario Γ^1, y definamos q_m como en (4.16).

La convergencia en L^∞ sigue de la cota uniforme

$$|q_m(x) - q(x)| \leq \frac{2}{m}$$

para cualquier $x \in \Gamma$. De este modo concluye la demostración. □

Tal como hemos mencionado en los preliminares, es posible tener autofunciones que se anulen sobre algunos de los ejes de grafo. Es por esto que a continuación, probaremos dos resultados distintos que nos permitirán caracterizar a $q(x)$ cuando este sea el caso.

Teorema 4.6. *Sea Γ un grafo estrella y $\{u_{i_k}\}_{k\geq 1}$ una subsucesión de autofunciones del problema (4.1)-(4.4) tal que el soporte de cada u_{i_k} coincide con Γ. Sea $\tilde{X}$ el conjunto nodal de estas autofunciones,*

$$X = \cup_{k\geq 1} X_k, \quad X_k = \{x_n^{z(i_k)} \ : \ k \geq 1 \text{ y } 0 \leq n \leq z(i_k)\},$$

donde X_k es el conjunto de ceros de la i_k-ésima autofunción. Sea $q \in C[0,1]$ satisfaciendo la condición (4.5). Entonces, q está unívocamente determinado y puede ser recuperado a partir de X.

Demostración. Sigue exactamente las mismas líneas que la prueba anterior, considerando únicamente la sucesión de autovalores con autofunciones no nulas, lo que nos permite definir una sucesión de aproximaciones $\{q_{m_i}\}_{i\geq 1}$.

□

Otro enfoque posible para la resolución del problema cuando este es el caso se presenta en el siguiente teorema, en el que basta agregar como hipótesis el conocimiento del valor de la integral de q_j sobre el eje correspondiente.

Teorema 4.7. *Sea Γ un grafo estrella y sea $\{u_k\}_{k\geq 1}$ la sucesión de autofunciones del problema (4.1)-(4.4). Sea $\tilde{X}$ el conjunto nodal de estas autofunciones,*

$$\tilde{X} = \cup_{k\geq 1} X_k, \quad X_k = \{x_n^{z(k)} \ : \ k \geq 1 \text{ y } 0 \leq n \leq z(k)\},$$

donde X_k es el conjunto de ceros de la k-ésima autofunción. Sea $q \in C[0,1]$, y sean $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^{l_j} q_j(x)dx = a_j, \qquad 1 \leq j \leq N.$$

Entonces, q está unívocamente determinado y puede ser recuperado a partir de $\tilde{X}$ y $\{a_j\}_{j=1}^N$.

Demostración. Fijemos una arista, digamos $[0, l_1]$, tenemos por hipótesis que

$$\int_0^{l_1} q_1(x)dx = a_1.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que $|q(x) - q(y)| < \varepsilon$ si $|x - y| < \delta$. Al utilizar el Lema 4.3, elegimos $k_{0,1}$ de manera que la longitud nodal entre cualquier par de ceros consecutivos de una autofunción en $[0, l_1]$ sea menor que δ. Además, la distancia entre el último cero y l_1 también es menor que δ.

Paso 1: Consideramos la familia de intervalos nodales en $[0, l_1]$ asociada a la k-ésima autofunción, $F_1 = \{J_h^k\}_{1\leq h\leq z_1(k)}$.

Paso 2, problemas auxiliares: Consideramos la familia de problemas auxiliares de autovalores (4.6) en cada intervalo $J_h^k \in F_1$, y sea Λ_1^h el primer autovalor en J_h^k.

Paso 3, más problemas auxiliares: Existen cotas inferiores y superiores para q en cada intervalo, digamos

$$q_h = \text{mín}\{q(x) : x \in J_h^k\}, \qquad Q_h = \text{máx}\{q(x) : x \in J_h^k\}.$$

La continuidad uniforme de q y la elección de δ implica que $|Q_h - q_h| < \varepsilon$, como antes.

Observemos que siguen siendo válidas las desigualdades (4.9) y (4.10) en este caso.

Paso 4, una estimación para λ_k: Definimos

$$L_k = \sum_{h=1}^{z_1(k)} \Lambda_1^h |J_h^k| + \Lambda_1^{z_1(k)} |l_1 - x_{z_1(k)}| + a_1,$$

y afirmamos que $|L_k - \lambda_k l_1| \leq 2\varepsilon l_1$. Observa que estamos sumando el autovalor del último dominio nodal multiplicado por la distancia entre el último cero y el final del intervalo, y a_1, la integral de q en $[0, l_1]$.

Al utilizar las desigualdades (4.9) y (4.10),

$$\begin{aligned}
L_k &= \sum_{h=1}^{z_1(k)} \Lambda_1^h |J_h^k| + \Lambda_1^{z_1(k)} |l_1 - x_{z_1(k)}| + a_1 \\
&= \sum_{h=1}^{z_1(k)} (\xi_1^h - Q_h)|J_h^k| + (\xi_1^{z_1(k)} - Q_{z_1(k)})|l_1 - x_{z_1(k)}| + a_1 \\
&= \sum_{h=1}^{z_1(k)} \xi_1^h |J_h^k| + \xi_1^{z_1(k)} |l_1 - x_{z_1(k)}| - \sum_{h=1}^{z_1(k)} Q_h |J_h^k| - Q_{z_1(k)} |l_1 - x_{z_1(k)}| + a_1 \\
&\geq \lambda_k l_1 - a_1 - 2\varepsilon l_1 + a_1 \\
&= \lambda_k l_1 - 2\varepsilon l_1.
\end{aligned}$$

La segunda expresión sigue del teorema del valor medio para integrales,

$$\int_{J_h^k} q(x)dx = q(x_h)|J_h^k|,$$

y notemos que $|q(z_1(k)) - Q_{z_1(k)}| < \varepsilon$, y para cualquier $x \in [l_1 - x_{z_1(k)}, l_1]$, tenemos

$$|q(x) - Q_{z_1(k)}| \leq |q(x) - q(z_1(k))| + |q(z_1(k)) - Q_{z_1(k)}| < 2\varepsilon.$$

La cota superior sigue de manera similar.

Pasos 5 & 6, una sucesión $\{q_m\}_{m\geq 1}$ y su convergencia a q_1: Para cualquier $m \geq 1$, elijamos $\varepsilon = 1/m$ y el correspondiente δ tal que $|q(x) - q(y)| < 1/m$ siempre que $|x - y| < \delta$. Elijamos también $k(m)$ de manera que las longitudes de los conjuntos nodales de la autofunción $u_{k(m)}$ en la arista $[0, l_1]$ sean menores que δ.

Definamos una función q_m en $[0, l_1]$,

$$q_m(x) = \begin{cases} \frac{L_k}{l_1} - \Lambda_1^h, & x \in J_h^k, \\ \frac{L_k}{l_1} - \Lambda_1^{z_1(k)}, & x \in [l_1 - x_{z_1(k)}, l_1]. \end{cases} \tag{4.17}$$

Ahora, aplicando los mismos argumentos de la prueba anterior, obtenemos

$$\|q_m - q\|_{L^\infty([0,l_1])} \to 0 \text{ cuando } m \to \infty.$$

De este modo concluye la demostración. □

Con esta demostración concluye el capítulo. Hemos demostrado que podemos caracterizar $q(x)$ en base al dominio nodal de las autofunciones sobre un grafo estrella Γ aún cuando las autofunciones se anulan en alguna de las aristas.

5

Problema nodal inverso en el espectro de Fučik para Laplacianos de medida geométrica

En este capítulo consideraremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

en donde $-\Delta_\mu$ es el operador de Kreĭn-Feller presentado en 2.2.1. Veremos que podemos hallar una sucesión $\{m_j\}_{n\geq 1}$ que convergerá a $m(x)$ haciendo uso de los dominios nodales de las autofunciones.

Antes de comenzar con el desarrollo del capítulo haremos un resumen sobre cómo hacemos uso de los dominios nodales en base a lo establecido por el teorema 2.14.

Sean $\{\lambda_n^m\}_{n\geq 1}$ y $\{u_n^m\}_{n\geq 1}$ las sucesiones de autovalores y correspondientes autofunciones asociadas el problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda m(x) u & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

- Ceros: la simplicidad de los ceros nos permite definir la restricción del Laplaciano $-\Delta_{\mu|[x_k,xk+1]}u$, ya que la construcción de los espacios $\mathcal{D}\mu^{1,2}$ puede realizarse especificando el valor de u y u' en x_k, y si se utilizan estos valores para la autofunción u_n^m, se obtiene que $u_n^m|[x_k, x_{k+1}]$, la restricción de u_n^m a $[x_k, x_{k+1}]$, pertenece a $\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}$.

- Simplicidad: usaremos repetidamente la simplicidad de la primera autofunción. Utilizaremos el siguiente argumento: si tenemos dos ceros consecutivos x_k, x_{k+1} asociados a alguna autofunción u_n^m y un autovalor λ_n^m, podemos considerar el problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_{\mu|_{[x_k,x_{k+1}]}} u = \lambda m(x) u, & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ u(x_k) = u(x_{k+1}) = 0, \end{cases}$$

y el primer autovalor del problema es nuevamente λ_n^m, y la única autofunción (a diferencia de alguna constante multiplicativa) es $u_n^m|_{[x_k,x_{k+1}]}$.

- Comparación: la propiedad establece que dadas dos funciones continuas $m_1 < m_2$, tenemos $\lambda_n^{m_1} > \lambda_n^{m_2}$. El uso típico de este resultado es demostrar que dado un intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, y el problema definido en él

$$\begin{cases} -\Delta_{\mu|_{[x_k,x_{k+1}]}} u = \lambda m(x) u, & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ u(x_k) = u(x_{k+1}) = 0, \end{cases}$$

existe una constante única $\bar{m}$ tal que el primer autovalor del problema anterior es el mismo que el primer autovalor de

$$\begin{cases} -\Delta_{\mu|_{[x_k,x_{k+1}]}} u = \lambda \bar{m} u, & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ u(x_k) = u(x_{k+1}) = 0. \end{cases}$$

Esencialmente, obtenemos un resultado similar al teorema de Bolzano, considerando

$$c_k^m = \text{mín}\{m(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\},$$

$$C_k^m = \text{mín}\{m(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\},$$

utilizando que el autovalor es mayor (respectivamente, menor) si usamos el peso c_k^m (respectivamente, C_k^m).

- Oscilación: el principal uso de esta propiedad es la existencia de una cantidad arbitrariamente grande de ceros de autofunciones de orden superior en cualquier intervalo de medida positiva, lo que implica la densidad de los ceros de las autofunciones en el soporte de μ.

Dada cualquier sucesión de funciones $\{u_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}$, tal que u_n tiene $n+1$ ceros para $n \geq 1$, definimos el conjunto nodal asociado a esta sucesión como lo hemos hecho en el resto de esta tesis,

$$X = \cup_{n\geq 1} X_n, \qquad X_n = \{x_k^n \ : u_n(x_k^n) = 0 \ n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}.$$

Lema 5.1. *Consideremos el siguiente problema:*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x)_n = m(x)\lambda_n u_n & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

y sea X el conjunto nodal asociado a sus autofunciones. Si denotamos por I_k^n el k-ésimo dominio nodal de la n-ésima autofunción, entonces $\mu(I_k^n) \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

Demostración. Supongamos que existe algún $\varepsilon > 0$ tal que existe una sucesión de dominios nodales $\{I_{k(n)}^n\}_{n\geq 1} = \{(x_n, y_n)\}_{n\geq 1}$ de la solución asociada al autovalor λ_n tal que $\mu(x_n, y_n) \geq \varepsilon$. Luego, como $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset [0,1]$, existe una subsucesión convergente $\{x_{n_j}\}_{j\geq 1}$ tal que $x_{n_j} \to x$ cuando $j \to \infty$ con $x \in [0,1]$. Del mismo modo, si consideramos $\{y_{n_j}\}_{j\geq 1}$ podemos encontrar una subsucesión

$\{y_{n_{j_h}}\}_{h\geq 1}$ tal que $y_{n_{j_h}} \to y$ cuando $h \to \infty$ con $y \in [0,1]$. Así, la medida de la subsucesión hallada de dominios nodales converge a la medida de (x, y),

$$\mu(x_{n_{j_h}}, y_{n_{j_h}}) \to \mu(x, y) \text{ cuando } h \to \infty$$

por lo que $\mu([x, y]) \geq \varepsilon$. Por lo tanto, dado que μ es una medida no atómica, tenemos $x \neq y$, por lo que podemos hallar $\delta > 0$ tal que

$$\bar{x} = x + \delta < \bar{y} = y - \delta,$$

y $\mu([\bar{x}, \bar{y}]) \geq \varepsilon/2$. Además, si tomamos h_0 suficientemente grande, entonces para cualquier $h \geq h_0$, tenemos

$$x_{n_{j_h}} < \bar{x}, \qquad y_{n_{j_h}} > \bar{y}.$$

Ahora consideremos el siguiente problema auxiliar en $(\bar{x}, \bar{y})$,

$$\begin{cases} -\Delta_\mu w(x)_n = m(x)\gamma_n w_n & x \in [\bar{x}, \bar{y}] \\ w(\bar{x}) = w(\bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Sabemos que existe una sucesión de autovalores, $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$, $\gamma_n \nearrow +\infty$ y que la $n-$ésima autofunción w_n tiene $n+1$ ceros en $[\bar{x}, \bar{y}]$. Sin embargo, si $h \geq h_0$ y $\lambda_{n_{j_h}} > \gamma_n$, $u_{n_{j_h}}$ debe tener al menos $n-1$ ceros en $(\bar{x}, \bar{y})$, lo cual es una contradicción que concluye la prueba. □

5.1. Caracterización del soporte de la medida

En este sección nos ocuparemos del análisis necesario para caracterizar el soporte de la medida no atómica μ.

Teorema 5.2. *Consideremos el cono*

$$C = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 0, \beta > 0, s_1\alpha < \beta < s_2\alpha\right\}$$

para constantes positivas s_1 y s_2 y sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones propias de Fučík del problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases} \tag{5.1}$$

asociadas a los autovalores $\{(\alpha_n, \beta_n)\}_{n\geq 1} \in \Sigma \cap C$, con $\alpha_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.

Sean $\{x_j^n\}_{1\leq j\leq n+1}$ los puntos nodales de la n-ésima función propia. Introduzcamos las medidas de probabilidad discretas

$$dZ_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1} \delta_{x_j^n},$$

y llamemos $Z_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ *a la función de distribución acumulativa,*

$$Z_n(x) = \int_0^x dZ_n.$$

Entonces, existe una subsucesión de $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ *que converge puntualmente a una función* $Z : \mathbb{R} \to [0,1]$*, además, esta función es constante en el complemento de* K_μ*, siendo* K_μ *el suporte de* μ*.*

Demostración. Dado que todas las medidas dZ_n están concentradas en $[0,1]$, la familia de medidas de probabilidad $\{dZ_n\}_{n\geq 1}$ es acotada, por lo que podemos extraer una subssucesión de medidas convergentes a alguna medida de probabilidad dZ.

Por el teorema de selección de Helly, existe una subsucesión de las funciones de distribución acumulativa $\{Z_{n_k}\}_{k\geq 1}$ que converge puntualmente a una función real Z.

Ahora, consideremos $(a,b) \subset K_\mu^c$. Sabemos que cualquier autofunción u_n es lineal en (a,b) y por lo tanto tiene a lo sumo un cero en este intervalo. Así que, la convergencia puntual implica

$$\begin{aligned} Z_{n_k}(a) &\to Z(a), \\ Z_{n_k}(b) &\to Z(b). \end{aligned}$$

Entonces,

$$Z_{n_k}(b) - Z_{n_k}(a) = \frac{\#\{\text{ ceros de } u_{n_k} \text{ entre } a \text{ y } b\}}{n_k+1} \leq \frac{1}{n_k+1} \to 0, \text{ cuando } k \to \infty$$

lo que implica que $Z(a) = Z(b)$, y por lo tanto, Z es constante en (a,b).

La prueba está completa. □

Es importante destacar que en el teorema anterior Z también puede ser constante en parte de K_μ, un ejemplo de esto puede ser visto en [75].

Para recuperar K_μ, necesitamos un análisis local. Con este fin, definimos

$$N_n(x_0,\delta) = \#\Big\{\{x_j^n\}_{1\leq j\leq n+1} \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)\Big\},$$

y obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *Sea* $S_\mu = \{\{x_j^n\}_{1\leq j\leq n+1}\}_{n\geq 1}$ *el conjunto de puntos nodales de las autofunciones* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *del problema* (5.1).

I. *Si* $x_0 \in K_\mu^c$ *y* $\eta = dist(x_0, K_\mu)$*, entonces, para cualquier* $\delta < \eta$*,* $N_n(x_0,\delta) \leq 1$*.*

II. *Si* $x_0 \in K_\mu$*, entonces, para cualquier* $\delta > 0$*,*

$$\lim_{n\to\infty} N_n(x_0,\delta) = \infty.$$

Demostración.

I. Sea $x_0 \in K_\mu^c$, $\eta = dist(x_0, K_\mu)$ y $\delta < \eta$. Entonces, u_n restringida a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset K_\mu^c$ es una función lineal y tiene, a lo sumo, una raíz.

II. Observemos que si $x_0 \in K_\mu$, entonces x_0 no está aislado ya que μ es una medida no atómica. Entonces, para cualquier $\delta > 0$, podemos tomar $C = K_\mu \cap [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ y llamaremos ν a la restricción de μ a C. Luego, usando el Teorema 2.14 y el mismo argumento que en el Lema 5.1, existe una cantidad arbitrariamente grande de ceros dado que podemos tomar el índice de la autofunción lo suficientemente grande.

La prueba está terminada. □

5.2. Caracterización del peso

A coninuación exponemos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.4. *Sea Σ el espectro de Fučík del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Supongamos que m es continua en $[0,1]$ y consideremos el cono

$$C = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 0, \beta > 0, \ s_1\alpha < \beta < s_2\alpha\right\}$$

para constantes positivas s_1, s_2. Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de autovalores de Fučík asociadas a los autovalores $\{(\alpha_n, \beta_n)\}_{n\geq 1} \in \Sigma \cap C$, tal que $\alpha_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Supongamos que $u_n'(0) > 0$, de modo que u_n en el primer dominio nodal es positiva. Dado X, el conjunto de ceros asociados a $\{u_n\}_{n\geq 1}$, podemos recuperar hasta un múltiplo de $m(x)$, $cm(x)$ siendo c una constante, en el soporte de μ.

Antes de comenzar con la demostración subrayemos que solo podemos recuperar m en el soporte K_μ. Esto se debe a la concentración de ceros, ya que en cualquier intervalo contenido en el complemento del soporte, K_μ^c, hay a lo sumo un solo cero de cualquier autofunción. Además, cabe destacar que la constante multiplicativa es lo máximo que podemos esperar en problemas nodales inversos, ya que no conocemos el valor de los autovalores. Por lo tanto, dado una problema con un peso m y cualquier autovalor clásico o de Fučík, tenemos exactamente las mismas autofunciones si consideramos el peso $c \cdot m$, la constante c es absorvida por los autovalores, que son aquellos correspondientes a m dividido por c. También es importante notar que nuestra caracterización de m en términos de los dominios nodales es constructiva y proporcionamos un algoritmo que nos permite recuperar m con precisión arbitraria, al igual que los otros problemas que hemos resuelto en esta tesis.

Demostración. Con el fin de caracterizar m, definiremos una suseción de funciones por partes $\{m_n\}_{n\geq 1}$ y demostraremos que $m_n \to m$ conforme $n \to \infty$.

Para una mejor exposición, tal como hemos hecho en el resto de los capítulos, vamos a dividir la prueba en pasos.

Paso 1, los dominios nodales de los autovalores de Fučík:

Dado que tenemos $(\alpha_n, \beta_n) \in C$, si $\alpha_n \to \infty$, entonces $\beta_n \to \infty$. Ahora, si utilizamos el argumento de comparación para

$$-\Delta_\mu w = \lambda m(x) w$$

y

$$-\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-).$$

Tenemos que si $\alpha_n > \lambda$ y $\beta_n > \lambda$, entonces entre dos ceros de w tendremos al menos un cero de u.

En particular, obtenemos que las medidas de los dominios nodales de los autovalores de Fučík tienden a cero si ambos parámetros crecen, como en el Lema 5.1.

Paso 2, una partición de $[0,1]$*:* Para cada $p \in \mathbb{N}$, definamos una familia de intervalos $\{J_j^p\}_{1\leq j\leq p}$ de longitud $1/p$,

$$\{[0, 1/p], [1/p, 2/p], \ldots, [1 - 1/p, 1]\}.$$

Ahora, para cada p, elegimos $n(p)$ lo suficientemente grande de modo tal que la autofunción $u_{n(p)}$ tenga al menos tres ceros en cada intervalo J_j^p que cumple con que $\mu(J_j^p) > 0$. Este hecho es consecuencia del Lema 5.1 y del Paso 1. Ya que, si $\mu(J_j^p) > 0$ observemos que podemos encontrar una función propia de Fučík, $u_{n_j(p)}$, con al menos tres ceros en J_j^p, y dado que el número de intervalos es finito, es suficiente tomar

$$n(p) = \text{máx}\{n_j(p) : 0 \leq j \leq p\}.$$

Paso 3, problemas de coeficientes constantes: Recordemos que conocemos todos los puntos nodales de $u_{n(p)}$ y que la función propia es positiva en el primer intervalo nodal. Dado que hay al menos tres ceros en cada intervalo J_j^p que cumple con $\mu(J_j^p) > 0$, podemos elegir dos puntos nodales consecutivos de la autofunción $u_{n(p)}$ de modo tal que $u_{n(p)} > 0$ en el intervalo definido por los mismos.

Con el fin de poder utilizar este hecho en la demostración, notaremos al dominio nodal anteriormente mencionado como $I_j^{n(p)+} = [x_{k_j}^{n(p)}, x_{k_j+1}^{n(p)}] \subset J_j^p$ e introducimos una familia de problemas auxiliares de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta_\mu w = \Lambda w & x \in I_j^{n(p)+} \\ w(x_{k_j}^{n(p)}) = w(x_{k_j+1}^{n(p)}) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Llamaremos $\Lambda_1(I_j^{n(p)+})$ al primer autovalor del problema (5.2), y consideraremos que $\Lambda_1(I_j^{n(p)+}) = 0$ si $\mu(J_j^p) = 0$. Cabe destacar que $\Lambda_1(I_j^{n(p)+})$ se puede calcular numéricamente, ya que proviene de un problema con coeficientes constantes.

Paso 4, una estimación para α_n: Introducimos el valor

$$G_n = \sum_{j=1}^{p} \Lambda_1(I_j^{n(p)+})\mu(J_j^p). \tag{5.3}$$

Mostraremos que $G_n/\alpha_n \to 1$ cuando $n \to +\infty$. Para ello, en cada $I_j^{n(p)+}$ consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x)_n^+ = \alpha_n m(x) u_n^+ & x \in I_j^{n(p)+} \\ u_n^+(x_j^{n(p)}) = u_n^+(x_{j+1}^{n(p)}) = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Difnimos también

$$c_j^{n(p)+} = \operatorname*{mín}_{x \in I_j^{n(p)+}} m(x), \quad C_j^{n(p)+} = \operatorname*{máx}_{x \in I_j^{n(p)+}} m(x).$$

y consideramos estos otros dos problemas auxiliares:

$$\begin{cases} -\Delta_\mu v(x) = \gamma c_j^{n+} v & x \in I_j^{n(p)+} \\ v(x_j^{n(p)}) = v(x_{j+1}^{n(p)}) = 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

y

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = \kappa C_j^{n+} u & x \in I_j^{n(p)+} \\ v(x_j^{n(p)}) = v(x_{j+1}^{n(p)}) = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

El resultado de comparación del Teorema 2.14 aplicado a los problemas (5.4), (5.6) y (5.5), implica que

$$\kappa_1 \le \alpha_n \le \gamma_1,$$

ya que $c_j^{n+} \le m(x) \le C_j^{n+}$.

Notemos que existirá una constante m_j^n, $c_j^{n+} \le m_j^n \le C_j^{n+}$, tal que el primer autovalor, λ_1, del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda_n m_j^n u \\ u(x_j) = u(x_{j+1}) = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

es tal que $\lambda_1 = \alpha_n$.

Dado que el problema (5.7) tiene coeficientes constantes, se puede pensar como el problema (5.2), por lo que tenemos las siguientes igualdades:

$$\Lambda_1(I_j^{n(p)+}) = \lambda_1 m_j^n = \alpha_n m_j^n. \tag{5.8}$$

Por otro lado, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\sum_{j=1}^{p} c_j^{n+}\mu(J_j^p) \le \sum_{j=1}^{p} m_j^n \mu(J_j^p) \le \sum_{j=1}^{p} C_j^{n+}\mu(J_j^p),$$

y teniendo en cuenta (5.3) y (5.8) tenemos que

$$G_n = \alpha_n \sum_j m_j^n \mu(J_j^p),$$

lo cual implica que

$$\alpha_n \sum_j c_j^{n+} \mu(J_j^p) \leq G_n \leq \alpha_n \sum_j C_j^{n+} \mu(J_j^p)$$

Por otro lado, dado que una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua. Tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$|m(x) - m(y)| < \varepsilon$$

cuando $|x - y| < \delta(\varepsilon)$. Fijamos ε y tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $1/p \leq \delta(\varepsilon)$. Observemos, además, que dado cualquier $x \in [0, 1] \cap K_\mu$, existirá un j tal que $x \in J_j^p$.

Tomamos $n(p)$ lo suficientemente grande, como se ha indicado en el paso 2, y consideramos $\Lambda_1(I_j^{n(p)+})$, que se puede calcular resolviendo los problemas con coeficientes constantes (5.2). Dado que tanto c_j^{n+} como C_j^{n+} son valores alcanzados en $I_j^{n(p)+} \subset J_j^p$, tenemos que $C_j^n - c_j^n < \varepsilon$ y como $c_j^{n+} \leq m|_{I_j^{n(p)+}} \leq C_j^{n+}$ es sencillo concluir de manera similar que en los capítulos anteriores, que

$$\left| \int_0^1 m(x) d\mu - \sum_j c_j^{n+} \mu(J_j^p) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_0^1 m(x) d\mu - \sum_j C_j^{n+} \mu(J_j^p) \right| < \varepsilon.$$

Si asumimos que $\int_0^1 m(x) d\mu = 1$ entonces obtenemos que $\alpha_n / G_n = 1 + O(\varepsilon)$. Es importante destacar en este momento que es aquí cuando aperece la constante multiplicativa en la que puede diferir nuestro resultado y que conocer el valor de $\int_0^1 m(x) d\mu$ es suficiente para relacionar α_n con G_n.

Paso 5, una sucesión $\{m_p\}_{p \geq 1}$ y convergencia puntual $m_p \to m$: Recordemos que G_n se puede calcular explícitamente a partir de la ecuación (5.3), por lo que podemos definir una función $m_p(x)$ para $x \in J_j^p$ como

$$m_p(x) = \begin{cases} \frac{\Lambda_1(I_j^{n(p)+})}{G_n} & \text{si } x \in J_j^p \text{ y } \mu(J_j^p) \neq 0, \\ 0 & \text{si } x \in J_j^p \text{ y } \mu(J_j^p) = 0. \end{cases}$$

tomando $n(p)$ de manera adecuada como en la sección anterior.

A partir de la ecuación (5.8) tenemos trivialmente que

$$\alpha_n c_j^{n+} < \Lambda_1(I_j^{n(p)+}) < \alpha_n C_j^{n+},$$

por lo que obtenemos que, para $x \in J_j^p$,

$$\frac{\alpha_n}{G_n} c_j^{n+} < m_p(x) < \frac{\alpha_n}{G_n} C_j^{n+},$$

es decir,

$$c_j^{n+}(1 - O(\varepsilon)) < m_p(x) < C_j^{n+}(1 + O(\varepsilon)).$$

Por lo tanto, las diferencias entre m_p y los valores máximo y mínimo de m están acotadas por un término $O(\varepsilon)$, y obtenemos una cota uniforme en J_j^p si $\mu(J_j^p) \neq 0$,

$$\|m_p - m\|_\infty \leq C\varepsilon,$$

siendo C como el valor máximo de m en $[0, 1]$.

Queda demostrada la convergencia en K_μ. □

6

Redes neuronales

Las redes neuronales son funciones matemáticas inspiradas vagamente en la arquitectura neuronal del cerebro humano. Estas se presentan como concatenación y combinación de funciones lineales y no lineales, permitiendo aproximar funciones de los datos proporcionados. Las funciones lineales aplican pesos y sesgos a las entradas, mientras que las funciones de activación no lineales introducen la capacidad de capturar patrones más complejos. La estructura de una red neuronal incluye una capa de entrada, una o varias capas ocultas, y una capa de salida. El entrenamiento de estas redes ajusta pesos y sesgos para minimizar el error en las predicciones, utilizando algoritmos como el descenso por gradiente.

En 1989, Hornik prueba en [45] que una red neuronal *feedforward* con al menos una capa oculta y funciones de activación no lineales puede aproximar cualquier función continua. Por otro lado, el mismo año Cybenko, [19], demuestra que basta una sola capa oculta (con muchas neuronas) y una función de activación sigmoidal para aproximar cualquier función continua en un intervalo cerrado, también con precisión arbitraria. Ambas demostraciones se complementan para establecer el Teorema de aproximación universal, que establece que una red neuronal feedforward con al menos una capa oculta y una función de activación no lineal puede aproximar cualquier función continua definida en un espacio compacto con precisión arbitraria, siempre que se le proporcione un número suficiente de neuronas en la capa oculta.

La red feedforward, o prealimentada, fue la primera forma de red neuronal artificial ideada. En esta red la información se mueve en una única dirección, hacia adelante. De los nodos de entrada, a través de las capas ocultas, hacia los nodos de salida, y no hay ningún ciclo o bucle.

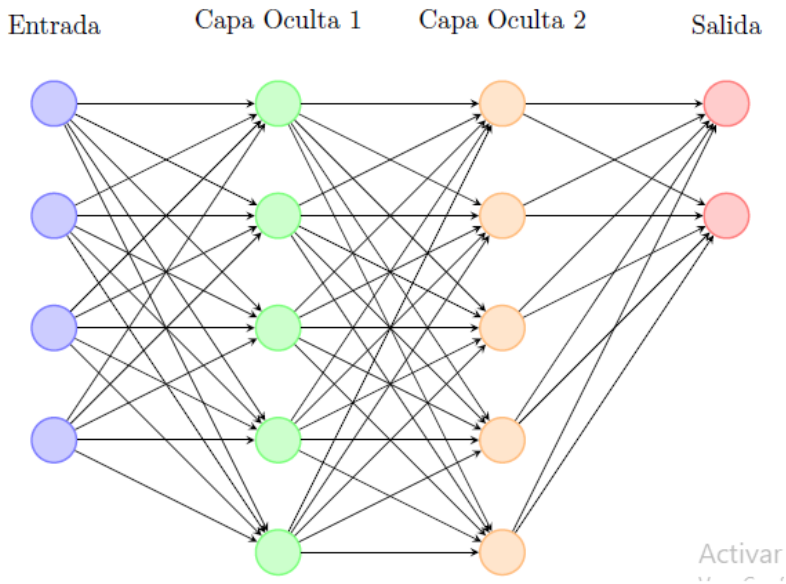

Figura 6.1: Modelo computacional de una red feedforward con dos capas ocultas, en donde cada capa tiene cinco neuronas.

Repasando las demostraciones presentadas en los capítulos anteriores, observemos que la idea sobre la que se funda la construcción de las sucesiones que aproximan al peso (o al potencial, según corresponda) es la siguiente: el n-ésimo elemento de la sucesión se obtiene a partir del conjunto de dominios nodales de la n-ésima autofunción; sobre cada uno de estos intervalos definidos por dos ceros consecutivos de la autofunción se da una aproximación constante del peso: se obtiene así una sucesión de funciones con cantidad finita de escalones, un escalón por cada dominio nodal, que converge al peso. En esta construcción se involucran funciones y operaciones continuas, lo cual nos hace pensar que es posible que una red neuronal comprenda cómo obtener una aproximación del peso dado el conjunto nodal de la $n-$ésima autofunción, y qué tan buena sea esta aproximación dependerá de la elección de n.

Con esta idea en mente, realizamos unos experimentos computacionales entrenando una red neuronal.

6.1. Experimentos

6.1.1. Arquitectura de la red

La biblioteca que utilizamos para crear y entrenar nuestra red neuronal fue *tensorflow*, y usamos la API *tensorflow.keras*. Cada *input* será una lista con diez elementos, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$, cada uno se corresponderá con la longitud de los dominios nodales de la décima autofunción. Nuestra red cuenta con dos capas, hay tantas neuronas en cada capa como cantidad de dominios nodales

(en nuestro experimento son $N = 10$). La primera capa de la red tiene asociada una matriz de pesos $W_1 \in \mathbb{R}^{NxN}$ y un vector $b_1 \in \mathbb{R}^N$ denominado *bias*, si llamamos a^1 a la salida de la primera capa, entonces

$$a^1 = ReLu(W_1 x + b_1)$$

en donde se utiliza la función no lineal de activación *ReLu*. La misma se aplica a cada elemento de nuestra lista de la siguiente manera: $ReLu(x) = \text{máx}\{0, x\}$.

La segunda capa también tiene asociada una matriz de pesos, llamémosla $W_2 \in \mathbb{R}^{NxN}$ y su vector de bias b_2, por último utilizamos la función de activación *Lineal*, $Lineal(x) = x$, por lo que obtenemos

$$a^2 = W_2 a_1 + b_2$$

como output de la red. Para finalizar, definimos la pérdida como el error cuadrático medio (*mse*) y calculamos además el error medio absoluto (*mae*). El optimizador que utilizamos fue el *Adam* (*Adaptative moment estimation*).

6.1.2. Conjunto de entrenamiento

El conjunto de entrenamiento puede ser obtenido de datos reales, resolviendo problemas de autovalores y proporcionando los ceros de la décima autofunción para un conjunto de pesos dado, o generado de manera sintética. Esta última opción permite generar de manera sencilla un gran volumen de datos y fue por la que optamos.

Como hemos mencionado anteriormente si consideramos la ecuación

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\sigma_0 u(x) & x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

siendo σ_0 una función constante en el intervalo $[a, b]$, tenemos las siguientes fórmulas exactas para los autovalores y sus correspondientes autofunciones:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\sigma_0 (b-a)^2}, \qquad u_n = \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{\sqrt{\sigma_0}(b-a)}\right).$$

.

Comenzamos generando N longitudes de tamaño $1/N$ más un desvío aleatorio $uniforme(0, 1)/2N$, que jugarán el rol de longitudes nodales de la $N-$ésima autofunción. Observemos que a partir de estas longitudes tenemos $N + 1$ nodos, llamémoslos $\left\{x_j^N\right\}_{j=0}^N$. Considerando los problemas auxiliares

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\sigma_j u(x) & x \in \left[x_j^N, x_{j+1}^N\right] \\ u(x_j^N) = u(x_{j+1}^N) = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

sabemos que el primer autovalor de cada uno de ellos será

$$\lambda_1^j = \frac{\pi^2}{\sigma_j \left(x_{j+1}^N - x_j^N\right)^2}. \tag{6.3}$$

Por otro lado, si tomamos

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\sigma_(x)u(x) & x \in [x_0^N, x_{N+1}^N] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

siendo $\sigma(x)$ una función partida por intervalos nodales, $\sigma(x) = \sum_{j=0}^N \sigma_j \mathbf{1}_{[x_j^N, x_{j+1}^N)}(x)$, sabemos que

$$\lambda_N = \lambda_1^j \tag{6.5}$$

$j = 0, \ldots, N$. Además, gracias a la normalización de $\sigma(x)$ tenemos una ecuación extra,

$$\lambda_N = \sum_{j=0}^N \pi^2 / \left(x_{j+1}^N - x_j^N\right)^2. \tag{6.6}$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (6.5) y (6.6), y utilizando (6.3), es posible calcular el peso contante respectivo a cada intervalo, σ_j y por lo tanto obtener $\sigma(x)$.

Para entrenar nuestra red, consideramos 500 muestras tomando $N = 10$.

6.1.3. Descripción del programa

Comenzamos por importar las bibliotecas necesarias para poder hacer operaciones matemáticas, manejar datos y poder visualizarlos, además de las necesarias para la construcción de la red neuronal (*tensorflow* y *tensorflow.keras*).

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import tensorflow as tf
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import Dense, Dropout
```

Definimos la constante π y el tamaño de la variable que recibirá la red neuronal, en este caso la cantidad de dominios nodales.

```
N=10
pi=math.pi
```

A continuación generamos nuestra base de datos. La misma contiene 5000 conjuntos de datos, cada conjunto consta de N valores generados aleatoriamente que representan la longitud de los dominios nodales, junto con sus respectivos pesos calculados, que serán N constantes (una para cada intervalo nodal, recordemos que el peso será, en este caso, una función escalonada).

```
base = []

for i in range(5000):
  dominios_nodales=[]
  longitud=0
  for i in range(N):
    x=1/N+random.random()/(2*N)
    dominios_nodales.append(x)
    longitud+=x
  dominios_nodales= sorted(dominios_nodales)
  lambdaa=0
  for i in range(N):
    lambdaa+=pi**2/dominios_nodales[i]
  peso=[]
  for i in range(N):
    peso.append(pi**2/(dominios_nodales[i]**2*lambdaa))
  integra=0
  for i in range(N):
    integra+=(peso[i]*dominios_nodales[i])
  par = [dominios_nodales, peso]
  base = base + [par]
```

Separamos ahora nuestro conjunto en dos partes, el 80 % formará parte de nuestro conjunto de entrenamiento y el 20 % restante será para testear los resultados.

```
dataSet = base
percentTrain = 0.8

fromTo = int(percentTrain * len(dataSet))

test_set = dataSet[fromTo:]
training_set = dataSet[:fromTo]

training_set = dataSet[:int(percentTrain * len(dataSet))]
test_set = dataSet[int(percentTrain * len(dataSet)):]
```

Almacenamos los datos de entrada (longitudes nodales) y los de salida (constantes de nuestra función escalonada) en listas distintas en cada uno de estos dos nuevos conjuntos,

```
X_train = []
Y_train = []
for i in range(len(training_set)):
    X_train.append(training_set[i][0])
    Y_train.append(training_set[i][1])
X_train, Y_train = np.array(X_train), np.array(Y_train)

X_test = []
Y_test = []
for i in range(len(test_set)):
    X_test.append(test_set[i][0])
    Y_test.append(test_set[i][1])
```

```
X_test, Y_test = np.array(X_test), np.array(Y_test)
```

Utilizamos TensorFlow y Keras para construir un modelo de red neuronal secuencial, añadimos dos capas densas con funciones de activación *relu* y *lineal*, compilamos el modelo definiendo la función de pérdida, la métrica y el optimizador:

```
model = Sequential()
model.add(Dense(10, input_shape=(10,)))
model.add(Dense(10, activation='relu'))
model.add(Dense(10, activation='linear'))
model.compile(loss='mse', metrics=['mean_absolute_error'], optimizer='adam')
```

Entrenamos el modelo.

```
history = model.fit(X_train, Y_train,
          batch_size=96, epochs=1250,
          verbose=1, validation_data=(X_test, Y_test))
```

Realizamos los gráficos que nos permiten visualizar el progreso del error absoluto medio y la función de pérdida conforme se entrena a la red.

```
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))

# Plotting Mean Absolute Error
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(history.history['mean_absolute_error'], label='Train MAE')
plt.plot(history.history['val_mean_absolute_error'], label='Test MAE')
plt.title('Model Mean Absolute Error')
plt.ylabel('Mean Absolute Error')
plt.xlabel('Epoch')
plt.legend(loc='upper right')

# Plotting Loss
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(history.history['loss'], label='Train Loss')
plt.plot(history.history['val_loss'], label='Test Loss')
plt.title('Model Loss')
plt.ylabel('Loss')
plt.xlabel('Epoch')
plt.legend(loc='upper right')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Por último, evaluamos la predicción del modelo en un caso conocido, consideramos diez nodos equidistribuidos en el intervalo $[0, 1]$, sabemos que en ese caso el potencial $q \equiv 1$, y calculamos el error medio absoluto:

```
d=[0.1]*10
salida = model.predict(np.array([d]))
salida_lista=salida.tolist()
```

```
error_ma=0
for j in range(len(salida_lista)):
  error_ma+=(abs(salida_lista[0][j]-1))/10
error_ma
```

6.2. Resultados

Presentamos a continuación gráficos que muestran la evolución del rendimiento de nuestro modelo durante el proceso de entrenamiento, tanto para el conjunto de entrenamiento como para el de validación. El primer gráfico expone la evolución del error medio absoluto (MAE) a lo largo de los *epochs*, mientras que el segundo gráfico representa la evolución de la función de pérdida (loss).

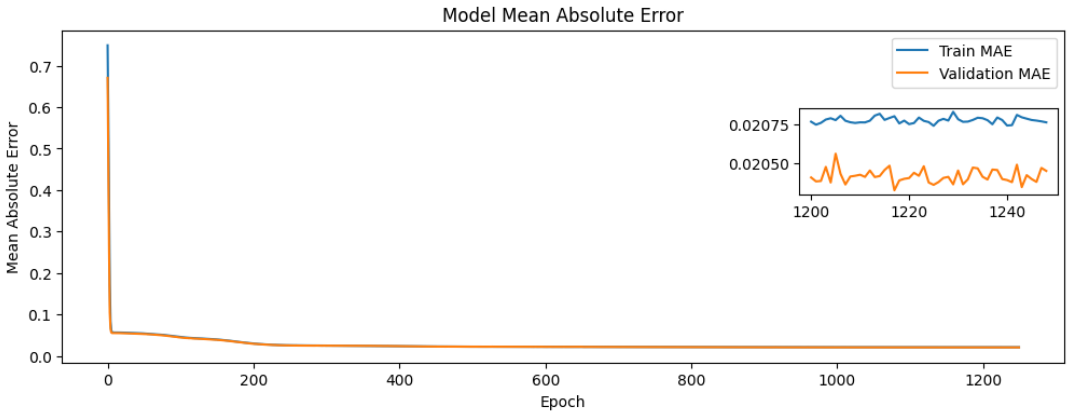

Figura 6.2: Evolución del error absoluto medio sobre el conjunto de entrenamiento y de validación a lo largo de 1250 *epochs*.

Comencemos notando que los gráficos muestran que ambos indicadores, para ambos conjuntos de datos, siguen trayectorias casi idénticas. Además, en los dos podemos observar un decrecimiento pronunciado en las primeras 10 épocas de entrenamiento. En este período, el comportamiento de la función de pérdida indica una mejora sustancial en la capacidad del modelo para reducir el error. De manera similar, el gráfico del MAE muestra una reducción veloz en el error medio absoluto, lo cual indica que la precisión del modelo mejora rápidamente.

A pesar de este rápido decrecimiento, ambas funciones, en ambos conjuntos de datos, alcanzan el *plateau* a partir de la época 1000 de entrenamiento: Podemos observar que la pérdida logra estabilizarse aproximadamente en $7x10^{-4}$, mientras que el error absoluto medio se estabiliza en torno al 2 %.

En la búsqueda de mejorar el error absoluto medio, implementamos otras versiones con más neuronas, 20 o 40, añadiendo dos capas intermedias de 20 neuronas cada una, aunque no observamos resultados distintos. Esto resulta una motivación para continuar trabajando en este problema,

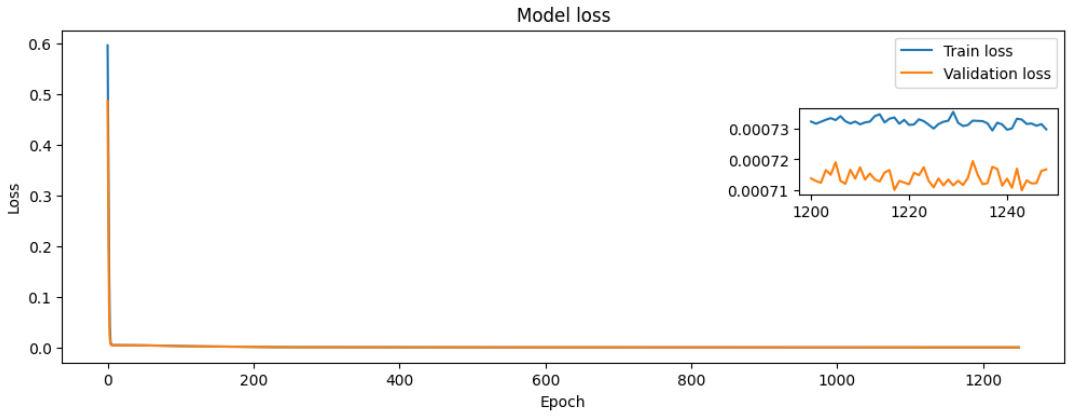

Figura 6.3: Evolución de la función de pérdida sobre el conjunto de entrenamiento y de validación a lo largo de 1250 *epochs*.

una de las posibles soluciones es proporcionarle a nuestra red una base de datos más compleja que la que le hemos proporcionado, y nos encontramos trabajando en ello.

7

Conclusiones

En esta tesis hemos dado solución a cuatro problemas inversos asociados a un operador de Sturm Liouville, esencialmente consideramos la ecuación

$$-u'' + q(x)u = \lambda\sigma(x)u \tag{7.1}$$

definida en distintos dominios con sus respectivas condiciones de borde e hipótesis adecuadas para $\sigma(x)$ y $q(x)$, y logramos probar que es posible caracterizar el peso (o el potencial según corresponda) a partir del conjunto nodal del problema, al que hemos llamado X. A diferencia de trabajos previos, no utilizamos información a priori sobre el comportamiento asintótico de los autovalores. Como contrapartida, necesitamos el conjunto completo de nodos de una subsucesión de autofunciones en lugar de un subconjunto de pares de nodos consecutivos $\{(x^k_{j_k}, x^k_{j_k+1}\}_{k\geq 1}$, con $x^k_{j_k} \to x$ cuando $k \to \infty$ para obtener el coeficiente en x, como se requiere en otros trabajos. Sin embargo, es importante recalcar que en estos trabajos no sólo se necesita el par de nodos, sino su índice, porque la fórmula asintotica requiere de este valor (ver ecuación (1.2)).

En el capítulo 3 probamos que si consideramos la ecuación (7.1) siendo $q(x) \equiv 0$ y σ un peso positivo $\sigma \in L^1[0,\infty)$ que cumple $\int_0^\infty t\sigma(t)dt < \infty$, entonces este último puede ser caracterizado en función de la información nodal de las autofunciones del problema (3.1)-(3.2). Es fundamental notar que el único trabajo que se ha presentado hasta el momento en el que resuelven el problema inverso para este tipo de ecuaciones en intervalos no acotados es [74], aunque en él se utiliza el primer término del desarrollo asintótico de los autovalores y se asume que $int_0^i nftyt^2\sigma(t)dt < \infty$. Para nuestra prueba no es necesario contar con esa información, lo cual supone un avance en la temática.

Obtuvimos un algoritmo para la construcción de un sucesión $\{\sigma^j\}_{j\geq 1}$ que converge a σ en $L^1[0,\infty)$. Además, también demostramos que basta con añadir que $\sigma(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para tener convergencia a σ en $L^\infty[0,\infty)$. Nuestra prueba no es suficiente para obtener la convergencia en $L^\infty[0,\infty)$ sin añadir esta hipótesis dado que podemos considerar, por ejemplo, una función σ que satisfaga las hipótesis principales tal que $\sigma(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De todos modos, $\sigma^j \to \sigma$ cuando $j \to \infty$ en $L^\infty[0,\infty)$ sobre conjuntos compactos de la semirrecta.

En la sección 3.2 de dicho capítulo hemos dado un esquema sobre cómo es posible extender esta idea en el caso en el que la ecuación (7.1) se encuentre definida en toda la recta, considerando $\sigma(x) \equiv 1$ y $q(x) = V(x)$ un potencial que cumple con las hipótesis que el enfoque físico precisa. Aunque en este problema no sea cierto que $|x^n_{j+1} - x^n_j| \to 0$ cuando $n \to \infty$, siendo x^n_{j+1}, x^n_j dos ceros consecutivos de la $n-$ésima autofunción de la ecuación (3.14)-(3.15), nuevamente podemos obtener una aproximación del potencial $V(x)$ con precisión arbitaria.

En el capítulo 4 demostramos que si ahora definimos la ecuación (7.1) en un grafo cuántico, $\Gamma = (V, E)$ y consideramos $\sigma \equiv 1$, entonces la función potencial q puede caracterizarse utilizando los puntos nodales de las autofunciones. Nuevamente, obtuvimos una prueba constructiva que proporciona una aproximación de q a partir de funciones constantes a trozos.

Si bien dentro de los ejes podemos aproximar el peso vía un problema de coeficientes constantes, y obtenemos de esta manera una aproximación de λ_k, el autovalor del grafo residual $\Gamma^\delta = \Gamma \setminus \cup_{h\geq 1} J^k_h$ es una raíz de una ecuación trascendente y no la conocemos explícitamente. Sin embargo, la prueba del teorema 4.7 nos permite evitar su cálculo. Repitiendo el argumento en cada arista y utilizando que la suma de todas las longitudes nodales da $|\Gamma|$, con un error de orden $O(\varepsilon)$, podemos descartar la última parte de cada arista y utilizar el valor $\int_\Gamma q(x)dx$.

De hecho, este argumento puede aplicarse a grafos en general, no solo a grafos estrella, mediante la disección de las aristas en dominios nodales más, a lo sumo, dos segmentos cortos en cada extremo, como en la prueba del teorema 4.6.

Además, combinando las técnicas de este capítulo y las expuestas en el capítulo 3, es posible resolver el problema inverso para la ecuación en cuestión definida en un grafo con aristas de longitud infinita.

Finalmente en el capítulo 5 consideramos el problema nodal inverso para un problema de autovalores de Fučík con peso $m(x)$ para un Laplaciano fractal,

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Probamos que es posible caracterizar el soporte de la medida μ utilizando análisis local y que podemos recuperar dicho peso en el soporte de μ utilizando el conjunto de ceros de las autofunciones que se encuentran asociadas a pares de autovalores de Fučík. Resulta relevante que estos autovalores pertenezcan a un cono contenido en el primer cuadrante. Obtenemos una sucesión $\{m_p\}_{p\geq 1}$ que converge puntualmente a m en norma infinito en el soporte de μ.

En el Apéndice presentamos la demostración de la existencia de estos autovalores de Fučík para el problema que consideramos. El estudio de este problema nodal inverso puede extenderse a ecuaciones que consideren ponderaciones distintas en las partes positivas y negativas de las soluciones, pesos que cambien de signo o bien teniendo en cuenta distintas condiciones de contorno. Sin embargo, para llevar a cabo estas ideas es necesario probar la existencia de autovalores de Fučík en dichos casos, que podría hacerse con las ideas de la demostración anterior.

Por último, mostramos en el capítulo 6 una primera aproximación a la resolución del problema utilizando redes neuronales. Debido a que sólo debe aprender las relaciones entre las constantes que aproximan al peso en cada dominio nodal y deducir la relación con los autovalores, y que este hecho no requiere conocimientos a priori tales como la fórmula asintótica de los ceros o de los autovalores, pensamos que una red debería ser capaz de detectar la relación entre las constantes y las longitudes de los dominios nodales. Los primeros resultados obtenidos, implementando una red neuronal *feedforward* con dos capas van en consonancia con esta suposición. Para esto utilizamos un conjunto de entrenamiento de nodos y constantes en cada dominio nodal, generando los nodos de maneara aleatoria y eligiendo la constante para que el primer autovalor en cada dominio nodal sea siempre el mismo. Se utilizó como función de pérdida el error cuadrático medio. Una versión alternativa, con un enfoque no supervisado, implicaría que la red resuelva la ecuación en cada intervalo y encuentre el coeficiente para que el autovalor sea el mismo en todos los dominios nodales, en la filosofía de las redes PINN (Physical Informed Neural Networks).

Haber podido resolver estos problemas nos permiten plantear una serie de problemas futuros que podrían resolverse. Por ejemplo, contamos con herramientas suficientes para resolver el problema inverso asociado ala ecuación diferencial asociada al $p-$Laplaciano,

$$-\left(|u'|^{p-2}u'\right)' = \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u$$

definida en algún intervalo abierto Ω con condiciones de borde de Dirichlet. También resulta posible resolver el problema inverso para la ecuación de Fučik si en lugar de considerar como operador a Δ_μ considerásemos a Δ_μ^p. Además, dado que ya hemos trabajado con espacios en los que no se conocen el número de ceros de las autofunciones, como en el grafo, se podrían contemplar problemas definidos en espacios que afronten una condición similar.

Por otro lado, podría ser interesante dar una respuesta a este tipo de problemas mediante la teoría del muestreo, dado que pensamos que hay una relación intrínseca entre las resoluciones que utilizan información nodal, y el Teorema de Nyquist-Shannon, que establece que se puede descubrir una señal a partir de $2N$ puntos si la frecuencia máxima que interviene en su desarrollo es N. Una demostración alternativa de los resultados de esta tesis se podría obtener para coeficientes que sean combinación de los primeros N senos, N cosenos, y la función constante, utilizando los ceros de la autofunción $2N + 1$, ya que se tendría un sistema de $2N + 1$ ecuaciones y la misma cantidad de incógnitas, más una ecuación para el autovalor que no se conoce, uno de los coeficientes se puede deducir por la normalización del coeficiente.

A

El espectro de Fučík para Laplacianos de medida geométrica

En este apéndice, introduciremos el espectro de Fučík para Laplacianos medida-geométrica, también conocidos como Laplacianos fractales, Δ_μ en una dimensión y asociados al problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{A.1}$$

donde μ es una medida de Borel, no atómica, de probabilidad, soportada en algún conjunto cerrado $K_\mu \subset [0,1]$, y u^+, u^- son las partes positivas y negativas de u,

$$u^+(x) = \text{máx}\{u(x), 0\}, \qquad u^-(x) = \text{máx}\{-u(x), 0\}.$$

Los operadores de Kreĭn-Feller tienen una larga historia que comienza con el trabajo de Feller [30], quien considera operadores de difusión abstractos, y los estudios de Kreĭn sobre problemas inversos para cadenas de Stieltjes [46, 52], profundamente conectados con el problema de los momentos, ver [83]. Dada una medida de probabilidad de Borel μ soportada en un conjunto compacto $K_\mu \subset [0,1]$, estamos interesados en soluciones al problema

$$-u'' = \mu f(x,u),$$

que debe entenderse en el sentido distribucional. Hay diferentes enfoques para introducir una clase apropiada de funciones donde el problema tenga sentido, ver por ejemplo [47, 87, 89], principalmente para fractales auto-similares. Revisaremos en la sección 2 el enfoque unidimensional en términos de primitivas con respecto a la medida μ, siguiendo principalmente el trabajo de Bird, Deng, Freiberg, Löbus, Ngai, Teplayev, Zähle y otros autores, ver por ejemplo [11, 16, 22, 33, 34, 35, 36, 77, 75, 93].

Por otra parte, el problema de valores propios de Fučík se remonta a los años '70, cuando Fučík [38] y Dancer [20] lo introdujeron de forma independiente. Escencialmente, para un operador

elíptico lineal $\mathcal{L}(u)$, en un conjunto abierto dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el espectro de Fučík es el conjunto de pares de números reales positivos (α, β) tales que existe una solución no trivial del problema

$$-\mathcal{L}(u) = \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) \qquad x \in \Omega,$$

con condiciones de contorno apropiadas.

El espectro de Fučík para problemas unidemensionales con peso del tipo

$$\begin{cases} -u''(x) = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

en donde m es una función continua ha sido estudiado en varios trabajos, ver por ejemplo [1, 3, 18]. La teoría se ha extendido a diferentes operadores, como ecuaciones del tipo del p-Laplaciano [17, 24, 31, 81], operadores fraccionarios [5, 58], y operadores discretos [67].

El estudio del espectro de Fučík fue motivado por la existencia de soluciones y las condiciones de resonancia para el problema clásico asociado al laplaciano,

$$-\Delta u = f(u)$$

con un salto de no linealidad, esto es, siendo f asintóticamente lineal tal que satisface

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = \lambda^+, \qquad \lim_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} = \lambda^-$$

siendo $\lambda^- < \lambda^+$.

La existencia de sistemas físicos asimétricos y no lineales son otra motivación para el estudio de este problema, como el que representa diferentes fuerzas en modelos unidimensionales de puentes que se hallan suspendidos, en donde fuerzas diferentes afectan el piso según los cables tensores se encuentren tensos o flojos, ver [12, 24, 56, 57].

Probaremos en este apéndice, con el fin de poder utilizar los resultados descriptos en el estudio del estudio inverso presentado en el capítulo 5, la existencia de infinitas curvas continuas en el espectro del problema A.1. Para la obtención de este resultado, y los demás presentados en este apéndice, utilizaremos técnicas variacionales que veremos en la sección A.2.También daremos una caracterización diferente del espectro para operadores de Krein-Feller unidimensionales mostrando que todos los autovalores clásicos pertenecen al espectro de Fučík.

A.1. Notación

A continuación, introduciremos brevemente las notaciones y definiciones de los funcionales involucrados, el núcleo de Krasnoselski, sucesiones de Palais-Smale y la teoría de Ljusternik-Schnirelman.

Definimos los funcionales I_μ, $I_\mu^\pm$, $E = \mathcal{E}(u,u)$, $G_\mu \in C^1(\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}, \mathbb{R})$:

$$I_\mu^\pm(u) := \int_0^1 |u^\pm(x)|^2 d\mu, \qquad I_\mu := I_\mu^+ + I_\mu^-.$$

$$E(u) := \int_0^1 |u'|^2 dx.$$

$$G_\mu(u) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 m(x)|u^+|^2 d\mu + \int_0^1 tm(x)|u^-|^2 d\mu\right].$$

Sus derivadas de Frechet aplicadas a cualquier $v \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}$ están dadas por

$$\langle I_\mu^{\pm\prime}(u), v\rangle = 2\int_0^1 u^\pm(x)v(x)d\mu(x),$$

$$\langle E'(u), v\rangle = 2\int_0^1 u'(x)v'(x)dx,$$

$$\langle G_\mu'(u), v\rangle = \int_0^1 m(x)u^+(x)v(x)d\mu + t\int_0^1 m(x)u^-(x)v(x)d\mu.$$

Presentamos las variedades suaves

$$S = \left\{u \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2} : \int_0^1 m(x)u^2 d\mu = 1\right\},$$

$$M = \left\{u \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2} : G_\mu(u) = 1\right\},$$

y también el espacio tangente en el punto $u \in S$,

$$T_u(S) = \left\{v \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2} : \int_0^1 m(x)uvd\mu = 0\right\}.$$

Los problemas de regularidad de los funcionales y sus conjuntos de nivel pueden demostrarse como en el contexto clásico, ver por ejemplo [2, 90]. Para detalles en el contexto fractal, sugerimos consultar [29].

A.2. Herramientas de análisis no lineal

Sea X un espacio de Banach real de dimensión infinita y una función impar $g \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que los conjuntos de nivel

$$M_c = \{u \in X : g(u) = c\}$$

son acotados en X y cualquier rayo que pasa por el origen interseca M_c. Introduzcamos la familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados, simétricos y no vacíos $A \subseteq M_c$, y recordemos varias definiciones y resultados útiles, consulte [80].

Definición A.1. Definimos el *núcleo de Krasnoselki* para cualquier $A \in \mathcal{F}$, y lo denotamos por $\gamma(A)$,

$$\gamma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ínf}\left\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe } h \in C(A, \mathbb{R}^d \backslash \{0\}), h \text{ es impar}\right\},$$

donde $\alpha(A) = \infty$ si no hay ningún $d \in \mathbb{N}$ que cumpla la definición anterior, además establecemos $\gamma(A) = 0$ si $A = \emptyset$.

Proposición A.2. *El nucleo de Krasnoselki de A satisface las siguientes propiedades:*

I. *Monotonía: dados A, $B \in \mathcal{F}$ y $g : A \to B$ una aplicación continua, entonces $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*

II. *Subaditividad: dados A, $B \in \mathcal{F}$, entonces $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$. Además, si $\gamma(B) < +\infty$, entonces $A \bar{\backslash} B \in \mathcal{F}$ y $\gamma(A \bar{\backslash} B) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.*

III. *Continuidad: dado un conjunto compacto $K \in \mathcal{F}m$ se cumple que $\gamma(K) < +\infty$. Si además definimos $N_\delta(K) = \{u \in X : d(u, K) \leq \delta\}$, entonces $\gamma(N_\delta(K)) = \gamma(K)$.*

IV. *Borsuk-Ulam: dado L un subespacio invariante de dimensión finita, y $B = \{u \in L : \|u\| = 1\}$, entonces $B \in \mathcal{F}$ y $\gamma(B) = \dim(L)$.*

V. *Supongamos que $D^{1,2}_{0,\mu} = L_1 \oplus L_2$ con $\dim(L_1) < \infty$ y consideremos $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap L_2 = \emptyset$, entonces $\gamma(A) \leq \dim(L_1)$. Además, si $\dim(L_1) < \infty$, entonces se cumple que $A \cap L_2 \neq \emptyset$ si $\gamma(A) \geq \dim(L_1) + 1$.*

VI. *Para cualquier $d \in \mathbb{N}$ denotamos por S^d la esfera unitaria de $\mathbb{R}^{d+1}$, introducimos el conjunto:*

$$\mathcal{O}(S^d, S) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in C(S^d, S) : h \text{ es impar}\},$$

entonces para cualquier $h \in \mathcal{O}(S^d, S^k)$, $\gamma(h(S^d)) \geq k + 1$.

Definición A.3. Decimos que un funcional $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisface la *condición de Palais-Smale en la variedad M a nivel c* ($(PS)_{c,M}$ para abreviar) si cualquier sucesión $u_n \in M$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = c \tag{A.2}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|J'(u_n)\|_* = 0 \tag{A.3}$$

posee una subsucesión convergente. Recordemos que $\|J'(u_n)\|_*$ se define como

$$\|J'(u_n)\|_* = \sup\{|J'(u_n)| : \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}_\mu} \leq 1\}.$$

Decimos que J satisface la *condición de Palais-Smale (PS) en M* si J satisface $(PS)_{c,M}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

El siguiente teorema jugará un rol central durante el desarrollo de nuestros resultados

Teorema A.4. *Supongamos que J es un funcional par, acotado inferiormente y que satisface la condición PS en M. Consideremos*

$$\Gamma_j \overset{def}{=} \{A \subset M : A \text{ es compacto, simétrico, y } \gamma(A) \geq j\},$$

y definamos

$$c_j \overset{def}{=} \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} J(u).$$

Entonces, c_k es un valor crítico de J restringido a M. Es más, si $c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+l} = c \in \mathbb{R}$ para algún $k \geq 1$ y $l \geq 0$, entonces $\gamma(K_c) \geq l + 1$.

A.3. Condición de Palais-Smale y autovalores

Lo establecido anteriormente nos permite considerar a los autovalores de $-\Delta_\mu$ como puntos críticos del funcional de energía $E(u)$ en S. Además, para cada $s \in \mathbb{R}$, podemos obtener una sucesión de autovalores no lineales de la forma $\{(s + t_k, t_k)\}_{k\geq 1}$ al cambiar la funcional E.

Para lograr este objetivo, primero necesitamos mostrar que los funcionales correspondientes cumplen con la condición de Palais-Smale.

Teorema A.5. *El funcional $E(u)$ satisface la condición de Palais-Smale en S.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset S$ una sucesión que satisface las condiciones (A.2) y (A.3). De (A.2) se sigue que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada en $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$, entonces existe una subsucesión, que aún denotaremos como $\{u_n\}_{n\geq 1}$, y $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ tal que u_n converge débilmente a u_0 en $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$ y fuertemente en L^2_μ.

Definimos ahora para cualquier $w \in S$ y cualquier $v \in \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$, la proyección

$$P_w(v) := v - \frac{1}{2}\langle I'^2_\mu(w), v\rangle w.$$

Observemos que $P_w(v) \in T_w S$.

Definamos también $v_n = P_{u_n}(u_n - u_0)$. Entonces,

$$v_n = P_{u_n}(u_n - u_0) = u_n - u_0 - \frac{1}{2}u_n\left(\int_0^1 u_n(u_n - u_0)d\mu\right),$$

y

$$\begin{aligned}
\langle E'(u), v_n\rangle &= 2\int_0^1 u_n'\left(u_n - u_0 - \frac{1}{2}u_n\left(\int_0^1 u_n(u_n - u_0)d\mu\right)\right)' dx \\
&= 2\int_0^1 \left[u_n'(u_n - u_0)' - \frac{1}{2}(u_n')^2\left(\int_0^1 u_n^2 d\mu - \int_0^1 u_n u_0 d\mu\right)\right] dx \\
&= 2\int_0^1 u_n'(u_n - u_0)' dx - \left[1 - \int_0^1 u_n u_0 d\mu\right]\int_0^1 (u_n')^2 dx. \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

Definamos $t_n = \int_0^1 u_n u_0 d\mu$. Entonces, $t_n \to 1$ as $n \to \infty$, pues

$$\begin{aligned} t_n &= \int_0^1 u_n(u_0 - u_n)d\mu + \int_0^1 u_n^2 d\mu \\ &= \left(\int_0^1 u_n^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int_0^1 (u_0 - u_n)^2 d\mu\right)^{1/2} + 1 \end{aligned}$$

el primer término de esta suma converge a cero ya que $u_n \to u_0$ fuertemente en L^2_μ.

Volviendo a (A.4), tenemos entonces que

$$\langle E'(u), v_n\rangle = 2\int_0^1 u_n'(u_n - u_0)' dx$$

Por otro lado, notemos que

$$\langle E'(u), v_n\rangle \leq \|\tilde{E}'(u_n)\|_* \|P_{u_n}(u_n - u_0)\|_2,$$

y, dado que $\|P_{u_n}(u_n - u_0)\|_2$ está acotada, se sigue de la condición (A.3) que

$$\int_0^1 u_n'(u_n - u_0)' dx \to 0, \tag{A.5}$$

lo cual implica que $\|u_n' - u_0'\|_2 \to 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|u_n' - u_0'\|_2^2 &= \int_0^1 |u_n' - u_0'|^2 dx \\ &= \int_0^1 (u_n')^2 + (u_0')^2 - 2u_n' u_0' dx \\ &= \int_0^1 (u_n')^2 - u_n' u_0' dx + \int_0^1 (u_0')^2 - u_n' u_0' dx. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Notemos que el primer término de (A.6) tiende a cero ya que se cumple (A.5). Además, como $u_n \rightharpoonup u_0$, entonces

$$\int_0^1 \varphi u_n' dx \to \int_0^1 \varphi u_0' dx$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty([0,1])$, así que podemos tomar una sucesión $\{\varphi_m\}_{m\geq 1} \in C_c^\infty([0,1])$ tal que $\varphi_m \to u_0'$, y luego el segundo término también tiende a cero. De este modo tenemos que $\|u_n - u_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}} \to 0$ cuando $n \to \infty$, y $E(u)$ satisface la condición (PS). □

A.4. Autovalores del operador de Kreĭn-Feller

Estamos en condiciones de aplicar estos teoremas en nuestro problema. En particular, con $X = \mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$, $J = E$ y $g = I_\mu$, obtendremos primero una sucesión de autovalores para el problema lineal

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = \lambda m(x) u & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{A.7}$$

cuyo funcional asociado es

$$E(u) = \int_0^1 u'^2(x)dx.$$

Si definimos $\tilde{E}$ como la restricción de E a S, tenemos el siguiente resultado:

Teorema A.6. *Consideremos la sucesión dada por*

$$\tilde{\lambda}_j \overset{def}{=} \inf_{A\in\Gamma_j} \sup_{u\in A} \tilde{E}(u),$$

para cada $j \geq 1$, donde $\Gamma_j = \{A \subset S : A$ es compacto, simétrico y $\gamma(A) \geq j\}$ siendo γ el núcleo de Krasnoselski en $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$. Entonces, $\tilde{\lambda}_j$ es un autovalor de $-\Delta_\mu$ en $\mathcal{D}^{1,2}_{0,\mu}$. Además, $0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$ y $\lim_{n\to\infty} \tilde{\lambda}_n = \infty$.

Demostración. Como demostramos en el Teorema A.5, $\tilde{E}$ satisface la condición (PS) en S y $\gamma(S) = \infty$. Por lo tanto, el Teorema A.4 implica la existencia de una sucesión de autovalores $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n\geq 1}$. La regla de multiplicadores de Lagrange implica que

$$\int_0^1 \tilde{u}_n'(x)v'(x)dx = \tilde{\lambda}_n \int_0^1 m(x)\tilde{u}_n(x)v(x)d\mu,$$

para los puntos críticos $\{\tilde{u}_n\}_{n\geq 1}$ y cualquier función test v, por lo tanto, $\tilde{u}_n$ es una solución débil de la ecuación (A.7) correspondiente al autovalor $\tilde{\lambda}_n$.

La positividad estricta del primer autovalor sigue de la desigualdad de Poincaré en el Lema 2.11.

Por último, para demostrar que $\lim_{n\to\infty} \tilde{\lambda}_n = \infty$, supongamos por contradicción que la sucesión μ_j es estacionaria. De ser así, $\gamma(K_{\mu_j}) = \infty$, lo cual contradice la condición (PS) (K_{μ_k} debe ser un conjunto compacto).

□

Proposición A.7. *Los autovalores $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ del Teorema 2.13 y $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n\geq 1}$ del Teorema A.6 coinciden.*

Demostración. Primero, notemos que la homogeneidad del cociente de Rayleigh en el Teorema 2.13 nos permite considerar solo funciones en S. Dado que λ_1 y $\tilde{\lambda}_1$ se obtienen minimizando en todo el conjunto S, son iguales.

Ahora, el Teorema 2.14 implica que la autofunción u_k tiene k dominios nodales. Si $\tilde{\lambda}_k > \lambda_k$, la solución $\tilde{u}_k$ tiene $h > k$ dominios nodales debido a la propiedad de oscilación de la teoría de Sturm-Liouville. Por lo tanto, $\tilde{\lambda}_k = \lambda_h$, para algún $h > k$, o llegamos a una contradicción, ya que tanto u_h como $\tilde{u}_k$ tienen el mismo número de dominios nodales.

Esto muestra que $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n\geq 1} \subset \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$.

Para demostrar la otra inclusión, tomemos el mínimo k tal que $\lambda_k < \tilde{\lambda}_k$. Consideremos ahora los k dominios nodales de la solución u_k, y construyamos un espacio lineal de dimensión k generado

por las k funciones definidas de la siguiente manera

$$u_k^j(x) = \begin{cases} u_k(x) & x \text{ en el } j\text{-ésimo dominio nodal,} \\ 0 & x \text{ fuera del } j\text{-ésimo dominio nodal.} \end{cases}$$

La intersección de este espacio lineal con S define un conjunto simétrico compacto A cuyo núcleo es k, y el funcional $\tilde{E}$ alcanza un máximo en A igual a λ_k, por lo que el k-ésimo autovalor $\tilde{\lambda}_k$ debe coincidir con λ_k.

La prueba está terminada. □

A.5. La parte trivial del espectro de Fučík

Recordemos que el espectro de Fučík de $-\Delta_\mu$ en $\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}$ es el conjunto Σ de pares $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tales que el problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = m(x)(\alpha u^+ - \beta u^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{A.8}$$

tiene una solución no trivial $u \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}$. Las soluciones se entienden en el sentido débil, es decir,

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 m(x)(\alpha u^+(x) - \beta u^-(x))\varphi d\mu$$

para cualquier función $\varphi \in C_0^1((0,1))$. La función u se llama *autofunción asociada al par* (α,β).

Sea $\{\lambda_k\}$ la sucesión de autovalores de $-\Delta_\mu$, entonces cualquier par $(\lambda_k,\lambda_k) \in \Sigma$. Además, utilizando que las autofunciones asociadas a λ_1 tienen un signo definido, se puede demostrar fácilmente que las rectas $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ están contenidas en Σ. Llamamos a estas dos rectas la *parte trivial* de Σ. Además, la caracterización variacional de λ_1

$$\lambda_1 = \min_{u \in S} \int_0^1 u'^2(x)dx$$

implica que

$$\Sigma \backslash ((\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{\lambda_1\})) \subset \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > \lambda_1, \beta > \lambda_1\}.$$

A.6. El espectro de Fučík

Fijemos $s \in \mathbb{R}$ y tracemos en el plano $\mathbb{R}^2$ una línea paralela a la diagonal del primer cuadrante, que pase por $(s,0)$. Para simplificar, asumiremos que $s \geq 0$, el mismo argumento proporciona una familia de autovalores de Fučík por encima de la diagonal.

Encontraremos una sucesión de valores críticos $\{c_j(s)\}_{j\geq 1}$ para un funcional modificado, y cada valor $c_j(s)$ corresponderá a un par $(c_j(s) + s, c_j(s)) \in \Sigma$. Con este fin, introducimos el siguiente

funcional:

$$E^s(u) \stackrel{def}{=} \int_0^1 u'^2(x)dx - s\int_0^1 m(x)u^{+2}(x)d\mu.$$

Como antes, E^s es un funcional C^1 en $\mathcal{D}_\mu^{1,2}$. Nos interesan los puntos críticos E^s restringido a S. Según la regla de los multiplicadores de Lagrange, $u \in S$ será un punto crítico de E^s restringido a S si y solo si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\langle (E^s)'(u), v\rangle = t\langle I'(u), v\rangle$, es decir si

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - s\int_0^1 m(x)u^+(x)v(x)d\mu = t\int_0^1 m(x)u(x)v(x)d\mu \tag{A.9}$$

para cualquier función test $v \in C_0^1((0,1))$. Esto significa que una solución débil para

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) - m(x)su^+ = m(x)tu & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

es una solución débil para nuestro problema original de autovalores de Fučík

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = m(x)((s+t)u^+ - tu^-) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $(t+s, t) \in \Sigma$.

Tomando $u = v$ en (A.9), el multiplicador de Lagrange t resulta ser $E^s(u)$. Por lo que tenemos una sucesión de puntos críticos en la recta paralela a la diagonal que pasa por el punto $(s, 0)$ que pertenece a Σ, estos puntos son exactamente de la forma $(s + E^s(u), E^s(u))$, siendo u un punto crítico de E^s. Si definimos $\tilde{E}^s$ como la restricción de E^s a S, tenemos el siguiente resultado.

Lema A.8. *Sea $t \in \mathbb{R}$ y $s > 0$ un valor fijo, consideremos la recta $(t+s, t)$. Entonces, existe una sucesión $\{c_j(s)\}_{j\geq 1}$ de puntos críticos de E restringido a S,*

$$c_j(s) = \inf_{A\in\Gamma_j} \sup_{u\in A} \tilde{E}^s(u),$$

tal que $(c_j(s) + s, c_j(s)) \in \Sigma$.

La prueba de este lema se obtiene como antes al demostrar que $\tilde{E}^s$ satisface la condición (PS) y usando el Teorema A.4.

Probaremos en la siguiente proposición que la curva $s \in \mathbb{R}^+ \to (c_j(s) + s, c_j(s))$ es continua y monótona. A efectos de una demostración más simple y dado que el otro caso es similar, consideraremos que $s \geq 0$.

Proposición A.9. *La función $c_j(s) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua y decreciente.*

Demostración. Sean $s,\ s' \in \mathbb{R}^+$ tal que $s < s'$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{E}^s =& \int_0^1 u'^2(x)dx - s\int_0^1 m(x)u^{+2}(x)d\mu\\ =& \int_0^1 u'^2(x)dx - (s-s')\int_0^1 m(x)u^{+2}(x)d\mu - s'\int_0^1 m(x)u^{+2}(x)d\mu\\ =&\tilde{E}^{s'} - (s-s')\int_0^1 m(x)u^{+2}(x)d\mu\end{aligned}$$

lo cual implica $\tilde{E}^{s'} \leq \tilde{E}^s$ y, por lo tanto, $c_j(s') \leq c_j(s)$.

Ahora mostraremos la Lipschitz continuidad de c_j. Si fijamos $\varepsilon > 0$, existirá $A \in \Gamma_j$ tal que

$$\sup_{u\in A} E_s \leq c_j(s) + \varepsilon.$$

Entonces

$$0 \leq c_j(s) - c_j(s') \leq \sup_{u\in A} E_s + \varepsilon - \sup_{u\in A} E_{s'}$$

Entonces, existe $u_0 \in A$ tal que

$$\begin{aligned}0 \leq& c_j(s) - c_j(s')\\ \leq& E_s(u_0) + \varepsilon - E_{s'}(u_0)\\ =&(s'-s)\int_0^1 m(x)(u^+)^2 d\mu + \varepsilon\\ \leq&(s'-s) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Dado que ε es arbitrario, la prueba está completa. □

A.6.1. Una cota para las curvas

Comenzamos con el siguiente Lema, que se puede encontrar en [77]:

Lema A.10. *Sea $m \in C([0,1])$ una función positiva y u una solución no trivial del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda m(x)u & x \in (a,b) \subset [0,1]\\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{A.10}$$

Entonces,

$$\frac{4}{b-a} \leq \lambda \int_a^b m(x)d\mu. \tag{A.11}$$

Demostración. Usando el Lema 2.10, podemos elegir $c \in K_\mu$ tal que $|u|$ alzance su máximo allí. Así, utilizando la desigualded de Hölder,

$$u^2(c) = \left(\int_a^c u'(x)dx\right)^2 \leq (c-a)\int_a^c u'^2(x)dx \leq (c-a)\mathcal{E}(u',u'),$$

y utilizando que u restringida al intervalo $[a, c]$ es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda m(x)u & x \in [a, c] \\ u(a) = u'(c) = 0, \end{cases} \tag{A.12}$$

Tenemos que

$$u^2(c) \leq (c - a) \int_a^c \lambda m(x) u^2(x) d\mu.$$

Además, dado que $u^2(x) \leq u^2(c)$, obtenemos la siguiente desigualdad

$$1 \leq (c - a) \int_a^c \lambda m(x) d\mu.$$

Un razonamiento similar en $[c, b]$ implica que

$$1 \leq (b - c) \int_c^b \lambda m(x) d\mu.$$

De este modo, tenemos que

$$\frac{1}{c - a} + \frac{1}{b - c} \leq \lambda \int_0^1 m(x) d\mu,$$

Observemos que la desigualdad de la media aritmética-armónica implica que $\frac{4}{b-a} \leq \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$, por lo que

$$\frac{4}{b - a} \leq \lambda \int_a^b m(x) d\mu$$

quedando así el lema demostrado. □

Nuestro siguiente resultado generaliza el resultado anterior para los autovalores de Fučík.

Teorema A.11. *Sea $(\alpha, \beta) \in \Sigma$ un autovalor no trivial de Fučík. Entonces, existe una curva hiperbólica $y = f(x)$ tal que $\beta \geq f(\alpha)$. Más aún,*

$$\lim_{\alpha \to \infty} f(\alpha) = \frac{4}{\int_0^1 m(x) d\mu}.$$

Demostración. Sea (α, β) un autovalor no trivial. Entonces, u será positiva en algún intervalo (a_1, a_2) y negativa en (b_1, b_2). Por lo tanto, el lema anterior implica que

$$\alpha \geq \frac{4}{(a_2 - a_1) \int_{a_1}^{a_2} m(x) d\mu},$$

$$\beta \geq \frac{4}{(b_2 - b_1) \int_{b_1}^{b_2} m(x) d\mu}.$$

Supongamos que $a_2 \leq b_1$, el otro caso se obtiene exactamente del mismo modo. Tendremos que

$$\int_{a_1}^{a_2} m(x)d\mu \leq \int_0^{a_2} m(x)d\mu,$$

$$\int_{b_1}^{b_2} m(x)d\mu \leq \int_{a_2}^{1} m(x)d\mu,$$

y por lo tanto

$$\alpha \geq \frac{4}{a_2 \int_0^{a_2} m(x)d\mu}, \tag{A.13}$$

$$\beta \geq \frac{4}{(1-a_2)\int_{a_2}^{1} m(x)d\mu}. \tag{A.14}$$

Además, dado que

$$\begin{aligned}\int_{a_2}^{1} m(x)d\mu &= \int_0^1 m(x)d\mu - \int_0^{a_2} m(x)d\mu \\ &\leq \int_0^1 m(x)d\mu - \frac{4}{\alpha a_2},\end{aligned}$$

podemos volver a la desigualdad (A.14) y obtener que

$$\beta \geq \frac{4}{(1-a_2)\int_{a_2}^{1} m(x)d\mu} \geq \frac{4}{(1-a_2)}\left(\frac{\alpha a_2}{\alpha a_2 \int_0^1 m(x)d\mu - 4}\right).$$

Reorganizando los términos de la desigualdad anterior, podemos escribirla como

$$\beta \geq \frac{4}{(1-a_2)\int_0^1 m(x)d\mu}\left(1 + \frac{4}{\alpha a_2 \int_0^1 m(x)d\mu - 4}\right).$$

Observemos que, la desigualdad (A.13) implica que $\alpha a_2 \int_0^1 m(d)d\mu > 4$, por lo que el último término es positivo.

Finalmente, observemos que si definimos

$$f(x) = \frac{4}{\int_0^1 m(x)d\mu}\left(1 + \frac{4}{x\int_0^1 m(x)d\mu - 4},\right)$$

entonces, como $a_2 \leq 1$, esta función satisface que

$$f(\alpha) \leq \beta,$$

y

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha) = \frac{4}{\int_0^1 m(x)d\mu}.$$

Hemos concluido la prueba. □

Bibliografía

[1] Alif, M.; Gossez, J.-P.: On the Fučík spectrum with indefinite weights. Differential Integral Equations **14**, 1511-1530 (2001) 63

[2] Ambrosetti, A., Prodi, G.: A primer of nonlinear analysis. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 34. Cambridge University Press, Cambridge (1993) 64

[3] Arias, M., Campos, J., Cuesta, M., Gossez, J.-P.: Asymmetric elliptic problems with indefinite weights. Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire **19**, 581-616 (2002) 63

[4] Arzt, P.: Measure theoretic trigonometric functions. Journal of Fractal Geometry **2**(2), 115-169 (2015)

[5] Bahrouni, S., Ounaies, H., Salort, A.: Variational eigenvalues of the fractional g-Laplacian. Complex Variables and Elliptic Equations, 1-24 (2022) 63

[6] Berkolaiko G, Kuchment P. *Introduction to quantum graphs*: American Mathematical Society; 2013. 6, 17

[7] Bender, C.M., Oorszag, S.A.: Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] Berkolaiko G, Liu W. Simplicity of eigenvalues and non-vanishing of eigenfunctions of a quantum graph. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2017;445(1):803-18. 7

[9] Birman, M., Solomyak, M.: On the negative discrete spectrum of a periodic elliptic operator in a waveguide-type domain, perturbed by a decaying potential. Journal d' Analyse Mathematique **83**, 337-391 (2001)

[10] Birman, M., Laptev, A., Solomyak, M.: On the eigenvalue behaviour for a class of differential operators on the semiaxis. Math. Nachr. **195** 17-46 (1998) 5

[11] Bird, J., Ngai, S., Teplyaev, A.: Fractal Laplacians on the Unit Interval. Annales des Sciences Mathematiques du Quebec **27**, 135-168 (2003) 19, 21, 62

[12] Bochicchio, I., Giorgi, C., Vuk, E.: Steady states and nonlinear buckling of cable-suspended beam systems. Meccanica **53**, 3365-81 (2018) 63

[13] Buterin, S. A., Shieh, C.T.: Inverse nodal problem for differential pencils. Applied Mathematics Letters **22**(8) 1240-1247 (2009)

[14] Buterin, S. A., Shieh, C.T.: Incomplete inverse spectral and nodal problems for differential pencils. Results in Mathematics **62** 167-179 (2012)

[15] Chadan, Kh., Sabatier, P.C.: Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. Springer, New York (1989)

[16] Chen, J., Ngai, S.-M.: Eigenvalues and eigenfunctions of one-dimensional fractal Laplacians defined by iterated function systems with overlaps. Journal of Mathematical Analysis and Applications **364**, 222-241 (2010) 62

[17] Cuesta, M.: On the Fučík spectrum of the Laplacian and the p-Laplacian. 2000 Seminar in Differential Equations, 67-96, Czech Republic, Kvilda (2000) 63

[18] Cuesta, M., De Figueiredo, D., Gossez, J.-P.: The beginning of the Fučík spectrum for the p-laplacian. J. Differential Equations **159**, 212-238 (1999) 63

[19] Cybenko, G.: Approximation by superpositions of a sigmoidal function. Mathematics of control, signals and systems bf 2(4), 303-314 (1989) 51

[20] Dancer, N.: On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equation. Proc. Royal Soc. Edimb. **76**, 283-300 (1977) 62

[21] Delgado, B. B., Khmelnytskaya, K. V., Kravchenko, V. V.: The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm-Liouville problem on a half-line, Math. Meth. Appl. Sci. **42**, 7359–7366 (2019)

[22] Deng, D.-W., Ngai, S.-M.: Eigenvalue estimates for Laplacians on measure spaces. Journal of Functional Analysis **268**, 2231-2260 (2015) 19, 62

[23] Drábek, P., Holubová, G., Matas, A., Nečesal, P.: Nonlinear models of suspension bridges: discussion of the results. Applications of Mathematics **48**, 497-514 (2003)

[24] Drábek, P., Robinson, S. B.: An extended variational characterization of the Fučík Spectrum for the p-Laplace operator. Calculus of Variations and Partial Differential Equations **59**(2) 1-25 (2020) 63

[25] Elbert, Á., Kusano, T., Naito, M.: Singular eigenvalue problems for second order linear ordinary differential equations. Archivum Mathematicum, 1998, vol. 34, no 1, p. 59-72. 14

[26] Elias, U.: Singular eigenvalue problems for the equation $y^{(n)} + \lambda p(x)y = 0$. Monatshefte für Mathematik **142**(3), 205-225 (2004) 5

[27] Evans, L.: Measure theory and fine properties of functions. Routledge (2018)

[28] Falconer, K.: Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ (2003). 18

[29] Falconer, K.J., Hu, J.: Non-linear elliptical equations on the Sierpiński gasket. Journal of mathematical analysis and applications **240**(2), 552-573 (1999) 64

[30] Feller, W.: The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension. Annals of Mathematics **60**, 417-436 (1954) 19, 62

[31] Fernandez Bonder, J., Pinasco, J.P. and Salort, A.M.: Homogenization of Fučík Eigencurves. Mediterranean Journal of Mathematics, **14**(2), 1-12 (2017) 63

[32] de Figueiredo, D. G., Gossez, J.-P. On the first curve of the Fučík spectrum of an elliptic operator. Differential Integral Equations **7**, 1285-1302 (1994)

[33] Freiberg, U.: Analytical properties of measure-geometric Kreĭn-Feller-operators on the real line. Mathematische Nachrichten **260**, 34-47 (2003) 19, 20, 62

[34] Freiberg, U.: Dirichlet forms on fractal subsets of the real line. Real Analysis Exchange **30**, 589-604 (2004/2005) 19, 20, 62

[35] Freiberg, U., Löbus, J.-U.: Zeros of eigenfunctions of a class of generalized second order differential operators on the Cantor set. Mathematische Nachrichten **265**, 3-14 (2004) 19, 20, 21, 62

[36] Freiberg, U., Zähle, M.: Harmonic calculus on fractals - a measure geometric approach I. Potential Analysis **16**(3), 265-277 (2002) 62

[37] Freiling, G., Yurko, V.: Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications. Nova Science Publishers, Huntington (2001) 13

[38] Fučík, S.: Boundary value problems with jumping nonlinearities. Časopis pro Pestovńí Mestacioatiky **101**(1), 69-87 (1976) 62

[39] Galewski, M.: On the mountain pass solutions to boundary value problems on the Sierpiński gasket. Results in Mathematics **74**(4), 1-13 (2019)

[40] Gel'fand, I. M., Levitan, B. M.: On the determination of a differential equation from its spectral function. Amer. Math. Soc. Transl. **1**(2), 253–304 (1955)

[41] Hald, O. H., McLaughlin, J. R.: Inverse problems using nodal position data-uniqueness results, algorithms, and bounds. Proc. Centre for Mathematical Analysis, Australian Nat. Univ., eds. R. S. Anderssen, G. N. Newsam 32-58 (1988)

[42] Hald, O. H., McLaughlin, J. R.: Solution of inverse nodal problems. Inverse Problems 5 307-347 (1989)

[43] Hald, O. H., McLaughlin, J. R.: Inverse problems: recovery of BV coefficients from nodes. Inverse Problems 14 245-273 (1998)

[44] Hille, E.: An Application of Prüfer's Method to a Singular Boundary Value Problem. Mathematische Zeitschrift **72**, 95-106 (1959/60) 5

[45] Hornik, K.: Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. Neural networks **4**(2), 251-257 (1991) 51

[46] Kac, I.S., Kreĭn, M. G.: On the spectral functions of the string. Am. Math. Soc. Transl. **103**(1), 195-102 (1974) 62

[47] Kigami, J.: Analysis on Fractals. Cambridge University Press, Cambridge (2001) 62

[48] Koyunbakan, H., Pinasco, J.P., Scarola, C.: Energy dependent potential problems for the one dimensional p-Laplacian operator. Nonlinear Analysis: Real World Applications **45**, 285-298 (2019)

[49] Kravchenko, V. V.: On a method for solving the inverse scattering problem on the line, Math. Meth. Appl. Sci. **42**, 1321–1327 (2019)

[50] Kravchenko, V. V. : Direct and inverse Sturm-Liouville problems: A method of solution, Birkhäuser (2020)

[51] Kravchenko, V. V., Shishkina, E. L., Torba S. M.: A transmutation operator method for solving the inverse quantum scattering problem. Inverse Problems **36**, 125007 (2020)

[52] Kreĭn, M.G.: On a generalization of investigations of Stieltjes. Doklady Akademii Nauk SSSR **87**, 881-884 (1952) 19, 62

[53] Kusano,T, Naito, M.: On the number of zeros of nonoscillatory solutions to half-linear ordinary differential equations involving a parameter. Transactions of the American Mathematical Society **354**(12), 4751-4767 (2002) 13, 14, 15

[54] Kusano, T., Naito, Y., Ogata, A.: Strong oscillation and nonoscillation of quasilinear differential equations of second order. Differential Equations and Dynamical Systemsvol **2**(1), 1-10 (1994) 14

[55] Law, C. K., Yang, C. F.: Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data. Inverse Problems **14**, 299-312 (1998). Addendum **14**, 779-780 (1998)

[56] Lazer, A. C., McKenna, P. J.: Large scale oscillatory behaviour in loaded asymmetric systems. Annales de l' Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire **4**(3), 243-274 (1987) 63

[57] Lazer, A.C., McKenna, P. J.: Existence, uniqueness, and stability of oscillations in differential equations with asymmetric nonlinearities. Trans. Amer. Math. Soc. **315**, 721-739 (1989) 63

[58] Liu, Z., Luo, H., Zhang, Z.: Dancer-Fučík spectrum for fractional Schrödinger operators with a steep potential well on $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Analysis **189**, 111565 (2019) 63

[59] Martínez-Finkelshtein, A., Martínez-González, P., Zarzo, A.: WKB approach to zero distribution of solutions of linear second order differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics **145**, 167-182 (2002) 2

[60] Mattila, P.: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. Cambridge University Press, Cambridge (1995) 18

[61] McLaughlin, J. R.: Inverse spectral theory using nodal points as data, a uniqueness result. J. Differential Equations **73**, 354-362 (1988) 1

[62] McLaughlin, J. R.: Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data. SIAM review, **28**(1), 53-72 (1986) 1

[63] McLaughlin, J. R.: Solution of inverse nodal problems. Inverse problems. **5**(3), 307 (1989) 1

[64] Molica Bisci, G., Repovš, D., Servadei, R.: Nonlinear problems on the Sierpiński gasket. J. of Mathematical Analysis and Applications **452**(2), 883-895 (2017)

[65] Molica Bisci, G., Rădulescu. V.: A characterization for elliptic problems on fractal sets. Proceedings of the American Mathematical Society **143**(7), 2959-2968 (2015)

[66] Naimark, K., Solomyak, M.: Regular and pathological eigenvalue behavior for the equation $-\lambda u'' = Vu$ on the semiaxis. J. Functional Analysis **151**, 504-530 (1997) 5

[67] Nečesal, P., Sobotková, I.: Localization of Fučík curves for the second order discrete Dirichlet operator. Bull. des Sciences Mathématiques **171**, 103014 (2021) 63

[68] Ngai, S.M., Tang, W.: Eigenvalue asymptotics and Bohr's formula for fractal Schrödinger operators. Pacific Journal of Mathematics **300**(1), 83-119 (2019) 19

[69] Ngai, S.M., Tang, W. and Xie, Y.: Spectral asymptotics of one-dimensional fractal Laplacians in the absence of second-order identities. Discrete & Continuous Dynamical Systems **38**(4), 1849 (2018) 19

[70] Panakhov, E. S., Sat, M.: Reconstruction of potential function for Sturm-Liouville operator with Coulomb potential. Boundary Value Problems **1**, 1-9 (2013)

[71] Pinasco, J. P.: Lower bounds of Fučík eigenvalues of the weighted one dimensional p-Laplacian. Rendiconti dell' Inst. Matem. dell' Univ. di Trieste **XXXVI**, 49-64 (2004)

[72] Pinasco, J. P.: Lyapunov-type inequalities with applications to eigenvalue problems. Springer Briefs in Mathematics, Springer, New York, (2013) 5

[73] Pinasco, J. P., Salort, A.M.: Asymptotic behavior of the curves in the Fučík spectrum. Commun. Contemp. Math. **19**, 1650039 (2017)

[74] Pinasco, J.P., Scarola, C.: A nodal inverse problem for a quasi-linear ordinary differential equation in the half-line. Journal of Differential Equations, **261**(2), 1000-1016 (2016) 3, 59

[75] Pinasco, J. P., Scarola, C.: A nodal inverse problem for measure-geometric Laplacians. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **94**, Paper No. 105542 (2021) 3, 45, 62

[76] Pinasco, J. P., Scarola, C.: A nodal inverse problem for second order Sturm-Liouville operators with indefinite weights. Appl. Math. Comput. **256**, 819-830 (2015) 3

[77] Pinasco, J. P., Scarola, C.: Eigenvalue bounds and spectral asymptotics for fractal Laplacians. Journal of Fractal Geometry **6**, 109-126 (2019) 21, 62, 71

[78] Priyadarshi, A., Sahu, A.: Boundary value problem involving the p-Laplacian on the Sierpiński gasket. Fractals **26**(1), 1850007 (2018)

[79] Pinasco, J.P., Scarola, C.: A nodal inverse problem for a quasi-linear ordinary differential equation in the half-line. Journal of Differential Equations **261**(2), 1000-1016 (2016) 5

[80] Rabinowitz, P.: Variational Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems. In: Prodi, G. (eds) Eigenvalues of Non-Linear Problems. C.I.M.E. Summer Schools, vol 67. Springer, Berlin, Heidelberg (2009) 64

[81] Rossi, J. D., Salort, A. M., da Silva, J. V.: The ∞-Fučík spectrum. Ann. Acad. Sci. Fenn. Mathematica **43**, 293-310 (2018) 63

[82] Sahu, A., Priyadarshi, A.: A System of p-Laplacian Equations on the Sierpiński gasket. Mediterranean Journal of Mathematics **18**(3), 1-26 (2021)

[83] Simon, B.: The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator. Adv. Math. **137**, 82-203 (1998) 62

[84] Shen, C.-L.: On the nodal sets of the eigenfunctions of the string equation. SIAM Journal on Mathematical Analysis **19**, 1419-1424 (1988) 2

[85] Shen, C.-L., Tsai, T.-M.: On a uniform approximation of the density function of a string equation using eigenvalues and nodal points and some related inverse nodal problems. Inverse Problems **11**, 1113-1123 (1995) 2

[86] Solomyak, M., Verbitsky, E.: On a Spectral Problem Related to Self-Similar Measures. Bulletin of the London Mathematical Society **27**(3), 242-248 (1995)

[87] Strichartz, R. S.: Differential equations on fractals. A tutorial. Princeton University Press, Princeton, NJ (2006) 62

[88] Titchmarsh, E. C. (1951). Eigenfunction expansions associated with partial differential equations. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(1), 1-27. 15

[89] Triebel, H.: Fractals and spectra. Related to Fourier analysis and function spaces. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel (2011) 62

[90] Willem, M.: Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (1996) 64

[91] Yang, X. F.: A solution of the inverse nodal problem. Inverse Problems **13**, 203-213 (1997)

[92] Yurko, V. A.: Inverse nodal problems for Sturm-Liouville operators on star-type graphs, J. Inv. Ill-Posed Problems **16**, 715-722 (2008)

[93] Zähle, M.: Harmonic calculus on fractals - A measure geometric approach II. Trans. Amer. Math. Soc. **357**(9), 3407-3423 (2005) 62