



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Modelos del sector oscuro del universo y teorías de gravedad modificadas

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área
de Ciencias Físicas por

Lic. Juan Manuel Armaleo

Directora: Dra. Diana Laura López Nacir.

Consejero de estudios: Dr. Fernando César Lombardo.

Lugar de trabajo: Instituto de Física de Buenos Aires (UBA-CONICET).

Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina - Agosto 2024

Resumen

Determinar la naturaleza y propiedades de la materia oscura es uno de los principales campos de estudios dentro de la Cosmología moderna. A lo largo de los años, diversos y numerosos modelos y paradigmas alternativos fueron surgiendo en contraposición al modelo de Λ CDM, modelo más completo y exitoso que se tiene hasta el momento. En el último tiempo especial interés fue tomando aquél donde la materia oscura consiste en bosones ultralivianos, con números de ocupación extremadamente altos de manera tal que se lo puede describir mediante la teoría clásica de campos. Estos tipos de modelos de materia oscura se los conoce como materia oscura *ultraliviana* (*ULDM* por sus siglas en inglés). Esta tesis tiene como objetivo, pues, poner cotas al modelo mediante el estudio de la naturaleza y comportamiento de uno de estos tipos de materia oscura, más específicamente de un modelo de materia oscura ultraliviana de spin-2.

A diferencia de un campo de Klein-Gordon o uno de Proca, estudiar un campo bosónico masivo de spin-2 en Relatividad General requiere de especial atención y cuidado. Esto es así ya que la incorporación de un campo masivo de spin-2 a la acción de Relatividad General podría *romper* la bien comportada teoría, por ejemplo, dejando sin validez la invariancia frente a difeomorfismos. No fue hasta principios de la segunda década del siglo XXI que se pudieron desarrollar teorías bien comportadas que describan un campo de spin-2 masivo en Relatividad General. El punto de partida para desarrollar dichas teorías fue la hoy en día conocida *Teoría de Gravedad Masiva*, presentada por Claudia de Rham, Gregory Gabadadze y Andrew Tolley a finales de 2010. Allí los autores mostraron cómo describir un campo de spin-2 masivo en una métrica fija y sin dinámica, que pese al éxito de la misma, no es algo deseable en un contexto cosmológico. A partir de esta fueron surgiendo diversas teorías que sí admiten este tipo de soluciones, entre ellas una de las más conocidas y que competará a esta tesis es la denominada *Teoría de Bigravedad*. El campo de materia oscura ultraliviana de spin-2 estudiado en esta

tesis está enmarcado en este tipo de teorías, aunque cabe remarcar que varios de los resultados aquí obtenidos no se restringen a este tipo de teorías solamente. Por ende, es parte de esta tesis también dedicar un análisis y una descripción adecuada de la teoría de bigravedad previamente mencionada, teniendo en mente su contexto cosmológico y haciendo foco en cómo obtener a partir de esta el modelo de materia oscura en cuestión.

El modelo de ULDM de spin-2 aquí presentado trata de ahondar una de las diversas propuestas y alternativas a ser candidato de materia oscura viable. Para estudiar dicha viabilidad, en pos de confrontar al modelo frente a datos y observaciones disponibles, se utilizaron para tal objetivo diversos fenómenos del universo. A saber, se utilizaron púlsares binarios, arreglo de púlsares (PTA), y ondas gravitacionales para poner cotas al modelo. Los resultados obtenidos y mostrados aquí son fruto de una serie de trabajos desarrollados durante el doctorado ([Armaleo et al., 2020a,b, 2021](#)) los cuales permitieron poner varias de las cotas más restrictivas y novedosas al modelo de materia oscura ultraliviana de spin-2. Este es el aporte principal de esta tesis a la comunidad científica.

Palabras claves: *materia oscura ultraliviana, spin-2, gravedad modificada, bigravedad, púlsares, ondas gravitacionales.*

Abstract

Determining the nature and properties of dark matter is one of the main fields of study within modern Cosmology. Over the years, diverse and numerous alternative models and paradigms have emerged in contrast to the Λ CDM model, the most complete and successful model available to date. In recent times, special interest has been taken in those where dark matter consists of ultralight bosons, with extremely high occupation numbers in such a way that it can be described by classical field theory. These types of dark matter models are known as *ultralight* dark matter (ULDM). This thesis aims, therefore, to put limits on the model by studying the nature and behavior of one of these types of dark matter, more specifically a spin-2 ultralight dark matter model.

Unlike a Klein-Gordon or a Proca field, studying a massive spin-2 bosonic field in General Relativity (GR) requires special attention. This is so since the incorporation of a massive spin-2 field into the action of GR could *break* the well-behaved theory, for example, rendering invariance against diffeomorphisms invalid. It was not until the beginning of the second decade of the 21st century that well-behaved theories describing a massive spin-2 field in General Relativity could be developed. The starting point for developing these theories was the now known as *Massive Gravity Theory*, presented by Claudia de Rham, Gregory Gabadadze and Andrew Tolley at the end of 2010. There the authors showed how to describe a spin-2 massive field in a fixed metric and without dynamics, which despite its success, is not something desirable in a cosmological context. From this, various theories emerged that will admit this type of solutions, among them one of the best known and that will be relevant for this thesis is the so-called *Bigravity Theory*. The spin-2 ultralight dark matter field studied in this thesis is framed within this type of theory, although it should be noted that several of the results obtained here are not restricted to this type of theory only. Finally, it is also part of this thesis to dedicate an analysis and an adequate description of the previously mentioned bigravity theory, keeping in mind its cosmological

context and focusing on how to obtain the dark matter model in question from this.

The spin-2 ULDM model presented here tries to delve into one of the various proposals and alternatives to be a viable dark matter candidate. To study this feasibility, in order to confront the model against available data and observations, various phenomena of the universe were used. Namely, binary pulsars, pulsar timing array (PTA), and gravitational waves. The results obtained and shown here are product of a series of works developed during the doctorate ([Armaleo et al., 2020a,b, 2021](#)) which allowed us to put several of the most restrictive and novel limits on the spin-2 ULDM model. This is the main contribution of this thesis to the scientific community.

Key words: *ultralight dark matter, spin-2, modified gravity, bigravity, pulsars, gravitational waves.*

Agradecimientos

Aspirar al título académico de mayor grado, el título de doctor, requiere de muchas cosas: perseverancia, constancia, paciencia, humildad, etc. Sin embargo, por más voluntad y/o capacidad que se tenga, el camino doctoral va más allá de las aptitudes individuales. Se necesita de alguien que guíe el doctorado, de alguien que encamine y encause la carrera académica, de tener un apoyo y soporte tanto académico como emocional para recorrer el sendero del doctorado; en definitiva, es imposible realizar una tesis doctoral (y en particular un doctorado) sin el apoyo y la presencia de todas estas personas, y más. La ciencia es colaborativa, y así también lo es un doctorado. No se trata del individualismo, sino de todo lo contrario: generar vínculos con otras personas, formar y sentirse parte de un grupo, entender que la discusión hace a la ciencia, y muchas otras cosas más que podría seguir nombrando.

En la carátula de la tesis hay un autor, pero el contenido de toda esta tesis es producto de la participación de varias personas las cuales me permitieron llegar al día de hoy a poder presentar este trabajo. Sin lugar a dudas, poder realizar un doctorado y escribir esta tesis fue gracias al apoyo incondicional de la familia; desde la familia directa como mi hermano, mamá y papá, como así también mis primos, primas, tíos, tías, y demás. La familia no se elige, pero si así fuera volvería a elegir a esta sin dudar.

Me gustaría agradecer a la UBA, pero las Instituciones no leen ni entienden; sí pueden, en cambio, las personas que la conforman y hacen que día a día esta casa de estudios tenga el prestigio que tiene, que sea reconocida a nivel mundial, que sea lo que es. Agradecer a la UBA por su excelencia, por ser gratuita y de calidad, pública y accesible para todo el mundo, es agradecer a las personas que hace de ella lo que es. Sus docentes, que en todas las materias que atravesé demostraron su excelencia, compromiso y pasión. A las y los jurados, por tomarse el tiempo y dedicación de leer esta tesis. A la gente que día a día mantiene en funcionamiento todo el lugar de trabajo para que se pueda hacer ciencia. En especial Mariano, ese héroe sin capa (y muchas veces sin reconocimiento) que es quien mantiene a flote el barco rumbo al final del doctorado, ese número 8 que empuja hacia adelante el scrum. Gracias, también, a CONICET por financiar mi beca para realizar el doctorado. Sin dudas fue un honor haber sido financiado por esta institución tan prestigiosa a nivel mundial, muchas veces sin su merecido reconocimiento.

Nombrar a cada amistad, tanto dentro de la facultad como por fuera de ella, sería egoísta ya que no podría nombrar a todos sin dejar a alguien afuera. Pero sin dudas, esas amistades que están físicamente todos los días valen la pena nombrarlas: aquellas personas que día a día da placer cruzar por la facultad e intercambiar, aunque sea, unos mates o 5 minutos de charla de vida, como Chris y Sebi; a la *mesa chica* de Cosmo que gracias a ellos puedo decir que me siento parte de un grupo fenomenal, Tomy, Mati y Nahue. La gente que fue formando parte de la oficina como así también la gente que día a día viene a visitarla, como Rami, Maru, Gastón, Nico M., Ale, Martín, Tomi N., haciendo que sea más que un lugar de trabajo, un lugar donde poder hablar y ser escuchado, un lugar cálido, un refugio, etc. A esas amistades de toda la vida, Tomi, Tade, Marto, a aquellas que fueron surgiendo con el tiempo como Andy, Marian, Lara, Juli, Pablo, Vale, Santi, Alex, a la gente de taekwondo que es prácticamente mi segunda familia, Nico, Diego, Guilla, Gon, Javi, junto con Lean y Karen, a todas estas amistades que son el cable a tierra necesario para mantener la sanidad mental. A esas amistades que, por tiempo y/o distancia, ya no hay encuentros seguidos pero siempre están en el corazón: Mari, Nachito, Palo, Juan, Jime, Hernán, Agus, Nico S, Mauro, Luli, Lufa, Patri, Santi.

Quiero agradecer a Fede también, por ser parte importante en el proceso de aprendizaje hacia lo que es una colaboración científica, explicando no solamente física sino también lo que es colaborar.

Por último quisiera agradecer a la artífice que hizo posible que yo esté escribiendo esta tesis y que permitió que desarrolle una carrera doctoral. Siendo la guía exacta para enfrentar los problemas científicos que me interesaban, brindándome las herramientas necesarias pero sobre todo mostrando cómo hacer ciencia siempre desde el lado amoroso y cariñoso de la vida, con la paciencia y pasión característica. Por todo esto y mucho más, gracias Diana.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
Introducción	7
1. Teorías alternativas de gravedad: gravedad masiva y teorías de bigravedad	11
1.1. Perturbaciones cuadráticas en la acción de Einstein-Hilbert	12
1.1.1. Gravedad linealizada	12
1.1.2. Acción a orden cuadrático	14
1.2. Gravedad Masiva	15
1.2.1. Teoría de Fierz-Pauli: resultados, avances y problemas	16
Discontinuidad vDVZ	17
Mecanismo de Vainshtein y fantasma de Boulware-Deser	18
1.2.2. Acción de dRGT y gravedad masiva	22
Gravedad masiva <i>alla</i> Hassan & Rosen	26
1.3. Bigravedad	34
2. Materia oscura ultraliviana de spin-2	39
2.1. Introducción	39
2.2. Materia oscura ultraliviana	42
Características principales	43
2.3. Spin-2	46
2.3.1. Ecuación de movimiento y consecuencias fenomenológicas	49
Descomposición angular de un campo de spin-2	51

3. Púlsares binarios	55
3.1. Púlsares binarios y ULDM	56
Interacción ULDM - Sistema binario	59
3.2. Efectos seculares	60
Ec. Planetarias de Lagrange	61
3.3. Fenomenología y resultados	67
3.3.1. Período orbital	67
Contribución escalar ε_S	68
Contribución tensorial ε_T	68
3.3.2. Otros parámetros orbitales: órbitas cuasi-circulares	72
3.4. Conclusiones	74
4. Pulsar timing array	77
4.1. Señal y residuo temporal	78
4.1.1. Sistema Tierra-púlsar y efecto del campo de ULDM de spin-2	79
4.1.2. Tiempo residual	82
Contribución dominante: término terrestre	83
Contribuciones subdominantes	85
4.2. Cotas y resultados	88
4.2.1. Correlación	91
Curva de Hellings-Downs	91
Curva de correlación ULDM de spin-2	95
4.2.2. Estimación de los términos subdominantes	96
4.3. Conclusiones	98
5. Ondas gravitacionales	101
5.1. Señal en los detectores de ondas gravitacionales	102
5.1.1. Método semi-coherente	107
5.2. Resultados	109
5.3. Conclusiones	110
Conclusiones generales	113
A. Apéndice del capítulo 3	117
A.1. Descomposición de Fourier	117
A.2. Datos de púlsares binarios	122

B. Apéndice del capítulo 5	125
B.1. Sensitividad optimizada	125

Bitácora

Abreviaturas: *Salvo que se especifique lo contrario, vendrán dadas por sus siglas en inglés.*

BH Agujero negro

BP Púlsar binario

BT Teoría de bigravedad

DM Materia oscura

dRGT de Rham, Gabadadze, Tolley

EMT Tensor energía-momento

EOM Ecuación de movimiento

GR Relatividad general

GW Onda gravitacional

NS Estrella de neutrones

PTA Pulsar Timing Array

ULDM Materia oscura ultraliviana

*Una letra "s" luego de la abreviatura denota plural. Por ejemplo **BPs** será "púlsares binarios".*

Unidades y convenciones:

La convención de la signatura de la métrica será negativa $(+, -, -, -)$, a excepción de cuando se trate de un contexto cosmológico en cuyo caso se utilizará la signatura $(-, +, +, +)$. A su vez se denotan componentes espacio-temporales mediante índices con letras griegas (μ, ν, \dots) , mientras que las componentes espaciales estarán indicadas con índices latinos (i, j, \dots) .

A lo largo de la tesis se trabajará con unidades tales que $c = k_B = \hbar = 1$, hasta el momento de incorporarlas pertinentemente para utilizar los datos.

Valores útiles a mano:

- $M_P \equiv \sqrt{\hbar c / 8\pi G} \approx 2.4 \times 10^{27} \text{eV}$, masa de Planck reducida.
- $\rho_{\text{DM}} = 0.3 \text{ GeV/cm}^3$, densidad de energía de materia oscura en el halo del sistema solar (valor extraído de (Evans et al., 2019; McKee et al., 2015; Piffi et al., 2014)).

Introducción

Desde comienzos de la humanidad las personas han mirado el cielo en búsqueda de respuestas, explicaciones, motivaciones, etc. Pasando por obras de arte como *La noche estrellada* de Van Gogh o por (hoy en día) monumentos históricos como las pirámides de Egipto que trataban de *acercarse al cielo* para la resurrección y deificación de sus faraones, sin dudas la humanidad ha mirado con diversos intereses y/o sentimientos la bóveda celeste. Pasando por fines artísticos y espirituales como los comentados anteriormente, así como también con fines científicos como por ejemplo entender por qué hay un *día* y *noche*, a lo largo de la humanidad las civilizaciones han mirado con distintos ojos el cielo diurno y nocturno. Las primeras civilizaciones en utilizar las observaciones del cielo para con fines científicos fueron los mayas y los egipcios, miles de años a.C., con el fin y la necesidad de tener una noción de las épocas de siembra y cosecha. A partir de esto es que se realizan e inventan los primeros calendarios, los cuales precisaban - en esencia - las distintas estaciones del año. Con el correr del tiempo y el avanzar de las civilizaciones, las observaciones sobre el cielo fueron cobrando cada vez más interés y relevancia, como así también se fueron desarrollando nuevas tecnologías y metodologías para mejorar dichas observaciones.

Paradójicamente, quizás, con el avance de los años las tecnologías permitieron mirar cada vez más *profundo* en el cielo; pasando por Galileo y Kepler hasta llegar a Penzias y Wilson, hoy en día el entendimiento que se tiene sobre el cosmos es extremadamente amplio, desde el movimiento astronómico de los cuerpos celestes hasta la propagación de la luz primordial del Universo temprano. No obstante, a pesar del inmenso avance tecnológico y su entendimiento, aún hay numerosas inquietudes que permanecen abiertas: ¿estamos *solos* en el Universo? ¿Hay otros Universos? ¿De qué está *hecho* el mismo?, etc. Hay un sin fin de teorías y propuestas que tratan de explicar estas inquietudes y muchas más, muchas veces hasta contradiciéndose entre ellas. Más valiéndose del método científico, hoy en día se ponen a prueba estos modelos y se trata de estudiar su viabilidad frente a las observaciones.

En la actualidad se encuentran disponibles números gigantes de observaciones del Universo, pasando

por escalas astrofísicas hasta cosmológicas. Valiéndose de varias de estas observaciones (Bertone and Hooper, 2018), el modelo cosmológico que mejor reproduce las observaciones en la actualidad es el denominado modelo de Λ CDM. Este modelo asume que una parte apreciable del contenido de materia del Universo viene dado por componentes *oscuras*, llamadas *materia oscura fría* (CDM por sus siglas en inglés). Esta componente se asocia típicamente a otro tipo de partículas alternativas más allá de las propuestas por el Modelo Standard de partículas, y consiste en partículas que se mueven muy lentamente (de ahí el término *frío*) y que interactúan muy débilmente con el baño térmico.

Aunque la existencia y la presencia de materia oscura (DM) al día de hoy es casi indisputable, varias de sus propiedades más básicas y fundamentales tal como lo son - por ejemplo - su masa, su spin y su interacción con las partículas conocidas del Modelo Standard, aún permanecen desconocidas¹. Esto se debe, principalmente, al hecho de que toda evidencia directa de DM se da de forma puramente gravitacional; intentos de detectarla mediante el uso de otro tipo de fuerza fundamental ha otorgado resultados nulos, por lo tanto los mismos han derivado en poner cotas a su fuerza de interacción. En particular, la masa de la DM es un parámetro libre que barre un rango de posibles valores que van desde $m \sim 10^{-23}$ eV hasta valores $m \sim M_{\odot} \sim 10^{66}$ eV y más también. Es decir, es tal la incerteza que se tiene sobre su masa que hay casi 90 órdenes de magnitud entre los posibles valores de la misma.

Dentro de lo que comprende todo este rango mencionado, cabe remarcar, no todos los modelos plantean que el comportamiento y la descripción de la DM vienen dados en términos de la ya mencionada CDM. En particular, en el último tiempo ha empezado a ganar especial interés el modelo conocido como materia oscura *ultraliviana* (ULDM), que comprende el rango más bajo posible de 10^{-23} eV $\lesssim m \lesssim \mathcal{O}(1)$ eV. El interés más atractivo en este tipo de modelos se debe a sus propiedades en escalas chicas, el cual es notoriamente diferente de otros tipos de modelos con masas más pesadas, tal como lo es el de CDM (Hui et al., 2021, 2017; Niemeyer, 2020). En este escenario alternativo, la ULDM viene descrita por un campo clásico, y varios observables han sido ya identificados en la literatura los cuales permiten explorar diferentes rangos de masas de ULDM así como también varias de sus propiedades (Armengaud et al., 2017; Bar et al., 2018; Baryakhtar et al., 2017; Baumann et al., 2019; Bullock and Boylan-Kolchin, 2017; Irsic et al., 2017; Marsh and Niemeyer, 2019; Nebrin et al., 2019; Robles et al., 2019; Safarzadeh and Spergel, 2019; Wasserman et al., 2019; Zhang et al., 2018).

Esta tesis tiene como objetivo explorar uno de estos modelos de ULDM, particularmente en el rango de masas que van desde 10^{-23} eV hasta valores de $m \sim 10^{-10}$ eV. Específicamente, se hará un estudio profundo de un modelo de ULDM de spin-2 que comprenderá el rango de masas comentado anteriormente. Los resultados presentados en esta tesis son producto de los trabajos (Armaleo et al., 2020a,b, 2021) desarrollados durante el doctorado. Dichos trabajos, y esta tesis en particular, asumen

¹Ver (Bertone and Tait, 2018) y las referencias allí para una discusión más detallada al respecto.

que la formulación correcta para estudiar estos tipos de campos de spin-2 masivos en teorías de gravedad vienen de la mano de las llamadas *Teorías de Gravedad Masivas* (de Rham et al., 2011). En particular, el modelo de ULDM de spin-2 que se estudia aquí se puede comprender a partir de una teoría de Gravedad Masiva particular, denominada *Teoría de Bigravedad* (Hassan and Rosen, 2012a). Por completitud y coherencia, previo a presentar los resultados obtenidos en esta tesis, primero se introducirán estos tipos de teorías para luego estudiar en detalle el modelo de ULDM spin-2 en cuestión. La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se hace una breve introducción *teórica* a los modelos de Gravedad Masiva, haciendo un recorrido sobre los hitos históricos que fueron marcando el rumbo para estudiar y entender dichas teorías. El objetivo final de este capítulo es presentar el modelo de bigravedad utilizado en esta tesis como punto de partida para el análisis del campo de ULDM de spin-2. Varias de las cuentas exhibidas allí se muestran simplemente como resultados, dejando los detalles de las mismas en las referencias pertinentes. El capítulo parte del primer intento de formular una teoría de Gravedad Masiva en Relatividad General, llevada a cabo por Markus Fierz y Wolfgang Pauli allá por los años 30's cuando intentaron estudiar la masa del gravitón, pasando por las diversas problemáticas que atravesó la teoría y sus (posibles) explicaciones, hasta llegar al día de hoy a la teoría bien formulada de Gravedad Masiva.

El Capítulo 2 tiene como objetivo presentar los modelos de ULDM de manera general, haciendo posterior énfasis en el modelo de ULDM de spin-2 que se estudia aquí. Se trata de presentar tanto su formulación teórica como así también sus aspectos fenomenológicos, comentando sobre su comportamiento y las cotas existentes a dicho modelo. En este capítulo se exhibe la ecuación de movimiento correspondiente al campo en cuestión, y se comenta sobre algunos aspectos de su comportamiento en escalas temporales y espaciales. A partir de este capítulo, y en los tres siguientes, se hace uso de lo mostrado aquí para poner cotas al modelo bajo estudio de esta tesis.

En el Capítulo 3 se utilizan sistemas de púlsares binarios para poner cotas al modelo. Se comienza mostrando cómo es la interacción entre dichos sistemas y el campo de ULDM de spin-2, y cómo este último afecta las órbitas de las binarias. Mediante el estudio detallado de las mediciones de los parámetros orbitales, se pueden poner cotas a ciertos parámetros del modelo tal como son su masa y su parámetro de acoplamiento.

El Capítulo 4 posee el mismo espíritu que el anterior: utilizar púlsares para poner cotas al modelo. Pero, a diferencia del capítulo anterior, en este capítulo se hace uso no de sistemas de púlsares individuales sino de arreglos de púlsares como un conjunto. El estudio del tiempo de llegada de los pulsos de estos arreglos de púlsares es lo que se conoce como *Pulsar Timing Array* o, *PTA* por sus siglas en inglés. El estudio de arreglos de púlsares permite, a su vez, estudiar señales correlacionadas entre ellos. En este capítulo se muestran nuevas cotas obtenidas mediante el uso de los datos del tiempo de llegada

de *PTA*, como así también se discute sobre cómo es la función de correlación que se espera observar mediante un estudio de las señales. Para el caso en el que se estudia la correlación de la señal producto del paso de una onda gravitacional (*GW*), la curva que se obtiene es la conocida como *Hellings-Downs* en honor a sus autores.

El último capítulo de esta tesis, el Capítulo 5, hace uso de los detectores de GW para poner nuevas cotas al modelo. El uso de los detectores de GW viene por el hecho de que la señal que podría generar el campo de spin-2 ULDM es similar a la señal que generan ciertos tipos de fuentes de GW, conocidas como *GW continuas* ya que no se deben a eventos abruptos y breves tal como la colisión de agujeros negros, sino que este tipo de señal (*continua*) es mucho más débil pero perdura más en el tiempo. Se comienza, entonces, discutiendo sobre cómo es la señal que se espera que genere la ULDM de spin-2, y cómo (posteriormente) se pueden utilizar los detectores actuales y futuros para poner cotas al modelo o, incluso, poder detectar este tipo de DM.

Capítulo 1

Teorías alternativas de gravedad: gravedad masiva y teorías de bigravedad

Desde el surgimiento de la Relatividad General (GR) de Einstein en 1915, a lo largo de los años diversas y diversos autores han tratado de elucubrar si el gravitón posee masa o no, y de tener masa cuánto sería su valor. Durante las últimas décadas, mediante observaciones se han podido poner cotas a la masa que podría tener, resultando esta extremadamente pequeña (por ejemplo a partir de las primeras detecciones de ondas gravitacionales, GW150914 y GW151226, se ha inferido una cota de $m < \mathcal{O}(10^{-22})$ eV (Yunes et al., 2016) siendo m la masa del graviton). Sin embargo, tratar de formular una teoría masiva de GR no es una tarea sencilla desde el punto de vista técnico: agregar un término de masa para el gravitón trae problemas a la - exitosa y bien formulada - Teoría de la Relatividad General de Einstein ya que, entre otras patologías, se pierde la invariancia ante difeomorfismos y aparecen fantasmas en la teoría. Luego de casi 70 años desde el primer intento de Fierz y Pauli (Fierz and Pauli, 1939) por tratar de describir una teoría linealizada de gravedad masiva (MG por sus siglas en inglés), no fue sino hasta comienzos de la segunda década del siglo XXI cuando finalmente de Rham, Gabadadze y Tolley pudieron formular una teoría que sea libre de fantasmas y bien comportada, hasta orden cuártico en las perturbaciones, mediante la introducción de un término de potencial no trivial en la acción gravitatoria, hoy en día conocido como el potencial de dRGT por las siglas de dichos autores (de Rham et al., 2011).

A pesar del éxito del modelo de dRGT, la misma posee un problema: la teoría es no dinámica (en el sentido que no admite soluciones con un Universo en expansión), lo cual es algo no deseable en un contexto cosmológico. Un año después de la formulación exitosa de dRGT, Hassan y Rosen obtuvieron

una teoría de gravedad masiva que sí posee dinámica (Hassan and Rosen, 2012a). A diferencia de la teoría de dRGT que posee una métrica dinámica y una métrica (estática) de referencia, en la formulación de Hassan y Rosen ahora ambas métricas poseen dinámica, de ahí el nombre de estas teorías conocidas como **bigravedad**. En este capítulo se tratará de abordar una descripción de los problemas y soluciones que fueron surgiendo a la hora de formular una teoría de gravedad masiva, llegando finalmente a la teoría de bigravedad. No es objetivo de este capítulo - ni de esta tesis - hacer un repaso exhaustivo de los trabajos previamente citados, sino que el rumbo a seguir en este capítulo es presentar y hacer énfasis en los principales resultados que dan pie para establecer una teoría de spin-2 masiva en GR. No se tratará de demostrar sino más bien de mostrar y motivar cómo arribar a diversos resultados. Por tal motivo se dejarán de lado varias cuentas y resultados (los cuales se recomienda al/la lector/a ver las citas aquí presentadas para más detalles) tratando de no perder el rumbo y mantener la discusión lo más centrada posible. El objetivo final de este capítulo será exhibir la acción de un campo de spin-2 propagándose en un fondo curvo.

1.1. Perturbaciones cuadráticas en la acción de Einstein-Hilbert

En esta sección se repasarán los conceptos, definiciones y nociones básicas sobre GR que se usarán a lo largo de la tesis, teniendo en mente que el objetivo final de esta sección es presentar el Lagrangiano de GR linealizado a orden cuadrático, que es el punto de partida de la siguiente sección pero, más importante aún, es el punto de partida para estudiar y entender los modelos de gravedad masiva.

1.1.1. Gravedad linealizada

La Teoría de la Relatividad General - formulada por Einstein en 1915 - es sin duda la teoría más exitosa a la hora de estudiar diversos aspectos y fenómenos del universo. Según la misma, el espacio y el tiempo conforman un único ente descrito matemáticamente por una variedad Lorentziana de dimensión 4, y su curvatura está determinada por la distribución de energía y de materia del universo, relacionadas entre sí mediante las ecuaciones de Einstein. La acción que describe la curvatura del espacio-tiempo 4-dimensional viene dada por la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1.1)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ (con signatura $(-, +, +, +)$) y $k = 1/M_P^2$ es la constante gravitacional de Einstein con M_P la masa de Planck reducida¹. A su vez, si se tienen en

¹Incorporando las unidades correspondientes y en términos de k , se puede escribir análogamente $M_P = \sqrt{\hbar/kc^3}$ donde $k = 8\pi G/c^4$.

cuenta también los posibles campos de materia presentes en la teoría, la acción en este caso se escribirá según

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \quad (1.2)$$

con \mathcal{L}_m el Lagrangiano que da cuenta del contenido de materia de la teoría, a partir del cual utilizando el principio de mínima acción se obtienen las ecuaciones de Einstein con fuente dada por $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu}$ donde

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

con $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento.

Al año siguiente en que Einstein presentara su Teoría de la Relatividad General, Karl Schwarzschild exhibe la primer solución exacta no trivial a las ecuaciones de Einstein. Dicha solución fue hallada asumiendo una alta simetría en las ecuaciones y suponiendo que se encontraba en vacío; es decir, $G_{\mu\nu} = 0$ y con una simetría esférica y, además, estática. Dicha solución es la solución de vacío exacta más sencilla de hallar. Con el correr de los años se fueron encontrando nuevas soluciones a las ecuaciones de Einstein, tales como las soluciones de Kerr, de Reissner-Nordström, y de Kerr-Newman, que describen respectivamente un agujero negro rotante, un agujero negro con carga, y un agujero negro rotante y cargado. A pesar que dichas soluciones son exactas, todas estas asumen ciertas simetrías en el problema y se asumen sin fuentes. Sin embargo, y en contraparte, soluciones (sencillas) asumiendo cierto tipo de fuente pero sin asumir necesariamente algún tipo de simetrías esferoidal y/o estaticidad se pueden hallar de manera perturbativa. Esto es lo que se conoce como *gravedad linealizada*: la solución exacta más trivial que se puede hallar a las ecuaciones de Einstein es aquella donde la métrica describe un espacio plano de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, en cuyo caso los términos de curvatura son todos nulos. Suponiendo que ahora el espacio-tiempo está *levemente* curvado (o, dicho de otra manera, se estudian pequeñas perturbaciones del espacio plano), la idea es ver qué sucede a primer orden no trivial, en donde en tal caso se estudia la teoría a orden *lineal* en la perturbación; de ahí el nombre de gravedad *linealizada*. Para eso se propone que ahora la métrica venga dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ una pequeña perturbación de la métrica, por ende la teoría linealizada será aquella que respete el orden lineal en $h_{\mu\nu}$ en las ecuaciones de movimiento. Por tal motivo, para obtener orden lineal en las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Einstein) se debe escribir la acción a orden cuadrático. Por consistencia y completitud se escribe a continuación, también, la expansión en perturbaciones de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ acorde a

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

donde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$ (es decir que los índices suben y bajan con la métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ de manera de preservar el orden - lineal - en $h_{\mu\nu}$). Cabe notar que las definiciones (1.3) y (1.4) preservan la invertibilidad de la métrica *vía* la delta de Kronecker: $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$ (a orden lineal).

1.1.2. Acción a orden cuadrático

Partiendo de la acción de Einstein-Hilbert (1.1), es relevante notar que se deben expandir tanto el término de curvatura R como el determinante de la métrica $\sqrt{-g}$. Para encontrar el primero de ellos, cabe notar que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})R_{\mu\nu}$, por lo tanto hay que escribir al tensor de Ricci en términos de la métrica de fondo $\eta_{\mu\nu}$ y de la perturbación $h_{\mu\nu}$ hasta orden cuadrático en el mismo, ya que se busca que la acción resulte de orden dos. El procedimiento para hallar dicha expresión es un poco tediosa pero sin embargo canónica: teniendo en cuenta que $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu}$, se escribe al tensor de Riemann en términos de los símbolos de Christoffel, y a este último se lo expande según (1.3) y (1.4). Teniendo dicha expresión, se reemplaza la misma en el tensor de Riemann para luego hallar, así, el tensor de Ricci. Posteriormente se obtiene, entonces, el escalar de curvatura R . Los detalles de las cuentas se pueden consultar en mejor medida en (Maggiore, 2007), aquí se mostrarán los resultados relevantes. Llamando $R_{\mu\nu}^{(1)}$ y $R_{\mu\nu}^{(2)}$ a los tensores de Ricci a orden lineal y cuadráticos en las perturbaciones respectivamente, los mismos resultan

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} [\partial^\alpha \partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h] , \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

con $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Debe notarse que para mantener el orden cuadrático en la perturbación, $R_{\mu\nu}^{(1)}$ se podrá contraer tanto con $\eta^{\mu\nu}$ como con $h^{\mu\nu}$ pero para $R_{\mu\nu}^{(2)}$ solamente será relevante la contracción con $\eta^{\mu\nu}$. Lo que resta para obtener la expresión de la acción a orden cuadrático es la expansión de $\sqrt{-g}$. Para eso basta con tener en cuenta la identidad $\det(\mathbf{1} + H) = 1 + \text{Tr } H + \mathcal{O}(H^2)$ para cualquier matriz H no degenerada. De esta forma, $\sqrt{-g} \simeq 1 + h/2$ con $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ y por ende la acción cuadrática resulta

$$S_{GR}^{(2)} = -\frac{1}{4} \int d^4x \mathcal{L}_{GR}^{(2)} \quad (1.7)$$

con

$$\mathcal{L}_{GR}^{(2)} := \frac{1}{2k} h_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \quad (1.8)$$

siendo la densidad Lagrangiana cuadrática en perturbaciones de la métrica² y donde se define $\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\rho\sigma} := \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma \square - \eta^{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \square + \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma} \partial^\mu \partial^\nu - \delta^\mu_\sigma \partial^\nu \partial_\rho - \delta^\mu_\rho \partial^\nu \partial_\sigma$ conocido como el *operador de Einstein* o asimismo como el *tensor u operador de Lichnerowicz*.

1.2. Gravedad Masiva

A la hora de hablar de Gravedad Masiva sin dudas vale la pena considerar la línea histórica en la que fueron sucediendo los avances (y trabas) sobre la misma. Los primeros intentos por estudiar una teoría de gravedad masiva vinieron de la mano de Fierz y Pauli (Fierz and Pauli, 1939) a finales de la década del '30. Allí los autores estudiaron la adición de un término de masa a la acción de GR, $S_{GR}^{(2)}$, a orden lineal en las perturbaciones $h_{\mu\nu}$. A pesar del éxito de la misma, esta teoría poseía un problema que tardó 30 años en ser notado: si $m \rightarrow 0$ (con m siendo la masa del gravitón) la teoría no recupera los mismos resultados que GR. Este problema, conocido como *discontinuidad vDVZ* debido a los autores (van Dam and Veltman, 1970; Zakharov, 1970), puede ser curado mediante la adición de términos no-lineales en la acción, dando lugar a lo que hoy en día se conoce como *apantallamiento de Vainshtein* (o *Vainshtein screening*) (Vainshtein, 1972). Sin embargo, la adición de dichos términos no-lineales generan un *fantasma*, conocido como el *fantasma de Boulware-Deser* (BD) (Boulware and Deser, 1972), que emerge como un grado de libertad (*g.l.*) extra en la teoría. Es decir, en vez de propagar 5 g.l. (helicidades) como debería tener una teoría de spin-2 masiva, propaga 6. Este problema fue dejado de lado, sea por incapacidad o por desinterés, durante casi 40 años hasta que finalmente Claudia de Rham, Gregory Gabadadze y Andrew Tolley lograron formular consistentemente una teoría de gravedad masiva a orden no-lineal que posea el conteo correcto de grados de libertad y que recupere los resultados de GR en el límite en que la masa tiende a cero (de Rham and Gabadadze, 2010; de Rham et al., 2011).

El objetivo en esta sección será explayar y exhibir con más detalle y precisión lo comentado en el párrafo anterior, haciendo énfasis en los resultados principales que fueron dando lugar a los hitos hacia el camino de Gravedad Masiva como se la conoce hoy en día. No se tratará de reproducir las cuentas y resultados de los trabajos previos, sino más bien se tratará de entender cuáles son las ideas y aspectos principales de los trabajos que permitieron establecer una teoría de Gravedad Masiva bien formulada.

²El subíndice *GR* indica que es el Lagrangiano de Relatividad General usual, es decir el de Einstein-Hilbert, con la excepción que es cuadrático en $h_{\mu\nu}$.

1.2.1. Teoría de Fierz-Pauli: resultados, avances y problemas

Las Ec. de Einstein predicen la existencia de ondas gravitacionales (GW). 100 años después de la presentación de dicha teoría, su primera detección y confirmación vino de la mano de la colaboración LIGO/Virgo en 2015, observando la coalescencia de dos agujeros negros (Abbott et al., 2016a,b). Los resultados hallados son consistentes con un campo gravitatorio que viene descrito por un campo de spin-2 sin masa. Los resultados otorgan una cota a la posible masa del gravitón. A partir de las observaciones de dicha coalición, se estimó que si el gravitón posee masa, la misma no puede ser mayor que $\sim 10^{-22} \text{eV}/c^2$ (Yunes et al., 2016). De esta manera, los resultados otorgan una descripción en términos de una teoría de campos que se condice con una de un campo de spin-2 no masivo. Los grados de libertad que se propagan deben ser, entonces, consistentes con dicha teoría. Para un campo de spin-2 no masivo, los grados de libertad son 2: usualmente se los denomina como los modos h_+ y h_\times del campo gravitatorio. Cabe destacar que los grados de libertad³ que se espera que propague un campo de spin- j no masivo son dos: $\pm j$.

Sin embargo la situación cambia si se considera que el campo pueda poseer masa. El caso más didáctico y usual donde se observa esta característica es en un campo de Proca, el cual describe un campo de spin-1 masivo. El campo electromagnético (no masivo) posee 2 helicidades, pero si se considera que el campo posee masa se agrega una nueva helicidad dando como resultado los dos modos transversales y el modo longitudinal del campo de Proca. Esto se condice con el conteo correcto de los grados de libertad de un campo de spin-1 masivo, siendo este $2s + 1$ con $s = 1$ en este caso. De manera análoga, si se considera que el campo gravitatorio posee masa, entonces el número de grados de libertad que se espera que se propaguen serán $2 \cdot (2) + 1 = 5$. El Lagrangiano de Fierz-Pauli es precisamente aquel que describe adecuadamente el conteo correcto de números de grados de libertad. A continuación se verá cómo es la estructura de dicho Lagrangiano y cuáles son y fueron sus implicancias.

Sea $h_{\mu\nu}$ la perturbación de la métrica dada según (1.3); la acción de Fierz-Pauli será aquella que describa las perturbaciones lineales de la métrica alrededor de un fondo plano en vacío, con un término cinético dado por (1.8) y un término de masa dado por

$$\frac{m^2}{4}(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h_\mu^\mu h_\nu^\nu) \quad (1.9)$$

siendo m la masa del campo. Es evidente notar que las únicas combinaciones posibles que pueden dar un término de masa cuadrático en el campo son de la forma $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ y h^2 (siendo este último $h^2 = h_\mu^\mu h_\nu^\nu$). Menos evidente es que esta sea la *única* combinación posible que describe correctamente los 5 g.l. esperados. Este fue precisamente el hallazgo de Fierz y Pauli: la combinación $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - ah_\mu^\mu h_\nu^\nu$ con $a = 1$ es la única que da cuenta de los g.l. correctos que debería tener la teoría. Cualquier otra

³Aquí y en lo que sigue, el término grados de libertad refiere a las posibles helicidades del campo en cuestión.

combinación de parámetros (esto es, cualquier otro valor de a) generará un *fantasma*, siendo este un sexto g.l. (Hassan and Rosen, 2011; Hinterbichler, 2012; Maggiore, 2007).

La acción de Fierz-Pauli es entonces la acción correcta para describir gravitones masivos (a orden lineal) propagándose en un fondo plano, sin interacciones y libre de fantasmas (Van Nieuwenhuizen, 1973). En el límite en el que $m \rightarrow 0$ debería cumplirse que se recuperen los 2 g.l. esperados para una teoría de spin-2 no masiva. Esto, sin embargo, no sucede y es lo que se conoce como la *discontinuidad vDVZ* (van Dam and Veltman, 1970; Zakharov, 1970) que se presentará a continuación.

Discontinuidad vDVZ

Tal como se ha dicho anteriormente, una teoría de spin-2 masiva posee 5 g.l. que pueden ser descompuestos según un modo de helicidad-0 (conocido también como el modo *escalar*), los modos de helicidad- ± 1 (modos *vectoriales*) y los modos de helicidad- ± 2 (modos *tensoriales*). Si la teoría fuese no masiva, los únicos modos que deberían estar presentes son aquellos que den cuenta de los modos tensoriales, es decir los modos con helicidad- ± 2 . Sin embargo lo que termina sucediendo en el límite $m \rightarrow 0$ es que además de recuperar los modos de helicidad- ± 2 , aparece un nuevo modo que estará asociado al escalar, dando entonces un g.l. extra. Para tratar de entender mejor de dónde surge este problema, será de utilidad considerar que los gravitones se acoplan a cierta fuente $T_{\mu\nu}$ según $h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$. A partir de las ecuaciones de movimiento es posible ver que la traza de dichas ecuaciones otorga la siguiente relación (Lüben, 2021; Maggiore, 2007)

$$3m^2 h = -\frac{T}{M_{\text{P}}^2} \quad (1.10)$$

siendo h y T las trazas de $h_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ respectivamente. Se puede entender de manera sencilla cómo llegar a dicha expresión haciendo ciertas suposiciones que facilitarán su entendimiento⁴. Las ecuaciones de movimiento para la acción de Fierz-Pauli con interacciones vienen dadas por una expresión de la forma

$$(\partial^2 h)_{\mu\nu} = -\frac{T_{\mu\nu}}{M_{\text{P}}^2} + m^2(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h) \quad (1.11)$$

con $(\partial^2 h)_{\mu\nu}$ dando cuenta de los términos cinéticos en la ecuación de movimiento. Vale la pena notar que la única diferencia con los resultados de GR es la adición del término de masa. La suposición que facilitará el camino será decir que la fuente se conserva, $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, y que el campo $h_{\mu\nu}$ satisface $\partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h$ (esto equivale a decir que $0 = 0$ en (1.11)). Tomando traza a (1.11) y teniendo en

⁴Dichas suposiciones se harán por la simple razón de mantener el eje de la discusión lo más centrada y sencilla posible. Los mismos resultados, sin embargo, se pueden obtener sin hacer necesariamente ninguna suposición. Se recomienda la lectura de las citas mencionadas previas a la ecuación (1.10) para más detalle y generalidad.

cuenta las suposiciones previas, es fácil notar que se arriba exactamente a la misma expresión (1.10). A partir de esta última se puede ver de manera muy clara que si $m \rightarrow 0$ (y suponiendo un tensor de energía-momento con traza no nula, $T \neq 0$), entonces $h \rightarrow \infty$ a diferencia de GR en donde $h \rightarrow 0$. Esto pone en evidencia el problema de la teoría de Fierz-Pauli en el límite de masa nula. Sin embargo, certero es notar que no es tan evidente que esto se deba a un grado de libertad extra. Obtener que esto se debe efectivamente a un g.l. adicional excede el objetivo de esta tesis y se recomienda ahondar en los capítulos 2 tanto de (Maggiore, 2007) como de (Lüben, 2021), como así también los trabajos de (Van Nieuwenhuizen, 1973) y (Babichev and Deffayet, 2013) para más detalle. Sin embargo, sí es sencillo entender que, suponiendo que el problema se debe a un g.l. extra, dicho g.l. debe ser el escalar. Esto es así porque el modo escalar (aquel de helicidad-0) es el que se acopla a la traza del tensor energía-momento, además de los modos de helicidad- ± 2 . Como el problema en el límite $m \rightarrow 0$ viene de la mano de la traza de $T_{\mu\nu}$, es de esperar que se evidencien diferencias en la componente de helicidad-0 con respecto a los resultados de GR.

La discontinuidad vDVZ tardó casi 30 años en evidenciarse luego de la propuesta de Fierz y Pauli a finales de la década del '30. Empero, una solución a dicho problema fue dada a los pocos años a partir de la propuesta de Arkady Vainshtein (Vainshtein, 1972) la cual se explicará a continuación.

Mecanismo de Vainshtein y fantasma de Boulware-Deser

Al poco tiempo de la observación sobre la discontinuidad vDVZ, Vainshtein notó que se podían recuperar exitosamente los resultados de GR en el límite de masa nula mediante la adición de términos de autointeracción no-lineales en la acción (Vainshtein, 1972). Estos términos, precisamente, pueden llegar a ser comparables con los términos lineales de manera de compensar, así, el problema de la discontinuidad. Como consecuencia fenomenológica, el modo de helicidad-0 (aquel que ocasionaba la discontinuidad) se vería *apantallado* a escalas observacionales (Deffayet et al., 2002). Este mecanismo en el que la adición de términos de interacción no-lineales *curan* la discontinuidad mediante un apantallamiento del modo problemático se lo conoce como *mecanismo de Vainshtein* o simplemente como *apantallamiento de Vainshtein*. A continuación se motivará y mostrará cómo surge esta idea, siguiendo lo mostrado en (Deffayet et al., 2002; Vainshtein, 1972) de utilizar un ansatz que simplifique y exhiba este comportamiento.

Sea un ansatz para una geometría estática y esféricamente simétrica dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -e^{-\nu(\rho)} dt^2 + e^{\sigma(\rho)} d\rho^2 + e^{\mu(\rho)} \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.12)$$

Las funciones $\nu(\rho)$, $\sigma(\rho)$ y $\mu(\rho)$ en el caso de GR (es decir, $m = 0$), resultan en la conocida geometría de Schwarzschild,

$$ds^2 = -(1 - r_S/r) dt^2 + \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.13)$$

siendo r_S el radio de Schwarzschild. Es pertinente notar que para llegar a esta expresión se utilizó el cambio

$$r \equiv \rho e^{\mu/2}, \quad e^\lambda \equiv \left(1 + \frac{\rho}{2} \frac{d\mu}{d\rho}\right)^{-2} e^{\sigma - \mu} \quad (1.14)$$

Para el caso de GR, la función $\mu(\rho)$ es redundante debido a invariancia frente a reparametrizaciones, y por lo tanto puede ser setteada a cero sin pérdida de generalidad (Carroll, 2019). En resumen, en el caso de GR usual se tiene

$$\begin{aligned} \nu(r) = -\lambda(r) &= \log\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) = -\frac{r_S}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{r_S}{r}\right)^2 + \dots, \\ \mu(r) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

obteniendo así, por ejemplo, el resultado conocido para un agujero negro de Schwarzschild. Sin embargo la situación cambia si ahora se considera que el gravitón tiene masa. En este caso se puede demostrar que las funciones resultan ahora (Deffayet et al., 2002; Maggiore, 2007; Vainshtein, 1972)

$$\nu(r) = -\frac{r_S}{r} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_S}{m^4 r^5}\right) + \dots\right], \quad (1.16)$$

$$\lambda(r) = \frac{1}{2} \frac{r_S}{r} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_S}{m^4 r^5}\right) + \dots\right], \quad (1.17)$$

$$\mu(r) = \frac{1}{2} \frac{r_S}{m^2 r^3} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_S}{m^4 r^5}\right) + \dots\right] \quad (1.18)$$

De comparar estas expresiones con aquellas obtenidas para el caso no masivo surgen algunas cuestiones importantes a notar:

- A primer orden hay una discrepancia por un factor de $1/2$ entre lo obtenido en el caso no masivo al obtenido en el caso masivo. Esto se manifiesta en la función $\lambda(r)$, y es precisamente el origen de la discontinuidad vDVZ comentada previamente.
- Más notorio aún es el hecho de que las correcciones de orden superior divergen en el límite en que $m \rightarrow 0$ (manteniendo el radio fijo). Dichas correcciones vienen dadas en términos del ratio $r_S/(m^4 r^5)$, a partir del cual se define

$$r_V \equiv \left(\frac{r_S}{m^4}\right)^{1/5} \quad (1.19)$$

como el *radio de Vainshtein*.

Lo que muestra dicha expansión no es más que el rango de validez de la teoría lineal. Esto es, las correcciones a la teoría lineal vienen dadas en términos de $(r_V/r)^5$, por lo tanto la teoría lineal será válida siempre y cuando $r \gg r_V$. Para ejemplificar un caso donde la teoría lineal se rompe, basta con estudiar lo que sucede a nivel del sistema solar: considerando una longitud de onda Compton de $\lambda \sim 200$ kpc (esto correspondería a una masa $m = 1/\lambda \sim 10^{-29}$ eV), las correcciones a los efectos gravitacionales del Sol ($r_S \sim 3$ km) tendrán un radio de Vainshtein de aproximadamente $r_V \sim 40$ pc. La distancia Sol-Tierra es de $\mathcal{O}(10^{-6}$ pc), con lo cual r_V es aproximadamente 10^7 mayor que dicha distancia. Así, el cociente $r_V/r \gg 1$ y la teoría lineal no es válida; por ende, los efectos de modificar la gravedad mediante la consideración de un gravitón masivo no son apreciables⁵ para la teoría lineal en escalas del sistema solar.

En el caso en el que $r \ll r_V$, las funciones $\nu(r)$, $\lambda(r)$ y $\mu(r)$ (1.16)-(1.18) se modifican y es posible recuperar los resultados de GR reproduciendo adecuadamente la geometría de Schwarzschild⁶. Esto implica que, para $r \ll r_V$, no existe discontinuidad alguna. De esta manera se observa lo siguiente: mientras $r \ll r_V$ se recuperan exitosamente los resultados de GR y no se presenta ninguna discontinuidad. A medida que $r \rightarrow r_V$ para luego estar en el régimen en que $r \gg r_V$, la discontinuidad se hace presente. Para que la teoría sea bien comportada, sería necesario que no haya ninguna discontinuidad en ningún régimen. El problema recae, entonces, en cómo hacer para unir el límite $r \gg r_V$ con el límite $r \ll r_V$.

Podría ocurrir, sin embargo, que a la hora de resumir las ecuaciones (1.16)-(1.18) para todo orden perturbativo desaparezca la discontinuidad en el límite $m \rightarrow 0$, y de esta manera ambos regímenes coincidan para $r \sim r_V$ dejando así a la teoría bien comportada. Cabe destacar que el *matching* de soluciones para $r \sim r_V$ asume que las mismas resultan asintóticamente planas, tal como ocurre con la solución de Schwarzschild. Sin embargo, casi 30 años después de la propuesta de Vainshtein, se ha demostrado mediante soluciones numéricas que el matching de soluciones en el límite de $m \rightarrow 0$ no presenta *apantallamiento* (Damour et al., 2003). Más aún, desde el punto de vista teórico, Boulware y Deser demostraron al poco tiempo de la propuesta de Vainshtein que, incluso suponiendo un espacio asintóticamente no plano como es el caso de De Sitter (y como sería el caso Cosmológico), emerge un nuevo g.l. conocido como *fantasma de Boulware-Deser* (Boulware and Deser, 1972). Este fantasma surge a partir de la traza de h el cual obtiene dinámica dejando así 6 g.l. en vez de los 5 que debería tener una teoría masiva de spin-2. Esto se puede entender y ver mejor de la siguiente manera: sea la ecuación de movimiento dada por (1.11) pero generalizándola a espacios curvos (esto sería, cambiando

⁵Otra forma de ver esto, tal como se muestra en (Defayet et al., 2002), es decir que a distancias del orden del sistema solar, las correcciones de orden superior resultan 10^{32} veces mayor que los términos de primer orden, por lo tanto la expansión en términos de r_V/r no resulta adecuada.

⁶Para más detalles y la forma explícita de la expansión, consultar el final de la sección 2.3.2 de (Maggiore, 2007).

$\partial \rightarrow \nabla$) y considerando un término de masa de manera genérica, incluyendo términos no-lineales,

$$m^2 (ah_{\mu\nu} + b\eta_{\mu\nu}h + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2)) \quad (1.20)$$

El término de masa de Fierz-Pauli corresponde a $a = -b = 1$. Las Identidades de Bianchi junto con la conservación del tensor energía-momento otorgan el vínculo

$$m^2 \nabla^\mu (ah_{\mu\nu} + b\eta_{\mu\nu}h + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2)) = 0 \quad (1.21)$$

el cual permite eliminar 4 g.l. Para el caso de la acción lineal estudiada por Fierz y Pauli, la ecuación (1.10) es la que otorga el 5to vínculo (sumado a los 4 provenientes de las Identidades de Bianchi) que hace que la teoría lineal propague 5 g.l. Este vínculo surge única y exclusivamente a partir de la combinación de parámetros $a = -b = 1$ que genera la acción de Fierz-Pauli. Cualquier otra combinación de parámetros generará un g.l. extra proveniente de la dinámica de la traza h . En un fondo plano y en vacío, tal como es la acción de Fierz-Pauli, la ecuación (1.10) otorga el vínculo $h = 0$ el cual elimina el 6to g.l. proveniente de la dinámica de la traza. Sin embargo, cuando el fondo es curvo esta ecuación ya no elimina la dinámica de h y por ende el mismo resulta un fantasma. Asimismo, introduciendo solamente términos cuadráticos en la ecuación de movimiento, la ec. (1.10) se lee esquemáticamente (Babichev and Deffayet, 2013)

$$(\partial^2 h^2) + m^2 h \propto T/M_{\text{P}}^2 \quad (1.22)$$

la cual, salvo que $h = 0$, genera una dinámica para h . Esta fue la observación hecha por (Boulware and Deser, 1972), denotando a partir de allí a este grado de libertad como *fantasma de Boulware-Deser*. Más aún, mediante una descomposición ADM (Arnowitt et al., 2008), los autores (Boulware and Deser, 1972) mostraron también que la energía no está acotada por debajo para el caso en que el término de masa sea lineal (*i.e.* Fierz-Pauli, ec. (1.9)), y en el caso en que se consideren términos no-lineales entonces el espacio plano no es estable.

Pareciera ser entonces que la adición de términos no-lineales, a pesar de curar el problema de la discontinuidad, hace emerger un 6to grado de libertad dinámico que genera un fantasma en la teoría. La observación de (Boulware and Deser, 1972), a pesar de ser correcta, no era del todo general ya que consideraron solamente ciertos tipos de términos en el potencial (término de masa). En (Creminelli et al., 2005) estudiaron la generalidad de estos términos, introduciendo órdenes superiores en la acción de Fierz-Pauli. Aunque la conclusión hallada en ese trabajo no era del todo correcta⁷, fue uno de los

⁷Allí los autores concluían que la aparición de fantasmas emergía para cualquier término no-lineal que se agregara a la acción lineal. Como se discute en (de Rham and Gabadadze, 2010), la aparición de fantasmas con términos generales tal

trabajos fundamentales que permitió el avance - luego de casi 40 años desde la observación de Boulware y Deser - hacia una teoría de gravedad masiva bien comportada como mostraron en (de Rham and Gabadadze, 2010). En dicho trabajo se generaliza la acción de Fierz-Pauli exhibiendo por primera vez la acción de gravedad masiva libre de fantasmas, a orden quinto en no-linealidades, con el comportamiento correcto en el límite no masivo. En la sección que sigue se estudia en más detalle dicho trabajo como así también una serie de trabajos posteriores que permitieron un mejor entendimiento de la teoría masiva no-lineal.

1.2.2. Acción de dRGT y gravedad masiva

La idea novedosa mostrada en (de Rham and Gabadadze, 2010) fue escribir de una manera muy particular el término de masa en la acción de Fierz-Pauli, generalizando y analizando detalladamente lo hecho en (Creminelli et al., 2005) mediante la introducción de términos superiores no-lineales en la acción. Motivados por este último trabajo y lo hecho en (Arkani-Hamed et al., 2003), en (de Rham and Gabadadze, 2010) se exhibe la acción de gravedad masiva hasta orden quinto en no-linealidades, y en el límite de desacople de la teoría efectiva⁸ presentada y estudiada en detalle en (Arkani-Hamed et al., 2003; Creminelli et al., 2005). El éxito de la teoría de de Rham y Gabadadze reside en el hecho de que los términos (no-lineales) agregados a la acción compensan el mal comportamiento que genera los fantasmas e impide que se recupere GR en el límite de masa nula. A pesar del éxito de la misma, allí los autores demostraron que la teoría resultaba libre de fantasmas pero a quinto orden no-lineal (y en el límite de desacople, ver Ec. (1.28)). Sin embargo, e inmediatamente después de haber presentado la teoría, en (de Rham et al., 2011) se muestra la acción libre de fantasmas en el mismo límite, pero a todo orden no-lineal. Dicha teoría resume todos los términos no-lineales de una teoría efectiva de gravedad masiva. A su vez, los autores allí muestran que lejos del límite de desacople, la teoría permanece libre de fantasmas hasta orden cuatro en las no-linealidades. La acción se presentará a continuación y en lo que sigue se verá en más detalle cómo arribar a la misma, como así también las implicancias que tuvo. La acción en cuestión viene dada por

$$\mathcal{L}_{\text{dRGT}} = \frac{M_{\text{P}}^2}{2} \sqrt{-g} \left(R - \frac{m^2}{4} \mathcal{U}(g, H) \right) \quad (1.23)$$

con $\mathcal{U}(g, H)$ denotando el potencial (*i.e.* el término de masa) cuya expresión es

como estudiaron en (Creminelli et al., 2005) puede ser evitado, hasta orden cuártico en la acción, mediante una elección apropiada de coeficientes en el potencial.

⁸Una de las motivaciones y aplicaciones principales de obtener una teoría efectiva de gravedad viene por el hecho de construir una teoría UV completa de la misma.

$$\mathcal{U}(g, H) = -4 \left(\sum_{n \geq 1} d_n \langle H^n \rangle \right)^2 - 8 \sum_{n \geq 2} d_n \langle H^n \rangle \quad (1.24)$$

donde d_n denotan los coeficientes de los términos de potencial, y $\langle \dots \rangle$ es la traza con respecto a $g_{\mu\nu}$, es decir $\langle H \rangle = g^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$, $\langle H^2 \rangle = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} H_{\alpha\mu} H_{\beta\nu}$, etc. Aquí $H_{\mu\nu}$ representa la perturbación de la métrica. Expandiendo la expresión para el potencial hasta orden quinto, tal como exhiben en (de Rham et al., 2011), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(g, H) = & (\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2) - \frac{1}{2} (\langle H \rangle \langle H^2 \rangle - \langle H^3 \rangle) - \frac{1}{16} (\langle H^2 \rangle^2 + 4 \langle H \rangle \langle H^3 \rangle - 5 \langle H^4 \rangle) \\ & - \frac{1}{32} (2 \langle H^2 \rangle \langle H^3 \rangle + 5 \langle H \rangle \langle H^4 \rangle - 7 \langle H^5 \rangle) + \dots \end{aligned} \quad (1.25)$$

Es importante notar que esta expresión satisface, mediante una elección apropiada de los coeficientes, lo siguiente:

- A orden lineal se recupera la misma expresión que la acción de Fierz-Pauli (1.9) como es de desear.
- A orden quinto se recuperan los mismos resultados que en (de Rham and Gabadadze, 2010) en el límite de desacople, los cuales otorgaban una teoría de gravedad masiva libre de fantasmas hasta ese orden y en ese límite.

A continuación se ahondará y se dará más detalle a lo comentado anteriormente, tratando de entender la construcción como así también el comportamiento de dicho potencial.

Sea el tensor $H_{\mu\nu}$ definido según

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{h_{\mu\nu}}{M_{\text{P}}} = H_{\mu\nu} + \eta_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b \quad (1.26)$$

con $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y $H_{\mu\nu}$ resultando un tensor covariante siempre y cuando los cuatro campos de Stückelberg⁹ ϕ^a transformen como escalares. Más aún, ϕ^a puede ser expresado en términos de las coordenadas x^α y el modo de helicidad-0 del graviton, π , según $\phi^a = (x^\alpha - \eta^{\alpha\mu} \partial_\mu \pi) \delta_\alpha^a$. De esta manera se obtiene que

⁹El *truco de Stückelberg*, explicado en más detalle en el capítulo 4 de (Hinterbichler, 2012), consiste en introducir nuevos campos y simetrías de gauge en una teoría masiva - en este caso - de manera de a la hora de tomar el límite $m \rightarrow 0$ no hay g.l. extras ni perdidos. Es decir, la teoría no se ve alterada. Lo que hace dicho truco no es más que exhibir de manera evidente que la simetría de gauge no es otra cosa más que una redundancia. Eliminar dicha redundancia no siempre es tarea sencilla y, a veces, conveniente; mediante el truco de Stückelberg se puede agregar y/o eliminar simetrías de gauge de manera sencilla y manteniendo invariancia de Lorentz y localidad.

$$H_{\mu\nu} = \frac{h_{\mu\nu}}{M_P} + \partial_\mu \pi_\nu + \partial_\nu \pi_\mu - \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \pi^\alpha \partial_\nu \pi^\beta \quad (1.27)$$

donde $\pi_\mu \equiv \partial_\mu \pi$. Aquí, los índices de π_μ suben y bajan con respecto a Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. A continuación se mostrará la construcción del término cúbico del potencial siguiendo lo hecho en (de Rham and Gabadadze, 2010), estudiando los modos de helicidad 2 y 0. Los órdenes siguientes se pueden obtener de manera análoga, aunque se recomienda la lectura de dicho trabajo para más detalle. Para que sea más evidente la escala la cual la teoría efectiva es válida, será de utilidad hacer la sustitución $\pi_\alpha = \partial_\alpha \pi / \Lambda_3^3$ donde $\Lambda_n \equiv (m^{n-1} M_P)^{1/n}$ representa la escala en cuestión. El límite de desacople viene dado, pues, por hacer

$$m \rightarrow 0, \quad M_P \rightarrow \infty, \quad \Lambda_3 \text{ fijo} \quad (1.28)$$

Mediante esta sustitución, resulta

$$H_{\mu\nu} = \frac{h_{\mu\nu}}{M_P} + \frac{2}{M_P m^2} \Pi_{\mu\nu} - \frac{1}{M_P^2 m^4} \Pi_{\mu\nu}^2 \quad (1.29)$$

donde $\Pi_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \pi$ y $\Pi_{\mu\nu}^2 = \eta^{\alpha\beta} \Pi_{\mu\alpha} \Pi_{\beta\nu}$. De esta manera el Lagrangiano cúbico en el límite de desacople resulta¹⁰

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + h^{\mu\nu} X_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{1}{\Lambda_3^3} h^{\mu\nu} X_{\mu\nu}^{(2)} \\ & - \frac{1}{4\Lambda_5^5} ((8c_1 - 4)[\Pi^3] + (8c_2 + 4)[\Pi][\Pi^2] + 8c_3[\Pi^3]) \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde $[\dots]$ es la traza con respecto a la métrica de Minkowski, es decir $[\Pi] = \eta^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}$, $[\Pi^2] = \Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}$, etc. Acá $X_{\mu\nu}^{(1)} = [\Pi] \eta_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu}$ representa los términos lineales en Π (mientras que $X_{\mu\nu}^{(2)}$ es cuadrático en Π) y c_i son coeficientes a determinar. Tal como se ha dicho previamente, el límite de desacople de la teoría se realiza para que la misma sea bien comportada en una escala efectiva Λ_3 . Por tal motivo, el objetivo será deshacerse del último término en (1.30) el cual se encuentra suprimido por la escala Λ_5 (menor que Λ_3) de forma tal que solamente sobrevivan los términos suprimidos por la escala Λ_3 . Mediante la elección

$$c_1 = 2c_3 + \frac{1}{2}, \quad c_2 = -3c_3 - \frac{1}{2} \quad (1.31)$$

dicho término resulta

$$\mathcal{L} \supset c_3 ([\Pi]^3 - 3[\Pi][\Pi^2] + 2[\Pi^3]) \quad (1.32)$$

¹⁰Ver capítulo 3 de (de Rham and Gabadadze, 2010).

La cuestión acá es que este término resulta una derivada total y, por ende, puede ser dejado de lado en la ecuación de movimiento¹¹. El Lagrangiano resulta (a menos de un término con derivada total) entonces,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{E}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta} + h^{\mu\nu}X_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{1}{\Lambda_3}h^{\mu\nu}X_{\mu\nu}^{(2)} \quad (1.33)$$

con

$$X_{\mu\nu}^{(2)} = -(6c_3 - 1) \left\{ (\Pi_{\mu\nu}^2 - [\Pi]\Pi_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}([\Pi^2] - [\Pi]^2)\eta_{\mu\nu} \right\} \quad (1.34)$$

Cabe destacar que todos los términos de interacción de la forma $h^{\mu\nu}X_{\mu\nu}^{(n)}$:

- Son transversales.
- Satisfacen automáticamente las Id. Bianchi de manera de preservar invariancia frente a difeomorfismos.
- Contienen como mucho hasta derivadas temporales de 2do orden.

De manera análoga se puede estudiar el Lagrangiano cuártico. En este caso, la escala que debe ser relegada resulta Λ_4 , en cuyo caso nuevamente mediante una elección apropiada de coeficientes puede ser dejada de lado mediante una expresión que resulta una derivada total, de forma completamente similar a lo hecho para orden cúbico. De esta forma, mediante la elección de coeficientes que hagan que los términos con escalas $\Lambda < \Lambda_3$ sean eliminados mediante una expresión que resulta una derivada total, el Lagrangiano de interacción a orden quinto puede escribirse según

$$\mathcal{L}^{(int)} = h^{\mu\nu} \left(X_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{1}{\Lambda_3}X_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda_3^6}X_{\mu\nu}^{(3)} + \frac{1}{\Lambda_3^9}X_{\mu\nu}^{(4)} \right) \quad (1.35)$$

Dicha expresión tiene el comportamiento correcto en el límite de desacople hasta orden quinto. Es decir, generaliza la acción de Fierz-Pauli a términos de órdenes superiores, preservando la localidad e invariancia de Lorentz, como así también evitando la aparición de fantasmas. Sin embargo, es preciso notar dos cuestiones relevantes:

- * La no aparición de fantasmas a orden quinto en el límite de desacople no garantiza que no puedan aparecer a órdenes superiores. Para ver que efectivamente la teoría es estable, se debería estudiar la misma para todo orden no-lineal.

¹¹Cabe notar que los autores, a la hora de tomar el límite de desacople, consideran campos que decaen lo suficientemente rápido en el infinito espacial. Tomando como regulador infrarrojo de la teoría una esfera de radio $L \gg 1/m$, se toma $L \rightarrow \infty$ antes de realizar el límite de desacople.

- * A su vez, podría suceder que los fantasmas aparezcan lejos del límite de desacople. Sin embargo, cabe remarcar que incluso lejos de dicho límite la teoría preserva el vínculo Hamiltoniano hasta orden cúbico.

El primero de estos puntos fue estudiado en detalle en (de Rham *et al.*, 2011), en donde se construye de manera análoga a lo mostrado previamente la acción en el límite de desacople para todo orden no-lineal. Sin embargo, no fue sino gracias a los trabajos de S.F. Hassan y Rachel A. Rosen que se pudo tratar estas dos cuestiones de una manera más simple y evidente, dando así una teoría de gravedad masiva bien comportada para todo orden en el límite de desacople como así también fuera de dicho límite (Hassan and Rosen, 2012b,c). A continuación se detallará la idea de dichos autores, mostrando los principales resultados.

Gravedad masiva *alla* Hassan & Rosen

La idea principal presentada por los autores consistió en generalizar lo hecho por de Rham *et al.*, reescribiendo los términos de potencial de una manera más sencilla y más fácil de manipular, generalizando para una métrica genérica $f_{\mu\nu}$ y no necesariamente una plana $\eta_{\mu\nu}$. En (Hassan and Rosen, 2011) los autores construyen de manera sistemática la acción no-lineal de gravedad masiva, libre de fantasmas, mediante términos que consisten en determinantes en cuyo caso un estudio más dedicado sobre la estabilidad de la teoría resulta más claro y evidente. La idea a continuación será explicar con un poco más de detalle cómo son precisamente dichos términos, haciendo foco en la expresión final de la acción de Hassan & Rosen.

A la hora de construir un término de masa no-lineal en gravedad, el mismo debe satisfacer lo siguiente:

- (a) No puede contener derivadas de $g_{\mu\nu}$.
- (b) Debe ser invariante frente a transformaciones generales de coordenadas.

Si solamente se restringe su construcción a la métrica $g_{\mu\nu}$, el mismo no puede satisfacer lo anterior ya que las únicas dos cantidades que pueden ser construídas a partir de (solamente) $g_{\mu\nu}$ son $\det g$ y $\text{Tr}g = 4$, los cuales generan fantasmas tal como demostraron (Boulware and Deser, 1972). De esta manera, una de las posibilidades para construir dicho término resulta en la introducción de un tensor de rango-2 extra, $f_{\mu\nu}$, tal como se motivó en (Arkani-Hamed *et al.*, 2003; Boulware and Deser, 1972). Allí los autores (junto con, posteriormente, los trabajos de de Rham, Gabadadze y Tolley) usaron $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ por simplicidad y practicidad a la hora de realizar las cuentas. Sin embargo, aquí la idea será no hacer dicha suposición y dejarla de manera genérica. De esta forma surgen dos posibles formas

que pueden tener los términos: $F(g^{-1}f)$ y $F'(f^{-1}g)$. Aquí $g_{\mu\nu}$ es la métrica dinámica, mientras que $f_{\mu\nu}$ es el tensor de rango-2 (covariante) extra, el cual se lo denomina por tal motivo como *métrica auxiliar*. Es posible ver que la construcción de los términos de masa a partir de $F'(f^{-1}g)$ (es decir, a partir de $g_{\mu\nu}$) se pueden obtener, mediante una reescritura y redefinición, a partir de $F(g^{-1}f)$ ¹². De esta forma se construirá, entonces, el término de masa a partir de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ (es decir, a partir de $F(g^{-1}f)$). La acción tendrá la forma

$$S = -M_{\text{P}}^2 \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + M_{\text{P}}^2 m^2 \int d^4x \sqrt{-g} F(g^{-1}f) \quad (1.36)$$

y el objetivo será ver y entender la forma explícita que debe tener $F(g^{-1}f)$. De manera análoga a (1.26), se define el tensor covariante H_ν^μ según

$$g^{\mu\lambda} f_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu - H_\nu^\mu \quad (1.37)$$

donde, notando que $H_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda} H_\nu^\lambda = g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$, se recupera la misma expresión que en (1.26) pero de manera más general mediante la parametrización de la métrica auxiliar según

$$f_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \phi^a}{\partial x^\mu} \bar{f}_{ab}(\phi) \frac{\partial \phi^b}{\partial x^\nu} \quad (1.38)$$

Aquí \bar{f}_{ab} es una métrica auxiliar fija la cual debe ser elegida apropiadamente dada la física del problema. Para el caso en que $\bar{f}_{ab} = \eta_{ab}$ se recuperan los resultados de la sección anterior. Más aún, una de las primeras cosas que la función $F(g^{-1}f)$ debería cumplir es recuperar la misma expresión del término de masa de Fierz-Pauli. En este caso se generalizará dicho término de masa a lo que los autores denominaron como término de masa *covariante* de FP, dado por

$$\frac{m^2}{4} (H_\nu^\mu H_\mu^\nu - H_\mu^\mu H_\nu^\nu) \quad (1.39)$$

Dicho término se reduce al término de masa de FP original (1.9) a orden cuadrático en $h_{\mu\nu}$ y en el gauge unitario¹³. Dicha expresión, tal como se vio en las secciones anteriores, tiene la estructura correcta que debería tener un término de masa cuadrático en la acción de forma tal que no haya fantasmas en la teoría. Sin embargo, todavía resta el estudio de los términos de órdenes superiores. A continuación se ahondarán en dichos términos.

Los términos de órdenes superiores vendrán dados por

¹²Para más detalle consultar sección 2 de (Hassan and Rosen, 2011).

¹³El gauge unitario (o físico) corresponde a la elección $\phi^a(x) = x^a$. Notar que esta elección no es más que tomar $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \mathfrak{h}^{\mu\nu} \quad (1.40)$$

con¹⁴ $\mathfrak{h}^{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} [(-\eta^{-1}h)^n \eta^1]^{\mu\nu}$. Mediante la elección $\bar{f}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ para simplificar los cálculos (y recuperar los resultados de FP) y definiendo $\phi^\mu(x) = x^\mu + \pi^\mu(x)$, se obtiene que

$$H_\nu^\mu = -\partial^\mu \pi_\nu - \partial^\nu \pi_\mu - \partial^\mu \pi_\alpha \partial_\nu \pi^\alpha - \mathfrak{h}_\rho^\mu (\delta_\nu^\rho + \partial_\nu \pi^\rho + \partial^\rho \pi_\nu + \partial^\rho \pi_\alpha \partial_\nu \pi^\alpha) \quad (1.41)$$

Es evidente notar que esta expresión es la versión general de (1.27). Para la posteridad, será de extrema utilidad reescribir esta última expresión como así también la definición (1.37) de forma matricial. Se define, entonces, \mathbb{H} como la matriz cuyos elementos son H_ν^μ (esta definición es simplemente para no confundir con la notación $H = H_\mu^\mu$). Definiendo, al igual que antes, $\Pi_\nu^\mu = \partial^\mu \pi_\nu = \partial^\mu \partial_\nu \pi$ se obtiene

$$g^{-1}f \equiv (\mathbb{1} - \mathbb{H}) = (\mathbb{1} + \mathfrak{h}\eta)(\mathbb{1} + \Pi)^2 \quad (1.42)$$

Cabe remarcar que esta expresión es exacta para todo orden en \mathfrak{h} y π . Lo hecho en (de Rham and Gabadadze, 2010; de Rham et al., 2011) (explicado anteriormente) consistió en reescribir el Lagrangiano de una manera adecuada de forma tal que aparezcan derivadas totales en los términos correspondientes a $[\Pi]$. Mediante este nuevo enfoque de Hassan & Rosen, dichos términos aparecen naturalmente mediante la expansión de un término de la forma $\det(\mathbb{1} + \Pi)$. Más explícitamente,

$$\det(\mathbb{1} + \Pi) = \sum_{n=0}^4 \frac{-1}{n!(4-n)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n \lambda_{n+1} \dots \lambda_4} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_n \lambda_{n+1} \dots \lambda_4} \partial^{\mu_1} \partial_{\nu_1} \pi \dots \partial^{\mu_n} \partial_{\nu_n} \pi \quad (1.43)$$

De esta manera, y en vistas de (1.42), una posible expresión satisfactoria para $F(g^{-1}f)$ podría ser $F(g^{-1}f)|_{h=0} \sim \det(\mathbb{1} + \Pi)$ (otra manera de pensar esto sería decir que $F(x) \sim \sqrt{\det x}$). Sin embargo, para no estropear lo obtenido a orden lineal para recuperar FP covariante (1.39), es necesario deshacerse de los dos primeros términos de la sumatoria, es decir $1 + \partial^\mu \partial_\mu \pi$ correspondientes a $n = 0$ y 1 respectivamente. La manera sencilla de entender por qué estos términos no pueden estar presentes si se quiere recuperar FP es la siguiente: en (1.39) la acción resulta, por lo menos, cuadrática en π (evidente a partir de (1.41)). Para obtener, cuanto menos, dicho orden, es claro que los dos primeros términos no puedan estar presentes. De esta manera la expresión correcta para F será aquella que tenga en cuenta el determinante pero quitando los dos primeros términos de su expansión, es decir

$$F(g^{-1}f)|_{h=0} \sim \det(\mathbb{1} + \Pi) - \text{Tr}(\mathbb{1} + \Pi) + 3 \quad (1.44)$$

¹⁴Es fácil notar que esta definición, a orden lineal (es decir $n = 1$), no es más que la definición usual de la perturbación de la métrica preservando la ortonormalidad de la misma. Es decir, $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\rho} - h^{\nu\rho}) = \delta_\mu^\rho$.

Es importante notar que las expresiones halladas anteriormente fueron considerando $h = 0$. Para generalizar al caso más general, con $\mathfrak{h} \neq 0$, basta con hacer la sustitución $\mathbb{1} + \Pi \rightarrow \sqrt{g^{-1}f}$ mediante las relaciones $\det(\mathbb{1} + \Pi) = \sqrt{\det(g^{-1}f)}|_{h=0}$ junto con $\text{Tr}(\mathbb{1} + \Pi) = \text{Tr}\sqrt{g^{-1}f}|_{h=0}$. Esto otorga, entonces, una acción con términos no-lineales de la forma

$$m^2 \int d^4x \sqrt{-g} F = 2m^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sqrt{\det(g^{-1}f)} - \text{Tr}\sqrt{g^{-1}f} + 3 \right] \quad (1.45)$$

Para ver que efectivamente esta acción es la misma que aquella presentada en (de Rham and Gabadadze, 2010), se debe expandir la misma en potencias de \mathbb{H} de forma tal de, a orden más bajo, recuperar el término de masa de FP (covariante) (1.39), y a orden quinto lo hecho en (de Rham and Gabadadze, 2010) mostrado en la sección anterior mediante (1.23). Sin embargo, hay una manera más sencilla de evidenciar que esto es así sin la necesidad de expandir explícitamente la acción. Para eso lo que se hará será reescribir la acción (1.45) de una manera más general incluso, en términos de un *determinante deformado*. Cabe aclarar, sin embargo, que en (Hassan and Rosen, 2011) se detalla una discusión al respecto; se recomienda, para ahondar en más detalle y para ver explícitamente cómo es dicha expansión, ver la sección 3 de dicha cita.

La generalización viene de la mano del determinante *deformado*, definido según

$$\widehat{\det}\sqrt{g^{-1}f} = \widehat{\det}(\mathbb{1} + \mathbb{K}) = \sum_{n=0}^4 \frac{-\alpha_n}{n!(4-n)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n \lambda_{n+1} \dots \lambda_4} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_n \lambda_{n+1} \dots \lambda_4} \mathbb{K}_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \mathbb{K}_{\nu_n}^{\mu_n} \quad (1.46)$$

donde $\sqrt{g^{-1}f} = \mathbb{1} + \mathbb{K}$ y α_n son los parámetros de deformación del determinante (notar que para el caso $\alpha_n = 1$ se recupera la expresión usual para la expansión del determinante (1.43)). A su vez, dicho determinante puede ser reescrito en términos de los autovalores de la matriz, lo cual simplificará más aún la expresión y el manejo de cuentas de la acción. Para eso se definirá una matriz general \mathbb{X} de $N \times N$, cuyos autovalores son λ_i . El determinante se puede escribir entonces como

$$\det(\mathbb{1} + \mathbb{X}) = \prod_{i=1}^N (1 + \lambda_i) = \sum_{k=0}^N e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (1.47)$$

Aquí $e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ son los *polinomios simétricos elementales*. Esto es, cualquier polinomio simétrico puede ser expresado en términos de polinomios simétricos *elementales*, es decir, en polinomios de menor grado. Más específicamente, los mismos vienen dados según

$$\begin{aligned}
e_0(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= 1, \\
e_1(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \lambda_1 + \dots + \lambda_N, \\
e_2(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j, \\
&\vdots \\
e_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N = \det \mathbb{X}, \\
e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= 0 \quad \text{para } k > N
\end{aligned} \tag{1.48}$$

A su vez, la traza de la matriz \mathbb{X} y potencias de ella pueden ser escritos en términos de los autovalores como

$$[\mathbb{X}^m] = \sum_{i=1}^N \lambda_i^m \tag{1.49}$$

donde $[\dots]$ denota la traza. Mediante las Identidades de Newton es posible relacionar los polinomios simétricos elementales e_k con la traza según

$$e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = -\frac{1}{k} \sum_{m=1}^k (-1)^m [\mathbb{X}^m] e_{k-m}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \tag{1.50}$$

Para una matriz general de 4×4 tal como es el interés aquí, las expresiones explícitas de los polinomios resultan

$$\begin{aligned}
e_0(\mathbb{X}) &= 1, \\
e_1(\mathbb{X}) &= [\mathbb{X}], \\
e_2(\mathbb{X}) &= \frac{1}{2!} ([\mathbb{X}]^2 - [\mathbb{X}^2]), \\
e_3(\mathbb{X}) &= \frac{1}{3!} ([\mathbb{X}]^3 - 3[\mathbb{X}][\mathbb{X}^2] + 2[\mathbb{X}^3]), \\
e_4(\mathbb{X}) &= \frac{1}{4!} ([\mathbb{X}]^4 + 8[\mathbb{X}][\mathbb{X}^3] - 6[\mathbb{X}]^2[\mathbb{X}^2] + 3[\mathbb{X}^2]^2 - 6[\mathbb{X}^4]) \equiv \det(\mathbb{X}), \\
e_k(\mathbb{X}) &= 0 \quad \text{para } k > 4,
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Estos términos no son otra cosa más que aquellos que aparecen en la expresión del determinante deformado (1.46), tal como es evidente a partir de (1.47). Más importante aún, si se hace la sustitución $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K} = \sqrt{g^{-1}f} - \mathbf{1}$ se obtiene

$$\widehat{\det} \sqrt{g^{-1}f} = \sum_{n=0}^4 \alpha_n e_n(\mathbb{K}) \tag{1.52}$$

en donde se utilizó $N = 4$. La acción no-lineal resulta entonces

$$S = -M_{\text{P}}^2 \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + 2M_{\text{P}}^2 m^2 \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{n=0}^4 \alpha_n e_n(\mathbb{K}) \quad (1.53)$$

A partir de esta expresión es sencillo recuperar los resultados de la sección previa (es decir, aquello presentado en (de Rham and Gabadadze, 2010; de Rham et al., 2011)). Para eso lo primero que debe notarse es que hay ciertos parámetros que son redundantes y pueden ser dejados de lado en la sumatoria. El primero de ellos es α_0 : este término no representa otra cosa más que una constante y por ende puede ser reabsorbida en un término del tipo constante cosmológica. Para eliminar dicho parámetro se puede reescribir al mismo según

$$\alpha_0 e_0(\mathbb{K}) = \alpha_0 \det \sqrt{g^{-1}f} - \sum_{n=1}^4 \alpha_n e_n(\mathbb{K}) \quad (1.54)$$

de manera tal que el término de masa resulta

$$2M_{\text{P}}^2 m^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \sum_{n=1}^4 \bar{\alpha}_n e_n(\mathbb{K}) + \alpha_0 \det \sqrt{g^{-1}f} \right\} \quad (1.55)$$

con $\bar{\alpha}_n \equiv \alpha_n - \alpha_0$. Más aún, el último término también puede ser dejado de lado dado que el mismo es no dinámico¹⁵. Por otro lado, si se quiere que Minkowski (espacio plano) sea una solución posible, los términos lineales en h deberían no estar presentes a la hora de expandir la acción alrededor de $\eta_{\mu\nu}$. Se sigue que, por ende, $\bar{\alpha}_1 = 0$. Por último, el coeficiente $\bar{\alpha}_2$ puede ser fijado requiriendo que el término de masa venga dado en forma canónica. A partir de (1.51) es evidente que $\bar{\alpha}_2 = 1$. La acción entonces se reduce a

$$S = -M_{\text{P}}^2 \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + 2M_{\text{P}}^2 m^2 \int d^4x \sqrt{-g} (e_2(\mathbb{K}) + \bar{\alpha}_3 e_3(\mathbb{K}) + \bar{\alpha}_4 e_4(\mathbb{K})) \quad (1.56)$$

A partir de esta última expresión es posible notar lo siguiente:

- La acción posee dos parámetros libres¹⁶: $\bar{\alpha}_3$ y $\bar{\alpha}_4$.
- Si $\bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_4 = 0$ se obtiene la teoría resumada presentada en (de Rham et al., 2011), ecuación (1.23).
- Si $\bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_4 = 1$ se recupera la acción deformada mínimamente por el determinante, (1.45).
- Mediante una elección apropiada y relacionando $\bar{\alpha}_3$ y $\bar{\alpha}_4$ con los coeficientes del potencial (1.24), se recupera también el lagrangiano de interacción (1.35).

¹⁵Este término es no dinámico siempre y cuando $f_{\mu\nu}$ sea no dinámico. Dicho término junto con el $\sqrt{-g}$ presente en la acción, otorgan un término que resulta $\sqrt{-f}$. Por tal motivo puede ser dejado de lado en la ecuación de movimiento de la métrica $g_{\mu\nu}$.

¹⁶Además de la masa del gravitón m y, eventualmente, la constante cosmológica Λ

De esta manera, Hassan & Rosen pudieron generalizar lo hecho por de Rham, Gabadadze y Tolley, otorgando una descripción en términos de los polinómios simétricos elementales, extendiendo los resultados previos. A su vez, en (Hassan and Rosen, 2011) presentaron los resultados análogos pero escribiendo la acción no en términos de \mathbb{K} sino de $\sqrt{g^{-1}f}$, lo cual será de utilidad para el futuro. El determinante deformado (1.46) se puede reescribir como

$$\widehat{\det} \sqrt{g^{-1}f} = \sum_{r=0}^4 \frac{-\beta_r}{r!(4-r)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_4} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_4} (\sqrt{g^{-1}f})_{\nu_1}^{\mu_1} \dots (\sqrt{g^{-1}f})_{\nu_r}^{\mu_r} \quad (1.57)$$

con

$$\beta_r = (4-r)! \sum_{n=r}^4 \frac{(-1)^{n+r}}{(4-n)!(n-r)!} \alpha_n \quad (1.58)$$

La acción en cuestión resulta (Hassan and Rosen, 2011)

$$S = -M_{\text{P}}^2 \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + 2M_{\text{P}}^2 m^2 \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{n=0}^3 \beta_n e_n(\sqrt{g^{-1}f}) \quad (1.59)$$

donde los β_n vienen dados (usando su definición) por

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 6 - 4\bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_4, \\ \beta_1 &= -3 + 3\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_4, \\ \beta_3 &= 1 - 2\bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_4, \\ \beta_4 &= \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_4, \end{aligned} \quad (1.60)$$

La motivación para escribir la acción en términos de $\sqrt{g^{-1}f}$ (es decir, en términos de los β_n) y no en términos de \mathbb{K} (es decir, $\bar{\alpha}_n$) viene por el hecho de que las ecuaciones de movimiento, siempre y cuando $f_{\mu\nu}$ no tenga dinámica, resultan más sencillas de calcular y se puede ver explícitamente cómo GR se ve modificado. Previo a detallar esto un poco más, es necesario aclarar ciertas cuestiones por completitud: pareciera ser que la acción en términos de los β_n , (1.59), posee - como mucho - términos que son de orden tres en $\sqrt{g^{-1}f}$ mientras que la acción (1.56) (es decir, en términos de los α_n) es de orden cuatro. Pareciera ser, entonces, que hay una discrepancia en la física que describen ambas acciones a pesar de ser simplemente redefiniciones. Esta diferencia, sin embargo, no es algo más que una diferencia estética, y recae en la elección de parámetros que se quiera. Es importante remarcar que ambas acciones son físicamente equivalentes, siempre y cuando $f_{\mu\nu}$ no posea dinámica. La diferencia entre ellas recae precisamente en esta observación, ya que la no-dinámica de $f_{\mu\nu}$ es lo que permite describir la acción (1.56) en términos de polinomios e_n de menor orden, tal como se muestra en (1.59).

Habiendo escrito la acción de dos maneras distintas pero físicamente equivalentes, a continuación se mostrará cómo resultan las ecuaciones de movimiento a orden no-lineal, utilizando (1.59). La variación del primer término de la acción no otorga más que el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R$. La cuestión aquí es detallar cómo resulta la variación del segundo término. Para eso será de sumo interés tener en cuenta la siguiente relación:

$$\delta \text{Tr} \left[\left(\sqrt{g^{-1}} f \right)^n \right] = \frac{n}{2} \text{Tr} \left[g \left(\sqrt{g^{-1}} f \right)^n \delta g^{-1} \right] \quad (1.61)$$

A partir de esta se obtiene que

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \delta \left(\sqrt{-g} e_n(\sqrt{g^{-1}} f) \right) = \sum_{m=0}^n (-1)^{m+1} \text{Tr} \left[g \left(\sqrt{g^{-1}} f \right)^m \delta g^{-1} \right] e_{n-m}(\sqrt{g^{-1}} f) \quad (1.62)$$

La variación de la acción resulta entonces

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{m^2}{2} \sum_{n=0}^3 (-1)^n \beta_n \left[g_{\mu\lambda} Y_{(n)\nu}^\lambda + g_{\nu\lambda} Y_{(n)\mu}^\lambda \right] = G_N T_{\mu\nu} \quad (1.63)$$

donde $Y_{(n)} \equiv Y_{(n)}(\sqrt{g^{-1}} f)$ que para $\mathbb{X} = \sqrt{g^{-1}} f$ se definen

$$\begin{aligned} Y_{(0)}(\mathbb{X}) &\equiv \mathbf{1}, \\ Y_{(1)}(\mathbb{X}) &\equiv \mathbb{X} - \mathbf{1}[\mathbb{X}], \\ Y_{(2)}(\mathbb{X}) &\equiv \mathbb{X}^2 - \mathbb{X}[\mathbb{X}] + \frac{1}{2} \mathbf{1}([\mathbb{X}]^2 - [\mathbb{X}^2]), \\ Y_{(3)}(\mathbb{X}) &\equiv \mathbb{X}^3 - \mathbb{X}^2[\mathbb{X}] + \frac{1}{2} \mathbb{X}([\mathbb{X}]^2 - [\mathbb{X}^2]) - \frac{1}{6} \mathbf{1}([\mathbb{X}]^3 - 3[\mathbb{X}][\mathbb{X}^2] + 2[\mathbb{X}^3]), \end{aligned} \quad (1.64)$$

Cabe mencionar que, en notación de índices, resulta $\sqrt{g^{-1}} f \sqrt{g^{-1}} f = g^{\mu\lambda} f_{\lambda\nu}$, es decir que se comporta como un tensor de rango $(1, 1)$. La ecuación (1.63) es el resultado principal presentado en (Hassan and Rosen, 2011) y es evidente a partir de esta cómo se modifican los resultados de GR mediante la adición del último término en el lado izquierdo de la ecuación. Importante es notar que dichos resultados fueron asumiendo que $f_{\mu\nu}$ no posee dinámica. El hecho de tomar $f_{\mu\nu}$ como no-dinámico es puramente por simplicidad en las cuentas y para comparar con los resultados conocidos en donde se tomó siempre como caso $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Sin embargo, un análisis más correcto y general debería tener en cuenta que $f_{\mu\nu}$ podría llegar a ser no-dinámico, aunque un estudio sobre la estabilidad (fantasmas) de la teoría vendría al poco tiempo después del trabajo de (Hassan and Rosen, 2011), precisamente de la mano de los mismos autores (Hassan and Rosen, 2012a,c). Además de ganar generalidad a la hora de estudiar la teoría con $f_{\mu\nu}$ no-dinámico, una de las motivaciones principales viene por el hecho de que, asumiendo $f_{\mu\nu}$ como plana, hay ciertas soluciones físicamente relevantes que no están permitidas,

tales como soluciones Cosmológicas del tipo FLRW¹⁷. Por tal motivo, un análisis con $f_{\mu\nu}$ es de sumo interés, y será el tema principal de la siguiente sección. Cabe destacar que hay diversas teorías donde pueden estudiarse la dinámica de $f_{\mu\nu}$. Aquí en esta tesis, sin embargo, se tratará de estudiar una de ellas solamente, conocida como teorías de *bigravedad* o teorías *bimétricas*, que representa un modelo concreto para un campo de spin-2 masivo en un fondo curvo. A continuación, en el siguiente capítulo, se recapitulará lo hecho en (Hassan and Rosen, 2012a), donde allí se presenta por primera vez la construcción de una teoría de bigravedad libre de fantasmas, basándose en lo explicado en los capítulos anteriores.

1.3. Bigravedad

El hecho de darle dinámica a $f_{\mu\nu}$ debe ser consistente con tener una teoría de gravedad masiva que siga siendo libre de fantasma. Más específicamente, dos cosas de vital interés deben ser tenidas en cuenta:

- Las fluctuaciones de $f_{\mu\nu}$ no deben romper el buen comportamiento de la teoría para el sector de $g_{\mu\nu}$.
- Debe introducirse un término cinético para $f_{\mu\nu}$ de manera tal que el sector de $f_{\mu\nu}$ también sea libre de fantasmas.

El primero de estos puntos fue demostrado en (Hassan et al., 2012) y se recomienda su lectura para un análisis más detallado. En (Hassan and Rosen, 2012a) se estudia, precisamente, el segundo punto previamente mencionado, y es lo que compete a este capítulo: la construcción libre de fantasmas de una teoría de bigravedad.

El punto de partida es la acción (1.59) pero generalizando al caso en que $f_{\mu\nu}$ posee dinámica. Esto es,

$$S = M_{\text{P}}^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + 2m^2 \sum_{n=0}^4 \beta_n e_n(\sqrt{g^{-1}}f) \right] \quad (1.65)$$

Para la construcción del término cinético para $f_{\mu\nu}$ será de interés notar que el último término del potencial (es decir, aquel con e_4) resulta

$$\sqrt{-g} \beta_4 e_4(\sqrt{g^{-1}}f) = \beta_4 \sqrt{-f} \quad (1.66)$$

en donde se ha usado la definición (1.51), con $e_4(\sqrt{g^{-1}}f) = \det \sqrt{g^{-1}}f$. La importancia de esto es que dicho término es independiente de $g_{\mu\nu}$ y por ende no contribuye a las ec. de movimiento de $g_{\mu\nu}$.

¹⁷Para una discusión más en detalle consultar sección 3.3 de Hassan and Rosen (2011) y las referencias allí mencionadas.

De aquí surge la discrepancia entre las acciones (1.59) y (1.65) en cuanto a los términos del potencial. Como el objetivo acá es estudiar la dinámica de $f_{\mu\nu}$, dicho término sí debe ser tenido en cuenta. El parámetro extra en este caso, en comparación con $f_{\mu\nu}$ no-dinámico, actuará de constante cosmológica para esta métrica. Para hallar el término cinético de $f_{\mu\nu}$, lo primero será reescribir al potencial mediante la relación $\sqrt{-g} = \sqrt{-f} \sqrt{f^{-1}g}$. De esta manera se obtiene

$$\sqrt{-g} \sum_{n=0}^4 \beta_n e_n(\sqrt{g^{-1}f}) = \sqrt{-f} e_4(\sqrt{f^{-1}g}) \sum_{n=0}^4 \beta_n e_n(\sqrt{g^{-1}f}) \quad (1.67)$$

El objetivo es reescribir al término de masa de manera tal que se asemeje a un potencial para $f_{\mu\nu}$. Por tal motivo es de interés, a su vez, expresar $e_n(\sqrt{g^{-1}f})$ en términos de la métrica inversa $\sqrt{f^{-1}g}$. Los mismos resultan

$$\begin{aligned} e_0(\sqrt{f^{-1}g}) &= 1, \\ e_1(\sqrt{f^{-1}g}) &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4}, \\ e_2(\sqrt{f^{-1}g}) &= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_3\lambda_4}, \\ e_3(\sqrt{f^{-1}g}) &= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_3\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}, \\ e_4(\sqrt{f^{-1}g}) &= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

donde λ_i son los autovalores de la matriz $\sqrt{g^{-1}f}$. La relación entre los e_n de la matriz y su inversa es fácil de notar:

$$e_k(\sqrt{g^{-1}f}) = \frac{e_{4-k}(\sqrt{f^{-1}g})}{e_4(\sqrt{f^{-1}g})} \quad (1.70)$$

Así se obtiene la expresión para el término de masa (1.67)

$$\sqrt{-g} \sum_{n=0}^4 \beta_n e_n(\sqrt{g^{-1}f}) = \sqrt{-f} \sum_{n=0}^4 \beta_n e_{4-n}(\sqrt{f^{-1}g}) \quad (1.71)$$

pero de una manera que resulta un término de potencial para $f_{\mu\nu}$. Es evidente que la estructura del potencial no es otro más que el mismo que el de $g_{\mu\nu}$ pero con coeficientes distintos. Esto implica que, por consiguiente, un término de masa posible para $f_{\mu\nu}$ que no posea fantasmas podría ser, al igual que $g_{\mu\nu}$, un término cinético del estilo Einstein-Hilbert. De esta manera la acción resultante es

$$S = M_g^2 \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + M_f^2 \int d^4x \sqrt{-f} R(f) + 2m^2 M_{\text{eff}}^2 \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{n=0}^4 \beta_n e_n(\sqrt{g^{-1}f}) \quad (1.72)$$

donde $R(g)$ ($R(f)$) denota el escalar de curvatura para $g_{\mu\nu}$ ($f_{\mu\nu}$). A su vez, se han introducido diferentes masas de Planck, M_g y M_f , para las dos métricas, definiendo así una masa de Planck *efectiva* dada por

$$M_{\text{eff}}^2 = \left(\frac{1}{M_g^2} + \frac{1}{M_f^2} \right)^{-1} \quad (1.73)$$

La acción (1.72) es el resultado principal de esta sección y de este capítulo, siendo el pilar fundamental para comenzar a estudiar campos de spin-2 masivos en gravedad, haciendo foco en el estudio de materia oscura tensorial. Así, de esta manera, se ha construido hasta aquí una acción que, basándose en la sección anterior, resulta libre de fantasmas en el sector de $g_{\mu\nu}$ siempre y cuando $f_{\mu\nu}$ no posea dinámica. En esta sección, en cambio, se ha construido una acción libre de fantasmas - guiándose por (1.67) - en el sector de $f_{\mu\nu}$ siempre y cuando $g_{\mu\nu}$ sea no-dinámica. Resta entonces por ver cómo resulta la acción cuando ambas métricas poseen dinámica. Sin embargo, tal como se muestra en (Hassan and Rosen, 2012a), la acción presentada anteriormente es la correcta incluso cuando ambas métricas tienen dinámica. La sutileza, empero, viene por estudiar los grados de libertad que se propagan en la teoría, de manera de propagar los correctos y que no hayan g.l. extras que surgan como fantasmas. Cabe remarcar que en las teorías de bigravedad se esperan que se propaguen 7 g.l., correspondientes a un campo de spin-2 masivo (5 g.l.) y uno no-masivo (2 g.l.) (Boulware and Deser, 1972; Damour and Kogan, 2002; Isham et al., 1971; Salam and Strathdee, 1977). Para ver que efectivamente la teoría propaga 7 g.l. como es de esperar, un análisis Hamiltoniano en la formulación ADM es necesario (Arnowitt et al., 2008). En las secciones 5 y 6 de (Hassan and Rosen, 2012a) se puede ver en detalle cómo resulta el análisis Hamiltoniano otorgando, efectivamente, los 7 g.l. deseados. Aquí lo que se hará, sin embargo, será tratar de motivar y entender de dónde vienen esos 7 g.l., dejando las cuentas y detalles más profundos sugeridas en las secciones mencionadas de la cita.

Sea la descomposición ADM para la métrica $g_{\mu\nu}$ dada según las funciones N, N_i y γ_i , siendo el lapso, el *shift*, y la métrica 3-dimensional respectivamente. De forma análoga se pueden definir, para la métrica $f_{\mu\nu}$, las funciones L, L_i y ${}^3f_{ij}$. En las teorías bimétricas, las funciones lapso y shift son no-dinámicas dado que no poseen derivadas temporales. Restan, entonces, los 6 g.l. dados por g_{ij} y los 6 g.l. dados por ${}^3f_{ij}$, que junto con sus momentos canónicamente conjugados representan 24 variables en el espacio de fases; es decir, hasta 12 modos de propagación, con cada modo refiriéndose a un par de variables conjugadas. Se necesitan, pues, 10 vínculos de manera de obtener 14 variables en el espacio de fases, que corresponden a 7 g.l. de propagación. Esos 10 vínculos vendrán dados por lo siguiente: 4 variables serán removidas mediante un fijado de gauge. Otras 4 serán removidas mediante los vínculos Hamiltonianos y de momentos. Las 2 variables que restan serán removidas mediante dos vínculos extras

que aparecen en teorías de gravedad masiva¹⁸ (Hassan and Rosen, 2012b; Hassan et al., 2012). De esta manera se obtienen las 14 variables, asociados a los 7 modos de propagación de la teoría de bigravedad consistentes con un campo de spin-2 masivo y otro no masivo.

Antes de finalizar este capítulo y a modo de consistencia, caben hacer ciertos comentarios: Desde el punto de vista fenomenológico, es remarcable notar que las teorías de bigravedad presentan propiedades interesantes y relevantes para modificaciones a Relatividad General. Entre ellas se encuentran el estudio de soluciones cosmológicas y test observacionales (von Strauss et al., 2012), como así también soluciones con simetría esférica (Comelli et al., 2012a), de interés para el estudio de agujeros negros. Por completitud, a su vez, se presentarán las ecuaciones de movimiento en este tipo de teorías: de forma análoga a (1.63), las mismas resultan (Hassan and Rosen, 2011; von Strauss et al., 2012)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{m^2 M^2}{2M_g^2} \sum_{n=0}^3 (-1)^n \beta_n \left[g_{\mu\lambda} Y_{(n)\nu}^\lambda (\sqrt{g^{-1}}f) + g_{\nu\lambda} Y_{(n)\mu}^\lambda (\sqrt{g^{-1}}f) \right] = \frac{T_{\mu\nu}}{M_g^2} \quad (1.74)$$

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f_{\mu\nu}\bar{R} + \frac{m^2 M^2}{2M_f^2} \sum_{n=0}^3 (-1)^n \beta_{4-n} \left[f_{\mu\lambda} Y_{(n)\nu}^\lambda (\sqrt{f^{-1}}g) + f_{\nu\lambda} Y_{(n)\mu}^\lambda (\sqrt{f^{-1}}g) \right] = 0 \quad (1.75)$$

donde, para no cargar la notación y reducirla al mínimo, se definen las cantidades con tilde arriba \bar{X} asociadas a la métrica $f_{\mu\nu}$, y donde se ha llamado $M_{\text{eff}} \equiv M$. Necesario es remarcar que aquí se ha tenido en cuenta que solamente la métrica $g_{\mu\nu}$ se acopla a la materia, motivo por el cual del lado derecho de la ecuación de movimiento aparece la fuente. Así finaliza este capítulo, siendo el mismo el puntapié inicial para el comienzo del estudio de un campo de materia oscura de spin-2, tal como se ahondará en más detalle en el capítulo siguiente.

¹⁸Similar al vínculo (1.21).

Capítulo 2

Materia oscura ultraliviana de spin-2

2.1. Introducción

El término **materia oscura** fue designado por primera vez por el astrónomo suizo F. Zwicky en el año 1933 cuando estaba realizando un estudio cinemático (el primero en su tipo) de un cúmulo de galaxias¹. En dicho estudio Zwicky notó que había una discrepancia entre la masa observada y la masa que debería haber en la galaxia para que la misma tenga sentido gravitacionalmente. Por otro lado, a su vez, un año antes el astrónomo holandés J. Oort mirando el movimiento de las estrellas sobre el plano galáctico observó que debería haber casi un 50 % más de masa en el disco que la masa inferida por la materia luminosa. Años más tarde, en (Roberts, 1966; Roberts and Whitehurst, 1975; Rogstad and Shostak, 1972) estudiaron las líneas espectrales de 21cm del hidrógeno en las regiones exteriores de las galaxias, notando que la velocidad de rotación del gas pareciera no decrecer con la distancia al centro de la galaxia, tal como debería suceder para una masa en una región acotada. Por otro lado y casi al mismo tiempo - finales de 1970 - las observaciones hechas por Vera Rubin (junto con K. Ford y N. Thonnard) en el telescopio del Observatorio Nacional de Kitt Peak permitieron entender de una manera más precisa las curvas de rotación de galaxias tipo espirales, presentando así uno de los gráficos más precisos de la velocidad de rotación de las galaxias vs. su radio. Similarmente, Albert Bosma en su tesis doctoral a finales de los '70 y posteriormente en un (reconocido) trabajo a principios de los '80 (Bosma, 1981), obtuvo un gráfico (al igual que Rubin *et al.*), de las curvas de rotación en función del radio. En los gráficos presentados en estos trabajos previamente mencionados se mostraba que, efectivamente, la velocidad de rotación no decae con el radio, sino que se observa el comportamiento mostrado - a modo de ejemplo - en la Fig. 2.1.

¹Allí el autor suizo la denota como *dunkle Materie*, luego traducido al inglés según *dark matter*. Se utilizarán las siglas *DM* para denotar a dicho objeto.

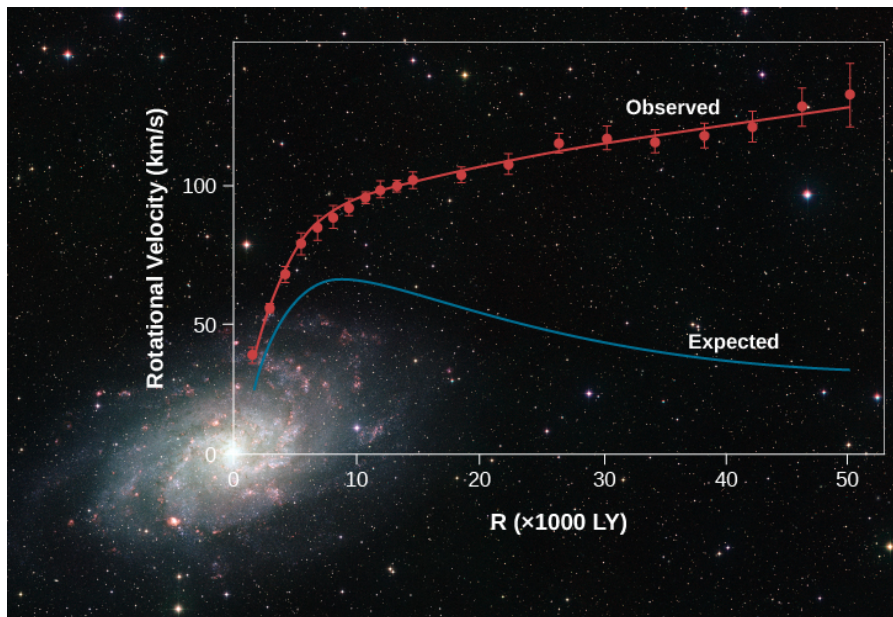


Figura 2.1: Curvas de rotación para la galaxia Andómeda. Se observan las curvas de rotación esperadas y observadas (crédito de la imagen: *Douglas College Astronomy, British Columbia*).

Sin dudas, los gráficos de las curvas de rotación fueron unas de las primeras y más fuertes evidencias de que había algo *extra* que no se estaba viendo ni teniendo en cuenta en la teoría a la hora de realizar los cálculos para obtener dichas curvas de rotación. Diversas propuestas se han postulado para tratar de explicar dicho comportamiento; entre ellas, quizás las más famosas son la propuesta de *materia oscura* y las teorías de gravedad modificadas conocidas como *Modified Newtonian Dynamics* (MOND) presentada por el físico israelí Mordehai Milgrom en 1983. Sin ahondar en detalle (ya que no es objetivo de esta tesis hacer una disertación sobre ambas teorías) a pesar que esta última describe de manera fehaciente el comportamiento a escalas galácticas, la misma presenta problemas cuando se trata de describir fenómenos a otras escalas. Entre ellos, quizás la discrepancia más notoria entre ambas teorías se manifiesta a escalas cosmológicas, donde la propuesta de DM permite describir adecuadamente lo predicho por las mediciones del *CMB*, favoreciendo la existencia de DM en contraposición con la modificación de la gravedad MOND. A su vez, y por otro lado, otra evidencia a favor de DM es aquella arrojada por las mediciones del *Bullet Cluster* (Clowe et al., 2004; Markevitch et al., 2004). Tal como se ha dicho anteriormente, en esta tesis no se trata(rá) de motivar la propuesta de DM por sobre otras teorías, sino que se toma como punto de partida dicha propuesta. Sin embargo, sí cabe mencionar cuáles fueron los hitos que llevaron a postular la existencia de DM de una manera robusta, tal como se ha descrito en los párrafos anteriores.

A pesar de que hoy en día la comunidad científica está más inclinada a pensar en la existencia de DM, aún se desconocen diversas cosas sobre la misma tales como su composición, cómo interactúa con la materia ordinaria, cuál es su origen, etc. Suponiendo que existe, lo que sí se sabe es que la

misma interactúa - por lo menos - gravitacionalmente y podemos entender el efecto que produce sobre los objetos. No obstante, es necesario remarcar que hay una cantidad enorme de candidatos de DM, variando tanto su rango de masas como su comportamiento y fenomenología (ver Fig. 2.2).



Figura 2.2: Algunos de los posibles candidatos para materia oscura. Cada uno de estos candidatos posee una masa (energía) muy distinta, barriendo un rango de alrededor de 80 órdenes de magnitud para explorar por el candidato en cuestión. Imágen extraída de (Bertone and Tait, 2018).

En esta tesis se estudiará uno de estos tipos de materia oscura, conocido como *materia oscura ultraliviana* o *ULDM* por sus siglas en inglés. Dicho tipo de candidato a DM viene dado por partículas bosónicas cuyas masas son extremadamente pequeñas (alrededor de $10^{-25} \text{ eV} \lesssim m \lesssim \text{eV}$). En particular se hará foco sobre ULDM del tipo tensorial, es decir, un campo de spin-2. En el capítulo a continuación se presentarán las características más relevantes del modelo de ULDM, siguiendo principalmente como referencia el review (Ferreira, 2021), recomendando su lectura para una mayor profundización. El objetivo en dicho capítulo es presentar el modelo de materia oscura ultra-liviana de manera general, para así luego en la siguiente sección remarcar las principales características y fenomenología del modelo de spin-2 en cuestión.

2.2. Materia oscura ultraliviana

Determinar la naturaleza y propiedades de la DM es uno de los campos de estudios de la Cosmología moderna. Dentro del modelo estándar de la Cosmología (Weinberg, 2008) - conocido como modelo Λ CDM, hasta el momento el modelo más exitoso - el contenido energético del Universo está dominado por contribuciones *oscuras*: a saber, materia y energía oscura. Más específicamente, dichas componentes contribuyen aproximadamente un 25 % y 70 % del contenido total del Universo, respectivamente. Asimismo, dicho modelo describe la expansión acelerada del Universo bajo cierto ajuste adecuado de la denominada constante cosmológica Λ . Bajo el mismo modelo, la DM podría consistir en una distribución de partículas *frías*; esto es, una distribución tal que su dispersión de velocidades es pequeña. Se denomina, de esta manera, a la DM como CDM (por sus siglas en inglés, *Cold Dark Matter*). Sin embargo, paradigmas alternativos fueron surgiendo con el correr del tiempo, tomando especial interés aquel donde la DM consiste en bosones ultralivianos, con números de ocupación extremadamente alto de manera tal que se lo puede describir mediante la teoría clásica de campos (Ferreira, 2021; Marsh, 2016). El interés en este último consiste en lo siguiente: sabido es el éxito del modelo CDM en escalas grandes donde dicho modelo muestra una alta compatibilidad con - por ejemplo - las mediciones del CMB y LSS. Sin embargo, a medida que se estudian escalas más pequeñas como lo son las galácticas y subgalácticas, el modelo de CDM presenta discrepancias en comparación con lo observado. Por nombrar quizás las más conocidas se encuentran²:

- *Missing satellites problem*: el modelo de CDM predice más cantidad de satélites pequeños de los que se observan en la Vía Lactea y en el Grupo Local.
- *Too-big-to-fail problem*: Las simulaciones basadas en Λ CDM predicen subhalos suficientemente masivos como para formar galaxias y estrellas los cuales sin embargo no se observan.
- *Cusp-core problem*: muchos perfiles de densidades de varios sistemas no presentan un perfil del tipo NFW (Navarro et al., 1996).

Para tratar de afrontar dichos problemas, surgen dos caminos posibles a seguir (tomando como válido el paradigma de DM y dejando de lado posibles modificaciones a gravedad en escalas pequeñas): o bien se deben tener en cuenta en mayor medida y precisión los procesos astrofísicos involucrados en las escalas pequeñas, o bien podría ser que el modelo de CDM no es el adecuado para describir la física en dichas escalas y el modelo de DM debe ser revisto. El primero de estos puntos es un área activa en sí misma, involucrando principalmente herramientas de simulaciones cada vez más precisas y completas

²Se recomienda la lectura de (Weinberg et al., 2015) como así también el capítulo 2 de (Ferreira, 2021) y/o sección 6.4 de (Marsh, 2016) y las referencias allí para una discusión más detallada.

(Del Popolo and Le Delliou, 2017; Niemeyer, 2020; Oñorbe et al., 2015). En cuanto al segundo punto, uno de los posibles modelos que trata de abordar estos problemas es el conocido como materia oscura *ultraliviana* (*ULDM* por sus siglas en inglés), cuyas características principales se detallarán a continuación. No es objetivo de esta tesis explicar ni discutir por qué los modelos de ULDM podrían otorgar una posible solución a los problemas mencionados³, sino que la idea es tomar como punto de partida la validez de dichos modelos, haciendo posterior hincapié más precisamente en el modelo de ULDM de spin-2.

Características principales

Diversos modelos de DM existen para tratar de explicar aquello donde CDM exhibe ciertos problemas. El interés principal en estos modelos recae en lo que sucede en escalas pequeñas, allí donde CDM presenta las mayores discrepancias con respecto a lo observado. Los modelos de ULDM fueron introducidos para tratar de afrontar precisamente dichas vicisitudes. Estos modelos, además, presentan una rica - y novedosa - fenomenología la cual puede ser testeada en escalas galácticas mediante observaciones. Su característica principal es que a grandes escalas se comporta como CDM, mientras que para escalas chicas (galácticas) presentan un comportamiento ondulatorio que puede caracterizarse en términos de superposiciones de ondas. De este manera, estos tipos de modelos presentan el comportamiento esperado a grandes escalas donde se recuperan los resultados de CDM, mientras que a escalas pequeñas se diferencia de este último y es allí donde se hace foco en tratar de estudiar la viabilidad de dichos modelos.

En pos de estudiar estos modelos, lo primero a notar es que debido a lo extremadamente pequeño de la masa, una descripción apropiada para el comportamiento de este tipo de DM viene dado por una **teoría clásica de campos**. Más específicamente, la longitud de onda de Broglie de la DM viene dada por (Zhang, 2023)

$$\lambda_{dB} \sim (mv)^{-1} \sim 1\text{kpc} \left(\frac{10^{-23}\text{eV}}{m} \right) \left(\frac{10^{-3}}{v} \right) \quad (2.1)$$

por lo que su número de ocupación será gigante, resultando este (Khmelnitsky and Rubakov, 2014)

$$\mathcal{N} \sim 10^9 \left(\frac{\rho_{DM}}{0.3\text{GeV}/\text{cm}^3} \right) \left(\frac{10^{-23}\text{eV}}{m} \right) \quad (2.2)$$

donde se utilizó que la densidad de energía local en el sistema solar de la DM es $\rho_{DM} = 0.3 \text{ GeV}/\text{cm}^3$ (Evans et al., 2019; McKee et al., 2015; Piffi et al., 2014). El rango de masas permitidos en estos modelos se encuentra acotado, dependiendo específicamente de cada modelo en particular. Sin embargo, se puede obtener y entender una cota de manera general. La misma resulta

³Para dicha discusión se recomienda la lectura profunda de (Ferreira, 2021).

$$10^{-25} \text{ eV} \lesssim m \lesssim \mathcal{O}(1) \text{ eV} \quad (2.3)$$

La cota inferior surge a partir del tamaño del núcleo de DM. Este último no debe ser mayor que el tamaño del halo ya que se desea que el comportamiento ondulatorio ocurra solamente para dichas escalas; a escalas grandes, en cambio, se desea el comportamiento de CDM. Esta cota saturará cuando la longitud de onda de Broglie de la ULDM sea del orden del tamaño del halo. Tomando a esta cota en el caso en que el halo se encuentra virializado, lo que se plantea no es otra cosa más que $\lambda_{\text{dB}} < R_{200}$, siendo R_{200} el radio virial⁴ y λ_{dB} dado por (2.1) con v la velocidad efectiva de la ULDM cuyo valor en el halo galáctico puede estimarse a partir de la velocidad virial. Considerando halos esféricos con masas del orden $10^{12} M_{\odot}$, la cota resulta (Ferreira, 2021; Rindler-Daller and Shapiro, 2012)

$$m > 10^{-25} \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left(\frac{R_{200}}{100 \text{ kpc}} \right)^{-1/2} \text{ eV} \quad (2.4)$$

Por otro lado, la cota superior vendrá dada por la masa máxima que puede tener la DM de manera tal de formar núcleos dentro de las galaxias, región donde se esperan las mayores diferencias con CDM. Precisamente para ver dichas diferencias con CDM, la región de interés será aquella donde el comportamiento ondulatorio de la ULDM tome lugar. Es decir, la longitud de onda de Broglie de la DM deberá ser mayor que la escala galáctica. Pero, a su vez, una superposición de ondas podrían llegar a generar un tamaño de onda comparable con el tamaño de la galaxia, siempre y cuando se consideren ondas individuales más pequeñas que el tamaño de la galaxia. Se pedirá, entonces, una masa máxima para cada paquete de ondas - que se traduce en λ_{dB} más chico - de forma tal que la superposición de ondas no exceda el tamaño de la galaxia⁵. La cota, entonces, vendrá dada por pedir que $\lambda_{\text{dB}} > l$ con $l = (m/\rho)^{1/3}$ la separación entre partículas. Considerando halos formados a partir del colapso esférico, la densidad y velocidad vienen dados por (Berezhiani and Khoury, 2016)

$$\begin{aligned} \rho_{200} &= 200 \rho_{\text{cr}} \sim 10^{-26} \text{ g/cm}^3, \\ V_{200} &\sim 10^2 \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/3} \text{ km/s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

⁴El halo de DM se define como la región esférica donde la densidad es aproximadamente 200 veces mayor que la densidad crítica del Universo para un dado redshift, con una masa dada por $M_{200} = (4\pi/3) R_{200}^3 200 \rho_{\text{cr}}$. La velocidad virial será, entonces, la velocidad circular media en el radio virial, $V_{200} \equiv \sqrt{GM_{200}/R_{200}}$.

⁵Esta cota se puede entender de una manera análoga a lo que ocurre con un condensado de Bose-Einstein. En este tipo de sistemas, la condición para que haya condensado surge de pedir que la temperatura del sistema sea menor a la crítica, $T < T_c$. Sin embargo, se puede obtener una condición análoga en términos de la longitud de onda de Broglie pidiendo que $n\lambda_{\text{dB}}^3 \gg 1$ con n la densidad numérica. El caso límite será aquel donde $n\lambda_{\text{dB}}^3 \sim 1$. Es necesario remarcar, sin embargo, que la condición pedida en (2.6) no significa que la DM condensa; esta analogía sirve simplemente a fines didácticos. Consultar capítulo 3 de (Ferreira, 2021) para más detalle al respecto.

lo cual resulta en una cota para la masa de

$$m < \left(\frac{\rho}{v^3}\right)^{1/4} \sim \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot}\right)^{-1/4} \text{ eV} \quad (2.6)$$

donde se utilizó que el halo se encuentra virializado, tomando $z_{\text{vir}} \sim 2$.

Cabe remarcar que, tal como se ha dicho anteriormente, el rango de masas (2.3) es simplemente una cota estimativa⁶. Una cota concreta dependerá de cada modelo específico, sea considerando distintos spines, escalas, componentes de DM, etc. A su vez, es necesario notar que las cotas aquí mostradas son considerando procesos astrofísicos solamente. Si, por otro lado, se tiene en cuenta un contexto cosmológico, las cotas también se verán afectadas. En esta tesis se ahondará en lo que a ULDM de spin-2 respecta; para más detalle sobre los casos de spin-0 y spin-1 en un contexto cosmológico se puede indagar en (Armengaud et al., 2017; Hu et al., 2000; Hui et al., 2017; Marsh, 2016) y (Abac et al., 2024; Chase and López Nacir, 2024; Knapen et al., 2017) respectivamente.

Hasta el momento se tiene, entonces, un modelo de DM que a escalas grandes se comporta como CDM, mientras que a escalas galácticas y más pequeñas presenta un comportamiento ondulatorio. Precisamente este tipo de comportamiento es lo que comprende a los modelos de ULDM; entre los modelos más conocidos en la literatura⁷ se encuentran, por nombrar los de mayor interés, los axiones y las *Axion Like Particles* (ALPs) (Marsh, 2016, 2018; Niemeyer, 2020), junto con los modelos de DM Difusa (*Fuzzy DM*) (Hu et al., 2000; Hui et al., 2017), también conocidos como DM Ondulante (*Wave DM*) (Hui, 2021).

A modo de resumen, y para enfatizar, a continuación se transcriben las características principales de los modelos de ULDM de manera general (sin especificar ningún modelo):

- ★ Partículas bosónicas con masas ultralivianas, dadas por (2.3).
- ★ Tratamiento a partir de una teoría clásica de campos.
- ★ A escalas grandes se comporta como CDM, dándole un tratamiento hidrodinámico, mientras que para escalas chicas presenta un comportamiento ondulatorio con una longitud de onda de Broglie dada por (2.1).

Teniendo esto en mente, se procederá a continuación a ahondar en más detalle en los modelos de spin-2 de ULDM.

⁶Hay que tener en cuenta, también, que la cota asume que la abundancia de DM es debida en su totalidad a ULDM. Consultar (Hlozek et al., 2015, 2018) para el caso contrario.

⁷Para una lista más completa sobre los posibles modelos se recomienda mirar (Lee, 2018) junto con las referencias allí citadas. Una descripción pictórica que puede resultar útil, a su vez, es la Fig. 9 de (Ferreira, 2021).

2.3. Spin-2

En la sección anterior se ha visto el modelo de ULDM de manera general; en esta sección se profundizará sobre uno de estos modelos, específicamente en el modelo denominado como ULDM de spin-2. El punto de partida para estudiar y entender estos modelos es la Ec. (1.72), la cual permite estudiar un campo masivo de spin-2 en un fondo curvo de manera general. Sin embargo, y en vistas de (1.74)-(1.75), es necesario notar que a pesar que dicha acción describe dos campos tensoriales, el hecho de que haya uno masivo propagándose en un fondo curvo todavía no es del todo claro. Esto se debe a que para obtener eso, se debe hacer una rotación de dichos campos para obtener estados de masa bien definidos, donde en las ec. de movimiento para cada campo aparezca un término de masa bien definido del estilo $m^2\Psi$, donde Ψ representa al campo en cuestión. Para presentar dicho procedimiento y en vistas de los capítulos siguientes, se seguirá lo hecho en (Marzola et al., 2018).

Partiendo de (1.72), se puede reescribir la acción mediante una redefinición de las masas de Planck de cada métrica según (Babichev et al., 2016b)

$$M_g^2 = \frac{M_P^2}{1 + \alpha^2}, \quad M_f^2 = \frac{\alpha^2 M_P^2}{1 + \alpha^2}, \quad m^2 M^2 = \frac{M_P^2}{1 + \alpha^2} \frac{\alpha^2 M_P^2}{1 + \alpha^2} \quad (2.7)$$

por lo que la acción resulta

$$S = \frac{M_P^2}{1 + \alpha^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g} R(g) + \alpha^2 \sqrt{-f} R(f) + 2 \frac{\alpha^2 M_P^2}{1 + \alpha^2} \sqrt{-g} V(g, f; \beta_n) \right] \\ + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g, \psi) \quad (2.8)$$

donde se ha llamado resumidamente $V(g, f; \beta_n)$ al término de potencial de la acción de bigravidad (1.72). La idea en hacer esta redefinición es dejar fija una escala de energía para las masas (dada por la masa de Planck reducida, $M_P \simeq 2.4 \times 10^{27}$ eV), cuantificando así la interacción entre las dos métricas mediante la constante adimensional $\alpha \equiv M_f/M_g$. Notar que en el límite en que $\alpha \rightarrow 0$ la teoría se reduce a GR.

En (2.8) se ha incluido, a su vez, el término de materia. Dicho término será relevante a futuro cuando se estudien, en los siguientes capítulos, la interacción de la DM con pulsares y GW más precisamente. Lo importante a notar acá es que se está considerando que solamente una métrica (la métrica g) se acopla a la materia, $\mathcal{L}_m(g, \psi)$ donde ψ representa los campos de materia. Que solamente una métrica sea la que se acopla a la materia tiene una relevancia física importante de notar, que es la siguiente: en un principio se podría tener que ambas métricas se acoplen a campos de materia, con términos de la forma $\sqrt{-g} \mathcal{L}_g(g, \phi^A)$ para la métrica g y $\sqrt{-f} \mathcal{L}_f(f, \phi^B)$ para la métrica f , donde $\phi^{A,B}$ representan campos de materia. Sin embargo, si ambas métricas se acoplasen a los mismos campos de materia, las

geodésicas de las partículas se verían modificadas, violando generalmente el principio de equivalencia. Mediante observaciones y/o experimentos, estos tipos de acoples se verían fácilmente dejados de lado. No obstante, podría ocurrir que ambas métricas se acoplasen a una efectiva, $\hat{g}_{\mu\nu}$, construída a partir de $g_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$, de la forma $\sqrt{-\hat{g}} \mathcal{L}_{\hat{g}}(\hat{g}, \phi^C)$. Sin embargo, un término de este tipo genera un nuevo g.l. llevando a la teoría a que presente fantasmas (Hassan and Rosen, 2012a). En conclusión, los posibles acoples con la materia se encuentran altamente restringidos en las teorías de bigravedad, y en esta tesis se considerará que solamente la métrica g se acopla a la materia⁸. Para una discusión más detallada sobre los posibles acoples en este tipo de teorías se sugiere consultar (de Rham, 2014; de Rham et al., 2014, 2015; Schmidt-May and von Strauss, 2016; Yamashita et al., 2014).

Retomando la Ec.(2.8), el objetivo a continuación es realizar una rotación adecuada de los campos de manera de generar estados de masa bien definidos. De esta manera, se tendrá un campo de spin-2 masivo propagándose en un fondo curvo. Para eso se considerarán perturbaciones de las métricas⁹ dadas por

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

$$f_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \epsilon \ell_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

con $\epsilon \ll 1$ un parámetro de expansión y donde se han desarrollado ambas métricas alrededor de un mismo fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$. Expandiendo la acción a orden cuadrático en las perturbaciones se obtiene la acción cuadrática de GR, $S_{GR}^{(2)}$ - Ec.(1.7) - para cada campo $h_{\mu\nu}$ y $\ell_{\mu\nu}$, pero generalizando el operador de Lichnerowicz a espacios curvos,

$$\mathcal{E}_{\rho\sigma}^{\mu\nu} := \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu} \square - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} \square + \bar{g}^{\mu\nu} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} + \bar{g}_{\rho\sigma} \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\mu} \nabla^{\nu} \nabla_{\rho} - \delta_{\rho}^{\mu} \nabla^{\nu} \nabla_{\sigma} \quad (2.11)$$

junto con la expansión pertinente del término potencial $V(g, f; \beta_n)$.

Hasta este punto, y recapitulando, se tiene lo siguiente: partiendo de (1.72) se define el parámetro adimensional α según (2.7), llegando a la acción de bigravedad escrita en términos de este último, Ec.(2.8). Expandiendo la acción a orden cuadrático en las perturbaciones según (2.9) y (2.10), se llega a la acción cuadrática de GR para cada campo, es decir a términos en la acción de la forma $\mathcal{L}_{GR}^{(2)}(X) \supset X^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu}^{\rho\sigma} X_{\rho\sigma}$ donde $X_{\mu\nu}$ representa al campo $h_{\mu\nu}$ o bien al campo $\ell_{\mu\nu}$. Sin considerar el término de potencial, lo que se tiene hasta acá no es otra cosa más que dos términos de la misma forma (correspondientes a $\mathcal{L}_{GR}^{(2)}$ tanto para $h_{\mu\nu}$ como para $\ell_{\mu\nu}$). Más explícitamente, se obtiene que

⁸Además, en vistas de la observación de que para $\alpha \rightarrow 0$ se recupera GR, la suposición de que solamente la métrica g se acopla a la materia adquiere más sentido.

⁹Aquí y en lo que sigue (salvo que se especifique lo contrario) se seguirá lo hecho en (Marzola et al., 2018).

$$S_{GR}^{(2)} \supset \frac{M_P^2}{1 + \alpha^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} [h^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} + \alpha^2 \ell^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \ell_{\rho\sigma}] \quad (2.12)$$

Si ahora se tiene en cuenta el término de potencial $V(g, f; \beta_n)$, habrá que expandir al mismo en términos de $h_{\mu\nu}$ y $\ell_{\mu\nu}$. El procedimiento sobre cómo obtener el mismo se puede consultar con más detalles en el Apéndice B de (Babichev et al., 2016b); el objetivo acá es motivar y entender la idea para obtener un campo masivo (de spin-2) propagándose en un fondo curvo. Una vez hecha la perturbación y expandiendo el potencial a orden cuadrático, el mismo resulta (ver ecuación (B.9) de (Babichev et al., 2016b))

$$\mathcal{L}_V^{(2)}(h, \ell) \supset h^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \ell^2 - \ell_{\mu\nu} \ell^{\mu\nu} + 2(h_{\mu\nu} \ell^{\mu\nu} - h\ell) \quad (2.13)$$

donde las cantidades sin índices representan la traza de los campos. Mediante la sustitución

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{M_P} (G_{\mu\nu} - \alpha M_{\mu\nu}), \quad (2.14)$$

$$\ell_{\mu\nu} = \frac{1}{M_P} (G_{\mu\nu} + \alpha^{-1} M_{\mu\nu}) \quad (2.15)$$

es sencillo obtener que el término de interacción (potencial) resulta

$$\mathcal{L}_V^{(2)}(G, M) \supset M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - M^2 \quad (2.16)$$

De esta manera, y en términos de los campos $G_{\mu\nu}$ y $M_{\mu\nu}$, la acción resulta

$$S^{(2)} = \int d^4x \sqrt{\bar{g}} \left[\mathcal{L}_{GR}^{(2)}(G) + \mathcal{L}_{FP}^{(2)}(M) - \frac{1}{M_P} (G_{\mu\nu} - \alpha M_{\mu\nu}) T^{\mu\nu}(\psi) \right] \quad (2.17)$$

donde se define el Lagrangiano de Fierz-Pauli según

$$\mathcal{L}_{FP}^{(2)}(M) \equiv \mathcal{L}_{GR}^{(2)}(M) - \frac{m_{FP}^2}{4} (M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - M^2) \quad (2.18)$$

Aquí m_{FP} es la masa de Fierz-Pauli, definida según $m_{FP} \equiv M_P \sqrt{\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3}$. El hecho de que m_{FP} no dependa de β_0 ni de β_4 se puede interpretar de la siguiente manera: teniendo en cuenta que el potencial $V(g, f; \beta_n)$ involucra 5 β_n 's, quizás la idea inmediata que surge es que dicha masa dependa de β_0, \dots, β_4 . Sin embargo, en vistas de la observación hecha en (1.66) y lo comentado posteriormente allí, justamente los términos de potencial que involucran tanto β_0 como β_4 resultan constantes en las ecuaciones de movimiento de las métricas, y por lo tanto se pueden (re)interpretar (o reabsorber) en un término del tipo constante cosmológica. En lo que aquí respecta, no se tendrá en cuenta ningún término con constante cosmológica.

A partir de la Ec.(2.17) se puede evidenciar cómo obtener un campo de spin-2 masivo propagándose en un fondo curvo. Aquí, el campo tensorial $M_{\mu\nu}$ resulta el campo masivo (aquel que involucra un término de masa, dado por (2.18)). De esta forma, se pudo obtener un campo de spin-2 no masivo (dado por $G_{\mu\nu}$) junto con un campo masivo también de spin-2 ($M_{\mu\nu}$), dando entre ellos el conteo correcto de g.l. que resultan 7 g.l. tal como era de esperar en la teoría, correspondientes a un campo masivo y no masivo de spin-2. A su vez, en (2.17) se ha tenido en cuenta la interacción con la materia, donde se puede ver que el último término allí no resulta otro más que $h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, en completa consistencia con lo dicho anteriormente que solamente la métrica $g_{\mu\nu}$ se acopla a la materia. Más aún, y teniendo en cuenta que para $\alpha \rightarrow 0$ se recupera GR, se puede ver que el acople con la materia del campo masivo se encuentra suprimido por un factor α con respecto al acoplamiento del campo no masivo.

Lo que resta por ver a continuación es que efectivamente la acción (2.17) describe un campo de spin-2 propagándose en un fondo curvo. Hasta el momento se ha demostrado que se obtienen dos campos tensoriales, uno masivo y otro no masivo, pero aún queda por evidenciar que efectivamente se obtiene un campo masivo de spin-2 propagándose en un fondo curvo, tal como ocurre por ejemplo para un campo de Proca o de Klein-Gordon en el caso vectorial y escalar, respectivamente. Para ello se define un nuevo fondo $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ según

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \frac{G_{\mu\nu}}{M_{\text{P}}} \quad (2.19)$$

En términos de este nuevo fondo, y dejando de lado el término de interacción, la acción resulta (Babichev et al., 2016a,b; Marzola et al., 2018)

$$S_{\text{spin-2}} = M_{\text{P}}^2 \int d^4x \sqrt{-\mathcal{G}} R(\mathcal{G}) + \int d^4x \sqrt{-\mathcal{G}} \mathcal{L}_{\text{FP}}^{(2)}(M) \quad (2.20)$$

y por ende la teoría exhibe un campo masivo de spin-2, $M_{\mu\nu}$, propagándose en un fondo curvo genérico dado por $\mathcal{G}_{\mu\nu}$. A continuación se estudiará la ecuación de movimiento de dicho campo y ciertas consecuencias fenomenológicas al respecto.

2.3.1. Ecuación de movimiento y consecuencias fenomenológicas

Variando la acción (2.20) con respecto a $M^{\mu\nu}$ se obtiene la EOM correspondiente para el campo de spin-2 masivo, dada por (Marzola et al., 2018)

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} - R M_{\mu\nu} + \mathcal{G}_{\mu\nu} R^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} m_{\text{FP}}^2 (M_{\mu\nu} - \mathcal{G}_{\mu\nu} M) = 0 \quad (2.21)$$

donde M es la traza, con los índices que suben y bajan a partir de $\mathcal{G}_{\mu\nu}$. Más aún, la ecuación se puede simplificar más si se tienen en cuenta las Identidades de Bianchi, dadas en este caso por

$$\nabla^\mu M_{\mu\nu} = \nabla_\nu M \quad \longrightarrow \quad \nabla^\mu \nabla^\nu M_{\mu\nu} = \square M \quad (2.22)$$

Sustituyendo esto último en (2.21), se obtiene que

$$M = 0 \quad \implies \quad \nabla^\mu M_{\mu\nu} = 0 \quad (2.23)$$

Es decir, el campo $M_{\mu\nu}$ resulta sin traza y transverso, tal como ocurre con las ondas gravitacionales. Sin embargo, es remarcable notar que en el caso masivo, $M_{\mu\nu}$, la transversalidad y no-traza surgen naturalmente a partir de las Id. de Bianchi y no a partir de una elección de gauge. En lo que sigue a continuación se estudiará la dinámica de $M_{\mu\nu}$ mediante la solución a las EOM en un fondo del tipo FLRW, $\mathcal{G}_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t))$ con t el tiempo cósmico. La EOM en un fondo de FLRW resulta¹⁰ (Comelli et al., 2012b; Lagos and Ferreira, 2014; Marzola et al., 2018)

$$\ddot{M}_{ij} + 3H\dot{M}_{ij} - \Delta M_{ij} + m_{\text{FP}}^2 M_{ij} = 0 \quad (2.24)$$

Aquí y en lo que resta de la tesis, el punto indica derivada con respecto al tiempo cósmico t . A partir de esta ecuación vale la pena remarcar ciertas cuestiones:

- ◊ La estructura de la ecuación es la misma que la de, por ejemplo, un campo escalar, con el término con derivada segunda, el término de fricción de Hubble, un término con gradiente, y el término de masa. La diferencia recae en la estructura tensorial que aquí se presenta con los dos índices.
- ◊ De los 10 g.l. presentes en un principio en el tensor simétrico $M_{\mu\nu}$, solamente M_{ij} aparece en la EOM. Esto es así debido a la transversalidad y la traza nula del mismo, las cuales eliminan las componentes $M_{0\nu}$ y M_i^i respectivamente. Por ende, la EOM (2.24) describe la dinámica de los 5 g.l. de $M_{\mu\nu}$.

Para la solución a la EOM se considerarán solamente los modos homogéneos, despreciando el término con gradiente. La ecuación diferencial a resolver, entonces, tiene la forma

$$\ddot{f} + pH\dot{f} + m^2 f = 0 \quad (2.25)$$

con $H = H_0 a^{-q} = 1/qt$ con q y p constantes numéricas. La solución a este tipo de ecuaciones viene dada por

¹⁰Cabe remarcar que para obtener la EOM *correcta*, esto es con el factor $3H$ en el término de fricción de manera que el campo M_{ij} se comporte como materia, se utilizó una separación entre fondo y perturbaciones según $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2(\delta_{ij} + 2h_{ij})dx^i dx^j$ para la métrica $g_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2(\delta_{ij} + 2\gamma_{ij})dx^i dx^j$ para $f_{\mu\nu}$.

$$f(t) = a^{(q-p)/2} \left(C_J J_{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}}(mt) + C_Y Y_{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}}(mt) \right) \quad (2.26)$$

donde $J_n(x)$ e $Y_n(x)$ son funciones de Bessel y C_J y C_Y son constantes arbitrarias. Considerando que el campo oscila rápidamente, $mt \gg 1$, la solución para el caso de spin-2 resulta

$$M_{ij} = \frac{\sqrt{2\rho_{\text{DM}}}}{m a(t)^{3/2}} \cos(mt + \Upsilon) \varepsilon_{ij} \quad (2.27)$$

donde se ha renombrado $m_{\text{FP}} \equiv m$ para no cargar la notación¹¹. A partir de (2.27) es necesario remarcar ciertos comentarios pertinentes:

- La amplitud del campo se ha fijado de manera tal que la densidad de energía de la ULDM de spin-2, M_{ij} , coincida con la densidad de energía observada hoy en día, ρ_{DM} . Υ es una fase aleatoria.
- Cuando se dice que el campo oscila rápidamente, $mt \gg 1$, lo que se está diciendo es que en la EOM (2.24) se puede despreciar el término con el parámetro de Hubble, $3H\dot{M}_{ij}$, y por lo tanto la ecuación resulta la misma que la de un oscilador armónico, motivo por el cual el campo oscila. Cosmológicamente, se pedirá que el campo empiece a oscilar en radiación, por lo tanto se pedirá que $m > H_{eq}$ para que se comporte como materia (Marsh, 2016).
- La densidad de energía y presión de la DM resultan $\rho_{\text{DM}} \sim \dot{M}_{ij}\dot{M}^{ij} + m^2 M_{ij}M^{ij}$ y $P_{\text{DM}} \sim \dot{M}_{ij}\dot{M}^{ij} - m^2 M_{ij}M^{ij}$ respectivamente. Promediando temporalmente (cosmológicamente), se obtiene que $\dot{M}_{ij}\dot{M}^{ij} = m^2 M_{ij}M^{ij}$ y por lo tanto, en promedio, $P_{\text{DM}} \simeq 0$ y $\rho_{\text{DM}} \sim a(t)^{-3}$, comportándose entonces como materia.
- ε_{ij} es una matriz angular cuadrupolar con norma 1, traza nula y simétrica, que da cuenta del carácter tensorial de M_{ij} .

La solución (2.27) es totalmente análoga y reminiscente a aquella obtenida, por ejemplo, para un campo escalar de ULDM, un axión, o una ALP, en un fondo de FLRW. Sin embargo, la diferencia más característica y principal aquí es el hecho de que el campo posee una estructura tensorial que viene caracterizada por el tensor ε_{ij} . A continuación se explicará con más detalle cómo resulta dicha estructura.

Descomposición angular de un campo de spin-2

Siguiendo lo hecho en (Maggiore, 2007)¹², se puede descomponer cualquier tensor simétrico, sin traza y constante en términos de armónicos esféricos según $\varepsilon_{ij} := \sum_m a_m \mathcal{Y}_{ij}^{2m}$ donde se define $Y^{2m} :=$

¹¹De aquí en adelante se utilizará esta notación para dejar la misma lo más sencilla posible.

¹²Ver capítulo 3.5.2 de dicha referencia para más detalle al respecto.

$\mathcal{Y}_{ij}^{2m} n^i n^j$ con $Y_{2m}(\hat{n})$ siendo los armónicos esféricos reales, y $\hat{n} := (x, y, z)$ el versor coordenado de forma tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Más aún, se normalizarán los armónicos esféricos según

$$\begin{aligned} Y^{2,-2} &= \sqrt{2}xy, & Y^{2,2} &= (x^2 - y^2)/\sqrt{2}, \\ Y^{2,-1} &= \sqrt{2}yz, & Y^{2,1} &= \sqrt{2}zx, \\ Y^{2,0} &= (x^2 + y^2 - 2z^2)/\sqrt{6}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De esta manera, las matrices multipolares \mathcal{Y}_{ij}^{2m} resultan

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{2,-2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{Y}^{2,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Y}^{2,-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{Y}^{2,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Y}^{2,0} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se puede ver que las cinco matrices resultan sin traza tal como era de esperar. Utilizando esta descomposición, la matriz de polarización ε_{ij} , en términos de los parámetros a_m , se escribirá entonces como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_2 - a_0/\sqrt{3} & a_{-2} & a_1 \\ a_{-2} & -a_2 - a_0/\sqrt{3} & a_{-1} \\ a_1 & a_{-1} & 2a_0/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

De esta manera se obtiene que los 5 g.l. del tensor masivo M_{ij} quedan codificados en los parámetros a_m con $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Sin embargo, se puede realizar una reparametrización según

$$\begin{aligned} a_{-2} &:= a_{\times} := \varepsilon_T \sin \chi, & a_2 &:= a_{+} := \varepsilon_T \cos \chi, \\ a_{-1} &:= a_L := \varepsilon_V \sin \eta, & a_1 &:= a_R := \varepsilon_V \cos \eta, \\ a_0 &:= a_S := \varepsilon_S, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $\varepsilon_S^2 + \varepsilon_V^2 + \varepsilon_T^2 = 1$. Esta parametrización viene caracterizada por dos variables angulares, χ y η , y los tres parámetros $\varepsilon_S, \varepsilon_V$ y ε_T . Esta descomposición permite reescribir al tensor ε_{ij} según

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_T c_\chi - \varepsilon_S/\sqrt{3} & \varepsilon_T s_\chi & \varepsilon_V c_\eta \\ \varepsilon_T s_\chi & -\varepsilon_T c_\chi - \varepsilon_S/\sqrt{3} & \varepsilon_V s_\eta \\ \varepsilon_V c_\eta & \varepsilon_V s_\eta & 2\varepsilon_S/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

donde se ha usado la notación breve $s_x := \sin x$, $c_x := \cos x$. Mediante esta parametrización, la descomposición en componentes escalares, vectoriales y tensoriales resulta más evidente y sencilla de manejar. Cabe destacar, no obstante, que dicha separación de las componentes depende de la elección del sistema de referencia. Esta definición es una conveniencia realizada principalmente para entender y visualizar la interacción de las cinco componentes del tensor con los sistemas físicos relevantes para esta tesis, tales como son los púlsares y ondas gravitacionales. Precisamente esta descomposición permite estudiar y comparar con los casos estudiados con más detalle en la literatura como son el escalar y vectorial. Por notar y citar solamente algunas de sus características principales, si por ejemplo se considera que la componente tensorial es la única presente (es decir $\varepsilon_S = \varepsilon_V = 0$), se obtiene una descomposición análoga a los modos TT de las ondas gravitacionales. De la misma manera, si ahora se considera $\varepsilon_V = \varepsilon_T = 0$, solamente la componente escalar entrará en juego, presente únicamente en las componentes diagonales de ε_{ij} .

En resumen, se tiene un campo masivo de spin-2 dado por (2.27), cuya evolución es análoga a la de un campo escalar ultraliviano o un axión, donde la diferencia principal reside en su carácter tensorial del mismo, caracterizado por la matriz angular ε_{ij} (2.32). Lo que resta por ver, aún, es cómo interactúa el campo con la materia. Incorporando dicha interacción a (2.20), se agrega un término que resulta

$$S_{int} = \frac{\alpha}{2M_P} \int d^4x \sqrt{-\mathcal{G}} M_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(\psi) \quad (2.33)$$

Este término no es más que el último término presente en la acción (2.17). En este sentido se dice que α cuantifica la interacción del campo de spin-2 con la materia. Uno de los objetivos principales de esta tesis es mostrar las cotas halladas sobre este parámetro utilizando diversos objetos y fenómenos físicos. Cabe remarcar que, a pesar que α resulta el parámetro de acoplamiento, en este tipo de teorías surge naturalmente y no se necesita agregar a mano. Esta observación resulta de sumo interés ya que las teorías de bigravidad, y en particular el modelo bajo estudio en esta tesis, permite estudiar y poner a prueba tanto gravedad como modificaciones a ella a la vez, particularmente materia oscura¹³.

¹³Más aún, en el capítulo 5 se verá que el parámetro α cuantifica la interacción del potencial de Yukawa, emergiendo este como una modificación al potencial gravitatorio como una quinta fuerza.

La idea a continuación, y a modo de cierre de capítulo, será brindar ciertos números y escalas del campo de spin-2 que resultarán relevantes para los capítulos siguientes.

◇ El valor que se tomará como normalización con respecto a la densidad de energía observada en el sistema solar, ρ_{DM} , será de $\rho_{\text{DM}} = 0.3 \text{ GeV/cm}^3$ (Evans et al., 2019; McKee et al., 2015; Piffi et al., 2014).

◇ El campo permanecerá homogéneo en escalas menores a λ_{dB} , dada por

$$\lambda_{\text{dB}} \equiv 2\pi/mv \simeq 4 \text{ kpc} \left(\frac{10^{-3}}{V} \right) \left(\frac{10^{-23} \text{ eV}}{m} \right) \quad (2.34)$$

donde V es la velocidad virial en el halo, la cual - para la Vía Láctea - se toma $V_0 \sim 10^{-3}$.

◇ El campo permanecerá coherente en el tiempo siempre y cuando $t_{\text{coh}} > t_{\text{obs}}$, donde t_{coh} es el tiempo de coherencia dado por

$$t_{\text{coh}} := \pi/mv^2 \sim 10^6 \text{ yr} \left(\frac{10^{-3}}{V} \right)^2 \left(\frac{10^{-23} \text{ eV}}{m} \right) \quad (2.35)$$

con t_{obs} el tiempo de observación. Si no fuese así, entonces la dependencia temporal en (2.27) debería modificarse.

Recapitulando, hasta aquí se ha construido una teoría masiva de spin-2 bien comportada, propagándose en un fondo curvo genérico, interactuando con los campos de materia. Más aún, se ha mostrado que es posible extender estos resultados a un modelo de materia oscura ultraliviana (ULDM) tensorial, y se ha visto cuáles son sus características más relevantes. En lo que resta de la tesis, el objetivo será poner cotas al modelo. Más precisamente, se estudiará cuáles son los posibles valores del parámetro de acoplamiento α como función de la masa de la materia oscura, y cuáles son sus cotas. Para eso se utilizarán púlsares binarios, *pulsar timing array*, y ondas gravitacionales. El siguiente capítulo estará dedicado el primero de estos: púlsares binarios.

Capítulo 3

Púlsares binarios

Los púlsares binarios (*BPs*) son excelentes objetos - astrofísicos - para testear y estudiar materia oscura (ultraliviana). Dichos objetos funcionan como *faros* de la naturaleza dada su increíble estabilidad en el período orbital. Sus parámetros orbitales se pueden medir con suma precisión, por lo que estudiando pequeñas variaciones de los mismos, es posible poner cotas a distintos modelos alternativos de gravedad. En este capítulo se estudiará cómo se ve modificado el período orbital junto con otros parámetros orbitales de un sistema de púlsares binarios cuando el mismo se encuentra en presencia de un campo de ULDM de spin-2. En particular, las oscilaciones (coherentes) del campo de DM perturban la dinámica del sistema binario conduciendo así a efectos seculares¹ para ciertos valores de la masa del campo que resuena con dicho sistema. Para el rango de masas $10^{-23} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 10^{-17} \text{ eV}$ se pudo acotar el acople universal de la DM con la materia ordinaria al orden de $\alpha \simeq 10^{-5}$. Los resultados de este capítulo son fruto del trabajo "*Binary Pulsars as probes for Spin-2 Ultralight Dark Matter*", (Armaleo et al., 2020a).

El objetivo en este capítulo es mostrar y explicar cómo los BPs pueden ser utilizados para poner cotas al modelo de ULDM de spin-2. Para ello, primero se hará un breve repaso sobre cómo los púlsares son objetos de sumo interés y relevantes para testear modelos de gravedad, en particular para testear modelos de ULDM. Posteriormente, se proseguirá a explicar en detalle cómo resultan las cotas para el modelo de ULDM de spin-2 presentado en el capítulo anterior.

¹Dada una serie temporal, en contraposición con una variación periódica, una variación *secular* es aquella la cual es de larga duración con respecto al período orbital del sistema binario, que se amplifica con el tiempo de observación.

3.1. Púlsares binarios y ULDM

Un púlsar es una estrella de neutrones que emite radiación electromagnética de sus polos magnéticos, que rota extremadamente rápido y con suma estabilidad (ver Fig. 3.1). Precisamente debido a esta estabilidad en el período, los púlsares funcionan como *faros* en el Universo. En 1974, R.A. Hulse y J.H. Taylor descubrieron el primer sistema binario formado por un púlsar y una estrella de neutrones (Hulse and Taylor, 1975) el cual les valió un premio Nobel en 1993. La importancia de dicho descubrimiento recae en el hecho de que los sistemas binarios deberían perder energía en forma de emisión de GW, tal como lo predice GR; el sistema binario observado por Hulse y Taylor (también conocido como² PSR B1913+16, PSR J1915+1606 o bien PSR 1913+16) fue el primero donde se observó que la órbita de dicho sistema decrecía con el tiempo debido a la emisión de GW, en completa concordancia con las predicciones de GR (Weisberg and Taylor, 2005). De esta manera se terminaba de abrir un nuevo paradigma para poner a prueba GR mediante tests de mediciones extremadamente precisas arrojadas por las observaciones de púlsares, particularmente de púlsares en sistemas binarios.

La Fig. 3.1, presentada en (Wex, 2014), muestra dos de las características más principales de los púlsares: su período de rotación P y su variación temporal \dot{P} debida a la pérdida de energía. Los púlsares cuya variación temporal es extremadamente pequeña (aquellos denominados como *milliseconds pulsars*) resultan objetos sumamente estables y por ende funcionan como relojes para realizar tests de gravedad mediante *astronomía de precisión*. Estos "relojes" se utilizan mediante el conteo de los pulsos que arriban de los púlsares mediante su emisión electromagnética. Midiendo exactamente el tiempo de arribo de la señal de los pulsos de radio emitidos por los púlsares, se pueden medir diversos efectos gravitacionales y así poner a prueba distintas teorías. La técnica utilizada donde se miden estos pulsos de radio y se ajusta la señal mediante cierto modelo se la conoce como *pulsar timing*. Una breve descripción de esta técnica se detalla en el recuadro debajo, y se recomienda consultar la bibliografía (Lorimer and Kramer, 2004) para más detalles al respecto³.

Pulsar timing

La idea de la técnica de *pulsar timing* es aprovechar la estabilidad de los (milliseconds) púlsares para extraer la mayor información posible a partir de las observaciones temporales de los pulsos que arriban del mismo. La técnica consiste, en esencia, en medir los tiempos de arribo de los pulsos en los radiotelescopios terrestres y ajustar la señal recibida con un modelo apropiado para dichos

²La nomenclatura hace referencia a la posición del púlsar en el cielo, denotando la ascensión recta y la declinación.

³Ver capítulo 8 de dicha referencia.

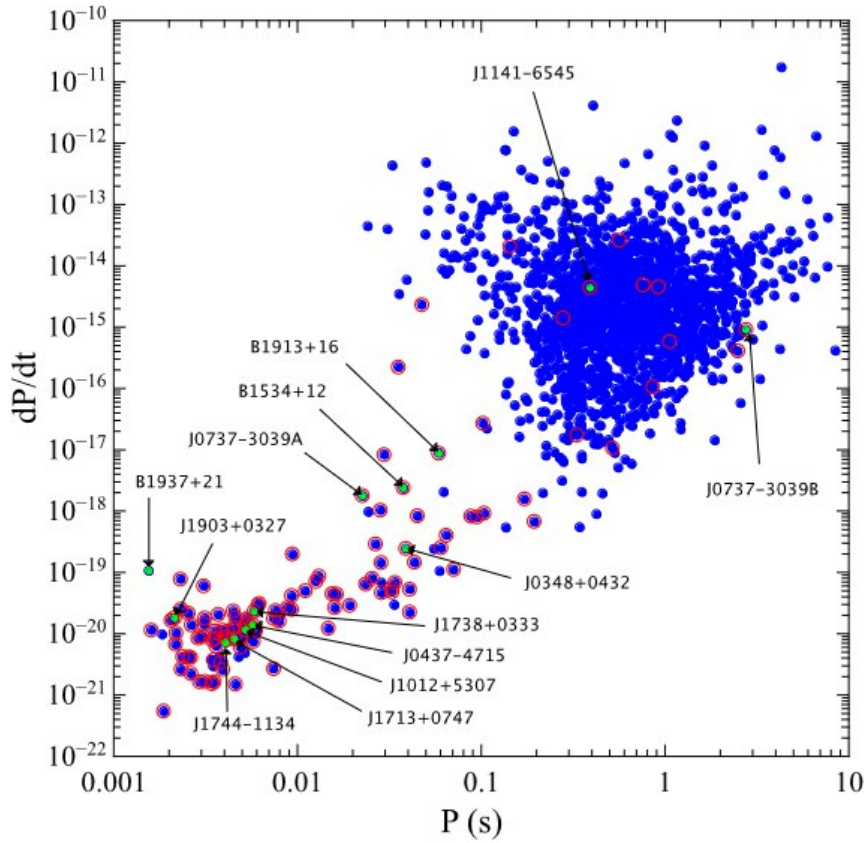


Figura 3.1: Gráfico de la variación del período orbital P con respecto al tiempo, como función de su período (medido en segundos). Cada uno de los puntos representa un púlsar, donde los puntos redondeados en rojo son púlsares que se encuentran en sistemas binarios. (crédito de la imagen: (Wex, 2014)).

pulsos. Cabe mencionar que dado que las señales que se reciben en los detectores son muy débiles (en comparación con el ruido generado por el medio interestelar), lo que se hace a la hora de realizar los análisis es integrar los perfiles de los pulsos recibidos durante un período de tiempo prolongado. A su vez, hay que mencionar que mientras la forma de los pulsos individuales en general es distinta para cada pulso, los perfiles integrados poseen una gran estabilidad en la frecuencia e intensidad. Este procedimiento se lo conoce como *folding* y es la esencia de la técnica. Mediante un análisis geométrico del tiempo de llegada (*TOA* por sus siglas en inglés) de los pulsos, caracterizando las interferencias del medio interestelar y teniendo en cuenta las correcciones relativistas, permite definir los parámetros característicos de la órbita del púlsar. Debido a que los pulsos poseen cierto ancho, el TOA se refiere a cierto punto fiducial del perfil de la señal.

Dado que los perfiles de los pulsos, en líneas generales, presentan formas estables para toda frecuencia observada, los TOA se pueden determinar de manera precisa mediante correlaciones (*cross-correlations*) entre los perfiles observados; dado un *template* $\mathcal{T}(t)$ para los perfiles, se podrá describir al perfil $\mathcal{P}(t)$ según

$$\mathcal{P}(t) = a + b\mathcal{T}(t - \tau) + \mathcal{N}(t) \quad (3.1)$$

donde a es un *offset* arbitrario y b es un factor de escaleo, y se ha introducido el ruido correspondiente, $\mathcal{N}(t)$ (notar que implícitamente se está asumiendo que el perfil $\mathcal{P}(t)$ es una función reescaleada y corrida del template $\mathcal{T}(t)$). El corrimiento temporal entre el perfil y el template, τ , otorga el TOA relativo entre el punto fiducial del template y el tiempo inicial de observación.

Con el fin de minimizar el ruido $\mathcal{N}(t)$ en (3.1), idealmente se construye un template que sea libre de ruido tal como, por ejemplo, representar el perfil de los pulsos como suma de Gaussianas; este método resulta adecuado para observaciones cuyas mediciones presentan perfiles que cambien su forma con la frecuencia. Para producir un template a partir de una frecuencia adicional observada, solamente las amplitudes y anchos relativos de las Gaussianas se ajustarán, mientras que su posición se deja fija. Dado que el punto fiducial es el mismo para todas las frecuencias, es posible comparar los TOA para diferentes frecuencias de una manera no sesgada.

Para calcular explícitamente el TOA de los distintos púlsares, es necesario tener en cuenta todos los posibles efectos que podrían estar produciendo variaciones en el tiempo de llegada del mismo a los relojes terrestres. Dado que se utilizan telescopios ubicados en la Tierra la cual gira alrededor del Sol, previo a analizar las mediciones de los TOA en los relojes (tiempo de arribo *topocéntrico*), se deben referir los mismos al centro de masa del Sistema Solar. Es decir, cambiar del frame no inercial de la Tierra al frame SSB (*Solar System Barycenter* por sus siglas en inglés) que se puede aproximar por un frame inercial. Luego, también, se deberán tener en cuenta los efectos producidos por la aceleración relativa entre el SSB y los púlsares, como así también los efectos relativistas producidos por objetos masivos dentro del Sistema Solar. El TOA del SSB, t_{SSB} , teniendo en cuenta todos los efectos posibles se podrá escribir entonces como

$$\begin{aligned} t_{SSB} = & t_{topo} + t_{corr} - \Delta D/f^2 + \Delta_{R_\odot} + \Delta_{S_\odot} + \Delta_{E_\odot} \\ & + \Delta_{RB} + \Delta_{SB} + \Delta_{EB} + \Delta_{AB} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde t_{topo} es el TOA topocéntrico, t_{corr} da cuenta de las correcciones intrínsecas a los TOA topocéntricos de los relojes, $\Delta D/f^2$ brinda las correcciones correspondientes a la dispersión debido al medio interestelar, Δ_{R_\odot} es el *Römer time delay*, Δ_{S_\odot} es el *Shapiro time delay* y Δ_{E_\odot} el *Einstein time delay* (ver sección 8.2.2 de (Lorimer and Kramer, 2004) para ahondar al respecto). El segundo renglón de (3.2) corresponde a los efectos en el TOA cuando el pulsar se encuentra en un sistema binario, los cuales resultan en un *Römer delay* Δ_{RB} debido a la órbita binaria, un *Shapiro* y

Einstein delay Δ_{SB} y Δ_{EB} , respectivamente, debidos al campo gravitacional del objeto binario, y un término Δ_{AB} debido a la aberración del movimiento orbital.

Más específicamente, la técnica de pulsar timing se utiliza para determinar ciertos parámetros orbitales de los púlsares binarios, particularmente su período. En este capítulo se ahondará sobre cotas al modelo de ULDM de spin-2 mediante la utilización de los datos obtenidos a partir de esta técnica.

Cuando un sistema binario se encuentra en presencia de un campo (de DM), los parámetros orbitales se ven modificados. En particular, el campo de ULDM considerado en esta tesis se encuentra oscilando con una frecuencia dada por su masa, ec.(2.27); precisamente esta oscilación perturba la dinámica orbital del sistema, y en el caso en que la frecuencia de oscilación sea un múltiplo (entero) de la frecuencia orbital, el sistema entrará en resonancia generando efectos seculares los cuales son medibles con los datos actuales. Esta es la idea principal y novedosa presentada en (Blas et al., 2017), estudiando el caso en donde el sistema binario entra en resonancia con un campo de ULDM de spin-0. La adaptación y descripción para el caso de spin-2 es lo que compete a este capítulo de la tesis, haciendo foco en la interacción entre el campo de ULDM y la materia ordinaria que constituyen las estrellas, púlsares, etc. El comportamiento para el campo de spin-2 de ULDM vendrá dado en términos de (2.27), donde en este caso como se estudiará lo que sucede en escalas astrofísicas, el factor de escala $a(t) = 1$. Vale la pena notar que en las escalas relevantes para los púlsares binarios, la solución (2.27) será válida pero con la salvedad de que la densidad de energía de ULDM ρ_{DM} y la fase Υ vendrán dadas en términos de su valor local, el cual dependerá específicamente de la locación espacial del sistema binario dentro del halo de ULDM. Es decir, las escalas que se están considerando podrían ser del mismo orden que λ_{dB} , Ec.(2.34), y por lo tanto los gradientes podrían llegar a ser relevantes. Sin embargo, en lo que sigue se trabajará a orden lineal en los gradientes (que serán de orden λ_{dB}^{-1}), despreciando términos de orden superior en las derivadas del campo de ULDM. A continuación se desarrollará de manera más explícita cómo resulta la interacción entre el campo de ULDM y el sistema binario en cuestión.

Interacción ULDM de spin-2 - Sistema binario

La interacción entre el campo de ULDM y la materia viene dada por (2.33),

$$S_{\text{int}} := \lambda \int d^4x \sqrt{-g} M_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

donde se ha definido, para acortar la notación, $\lambda := \alpha/2M_P$. Aquí $T^{\mu\nu}$ es el EMT de la materia ordinaria, que en este caso representa a los BPs. Para poder dilucidar cómo afecta la DM a los parámetros orbitales de los BPs y poder estudiar el modelo de forma fehaciente, es menester desarrollar el EMT del sistema en términos de cantidades observables. Para eso lo que se hará será aproximar

a cada estrella en el sistema binario como una partícula puntual de masa M_A , energía E_A , posición \vec{x}_A y cuadri-velocidad u_A^μ , donde el subíndice $A = [1, 2]$ representa a cada una de las dos estrellas del sistema binario. El EMT del sistema binario vendrá dado entonces por

$$T^{\mu\nu} = E_1 u_1^\mu u_1^\nu \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + E_2 u_2^\mu u_2^\nu \delta(\vec{x} - \vec{x}_2). \quad (3.4)$$

Dado que las estrellas son no-relativistas, es posible aproximar $E_A \simeq M_A$ y $u_A^i = v_A^i$, con $v_A^i := dx_A^i/dt$ siendo la velocidad del cuerpo A . Con este EMT, el Lagrangiano de interacción para cada estrella se escribe según $L_{\text{int}}^A = \lambda M_A M_{\mu\nu} u_A^\mu u_A^\nu$, por lo que el Lagrangiano de interacción total resulta

$$L_{\text{int}} = \lambda M_T \left[M_{00} + 2M_{0i} V_{\text{CM}}^i + M_{ij} V_{\text{CM}}^i V_{\text{CM}}^j \right] + \lambda \mu v^i v^j M_{ij}, \quad (3.5)$$

donde se ha definido M_T como la masa total del sistema binario ($M_T := M_1 + M_2$), μ la masa reducida ($\mu := M_1 M_2 / M_T$) y $v^i := v_1^i - v_2^i$ es la velocidad relativa de las estrellas. A su vez, la velocidad del centro de masa del sistema viene dada por $V_{\text{CM}}^i := (M_1 v_1^i + M_2 v_2^i) / M_T$. Aquí es necesario notar que, dado que el campo es transversal ($\partial^\mu M_{\mu\nu} = 0$):

- $\partial^0 M_{0j} = -\partial^i M_{ij} \implies M_{0i}$ es de primer orden en gradientes de M_{ij} .
- $\partial^0 M_{00} = -\partial^i M_{0i} \implies M_{00}$ es de segundo orden en gradientes de M_{ij} .

Teniendo la interacción entre la ULDM y el sistema binario, lo que se hará a continuación será calcular y estudiar cómo resultan los efectos seculares observables en los parámetros del BP.

3.2. Efectos seculares

Para calcular los efectos seculares sobre los parámetros orbitales se usará el método de las *órbitas osculantes*⁴, donde el objetivo será estudiar cómo se ven modificados los seis parámetros orbitales Keplerianos, descritos por las *ecuaciones planetarias de Lagrange*, en términos de la perturbación generada por el campo de DM. Antes de calcular explícitamente cómo resulta la perturbación a la aceleración relativa entre las dos estrellas, que vendrá parametrizada en términos de la fuerza (por unidad de masa) F_i según $\dot{v}_i \rightarrow \dot{v}_i + \delta\dot{v}_i := \dot{v}_i + F_i$, lo primero que se hará será reportar cómo son las ec. Planetarias de Lagrange, siguiendo lo hecho y la notación de (Blas et al., 2020; López Nacir and Urban, 2018).

⁴Una órbita osculante es la órbita Kepleriana que describiría un objeto en presencia de un cuerpo central si no hubiera perturbaciones.

Ec. Planetarias de Lagrange

Las ec. Planetarias de Lagrange vienen dadas por (Danby, 1970)

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{\omega_b} \left\{ \frac{e \sin \theta}{a \vartheta} F_r + \frac{\vartheta}{r} F_\theta \right\}, \quad (3.6a)$$

$$\dot{e} = \frac{\vartheta}{a \omega_b} \{ (\cos \theta + \cos E) F_\theta + \sin \theta F_r \}, \quad (3.6b)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin(\theta + \omega)}{a^2 \omega_b \vartheta \sin \iota} F_z, \quad (3.6c)$$

$$\dot{i} = \frac{r \cos(\theta + \omega)}{a^2 \omega_b \vartheta} F_z, \quad (3.6d)$$

$$\dot{\varpi} = \frac{\vartheta}{a e \omega_b} \left\{ \left[1 + \frac{r}{a \vartheta^2} \right] \sin \theta F_\theta - \cos \theta F_r \right\} + 2 \sin^2(\iota/2) \dot{\Omega}, \quad (3.6e)$$

$$\dot{\epsilon}_1 = -\frac{2r}{a^2 \omega_b} F_r + (1 - \vartheta) \dot{\varpi} + 2 \vartheta \sin^2(\iota/2) \dot{\Omega}, \quad (3.6f)$$

Aquí los seis elementos orbitales (independientes) son: a el **semieje mayor**⁵, e la **excentricidad orbital**, Ω la **longitud del nodo ascendente**, ι el **ángulo de inclinación** del plano orbital con respecto al plano de referencia del cielo, $\varpi = \omega + \Omega$ la **longitud del periastro** (con ω el argumento del periastro) y t_0 el **tiempo del periastro**. A su vez, se define $\epsilon_1 = \omega_b(t - t_0) + \varpi - \int dt \omega_b$ donde $\omega_b = \sqrt{GM_T/a^3} = 2\pi/P_b$ es la frecuencia orbital del sistema binario, con P_b su período orbital. E es la anomalía excéntrica, definida según $\omega_b(t - t_0) = E - e \sin E$. Asimismo se define $\vartheta := \sqrt{1 - e^2}$. El punto sobre las cantidades denota derivadas con respecto al tiempo t . Se ha utilizado, a su vez, coordenadas cartesianas (x, y, z) y cilíndricas (r, θ, z) en el plano orbital (ver Fig. 3.2) de manera que $\vec{r} := \hat{r} = r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y}$ con θ la posición angular de M_1 con respecto a la dirección del pericentro, \hat{x} , y donde se ha descompuesto la perturbación según $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{z}$ (una expresión explícita de las componentes de \vec{F} , o de cualquier vector genérico, en las coordenadas (X, Y, Z) se puede ver con más detalle en (Poisson and Will, 2014)). Teniendo las expresiones para los parámetros orbitales, dados por las ec. Planetarias de Lagrange, la idea a continuación será calcular cómo resultan las componentes de la fuerza en el caso en que la perturbación venga dada por el campo de ULDM de spin-2, Ec. (3.5).

Para calcular la perturbación, el punto de partida será la ecuación (3.5). Definiendo la distancia relativa entre las estrellas según $r^i := r_1^i - r_2^i$, la idea es calcular cómo resulta la perturbación a la aceleración relativa entre ambas, $\ddot{r}_i = \dot{v}_i \rightarrow \dot{v}_i + \delta \dot{v}_i := \dot{v}_i + F_i$. La órbita sin perturbar no es otra cosa más que la fuerza gravitatoria (por unidad de masa) del sistema de dos cuerpos, $\dot{v}_i = -GM_T r_i / r^3$ con $G := 8\pi/M_P^2$ la constante de Newton. La perturbación a dicha aceleración vendrá dada por la EOM calculada a partir de (3.5). Es decir, a la fuerza gravitatoria del sistema de dos cuerpos comentada

⁵No confundir con el factor de escala $a(t)$.

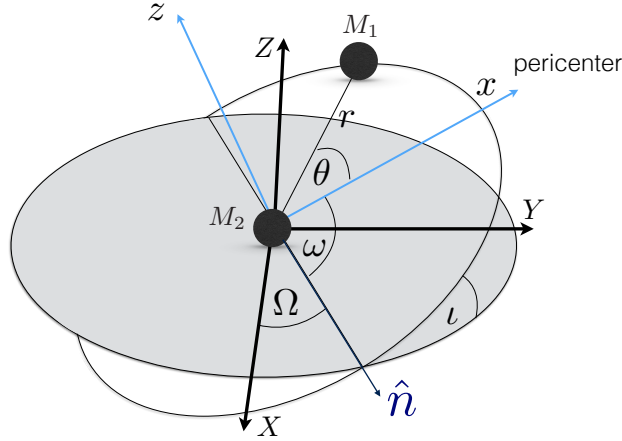


Figura 3.2: Descripción de las órbitas Keplerianas en términos de los elementos orbitales vistos en el sistema de referencia fundamental (X, Y, Z) . Se muestran, a su vez, los sistemas de referencias orbitales cartesianos (x, y, z) y polares (r, θ, z) , centrados en M_2 por conveniencia.

previamente, se le agrega un término extra que resulta

$$\dot{v}_i + 2\lambda \left(M_{ij} \dot{v}^j + \dot{M}_{ij} v^j \right) + \frac{GM_T}{r^3} r_i = 0, \quad (3.7)$$

De esta manera la expresión para la perturbación - que viene parametrizada en términos de la fuerza por unidad de masa F_i - resulta

$$F_i = 2\lambda \left[\frac{GM_T}{r^3} M_{ij} r^j - \dot{M}_{ij} v^j \right]. \quad (3.8)$$

En este punto vale la pena notar dos cosas:

- Mediante la definición de la distancia relativa $r^i := r_1^i - r_2^i$, las ecuaciones para el centro de masa del sistema binario se desacoplan de aquellas que describen el movimiento relativo.
- La perturbación en el centro de masa oscila acorde al campo de ULDM y promedia a cero en escalas de tiempo mucho mayores que el período de oscilación y, por ende, no produce ningún efecto secular.

Con la expresión para las componentes de la fuerza, (3.8), el próximo paso es calcular explícitamente cómo resulta este en términos de los parámetros orbitales y de los parámetros de la teoría de spin-2. Para eso se utilizará la expresión (2.27), teniendo en cuenta que $r^j = r \hat{r}^j$ y $v^j = \dot{r} \hat{r}^j + r \dot{\theta} \hat{\theta}^j$, donde se ha tomado el sistema de referencia del sistema binario en coordenadas polares (r, θ, z) con $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ denotando los versores polares. La fuerza F_i resulta entonces

$$F_i = 2\lambda\sqrt{2\rho_{\text{DM}}}\varepsilon_{ij}\left[\frac{GM_T}{r^3}\frac{r^j}{m}\cos(mt + \Upsilon) + v^j\sin(mt + \Upsilon)\right] \quad (3.9)$$

El factor que acompaña al coseno se puede reescribir en términos de la frecuencia orbital ω_b y el semieje mayor a a partir de la definición del periodo orbital

$$P_b := \frac{2\pi}{\omega_b} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}, \quad (3.10)$$

En cuanto al factor que acompaña al seno, es decir v^j , la idea será reescribir \dot{r} y $r\dot{\theta}$ en términos de los parámetros orbitales. Para ello serán útiles las relaciones otorgadas a partir de las órbitas Keplerianas (ver recuadro *Órbitas de Kepler*).

Órbitas de Kepler

A continuación se detallan ciertas relaciones útiles que surgen a partir de las órbitas Keplerianas:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, & \dot{\theta} &= \frac{\omega_b a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}, \\ \dot{r} &= \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2} e \sin\theta \dot{\theta} = \frac{\omega_b a e \sin\theta}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

De esta manera la perturbación se puede escribir entonces como

$$\begin{aligned} F_i &= \sqrt{2}\varkappa \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r}^j \cos(mt + \Upsilon) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\vartheta} \left[\hat{r}^j e \sin\theta + \hat{\theta}^j (1+e\cos\theta) \right] \sin(mt + \Upsilon) \right\} \varepsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde se definió $\varkappa := 2\lambda a \omega_b \sqrt{\rho_{\text{DM}}}$ (recordar que, a su vez, se utilizó la definición $\vartheta := \sqrt{1-e^2}$).

Tal como se puede ver a partir de (3.11), la perturbación causada por la ULDM sobre el sistema binario oscila. Sin embargo, tal como se ha mostrado en (Blas et al., 2020, 2017; López Nacir and Urban, 2018), si la frecuencia de oscilación del campo (dada por su masa m) es algún múltiplo entero de la frecuencia orbital ω_b del sistema binario, esto es $N\omega_b$ con $N \in \mathbb{N}$, entonces el sistema experimentará efectos seculares producidos gracias a la resonancia en las perturbaciones. Para ver cómo resultan estos efectos seculares sobre los parámetros orbitales del sistema binario, el primer paso es obtener una expresión explícita para estos parámetros como función del tiempo, que estarán dados por las ec. Planetarias de Lagrange. En lo que sigue del texto se hará el cálculo explícito para uno de estos parámetros, el semieje mayor a ; las ecuaciones para los demás parámetros se pueden obtener de manera análoga, y los resultados de estos se pueden consultar en el Apéndice A. La variación del semieje mayor venía dada por (3.6a),

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{\omega_b} \left\{ \frac{e \sin \theta}{a \partial} F_r + \frac{\partial}{r} F_\theta \right\},$$

El objetivo, entonces, es escribir de manera explícita las componentes polares de F_i a partir de (3.11). Para eso se descompondrá al tensor de polarización ε_{ij} según (2.32), definido en el mismo sistema de referencia orbital que la fuerza, el cual se escribía según

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{TC\chi} - \varepsilon_S/\sqrt{3} & \varepsilon_{TS\chi} & \varepsilon_{VC\eta} \\ \varepsilon_{TS\chi} & -\varepsilon_{TC\chi} - \varepsilon_S/\sqrt{3} & \varepsilon_{VS\eta} \\ \varepsilon_{VC\eta} & \varepsilon_{VS\eta} & 2\varepsilon_S/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

Con esta descomposición en mente, lo que resta hacer es calcular las contracciones del tensor de polarización ε_{ij} con los versores \hat{r}^i y/o $\hat{\theta}^i$ (y, asimismo, con \hat{z}^i). Por completitud, será relevante recordar que $\hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ y $\hat{z} = (0, 0, 1)$. Haciendo las contracciones pertinentes, es sencillo ver que las mismas dan

$$\varepsilon_{ij} \hat{r}^i \hat{r}^j \propto \varepsilon_{TC\chi-2\theta} - \varepsilon_S/\sqrt{3}, \quad (3.12a)$$

$$\varepsilon_{ij} \hat{r}^i \hat{\theta}^j \propto \varepsilon_{TS\chi-2\theta}, \quad (3.12b)$$

$$\varepsilon_{ij} \hat{\theta}^i \hat{\theta}^j \propto -\varepsilon_{TC\chi-2\theta} - \varepsilon_S/\sqrt{3}, \quad (3.12c)$$

$$\varepsilon_{ij} \hat{r}^i \hat{z}^j \propto \varepsilon_{VC\eta-\theta}, \quad (3.12d)$$

$$\varepsilon_{ij} \hat{\theta}^i \hat{z}^j \propto \varepsilon_{VS\eta-\theta}, \quad (3.12e)$$

donde el factor de proporcionalidad que se ha omitido es $1/\sqrt{2}$, y se ha usado la notación abreviada $c_x := \cos x$, $s_x := \sin x$. Con estas contracciones a mano, las componentes de la fuerza se pueden expresar de la siguiente manera:

$$F_r = \varkappa \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\varepsilon_{TC\chi-2\theta} - \frac{\varepsilon_S}{\sqrt{3}} \right] c_{mt+\Upsilon} + \frac{1}{\partial} \left[\varepsilon_{TS\chi-2\theta} + e\varepsilon_{TS\chi-\theta} - e\frac{\varepsilon_S}{\sqrt{3}} s_\theta \right] s_{mt+\Upsilon} \right\}, \quad (3.13a)$$

$$F_\theta = \varkappa \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^2 [\varepsilon_{TS\chi-2\theta}] c_{mt+\Upsilon} - \frac{1}{\partial} \left[\varepsilon_{TC\chi-2\theta} + e\varepsilon_{TC\chi-\theta} + \frac{\varepsilon_S}{\sqrt{3}} (1 + e c_\theta) \right] s_{mt+\Upsilon} \right\}, \quad (3.13b)$$

$$F_z = \varkappa \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^2 [\varepsilon_{VC\eta-\theta}] c_{mt+\Upsilon} + \frac{1}{\partial} [\varepsilon_{VS\eta-\theta} + e\varepsilon_{VS\eta}] s_{mt+\Upsilon} \right\}. \quad (3.13c)$$

Teniendo las componentes de la fuerza, el próximo paso es reemplazar las mismas en la expresión para \dot{a}/a para luego estudiar, entonces, los efectos seculares. Es necesario notar que para poder estudiar los efectos seculares, lo primero que debe hacerse es escribir \dot{a}/a como función del tiempo. Esto significa que habrá que escribir a todos los parámetros que dependan del tiempo de manera explícita. Para eso

lo primero que se hará será reescribir la expresión de \dot{a}/a habiendo reemplazado las fuerzas F_r y F_θ , y dejando de lado (pre)factores para simplificar la notación. Es decir, se hará foco solamente en la dependencia temporal, por simplicidad (la expresión completa se puede consultar en el Panel 1 del Apéndice A). Reemplazando dichas expresiones, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} \propto & \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r}\right)^2 [\varepsilon_T s_{\chi-2\theta} + e \varepsilon_T s_{\chi-\theta} - e \varepsilon_S s_\theta] c_{mt+\Upsilon} \\ & + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [\varepsilon_T c_{\chi-2\theta} + 2e \varepsilon_T c_{\chi-\theta} + 2e \varepsilon_S c_\theta + e^2 \varepsilon_T c_\chi + \varepsilon_S(1+e^2)] s_{mt+\Upsilon} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde se utilizaron identidades trigonométricas para simplificar la expresión. Se puede ver que los últimos dos términos del segundo renglón son constantes (no dependen del tiempo) por lo tanto no entrarán en juego a la hora de estudiar las variaciones seculares. En cuanto a los otros términos, la dependencia temporal vendrá dada de la mano de r y θ , junto con el semieje mayor a ; para ver cómo son dichas dependencias, junto con distintas combinaciones de estos parámetros, se hará uso explícito de las expresiones que figuran en el Apéndice A. A continuación se esbozará cómo es el procedimiento para obtener la expresión final de \dot{a}/a , cuyo resultado completo se muestra en el Panel 2 del Apéndice A.

Tomando el primer término de (3.14), el mismo puede reescribirse como

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 \varepsilon_T s_{\chi-2\theta} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \varepsilon_T (s_\chi c_{2\theta} - c_\chi s_{2\theta})$$

La dependencia temporal de $c_{2\theta}$ y $s_{2\theta}$ vendrá dada a partir de la expansión de Fourier en términos de funciones de Bessel de $\sin \theta \cos \theta = \tilde{B}_0 + \sum \tilde{B}_n(ne) \sin(n\omega_b t)$ (ver Apéndice A). Utilizando las órbitas de Kepler, es fácil demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sin 2\theta) = \frac{\cos 2\theta}{r^2} 2\omega_b a^2 \sqrt{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos 2\theta = \frac{1}{\omega_b \partial} \frac{\partial}{\partial t}(\sin \theta \cos \theta) \quad (3.15)$$

es decir que entonces $(a/r)^2 c_{2\theta} \sim \sum \tilde{B}_n(ne) n\omega_b \cos(n\omega_b t)$. De forma completamente análoga se puede obtener que $(a/r)^2 s_{2\theta} \sim \sum B_n(ne) n\omega_b \sin(n\omega_b t)$. De esta forma se obtiene que entonces

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 \varepsilon_T s_{\chi-2\theta} \sim \varepsilon_T \sum n \left[s_\chi \tilde{B}_n(ne) c_{n\omega_b t'} + c_\chi B_n(ne) s_{n\omega_b t'} \right] \quad (3.16)$$

Notar que se ha diferenciado el tiempo que aparece a la hora de hacer la expansión de Fourier, t' , de aquel que denota la dependencia temporal del campo de ULDM, t , dado en función de $c_{mt+\Upsilon}$ y/o $s_{mt+\Upsilon}$. Esta diferencia se ha hecho porque, tal como se ha dicho anteriormente, los efectos seculares aparecerán cuando el sistema entre en resonancia⁶ (Blas et al., 2020; López Nacir and Urban, 2018).

⁶Tal como se explica en (Blas et al., 2020) para el caso de ULDM escalar, cuando el sistema se encuentra lejos de la resonancia, los efectos producidos por la perturbación se verán suprimidos.

Más explícitamente, se caracterizará $t' = t - t_0$ con t_0 el tiempo del periastrón. Por ende, siguiendo lo obtenido en (3.16), aparecerán términos que involucran o bien $s_{n\omega_b(t-t_0)}c_{mt+\Upsilon}$ o bien $c_{n\omega_b(t-t_0)}c_{mt+\Upsilon}$. Para caracterizar la resonancia, se definirá $\delta\omega_b := m - N\omega_b$ que parametriza la (pequeña) diferencia entre las dos frecuencias involucradas en la resonancia, con $\delta\omega_b \ll m$; aquí N es el número armónico. Promediando temporalmente sobre un período Δt tal que $P_b/N \ll \Delta t \ll 2\pi/\delta\omega_b$, los efectos seculares vendrán dados según

$$\begin{aligned} \langle s_{n\omega_b(t-t_0)}s_{mt+\Upsilon} \rangle &\approx \frac{1}{2}c_{\gamma(t)}\delta_{n,N}, & \langle s_{n\omega_b(t-t_0)}c_{mt+\Upsilon} \rangle &\approx -\frac{1}{2}s_{\gamma(t)}\delta_{n,N}, \\ \langle c_{n\omega_b(t-t_0)}s_{mt+\Upsilon} \rangle &\approx \frac{1}{2}s_{\gamma(t)}\delta_{n,N}, & \langle c_{n\omega_b(t-t_0)}c_{mt+\Upsilon} \rangle &\approx \frac{1}{2}c_{\gamma(t)}\delta_{n,N}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde se definió

$$\gamma(t) := \delta\omega_b(t - t_0) + mt_0 + \Upsilon. \quad (3.18)$$

De manera completamente análoga a lo obtenido en (3.16), se pueden encontrar los otros términos presentes en \dot{a}/a . Todos los términos hallados, una vez hecho el promedio temporal, tendrán ineluctablemente alguna de las cuatro combinaciones posibles de (3.17). Usando que $\dot{P}_b/P_b = 3\dot{a}/2a$ y tomando solamente el término secular dominante, $n = N$, se obtiene finalmente

$$\langle \dot{P}_b \rangle = -2\lambda P_b \sqrt{3\rho_{\text{DM}}} \left\{ \varepsilon_S J_N(Ne) s_{\gamma(t)} + \varepsilon_T [\mathcal{F}_+(N, e) s_{\gamma(t)+\chi} + \mathcal{F}_-(N, e) s_{\gamma(t)-\chi}] \right\}, \quad (3.19)$$

donde $J_N(z)$ es la función de Bessel de primera especie, y donde se definieron las funciones

$$\mathcal{F}_+(N, e) := \frac{\sqrt{3}}{4} \left[2J_N(Ne) + \frac{2eJ'_N(Ne)}{\vartheta} + \left(\frac{\tilde{B}_N(Ne) - B_N(Ne)}{\vartheta^2} \right) \right], \quad (3.20a)$$

$$\mathcal{F}_-(N, e) := \frac{\sqrt{3}}{4} \left[2J_N(Ne) - \frac{2eJ'_N(Ne)}{\vartheta} - \left(\frac{\tilde{B}_N(Ne) + B_N(Ne)}{\vartheta^2} \right) \right]. \quad (3.20b)$$

La nomenclatura y factorización utilizada para definir las funciones $\mathcal{F}_+(N, e)$ y $\mathcal{F}_-(N, e)$ hace alusión a dos comportamientos sumamente distintos que tendrá (la parte tensorial de) $\langle \dot{P}_b \rangle$ en el límite de órbitas circulares. En la siguiente sección se mostrará cómo resulta dicho comportamiento, junto con los otros resultados hallados y presentados en (Armaleo et al., 2020a). A su vez, y en vistas de (3.17), cabe remarcar que las cotas que se pondrán vendrán dadas por *puntos* y no por regiones con cierto ancho (ver, por ejemplo, figura 3.3). Esto se debe al hecho de que se están estudiando sistemas que están en resonancia con el campo de ULDM. Es decir, se está estudiando solamente el caso en donde $n = N$. Si se considera, en cambio, sistemas que no se encuentran en resonancia, un análisis

más dedicado es necesario y se recomienda la lectura de (Blas et al., 2020; Kûs et al., 2024) para una discusión más detallada al respecto.

3.3. Fenomenología y resultados

El objetivo en esta sección es analizar los efectos seculares que produce la ULDM de spin-2 sobre los BPs. En particular se hará foco sobre lo que sucede con el período orbital (que es, en general, el parámetro donde más y mejor se nota dicho efecto) aunque también se comentará sobre los otros parámetros.

3.3.1. Período orbital

A partir de lo hallado en (3.19) se puede ver que solamente las componentes escalares y tensoriales del campo de spin-2 contribuyen a la variación secular en el período. Se discriminará, a la hora de mostrar los resultados, entre ambas contribuciones. Notar que el hecho de que solamente dependa de estas dos polarizaciones es algo propio de este parámetro orbital; en el Panel 2 (ver Apéndice A) se muestra la dependencia de los seis parámetros en términos de las polarizaciones donde se puede ver que dependiendo qué parámetro orbital se esté estudiando, se tendrán distintas componentes del campo de spin-2 que contribuyan.

Para estudiar los efectos seculares sobre el período orbital, se tomó el valor observado del mismo y, en el caso en que estaba disponible, se le restaron todos los posibles efectos que podrían producir cambios en el mismo. A saber, estos son:

- Efectos cinemáticos, dentro de los cuales se encuentran:
 - Efecto Shklovskii
 - Rotación galáctica diferencial
 - Potencial galáctico
- *GW damping*
- En un caso, B1259-63, se restó también el efecto debido a la pérdida de masa de la estrella compañera por vientos solares

En el caso en que no se encontraban disponibles los datos sobre estos efectos, se utilizaron las cotas superiores estimadas en las referencias correspondientes. Ver Tabla A.1 en el Apéndice A para los valores y referencias. A este valor se lo denominó como el valor central de la variación "*intrínseca*" del período secular; en ausencia de otros efectos, este valor debería ser cero.

Para ser totalmente conservadores, se impone entonces que el efecto debido a las oscilaciones de la ULDM sea menor que (el valor absoluto de) el valor central de la variación de período orbital "intrínseco" más su error correspondiente (obtenido sumando todos los errores en cuadratura). De esta manera se tiene en cuenta, entonces, la mayor desviación posible de cero según lo aceptable por las mediciones. Este mismo criterio fue el que se utilizó para la variación (temporal) de la excentricidad. En la Tabla A.1 se reportan todos los sistemas binarios utilizados en este trabajo.

En general, ambas componentes ε_T y ε_S del cuadrupolo ε_{ij} contribuirán de forma similar a $\langle \dot{P}_b \rangle$. Sin embargo, aquí se las tratará de manera diferenciada, resaltando y entendiendo por separado cuáles son sus respectivas contribuciones y entendiendo su (diferente) fenomenología.

Contribución escalar ε_S

Manteniendo solamente la parte escalar del tensor ε_{ij} , el mismo resulta diagonal y, por construcción, los autovalores de ε_{ij} (asociados al plano orbital) son idénticos. Por lo tanto, por analogía con el caso escalar estudiado en detalle en (Blas et al., 2020, 2017) y por argumentos de simetría, efectos seculares apreciables serán relevantes solamente para órbitas excéntricas, ya que de lo contrario resultarán prácticamente nulos para órbitas circulares⁷. Esto es,

$$\langle \dot{P}_b \rangle \sim \varepsilon_S J_N(Ne) s_{\gamma(t)} \xrightarrow{e \rightarrow 0} 0 \quad (3.21)$$

En la figura 3.3 se muestran los resultados obtenidos de considerar solamente la contribución escalar ε_S . Allí se exhiben las cotas halladas para el parámetro de acoplamiento α como función de la masa (frecuencia) de la teoría de spin-2 de ULDM. Notar que los únicos sistemas binarios que aparecen (*i.e.* contribuyen) en la parte escalar son aquellos con excentricidad apreciable (ver figura 3.3 y Tabla A.1).

Cotas existentes sobre el acoplamiento α vienen dadas a partir del experimento (sonda) Cassini (Hohmann, 2017) y a partir de las mediciones de la (extra)precesión de los planetas dentro del sistema solar, conocido como *restricciones planetarias* (Serenio and Jetzer, 2006); para cierto rango de masas, estas cotas reemplazan y mejoran aquellas halladas en (Adelberger et al., 2009; Murata and Tanaka, 2015).

Contribución tensorial ε_T

Habiendo estudiado el caso escalar, a continuación se verá lo que sucede considerando solamente contribuciones tensoriales a $\langle \dot{P}_b \rangle$. Dichas componentes presentan una fenomenología mucho más rica que el caso anterior, y es el punto central aquí. A partir de (3.19) se puede ver que, como primera

⁷Cabe notar que, a pesar de la analogía pedagógica con el caso escalar, el acople entre la ULDM y las estrellas considerado aquí no es el mismo que el acople universal considerado en el caso escalar en (Blas et al., 2017).

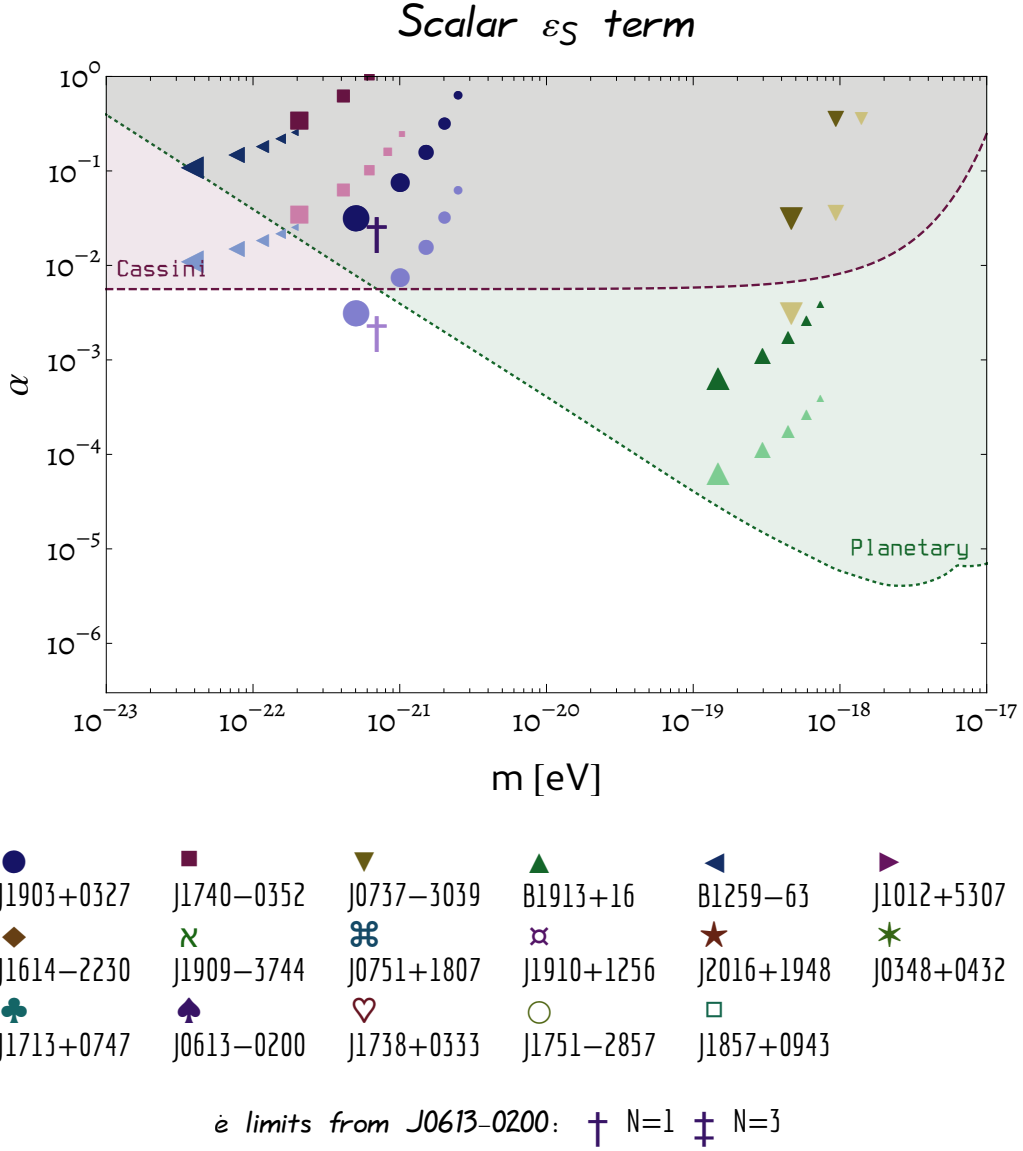


Figura 3.3: Cotas para el acoplamiento α de la ULDM versus la masa m , obtenidos a partir de la consideración de la contribución escalar ε_S solamente. Los símbolos oscuros son las cotas actuales obtenidas a partir de los datos extraídos de los sistemas reportados en la Tabla A.1. Los (mismos) símbolos pero claros muestran las cotas que se obtendrían sobre los mismos sistemas pero considerando una mejora en un factor 10 en la precisión de medición sobre \dot{P}_b . El tamaño de los símbolos representa las distintas resonancias, siendo el más grande la resonancia $N = 1$ y el más chico $N = 5$, decreciendo progresivamente. Al pie de la figura se observan los símbolos que representan a los BPs utilizados en este trabajo (Tabla A.1) donde, a pesar que hay varios que no aparecen en esta figura, sí serán relevantes para la contribución tensorial, figuras 3.4 y 3.5. La región superior sombreada de color violeta se encuentra excluida por tests del sistema solar (Hohmann, 2017), mientras que la región sombreada por encima de la línea punteada verde se encuentra excluida por restricciones planetarias (Serenio and Jetzer, 2006). Se muestra también una cota relevante hallada a partir del estudio secular de la excentricidad, e (ver discusión en la sección 3.3.2).

cuestión a notar, el efecto de estas componentes dependerá de la orientación del tensor de polarización. En particular, y a diferencia del caso escalar, aquí se pueden obtener efectos seculares apreciables incluso cuando se traten de órbitas (cuasi)circulares. Para ver esto basta con indagar un poco más en detalle en las expresiones para \mathcal{F}_+ y \mathcal{F}_- , las cuales se pueden resumir conjuntamente según

$$\mathcal{F}_{\pm}(N, e) := \frac{\sqrt{3}}{4} \left[2J_N(Ne) \pm \frac{2eJ'_N(Ne)}{e} \pm \left(\frac{\tilde{B}_N(Ne) \mp B_N(Ne)}{e^2} \right) \right], \quad (3.22)$$

La cuestión aquí es que para $e \rightarrow 0$ se obtiene un valor no nulo para \mathcal{F}_+ , notando que el armónico $N = 2$ efectivamente contribuye a \dot{P}_b dado que $\mathcal{F}_+(N, e) \rightarrow \sqrt{3}\delta_{N,2}/4$. En cambio, para \mathcal{F}_- sucede que, en el límite $e \rightarrow 0$, $\mathcal{F}_-(N, e) \rightarrow eJ'_N(Ne) \rightarrow J_N(Ne) \rightarrow 0$. Estos resultados pueden obtenerse a partir de las aproximaciones y propiedades de las funciones de Bessel para argumentos chicos, utilizando a su vez las relaciones (A.7). De esta manera, entonces, las contribuciones de los BPs con órbitas circulares resultan

$$\langle \dot{P}_b \rangle \rightarrow -\frac{3}{2} \lambda P_b \sqrt{\rho_{\text{DM}}} \varepsilon_{\text{T}} s_{\gamma(t)+\chi}. \quad (3.23)$$

En la figura 3.4 se muestran las cotas halladas para α a partir de la consideración de la componente tensorial con la parte $\mathcal{F}_+(N, e)$, mientras que en la figura 3.5 se muestra lo análogo para la parte con $\mathcal{F}_-(N, e)$. Es importante notar que, tal como se discutió en el párrafo anterior, en la figura 3.4 aparecen todos los sistemas binarios considerados ya que tanto aquellos con excentricidades grandes como aquellos con e pequeño contribuyen al efecto secular (Ec. (3.23)). Notar que, en cambio, para la parte con $\mathcal{F}_-(N, e)$, solamente los sistemas con excentricidades no nulas contribuyen al efecto, análogo a lo que sucedía con el caso escalar (este es el motivo por el cual ambas figuras son similares). Ciertas observaciones a remarcar:

- ★ Tomando, por ejemplo, el sistema J0737-3039 que posee $e \approx 0.1$, se observa el siguiente efecto a medida que $e \rightarrow 0$: a partir de la figura 3.4, se ve que la contribución del armónico $N = 2$ es considerablemente mayor que las cotas atribuidas para los armónicos $N = 1$ y $N = [3, 4, 5]$. A medida que $e \rightarrow 0$, este efecto se hace cada vez más pronunciado.
- ★ La importancia de estudiar sistemas con excentricidades pequeñas y/o grandes recae en el hecho de que en la naturaleza se observan mayor cantidad de sistemas con órbitas (cuasi)circulares que sistemas con excentricidades altas (Lorimer, 2008; Lorimer and Kramer, 2004).
- ★ El estudio de las contribuciones tensoriales otorga una fenomenología sumamente rica y distinta de aquella otorgada, por ejemplo, en el caso escalar (Blas et al., 2017) o vectorial (López Nacir and

Urban, 2018). A partir de la contribución $\mathcal{F}_+(N, e)$ surge la fenomenología principal que difiere de los otros casos estudiados en la literatura, aunque observando lo que sucede para la parte $\mathcal{F}_-(N, e)$ se pueden obtener resultados similares al caso escalar, pero notando una mejora de casi un factor 10 en las cotas.

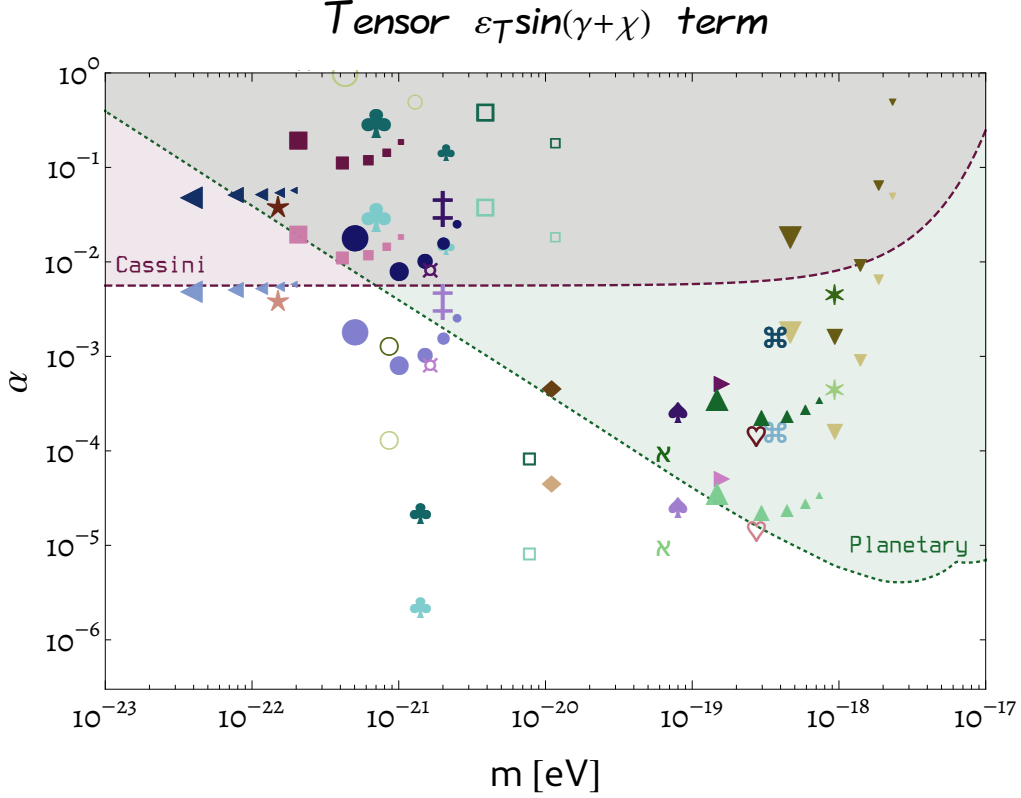


Figura 3.4: Límites en el parámetro de acoplamiento de la ULDM α versus la masa m , obtenida a partir de la contribución tensorial con $\mathcal{F}_+(N, e)$ del tensor de polarización ε_T (Ec. (3.19)). Para la referencia de los símbolos consultar la figura 3.3.

Por último se hará un breve comentario sobre lo que sucede con la otra componente de ε_{ij} que hasta aquí no entró en juego: ε_V . Tal como se puede ver a partir de (3.19), la componente vectorial no genera ningún efecto secular en \dot{P}_b . Esta observación, que podría surgir simplemente de notar el resultado obtenido, tiene una interpretación física que se puede prever de antemano. Precisamente la componente vectorial genera perturbaciones en la dirección \hat{z} ; las variaciones en el período orbital suceden en el plano orbital ($\hat{x}\hat{y}$), por lo que era de esperar que la parte vectorial no entre en juego aquí. Sin embargo, dicha componente sí será relevante a la hora de estudiar otros parámetros orbitales cuyas perturbaciones sí tienen componentes no nulas F_z ⁸. El estudio de los otros parámetros orbitales, donde entran en juego todas las polarizaciones de ε_{ij} , es lo que compete la siguiente (sub)sección.

⁸Notar que esta interpretación sencilla surge a partir de la parametrización utilizada en (2.32) y posteriormente para describir las polarizaciones del tensor M_{ij} .

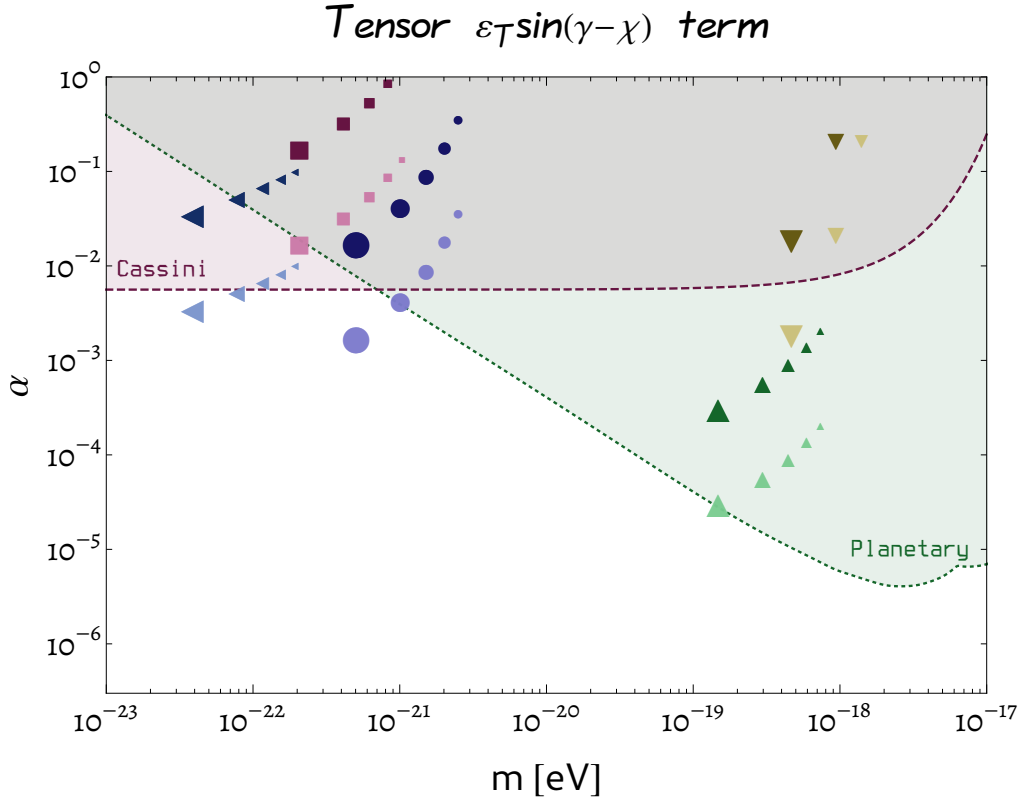


Figura 3.5: Límites en el parámetro de acoplamiento de la ULDM α versus la masa m , obtenida a partir de la contribución tensorial con $\mathcal{F}_-(N, e)$ del tensor de polarización ε_T (Ec. (3.19)). Para la referencia de los símbolos consultar la figura 3.3.

3.3.2. Otros parámetros orbitales: órbitas cuasi-circulares

En la (sub)sección anterior se ha estudiado el efecto secular producido sobre \dot{P}_b , dejando de lado todos los otros parámetros orbitales. De la misma manera, se puede estudiar lo que sucede con los otros parámetros, de manera independiente. Es preciso notar que, si se considera que la perturbación no afecta a los parámetros de manera independiente sino como un conjunto, es de esperar que las cotas halladas para α tengan alguna mejora a la hora de considerar los datos de una manera más precisa y adecuada. Para hacer eso, notar, es necesario tener una expresión que describa cuantitativamente lo que sucede para la variación secular de todos los parámetros orbitales. Dichas ecuaciones se encuentran en el Apéndice A; aquí lo que se hará, por simplicidad, será considerar lo que sucede con los otros parámetros orbitales pero para sistemas con órbitas (cuasi)circulares. A partir de las ecuaciones otorgadas en el Panel 2, se pueden estudiar los efectos seculares sobre los parámetros orbitales en el límite en que $e \rightarrow 0$. A partir de (A.7), a su vez, se puede ver que solamente tres resonancias darán efectos no nulos: $N = 1, 2, 3$, correspondientes a masas $m \simeq \omega_b$, $m \simeq 2\omega_b$, y $m \simeq 3\omega_b$.

Las resonancias $N = 1, 3$ presentan una fenomenología distinta de aquella para $N = 2$, y se las separará en la discusión. Tal como se discutió previamente, en el límite en que $e \rightarrow 0$, solamente la

resonancia $N = 2$ afecta al período orbital. En cuanto a los otros parámetros, considerando el mismo límite en que $e \rightarrow 0$ y solamente con la resonancia $N = 2$ presente, se obtiene que

$$\langle \dot{P}_b \rangle = -\frac{3\lambda}{2} P_b \sqrt{\rho_{\text{DM}}} \varepsilon_{\text{T}} s_{\gamma(t)+\chi}, \quad (3.24a)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = 0, \quad (3.24b)$$

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = \frac{\lambda \sqrt{\rho_{\text{DM}}} \varepsilon_{\text{V}}}{4s_l} s_{\gamma(t)+\eta-\omega}, \quad (3.24c)$$

$$\langle i \rangle = -\frac{\lambda \sqrt{\rho_{\text{DM}}} \varepsilon_{\text{V}}}{4} c_{\gamma(t)+\eta-\omega}, \quad (3.24d)$$

$$e \langle \dot{\varpi} \rangle = 0, \quad (3.24e)$$

$$\langle \dot{e}_1 \rangle = \lambda \sqrt{\rho_{\text{DM}}} \varepsilon_{\text{T}} c_{\gamma(t)+\chi} + 2s_{l/2}^2 \langle \dot{\Omega} \rangle. \quad (3.24f)$$

donde, para el argumento del periastro $\omega = \varpi - \Omega$, la contribución a primer orden va como $1/e$ y se anula en este caso⁹. Notar que, tal como se discutió anteriormente, la componente vectorial ε_{V} contribuye a ciertos parámetros orbitales, que son aquellos donde se ven modificaciones en la orientación de la órbita con respecto al sistema de referencia fundamental (debido a que la perturbación ε_{V} es ortogonal al plano orbital). Sin embargo, obtener cotas a partir de los datos de dichos parámetros no es tarea sencilla ya que no se tienen datos muy precisos sobre esos parámetros en cuestión (consultar (Damour and Taylor, 1992) para una discusión más detallada). Las cotas más fuertes vienen de las mediciones de \dot{P}_b , que resultan sumamente precisas; este fue el motivo por el cual previamente se hizo mayor foco en este parámetro.

En tanto para las otras resonancias, $N = 1$ y $N = 3$, el efecto en este caso es similar al efecto Damour-Schäfer (Damour and Schaefer, 1991), el cual - a su vez - se ha discutido en (Blas et al., 2020; López Nacir and Urban, 2018) en el contexto de modelos de ULDM para el caso escalar y vectorial, respectivamente (dicho efecto aparece cuando se viola el principio de equivalencia fuerte, *SEP* por sus siglas en inglés). Las ecuaciones, para $e \rightarrow 0$, pueden ser escritas según

$$\langle \dot{e} \rangle = \frac{3}{2} \frac{F_y^{\text{SEP,eff}}}{a\omega_b}, \quad \langle \dot{\omega} \rangle = -\frac{3}{2} \frac{F_x^{\text{SEP,eff}}}{ea\omega_b}, \quad (3.25)$$

$$\langle \dot{P}_b \rangle = \langle \dot{\Omega} \rangle = \langle i \rangle = \langle \dot{e}_1 \rangle = 0, \quad (3.26)$$

donde, para $N = 1$,

⁹La razón para trabajar a este orden es que para órbitas con excentricidades bajas, el movimiento se parametriza de una manera más apropiada en términos de los parámetros $\eta = e \sin \omega$ - no confundir con el parámetro angular del tensor de polarización ε_{ij} , Ec. (2.32) - y $\kappa = e \cos \omega$, que son los parámetros de Laplace-Lagrange usados usualmente en el análisis de datos (ver (Edwards et al., 2006) para más detalles).

$$\vec{F}^{\text{SEP,eff}} = \frac{2}{9} a \omega_b \lambda \sqrt{\rho_{\text{DM}}} \sqrt{3} \varepsilon_S [c_{\gamma(t)} \hat{x} - s_{\gamma(t)} \hat{y}] , \quad (3.27)$$

mientras que el caso con $N = 3$ se obtiene

$$\vec{F}^{\text{SEP,eff}} = -\frac{2}{9} a \omega_b \lambda \sqrt{\rho_{\text{DM}}} \varepsilon_T [c_{\gamma(t)+\chi} \hat{x} + s_{\gamma(t)+\chi} \hat{y}] . \quad (3.28)$$

Este efecto puede ser usado para acotar α para masas cercanas a ω_b ($N = 1$) y $3\omega_b$ ($N = 3$), que no afectan secularmente \dot{P}_b para $e \rightarrow 0$. Tomando como ejemplo el sistema J1713+0747 (Foster et al., 1993; Zhu et al., 2015a, 2019), los resultados presentados en (Zhu et al., 2019) indican que $\dot{e} = (-3 \pm 4) \times 10^{-18} \text{s}^{-1}$. Usando esto y asumiendo que $N = 1$ con $\varepsilon_S s_{\gamma(t)} \simeq 1$, y $N = 3$ con $\varepsilon_T s_{\gamma(t)+\chi} \simeq 1$, se obtiene que $\alpha \lesssim 1.2 \times 10^{-2}$ para $m \simeq 7 \times 10^{-22} \text{ eV}$ mientras que para $m \simeq 2 \times 10^{-21} \text{ eV}$ se obtiene $\alpha \lesssim 1.8 \times 10^{-2}$. Estos resultados son competitivos en comparación con las cotas actuales, para estas masas, obtenidas a partir del experimento Cassini (Hohmann, 2017). Se muestran dichas cotas en las figuras 3.3 y 3.4.

3.4. Conclusiones

A continuación se comentan las conclusiones de esta sección, siguiendo el trabajo (Armaleo et al., 2020a).

- ▷ Se lograron poner cotas al parámetro de acoplamiento α entre la ULDM de spin-2 y las estrellas de los BPs, mediante un estudio secular de los parámetros orbitales de BPs cuando la masa del campo m es algún múltiplo (entero) N de la frecuencia orbital del sistema binario, ω_b ; es decir, cuando el sistema entra en resonancia, $m \simeq N\omega_b$.
- ▷ El eje central de la discusión giró en torno a las variaciones en el período orbital, el cual es el parámetro más y mejor medido y el que otorga las cotas más fuertes. Sin embargo, se ha discutido también lo que sucede con los otros parámetros, en donde para ciertos casos se han hallado efectos relevantes estudiando, por ejemplo, lo que sucede con \dot{e} .
- ▷ Con los datos actuales se han puesto cotas competitivas. En vistas de las mejoras futuras en la precisión de las mediciones y el número creciente de sistemas observados que pueden ser utilizados para el análisis de púlsares tales como SKA (Kramer and Stappers, 2015), a partir de lo obtenido aquí se puede concluir que una cota de hasta $\alpha \sim 10^{-5}$ será posible para ciertos valores de la masa del campo de ULDM.

- ▷ Aprovechando la gran cantidad en aumento de sistemas observados, resulta ventajoso estudiar correlaciones entre las señales provenientes de los púlsares. La utilización de los sistemas observados como un conjunto y no individualmente permite realizar un estudio detallado sobre la correlación de los púlsares. El análisis de esta correlación fue precisamente el enfoque que se utilizó en ([Armaleo et al., 2020b](#)) para poner cotas al modelo de ULDM de spin-2, y es el tema central del siguiente capítulo de esta tesis.

Capítulo 4

Pulsar timing array

En las secciones anteriores se ha visto que el campo de ULDM de spin-2 oscila con una frecuencia característica dada por su masa m , Ec. (2.27). Dichas oscilaciones podrían, a priori, producir efectos apreciables y medibles en sistemas cuyas escalas características sean del orden de $1/m$. Uno de los tantos efectos posibles es la resonancia producida en BPs, estudiado en detalle en el capítulo anterior donde se utilizaron individualmente los BPs para testear y poner cotas a dicho modelo. Otro efecto posible es aquel proveniente de la oscilación de los potenciales gravitatorios a través de la línea de visión de los púlsares, que produce una impronta característica en el tiempo de llegada de los mismos. Las mediciones de *pulsar timing arrays* (PTAs por sus siglas en inglés) son sensibles a este efecto para un rango de frecuencias dada por $10^{-9} \text{ Hz} \lesssim \nu \lesssim 10^{-6} \text{ Hz}$ que corresponde a masas del campo de ULDM de spin-2 de $2 \cdot 10^{-24} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 2 \cdot 10^{-21} \text{ eV}$. En (Blas et al., 2017; Khmelnitsky and Rubakov, 2014; López Nacir and Urban, 2018; Nomura et al., 2020; Rozner et al., 2020) se han utilizado PTAs para poner cotas a modelos de ULDM de spin-0 y spin-1. En este capítulo, en cambio, se estudiará lo pertinente a spin-2, donde se hará uso de la población de púlsares como un arreglo conjunto y no individualmente como en el capítulo previo. La idea principal es que la DM debería modificar el tiempo de llegada de los pulsos emitidos por los púlsares para todo el arreglo en su conjunto. A su vez, y mediante el estudio de las correlaciones entre púlsares, es posible distinguir entre diversos modelos alternativos de gravedad; en particular, distintos modelos de ULDM pueden ser puestos a prueba. Específicamente, el modelo de ULDM de spin-2 debido a su estructura tensorial cuadrupolar (y anisotrópica) presenta características relevantes que podrían ser de sumo interés para diferenciarlo, por ejemplo, de un modelo de ULDM escalar, entre otros. Estudiando la correlación angular entre las señales detectadas por los púlsares se puede obtener la función de correlación y, a partir de allí, la curva que describe la correlación entre las señales conocida como curva de Hellings-Downs.

El objetivo en este capítulo será describir lo comentado en el párrafo anterior, presentando los resultados relevantes para el caso de spin-2. Este capítulo está basado en el trabajo "*Pulsar timing array constraints on spin-2 ULDM*" (Armaleo et al., 2020b) donde se pudieron poner las cotas más competitivas para el acople universal α para masas $m \lesssim 4 \times 10^{-22}$ eV. A su vez, se muestra la curva de Hellings-Downs para el caso de spin-2, discriminando entre las contribuciones escalares, vectoriales y tensoriales del mismo.

4.1. Señal y residuo temporal

En el capítulo anterior se han introducido y presentado los púlsares como objetos astrofísicos sumamente interesantes los cuales - entre una de las características más sobresalientes - pueden actuar como relojes. Los mismos producen pulsos de ondas electromagnéticas las cuales llegan a la Tierra y se detectan con radiotelescopios. Cualquier perturbación gravitacional traerá aparejado un cambio en los tiempos de llegada de dichos pulsos, y la perturbación en los tiempos estará correlacionada entre los diferentes púlsares de una manera específica dependiendo de la naturaleza y forma de la perturbación. Se conoce como **tiempo residual** o **residuo del tiempo** a la diferencia entre el tiempo de llegada del pulso y el correspondiente a un primer ajuste usando un modelo que *fittee* dicho tiempo de llegada. El modelo en cuestión dependerá, entre otras cosas, de si el púlsar es parte de un sistema binario o no. Cualquier perturbación adicional (como por ejemplo los efectos producidos por un campo de ULDM) a las que ya se consideran en dichos modelos, deberán dejar una huella característica en los tiempos residuales. Usualmente y primeramente, los PTAs¹ se utilizan para detectar GW de manera análoga a los detectores terrestres tales como LIGO, Virgo, etc; es decir, estudiando lo que sucede cuando una onda atraviesa los brazos de dichos detectores. Sin embargo, la diferencia principal entre los PTAs y los detectores terrestres recae en el largo de sus brazos: mientras que los brazos de los detectores de la Tierra poseen el largo de unos kilómetros, los brazos de los *detectores* utilizando PTAs se corresponde a largos de millones de kilómetros. Más específicamente, el brazo tendría un largo correspondiente a la distancia Tierra-pulsar, que típicamente es del orden de los kpc. Esto permite, entonces, ampliar el rango de frecuencias a explorar con "detectores" de GW. La diferencia principal, entonces, en hacer esta analogía es el hecho de que mientras detectores como LIGO/Virgo poseen brazos cuya longitud es mucho más pequeña que la longitud de onda de la GW (típicamente $\simeq 10^2 - 10^4$ km), los brazos de los PTAs resultan muchísimo más grandes que la longitud de onda de las GW. De esta manera, pues, el rango de frecuencias a explorar por PTAs es sumamente distinto de aquel que tratan de estudiar los

¹El término *pulsar timing array* posee cierta ambigüedad y/o degeneración: se utiliza tanto para hablar de la técnica de *pulsar timing* para el arreglo de púlsares, como así también se utiliza para hablar del arreglo en sí. En lo que a esta tesis refiere, no se hará distinción alguna y se utilizará *PTA* para hablar de ambos asuntos.

detectores terrestres cuyos brazos resultan extremadamente pequeños en comparación con los brazos galácticos de PTAs². En cuestión, PTA permite estudiar frecuencias muy bajas (del orden de los nHz) las cuales se traducen en la posibilidad de estudiar un espectro de masas que cae dentro del rango de ultralivianas. Por tal motivo, el uso y estudio de PTA es relevante y resulta pertinente para estudiar modelos de ULDM.

El objetivo a continuación será entender y estudiar cómo la ULDM de spin-2 afecta el tiempo residual de PTA. Para ello, lo primero que se hará será calcular la predicción correspondiente para el *tiempo residual*: sea un fotón cuyo 4-momento sin perturbar se escribe según $p^\mu := (\nu, \nu n^i)$, donde ν es la frecuencia y $\mathbf{n} := n^i$ es el versor que indica la dirección del momento. El tiempo residual se obtiene entonces como

$$t_r(t) := - \int_0^t dt' \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}. \quad (4.1)$$

donde ν_0 es la frecuencia del fotón para el caso sin perturbar, que coincide con la frecuencia de emisión en el púlsar. La idea, entonces, es calcular cómo varía la frecuencia del fotón emitido desde el pulsar cuando se considera que una perturbación (dada en este caso por la ULDM de spin-2) se encuentra presente. Para entender cómo es que el campo de DM perturba la propagación de los fotones, es importante notar que hasta el momento se ha considerado que el campo de DM (es decir, $M_{\mu\nu}$) está acoplado de manera universal a la materia ordinaria, Ec. (2.33). Este acople universal, como se verá a continuación, permitirá hacer una redefinición de la métrica y pensar en un cambio de frame tal que, en esta nueva métrica, no hay interacción alguna entre la ULDM y la materia ordinaria, pero en cambio las partículas se propagan en una métrica \tilde{g} que depende explícitamente de $M_{\mu\nu}$. Por ende, la perturbación vendrá dada en términos de $M_{\mu\nu}$ y, como se podrá anticipar dada la estructura de M_{ij} , la misma estará oscilando con una frecuencia dada por la masa del campo, Ec. (2.27). A continuación se detalla con más precisión dicho procedimiento como así también se muestra la forma explícita que se obtiene para $t_r(t)$.

4.1.1. Sistema Tierra-púlsar y efecto del campo de ULDM de spin-2

El objetivo en esta sección es obtener el tiempo residual $t_r(t)$ para la perturbación producida por el campo de ULDM de spin-2. La idea, tal como se comentó anteriormente, es realizar un cambio de frame para reinterpretar el efecto del campo de DM como una perturbación en la métrica. No obstante, cabe destacar que esta redifinición es un mero artefacto para realizar los cálculos de una manera más sencilla,

²Los detectores terrestres como LIGO/Virgo analizan frecuencias del orden del Hz hasta el MHz; en cambio, PTA explora frecuencias del orden del nHz.

y la idea consiste en lo siguiente: sea la acción que describe el sistema Tierra-púlsar en presencia del campo de ULDM de spin-2 dada por

$$S := S_{\text{free}}[g, M_{\mu\nu}, \Psi] + S_{\text{int}}[g, M_{\mu\nu}, \Psi], \quad (4.2)$$

El primer término $S_{\text{free}}[g, M_{\mu\nu}, \Psi]$ representa la acción libre de materia (denotada con Ψ) que en este caso corresponde a fotones propagándose del púlsar a la Tierra a lo largo de las geodésicas nulas del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$. Cabe destacar que en esta acción se está incluyendo la dinámica para el campo de ULDM, dada por el Lagrangiano de Fierz-Pauli (2.18). El segundo término, en cambio, describe la interacción entre el campo de ULDM $M_{\mu\nu}$ y el sistema, dada por (2.33)

$$S_{\text{int}}[g, M_{\mu\nu}, \Psi] := -\frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \int d^4x \sqrt{-g} M_{\mu\nu} T_{\Psi}^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

donde $T_{\Psi}^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento del sistema libre, que incluye a los fotones³. Más específicamente, se puede pensar que el EMT $T_{\Psi}^{\mu\nu}$ está compuesto por una contribución de los fotones y otra contribución de los púlsares, es decir $T_{\Psi}^{\mu\nu} = T_{\gamma}^{\mu\nu} + T_{\text{pul}}^{\mu\nu}$. El planteamiento entonces es que mediante un cambio de frame adecuado, el término de interacción puede ser absorbido e interpretar, entonces, al sistema como uno libre pero donde ahora los fotones se propagan en una nueva métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Para tratar de dilucidar cómo es el cambio de frame de una manera un poco más didáctica, se propondrá que la nueva métrica viene dada por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + A M_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

y el objetivo será hallar A de manera tal que la acción para la métrica \tilde{g} consista solamente de la parte libre. Notar que, en esencia, lo que se está diciendo es que el término $A M_{\mu\nu}$ se puede pensar como la perturbación de la métrica y, por ende, se está considerando que el parámetro A es muy pequeño (esto será más evidente cuando, a continuación, se halle la expresión explícita para A).

Partiendo de la acción (4.2), se escribe a la misma en términos de \tilde{g} :

$$\begin{aligned} S = & S_{\text{free}}[\tilde{g}, M_{\mu\nu}, \Psi] - A \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta S_{\text{free}}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \right) M^{\mu\nu} \\ & - \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \int d^4x \sqrt{-\det(\tilde{g} - A M)} M_{\mu\nu} T_{\Psi}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.5)$$

³Notar que, en comparación con la acción de interacción (2.33), la expresión (4.3) presenta un signo global de diferencia. Esto se debe a un cambio de convención y, en lo que sigue, se utilizará de ahora en más esta última. Cabe mencionar, sin embargo, que los resultados obtenidos no dependen de este signo sino del módulo de α .

El primer renglón es S_{free} escrito en términos de la métrica \tilde{g} , donde se ha usado que $\tilde{g}^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} - A M^{\mu\nu}$. El segundo renglón es el término de interacción; la raíz del determinante que aparece en este se puede escribir de una manera más simplificada a partir de la siguiente propiedad:

$$\det(\mathbb{1} + \epsilon X) \simeq 1 + \epsilon \text{Tr}(X) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.6)$$

con $\epsilon \ll 1$. De esta manera, entonces,

$$\det(\tilde{g} - A M) = \det(\tilde{g}) \det(\mathbb{1} - A \tilde{g}^{-1} M) \simeq \det(\tilde{g}) \quad (4.7)$$

donde se ha despreciado el término $A \text{Tr}(\tilde{g}^{-1} M) \sim A \alpha / M_{\text{P}}$ para mantener el orden lineal en α^4 . El último término en (4.5) resulta, por ende, $-\alpha / 2 M_{\text{P}} \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} M_{\mu\nu} T_{\Psi}^{\mu\nu}$. Por otro lado, el término entre paréntesis en (4.5) no es otra cosa más que el tensor energía-momento, definido como

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.8)$$

Sin embargo, cabe tener en cuenta una sutileza: el término que figura entre paréntesis no sería $T_{\mu\nu}$ sino más bien $\tilde{T}_{\mu\nu}$, donde este último hace alusión a que se está variando la acción con respecto a $\delta\tilde{g}$; es decir, utilizando la definición (4.8) pero con la métrica \tilde{g} . Lo que se tiene en la acción, entonces, es un término de la forma $A \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$. La sutileza viene por el hecho que, trabajando a orden lineal en α ,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} A M^{\mu\nu} = \left(-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} A M^{\mu\nu} \simeq T_{\mu\nu} A M^{\mu\nu} \quad (4.9)$$

donde se ha utilizado (4.7). Juntando todo se obtiene, entonces,

$$S = S_{\text{free}}[\tilde{g}, M_{\mu\nu}, \Psi] + \frac{A}{2} \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} T_{\mu\nu}^{\Psi} M^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2 M_{\text{P}}} \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} M_{\mu\nu} T_{\Psi}^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

Por lo tanto para reabsorber la interacción en la redefinición de la métrica, se requiere que $A = \alpha / M_{\text{P}}$ y por ende la transformación que lleva a la nueva interpretación del sistema como uno libre donde los fotones se propagan en una métrica \tilde{g} sin interacción, vendrá dada por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{M_{\text{P}}} M_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

En este nuevo frame, entonces, los fotones se propagan libremente siguiendo las geodésicas nulas de la métrica \tilde{g} , que depende explícitamente del campo de ULDM de spin-2 $M_{\mu\nu}$. La acción que describe esto es entonces, simplemente,

⁴Es decir que, en otras palabras, $A \sim \mathcal{O}(\alpha)$.

$$S = S_{\text{free}}[\tilde{g}, M_{\mu\nu}, \Psi] \quad (4.12)$$

Con esto en mente, el siguiente paso será calcular explícitamente el tiempo residual (4.1), donde ahora los fotones se propagarán en esta nueva métrica \tilde{g} , Ec. (4.11).

4.1.2. Tiempo residual

En esta sección se computará el efecto que produce la ULDM en el tiempo residual de los pulsos. Para ello se necesitará, primero que todo, calcular la trayectoria del fotón a lo largo de la geodésica (nula) que será, en definitiva, el integrando de (4.1). El cambio en la frecuencia que experimenta el fotón emitido en el púlsar cuando llega a la Tierra viene dado en términos de la ecuación geodésica,

$$\frac{dp^0}{ds} = -\Gamma_{\mu\nu}^0 p^\mu p^\nu \quad (4.13)$$

Para resolver esta ecuación, primero se deben calcular los símbolos de Christoffel de $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Pero, previo a brindar dichos resultados, es necesario remarcar ciertas cuestiones.

Consideraciones generales

Los púlsares observados y utilizados por y para PTA se encuentran a redshifts $z \simeq 0$; es decir que las escalas que se considerarán serán astrofísicas y no cosmológicas, y por ende se puede asumir sin pérdida de generalidad que la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ vendrá dada en términos de

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{M_{\text{P}}} M_{\mu\nu} \quad (4.14)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Tal como se ha comentado a comienzos de la sección 4.1, la distancia Tierra-púlsar típicamente es del orden de los kpc. En vistas de la longitud de onda de Broglie del campo de ULDM, dada por $\lambda_{\text{dB}} \simeq 4 \text{ kpc} (10^{-3}/V) (10^{-23} \text{ eV}/m)$, Ec. (2.34), los gradientes del campo podrían llegar a resultar importantes y deberían ser tenidos en cuenta a la hora de realizar los cálculos pertinentes. Sin embargo, tal como se verá a continuación, la contribución principal a la señal vendrá dada por la configuración del campo cerca de la Tierra, y por lo tanto en esta situación es razonable asumir que los efectos de los gradientes puedan ser tratados de manera perturbativa. Utilizando la transversalidad del campo, $\partial^\mu M_{\mu\nu} = 0$, esto implica que las componentes M_{0i} y M_{00} son de primer y segundo orden en gradientes de M_{ij} , respectivamente.

Por otro lado, y en contraparte con lo que sucede con las escalas espaciales, el tiempo de coherencia t_{coh} del campo dado a partir de (2.35), resulta muchísimo más grande que las escalas de tiempo de observación y por ende el campo permanece coherente. Esto implica, pues, que el campo puede ser descrito en términos de una sola frecuencia común.

Juntando todo, entonces, la expresión para las componentes espaciales del campo M_{ij} se podrá seguir escribiendo tal como (2.27),

$$M_{ij} = \frac{\sqrt{2\rho_{\text{DM}}(\mathbf{x})}}{m} \cos(mt + \Upsilon(\mathbf{x}))\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}), \quad (4.15)$$

en donde se ha puesto de manera manifiesta la posición \mathbf{x} del campo.

Volviendo a la ec. de las geodésicas, se proseguirá con dicho cálculo teniendo en cuenta que las componentes de $\Gamma_{\mu\nu}^0$ para la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, Ec. (4.14), vienen dados por

$$\Gamma_{00}^0 \simeq \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \partial_0 M_{00}, \quad (4.16)$$

$$\Gamma_{0i}^0 \simeq \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \partial_i M_{00}, \quad (4.17)$$

$$\Gamma_{ij}^0 \simeq \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} (\partial_i M_{0j} + \partial_j M_{0i} - \partial_0 M_{ij}), \quad (4.18)$$

donde se ha trabajado a orden lineal en α . De esta manera, la ec. de las geodésicas resulta

$$\frac{dp^0}{ds} = -\frac{\nu^2 \alpha}{2M_{\text{P}}} \{ \partial_0 M_{00} + 2\partial_i M_{00} n^i + (\partial_j M_{0i} + \partial_i M_{0j} - \partial_0 M_{ij}) n^i n^j \} \quad (4.19)$$

Esta ecuación contiene tanto el término dominante, dado por M_{ij} , como los términos subdominantes dados por (las derivadas de) $M_{0\nu}$. La idea en las dos siguientes partes es discriminar precisamente entre ambas contribuciones al tiempo residual, estudiando en detalle cómo resultan ambos aportes. En la primera de ellas se estudiará solamente lo que sucede con la configuración del campo cerca de la Tierra, obteniendo así la contribución principal a t_r . Posteriormente se analizarán las contribuciones (subdominantes) de los otros términos.

Contribución dominante: término terrestre

En esta sección se considerará solamente la contribución a orden lineal en los gradientes, por lo que se puede establecer de manera general $M_{0\nu} = 0$ y por ende la ec. de las geodésicas a resolver resulta

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{\alpha \nu^2}{2M_{\text{P}}} \partial_0 M_{ij} n^i n^j \quad (4.20)$$

donde, a modo de recordatorio, $p^\mu := (\nu, \nu n^i)$. Integrando de ambos lados la trayectoria del fotón desde el púlsar hasta la Tierra, trabajando a orden lineal en α , se obtiene que

$$\nu \simeq \nu_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \int_{\oplus}^{\oplus} ds \nu_0 \partial_0 M_{ij} n^i n^j \right\} \quad (4.21)$$

Usando que $\frac{d}{ds} = \nu \partial_0 + n^i \nu \partial_i$ con $\nu \simeq \nu_0$ para mantener el orden lineal en α , se obtiene que

$$\nu = \nu_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \left(M_{ij}^{\oplus} - M_{ij}^{\otimes} \right) n^i n^j - \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \int_{\oplus}^{\oplus} ds \nu_0 n^l \partial_l M_{ij} n^i n^j \right\} \quad (4.22)$$

Los símbolos \oplus y \otimes en las cantidades representan que las mismas deben ser evaluadas en la Tierra y en el púlsar, respectivamente. Con este resultado ya se estaría en condiciones de calcular el tiempo residual (4.1). Sin embargo, la expresión (4.22) puede simplificarse aún más y el cálculo del tiempo residual se verá simplificado también. Esta simplificación vendrá por la observación y el hecho de que la configuración del campo de ULDM será diferente en la Tierra y en el púlsar, debido a que la distancia Tierra-púlsar puede llegar a ser comparable con la longitud de onda de Broglie del campo. Más específicamente, la integral que aparece en (4.22) es altamente oscilante debido a que $\partial_l M_{ij} \sim \cos(mt)/m\lambda_{\text{dB}}$ donde se ha usado que los gradientes son $\partial_i \sim 1/\lambda_{\text{dB}}$. Más aún, dicho término resulta subdominante frente a los dos primeros de dicha ecuación ya que se encuentra suprimido por un factor $v/c \sim \mathcal{O}(10^{-3})$, proveniente del gradiente en cuestión. Por ende, en lo que sigue se despreciará a dicho término y se hará foco en los dos primeros términos que son los dominantes. Sin embargo, en la siguiente sección se volverá a estudiar con más detalle la contribución de dicho término en donde, ahora sí, se tendrán en cuenta los términos subdominantes.

Los términos evaluados en la Tierra (\oplus) y en el púlsar (\otimes) son los denominados *término terrestre* y *término del púlsar* (Porayko et al., 2018; Porayko and Postnov, 2014), respectivamente. A la hora de estudiar las correlaciones entre las diferentes señales provenientes de los diversos púlsares, para un bin de frecuencia dado por la masa del campo de ULDM, el resultado se puede dividir en tres contribuciones: los términos de los púlsares, los términos terrestres, y los términos cruzados púlsar-Tierra. A partir de (4.15) se puede ver que no solamente las fases Υ , tal como sucede con el caso escalar (Blas et al., 2017; De Martino et al., 2017; Khmelnitsky and Rubakov, 2014; Porayko et al., 2018), sino que además también la geometría de una dada realización del campo cuadrupolar de ULDM no será la misma para la Tierra que para la posición de cada púlsar. Esta diferencia principal entre el caso escalar y el tensorial recae en la estructura, precisamente cuadrupolar, de la ULDM de spin-2 dada en términos de $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$. En otras palabras, esto quiere decir que la orientación de los dos vectores multipolares que definen el cuadrupolo de la ULDM serán diferentes en la Tierra y en los púlsares⁵. Por esta razón, la contribución principal a la correlación vendrá dada por el término terrestre ya que el

⁵Los vectores multipolares fueron introducidos en (Copi et al., 2004) como una manera alternativa para parametrizar y visualizar los coeficientes de los armónicos esféricos sobre una esfera.

efecto del campo de ULDM sobre la trayectoria del fotón se espera que se sume de manera coherente para el final del recorrido, es decir cerca de la Tierra; los otros términos, en cambio, desaparecerán a la hora de tomar promedio ya que las mediciones de PTA son sensibles a las variaciones temporales una vez realizado el promedio sobre los diferentes púlsares⁶. Por ende, el término terrestre domina el residuo y, en lo que sigue, solamente se hará foco en este término (en la siguiente parte de esta sección, no obstante, se estudiarán las otras contribuciones subdominantes).

Reemplazando explícitamente M_{ij} por (4.15) en (4.22), el término terrestre resulta

$$\nu = \nu_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}mM_P} \sqrt{\rho_{\text{DM}\oplus}} \varepsilon_{ij,\oplus} \cos(mt + \Upsilon_{\oplus}) n^i n^j \right\} \quad (4.23)$$

Con este resultado, ahora sí, se procede a calcular el tiempo residual t_r dado por (4.1) mediante una simple integración. El resultado en cuestión es

$$t_r(t) = -\frac{\alpha\sqrt{\rho_{\text{DM}\oplus}}}{\sqrt{2}m^2M_P} \varepsilon_{ij,\oplus} n^i n^j \sin(mt + \Upsilon_{\oplus}) . \quad (4.24)$$

en donde se le ha sustraído el promedio temporal sobre un período de observación (recordar que PTA es sensible solamente a las variaciones temporales del residuo). Este es el resultado (analítico) principal de este capítulo de la tesis. La idea a continuación será utilizar este resultado para poner cotas al modelo de ULDM de spin-2. Pero, por consistencia y completitud, previo a estudiar las cotas al modelo lo que se hará en lo que sigue es un desarrollo análogo a lo realizado aquí pero teniendo en cuenta y estudiando más en detalle lo que sucede con los términos subdominantes.

Contribuciones subdominantes

El punto de partida para estudiar los efectos de los términos subdominantes es la ec. de las geodésicas (4.19), que contiene ambas contribuciones. Integrando de ambos lados la trayectoria del fotón desde el púlsar hasta la Tierra, de manera análoga a lo anterior se obtiene que

$$\nu = \nu_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2M_P} (M_{00}^{\oplus} - M_{00}^{\otimes}) - \frac{\alpha}{2M_P} \int_{\otimes}^{\oplus} ds \nu_0 [\partial_0 M_{00} + 2\partial_i M_{00} n^i + (\partial_j M_{0i} + \partial_i M_{0j} - \partial_0 M_{ij}) n^i n^j] \right\} . \quad (4.25)$$

en donde, a su vez para mantener la generalidad, se ha tenido en cuenta el factor $1/\sqrt{\tilde{g}_{00}}$ del redshift local asociado a las perturbaciones de los relojes en la Tierra y en la frecuencia del púlsar. Usando que $\nu_0 \partial_0 = \frac{d}{ds} - \nu_0 n^l \partial_l$, se pueden reescribir el primer y último término dentro de la integral y obtener, así,

⁶Esto implica, en particular, que a la hora de calcular la correlación para dos dados púlsares, debido a que las fases $\Upsilon(\mathbf{x})$ son distintas en cada caso, dicha correlación será nula.

$$\nu = \nu_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2M_P} \left(M_{ij}^\oplus - M_{ij}^\otimes \right) n^i n^j - \frac{\alpha}{2M_P} \int_{\otimes}^\oplus ds \nu_0 \left[n^l \partial_l (M_{00} + n^i n^j M_{ij}) + (\partial_j M_{0i} + \partial_i M_{0j}) n^i n^j \right] \right\}. \quad (4.26)$$

Si se compara esta expresión con (4.22) es fácil ver que, bajo la suposición de $M_{0\nu} = 0$, se recupera la misma expresión. Sin embargo, como la idea aquí es ver qué suceden con los términos subdominantes, a comparación con lo anterior no se trabajará con $M_{0\nu} = 0$. En lo que sigue se estudiarán los términos subdominantes que previamente fueron dejados de lado; esto es, se estudiará tanto la contribución de $M_{0\nu} \neq 0$ como así también la contribución del término del púlsar el cual había sido despreciado para obtener (4.23).

► **Contribución de $M_{0\nu} \neq 0$**

A partir de la transversalidad del campo, $\partial^\mu M_{\mu\nu} = 0$, se puede obtener fácilmente que

$$M_{0i} = \partial_j \int dt' M_{ij}(t', \mathbf{x}) + K_{0i}(\mathbf{x}), \quad (4.27)$$

$$M_{00} = \partial_i \int dt' M_{0i}(t', \mathbf{x}) = \partial_i \partial_j \int dt' \int^{t'} dt'' M_{ij}(t'', \mathbf{x}) + \partial_i K_{0i}(\mathbf{x}) t + K_{00}(\mathbf{x}). \quad (4.28)$$

donde $K_{0i}(\mathbf{x})$ y $K_{00}(\mathbf{x})$ son constantes de integración que, a priori, podrían ser no nulas. Notar que podría haber, a su vez, una constante $K_{ij}(\mathbf{x})$ proveniente de M_{ij} . Cabe remarcar que todas estas constantes no dependen del tiempo. A partir de las expresiones recién obtenidas, es claro que la contribución de M_{00} y de M_{0i} a la señal (4.26) serán de al menos de segundo orden en las derivadas de M_{ij} . Sin embargo, es necesario hacer ciertas observaciones sobre estas constantes de integración $K_{\mu\nu}(\mathbf{x})$.

A orden cero en α , las componentes de $K_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ satisfacen la ecuación de Poisson masiva sin término de fuentes. Esta observación viene por el hecho de que $M_{\mu\nu}$ satisface una ecuación del tipo Poisson, Ec. (2.21), cuya solución para un fondo de FLRW - con $m \gg H$ - viene dada por (2.27); es decir, se puede pensar que M_{ij} dado por la ecuación recién mencionada es una solución particular de la ecuación de onda

$$\square M_{\mu\nu} + m^2 M_{\mu\nu} = 0, \quad (4.29)$$

sujeta a los vínculos $M = M^\mu_\mu = 0$ y $\partial^\mu M_{\mu\nu} = 0$. Esto implica que, entonces, dichas componentes quedan determinadas por las condiciones de contorno. En particular, si el sistema presenta simetría

esférica entonces $K_{0i}(\mathbf{x}) = 0$ y por lo tanto solamente la traza de $K_{ij}(\mathbf{x})$, $K(\mathbf{x}) = K_i^i(\mathbf{x}) = -K_{00}(\mathbf{x})$, será no nula.

A orden lineal en α , en cambio, se agrega un término de fuente a la ec. de onda (4.29), que estará dada a partir del acople directo (2.33). La solución será, entonces, lineal en α (trabajando a primer order perturbativo) y por lo tanto la contribución al tiempo residual será de orden α^2 . En lo que sigue, pues, se despreciará tal contribución y se trabajará a orden lineal en α .

A partir de esta observación sobre las contribuciones por parte de las componentes de $K_{\mu\nu}$, pareciera ser que solamente podrán tener un rol importante a la hora de sumar contribuciones las componentes $K(\mathbf{x}) = -K_{00}(\mathbf{x})$. Para el fondo homogéneo estudiado en (Marzola et al., 2018), sin embargo, se puede establecer $K_{00}(\mathbf{x}) = -K(\mathbf{x}) = 0$ y esperar, entonces, que a escalas más pequeñas - aquellas donde se forman estructuras de DM tales como halos - las componentes de $K_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ presenten inhomogeneidades caracterizadas por una escala que depende del halo y del entorno (por ejemplo escalas tales donde sean apreciables las variaciones a la suposición de simetría esférica). Es evidente, pues, que para estimar dichas contribuciones se necesitarán un estudio y un modelo más detallado y adecuado que describa correctamente dicho comportamiento. Notar, a su vez, que aunque las funciones $K_{\mu\nu}$ son constantes en el tiempo, dado que la integración se realiza a lo largo de la trayectoria del fotón, se espera que las mismas cambien a lo largo de dicha distancia. Asimismo, es necesario tener en cuenta que una contribución independiente del tiempo tal como es K_{ij} , no jugará un papel relevante a la hora de medir cambios en la frecuencia ya que PTAs solamente es sensible a variaciones temporales. Como conclusión, se puede despreciar la contribución de los $K_{\mu\nu}$ al cambio en frecuencia y, por ende, suponiendo al igual que antes que los gradientes son de orden $\partial_i \sim 1/\lambda_{\text{dB}}$, dado que $\lambda_{\text{dB}}m \gg 1$ entonces el integrando en (4.26) oscila muy rápidamente y por lo tanto otorga una contribución muy pequeña en comparación con los dos primeros términos de dicha ecuación. En conclusión, la ecuación (4.26) se puede aproximar entonces como

$$\nu \simeq \nu_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2M_{\text{P}}} \left(M_{ij}^{\oplus} - M_{ij}^{\otimes} \right) n^i n^j \right\} \quad (4.30)$$

En lo que sigue se discutirá sobre el término del púlsar, M_{ij}^{\otimes} .

► Contribución del término del púlsar:

A partir de (4.30) se puede reemplazar explícitamente M_{ij} evaluado en la Tierra y en el púlsar. Esto es,

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \simeq \frac{\alpha}{\sqrt{2}mM_{\text{P}}} \left[\sqrt{\rho_{\text{DM}_{\oplus}}} \varepsilon_{ij,\oplus} \cos(mt + \Upsilon_{\oplus}) - \sqrt{\rho_{\text{DM}_{\otimes}}} \varepsilon_{ij,\otimes} \cos(mt_0 + \Upsilon_{\otimes}) \right] n^i n^j, \quad (4.31)$$

en donde se ha definido el tiempo de emisión $t_0 = t - D$ de un púlsar a distancia D . A partir de este se puede calcular el tiempo residual, análogo a (4.24), obteniendo

$$t_r(t) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}m^2 M_P} \left[\sqrt{\rho_{\text{DM}_\oplus}} \varepsilon_{ij,\oplus} \sin(mt + \Upsilon_\oplus) - \sqrt{\rho_{\text{DM}_\otimes}} \varepsilon_{ij,\otimes} \sin(mt - mD + \Upsilon_\otimes) \right] n^i n^j \quad (4.32)$$

donde ya se le ha sustraído el promedio temporal. Se puede ver a simple vista que si se desprecia el término del púlsar, entonces se recupera el mismo resultado (4.24), por lo tanto se obtiene un resultado más general. Sin embargo, se verá que el primer término es el que domina y, por ende, otorga la cota más conservativa al parámetro de la teoría, α . Para ver esto explícitamente, entonces, lo que se hará a continuación será volver a la expresión (4.24) y estudiar a partir de esta cómo obtener las cotas al modelo en cuestión.

4.2. Cotas y resultados

La idea es calcular de manera explícita el efecto que tiene la ULDM de spin-2 sobre las detecciones de PTA. Esto es, se comparará el efecto de la ULDM con el de un fondo estocástico de GW, haciendo la analogía e interpretando al efecto del campo de spin-2 como si fuese el de una GW con una dada frecuencia y amplitud que se deberá ver cómo resulta en esta teoría. Precisamente esta es la idea a seguir a continuación: calcular cómo resultan la frecuencia y amplitud del campo de spin-2 interpretándolo como un efecto análogo al de GW estocásticas. El tiempo residual de una GW estocástica de frecuencia ω y amplitud h_c viene dada por (Wen et al., 2011)

$$\sqrt{\langle t_r^2(t) \rangle}_{\text{GW}} = \frac{h_c}{\sqrt{6}\omega} \sin(\omega t + \Upsilon_\oplus), \quad (4.33)$$

por lo tanto para calcular el efecto del campo de spin-2 habrá que calcular $\sqrt{\langle t_r^2(t) \rangle}$ proveniente de (4.24). Es decir, habrá que calcular $\langle t_r^2(t) \rangle$ donde el promedio se hace sobre la esfera celeste. Para ser más precisos, se deberá calcular, en definitiva, $\langle (\varepsilon_{ij,\oplus} n^i n^j)^2 \rangle$. Para eso será útil recordar la expresión para ε_{ij} , ec. (2.32), la cual se puede escribir en la representación de armónicos esféricos según $\varepsilon_{ij} n^i n^j := \sum_m a_m Y^{2m}$ donde $Y^{2m}(\mathbf{n})$ son los armónicos esféricos reales, ec. (2.28), para el versor $\mathbf{n} := (x, y, z) := (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$; los coeficientes armónicos a_m se definieron en (2.31). Promediando sobre la esfera celeste \mathbf{n} se obtiene que

$$\sqrt{\langle t_r^2(t) \rangle} = \frac{\alpha \sqrt{\rho_{\text{DM}_\oplus}}}{\sqrt{15}m^2 M_P} \sin(mt + \Upsilon_\oplus). \quad (4.34)$$

donde se utilizó que

$$\langle (\varepsilon_{ij,\oplus} n^i n^j)^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta (\varepsilon_{ij,\oplus} n^i n^j)^2 = \frac{2}{15} \quad (4.35)$$

con $a_S^2 + a_V^2 + a_T^2 = \varepsilon_S^2 + \varepsilon_V^2 + \varepsilon_T^2 = 1$. Cabe remarcar que la única información que quedó del cuadrupolo luego de promediar en la esfera celeste es su amplitud (global) dada por α . Notar que mientras el cambio en frecuencia para cualquier pulsar, ec. (4.24), depende de los cinco parámetros que describen el cuadrupolo, una vez que se promedia en la esfera el resultado puede depender como mucho de hasta 3 de estos parámetros. Esto es así porque se puede elegir al sistema de coordenadas de la manera más conveniente que se quiera, tal como por ejemplo $\chi = 0 = \eta^7$. Aquí reside y se exhibe la (útil) descomposición de la matriz ε_{ij} según (2.32) dada por sus 3 parámetros $\varepsilon_S, \varepsilon_V$ y ε_T junto con el parámetro angular η que define la dirección azimutal de las helicidades vectoriales, y el ángulo χ que determina la orientación azimutal de las helicidades tensoriales.

Comparando (4.34) con el tiempo residual causado por un fondo estocástico de GW, ec. (4.33), se puede ver que el campo de spin-2 de ULDM corresponde a un *strain* (amplitud) de GWs dado por

$$h_c = \frac{\alpha \sqrt{2\rho_{\text{DM}}}}{\sqrt{5}mM_{\text{P}}}, \quad (4.36)$$

donde se ha tomado que la frecuencia $m = \omega$. Este resultado, cabe notar y comentar, presenta diferencias sustanciales con respecto al caso de ULDM de spin-0 y spin-1 estudiado en la literatura (Blas et al., 2017; Khmelnitsky and Rubakov, 2014; Nomura et al., 2020). Más precisamente, la frecuencia de oscilación del tiempo residual (4.34) viene dada por m y no por $2m$ como es el caso escalar y/o vectorial estudiado en la literatura mencionada. Esta diferencia surge por el hecho de que aquí se está considerando un acople directo entre la DM y bariones, mientras que en los casos anteriores el efecto se da de manera indirecta. Esto es, en los casos escalares y vectoriales el efecto gravitacional de la DM entra a través del tensor energía-momento (que es cuadrático en el campo) mientras que en el caso del acople directo (esta tesis) la contribución ya se encuentra a orden lineal, ec. (4.14).

En la figura 4.1 se muestran las (nuevas) cotas halladas para el parámetro de acoplamiento α en función de la masa de la (UL)DM. Las cotas (y nomenclatura) obtenidas con PPTA (*Parkes Pulsar Timing Array*) fueron extraídas del análisis bayesiano (PPTA B) y frecuentista (PPTA F) realizado en (Porayko et al., 2018). Los límites que se muestran aquí, por lo tanto, son solamente un indicativo y estimativo del nivel de precisión para el cual se puede utilizar PPTA para poner cotas al modelo; no son cotas precisas ya que para obtener dichos resultados se promedió sobre toda la esfera celeste ec. (4.34), lo cual no tiene en cuenta las especificidades de cada púlsar (lo cual los resultados de PPTA sí las tienen). En la figura 4.1 se superponen, a su vez, las cotas halladas utilizando BPs, las cuales

⁷Otras elecciones son posibles, aunque no todas de ellas son lo suficientemente generales. Por ejemplo la configuración axisimétrica con $\varepsilon_V = \varepsilon_T = 0$ no representa un cuadrupolo genérico, ver (Ramazanov et al., 2017; Thorsrud et al., 2014).

fueron explicadas con detalle en el capítulo anterior. Notar que, por lo tanto, los límites obtenidos en este caso sirven como una estimación del orden de magnitud alcanzado para poner cotas al modelo de ULDM de spin-2, ya que de querer poner cotas precisas y exactas se necesitaría saber y/o modelar cómo es la configuración de la ULDM en cada sistema binario de púlsares en cuestión.

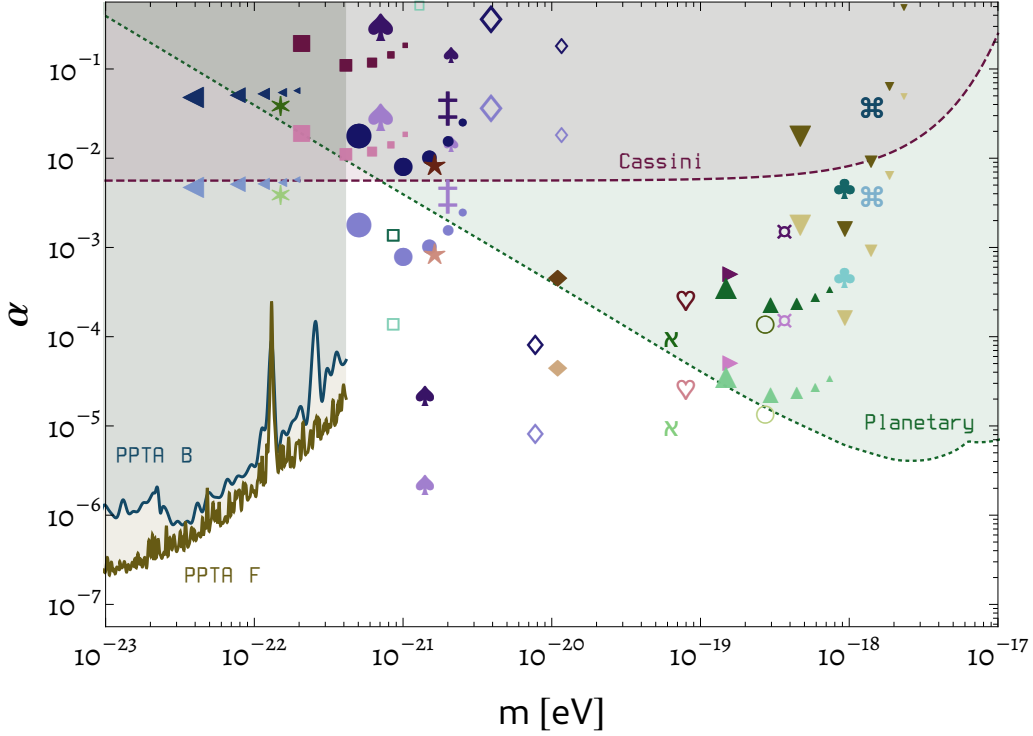


Figura 4.1: Cotas obtenidas para el parámetro de acoplamiento α de la ULDM de spin-2 utilizando los datos de PPTA. Se muestran los resultados obtenidos de realizar un análisis bayesiano (PPTA B) y frecuentista (PPTA F) de los datos, reproducidos con permiso de (Porayko et al., 2018). Se superponen también las cotas halladas en el capítulo anterior a partir de la no observación de variaciones seculares en los parámetros orbitales de los sistemas binarios de púlsares.

En la figura 4.2 se muestran nuevamente los resultados hallados a partir del análisis bayesiano (azul punteado) y frecuentista (ocre lineado) de PPTA para la amplitud de la GW equivalente obtenida de (Porayko et al., 2018). La amplitud equivalente producida por el campo de spin-2, ec.(4.36), se muestra para distintos valores del parámetro α en el rango $\alpha = 10^{-7} - 10^{-3}$. Notar que solamente los valores más bajos, dependiendo de la frecuencia, están permitidos (tal como se puede evidenciar a partir de la figura 4.1).

Hasta este momento se han utilizado los datos de PTA para poner cotas al parámetro de acoplamiento α de la teoría de ULDM de spin-2, pero aún no se ha explotado del todo la potencia de PTA. Esto es, aprovechando el gran número de púlsares medidos en el arreglo de *pulsar timing*, resulta de interés analizar la correlación entre las diferentes señales provenientes de los púlsares. Esta es la idea a explorar a continuación en la siguiente sección.

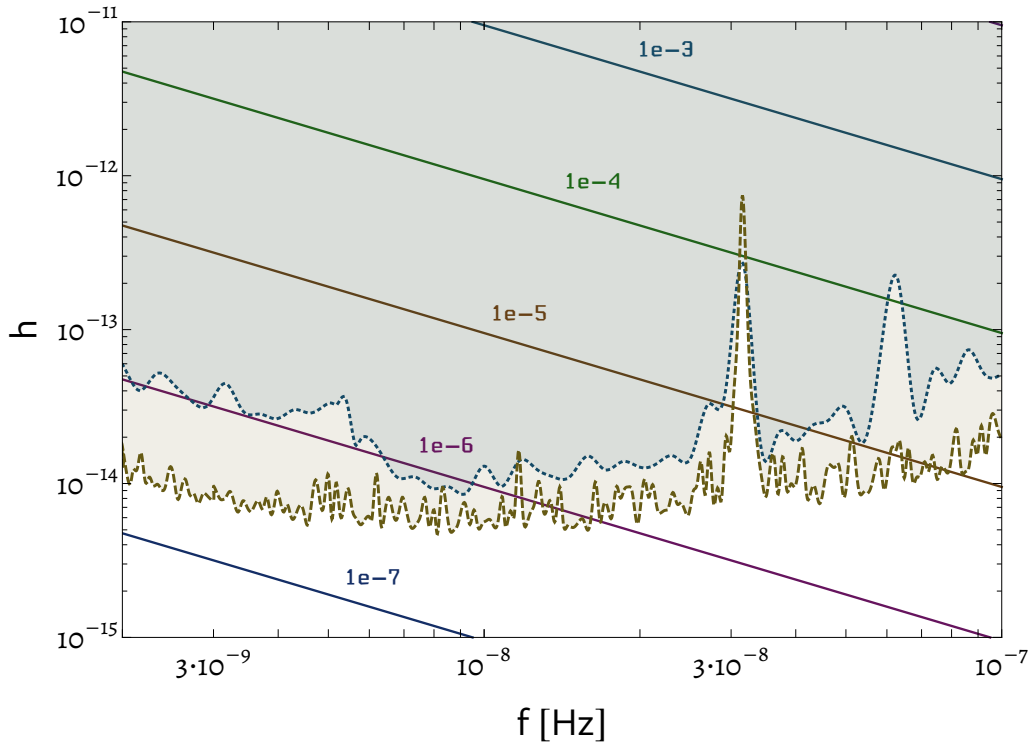


Figura 4.2: Amplitud de la GW equivalente como función de la frecuencia obtenida a partir del análisis bayesiano (azul punteado) y frecuentista (ocre lineado), reproducido con permiso de (Porayko et al., 2018). Se muestra, a su vez, la amplitud equivalente producida por el campo de ULDM de spin-2 calculado en (4.36), para distintos valores del acoplamiento α .

4.2.1. Correlación

Estudiando la correlación entre las diferentes señales provenientes de los púlsares, se podría clarificar algunos aspectos sobre la naturaleza de la DM⁸. La idea a llevar a cabo aquí será estudiar, más específicamente, las anisotropías en la señal de ULDM a través del análisis de la correlación entre las funciones de respuestas de un par de púlsares. Esta idea es análoga a lo hecho para el estudio de correlaciones para fondos de GW, conocida como *curva de Hellings y Downs* (Hellings and Downs, 1983). Por lo tanto, previo a presentar los resultados en el caso de ULDM de spin-2, en lo que sigue se esbozará y explicará brevemente sobre la curva de Hellings-Downs.

Curva de Hellings-Downs

La idea aquí es obtener y presentar la curva de Hellings-Downs que da cuenta de las correlaciones entre diferentes señales de GW. Justamente las mediciones de PTAs buscan correlaciones en las señales, las cuales siguen la curva predicha por Hellings y Downs en su trabajo original de principio de los '80

⁸En (Ramani et al., 2020) se puede encontrar una aplicación, por ejemplo, para la formación de estructuras de pequeña escalas de DM.

(Hellings and Downs, 1983) (ver (Romano and Allen, 2023) para una reseña más detallada). En lo que continúa se seguirá fuertemente lo hecho en (Jenet and Romano, 2015; Mingarelli, 2014) de manera pedagógica, donde se recomienda su lectura para profundizar con más detalle.

La idea principal de estudiar las correlaciones entre las señales viene por el hecho de aprovechar el arreglo de púlsares para correlacionar el ruido/residuo en la señal y, entonces, sacarse de encima ruidos espúreos. Para un fondo estocástico, isótropo y sin polarizar de radiación cuadrupolar gravitacional, la correlación en la respuesta a un par de señales Tierra-pulsar sigue la *curva de Hellings-Downs*. Analíticamente, la curva se puede escribir como

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right) \ln \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right) \quad (4.37)$$

donde el ángulo ζ es el ángulo que subtienden los púlsares (ver figura 4.3). La idea, entonces, es tratar de entender cómo se obtiene esta expresión analítica. Lo primero a notar, pues, es que la señal estará correlacionada entre pares de detectores; para cada instante de tiempo, la correlación será el producto del *output* de dos detectores. Es necesario remarcar que como tanto el campo como el detector presentan ruido, la correlación fluctuará en el tiempo y por lo tanto se deberá promediar en dicho tiempo. El objetivo es, entonces, obtener la forma analítica de los *outputs* de los detectores para luego multiplicarlos y obtener la forma de la curva promediada de Hellings-Downs.

La correlación entre dos púlsares a y b en tiempos t_j y t_k respectivamente viene dado por la función

$$\langle r_a^*(t_j) r_b(t_k) \rangle = \int^{t_j} dt' \int^{t_k} dt'' \langle z_a^*(t') z_b(t'') \rangle \quad (4.38)$$

con

$$r(t) = \int^t dt' z(t') \quad (4.39)$$

el residuo temporal (antes denotado como t_r) donde

$$z(t) = \int d\hat{\Omega} z(t, \hat{\Omega}) \quad (4.40)$$

es el promedio angular del cambio en la frecuencia $z(t, \hat{\Omega}) := \nu(t)/\nu_0 - 1$. Es decir, la correlación vendrá dada por el promedio del producto entre dos tiempos residuales t_r , ec. (4.1), pero generalizándolo para direcciones arbitrarias. En lo que sigue se proseguirá a calcular explícitamente la expresión (4.38).

Sea una fuente de GW cuya perturbación en la métrica viene dada por

$$h_{ij}(t, \hat{\Omega}) = e_{ij}^+(\hat{\Omega}) h_+(t, \hat{\Omega}) + e_{ij}^\times(\hat{\Omega}) h_\times(t, \hat{\Omega}) \quad (4.41)$$

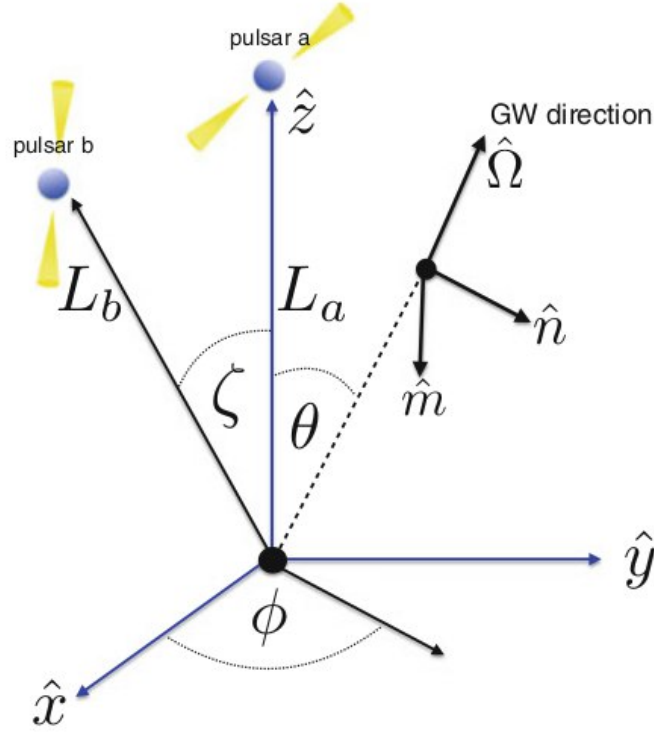


Figura 4.3: Sistema de referencia usado para los cálculos de la curva de Helling-Downs. Se alineó al pulsar *a* con el eje \hat{z} , a una distancia L_a del origen (que se toma a la Tierra o, similarmente, al baricentro del sistema solar, *SSB*), el pulsar *b* se encuentra en el plano $x-z$ a una distancia L_b del origen, formando un ángulo ζ con el pulsar *a*. Aquí $\hat{\Omega}$ es la dirección de propagación de la GW, con $\hat{m} \times \hat{n} = \hat{\Omega}$. El ángulo polar y azimutal vienen dados por θ y ϕ respectivamente. Créditos de la imagen: (Mingarelli and Sidery, 2014).

donde $h_{+,\times}$ representan los modos $+$ y \times de la GW en el gauge TT y $e_{ij}^{+,\times}(\hat{\Omega})$ son los tensores de polarización dados por

$$e_{ij}^+(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{m}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad e_{ij}^\times(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i \hat{m}_j \quad (4.42)$$

La ec. de la geodésica para un fotón propagándose de un púlsar genérico a la Tierra viene dada por

$$\frac{d\sigma^t}{d\lambda} = -\Gamma_{\mu\nu}^t \sigma^\mu \sigma^\nu = -\frac{1}{2} \dot{g}_{ij} \sigma^i \sigma^j \quad (4.43)$$

donde $\sigma^\mu = \nu(1, -\alpha, -\beta, -\gamma)$ es el 4-momento del fotón sin perturbar, α, β, γ denotan (los cosenos de) las direcciones x, y, z respectivamente, y el punto \dot{g} denota derivada temporal $\partial_0 g$. Resolviendo dicha ecuación se obtiene que

$$z(t, \hat{\Omega}) := \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \gamma} \Delta h_+ + \frac{\alpha\beta}{1 + \gamma} \Delta h_\times \quad (4.44)$$

donde $\Delta h_A := h_A^* - h_A^\oplus$ (para un desarrollo más detallado en los cálculos consultar sección 1.7.2 de (Mingarelli, 2014)). Este resultado se puede generalizar aún más suponiendo que ahora se tienen GW viniendo de N diferentes direcciones distintas, $\hat{\Omega}_n$. Llamando, ahora, al 4-momento como $\sigma^\mu = \nu(1, -\hat{p}) = \nu(1, -\alpha, -\beta, -\gamma)$, el cambio en la frecuencia se podrá escribir como

$$z(t, \hat{\Omega}) = \sum_n^N \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega}_n \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij}^n(t, \hat{\Omega}_n). \quad (4.45)$$

donde $h_{\mu\nu} = \sum_n^N h_{\mu\nu}^n(t - \hat{\Omega}_n \cdot \bar{x})$. Teniendo el cambio en frecuencia (4.45), el siguiente paso es calcular el promedio del producto entre ellos. Para ello se considerará la expansión en ondas planas para la perturbación h_{ij} producida por un fondo estocástico,

$$h_{ij}(t, \bar{x}) = \sum_A \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{S^2} d\hat{\Omega} h_A(f, \hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}) e^{i2\pi f(t - \hat{\Omega} \cdot \bar{x})} \quad (4.46)$$

Para un fondo estacionario, gaussiano y sin polarizar, las amplitudes de polarización satisfacen

$$\langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_{A'}(f', \hat{\Omega}') \rangle = \delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') \delta_{AA'} \delta(f - f') H(f) P(\hat{\Omega}) \quad (4.47)$$

donde las funciones $H(f)$ y $P(\hat{\Omega})$ describen el contenido espectral de la radiación y la distribución angular, respectivamente. Considerando el caso isótropo, $P(\hat{\Omega}) = 1$, el cambio en la frecuencia $z(t)$ se calculará entonces según

$$\begin{aligned} z(t) &= \int d\hat{\Omega} z(t, \hat{\Omega}) \\ &= \sum_A \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{S^2} d\hat{\Omega} h_A(f, \hat{\Omega}) F^A(\hat{\Omega}) e^{i2\pi f t} \left[1 - e^{-i2\pi f L(1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p})} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde se definió la función $F^A(\hat{\Omega}) := \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}} e_{ij}^A(\hat{\Omega})$ para cada polarización, conocida como la *antenna beam pattern*. En términos de esta, la correlación entre dos pulsares a y b (4.38) será

$$\langle r_a^*(t_j) r_b(t_k) \rangle = \int^{t_j} dt' \int^{t_k} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} df H(f) e^{-i2\pi f(t' - t'')} \Gamma_{ab}(f), \quad (4.49)$$

donde se define la función

$$\Gamma_{ab}(f) := \int d\hat{\Omega} \mathcal{K}_{ab}(f, \hat{\Omega}) \sum_A F_a^A(\hat{\Omega}) F_b^A(\hat{\Omega}) \quad (4.50)$$

conocida como *overlap reduction function* (ORF por sus siglas), con

$$\mathcal{K}_{ab}(f, \hat{\Omega}) = \left[1 - e^{i2\pi f' L_a(1 + \hat{\Omega}' \cdot \hat{p}_a)} \right] \left[1 - e^{-i2\pi f' L_b(1 + \hat{\Omega}' \cdot \hat{p}_b)} \right] \quad (4.51)$$

Bajo la suposición de un fondo isótropo, la ORF (4.50) resulta en la **curva de Hellings-Downs**. En lo que sigue se esbozará cómo se computa el cálculo explícito para reducirse, en definitiva, a la expresión presentada inicialmente, (4.37). Para eso se hará la suposición (que facilitará las cuentas) de que $fL \gg 1$, en cuyo caso la función \mathcal{K}_{ab} converge a cero de manera tal que la expresión (4.50) contiene solamente al término terrestre, excepto por el término de autocorrelación cuando los púlsares $a = b$. Por lo tanto, bajo esta aproximación, $\mathcal{K}_{ab} \simeq 1 + \delta_{ab}$ (para una discusión más detallada consultar sección 2.3 y el capítulo 3 de (Mingarelli, 2014)).

Tomando el sistema de referencia tal como se indica en la figura 4.3, se pueden expresar los versores según

$$\hat{p}_a = (0, 0, 1), \quad \hat{p}_b = (\sin \zeta, 0, \cos \zeta), \quad \hat{\Omega} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (4.52)$$

$$\hat{m} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0), \quad \hat{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad (4.53)$$

con $\zeta = \hat{p}_a \cdot \hat{p}_b$. Bajo esta elección de frame se calculan las funciones $F^A(\hat{\Omega})$ para cada pulsar. Notar, por ejemplo, que $F_a^\times = 0$ ya que en este frame $\hat{p}_a^i \hat{p}_b^j e_{ij}^\times = e_{zz}^\times = 0$. Calculando explícitamente las otras componentes⁹ para F^A , se puede calcular la integral (4.50) y obtener, luego de un poco de álgebra,

$$\Gamma_{ab}(f) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[1 + \frac{\cos \theta}{3} + 4(1 - \cos \theta) \ln \left(\sin \frac{\zeta}{2} \right) \right] (1 + \delta_{ab}) \quad (4.54)$$

Esta ecuación es la *curva de Hellings y Downs* a menos de un factor multiplicativo de $4\sqrt{\pi}/3$ que se usa para normalizar la curva de manera tal de que el máximo valor de la función vale 1 cuando $\zeta = 0$, es decir cuando el pulsar a =pulsar b ¹⁰. La idea a continuación será obtener la curva de Hellings-Downs análoga a (4.37) (o, análogamente, (4.54)) para el caso de ULDM de spin-2.

Curva de correlación ULDM de spin-2

Siguiendo lo hecho en la sección anterior, se proseguirá a calcular lo análogo para el caso bajo estudio en cuestión, es decir para el caso de ULDM de spin-2. La función de respuesta para cada pulsar viene dada por la expresión (4.24), a partir del cual se puede obtener la función de correlación $C(\vartheta, \varphi) := t_r^a(t_a) t_r^b(t_b)$ para dos púlsares a y b ubicados en una posición \mathbf{n}_a y \mathbf{n}_b y observados en un tiempo t_a y t_b respectivamente, dado por

⁹Ver ec.(1.169) de (Mingarelli, 2014) para la expresión explícita.

¹⁰La normalización utilizada para la curva de Hellings-Downs es totalmente arbitraria, aunque por razones históricas muchas veces se utilizan distintos factores. En lo que a esta tesis respecta, se utilizará una normalización que resulte consistente con el trabajo en sí. Se sugiere la lectura de (Romano and Allen, 2023) para una discusión más detallada respecto a la elección de la normalización.

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\alpha^2 \rho_{\text{DM}}}{2m^4 M_{\text{P}}^2} \sin(mt_a + \Upsilon_{\oplus}) \sin(mt_b + \Upsilon_{\oplus}) \varepsilon_{ij, \oplus} \varepsilon_{kl, \oplus} n_a^i n_a^j n_b^k n_b^l. \quad (4.55)$$

Eligiendo el frame de manera tal que el pulsar a quede alineado con el eje z , esto es

$$\mathbf{n}_a = (0, 0, 1), \quad \mathbf{n}_b = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta). \quad (4.56)$$

se puede calcular de manera un poco más simplificada la función de correlación $C(\vartheta, \varphi)$. Notar, sin embargo, que con la parametrización utilizada para describir al cuadrupolo ε_{ij} , ec. (2.32), se están separando a dichas componentes de acuerdo a sus propiedades frente a rotaciones alrededor del eje z . Por lo tanto, con la elección del sistema de referencias (4.56), solamente la helicidad escalar contribuirá al resultado final por parte del pulsar a . Esta elección, no obstante, resulta útil para hacer una conexión con la literatura donde se discute la señal esperada de otros efectos, tales como el estudio del fondo de GW en GR y sus extensiones (Chamberlin and Siemens, 2012; Gair et al., 2015; Jenet et al., 2005; Lee et al., 2010; Lee et al., 2008). En definitiva, calculando las contracciones pertinentes, la función de correlación resulta

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\alpha^2 \rho_{\text{DM}}}{6m^4 M_{\text{P}}^2} \sin(mt_a + \Upsilon_{\oplus}) \sin(mt_b + \Upsilon_{\oplus}) \times \\ \times \varepsilon_{\text{S}} \left\{ \varepsilon_{\text{S}} [3 \cos^2 \vartheta - 1] + \sqrt{3} [\varepsilon_{\text{V}} \sin 2\vartheta \cos(\varphi - \eta) + \varepsilon_{\text{T}} \sin^2 \vartheta \cos(2\varphi - \chi)] \right\}. \quad (4.57)$$

En la figura 4.4 se muestra el comportamiento polar de la función de correlación para las tres helicidades del campo de spin-2. Cabe aclarar que, en la realidad, no se verían las distintas helicidades por separado sino que la suma de ellas tres. Para desentrañar las diferentes helicidades se necesitaría, evidentemente, estudiar con más detalle la dependencia azimutal de la señal: el término escalar es independiente de φ , la helicidad vectorial va como $\cos(\varphi - \eta)$, y la parte tensorial es proporcional a $\cos(2\varphi - \chi)$.

A modo de cierre de esta sección y por consistencia, en lo que sigue se discutirá sobre cómo afectan los términos subdominantes a los resultados hallados en este capítulo.

4.2.2. Estimación de los términos subdominantes

El punto de partida para analizar qué es lo que sucede con los términos subdominantes es la expresión para el residuo del tiempo (4.32). Como primera cuestión, para realizar el análisis se supondrá, por simplicidad, que la densidad de energía de materia oscura ρ_{DM} viene dado por su valor medio en todos lados, es decir que se supondrá que $\rho_{\text{DM}^{\otimes}} = \rho_{\text{DM}^{\oplus}} \equiv \rho_{\text{DM}}$. De esta manera solamente se retendrá

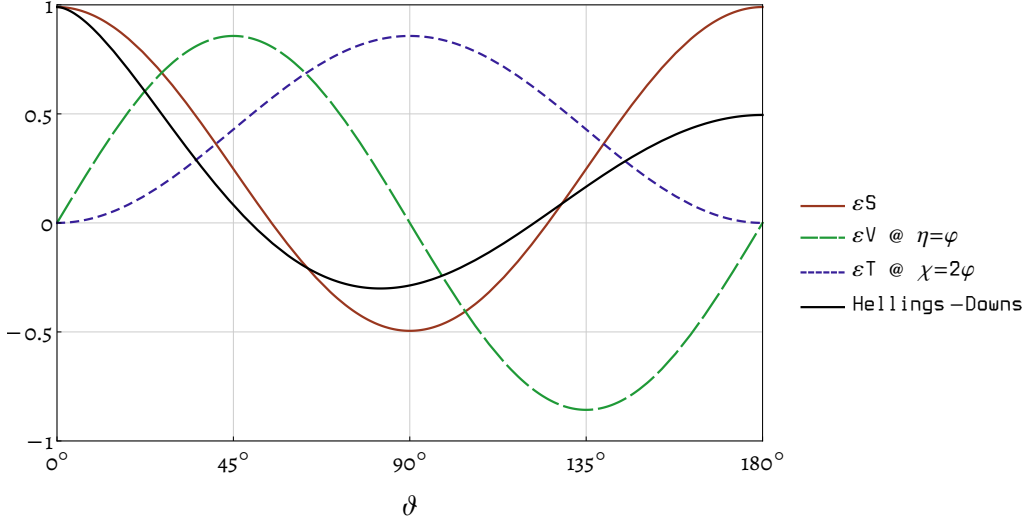


Figura 4.4: Dependencia angular de la función de correlación $C(\vartheta, 0)$, ec. (4.57), para las tres helicidades ε_S (roja sólida), ε_V (verde lineada grande) y ε_T (violeta lineada chico), normalizado de manera tal que ε_S contribuye 1 cuando $\vartheta = 0$. Se ve que la contribución escalar ε_S no depende del ángulo azimutal φ . Se graficó la contribución de la helicidad vectorial alineado según $\varphi = \eta$ mientras que la contribución tensorial ε_T alineado con $2\varphi = \chi$. Se exhibe, a su vez, la curva de Hellings-Downs (4.37) en negro sólido. La normalización relativa entre la curva de Hellings-Downs y las tres contribuciones de las helicidades del campo de spin-2 es arbitraria (ver nota al pie 10).

la dependencia espacial en la polarización y en la fase. Para continuar con el análisis se debe especificar aún más cómo es la configuración espacial del campo de spin 2; para ello se pueden considerar dos posibilidades:

- O bien se asume que la configuración del cuadrupolo de ULDM de spin-2 es la misma en todos lados, incluso para distancias mayores a su escala de coherencia dado por la longitud de onda de Broglie (este fue el *approach* seguido, implícitamente, en (Nomura et al., 2020) para el caso vectorial de ULDM) en cuyo caso $\varepsilon_{ij,\oplus} = \varepsilon_{ij,\otimes}$.
- Si el cuadrupolo resulta distinto para cada ubicación del pulsar, entonces se puede hacer un promedio sobre todas las posibles configuraciones del mismo, asumiendo que todos los pulsares viven en parches descorrelacionados.

El rumbo a seguir que se tomará aquí es el segundo de estos, en donde tomando "promedio sobre las helicidades" se obtiene

$$\langle t_r^2(t) \rangle_{\text{hel}} = \frac{\alpha^2 \rho_{\text{DM}}}{2m^4 M_{\text{P}}^2} \left[\left(\varepsilon_{ij,\oplus}^i n^j \right)^2 \sin^2(mt + \Upsilon_{\oplus}) - \frac{2}{15} \sin^2(mt - mD + \Upsilon_{\otimes}) \right]. \quad (4.58)$$

Se puede ver que el término de pulsar no depende de la dirección \mathbf{n} , tal como era de esperar a la hora de tomar promedio. A su vez, es posible notar que no hay término cruzado entre Tierra-pulsar ya que promedia a cero. La fase Υ es, en un principio, no solamente distinta en la Tierra como en el pulsar, sino también para cada pulsar en particular. Por lo tanto si la escala característica para los cambios en las fases es la misma que la del cuadrupolo, entonces para tener en cuenta este efecto se debería promediar asimismo sobre las fases. Sin embargo, por lo menos a primer orden, esto es lo mismo que promediar sobre el tiempo y por ende la contribución resultante es independiente del tiempo y no podrá medirse con PTA. En conclusión, al mantener las fases distintas se está haciendo la suposición de que solamente los cambios en la configuración del cuadrupolo serán significantes para los distintos pulsares.

Promediando sobre la esfera \mathbf{n} se obtiene, finalmente,

$$\sqrt{\langle t_r^2(t) \rangle} = \frac{\alpha \sqrt{2\rho_{\text{DM}}}}{\sqrt{15}m^2 M_{\text{P}}} \cos \left(mt - \frac{mD}{2} + \frac{\Upsilon_{\oplus} + \Upsilon_{\otimes}}{2} \right). \quad (4.59)$$

por lo tanto el efecto de considerar también los términos subdominantes es, como mucho, mayor por un factor $\sqrt{2}$ debido a que puede haber una supresión causada por la diferencia en las fases para cada pulsar. Por ende, el término Terrestre domina al menos por un factor $1/\sqrt{2}$ y, considerar la inclusión del término de pulsar junto al de la Tierra resulta mayor que aquel considerando solamente al término terrestre. En definitiva, los límites que se han obtenido previamente son conservativos.

4.3. Conclusiones

Se prosiguen a listar las conclusiones de este capítulo:

- ▷ El comportamiento oscilatorio del campo de ULDM de spin-2 induce un cambio en la frecuencia de los pulsos que arriban de los pulsares, el cual deja una impronta que depende del tiempo y de la dirección, (4.24). Esto se debe a que el campo de spin-2 está acoplado universalmente al tensor energía-momento de la materia estándar, parametrizado por la constante α .
- ▷ La huella más característica que posee el campo de ULDM de spin-2 en comparación con los efectos producidos por otras fuentes a las mediciones de pulsar timing es su estructura cuadrupolar anisotrópica: la magnitud del residuo temporal depende de la posición de los pulsares en el cielo, caracterizado por los armónicos esféricos (de grado 2).
- ▷ Para el rango de masas de ULDM $m \lesssim 4 \times 10^{-22}$ eV, los datos existentes de, por ejemplo, PPTA, pueden otorgar cotas interesantes y relevantes para el acople del campo de spin-2 ULDM α , figuras 4.1 y 4.2. Estos resultados, cabe aclarar, son una estimación del orden que se puede alcanzar con

los datos de PTA actuales (se ha promediado sobre la esfera) y, para tener en cuenta de manera robusta las anisotropías en las señales, un estudio más dedicado es necesario. La línea a explorar aquí caería bajo el análisis realizado en (Porayko et al., 2018), tomando en cuenta las anisotropías para así optimizar las cotas y a su vez distinguir el efecto de aquel producido, por ejemplo, por un campo de ULDM de spin-0.

- ▷ Si se comparan los límites obtenidos para α utilizando BPs, fig. 3.4, de aquellos obtenidos utilizando PTA, fig. 4.1, vemos que este último complementa el rango de masas a explorar para poner cotas a α , justamente en la región en donde BPs no presentaba cota alguna. Combinando ambos resultados, es posible acotar al modelo en un rango más amplio de masas y restringir más aún el valor del parámetro de acoplamiento α .
- ▷ Se ha podido estudiar la correlación entre los tiempos residuales para cualquier par de púlsares en el arreglo, ec. (4.57). Debido a la naturaleza cuadrupolar del campo ULDM de spin-2, esta correlación depende explícitamente de la separación angular entre el par de púlsares, como así también de su posición (azimutal) relativa. Este resultado es remarcable ya que no solamente presenta diferencias sustanciales con respecto a otros modelos de ULDM (escalar y vectorial por ejemplo), sino que también tiene implicancias importantes a la hora de desarrollar estrategias para la búsqueda de dicha señal. De hecho, se pueden separar diferentes efectos sistemáticos en los análisis de correlación de púlsares en PTA y lidiar por separado con cada uno. Esto es gracias a que cada uno de ellos presenta un comportamiento anisotrópico distinto (ver (Taylor et al., 2017; Tiburzi et al., 2016; Verbiest and Shaifullah, 2018)) como por ejemplo un error sistemático en los relojes sería monopolar (es decir, isótropo), un error sistemático en las efemérides planetarias sería dipolar, etc.
- ▷ El efecto del campo de spin-2 sobre pulsar timing es similar a aquel generado por una fuente monocromática de GW. Existen diversos enfoques y métodos actuales para buscar dicha señal (ver (Lee et al., 2011; Madison et al., 2016; Zhu et al., 2014) para un análisis en el tiempo, y (Zhu et al., 2015b) para frecuencia). Sería interesante, entonces, estudiar hasta qué punto se pueden extender y aplicar estos métodos al modelo de spin-2 ULDM.

Capítulo 5

Ondas gravitacionales

Hasta el momento se ha estudiado cómo la ULDM de spin-2 afecta las órbitas de los BPs como así también el tiempo de arribo de PTAs, y en base a esto se han puesto novedosas cotas al modelo. En este último caso, se ha hecho uso del cambio de frame (4.11) para reinterpretar la propagación de los fotones desde el púlsar a la Tierra como si se estuviesen propagando libremente en una métrica \tilde{g} , la cual depende explícitamente del campo de ULDM, M_{ij} . Precisamente este cambio de frame permitirá estudiar cómo debido a las oscilaciones del campo de spin-2 como así también debido a su acople universal con la materia ordinaria, α , la ULDM de spin-2 podría generar una señal en los detectores de GW que se asemeje a la señal generada por GW *continuas*: en contraparte con las detecciones de GW debido a la colisión de BH/NS, señales más débiles pero de mayor duración en el tiempo se pueden detectar también. Esto será así siempre y cuando la onda esté oscilando de manera (cuasi)monocromática y "continua", es decir coherente en el tiempo. La idea explorada en (Armaleo et al., 2021) sigue este rumbo, donde se muestra cómo la ULDM de spin-2 podría generar una señal de este tipo y, más aún, podría ser detectada con los interferómetros de GW (GWI por sus siglas en inglés) actuales y futuros. La idea y los resultados de este capítulo son un reflejo de lo hecho en (Armaleo et al., 2021), mostrando que con los datos actuales - en el caso de una detección nula - se pueden poner nuevas cotas al parámetro de acoplamiento α por debajo de $\alpha \sim 10^{-7}$, para masas alrededor de 10^{-13} eV. Asimismo, con los detectores futuros se podrá extender dicha cota para masas más pequeñas aún, hasta alrededor de 10^{-18} eV. Para el rango de frecuencias accesibles por los GWI, estas cotas serían las más estrictas para el parámetro de Yukawa (quinta fuerza), dado por α .

En este capítulo se estudiará la señal que produce el campo de ULDM de spin-2 sobre los GWI, y cómo mediante la (no)detección de dicha señal se pueden poner cotas al modelo. Para ello, lo primero que se hará será describir cómo es la forma de la señal del campo de spin-2 para, luego, estudiar las

cotas pertinentes al modelo.

5.1. Señal en los detectores de ondas gravitacionales

Las GW detectadas hasta el momento son producto de eventos breves y cataclísmicos tal como lo es la colisión de agujeros negros binarios (Abbott et al., 2019b, 2021). Las señales que se detectan a partir de este tipo de eventos es *fuerte*, con amplitud gravitacional (adimensional) del orden de $h \sim 10^{-21}$, pero resultan muy breves en el tiempo (desde alguna fracción del segundo hasta algunos segundos). A su vez, otro tipo de señales se pueden detectar a partir de las GW emitidas, por ejemplo, por NS que giran muy rápidamente (Riles, 2017) o también a partir de objetos galácticos ultra-compactos en binarias (Nelemans et al., 2001). Este último tipo de GW presenta una señal mucho más débil que la primera, pero resultan de mayor duración y coherentes en el tiempo; a este tipo de GW se las conoce como GW *continuas* (o, abreviadamente, *CW*). En el último tiempo se han tratado de buscar dichas señales (Abbott et al., 2019a; Dergachev and Papa, 2020; Steltner et al., 2021) pero, no habiendo detectado CW alguna, se ha podido poner una cota superior a la amplitud máxima h en un valor de $h \sim 10^{-25}$ para frecuencias de alrededor $f \sim 10^2$ Hz. A su vez, otra fuente posible de CW puede ser debido al *scattering* de bosones ultralivianos alrededor de BH a través del mecanismo conocido como *superradiancia*¹ (Brito et al., 2015). La idea en esta sección será mostrar que la señal que genera la ULDM de spin-2 es análoga a la señal que generan las CW. Es decir, la ULDM de spin-2 interactúa con los GWI de forma tal que, debido a su estructura (cuasi)monocromática y coherente, la señal es análoga a una CW. Cabe destacar que dicha señal se produce por las oscilaciones coherentes del campo de spin-2, el cual se encuentra acoplado de manera universal a los campos del modelo estándar. Este proceso, notar, nada tiene que ver con las CW generadas por superradiancia; más bien, este proceso es similar a lo que sucede con la materia oscura del tipo *fotón oscuro* donde la ULDM presenta interacciones adicionales (Miller et al., 2021; Pierce et al., 2018)² (notar, no obstante, que en el caso de spin-2 la interacción no puede ser *setteada* a cero). Más aún, si la ULDM interactúa solamente de manera gravitacional, la señal no podrá detectarse con GWI, independientemente del spin del campo (Aoki and Soda, 2016). Se prosigue, entonces, a describir cómo resulta la señal producida por la ULDM de spin-2.

El comportamiento del campo de ULDM de spin-2 M_{ij} para regiones lo suficientemente chicas dentro del halo local viene descrito por la ec. (2.27). Para estudiar el efecto del campo sobre los GWI,

¹Ver, por ejemplo, (Ng et al., 2021; Palomba et al., 2019) para la búsqueda de CW producidas por superradiancia en el caso de spin-0.

²En, por ejemplo, (Arvanitaki et al., 2015; Grote and Stadnik, 2019; Michimura et al., 2020; Morisaki and Suyama, 2019) se pueden encontrar otros tipos de interacciones directas entre la ULDM y la materia.

sin embargo, será necesario hacer una aclaración pertinente: las detecciones de GW (tales como, por ejemplo, LIGO/Virgo, etc) se realizan en su propio frame, denominado *frame del detector*. Por otro lado se encuentra la DM de spin-2, cuyo tensor ε_{ij} se escribirá de distinta manera dependiendo del frame donde se trabaje. Por ende, habrán dos frames en cuestión que serán aquel donde se realizan las mediciones de GW llamado frame del detector, y por otro lado el frame en el cual se descompone el tensor cuadrupolar de la DM denominado *DM frame*. Por este motivo, la ec. (2.27) se reescribirá para dejar esto explícitamente como

$$M_{ij}(t) = \frac{\sqrt{2\rho_{\text{DM}}}}{m} \cos(mt + \Upsilon) \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}), \quad (5.1)$$

donde se deja de manera manifiesta la dependencia en el tensor cuadrupolar a través del versor \mathbf{r} (Maggiore, 2007). Notar que esta solución asume que el campo permanece coherente y homogéneo sobre la región de interés (ver recuadro debajo).

Coherencia y homogeneidad del campo

La solución (5.1) asume una sola frecuencia, que viene dada por la masa del campo $2\pi f = m$, y una estructura de polarización coherente. La idea aquí es brindar una justificación de por qué esto tiene sentido.

Anteriormente se ha visto que la escala de inhomogeneidades para el campo de ULDM viene dada por su longitud de onda de Broglie, $\lambda_{\text{dB}} = 1/fv$, ec. (2.34), donde f es la frecuencia y $v \sim 10^{-3}$ es la velocidad efectiva de la ULDM. Por lo tanto, dado que λ_{dB} es muchísimo más grande que el tamaño típico de los GWI, se pueden despreciar los gradientes del campo y tratarlo de forma homogénea.

Por otro lado, la coherencia en la frecuencia de oscilación estará garantizada hasta cierto tiempo de coherencia, dado por $t_{\text{coh}} := 4\pi/mv^2 = 2/fv^2$ (notar que esta definición difiere en un factor 4 de la definición *usual* que se utiliza en la literatura de ULDM, (2.35)). Aquí se adoptará la primera de ellas, que es la usual en la literatura de GW). Típicamente, las observaciones hechas por los GWI poseen un tiempo de observación mucho mayor que t_{coh} y por ende una descripción más precisa de la ULDM sería en términos de una superposición de ondas planas (ver (Miller et al., 2021; Pierce et al., 2018)). Como el objetivo aquí no es obtener de manera exhaustiva la forma explícita de la señal, sino tener una estimación del orden de magnitud de las cotas que se pueden hallar con los GWI, se asumirá que el campo puede ser descripto por una sola frecuencia.

En el ULDM frame $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$, el tensor de polarización del campo se podrá describir según $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) := \sum_m a_m \mathcal{Y}_{ij}^{2m}(\mathbf{r}) := \sum_{\kappa} \varepsilon_{\kappa} \mathcal{Y}_{ij}^{\kappa}(\mathbf{r})$, donde la suma en κ corre sobre las cinco amplitudes $\{\varepsilon_{\times}, \varepsilon_{+}, \varepsilon_{\text{L}}, \varepsilon_{\text{R}}, \varepsilon_{\text{S}}\}$

que satisfacen $\sum_{\kappa} \varepsilon_{\kappa}^2 = 1$ (la amplitud global se ha fijado de manera tal que M_{ij} constituye toda la DM), y donde las matrices de polarización están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{ij}^{\times} &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_i q_j + q_i p_j) , & \mathcal{Y}_{ij}^{+} &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_i p_j - q_i q_j) , \\ \mathcal{Y}_{ij}^L &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_i r_j + r_i q_j) , & \mathcal{Y}_{ij}^R &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_i r_j + r_i p_j) , \\ \mathcal{Y}_{ij}^S &:= \frac{1}{\sqrt{6}} (3r_i r_j - \delta_{ij}) . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Notar que la diferencia con la descomposición hecha al final del capítulo 2, ec. (2.29), es simplemente escribir al tensor ε_{ij} de dos maneras distintas. La manera de expresar al tensor cuadrupolar como $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa} \varepsilon_{\kappa} \mathcal{Y}_{ij}^{\kappa}(\mathbf{r})$ resultará útil para relacionar el frame del detector y el de la ULDM. La conexión entre ambas maneras de descomponer ε_{ij} viene dada por el siguiente diccionario:

$$\mathcal{Y}_{ij}^{\times} := \mathcal{Y}_{ij}^{2,-2}, \quad \mathcal{Y}_{ij}^{+} := \mathcal{Y}_{ij}^{2,2}, \quad \mathcal{Y}_{ij}^L := \mathcal{Y}_{ij}^{2,-1}, \quad \mathcal{Y}_{ij}^R := \mathcal{Y}_{ij}^{2,1}, \quad \mathcal{Y}_{ij}^S := \mathcal{Y}_{ij}^{2,0}.$$

y donde, a su vez, las amplitudes se relacionan mediante

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\times} &:= \varepsilon_T \sin \chi := a_{-2} := \sin \eta \cos \beta \sin \chi, & \varepsilon_{+} &:= \varepsilon_T \cos \chi := a_2 := \sin \eta \cos \beta \cos \chi, \\ \varepsilon_L &:= \varepsilon_V \sin \tau := a_{-1} := \sin \eta \sin \beta \sin \tau, & \varepsilon_R &:= \varepsilon_V \cos \tau := a_1 := \sin \eta \sin \beta \cos \tau, \\ \varepsilon_S &:= a_0 := \cos \eta. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Es importante notar que, a diferencia de CW, en este caso no hay propagación a lo largo de la dirección \mathbf{r} ya que aquí el mismo sirve simplemente como una referencia para la descomposición en helicidades escalares, vectoriales y tensoriales, de acuerdo a su comportamiento frente a rotaciones alrededor de \mathbf{r} . Por este motivo es que se ha utilizado la nomenclatura $\{\times, +, L, R, S\}$ anteriormente.

A su vez, es necesario tener en cuenta que la descomposición hecha aquí no es la más general posible: el tensor de polarización simétrico más general, que sea invariante frente a difeomorfismos, puede tener hasta seis grados de libertad independientes (Lee et al., 2008). En este caso, la descomposición más general para el tensor $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ posee dos modos escalares: el modo *breathing* ε_b con $\mathcal{Y}_{ij}^b \propto (p_i p_j + q_i q_j)$, y el modo *longitudinal* ε_l con $\mathcal{Y}_{ij}^l \propto (r_i r_j)$. Estos dos modos, sin embargo, se combinan en un solo modo ε_S debido a la no-traza del tensor de polarización $\delta^{ij} \varepsilon_{ij} = 0$ que se satisface en el modelo de ULDM de spin-2 de esta tesis.

Mediante la redefinición de la métrica llevada a cabo en la sección anterior, $g_{ij} \rightarrow g_{ij} + \alpha M_{ij}/M_P$, ec. (4.11), el efecto del campo de spin-2 sobre los detectores puede ser descripto de manera equivalente como el efecto gravitacional producido por una perturbación de la métrica que oscila, h_{ij} , dado por

$$h_{ij}(t) = \frac{\alpha}{M_P} M_{ij}(t) = \frac{\alpha \sqrt{2\rho_{\text{DM}}}}{m M_P} \cos(mt + \Upsilon) \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}). \quad (5.4)$$

En términos de esta se define la *señal* como la combinación de la perturbación de la métrica h_{ij} y la función de respuesta, D^{ij} , como $h(t) := D^{ij} h_{ij}(t)$. La función de respuesta en el frame del detector $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ está dado por el cambio (diferencial) en la longitud de los brazos del detector a lo largo de los versores \mathbf{n} y \mathbf{m} , calculado como $D^{ij} = (n^i n^j - m^i m^j)/2$ (Maggiore, 2007). La señal resulta, entonces,

$$h(t) = \frac{\alpha \sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{\sqrt{2} m M_P} \cos(mt + \Upsilon) \Delta\varepsilon := h_s \sin(mt) + h_c \cos(mt), \quad (5.5)$$

donde se definió $\Delta\varepsilon := \varepsilon_{ij}(n^i n^j - m^i m^j)$ y se han introducido las amplitudes del seno h_s y del coseno h_c . Este es el resultado principal de este capítulo de la tesis.

Cabe remarcar que la señal teórica (5.5) resulta inversamente proporcional a la masa del campo m . Este comportamiento inverso con la masa se halla, asimismo, para el caso de ULDM de spin-1 (*fotón oscuro*) donde el campo porta una carga adicional tal como el número bariónico B o número bariónico menos leptónico $B - L$, los cuales generan una interacción directa entre el campo de ULDM y los espejos del detector (Miller et al., 2021; Pierce et al., 2018). La dependencia inversa (lineal) en la masa debe ser comparada, pues, con la dependencia *cuadrática* obtenida del caso de interacción puramente gravitacional (Aoki and Soda, 2016). Es decir, en ausencia de interacciones no gravitatorias, la amplitud de la señal decae mucho más rápido para masas más grandes, debido a su dependencia cuadrática. Por este motivo es que sería prácticamente imposible detectar alguna señal de este tipo con los GWI.

Para calcular explícitamente quién es $\Delta\varepsilon$, primeramente habrá que definir de manera precisa los frames de trabajo para luego calcular, así, la contracción pertinente. Para ello lo que se tendrá que hacer es escribir al DM frame en términos del frame del detector. Este resulta (ver figura 5.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \\ \mathbf{p} &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ \mathbf{q} &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \end{aligned} \quad (5.6)$$

Con esto en mente, calcular $\Delta\varepsilon$ se reduce a calcular, en definitiva, las distintas contracciones provenientes de \mathcal{Y}_{ij}^κ con n^i y m^i . De manera general se puede expresar, entonces,

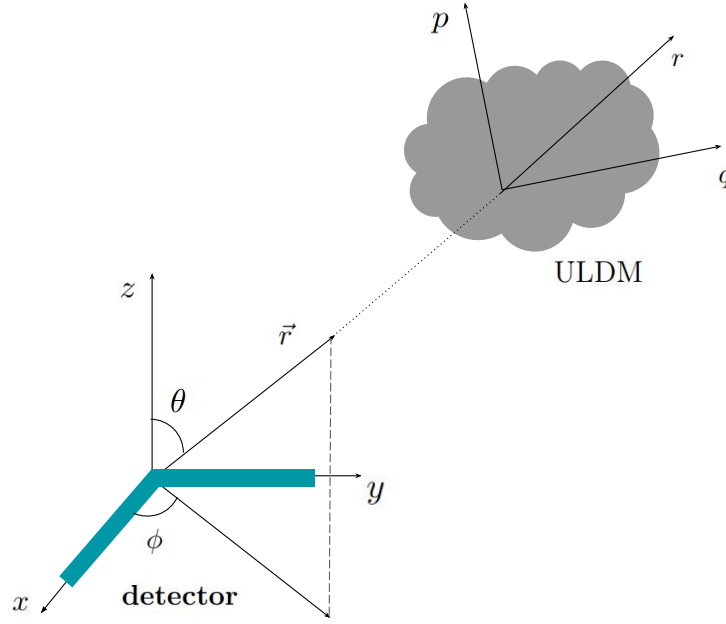


Figura 5.1: Sistemas de referencias utilizados para el detector y para la ULDM. El origen de ambos sistemas se encuentra conectado a través del vector \mathbf{r} . Se han puesto los ejes del detector alineados con los ejes \mathbf{x} e \mathbf{y} del sistema de referencia.

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon = & \sqrt{2}\varepsilon_{\times} [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{m})] + \frac{\varepsilon_{+}}{\sqrt{2}} [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})^2 + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{m})^2] \\ & + \sqrt{2}\varepsilon_{\text{L}} [(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})] + \sqrt{2}\varepsilon_{\text{R}} [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})] \\ & + \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_{\text{S}} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})^2] \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde, si ahora se establece $\mathbf{n} = \mathbf{x}$ y $\mathbf{m} = \mathbf{y}$ lo cual se puede hacer sin pérdida de generalidad para un detector en forma de L, la expresión anterior se escribirá como

$$\Delta\varepsilon = \frac{\cos 2\phi}{\sqrt{2}} \left[\varepsilon_{+} (\cos^2 \theta + 1) + \varepsilon_{\text{R}} \sin 2\theta + \sqrt{3}\varepsilon_{\text{S}} \sin^2 \theta \right] - \sqrt{2} \sin 2\phi (\varepsilon_{\times} \cos \theta + \varepsilon_{\text{L}} \sin \theta) \quad (5.8)$$

A partir de este resultado cabe mencionar que, como el detector se está moviendo con respecto a la ULDM, ciertos efectos podrían aparecer que podrían ser relevantes para el resultado. Más específicamente, el movimiento del detector con respecto a la ULDM es producto de tres contribuciones a saber:

(1) La Tierra rota alrededor de su eje con velocidad $v \sim 10^{-6}$ (esto aplica, solamente, a detectores terrestres).

(2) La Tierra realiza su órbita alrededor del Sol con velocidad $v \sim 10^{-4}$.

(3) El Sistema Solar se está moviendo a través del halo de DM con velocidad $v \sim 10^{-3}$, causando lo que se conoce como *viento de DM*.

Esto implica que, en principio, se debería hacer una transformación de Lorentz del frame de ULDM al frame del detector. Sin embargo, dado que las velocidades involucradas en los efectos previamente mencionados son muy pequeñas, el efecto del *boost* en $\mathbf{r}\mathbf{r}$ equivale a una corrección menor al $\sim 1\%$ de la señal teórica y por lo tanto se pueden despreciar dichos efectos. A su vez, y por otro lado, la aceleración relativa entre los dos frames inducirá un corrimiento Doppler en la frecuencia, $\Delta f_{\text{Doppler}}$, que podría afectar la señal de ULDM-CW de spin-2 y por lo tanto debería ser tenida en cuenta a la hora de desarrollar los métodos para analizar los datos fehacientemente (D'Antonio et al., 2018; Frasca et al., 2005; Miller et al., 2021). En la siguiente (sub)sección, no obstante, se discutirá sobre por qué el efecto Doppler - en lo que a esta tesis respecta - puede ser despreciado. Esto viene justificado a partir del método por el cual este tipo de GW (*i.e.*, *continuas*) se suelen analizar.

5.1.1. Método semi-coherente

Para analizar la señal de GW producida, por ejemplo, por la colisión de dos BH, se necesita un método computacional que sea extremadamente preciso en una ventana de tiempo muy corta, acorde al tiempo del *merger* y *ringdown* de la colisión en cuestión. Para analizar CWs, en cambio, se necesita recurrir a métodos distintos de análisis de datos ya que es computacionalmente imposible investigar la señal de manera coherente para todo el tiempo de observación, tal como se suele hacer con los eventos breves y cataclísmicos comentados al inicio del capítulo³. La búsqueda de CWs en el cielo recurre, entonces, a los métodos conocidos como *semi-coherentes* (Antonucci et al., 2008; Astone et al., 2014; Brady and Creighton, 2000; Krishnan et al., 2004). En los métodos semi-coherentes toda la data se divide en pequeños intervalos de tiempo, denotados (por sus siglas en inglés) T_{chunk} , dentro del cual cada uno se analiza de forma coherente por separado. Una de las ventajas de este método es que si se elige $T_{\text{chunk}} < T_{\text{Doppler}} := 1/\Delta f_{\text{Doppler}}$, entonces el corrimiento Doppler en la frecuencia puede ser despreciado; más precisamente, dentro de cada intervalo de tiempo, el corrimiento Doppler que contribuiría a \dot{f} puede ser despreciado, es decir que la frecuencia permanece constante. Cabe destacar que en las búsquedas de CW, para identificar posibles candidatos como fuentes de CW para el análisis jerárquico semi-coherente, es necesario corregir el corrimiento Doppler predicho para cada *chunk* y para cada ubicación en el cielo. Pero, dado que no hay "ubicación en el cielo" en lo que las búsquedas de ULDM respecta, este efecto puede ser despreciado y no presenta mayores consideraciones. Más

³Esto es así por lo menos para los GWI terrestres. En el caso de GWI espaciales tales como LISA, debido a la escasa frecuencia de muestreo de alrededor de 1 Hz, en comparación con la frecuencia de muestreo de por ejemplo HLV (Hanford-Livingston-Virgo) de aproximadamente 10^4 Hz, esto no es un problema.

aún, para tener configuraciones estables de la ULDM dentro de cada intervalo, se debe cumplir que $T_{\text{chunk}} < t_{\text{coh}}$.

La sensibilidad de un análisis coherente durante todo su tiempo de observación t_{obs} escala según $t_{\text{obs}}^{-1/2}$. En los métodos semi-coherentes, asumiendo que se divide todo el tiempo de observación en N *chunks* de la misma duración, $t_{\text{obs}} = NT_{\text{chunk}}$, la sensibilidad escala, en cambio, como $N^{-1/4}T_{\text{chunk}}^{-1/2} = t_{\text{obs}}^{-1/4}T_{\text{chunk}}^{-1/4}$. Gracias a la coherencia de la señal, e incluso con las limitaciones de los métodos semi-coherentes, la sensibilidad actual alcanzada por la colaboración HLV para la búsqueda de CW es por lo menos 10^{-3} menor que la sensibilidad de diseño h_0 para los eventos breves (Abbott et al., 2019a; Dergachev and Papa, 2020; Steltner et al., 2021).

Las técnicas semi-coherentes fueron adaptadas y optimizadas para la búsqueda de DM del tipo fotón oscuro, tomando en cuenta la coherencia temporal y la geometría de la señal (Miller et al., 2021). Por lo tanto, en analogía, se puede adaptar lo hecho para el caso vectorial al caso de ULDM-CW de spin-2 mediante el reemplazo del promedio sobre las diferentes polarizaciones de la onda de ULDM, que en el caso vectorial resultaba un factor $\sqrt{2}/3$, (Miller et al., 2021; Pierce et al., 2018), por el promedio $\sqrt{\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle} = \sqrt{2/5}$. Más específicamente, se define la amplitud teórica efectiva (o, en inglés, *effective theoretical strain amplitude*) h para el caso de ULDM-CW de spin-2 como la raíz del promedio sobre las polarizaciones y la fase Υ de las amplitudes del seno y coseno de (5.5),

$$h := \langle h_s^2 + h_c^2 \rangle^{1/2} = \frac{\alpha \sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{\sqrt{5} m M_{\text{P}}} . \quad (5.9)$$

Notar que, partiendo de (5.5), se obtiene que

$$\sqrt{\langle h_s^2 + h_c^2 \rangle} = \frac{\alpha \sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{\sqrt{2} m M_{\text{P}}} \sqrt{\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle} \quad (5.10)$$

donde, para el caso de spin-2 ULDM-CW tal como se indicó anteriormente, resulta

$$\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{16\pi^3} \int d\tilde{\Omega} \Delta \varepsilon^2 \sin \theta \sin \eta = \frac{2}{5} \quad (5.11)$$

donde $d\tilde{\Omega}$ denota en ángulo sólido para la 6-esfera delimitada por los ángulos $\{\theta, \phi, \beta, \chi, \eta, \tau\}$, ecuaciones (5.3) y (5.6). Cabe mencionar que los ángulos son tales que

$$\begin{aligned} \theta &\in [0, \pi], & \phi &\in [0, 2\pi], \\ \eta &\in [0, \pi], & \beta, \chi, \tau &\in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (5.12)$$

La idea continuación será mostrar las cotas que se obtienen mediante el uso de GWI para el caso de ULDM-CW de spin-2, ec. (5.9).

5.2. Resultados

El objetivo en esta sección es mostrar los valores estimados accesibles para α mediante el uso de GWIs. Para ello la idea será comparar la señal teórica esperada h (5.9) con la sensibilidad de diseño de diferentes GWI presentes y futuros. Dichos resultados se pueden observar en detalle en la figura 5.2. En dicha figura se puede observar que los detectores de HLV actuales pueden detectar la señal de ULDM-CW de spin-2 para cierto rango de frecuencias, para valores de $\alpha \gtrsim 10^{-4}$. Una búsqueda más dedicada mediante el método semi-coherente podría, a su vez, mejorar el rango de detectabilidad de α extendiéndolo para algunos órdenes de magnitud, llegando potencialmente hasta $\alpha \sim 10^{-7}$ para frecuencias de algunas decenas de Hz, que se corresponden con masas de alrededor de 10^{-13} eV. Esto está indicado en la figura 5.2 mediante la línea punteada con el nombre "HLV opt"; los detalles sobre cómo se obtiene esta curva junto con una breve explicación más detallada al respecto sobre el método optimizado se puede encontrar en el Apéndice B. Para más o menos el mismo rango de frecuencias desde $f \sim 10$ Hz ($m \sim 4 \times 10^{-14}$ eV) hasta $f \sim 10^3$ Hz ($m \sim 4 \times 10^{-12}$ eV) y un poco más allá, los experimentos futuros *Einstein Telescope* (ET) (Hild et al., 2011) y *Cosmic Explorer* (CE) (Abbott et al., 2017) permitirán mejorar las chances de detectar ULDM de spin-2 alcanzando sensibilidades del orden de $h_0 \sim 10^{-22} - 10^{-23}$.

Dado que la ULDM de spin-2 se encuentra acoplada de manera universal a la materia estándar, la ULDM aparecerá como una *quinta fuerza* del tipo Yukawa, cuantificada y caracterizada por el parámetro de acoplamiento α , modificando el potencial gravitacional Φ de acuerdo a $\Phi \rightarrow \Phi [1 + \alpha^2 e^{-mr}]$. La amplitud de esta quinta fuerza para diferentes valores de la masa m se encuentra acotada por diversos experimentos y pruebas a gravedad (ver (Murata and Tanaka, 2015; Sereno and Jetzer, 2006)); se llamará $\alpha = \alpha_Y$ a este valor máximo. En la figura 5.2 se muestra la región excluida por dichos experimentos bajo el rótulo *Fifth force*, $h = h(\alpha_Y)$.

Las colaboraciones futuras permitirán explorar masas de ULDM mucho más pequeñas de aquellas exploradas por los experimentos actuales. En las frecuencias intermedias $0.1 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 1 \text{ Hz}$ que corresponden a $4 \times 10^{-16} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 4 \times 10^{-15} \text{ eV}$, se espera que los detectores BBO y DECIGO alcancen sensibilidades del orden de $h_0 \sim 10^{-23} - 10^{-24}$ (Harry et al., 2006; Seto et al., 2001). Esto significa que con estos GWIs se podrían detectar señales de ULDM-CW de spin-2 para valores de $\alpha \lesssim 10^{-8}$ en ese rango de frecuencias. En el rango de frecuencias bajas, el GWI espacial LISA podrá alcanzar sensibilidades de $h_0 \sim 10^{-21}$ para $f \sim 10^{-2}$ Hz ($m \sim 4 \times 10^{-17}$ eV), lo cual implica que se podría detectar ULDM de spin-2 para $\alpha \sim 10^{-7}$. Todos estos límites, cabe remarcar, se podrían mejorar si se hiciera un desarrollo más dedicado del método de análisis, tal como en el caso de HLV. Las sensibilidades fueron extraídas de (Schmitz, 2021) y se graficaron, junto con la señal teórica (5.5),

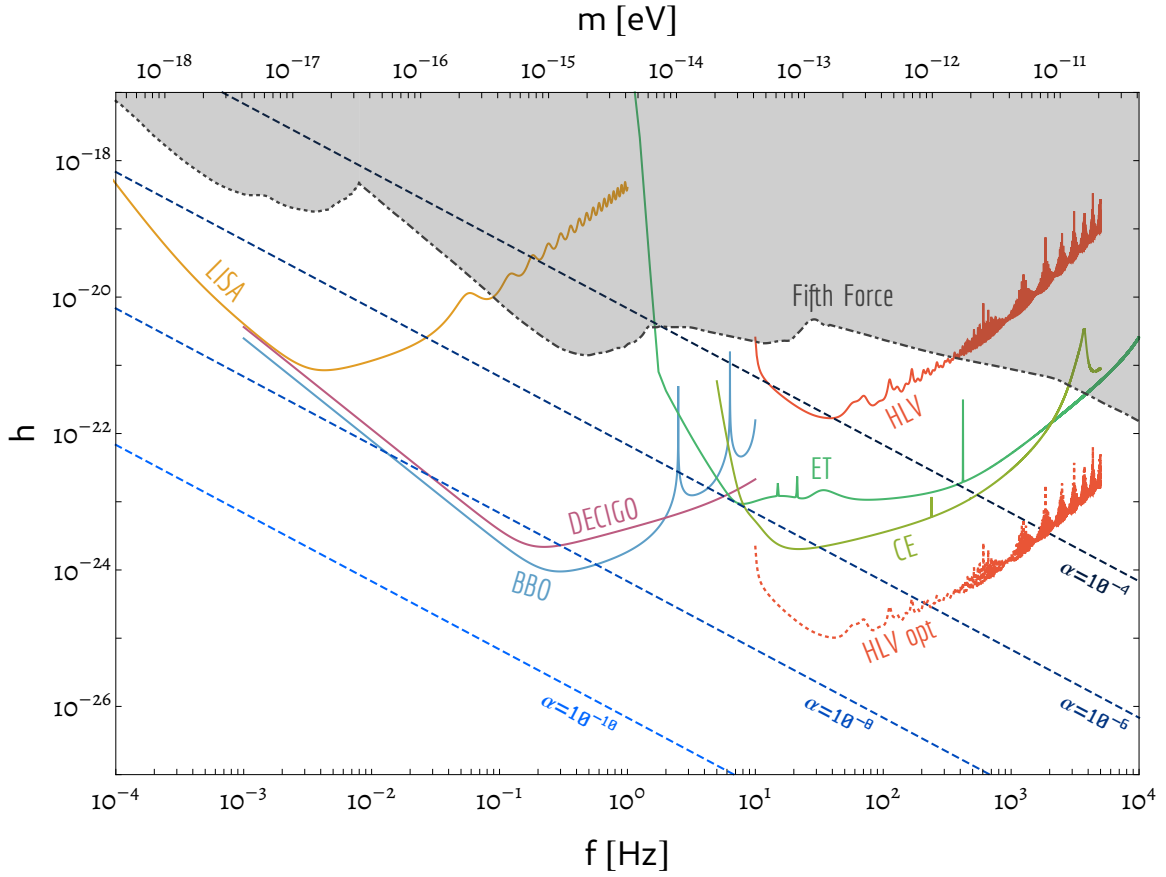


Figura 5.2: Sensitividad de diseño $h = h_0$ para los distintos GWIs presentes y futuros, como función de la frecuencia (líneas sólidas). La línea punteada con el nombre "HLV opt" es la sensibilidad optimizada obtenida a partir del método semi-coherente adaptado para el caso de ULDM-CW de spin-2, Apéndice B. Supuesto con rectas interlineadas se encuentra la amplitud h calculada en (5.9) para diferentes valores del parámetro $10^{-4} \leq \alpha \leq 10^{-10}$. La línea punteada/lineada negra superior es la amplitud del campo de ULDM-CW de spin-2 correspondiente al valor máximo de α permitido por las cotas de quinta fuerza, $h = h(\alpha_Y)$ con α_Y obtenida a partir de (Murata and Tanaka, 2015; Sereno and Jetzer, 2006); la región que se encuentra por arriba de esta está excluida.

en la figura 5.2. Es necesario notar que, estrictamente hablando, estas sensibilidades solamente son válidas para los modos tensoriales "estándar" de las GW - las usualmente denominadas ε_{\times} y ε_{+} en la notación aquí utilizada - pero como la idea aquí es tener una estimación de los órdenes de magnitud que se pueden alcanzar, las diferencias resultan irrelevantes (Zhang et al., 2019).

5.3. Conclusiones

En lo que sigue se listan las conclusiones de este capítulo, siguiendo lo hecho en (Armaleo et al., 2021).

▷ Mediante el potencial uso de GWIs, se pueden poner a prueba ciertos aspectos de gravedad como

así también de DM a la vez. En particular, con los detectores actuales de HLV se podría detectar ULDM de spin-2 para valores de α tan pequeños como $\alpha \sim 10^{-7}$, para frecuencias de $f \sim 100$ Hz (que equivaldría a un alcance de Yukawa de $\lambda := 1/2\pi f \sim 10^4$ m). En el caso de una detección nula, los GWI pueden imponer los límites más estrictos a la fuerza de la quinta fuerza de Yukawa para spin-2. Más aún, GWI futuros (en el mismo rango de frecuencias) podrían poner cotas aún más fuertes incluso hasta dos órdenes de magnitud, mientras que las colaboraciones futuras planeadas como DECIGO y BBO ($f \sim 0.1$ Hz), y el interferómetro LISA, se espera que alcancen valores de $\alpha \lesssim 10^{-7} - 10^{-8}$ en sus respectivos rangos de frecuencia.

- ▷ Los resultados obtenidos aquí complementan aquellos obtenidos en las dos secciones anteriores mediante el uso de BPs y PTAs ((Armaleo et al., 2020a,b)), los cuales cubrían un rango de frecuencias de aproximadamente 10^{-9} Hz $\lesssim f \lesssim 10^{-3}$ Hz. En el caso en que el rango de frecuencias se superpone, notar, las cotas halladas en ambos casos resultan comparables.
- ▷ Los resultados que se obtuvieron aquí deben ser comparados con las cotas existentes a ULDM de spin-2, provenientes de superradiancia. Midiendo el spin y la masa de los BH y otros objetos astrofísicos, el rango de masas 6.4×10^{-22} eV $\lesssim m \lesssim 7.7 \times 10^{-21}$ eV, 1.8×10^{-20} eV $\lesssim m \lesssim 1.8 \times 10^{-16}$ eV y 2.2×10^{-14} eV $\lesssim m \lesssim 2.8 \times 10^{-11}$ eV se encuentran excluidos; de otra forma, esos BH y/u objetos no podrían existir (Stott, 2020). Estos límites son válidos siempre y cuando 10^{-30} eV/m $\ll \alpha \ll 1$ (Brito et al., 2020), lo cual se cumple (prácticamente) siempre para el espacio de parámetros que se está considerando aquí. Por lo tanto, las cotas que se pueden obtener con GWI pueden, en simultáneo y de manera independiente, excluir cierto espacio de parámetro explorado por superradiancia, como así también testear nuevas regiones no accesibles por este.
- ▷ Tal como se ha visto en la ec.(5.5), la señal producida por el campo de spin-2 posee una estructura geométrica muy particular. Mediante un estudio y modelo más dedicado, se podría aprovechar dicha estructura para mejorar no solamente la sensibilidad de los GWI para con la ULDM-CW de spin-2, sino a su vez para discriminar entre posibles fuentes de CW entre ULDM y otras posibilidades, tales como binarias ultra-compactas, NS galácticos, CW provenientes de superradiancia, etc.

Conclusiones generales

A lo largo de la tesis se han mostrado las diferentes cotas que se han podido obtener mediante el uso de púlsares binarios (Capítulo 3), *pulsar timing array* (Capítulo 4), e interferómetros de ondas gravitacionales (Capítulo 5) al modelo de materia oscura ultraliviana de spin-2 presentado en el Capítulo 2. El Capítulo 1 trata de detallar cómo es una de las teorías posibles para estudiar un campo masivo de spin-2 en un fondo curvo. Las conclusiones parciales de cada capítulo donde se presentaron resultados relevantes para la tesis fueron mostradas al final de los mismos. Aquí se presentarán las conclusiones generales, haciendo un compendio de lo mostrado en dichos capítulos. Estas conclusiones están bajo el rótulo de *Conclusiones científicas* y se refieren a los resultados obtenidos y mostrados en esta tesis que resultan relevantes para la comunidad científica. Son, en esencia, el aporte principal de este trabajo doctoral.

A su vez, parte de una tesis doctoral y - en general - de un doctorado consiste en realizar avances en lo académico. Esto consta de varias aristas: desde realizar cursos que enriquezcan los conocimientos científicos, hasta comunicar los resultados obtenidos a lo largo del doctorado en congresos, conferencias, escuelas, etc, y relacionarse, crear y/o desarrollar lazos entre pares, entre otras. Parte de la idea aquí también es presentar y comunicar cuáles fueron los avances académicos que se fueron desarrollando a lo largo del doctorado. Dichas conclusiones se encuentran bajo el nombre *Conclusiones académicas* y se comentarán al final de este capítulo.

Conclusiones científicas

De todas las propuestas y candidatos a DM que existen, en esta tesis se estudió en detalle uno de ellos: el modelo de DM ultraliviana de spin-2. Lo realizado a lo largo del doctorado y mostrado aquí permite concluir lo siguiente:

- ★ El modelo de ULDM de spin-2 es sin dudas un candidato competitivo de DM. En general, tal como se ha explicado en el Capítulo 2, los modelos de ULDM son una alternativa viable más al

modelo Λ CDM del Modelo Standard. En particular, el modelo de ULDM de spin-2 presenta una alternativa sumamente interesante dada su estructura tensorial (cuadrupolar) única que la distingue y diferencia de otros tipos de candidatos de DM.

- ★ La viabilidad del modelo estará restringida de acuerdo a qué tanto se condiga o no con las observaciones y datos. En particular, en esta tesis se han puesto cotas al modelo estudiando las órbitas de sistemas de púlsares binarios, el tiempo de arribo de los pulsos emitidos por los púlsares, y la señal detectada en los detectores de ondas gravitacionales. En el primero de ellos se han obtenido cotas para el parámetro de acople con la materia ordinaria, α , para ciertos valores posibles de la masa de la (UL)DM, m , en el rango de $10^{-23} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 10^{-17} \text{ eV}$ alcanzando un nivel de $\alpha \simeq 10^{-5}$. Utilizando PTA, en cambio, se han obtenido cotas para α cercanas a 10^{-7} para masas $m \simeq 10^{-23} \text{ eV}$. Más específicamente, en el rango de $10^{-23} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 6 \times 10^{-22} \text{ eV}$ se han mejorado y complementado las cotas obtenidas mediante el uso de BPs. Por último, utilizando los detectores de GWs se ha extendido el rango de masas exploradas, barriendo un rango de $10^{-18} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 10^{-11} \text{ eV}$ y alcanzando cotas para α por debajo de 10^{-7} con los detectores actuales.
- ★ Las cotas halladas en esta tesis, pues, sitúan cotas para el modelo en un rango de masas de $10^{-23} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 10^{-11} \text{ eV}$, con valores del parámetro de acoplamiento que alcanzan $\alpha \gtrsim 10^{-8}$. Las cotas existentes al modelo de ULDM de spin-2 previos a esta tesis provenían de superradiancia, y excluían el rango de masas de $6.4 \times 10^{-22} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 7.7 \times 10^{-21} \text{ eV}$, $1.8 \times 10^{-20} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 1.8 \times 10^{-16} \text{ eV}$ y $2.2 \times 10^{-14} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 2.8 \times 10^{-11} \text{ eV}$. Por lo tanto lo mostrado y hecho en esta tesis complementa y mejora las cotas que existían hasta el momento, y lo hace de una manera independiente a lo hecho previamente.
- ★ El estudio del campo de spin-2 resulta sumamente enriquecedor en el aspecto fenomenológico. En particular, el estudio del período orbital de los BPs permite estudiar las helicidad escalares y tensoriales del cuadrupolo ε_{ij} , pero el estudio de otros parámetros orbitales permitiría explorar, por ejemplo, lo que sucede con la helicidad vectorial. Por otro lado, el estudio de las correlaciones entre señales de PTA permite obtener la curva de correlación análoga a la de Hellings-Downs, donde para el caso de ULDM de spin-2 (en comparación) se presentan diferencias sustanciales para ciertas helicidad. La estructura geométrica del campo podría resultar útil y relevante, a su vez, para discernir entre posibles fuentes de GW continuas, discriminando entre una señal producida por ULDM o una producida - por ejemplo - por superradiancia.

Propuestas a futuro

- ★ En la tesis se han estimado las cotas que se pueden poner al modelo de ULDM de spin-2 utilizando BPs, PTAs y GWI. Los resultados sirven como una estimación al orden de magnitud que se puede alcanzar, aunque todavía se puede explotar aún más el uso de dichos sistemas para seguir mejorando las cotas. En general, para obtener las cotas se ha utilizado una ecuación para el campo M_{ij} que resultaba coherente y homogéneo sobre las escalas de interés. Esto se debía o bien porque solamente interesaba tener una idea del orden de magnitud que se puede alcanzar con los datos, o bien porque desviaciones de esta suposición eran despreciables. Sin embargo, las cotas podrían llegar a mejorar si se realizara un estudio más dedicado y detallado sobre las helicidad y anisotropías del campo, así como también podría llegar a resultar sumamente relevante tener una descripción fehaciente si se llegara a detectar, por ejemplo, una señal en los GWI que no se explique con la física del Modelo Standard.
- ★ Las cotas obtenidas aquí resultaron de estudiar sistemas y escalas astrofísicas, pero un estudio cosmológico de este modelo aún queda por realizar. Actualmente, al momento en el cual esta tesis fue escrita, se está estudiando la viabilidad de este modelo desde un punto de vista cosmológico. Esto es, analizando cómo sería el mecanismo de producción de la DM en este caso. A su vez, se está investigando si este modelo resulta estable o no a lo largo de toda la evolución del Universo, y si se podría explicar la abundancia total de DM con este. Sin duda alguna, un modelo cosmológico realista que dé cuenta del comportamiento tanto en el Universo temprano como hoy en día de este campo de spin-2 resulta de gran interés. De obtener dicha descripción para toda la historia del Universo, sería imperioso poner el modelo a prueba frente a observaciones y datos cosmológicos tales como los otorgados por el fondo cósmico de radiación, CMB , entre otros.

Conclusiones académicas

En lo que sigue se detallan las conclusiones académicas del trabajo doctoral realizado⁴.

Realizar un doctorado requiere de mucho más que *simplemente publicar*. El título de **doctor** (y particularmente de la Universidad de Buenos Aires) no indica que uno "sepa publicar" o que sea "buen científico" solamente, indica mucho más; quiere decir que a lo largo del doctorado uno fue ganando las herramientas y conocimientos necesarios para enfrentar, el día de mañana, prácticamente cualquier problema que se le presente. Indica que a lo largo de su formación fue aprendiendo cómo comunicar lo que hace y los resultados que obtiene. Quiere decir que tiene la sabiduría necesaria para poder relacio-

⁴Para las conclusiones académicas, por referirse a lo personal, se cambiará el léxico a la 1ra persona del singular.

narse con colegas de una manera crítica. La evaluación científica de esta tesis, y con esto me refiero a evaluar la calidad de los trabajos publicados, se deja en manos de los *referees* de las revistas donde los trabajos que se presentaron en la tesis fueron enviados. La evaluación académica, en cambio, suele ser algo que se deja de lado cuando se envía trabajos a las revistas. La idea de escribir una tesis doctoral no es solamente mostrar los resultados que se obtuvieron en los trabajos pertinentes, sino que - a mi forma de verlo - requiere también de mostrar cómo se fueron entendiendo los problemas presentados, cuáles fueron las herramientas utilizadas para enfrentar dicho problema, y cómo se comunican estos resultados. Requiere, en definitiva, de mostrar que uno maduró académicamente a lo largo de su doctorado.

La forma en la que veo a la ciencia es de manera colaborativa: no hay ciencia si no hay colaboración. Sea para estudiar ciertos fenómenos y obtener nuevos resultados, o bien sea partiendo de resultados conocidos, siempre se utiliza lo hecho previamente por otras personas para afrontar cada día nuevos desafíos. Esto implica que inherentemente se requiere de la colaboración de muchas personas para que la ciencia avance. Con el fin y el gusto de fomentar las colaboraciones y discusiones, generar *grupos*, crear vínculos, y demás, desde 2019 hasta 2023 he sido el organizador de las reuniones del grupo de Gravitación, Cosmología y Estructuras en Gran Escala del Departamento de Física de la U.B.A.. A su vez, y por otro lado, en 2023 he tenido la oportunidad de realizar una estadía en el exterior gracias a un *Financiamiento para estadías*⁵ de la U.B.A., desarrollada en Praga, República Checa, por casi 50 días. El estar ahí me permitió relacionarme y charlar con colegas externos a mi ámbito diario, y hasta me concedió la posibilidad de publicar un nuevo trabajo ([Armaleo et al., 2023](#)), en este caso externo a mi tema de tesis.

⁵<https://cyt.rec.uba.ar/investigacion/subsidios/financiamiento-de-estadia-en-el-exterior/financiamiento-de-estadia-en-el-exterior-2023/>.

Apéndice A

Apéndice del capítulo 3

A.1. Descomposición de Fourier

Cuando $e \neq 0$, el movimiento orbital no puede ser expresado de una forma cerrada como una función del tiempo. Sin embargo, sí puede escribirse como una serie de Fourier en términos de funciones de Bessel. Se reportan a continuación cómo resultan dichas expansiones para las distintas combinaciones de parámetros:

$$x/a = -\frac{3e}{2} + 2 \sum \frac{J'_n(ne)}{n} \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1a})$$

$$y/a = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum \frac{J_n(ne)}{n} \sin(n\omega_b t), \quad (\text{A.1b})$$

$$r/a = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum \frac{J'_n(ne)}{n} \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1c})$$

$$(x/a)^2 = \frac{1}{2} + 2e^2 + \sum q_{xx}(ne) \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1d})$$

$$(y/a)^2 = \frac{1-e^2}{2} + \sum q_{yy}(ne) \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1e})$$

$$xy/a^2 = -\frac{8e\sqrt{1-e^2}}{3} + \sum q_{xy}(ne) \sin(n\omega_b t), \quad (\text{A.1f})$$

$$(r/a)^2 = 1 + \frac{3e^2}{2} - 4 \sum \frac{J_n(ne)}{n^2} \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1g})$$

$$\cos \theta = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum J_n(ne) \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1h})$$

$$\sin \theta = 2\sqrt{1-e^2} \sum J'_n(ne) \sin(n\omega_b t), \quad (\text{A.1i})$$

$$(a/r)^2 \cos \theta = 2 \sum n J'_n(ne) \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1j})$$

$$(a/r)^2 \sin \theta = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum n J_n(ne) \sin(n\omega_b t), \quad (\text{A.1k})$$

$$\sin^2 \theta = B_0 + \sum B_n(ne) \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.1l})$$

$$\sin \theta \cos \theta = \tilde{B}_0 + \sum \tilde{B}_n(ne) \sin(n\omega_b t), \quad (\text{A.1m})$$

donde la suma corre desde $n \in [1, \infty)$. Los coeficientes que aparecen en la expansión se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} nq_{xx}(ne) &:= J_{n-2}(ne) - J_{n+2}(ne) - 2e[J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)] \\ &= 4J'_n(ne) \frac{(1-e^2)}{e} - \frac{4J_n(ne)}{ne^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.2a})$$

$$\begin{aligned} nq_{yy}(ne) &:= (1-e^2)[J_{n+2}(ne) - J_{n-2}(ne)] \\ &= -nq_{xx}(ne) - 4J_n(ne)/n, \end{aligned} \quad (\text{A.2b})$$

$$\begin{aligned} nq_{xy}(ne) &:= \sqrt{1-e^2}[-2J_n(ne) + J_{n+2}(ne) + J_{n-2}(ne)] \\ &= 4\sqrt{1-e^2} \left[J_n(ne) \frac{(1-e^2)}{e^2} - \frac{J'_n(ne)}{ne} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2c})$$

donde $J_n(z)$ son las funciones de Bessel de primera especie. A su vez, los coeficientes $B_n(ne)$ y $\tilde{B}_n(ne)$ se definen, en términos de series de funciones de Bessel, a partir de las siguientes expansiones (Watson, 1995):

Expansión del $\sin^2 \theta$

$$\sin^2 \theta = \frac{\partial^2 \sin^2 E}{(1-e \cos E)^2} := B_0 + \sum_n B_n \cos(n\omega_b t), \quad (\text{A.3})$$

donde E es la *anomalía excéntrica* definida según $\omega_b t := E - e \sin E$.

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\partial^2}{1+\partial}, \\ B_n &= \frac{\partial}{2} \left[2J_n - J_{n+2} - J_{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_q \mathcal{E}^q (2J_{n+q} - J_{n+q+2} - J_{n+q-2} + 2J_{n-q} - J_{n-q+2} - J_{n-q-2}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde la sumatoria se realiza sobre $q \in [1, +\infty)$. Se definió, a su vez, $\mathcal{E} := e/(1+e)$ por simplicidad.

Expansión del $\sin \theta \cos \theta$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\partial \sin E (\cos E - e)}{(1-e \cos E)^2} := \tilde{B}_0 + \sum_n \tilde{B}_n \sin(n\omega_b t), \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0 &= \frac{\partial}{\pi e^2} \left[\partial^2 \log \left(\frac{1+e}{1-e} \right) - 2e \right], \\ \tilde{B}_n &= J'_{n+1} + J'_{n-1} - 2eJ'_n \\ &\quad + \sum_q \mathcal{E}^q (J'_{n+q+1} + J'_{n+q-1} - 2eJ'_{n+q} + J'_{n-q+1} + J'_{n-q-1} - 2eJ'_{n-q}). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Estudiando numéricamente la convergencia de las ecuaciones (A.4) y (A.6) se halló que se puede truncar la serie en el término $q = 3(n + 2)$ (donde n es el armónico de interés, que para lo que respecta a esta tesis será relevante hasta el armónico $N = 5$) y la serie converge rápidamente, con un resultado truncado que aproxima a la serie completa con un error menor al 1 %. En la figura A.1 se muestra la convergencia de la serie para los primeros $q = 3(n + 2)$ términos, para los dos primeros armónicos.

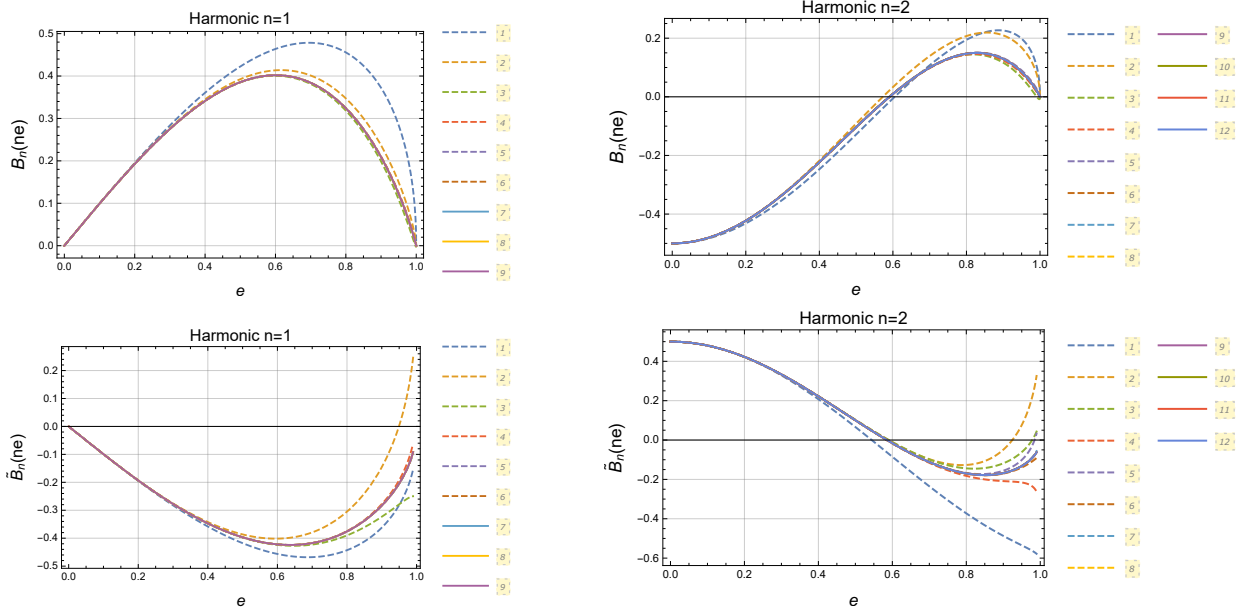


Figura A.1: Convergencia de las series (A.4) (superior) y (A.6) (inferior) para los primeros $q = 3(n + 2)$ términos. Se muestran los resultados de los dos primeros armónicos.

Por otro lado, utilizando la expansión de las funciones de Bessel y sus derivadas para valores pequeños de e , $J_N(x) \simeq (x/2)^N/N!$, se llega a dos relaciones útiles que serán de interés,

$$eJ'_N(Ne) \simeq J_N(Ne) \rightarrow \frac{e}{2}\delta_{N,1}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\tilde{B}_N(Ne) \simeq -B_N(Ne) \rightarrow \frac{1}{2}\delta_{N,2} + e(\delta_{N,3} - \delta_{N,1}). \quad (\text{A.7b})$$

válidas a orden lineal en e . Estas aproximaciones, notar, serán útiles a la hora de estudiar lo que sucede para órbitas (cuasi)circulares.

En el Panel 1 se reportan los seis parámetros orbitales escritos en términos de las componentes de ε_{ij} . Luego, en el Panel 2, se muestran explícitamente las expresiones para los efectos seculares en los mismos seis parámetros, escritos en términos de funciones de Bessel.

Panel 1: Expresiones de los seis parámetros orbitales en términos de las polarizaciones. Se utiliza la notación abreviada $s_x := \sin x$, $c_x := \cos x$.

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{4\lambda\sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{\partial} \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\varepsilon_{\text{T}}(s_{\chi-2\theta} + e s_{\chi-\theta}) - e \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} s_{\theta} \right] c_{mt+\Upsilon} - \frac{1}{\partial} \left[\varepsilon_{\text{T}}(c_{\chi-2\theta} + 2e c_{\chi-\theta} + e^2 c_{\chi}) + \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} (1 + e^2 + 2e c_{\theta}) \right] s_{mt+\Upsilon} \right\} \quad (\text{A.8a})$$

$$\dot{e} = \frac{2\lambda\partial\sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{e} \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{r}{a} \right) \varepsilon_{\text{T}} s_{\chi-2\theta} + e \varepsilon_{\text{T}} s_{\chi-\theta} - e \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} s_{\theta} \right] c_{(mt+\Upsilon)} - \frac{1}{\partial} \left[\left(1 - \frac{r}{a} \right) \varepsilon_{\text{T}} c_{\chi-2\theta} + \left(2 - \frac{r}{a} \right) e \varepsilon_{\text{T}} c_{\chi-\theta} + 2 \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} e(e + c_{\theta}) + e^2 \varepsilon_{\text{T}} c_{\chi} \right] s_{mt+\Upsilon} \right\} \quad (\text{A.8b})$$

$$\dot{\Omega} = \frac{2\lambda\sqrt{\rho_{\text{DM}}}\varepsilon_{\text{V}}}{\partial \sin \iota} \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right) c_{\eta-\theta} s_{\theta+\omega} c_{mt+\Upsilon} + \frac{1}{\partial} \left(\frac{r}{a} \right) (s_{\eta-\theta} + e s_{\eta}) s_{\omega+\theta} s_{mt+\Upsilon} \right\} \quad (\text{A.8c})$$

$$\dot{i} = \frac{2\lambda\sqrt{\rho_{\text{DM}}}\varepsilon_{\text{V}}}{\partial} \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right) c_{\eta-\theta} c_{\theta+\omega} c_{mt+\Upsilon} + \frac{1}{\partial} \left(\frac{r}{a} \right) c_{\theta-\omega} (s_{\eta-\theta} + e s_{\eta}) s_{mt+\Upsilon} \right\} \quad (\text{A.8d})$$

$$\begin{aligned} \dot{\varpi} = & \frac{2\lambda\partial\sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{e^2} \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\varepsilon_{\text{T}} c_{\chi-2\theta} - e \varepsilon_{\text{T}} c_{\chi-\theta} + e \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} c_{\theta} \right] c_{mt+\Upsilon} - \frac{1}{\partial^2} \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right) \varepsilon_{\text{T}} (c_{\chi-2\theta} + e c_{\chi-\theta}) c_{mt+\Upsilon} - \frac{1}{\partial} \left[\varepsilon_{\text{T}} (s_{2\theta-\chi} + e^2 s_{\chi}) + 2e \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} s_{\theta} \right] s_{mt+\Upsilon} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\partial^3} \left(\frac{r}{a} \right) \varepsilon_{\text{T}} (s_{\chi-2\theta} + 2e s_{\chi-\theta} + e^2 s_{\chi}) s_{mt+\Upsilon} \right\} + 2s_{\iota/2}^2 \dot{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{A.8e})$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 = & -4\lambda\sqrt{\rho_{\text{DM}}} \left\{ \frac{\omega_b}{m} \left(\frac{a}{r} \right) \left[\varepsilon_{\text{T}} c_{\chi-2\theta} - \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} \right] c_{mt+\Upsilon} + \frac{1}{\partial} \left(\frac{r}{a} \right) \left[\varepsilon_{\text{T}} s_{\chi-2\theta} + e \varepsilon_{\text{T}} s_{\chi-\theta} - e \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\sqrt{3}} s_{\theta} \right] s_{mt+\Upsilon} \right\} + (1 - \partial) \dot{\varpi} + 2\partial s_{\iota/2}^2 \dot{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{A.8f})$$

Panel 2: Efectos seculares de los seis parámetros orbitales.

$$\left\langle \frac{\dot{a}}{a} \right\rangle = -\frac{4}{3}\lambda\sqrt{3\rho_{\text{DM}}}\left\{\varepsilon_{\text{S}}J_N(Ne)s_{\gamma(t)} + \varepsilon_{\text{T}}\left[\mathcal{F}_+(N,e)s_{\gamma(t)+\chi} + \mathcal{F}_-(N,e)s_{\gamma(t)-\chi}\right]\right\} \quad (\text{A.9a})$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{e} \rangle = & -\frac{2}{3}\lambda\sqrt{3\rho_{\text{DM}}}\frac{\partial^2}{eN}\left\{\varepsilon_{\text{T}}\left[\mathcal{F}_+(N,e)\left(N - \frac{2}{\partial}\right)s_{\gamma(t)+\chi} + \mathcal{F}_-(N,e)\left(N + \frac{2}{\partial}\right)s_{\gamma(t)-\chi}\right]\right. \\ & \left.+ \varepsilon_{\text{S}}NJ_N(Ne)s_{\gamma(t)}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9b})$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Omega} \rangle = & -\frac{\lambda\sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{Ns_{\ell}}\varepsilon_{\text{V}}\left\{c_{\gamma(t)}\left[\left(\frac{B_N(Ne)}{\partial^3} - \frac{2J_N(Ne)}{\partial}\right)s_{\eta-\omega} - \frac{2J_N(Ne)}{\partial}s_{\eta+\omega}\right]\right. \\ & \left.- s_{\gamma(t)}\left[\frac{\tilde{B}_N(Ne)}{\partial^3} + \frac{2eJ'_N(Ne)}{\partial^2}\right]c_{\eta-\omega}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9c})$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{i} \rangle = & \frac{\lambda\sqrt{\rho_{\text{DM}}}}{N}\varepsilon_{\text{V}}\left\{c_{\gamma(t)}\left[\left(\frac{B_N(Ne)}{\partial^3} - \frac{2J_N(Ne)}{\partial}\right)c_{\eta-\omega} + \frac{2J_N(Ne)}{\partial}c_{\eta+\omega}\right]\right. \\ & \left.+ s_{\gamma(t)}\left[\frac{\tilde{B}_N(Ne)}{\partial^3} + \frac{2eJ'_N(Ne)}{\partial^2}\right]s_{\eta-\omega}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9d})$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\omega} \rangle = & \frac{2}{3}\lambda\sqrt{3\rho_{\text{DM}}}\frac{\partial^2}{e^2N}\left\{\varepsilon_{\text{T}}\left[c_{\gamma(t)-\chi}\left(\mathcal{F}_-(N,e)\left(N + \frac{2-e^2}{\partial^3}\right) + \frac{\sqrt{3}e^2J_N(Ne)}{2\partial^3}\right)\right.\right. \\ & \left.- c_{\gamma(t)+\chi}\left(\mathcal{F}_+(N,e)\left(N - \frac{2-e^2}{\partial^3}\right) - \frac{\sqrt{3}e^2J_N(Ne)}{2\partial^3}\right)\right] - \frac{\varepsilon_{\text{S}}}{\partial}NeJ'_N(Ne)c_{\gamma(t)}\left\{ \right. \\ & \left. + 2s_{\ell/2}^2\langle \dot{\Omega} \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9e})$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\epsilon}_1 \rangle = & \frac{8}{3}\frac{\lambda\sqrt{3\rho_{\text{DM}}}}{N}\left\{\varepsilon_{\text{T}}\left[c_{\gamma(t)+\chi}\mathcal{F}_+(N,e) + c_{\gamma(t)-\chi}\mathcal{F}_-(N,e)\right] + \varepsilon_{\text{S}}J_N(Ne)c_{\gamma(t)}\right\} \\ & + (1-\partial)\langle \dot{\omega} \rangle + 2\partial s_{\ell/2}^2\langle \dot{\Omega} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9f})$$

A.2. Datos de púlsares binarios

En la Tabla A.1 se listan todos los BP's que se usaron en el trabajo, junto con las propiedades relevantes para el estudio.

Nombre	$M_1 [M_\odot]$	$M_2 [M_\odot]$	e	P_b [días]	$\dot{P}_b^{\text{int}}[\text{s s}^{-1}]$	$\delta\dot{P}_b^{\text{int}}[\text{s s}^{-1}]$	Referencias
J1903+0327	1.0	1.7	0.44	95	-6.4e-11	3.1e-11	(A)
J1740-3052	20	1.4 ¶	0.58	231	NA	3.0e-9 †	(B)
J0737-3039	1.2	1.3	0.088	0.10	-4.0e-15	1.7e-14	(C)(D)
B1913+16	1.4	1.4	0.62	0.32	5.0e-15	4.0e-15	(E)
B1259-63	24	1.4 ¶	0.87	1237	1.0e-9	7.0e-9	(F)
J1012+5307	0.16	1.6	1.3e-6	0.60	-1.8e-14	2.1e-14	(G)(H)(I)
J1614-2230	0.49	1.9	1.3e-6	8.7	3.4e-13	2.0e-13	(I)(J)
J1909-3744	0.21	1.5	1.2e-7	1.5	-4.0e-15	1.4e-14	(H)(I)
J0751+1807	0.16	1.6	3.3e-6	0.26	-4.6e-14	3.5e-15	(H)
J1910+1256	0.19 §	1.6	2.3e-4	58	-2.0e-11	4.0e-11	(K)
J2016+1948	0.29 §	1.0	1.5e-3	635	-1.0e-9	2.0e-9	(K)
J0348+0432	0.17	2.0	2.4e-6	0.10	-1.1e-14	4.5e-14	(L)
J1713+0747	0.29	1.3	7.5e-5	68	3.0e-14	1.5e-13	(M)
J0613-0200	0.12 §	1.2 ¶	5.4e-6	1.2	2.7e-14	1.0e-14	(H)(I)
J1738+0333	0.19	1.5	3.4e-7	0.35	2.0e-15	4.0e-15	(N)
J1751-2857	0.18 §	1.2 ¶	1.3e-4	111	NA	1.8e-11 †	(H)(O)
J1857+0943	0.24	1.4	2.2e-4	12	NA	1.2e-13 †	(H)(I)(O)

Tabla A.1: Lista de los BP's usados en el trabajo. Las columnas son: (1) Nombre del BP; (2) masa de la compañera en unidades de M_\odot – si solamente está disponible el mínimo valor, se lo denominará a este con un §; (3) la masa del pulsar en unidades de M_\odot – ¶ indica valores asumidos; (4) excentricidad; (5) período del BP medido en días; (6) variación temporal del período "intrínseco" medido en s s^{-1} (ver en el texto la definición utilizada aquí para lo que se denomina "intrínseco") – "NA" significa que solamente se dio un límite superior en el valor de \dot{P}_b^{obs} medido, el cual figura como un error en la próxima columna; (7) error en la variación temporal del período "intrínseco", medido en s s^{-1} – aquí † indica un límite superior; (8) las referencias, las cuales se citan en el texto en este Apéndice.

Referencias de la Tabla A.1: (A) (Freire et al., 2011); (B) (Madsen et al., 2012); (C) (Kramer et al., 2006); (D) (Wex, 2014); (E) (Weisberg and Huang, 2016); (F) (Shannon et al., 2014); (G) (Callanan et al., 1998); (H) (Desvignes et al., 2016); (I) (Arzoumanian et al., 2018); (J) (Fonseca et al.,

2016); (K) (Gonzalez et al., 2011); (L) (Antoniadis et al., 2013); (M) (Zhu et al., 2019); (N) (Freire et al., 2012); (O) (Caputo et al., 2018).

Apéndice B

Apéndice del capítulo 5

B.1. Sensitividad optimizada

En este apéndice se detalla la idea y cálculo de la sensitividad optimizada para HLV mostrada en la figura 5.2. El punto de partida para adaptar la sensitividad teórica del método semi-coherente Hough llevado a cabo en (Astone et al., 2014), originalmente introducido para búsqueda de CW en detectores terrestres, es necesario tener en cuenta dos factores (Miller et al., 2021):

- Dado que la señal asociada a la ULDM está más bien presente siempre en el detector en vez de venir de alguna dirección en particular, hay un factor $5/2$ que debe removerse de la ecuación (67) de (Astone et al., 2014). Este factor viene de realizar un promedio en el cielo.
- Es necesario computar el promedio sobre diferentes polarizaciones de la ULDM. En el caso vectorial (fotón oscuro) este factor resulta $\sqrt{2}/3$ (Miller et al., 2021; Pierce et al., 2018) mientras que para el caso de spin-2 se halla que $\sqrt{\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle} = \sqrt{2/5}$.

La sensitividad optimizada a cierto nivel de confianza Γ indica la amplitud mínima que podría producir un candidato en una fracción $\geq \Gamma$ de un gran número de repeticiones del experimento. Este se puede escribir como (Miller et al., 2021)

$$\begin{aligned}
 h_{0,\text{opt}} &\approx \frac{1.02}{N^{1/4}\theta_{\text{thr}}^{1/2}} \sqrt{\frac{S_n(f)}{T_{\text{FFT,max}}}} \left(\frac{p_0(1-p_0)}{p_1^2} \right)^{1/4} \sqrt{CR_{\text{thr}} - \sqrt{2}\text{erfc}^{-1}(2\Gamma)}, \\
 N &= \frac{t_{\text{obs}}}{T_{\text{FFT,max}}}, \\
 p_0 &= e^{-\theta_{\text{thr}}} - e^{-2\theta_{\text{thr}}} + \frac{1}{3}e^{-3\theta_{\text{thr}}}, \\
 p_1 &= e^{-\theta_{\text{thr}}} - 2e^{-2\theta_{\text{thr}}} + e^{-3\theta_{\text{thr}}}.
 \end{aligned}$$

Aquí N es la mitad del número de *Fast Fourier Transforms* (FFT) durante un tiempo de observación t_{obs} (asumiendo que las FFTs están entrelazadas por la mitad), θ_{thr} es el umbral para la selección de picos para crear el denominado *peakmap*, CR_{thr} es el umbral para la selección de candidatos, $S_n(f)$ es el *noise power spectral density* del detector, y $T_{\text{FFT,max}}$ es el máximo T_{chunk} dado por el tiempo de coherencia de la señal. Siguiendo lo hecho en (Miller et al., 2021), para obtener la sensibilidad optimizada se usa

$$T_{\text{FFT,max}} \lesssim \frac{2}{f} \frac{1}{v_{\text{esc}}^2} \approx \frac{6 \times 10^5}{f} \text{ s}, \quad (\text{B.1})$$

con v_{esc} la velocidad de escape de la DM en el halo local, y donde se ha establecido $\theta_{\text{thr}} = 2.5$, $CR_{\text{thr}} = 5$ y $\Gamma = 0.95$. A su vez, se ha usado que $t_{\text{obs}} = 1\text{yr}$ y que $fS_n(f) = h_0(f)^2$ donde $h_0(f)$ para la colaboración HLV se puede hallar en (Schmitz, 2021).

Bibliografía

- Abac, A. G. et al. (2024). Ultralight vector dark matter search using data from the KAGRA O3GK run.
- Abbott, B. et al. (2019a). All-sky search for continuous gravitational waves from isolated neutron stars using Advanced LIGO O2 data. *Phys. Rev. D*, 100(2):024004.
- Abbott, B. et al. (2019b). GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. *Phys. Rev. X*, 9(3):031040.
- Abbott, B. P. et al. (2016a). GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 116(24):241103.
- Abbott, B. P. et al. (2016b). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102.
- Abbott, B. P. et al. (2017). Exploring the Sensitivity of Next Generation Gravitational Wave Detectors. *Class. Quant. Grav.*, 34(4):044001.
- Abbott, R. et al. (2021). GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run. *Phys. Rev. X*, 11:021053.
- Adelberger, E. G., Gundlach, J. H., Heckel, B. R., Hoedl, S., and Schlamminger, S. (2009). Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 62:102–134.
- Antoniadis, J. et al. (2013). A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340:6131.
- Antonucci, F., Astone, P., D’Antonio, S., Frasca, S., and Palomba, C. (2008). Detection of periodic gravitational wave sources by Hough transform in the f versus \dot{f} plane. *Class. Quant. Grav.*, 25:184015.
- Aoki, A. and Soda, J. (2016). Detecting ultralight axion dark matter wind with laser interferometers. *Int. J. Mod. Phys. D*, 26(07):1750063.

- Arkani-Hamed, N., Georgi, H., and Schwartz, M. D. (2003). Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space. *Annals Phys.*, 305:96–118.
- Armaleo, J. M., Bahamonde, S., Trenkler, G., and Trombetta, L. G. (2023). Symmetric teleparallel Gauss-Bonnet gravity and its extensions. *Phys. Rev. D*, 108(10):104019.
- Armaleo, J. M., López Nacir, D., and Urban, F. R. (2020a). Binary pulsars as probes for spin-2 ultralight dark matter. *JCAP*, 01:053.
- Armaleo, J. M., López Nacir, D., and Urban, F. R. (2020b). Pulsar timing array constraints on spin-2 ULDM. *JCAP*, 09:031.
- Armaleo, J. M., López Nacir, D., and Urban, F. R. (2021). Searching for spin-2 ULDM with gravitational waves interferometers. *JCAP*, 04:053.
- Armengaud, E., Palanque-Delabrouille, N., Yèche, C., Marsh, D. J. E., and Baur, J. (2017). Constraining the mass of light bosonic dark matter using SDSS Lyman- α forest. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 471(4):4606–4614.
- Arnowitt, R. L., Deser, S., and Misner, C. W. (2008). The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 40:1997–2027.
- Arvanitaki, A., Huang, J., and Van Tilburg, K. (2015). Searching for dilaton dark matter with atomic clocks. *Phys. Rev. D*, 91(1):015015.
- Arzoumanian, Z. et al. (2018). The NANOGrav 11-year Data Set: High-precision timing of 45 Millisecond Pulsars. *Astrophys. J. Suppl.*, 235(2):37.
- Astone, P., Colla, A., D’Antonio, S., Frasca, S., and Palomba, C. (2014). Method for all-sky searches of continuous gravitational wave signals using the frequency-hough transform. *Phys. Rev. D*, 90:042002.
- Babichev, E. and Deffayet, C. (2013). An introduction to the Vainshtein mechanism. *Class. Quant. Grav.*, 30:184001.
- Babichev, E., Marzola, L., Raidal, M., Schmidt-May, A., Urban, F., Veermäe, H., and von Strauss, M. (2016a). Bigravitational origin of dark matter. *Phys. Rev. D*, 94(8):084055.
- Babichev, E., Marzola, L., Raidal, M., Schmidt-May, A., Urban, F., Veermäe, H., and von Strauss, M. (2016b). Heavy spin-2 Dark Matter. *JCAP*, 09:016.
- Bar, N., Blas, D., Blum, K., and Sibiryakov, S. (2018). Galactic rotation curves versus ultralight dark matter: Implications of the soliton-host halo relation. *Phys. Rev.*, D98(8):083027.

- Baryakhtar, M., Lasenby, R., and Teo, M. (2017). Black Hole Superradiance Signatures of Ultralight Vectors. *Phys. Rev.*, D96(3):035019.
- Baumann, D., Chia, H. S., and Porto, R. A. (2019). Probing Ultralight Bosons with Binary Black Holes. *Phys. Rev.*, D99(4):044001.
- Berezhiani, L. and Khoury, J. (2016). Dark Matter Superfluidity and Galactic Dynamics. *Phys. Lett. B*, 753:639–643.
- Bertone, G. and Hooper, D. (2018). History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, 90(4):045002.
- Bertone, G. and Tait, M. P., T. (2018). A new era in the search for dark matter. *Nature*, 562(7725):51–56.
- Blas, D., López Nacir, D., and Sibiryakov, S. (2020). Secular effects of ultralight dark matter on binary pulsars. *Phys. Rev. D*, 101(6):063016.
- Blas, D., Nacir, D. L., and Sibiryakov, S. (2017). Ultralight Dark Matter Resonates with Binary Pulsars. *Phys. Rev. Lett.*, 118(26):261102.
- Bosma, A. (1981). 21-cm line studies of spiral galaxies. 2. The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types. *Astron. J.*, 86:1825.
- Boulware, D. G. and Deser, S. (1972). Can gravitation have a finite range? *Phys. Rev. D*, 6:3368–3382.
- Brady, P. R. and Creighton, T. (2000). Searching for periodic sources with LIGO. 2. Hierarchical searches. *Phys. Rev. D*, 61:082001.
- Brito, R., Cardoso, V., and Pani, P. (2015). Superradiance: New Frontiers in Black Hole Physics. *Lect. Notes Phys.*, 906:pp.1–237.
- Brito, R., Grillo, S., and Pani, P. (2020). Black Hole Superradiant Instability from Ultralight Spin-2 Fields. *Phys. Rev. Lett.*, 124(21):211101.
- Bullock, J. S. and Boylan-Kolchin, M. (2017). Small-Scale Challenges to the Λ CDM Paradigm. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 55:343–387.
- Callanan, P. J., Garnavich, P. M., and Koester, D. (1998). The mass of the neutron star in the binary millisecond pulsar PSR J1012+5307. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 298(1):207–211.
- Caputo, A., Zavala, J., and Blas, D. (2018). Binary pulsars as probes of a Galactic dark matter disk. *Phys. Dark Univ.*, 19:1–11.

- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
- Chamberlin, S. J. and Siemens, X. (2012). Stochastic backgrounds in alternative theories of gravity: Overlap reduction functions for pulsar timing arrays. *Physical Review D*, 85(8).
- Chase, T. F. and López Nacir, D. (2024). Ultralight vector dark matter, anisotropies, and cosmological adiabatic modes. *Phys. Rev. D*, 109(8):083521.
- Clowe, D., Gonzalez, A., and Markevitch, M. (2004). Weak lensing mass reconstruction of the interacting cluster 1E0657-558: Direct evidence for the existence of dark matter. *Astrophys. J.*, 604:596–603.
- Comelli, D., Crisostomi, M., Nesti, F., and Pilo, L. (2012a). Spherically Symmetric Solutions in Ghost-Free Massive Gravity. *Phys. Rev. D*, 85:024044.
- Comelli, D., Crisostomi, M., and Pilo, L. (2012b). Perturbations in Massive Gravity Cosmology. *JHEP*, 06:085.
- Copi, C. J., Huterer, D., and Starkman, G. D. (2004). Multipole vectors - A New representation of the CMB sky and evidence for statistical anisotropy or non-Gaussianity at $2 \leq l \leq 8$. *Phys. Rev.*, D70:043515.
- Creminelli, P., Nicolis, A., Papucci, M., and Trincherini, E. (2005). Ghosts in massive gravity. *JHEP*, 09:003.
- Damour, T. and Kogan, I. I. (2002). Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity. *Phys. Rev. D*, 66:104024.
- Damour, T., Kogan, I. I., and Papazoglou, A. (2003). Spherically symmetric space-times in massive gravity. *Phys. Rev. D*, 67:064009.
- Damour, T. and Schaefer, G. (1991). New tests of the strong equivalence principle using binary pulsar data. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2549–2552.
- Damour, T. and Taylor, J. H. (1992). Strong field tests of relativistic gravity and binary pulsars. *Phys. Rev.*, D45:1840–1868.
- Danby, J. (1970). *Fundamentals of Celestial Mechanics*. MacMillan.
- D’Antonio, S. et al. (2018). Semicoherent analysis method to search for continuous gravitational waves emitted by ultralight boson clouds around spinning black holes. *Phys. Rev. D*, 98(10):103017.

- De Martino, I., Broadhurst, T., Henry Tye, S., Chiueh, T., Schive, H.-Y., and Lazkoz, R. (2017). Recognizing Axionic Dark Matter by Compton and de Broglie Scale Modulation of Pulsar Timing. *Phys. Rev. Lett.*, 119(22):221103.
- de Rham, C. (2014). Massive Gravity. *Living Rev. Rel.*, 17:7.
- de Rham, C. and Gabadadze, G. (2010). Generalization of the Fierz-Pauli Action. *Phys. Rev. D*, 82:044020.
- de Rham, C., Gabadadze, G., and Tolley, A. J. (2011). Resummation of Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 106:231101.
- de Rham, C., Heisenberg, L., and Ribeiro, R. H. (2014). Ghosts and matter couplings in massive gravity, bigravity and multigravity. *Phys. Rev. D*, 90:124042.
- de Rham, C., Heisenberg, L., and Ribeiro, R. H. (2015). On couplings to matter in massive (bi-)gravity. *Class. Quant. Grav.*, 32:035022.
- Deffayet, C., Dvali, G. R., Gabadadze, G., and Vainshtein, A. I. (2002). Nonperturbative continuity in graviton mass versus perturbative discontinuity. *Phys. Rev. D*, 65:044026.
- Del Popolo, A. and Le Delliou, M. (2017). Small scale problems of the Λ CDM model: a short review. *Galaxies*, 5(1):17.
- Dergachev, V. and Papa, M. A. (2020). Results from the First All-Sky Search for Continuous Gravitational Waves from Small-Ellipticity Sources. *Phys. Rev. Lett.*, 125(17):171101.
- Desvignes, G. et al. (2016). High-precision timing of 42 millisecond pulsars with the European Pulsar Timing Array. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 458(3):3341–3380.
- Edwards, R. T., Hobbs, G. B., and Manchester, R. N. (2006). Tempo2, a new pulsar timing package. 2. The timing model and precision estimates. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 372:1549–1574.
- Evans, N. W., O’Hare, C. A. J., and McCabe, C. (2019). Refinement of the standard halo model for dark matter searches in light of the Gaia Sausage. *Phys. Rev. D*, 99(2):023012.
- Ferreira, E. G. M. (2021). Ultra-light dark matter. *Astron. Astrophys. Rev.*, 29(1):7.
- Fierz, M. and Pauli, W. (1939). On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 173:211–232.
- Fonseca, E. et al. (2016). The NANOGrav Nine-year Data Set: Mass and Geometric Measurements of Binary Millisecond Pulsars. *Astrophys. J.*, 832(2):167.

- Foster, R. S., Wolszczan, A., and Camilo, F. (1993). A new binary millisecond pulsar. *ApJ*, 410:L91–L94.
- Frasca, S., Astone, P., and Palomba, C. (2005). Evaluation of sensitivity and computing power for the Virgo hierarchical search for periodic sources. *Class. Quant. Grav.*, 22:S1013–S1019.
- Freire, P. C. C. et al. (2011). On the nature and evolution of the unique binary pulsar J1903+0327. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 412:2763.
- Freire, P. C. C., Wex, N., Esposito-Farese, G., Verbiest, J. P. W., Bailes, M., Jacoby, B. A., Kramer, M., Stairs, I. H., Antoniadis, J., and Janssen, G. H. (2012). The relativistic pulsar-white dwarf binary PSR J1738+0333 II. The most stringent test of scalar-tensor gravity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 423:3328.
- Gair, J. R., Romano, J. D., and Taylor, S. R. (2015). Mapping gravitational-wave backgrounds of arbitrary polarisation using pulsar timing arrays. *Phys. Rev. D*, 92(10):102003.
- Gonzalez, M. E. et al. (2011). High-Precision Timing of 5 Millisecond Pulsars: Space Velocities, Binary Evolution and Equivalence Principles. *Astrophys. J.*, 743:102.
- Grote, H. and Stadnik, Y. V. (2019). Novel signatures of dark matter in laser-interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. Res.*, 1(3):033187.
- Harry, G., Fritschel, P., Shaddock, D., Folkner, W., and Phinney, E. (2006). Laser interferometry for the big bang observer. *Class. Quant. Grav.*, 23:4887–4894. [Erratum: *Class.Quant.Grav.* 23, 7361 (2006)].
- Hassan, S. F. and Rosen, R. A. (2011). On Non-Linear Actions for Massive Gravity. *JHEP*, 07:009.
- Hassan, S. F. and Rosen, R. A. (2012a). Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity. *JHEP*, 02:126.
- Hassan, S. F. and Rosen, R. A. (2012b). Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity. *JHEP*, 04:123.
- Hassan, S. F. and Rosen, R. A. (2012c). Resolving the Ghost Problem in non-Linear Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 108:041101.
- Hassan, S. F., Rosen, R. A., and Schmidt-May, A. (2012). Ghost-free Massive Gravity with a General Reference Metric. *JHEP*, 02:026.
- Hellings, R. w. and Downs, G. s. (1983). Upper limits on the isotropic gravitational radiation background from pulsar timing analysis. *Astrophys. J. Lett.*, 265:L39–L42.

- Hild, S. et al. (2011). Sensitivity Studies for Third-Generation Gravitational Wave Observatories. *Class. Quant. Grav.*, 28:094013.
- Hinterbichler, K. (2012). Theoretical Aspects of Massive Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 84:671–710.
- Hlozek, R., Grin, D., Marsh, D. J. E., and Ferreira, P. G. (2015). A search for ultralight axions using precision cosmological data. *Phys. Rev. D*, 91(10):103512.
- Hlozek, R., Marsh, D. J. E., and Grin, D. (2018). Using the Full Power of the Cosmic Microwave Background to Probe Axion Dark Matter. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 476(3):3063–3085.
- Hohmann, M. (2017). Post-Newtonian parameter γ and the deflection of light in ghost-free massive bimetric gravity. *Phys. Rev.*, D95(12):124049.
- Hu, W., Barkana, R., and Gruzinov, A. (2000). Cold and fuzzy dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1158–1161.
- Hui, L. (2021). Wave Dark Matter. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 59:247–289.
- Hui, L., Joyce, A., Landry, M. J., and Li, X. (2021). Vortices and waves in light dark matter. *JCAP*, 01:011.
- Hui, L., Ostriker, J. P., Tremaine, S., and Witten, E. (2017). Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Phys. Rev. D*, 95(4):043541.
- Hulse, R. A. and Taylor, J. H. (1975). Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys. J. Lett.*, 195:L51–L53.
- Irsic, V., Viel, M., Haehnelt, M. G., Bolton, J. S., and Becker, G. D. (2017). First constraints on fuzzy dark matter from Lyman- α forest data and hydrodynamical simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 119(3):031302.
- Isham, C. J., Salam, A., and Strathdee, J. (1971). f -dominance of gravity. *Phys. Rev. D*, 3:867–873.
- Jenet, F. A., Hobbs, G. B., Lee, K., and Manchester, R. N. (2005). Detecting the stochastic gravitational wave background using pulsar timing. *Astrophys. J.*, 625:L123–L126.
- Jenet, F. A. and Romano, J. D. (2015). Understanding the gravitational-wave Hellings and Downs curve for pulsar timing arrays in terms of sound and electromagnetic waves. *Am. J. Phys.*, 83:635.
- Khmelnitsky, A. and Rubakov, V. (2014). Pulsar timing signal from ultralight scalar dark matter. *JCAP*, 02:019.

- Knapen, S., Lin, T., and Zurek, K. M. (2017). Light Dark Matter: Models and Constraints. *Phys. Rev. D*, 96(11):115021.
- Kramer, M. et al. (2006). Tests of general relativity from timing the double pulsar. *Science*, 314:97–102.
- Kramer, M. and Stappers, B. (2015). Pulsar Science with the SKA. *Proceedings of Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array*, PoS(AASKA14)036.
- Krishnan, B., Sintes, A. M., Papa, M. A., Schutz, B. F., Frasca, S., and Palomba, C. (2004). The Hough transform search for continuous gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 70:082001.
- Kûs, P., López Nacir, D., and Urban, F. R. (2024). Bayesian sensitivity of binary pulsars to ultra-light dark matter.
- Lagos, M. and Ferreira, P. G. (2014). Cosmological perturbations in massive bigravity. *JCAP*, 12:026.
- Lee, J.-W. (2018). Brief History of Ultra-light Scalar Dark Matter Models. *EPJ Web Conf.*, 168:06005.
- Lee, K., Jenet, F. A., Price, R. H., Wex, N., and Kramer, M. (2010). Detecting massive gravitons using pulsar timing arrays. *Astrophys. J.*, 722:1589–1597.
- Lee, K., Wex, N., Kramer, M., Stappers, B., Bassa, C., Janssen, G., Karuppusamy, R., and Smits, R. (2011). Gravitational wave astronomy of single sources with a pulsar timing array. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 414:3251.
- Lee, K. J., Jenet, F. A., and Price, R. H. (2008). Pulsar Timing as a Probe of Non-Einsteinian Polarizations of Gravitational Waves. *Astrophys. J.*, 685(2):1304–1319.
- López Nacir, D. and Urban, F. R. (2018). Vector Fuzzy Dark Matter, Fifth Forces, and Binary Pulsars. *JCAP*, 1810(10):044.
- Lorimer, D. R. (2008). Binary and Millisecond Pulsars. *Living Rev. Rel.*, 11:8.
- Lorimer, D. R. and Kramer, M. (2004). *Handbook of Pulsar Astronomy*. Vol. 4. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- Lüben, M. (2021). *Phenomenological aspects of bimetric theory*. PhD thesis, Munich U., Munich U.
- Madison, D. et al. (2016). Versatile Directional Searches for Gravitational Waves with Pulsar Timing Arrays. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 455(4):3662–3673.
- Madsen, E. C., Stairs, I. H., Kramer, M., Camilo, F., Hobbs, G. B., Janssen, G. H., Lyne, A. G., Manchester, R. N., Possenti, A., and Stappers, B. W. (2012). Timing the main-sequence-star binary pulsar J1740-3052. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 425:2378.

- Maggiore, M. (2007). *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press.
- Markevitch, M., Gonzalez, A. H., Clowe, D., Vikhlinin, A., David, L., Forman, W., Jones, C., Murray, S., and Tucker, W. (2004). Direct constraints on the dark matter self-interaction cross-section from the merging galaxy cluster 1E0657-56. *Astrophys. J.*, 606:819–824.
- Marsh, D. J. E. (2016). Axion Cosmology. *Phys. Rept.*, 643:1–79.
- Marsh, D. J. E. (2018). Axions and ALPs: a very short introduction. In *13th Patras Workshop on Axions, WIMPs and WISPs*, pages 59–74.
- Marsh, D. J. E. and Niemeyer, J. C. (2019). Strong Constraints on Fuzzy Dark Matter from Ultrafaint Dwarf Galaxy Eridanus II. *Phys. Rev. Lett.*, 123(5):051103.
- Marzola, L., Raidal, M., and Urban, F. R. (2018). Oscillating Spin-2 Dark Matter. *Phys. Rev. D*, 97(2):024010.
- McKee, C. F., Parravano, A., and Hollenbach, D. J. (2015). Stars, gas, and dark matter in the solar neighborhood. *The Astrophysical Journal*, 814(1):13.
- Michimura, Y., Fujita, T., Morisaki, S., Nakatsuka, H., and Obata, I. (2020). Ultralight vector dark matter search with auxiliary length channels of gravitational wave detectors. *Phys. Rev. D*, 102(10):102001.
- Miller, A. L. et al. (2021). Probing new light gauge bosons with gravitational-wave interferometers using an adapted semicoherent method. *Phys. Rev. D*, 103(10):103002.
- Mingarelli, C. M. F. (2014). *Gravitational wave astrophysics with pulsar timing arrays*. PhD thesis, Birmingham U.
- Mingarelli, C. M. F. and Sidery, T. (2014). Effect of small interpulsar distances in stochastic gravitational wave background searches with pulsar timing arrays. *Phys. Rev. D*, 90(6):062011.
- Morisaki, S. and Suyama, T. (2019). Detectability of ultralight scalar field dark matter with gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. D*, 100(12):123512.
- Murata, J. and Tanaka, S. (2015). A review of short-range gravity experiments in the LHC era. *Class. Quant. Grav.*, 32(3):033001.
- Navarro, J. F., Frenk, C. S., and White, S. D. M. (1996). The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, 462:563–575.

- Nebrin, O., Ghara, R., and Mellema, G. (2019). Fuzzy Dark Matter at Cosmic Dawn: New 21-cm Constraints. *JCAP*, 1904(04):051.
- Nelemans, G., Yungelson, L., and Portegies Zwart, S. F. (2001). The gravitational wave signal from the galactic disk population of binaries containing two compact objects. *Astron. Astrophys.*, 375:890–898.
- Ng, K. K. Y., Vitale, S., Hannuksela, O. A., and Li, T. G. F. (2021). Constraints on Ultralight Scalar Bosons within Black Hole Spin Measurements from the LIGO-Virgo GWTC-2. *Phys. Rev. Lett.*, 126(15):151102.
- Niemeyer, J. C. (2020). Small-scale structure of fuzzy and axion-like dark matter. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 113:103787.
- Nomura, K., Ito, A., and Soda, J. (2020). Pulsar timing residual induced by ultralight vector dark matter. *Eur. Phys. J. C*, 80(5):419.
- Oñorbe, J., Boylan-Kolchin, M., Bullock, J. S., Hopkins, P. F., Kerës, D., Faucher-Giguère, C.-A., Quataert, E., and Murray, N. (2015). Forged in FIRE: cusps, cores, and baryons in low-mass dwarf galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 454(2):2092–2106.
- Palomba, C. et al. (2019). Direct constraints on ultra-light boson mass from searches for continuous gravitational waves. *Phys. Rev. Lett.*, 123:171101.
- Pierce, A., Riles, K., and Zhao, Y. (2018). Searching for Dark Photon Dark Matter with Gravitational Wave Detectors. *Phys. Rev. Lett.*, 121(6):061102.
- Piffl, T. et al. (2014). Constraining the Galaxy’s dark halo with RAVE stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 445(3):3133–3151.
- Poisson, E. and Will, C. (2014). *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press.
- Porayko, N. K. et al. (2018). Parkes Pulsar Timing Array constraints on ultralight scalar-field dark matter. *Phys. Rev.*, D98(10):102002.
- Porayko, N. K. and Postnov, K. A. (2014). Constraints on ultralight scalar dark matter from pulsar timing. *Phys. Rev.*, D90(6):062008.
- Ramani, H., Trickle, T., and Zurek, K. M. (2020). Observability of Dark Matter Substructure with Pulsar Timing Correlations. *JCAP*, 12:033.
- Ramazanov, S., Rubtsov, G., Thorsrud, M., and Urban, F. R. (2017). General quadrupolar statistical anisotropy: Planck limits. *JCAP*, 1703(03):039.

- Riles, K. (2017). Recent searches for continuous gravitational waves. *Mod. Phys. Lett. A*, 32(39):1730035.
- Rindler-Daller, T. and Shapiro, P. R. (2012). Angular Momentum and Vortex Formation in Bose-Einstein-Condensed Cold Dark Matter Haloes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 422:135–161.
- Roberts, M. S. (1966). A High-Resolution 21-CM Hydrogen-Line Survey of the Andromeda Nebula. *ApJ*, 144:639.
- Roberts, M. S. and Whitehurst, R. N. (1975). The rotation curve and geometry of M31 at large galactocentric distances. *ApJ*, 201:327–346.
- Robles, V. H., Bullock, J. S., and Boylan-Kolchin, M. (2019). Scalar Field Dark Matter: Helping or Hurting Small-Scale Problems in Cosmology? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 483(1):289–298.
- Rogstad, D. H. and Shostak, G. S. (1972). Gross Properties of Five Scd Galaxies as Determined from 21-CENTIMETER Observations. *ApJ*, 176:315.
- Romano, J. D. and Allen, B. (2023). Answers to frequently asked questions about the pulsar timing array Hellings and Downs curve.
- Rozner, M., Grishin, E., Ginat, Y. B., Igoshev, A. P., and Desjacques, V. (2020). Axion resonances in binary pulsar systems. *JCAP*, 03:061.
- Safarzadeh, M. and Spergel, D. N. (2019). Ultra-light Dark Matter is Incompatible with the Milky Way’s Dwarf Satellites.
- Salam, A. and Strathdee, J. (1977). Class of solutions for the strong-gravity equations. *Phys. Rev. D*, 16:2668–2672.
- Schmidt-May, A. and von Strauss, M. (2016). Recent developments in bimetric theory. *J. Phys. A*, 49(18):183001.
- Schmitz, K. (2021). New Sensitivity Curves for Gravitational-Wave Signals from Cosmological Phase Transitions. *JHEP*, 01:097.
- Sereno, M. and Jetzer, P. (2006). Dark matter vs. modifications of the gravitational inverse-square law. Results from planetary motion in the solar system. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 371:626–632.
- Seto, N., Kawamura, S., and Nakamura, T. (2001). Possibility of direct measurement of the acceleration of the universe using 0.1-Hz band laser interferometer gravitational wave antenna in space. *Phys. Rev. Lett.*, 87:221103.

- Shannon, R. M., Johnston, S., and Manchester, R. N. (2014). The kinematics and orbital dynamics of the PSR B1259–63/LS 2883 system from 23yr of pulsar timing. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 437(4):3255–3264.
- Steltner, B., Papa, M. A., Eggenstein, H. B., Allen, B., Dergachev, V., Prix, R., Machenschalk, B., Walsh, S., Zhu, S. J., and Kwang, S. (2021). Einstein@Home All-sky Search for Continuous Gravitational Waves in LIGO O2 Public Data. *Astrophys. J.*, 909(1):79.
- Stott, M. J. (2020). Ultralight Bosonic Field Mass Bounds from Astrophysical Black Hole Spin.
- Taylor, S., Lentati, L., Babak, S., Brem, P., Gair, J., Sesana, A., and Vecchio, A. (2017). All correlations must die: Assessing the significance of a stochastic gravitational-wave background in pulsar-timing arrays. *Phys. Rev. D*, 95(4):042002.
- Thorsrud, M., Urban, F. R., and Mota, D. F. (2014). Statistics of Anisotropies in Inflation with Spectator Vector Fields. *JCAP*, 1404:010.
- Tiburzi, C., Hobbs, G., Kerr, M., Coles, W., Dai, S., Manchester, R., Possenti, A., Shannon, R., and You, X. (2016). A study of spatial correlations in pulsar timing array data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 455(4):4339–4350.
- Vainshtein, A. I. (1972). To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Phys. Lett. B*, 39:393–394.
- van Dam, H. and Veltman, M. J. G. (1970). Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields. *Nucl. Phys. B*, 22:397–411.
- Van Nieuwenhuizen, P. (1973). On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation. *Nucl. Phys. B*, 60:478–492.
- Verbiest, J. P. and Shaifullah, G. (2018). Measurement uncertainty in pulsar timing array experiments. *Class. Quant. Grav.*, 35(13):133001.
- von Strauss, M., Schmidt-May, A., Enander, J., Mortsell, E., and Hassan, S. F. (2012). Cosmological Solutions in Bimetric Gravity and their Observational Tests. *JCAP*, 03:042.
- Wasserman, A., van Dokkum, P., Romanowsky, A. J., Brodie, J., Danieli, S., Forbes, D. A., Abraham, R., Martin, C., Matuszewski, M., Villaume, A., Tamanas, J., and Profumo, S. (2019). Spatially Resolved Stellar Kinematics of the Ultra-diffuse Galaxy Dragonfly 44. II. Constraints on Fuzzy Dark Matter. *ApJ*, 885(2):155.
- Watson, G. (1995). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press.

- Weinberg, D. H., Bullock, J. S., Governato, F., Kuzio de Naray, R., and Peter, A. H. G. (2015). Cold dark matter: controversies on small scales. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 112:12249–12255.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*.
- Weisberg, J. M. and Huang, Y. (2016). Relativistic Measurements from Timing the Binary Pulsar PSR B1913+16. *Astrophys. J.*, 829(1):55.
- Weisberg, J. M. and Taylor, J. H. (2005). Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis. *ASP Conf. Ser.*, 328:25.
- Wen, Z., Jenet, F., Yardley, D., Hobbs, G., and Manchester, R. (2011). Constraining the coalescence rate of supermassive black-hole binaries using pulsar timing. *Astrophys. J.*, 730:29.
- Wex, N. (2014). Testing Relativistic Gravity with Radio Pulsars.
- Yamashita, Y., De Felice, A., and Tanaka, T. (2014). Appearance of Boulware–Deser ghost in bigravity with doubly coupled matter. *Int. J. Mod. Phys. D*, 23:1443003.
- Yunes, N., Yagi, K., and Pretorius, F. (2016). Theoretical Physics Implications of the Binary Black-Hole Mergers GW150914 and GW151226. *Phys. Rev. D*, 94(8):084002.
- Zakharov, V. I. (1970). Linearized gravitation theory and the graviton mass. *JETP Lett.*, 12:312.
- Zhang, C., Gao, Q., Gong, Y., Liang, D., Weinstein, A. J., and Zhang, C. (2019). Frequency response of time-delay interferometry for space-based gravitational wave antenna. *Phys. Rev. D*, 100(Jun):064033.
- Zhang, H.-Y. (2023). *Probing ultralight dark fields in cosmological and astrophysical systems*. PhD thesis, Rice U.
- Zhang, J., Kuo, J.-L., Liu, H., Tsai, Y.-L. S., Cheung, K., and Chu, M.-C. (2018). The Importance of Quantum Pressure of Fuzzy Dark Matter on Lyman-Alpha Forest. *Astrophys. J.*, 863:73.
- Zhu, W. W. et al. (2015a). Testing Theories of Gravitation Using 21-Year Timing of Pulsar Binary J1713+0747. *Astrophys. J.*, 809(1):41.
- Zhu, W. W. et al. (2019). Tests of Gravitational Symmetries with Pulsar Binary J1713+0747. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 482(3):3249–3260.
- Zhu, X. et al. (2014). An all-sky search for continuous gravitational waves in the Parkes Pulsar Timing Array data set. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 444(4):3709–3720.

Zhu, X.-J., Wen, L., Hobbs, G., Zhang, Y., Wang, Y., Madison, D. R., Manchester, R. N., Kerr, M., Rosado, P. A., and Wang, J.-B. (2015b). Detection and localization of single-source gravitational waves with pulsar timing arrays. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 449(2):1650–1663.