



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Sombras de agujeros negros rotantes rodeados por medios transparentes

Tesis presentada para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Físicas

Javier Badía

Director de Tesis: Dr. Ernesto F. Eiroa

Consejero de Estudios: Dr. Rafael Ferraro

Lugar de trabajo: Insituto de Astronomía y Física del Espacio (CONICET-UBA)

Resumen

Sombras de agujeros negros rotantes rodeados por medios transparentes

En esta Tesis se realiza un estudio teórico acerca de las sombras que producen en el cielo de un observador lejano ciertos tipos de agujeros negros rotantes, en presencia de un medio transparente. Cuando un agujero negro está iluminado por una fuente extensa o rodeado de un disco de acreción geoméricamente grueso y ópticamente delgado, su apariencia es la de una región oscura en un fondo luminoso. Las sombras tienen una forma no trivial debido a la deflexión gravitatoria de la luz, que en el caso de un agujero negro rotante da lugar a una asimetría característica en la dirección perpendicular al eje de rotación. Para obtener el contorno de la sombra se utiliza el formalismo de Hamilton-Jacobi en cada una de las métricas consideradas, para así integrar las ecuaciones de movimiento de la luz. Las curvas teóricas obtenidas en este trabajo se pueden usar para contrastar observaciones de agujeros negros para diversas teorías de gravedad. En particular, se consideran agujeros negros en relatividad general rodeados de un fluido transparente con presión anisótropa. Luego se estudia una familia de métricas que incluye ejemplos provenientes de teorías como las cosmologías de mundos brana, gravedad de Horndeski y gravedad escalar-tensorial de Einstein-Gauss-Bonnet en 4 dimensiones. Finalmente, se analiza el caso de la teoría de Einstein-Maxwell acoplada a un campo dilatónico. En estos últimos dos casos, se incluye la presencia de un medio en estado de plasma, que refracta los rayos de luz en función de su frecuencia. En todos los escenarios, dado el contorno de una sombra se definen tres observables geométricos que caracterizan su forma y tamaño, y se estudia su dependencia con los parámetros de cada caso.

Abstract

Shadows of rotating black holes surrounded by transparent media

This Thesis contains a theoretical study of the shadows produced in the sky of a distant observer by certain kinds of rotating black holes, in the presence of a transparent medium. When a black hole is lit by an extended source or surrounded by a geometrically thick and optically thin accretion disk, its appearance is that of a dark region on a bright background. The shadows have a nontrivial shape due to the gravitational deflection of light, which for the case of a rotating black hole gives rise to a characteristic asymmetry in the direction perpendicular to the rotation axis. In order to find the shadow contour, the Hamilton-Jacobi formalism is used for each of the considered metrics to integrate the equations of motion for light. The theoretical curves obtained in this work can be used to compare observations of black holes for different theories of gravity. In particular, we consider black holes in general relativity surrounded by a transparent fluid with anisotropic pressure. We then study a family of metrics that includes examples arising from theories such as braneworld cosmologies, Horndeski gravity and scalar-tensor Einstein-Gauss-Bonnet gravity in 4 dimensions. Finally, we analyze the case of Einstein-Maxwell theory coupled to a dilatonic field. In these latter two cases we include the presence of a medium in a plasma state, which refracts the light rays depending on their frequency. In all the scenarios, given a shadow contour we define three geometric observables that characterize its shape and size, and we study their dependency on the parameters of each case.

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a Ernesto Eiroa, mi director, por guiarme, acompañarme y querer siempre lo mejor para mí. Por enseñar a través del ejemplo no sólo física, sino también respeto y profesionalidad.

Segundo, a mi familia y amigxs, por estar presentes sin falta. A mis compañerxs del IAFE y la facultad, por acompañar en el día a día una tarea que a veces puede ser tan solitaria. A Kreiman, con quien parece que nos hubiéramos puesto de acuerdo para hacer siempre todo al mismo tiempo, incluso la tesis.

Por último, al sistema científico nacional y a la educación pública y gratuita; a todo el personal del IAFE y DF; y al pueblo argentino en general que, a veces con más ganas y a veces con menos, financió este trabajo con sus impuestos.

(...) in that hour the Children of the Earth awoke, the Firstborn of Ilúvatar. By the starlit mere of Cuiviénen, Water of Awakening, they rose from the sleep of Ilúvatar; and while they dwelt yet silent by Cuiviénen their eyes beheld first of all things the stars of heaven.

*J. R. R. Tolkien
The Silmarillion*

Índice general

Índice general	5
1 Introducción	7
1.1. Relatividad general	9
1.2. Teorías alternativas de gravedad	11
1.3. Sombras de agujeros negros	14
1.4. Sombras en presencia de plasma	20
2 Trayectorias de la luz cerca de agujeros negros	23
2.1. Geodésicas	23
2.2. Agujero negro de Schwarzschild	26
2.3. Geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild	28
2.4. Agujero negro de Kerr	32
2.5. Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr	34
2.5.1. Teoría de Hamilton-Jacobi	35
2.5.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi para la métrica de Kerr	37
2.5.3. Trayectorias de fotones	40
2.6. Sombra del agujero negro de Kerr	47
2.7. Observables	54
3 Sombras de agujeros negros rodeados de un fluido ideal anisótropo	57
3.1. Agujeros negros estáticos en presencia de un fluido anisótropo	57
3.2. Agujeros negros rotantes	62
3.2.1. Algoritmo de Newman-Janis	62
3.2.2. Métrica del agujero negro rotante	66
3.3. Separación de variables y cálculo de la sombra	68
3.4. Observables	71
3.5. Discusión	75

4 Sombras de agujeros negros rodeados de un plasma	77
4.1. Propagación de la luz a través de un plasma en un espacio-tiempo curvo	77
4.2. Espacio-tiempos de Gürses-Gürsey	81
4.3. Separación de variables y cálculo de la sombra	82
4.4. Ejemplos	87
4.4.1. Agujeros negros de tipo Kerr-Newman	87
4.4.2. Agujeros negros en teoría escalar-tensorial Einstein-Gauss-Bonnet 4D	89
4.5. Discusión	92
5 Sombras de agujeros negros rodeados de plasma en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón	95
5.1. Algoritmo de Newman-Janis modificado	95
5.2. Agujeros negros en la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón	99
5.2.1. Agujeros negros estáticos	100
5.2.2. Agujeros negros rotantes	101
5.3. Separación de variables y cálculo de la sombra	103
5.4. Discusión	108
6 Conclusiones	109
Bibliografía	113

Capítulo 1

Introducción

En esta Tesis se estudian las sombras de agujeros negros rotantes en diversas teorías de gravedad. Un agujero negro, además de producir una atracción gravitatoria sobre partículas y rayos de luz en su cercanía—y por lo tanto una deflexión en sus trayectorias—captura todo aquello que atraviese su superficie, incluida la luz. La combinación de estos dos factores implica que un agujero negro iluminado uniformemente se ve como una región oscura en el cielo, denominada sombra¹, que no es simplemente una proyección sino que se ve ampliada y deformada por la deflexión gravitatoria de los rayos de luz. En la Figura 1.1 se ilustra cualitativamente este fenómeno.

Los agujeros negros son una predicción de la relatividad general, teoría en la cual la gravedad es interpretada como un efecto geométrico, producto de la curvatura del espacio-tiempo [1]. Como se verá en el capítulo siguiente, los mismos son las soluciones de las ecuaciones de campo que describen el análogo de una masa puntual. El nombre se debe a que un agujero negro no rotante de masa M está rodeado por una superficie esférica de radio $r_s = 2GM/c^2$ llamada el horizonte de eventos, que tiene la propiedad de que ninguna trayectoria que ingrese dentro del horizonte puede volver a salir. En el universo se conocen dos categorías principales de agujeros negros [2]: unos son los agujeros negros estelares, formados por colapso gravitatorio de estrellas, cuyas masas rondan desde unas pocas a algunas decenas de masas solares. Los otros son llamados supermasivos, ya que tienen entre 10^6 y 10^{10} masas solares; éstos existen en los centros de las galaxias.

Unas estimaciones rápidas muestran que observar un agujero negro es un gran desafío experimental. Se verá más adelante que la deflexión de la luz le da a un

¹Posiblemente “silueta” sería una palabra más precisa; sin embargo, “sombra” es el término estándar.

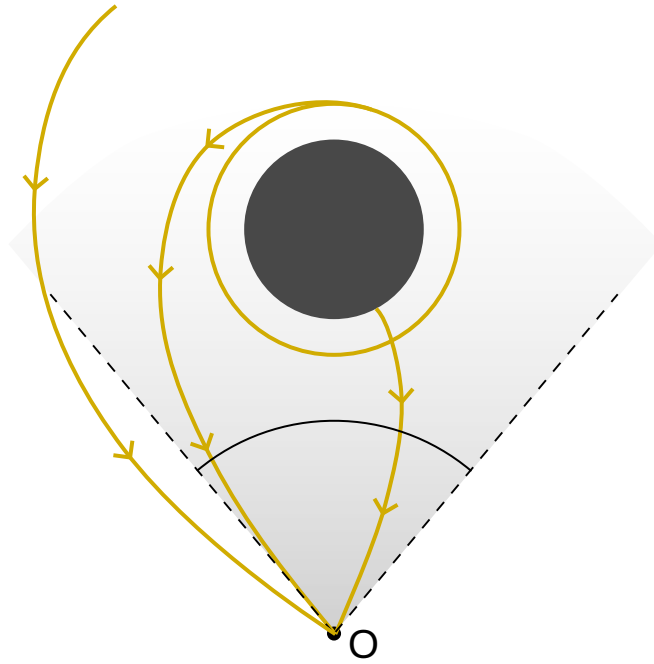


Figura 1.1: Sombra de un agujero negro (círculo oscuro) vista por un observador O. Desde la perspectiva de O, el rayo de la izquierda proviene del infinito y es deflectado gravitatoriamente; la trayectoria de la derecha proviene del agujero negro y por lo tanto no puede traer luz. El rayo central es el caso límite: continuado hacia el pasado, da infinitas vueltas alrededor del agujero negro. Este rayo marca el borde de la sombra, cuyo tamaño angular es mayor al del agujero negro.

agujero negro de masa M un radio aparente de

$$R = 3\sqrt{3}GM/c^2. \quad (1.1)$$

Al momento de escribir este trabajo, el que parece ser el agujero negro conocido más cercano a la Tierra está a una distancia $d \approx 480$ pc y tiene una masa $M \approx 10 M_{\odot}$ [3, 4]. Esto le da a su sombra un diámetro angular de $2R/d \sim 5 \times 10^{-15}$, aproximadamente un nanosegundo de arco—órdenes de magnitud por debajo de la mejor resolución posible al día de hoy.

Un agujero negro estelar es, por el momento, un objeto con un tamaño aparente demasiado pequeño para ser observado directamente. Por esta razón, el proyecto del Telescopio del Horizonte de Eventos [5, 6] (abreviado EHT por sus siglas en inglés), que ha producido las únicas imágenes de agujeros negros hasta la fecha, eligió para sus observaciones a los agujeros negros supermasivos en los centros galácticos. En particular, uno de los dos objetivos es Sagitario A*; ubicado en

la Vía Láctea, tiene una masa de aproximadamente $4 \times 10^6 M_\odot$ y está a una distancia de 8 kpc [7], de manera que su sombra tiene un radio del orden de los 25 microsegundos de arco. El agujero negro M87*, en el centro de la galaxia homónima M87, tiene una masa de alrededor de $3 \times 10^9 M_\odot$ y está a 18 Mpc de la Tierra [8], produciendo una sombra de tamaño angular similar.

1.1. Relatividad general

La relatividad general es una teoría física que postula que la gravedad es resultado de la geometría del espacio-tiempo. El mismo se representa matemáticamente por una variedad pseudo-Riemanniana de cuatro dimensiones con coordenadas $\{x^\mu\}$ y tensor métrico $g_{\mu\nu}$, donde los índices tradicionalmente van de 0 a 3, con el índice 0 asignado a una coordenada temporal y los otros tres a las coordenadas espaciales. La significancia de la métrica es que permite tomar productos internos entre vectores: usando la convención de Einstein en la que se suma sobre índices repetidos, el mismo está dado por

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu. \quad (1.2)$$

El elemento de línea o intervalo infinitesimal se define entonces como el cuadrado de un desplazamiento dx^μ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.3)$$

Dado un sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, los operadores de derivada parcial $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ se pueden tomar como los vectores base del espacio tangente en un punto x . Al tener componentes $(\partial/\partial x^\mu)^\nu = \delta^\nu_\mu$, sus productos internos son las componentes de la métrica:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

La métrica y su inversa $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ también permiten subir y bajar índices de vectores y tensores,

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu, \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu, \quad (1.5)$$

dando un isomorfismo entre el espacio vectorial tangente y su dual.

Se tomará la convención de signos en la que la métrica tiene un autovalor negativo y tres autovalores positivos, normalmente denotada como la signatura $(-, +, +, +)$. Un intervalo se dice de tipo temporal si $ds^2 < 0$, espacial si $ds^2 > 0$ y nulo si $ds^2 = 0$, y análogamente un vector $\mathbf{V}$ es temporal, espacial o nulo según

el signo de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$. En cada punto del espacio-tiempo se puede tomar una tétrada de cuatro vectores $\{\mathbf{e}_{(\mu)}\}$ ortonormales, que cumplen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(0)} \cdot \mathbf{e}_{(0)} &= -1, & \mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{e}_{(i)} &= 1 \text{ para } i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{e}_{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_{(\nu)} &= 0, & \mu &\neq \nu. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Las componentes de la métrica en esta base son entonces las de la métrica de Minkowski,

$$g_{(\mu)(\nu)} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1.7)$$

En un espacio curvo, la generalización de la derivada parcial de un vector V^μ es la derivada covariante, dada por

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda, \quad (1.8)$$

donde

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (1.9)$$

son los símbolos de Christoffel; la definición se puede extender a tensores de rango arbitrario. Se usa la coma para denotar una derivada parcial, de modo que $g_{\nu\alpha,\beta} = \partial_\beta g_{\nu\alpha}$. A partir de la métrica y los símbolos de Christoffel se construyen el tensor de curvatura o tensor de Riemann

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}, \quad (1.10)$$

el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (1.11)$$

y el escalar de Ricci o escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Las ecuaciones de campo que determinan la métrica se pueden deducir de la acción de Einstein-Hilbert que, en ausencia de la constante cosmológica Λ , está dada por

$$S_{\text{EH}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{\text{m}}, \quad (1.13)$$

donde g es el determinante de la métrica y S_{m} es la parte de la acción debida a la materia. Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

donde

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.15)$$

es el tensor de energía-momento de la materia; al lado izquierdo de la ecuación se lo denomina el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.16)$$

Este tensor satisface la identidad de Bianchi contraída

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.17)$$

que implica la conservación del tensor de energía-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.18)$$

El tensor $G_{\mu\nu}$ es simétrico, y las ecuaciones de Einstein forman un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales a derivadas parciales no lineales.

1.2. Teorías alternativas de gravedad

Como se verá a lo largo de este trabajo, la forma y tamaño de las sombras de los agujeros negros dependen de la teoría de gravedad considerada. Esto las convierte en un gran recurso observacional para contrastar la relatividad general con teorías alternativas—particularmente en el régimen de campo fuerte. La relatividad general fue propuesta entre 1915 y 1916 y rápidamente ganó una amplia aceptación, pero sus primeras comprobaciones experimentales sólo exploraron el régimen de campo débil [1]. Por análisis dimensional, un objeto de masa M tiene asociada una escala de distancias $r_g = GM/c^2$, llamada su radio gravitatorio; para explorar el régimen de campo fuerte de la relatividad general, es necesario estar a una distancia de orden r_g del cuerpo estudiado. Los tres *tests* clásicos—la precesión del perihelio de Mercurio, la deflexión gravitatoria de la luz, y su corrimiento al rojo²—fueron realizados en el sistema solar, en los entornos de la Tierra y el Sol, donde $r_g/r \ll 1$ y por lo tanto los efectos relativistas sólo aparecen como correcciones pequeñas al potencial Newtoniano [9]. La Figura 1.2 ilustra dónde se ubican distintos fenómenos y observaciones en términos del potencial gravitatorio GM/c^2r y la curvatura GM/c^2r^3 .

El descubrimiento del púlsar binario de Hulse-Taylor en 1974 permitió un acercamiento a la física gravitatoria fuertemente relativista, ya que sus componentes se mueven a velocidades $v/c \sim 10^{-3}$ [9], y fue también la primera detección (aunque indirecta) de ondas gravitacionales, ya que gracias a la estabilidad extrema de la rotación del púlsar fue posible medir con gran precisión

²Este último datando de algunas décadas después de los otros dos.

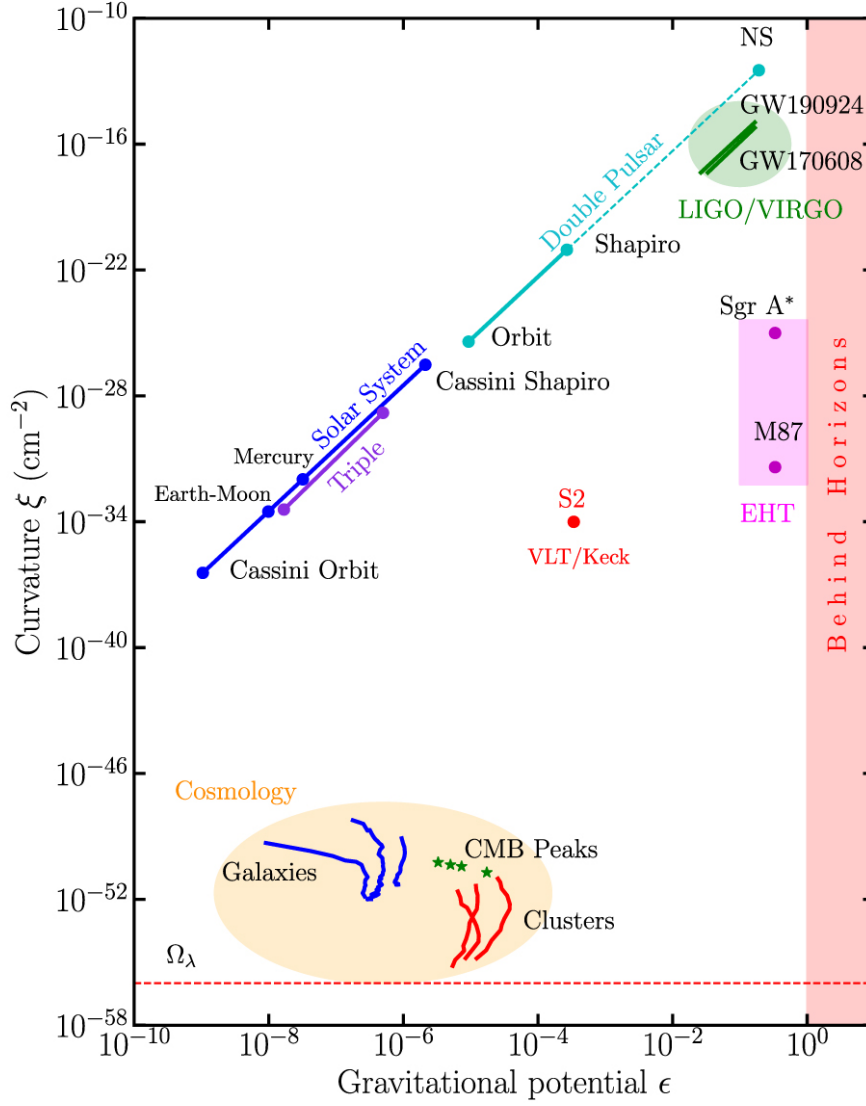


Figura 1.2: Potencial gravitatorio y curvatura explorados en diversos objetos y fenómenos astrofísicos. El sistema solar se ubica hacia la izquierda del diagrama, en la región de potencial bajo. Los agujeros negros están en el extremo derecho; en particular, los agujeros negros supermasivos observados por el EHT están en la banda violeta. Tomado de [10]; ver también [11].

el decaimiento de su órbita debido a la pérdida de energía como radiación gravitatoria. Sin embargo, este sistema no entra en el régimen de campo fuerte en el sentido del párrafo anterior, ya que la separación entre las masas es mucho mayor a su radio gravitatorio [9]. Las ondas gravitacionales provenientes de la fusión de dos agujeros negros de masa estelar fueron detectadas directamente por primera vez en 2015 por el observatorio LIGO [12]; para contrastarlas con las predicciones de la teoría fueron necesarias simulaciones numéricas, ya que se trata de un fenómeno altamente no lineal, lejos de la aproximación de campo débil.

Es claro que, hasta el momento, la mayor parte (aunque no toda) de la evidencia a favor de la relatividad general proviene de situaciones donde los efectos relativistas son pequeños. El formalismo post-Newtonian parametrizado (PPN) [9] es una manera de estudiar las desviaciones a primer orden de distintas teorías de gravedad, y compararlas con las de la relatividad general. Este método no es aplicable, sin embargo, al entorno de agujeros negros, que es una zona relativamente poco explorada y donde las diferencias entre la relatividad general y teorías modificadas pueden manifestarse más claramente. En este contexto, las sombras proveen una manera de llegar hasta la región de campo fuerte próxima al horizonte y poner a prueba las predicciones de la relatividad general. Esto es particularmente cierto para los agujeros negros rotantes, cuyas sombras pueden tener alteraciones en su forma dependientes de la teoría; las sombras de agujeros negros estáticos son siempre circulares, debido a la simetría esférica, de modo que su tamaño es la única variable observable.

Existen diversas razones para considerar posibles modificaciones a la relatividad general; se conocen demasiadas propuestas de teorías alternativas de gravedad para describir todas aquí, así que se mencionarán algunas que son relevantes para los casos estudiados en los Capítulos 3, 4 y 5. Estrictamente hablando, el espacio-tiempo considerado en el Capítulo 3 está motivado no por una teoría alternativa de gravedad, sino por la posibilidad de que en la presencia de distintos tipos de materia autogravitante las soluciones de agujero negro de la relatividad general se modifiquen notablemente, con un efecto observable sobre la sombra [13, 14]. Sin embargo, la métrica particular que resulta del modelo elegido también tiene la propiedad de ser solución de agujero negro en algunas teorías alternativas, como el modelo de Randall-Sundrum entre otros [15].

Cuando se realizan modificaciones a la teoría, éstas se suelen definir partiendo de la acción de Einstein-Hilbert (1.13) y cambiándola o agregando términos a la misma. Una motivación importante para proponer modificaciones a la relatividad general es la necesidad de resolver la conocida incompatibilidad con la mecánica cuántica. Es esperable que, en el límite de curvaturas y energías bajas, una teoría de gravedad cuántica tome la forma de la relatividad general más co-

correcciones en potencias de la curvatura o que involucren otros campos. Incluso si la gravedad es clásica, la interacción con campos de materia cuánticos introduce términos superiores en la acción [16]. Ante el panorama de potencialmente infinitas correcciones cuánticas, es relevante el teorema de Lovelock [17, 18], que organiza todas las posibles ecuaciones de movimiento para el campo gravitatorio que sean de segundo orden y conserven el tensor de energía-momento. La acción de Einstein-Hilbert es el único término posible lineal en la curvatura; a orden cuadrático se agrega el escalar de Gauss-Bonnet [18]

$$\mathcal{G} = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2, \quad (1.19)$$

dando lugar a la teoría Einstein-Gauss-Bonnet. En dimensión menor a cinco este término no contribuye a las ecuaciones de movimiento, pero en los últimos años ha servido de inspiración para proponer una teoría que intenta mantener sus efectos en un límite $D \rightarrow 4$ [19, 20].

Entre las propuestas de teorías de gravedad cuántica, la más estudiada es la teoría de cuerdas, y una de sus predicciones es que a bajas energías el campo electromagnético de Maxwell $F_{\mu\nu}$ está acoplado a un campo escalar ϕ llamado el dilatón [21, 22] mediante un término $e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ en la acción. Los agujeros negros en la llamada teoría Einstein-Maxwell-dilatón se estudiarán en el Capítulo 5; esta corrección es particularmente interesante porque es un cambio cualitativo en la teoría que se mantiene incluso a curvatura baja, en el régimen clásico. La teoría de cuerdas también requiere la presencia de dimensiones extra, y existen modelos cosmológicos como el conocido modelo de Randall-Sundrum [23, 24] donde una o más de las mismas no son compactas y dejan una huella en las soluciones de agujeros negros, observable desde el espacio tridimensional [15].

Otra de las motivaciones para proponerse modificar la relatividad general es intentar eliminar las singularidades que ésta predice, tanto en el contexto de cosmología como en los centros de agujeros negros. Se espera que los llamados agujeros negros regulares (es decir, sin singularidad) sean una predicción de una eventual teoría de gravedad cuántica, pero también existen modificaciones a la relatividad general o agregados de tipos de materia que evitan las singularidades [25]. Los resultados del Capítulo 3 pueden considerarse como aplicables a este contexto, ya que se estudia una clase amplia de espacio-tiempos que incluye, entre varios otros, ejemplos conocidos de agujeros negros regulares [25-27].

1.3. Sombras de agujeros negros

Paralelamente al desarrollo de la física de ondas gravitatorias procedió el estudio del comportamiento de la luz cerca de agujeros negros; en [28] se hace un repaso de la literatura. El efecto de lente gravitatoria o *lensing* gravitatorio,

en el que la luz es desviada por la gravedad de un objeto masivo, fue estudiado de manera teórica y observacional desde 1919 en el caso del efecto de lente débil y posteriormente para lentes fuertes³ [29-34]. Recientemente se ha podido detectar la presencia de agujeros negros de masa estelar a través del fenómeno de *microlensing* [35, 36]: si un objeto oscuro compacto realiza un tránsito por delante de una estrella con alineación alta, el efecto de lente gravitatoria provoca un aumento observable en la intensidad de la luz recibida y por lo tanto permite deducir la presencia del mismo. Estas observaciones, en el marco teórico de deflexión débil, permiten detectar agujeros negros aislados poco masivos.

C. Darwin⁴ [37] encontró en 1959 soluciones exactas para las órbitas de la luz alrededor de un cuerpo esférico, y mostró que rayos que inciden con un parámetro de impacto menor a $b_c = 3\sqrt{3}GM/c^2$ son capturados. Su trabajo fue planteado como la búsqueda de la apariencia de un objeto esférico muy compacto iluminado uniformemente; en términos modernos, este resultado se puede interpretar como el primer cálculo del radio de la sombra de un agujero negro no rotante (ver nuevamente la Figura 1.1, y el Capítulo 2 para la deducción). Más adelante este cálculo fue realizado para otras métricas de agujeros negros [33, 38, 39]. En 1972 Bardeen [40] encontró a su vez las trayectorias de la luz alrededor de un agujero negro rotante, descrito por la solución de Kerr [41, 42], produciendo así el contorno de la sombra, la cual ya no es circular sino que se ve deformada y desplazada como resultado de la rotación del agujero negro—fenómeno conocido como el arrastre de los sistemas inerciales, ilustrado en la Figura 1.3. La forma funcional de la métrica de Kerr es mucho más complicada que la de un agujero negro no rotante: se rompe la simetría esférica, de modo que hay *a priori* menos cantidades conservadas y no es posible aplicar el mismo método sencillo [42]. Este cálculo fue posible gracias al descubrimiento de Carter [43] de una “simetría oculta” de la geometría de Kerr, gracias a la cual se conserva la llamada constante de Carter y se puede llevar las ecuaciones de movimiento a primer orden. Como se verá en el Capítulo 2, esta constante surge de obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi para las trayectorias de los fotones y encontrar que la misma es separable.

En teorías de gravedad modificada las soluciones de agujero negro rotante no necesariamente tienen una ecuación de Hamilton-Jacobi separable, y por lo tanto no siempre es aplicable el método de Bardeen para encontrar la sombra de manera analítica. En algunos casos es necesario recurrir a un trazado de rayos

³Existen dos conceptos distintos de *lensing* fuerte. El uso clásico del término abarca el caso en el que la alineación entre el objeto y la lente produce efectos como imágenes múltiples y distorsiones grandes, pero con un ángulo de deflexión pequeño [29]. La llamada deflexión fuerte, en cambio, se aplica al entorno de agujeros negros y otros objetos compactos, donde el ángulo de deflexión puede ser arbitrariamente grande, del orden de 2π o mayor. Esta última situación es la más cercana al presente trabajo.

⁴Nieto y tocayo del notable biólogo Charles Darwin.

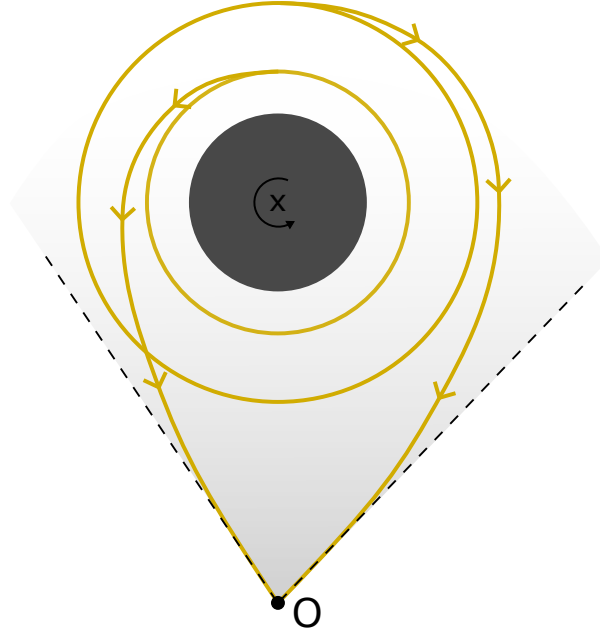


Figura 1.3: Trayectorias de la luz en el plano ecuatorial alrededor de un agujero negro rotante. Se muestran los rayos de luz que forman el borde de la sombra; el rayo co-rotante tiene una órbita más chica que el rayo contra-rotante, de modo que la sombra no es simétrica con respecto al eje óptico.

numérico (ver por ejemplo [44, 45], entre otros), pero ha recibido gran interés el encontrar métricas de agujeros negros rotantes que permitan separar la ecuación de Hamilton-Jacobi y encontrar la correspondiente constante de Carter para luego obtener la forma de la sombra [46-50], así como en encontrar cuál es la expresión más general de una métrica que cumpla ciertas condiciones de separación [51-53]. Hay también teorías en las que no se conoce una solución rotante exacta, por lo que es común recurrir al algoritmo de Newman-Janis [54, 55] para generar una métrica con rotación a partir de una solución con simetría esférica conocida. Es posible demostrar que una versión modificada del mismo [56] siempre produce espacio-tiempos cuya ecuación de Hamilton-Jacobi es separable [57], y esto se ha aprovechado para obtener las sombras en varias geometrías de interés [25, 58-61].

El concepto de sombra descrito en los párrafos anteriores es, debe enfatizarse, una definición en principio teórica: la sombra vista por un observador es el conjunto de direcciones en el cielo que continuadas hacia el pasado provienen del agujero negro, y por lo tanto no traen luz. Es la región oscura que se observa si

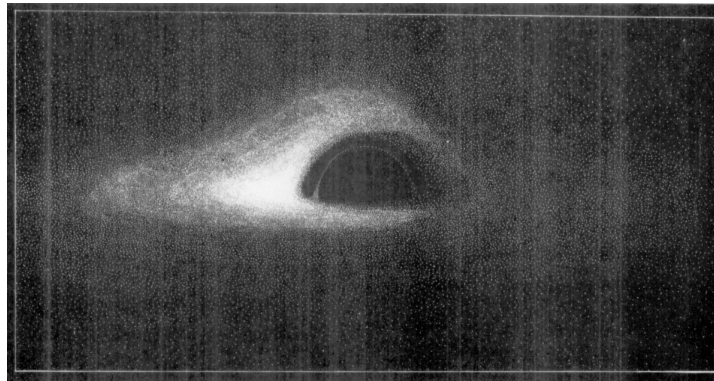


Figura 1.4: Simulación de la apariencia de un agujero negro estático rodeado por un disco de acreción delgado y opaco. Tomado de [64].

un agujero negro es iluminado uniformemente por una fuente esférica que rodea tanto al mismo como al observador [62]. Por supuesto, en la práctica no existe tal fuente esférica; para observar un agujero negro en el espectro electromagnético, es necesaria alguna otra fuente de luz en su cercanía. Dicha fuente es provista por materia siendo acretada por el agujero negro, que forma un disco brillante alrededor del mismo [2, 63]; estos discos de acreción hacen posible la observación directa de la imagen de un agujero negro. La apariencia visible de la silueta de un agujero negro puede entonces, en principio, verse afectada por la geometría del disco de acreción; en 1979 Luminet [64] produjo la primera imagen simulada de un agujero negro estático rodeado por un disco geoméricamente delgado y ópticamente grueso, mostrada en la Figura 1.4; ver [65] para un trabajo análogo aplicado a un agujero negro rotante. Lo primero que se nota en esta imagen es la apariencia altamente distorsionada del disco, debida a la deflexión gravitatoria de la luz: la región brillante semicircular ubicada en la mitad superior de la figura es la parte trasera del disco, cuya luz es desviada por el agujero negro de manera que se puede observar desde cualquier ángulo. Se puede ver también un delgado anillo luminoso dentro de la región oscura; este anillo es la imagen secundaria del disco, formada por rayos que parten desde su superficie inferior y rodean al agujero negro por detrás antes de dirigirse al observador. El anillo delgado contiene en realidad no sólo a la imagen secundaria sino a infinitas “imágenes relativistas” [31] compuestas por rayos de luz que dan una cantidad arbitraria de vueltas antes de abandonar el entorno del agujero negro.

En esta imagen es evidente que la sombra observada no es perfectamente circular, como lo es la sombra en el sentido teórico descrito más arriba (para un agujero negro no rotante): su forma es aproximadamente semicircular, y está determinada por la geometría del disco. Esto puede poner en duda la relevancia observacional de la sombra teórica, ya que la imagen real observada de un agujero

negro parecería depender de la distribución de intensidades del disco de acreción. Este no es, sin embargo, el caso para los agujeros negros observados hasta ahora por el EHT. Estos agujeros negros supermasivos están rodeados por flujos de acreción baja y ópticamente delgados [5, 6], prácticamente transparentes a su propia radiación. Las trayectorias que dan lugar a las imágenes relativistas, que como se dijo más arriba (y se ve en la Figura 1.1) pueden rodear al agujero negro varias veces antes de escapar, recorren una distancia grande dentro de la zona de emisión, y por lo tanto adquieren una gran luminosidad comparadas con aquellas que toman un camino más directo, ya sea dentro o fuera de la sombra [66]. El resultado es que siempre y cuando la materia en acreción se extienda hasta el horizonte, se verá un anillo brillante, conocido como el anillo de fotones, determinado por el borde de la sombra teórica⁵ [31, 62, 66] e independiente de los detalles de la geometría del disco de acreción. El anillo de fotones concentra luz en una zona muy delgada pero no es muy luminoso en términos absolutos: sólo trae cerca del 10 % del flujo total de la imagen [67]. En las imágenes ya producidas por el EHT, es indistinguible de la emisión directa del disco acreción, con la cual se superpone. Sin embargo, es esperable que futuras observaciones inteferométricas de mayor resolución puedan detectar la componente de frecuencia espacial alta producida por un anillo delgado [67].

Volviendo un poco atrás en el tiempo, luego del trabajo de Luminet la posibilidad de observar directamente un agujero negro se mantuvo en el terreno de la especulación hasta alrededores del año 2000, cuando se empezó a considerar la factibilidad de observar el entorno de Sgr A* mediante interferometría de muy larga base [68]. Brevemente (ver [69] para más detalles), esta técnica comienza combinando las señales tomadas por dos telescopios distantes entre sí y haciéndolas interferir. Al igual que en los experimentos clásicos de interferencia y difracción, la visibilidad⁶ medida en el interferómetro da la transformada de Fourier espacial de la imagen; ésta queda expresada en función de $\mathbf{d}_\perp$, la separación entre telescopios proyectada perpendicularmente a la línea de visión, según la fórmula [70]

$$\mathcal{V}(\mathbf{u}) = \int d^2\theta I(\theta) e^{-2\pi i \mathbf{u} \cdot \theta}, \quad (1.20)$$

donde θ son coordenadas angulares en el cielo, $I(\theta)$ la distribución de intensidades y $\mathbf{u} = \mathbf{d}_\perp/\lambda$ con λ la longitud de onda. Al tomar varios telescopios y hacerlos interferir de a pares, así como usar la rotación de la Tierra para que $\mathbf{d}_\perp$ vaya cambiando, se pueden medir distintas componentes de $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ y así intentar reconstruir la imagen con una transformada de Fourier inversa.

⁵Este último es a veces llamado también “curva crítica” [62].

⁶Definida como $\mathcal{V} = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$, donde $I_{\max}$ y $I_{\min}$ son las intensidades máxima y mínima del patrón de interferencia.

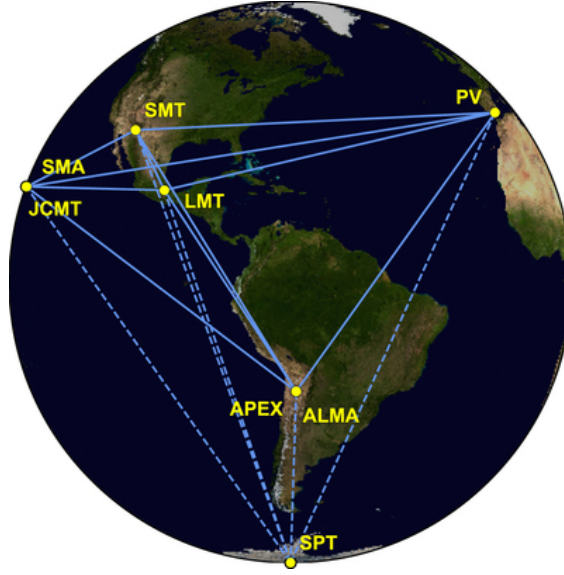


Figura 1.5: Los telescopios que participan del EHT. Tomado de [5].

La ventaja de la interferometría de muy larga base es que permite, en cierto sentido, superar el límite de difracción de un telescopio, que dice que la resolución angular es del orden de λ/D , con D la apertura. Con interferometría de muy larga base se pueden medir componentes de Fourier de tamaño angular $\lambda/d_{\perp}$; por supuesto, $d_{\perp}$ puede hacerse mucho más grande que cualquier telescopio. El EHT mide en una longitud de onda $\lambda = 1.3 \text{ mm}$ [5], de modo que con una separación del orden de un radio terrestre se obtiene una resolución angular de $\lambda/R_{\oplus} \sim 28 \mu\text{as}$, del orden del tamaño esperado para las sombras de los agujeros negros supermasivos Sgr A* y M87*, como se mencionó anteriormente. En la Figura 1.5 se muestra la red de telescopios del EHT, ubicados en distintos continentes y con separaciones del orden del tamaño del mismo planeta Tierra. La desventaja de esta técnica es que la visibilidad $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ sólo se conoce para algunos valores de $\mathbf{u}$, dependiendo de las separaciones entre pares de telescopios. Esto implica que no es posible encontrar exactamente la imagen $I(\boldsymbol{\theta})$, ya que sólo se tienen algunos puntos de su transformada de Fourier, y se deben usar métodos complejos de reconstrucción de imágenes [70].

En la Figura 1.6 se muestran las imágenes producidas por el EHT de los dos agujeros negros observados hasta el momento⁷. En ambos casos se ve que la estructura dominante es un anillo brillante con una depresión oscura en el centro. A pesar de que los anillos no son delgados como en la situación idealizada

⁷Posteriormente fueron publicadas más imágenes, conteniendo información de polarización [71] o reconstruidas con distintos métodos [72].

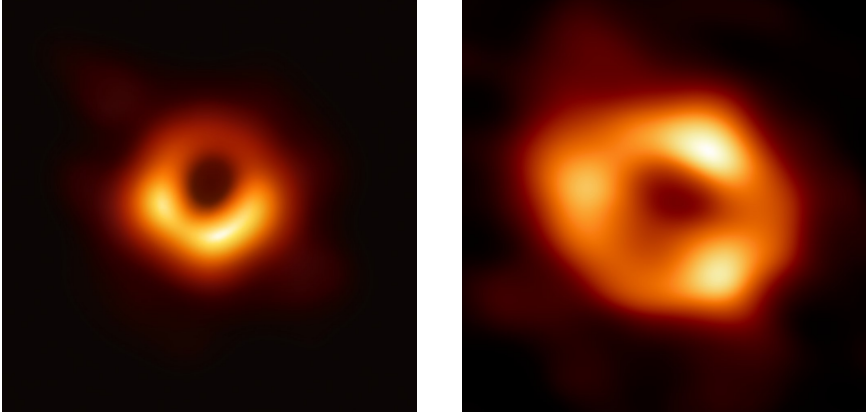


Figura 1.6: Imágenes de M87* [5] (izquierda) y Sgr A* [6] (derecha) producidas por el EHT.

descrita más arriba⁸, al medir sus diámetros promedio se obtienen valores de aproximadamente $40 \mu\text{as}$ para M87* y $50 \mu\text{as}$ para Sgr A* [70, 73], consistentes con los tamaños predichos para las sombras.

1.4. Sombras en presencia de plasma

El material en acreción alrededor de un agujero negro se encuentra normalmente en estado de plasma [63]. Es natural entonces preguntarse si esto podría introducir alguna distorsión observable sobre la sombra. Un plasma está caracterizado por una función $\omega_p(x)$, llamada la frecuencia de plasma, que es proporcional a la densidad de partículas [74]. Como se detallará en el Capítulo 4, el índice de refracción es función del cociente $\omega_p(x)/\omega$, donde ω es la frecuencia de la luz. Esto implica que n depende de la posición, de modo que los rayos de luz pueden en principio refractarse y alterar la forma observable de la sombra [75, 76].

En los últimos años ha habido mucho interés en calcular los contornos de sombras de diversas métricas de agujero negro en presencia de plasma, a partir del descubrimiento de que en ciertos casos es posible hacerlo de manera analítica, incluso para agujeros negros rotantes [76]. Este método, que es una generalización del trabajo de Bardeen [40] en el espacio-tiempo de Kerr en vacío, no es aplicable a cualquier distribución de plasma: la forma funcional de la frecuencia $\omega_p(x)$ debe cumplir una condición de separabilidad [76]. Aunque una distribución realista que corresponda a un disco de acreción no es fácilmente tratable de manera analítica, es posible considerar modelos sencillos que permitan una primera aproximación

⁸Lo cual se debe en parte a la superposición del anillo de fotones con la emisión directa y en parte a la resolución limitada ($\sim 20 \mu\text{as}$) del instrumento.

a los efectos de plasma, y esto se hará en el Capítulo 4; para generar imágenes más realistas, se debe recurrir a métodos de trazado de rayos numéricos⁹ [77]. Con los resultados analíticos se pueden estudiar fenómenos como la dependencia del índice de refracción con la frecuencia: la cromaticidad es una característica distintiva de estos efectos. Se encuentra, como es usual para los plasmas, que la luz de muy alta frecuencia se propaga igual que en vacío, y la refracción se hace más fuerte para frecuencias bajas. En la distribución cuasi-esférica [78] adoptada en esta Tesis, se produce una disminución drástica del tamaño de la sombra cuando $\omega \gtrsim \omega_p$, debida a la aparición de una zona alrededor del agujero negro en la que la luz no se puede propagar [60, 61, 76].

⁹Es interesante señalar que los métodos del trabajo citado fueron usados en la generación de imágenes para la película *Interstellar* (2014).

Capítulo 2

Trayectorias de la luz cerca de agujeros negros

Este capítulo comienza con una breve introducción a la descripción de trayectorias en relatividad general, particularmente los aspectos que serán relevantes en esta Tesis, para luego presentar las soluciones de Schwarzschild y de Kerr que describen agujeros negros estáticos y rotantes respectivamente. El objetivo de este trabajo es estudiar agujeros negros en teorías de gravedad modificada, y el formalismo usado para el cálculo de las sombras es una extensión directa del que se usa para encontrar la sombra en la geometría de Kerr; por lo tanto, éste se presentará en detalle luego de hacer lo mismo para el caso de Schwarzschild. La mayor parte del material, particularmente en lo que respecta a la relatividad general y la métrica de Schwarzschild, se puede consultar de textos estándar como [1, 79]. La métrica de Kerr se estudia en detalle en [42]. A partir de aquí, se usará un sistema de unidades tal que $G = c = 1$.

2.1. Geodésicas

La principal relevancia de la métrica es que determina las trayectorias de partículas libres: las mismas son geodésicas de la variedad determinada por $g_{\mu\nu}$. En términos de las coordenadas, éstas son curvas $x^\mu(\lambda)$ que cumplen la ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.1)$$

La ecuación en esta forma no es invariante ante reparametrizaciones generales $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}(\lambda)$, a menos que el cambio sea una transformación afín $\tilde{\lambda} = a\lambda + b$; por eso, la clase de parámetros para los cuales la ecuación es válida se llaman parámetros afines. Para el caso de curvas temporales es posible definir un pará-

metro preferencial τ , el tiempo propio, como aquel que cumple la condición de normalización

$$u_\mu u^\mu = -1, \quad (2.2)$$

donde

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.3)$$

es la cuadrivelocidad. Las curvas temporales son las que corresponden a trayectorias de partículas con masa, que se mueven más lento que la luz, y para ellas es posible definir el cuadrimpulso

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.4)$$

donde m es la masa de la partícula. Si en lugar del tiempo propio se usa el parámetro $\lambda = \tau/m$, el cuadrimpulso queda simplemente expresado como

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (2.5)$$

Esta forma es conveniente ya que tiene igual forma a la que corresponde a curvas nulas, como se verá más abajo.

Dado un observador que en un cierto punto tiene una cuadrivelocidad $\mathbf{u}$, se puede definir una tétrada tomando $\mathbf{e}_{(0)} = \mathbf{u}$ y los $\mathbf{e}_{(i)}$ como una base ortonormal del espacio tridimensional ortogonal a $\mathbf{e}_{(0)}$. Esta tétrada provee entonces un sistema de referencia adaptado al observador, permitiendo descomponer vectores en componentes temporales y espaciales.

En relatividad especial las curvas nulas, con

$$\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (2.6)$$

corresponden a trayectorias que se mueven a la velocidad de la luz, y esta interpretación se mantiene en la relatividad general. Heurísticamente, esto debe ser así ya que siempre es posible usar coordenadas localmente inerciales alrededor de un punto dado, en las cuales se recupera la relatividad especial. Más rigurosamente, es posible demostrar [80, 81] a partir de las ecuaciones de Maxwell que, en el límite de óptica geométrica (es decir de longitud de onda pequeña), las ondas electromagnéticas se comportan como partículas sin masa que se propagan a lo largo de trayectorias nulas; en particular, los rayos de luz propagándose en el vacío siguen geodésicas nulas. Es común usar los términos “rayo de luz”, “trayectoria nula” y “fotón” de manera intercambiable, sin que este último haga referencia alguna a la mecánica cuántica. El vector tangente a una geodésica nula no es normalizable como lo es el de una geodésica temporal, y por lo tanto no es

posible definir un tiempo propio y debe usarse el parámetro afín λ . El término “cuadrivelocidad” se suele reservar para el caso de partículas con masa, de forma que para la luz sólo está definido el cuadrimpulso

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (2.7)$$

recordando que en este caso la normalización del mismo es arbitraria, y sólo es físicamente relevante su dirección, que es invariante ante una transformación afín del parámetro. Sin embargo, en algunas referencias se usan u^μ y p^μ de manera intercambiable para trayectorias nulas.

La ecuación de la geodésica se puede obtener a partir de un principio variacional. Las geodésicas son las curvas para las cuales el intervalo

$$\Delta s = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (2.8)$$

es extremal, lo cual generaliza la definición clásica de geodésica como la curva de distancia mínima entre dos puntos. Esta integral se puede interpretar como una acción, cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a la ecuación de la geodésica, pero permitiendo reparametrizaciones arbitrarias de la trayectoria. Se puede ver que el Lagrangiano más simple

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2.9)$$

también lleva a la ecuación de la geodésica, bajo la condición de que λ sea un parámetro afín. El valor de $\mathcal{L}$ determina el tipo de trayectoria: una trayectoria temporal tiene $\mathcal{L} < 0$ (y en particular $\mathcal{L} = -1/2$ si se usa el tiempo propio como parámetro), y una nula tiene $\mathcal{L} = 0$.

A partir del Lagrangiano se puede definir también un Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu, \quad (2.10)$$

con ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} = g^{\mu\nu} p_\nu \quad (2.11)$$

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (2.12)$$

que son equivalentes a la ecuación de la geodésica; el punto denota la derivada con respecto a λ . Esta forma es la más conveniente para mostrar el teorema de Noether

aplicado a trayectorias en espacio-tiempos curvos: si la métrica no depende de una coordenada x^a , entonces $\partial\mathcal{H}/\partial x^a = 0$ y la componente p_a del momento es constante a lo largo de geodésicas. Al no haber una dependencia explícita con λ , se tiene también la conservación de $\mathcal{H}$, que físicamente corresponde a la conservación de la masa: el valor del mismo sobre una trayectoria es $\mathcal{H} = -m^2/2$. La generalización de esta observación es el concepto de un vector de Killing. Es sencillo demostrar que si un campo vectorial $\xi(x)$ satisface la condición

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (2.13)$$

entonces la cantidad $\xi^\mu p_\mu$ es constante a lo largo de geodésicas. Si la métrica es independiente de alguna coordenada x^a , entonces $\xi = \partial_a$ es un vector de Killing, y se recupera el resultado de que p_a es una cantidad conservada.

2.2. Agujero negro de Schwarzschild

Las ecuaciones de Einstein son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, y encontrar soluciones exactas de las mismas es una tarea no trivial. Por lo tanto, un enfoque común es aprovechar simetrías y casos especiales para simplificar las ecuaciones; y uno de los casos más sencillos de relevancia astrofísica que se pueden considerar es el de un cuerpo esférico de masa M . En el exterior de dicho cuerpo, la métrica deberá satisfacer las ecuaciones de Einstein de vacío (es decir, con $T_{\mu\nu} = 0$) y tener simetría esférica; es posible demostrar [1] que la métrica esféricamente simétrica más general se puede escribir como

$$ds^2 = -f(t, r) dt^2 + \frac{dr^2}{g(t, r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.14)$$

donde se toman coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \varphi\}$. Con esta propuesta, las ecuaciones de Einstein están dadas por

$$G^0_0 = \frac{\partial_r g}{r} + \frac{g}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.15)$$

$$G^0_1 = \frac{\partial_t g}{rfg} = 0, \quad (2.16)$$

$$G^1_1 = \frac{g\partial_r f}{rf} + \frac{g}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.17)$$

junto con la ecuación $G^2_2 = G^3_3 = 0$, que es linealmente dependiente con las otras gracias a la identidad de Bianchi. A partir de estas ecuaciones y luego de una posible redefinición de la coordenada temporal, eventualmente se llega a que las funciones f y g son independientes del tiempo, y están dadas por

$$f(r) = g(r) = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad (2.18)$$

donde r_s es una constante de integración llamada el radio de Schwarzschild; la solución completa

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.19)$$

con

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.20)$$

es conocida como la métrica de Schwarzschild. Esta métrica es asintóticamente plana: es decir, a medida que $r \rightarrow \infty$ sus componentes tienden a las de la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas, y por lo tanto se puede interpretar que la geometría describe un cuerpo aislado. Estudiando las trayectorias de partículas lejanas en el límite de campo débil y comparando la ecuación de movimiento con la ley de gravitación de Newton se puede ver que en particular la métrica describe un cuerpo de masa $M = r_s/2$ en unidades geométricas, o $r_s = 2GM/c^2$ si se restauran las constantes.

Aplicada a un cuerpo astrofísico tal como una estrella o un planeta, la solución de Schwarzschild sólo es válida para $r > R$, donde R es el radio del cuerpo. Una estimación para casos típicos muestra que normalmente el radio R es mucho mayor al radio de Schwarzschild; el Sol, por ejemplo, tiene un radio de $R_\odot \approx 7 \times 10^5$ km y un radio de Schwarzschild de $r_s \approx 3$ km. En este trabajo, sin embargo, se busca estudiar agujeros negros, que surgen de extender la solución de vacío a todo valor de r . Al hacer esto, se ve inmediatamente que la componente g_{rr} de la métrica tiene problemas en $r = 0$ y en $r = 2M$. El punto $r = 0$ es una singularidad física: la curvatura allí se hace infinita. Esto se puede ver, por ejemplo, calculando el escalar de Kretschmann

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.21)$$

y observando que el mismo diverge cuando $r \rightarrow 0$, independientemente del sistema de coordenadas que se use. El caso de la superficie $r = 2M$ es distinto: es posible pasar a sistemas de coordenadas que conectan las regiones $r > 2M$ y $r < 2M$ de manera regular, mostrando que ésta es una singularidad de las coordenadas elegidas, y que el espacio-tiempo está definido para todo $r > 0$. Un ejemplo simple son las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes, en las que el tiempo se reemplaza por la coordenada nula

$$v = t + r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (2.22)$$

y la métrica queda expresada como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.23)$$

Las curvas radiales de v constante son rayos de luz, como se puede ver del hecho que $dv = d\theta = d\varphi = 0$ implica que $ds^2 = 0$. En particular, son rayos que se dirigen hacia el origen; de aquí sale el nombre de coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes¹. En estas coordenadas, la métrica es perfectamente regular en $r = 2M$ y las trayectorias pueden atravesar este radio, mostrando que no hay una singularidad real sino que son las coordenadas de Schwarzschild $\{t, r, \theta, \varphi\}$ las que no son adecuadas en $r = 2M$. Volviendo a las mismas, es inmediato observar que para $r < 2M$ los signos de g_{tt} y g_{rr} se invierten, de manera que la coordenada r se vuelve temporal. Esto implica que cualquier trayectoria temporal o nula que cruce la superficie $r = 2M$ con $\dot{r} < 0$ debe mantener el signo de $\dot{r}$, y por lo tanto inevitablemente debe acercarse hacia $r = 0$. De aquí sale, por supuesto, el nombre de agujero negro: esta métrica describe una región del espacio de la cual ninguna partícula, ya sea masiva o un fotón, puede salir una vez que ingresa. La superficie $r = 2M$ es denominada el horizonte de eventos. Para los propósitos de este trabajo sólo es relevante la región exterior al horizonte de eventos, por lo que la singularidad en $r = 2M$ de las coordenadas de Schwarzschild no es un problema.

El comportamiento causal se ilustra en la Figura 2.1, que muestra el diagrama de espacio-tiempo (o diagrama de Penrose) de la geometría de Schwarzschild. El mismo se basa en otro sistema de coordenadas, las coordenadas de Kruskal-Szekeres, que también es regular en $r = 2M$. El diagrama realiza una transformación conforme para que el espacio-tiempo se pueda dibujar en una región finita, y las coordenadas están definidas de modo que los rayos de luz sean líneas a 45° . La región I es el exterior, donde $r > 2M$, y la región II es el interior del agujero negro: es claro que ninguna trayectoria temporal o nula puede escapar del mismo. Las regiones III y IV aparecen naturalmente cuando se hace la máxima extensión analítica de la solución, y representan un universo paralelo a la región I y el interior de un agujero blanco respectivamente. Como se dijo más arriba, para este trabajo sólo es relevante la región I.

2.3. Geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Como ya se mencionó, la sombra de un agujero negro se define como el conjunto de direcciones en el cielo de un observador tales que rayos de luz que llegan desde esas direcciones provienen, si se continúan hacia el pasado, del horizonte de eventos [40]. El contorno de la sombra es la curva que separa las trayectorias que

¹La definición $u = t - r - 2M \log(r/2M - 1)$ conduce a las coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes.

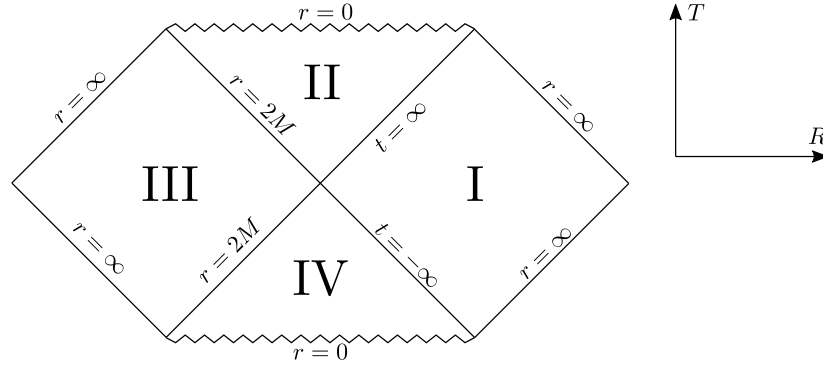


Figura 2.1: Diagrama de Penrose de la máxima extensión del espacio-tiempo de Schwarzschild, mostrando la estructura causal del mismo. En este diagrama los rayos de luz son líneas a 45°, y se ha realizado un cambio de coordenadas para que el infinito esté a una distancia finita. La región I es la exterior al agujero negro, y la región II es su interior; se puede ver cómo no es posible volver de la región II a la I.

intersectan al horizonte de las que no lo hacen. Matemáticamente, un observador se asocia con una tétrada ortonormal $\{\mathbf{e}_{(\mu)}\}$ tal que $\mathbf{e}_{(0)}$ es la cuadrivelocidad del observador y $\mathbf{e}_{(1)}$ apunta en la dirección radial, también llamada el eje óptico. La dirección de un dado rayo de luz está entonces relacionada con las componentes angulares $p^{(2)}$ y $p^{(3)}$ del cuadrimpulso p^μ del mismo.

La sombra siempre se puede encontrar numéricamente mediante el método de trazado de rayos, integrando las ecuaciones de movimiento hacia el pasado a partir de una dada condición inicial en la posición del observador para ver si el rayo en cuestión intersecta al horizonte de eventos. Sin embargo, en todas las métricas consideradas en esta Tesis es posible encontrar la sombra usando las constantes de movimiento conservadas a lo largo de rayos de luz: con las constantes asociadas a un dado $p^{(\mu)}$ se puede estudiar la ecuación de movimiento radial y determinar analíticamente si la trayectoria en cuestión puede llegar al horizonte.

El primer objetivo es entonces encontrar las cantidades conservadas. Se puede ver a simple vista que la métrica de Schwarzschild (2.19) es independiente de t y de φ , de lo cual se deduce inmediatamente que p_t y p_φ son constantes a lo largo de cualquier geodésica. Estas dos componentes son normalmente interpretadas como la energía $E = -p_t$ y la componente z del momento angular $L_z = p_\varphi$, y esto es razonable para partículas con masa cuando se usa el tiempo propio como parámetro. En el caso de la luz, existe la libertad de reescalar arbitrariamente el parámetro afín y por lo tanto las componentes p_μ . Adelantándose al análisis del movimiento de la luz en un plasma en los Capítulos 4 y 5, será más conveniente

fijar la convención de que $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ es el vector de onda de la luz, con unidades de frecuencia, y usar los nombres $\omega_0 = -p_t$ y p_φ para las cantidades conservadas.

Al igual que en el problema de Kepler clásico, la simetría esférica y la conservación del momento angular permiten, sin pérdida de generalidad, fijar $\theta = \pi/2$. Se tienen entonces tres incógnitas $t(\lambda)$, $r(\lambda)$ y $\varphi(\lambda)$, y tres cantidades conservadas p_t , p_φ y $p_\mu p^\mu$: el movimiento se puede integrar completamente sin recurrir directamente a la ecuación de la geodésica de segundo orden. Las tres ecuaciones de movimiento quedan

$$g_{tt}p^t = p_t \implies \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} = \omega_0, \quad (2.24)$$

$$g_{\varphi\varphi}p^\varphi = p_\varphi \implies r^2\dot{\varphi} = p_\varphi, \quad (2.25)$$

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \implies -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - 2M/r} + r^2\dot{\varphi}^2 = 0; \quad (2.26)$$

reemplazando las dos primeras en la tercera, se obtiene la ecuación para el movimiento radial:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \omega_0^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (2.27)$$

Se puede ver que definiendo un nuevo parámetro $\tilde{\lambda} = \omega_0\lambda$, la solución queda determinada por la combinación $b \equiv p_\varphi/\omega_0$, llamada el parámetro de impacto:

$$\left(\frac{dr}{d\tilde{\lambda}}\right)^2 = 1 - \frac{b^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \equiv V(r), \quad (2.28)$$

donde se definió el potencial efectivo $V(r)$. A pesar de la existencia de las dos cantidades conservadas ω_0 y p_φ , la libertad de cambiar la escala del parámetro aún implica que el movimiento depende sólo de b (a menos de traslaciones temporales y rotaciones).

El potencial $V(r)$ presenta dos comportamientos distintos dependiendo del valor de b . Para $b < b_c \equiv 3\sqrt{3}M$, es positivo para todo r y todas las trayectorias cruzan al horizonte; para $b > b_c$ el potencial tiene un cero fuera del horizonte, de manera que las trayectorias se acercan desde el infinito hasta un radio mínimo r_m y luego se vuelven a alejar, como se ilustra en la Figura 2.2. En el parámetro de impacto crítico b_c el potencial tiene una raíz doble en $r = 3M$, y por lo tanto pueden existir órbitas circulares inestables en este radio, formando la llamada esfera de fotones. De la ecuación angular

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \frac{b^2}{r^4 V(r)} \quad (2.29)$$

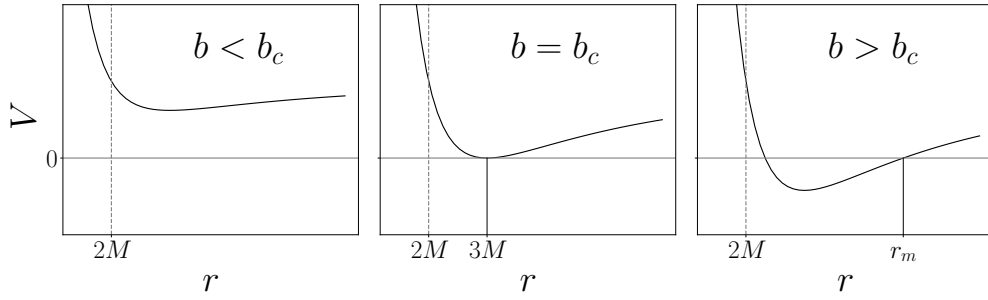


Figura 2.2: Potencial efectivo $V(r)$ para distintos valores del parámetro de impacto b comparado con el parámetro crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$. El movimiento es posible en las regiones donde $V(r) \geq 0$.

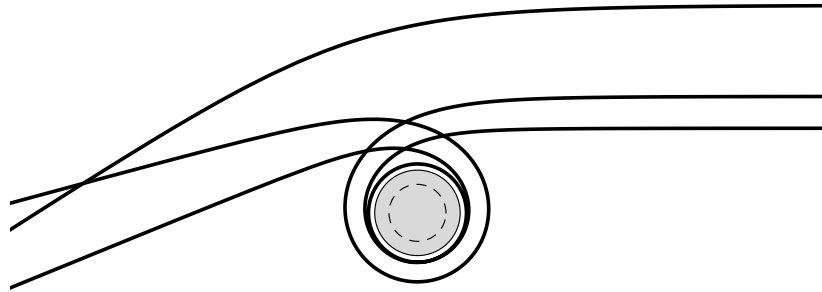


Figura 2.3: Distintas trayectorias de la luz alrededor de un agujero negro de Schwarzschild a medida que el parámetro impacto se acerca a su valor crítico. De arriba hacia abajo el parámetro de impacto disminuye, y se puede ver que las órbitas pueden dar una o más vueltas completas alrededor del agujero negro. En gris se muestra la esfera de fotones y en línea punteada el horizonte. La separación entre las trayectorias interiores está exagerada para mayor claridad.

se puede encontrar el ángulo total recorrido por una órbita con $b > b_c$, dado por

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2 \sqrt{V(r)}} dr, \quad (2.30)$$

donde r_m es el radio mínimo de la órbita. Esto implica que a medida que b se acerca a su valor crítico, las órbitas dan una cantidad de vueltas cada vez mayor alrededor del agujero negro, ya que en este límite el potencial tiene su raíz doble y $\Delta\varphi$ diverge: esto se muestra en la Figura 2.3.

Se puede ver que el parámetro de impacto b_c es el que determina el tamaño de la sombra, como ilustra la Figura 2.4. Fijando un observador en el exterior del

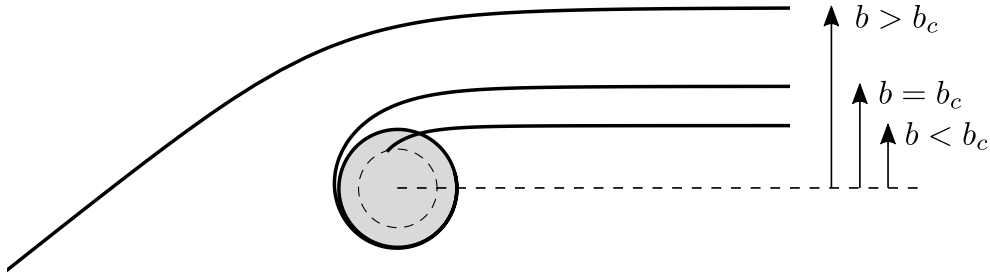


Figura 2.4: Distintas trayectorias de la luz alrededor de un agujero negro de Schwarzschild para parámetros de impacto mayor, igual y menor que el valor crítico. La trayectoria con $b = b_c$ realiza una cantidad infinita de vueltas, acercándose asintóticamente a $r = 3M$.

agujero negro, los rayos que le llegan con $b < b_c$ provienen del horizonte. Los que tienen $b > b_c$ provienen del infinito, luego de acercarse al agujero negro y volver a alejarse; a medida que b se acerca a b_c la deflexión de los rayos aumenta, y los mismos pueden dar una cantidad arbitrariamente grande de vueltas alrededor del agujero negro. Los rayos críticos con $b = b_c$ se dividen en dos clases. Por un lado están las órbitas circulares, que forman la esfera de fotones. Por el otro, están los rayos que llegan hasta el observador con un parámetro de impacto crítico; continuados hacia el pasado, se acercan asintóticamente a la esfera de fotones. Este es el punto clave: la esfera de fotones es quien determina el contorno de la sombra, ya que los rayos que llegan al observador con $b = b_c$, que son asintóticos a la esfera de fotones, separan a los que vienen del horizonte de los que vienen del infinito. Si la observación es desde una distancia grande r_o , la sombra subtiende un radio angular dado por b_c/r_o .

2.4. Agujero negro de Kerr

Encontrar la solución de Schwarzschild es relativamente sencillo: sólo requiere proponer el *ansatz* con simetría esférica (2.14), y luego de deducir que la métrica debe ser estática, las ecuaciones de Einstein resultan en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. El propio Schwarzschild la encontró en 1916, pocos meses después de que se publicara la teoría de la relatividad general. El caso de un agujero rotante y estacionario, sin embargo, es mucho más complicado, ya que en lugar de una simetría esférica completa hay sólo una simetría de rotación alrededor de un eje. La métrica se sigue asumiendo independiente de t y de φ , pero ahora todas sus componentes pueden ser funciones arbitrarias de r

y de θ . Es posible demostrar [79] que bajo ciertas hipótesis sobre las ecuaciones de campo (que se satisfacen en la relatividad general), la métrica axisimétrica y estacionaria más general se puede escribir en coordenadas cilíndricas $\{t, \rho, \varphi, z\}$ en la forma

$$ds^2 = -V(\rho, z)(dt - w(\rho, z) d\varphi)^2 + \frac{\rho^2}{V(\rho, z)} d\varphi^2 + \Psi(\rho, z)^2 (d\rho^2 + \chi(\rho, z) dz^2), \quad (2.31)$$

donde V , w , Ψ y χ son funciones de ρ y z . A pesar de que las diez componentes de la métrica se han reducido a cuatro funciones de dos variables, el sistema de ecuaciones resultante sigue teniendo una complejidad importante.

La solución fue finalmente encontrada por Kerr [41] en 1963, no a través de una integración directa sino gracias a avances en la teoría de soluciones de las ecuaciones de Einstein como la clasificación de Petrov [82] y el teorema de Goldberg-Sachs [83] sobre soluciones algebraicamente especiales. La métrica está dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (2.32)$$

donde ahora

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.33)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (2.34)$$

la masa es M y el momento angular del agujero negro está dado por $J = Ma$. Cuando $a = 0$, la métrica se reduce a la de Schwarzschild. El espacio-tiempo es axisimétrico y estacionario, teniendo simetría ante traslaciones en t y en φ , pero no estático, ya que la métrica no es invariante ante una inversión temporal $t \rightarrow -t$. Se ve que cambiar el signo de t es equivalente a cambiar el signo de a o de φ , indicando que la pérdida de esta simetría se debe a la rotación del agujero negro.

Las coordenadas $\{t, r, \theta, \varphi\}$ se denominan coordenadas de Boyer-Lindquist [84]. Se puede ver que no son equivalentes a las coordenadas esféricas usuales tomando el límite $M \rightarrow 0$, en el cual la geometría se vuelve plana pero la métrica se reduce a

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.35)$$

cuyas componentes no son las de la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas. Para recuperar las coordenadas cartesianas la transformación es

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.36)$$

mostrando que las superficies de r constante no son esferas sino elipsoides con

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \quad (2.37)$$

En principio, la métrica de Kerr tiene posibles singularidades cuando $\rho^2 = 0$ y cuando $\Delta = 0$. La primera de ellas, que ocurre cuando $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, es una singularidad física; al igual que en el caso Schwarzschild, esto se puede verificar comprobando que el escalar de Kretschmann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ diverge cuando $\rho^2 \rightarrow 0$ [85]. A pesar de las apariencias esta singularidad no es puntual, debido a que las coordenadas no son esféricas. Volviendo a la transformación (2.36) de coordenadas de Boyer-Lindquist a cartesianas, se ve que la región $r = 0$ y $\theta = \pi/2$ es un anillo con

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (2.38)$$

Las otras posibles singularidades son las raíces de Δ , dadas por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.39)$$

La métrica se puede hacer regular en estas superficies con un cambio de coordenadas [42], de modo que no representan singularidades físicas. Al igual que en el espacio-tiempo de Schwarzschild, la componente g_{rr} cambia de signo en estos valores de r , y por lo tanto el vector $\partial/\partial r$ alterna entre ser de tipo espacial y de tipo temporal. Concretamente, en la región $r_- < r < r_+$ la coordenada radial es temporal y las trayectorias sólo pueden moverse hacia radios menores, por lo que las superficies $r = r_{\pm}$ son los dos horizontes de este espacio-tiempo. El horizonte exterior $r = r_+$ es el horizonte de eventos, mientras que el interior $r = r_-$ es un horizonte de Cauchy [42]. Es fácil ver que los horizontes sólo existen si $a^2 \leq M^2$; en el caso contrario, desaparece el agujero negro y la singularidad es desnuda.

2.5. Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr

Encontrar la sombra de un agujero negro con una métrica arbitraria es, en principio, análogo al caso Schwarzschild ya estudiado: hay que obtener las geodésicas del espacio-tiempo para decidir si la trayectoria de un fotón con un dado p_{μ} proviene del horizonte de eventos o del infinito. La diferencia es que al no haber simetría esférica no se conservan las tres componentes del momento angular sino

sólo p_φ , por lo que las trayectorias no serán planas y junto con las tres cantidades conservadas $\omega_0 = -p_t$, p_φ y $p_\mu p^\mu$ hay cuatro incógnitas $t(\lambda)$, $r(\lambda)$, $\theta(\lambda)$ y $\varphi(\lambda)$. Carter [43] descubrió que existe otra cantidad conservada, llamada actualmente la constante de Carter. La misma surge no de un vector de Killing, como lo hacen p_t y p_φ , sino de un tensor de Killing $K_{\mu\nu}$ que cumple

$$\nabla_\mu K_{\nu\lambda} + \nabla_\nu K_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda K_{\mu\nu} = 0. \quad (2.40)$$

Bajo estas condiciones, se puede demostrar que la cantidad $K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ es constante a lo largo de geodésicas. La manera por la que esta constante se encontró originalmente es mediante el estudio de la ecuación de Hamilton-Jacobi para la métrica de Kerr.

2.5.1. Teoría de Hamilton-Jacobi

Como se mostró en la Sección 2.1, el movimiento de partículas libres en relatividad general (o en cualquier teoría donde las partículas libres sigan geodésicas) está descrito por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu. \quad (2.41)$$

La idea del método de Hamilton-Jacobi es convertir las ecuaciones de Hamilton, que son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en una sola ecuación en derivadas parciales [1]. Suponiendo por el momento que se conocen las trayectorias que resuelven las ecuaciones, se considera la función

$$S(x_0, \lambda_0; x, \lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\tilde{\lambda} \mathcal{L}(x(\tilde{\lambda}), \dot{x}(\tilde{\lambda}), \tilde{\lambda}), \quad (2.42)$$

llamada la acción. La integral en esta definición se toma a lo largo de una solución de las ecuaciones de movimiento que pase por los puntos x_0 y x con parámetros λ_0 y λ respectivamente. Considerando a la acción como una función de la posición final x y el parámetro λ , se puede demostrar que sus derivadas están dadas por

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\mathcal{H} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = p_\mu. \quad (2.44)$$

Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene la relación

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \lambda\right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.45)$$

denominada la ecuación de Hamilton-Jacobi. El argumento ahora se puede dar vuelta: si dado un Hamiltoniano se puede encontrar una función $S(x, \lambda)$ que cumpla

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \lambda\right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.46)$$

entonces el cuadrimpulso será

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}; \quad (2.47)$$

usando la relación $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ que da el cuadrimpulso en función de la velocidad, las ecuaciones de movimiento son

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (2.48)$$

Este es un sistema de ecuaciones de primer orden para las cuatro funciones $\{x^\mu\}$, en lugar de uno de segundo orden para $\{x^\mu\}$ como son las ecuaciones de Euler-Lagrange, o uno de primer orden para $\{x^\mu, p_\mu\}$ como son las ecuaciones de Hamilton.

El método más común para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi consiste en proponer una solución con separación de variables, de la forma

$$S(x, \lambda) = S_\lambda(\lambda) + S_1(x^1) + S_2(x^2) + \cdots + S_N(x^N); \quad (2.49)$$

se dice que el sistema es separable si al reemplazar esta propuesta la ecuación se convierte en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para las $S_i(x^i)$. Por ejemplo, una partícula libre en el espacio-tiempo de Minkowski con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ tiene la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0. \quad (2.50)$$

Proponiendo una separación $S(x, \lambda) = S_t(t) + S_1(x^1) + S_2(x^2) + S_3(x^3) + S_\lambda(\lambda)$, la ecuación se convierte en

$$-\frac{1}{2} (S'_t)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (S'_i)^2 + S'_\lambda = 0, \quad (2.51)$$

donde la prima denota la derivada respecto de la correspondiente variable. Como las funciones S_μ y S_λ dependen de variables distintas, la única forma de satisfacer esta ecuación es que todos los términos sean constantes, por lo que la solución general es de la forma

$$S = c_t t + \sum_{i=1}^3 c_i x^i + c_\lambda \lambda. \quad (2.52)$$

Las ecuaciones (2.46) y (2.47) dicen que las derivadas con respecto a x^μ de la acción son los momentos y que la derivada con respecto a λ es el Hamiltoniano cambiado de signo; por lo tanto, las ecuaciones de movimiento en este formalismo son

$$p_\mu = c_\mu, \quad \mathcal{H} = -c_\lambda. \quad (2.53)$$

y $dx^\mu/d\lambda = \eta^{\mu\nu} p_\nu$. La ecuación original (2.46) implica que se debe cumplir la relación $c_\lambda = -(1/2)\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = (1/2)m^2$.

El siguiente caso más simple es realizar una separación parcial, donde en la acción se separa sólo la parte dependiendo de una o más coordenadas. Por ejemplo, si el Hamiltoniano es independiente de alguna coordenada x^1 , entonces la acción será separable en la forma

$$S(x, \lambda) = c_1 x^1 + S_2(x^2, \dots, x^N, \lambda), \quad (2.54)$$

donde c_1 es una constante. La relación $p_\mu = \partial_\mu S$ implica entonces que $p_1 = c_1$, es decir, la componente del impulso correspondiente a la coordenada x^1 es constante. Al reemplazar la acción propuesta en la ecuación de Hamilton-Jacobi, ésta queda escrita como

$$\mathcal{H}(x^2, \dots, x^N, c_1, \partial_2 S_2, \dots, \partial_N S_2, \lambda) + \partial_\lambda S_2 = 0. \quad (2.55)$$

Lo que se ve es que la función S_2 satisface una ecuación de Hamilton-Jacobi con una coordenada menos: la variable p_1 fue reemplazada por la constante c_1 . Este paso se puede repetir, buscando otra coordenada que se pueda separar, y así intentar separar completamente la ecuación. Un caso particular ya mencionado es que si el Hamiltoniano corresponde a una partícula libre, entonces es independiente de λ , y la acción se puede separar como

$$S(x, \lambda) = S_0(x) + \frac{1}{2}m^2\lambda; \quad (2.56)$$

la función S_0 satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi reducida

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S_0}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}m^2. \quad (2.57)$$

En particular, para trayectorias nulas el lado derecho es cero.

2.5.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi para la métrica de Kerr

El movimiento de rayos de luz en el espacio-tiempo de Kerr puede describirse por la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0, \quad (2.58)$$

donde $g_{\mu\nu}$ viene dada por la Ecuación (2.32) y ya se usó que para partículas sin masa se tiene $\partial S/\partial\lambda = 0$. Si se encuentra su solución general, las ecuaciones de movimiento estarán dadas por

$$p_\mu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (2.59)$$

La métrica inversa $g^{\mu\nu}$ tiene componentes

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{\Sigma}{\rho^2 \Delta}, & g^{rr} &= \frac{\Delta}{\rho^2}, & g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\rho^2}, \\ g^{t\varphi} &= -\frac{2Mar}{\rho^2 \Delta}, & g^{\varphi\varphi} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (2.61)$$

Las funciones ρ^2 y Δ son las ya definidas en las Ecuaciones (2.33) y (2.34), respectivamente.

Como la métrica es independiente de t y φ , y por lo tanto también lo es el Hamiltoniano, inmediatamente se pueden separar estas dos variables de la acción, escribiéndola como

$$S = -\omega_0 t + p_\varphi \varphi + S_0(r, \theta). \quad (2.62)$$

Al reemplazar este *ansatz* en la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.58) y escribir las componentes de la métrica inversa, se obtiene la ecuación

$$-\frac{\Sigma}{\rho^2 \Delta} \omega_0^2 + \frac{4Mar}{\rho^2 \Delta} \omega_0 p_\varphi + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} p_\varphi^2 + \frac{\Delta}{\rho^2} (\partial_r S_0)^2 + \frac{1}{\rho^2} (\partial_\theta S_0)^2 = 0. \quad (2.63)$$

Multiplicando toda la ecuación por ρ^2 , la misma se puede reescribir como

$$\begin{aligned} -\left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta\right) \omega_0^2 + \frac{4Mar}{\Delta} \omega_0 p_\varphi + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta}\right) p_\varphi^2 \\ + \Delta (\partial_r S_0)^2 + (\partial_\theta S_0)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Se puede ver que la derivada de S_0 con respecto a r aparece multiplicada por una función de r , y que la primera línea de la ecuación es la suma de una función de r y una función de θ . Por lo tanto, el sistema es completamente separable: proponiendo

$$S_0(r, \theta) = S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (2.65)$$

la ecuación queda en la forma

$$-\frac{1}{\Delta}[(r^2 + a^2)^2 \omega_0^2 - 4aMr\omega_0 p_\varphi + a^2 p_\varphi^2] + \Delta(S'_r)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + a^2 \omega_0^2 \sin^2 \theta + (S'_\theta)^2 = 0. \quad (2.66)$$

Para simplificar un poco más, se pueden completar cuadrados sumando y restando $2a\omega_0 p_\varphi$, con lo que la ecuación de Hamilton-Jacobi queda

$$-\Delta(S'_r)^2 + \frac{(\omega_0(r^2 + a^2) - ap_\varphi)^2}{\Delta} = (S'_\theta)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\sin \theta} - a\omega_0 \sin \theta\right)^2. \quad (2.67)$$

Aquí la separación se ve claramente: el lado izquierdo es una función sólo de r y el lado derecho sólo de θ , de modo que ambos lados deben ser iguales a una constante $\mathcal{K}$. Los momentos covariantes están entonces dados por

$$(\Delta p_r)^2 = (\Delta S'_r)^2 = \left(\omega_0(r^2 + a^2) - ap_\varphi\right)^2 - \Delta \mathcal{K} \equiv \mathcal{R}(r), \quad (2.68)$$

$$p_\theta^2 = (S'_\theta)^2 = \mathcal{K} - \left(\frac{p_\varphi}{\sin \theta} - a\omega_0 \sin \theta\right)^2 \equiv \Theta(\theta), \quad (2.69)$$

donde se han definido los potenciales $\mathcal{R}(r)$ y $\Theta(\theta)$. Es tradicional usar en lugar de $\mathcal{K}$ a la constante

$$Q = \mathcal{K} - (a\omega_0 - p_\varphi)^2, \quad (2.70)$$

que se puede reescribir como

$$Q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \omega_0^2 \right); \quad (2.71)$$

tanto $\mathcal{K}$ como Q son llamadas constante de Carter [43]. Como se anticipó al principio de esta sección, es una cantidad conservada que no surge de un vector de Killing sino de un tensor de Killing de rango 2, como se puede ver del hecho de que es cuadrática en los impulsos. Concretamente, Q se puede escribir como $Q = Q^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$, con

$$Q^{\mu\nu} = \text{diag}(-a^2 \cos^2 \theta, 0, 1, \cot^2 \theta). \quad (2.72)$$

Es posible verificar [86] que este tensor cumple la ecuación de Killing tensorial $\nabla_\mu Q_{\nu\lambda} + \nabla_\nu Q_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda Q_{\mu\nu} = 0$, lo cual implica la conservación de Q .

2.5.3. Trayectorias de fotones

Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz en el espacio-tiempo de Kerr se pueden obtener combinando las ecuaciones (2.68) y (2.69) para el movimiento en r y θ con las expresiones $\omega_0 = -g_{t\mu}\dot{x}^\mu$ y $p_\varphi = g_{\varphi\mu}\dot{x}^\mu$ para las componentes t y φ del impulso; las cuatro ecuaciones son

$$\rho^2 \Delta \dot{t} = \Sigma \omega_0 - 2Mar p_\varphi, \quad (2.73)$$

$$\rho^2 \Delta \dot{\varphi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} p_\varphi + 2Mar \omega_0, \quad (2.74)$$

$$\left(\rho^2 \dot{r} \right)^2 = \mathcal{R}(r), \quad (2.75)$$

$$\left(\rho^2 \dot{\theta} \right)^2 = \Theta(\theta), \quad (2.76)$$

con

$$\mathcal{R}(r) = \omega_0^2 r^4 - (Q + p_\varphi^2 - a^2 \omega_0^2) r^2 + 2M \left(Q + (p_\varphi - a \omega_0)^2 \right) r - a^2 Q \quad (2.77)$$

y

$$\Theta(\theta) = Q - \cos^2 \theta \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \omega_0^2 \right). \quad (2.78)$$

Estas ecuaciones en principio se pueden integrar para hallar la trayectoria con una dada condición inicial. Esta forma no es la más adecuada para una integración numérica de las trayectorias, ya que las expresiones para $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ contienen raíces cuadradas que deben manejarse con cuidado y cuyo signo debe elegirse a mano. Sin embargo, al igual que para la métrica de Schwarzschild estas expresiones son convenientes para analizar los tipos de órbitas posibles, al estar dadas en términos de potenciales.

Se puede ver que las trayectorias no dependen de ω_0 , p_φ y Q de manera independiente; son invariantes ante una transformación

$$\omega_0 \rightarrow \alpha \omega_0, \quad p_\varphi \rightarrow \alpha p_\varphi, \quad Q \rightarrow \alpha^2 Q. \quad (2.79)$$

De manera equivalente, la libertad de reescalar el parámetro afín permite definir un nuevo parámetro $\tilde{\lambda} = \omega_0 \lambda$, con respecto al cual los potenciales se dividen por ω_0^2 y sólo dependen de las combinaciones

$$\eta \equiv \frac{Q}{\omega_0^2} \quad (2.80)$$

$$\xi \equiv \frac{p_\varphi}{\omega_0}, \quad (2.81)$$

llamadas parámetros de impacto en analogía con el parámetro $b = p_\varphi/\omega_0$ definido en el caso esférico. Esto también será así en cualquier espacio-tiempo que admita una constante de Carter y en el que el movimiento de la luz sólo se vea afectado por la gravedad u otras fuerzas independientes de la frecuencia. Distinto es el caso de las sombras a estudiar en los Capítulos 4 y 5, en las que la presencia de un plasma afecta a los rayos de luz de manera cromática, dependiendo de ω_0 . Dicho de otra manera, la frecuencia de plasma fija una escala de frecuencias, de modo que las trayectorias no son invariantes ante la transformación (2.79). Para mantener la generalidad, en este trabajo no se usarán los parámetros de impacto η y ξ , sino que se mantendrán las constantes ω_0 , Q y p_φ .

2.5.3.1. Movimiento angular

Es conveniente empezar analizando el movimiento en θ de las distintas trayectorias en función de los valores de las constantes de movimiento, a partir de la Ecuación (2.71); se puede ver de la definición (2.69) de $\mathcal{K}$ que la misma siempre debe ser positiva, mientras que Q puede tomar cualquier signo. Como caso particular, las trayectorias que se quedan en el plano ecuatorial tienen $Q = 0$ (aunque la implicación inversa no necesariamente es cierta); aquellas que lo cruzan tienen $Q > 0$, ya que tienen $p_\theta \neq 0$ cuando $\theta = \pi/2$.

La ecuación (2.76) implica que sólo puede haber movimiento en los intervalos de θ para los que $\Theta(\theta)$ es positivo; por lo tanto, el primer paso es encontrar los valores de las constantes para los que Θ tiene una raíz doble, para separar clases de trayectorias cualitativamente distintas. Las ecuaciones a resolver son

$$\Theta(\theta) = Q - \cos^2 \theta \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \omega_0^2 \right) = 0 \quad (2.82)$$

y

$$\Theta'(\theta) = 2 \cos \theta \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^3 \theta} - a^2 \omega_0^2 \sin \theta \right) = 0. \quad (2.83)$$

La segunda de éstas tiene dos clases de soluciones. La más evidente es $\theta = \pi/2$, para la cual $\Theta'(\pi/2) = 0$ y $\Theta(\pi/2) = Q$. Si $Q = 0$, el potencial Θ tiene una raíz doble en $\theta = \pi/2$. Las otras soluciones de $\Theta' = 0$ son las que cumplen

$$\sin \theta_* = \sqrt{\left| \frac{p_\varphi}{a\omega_0} \right|}; \quad (2.84)$$

éstas existen si $|p_\varphi| \leq a\omega_0$. En este caso, $\Theta(\theta_*) = Q + (|p_\varphi| - a\omega_0)^2$, que debe ser cero para tener una raíz doble. La Figura 2.5 muestra cómo se divide el plano

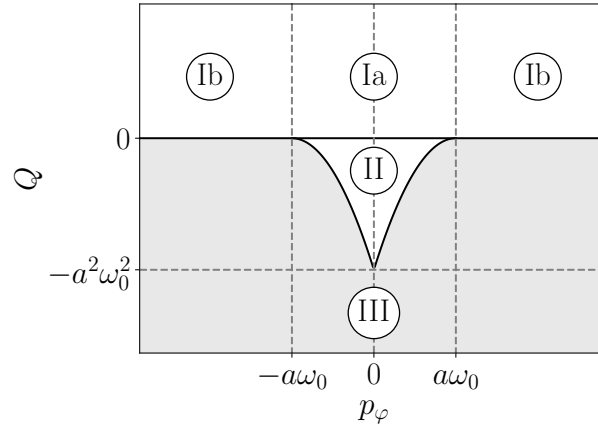


Figura 2.5: Regiones con distintos intervalos de θ permitidos. La curva $Q = -(|p_\varphi| - a\omega_0)^2$ separa a la región II de la región III prohibida.

$p_\varphi - Q$ en regiones donde el potencial Θ tiene distintas formas; éstas se grafican en la Figura 2.6, y la Figura 2.7 muestra los casos límites entre distintas regiones.

La región prohibida es la III, ya que allí el potencial Θ es negativo para todo θ . La región I es la relevante para el cálculo de la sombra: las trayectorias se mueven en un intervalo de la forma $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$, que contiene al plano ecuatorial y es simétrico alrededor del mismo. El intervalo es más grande cuanto más chico es p_φ , y cuando $p_\varphi = 0$ el movimiento llega hasta los polos en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. El borde entre la región I y la III, dado por $Q = 0$ y $|p_\varphi| > a$, corresponde a las órbitas ecuatoriales. La región II, limitada por las curvas $Q = 0$ y $Q = -(|p_\varphi| - a\omega_0)^2$, contiene trayectorias que no intersectan al plano ecuatorial. Las mismas pueden estar en una región con $\theta < \pi/2$ ó con $\theta > \pi/2$, pero no pueden cruzar entre ambas. En particular, el límite entre las regiones II y III, donde $Q + (|p_\varphi| - a\omega_0)^2 = 0$, contiene a las congruencias nulas principales [42] con $\theta = \text{cte}$.

2.5.3.2. Movimiento radial

El análisis del movimiento en la coordenada r comienza de manera similar al del movimiento en θ , buscando las raíces dobles del potencial para separar distintos regímenes: en este caso, el objetivo es encontrar cuáles trayectorias

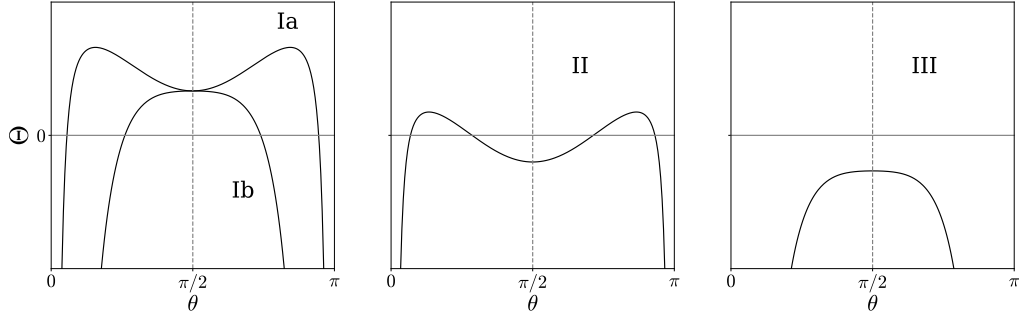


Figura 2.6: Forma cualitativa del potencial angular $\Theta(\theta)$ para las tres regiones mostradas en la Figura 2.5.

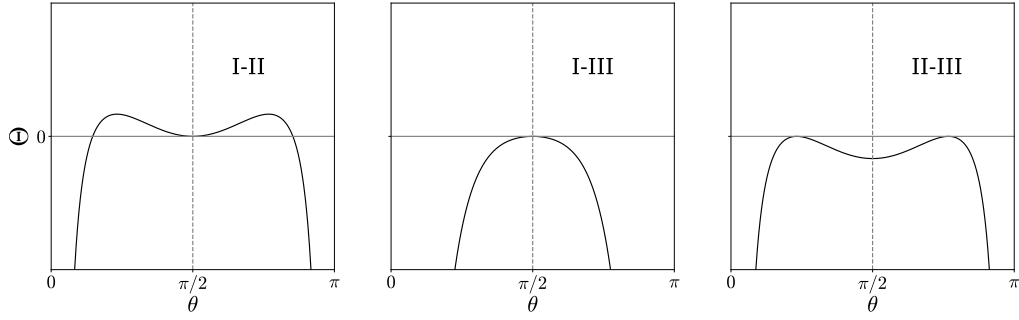


Figura 2.7: Forma cualitativa del potencial angular $\Theta(\theta)$ para las curvas divisorias entre las tres regiones mostradas en la Figura 2.5.

intersectan al horizonte de eventos y cuáles no. Las ecuaciones a resolver son

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r) &= \omega_0^2 r^4 - (Q + p_\varphi^2 - a^2 \omega_0^2) r^2 + 2M(Q + (p_\varphi - a\omega_0)^2) r - a^2 Q \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'(r) &= 4\omega_0^2 r^3 - 2(Q + p_\varphi^2 - a^2 \omega_0^2) r + 2M(Q + (p_\varphi - a\omega_0)^2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Encontrar una expresión analítica para r en función de las constantes es en principio posible pero poco práctico, ya que son ecuaciones polinómicas de grado 3 y 4. Tampoco es sencillo escribir una relación entre p_φ y Q para la curva de raíces dobles, como se hizo en el caso angular. Lo que sí es posible es escribir ambas constantes en función de r en forma paramétrica: se obtendrán expresiones para los valores críticos $p_\varphi(r)$ y $Q(r)$, donde r es la posición de la raíz doble de $\mathcal{R}$. Por supuesto, sólo son físicamente relevantes aquellas raíces que ocurran fuera del horizonte, con $r > r_h$.

Es conveniente empezar despejando Q de la segunda ecuación:

$$Q = \frac{2\omega_0^2 r^3 - (p_\varphi^2 - a^2 \omega_0^2)r + M(p_\varphi - a\omega_0)^2}{r - M}. \quad (2.87)$$

Al reemplazar esto en $\mathcal{R}(r) = 0$ se obtiene una ecuación cuadrática para p_φ , con soluciones

$$p_{\varphi\pm} = \omega_0 \frac{M(r^2 - a^2) \pm r\Delta}{a(r - M)}. \quad (2.88)$$

La solución con el signo de arriba es $p_{\varphi+} = \omega_0(r^2 + a^2)/a$, y reemplazando en la expresión de Q se obtiene $Q_+ = -\omega_0^2 r^2/a^2$. Esta curva, para $r \geq r_h$, se muestra en la Figura 2.8; tiene $Q < 0$ y $p_\varphi > a\omega_0$ siempre, de modo que está completamente contenida en la región prohibida y no corresponde a trayectorias posibles. Eliendo entonces el otro signo, las constantes críticas son

$$p_{\varphi-} = \omega_0 \frac{M(r^2 - a^2 - r\Delta)}{a(r - M)} \quad (2.89)$$

y

$$Q_- = \frac{\omega_0^2 r^3}{a^2(r - M)^2} \left(4a^2 M - r(r - 3M)^2 \right). \quad (2.90)$$

Estas expresiones se grafican en función de r en la Figura 2.9, y se pueden ver también en la rama superior de la Figura 2.8. Para $r = r_h$ la curva está en la región prohibida, pero a medida que r aumenta se ve que hay un intervalo de radios para los que $Q_- \geq 0$ y que por lo tanto corresponden a trayectorias físicamente permitidas. La forma del potencial $\mathcal{R}(r)$ para distintos valores de las constantes se muestra en la Figura 2.10. Cuando p_φ y Q están por debajo de la curva el potencial no tiene raíces fuera del horizonte, y todas las trayectorias cruzan al mismo. Cuando las constantes están por encima de la curva, en cambio, las trayectorias que vienen del infinito tienen un radio mínimo fuera del horizonte. Sobre la curva crítica, el potencial tiene una raíz doble, resultando en la posibilidad trayectorias de radio constante; éstas son las más importantes para el cálculo de la sombra, y se analizan a continuación.

2.5.3.3. Órbitas esféricas de fotones

Para un radio r_c , si las constantes de movimiento toman los valores críticos $(p_\varphi(r_c), Q(r_c))$ dados por las ecuaciones (2.89) y (2.90) (y las constantes no están en la región prohibida por el potencial angular) entonces el potencial radial tiene una raíz doble en $r = r_c$, y existe una trayectoria contenida en la superficie $r = r_c$, llamada una órbita esférica de fotones. Estas órbitas son una generalización de la esfera de fotones de un agujero negro no rotante; también son inestables ante

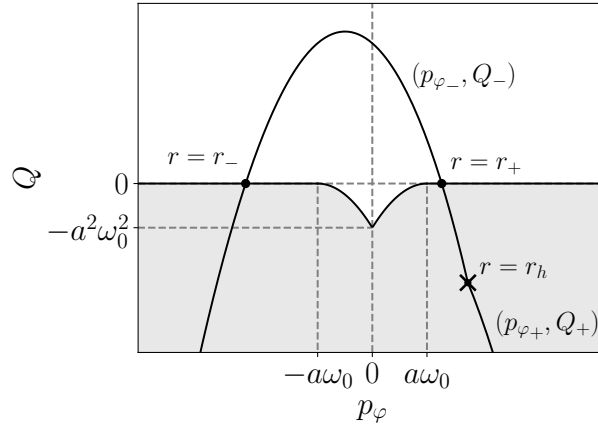


Figura 2.8: Las dos ramas de la curva de valores críticos de p_φ y Q , para $r \geq r_h$. La rama $(p_{\varphi+}, Q_+)$ empieza en el punto marcado $r = r_h$ y se mueve hacia abajo a medida que r aumenta, mientras que la rama $(p_{\varphi-}, Q_-)$ crece hacia arriba. En gris está la región prohibida por el potencial angular. Los puntos con $r = r_\pm$, discutidos más abajo, son aquellos donde la curva crítica interseca a la recta $Q = 0$.

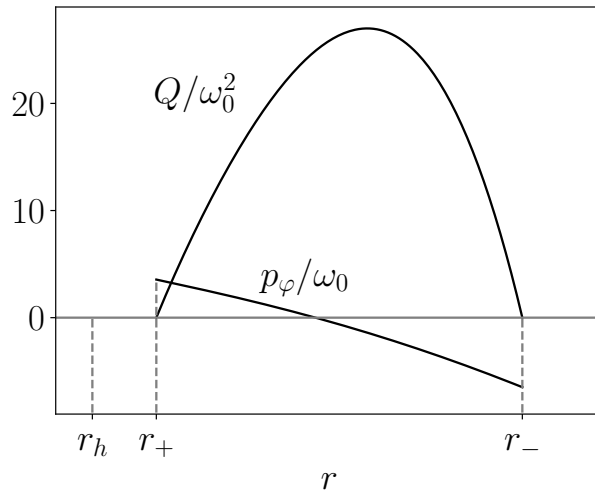


Figura 2.9: Valores críticos de las constantes p_φ y Q en función de r , en el intervalo en que Q es positivo.

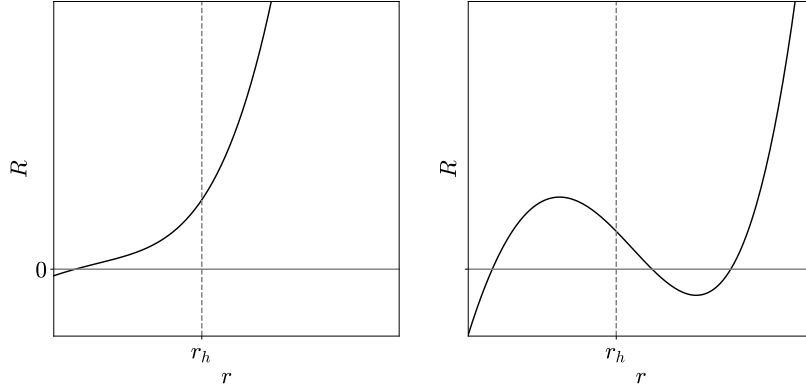


Figura 2.10: La forma cualitativa del potencial radial $\mathcal{R}(r)$ para (p_φ, Q) abajo y arriba de la curva crítica, respectivamente.

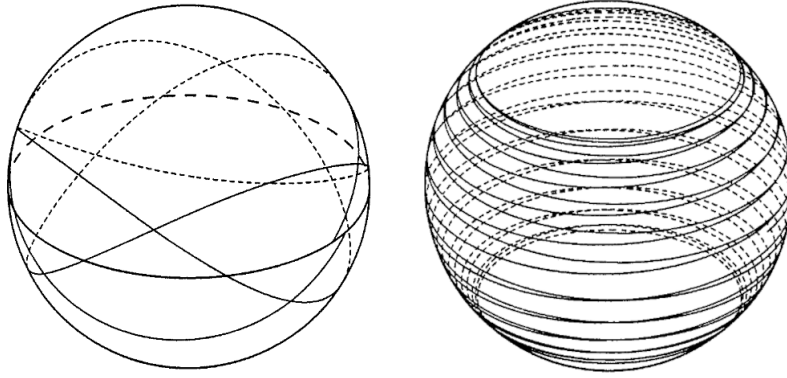


Figura 2.11: Órbitas esféricas de fotones con $p_\varphi/\omega_0 = -6M$ (izquierda) y $p_\varphi/\omega_0 = 1.999M$ (derecha) para un agujero negro de Kerr extremal, con $a = M$. Tomado de [87].

perturbaciones radiales, pero en general no son cerradas, ya que los movimientos en θ y en φ tienen períodos no conmensurables. Esto se ejemplifica en la Figura 2.11. Las órbitas esféricas no ocurren todas en un mismo radio como en el caso no rotante, sino que hay un intervalo posible de radios para ellas. Para cada superficie $r = r_c$, la órbita esférica correspondiente recorre un intervalo en θ determinado por el potencial angular. Se denomina región de fotones a la región del espacio donde puede haber órbitas esféricas de fotones, y se muestra en las Figuras 2.12 y 2.13.

El intervalo de radios donde pueden existir órbitas esféricas de fotones² está limitado por las órbitas ecuatoriales con $Q = 0$, como se ve en la Figura 2.8. Es

²Se puede demostrar [42, 87] que los puntos de la curva crítica con $Q = 0$ siempre tienen $|p_\varphi| > a\omega_0$; esto implica que la curva no puede ingresar a la región II, y que sus extremos siempre

posible resolver la ecuación $Q = 0$ y encontrar los dos radios [42]

$$r_{\pm} = 2M \left[1 + \cos \left(\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{a}{M} \right) \right) \right] \quad (2.91)$$

de las órbitas ecuatoriales circulares. Puede resultar confuso que r_+ sea el radio interior y r_- el exterior; los nombres están elegidos de esa manera ya que en r_+ el movimiento en φ es con $\dot{\varphi} > 0$, rotando en el mismo sentido que el agujero negro, mientras que en r_- la órbita es retrógrada. La Figura 2.12 muestra el intervalo de θ permitido para las órbitas esféricas de fotones en función del radio. La zona gris es la región de fotones; la intersección de la misma con un plano vertical está graficada en la Figura 2.13. Cuando $a = 0$, la región de fotones colapsa a la esfera de fotones en $r = 3M$ (se puede comprobar que $r_{\pm} \rightarrow 3M$ cuando $a \rightarrow 0$); a medida que a aumenta los radios $r_{\pm}$ de las órbitas circulares se van separando y la región de fotones se ensancha. El hecho de que las trayectorias que orbitan en una dirección tengan distinto radio que las que lo hacen en la otra se debe a que la componente $g_{t\varphi}$ de la métrica rompe la simetría $\varphi \rightarrow -\varphi$; físicamente, se puede pensar que la gravedad afecta menos a los fotones que giran en la misma dirección que el agujero negro, por lo que los mismos pueden realizar una órbita más cercana.

Como se ve en las Figuras 2.12 y 2.13, la región de fotones queda dividida en capas de radio constante. La más interior, en $r = r_+$, tiene amplitud en θ nula, sólo conteniendo a la órbita ecuatorial prógrada, con momento angular p_{φ} positivo. Si se va aumentando el radio el momento angular de las órbitas disminuye, y el intervalo de θ ocupado se ensancha; la órbita con $p_{\varphi} = 0$ es la que llega hasta los polos. Para radios mayores el momento angular se hace negativo y la amplitud angular vuelve a disminuir. Existe un intervalo en el que las órbitas no tienen un sentido de rotación definido, ya que $\dot{\varphi}$ y p_{φ} no son proporcionales: aunque el momento angular sea constante, el signo de la velocidad angular cambia a lo largo de la órbita. Si el radio sigue aumentando y p_{φ} es suficientemente negativo, esto deja de pasar y las órbitas se vuelven retrógradas; y finalmente, en $r = r_-$, está la órbita ecuatorial retrógrada.

2.6. Sombra del agujero negro de Kerr

La naturaleza de los rayos de luz que le llegan a un observador depende de los valores de sus constantes de movimiento. Como se vio en la sección anterior, si p_{φ} y Q quedan por debajo de la curva crítica de la Figura 2.8 entonces la trayectoria en cuestión proviene del horizonte, y por lo tanto está dentro de la

son las órbitas con $Q = 0$.

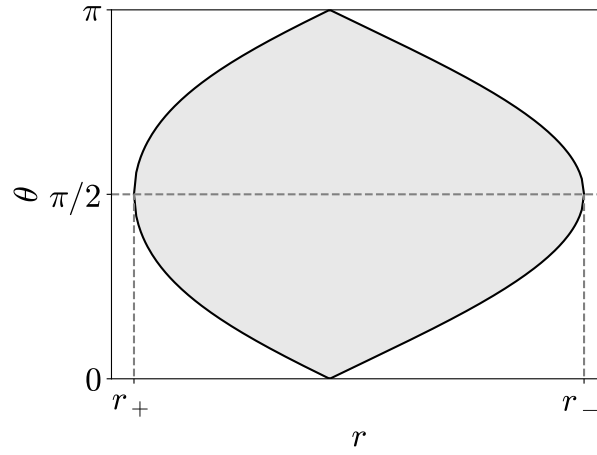


Figura 2.12: La región de fotones en el plano r - θ .

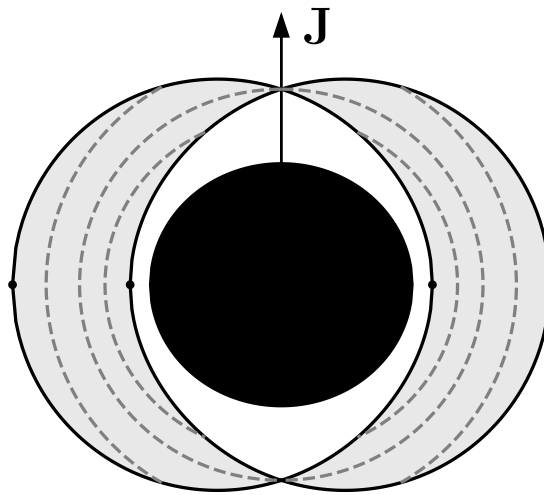


Figura 2.13: Una sección de la región de fotones, rodeando al horizonte de eventos (en negro). Se muestran en línea punteada algunas regiones de radio constante, y los puntos marcan las órbitas circulares ecuatoriales.

sombra. Si las constantes están por encima de la curva crítica, la trayectoria tiene un radio mínimo fuera del horizonte, de modo que proviene del infinito y está fuera de la sombra. Los rayos con las constantes críticas, dadas por (2.89) y (2.90), se acercan asintóticamente a las órbitas esféricas de fotones cuando se las continúa hacia el pasado. No provienen del horizonte ni del infinito, por lo que forman el contorno de la sombra.

El siguiente paso es encontrar la relación entre las constantes de movimiento de un rayo de luz y la dirección con la que le llega al observador. En todo este trabajo se considerarán observadores ubicados a distancias muy grandes comparadas con el radio del horizonte, de modo que en la posición del mismo la métrica se puede tomar como plana:

$$ds^2 \approx -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.92)$$

El observador tiene asociado una tétrada

$$\mathbf{e}_{(0)} = \partial_t, \quad (2.93)$$

$$\mathbf{e}_{(1)} = \partial_r, \quad (2.94)$$

$$\mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{e}_{(3)} = -\frac{1}{r} \partial_\theta. \quad (2.96)$$

El vector $\mathbf{e}_{(0)}$ es la cuadrivelocidad del mismo, y los vectores $\mathbf{e}_{(2)}$ y $\mathbf{e}_{(3)}$ apuntan en las direcciones angulares, respecto a las cuales se puede definir la dirección de observación de un fotón. Los vectores están elegidos para tener la orientación típica en el cielo del observador, con $\mathbf{e}_{(3)}$ alineado con el eje z como muestra la Figura 2.14 más abajo. El cuadrimpulso $p^{(\mu)} = (p^{(0)}, \mathbf{p})$ de fotón es nulo, $p^{(0)} = |\mathbf{p}|$; tomando un observador en $r = r_o$ y $\theta = \theta_o$, sus componentes están dadas por

$$p^{(0)} = -p_0 = \omega_0, \quad (2.97)$$

$$p^{(1)} = p_r, \quad (2.98)$$

$$p^{(2)} = \frac{1}{r_o \sin \theta_o} p_\varphi, \quad (2.99)$$

$$p^{(3)} = -\frac{1}{r_o} p_\theta = \pm \frac{1}{r_o} \sqrt{Q - \cos^2 \theta_o \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta_o} - a^2 \omega_0^2 \right)}, \quad (2.100)$$

en términos de las componentes covariantes del impulso y las constantes de movimiento. Como las trayectorias se toman dirigidas hacia el futuro y llegando

al observador desde el agujero negro, $p^{(0)}$ y $p^{(1)}$ son positivos. En el límite de ángulos pequeños, los ángulos formados con los ejes θ y φ son

$$\theta_2 = -\frac{p^{(2)}}{|\mathbf{p}|}, \quad (2.101)$$

$$\theta_3 = -\frac{p^{(3)}}{|\mathbf{p}|}. \quad (2.102)$$

Éstos tienen los signos opuestos a las componentes $p^{(2)}, p^{(3)}$ ya que describen la dirección desde donde llega el rayo de luz en lugar de hacia donde se dirige.

Estos ángulos tienden a cero a medida que $r_o \rightarrow \infty$. Para normalizarlos, es convencional definir en su lugar las coordenadas celestes

$$\alpha = -r_o \frac{p^{(2)}}{|\mathbf{p}|}, \quad (2.103)$$

$$\beta = -r_o \frac{p^{(3)}}{|\mathbf{p}|}, \quad (2.104)$$

de forma que las mismas son independientes de r_o en el límite $r_o \rightarrow \infty$. Tienen unidades de longitud, de modo que se pueden interpretar como distancias en un plano perpendicular a la línea de visión y que intersecta al agujero negro. En las coordenadas de Boyer-Lindquist, el eje z apunta en la dirección del momento angular $\mathbf{J}$ del agujero negro; por lo tanto, β es proporcional a la componente del cuadrimpulso $p^{(\mu)}$ del fotón paralela a la proyección de $\mathbf{J}$ en el cielo del observador y α es proporcional a la componente perpendicular, como muestra la Figura 2.14.

Las expresiones (2.97)-(2.100) para las componentes ortonormales del impulso se pueden reemplazar en las definiciones (2.103) y (2.104) de las coordenadas celestes para obtener finalmente la relación entre las constantes de movimiento de un rayo de luz y la dirección en el cielo en la que se lo observa:

$$\alpha = -\frac{p_\varphi}{\omega_0 \sin \theta_o}, \quad (2.105)$$

$$\beta = \pm \frac{1}{\omega_0} \sqrt{Q - \cos^2 \theta_o \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta_o} - a^2 \omega_0^2 \right)}. \quad (2.106)$$

Ya se ha dicho que las constantes de movimiento de las órbitas esféricas, también llamadas las constantes críticas, son las que definen el contorno de la sombra. Usando las expresiones paramétricas (2.89) y (2.90) para la curva crítica $(p_\varphi(r), Q(r))$ se obtiene una correspondiente curva $(\alpha(r), \beta(r))$ dando el contorno de la sombra. Es importante recordar que el r que aparece aquí no es la

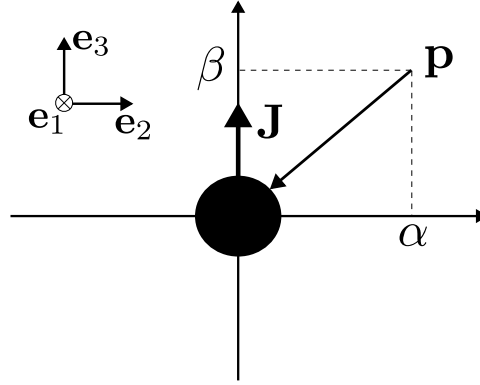


Figura 2.14: Coordenadas celestes (α, β) centradas en el agujero negro. La coordenada β está alineada con la proyección del momento angular $\mathbf{J}$ del agujero negro. La orientación de las coordenadas y la del impulso $\mathbf{p}$ del fotón son opuestas, ya que las coordenadas indican desde dónde viene el fotón.

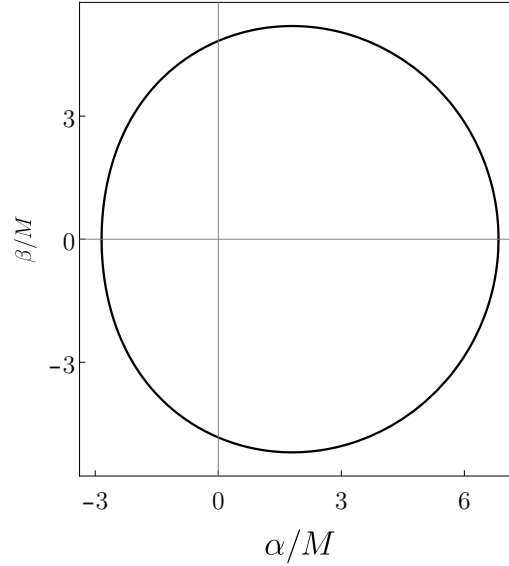


Figura 2.15: El contorno de la sombra de un agujero negro con $a/M = 0.9$, visto por un observador en $\theta_0 = \pi/2$.

posición del observador r_0 , sino que es el parámetro de la curva crítica y en principio toma valores dentro de la región de fotones $r_+ < r < r_-$. La Figura 2.15 muestra el contorno de la sombra de un agujero negro de Kerr con $a/M = 0.9$ visto por un observador en $\theta_0 = \pi/2$.

Es interesante notar que la relación entre la sombra y la esfera de fotones es más compleja que en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En este último, cada

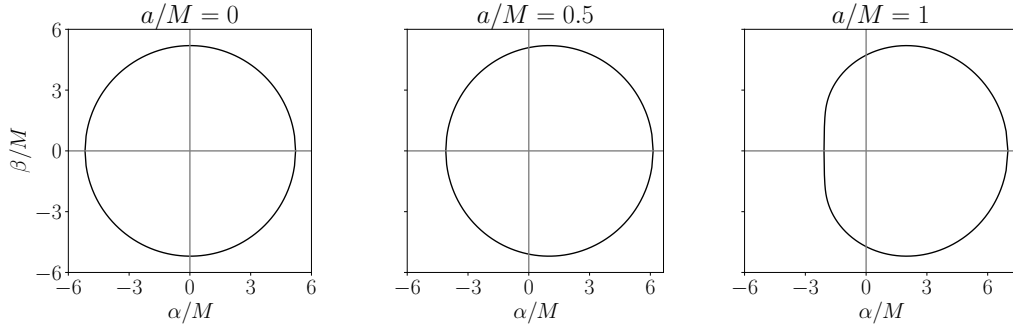


Figura 2.16: Sombras vistas por un observador ecuatorial para distintos valores del momento angular a del agujero negro.

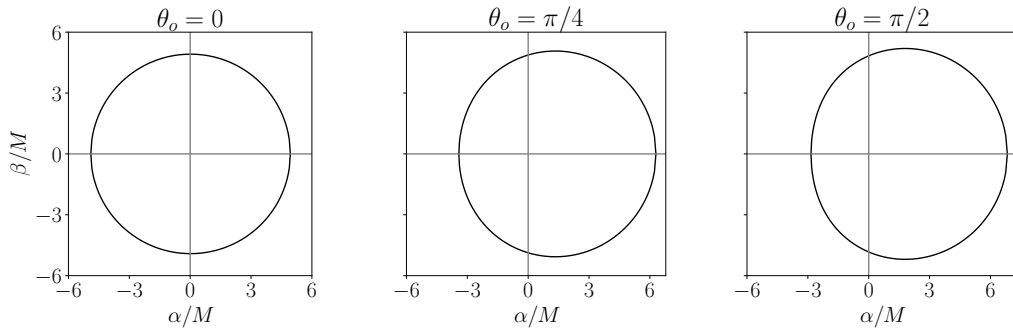


Figura 2.17: Sombras de un agujero negro con $a/M = 0.9$ vistas por observadores en distintas inclinaciones θ_o .

punto de la sombra es un rayo que proviene asintóticamente de una de las órbitas circulares: todas estas órbitas están en $r = 3M$, sin importar su inclinación. En el espacio-tiempo de Kerr, como ya se ha visto, las órbitas con distinta inclinación y por lo tanto distintos valores de p_φ y Q tienen distintos radios: cada punto de la sombra corresponde a un valor de r en la región de fotones. Concretamente, la coordenada α es proporcional al momento angular p_φ : el rayo que llega al extremo izquierdo de la sombra proviene de la órbita circular ecuatorial en $r = r_+$, con p_φ positivo. A medida que α crece, Q crece y luego decrece mientras que p_φ disminuye monótonamente, recorriendo las órbitas esféricas que conforman la región de fotones y eventualmente terminando en el extremo derecho de la sombra, que corresponde a la órbita ecuatorial en $r = r_-$.

La asimetría de la métrica de Kerr ante reflexiones en φ se ve plasmada claramente en la forma de la sombra. La misma ya no es circular y centrada en el eje óptico, sino que es asimétrica y desplazada en la dirección α positiva. Matemáticamente, la razón es que las ecuaciones de movimiento de la luz dependen del signo de p_φ ; las trayectorias con momento angular positivo, que forman la

mitad izquierda del contorno de la sombra, pueden pasar más cerca del agujero negro y por lo tanto se observan más cerca del eje óptico. Lo opuesto ocurre para las trayectorias con $p_\varphi < 0$. Es esperable que esta asimetría sea más pronunciada cuanto mayor sea el momento angular del agujero negro, y la Figura 2.16 muestra que esto es así: cuando $a \rightarrow 0$ la sombra se vuelve más circular y centrada, como lo es en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Las figuras mostradas hasta ahora corresponden a un observador ecuatorial, con $\theta_o = \pi/2$. En este caso, las expresiones para las coordenadas celestes son simplemente

$$\alpha = -\frac{p_\varphi}{\omega_0} \quad (2.107)$$

y

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{Q}}{\omega_0}, \quad (2.108)$$

mostrando claramente que los extremos del contorno de la sombra, los puntos con $\beta = 0$, corresponden a las trayectorias ecuatoriales con $Q = 0$. Sin embargo, un observador fuera del plano ecuatorial no ve todas las órbitas esféricas de fotones³. Matemáticamente, esto es porque si $\theta_o \neq \pi/2$ entonces en la expresión

$$\beta = \pm \frac{1}{\omega_0} \sqrt{Q - \cos^2 \theta_o \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta_o} - a^2 \omega_0^2 \right)} \quad (2.109)$$

la raíz cuadrada puede volverse imaginaria si Q es chico y p_φ es grande, lo cual ocurre en los extremos izquierdo y derecho de la sombra, correspondiendo a órbitas con radios cercanos a los bordes $r_\pm$ de la región de fotones. Físicamente, estas órbitas con Q chico tienen poca amplitud angular (y si $Q = 0$ son ecuatoriales) y lo mismo es cierto para las trayectorias asintóticas a las órbitas esféricas; por lo tanto, sólo son visibles para observadores suficientemente cercanos al plano ecuatorial. La Figura 2.18 ilustra cómo un observador fuera del plano ecuatorial ve una parte reducida de la región de fotones.

Para encontrar los radios cuyas correspondientes órbitas esféricas son visibles por un observador en θ_o basta entonces con pedir la condición $\Theta(\theta_o) \geq 0$, que dice que θ_o queda contenido dentro del intervalo angular de la órbita. Usando la expresión (2.69), esto es

$$Q(r) - \cos^2 \theta_o \left(\frac{p_\varphi(r)^2}{\sin^2 \theta_o} - a^2 \omega_0^2 \right) \geq 0, \quad (2.110)$$

³O estrictamente hablando, no ve todas las trayectorias que, continuadas hacia el pasado, son asintóticas a una órbita esférica de fotones.

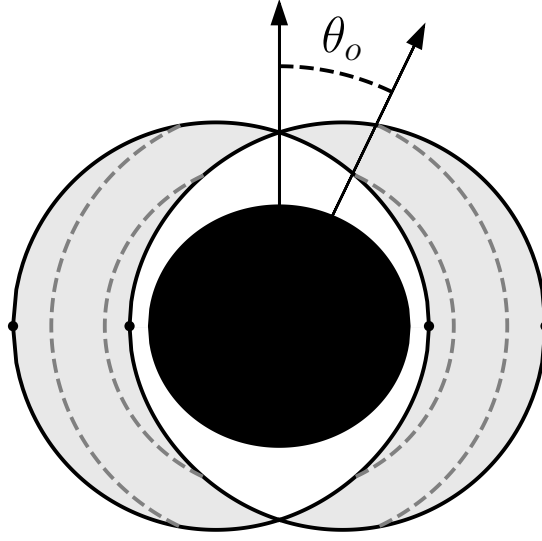


Figura 2.18: Para un observador en θ_o , sólo la zona de la región de fotones entre los radios marcados con líneas punteadas es visible: aquellas órbitas con suficiente amplitud latitudinal como para llegar hasta $\theta = \theta_o$.

donde $p_\varphi(r)$ y $Q(r)$ son las expresiones (2.89) y (2.90) para las constantes críticas. Esta desigualdad debe resolverse numéricamente para cada θ_o , dando el intervalo de radios que será relevante para la sombra. Si $\theta_o = \pi/2$, ya se vio que el intervalo comprende toda la región de fotones $r_+ \leq r \leq r_-$; a medida que el observador se aleja del plano ecuatorial este intervalo se reduce, y si $\theta_o = 0$ ó $\theta_o = \pi$ queda un único valor de r , aquel cuya órbita tiene $p_\varphi(r) = 0$. En la Figura 2.17 se muestra cómo la sombra depende de la inclinación del observador. La asimetría es máxima para un observador ecuatorial, ya que éste es el que observa el máximo rango de órbitas esféricas. Observadores más cerca de los polos ven un intervalo menor de órbitas, y por lo tanto una sombra más circular.

2.7. Observables

Para estudiar las propiedades de la sombra de manera más eficiente en contextos astrofísicos, se pueden definir tres cantidades observables que se calculan a partir de un dado contorno: el área, la deformación y la posición del centroide

[59]. La ventaja de hacer esto es que a la hora de considerar métricas más generales que la de Kerr los observables se pueden graficar en función de los distintos parámetros de la métrica, permitiendo cubrir mejor el espacio de parámetros y visualizar más directamente cómo la forma de la sombra depende de ellos.

Hay otras propuestas de conjuntos de observables en la literatura [88-91]; los tres que se eligen aquí tienen una interpretación geométrica sencilla, lo cual permite conectarlos más directamente con las propiedades de la sombra [59]. La primera cantidad a definir es simplemente el área de la sombra, dada por

$$A = 2 \int \beta d\alpha = 2 \int_{r_+}^{r_-} \beta(r) |\alpha'(r)| dr, \quad (2.111)$$

donde el factor de 2 proviene de que la integral por sí misma incluye sólo la mitad de arriba de la sombra. La siguiente es la deformación, que mide cuánto difiere la sombra con respecto a un círculo, y se define como

$$D = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta}, \quad (2.112)$$

donde $\Delta\alpha$ y $\Delta\beta$ son las extensiones de la sombra en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. Esta cantidad es igual a 1 para un círculo, así como para cualquier figura cuyos diámetros horizontal y vertical sean iguales; para la sombra de Kerr es menor a 1, ya que la misma está aplastada horizontalmente. Por último, la posición horizontal del centroide o centro de masa de la sombra está dada por

$$\alpha_c = \frac{2}{A} \int \alpha\beta d\alpha. \quad (2.113)$$

La misma es importante ya que las sombras de agujeros negros rotantes suelen estar, además de deformadas, desplazadas del eje óptico ubicado en $\alpha = 0$.

Capítulo 3

Sombras de agujeros negros rodeados de un fluido ideal anisótropo

En este capítulo se estudia la sombra de una clase de agujeros negros en relatividad general rodeados por un fluido ideal. Luego de explorar posibles razones para considerar este tipo de sistemas, se presentará la métrica correspondiente a estos agujeros negros y se seguirá el procedimiento descrito previamente para encontrar una expresión analítica para el contorno de la sombra. Teniendo el mismo, se analizan las propiedades observables de la sombra en función de los distintos parámetros de la métrica.

3.1. Agujeros negros estáticos en presencia de un fluido anisótropo

Encontrar soluciones de las ecuaciones de Einstein acopladas a un fluido ideal gravitante es un problema ampliamente estudiado en el contexto de modelos de estructura estelar [1]. En el caso más sencillo, se propone una métrica con simetría esférica

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.1)$$

junto con un tensor de energía-momento de la forma

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

describiendo un fluido con densidad de energía ε , presión p y cuadrivelocidad u^μ ; el modelo físico del fluido también debe proveer una ecuación de estado

$p(\varepsilon)$. Para buscar soluciones estáticas, se toma una cuadrivelocidad $\mathbf{u} \propto \partial_t$; reemplazando en las ecuaciones de Einstein, se llega a la conocida ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [1]

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\varepsilon + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (3.3)$$

donde la función de masa $m(r)$ se define como

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \varepsilon(r') dr'. \quad (3.4)$$

Esta ecuación puede resolverse analítica o numéricamente, dependiendo de la ecuación de estado supuesta.

Para los propósitos de este trabajo, el problema que tiene este modelo es que la mayoría de las soluciones estáticas no representan agujeros negros. Por ejemplo, el (poco realista) caso de una esfera de radio R y masa M con densidad uniforme sólo admite soluciones si $R > (9/8)2M$ [1]; para radios más chicos la solución no existe ya que la materia colapsa por su propia gravedad. Radios mayores que éste sí admiten soluciones estáticas pero la métrica no posee un horizonte de eventos, de modo que no describe a un agujero negro. Realizando soluciones numéricas con ecuaciones de estado más realistas se llega a la misma situación: un espacio-tiempo sin horizontes y cuyo contenido de materia colapsa si se comprime demasiado. Considerando modelos más exóticos es posible encontrar fluidos en equilibrio alrededor de un agujero negro: en [92] se encuentra que tomando la ecuación de estado $p = -\varepsilon/3$, inspirada en la cosmología, existen soluciones de agujeros negros situados en un universo cerrado con curvatura positiva.

La opción que se tomará para este capítulo, propuesta en [13], es generalizar el fluido a uno anisótropo: permitir que la presión en la dirección radial sea distinta a las presiones en las direcciones angulares. Esta propuesta tiene cierta historia: en los años '70 se empezó a estudiar la estructura estelar con presión anisótropa, a partir de la posibilidad de que las estrellas de neutrones contengan materia con estas propiedades en cierto régimen [93, 94]. En las décadas siguientes ha habido más investigación sobre las posibles causas de la anisotropía [95] y sobre estructuras estelares con distintas ecuaciones de estado: ver, por ejemplo, [96-98]. Matemáticamente, plantear una presión anisótropa requiere la elección de un vector $\mathbf{x} \propto \partial_r$ que identifica la dirección en la que la presión es distinta, de modo que el tensor de energía-momento se escribe como

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p_2)u_\mu u_\nu + (p_1 - p_2)x_\mu x_\nu + p_2 g_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

cuyas componentes en coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) están dadas por

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\varepsilon, p_1, p_2, p_2), \quad (3.6)$$

donde p_1 y p_2 representan la presión en la dirección radial y las direcciones angulares respectivamente, y ε es la densidad de energía. Un ejemplo bien conocido de un medio con estas características es el campo electromagnético correspondiente la solución de Reissner-Nordström, que tiene la forma (3.1) con

$$f(r) = g(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (3.7)$$

donde Q es la carga eléctrica asociada con un campo eléctrico radial. El tensor de energía momento tiene la forma de la Ecuación (3.6), con

$$\varepsilon = \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad p_1 = -\varepsilon, \quad p_2 = \varepsilon. \quad (3.8)$$

En el caso general, la métrica sigue el *ansatz* (3.1) y las ecuaciones de campo están dadas [13] por

$$G^0_0 = \frac{g'}{r} + \frac{g}{r^2} - \frac{1}{r^2} = -8\pi\varepsilon(r), \quad (3.9)$$

$$G^1_1 = \frac{f'g}{rf} + \frac{g}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 8\pi p_1(r), \quad (3.10)$$

$$G^2_2 = \frac{gf''}{2f} + \frac{f'g'}{4f} - \frac{gf'^2}{4f^2} + \frac{gf'}{2rf} + \frac{g'}{2r} = 8\pi p_2(r), \quad (3.11)$$

donde una prima denota la derivada con respecto a r . Generalizando las ecuaciones de estado ya vistas, se puede proponer una relación de proporcionalidad simple entre las presiones y la densidad, con

$$p_i = w_i \varepsilon. \quad (3.12)$$

Fuera del horizonte, donde la coordenada t es temporal y r es espacial, se puede tomar una base ortonormal dada por

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{f}}\partial_t, \quad \mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{g}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{r}\partial_\theta, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi, \quad (3.13)$$

de modo que la densidad de energía es $T_{\mu\nu}e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu = \varepsilon$ y la presión radial es $T_{\mu\nu}e_{(1)}^\mu e_{(1)}^\nu = p_1$, como es esperable. Dentro del horizonte, las funciones f y g cambian de signo y por lo tanto las coordenadas radial y temporal intercambian su rol: los vectores de la base deben tomarse como

$$\mathbf{e}'_{(0)} = -\sqrt{-g}\partial_r, \quad \mathbf{e}'_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{-f}}\partial_t, \quad (3.14)$$

de modo que la densidad de energía es $T_{\mu\nu}e'^{\mu}_{(0)}e'^{\nu}_{(0)} = -p_1$ y la presión radial es $T_{\mu\nu}e'^{\mu}_{(1)}e'^{\nu}_{(1)} = -\varepsilon$ [13]. Para que la presión radial sea continua en el horizonte y la materia se mantenga en equilibrio, es necesario pedir que $p_1 = -\varepsilon$ y por lo tanto $w_1 = -1$.

Tomando entonces la ecuación de estado $p_1 = -\varepsilon$ y $p_2 = w_2\varepsilon$, las dos primeras ecuaciones de Einstein (3.9) implican que $g(r) = f(r)$. La primera ecuación se puede integrar para obtener

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (3.15)$$

donde $m(r)$ se define como en (3.4). Reemplazando esta expresión junto con $g(r) = f(r)$ en la tercera ecuación se obtiene que

$$\frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} = 8\pi w_2 \varepsilon, \quad (3.16)$$

que luego de algunas simplificaciones se puede expresar en términos de $m(r)$ como

$$m''(r) + \frac{2w_2}{r}m'(r) = 0; \quad (3.17)$$

la solución es

$$m(r) = M + \frac{K}{2r^{2w_2-1}}, \quad (3.18)$$

con M y K dos constantes. La densidad queda dada por

$$\varepsilon(r) = \frac{(1 - 2w_2)K}{8\pi r^{2+2w_2}}, \quad (3.19)$$

y la función métrica es

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{K}{r^{2w_2}}. \quad (3.20)$$

Estas fórmulas no son aplicables cuando $w_2 = 1/2$, ya que en ese caso los dos términos en $m(r)$ no son linealmente independientes. La solución correcta se puede escribir como [13]

$$m(r) = M + \frac{r_0}{2} \log \frac{r}{r_0}, \quad (3.21)$$

con r_0 una constante, y se puede redefinir la masa de modo que se obtenga esta expresión en el límite $w_2 \rightarrow 1/2$ de la solución general (3.18). Esto se puede extender al resto del problema, y no se seguirá considerando explícitamente el caso $w_2 = 1/2$.

En el caso general, se ve entonces que la métrica contiene un término adicional respecto a la de Schwarzschild, de modo que su comportamiento depende del

exponente w_2 . Para algunos valores de los parámetros, la misma se reduce a casos conocidos. Por ejemplo, si $w_2 = 1$ y $K < 0$, la solución tiene la forma de la métrica de Reissner-Nordström para un agujero negro con carga eléctrica $Q^2 = -K$. Si $w_2 = -1$, la solución es de tipo de Sitter o anti-de Sitter dependiendo del signo de K . Se ve en el caso general que la métrica sólo es asintóticamente plana si $w_2 > 0$, así que de aquí en adelante sólo se considerará dicho rango¹. Hay más condiciones que se pueden pedir sobre los parámetros: en primer lugar, está claro que para tener una densidad de energía positiva (en un sistema en el que el fluido está en reposo) se debe cumplir que $(1 - 2w_2)K > 0$. Para que la energía total del fluido sea finita es necesario que $w_2 > 1/2$, y la condición de energía dominante es válida si $w_2 \leq 1$ [13, 59]. Sin embargo, estas condiciones no afectan al cálculo de la sombra, que se puede explorar independientemente de las propiedades físicas del fluido que rodea al agujero negro. Por lo tanto, se mantendrá sólo la condición $w_2 > 0$ para tener un espacio-tiempo asintóticamente plano, permitiendo cualquier valor positivo de w_2 y cualquier signo de K .

Una generalización sencilla que se considerará es agregarle una carga eléctrica al agujero negro. Como se dijo antes, un campo eléctrico estático tiene la forma de un fluido ideal con $w_1 = -1$ y $w_2 = 1$; se puede demostrar [14, 99] que al tener la superposición de estos dos medios, la función métrica $f(r)$ resulta ser

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{K}{r^{2w_2}} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (3.22)$$

El último término es claramente no negativo para cualquier valor de Q . Sin embargo, hay teorías de gravedad modificada en las que aparece un término que va como $1/r^2$ con signo arbitrario: un ejemplo conocido son los agujeros negros en mundos brana [15, 23, 24, 100], en los que los efectos gravitatorios de las dimensiones extra se manifiestan en la llamada carga tidal, análoga a la carga eléctrica pero permitiendo que Q^2 aparezca con signo negativo. Es simple incluir estos modelos si se reemplaza la carga al cuadrado Q^2 por una carga tidal q de signo arbitrario, de manera que la función métrica se escribe como

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{K}{r^{2w_2}} + \frac{q}{r^2}. \quad (3.23)$$

Cuando $K = 0$, la métrica se puede denominar de tipo Reissner-Nordström: si $q > 0$ representa un agujero negro cargado, con $q = Q^2$, mientras que si $q < 0$ la forma funcional es la misma pero esta interpretación física no es posible.

Como último cambio notacional, el parámetro w_2 se llamará simplemente w , ya que w_1 está fijo. El resultado de esta sección es entonces que la métrica de un

¹Las métricas no asintóticamente planas son relevantes para el estudio de agujeros negros a distancias cosmológicas.

agujero negro no rotante, rodeado del fluido anisótropo y con una carga tidal q , está dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.24)$$

donde

$$m(r) = M + \frac{K}{2r^{2w-1}} - \frac{q}{2r}. \quad (3.25)$$

La constante K , que tiene unidades de masa (o longitud) elevada a la $2w$ -ésima potencia, parametriza la masa del fluido que rodea al agujero negro. Se ve que la métrica posee una gran generalidad, ya que considerando distintos valores de w se puede obtener una dependencia con r de exponente arbitrario; la misma clase de métricas se puede encontrar como solución de distintas teorías [99, 101, 102], con distintas interpretaciones de los parámetros.

3.2. Agujeros negros rotantes

Resolver las ecuaciones de Einstein en ausencia de simetría esférica—como es el caso para sistemas que rotan sobre un eje y sólo tienen simetría axial—es en general un problema mucho más difícil, y sólo se conocen soluciones exactas en algunos casos particulares. Históricamente, luego de encontrada la solución de Kerr se descubrió que la misma se puede obtener a partir de la métrica de Schwarzschild a través de un procedimiento hoy llamado el algoritmo de Newman-Janis [54]. Ya que este algoritmo se puede generalizar para aplicarse a cualquier métrica con simetría esférica y que será la base para todas las geometrías analizadas en esta tesis, se comenzará una breve descripción de cómo se puede usar para obtener la métrica de Kerr a partir de la de Schwarzschild.

3.2.1. Algoritmo de Newman-Janis

La métrica de Schwarzschild es de la forma

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + h(r) d\Omega^2, \quad (3.26)$$

con $f(r) = 1 - 2M/r$ y $h(r) = r^2$. El algoritmo comienza con el cambio de variables

$$u = t - r - 2M \log(r - 2M) \quad (3.27)$$

para pasar al sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein, en el cual resulta

$$ds^2 = -f(r) du^2 - 2 du dr + h(r) d\Omega^2. \quad (3.28)$$

Luego se expresa a la métrica en términos de una tétrada nula, siguiendo el formalismo de Newman-Penrose [42, 103]. La misma está dada por cuatro vectores $\{l, n, m, \bar{m}\}$ nulos y linealmente independientes, donde $\bar{m}$ es el complejo conjugado de m , cumpliendo las condiciones

$$l \cdot l = n \cdot n = m \cdot m = 0, \quad (3.29)$$

$$l \cdot n = -1, \quad (3.30)$$

$$m \cdot \bar{m} = 1, \quad (3.31)$$

de manera que se puede escribir

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - n^\mu l^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu. \quad (3.32)$$

La tétrada no está únicamente determinada por estas condiciones; la elección de Newman y Janis es

$$l = \partial_r, \quad (3.33)$$

$$n = \partial_u - \frac{1}{2}f(r)\partial_r, \quad (3.34)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2h(r)}} \left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right). \quad (3.35)$$

Para el siguiente paso se quiere realizar un cambio de coordenadas complejo definiendo

$$r' = r + ia \cos \theta, \quad (3.36)$$

$$u' = u - ia \cos \theta, \quad (3.37)$$

$$\theta' = \theta, \quad (3.38)$$

$$\varphi' = \varphi, \quad (3.39)$$

donde a es un parámetro con unidades de longitud. La intención es luego restringirse a valores reales de r' y u' , de modo que r y u se extienden a valores complejos. Sin embargo, este cambio todavía no se puede aplicar a la tétrada. Esto es porque si en la función $f(r)$ se reemplaza $r = r' - ia \cos \theta'$, cuando las coordenadas x'^μ tomen valores reales (y por lo tanto las x^μ sean complejas), esta función será compleja, y también lo será compleja la métrica. Para que ésta sea real luego del cambio de coordenadas, primero hay que extender sus componentes (o las de la tétrada) a funciones de r que sean reales para todo r complejo. Por lo

tanto, antes de hacer el cambio de coordenadas se redefine la tétrada

$$l = \partial_r, \quad (3.40)$$

$$n = \partial_u - \frac{1}{2}\tilde{f}(r)\partial_r, \quad (3.41)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{h}(r)}}\left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\right), \quad (3.42)$$

donde las funciones $\tilde{f}(r)$ y $\tilde{h}(r)$ deben reducirse a $f(r)$ y $h(r)$ cuando r es real, y $\tilde{f}(r)$ debe ser real para todo r complejo². Este paso contiene una gran arbitrariedad, ya que no hay una manera única de generalizar las funciones al dominio complejo. La elección de Newman y Janis fue tomar

$$\tilde{f}(r) = 1 - M\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right), \quad \tilde{h}(r) = \bar{r}^2, \quad (3.43)$$

pero no se dio una justificación de por qué ésta es la forma particular elegida. La arbitrariedad es incluso más clara cuando el algoritmo se usa para obtener la métrica de Kerr-Newman a partir de la solución de Reissner-Nordström para un agujero negro cargado, ya que allí la función f está dada por $f(r) = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$, y los dos términos dependientes de r se transforman de manera distinta [55]. Diversos trabajos han explorado esta arbitrariedad, y buscado maneras de explicarla o eliminarla [56, 104, 105]. Una versión modificada del algoritmo que será relevante en el Capítulo 5 propone quitar esta ambigüedad, a cambio de dejar una función indeterminada en la métrica resultante [56, 106].

Teniendo ahora la tétrada complejificada, se puede realizar el cambio de coordenadas (3.36)-(3.39). En estas nuevas coordenadas la tétrada resulta

$$l = \partial_{r'}, \quad (3.44)$$

$$n = \partial_{u'} - \frac{1}{2}\tilde{f}(r)\partial_{r'}, \quad (3.45)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{h}(r)}}\left(ia\sin\theta'(\partial_{u'} - \partial_{r'}) + \partial_{\theta'} + \frac{i}{\sin\theta'}\partial_{\varphi'}\right), \quad (3.46)$$

donde $r = r' - ia\cos\theta'$ dentro de las expresiones $\tilde{f}(r)$ y $\tilde{h}(r)$. Tomando la elección (3.43) para estas funciones y quitándole las primas a las coordenadas,

²Como $\tilde{h}$ siempre aparece multiplicada por su conjugada en la métrica, no es necesario que sea real.

la tétrada es explícitamente

$$l = \partial_r, \quad (3.47)$$

$$n = \partial_u - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \partial_r, \quad (3.48)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta (\partial_u - \partial_r) + \partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right). \quad (3.49)$$

La métrica se puede reconstruir a partir de la tétrada en estas nuevas coordenadas usando la expresión (3.32), y resulta ser la métrica de Kerr en coordenadas de Eddington-Finkelstein [107]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\tilde{f} du^2 + 2 du dr + \rho^2 d\theta^2 + \Sigma \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ & + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} du d\varphi + 2a \sin^2 \theta dr d\varphi. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, el cambio a las coordenadas de Boyer-Lindquist $\{t, r, \theta, \phi\}$ está dado por

$$t = u - \int \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad (3.51)$$

$$\phi = \varphi - \int \frac{a}{\Delta} dr, \quad (3.52)$$

con el cual se recupera la métrica de Kerr en la forma (2.32).

A la hora de generalizar el algoritmo de Newman-Janis a otras métricas, se encuentran algunos problemas. Luego de ser propuesto, fue usado exitosamente para producir la métrica de Kerr-Newman [55], pero el algoritmo no especifica cómo encontrar el campo electromagnético correspondiente al agujero negro rotante, que en el trabajo original fue obtenido integrando las ecuaciones de Maxwell. Existen propuestas de extensiones del algoritmo que transforman otros campos que haya presentes además de la métrica; ver por ejemplo [108] o [109]. Además, como ya se mencionó, la extensión de la métrica a las coordenadas complejas debe ser elegida arbitrariamente, y no se da ninguna justificación de por qué la métrica rotante debería ser solución de las mismas ecuaciones de campo que la original; en el caso de Kerr-Newman esto tuvo que ser comprobado manualmente. Tampoco hay garantías de que sea posible realizar la última transformación a coordenadas de Boyer-Lindquist, en las que $g_{t\phi}$ es la única componente fuera de la diagonal [110]. Hay algunos resultados sobre la aplicación del algoritmo a métricas que no sean la de Schwarzschild o Reissner-Nordström: se sabe que en la relatividad general el algoritmo no puede dar lugar a espacio-tiempos con

un fluido perfecto que no sea el vacío [104], y hay varios ejemplos mostrando que en teorías de gravedad modificada la métrica generada por el algoritmo no es solución de las ecuaciones de campo originales [107, 111], y requiere la modificación de las mismas o el agregado de algún contenido extra de materia. En la práctica, esto dificulta la interpretación física de las métricas producidas por el algoritmo y de su contenido de materia, pero no representa un problema para el análisis de las geodésicas del espacio-tiempo, o en particular para el cálculo de la sombra. En todos los casos considerados en este trabajo, la métrica representa sin duda un agujero negro rotante, aunque no sea trivial encontrar la teoría de la cual la misma sea solución.

3.2.2. Métrica del agujero negro rotante

Teniendo la solución estática (3.24) para un agujero negro rodeado de un fluido anisótropo, en [14] se aplica el algoritmo de Newman-Janis para llegar a una métrica que represente a un agujero negro rotante. La complejificación elegida está dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q}{r^2} - \frac{K}{r^{2w}} \rightarrow F(r, \theta) = 1 - \frac{2Mr - q + Kr^{2(1-w)}}{\rho^2}, \quad (3.53)$$

con $\rho^2 = r^2 + \cos^2 \theta$. El término dependiente de K se complejifica de manera que comparta el denominador ρ^2 de los otros dos términos, lo cual coincide con la elección tomada en otras referencias [49, 56, 58]; se la puede pensar como la complejificación

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} \rightarrow \tilde{f}(r) = 1 - m\left(\frac{r + \bar{r}}{2}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right) \quad (3.54)$$

seguida del cambio de coordenadas

$$F(r, \theta) = \tilde{f}(r - ia \cos \theta) = 1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2}, \quad (3.55)$$

manteniendo la misma función de masa $m(r)$. Realizando el cambio a coordenadas de Boyer-Lindquist, la métrica resulta ser

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4am(r)r}{\rho^2} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (3.56)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2m(r)r + a^2, \quad (3.57)$$

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (3.58)$$

Se puede observar que la forma de la métrica es idéntica a la de Kerr, con la masa constante M reemplazada por la función $m(r)$.

El tensor de Einstein tiene una expresión complicada [14] que no es relevante en lo que sigue, de modo que no será incluida aquí. Lo que sí es importante notar es que la única componente no diagonal del mismo es $G_{t\varphi}$. Esto implica que la tétrada que diagonaliza el tensor de energía momento mezclará los vectores ∂_t y ∂_φ entre sí, pero no con ∂_r ó ∂_θ : heurísticamente, como el vector temporal $\mathbf{e}_{(0)}$ de la tétrada tiene componentes t y φ , el contenido de materia se puede interpretar como un fluido que rota alrededor del agujero negro en la dirección azimutal. La densidad de energía y las presiones, definidas como las componentes del tensor de energía-momento en la base en la que el mismo es diagonal, tienen expresiones relativamente sencillas:

$$\varepsilon = \frac{q + (1 - 2w)Kr^{2(1-w)}}{8\pi\rho^4}, \quad (3.59)$$

$$p_1 = -\varepsilon, \quad (3.60)$$

$$p_2 = \frac{q}{8\pi\rho^4} + \left(w + (w - 1) \frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^2} \right) \frac{(1 - 2w)Kr^{2(1-2)}}{8\pi\rho^4}. \quad (3.61)$$

Es claro que el contenido de materia no tiene la misma ecuación de estado $p_2 = w\varepsilon$ que en el caso estático.

Para poder interpretar esta métrica como la correspondiente a un agujero negro, es necesario mostrar la existencia de un horizonte de eventos. El mismo, siendo una superficie nula, se encontrará donde $g^{rr} = 0$ y por lo tanto $\Delta = 0$ [14]. Esta función tiene la forma

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 + q - Kr^{2(1-w)} \\ &\equiv \Delta_{KN} - Kr^{2(1-w)}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde $\Delta_{KN} = r^2 - 2Mr + a^2 + q$ es la forma funcional de Δ en un espacio-tiempo de tipo Kerr-Newman. Por supuesto, si $K = 0$ la métrica se reduce a la de tipo Kerr-Newman: existe un par de horizontes si $a^2 + q < M^2$, y una singularidad desnuda en el caso opuesto. Es importante notar que si q es negativo entonces es posible tener un agujero negro con $a > M$, cosa que no puede ocurrir en el caso Kerr-Newman ordinario con $q = Q^2$.

En el caso general con $K \neq 0$, el objetivo es encontrar para qué valores de los parámetros existirá al menos una raíz de Δ y por lo tanto un horizonte de eventos. La ecuación $\Delta = 0$ no tiene solución analítica excepto que w tome algunos valores especiales, por lo que es necesario un análisis indirecto. La desaparición de un

horizonte corresponde a una raíz doble de Δ , dada por el par de ecuaciones

$$r^2 - 2Mr + a^2 + q - Kr^{2(1-w)} = 0, \quad (3.63)$$

$$2(r - M) - 2(1 - w)Kr^{1-2w} = 0. \quad (3.64)$$

En general este sistema no se puede resolver para r , pero es sencillo encontrar w y K en forma paramétrica en función de r , dejando fijos los otros parámetros. Usando que la primera ecuación implica $K = \Delta_{KN}r^{2(w-1)}$, se puede reemplazar en la segunda ecuación para llegar a [59]

$$w = \frac{a^2 + q - Mr}{\Delta_{KN}}, \quad (3.65)$$

$$K = \Delta_{KN}r^{-2r(r-M)/\Delta_{KN}}. \quad (3.66)$$

Estas dos ecuaciones dicen, para cada valor de r , los valores necesarios de w y K para que en ese radio haya un horizonte extremal. Graficando las mismas en el plano w - K para valores fijos de M , a y q , se puede ver la separación entre la región del espacio de parámetros que contiene al menos un horizonte y la que contiene una singularidad desnuda; en particular, las expresiones dependen sólo de la combinación $a^2 + q$ y no de ambos parámetros por separado. Un detalle que hay que tener en cuenta es que como K tiene unidades de longitud a la $2w$ -ésima potencia, se debe tener cierto cuidado al interpretar un gráfico de K vs. w : valores de K con distintos w no se pueden comparar directamente. En la Figura 3.1 se muestran las curvas de separación, adimensionalizadas tomando $M = 1$; esto es equivalente a definir un parámetro adimensional $\tilde{K} = KM^{-2w}$. Estrictamente, los gráficos son más complejos de lo que se muestra en la figura ya que en algunas regiones pueden aparecer y desaparecer horizontes interiores adicionales. Estos horizontes no son relevantes para lo que ocurre en el exterior del agujero negro, de modo que no se han incluido: las regiones permitidas son aquellas donde existe al menos un horizonte.

3.3. Separación de variables y cálculo de la sombra

Dada la similitud de la métrica (3.56) con la métrica de Kerr, el procedimiento para encontrar las geodésicas nulas es esencialmente el mismo que el descrito en el Capítulo 2. En la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.67)$$

se propone un *ansatz* de separación

$$S = -\omega_0 t + p_\varphi \varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \quad (3.68)$$

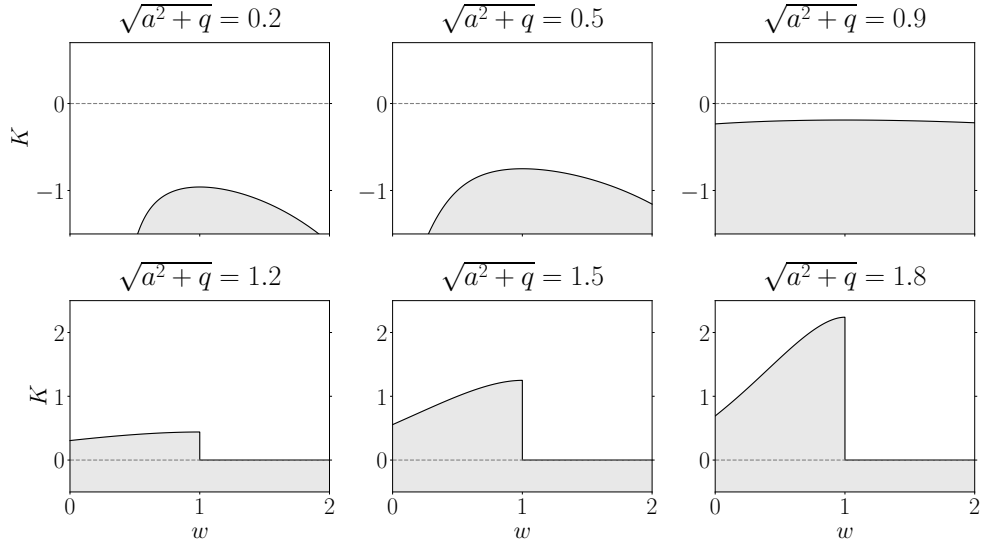


Figura 3.1: Valores permitidos de w y K [59]. Las curvas de traza continua muestran valores de los parámetros para los que el horizonte de eventos desaparece; en las regiones sombreadas, el espacio-tiempo contiene una singularidad desnuda. Como se menciona en el texto, se toma $M = 1$, de manera que K , a y q son adimensionales.

para obtener la igualdad

$$-\frac{\Sigma}{\rho^2 \Delta} \omega_0^2 + \frac{4m(r)ar}{\rho^2 \Delta} \omega_0 p_\varphi + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} p_\varphi^2 + \frac{\Delta}{\rho^2} (S'_r)^2 + \frac{1}{\rho^2} (S'_\theta)^2 = 0. \quad (3.69)$$

Simplificando un poco, ésta se puede reescribir en la forma

$$-\Delta (S'_r)^2 + \frac{(\omega_0(r^2 + a^2) - a p_\varphi)^2}{\Delta} = (S'_\theta)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\sin \theta} - a \omega_0 \sin \theta \right)^2, \quad (3.70)$$

donde se ve explícitamente que el lado izquierdo es sólo función de r y el lado derecho sólo función de θ ; por lo tanto, ambos lados deben ser iguales a una constante $\mathcal{K}$. Las ecuaciones de movimiento se pueden llevar a primer orden

usando que $dx^\mu/d\lambda = g^{\mu\nu}p_\nu$ y que $p_\mu = \partial S/\partial x^\mu$:

$$\rho^2 \dot{t} = \frac{1}{\Delta}(\Sigma\omega_0 - 2am(r)rp_\varphi), \quad (3.71)$$

$$\rho^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} p_\varphi + 2am(r)r\omega_0 \right), \quad (3.72)$$

$$(\rho^2 \dot{r})^2 = \mathcal{R}(r), \quad (3.73)$$

$$(\rho^2 \dot{\theta})^2 = \Theta(\theta). \quad (3.74)$$

Definiendo la constante

$$Q = \mathcal{K} - (a\omega_0 - p_\varphi)^2 \quad (3.75)$$

los potenciales tienen la misma forma que para la métrica de Kerr:

$$\mathcal{R}(r) = [(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi]^2 - \Delta(Q + (a\omega_0 - p_\varphi)^2), \quad (3.76)$$

$$\Theta(\theta) = Q - \cos^2 \theta \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \omega_0^2 \right), \quad (3.77)$$

siendo la única diferencia que la expresión de Δ contiene a la función $m(r)$ en lugar de la masa M ; esta diferencia sólo afecta al potencial radial, mientras que el angular es idéntico al caso de Kerr.

Teniendo el potencial radial, se pueden buscar los valores de r que cumplen $\mathcal{R}(r) = \mathcal{R}'(r) = 0$ para encontrar las órbitas esféricas de fotones. A diferencia de la métrica de Kerr, al derivar el potencial aparecen derivadas de $m(r)$. De la ecuación $\mathcal{R}(r) = 0$, se obtiene la constante de Carter

$$Q = \frac{[(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi]^2}{\Delta} - (a\omega_0 - p_\varphi)^2; \quad (3.78)$$

reemplazando esta expresión en la derivada de $\mathcal{R}(r)$ se llega a

$$\mathcal{R}'(r) = 4\omega_0 r [(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi] - \frac{\Delta'}{\Delta} [(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi]^2 = 0, \quad (3.79)$$

donde

$$\Delta' = 2[r - m'(r)r - m(r)] = 2(r - M) - 2(w - 1)\frac{K}{r^{2w-3}}. \quad (3.80)$$

La ecuación $\mathcal{R}'(r) = 0$ es cuadrática en p_φ y tiene dos soluciones

$$p_\varphi = \frac{r^2 + a^2}{a} \omega_0 \quad (3.81)$$

y

$$p_\varphi = \frac{\omega_0 [(r^2 + a^2)\Delta' - 4r\Delta]}{a\Delta'}. \quad (3.82)$$

Al igual que lo que ocurre en la métrica de Kerr, la primera solución corresponde a $Q = -\omega_0^2 r^4 / a^2 < 0$ y por lo tanto no es una trayectoria permitida por la ecuación de movimiento angular (ver Ecuación (2.88)). Las constantes de movimiento de las órbitas esféricas son entonces las dadas por la segunda solución (3.82) junto con

$$Q = \frac{\omega_0^2 r^2}{a^2 \Delta'^2} [16a^2 \Delta - (r\Delta' - 4\Delta)^2]. \quad (3.83)$$

La geometría es asintóticamente plana, así que las coordenadas celestes vistas por un observador en (r_o, θ_o) son las definidas en el Capítulo 2, en las Ecuaciones (2.105) y (2.106). Con estas expresiones se puede graficar la sombra del agujero negro, reemplazando las expresiones (3.82) y (3.83) para las constantes de movimiento y realizando un gráfico paramétrico en el que r recorre el intervalo donde β es positivo. En la Figura 3.2 se muestran contornos de la sombra para algunos valores de los parámetros. Se puede ver inmediatamente que las sombras muestran la asimetría característica causada por la rotación del agujero negro; este y otros efectos se ven más claramente cuando el observador es ecuatorial y el spin es grande, de modo que los gráficos usan $\theta_o = \pi/2$ y $a/M = 0.9$. Como ya mostró la Figura 3.1, si $K > 0$ es posible tener un spin arbitrariamente grande, no limitado por la condición $a^2 \leq M^2$; pero como esto no se ha observado en agujeros negros astrofísicos [112], no se incluirá en el análisis. Los valores $w = 0.25$ y $w = 2$ se han elegido para ser generalmente representativos de las regiones $w < 1$ y $w > 1$, recordando que si $w = 1$ la métrica se reduce a la de Kerr-Newman. En la Figura 3.3 se repite el análisis de horizontes, esta vez fijando tres valores de w y buscando la relación entre K y q que delimite la región donde existe un horizonte de eventos. Se puede ver que si K es muy negativo (menor que aproximadamente -0.2), entonces no está permitido tener $q = 0$; para que este valor esté incluido en el intervalo analizado, los gráficos usan $K = -0.15$ como representante de la región $K < 0$.

3.4. Observables

El estudio de los tres observables definidos en la Sección 2.6, dados por las Ecuaciones (2.111)-(2.113) permite cubrir mejor el espacio de parámetros y entender cómo cambian las propiedades de la sombra. A lo largo de esta sección, se toman tres valores del spin ($a/M \in \{0.2, 0.5, 0.9\}$), tres valores del parámetro de anisotropía ($w \in \{0.25, 0.75, 2\}$) y tres valores de K ($K = 1$, $K = 0$ y un valor

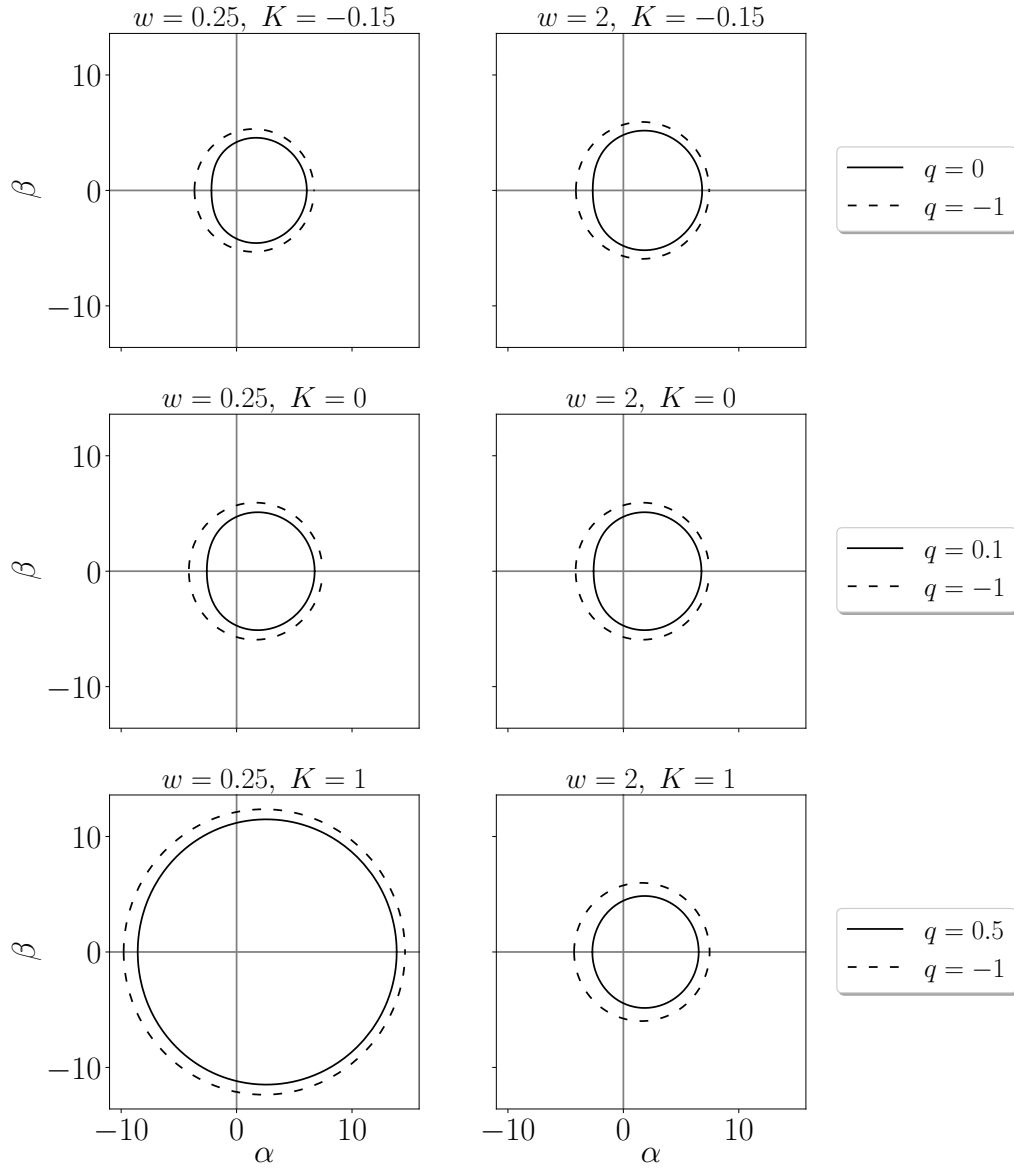


Figura 3.2: Sombra de un agujero negro con $a = 0.9$ para distintos valores de los parámetros, vistas por un observador ecuatorial con $\theta_o = \pi/2$. Los parámetros están adimensionalizados con $M = 1$.

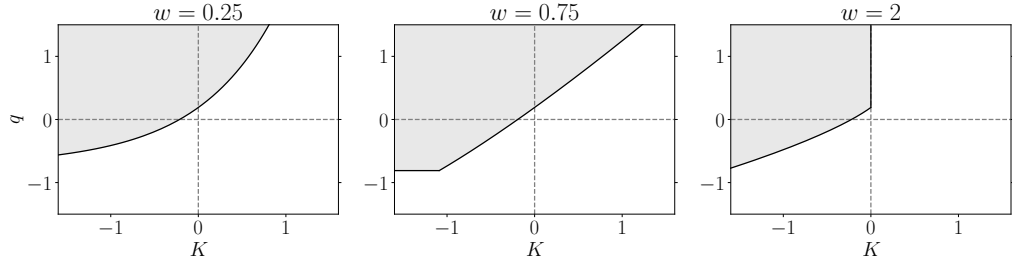


Figura 3.3: Valores permitidos de K y q para tres valores de w y $a = 0.9$; las regiones sombreadas contienen una singularidad desnuda. Al igual que en la Figura 3.1, se toma $M = 1$.

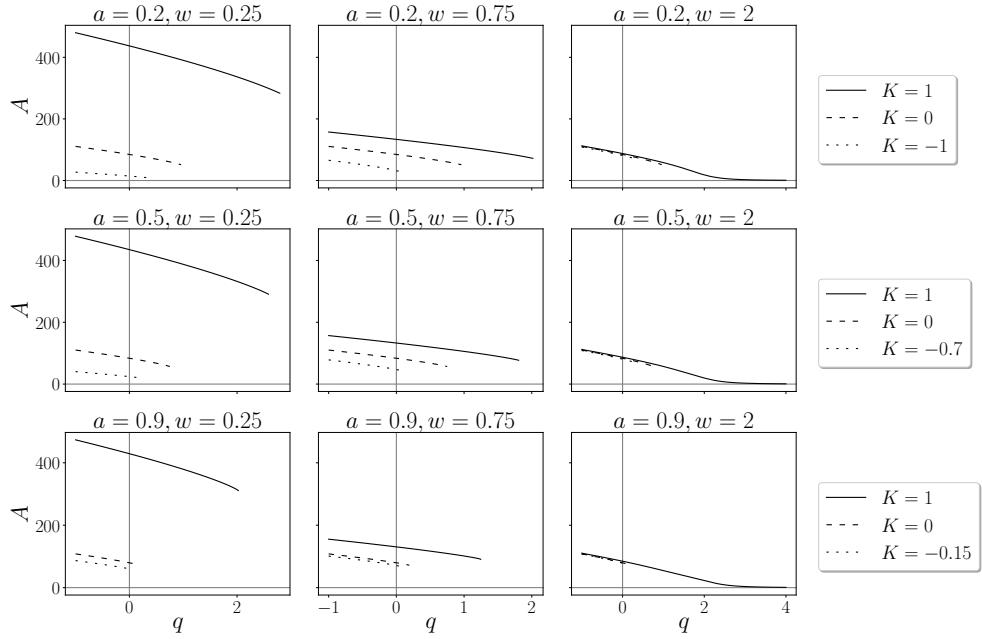


Figura 3.4: El área de la sombra del agujero negro para diversas combinaciones de los parámetros. Como en los otros gráficos, todas las cantidades son adimensionales tomando $M = 1$.

negativo cercano al mínimo posible en cada caso), y se grafican los observables en función de q para cada combinación de parámetros.

En la Figura 3.4 se muestra la dependencia del área con los parámetros. Es inmediato ver que el área disminuye con q , generalizando el comportamiento del agujero negro de Kerr-Newman; análogamente, el área crece con K , lo cual es razonable ya que q y K aparecen con signos opuestos en la métrica y por lo tanto es esperable que produzcan efectos opuestos. La curva con $K = 0$ es, por

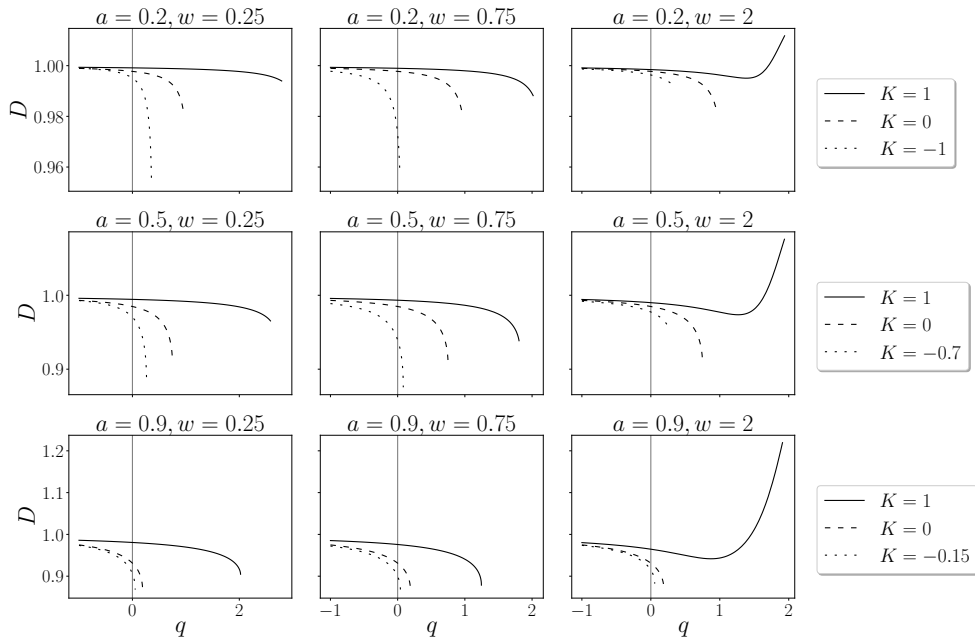


Figura 3.5: La deformación de la sombra del agujero negro para diversas combinaciones de los parámetros. Como en los otros gráficos, todas las cantidades son adimensionales tomando $M = 1$.

supuesto, independiente de w , ya que es la correspondiente al agujero negro de Kerr-Newman. También hay que recordar que las unidades de K dependen de w , por lo que no se pueden comparar directamente valores de K entre distintas columnas del gráfico a menos que se elija una manera de adimensionalizar. El caso $w > 1$ y $K > 0$ es interesante ya que no hay cota superior para q ; la carga puede volverse arbitrariamente grande, reduciendo el tamaño del horizonte y junto con él la sombra, de manera que el área rápidamente se acerca a cero.

En la Figura 3.5 se muestra el observable relacionado con la deformación de la sombra. En este caso, la dependencia con los parámetros es más débil; salvo en el caso $\{w = 2, K = 1\}$ en que la carga puede aumentar sin límite, la desviación de la circularidad no excede al 10 %. En general, cuando K disminuye hacia valores negativos la deformación disminuye y la sombra se vuelve más comprimida horizontalmente; un K positivo hace que la sombra tienda a la circularidad. La excepción es el caso $w > 1$ y $K > 0$, donde para $q > 1$ el comportamiento se invierte y la sombra se empieza a volver estirada horizontalmente en lugar de comprimida.

Por último, en la Figura 3.6 se muestra la posición del centroide de la sombra. Aquí hay un cambio de comportamiento: para $w = 0.25$, valores más grandes de

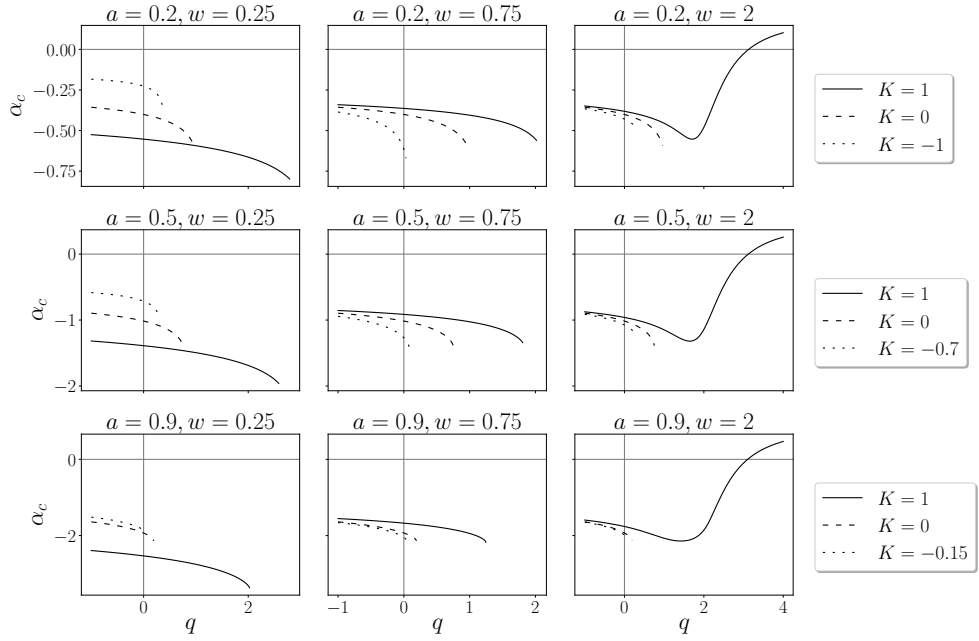


Figura 3.6: El centroide de la sombra del agujero negro para diversas combinaciones de los parámetros. Como en los otros gráficos, todas las cantidades son adimensionales tomando $M = 1$.

K producen una sombra más alejada del eje óptico hacia la izquierda, mientras que para valores mayores de w la dependencia se invierte. Analizando casos intermedios se puede ver que el cambio es gradual: no ocurre en un valor puntual de w , sino que a medida que w se acerca a $1/2$ las curvas de α_c en función de q se empiezan a cruzar entre sí, y cuando $w = 1/2$ las tres curvas se cruzan en $q = 0$; luego, los puntos de cruce se siguen desplazando hacia q negativo. Al igual que para la deformación, en la columna de la derecha se ve el cambio de comportamiento cuando q toma valores grandes, resultando en una sombra que se desplaza hacia el lado opuesto.

3.5. Discusión

La presencia del fluido anisótropo agrega a la métrica un término de forma análoga al de la carga tidal q y con signo opuesto. El resultado encontrado es el esperable, dado este parecido: el efecto del fluido sobre las propiedades de la sombra es similar y opuesto al que produce la carga. Concretamente, se observa que en todos los casos analizados un valor mayor de K lleva a una sombra

más grande y más circular, mientras que la posición de la misma tiene distintos comportamientos dependiendo del valor de w . Cuando $w > 1$ y $K > 0$, la métrica permite—a diferencia del agujero negro de Kerr-Newman—valores de la carga arbitrariamente grandes, que dan lugar a una sombra estirada horizontalmente y desplazada en la dirección opuesta al resto de los casos.

Otra característica notable de este modelo es que si $K > 0$ es posible tener valores arbitrariamente grandes no sólo de la carga sino también del momento angular del agujero negro; una observación de una violación de la cota Kerr para a/M podría ser evidencia a favor de una métrica como la considerada en este capítulo. Si $w > 1$, el momento angular puede aumentar sin límite sin importar el valor (positivo) de K . Si $w < 1$, para cada valor de K hay una cota superior para a , pero esta cota puede hacerse arbitrariamente grande aumentando K .

Capítulo 4

Sombras de agujeros negros rodeados de un plasma

En este capítulo, el estudio de las sombras se extiende al caso de agujeros negros rotantes rodeados por un fluido en estado de plasma. A diferencia del capítulo anterior no se considera el efecto gravitatorio del medio, tomándose como despreciable, sino que el enfoque está en cómo las trayectorias de la luz se desvían por su interacción con el plasma. Esta interacción depende de la frecuencia de la luz; en particular, existe una frecuencia de corte debajo de la cual las ondas no se pueden propagar en el medio.

4.1. Propagación de la luz a través de un plasma en un espacio-tiempo curvo

Las ecuaciones que rigen el movimiento de la luz en un plasma se pueden proponer heurísticamente generalizando la descripción clásica [75, 76]. En un medio isótropo, el movimiento de la luz está caracterizado por el índice de refracción

$$n(x, p) = \frac{1}{v(x, p)}, \quad (4.1)$$

que en cada punto es la inversa de la velocidad local de la luz $v(x, p)$, medida en el sistema en que el medio está en reposo. Si la cuadrivelocidad del plasma está dada por $U^\mu(x)$ con $U_\mu U^\mu = -1$, entonces en este sistema el cuadrimpulso de la luz se puede descomponer como

$$p^\mu = \omega U^\mu + k^\mu, \quad (4.2)$$

donde $\omega = -p_\mu U^\mu$ es la frecuencia de la luz respecto del medio y el vector espacial

$$k^\mu = p^\mu + (p_\nu U^\nu) U^\mu \quad (4.3)$$

cumple $k_\mu U^\mu = 0$. La velocidad de fase se escribe entonces como $v^2 = \omega^2 / k_\mu k^\mu$, y el índice de refracción resulta

$$n^2(x, p) = \frac{k_\mu k^\mu}{(p_\mu U^\mu)^2} = 1 + \frac{g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu}{(p_\mu U^\mu(x))^2}. \quad (4.4)$$

Esta ecuación es general; el siguiente paso es usar que el índice de refracción de un plasma está dado por [75]

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p(x)^2}{\omega^2}, \quad (4.5)$$

donde como antes $\omega = -p_\mu U^\mu$ es la frecuencia de la luz respecto al medio, y

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2}{m_e} N \quad (4.6)$$

es la frecuencia del plasma, con e la carga del electrón, m_e la masa del electrón y N la densidad numérica de electrones. Se ve explícitamente que un plasma es un medio dispersivo, ya que la velocidad de la luz depende de su frecuencia. Reemplazando esta expresión para n en la ecuación (4.4), se llega a que el cuadrípulo debe cumplir

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -\omega_p^2. \quad (4.7)$$

Se puede proponer entonces que las trayectorias de los fotones son soluciones de las ecuaciones de Hamilton asociadas al Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu + \omega_p(x)^2 \right) \quad (4.8)$$

con $\mathcal{H} = 0$. La cuadrivelocidad U^μ del plasma ha desaparecido; el Hamiltoniano no depende de su movimiento sino sólo de su densidad, a través de ω_p . A pesar de que el índice de refracción es menor a 1, indicando una velocidad de fase superlumínica, es posible demostrar [74] que el transporte de energía de la luz es a lo largo de las curvas integrales de $\mathcal{H}$, que son temporales; alternatively, se puede calcular la velocidad de grupo y comprobar que la misma es menor a 1. El índice de refracción tiende a 1 cuando $\omega/\omega_p \rightarrow \infty$, indicando que en este límite las trayectorias se vuelven libres, y se vuelve imaginario para $\omega < \omega_p$: al igual que en la situación clásica, es imposible la propagación de rayos con frecuencia menor a la del plasma.

El Hamiltoniano (4.8) se puede deducir de manera más rigurosa partiendo de las ecuaciones de Maxwell. El proceso se detalla en [74] para el caso de un plasma frío (es decir, sin presión) y no magnetizado; aquí sólo se comentará brevemente siguiendo a dicha referencia, ya que la deducción no es trivial. La principal dificultad radica en que en un espacio-tiempo curvo no hay una noción general de ondas planas con las que se puedan asociar rayos de luz. Sin embargo, es esperable que se recupere una noción aproximada de las mismas en un límite $\lambda \ll L$, donde λ es la longitud de onda y L es alguna escala de distancia característica de la curvatura; este es el límite de óptica geométrica. Esto motiva definir un parámetro $\alpha = \lambda/L$ y proponer un campo electromagnético de la forma

$$F_{\mu\nu}(x, \alpha) = \text{Re} \left\{ e^{iS(x)/\alpha} f_{\mu\nu}(x, \alpha) \right\}, \quad (4.9)$$

donde la amplitud $f_{\mu\nu}(x, \alpha)$ es una función suave en $\alpha \geq 0$; la función $S(x)$, llamada la *eikonal*, es proporcional a la fase de la onda. A pesar de que esta expresión no tiene un límite cuando $\alpha \rightarrow 0$, es posible demostrar que a medida que α disminuye las funciones $F_{\mu\nu}(x, \alpha)$ se van acercando a soluciones de las ecuaciones de Maxwell, y por lo tanto se pueden interpretar como soluciones aproximadas de tipo onda plana cuando α es suficientemente chico.

Se puede demostrar que la amplitud y la polarización son transportadas a lo largo de las curvas integrales del vector $p_\mu = \partial_\mu S$, lo cual permite interpretar las mismas como rayos de luz, perpendiculares a las superficies de S constante; por lo tanto, para estudiar las trayectorias de la luz es necesario plantear una ecuación para $S(x)$. El modelo usado para esto es el de un fluido de dos componentes, iones y electrones, con presión despreciable. Los iones se asumen estáticos, ya que su masa es mucho mayor que la de los electrones, y se postulan pequeñas perturbaciones del campo electromagnético y de los electrones por encima de un fondo con densidad numérica N . La ecuación de la eikonal a la que se llega es simplemente

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad (4.10)$$

con $\mathcal{H}(x, p)$ el Hamiltoniano presentado en la Ecuación (4.8). Los rayos de luz son las curvas integrales de las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = g^{\mu\nu} p_\nu \quad (4.11)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \partial_\mu g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \frac{1}{2} \partial_\mu \omega_p^2. \quad (4.12)$$

La frecuencia mínima para los rayos de luz se puede encontrar también en este formalismo [76]. En todos los casos que se considerarán en este capítulo, la

métrica tiene la forma

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2, \quad (4.13)$$

con $g_{rr} > 0$, $g_{\theta\theta} > 0$ y $D \equiv (g_{t\varphi})^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi} > 0$ fuera del horizonte. Las componentes de la métrica inversa están dadas por

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{g_{\varphi\varphi}}{D}, & g^{t\varphi} &= \frac{g_{t\varphi}}{D}, & g^{\varphi\varphi} &= -\frac{g_{tt}}{D} \\ g^{rr} &= \frac{1}{g_{rr}}, & g^{\theta\theta} &= \frac{1}{g_{\theta\theta}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

El Hamiltoniano es entonces una forma cuadrática en los impulsos espaciales $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$,

$$2\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{g_{rr}} + \frac{p_\theta^2}{g_{\theta\theta}} - \frac{g_{tt}}{D} p_\varphi^2 - 2\frac{g_{t\varphi}}{D} p_\varphi \omega_0 - \frac{g_{\varphi\varphi}}{D} \omega_0^2 + \omega_p^2, \quad (4.15)$$

que es definida positiva en p_r y p_θ . En un dado punto del espacio-tiempo, los valores de ω_0 para los que pueden existir rayos de luz son aquellos para los que esta forma cuadrática tiene al menos un cero. Hay dos casos a considerar. Si $g_{tt} > 0$, la forma cuadrática tiene signatura mixta, y sin importar los valores de ω_0 y de ω_p será posible encontrar momentos espaciales $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$ que cumplan $\mathcal{H} = 0$. La región fuera del horizonte con $g_{tt} > 0$ es llamada la ergoregión [42]: allí no puede haber observadores estáticos, y necesariamente deben girar con el agujero negro. En el caso en que $g_{tt} < 0$, la forma cuadrática es definida positiva: su valor mínimo debe ser negativo para que sea posible tener $\mathcal{H} = 0$. Derivando con respecto a p_φ e igualando a cero, dicho mínimo está ubicado en $p_\varphi = -(g_{t\varphi}/g_{tt})\omega_0$, y el Hamiltoniano vale

$$2\mathcal{H}_{\min} = \frac{\omega_0^2}{g_{tt}} + \omega_p^2. \quad (4.16)$$

La condición $\mathcal{H}_{\min} \leq 0$ se traduce entonces en

$$\omega_0^2 \geq -g_{tt}\omega_p^2. \quad (4.17)$$

En las regiones exteriores a la ergosfera, donde $g_{tt} < 0$, este es el valor mínimo de ω_0 que puede tomar un rayo de luz; si ω_0 está por debajo, no existen trayectorias de luz en el punto del espacio-tiempo en cuestión, ya que no es posible tener $\mathcal{H} = 0$. Esta expresión también es válida dentro de la ergoregión, donde se cumple trivialmente.

La forma particular de la frecuencia de plasma $\omega_p(x)$ depende del modelo elegido para el material que rodea al agujero negro. Estos modelos requieren, en

su versión más completa, simulaciones de magnetohidrodinámica relativista, y por lo tanto no son fácilmente adaptables al tratamiento analítico de este trabajo [63, 113]. El camino a seguir será buscar formas funcionales para $\omega_p(x)$ que permitan la integración de las ecuaciones de movimiento al igual que en el vacío. Para métricas con simetría esférica la condición es simplemente que la densidad electrónica sea una función $N(r)$ del radio [75]. En el caso de agujeros negros rotantes, pedir la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi lleva a una condición sobre la función $\omega_p(x)$ que se introducirá en la sección siguiente.

4.2. Espacio-tiempos de Gürses-Gürsey

En esta sección se considera una clase de geometrías que generaliza la del capítulo anterior. En su versión no rotante, la métrica tiene la forma de la Ecuación (3.24), donde ahora $m(r)$ es una función arbitraria; en el caso en que la métrica describa a un objeto aislado de masa M , se debe cumplir que $m(r) \rightarrow M$ cuando $r \rightarrow \infty$. Esta clase incluye por supuesto a la solución de Schwarzschild si $m(r) = M$, así como a la de Reissner-Nordström cuando $m(r) = M - Q^2/2r$; ver también [25, 56, 114, 115] y las referencias allí mencionadas. Es un tipo de geometría que aparece frecuentemente en el estudio de agujeros negros regulares, es decir, sin una singularidad central. Es posible demostrar [114] que para que el espacio-tiempo sea regular se debe cumplir que

$$m(0) = m'(0) = m''(0) = 0. \quad (4.18)$$

Dos ejemplos conocidos son el agujero negro de Hayward [25, 27], con

$$m(r) = M \frac{r^3}{r^3 + \ell^3} \quad (4.19)$$

donde ℓ es una constante, y el de Bardeen [25, 26], donde

$$m(r) = M \left(\frac{r^2}{r^2 + \ell^2} \right)^{3/2}. \quad (4.20)$$

Para hallar una versión rotante de esta clase de métricas, se puede aplicar el algoritmo de Newman-Janis como se describió en la Sección 3.2.2 [25, 58]. La función $f(r) = 1 - 2m(r)/r$ se complejifica a

$$\tilde{f}(r) = 1 - m \left(\frac{r + \bar{r}}{2} \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) = 1 - \frac{2m(\text{Re}(r)) \text{Re}(r)}{|r|^2}, \quad (4.21)$$

que luego del cambio de coordenadas complejo y el paso a la forma de Boyer-Lindquist lleva a la métrica [116]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4am(r)r}{\rho^2} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad (4.22)$$

donde ρ , Δ y Σ están respectivamente definidos en las Ecuaciones (2.33), (3.57) y (3.58).

4.3. Separación de variables y cálculo de la sombra

Como se vio en la Sección 4.1, ante la presencia de un medio con frecuencia de plasma $\omega_p(x)$, el movimiento de la luz está determinado por el Hamiltoniano de la Ecuación (4.8). En la ecuación de Hamilton-Jacobi $\mathcal{H}(x, \partial S/\partial x) = 0$ se puede volver a proponer la separación de variables (3.68) para la acción, obteniendo la ecuación

$$-\frac{\Sigma}{\rho^2 \Delta} \omega_0^2 + \frac{4m(r)ar}{\rho^2 \Delta} \omega_0 p_\varphi + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} p_\varphi^2 + \frac{\Delta}{\rho^2} (S'_r)^2 + \frac{1}{\rho^2} (S'_\theta)^2 + \omega_p^2 = 0 \quad (4.23)$$

que se puede reescribir como

$$\Delta (S'_r)^2 - \frac{(\omega_0(r^2 + a^2) - ap_\varphi)^2}{\Delta} + (S'_\theta)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\sin \theta} - a\omega_0 \sin \theta\right)^2 + \rho^2 \omega_p^2 = 0. \quad (4.24)$$

Para que esta ecuación sea separable, se asume primero que la distribución de plasma es axisimétrica, dependiendo sólo de r y θ [76]. Se puede ver entonces que la relación

$$\omega_p^2(r, \theta) = \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{\rho^2} \quad (4.25)$$

es necesaria y suficiente para que la ecuación de Hamilton-Jacobi quede separada en una parte dependiente de r y una parte dependiente de θ ; aquí f_r y f_θ son funciones que dependen sólo de sus respectivas variables¹. De esta manera, la constante de separación resulta

$$\mathcal{K} = (S'_\theta)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\sin \theta} - a\omega_0 \sin \theta\right)^2 + f_\theta(\theta) \quad (4.26)$$

$$= -\Delta (S'_r)^2 + \frac{(\omega_0(r^2 + a^2) - ap_\varphi)^2}{\Delta} + f_r(r). \quad (4.27)$$

¹Es interesante notar que, considerando el caso $a = 0$ para el que la métrica tiene simetría esférica, la condición de separabilidad es $\omega_p^2 = (f_r + f_\theta)/r^2$; es decir, una métrica esféricamente simétrica admite distribuciones de plasma axialmente simétricas para las cuales la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable.

Definiendo como antes la segunda constante de Carter $Q = \mathcal{K} - (a\omega_0 - p_\varphi)^2$, las ecuaciones de movimiento en r y θ pasan a ser

$$\left(\rho^2 \dot{r}\right)^2 = \mathcal{R}(r), \quad (4.28)$$

$$\left(\rho^2 \dot{\theta}\right)^2 = \Theta(\theta), \quad (4.29)$$

con

$$\mathcal{R}(r) = \left[(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi\right]^2 - \Delta\left(Q + (a\omega_0 - p_\varphi)^2\right) - \Delta f_r(r), \quad (4.30)$$

$$\Theta(\theta) = Q - \cos^2 \theta \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \omega_0^2 \right) - f_\theta(\theta). \quad (4.31)$$

El cálculo del contorno de la sombra procede también análogamente al caso del vacío. Las órbitas esféricas de fotones son las raíces dobles del potencial radial, de modo que hay que resolver las ecuaciones $\mathcal{R}(r) = \mathcal{R}'(r) = 0$ para encontrar las constantes de movimiento p_φ y Q expresadas paramétricamente en función de r ; la única diferencia es la presencia del término $-\Delta f_r$ en el potencial. A partir de $\mathcal{R}(r) = 0$ se puede resolver para Q , obteniendo [60]

$$Q + (p_\varphi - a\omega_0)^2 + f_r = \frac{\left[(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi\right]^2}{\Delta}. \quad (4.32)$$

Luego, reemplazando en la expresión para $\mathcal{R}'$, se llega a

$$\mathcal{R}'(r) = 4\omega_0 r \left[(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi\right] - \frac{\Delta'}{\Delta} \left[(r^2 + a^2)\omega_0 - ap_\varphi\right]^2 - \Delta f'_r = 0. \quad (4.33)$$

Esta ecuación es cuadrática en p_φ , con soluciones

$$p_\varphi = \frac{\omega_0}{a} \left[r^2 + a^2 - \frac{2r\Delta}{\Delta'} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Delta' f'_r}{4\omega_0^2 r^2}} \right) \right]. \quad (4.34)$$

Reemplazando esta expresión para p_φ en (4.32), se puede despejar la correspondiente expresión para Q , dada por [60]

$$Q = \frac{4\omega_0^2 r^2 \Delta}{a^2 \Delta'} \left[r - \frac{2}{\Delta'} (\Delta - a^2) \right] \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Delta' f'_r}{4\omega_0^2 r^2}} \right) + \frac{\Delta f'_r}{\Delta' a^2} (\Delta - a^2) - f_r - \frac{\omega_0^2 r^4}{a^2}. \quad (4.35)$$

La región de fotones se puede encontrar usando que la ecuación de movimiento angular implica que siempre se debe cumplir que $\Theta \geq 0$: reemplazando las expresiones (4.34) y (4.35), esto se escribe como

$$Q(r) - \cos^2 \left(\frac{p_\varphi(r)^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \omega_0^2 \right) - f_\theta(\theta) \geq 0. \quad (4.36)$$

La región de fotones está dada por los pares (r, θ) que cumplan esta desigualdad.

En estos resultados se ve explícitamente que la presencia del plasma rompe la invariancia ante cambios en el parámetro afín. A diferencia de lo que pasa en el vacío, no se puede eliminar la frecuencia ω_0 reescribiendo las ecuaciones en términos de p_φ/ω_0 y Q/ω_0^2 ; cualquier cambio de escala en ω_0 debe venir acompañado de un cambio en ω_p . Es importante notar también que en el caso general, no parece posible descartar uno de los signos de la ecuación (4.34) como sí lo era en vacío. El análisis de la relevancia física de ambas ramas de la solución debe hacerse para cada métrica y distribución de plasma en particular.

Asumiendo que la geometría es asintóticamente plana, se puede fijar un observador en (r_o, θ_o) y usar la tétrada (2.97)-(2.100) para definir, al igual que en los capítulos anteriores, las coordenadas celestes (α, β) . Para los propósitos de este trabajo, se considerarán distribuciones de plasma con $\omega_p \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, lo cual es equivalente a pedir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f_r(r)}{r^2} = 0. \quad (4.37)$$

Bajo estas condiciones, reemplazando en las Ecuaciones (2.103) y (2.104) las coordenadas celestes resultan

$$\alpha = -\frac{p_\varphi}{\omega_0 \sin \theta_o}, \quad (4.38)$$

$$\beta = \pm \frac{1}{\omega_0} \sqrt{Q - \cos^2 \theta_o \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta_o} - a^2 \omega_0^2 \right) - f_\theta(\theta_o)}. \quad (4.39)$$

El procedimiento para encontrar la sombra es el siguiente. Fijadas la función $m(r)$ de la métrica y una frecuencia de plasma $\omega_p(r, \theta)$ que cumpla la condición de separabilidad (4.25), las expresiones (4.34) y (4.35) dan los valores críticos de las constantes p_φ y Q en función de r ; es decir, para cada valor de r son los valores correspondientes a una órbita esférica en dicho radio, así como a una trayectoria no ligada que se acerca o aleja asintóticamente de una órbita esférica. Reemplazando estas expresiones paramétricas en (4.38) y (4.39), se obtiene la curva $(\alpha(r), \beta(r))$ que describe el contorno de la sombra; el rango de r es el intervalo en el cual β es real.

Para continuar, es necesario entonces fijar una forma funcional para ω_p , que debe respetar la condición de separabilidad (4.25). Una opción matemáticamente simple es tomar un plasma uniforme, para el cual

$$f_r(r) = \omega_c^2 r^2, \quad f_\theta(\theta) = \omega_c^2 a^2 \cos^2 \theta \implies \omega_p^2 = \omega_c^2, \quad (4.40)$$

con ω_c^2 una constante [76]. Es importante notar que con esta frecuencia de plasma algunas de las fórmulas anteriores no son válidas, ya que no se cumple que $\omega_p \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. El enfoque de este trabajo, sin embargo, son los agujeros negros considerados como objetos aislados, rodeados de un plasma con una extensión espacial acotada. Para estudiar esta situación, se tomará una versión modificada del modelo propuesto por Shapiro [78, 117]. El mismo considera un agujero negro de Kerr sumergido en un medio de hidrógeno gaseoso con densidad uniforme $N = N_0$ en el infinito. Para encontrar la sombra con el método ya descrito, esta densidad debe ser suficientemente baja como para que no afecte al movimiento de la luz a grandes distancias [60, 61]; es decir, se asume que la frecuencia ω_0 de la luz cumple $\omega_0^2 \gg 4\pi e^2 N_0 / m_e$, donde según (4.6) el lado derecho es la frecuencia del plasma correspondiente a $N = N_0$. En [78] se asume también que el flujo del gas es radial—es decir, esféricamente simétrico—a grandes distancias; incluso para el caso de un agujero negro moviéndose con velocidad V a través del medio, se puede ver [118] que el flujo se vuelve radial por dentro del radio de captura

$$r_c = \frac{M}{c_s^2 + V^2}, \quad (4.41)$$

donde M es la masa del agujero negro y c_s la velocidad del sonido en el gas. Este radio es mucho mayor que el radio de Schwarzschild (ya que $c_s \ll 1$ y $V \ll 1$ en circunstancias realistas), por lo que es válido considerar al agujero negro como estacionario en una zona de radio r_c alrededor del mismo.

Bajo estas condiciones, en [78] se parte de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal rodeando un agujero negro de Kerr, tomando como condición de contorno que el fluido está en reposo en el infinito. Si se asume que en la región de acreción el flujo es supersónico y por lo tanto la presión se vuelve despreciable², el resultado es que el mismo cae al agujero negro a lo largo de trayectorias con $u^\theta = 0$ y $u_\varphi = 0$, donde u^μ es la cuadrivelocidad. La rotación del agujero negro arrastra al gas y lo hace adquirir una componente u^φ no nula, resultando en una velocidad angular $d\varphi/dt = -g_{t\varphi}/g_{\phi\phi}$. Para los propósitos de este trabajo, el resultado importante es que para $r < r_c$ la densidad va como

$$N(r, \theta) \approx N_0 \left(\frac{r}{r_c} \right)^{-3/2}, \quad (4.42)$$

²Esta suposición ha sido discutida; ver por ejemplo [119] y las referencias allí mencionadas.

empalmando con la condición de contorno $N = N_0$ para $r \gg r_c$. La dependencia con θ es extremadamente débil, con una variación máxima del orden del 1 %, por lo que la densidad se toma como esféricamente simétrica, dependiendo sólo de r . Como ya se dijo, se asume que el valor en el infinito N_0 produce un efecto despreciable para el rango de frecuencias consideradas; por lo tanto, el modelo a usar es un plasma cuya frecuencia va como $\omega_p^2 \sim r^{-3/2}$.

Hay dos potenciales problemas a la hora de aplicar el resultado (4.42). El primero es que el mismo fue deducido para la métrica de Kerr, no para métricas más generales como las que se consideran aquí. Es necesario por lo tanto asumir que la distribución de plasma no se altera significativamente cuando se modifica la geometría [60, 61]. Una justificación rigurosa de esta hipótesis requeriría resolver las ecuaciones del fluido para cada métrica elegida, lo cual está por fuera de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, se puede argumentar heurísticamente que las desviaciones con respecto a Kerr normalmente tienden a cero en una escala de unos pocos radios gravitatorios, por lo que la relación (4.42) debería ser aproximadamente correcta excepto en la región inmediatamente próxima al horizonte [120, 121].

El otro problema es que una frecuencia $\omega_p^2 \propto r^{-3/2}$ no es de la forma separable (4.25). La salida elegida [60, 76] es modificar la distribución ligeramente, introduciendo una dependencia con θ . Las funciones se toman como

$$f_r(r) = \omega_c^2 \sqrt{M^3 r}, \quad f_\theta(\theta) = 0, \quad (4.43)$$

de modo que la frecuencia del plasma es

$$\omega_p^2 = \omega_c^2 \frac{\sqrt{M^3 r}}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (4.44)$$

donde ω_c es una constante y la masa M del agujero negro fija la escala de distancias. Desarrollando esta distribución como

$$\omega_p^2 \approx \omega_c^2 \left(\frac{M}{r} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta \right), \quad (4.45)$$

se puede ver que se recupera la simetría esférica del plasma cuando r es unas pocas veces el radio a .

La distribución de plasma (4.44) no debe tomarse como un modelo exacto del entorno de algún agujero negro astrofísico [60]. Además de que la deducción original sólo es estrictamente válida para la métrica de Kerr y de que se le ha agregado una dependencia con θ para hacer posible un estudio analítico, los agujeros negros cuya sombra ha sido observada hasta el momento no están rodeados de material con simetría esférica sino de un disco de acreción. Una

distribución con forma de disco, ya sea grueso o delgado, no es fácilmente representable en la forma separable (4.25). El modelo considerado aquí debe ser tomado como una primera aproximación a los efectos del plasma sobre las sombras de agujeros negros; un estudio más detallado requiere un trazado de rayos numérico, usando distribuciones de densidad correspondientes a los entornos observados de los agujeros negros.

4.4. Ejemplos

En esta sección se considerarán dos ejemplos de interés. El objetivo es, además de ilustrar la aplicación de los resultados generales ya obtenidos a métricas particulares, analizar los efectos que la distribución de plasma elegida produce en estos casos sobre las sombras.

4.4.1. Agujeros negros de tipo Kerr-Newman

El primer ejemplo de métrica a considerar es del tipo (4.22) con

$$m(r) = M - \frac{q}{2r}, \quad (4.46)$$

donde M es la masa del agujero negro y q un parámetro real. Es un caso especial de la estudiada en el capítulo anterior en ausencia de plasma, con $K = 0$. Si q es positivo y se define $q = Q^2$ entonces la métrica es simplemente la de Kerr-Newman; sin embargo, la versión con q negativo aparece en varias teorías alternativas de gravedad, y se denominará “de tipo Kerr-Newman”. Los mundos brana [15, 100] son un modelo ya mencionado, en el que el segundo término en (4.46) aparece como efecto debido a las dimensiones extra, y q se llama la carga tidal. Otro ejemplo es la gravedad de Horndeski [122], que es la teoría de gravedad escalar-tensorial más general con ecuaciones de movimiento de segundo orden; algunos casos especiales de esta clase de teoría tienen como solución al agujero negro de tipo Kerr-Newman sin restricciones al signo de q [123]. Los efectos ópticos en este tipo de agujeros negros en vacío han sido estudiados previamente [46, 124, 125]. Los horizontes de este espacio-tiempo están ubicados en los ceros de la función [60]

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + q; \quad (4.47)$$

por lo tanto, es necesario tener $a^2 + q \leq M$ para que exista un horizonte de eventos. Esto implica, en particular, que este tipo de agujeros negros puede tener un parámetro de rotación a arbitrariamente grande si q es suficientemente negativo.

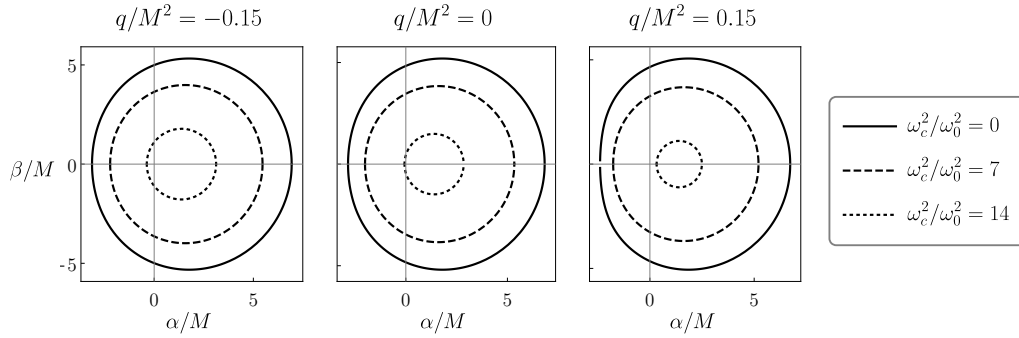


Figura 4.1: Sombra de un agujero negro de tipo Kerr-Newman con $a/M = 0.9$ para distintos valores de la carga tidal q y la frecuencia ω_0 , vista por un observador ecuatorial. El valor ω_c^2/ω_0^2 corresponde al límite de frecuencia infinita.

Para graficar la sombra, hay que reemplazar la métrica elegida en las constantes p_φ y Q críticas (4.34)-(4.35). Estas expresiones tienen dos posibles signos; es posible demostrar [60, 76] que para distribuciones de plasma con $f_r \propto r^k$, con $0 \leq k \leq 2$, el signo inferior lleva a trayectorias con $Q < 0$ que no son físicamente relevantes. Algunos ejemplos de sombras se muestran en la Figura 4.1. Las mismas están realizadas tomando $\theta_0 = \pi/2$ y $a/M = 0.9$, para maximizar los efectos de la rotación, y para tres valores de q que incluyen a $q = 0$. Es posible ver que las expresiones (4.38)-(4.39) para las coordenadas celestes (α, β) dependen de la frecuencia a través de la combinación ω_c^2/ω_0^2 , donde ω_c es la constante en (4.44) que fija la escala de frecuencias, por lo que las sombras están parametrizadas en términos de dicho cociente; un valor mayor de ω_c^2/ω_0^2 implica luz de frecuencia menor. Es útil que la parametrización vaya inversamente con ω_0 , ya que de esta manera el límite de frecuencia infinita se puede tomar como $\omega_c^2/\omega_0^2 = 0$.

Es inmediatamente notoria la disminución del área de la sombra a medida que la frecuencia disminuye. Esto se debe a la aparición de la región prohibida para frecuencias bajas. La misma envuelve al agujero negro desde los polos y extendiéndose al plano ecuatorial a medida que ω_0 se achica, forzando a los rayos de luz a moverse en un área reducida. El comportamiento de la sombra al variar los parámetros puede estudiarse más claramente en la Figura 4.2, en la que se grafican los observables A , D , y α_c definidos en la Sección 2.7. La dependencia de los mismos con q es relativamente suave en la región estudiada; es mucho más importante la variación con la frecuencia. Se puede ver que a medida que la misma disminuye (y por lo tanto los efectos del plasma se hacen más fuertes), la sombra tiende a hacerse más chica y más circular y centrada; para valores grandes de ω_c^2/ω_0^2 , la forma de la misma está determinada principalmente por el plasma.

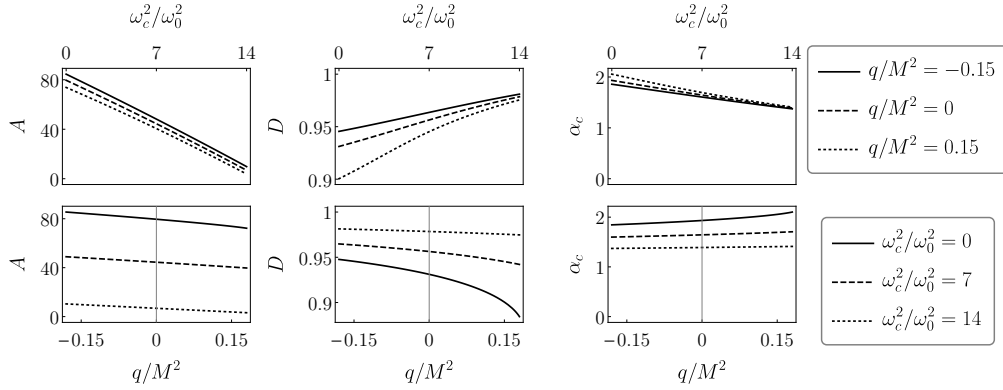


Figura 4.2: El área (A), la deformación (D) y el centroide (α_c) de la sombra de un agujero negro de tipo Kerr-Newman con $a/M = 0.9$, visto por un observador ecuatorial. *Arriba*: Los tres observables graficados como función de la frecuencia ω_0 para tres valores de la carga q . *Abajo*: Los observables graficados en función de q para tres valores de ω_0 .

4.4.2. Agujeros negros en teoría escalar-tensorial Einstein-Gauss-Bonnet 4D

El tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ que aparece en las ecuaciones de Einstein (1.14) tiene la propiedad de ser simétrico, de divergencia cero, y de estar construido a partir de la métrica y sus derivadas primeras y segundas. A la hora de buscar modificaciones de la relatividad general, es razonable pedir que la expresión que reemplace al tensor de Einstein comparta estas mismas propiedades. Las primeras dos deben valer para que el tensor modificado pueda ser proporcional al tensor de energía-momento, que es simétrico y de divergencia cero; la tercera propiedad es la necesaria para tener ecuaciones de campo de segundo orden. El teorema de Lovelock [17, 18, 126] categoriza todos los posibles tensores de rango dos con estas tres propiedades que se puedan construir a partir de la métrica. El resultado es que dependiendo de la dimensión D del espacio-tiempo, la acción de Einstein-Hilbert (1.13) puede adquirir términos adicionales, con más términos disponibles en dimensiones mayores; el primero de ellos es el invariante de Gauss-Bonnet, dado por

$$\mathcal{G} = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2, \quad (4.48)$$

de modo que la acción incorporando este término es

$$S_{\text{EGB}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi} R + \gamma \mathcal{G} \right), \quad (4.49)$$

donde γ es una constante³ con unidades de área. En $D = 4$, el invariante de Gauss-Bonnet es topológico; su contribución a la acción depende sólo de la topología del espacio-tiempo, y por lo tanto es constante ante variaciones y no aparece en las ecuaciones de movimiento. Esto implica la conclusión de Lovelock [17] de que la relatividad general es la única teoría puramente geométrica de gravedad en cuatro dimensiones cumpliendo las condiciones arriba mencionadas.

Una propuesta motivada por teorías de campos cuánticos conformes [19, 127] para intentar obtener una versión 4-dimensional de la teoría Einstein-Gauss-Bonnet es redefinir la constante de acoplamiento a $\gamma = \hat{\gamma}/(D-4)$, con $\hat{\gamma}$ constante, y luego tomar el límite $D \rightarrow 4$; como la contribución del término de Gauss-Bonnet va a cero en $D = 4$, se espera que esto sea cancelado por el factor de $1/(D-4)$ introducido y de esta manera se llegue a una modificación finita en $D = 4$. En [19] se tomó este límite para algunas soluciones especiales, pero varios trabajos [128-131] señalaron que este procedimiento no está bien definido; además de la dificultad en definir el límite de objetos tensoriales, para los cuales la cantidad de componentes depende de la dimensión (y tiene sentido sólo para D entero), mostraron que la parte de Gauss-Bonnet de las ecuaciones de campo tiene términos sin un factor de $D-4$ que pueda ser cancelado por la redefinición de la constante γ . Con métodos más rigurosos [132-135] de tomar este límite se encontró que la teoría 4-dimensional resultante incluye un grado de libertad adicional correspondiente a un campo escalar ϕ , con acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R + \gamma \left(\phi \mathcal{G} + 4G^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - 4(\partial\phi)^2 \square\phi + 2(\partial\phi)^4 \right) \right]. \quad (4.50)$$

Las ecuaciones de campo se muestran en los trabajos citados; no son relevantes en lo que sigue y no se reproducen aquí por su longitud. Esta acción pertenece a la clase de teorías denominadas escalar-tensoriales de Horndeski [122]; para un repaso general de la teoría y su historia, ver [20].

La solución de agujero negro estático fue rápidamente encontrada, tanto para la propuesta heurística original de la teoría [19, 127] como para sus reformulaciones [133, 134]. La métrica es de la forma (4.22), con la función de masa

$$m(r) = \frac{r^3}{64\pi\gamma} \left(\sqrt{1 + \frac{128\pi\gamma M}{r^3}} - 1 \right). \quad (4.51)$$

Como es esperable, la geometría se reduce a la de Schwarzschild cuando $\gamma \rightarrow 0$.

³En la literatura esta constante suele denominarse α , pero aquí se ha renombrado como γ para no generar confusión con la coordenada celeste α .

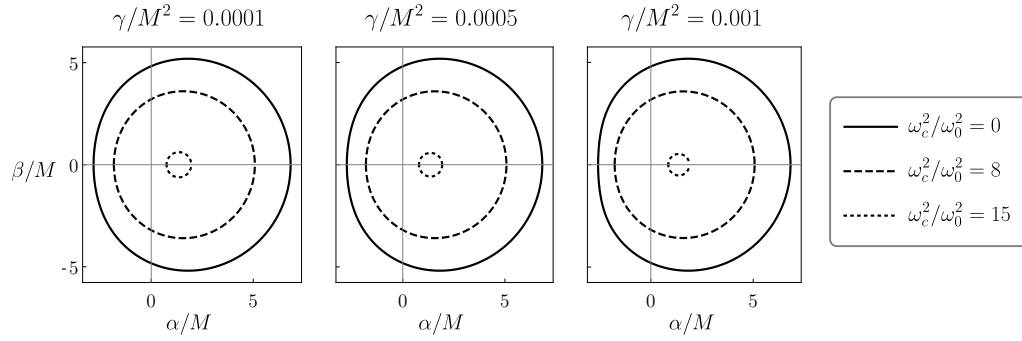


Figura 4.3: Sombra de un agujero negro de la teoría escalar-tensorial Einstein-Gauss-Bonnet 4D con $a/M = 0.9$ para distintos valores de la constante γ y la frecuencia ω_0 , vista por un observador ecuatorial.

Para $r \rightarrow 0$ la métrica tiene el comportamiento

$$g_{tt} = g_{rr}^{-1} \sim 1 - \sqrt{\frac{Mr}{8\pi\gamma}}, \quad (4.52)$$

mostrando que el potencial gravitatorio es finito; para $r \rightarrow \infty$ se tiene

$$g_{tt} = g_{rr}^{-1} \sim 1 - \frac{2M}{r}, \quad (4.53)$$

como corresponde a un cuerpo de masa M . La geometría tiene dos horizontes en

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - 16\pi\gamma}; \quad (4.54)$$

los mismos existen si $\gamma/M^2 \leq 1/16\pi$. En [136, 137] se estudian las predicciones de esta teoría para algunos escenarios astrofísicos⁴, con el fin de encontrar cotas observacionales para el valor de γ . La cota más estricta encontrada en estos trabajos es $\gamma \lesssim 2 \times 10^6 \text{ m}^2 \approx M_{\odot}^2$, bajo ciertas hipótesis.

Para obtener una métrica rotante, se puede aplicar el algoritmo de Newman-Janis⁵ como se describió en la Sección 4.2 [138, 139]. La métrica es nuevamente de la forma (4.22) con la función $m(r)$ dada en (4.51). La ecuación $\Delta = 0$ que da las posiciones de los horizontes no se puede resolver analíticamente en este caso. Lo que se puede hacer es, para un a fijo, resolver numéricamente el sistema $\Delta = \Delta' = 0$ para encontrar el agujero negro extremal y por lo tanto la condición

⁴Los trabajos citados usan una constante cuya definición difiere de la usada aquí en un factor de 16π .

⁵Los trabajos citados usan el algoritmo de Newman-Janis modificado, descrito en el capítulo siguiente; sin embargo, se puede llegar al mismo resultado usando el algoritmo clásico.

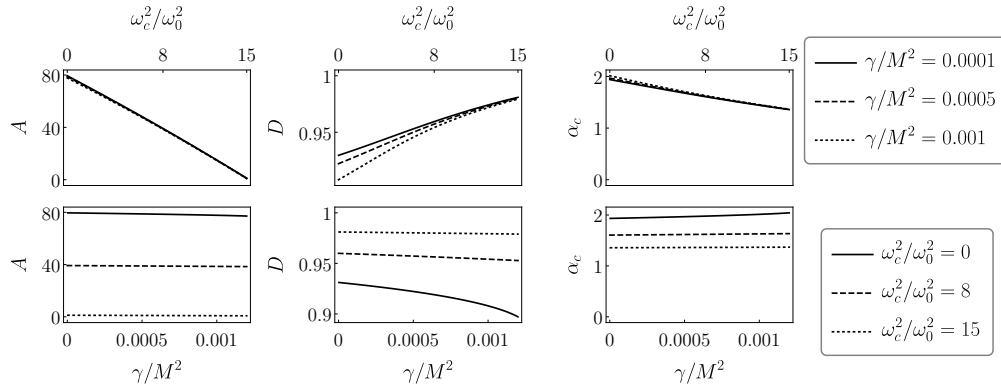


Figura 4.4: El área (A), deformación (D) y el centroide (α_c) de la sombra de un agujero negro con $a/M = 0.9$ visto por un observador ecuatorial. *Arriba*: Los tres observables graficados como función de la frecuencia ω_0 para tres valores de la carga q . *Abajo*: Los observables graficados en función de q para tres valores de ω_0 .

para la existencia de al menos un horizonte; para $a/M = 0.9$, el valor que se tomará en el resto de esta sección, la condición resulta ser $\gamma/M^2 < 0.00129$ [60].

Para graficar la sombra, otra complicación es que no se puede repetir el argumento de [76] y del ejemplo anterior para elegir uno de los dos signos de la fórmula (4.34) que da los valores críticos de p_φ en función de r . Sin embargo, también se puede ver numéricamente que, para los rangos de parámetros estudiados, el signo inferior resulta en trayectorias con $Q < 0$ que no son físicamente relevantes.

En la Figura 4.3 se muestran algunas sombras de los agujeros negros considerados en esta sección, con $a/M = 0.9$ y manteniendo la distribución de plasma (4.44). La sombra muestra la característica disminución de tamaño a medida que la frecuencia disminuye, pero la dependencia con γ es muy sutil, posiblemente debido a que la condición para la existencia de horizontes impone un rango muy estrecho de posibles valores de γ/M^2 . Esto se ve claramente si se grafican los observables A , D y α_c como en la Figura 4.4.

4.5. Discusión

La presencia de un fluido en estado de plasma puede alterar drásticamente la forma y tamaño de la sombra en las condiciones adecuadas. El modelo de plasma considerado aquí [78] es casi esféricamente simétrico y debe tomarse como una primera aproximación a situaciones más realistas en las que el material que rodea al agujero negro forme distribuciones como discos, toros o jets. Se estudiaron

geometrías que se originan en diversas teorías y cuyas métricas de agujero negro rotante fueron generadas mediante el algoritmo de Newman-Janis. La clase de métricas considerada contiene una función arbitraria $m(r)$, y por lo tanto puede incluir varias geometrías conocidas; en particular, es común asumir esta forma en el estudio de agujeros negros regulares [25, 27, 58, 114]. En los dos ejemplos tomados se observa que cuando la frecuencia de la luz se acerca a su valor mínimo permitido, el plasma produce el efecto dominante sobre la forma y tamaño de la sombra.

Capítulo 5

Sombras de agujeros negros rodeados de plasma en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón

En este Capítulo se estudia la sombra de los agujeros negros en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón, una modificación a la teoría Einstein-Maxwell que aparece como un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas. El capítulo comienza describiendo la versión modificada del algoritmo de Newman-Janis, que es la que se usa para generar las métricas estudiadas. Se incluye la presencia de un plasma rodeando al agujero negro, al igual que en el capítulo anterior.

5.1. Algoritmo de Newman-Janis modificado

Como se describió en el Capítulo 3, el algoritmo de Newman-Janis [54] contiene algunas arbitrariedades y pasos cuya motivación no queda del todo clara [104]. Los dos problemas principales son que la complejificación de las funciones métricas no es única, y que no necesariamente es posible pasar de las coordenadas de Eddington-Finkelstein a coordenadas de tipo Boyer-Lindquist en las que $g_{t\phi}$ sea la única componente no diagonal de la métrica [56]. El caso a considerar en este capítulo presenta especiales dificultades a la hora de aplicar el algoritmo clásico; por lo tanto, en esta sección se describirá brevemente la modificación propuesta en [56, 106]. La misma busca dar una prescripción clara para las componentes de la métrica rotante, que no requiera encontrar una complejificación que funcione a través de prueba y error. El precio que se paga es que la métrica sólo queda determinada a menos de un factor conforme, es decir, una función que la multiplica globalmente. Ésta puede quedar arbitraria si sólo interesan las trayectorias de la luz en el vacío; en otro caso, hay condiciones que

se pueden pedir para fijar dicha función.

El procedimiento comienza con una métrica genérica con simetría esférica

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + h(r) d\Omega^2. \quad (5.1)$$

En la misma siempre es posible hacer un cambio de coordenadas de manera que $h(r) = r^2$, pero no siempre es conveniente, de modo que esta función se dejará general. El cambio a las coordenadas de Eddington-Finkelstein está dado por

$$u = t - \int \frac{dr}{\sqrt{fg}}, \quad (5.2)$$

luego del cual la métrica se puede escribir en términos de la tétrada nula

$$l = \partial_r, \quad (5.3)$$

$$n = \sqrt{\frac{f(r)}{g(r)}} \partial_u - \frac{1}{2} g(r) \partial_r, \quad (5.4)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2h(r)}} \left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right), \quad (5.5)$$

con la fórmula usual

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - n^\mu l^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu. \quad (5.6)$$

El siguiente paso del algoritmo clásico es complejificar las funciones para realizar el cambio de coordenadas

$$r \rightarrow r - ia \cos \theta, \quad u \rightarrow u + ia \cos \theta. \quad (5.7)$$

En lugar de buscar versiones complejas de f , g y h a través de prueba y error, se propone que éstas se transforman en funciones $A(r, \theta)$, $B(r, \theta)$ y $\Psi(r, \theta)$ a priori desconocidas, que cumplen

$$\lim_{a \rightarrow 0} A(r, \theta) = f(r), \quad \lim_{a \rightarrow 0} B(r, \theta) = g(r), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \Psi(r, \theta) = h(r). \quad (5.8)$$

Luego de este cambio, la tétrada está dada por

$$l = \partial_r \quad (5.9)$$

$$n = \sqrt{\frac{B}{A}} \partial_u - \frac{1}{2} B \partial_r, \quad (5.10)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\Psi}} \left(ia \sin \theta (\partial_u - \partial_r) + \partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right), \quad (5.11)$$

y se puede ver que la métrica rotante en coordenadas de Eddington-Finkelstein queda [106]

$$ds^2 = -A du^2 - 2\sqrt{\frac{A}{B}} du dr - 2a \sin^2 \theta \left(\sqrt{\frac{A}{B}} - A \right) du d\varphi + \\ + 2a \sin^2 \theta \sqrt{\frac{A}{B}} dr d\varphi + \Psi d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[\Psi + a^2 \sin^2 \theta \left(2\sqrt{\frac{A}{B}} - A \right) \right] d\varphi^2. \quad (5.12)$$

El último paso del algoritmo es pasar a coordenadas de Boyer-Lindquist mediante un cambio de coordenadas

$$du = dt + \lambda(r) dr, \quad d\varphi = d\phi + \chi(r) dr, \quad (5.13)$$

de modo que $g_{t\phi}$ sea la única componente no diagonal de la métrica. Las funciones $\lambda(r)$ y $\chi(r)$ deben depender sólo de r para que el cambio propuesto sea integrable. Al reemplazar este cambio de coordenadas en la métrica, las componentes que se deben anular son

$$g_{tr} = A\lambda + a \sin^2 \theta \left(\sqrt{\frac{A}{B}} - A \right) \chi + \sqrt{\frac{A}{B}} = 0, \quad (5.14)$$

$$g_{r\phi} = a \sin^2 \theta \left(\sqrt{\frac{A}{B}} - A \right) \lambda - a \sin^2 \theta \sqrt{\frac{A}{B}} \\ - \sin^2 \theta \left[\Psi + a^2 \sin^2 \theta \left(2\sqrt{\frac{A}{B}} - A \right) \right] \chi = 0. \quad (5.15)$$

A pesar de su complejidad, este es un sistema lineal de dos ecuaciones para las funciones λ y χ , con solución

$$\lambda = -\frac{\Psi\sqrt{B/A} + a^2 \sin^2 \theta}{\Psi B + a^2 \sin^2 \theta}, \quad \chi = -\frac{a}{\Psi B + a^2 \sin^2 \theta}. \quad (5.16)$$

De la expresión para χ se ve que B debe ser de la forma

$$B(r, \theta) = \frac{\beta(r) + a^2 \cos^2 \theta}{\Psi}, \quad (5.17)$$

donde $\beta(r) = -a/\chi(r) - a^2$; de la misma manera, A debe ser de la forma

$$A(r, \theta) = \Psi \frac{\beta(r) + a^2 \cos^2 \theta}{(\alpha(r) + a^2 \cos^2 \theta)^2}, \quad (5.18)$$

con $\alpha(r) = a\lambda(r)/\chi(r) - a^2$. Sólo en el caso en que se cumplan estas relaciones entre A , B y Ψ será posible realizar el cambio de coordenadas (5.13) y anular las componentes g_{rt} y $g_{r\phi}$. Imponiendo las condiciones (5.8) para cuando la rotación se anula, se puede ver que en el límite $a \rightarrow 0$ las funciones α y β deben cumplir

$$\alpha(r) \rightarrow \sqrt{\frac{g(r)}{f(r)}} h(r), \quad \beta(r) \rightarrow g(r)h(r). \quad (5.19)$$

La elección de [106] es tomar $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ independientes de a , iguales a estos límites. De esta manera, se obtiene que

$$A(r, \theta) = \Psi(r, \theta) \frac{g(r)h(r) + a^2 \cos^2 \theta}{(k(r) + a^2 \cos^2 \theta)^2}, \quad (5.20)$$

$$B(r, \theta) = \frac{g(r)h(r) + a^2 \cos^2 \theta}{\Psi(r, \theta)}, \quad (5.21)$$

donde $k(r) = h(r)\sqrt{g(r)/f(r)}$. Las componentes no nulas de la métrica del caso rotante son

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\Psi \frac{gh + a^2 \cos^2 \theta}{(k + a^2 \cos^2 \theta)^2}, & g_{rr} &= \frac{\Psi}{gh + a^2}, & g_{\theta\theta} &= \Psi, \\ g_{t\phi} &= -\Psi a \sin^2 \theta \frac{k - gh}{(k + a^2 \cos^2 \theta)^2}, \\ g_{\phi\phi} &= \Psi \sin^2 \theta \left[1 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2k - gh + a^2 \cos^2 \theta}{(k + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

El resultado de este procedimiento es la métrica (5.22), que siempre se puede construir a partir de la original con simetría esférica. Se reduce a la misma en el límite $a \rightarrow 0$ y su estructura es similar a la de Kerr; esto último se puede ver haciendo las definiciones

$$\rho^2 = k + a^2 \cos^2 \theta \quad (5.23)$$

$$2F = k - gh \quad (5.24)$$

$$\Delta = gh + a^2 \quad (5.25)$$

$$\Sigma = (k + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (5.26)$$

luego de las cuales se puede escribir como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Psi}{\rho^2} \left[- \left(1 - \frac{2F}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4aF \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

La función Ψ todavía no está determinada. Es claro que aparece en la métrica como un factor conforme; por lo tanto, las geodésicas nulas en el vacío son independientes de Ψ . Es posible ver [57] que la ecuación de Hamilton-Jacobi para la luz es siempre separable para esta clase de métricas; la ecuación para todo tipo de geodésicas lo será si Ψ es la suma de una función de r y una de θ . En este capítulo se estudia la propagación de la luz en un plasma, por lo que es necesario fijar Ψ según algún criterio, y en este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi para la luz también será separable [57], siempre y cuando ω_p cumpla una condición de separabilidad análoga a (4.25). La forma de Ψ se puede determinar imponiendo alguna condición sobre la métrica: la propuesta de [106] es pedir que la componente $G_{r\theta}$ del tensor de Einstein se anule. En teorías cuyas ecuaciones de campo sean $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, como sucede en la sección siguiente, esto implica $T_{r\theta} = 0$, por lo que el contenido de materia asociado puede interpretarse como un fluido rotando alrededor del eje z .

5.2. Agujeros negros en la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón

La teoría Einstein-Maxwell-dilatón incorpora a la relatividad general la presencia de tanto el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ como de un campo escalar ϕ llamado dilatón, con un acoplamiento entre ambos. En la forma considerada aquí, su acción está dada por [21, 22, 140]

$$S_{\text{EMD}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2(\nabla\phi)^2 - e^{-2\lambda\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (5.28)$$

donde λ es una constante de acoplamiento que se puede tomar como positiva sin pérdida de generalidad, ya que cambiar su signo equivale a cambiar el signo de ϕ . Cuando $\lambda = 0$ se recupera la acción de Einstein-Maxwell con un campo escalar mínimamente acoplado. La teoría general surge como un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas [22, 140], particularmente en el caso $\lambda = 1$, aunque otros valores de λ también pueden aparecer. Su interés radica en que debido a la presencia del acoplamiento Maxwell-dilatón, este último no desaparece cuando se toma el límite de baja curvatura a agujeros negros cargados en teoría de cuerdas. Más explícitamente [22], las ecuaciones de campo en vacío en la teoría de cuerdas corrigen a las ecuaciones de Einstein con términos que involucran a la escala de Planck, que van a cero cuando $M \gg M_P$ y la curvatura se hace chica. Esto implica que las soluciones de Schwarzschild y Kerr son buenas aproximaciones a las soluciones de teoría de cuerdas en este régimen. Incorporar un campo electromagnético, en cambio, implica también la presencia del dilatón a

orden cero en las correcciones cuánticas. Por lo tanto, las soluciones de Reissner-Nordström y Kerr-Newman no son soluciones aproximadas en teoría de cuerdas, incluso en el régimen lejano a la escala de Planck.

5.2.1. Agujeros negros estáticos

Las ecuaciones de campo de la teoría resultan [22]

$$\nabla_\mu (e^{-2\lambda\phi} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (5.29)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\lambda}{2} e^{-2\lambda\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.30)$$

$$R_{\mu\nu} = 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 2e^{-2\lambda\phi} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (5.31)$$

Su solución estática y esféricamente simétrica toma la forma (5.1), con

$$f(r) = g(r) = \left(1 - \frac{r_1}{r}\right) \left(1 - \frac{r_2}{r}\right)^{(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)}, \quad (5.32)$$

$$h(r) = r^2 \left(1 - \frac{r_2}{r}\right)^{2\lambda^2/(1+\lambda^2)}, \quad (5.33)$$

donde r_1 y r_2 son dos parámetros con unidades de distancia. El campo de Maxwell y el dilatón están a su vez dados por

$$F_{tr} = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 + \lambda^2}} \frac{1}{r^2}, \quad (5.34)$$

$$e^{2\phi} = \left(1 - \frac{r_2}{r}\right)^{2\lambda/(1+\lambda^2)}; \quad (5.35)$$

de la solución se pueden extraer la masa y carga eléctrica¹ del agujero negro

$$M = \frac{r_1}{2} + \left(\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}\right) \frac{r_2}{2}, \quad (5.36)$$

$$Q^2 = \frac{r_1 r_2}{1 + \lambda^2}. \quad (5.37)$$

Para un dado λ , nótese que la carga Q determina tanto el campo eléctrico como el dilatón; en ausencia de carga, el campo ϕ también se anula y la métrica se reduce a la de Schwarzschild. Las dos ecuaciones para M y Q se pueden invertir para

¹Para evitar ambigüedades en la notación, en este capítulo se usará $\tilde{Q}$ para denotar la constante de Carter.

dar los radios r_1 y r_2 :

$$r_1 = M + \sqrt{M^2 - (1 - \lambda^2)Q^2}, \quad (5.38)$$

$$r_2 = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} \left(M - \sqrt{M^2 - (1 - \lambda^2)Q^2} \right). \quad (5.39)$$

Estas expresiones muestran que la solución sólo es válida para un cierto rango de valores de M y Q , ya que los radios r_1 y r_2 deben ser reales; ésto ocurre cuando $(1 - \lambda^2)Q^2 \leq M^2$. Si $\lambda \geq 1$ la desigualdad se cumple automáticamente, pero si $0 < \lambda < 1$ hay un límite

$$Q^2 \leq \frac{1}{1 - \lambda^2} M^2 \quad (5.40)$$

para la carga; el caso $\lambda = 0$ se verá a continuación. Los horizontes están ubicados en los ceros de $f(r)$, y su estructura depende ligeramente del valor de λ . Si $\lambda = 0$ la métrica se reduce a la de Reissner-Nordström, ya que en ese caso el dilatón se desacopla y resulta constante. Este espacio-tiempo tiene horizontes en $r_{\pm} = r_{1,2}$ y una singularidad en $r = 0$; si $Q^2 > M^2$ los radios $r_{1,2}$ son complejos pero la métrica es real, y contiene una singularidad desnuda. Si $\lambda > 0$, los horizontes siguen estando en $r_{\pm} = r_{1,2}$. Sin embargo, en este caso $h(r)$ se hace cero en $r = r_2$: el área de las esferas se hace cero, y este radio es singular [22]. Para que no haya una singularidad desnuda, se debe cumplir entonces que $r_1 > r_2$. Usando las expresiones para los radios, esto se traduce en

$$Q^2 < (1 + \lambda^2)M^2. \quad (5.41)$$

Esta desigualdad, que incluye también el caso $\lambda = 0$, es más estricta que la condición (5.40) para la validez de la solución. Por lo tanto, para estudiar agujeros negros (y no singularidades desnudas), alcanza con pedir (5.41) para todo λ .

5.2.2. Agujeros negros rotantes

Como ocurre frecuentemente, las soluciones rotantes de las Ecuaciones (5.29)-(5.31) son mucho más difíciles de encontrar, debido a la pérdida de simetría esférica. En ausencia de carga eléctrica la solución es simplemente la de Kerr; pero para $Q \neq 0$, una solución axisimétrica exacta se conoce sólo para dos valores de λ . Uno corresponde $\lambda = 0$, que no es otra cosa que la métrica de Kerr-Newman ya que el dilatón se desacopla. En el otro caso, con $\lambda = \sqrt{3}$ [140-142], la solución se obtiene mediante el método de Kaluza-Klein. Comenzando con un agujero negro de Kerr al que se le aplica un *boost* de Lorentz en dirección de una quinta dimensión, se descompone la métrica 5-dimensional en componentes que se interpretan como la métrica 4-dimensional, el potencial electromagnético y el

dilatón. Concretamente, en la notación de [140] la métrica en 5 dimensiones se puede escribir como

$$ds^2 = e^{-2\phi/\sqrt{3}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{4\phi/\sqrt{3}} \left(dx^5 + 2A_\mu dx^\mu \right)^2, \quad (5.42)$$

donde A_μ es el potencial electromagnético y $g_{\mu\nu}$ la métrica en 4 dimensiones. La misma se puede escribir explícitamente [140] y no se mostrará aquí.

Para valores arbitrarios de λ , la solución rotante sólo se conoce a primer orden en el momento angular [140]. A falta de soluciones exactas, se recurre nuevamente al algoritmo de Newman-Janis. Aquí es donde su formulación original tiene problemas: la forma de la función $h(r)$ hace que no sea claro cómo complejificar la misma. La versión modificada del algoritmo [56, 106], descrita en la sección anterior, evita esta ambigüedad ya que postula directamente una forma para la métrica rotante.

La aplicación del algoritmo modificado al presente caso se detalla en [143]. La métrica del agujero negro estático tiene $f(r) = g(r)$, lo cual simplifica un poco las cuentas; la función $k(r)$ definida en el algoritmo es simplemente $k(r) = h(r)$. La única incógnita es la función Ψ que aparece en la métrica rotante (5.22), que debe ser determinada por alguna condición física; la elección en [143] es pedir $G_{r\theta} = 0$. Como se anticipó, esto implica que el contenido de materia del espacio-tiempo se puede interpretar como un fluido rotando alrededor del eje z [106]. Se puede ver [143] que esta condición tiene como posible solución a

$$\Psi = h(r) + a^2 \cos^2 \theta \equiv H. \quad (5.43)$$

La métrica rotante queda escrita entonces como [61, 143]

$$ds^2 = -\frac{H\Delta}{\Sigma} dt^2 + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{H} \left(d\varphi - \frac{a\sigma}{\Sigma} dt \right)^2 + \frac{H}{\Delta} dr^2 + H d\theta^2, \quad (5.44)$$

donde

$$\Delta = fh + a^2 = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2 + a^2, \quad (5.45)$$

$$\sigma = h(1 - f), \quad (5.46)$$

$$\Sigma = (h + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (5.47)$$

Como en otras teorías de gravedad modificada, el algoritmo no garantiza que la métrica (5.44) sea solución de la teoría, y en general no lo será sin modificaciones de la misma o de su contenido de materia. En particular, es interesante notar que si $\lambda = 1$ la métrica generada por el algoritmo es la conocida métrica de Kerr-Sen [144, 145]; la misma es una solución exacta si además del dilatón se incorpora el campo denominado axión $H_{\mu\nu\lambda}$.

Este espacio-tiempo tiene dos horizontes [61] ubicados en las raíces de Δ , dadas por

$$r_{\pm} = \frac{r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - 4a^2}}{2}. \quad (5.48)$$

Determinar la existencia de una singularidad no es trivial. El escalar de Kretschmann tiene la forma [143]

$$K = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\Xi}{(h + a^2 \cos^2 \theta)^6}, \quad (5.49)$$

donde Ξ es una función de r y θ . El mismo parece diverger a infinito cuando $h = 0$ y $\theta = \pi/2$, pero como la forma de Ξ es complicada, existe en principio la posibilidad de que ésta también se anule y K sea regular. En cualquier caso, para la existencia de un horizonte de eventos es necesaria la desigualdad

$$r_1 - r_2 \geq 2a \quad (5.50)$$

que generaliza a la condición $r_1 - r_2 > 0$ del caso estático. En términos de la masa y la carga, el espacio-tiempo tiene un horizonte si

$$Q^2 \leq (M - a)[(1 + \lambda^2)M + (1 - \lambda^2)a]. \quad (5.51)$$

Si $\lambda \leq 1$, esto sólo es posible de cumplir si $a/M \leq 1$. Si $\lambda > 1$, existe una segunda rama de soluciones con $a/M \geq (\lambda^2 + 1)/(\lambda^2 - 1)$ además de las que tienen $a/M \leq 1$. Sin embargo, los agujeros negros con $a/M > 1$ no se considerarán aquí: además de que hasta el momento no hay evidencia astrofísica de su existencia, es una región del espacio de parámetros desconectada de la región $a/M \leq 1$.

5.3. Separación de variables y cálculo de la sombra

El procedimiento para llegar a las ecuaciones de movimiento es análogo al visto en casos anteriores, con algunas variaciones debidas a la distinta forma de la métrica (5.44). En presencia de plasma el Hamiltoniano está dado por la Ecuación (4.8) en la que, luego de reemplazar la métrica inversa, se llega a la expresión [57, 61]

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \frac{\Sigma \omega_0^2}{H \Delta} + \frac{a \sigma}{H \Delta} \omega_0 p_\varphi + \frac{1}{2} \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{H \Delta \sin^2 \theta} p_\varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{H} p_r^2 + \frac{1}{2H} p_\theta^2 + \frac{1}{2} \omega_p^2. \quad (5.52)$$

Tomando la ecuación de Hamilton-Jacobi $\mathcal{H}(x, \partial S / \partial x) = 0$ y usando el habitual *ansatz* (3.68), luego de algunas simplificaciones se llega a

$$\Delta (S'_r)^2 - \frac{(\omega_0(h + a^2) - a p_\varphi)^2}{\Delta} + (S'_\theta)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\sin \theta} - a \omega_0 \sin \theta \right)^2 + H \omega_p^2 = 0. \quad (5.53)$$

Se ve que, análogamente a los casos anteriores, esta ecuación es separable si la frecuencia de plasma toma la forma

$$\omega_p^2 = \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{H}. \quad (5.54)$$

Nuevamente, el objetivo es partir del modelo de plasma de Shapiro [78], que es esféricamente simétrico. Para que el mismo lleve a ecuaciones separables debe modificarse introduciendo una dependencia con θ ; se tomará otra vez $f_r(r) = \omega_c^2 \sqrt{M^3 r}$ y $f_\theta = 0$, de forma que la frecuencia de plasma es

$$\omega_p^2 = \omega_c^2 \frac{\sqrt{M^3 r}}{r^2(1 - r_2/r)^{2\lambda^2/(1+\lambda^2)} + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.55)$$

Ésta se aproxima a la distribución esférica $\omega_p^2 = \omega_c^2 (M/r)^{3/2}$ a medida que r se hace mayor a r_2 y a ; la suposición de que no hay una singularidad desnuda implica que estos dos radios están dentro del horizonte. Esta expresión se tomará a la hora de presentar ejemplos de sombras, pero para proseguir con el cálculo sólo es necesario asumir que la frecuencia de plasma es de la forma separable (5.54). Reemplazando la misma en la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.53), las ecuaciones de movimiento en r y θ son [57, 61, 143]

$$(H\dot{r})^2 = \mathcal{R}(r), \quad (5.56)$$

$$(H\dot{\theta})^2 = \Theta(\theta), \quad (5.57)$$

con

$$\mathcal{R}(r) = [\omega_0(h + a^2) - ap_\varphi]^2 - \Delta \left(\tilde{Q} - (a\omega_0 - p_\varphi)^2 \right) - \Delta f_r, \quad (5.58)$$

$$\Theta(\theta) = \tilde{Q} - \cos^2 \theta \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \omega_0^2 \right) - f_\theta(\theta). \quad (5.59)$$

El procedimiento para encontrar las órbitas esféricas de fotones es nuevamente hallar los valores de p_φ y $\tilde{Q}$ que resultan en una raíz doble de $\mathcal{R}$, y no se repetirá aquí ya que es análogo a los casos ya vistos. Las expresiones para las constantes de movimiento críticas resultan [61]

$$p_\varphi = \frac{\omega_0}{a} \left[h + a^2 - \frac{\Delta h'}{\Delta'} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Delta' f'_r}{\omega_0^2 h'^2}} \right) \right], \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & \frac{\Delta f'_r}{a^2 \Delta'} (\Delta - a^2) - f_r - \frac{\omega_0^2 h^2}{a^2} \\ & + \frac{2\omega_0^2 \Delta h'^2}{\Delta'^2} \left(1 - \frac{\Delta}{a^2} + \frac{h \Delta'}{a^2 h'} \right) \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Delta' f'_r}{\omega_0^2 h'^2}} \right). \end{aligned} \quad (5.61)$$

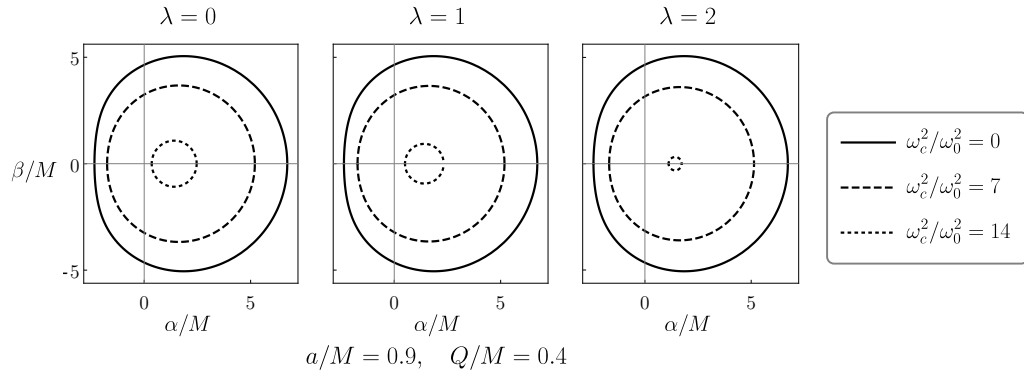


Figura 5.1: Sombras de un agujero negro en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón con $a/M = 0.9$ y $Q/M = 0.4$, para un observador ecuatorial. Se puede ver que la frecuencia de la luz es el parámetro que tiene un efecto mayor sobre la sombra en el rango considerado.

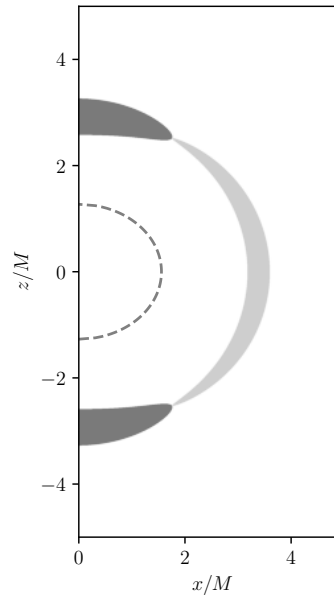


Figura 5.2: Región de fotones (gris claro) y región prohibida (gris oscuro) para un agujero negro con $a/M = 0.9$, $Q/M = 0.4$ y $\lambda = 1$, para rayos de luz cuya frecuencia cumple $\omega_c^2/\omega_0^2 = 14$. Como se ve en la Figura 5.1, esta frecuencia produce una sombra pequeña, como consecuencia del crecimiento de la región prohibida y la disminución de la región de fotones.

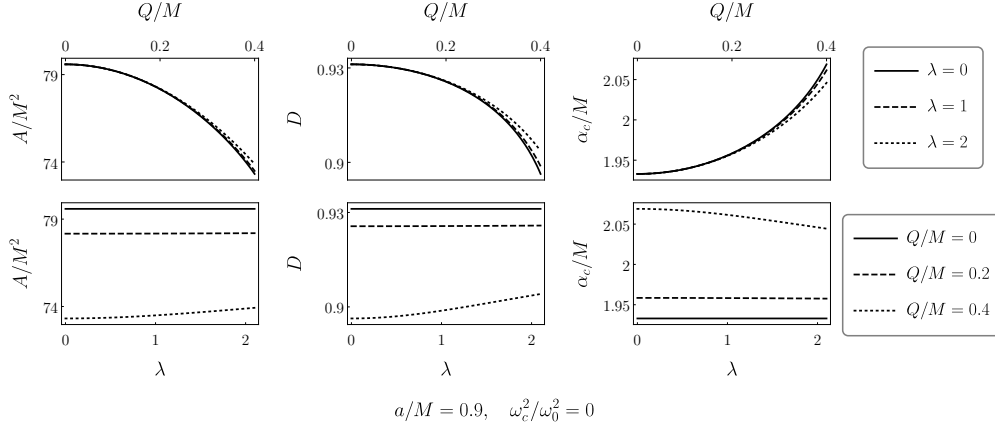
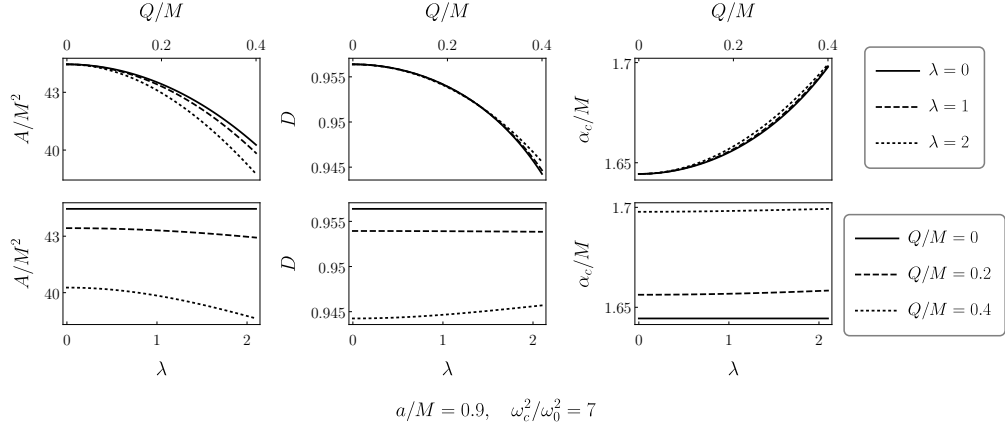
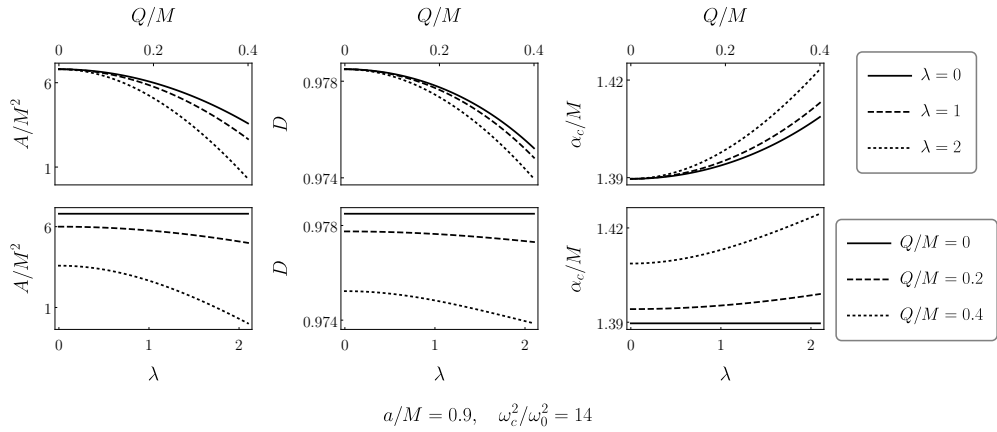


Figura 5.3: El área A , deformación D y desplazamiento α_c de la sombra para distintos valores de Q y λ , para rayos de luz con $\omega_c^2/\omega_0^2 = 0$ (es decir, en vacío), $a/M = 0.9$ y un observador ecuatorial. La fila superior muestra los observables como funciones de Q para valores fijos de λ , y la inferior los muestra como funciones de λ para valores fijos de Q .

Al igual que en los casos anteriores, para la distribución de plasma considerada sólo el signo superior en estas ecuaciones produce trayectorias físicamente posibles [61, 76].

Las coordenadas celestes vienen dadas nuevamente por las expresiones (4.38)-(4.39); a la hora de graficar sombras, corresponde reemplazar las funciones f_r y f_θ elegidas. En la Figura 5.1 se muestran algunos ejemplos para $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Se eligió un valor de la carga cercano al extremal en este rango, para mostrar más claramente los efectos de la misma. Se vuelve a observar la característica disminución del tamaño de la sombra a medida que la frecuencia decrece, efecto que es más pronunciado para valores mayores de λ . Están presentes también la deformación y desplazamiento provocadas por la rotación del agujero negro; para frecuencias chicas el plasma domina por sobre estos efectos gravitatorios, produciendo una sombra más centrada y circular.

Para ver estas propiedades más claramente, en las Figuras 5.3, 5.4 y 5.5 se grafican el área, la deformación y el desplazamiento. Al haber más parámetros que en las geometrías estudiadas previamente, hay tres figuras, cada una con un valor fijo de ω_0 . En ausencia de plasma, como se muestra en la Figura 5.3, una carga Q mayor lleva a una sombra más chica, más desplazada y menos circular, como ocurre para la métrica de Kerr-Newman; la carga produce cualitativamente el mismo efecto que la rotación. Introducir un λ positivo compensa ligeramente estos cambios, y tiende a devolver a la sombra a su forma de Kerr. A nivel de la acción esto es razonable: el acoplamiento $e^{-2\lambda\phi}F^2$ entre el campo electromagnético y

Figura 5.4: Como en la Figura 5.3, con $\omega_c^2/\omega_0^2 = 7$.Figura 5.5: Como en la Figura 5.3, con $\omega_c^2/\omega_0^2 = 14$.

la gravedad tiende a cero a medida que λ aumenta². La dependencia con λ , sin embargo, es leve para los valores considerados, y a medida que se disminuye la frecuencia el comportamiento de la sombra pasa a estar dominado por la deflexión producida por el plasma. Para $\omega_c^2/\omega_0^2 = 7$, como muestra la Figura 5.4, el área pasa a ser una función creciente de λ , y los otros observables se vuelven menos sensibles al acoplamiento. Cuando $\omega_c^2/\omega_0^2 = 14$, cerca de la frecuencia mínima permitida, el efecto del dilatón se ha invertido: un λ mayor lleva a una sombra todavía más pequeña y desplazada del eje óptico.

²El límite $\lambda \rightarrow \infty$ también se puede ver a nivel de la métrica, haciendo un cambio de coordenadas que ubique a la singularidad en $r = 0$ [61].

5.4. Discusión

La teoría Einstein-Maxwell-dilatón, siendo un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas, ha recibido mucha atención en la literatura. En particular, se han realizado simulaciones de magnetohidrodinámica relativista para encontrar la apariencia de un agujero negro dilatónico no rotante [146] y ha sido tomada como ejemplo en el análisis del EHT para comparar su predicción de la sombra con la de Kerr [147]. El modelo generalizado aquí considerado, que incluye un parámetro de acoplamiento entre el dilatón y el campo electromagnético, contiene algunos espacio-tiempos conocidos entre sus soluciones rotantes, como el agujero negro de Kerr-Newman (para $\lambda = 0$) y el de Kaluza-Klein (para $\lambda = \sqrt{3}$).

La mayor complejidad de la métrica de agujero negro no rotante en comparación a los capítulos anteriores muestra las ventajas del algoritmo de Newman-Janis modificado. El mismo especifica claramente la forma de la métrica rotante, mientras que en la versión clásica del algoritmo no hay una prescripción para complejificar la función $h(r)$ que aparece en la solución estática.

Los resultados muestran comportamientos cualitativamente similares a los del Capítulo 4: a medida que la frecuencia de la luz disminuye el efecto del plasma se vuelve dominante, provocando una reducción en el tamaño de la sombra. Es notable que la dependencia de los observables con λ depende de la frecuencia: para $\omega_c^2/\omega_0^2 \lesssim 10$ un acoplamiento mayor produce una sombra más grande, más centrada y más circular, mientras que lo opuesto es cierto para frecuencias bajas.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se estudiaron las sombras producidas por agujeros negros rotantes en relatividad general y en teorías alternativas de gravedad. Las mismas son un importante objetivo observacional, particularmente desde la puesta en funcionamiento del Telescopio del Horizonte de Eventos, que produjo las imágenes de dos agujeros negros supermasivos en los últimos años. La relevancia de la observación de las sombras radica en que proveen una línea directa a la región de campo fuerte en el entorno de un agujero negro: la forma precisa de una sombra depende sólo del campo gravitatorio del agujero negro, y no de la física de la materia en acreción alrededor del mismo. Por estos motivos, es valioso conocer cómo las sombras de agujeros negros se modifican en teorías alternativas a la relatividad general (o más en general, en métricas que no sean la de Kerr), en anticipación a una mayor resolución en las imágenes producidas por el EHT y otros observatorios futuros. El contenido de esta Tesis se basa en resultados originales publicados por el autor en los artículos [59-61, 148, 149].

En el Capítulo 3 se analizó una geometría que representa un agujero negro en relatividad general rodeado de un fluido con presión anisótropa, cuyo valor en la dirección radial es diferente a los valores en las direcciones angulares. Como es el caso para todas las teorías consideradas en esta Tesis, sólo se conoce una solución exacta para el caso de un agujero estático. Para obtener una métrica que represente un agujero negro rotante se recurrió al algoritmo de Newman-Janis, el cual toma una geometría esféricamente simétrica como punto de partida y produce una versión modificada con rotación con la salvedad de que, fuera de la relatividad general, las métricas que produce no son soluciones de las mismas ecuaciones de campo que la métrica inicial. En el caso particular del Capítulo 3, el contenido de materia del espacio-tiempo rotante tiene una ecuación de estado distinta a la original estática. Se encontró que la sombra tiene comportamientos cualitativamente distintos dependiendo de si el parámetro w de la ecuación de estado es menor o mayor a 1; en este último caso, se puede llegar a regiones más

extremas del espacio de parámetros, donde la sombra se vuelve estirada en lugar de comprimida horizontalmente, que es la consecuencia usual de la rotación del agujero negro.

En el Capítulo 4 se consideró una clase más general de métricas, que incluye soluciones en varias teorías alternativas. En particular, se tomaron como ejemplos una geometría de tipo Kerr-Newman, solución del modelo de mundos brana de Randall-Sundrum, y la métrica de agujero rotante en una novedosa teoría motivada por el intento de llevar la teoría Einstein-Gauss-Bonnet a cuatro dimensiones. A la deflexión gravitatoria se le sumó la refracción debida a la presencia de un plasma cuasi esférico rodeando al agujero negro, incluyendo así la posibilidad de que la forma de la sombra dependa de la frecuencia de la luz. El efecto más evidente en este caso es una disminución del tamaño de la sombra a medida que la frecuencia disminuye acercándose a su valor mínimo permitido; esto está relacionado con la aparición de una región prohibida alrededor de los polos del agujero negro, donde la luz no puede ingresar. Luego en el Capítulo 5 se estudiaron las sombras en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón, que aparece como un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas. La forma más compleja de esta métrica requirió el uso de una versión modificada del algoritmo de Newman-Janis para obtener una versión rotante. Se observa nuevamente que el plasma tiene un efecto importante a frecuencias bajas.

Las observaciones de sombras hechas hasta la fecha por el EHT trabajan con una frecuencia de $\omega_0/2\pi \approx 230$ GHz. Considerando algunos modelos simples de acreción se puede estimar que en este caso el cambio fraccional en el tamaño de la sombra del agujero negro Sgr A* ubicado en el centro de la Vía Láctea debido a la presencia del plasma es sólo del orden de $10^{-7} - 10^{-4}$ [75], todavía muy lejos de las capacidades de resolución de las observaciones. Recién para frecuencias del orden de $\omega_c/2\pi \sim 3$ GHz los cambios en la sombra empiezan a ser apreciables; sin embargo, en este régimen la dispersión causada por el medio interestelar se vuelve dominante [68] y no es posible resolver el agujero negro. Estas estimaciones también muestran que el efecto sobre la sombra de M87* es todavía más sutil, y se requeriría reducir al menos un orden de magnitud más la frecuencia para que haya cambios notables [75].

Teniendo las observaciones del EHT y sus mediciones de los tamaños de las sombras, es posible realizar una comparación con los resultados de esta Tesis, con el objetivo de poner a prueba los modelos alternativos. Todas las métricas estudiadas dependen de uno o más parámetros y se reducen a la métrica de Kerr para algún valor de éstos; por lo tanto, la contrastación tomará la forma de una condición sobre los parámetros, acotando la desviación de la geometría con respecto a la de Kerr. En su análisis, el EHT se enfoca en extraer el diámetro promedio del anillo de fotones, usándolo como medición indirecta del de la

sombra. A partir de éste se calcula el parámetro de desviación [10, 147]

$$\delta = \frac{d_s}{d_{s,Sch}} - 1, \quad (6.1)$$

donde d_s es el diámetro observado de la sombra y $d_{s,Sch} = 6\sqrt{3}M$ el diámetro teórico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Para el agujero negro de M87 se obtuvo un valor de $\delta = -0.01 \pm 0.17$ [10], mientras que para Sgr A* las desviaciones están entre -0.17 ± 0.11 y -0.04 ± 0.10 , dependiendo del método usado para calcular el radio y del valor usado para la masa [147]. En el espacio-tiempo de Kerr la rotación del agujero negro disminuye el tamaño de la sombra y por lo tanto δ , que se mueve en un intervalo $[-0.075, 0]$ [147]. Teniendo en cuenta los intervalos de confianza, las observaciones del EHT son compatibles con agujeros negros de Kerr. En los resultados a lo largo de este trabajo se calculó en todos los casos el área de la sombra como función de los parámetros. Como primera estimación y para simplificar la comparación con las observaciones, se puede aproximar la sombra como un círculo. El área observada por el EHT es entonces $A \approx A_{Sch}(1 + \delta)^2$, donde $A_{Sch} = 27\pi M^2 \approx 84M^2$ es el área de la sombra en el espacio-tiempo de Schwarzschild, y el área mínima de un agujero negro de Kerr (es decir, cuando $a/M = 1$) es $A \approx 78M^2$. El EHT ubica a la desviación aproximadamente en el intervalo¹ $[-0.17, 0]$, lo que corresponde a áreas $A/M^2 \in [58, 84]$. Con estas cotas, se puede ir a los distintos gráficos de los observables calculados en los Capítulos 3, 4 y 5 y obtener intervalos permitidos para los parámetros. Se puede mencionar que en el agujero negro rodeado de un fluido anisótropo (Capítulo 3) los valores positivos de K están fuertemente desfavorecidos para $w < 1$, ya que tienden a aumentar el área. Para los agujeros negros de los Capítulos 4 y 5, la principal cota viene del plasma: el área se vuelve incompatible con las observaciones cuando la frecuencia se vuelve menor a $\omega_0^2 \sim 10\omega_c^2$. Si se puede asumir que el efecto del plasma es despreciable para las frecuencias del EHT, como se estimó más arriba, entonces todos los intervalos estudiados de los parámetros están permitidos.

Es claro que, a pesar del importante logro observacional que el EHT representa, todavía es necesaria una mejor resolución para que las sombras de agujeros negros provean cotas precisas sobre teorías alternativas de gravedad. El proyecto *next-generation Event Horizon Telescope* [150] planea ampliar el EHT con más sitios de observación y la posibilidad de tomar datos en tres frecuencias distintas, permitiendo así una mejora en la resolución de alrededor del 50 %. Para el estudio de la física gravitatoria de campo fuerte, la perspectiva más importante es una

¹Un análisis más completo tendría en cuenta las distintas distribuciones de probabilidad asociadas a los distintos métodos para calcular δ , para obtener una distribución de probabilidad sobre las áreas.

determinación más precisa del anillo de fotones, que como se mencionó en el Capítulo 1 es un indicador del contorno de la sombra independiente de los detalles astrofísicos del entorno del agujero negro. Un mejor conocimiento de la sombra permitiría, entre otras posibilidades, mediciones más precisas de la masa y el momento angular de los agujeros negros observados, así como una contrastación de las predicciones de la relatividad general con las de teorías alternativas [151].

En el plano teórico, será importante continuar con la búsqueda de soluciones de agujero negro rotante de las ecuaciones correspondientes a distintas teorías; en el caso de que las mismas sean separables, se podrá aplicar el método aquí descrito para encontrar la sombra. Por supuesto, el trazado de rayos numérico sigue siendo una herramienta fundamental para casos que no permiten un tratamiento analítico. Por el momento, la hipótesis de que los agujeros negros astrofísicos están descritos por la métrica de Kerr no ha sido refutada, y todas las observaciones son consistentes con la relatividad general.

Bibliografía

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, 1973).
- [2] C. Bambi, “Astrophysical Black Holes: A Compact Pedagogical Review”, *Ann. Phys.* **530**, 1700430 (2018).
- [3] S. Chakrabarti *et al.*, “A Non-Interacting Galactic Black Hole Candidate in a Binary System with a Main-Sequence Star”, *Astron. J.* **166**, 6 (2022).
- [4] K. El-Badry *et al.*, “A Sun-like Star Orbiting a Black Hole”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **518**, 1057 (2023).
- [5] Event Horizon Telescope Collaboration *et al.*, “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole”, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).
- [6] Event Horizon Telescope Collaboration *et al.*, “First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way”, *Astrophys. J. Lett.* **930**, L12 (2022).
- [7] R. Genzel, F. Eisenhauer y S. Gillessen, “The Galactic Center Massive Black Hole and Nuclear Star Cluster”, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3121 (2010).
- [8] J. L. Walsh, A. J. Barth, L. C. Ho y M. Sarzi, “The M87 Black Hole Mass from Gas-Dynamical Models of Space Telescope Imaging Spectrograph Observations”, *Astrophys. J.* **770**, 86 (2013).
- [9] C. M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment”, *Living Rev. Relativ.* **17**, 4 (2014).
- [10] E. H. T. Collaboration *et al.*, “First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole”, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L6 (2019).
- [11] T. Baker, D. Psaltis y C. Skordis, “Linking Tests of Gravity on All Scales: From the Strong-Field Regime to Cosmology”, *Astrophys. J.* **802**, 63 (2015).

- [12] B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [13] I. Cho y H.-C. Kim, “Simple Black Holes with Anisotropic Fluid”, *Chin. Phys. C* **43**, 025101 (2019).
- [14] H.-C. Kim, B.-H. Lee, W. Lee e Y. Lee, “Rotating Black Holes with an Anisotropic Matter Field”, *Phys. Rev. D* **101**, 064067 (2020).
- [15] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos y V. Rezanian, “Black Holes on the Brane”, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000).
- [16] J. F. Donoghue, “General Relativity as an Effective Field Theory: The Leading Quantum Corrections”, *Phys. Rev. D* **50**, 3874 (1994).
- [17] D. Lovelock, “The Einstein Tensor and Its Generalizations”, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [18] T. Padmanabhan y D. Kothawala, “Lanczos–Lovelock Models of Gravity”, *Phys. Rep.* **531**, 115 (2013).
- [19] D. Glavan y C. Lin, “Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 081301 (2020).
- [20] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton y D. J. Mulryne, “The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review”, *Class. Quantum Gravity* **39**, 063001 (2022).
- [21] G. W. Gibbons y K. I. Maeda, “Black Holes and Membranes in Higher-Dimensional Theories with Dilaton Fields”, *Nucl. Phys. B* **298**, 741 (1988).
- [22] D. Garfinkle, G. T. Horowitz y A. Strominger, “Charged Black Holes in String Theory”, *Phys. Rev. D* **43**, 3140 (1991).
- [23] L. Randall y R. Sundrum, “Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).
- [24] L. Randall y R. Sundrum, “An Alternative to Compactification”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
- [25] C. Bambi y L. Modesto, “Rotating Regular Black Holes”, *Phys. Lett. B* **721**, 329 (2013).
- [26] J. M. Bardeen, “Non-Singular General-Relativistic Gravitational Collapse”, en *Proceedings of the International Conference GR5* (1968), pág. 174.
- [27] S. A. Hayward, “Formation and Evaporation of Nonsingular Black Holes”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 031103 (2006).
- [28] V. Perlick y O. Y. Tsupko, “Calculating Black Hole Shadows: Review of Analytical Studies”, *Phys. Rep.* **947**, 1 (2022).

- [29] P. Schneider, J. Ehlers y E. E. Falco, *Gravitational Lenses*, Astronomy and Astrophysics Library (Springer, Berlin, Heidelberg, 1992).
- [30] V. Perlick, “Gravitational Lensing from a Spacetime Perspective”, *Living Rev. Relativ.* **7**, 9 (2004).
- [31] K. S. Virbhadra y G. F. R. Ellis, “Schwarzschild Black Hole Lensing”, *Phys. Rev. D* **62**, 084003 (2000).
- [32] V. Bozza, “Gravitational Lensing by Black Holes”, *Gen. Relativ. Gravit.* **42**, 2269 (2010).
- [33] E. F. Eiroa, “Strong Deflection Gravitational Lensing”, en *Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology, Proceedings of the First Argentinian-Brazilian Meeting*, vol. 2 (Livraria da Física, Sao Paulo, 2013), págs. 33-52.
- [34] E. F. Eiroa y C. M. Sendra, “Regular Phantom Black Hole Gravitational Lensing”, *Phys. Rev. D* **88**, 103007 (2013).
- [35] C. Y. Lam *et al.*, “An Isolated Mass-gap Black Hole or Neutron Star Detected with Astrometric Microlensing”, *Astrophys. J. Lett.* **933**, L23 (2022).
- [36] K. C. Sahu *et al.*, “An Isolated Stellar-mass Black Hole Detected through Astrometric Microlensing”, *Astrophys. J.* **933**, 83 (2022).
- [37] C. Darwin, “The Gravity Field of a Particle”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **249**, 180 (1959).
- [38] E. F. Eiroa, G. E. Romero y D. F. Torres, “Reissner-Nordström Black Hole Lensing”, *Phys. Rev. D* **66**, 024010 (2002).
- [39] V. Bozza, “Gravitational Lensing in the Strong Field Limit”, *Phys. Rev. D* **66**, 103001 (2002).
- [40] J. M. Bardeen, “Timelike and Null Geodesics in the Kerr Metric”, en *Black Holes, Les Astres Occlus* (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [41] R. P. Kerr, “Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics”, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
- [42] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, New York, 1983).
- [43] B. Carter, “Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields”, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).
- [44] Z. Younsi *et al.*, “New Method for Shadow Calculations: Application to Parametrized Axisymmetric Black Holes”, *Phys. Rev. D* **94**, 084025 (2016).

- [45] P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro, E. Radu y H. F. Rúnarsson, “Shadows of Kerr Black Holes with Scalar Hair”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 211102 (2015).
- [46] L. Amarilla y E. F. Eiroa, “Shadow of a Rotating Braneworld Black Hole”, *Phys. Rev. D* **85**, 064019 (2012).
- [47] A. Grenzebach, V. Perlick y C. Lämmerzahl, “Photon Regions and Shadows of Kerr-Newman-NUT Black Holes with a Cosmological Constant”, *Phys. Rev. D* **89**, 124004 (2014).
- [48] S. V. M. C. Xavier, P. V. Cunha, L. C. Crispino y C. A. Herdeiro, “Shadows of Charged Rotating Black Holes: Kerr-Newman versus Kerr-Sen”, *Int. J. Mod. Phys. D* **29**, 2041005 (2020).
- [49] R. Kumar, S. G. Ghosh y A. Wang, “Gravitational Deflection of Light and Shadow Cast by Rotating Kalb-Ramond Black Holes”, *Phys. Rev. D* **101**, 104001 (2020).
- [50] R. A. Konoplya y A. Zhidenko, “Shadows of Parametrized Axially Symmetric Black Holes Allowing for Separation of Variables”, *Phys. Rev. D* **103**, 104033 (2021).
- [51] T. Johannsen, “Regular Black Hole Metric with Three Constants of Motion”, *Phys. Rev. D* **88**, 044002 (2013).
- [52] R. A. Konoplya, Z. Stuchlík y A. Zhidenko, “Axisymmetric Black Holes Allowing for Separation of Variables in the Klein-Gordon and Hamilton-Jacobi Equations”, *Phys. Rev. D* **97**, 084044 (2018).
- [53] B. Bezdekova, V. Perlick y J. Bicak, “Light Propagation in a Plasma on an Axially Symmetric and Stationary Spacetime: Separability of the Hamilton-Jacobi Equation and Shadow”, *J. Math. Phys.* **63**, 092501 (2022).
- [54] E. T. Newman y A. I. Janis, “Note on the Kerr Spinning-Particle Metric”, *J. Math. Phys.* **6**, 915 (1965).
- [55] E. T. Newman *et al.*, “Metric of a Rotating, Charged Mass”, *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965).
- [56] M. Azreg-Aïnou, “Generating Rotating Regular Black Hole Solutions without Complexification”, *Phys. Rev. D* **90**, 064041 (2014).
- [57] H. C. D. Lima Junior, L. C. B. Crispino, P. V. P. Cunha y C. A. R. Herdeiro, “Spinning Black Holes with a Separable Hamilton-Jacobi Equation from a Modified Newman-Janis Algorithm”, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020).
- [58] N. Tsukamoto, “Black Hole Shadow in an Asymptotically-Flat, Stationary, and Axisymmetric Spacetime: The Kerr-Newman and Rotating Regular Black Holes”, *Phys. Rev. D* **97**, 064021 (2018).

- [59] J. Badía y E. F. Eiroa, “Influence of an Anisotropic Matter Field on the Shadow of a Rotating Black Hole”, *Phys. Rev. D* **102**, 024066 (2020).
- [60] J. Badía y E. F. Eiroa, “Shadow of Axisymmetric, Stationary, and Asymptotically Flat Black Holes in the Presence of Plasma”, *Phys. Rev. D* **104**, 084055 (2021).
- [61] J. Badía y E. F. Eiroa, “Shadows of Rotating Einstein-Maxwell-dilaton Black Holes Surrounded by a Plasma”, *Phys. Rev. D* **107**, 124028 (2023).
- [62] S. E. Gralla, D. E. Holz y R. M. Wald, “Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings”, *Phys. Rev. D* **100**, 024018 (2019).
- [63] M. A. Abramowicz y P. C. Fragile, “Foundations of Black Hole Accretion Disk Theory”, *Living Rev. Relativ.* **16**, 1 (2013).
- [64] J.-P. Luminet, “Image of a Spherical Black Hole with Thin Accretion Disk”, *Astron. Astrophys.* **75**, 228 (1979).
- [65] S. U. Viergutz, “Image Generation in Kerr Geometry. I. Analytical Investigations on the Stationary Emitter-Observer Problem”, *Astron. Astrophys.* **272**, 355 (1993).
- [66] F. Ozel, D. Psaltis y Z. Younsi, “Black Hole Images as Tests of General Relativity: Effects of Plasma Physics”, *Astrophys. J.* **941**, 88 (2022).
- [67] M. D. Johnson *et al.*, “Universal Interferometric Signatures of a Black Hole’s Photon Ring”, *Sci. Adv.* **6**, eaaz1310 (2020).
- [68] H. Falcke, F. Melia y E. Agol, “Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center”, *Astrophys. J.* **528**, L13 (2000).
- [69] A. R. Thompson, J. M. Moran y G. W. Swenson, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy* (Springer International Publishing, 2017).
- [70] E. H. T. Collaboration *et al.*, “First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole”, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L4 (2019).
- [71] E. H. T. Collaboration *et al.*, “First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring”, *Astrophys. J. Lett.* **910**, L12 (2021).
- [72] A. E. Broderick *et al.*, “The Photon Ring in M87*”, *Astrophys. J.* **935**, 61 (2022).
- [73] Event Horizon Telescope Collaboration *et al.*, “First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. III. Imaging of the Galactic Center Supermassive Black Hole”, *Astrophys. J.* **930**, L14 (2022).
- [74] V. Perlick, *Ray Optics, Fermat’s Principle, and Applications to General Relativity*, Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin, Heidelberg, 2000).

- [75] V. Perlick, O. Y. Tsupko y G. S. Bisnovatyi-Kogan, “Influence of a Plasma on the Shadow of a Spherically Symmetric Black Hole”, *Phys. Rev. D* **92**, 104031 (2015).
- [76] V. Perlick y O. Y. Tsupko, “Light Propagation in a Plasma on Kerr Space-time: Separation of the Hamilton-Jacobi Equation and Calculation of the Shadow”, *Phys. Rev. D* **95**, 104003 (2017).
- [77] O. James, E. von Tunzelmann, P. Franklin y K. S. Thorne, “Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie *Interstellar*”, *Class. Quantum Gravity* **32**, 065001 (2015).
- [78] S. L. Shapiro, “Accretion onto Black Holes: The Emergent Radiation Spectrum. III. Rotating (Kerr) Black Holes”, *Astrophys. J.* **189**, 343 (1974).
- [79] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [80] R. A. Breuer y J. Ehlers, “Propagation of High-Frequency Electromagnetic Waves through a Magnetized Plasma in Curved Space-Time. I”, *Proc. R. Soc. Lond. Math. Phys. Sci.* **370**, 389 (1980).
- [81] R. A. Breuer y J. Ehlers, “Propagation of High-Frequency Electromagnetic Waves through a Magnetized Plasma in Curved Space-Time. II. Application of the Asymptotic Approximation”, *Proc. R. Soc. Lond. Math. Phys. Sci.* **374**, 65 (1981).
- [82] A. Z. Petrov, “The Classification of Spaces Defining Gravitational Fields”, *Gen. Relativ. Gravit.* **32**, 1665 (2000).
- [83] J. N. Goldberg y R. K. Sachs, “A Theorem on Petrov Types”, *Acta Phys. Pol. B* **22**, 13 (1962).
- [84] R. H. Boyer y R. W. Lindquist, “Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric”, *J. Math. Phys.* **8**, 265 (1967).
- [85] R. C. Henry, “Kretschmann Scalar for a Kerr-Newman Black Hole”, *Astrophys. J.* **535**, 350 (2000).
- [86] M. Walker y R. Penrose, “On Quadratic First Integrals of the Geodesic Equations for Type {22} Spacetimes”, *Commun. Math. Phys.* **18**, 265 (1970).
- [87] E. Teo, “Spherical Photon Orbits Around a Kerr Black Hole”, *Gen. Relativ. Gravit.* **35**, 1909 (2003).
- [88] K. Hioki y K. I. Maeda, “Measurement of the Kerr Spin Parameter by Observation of a Compact Object’s Shadow”, *Phys. Rev. D* **80**, 024042 (2009).

- [89] O. Y. Tsupko, “Analytical Calculation of Black Hole Spin Using Deformation of the Shadow”, *Phys. Rev. D* **95**, 104058 (2017).
- [90] R. Kumar y S. G. Ghosh, “Rotating Black Holes in 4 D Einstein-Gauss-Bonnet Gravity and Its Shadow”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2020**, 053 (2020).
- [91] N. Tsukamoto, Z. Li y C. Bambi, “Constraining the Spin and the Deformation Parameters from the Black Hole Shadow”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2014**, 043 (2014).
- [92] I. Cho y H.-C. Kim, “Static-Fluid Black Holes”, *Phys. Rev. D* **95**, 084052 (2017).
- [93] M. Ruderman, “Pulsars: Structure and Dynamics”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **10**, 427 (1972).
- [94] R. L. Bowers y E. P. T. Liang, “Anisotropic Spheres in General Relativity”, *Astrophys. J.* **188**, 657 (1974).
- [95] L. Herrera, “Local anisotropy in self-gravitating systems”, *Phys. Rep.* **286**, 53 (1997).
- [96] K. Dev y M. Gleiser, “Anisotropic Stars: Exact Solutions”, *Gen. Relativ. Gravit.* **34**, 1793 (2002).
- [97] N. Pant, N. Pradhan y M. Malaver, “Anisotropic Fluid Star Model in Isotropic Coordinates”, *Int. J. Astrophys. Space Sci.* **3**, 1 (2014).
- [98] A. A. Isayev, “Relativistic anisotropic stars with the polytropic equation of state in general relativity”, *J. Phys. Conf. Ser.* **934**, 012039 (2017).
- [99] V. V. Kiselev, “Quintessence and Black Holes”, *Class. Quantum Gravity* **20**, 1187 (2003).
- [100] A. N. Aliev y A. E. Gümrükçüoğlu, “Charged Rotating Black Holes on a 3-Brane”, *Phys. Rev. D* **71**, 104027 (2005).
- [101] L. A. Lessa, J. E. G. Silva, R. V. Maluf y C. A. S. Almeida, “Modified black hole solution with a background Kalb–Ramond field”, *Eur. Phys. J. C* **80**, 335 (2020).
- [102] B. Knorr y A. Platania, “Sifting Quantum Black Holes through the Principle of Least Action”, *Phys. Rev. D* **106**, L021901 (2022).
- [103] E. Newman y R. Penrose, “An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients”, *J. Math. Phys.* **3**, 566 (1962).
- [104] S. P. Drake y P. Szekeres, “Uniqueness of the Newman–Janis Algorithm in Generating the Kerr–Newman Metric”, *Gen. Relativ. Gravit.* **32**, 445 (2000).

- [105] R. Ferraro, “Untangling the Newman–Janis Algorithm”, *Gen. Relativ. Gravit.* **46**, 1705 (2014).
- [106] M. Azreg-Aïnou, “From Static to Rotating to Conformal Static Solutions: Rotating Imperfect Fluid Wormholes with(out) Electric or Magnetic Field”, *Eur. Phys. J. C* **74**, 1 (2014).
- [107] D. Hansen y N. Yunes, “Applicability of the Newman-Janis Algorithm to Black Hole Solutions of Modified Gravity Theories”, *Phys. Rev. D* **88**, 104020 (2013).
- [108] A. J. Keane, “An Extension of the Newman–Janis Algorithm”, *Class. Quantum Gravity* **31**, 155003 (2014).
- [109] H. Erbin, “Janis–Newman Algorithm: Generating Rotating and NUT Charged Black Holes”, *Universe* **3**, 19 (2017).
- [110] M. Azreg-Aïnou, “Comment on ‘Spinning loop black holes’”, *Class. Quantum Gravity* **28**, 148001 (2011).
- [111] D. J. C. Lombardo, “The Newman–Janis algorithm, rotating solutions and Einstein–Born–Infeld black holes”, *Class. Quantum Gravity* **21**, 1407 (2004).
- [112] C. S. Reynolds, “Observational Constraints on Black Hole Spin”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **59**, 117 (2021).
- [113] F. Yuan y R. Narayan, “Hot Accretion Flows Around Black Holes”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **52**, 529 (2014).
- [114] R. Torres y F. Fayos, “On regular rotating black holes”, *Gen. Relativ. Gravit.* **49**, 2 (2017).
- [115] R. Torres, “Regular Rotating Black Holes”, en *Regular Black Holes: Towards a New Paradigm of Gravitational Collapse*, Ed. por C. Bambi (Springer Nature, Singapore, 2023), págs. 421-446.
- [116] M. Gürses y F. Gürsey, “Lorentz Covariant Treatment of the Kerr-Schild Geometry”, *J. Math. Phys.* **16**, 2385 (1975).
- [117] S. L. Shapiro, “Accretion onto Black Holes: The Emergent Radiation Spectrum”, *Astrophys. J.* **180**, 531 (1973).
- [118] V. F. Shvartsman, “Halos around “Black Holes””, *Sov. Astron.* **15**, 377 (1971).
- [119] A. Aguayo-Ortiz, E. Tejeda, O. Sarbach y D. López-Cámara, “Spherical Accretion: Bondi, Michel, and Rotating Black Holes”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **504**, 5039 (2021).

- [120] F. Atamurotov, I. Hussain, G. Mustafa y K. Jusufi, “Shadow and quasi-normal modes of the Kerr–Newman–Kiselev–Letelier black hole”, *Eur. Phys. J. C* **82**, 831 (2022).
- [121] S. Kumar, A. Uniyal y S. Chakrabarti, “Shadow and Weak Gravitational Lensing of Rotating Traversable Wormhole in Non-homogeneous Plasma Space-time”, *arXiv:2308.05545* (2023).
- [122] G. W. Horndeski, “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space”, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
- [123] E. Babichev, C. Charmousis y A. Lehébel, “Asymptotically Flat Black Holes in Horndeski Theory and Beyond”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2017**, 027 (2017).
- [124] J. Schee y Z. Stuchlík, “Optical Phenomena in the Field of Braneworld Kerr Black Holes”, *Int. J. Mod. Phys. D* **18**, 983 (2009).
- [125] J. Badía y E. F. Eiroa, “Gravitational lensing by a Horndeski black hole”, *Eur. Phys. J. C* **77**, 779 (2017).
- [126] D. Lovelock, “The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor”, *J. Math. Phys.* **13**, 874 (1972).
- [127] G. Cognola, R. Myrzakulov, L. Sebastiani y S. Zerbini, “Einstein Gravity with Gauss-Bonnet Entropic Corrections”, *Phys. Rev. D* **88**, 024006 (2013).
- [128] M. Gürses, T. Ç. Şişman y B. Tekin, “Is there a novel Einstein–Gauss-Bonnet theory in four dimensions?”, *Eur. Phys. J. C* **80**, 647 (2020).
- [129] M. Gürses, T. Ç. Şişman y B. Tekin, “Comment on “Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime””, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 149001 (2020).
- [130] J. Arrechea, A. Delhom y A. Jiménez-Cano, “Comment on “Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime””, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 149002 (2020).
- [131] J. Arrechea, A. Delhom y A. Jiménez-Cano, “Inconsistencies in four-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet gravity”, *Chin. Phys. C* **45**, 013107 (2021).
- [132] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton y D. J. Mulryne, “Derivation of Regularized Field Equations for the Einstein-Gauss-Bonnet Theory in Four Dimensions”, *Phys. Rev. D* **102**, 024025 (2020).
- [133] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, R. B. Mann y C. Pollack, “On taking the $D \rightarrow 4$ limit of Gauss-Bonnet gravity: theory and solutions”, *J. High Energy Phys.* **2020**, 27 (2020).

- [134] H. Lü e Y. Pang, “Horndeski Gravity as $D \rightarrow 4$ Limit of Gauss-Bonnet”, *Phys. Lett. B* **809**, 135717 (2020).
- [135] T. Kobayashi, “Effective scalar-tensor description of regularized Lovelock gravity in four dimensions”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2020**, 013 (2020).
- [136] T. Clifton, P. Carrilho, P. G. S. Fernandes y D. J. Mulryne, “Observational Constraints on the Regularized 4D Einstein-Gauss-Bonnet Theory of Gravity”, *Phys. Rev. D* **102**, 084005 (2020).
- [137] C. Charmousis, A. Lehébel, E. Smyrniotis y N. Stergioulas, “Astrophysical constraints on compact objects in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2022**, 033 (2022).
- [138] R. Kumar y S. G. Ghosh, “Black Hole Parameter Estimation from Its Shadow”, *Astrophys. J.* **892**, 78 (2020).
- [139] S.-W. Wei e Y.-X. Liu, “Testing the nature of Gauss–Bonnet gravity by four-dimensional rotating black hole shadow”, *Eur. Phys. J. Plus* **136**, 436 (2021).
- [140] J. H. Horne y G. T. Horowitz, “Rotating Dilaton Black Holes”, *Phys. Rev. D* **46**, 1340 (1992).
- [141] G. W. Gibbons, “Antigravitating Black Hole Solitons with Scalar Hair in $N=4$ Supergravity”, *Nucl. Phys. B* **207**, 337 (1982).
- [142] V. P. Frolov, A. I. Zelnikov y U. Bleyer, “Charged Rotating Black Hole from Five Dimensional Point of View”, *Ann. Phys.* **499**, 371 (1987).
- [143] M. Azreg-Aïnou, S. Haroon, M. Jamil y M. Rizwan, “Rotating Normal and Phantom Einstein–Maxwell–dilaton Black Holes: Geodesic Analysis”, *Int. J. Mod. Phys. D* **28**, 1950063 (2019).
- [144] A. Sen, “Rotating Charged Black Hole Solution in Heterotic String Theory”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1006 (1992).
- [145] S. Yazadjiev, “Newman–Janis Method and Rotating Dilaton-Axion Black Hole”, *Gen. Relativ. Gravit.* **32**, 2345 (2000).
- [146] J. Röder *et al.*, “Probing the spacetime and accretion model for the Galactic Center: Comparison of Kerr and dilaton black hole shadows”, *Astron. Astrophys.* **671**, A143 (2023).
- [147] E. H. T. Collaboration *et al.*, “First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VI. Testing the Black Hole Metric”, *Astrophys. J. Lett.* **930**, L17 (2022).
- [148] J. Badía y E. F. Eiroa, “Shadow of a Charged Black Hole Surrounded by an Anisotropic Matter Field”, en *Proceedings of the Sixteenth Marcel Grossmann Meeting* (World Scientific, Singapore, 2022), págs. 1343-1350.

- [149] J. Badía y E. F. Eiroa, “Shadow of Black Holes with a Plasma Environment in 4D Einstein-Gauss-Bonnet Gravity”, en *Proceedings of the Sixteenth Marcel Grossmann Meeting* (World Scientific, Singapore, 2022), págs. 3856-3864.
- [150] S. S. Doeleman *et al.*, “Reference Array and Design Consideration for the Next-Generation Event Horizon Telescope”, *Galaxies* **11**, 107 (2023).
- [151] D. Ayzenberg *et al.*, “Fundamental Physics Opportunities with the Next-Generation Event Horizon Telescope”, arXiv:2312.02130 (2023).