UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Componentes S-logarítmicas del espacio de móduli de foliaciones.

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas.

Mariano Andres Chehebar

Director de tesis: Dr. Fernando Cukierman.
Consejero de estudios: Dr. Leandro Vendramín.

Lugar y fecha de defensa: Buenos Aires, 26 de octubre de 2023.

Lugar de trabajo: Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló (IMAS).

Componentes S-logarítmicas del espacio de móduli de foliaciones.

El objetivo de esta tesis es hacer un aporte al estudio del espacio de móduli de foliaciones singulares de codimensión 1 en el espacio proyectivo complejo. En este sentido, el autor presenta familias nuevas e interesantes de tales foliaciones, llamadas *foliaciones S-logarítmicas*. Estas familias consisten de 1-formas diferenciales logarítmicas *con contenido* (es decir, 1-formas logarítmicas tales que sus coeficientes polinomiales tienen factores no constantes en común) a las que se las divide por ese contenido.

El autor estudia propiedades generales de las foliaciones S-logarítmicas, concentrándose particularmente en el caso de las foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$ para $k \geq 2$. Estas últimas consisten de 1-formas de tipo logarítmico con polos en dos hipersuperficies irreducibles de grados k y $k+1$ respectivamente a las que se las divide por su contenido dado por un polinomio lineal.

En el caso de las foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$ se estudia su geometría, su conjunto singular, se da una parametrización unirracional, se estudia su base locus, inyectividad genérica y derivada Zariski. Finalmente, utilizando métodos algebro-geométricos se da una prueba de la estabilidad del conjunto de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$ para $k \geq 2$. Esto no solamente da una colección infinita de nuevas componentes irreducibles del espacio de móduli de foliaciones singulares de codimensión 1 en el espacio proyectivo, sino que además da una forma de generalizar la llamada *componente excepcional* (definida en el artículo [8]), que se probará que es el conjunto de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((2, 3), (1^1))$.

Palabras clave: foliación singular, espacio de móduli, foliación logarítmica, foliación S-logarítmica, estabilidad.

S-logarithmic components of the moduli space of foliations.

The goal of this thesis is to make a contribution to the study of the moduli space of codimension one singular foliations in the complex projective space. The author presents new and interesting families of foliations, called *S-logarithmic foliations*. These families consist of logarithmic differential 1-forms *with content* (logarithmic 1-forms such that their polynomial coefficients have non-constant common factors) which are divided by that content.

The author studies general properties of S-logarithmic foliations, concentrating particularly on the case of S-logarithmic foliations of type $((k, k+1), (1^1))$ for an integer $k \geq 2$. The latter consist of 1-forms of logarithmic type with poles in two irreducible hypersurfaces of degrees k and $k+1$ respectively, which are divided by their content given by a linear polynomial.

In the case of S-logarithmic foliations of type $((k, k+1), (1^1))$, the author studies its geometry, its singular locus, defines a unirational parameterization, studies its base locus, generic injectivity and Zariski derivative. Finally, using algebro-geometric methods, the author proves the stability of the set of S-logarithmic foliations of type $((k, k+1), (1^1))$ for $k \geq 2$. This results in an infinite collection of new irreducible components of the moduli space of codimension one singular foliations in the projective space, generalizing the so-called *exceptional component* (defined in the article [8]), which is the set of S-logarithmic foliations of type $((2, 3), (1^1))$.

Keywords: singular foliation, moduli space, logarithmic foliation, S-logarithmic foliation, stability.

Índice general

Lista de Símbolos

$\mathbb{P}^n$	Espacio proyectivo complejo de dimensión n.
S	Anillo graduado de polinomios $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ en $n+1$ variables.
T	Anillo graduado de polinomios $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ en n variables.
S_d	Elementos homogéneos de grado d en S. Coincide con $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$.
T_d	Elementos homogéneos de grado d en T.
$\mathbb{P}(S_{\mathbf{d}})$	Espacio $\prod_{i=1}^r \mathbb{P}S_{d_i}$ donde $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ es una partición entera.
$\mathbb{P}(T_{\mathbf{d}})$	Espacio $\prod_{i=1}^r \mathbb{P}T_{d_i}$ donde $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ es una partición entera.
$T_x(X)$	Espacio tangente Zariski a la variedad X en el punto x.
Ω^1_X	Haz de 1-formas diferenciales de la variedad X.
Ω^*_X	Álgebra exterior de 1-formas diferenciales de la variedad X.
$Pic(X)$	Grupo de Picard de la variedad X.
R	Campo de vectores radial $\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ en $\mathbb{C}^{n+1}$.
$i_X(\omega)$	Contracción de ω con respecto al campo de vectores X.
$PGL(n+1)$	Grupo proyectivo lineal de un espacio vectorial de dimensión $n+1$.
P	Subgrupo de $PGL(n+1)$ de elementos que fijan a $x_0 \in S_1$.
$\mathcal{F}(X, \mathcal{L})$	Espacio de móduli de foliaciones singulares de codimensión 1 asociado al line bundle $\mathcal{L}$ en X.
$\mathcal{F}(n, d)$	Espacio de móduli de foliaciones singulares de codimensión 1 asociado al line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ en $\mathbb{P}^n$.
$\overline{\mathcal{F}}(n, d)$	Clausura Zariski de $\mathcal{F}(n, d) \subseteq \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$.
$\partial\mathcal{F}(n, d)$	Conjunto $\overline{\mathcal{F}}(n, d) \setminus \mathcal{F}(n, d)$.
$\mathcal{L}(\mathbf{d})$	Espacio de foliaciones logarítmicas en $\mathcal{F}(n, d)$ asociadas a la partición entera $\mathbf{d}$ de d.
$\mathcal{R}(\mathbf{d})$	Espacio de foliaciones racionales en $\mathcal{F}(n, d)$ asociadas a la partición entera $\mathbf{d}$ de d.
$\mathcal{E}(n)$	Componente excepcional en $\mathcal{F}(n, 4)$.
$S(\omega)$	Conjunto singular de la 1-forma $\omega \in \mathcal{F}(n, d)$.
$\mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e})$	Espacio de foliaciones S-logrítmicas asociadas a la partición entera $\mathbf{d}$ y la partición entera con multiplicidades $\mathbf{e}$ (ver Definiciones 44 y 48).

Introducción

En este trabajo estudiaremos foliaciones singulares de codimensión 1 en espacios proyectivos complejos. Para ello, daremos en primer lugar algunos antecedentes históricos que motivaron el estudio de estos objetos.

Sobre finales del siglo XVIII, la teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden en derivadas parciales dio lugar al *problema de Pfaff*, que ha creado e inspirado desarrollos en varias áreas de la matemática. Este problema está íntimamente ligado con el concepto de *integrabilidad* de una ecuación diferencial. A mediados del siglo XVIII, el concepto de integrabilidad se refería a hallar soluciones de la ecuación

$$F\left(x_1, \ldots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}\right) = 0$$

de la forma $z = \varphi(x_1, \ldots, x_m, C_1, \ldots, C_m)$, donde C_i son constantes arbitrarias. A principios del siglo XIX, J.F. Pfaff logró reformular en su trabajo [33] el problema con un enfoque muy innovador: descubrió que resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden en m variables, es equivalente a la integrabilidad de una ecuación diferencial *total* en $2m$ variables de la forma

$$\omega := a_1(x)dx_1 + \ldots + a_{2m}(x)dx_{2m} = 0.$$

Con esto en mente y usando conceptos desarrollados previamente por G. Monge, Pfaff reinterpretó y definió un nuevo concepto de integrabilidad como la existencia de una cantidad k de ecuaciones

$$\phi_i(x_1, \ldots, x_m) = C_i \;\forall i = 1, \ldots, k$$

donde $\left\{\phi_i\right\}_{i=1}^{k}$ son funciones linealmente independientes y tales que ω se anula a lo largo de los conjuntos de ceros de las funciones ϕ_i. Este concepto derivó en lo que hoy en día se conoce como *subvariedad integral* (ver por ejemplo [36] o [2]). Para más información sobre el contexto histórico del problema de Pfaff, ver [23] y [24].

Uno de los principales aportes al problema de integrabilidad de Pfaff lo hizo F.G. Frobenius en su famoso artículo [16], formulando un criterio para la integrabilidad completa de un sistema de ecuaciones de Pfaff. Este criterio dio lugar a lo que hoy se conoce como el *teorema de integrabilidad de Frobenius*. Esta condición para la completa integrabilidad de una ecuación de Pfaff de la forma $\omega = 0$ puede escribirse (con el lenguaje moderno y usando la diferencial exterior de 1-formas diferenciales) como

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

y garantiza que por casi todos los puntos pase una única subvariedad integral de ω. El teorema de integrabilidad de Frobenius marcó el camino para el uso de herramientas algebraicas y geométricas para el estudio de las ecuaciones diferenciales. Esto motivó diversas áreas de investigación actuales de la matemática, como ser la teoría de sistemas dinámicos, la teoría de sistemas diferenciales exteriores y la teoría de foliaciones. Destacamos particularmente esta última, ya que será el área en la que se enmarca el presente trabajo.

Una foliación de codimensión q en un espacio X se puede entender intuitivamente como una descomposición de X en subvariedades de codimensión q que son localmente planas, a las que llamaremos *hojas* de la foliación. La teoría de foliaciones tuvo sus orígenes en la década de 1940 con los trabajos de C. Ehresmann y C. Reeb y ha dado lugar a distintos enfoques de la teoría desde entonces, como por ejemplo aportes a la geometría y topología diferencial. A partir de la década de 1970 y utilizando métodos topológicos, de geometría compleja y más recientemente de geometría algebraica, diversos autores comenzaron a estudiar foliaciones holomorfas, motivados por problemas de dinámica compleja y de ecuaciones diferenciales complejas. Uno de los objetos de investigación centrales han sido las formas diferenciales proyectivas que definen foliaciones, estudiándose principalmente su geometría, sus singularidades, la dinámica de sus hojas y principalmente, el problema de estabilidad y clasificación de foliaciones holomorfas. En este sentido, destacamos los trabajos de J. P. Jouanolou, C. Camacho, A. Lins-Neto, P. Sad, R. Moussu, D.Cerveau, J.F Mattei, X. Gomez-Mont, O. Calvo Andrade, F. Cukierman, J. V. Pereira, I. Vainsencher, entre otros.

En este trabajo, nuestro principal objeto de estudio será una nueva familia de 1-formas proyectivas que definen foliaciones de codimensión 1, a las que llamaremos *foliaciones S-logarítmicas*. Pasaremos entonces a explicar en detalle el tema de investigación de la presente tesis.

Sea $\omega = \sum_{i=0}^{n} a_i dx_i$ una 1-forma diferencial en $\mathbb{C}^{n+1}$ con coeficientes polinomiales a_i homogéneos de grado $d-1$ y sin divisores no constantes en común. Además ω satisface las condiciones *de descenso* $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ y *de integrabilidad de frobenius* $\omega \wedge d\omega = 0$ si y sólo si ω define una foliación singular de codimensión

1 en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n$, cuyas hojas vienen dadas por variedades holomorfas cuyo espacio tangente pertenece al anulador de ω en todo punto de $\mathbb{P}^n$. Notar que multiplicar a ω por una constante no cambia su anulador en ningún punto. Por ende, fijados enteros positivos $n, d \geq 2$ podemos definir el *espacio de móduli* $\mathcal{F}(n, d)$ como el conjunto 1-formas diferenciales que definen foliaciones singulares de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ dentro del espacio $\mathbb{P}H^0\left(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)\right)$. La geometría del espacio de móduli de foliaciones en $\mathbb{P}^n$ para $n \geq 3$ es muy rica e inspiró mucha investigación. En particular, un problema central del área consiste en determinar las componentes irreducibles del espacio de móduli $\mathcal{F}(n, d)$. Además, cabe destacar que han habido varios artículos estudiando diversos aspectos geométricos de diversas componentes irreducibles de $\mathcal{F}(n, d)$ ya conocidas, como ser su dimensión, unirracionalidad/modelo minimal, singularidades, grado, relaciones de incidencia, etc. Ver por ejemplo las referencias [3], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [17], [28], [34], por mencionar algunas.

Muchos autores estudiaron familias y componentes irreducibles del espacio $\mathcal{F}(n, d)$. Se conocen pocas colecciones de componentes irreducibles para d arbitrariamente grande, como ser componentes de tipo *pullback* (ver [7]), componentes *racionales* (ver [17] y [13]) y componentes *logarítmicas* (estudiadas en [3] y más recientemente en [11]). Una foliación de codimensión 1 que pertenece a una componente de tipo pullback se define por una 1-forma diferencial que es el pullback de un mapa racional de una 1-forma diferencial en $\mathbb{P}^2$. Para definir las componentes logarítmicas, fijemos una partición entera $\mathbf{d} = (d_1 \ldots, d_r)$ de d tal que $r \geq 2$, $d = \sum_{i=1}^r d_i$ y $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_r$. Una 1-forma diferencial logarítmica de tipo $\mathbf{d}$ está definida por la fórmula $\omega = \left(\prod_{i=1}^r F_i\right) \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$ donde los F_i son polinomios distintos, homogéneos e irreducibles de grado d_i en las variables $x_0, \ldots, x_n$ y $\lambda_i \in \mathbb{C}$ satisface la condición de descenso $\sum_{i=1}^r \lambda_i d_i = 0$. La clausura Zariski del conjunto de 1-formas logarítmicas de tipo $\mathbf{d}$ dentro de $\mathcal{F}(n, d)$ se llama *componente logarítmica de tipo* $\mathbf{d}$ y la denotamos $\mathcal{L}(\mathbf{d})$. En [3], O. Calvo Andrade probó por primera vez que $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ es una componente irreducible del espacio de móduli $\mathcal{F}(n, d)$. Recientemente en [11], los autores dieron una prueba de este hecho usando teoría de deformaciones.

Un problema central es hallar la descomposición en componentes irreducibles del espacio de móduli $\mathcal{F}(n, d)$. En general, este problema es muy difícil y solamente está resuelto para d pequeño. En su libro [26], Jouanolou mostró esta descomposición para $d = 2$ y $d = 3$: en el caso $d = 2$, el espacio $\mathcal{F}(n, 2)$ es irreducible y en el caso $d = 3$, el espacio $\mathcal{F}(n, 3)$ (al que el llama espacio de *ecuaciones de Jacobi*) tiene dos componentes irreducibles: una racional de tipo $(2, 1)$ y otra logarítmica de tipo $(1, 1, 1)$. En su artículo [8], Cerveau y Lins-Neto probaron que $\mathcal{F}(n, 4)$ tiene seis componentes irreducibles: dos de tipo racional, dos de tipo logarítmico, una de tipo pullback y una sexta componente nueva, a la que llamaron *componente excep-*

cional. Esta última componente fue definida en $\mathcal{F}(3,4)$ como el conjunto de foliaciones cuyas hojas (en un abierto coordenado de $\mathbb{P}^3$) son las órbitas del subgrupo de transformaciones afines de $\mathbb{C}^3$ que dejan fija una curva cúbica torcida (twisted cubic). Más en general, tomando pullback por proyecciones lineales $\phi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^3$ de todos los elementos de $\mathcal{F}(3,4)$, obtenemos todos los elementos de la componente excepcional $\mathcal{E}(n)$ en $\mathcal{F}(n,4)$. Además, los autores mostraron que esta componente también se obtiene como la órbita de la foliación definida por la 1-forma diferencial $\omega_{\mathcal{E}} = 3g_0 df_0 - 2f_0 dg_0$ donde $f_0 = x_0x_2 - \frac{x_1^2}{2}$ y $g_0 = x_0^2x_3 - x_0x_1x_2 + \frac{x_1^3}{3}$ bajo la acción natural del grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^n$. Han habido varios artículos que estudiaron la geometría de esta componente en mayor detalle, tratando de darle un nuevo enfoque o intentando generalizarla un poco, ver por ejemplo [4], [5] y [34]. En este sentido, es de interés buscar colecciones de componentes irreducibles para d arbitrariamente grande que contengan o generalicen esta componente excepcional.

Finalmente, en el artículo reciente [10], los autores estudiaron el caso $d = 5$, mostrando que existen al menos 24 componentes irreducibles pero sin poder encontrar la descomposición completa en componentes irreducibles. Dentro de esta lista, destacamos las foliaciones logarítmicas *especiales* $SLog(3,4)$ y $SLog(2,5)$ (ver [10, Secciones 3.5.1 y 3.6.1]). En ambos casos, los autores usan construcciones similares. Ilustramos esto explicando la construcción de $SLog(2,5)$: los autores fijan un polinomio F de grado 2 de la forma $F = x_3^2 - 2x_1x_0$, buscan condiciones para un polinomio G homogéneo de grado 5 para que la 1-forma racional de la forma $\omega' = 5GdF - 2FdG$ sea divisible por x_0^2 y actúan por el grupo $PGL(n+1)$ sobre todas las foliaciones de la forma $\frac{\omega'}{x_0^2}$. Esto da una componente irreducible de $\mathcal{F}(3,5)$.

Observando la componente excepcional $\mathcal{E}(n)$ y las dos logarítmicas especiales $SLog(3,4)$ y $SLog(2,5)$, notamos una característica en común: todas se obtienen a partir de una 1-forma diferencial *con contenido* (es decir, cuyos coeficientes polinomiales comparten un factor no constante) a la que se le *cancela* ese contenido. Con esta idea en mente, construiremos una nueva colección de familias de foliaciones singulares de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$, a las que llamaremos *foliaciones S-logarítmicas* y cuya definición daremos a continuación. Antes de ello, llamemos *partición entera con multiplicidades* $\mathbf{e}$ *de un entero* $e \geq 0$ *en* s *partes* a una tupla de pares $\mathbf{e} = ((e_1, m_1), \dots, (e_s, m_s))$ tal que e_i, m_i son números naturales que cumplen que $(e_1, m_1) \leq \cdots \leq (e_s, m_s)$ con el orden lexicográfico y $|\mathbf{e}| := \sum_{i=1}^{s} e_i m_i = e$. La notamos $\mathbf{e} = (e_1^{m_1}, \dots, e_s^{m_s})$. Ahora sí, fijemos una partición entera $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ de un entero d tal que $r \geq 2$, $d = \sum_{i=1}^{r} d_i$ y $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_r$ y $\mathbf{e} = (e_1^{m_1}, \dots, e_s^{m_s})$ una partición entera con multiplicidades de un entero $e \leq d$. Definimos el conjunto $\mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ de foliaciones S-logarítmicas de tipo $(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ como la clausura Zariski dentro de $\mathcal{F}(n, d-e)$ del conjunto de 1-formas diferenciales de la forma $\frac{\omega}{G}$ donde

$\omega = \left(\prod_{i=1}^{r} F_i\right) \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$ es una 1-forma logarítmica de tipo $\mathbf{d}$ divisible por un polinomio de la forma $G = \prod_{j=1}^{s} G_j^{e_j}$, donde los G_j son polinomios homogéneos e irreducibles de grado e_j y tales que los F_i, G_j son todos distintos entre sí. Estos conjuntos de foliaciones generalizan los anteriormente mencionados: en efecto, probaremos que las componentes excepcional, $SLog(2,5)$ y $SLog(3,4)$ son los conjuntos $\mathcal{L}((2,3),(1^2))$, $\mathcal{L}((2,5),(1^2))$ y $\mathcal{L}((3,4),(1^1))$ respectivamente. En general, estos conjuntos de foliaciones no son irreducibles y aún cuando sí lo son, no siempre definen componentes irreducibles del correspondiente espacio de foliaciones. Pero existe una colección infinita de estos conjuntos de foliaciones que sí definen componentes irreducibles del correspondiente espacio de móduli de foliaciones: las foliaciones $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$ para todo $k \geq 2$.

Nuestro objetivo principal en este trabajo será estudiar la geometría y probar la estabilidad de los conjuntos $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$ de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k,k+1),(1^1))$ para $k \geq 2$. Para ello, primero definiremos en detalle las foliaciones S-logarítmicas en general, mostrando algunos ejemplos y dando algunas propiedades generales. Luego, nos enfocaremos en definir una parametrización, estudiar la geometría y probar la estabilidad (es decir, que forman componentes irreducibles del correpondiente espacio de móduli de foliaciones) de los conjuntos $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$. Así, se obtiene una colección infinita de nuevas componentes irreducibles del espacio de foliaciones $\mathcal{F}(n,d)$ que da componentes irreducibles para d arbitrariamente grande (aumentando el valor de k) y además contiene a la componente excepcional mencionada anteriormente.

El contenido de esta tesis se divide de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 hacemos un breve repaso de definiciones básicas y algunas herramientas de teoría de foliaciones que servirán para desarrollar la teoría y dar contexto a las construcciones y resultados de los siguientes capítulos. Definiremos el espacio de móduli de foliaciones singulares y haremos especial énfasis en el estudio de foliaciones de codimensión 1 en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n$, introduciendo algunas notaciones, definiciones y resultados que usaremos a lo largo del trabajo. Mostraremos y estudiaremos algunos ejemplos de componentes irreducibles de tal espacio de móduli.

El objetivo del Capítulo 2 es definir nuevas familias de foliaciones de codimensión 1 en el espacio proyectivo complejo, llamadas *foliaciones S-logarítmicas*, que consisten de 1-formas proyectivas que admiten un factor integrante *racional* (es decir un cociente de polinomios con cierta descomposición prefijada en factores irreducibles). Por ende, consisten de ciertas 1-formas de tipo logarítmico *con contenido* (es decir, divisibles por algún polinomio), a las que se las divide por su contenido (el m.c.d. de sus coeficientes polinomiales). De este modo, para cada componente $\mathcal{X}$ del espacio de móduli de foliaciones de codimensión 1, definiremos el espacio de pares dado por un polinomio y una 1-forma diferencial tal que el polinomio divide a la 1-forma. Lo llamaremos *espacio de división*. Este espacio de división será el dominio natural de un *morfismo de división* (que consiste en dividir a una 1-forma por su contenido) cuya imagen dará lugar a las *foliaciones S-logarítmicas* cuando $\mathcal{X}$ sea una componente logarítmica. En algunos casos particulares, daremos la descomposición en componentes irreducibles del espacio de división. Esto dará lugar a una parametrización racional de algunos conjuntos de foliaciones S-logarítmicas que exhibiremos y estudiaremos en el siguiente capítulo.

En el Capítulo 3 usaremos las definiciones y la descomposición del espacio de división exhibida en el Capítulo 2 para estudiar detalladamente la geometría del conjunto de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$, al que llamaremos $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$. Para ello, en primer lugar definimos una parametrización (uni)racional de $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$. Luego, estudiamos su base locus y calculamos su descomposición en componentes irreducibles. Además, estudiamos el conjunto singular de una foliación genérica de $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$, describiendo sus singularidades en codimensión 2 y su *conjunto de Kupka*. También, probamos que la parametrización exhibida anteriormente es genéricamente inyectiva y con esto en mente calculamos la dimensión del conjunto $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$. Finalmente, calculamos el espacio tangente al espacio de división y la derivada Zariski del morfismo de división.

Finalmente, en el Capítulo 4 probaremos la estabilidad del conjunto de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$ (es decir, demostraremos que el conjunto $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ es una componente irreducible del correspondiente espacio de móduli de foliaciones). Para ello, demostraremos que la derivada Zariski de su parametrización natural (definida en el capítulo anterior) es sobreyectiva en un punto genérico de su dominio. Para describir los vectores tangentes Zariski al espacio de móduli de foliaciones, demostraremos una serie de resultados técnicos y de interés independiente. Es esperable que al restringir una foliación genérica de esta componente, se pueda deducir información sobre el espacio tangente al espacio de móduli alrededor de ese elemento usando el famoso Lema de *de Rham-Saito* (ver por ejemplo [35]), que establece que la cohomología de un cierto complejo es nula (para más detalles, ver [31, Appendice]). Sin embargo, existe un detalle técnico no trivial: si bien el lema de de Rham-Saito podría ser muy útil en esta situación, no es posible usar este resultado directamente porque no se cumplen las hipótesis (el conjunto de Kupka tiene singularidades en codimensión 1). Por eso, formularemos un *lema de división* adaptado, cuya demostración es bastante técnica y será dada en una sección independiente (Sección 4.2). Este lema nos dirá en nuestro caso que la cohomología del correspondiente complejo está generada por un único elemento como módulo sobre el álgebra de polinomios, al que llamaremos γ. Utilizando estos resultados, demostraremos la sobreyectivdad de la derivada Zariski de la parametrización y por ende la estabilidad de $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$. Así, se obtiene una nueva colección infinita de componentes irreducibles del espacio de móduli de foliaciones singulares de codimensión 1.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Generalidades de foliaciones

Sea X una variedad algebraica compleja, suave, irreducible y de dimensión n. Sea TX su fibrado tangente, Ω_X^1 su fibrado de 1-formas diferenciales y Ω_X^* el álgebra exterior de 1-formas en X. Geométricamente, una foliación no singular de dimensión r sobre X es una descomposición de X en subvariedades inmersas de dimensión r, a las que llamaremos *hojas*. Además, localmente y en un sistema de coordenadas analíticas apropiado, estas hojas se ven como r-planos paralelos. Notar que estas hojas determinan un subfibrado $\mathcal{D}$ de TX de rango r dado en cada punto por el espacio tangente a sus hojas. Esto da lugar a la noción más general de *distribución*.

Definición 1. Una *distribución no singular de dimensión r en X* es un subfibrado $\mathcal{D}$ de TX de rango r. Además, decimos que una subvariedad $Y \subseteq X$ es una *subvariedad integrable de $\mathcal{D}$* si para todo $y \in Y$ vale que $T_yY = \mathcal{D}_y$. También, decimos que una distribución $\mathcal{D}$ en X es *completamente integrable* si admite una subvariedad integrable de $\mathcal{D}$ por cada punto de X.

En general, no es cierto que toda distribución admita una subvariedad integrable por cada punto. Las distribuciones que satisfacen esa propiedad son las distribuciones *involutivas*, gracias al Teorema de Frobenius que enunciaremos a continuación.

Definición 2. Una distribución $\mathcal{D}$ se dice *involutiva* si es cerrada por el corchete de Lie, es decir que satisface que $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]_x = \mathcal{D}_x$ para todo $x \in X$.

Teorema 3 (Frobenius). *Sea $\mathcal{D}$ una distribución en una variedad X. Entonces X es completamente integrable si y sólo si $\mathcal{D}$ es involutiva.*

Demostración. Para una demostración, ver por ejemplo [36, Propositions 1.59 & 1.60]. □

De manera análoga, nuestra foliación determina un subfibrado $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ de Ω^1_X dado por las 1-formas que en cada punto se anulan sobre el espacio tangente a sus hojas. Y del mismo modo, queremos condiciones sobre $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ para que la distribución correspondiente admita subvariedades integrables por cada punto. Esta condición está dada porque el ideal generado por $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ sea un ideal diferencial.

Definición 4. Dada una distribución $\mathcal{D}$, llamamos $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ al subfibrado de Ω^1_X dado por anulador de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{I}(\mathcal{D}) \subseteq \Omega^*_X$ al ideal generado por $\mathcal{J}(\mathcal{D})$.

Definición 5. Sea $\mathcal{I} \subseteq \Omega^*(X)$ un ideal. Llamamos $d\mathcal{I}$ al subfibrado de Ω^*_X dado en un germen de X alrededor de x por la igualdad $(d\mathcal{I})_x = \{(d\omega)_x : \omega \in \mathcal{I}_x\}$. Además, decimos que $\mathcal{I}$ es un *ideal diferencial* si satisface que $d\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$.

Teorema 6. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución en X y sea $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ el ideal generado por el anulador de $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{D}$ es una distribución involutiva si y sólo si el ideal $\mathcal{I}$ es diferencial.*

Demostración. Para una demostración, ver [36, Proposition 2.30]. □

Con estos conceptos en mente, podemos dar la definición de *foliación regular*.

Definición 7. Una foliación regular $\mathcal{F}$ de *codimensión q* en X está dada por un subfibrado $\mathcal{J}(\mathcal{F})$ de Ω^1_X de rango q tal que el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{J}(\mathcal{F}) \rangle$ de Ω^*_X es un ideal diferencial. Análogamente, una foliación regular $\mathcal{F}$ de *dimensión r* en X está dada por una distribución $\mathcal{D}$ de rango r en X que sea involutiva (y por ende completamente integrable gracias al Teorema 3 de Frobenius). Notar que si se cumple que $\mathrm{Ann}(\mathcal{D}) = \mathcal{I}(\mathcal{F})$ y $\mathrm{Ann}(\mathcal{I}(\mathcal{F})) = \mathcal{D}$, entonces las definiciones de foliación regular de codimensión q y de dimensión $n - q$ son equivalentes. Además, llamamos *hojas* de la foliación a sus subvariedades integrables. Notar que en general, estas subvariedades integrables no son variedades algebraicas; cuando lo son, las llamamos *hojas algebraicas*.

En general, no es cierto que cualquier variedad X admita una foliación regular de codimensión q. De hecho, la existencia de foliaciones está determinada por la anulación de ciertas clases de Chern del fibrado normal a la foliación (ver [1]). Por ejemplo, el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n$ no admite foliaciones regulares. Así, buscamos definir una noción más general, las *foliaciones singulares* o *con singularidades*.

Definición 8. Una *distribución singular* $\mathcal{D}$ en X es una distribución regular en un abierto $U \subseteq X$ maximal de modo que $\mathrm{codim}(X \setminus U) \geq 2$. Además, llamamos *conjunto singular* de $\mathcal{D}$ al conjunto $S(\mathcal{D}) = X \setminus U$. Del mismo modo, una *foliación singular* $\mathcal{F}$ es una foliación regular en el abierto $U = X \setminus S(\mathcal{F})$.

Observación 9. Gracias al Teorema 3 de Frobenius, una foliación singular $\mathcal{F}$ de (co)dimensión q induce una descomposición $X \setminus S(\mathcal{F}) := \bigsqcup_{i \in I} L_i$ en subvariedades holomorfas de codimensión q (sus hojas) tal que

- Para cada $x \in X \setminus S(\mathcal{F})$ existe una única hoja L_x de $\mathcal{F}$ tal que $x \in L_x$
- Para cada $x \in X$, existe una *carta adaptada* a $\mathcal{F}$ alrededor de x, es decir una carta $\phi : U \to V_q \times V_{n-q}$ tal que $x \in U$; V_q, V_{n-q} son abiertos de $\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^{n-q}$ respectivamente y para cada $(v, v') \in V_q \times V_{n-q}$ vale que $\phi^{-1}(\{v\} \times V_{n-q})$ es un abierto de la hoja $L_{\phi^{-1}(v,v')}$

Observación 10. El caso que nos interesa particularmente en este trabajo es el caso de foliaciones de codimensión 1. En tal caso, una foliación viene dada por una familia de 1-formas (no idénticamente nulas) $\omega_i \in \Omega^1_X(U_i)$ definidas en un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X que satisfacen una condición de compatibilidad $\omega_i = f_{ij}\omega_j$, para ciertas $f_{ij} \in \mathcal{O}^*_X(U_i \cap U_j)$ que satisfacen la condición de cociclo $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$ para todos $i, j, k \in I$. Notar que en este caso, $S(\mathcal{F}) = \{x \in X : \omega_i(x) = 0 \text{ si } x \in U_i\}$ y que las $f_{i,j}$ definen un cociclo en la cohomología $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$. Luego, si $\mathcal{L}$ es el line bundle que representa el cociclo en cuestión, la familia de 1-formas ω_i en cuestión define una 1-forma diferencial *torcida*, es decir una sección global $\omega \in H^0(\Omega^1_X \otimes \mathcal{L})$. Por otro lado, dos familias ω_i y ω'_i con cociclos asociados f_{ij} y f'_{ij} respectivamente definen la misma foliación si existen funciones $g_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ tales que $\omega_i = g_i\omega'_i$ para todo $i \in I$. Esto implica que $f'_{ij} = g_i f_{ij} g_j^{-1}$ y por ende f_{ij} y f'_{ij} definen el mismo line bundle. Si suponemos que $f_{ij} = f'_{ij}$, las funciones g_i definen una sección $g \in H^0(X, \mathcal{O}^*_X)$.

Con esta observación en mente, podemos definir el espacio de móduli de foliaciones de codimensión 1 en X asociadas a un line bundle $\mathcal{L}$.

Definición 11. Dado $\mathcal{L} \in Pic(X)$ definimos el *espacio de móduli de foliaciones singulares* de codimensión 1 en X asociado al line bundle $\mathcal{L}$ como

$$\mathcal{F}(X, \mathcal{L}) := \left\{[\omega] \in H^0(\Omega^1_X \otimes \mathcal{L})/\sim : \omega \wedge d\omega = 0 \text{ y } \operatorname{codim}(S(\omega)) \geq 2\right\},$$

donde la equivalencia $\sim$ viene dada por multiplicación por secciones de $H^0(X, \mathcal{O}^*_X)$ y $S(\omega)$ denota el conjunto singular de la foliación definida por ω. Además, llamamos *condición de integrabilidad Frobenius* para $\omega \in H^0(\Omega^1_X \otimes \mathcal{L})$ a la condición

$$\omega \wedge d\omega = 0. \tag{1.1}$$

Una 1-forma diferencial global genérica en X tiene ceros aislados (porque es una sección genérica del fibrado Ω^1_X y $\operatorname{rk}(\Omega^1_X) = \dim(X)$). Sin embargo, una 1-forma diferencial *integrable y tal que* $d\omega(x) \neq 0$ en algún punto x de su conjunto singular cumple una propiedad sorprendente: su conjunto de ceros tiene una componente irreducible de codimensión 2, como muestra el siguiente resultado notable de I. Kupka, probado por primera vez en [27].

Teorema 12 (Kupka)**.** *Sea X una variedad regular sobre $\mathbb{C}$, U un entorno abierto de $x \in X$ y sea $\omega \in \Omega^1_X(U)$ una 1-forma integrable tal que $d\omega(x) \neq 0$. Entonces existe un entorno analítico de x con coordenadas $y_1, \dots, y_n$ tal que ω se escribe en esas coordenadas como*

$$\omega = F_1(y_1, y_2)dy_1 + F_2(y_1, y_2)dy_2$$

para ciertas funciones analíticas F_1, F_2.

Demostración. Para una demostración, ver [29, Teorema 1.8]. □

Con esto en mente, definimos el *conjunto de Kupka* de una foliación.

Definición 13. Sea $\mathcal{F}$ una foliación singular de codimensión 1 en X definida por $\omega \in H^0(\Omega^1_X \otimes \mathcal{L})$. Decimos que $x \in X$ es un *punto singular de tipo Kupka* de $\mathcal{F}$ si $\omega(x) = 0$ y $d\omega(x) \neq 0$. El *conjunto de Kupka* $K(\mathcal{F})$ es el conjunto de puntos singulares de tipo Kupka de $\mathcal{F}$.

Observación 14. Gracias al Teorema 12, $K(\mathcal{F})$ es o bien vacío o bien puro de codimensión 2. En efecto, alrededor de cada punto singular de tipo Kupka, la foliación se puede escribir como el pullback de un germen de foliación en $\mathbb{C}^2$ por un morfismo.

En este trabajo tendremos especial interés en el caso en que $X = \mathbb{P}^n$. En este caso, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ y cada line bundle de $\mathbb{P}^n$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ para cierto $d \in \mathbb{Z}$ (ver [22, Corollary 6.17]). Como además $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^n}) \simeq \mathbb{C}^*$, para cada $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, queda definido el espacio de móduli

$$\mathcal{F}(n,d) := \left\{[\omega] \in \mathbb{P}H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)) \,:\, \omega \wedge d\omega = 0 \text{ y } \operatorname{codim}(S(\omega)) \geq 2\right\}. \tag{1.2}$$

Observación 15. El espacio $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ puede ser caracterizado de una forma muy concreta. En efecto, tensorizando la sucesión exacta corta de Euler (ver [22, Theorem 8.13]) por el line bundle $\mathcal{O}(d)$ obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0.$$

Tomando secciones globales, podemos interpretar a cada elemento del espacio $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ como una 1-forma homogénea afín en $\mathbb{C}^{n+1}$ con una escritura de la forma $\omega = \sum_{i=0}^{n} a_i(z)dz_i$ para ciertos polinomios $a_i \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ homogéneos de grado $d-1$ que satisfacen la *condición de descenso*

$$(1.3) \qquad i_R(\omega) = \sum_{i=0}^{n} a_i z_i = 0,$$

donde $R = \sum_{i=0}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ es el campo radial. De este modo, $\mathcal{F}(n,d)$ es una subvariedad *quasi-proyectiva* de $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$, ya que la condición $\omega \wedge d\omega = 0$ de integrabilidad impone $\binom{n+1}{3}$ ecuaciones cuadráticas sobre los coeficientes de a_i y el hecho de que $\mathrm{codim}(S(\omega)) \geq 2$ se interpreta como que los polinomios a_i no tienen factores en común (que es una condición abierta).

Definición 16. Sea $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(z)dz_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ una 1-forma diferencial. Definimos el *contenido* de ω como el máximo común divisor de los polinomios a_i y lo denotamos $\mathrm{co}(\omega)$. Por otro lado, decimos que $[\omega] \in \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ define una *foliación con contenido* si ω satisface la condición de Frobenius (1.1) y además $\mathrm{co}(\omega) \neq 1$.

Observación 17. Notar que si $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ define una foliación con contenido de grado c, entonces $\frac{\omega}{\mathrm{co}(\omega)} \in \mathcal{F}(n, d-c)$. En efecto,

$$\frac{\omega}{\mathrm{co}(\omega)} \wedge d\left(\frac{\omega}{\mathrm{co}(\omega)}\right) = \frac{1}{\mathrm{co}(\omega)^3}\omega \wedge (-d(\mathrm{co}(\omega)) \wedge \omega + \mathrm{co}(\omega)d\omega) = 0,$$

ya que $\omega \wedge \omega = 0$ y $\omega \wedge d\omega = 0$. Por ende, podemos pensar una foliación $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ con contenido de grado c como un foliación de $\mathcal{F}(n, d-c)$. Del mismo modo, si $[\omega] \in \mathcal{F}(n,d)$ y P es un polinomio homogéneo de grado e, entonces $P\omega$ define una foliación con contenido, ya que $\omega \wedge \omega = 0$, $\omega \wedge d\omega = 0$ y por ende

$$P\omega \wedge d(P\omega) = P\omega \wedge (dP \wedge \omega + Pd\omega) = 0.$$

Definición 18. Definimos el conjunto $\overline{\mathcal{F}}(n,d)$ como la clausura Zariski de $\mathcal{F}(n,d)$ dentro del espacio ambiente $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ y la *frontera* de $\mathcal{F}(n,d)$ como el espacio $\partial\mathcal{F}(n,d) := \overline{\mathcal{F}}(n,d) \setminus \mathcal{F}(n,d)$.

Observación 19. Notar que la condición $\mathrm{codim}(S(\omega)) \geq 2$ es una condición abierta en $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n})$, por lo que $\partial\mathcal{F}(n,d)$ es la frontera topológica de $\mathcal{F}(n,d)$. Más aún, todo elemento de $\partial\mathcal{F}(n,d)$ da una foliación con contenido. Esto quiere decir (en algún sentido libre) que hay algunas foliaciones de $\mathcal{F}(n,e)$ con $e \leq d$ que se pueden obtener como límite de foliaciones de $\mathcal{F}(n,d)$, es decir que están *escondidas* en la frontera de $\mathcal{F}(n,d)$.

1.2 Espacio de móduli $\mathcal{F}(n, d)$

1.2.1 Estabilidad

El estudio de la geometría de los espacios de móduli de foliaciones de singulares de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ es muy rica y ha sido motivo de investigación en los últimos años, ver por ejemplo [3], [4], [7], [8], [10], [11], [12], [13], [17], [26],, entre otros. Naturalmente, muchos autores buscaron caracterizar y estudiar sus componentes irreducibles (y más en general, familias de foliaciones interesantes).

Dentro de los conceptos importantes en el estudio de familias de foliaciones singulares en el espacio proyectivo, destacamos los de *estabilidad* y *rigidez* de una familia de foliaciones, que definiremos a continuación.

Definición 20. Sean $n, d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Decimos que un subconjunto de $\mathcal{F}(n, d)$ es *estable* si es una componente irreducible de $\mathcal{F}(n, d)$. Además, decimos que un subconjunto estable de $\mathcal{F}(n, d)$ es *rígido* si existe un abierto U de tal subconjunto tal que para cada par de foliaciones $\omega, \omega' \in U$ existe una transformación $p \in PGL(n+1)$ lineal proyectiva tal que $\omega = p^*\omega'$.

A priori, no es fácil probar la estabilidad de una familia de foliaciones. Para ello, es posible calcular el espacio tangente al espacio de móduli de foliaciones en un punto genérico de esa familia y compararlo con el espacio tangente a esa familia de foliaciones. Probaremos que si estos dos espacios tangentes coinciden, entonces tal familia es estable. Para ello, describamos el espacio tangente al espacio $\mathcal{F}(n, d)$.

En general, sea W un espacio vectorial y para cada $w \in W$, sea $[w]$ su clase en $\mathbb{P}W$. Tenemos entonces una identificación natural del espacio tangente $T_{[w]}\mathbb{P}W$ de $\mathbb{P}W$ en el punto $[w]$ con $W/[w]$. En ese sentido, tenemos una identificación del espacio tangente $T_\omega \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)) \simeq H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))/\langle[\omega]\rangle$.

Proposición 21. *El espacio tangente Zariski a $\mathcal{F}(n, d)$ en $[\omega]$ es el espacio*

$$T_{[\omega]}\mathcal{F}(n, d) = \left\{\eta \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)) \,:\, \eta \wedge d\omega + \omega \wedge d\eta = 0\right\} / \langle \omega \rangle.$$

Demostración. El espacio tangente a $\mathcal{F}(n, d)$ en el punto $[\omega]$ está dado por el conjunto de deformaciones de primer orden $\operatorname{Spec}\left(\frac{\mathbb{C}[\varepsilon]}{(\varepsilon^2)}\right) \to \mathcal{F}(n, d)$ que mandan el punto cerrado de $\operatorname{Spec}\left(\frac{\mathbb{C}[\varepsilon]}{(\varepsilon^2)}\right)$ en $[\omega]$. Por ende, tales deformaciones $\omega + \varepsilon\eta$ de primer orden deben satisfacer la condición $(\omega + \varepsilon\eta) \wedge d(\omega + \varepsilon\eta) = 0$ módulo ε^2. Como además sabemos que ω satisface la condición de Frobenius (1.1), esta condición es equivalente a la siguiente *condición de tangencia*

$$\eta \wedge d\omega + \omega \wedge d\eta = 0.$$

Esto concluye la demostración. □

Definición 22. Llamamos *condición de tangencia* de η a $\omega \in \mathcal{F}(n,d)$ a la condición

$$\eta \wedge d\omega + \omega \wedge d\eta = 0. \tag{1.4}$$

Observación 23. Sea $\omega \in F(n,d)$ y supongamos que $\eta \in T_{[\omega]}\mathcal{F}(n,d)$ cumple la condición (1.4) de tangencia a ω. Entonces para todo polinomio homogéneo P, vale la condición de tangencia de $P\eta$ a $P\omega$. En efecto,

$$P\eta \wedge d(P\omega) + P\omega \wedge d(P\eta) = 0 = P^2(\eta \wedge d\omega + \omega \wedge d\eta) = 0.$$

Ahora sí, mostramos un criterio para probar que una familia de foliaciones es una componente irreducible y genéricamente reducida del espacio de móduli de foliaciones $\mathcal{F}(n,d)$. Este resultado se deduce inmediatamente del siguiente Lema.

Lema 24. *Sea X un esquema reducido e irreducible, $x \in X$ un punto no singular y $f : X \to Y$ un morfismo entre esquemas. Supongamos además que la derivada Zariski $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ es sobreyectiva. Entonces la imagen $\overline{f(X)}$ es una componente irreducible genéricamente reducida de Y.*

Demostración. Como un morfismo de anillos manda nilpotentes en nilpotentes, el morfismo f se factoriza por Y_{red} y por ende tenemos una inclusión de espacios vectoriales $d_x f(T_x X) \subseteq T_{f(x)} Y_{\text{red}} \subseteq T_{f(x)} Y$. Estas inclusiones son igualdades por hipótesis, por lo que Y es reducido en $f(x)$ y en definitiva es genéricamente reducido a lo largo de la componente irreducible que contiene a a $f(x)$. Finalmente, como x es un punto no singular y $d_x f(T_x X)$ tiene la misma dimensión que $T_{f(x)} Y$, obtenemos lo deseado. □

De este resultado se desprende el siguiente criterio para probar que un subconjunto de $\mathcal{F}(n,d)$ es una componente irreducible de $\mathcal{F}(n,d)$.

Corolario 25. *Sea X un esquema reducido e irreducible, $x \in X$ un punto no singular y $f : X \to \mathcal{F}(n,d)$ un morfismo con derivada Zariski $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ sobreyectiva. Entonces la imagen $\overline{f(X)}$ es una componente irreducible genéricamente reducida de $\mathcal{F}(n,d)$.*

1.2.2 Foliaciones logarítmicas y racionales

En esta subsección, estudiamos ciertas familias estables de foliaciones, llamadas foliaciones logarítmicas y racionales. Estas componentes del espacio de móduli de foliaciones fueron estudiadas en diversos trabajos. Destacamos particularmente las citas [26], [3] y [11], donde los autores tienen un enfoque similar al que expondremos a continuación.

Definición 26. Fijemos enteros $d \geq 0$, $n \geq 3$, $r \geq 2$ y una partición entera $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ de d tal que $d = \sum_{i=1}^r d_i$ y $0 < d_1 \leq \dots \leq d_r$. Una *1-forma diferencial logarítmica de tipo* $\mathbf{d}$ *en* $\mathbb{P}^n$ está definida por una 1-forma diferencial torcida $\omega = \left(\prod_{i=1}^r F_i\right) \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$ donde los F_i son polinomios distintos, irreducibles y homogéneos de grado d_i en las variables $z_0, \dots, z_n$ y $\lambda_i \in \mathbb{C}$ satisfacen $\sum_{i=1}^r \lambda_i d_i = 0$. La *componente logarítmica de tipo* $\mathbf{d}$ *en* $\mathbb{P}^n$ es la clausura Zariski en $\mathcal{F}(n, d)$ del conjunto de 1-formas diferenciales logarítmicas de tipo $\mathbf{d}$ en $\mathbb{P}^n$ y la denotamos $\mathcal{L}(\mathbf{d})$. En el caso en que $r = 2$, también las llamamos *1-forma diferencial racional de tipo* $\mathbf{d}$ *en* $\mathbb{P}^n$, *componente logarítmica de tipo* $\mathbf{d}$ *en* $\mathbb{P}^n$ y las denotamos $\mathcal{R}(\mathbf{d})$.

De manera más concisa, podemos definir una función multilineal

$$\mu_{\mathbf{d}} : \Lambda(\mathbf{d}) \times \prod_{i=1}^r S_{d_i} \to H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$$

definida por la fórmula $\mu_{\mathbf{d}}(\lambda, \mathbf{F}) = F \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$ tal que $S_{d_i} = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d_i))$, $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_r) \in \prod_{i=1}^r S_{d_i}$, $\Lambda(\mathbf{d}) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r : \sum_{i=1}^r \lambda_i d_i = 0\right\}$ y $F = \prod_{i=1}^r F_i$. Esta función multilineal induce un mapa racional

$$\rho_{\mathbf{d}} : X_{\mathbf{d}} := \mathbb{P}(\Lambda(\mathbf{d})) \times \prod_{i=1}^r \mathbb{P}S_{d_i} \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)). \tag{1.5}$$

La componente logarítmica $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ de tipo $\mathbf{d}$ es la clausura Zariski de la imagen de $\rho_{\mathbf{d}}$. En el caso de las foliaciones racionales (es decir $r = 2$), el espacio $\Lambda(\mathbf{d})$ tiene dimensión 1 por lo que $X_{\mathbf{d}} = \mathbb{P}S_{d_1} \times \mathbb{P}S_{d_2}$. Además, en este caso vale que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-d_2}{d_1}$ y por lo tanto podemos suponer (salvo multiplicación por escalares) que $\lambda_1 = d_2$ y $\lambda_2 = -d_1$.

Observación 27. Si $r = 2$ y $x = (F_1, F_2) \in X_{\mathbf{d}}$, entonces $\rho_{\mathbf{d}}(x) = i_R(dF_1 \wedge dF_2)$, donde i_R indica la contracción por el campo radial. Por lo tanto, la derivada Zariski de $\rho_{\mathbf{d}}$ en el punto (F_1, F_2) está dada por la fórmula

$$d_x \rho_{\mathbf{d}}(F_1', F_2') = i_R(dF_1 \wedge dF_2' + dF_1' \wedge dF_2).$$

Aquí, $F_1' \in T_{F_1}\mathbb{P}S_{d_1} = S_{d_1}/\langle F_1 \rangle$ y $F_2' \in T_{F_2}\mathbb{P}S_{d_2} = S_{d_2}/\langle F_2 \rangle$.

Observación 28. Toda 1-forma diferencial logarítmica $\omega = F \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$ de tipo $\mathbf{d}$ en $\mathbb{P}^n$ es integrable. En efecto, podemos deducir que $i_R(\omega) = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i d_i\right) F$ y $d\omega = \frac{dF}{F} \wedge \omega$ haciendo cálculos directos. Por ende, $i_R(\omega) = 0$ y $\omega \wedge d\omega = 0$.

Como su nombre lo sugiere, las variedades $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ son estables, es decir que son una componente irreducible del correspondiente espacio de foliaciones de codimensión 1.

Teorema 29. *La variedad $\mathcal{L}(\mathbf{d}) \subseteq \mathcal{F}(n,d)$ de 1-formas logarítmicas de tipo* **d** *es una componente irreducible de $\mathcal{F}(n,d)$. Más aún, el esquema $\mathcal{F}(n,d)$ es genéricamente reducida a lo largo de $\mathcal{L}(\mathbf{d})$.*

Demostración. Para el caso racional, este resultado fue probado en [17] y [13]. En general, este resultado fue demostrado por primera vez en [3] y más recientemente en [11], dando una demostración de este hecho usando teoría de deformaciones. □

Notar que en general, una 1-forma $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(k))$ no nula nunca puede ser cerrada y por ende tampoco exacta. En efecto, usando la fórmula mágica de Cartan con el campo radial obtenemos que $k\omega = i_R(d\omega) + d(i_R\omega)$ (ver [26, Lemme 1.2]). Por ende, si $d\omega = 0$, obtenemos que $\omega = 0$ (por la condición de descenso (1.3)). En ese sentido, lo más próximo que puede estar una foliación de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ de estar definida por una 1-forma cerrada o exacta es serlo *salvo multiplicación por una función racional*, a la que llamaremos *factor integrante* o *integral primera* respectivamente.

Definición 30. Sea $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(k))$ una 1-forma diferencial y sean f, g dos secciones locales de los haces $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ respectivamente, por lo que ambas están dadas por un cociente de polinomios. Decimos que f es un *factor integrante* de ω si $d\left(\frac{\omega}{f}\right) = 0$ y que g es una *integral primera racional* de ω si $\omega \wedge dg = 0$.

Observación 31. Notar que si g es una integral primera racional de ω, entonces existe f función racional tal que $\frac{\omega}{f} = dg$ y por ende f es un factor integrante de ω. Más aún, toda 1-forma diferencial logarítmica $\omega = F\sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$ admite un factor integrante polinomial F. Y en el caso en que $\omega = \lambda_1 F_2 dF_1 + \lambda_2 F_1 dF_2$ es una 1-forma diferencial racional, también admite una integral primera racional dada por $\frac{F_1^{d_2}}{F_2^{d_1}}$.

Cuando una 1-forma diferencial admite una integral primera racional, entonces la foliación que define posee una familia uniparamétrica de hojas algebraicas, a la que llamaremos *pencil* de hipersuperficies.

Definición 32. Un *pencil* de hipersuperficies de grado r en $\mathbb{P}^n$ es un subespacio de dimensión 2 de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(r)) = S_r$. Decimos que el polinomio $G \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(r'))$ con $r' \leq r$ es una *componente fija* del pencil si todos los polinomios del pencil son divisibles por G. Decimos que un pencil es *irreducible* si la hipersuperficie genérica es una variedad algebraica irreducible.

Veamos que si tomamos una 1-forma diferencial racional con una escritura de la forma $\omega = \lambda_1 F_2 dF_1 + \lambda_2 F_1 dF_2$ donde $d_1 = \deg(F_1)$ es coprimo con $d_2 = \deg(F_2)$ y F_1 y F_2 son irreducibles, entonces la hoja genérica de la foliación asociada tiene grados $d_1 d_2$. Es decir, que el pencil generado por $F_1^{d_2}$ y $F_2^{d_1}$ es irreducible.

Proposición 33. *Sean F_1 y F_2 polinomios irreducibles de grados d_1 y d_2 respectivamente tales que d_1 es coprimo con d_2. Entonces el pencil generado por $F_1^{d_2}$ y $F_2^{d_1}$ es irreducible.*

Demostración. Supongamos que el pencil generado por $F_1^{d_2}$ y $F_2^{d_1}$ es reducible. Notar que el conjunto $\mathscr{R}(d_1d_2)$ de polinomios homogéneos reducibles de grado d_1d_2 es una unión de variedades irreducibles de Segre:

$$\mathscr{R}(d_1d_2) = \bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{d_1d_2}{2} \rfloor} \left\{ AB \,:\, A \in S_i \text{ y } B \in S_{d_1d_2-i} \right\}.$$

Por ende, deducimos que existe un número $1 \leq i \leq \lfloor \frac{d_1d_2}{2} \rfloor$ tal que cualquier elemento del pencil generado por $F_1^{d_2}$ y $F_2^{d_1}$ se escribe como producto de dos polinomios de grados i y $d_1d_2 - i$ respectivamente. En otras palabras, para cada par $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existen polinomios $A_{(\lambda,\mu)}$ y $B_{(\lambda,\mu)}$ de grados i y $d_1d_2 - i$ respectivamente tales que

$$\lambda F_1^{d_2} + \mu F_2^{d_1} = A_{(\lambda,\mu)} B_{(\lambda,\mu)}.$$

Tomando $\lambda = 0$ y $\mu = 1$ obtenemos que $F_2^{d_1} = A_{(0,1)}B_{(0,1)}$. Por lo tanto, deducimos que $i = \deg(A_{(0,1)})$ debe ser múltiplo de d_2 ya que F_2 es irreducible. Del mismo modo, tomando $\lambda = 1$ y $\mu = 0$ obtenemos que $F_1^{d_2} = A_{(1,0)}B_{(1,0)}$ y por ende $i = \deg(A_{(1,0)})$ debe ser múltiplo de d_1 ya que F_1 es irreducible. Como el m.c.d de d_1 y d_2 es d_1d_2, obtenemos que i es un múltiplo de d_1d_2, lo cual contradice que $1 \leq i \leq \lfloor \frac{d_1d_2}{2} \rfloor$. Concluimos entonces que el pencil generado por $F_1^{d_2}$ y $F_2^{d_1}$ es irreducible. Esto concluye la demostración. □

Observación 34. Notar que si $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(k))$ admite una integral primera racional $f = \frac{A}{B}$ donde A, B tienen el mismo grado, entonces $\lambda A + \mu B$ son todas hojas de la foliación generada por ω, ya que df se anula en las hipersuperficies $f = c$ para todo $c \in \mathbb{C}$. Luego, podemos pensar una tal ω como una foliación cuyas hojas definen un pencil de hipersuperficies. Además, suponiendo que A, B son coprimos, podemos suponer que tal pencil no tiene componentes fijas. Más aún, a toda ω que admite una integral primera racional se le puede asignar un *único* pencil irreducible tal que sus hipersuperficies sean las hojas de ω. Esto es una consecuencia del Teorema de Bertini (ver [26, Theoreme 3.6.4]).

El siguiente resultado da un criterio para hallar las componentes irreducibles múltiples de las hipersuperficies de un pencil sin componentes fijas

Proposición 35. *Sea $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(k))$ una 1-forma sin contienido y que admite una integral primera $f = \frac{A}{B}$ con A, B polinomios homogéneos del mismo grado y* *coprimos entre sí. Luego, el pencil generado por A y B admite finitas hipersuperficies múltiples, es decir, existen sólo finitos polinomios irreducibles y homogéneos $H_1, \dots, H_s$ tales que H_i^2 divide a $\mu_{H_i} A + \nu_{H_i} B$ para ciertos $\mu_{H_i}, \nu_{H_i} \in \mathbb{C}$. Más aún, vale que*

$$A\,dB - B\,dA = \prod_{i=1}^{s} H_i^{e(H_i)-1}\omega$$

donde $e(H_i) = \max_{k\in\mathbb{N}} \left\{ H_i^k \text{ divide a } \mu_{H_i} A + \nu_{H_i} B \right\}$.

Demostración. La demostración de este hecho puede ser encontrada en [26, Proposition 3.5.1]. □

El siguiente resultado caracteriza todas las 1-formas en $\mathbb{P}^n$ que admiten un factor integrante polinomial.

Proposición 36. *Sea ω una 1-forma en $\mathbb{C}^{n+1}$ que desciende a $\mathbb{P}^n$ (es decir que tiene coeficientes que son polinomios homogéneos y satisface la condición de descenso (1.3)) y con un factor integrante polinomial $F = \prod_{i=1}^{s} F_i^{e_i}$, donde los F_i son homogéneos, irreducibles, coprimos dos a dos y $\deg(F_i) = d_i$. Entonces existe una escritura*

$$\omega = F\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{dF_i}{F_i} + d\left(\frac{G}{\prod_{i=1}^{s} F_i^{e_i-1}}\right)\right),$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ satisfacen $\sum \lambda_i d_i = 0$ y G es un polinomio homogéneo de grado $\sum_{i=1}^{s} d_i(e_i - 1)$ y se satisface que (i) si $\lambda_i = 0$ entonces $e_i \geq 2$ y (ii) si $e_i \geq 2$ entonces F_i no divide a G. En particular, ω es una 1-forma logarítmica de tipo $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ si y sólo si admite un factor integrante de la forma $F = \prod_{i=1}^{r} F_i$ donde los F_i son homogéneos, irreducibles, coprimos dos a dos y $\deg(F_i) = d_i$.

Demostración. La demostración de este hecho puede encontrarse en [30, Proposición 2.5.11]. □

En el caso de las 1-formas logarítmicas, podemos caracterizarlas usando la propiedad de tener un factor integrante polinomial del grado correcto, como indica el siguiente resultado.

Proposición 37. *Sea $\mathcal{L}(d) = \bigcup_{\{\mathbf{d}:|\mathbf{d}|=d\}} \mathcal{L}(\mathbf{d})$. Entonces*

$$\left\{\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)) \,:\, d\left(\frac{\omega}{F}\right) = 0 \text{ para cierto } F \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))\right\} = \mathcal{L}(d).$$

Demostración. La demostración de este hecho puede encontrarse en [10, Proposition 3.7]. □

El base locus de la parametrización $\rho_{\mathbf{d}}$ del espacio de formas logarítmicas (que fue presentado en (1.5) y la Definición 26) fue descripto en [11, Section 5]. Para finalizar la subsección, recordaremos brevemente esta descripción. Sea $\mathbf{d}$ como antes y tomemos una descomposición $\varphi = (e, \mathbf{d}') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r \times r'} \times (\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r'} \setminus \vec{0})$ tal que $d_i = \sum_{j=1}^{r'} e_{ij} d'_j$ para cada $1 \leq i \leq r$. Para cada una de esas descomposiciones, definimos el mapa de Segre-Veronese

$$\nu_\varphi : \prod_{j=1}^{r'} S_{d'_j} \dashrightarrow \prod_{j=1}^{r} S_{d_j}$$

dado por $\nu_\varphi(G_1, \ldots, G_{r'}) = (\prod_{j=1}^{r'} G_j^{e_{1j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{r'} G_j^{e_{rj}})$. También, definimos conjuntos $B_\varphi := \Lambda(\varphi) \times \operatorname{im}(\nu_\varphi)$ donde

$$\Lambda(\varphi) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^m : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_{ij} = 0 \text{ para todo } j \right\}.$$

Notar que los conjuntos B_φ están contenidos en el conjunto de ceros de $\mu_{\mathbf{d}}$ y por lo tanto sus proyectivizaciones están incluidas en el base locus de $\rho_{\mathbf{d}}$. También, para cada par de descomposiciones $\varphi^{(1)} = (e^{(1)}, \mathbf{d}'^{(1)}), \varphi^{(2)} = (e^{(2)}, \mathbf{d}'^{(2)})$, definimos una relación de la siguiente manera: $\varphi^{(1)} \leq \varphi^{(2)}$ si $\operatorname{rank}(e^{(1)}) = \operatorname{rank}(e^{(2)})$ y existe una matriz $e^{(3)}$ tal que $e^{(1)} = e^{(2)} \cdot e^{(3)}$. Esta relación no es un orden parcial, ya que si dos matrices $e^{(1)}, e^{(2)}$ difieren por una permutación de columnas, las correspondientes descomposiciones $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ satisfacen $\varphi^{(1)} \leq \varphi^{(2)}$ y $\varphi^{(1)} \geq \varphi^{(2)}$ al mismo tiempo. Por lo tanto, consideraremos descomposiciones salvo permutación de columnas, de modo que $\leq$ sea un orden parcial. Así, las componentes irreducibles de este base locus están en correspondencia uno a uno con particiones vectoriales que son maximales con respecto a ese orden.

Teorema 38. *Las componentes irreducibles del base locus de $\rho_{\mathbf{d}}$ son la proyectivización de los conjuntos B_φ donde $\varphi = (e, \mathbf{d}')$ es una descomposición maximal con respecto al orden $\leq$ y $\operatorname{rk}(e) < m$.*

Demostración. La demostración de este hecho puede encontrarse en [11]. □

Finalizamos la subsección describiendo el base locus en el caso racional, es decir cuando $r = 2$.

Ejemplo 39. En el caso de las componentes racionales (es decir, cuando $r = 2$), existe una única componente irreducible del base locus (ver [13, Section 4.1]). En efecto, gracias al Teorema 38, basta hallar las descomposiciones maximales con respecto a $\leq$ tales que $\operatorname{rk}(e) = 1$. Sea $(e, \mathbf{d}')$ una descomposición de rango 1. Si llamamos C_j a la j-ésima columna de e, podemos suponer (reordenando las columnas) que existen $k_j \in \mathbb{N}$ tales que $C_j = k_j C_1$ para todo $1 \leq j \leq r'$. Luego, como $e \cdot \mathbf{d}' = d$, entonces $\mathbf{d} = \left(\sum_{j=1}^{r'} k_j d'_j\right) C_1$. Por ende, si llamamos $p = \operatorname{mcd}(d_1, \ldots, d_r)$, entonces vale que $C_j = \left(\frac{pe_j}{\sum_{j=1}^{r'} k_j d'_j}\right) \frac{\mathbf{d}}{p}$. Esto nos dice que $(e, \mathbf{d}') \leq (\frac{\mathbf{d}}{p}, p)$ y por ende hay una única descomposición maximal. Esta se corresponde con el conjunto

$$\left\{ (G^{\frac{d_1}{p}}, G^{\frac{d_2}{p}}) \in \mathbb{P}S_{d_1} \times \mathbb{P}S_{d_2} \,:\, \deg(G) = p \right\}.$$

1.2.3 Más ejemplos y descomposición en componentes irreducibles

En esta subsección, mostramos ejemplos de componentes irreducibles de $\mathcal{F}(n, d)$ que aparecen en la literatura, como ser foliaciones de tipo pullback o la llamada componente excepcional. Además, mostramos la descomposición de $\mathcal{F}(n, d)$ en componentes irreducibles en los casos conocidos (cuando $d \leq 4$). Sobre el final, planteamos algunas preguntas que serán contestadas a lo largo de la tesis.

Ejemplo 40. *Foliaciones pullback.* Sabemos que toda 1-forma diferencial torcida $\eta \in H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(d))$ en $\mathbb{P}^2$ es involutiva, ya que la condición de integrabilidad de Frobenius (1.1) es trivial en una variedad de dimensión 2. Así, dada una proyección lineal $p : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^2$, la 1-forma $p^*\eta \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ también cumple la condición de integrabilidad de Frobenius (1.1). Haciendo elecciones genéricas de η y p, vale que $\operatorname{codim}(S(p^*\eta)) \geq 2$ y por ende define una foliación, a la que llamamos *foliación pullback*. Notar que el conjunto de foliaciones pullback forman una subvariedad quasiproyectiva del espacio $\mathbb{P}H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$. Resulta ser que este conjunto es *estable*. La demostración de este hecho se puede encontrar en varios trabajos, como por ejemplo en [7].

Uno de los principales problemas relativos al estudio de $\mathcal{F}(n, d)$ es caracterizar todas sus componentes irreducibles. En general este es un problema difícil cuya respuesta es desconocida. Sin embargo, en algunos casos “pequeños" la respuesta es conocida.

- Cuando $n = 2$, la condición de Frobenius (1.1) la cumplen todas las 1-formas, por lo que $\mathcal{F}(n, d)$ es irreducible.
- Cuando $d = 2$, existe una única componente irreducible, la componente racional $\mathcal{R}(1, 1)$. Este resultado fue probado por Jouanolou en [26].
- Cuando $d = 3$, hay exactamente dos componentes irreducibles, una racional $\mathcal{R}(1, 2)$ y una logarítmica $\mathcal{L}(1, 1, 1)$. Este resultado también fue demostrado por Jouanolou, ver [26] y la introducción de [8].

- Cuando $d = 4$, hay exactamente seis componentes irreducibles. Esto fue demostrado en [8]. Son dos componentes logarítmicas $\mathcal{L}(1,1,2)$ y $\mathcal{L}(1,1,1,1)$, dos componentes racionales $\mathcal{R}(1,3)$ y $\mathcal{R}(2,2)$, una componente pullback y una sexta componente que no pertenecía a ninguna colección de foliaciones conocida, a la que llamaron *componente excepcional*.

Ejemplo 41. *Componente excepcional.* Fue definida y estudiada por primera vez en [8]. En $\mathcal{F}(3,4)$, está dada por el conjunto de foliaciones cuyas hojas (en un abierto coordenado de $\mathbb{P}^3$) son las órbitas del subgrupo de transformaciones afines de $\mathbb{C}^3$ que dejan fija una curva cúbica torcida (twisted cubic). Más en general, tomando pullback por proyecciones lineales $\phi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^3$ de todos los elementos de $\mathcal{F}(3,4)$, obtenemos todos los elementos de la componente excepcional $\mathcal{E}(n)$ en $\mathcal{F}(n,4)$. Más explícitamente, los autores describieron los elementos de esta componente de la siguiente forma: consideraron la 1-forma racional en $\mathbb{P}^3$ definida por $\omega_{\mathcal{E}} = 3g_0 df_0 - 2f_0 dg_0$ donde $f_0 = x_0x_2 - \frac{x_1^2}{2}$ y $g_0 = x_0^2x_3 - x_0x_1x_2 + \frac{x_1^3}{3}$. Con un cálculo directo, obtuvieron que $\omega_{\mathcal{E}}$ define una foliación singular *con contenido* $\mathrm{co}(\omega_{\mathcal{E}}) = x_0$. Así, la 1-forma $\widetilde{\omega}_{\mathcal{E}} := \frac{\omega}{x_0}$ define una foliación singular en el espacio de móduli $\mathcal{F}(3,4)$, gracias a la Observación 17. Del mismo modo, dados $p \in PGL(4)$ y $\varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^3$ una proyección lineal, la 1-forma $\varphi^* p^* \widetilde{\omega}_{\mathcal{E}} \in \mathcal{F}(n,4)$ define una foliación singular. Así, la *componente excepcional* es el conjunto

$$\mathcal{E}(n) = \left\{ \varphi^* p^* \widetilde{\omega}_{\mathcal{E}} : p \in PGL(4) \text{ y } \varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^3 \text{ es lineal} \right\} \subseteq \mathcal{F}(n,4).$$

Este conjunto es *estable* y más aún, es una componente *rígida* de $\mathcal{F}(n,4)$. Este hecho (además de un estudio de propiedades geométricas de $\mathcal{E}(n)$) fue probado en varios artículos y usando diversas técnicas, como en [8], [5] y [12]. Además, destacamos el artículo [4], donde los autores no solamente probaron la estabilidad de la componente excepcional, sino que lograron incluirla en una familia finita de componentes irreducibles de $\mathcal{F}(n,d)$, pensando en la descripción de la componente como foliaciones asociadas a un álgebra de Lie afín.

Surge naturalmente la siguiente pregunta.

Pregunta 1. *¿Existe una colección infinita de componentes irreducibles de $\mathcal{F}(n,d)$ definidas para d arbitrariamente grande que contenga a la componente excepcional?*

A lo largo de este trabajo, daremos una respuesta afirmativa a esta pregunta. En efecto, las foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1)), (1^1))$ para $k \geq 2$ cumplen esa propiedad. Estas forman un conjunto estable, como demostraremos en el Capítulo 4. Además, probaremos que el conjunto foliaciones S-logarítmicas de tipo $((2,3), (1^1))$ es la componente excepcional.

Ejemplo 42. En el artículo reciente [10], los autores hicieron un estudio del espacio $\mathcal{F}(3,5)$ y descubrieron que existen al menos 24 componentes irreducibles de $\mathcal{F}(3,5)$. Sin embargo, no pudieron encontrar la descomposición completa. En este trabajo, destacamos dos de las componentes que encontraron, a las que llamaron foliaciones logarítmicas especiales $SLog(3,4)$ y $SLog(2,5)$ (ver [10, Secciones 3.5.1 y 3.6.1]). En ambos casos, los autores usan construcciones similares, que ilustramos explicando el caso de $SLog(2,5)$: los autores fijan un polinomio F de grado 2 de la forma $F = x_3^2 - 2x_1x_0$, buscan condiciones para un polinomio G homogéneo de grado 5 para que la 1-forma racional de la forma $\omega' = 5GdF - 2FdG$ sea divisible por x_0^2 y actúan por el grupo $PGL(n+1)$ sobre todas las foliaciones de la forma $\frac{\omega'}{x_0^2}$. Esto da una componente irreducible de $\mathcal{F}(3,5)$.

Notar que tanto en la componente excepcional $\mathcal{E}(n)$ como en las componentes logarítmicas especiales $SLog(3,4)$ y $SLog(2,5)$, ocurre un fenómeno destacable: en los tres casos, su elemento genérico se obtiene a partir de ciertas foliaciones logarítmicas con contenido a las que se les cancela ese contenido, para obtener foliaciones de grado más pequeño. Es decir que en algún sentido, estas componentes irreducibles están "escondidas" en la frontera de un espacio de móduli de 1-formas de grado más grande, como dijimos en la Observación 19. Esto da lugar a la siguiente pregunta cuyo enunciado es algo libre pero que sirve para motivar este trabajo.

Pregunta 2. *¿Podemos obtener nuevas componentes irreducibles (o en su defecto familias interesantes) de $\mathcal{F}(n,d)$ a partir de cancelar el contenido de ciertas foliaciones logarítmicas con contenido?*

Si bien no daremos una respuesta completa a esta pregunta, estudiaremos este fenómeno en detalle, definiendo y estudiando las foliaciones S-logarítmicas. En algunos casos, obtendremos mediante este nuevo procedimiento nuevas componentes irreducibles de $\mathcal{F}(n,d)$ para d arbitrariamente grande: las foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k,k+1),(1^1))$ previamente mencionadas.

Capítulo 2

Foliaciones S-logarítmicas

El espacio de móduli $\mathcal{F}(n,d) \subseteq \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ de foliaciones singulares de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica cuasiproyectiva (ver (1.2) para su definición). Al tomar su clausura Zariski, agregamos ciertas 1-formas que dan lugar a foliaciones *con contenido*, que son 1-formas diferenciales integrables divisibles por algún polinomio homogéneo. Es decir que dentro de su conjunto frontera $\partial\mathcal{F}(n,d)$ (ver Definición 18) se *esconden* ciertas foliaciones de grado inferior, luego de cancelar su contenido. En este capítulo, describimos en detalle este fenómeno para estudiar nuevas colecciones de foliaciones obtenidas de este modo a partir de foliaciones logarítmicas (ver Sección 1.2.2). A estas últimas las llamamos *foliaciones S-Logarítmicas* y son el principal objeto de estudio del capítulo. Estos conjuntos son interesantes porque en algunos casos, dan lugar a *nuevas componentes irreducibles* de $\mathcal{F}(n,d)$. En particular, para todo entero $k \geq 2$ la variedad de foliaciones S-logarítmicas $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$ cuyos elementos son algunas foliaciones racionales de tipo $(k,k+1)$ a las que se les cancela un contenido dado por un polinomio lineal es *estable*, como veremos en el Capítulo 4. Esta colección de componentes generaliza a la componente excepcional (ver Ejemplo 41), ya que la obtenemos cuando fijamos $k = 2$.

A lo largo del capítulo, definiremos y estudiaremos los conjuntos de foliaciones S-logarítmicas, que vienen dadas por dividir foliaciones logarítmicas por un polinomio con una descomposición irreducible prefijada. En otras palabras y de forma análoga a las foliaciones logarítmicas (ver Proposición 36), el conjunto de foliaciones S-logarítmicas se define como la clausura Zariski del conjunto de 1-formas integrables que admiten un factor integrante *racional* (es decir, un cociente de polinomios homogéneos) con una cierta descomposición en factores irreducibles prefijada. Buscamos una parametrización racional de estos conjuntos para poder estudiarlos en detalle. Para ello, definimos un *morfismo de división*. A su dominio lo llamaremos *espacio de división* y está dado por pares formados por ciertas 1-formas de tipo logarítmico con contenido y un polinomio (con cierta descomposición en factores irreducibles prefijada) que la divide. El morfismo efectúa la división de la forma por el polinomio. Finalmente, en algunos casos estudiaremos en detalle el espacio de división, describiendo explícitamente sus componentes irreducibles. Esto lo utilizaremos en el Capítulo 3 para parametrizar y estudiar la geometría de cierto tipo de foliaciones S-logarítmicas, a las que llamaremos de tipo $((k, k+1), (1^1))$.

Notación 43. En este capítulo utilizaremos las notaciones $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ y $T = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Además S_i y T_i denotarán los polinomios homogéneos de grado i de S y T respectivamente.

2.1 El morfismo de división

En esta sección definimos el morfismo de división, que no sólo tiene interés por sí mismo sino que también usaremos en próximos capítulos para parametrizar a las foliaciones S-logarítmicas. Además, definimos los conjuntos de foliaciones S-logarítmicas.

Definición 44. Fijemos números naturales r, s, d y e. Una *partición entera* $\mathbf{d}$ *de d en r partes* es una tupla $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ tal que $d_1, \dots, d_r$ son números naturales que cumplen que $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_r$ y $|\mathbf{d}| := \sum_{i=1}^{r} d_i = d$. Del mismo modo, una *partición entera con multiplicidades* $\mathbf{e}$ *de e en s partes* es una tupla de pares dada por $\mathbf{e} = ((e_1, m_1), \dots, (e_s, m_s))$ tal que e_i, m_i son números enteros no negativos, $(e_1, m_1) \leq \cdots \leq (e_s, m_s)$ con el orden lexicográfico y $|\mathbf{e}| := \sum_{i=1}^{s} e_i m_i = e$. La notamos $\mathbf{e} = (e_1^{m_1}, \dots, e_s^{m_s})$.

Definición 45. Sean $\mathbf{e} = ({e_1}^{m_1}, \dots, {e_s}^{m_s})$ una partición entera con multiplicidades de un entero $e \geq 0$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}(n, d)$ un subconjunto irreducible, $\overline{\mathcal{X}}$ su clausura Zariski dentro de $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ y $\mathbb{P}(S_{\mathbf{e}}) = \prod_{i=1}^{s} \mathbb{P}S_{e_i}$. Definimos el *espacio de división de $\mathcal{X}$* asociado a la partición $\mathbf{e}$

$$\mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathbf{e}) := \left\{ ((F_1, \dots, F_s), \omega) \in \mathbb{P}(S_{\mathbf{e}}) \times \overline{\mathcal{X}} : \prod_{i=1}^{s} F_i^{m_i} \text{ divide a } \omega \right\}$$

con sus dos proyecciones $\pi_1 : \mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathbf{e}) \to \mathbb{P}(S_{\mathbf{e}})$ y $\pi_2 : \mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathbf{e}) \to \overline{\mathcal{X}}$. También, definimos el conjunto $\mathcal{X}(\mathbf{e}) := \operatorname{im}(\pi_2) \subseteq \overline{\mathcal{X}}$ y el *morfismo de división*

$$\delta : \mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathbf{e}) \to \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d - e))$$

dado por $\delta(\mathbf{F}, \omega) = \frac{\omega}{F}$, donde $F = \prod_{i=1}^{s} F_i^{m_i}$ y $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s) \in \mathbb{P}(S_{\mathbf{e}})$. Cuando $\mathcal{X}$ es una componente logarítmica o racional (ver Sección 1.2.2), los denominamos *espacio/morfismo de división logarítmico* (resp. *racional*).

Observación 46. Sean $\mathbf{e}, \mathcal{X}$ como en la Definición 45. Si $(\mathbf{F}, \omega) \in \mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathbf{e})$, entonces $\delta(\mathbf{F}, \omega)$ satisface la condición de Frobenius (1.1) (ver Definición 11). En efecto,

$$\delta(\mathbf{F}, \omega) \wedge d(\delta(\mathbf{F}, \omega)) = \frac{\omega}{F} \wedge \left(-\frac{\omega \wedge dF}{F^2} + \frac{d\omega}{F}\right) = 0,$$

ya que $\omega \wedge d\omega = 0$. Luego, si la 1-forma $\delta(\mathbf{F}, \omega)$ no tiene contenido (es decir codim $S((\mathbf{F}, \omega)) \geq 2$), entonces $\delta(\mathbf{F}, \omega)$ pertenece al espacio de móduli $\mathcal{F}(n, d - e)$.

Observación 47. Sean $\mathcal{X}$ como en la Definición 45, $m \geq 1$ un entero y $\mathbf{e} = 1^m$. En este caso, el morfismo de división posee una estructura adicional. En efecto, el dominio $\mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathbf{e})$ es la intersección de $\mathbb{P}S_1 \times \overline{\mathcal{X}}$ con el conjunto

$$E := \left\{(H, \omega) \in \mathbb{P}S_1 \times \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d)) \,:\, H^m \text{ divide a } \omega\right\}.$$

Notar que E es el espacio total de un fibrado vectorial con base $\mathbb{P}S_1$, al que llamamos *fibrado vectorial de división*. Además, $\mathbb{P}S_1$ es una variedad proyectiva, conexa y homogénea con respecto al grupo $PGL(n + 1)$ y cuya acción es compatible con el fibrado E (actuando a derecha por cambios de coordenadas tanto en $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d))$ como en $\mathbb{P}S_1$). Así, si denotamos $P \subseteq PGL(n + 1)$ al grupo de isotropías de $x_0 \in \mathbb{P}S_1$ y $\hat{\pi}_1 : E \to \mathbb{P}S_1$ a la primera proyección, obtenemos un isomorfismo

$$E \simeq PGL(n+1) \times_P \hat{\pi}_1^{-1}(x_0) = (PGL(n+1) \times \hat{\pi}_1^{-1}(x_0))/P.$$

Aquí, identificamos la clase de un par $(\varphi, (x_0, \omega))$ con el elemento $(\varphi^* x_0, \varphi^* \omega)$ y la acción de P en $PGL(n+1) \times \hat{\pi}_1^{-1}(x_0)$ está dada por la *acción diagonal a derecha* definida por $(\varphi, (x_0, \omega)) \cdot p = (p^{-1}\varphi, (H, \omega) \cdot p) = (p^{-1}\varphi, (p^* H, p^* \omega))$ para todos $p \in P, \varphi \in PGL(n + 1)$ y $\omega \in \pi_1^{-1}(x_0)$. Más aún, como $\mathcal{X}$ es invariante bajo la acción de $PGL(n + 1)$, obtenemos que

$$\mathcal{D}(\mathcal{X}, (1^m)) = E \cap \mathcal{X} \simeq \left((PGL(n+1) \times \pi_1^{-1}(x_0))/P\right). \tag{2.1}$$

A partir de ahora, estudiaremos especialmente el caso donde los conjuntos $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(n, d)$ involucrados son componentes logarítmicas y racionales (ver Subsección 1.2.2). Pero antes de continuar en esa dirección, definamos las foliaciones S-logarítmicas, que serán el principal objeto de estudio de este capítulo.

Recordemos que para cada partición entera $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ de d, la componente logarítmica de tipo $\mathbf{d}$ es la clausura Zariski del conjunto de 1-formas diferenciales ω de grado d con un *factor integrante polinomial* $F = \prod_{i=1}^m F_i$ tal que los F_i son polinomios irreducibles distintos (ver Proposición 36). Con el mismo espíritu, definimos las *foliaciones S-logarítmicas* como conjuntos de 1-formas diferenciales de grado d con un factor integrante *racional* (es decir, un cociente de polinomios) con una cierta descomposición prefijada en polinomios irreducibles.

Definición 48. Sean $d \geq e \geq 1$ dos enteros, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ una partición entera de d y $\mathbf{e} = ({e_1}^{m_1}, \ldots, {e_s}^{m_s})$ una partición entera *con multiplicidades* de e. Sean $\nu_{\mathbf{d}}$ y $\nu_{\mathbf{e}}$ los mapas de Segre-Veronese dados por

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{d}} : \mathbb{P}(S_{\mathbf{d}}) &\longrightarrow \mathbb{P}S_d & \qquad \nu_{\mathbf{e}} : \mathbb{P}(S_{\mathbf{e}}) &\longrightarrow \mathbb{P}S_e \\ \mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_r) &\mapsto F = \prod_{i=1}^{r} F_i & \qquad \mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_s) &\mapsto G = \prod_{j=1}^{s} G_j^{m_j} \end{aligned}$$

y sea

$$\mathcal{I}(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = \left\{ (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \in \mathbb{P}(S_{\mathbf{d}}) \times \mathbb{P}(S_{\mathbf{e}}) \,:\, F_i, G_j \text{ son irreducibles y distintos} \right\}.$$

El *espacio de factores integrantes* es el subconjunto algebraico del espacio producto $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d-e)) \times (\nu_{\mathbf{d}} \times \nu_{\mathbf{e}})(\mathcal{I}(\mathbf{d}, \mathbf{e}))$ dado por

$$\mathcal{Q}(\mathbf{d}, \mathbf{e}) := \left\{ (\omega, F, G) \,:\, d\left(\frac{\omega G}{F}\right) = 0 \right\}$$

con proyecciones naturales dadas por $p_1 : \mathcal{Q}(\mathbf{d}, \mathbf{e}) \to \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d-e))$ y $p_2 : \mathcal{Q}(\mathbf{d}, \mathbf{e}) \to (\nu_{\mathbf{d}} \times \nu_{\mathbf{e}})(\mathcal{I}(\mathbf{d}, \mathbf{e}))$. Definimos la variedad algebraica de *foliaciones S-logarítmicas de tipo* $(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ como

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e}) := \overline{p_1(\mathcal{Q}(\mathbf{d}, \mathbf{e}))} \subseteq \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d-e)).$$

Observación 49. Sean $d, e, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ como en la Definición 48. Usando la Proposición 36, un elemento genérico $\omega \in \mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ cumple que

$$\omega \prod_{j=1}^{s} G_j^{m_j} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \hat{F}_i dF_i$$

para ciertos $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tales que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_i = 0$ y polinomios $F_i \in S_{d_i}$ y $G_j \in S_{e_j}$. Esto en particular dice que si $e = 0$, entonces obtenemos una 1-forma logarítmica de tipo $\mathbf{d}$ en $\mathbb{P}^n$, o dicho de otra manera, que si tomamos la partición con multiplicidades nula $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, entonces $\mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{0})$ es la componente logarítmica $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ de tipo $\mathbf{d}$ en $\mathbb{P}^n$.

Observación 50. Sean $d, e, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ como en la Definición 48. El conjunto $\mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ de foliaciones S-logarítmicas de tipo $(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ está contenido en la imagen del correspondiente morfismo de división δ asociado a $\mathcal{X} = \mathcal{L}(\mathbf{d})$ y a la partición con multiplicidades $\mathbf{e}$. Sin embargo, hay algunos elementos en el espacio de división $\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}), \mathbf{e})$ cuya imagen por δ es una 1-forma diferencial ω tal que existen $F_i \in S_{d_i}$ y $G_j \in S_{e_j}$ con factores irreducibles en común y que cumplen que la 1-forma $\frac{\omega G}{F}$ es cerrada.

En general, las foliaciones S-logarítmicas no son un conjunto *estable* (es decir, una componente irreducible) del correspondiente espacio de móduli de foliaciones, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 51. *Sean $d \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ una partición entera de d tal que d_1 divide a d_2. Si $d_2 > 2$, el subconjunto $\mathcal{L}(\mathbf{d}, (1^1))$ es un cerrado Zariski propio de la componente logarítmica $\mathcal{L}(d_1, d_2 - 2, 1)$. Y si $d_2 = 2$, el subconjunto $\mathcal{L}(\mathbf{d}, (1^1))$ es un cerrado Zariski de la componente racional $\mathcal{R}(d_1, 1)$.*

Demostración. Definamos $k = \frac{d_2}{d_1}$, tomemos un elemento genérico $\omega \in \mathcal{L}(\mathbf{d}, (1^1))$ y veamos que $\omega \in \mathcal{L}(d_1, d_2 - 2, 1)$ si $d_2 > 2$ o $\omega \in \mathcal{R}(d_2, 1)$ si $d_2 = 2$. Por la Observación 49, existen polinomios $F_1 \in S_{d_1}$, $F_2 \in S_{d_2}$ y $H \in S_1$ irreducibles tales que

$$H\omega = \lambda_1 F_2 dF_1 + \lambda_2 F_1 dF_2.$$

Usando la Proposición 35, deducimos que el pencil irreducible generado por F_1^k y F_2 tiene una hipersuperficie de la forma $H^2 P$ para cierto polinomio P de grado $d_2 - 2$. Es decir que existen escalares $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ tales que $\mu F_1^k + \nu F_2 = H^2 P$. Por ende, deducimos que

$$H\omega = \lambda_1 H^2 P dF_1 + \lambda_2 F_1 d(H^2 P) = H\left(\lambda_1 HPdF_1 + 2\lambda_2 F_1 PdH + \lambda_2 HF_1 dP\right)$$

Cancelando H, obtenemos lo deseado. □

2.2 Fibras del espacio de división logarítmico

Fijemos enteros $d, m \geq 1$, una partición entera $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ de d y notemos $\mathbf{e} = (1^m)$ a una partición entera con multiplicidades de m. En esta sección, nuestro objetivo será describir las componentes irreducibles del espacio de división $\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}), (1^m))$ para poder dar una parametrización del conjunto $\mathcal{L}(\mathbf{d}, (1^m))$. Como dijimos en (2.1) de la Observación 47, el espacio de división asociado a la componente logarítmica $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ y a la partición con multiplicidades (1^m) se puede escribir en términos de la fibra $\pi^{-1}(x_0)$ de la proyección $\pi_1 : \mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}), (1^m)) \to \mathbb{P}S_1$. Por ende, describiremos las componentes irreducibles de las fibras $\pi^{-1}(x_0)$ del espacio de división.

Las componentes S-logarítmicas $\mathcal{L}(\mathbf{d}, (1^m))$ descriptas previamente son aquellas que tienen un factor integrante racional tal que tanto su numerador como su denominador sean un producto de polinomios *irreducibles y distintos*, para que no haya cancelaciones. En este sentido, definimos el siguiente subconjunto de $\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}), (1^m))$.

Definición 52. Sean $d, m \geq 1$ dos enteros, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ una partición entera de d, (1^m) una partición entera con multiplicidades de m y $F = \prod_{i=1}^r F_i$. Definimos el siguiente subconjunto de $\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}), (1^m))$

$$\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^m) := \overline{\left\{ (H, \omega) : \omega = F \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}, F_i \in S_{d_i} \text{ y } H \nmid F_i \text{ para todo } i \right\}}.$$

Notar que es un conjunto algebraico invariante por la acción de $PGL(n+1)$.

Para parametrizar las componentes $\mathcal{L}(\mathbf{d},(1^m))$ descriptas previamente, es necesario estudiar la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ de la proyección $\pi_1 : \mathcal{D}(\mathbf{d},1^m) \to \mathbb{P}S_1$. Pero antes, estudiemos la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ de $\pi_1 : \mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}),(1^m)) \to \mathbb{P}S_1$ fuera del espacio $\mathcal{D}(\mathbf{d},1^m)$. Para ello, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 53. *Sean $F_i \in S_{d_i}$ para $i = 1,\dots,r$, $F = \prod_{i=1}^r F_i$ y $\omega = F\sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$ una 1-forma logarítmica divisible por x_0^m tal que x_0 divide a F. Entonces x_0^{m+1} divide a F.*

Demostración. Probémoslo por inducción en m. Podemos suponer que $\lambda_i \neq 0$ para todo i, ya que si $\lambda_i = 0$, entonces ω sería el producto de F_i con una 1-forma logarítmica de grado más pequeño y le podemos aplicar nuevamente el resultado. El caso $m = 1$ es trivial. Supongamos ahora que el resultado del enunciado es cierto para toda 1-forma logarítmica y todo $m' \leq m$ y supongamos sin perder generalidad que x_0 divide a F_1, o sea que tenemos una escritura de la forma $F_1 = x_0F_1^{(1)}$. En ese caso, usando que ω es divisible por x_0, miramos la definición de ω módulo x_0 y obtenemos que x_0 divide a $F\lambda_1\frac{dx_0}{x_0}$ y por ende que x_0 divide a $\frac{F}{x_0}$. En caso de que x_0^2 divida a F_1, escribimos $F_1 = x_0^2F_1^{(2)}$ y obtenemos que

$$\omega = F\sum_{i=1}^r \lambda_i\frac{dF_i}{F_i} = x_0\frac{F}{x_0}\left(\lambda_1\left(2\frac{dx_0}{x_0} + \frac{dF_1^{(2)}}{F_1^{(2)}}\right) + \sum_{i=2}^r \lambda_i\frac{dF_i}{F_i}\right).$$

Por ende ω es divisible por x_0^m si y sólo si la 1-forma logarítmica dada por la fórmula $\frac{F}{x_0}\left(\lambda_1\left(2\frac{dx_0}{x_0} + \frac{dF_1^{(2)}}{F_1^{(2)}}\right) + \sum_{i=2}^r \lambda_i\frac{dF_i}{F_i}\right)$ es divisible por x_0^{m-1}. Pero notar que $\frac{F}{x_0}$ es divisible por x_0, por lo que podemos aplicarle la hipótesis inductiva y deducir que $\frac{F}{x_0}$ es divisible por x_0^m. Esto implica directamente que x_0^{m+1} divide a F. El caso en que x_0 divida a F_i para $i \neq 1$ es análogo. Esto concluye la demostración. □

Observación 54. Un cálculo directo usando las propiedades de la derivada logarítmica nos dice que si $\omega = F\sum_{i=1}^r \lambda_i\frac{dF_i}{F_i}$ es una 1-forma logarítmica y x_0^{m+1} divide a F, entonces x_0^m divide a ω. Esto nos permite describir perfectamente varias de las componentes irreducibles de la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ de $\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}),(1^m))$. En efecto, para cada r-upla $\mathbf{d}' = (d_1',\dots,d_r') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ tal que $\sum_{i=1}^r d_i' = m$, definimos un conjunto irreducible de la fibra $\pi^{-1}(x_0) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}),(1^m))$ definido por

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbf{d}),(1^m),\mathbf{d}') := \overline{\left\{(H,\omega) : \omega = F\sum_{i=1}^r \lambda_i\frac{dF_i}{F_i}, F_i \in S_{d_i} \text{ y } x_0^{d_i'} \mid F_i \text{ para todo } i\right\}},$$

donde $F = \prod_{i=1}^r F_i$. Notar que todos estos conjuntos son irreducibles, disjuntos y cubren a toda la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ fuera de $\mathcal{D}(\mathbf{d},1^m)$, como muestra la Proposición 53.

Ahora, estudiemos la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ de $\pi_1 : \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^m) \to \mathbb{P}S_1$ para parametrizar las componentes $\mathcal{L}(\mathbf{d}, (1^m))$. Para ello buscamos condiciones para que la 1-forma $\omega = \left(\prod_{i=1}^r F_i\right) \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i} \in \mathcal{L}(\mathbf{d})$ sea divisible por x_0^m pero los F_i sean coprimos con x_0. Antes de empezar, recordemos las notaciones $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ y $T = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y también recordemos que S_i y T_i son los correspondientes polinomios homogéneos de grado i. A lo largo de esta subsección, sean $f_{i,j} \in T_{d_i - j}$ para todo $0 \leq j \leq d_i$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tales que $\sum_{i=1}^r \lambda_i d_i = 0$. Notamos

$$F_i = \sum_{j=0}^{d_i} f_{i,j} x_0^j \, , \, F = \prod_{i=1}^r F_i \, , \, \eta = \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dF_i}{F_i} \text{ y } \omega = F\eta. \tag{2.2}$$

Además, llamamos $f_j \in T_{d-j}$ y $a_{k,i} \in T_{d-1-k}$ a los polinomios que satisfacen las igualdades

$$\omega = \sum_{k=0}^{d} \sum_{i=0}^{n} a_{k,i} x_0^k dx_i \text{ y } F = \sum_{j=0}^{d} f_j x_0^j. \tag{2.3}$$

Notar que F_i es coprimo con x_0 si y sólo si $f_{i,0} \neq 0$, por lo que vamos a imponer a partir de ahora la condición

$$f_{i,0} \neq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r. \tag{2.4}$$

Con esto en mente, definimos el anillo $A := T[f_{1,0}^{-1}, \dots, f_{r,0}^{-1}]$. Para encontrar condiciones algebraicas para que tales elementos (x_0, ω) pertenezcan a la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$, incluiremos a $\frac{1}{F_i}$ dentro del anillo formal $A[[x_0]]$. Esto es posible ya que cuando $f_{i,0} \neq 0$, sabemos que F_i^{-1} pertenece al anillo $A[[x_0]]$, pensándolo como una serie de Taylor en la variable x_0. Así, definimos $b_{k,i}$, $g_{i,j}$ y g_j como los cocientes de polinomios que satisfacen

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} b_{k,i} x_0^k dx_i \, , \, F_i^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{i,j} x_0^j \text{ y } F^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x_0^j. \tag{2.5}$$

Finalmente, notamos

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r), \mathbf{f}_0 = (f_{1,0}, \dots, f_{r,0}), \omega_k = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i} dx_i \text{ y } \eta_k = \sum_{k=0}^{n} b_{k,i} dx_i. \tag{2.6}$$

Observación 55. Vale la siguiente igualdad en A:

$$\sum_{k=0}^{d} \omega_k x_0^k = \omega = F\eta = \sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{j=0}^{k} \eta_{k-j} f_j \right) x_0^k.$$

De esto y de las notaciones (2.2), (2.3), (2.5), (2.6), obtenemos las siguientes identidades:

$$\text{(2.7)}\quad \omega_k = \sum_{j=0}^{k} \eta_{k-j} f_j \ , \ f_0 = \prod_{i=1}^{r} f_{i,0} \ , \ g_{i,0} = f_{i,0}^{-1} \ , \ \omega = \sum_{k=0}^{d} \omega_k x_0^k \text{ y } \eta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k x_0^k.$$

En particular, se deduce que ω es divisible por x_0^m si y sólo si $\sum_{j=0}^{k} \eta_{k-j} f_j = 0$ para todo $0 \leq k < m$.

Usando esta última observación, podemos escribir condiciones algebraicas para que ω sea divisible por x_0^m, como lo indica el siguiente Lema.

Lema 56. *Sean $d, m, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ como en la Definición 52 y sean ω, η_k con una escritura como en (2.2), (2.4), (2.6). Entonces ω es divisible por x_0^m si y sólo si $\eta_k = 0$ para todo $0 \leq k < m$.*

Demostración. Gracias a la Observación 55, sabemos que ω es divisible por x_0^m si y sólo si $\sum_{j=0}^{k} \eta_{k-j} f_j = 0$ para todo $0 \leq k < m$. Usando este hecho, deducimos que si $\eta_k = 0$ para todo $0 \leq k < m$, entonces x_0^m divide a ω. Probemos ahora inductivamente que si $\sum_{j=0}^{k} \eta_{k-j} f_j = 0$ para todo $0 \leq k < m$, entonces $\eta_k = 0$ para todo $0 \leq k < m$. En efecto, como $\eta_0 f_0 = 0$ y $f_0 \neq 0$ (gracias a (2.4) y (2.7)), deducimos que $\eta_0 = 0$. Para el paso inductivo, supongamos que $\eta_j = 0$ para todo $0 \leq j < k < m$. Luego $0 = \sum_{j=0}^{k} \eta_{k-j} f_j = \eta_k f_0$ y por ende $\eta_k = 0$. Esto concluye la demostración. □

Usaremos este lema para terminar de describir la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ de la proyección $\pi_1 : \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^m) \to \mathbb{P}S_1$. Pero antes, calculemos expresiones para $b_{k,i}$ y η_k.

Lema 57. *Sean $d, m, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ como en la Definición 52 y sean $f_{i,j}, b_{k,i}, g_{i,j}, \eta_k$ como en (2.2), (2.4), (2.5), (2.6). Luego, para todo par de enteros $k \geq 0$ y $1 \leq l \leq n$ valen las igualdades*

$$b_{k+1,l} = \frac{1}{k+1} \frac{\partial b_{k,0}}{\partial x_l} \text{ y } \quad \eta_k = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{k} \lambda_i g_{i,j} \left(d f_{i,k-j} + (k-j+1) f_{i,k-j+1} d x_0 \right).$$

Demostración. Usando la expresión (2.5) para η, obtenemos la igualdad

$$d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left((k+1) b_{k+1,i} x_0^k d x_0 \wedge d x_i + x_0^k d b_{k,i} \wedge d x_i \right).$$

Usando que los coeficientes $b_{k,i}$ no dependen de x_0, obtenemos que el coeficiente que acompaña a $d x_0 \wedge d x_l$ es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+1) b_{k+1,l} - \frac{\partial b_{k,0}}{\partial x_l} \right) x_0^k.$$

Así, la primera igualdad del enunciado se deduce de que η es cerrada. Y la segunda igualdad se obtiene haciendo un cálculo directo con la definición de η y las expresiones para F_i y F_i^{-1} de (2.2) y (2.5). Esto concluye la demostración. □

Ahora sí, estamos en condiciones de caracterizar la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ de la proyección $\pi_1 : \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^m) \to \mathbb{P}S_1$. Ese es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 58. *Sean $d, m, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ como en la Definición 52 y sean $f_{i,j}, \omega, g_{i,j}, \lambda, \mathbf{f}_0$ como en (2.2), (2.4), (2.5), (2.6). Entonces ω es divisible por x_0^m si y sólo si $(\lambda, \mathbf{f}_0)$ pertenece al base locus de la parametrización de la componente logarítmica $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ y además*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k}(k-j+1)\lambda_i g_{i,j} f_{i,k-j+1} = 0 \text{ para todo } 0 \le k < m. \tag{2.8}$$

Demostración. Usando el Lema 56 y los cálculos del Lema 57, sabemos que ω es divisible por x_0^m si y sólo si para todo $0 \le k < m$ vale que

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k} \lambda_i g_{i,j}\left(df_{i,k-j} + (k-j+1)f_{i,k-j+1}dx_0\right) = 0.$$

En primer lugar, usando que $g_{i,0} = f_{i,0}^{-1}$ obtenemos que

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{df_{i,0}}{f_{i,0}} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_{i,1} g_{i,0} dx_0 = 0,$$

que se anula si y sólo si $(\lambda, \mathbf{f}_0)$ está en el base locus de la parametrización de $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ y además $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_{i,1} g_{i,0} = 0$. Finalmente, supongamos que $\eta_{k-1} = 0$ para cierto $1 \le k < m$. Luego, $b_{k-1,0} = 0$ y por ende $b_{k,l} = 0$ para todo $1 \le l \le n$ gracias al Lema 57. Esto quiere decir que $\eta_k = b_{k,0}dx_0$. Como los $f_{i,j}$ no dependen de la variable x_0, obtenemos que

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k}(k-j+1)\lambda_i g_{i,j} f_{i,k-j+1} dx_0 \text{ para todo } k \ge 1.$$

Esto concluye la demostración. □

Observación 59. El base locus de la parametrización de las componentes logarítmicas es conocido y fue descripto en [11]. Al final de la Subsección 1.2.2, se puede encontrar tal descripción.

Apliquemos esta última proposición al caso particular en que $r = 2$, es decir en que la partición $\mathbf{d}$ tiene 2 partes.

Ejemplo 60. Sean $d, m, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ como en la Definición 52, sea $p = m.c.d.(d_1, d_2)$ y sean $f_{i,j}, \omega, g_{i,j}$ como en (2.2), (2.5), (2.6) tales que $f_{1,0}, f_{2,0} \neq 0$. En el caso en que $r = 2$ (es decir, cuando $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$), escribamos condiciones para que x_0^m divida a ω usando la Proposición 58. La condición de base locus de $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ está dada por las condiciones $f_{1,0} = L_0^{d_1/p}$ y $f_{2,0} = L_0^{d_2/p}$, donde L_0 es un polinomio de grado p que no depende de x_0 (ver Ejemplo 39). Además, debemos imponer las condiciones extra dadas por la Ecuación (2.8) de la Proposición 58. Reacomodando, para $0 \leq k < m$ obtenemos la igualdad

$$f_{2,k+1} = \frac{f_{2,0}}{k+1}\left(\frac{d_2}{d_1}\sum_{j=0}^{k}(k-j+1)g_{1,j}f_{1,k-j+1} - \sum_{j=1}^{k}(k-j+1)g_{2,j}f_{2,k-j+1}\right).$$

Esta expresión no es polinomial en general. Sin embargo, como $f_{1,k+1}$ debe ser un polinomio, debemos imponer condiciones adicionales sobre los polinomios $f_{1,j}$ y $f_{2,j}$ para que la expresión del lado derecho de la igualdad sea un polinomio.

Antes de terminar el capítulo, mencionamos ejemplos de conjuntos estables de foliaciones conocidos en la literatura que también son conjuntos de foliaciones S-logarítmicas. Son el caso de las componentes excepcional (definidas por primera vez en [8]) y logarítmicas especiales (definidas en [10]).

Ejemplo 61. El conjunto $\mathcal{L}((2,3),(1^1))$ es la *componente excepcional* descripta previamente en el Ejemplo 41. En el siguiente capítulo, parametrizaremos los conjuntos $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$ para todo $k \geq 2$ y probaremos que es un conjunto irreducible. Además, veremos luego (en la Observación 97) que el grupo $PGL(n+1)$ actúa transitivamente en las fibras del correspondiente espacio de división únicamente cuando $k = 2$. Por ende, el conjunto $\mathcal{L}((2,3),(1^1))$ es también el conjunto de 1-formas diferenciales integrables obtenidas por cambio de coordenadas de una 1-forma diferencial racional de tipo $(2,3)$ que es dividida por un polinomio lineal. Así es como fue construida la componente excepcional (ver Ejemplo 41).

Ejemplo 62. En el artículo [10, Sections 3.5.1 & 3.6.1], los autores definen dos componentes de $\mathcal{F}(3,5)$ a las que llaman $SLog(3,4)$ y $SLog(2,5)$. En ambos casos, los autores usan construcciones similares pero menos generales que la que estudiamos en este capítulo. Se puede probar que $SLog(3,4) = \mathcal{L}((3,4),(1^2))$ y $SLog(2,5) = \mathcal{L}((2,5),(1^2))$. Ilustramos esto explicando la construcción del conjunto $SLog(2,5)$: los autores fijan un polinomio F de grado 2 de la forma $F = L_0^2 + f_{2,1}x_0$, buscan condiciones para un polinomio G homogéneo de grado 5 para que la foliación racional $5GdF - 2FdG$ sea divisible por x_0^2, dividen por x_0^2 y actúan por el grupo $PGL(n+1)$. Esto es naturalmente la componente $\mathcal{L}((2,5),(1^2))$.

Los autores prueban la estabilidad usando un programa de computadora para calcular la dimensión del espacio tangente Zariski al correspondiente espacio de móduli de foliaciones en el caso $n = 3$. Es posible que con este nuevo punto de vista, se pueda obtener una demostración conceptual de la estabilidad de las componentes $SLog(3,4)$ y $SLog(2,5)$, además de incluirlas en una familia de componentes irreducibles.

Surge de este modo una pregunta natural.

Pregunta 3. *¿Cuál de los conjuntos $\mathcal{L}((d_1, d_2), (1^m))$ es estable? Más específicamente, ¿Es cierto que los conjuntos $\mathcal{L}((k, km + 1), (1^m))$ son estables para todos $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $k \geq 2$?*

Veremos en este y el próximo capítulo que la respuesta es afirmativa en el caso $m = 1$. Así, a lo largo de este capítulo y del próximo, nos concentraremos particularmente en el caso en que $\deg(F_1) + 1 = \deg(F_2)$ y $m = 1$. Por ende, vamos a finalizar la sección escribiendo explícitamente las condiciones para que x_0 divida a ω en este caso.

Observación 63. Sean $d, m, \mathbf{d}, \mathbf{e}, f_{i,j}, \omega$ como en el Ejemplo 60 e impongamos además que $m = 1$, $d_1 \geq 2$, $d_1 + 1 = d_2$ y $f_{1,0}, f_{2,0} \neq 0$. Entonces x_0 divide a la 1-forma $\omega = \lambda_1 F_2 dF_1 + \lambda_2 F_1 dF_2$ si y sólo si existe $L_0 \in T_1$ tal que valen las tres condiciones

$$f_{1,0} = L_0^{d_1},\ f_{2,0} = L_0^{d_1+1} \text{ y } f_{2,1} = \frac{d_1 + 1}{d_1} L_0 f_{1,1}.$$

Notación 64. Para simplificar la notación en el próximo capítulo y teniendo en mente la Observación 63, utilizaremos k para denotar el valor de d_1 y F, G, f_j y g_j para denotar los polinomios F_1 y F_2, $f_{1,j}$ y $f_{2,j}$ respectivamente. Como además vale que $\lambda_1 = d_2$ y $\lambda_2 = -d_1$, obtenemos que $\omega = (k+1)GdF - kFdG$. Además, sabemos que $m = 1$, $d = 2k + 1$, $F = \sum_{i=0}^{k} f_j x_0^j$ y $G = \sum_{i=0}^{k+1} g_j x_0^j$. Con esta notación, obtenemos que x_0 divide a ω si y sólo si existe $L_0 \in T_1$ tal que valen las tres condiciones

$$f_0 = L_0^k,\ g_0 = L_0^{k+1} \text{ y } g_1 = \frac{k+1}{k} L_0 f_1. \tag{2.9}$$

Capítulo 3

Geometría de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$

En este capítulo, estudiamos las componentes $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$ para $k \geq 2$ usando el correspondiente morfismo de división y las definiciones y cálculos del la sección previa. Nuestro objetivo será parametrizarla y estudiar su geometría. En las distintas secciones, daremos una parametrización unirracional, describiremos el base locus de la parametrización, estudiaremos el ideal singular de un elemento genérico del conjunto, probaremos la inyectividad genérica de la parametrización y calcularemos tanto la dimensión del conjunto como la derivada Zariski del morfismo de división. En el siguiente capítulo, usaremos estos resultados para probar la estabilidad de estos conjuntos.

Notación 65. A lo largo de este capítulo, fijamos $k \geq 2$ un entero. Además notamos $m = 1$, $d = 2k+1$, $\mathbf{d} = (k, k+1)$ una partición entera de d, $\mathbf{e} = (1^1)$ una partición entera con multiplicidades, F, G, f_j, g_j, ω como en la Notación 64 y tales que f_0, g_0, g_1 tengan una escritura como en la Ecuación (2.9) de modo que x_0 divida a ω y $f_0, g_0 \neq 0$. Además, notemos

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)\,, \mathbf{g} = (g_2, \dots, g_{k+1}) \text{ y } \widetilde{\omega} = \frac{\omega}{x_0}.$$

Utilizaremos también las notaciones $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ y $T = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Además S_i y T_i denotarán los polinomios homogéneos de grado i de S y T respectivamente.

3.1 Parametrización

El objetivo de esta sección es exhibir una parametrización unirracional del conjunto $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$.

Teniendo en mente la Proposición 58, fijamos las notaciones de la Notación 65 y definimos un conjunto $X'' := T_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} T_{k-i} \oplus \bigoplus_{i=2}^{k+1} T_{k+1-i}$ y un morfismo

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{d},(1^1)} : X'' &\to S_k \oplus S_{k+1} \\ (L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) &\mapsto (F, G), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $F = \sum_{i=0}^{k} f_j x_0^j$ y $G = \sum_{i=0}^{k+1} g_j x_0^j$ y además f_0, g_0, g_1 tienen una escritura como en la Ecuación (2.9). Cuando se sobreentienda el subíndice $\mathbf{d}, (1^1)$, escribiremos directamente ϕ.

Observación 66. Gracias a la Observación 64, la imagen de ϕ está dada por los pares $(F, G) \in S_k \oplus S_{k+1}$ tales que $f_0, g_0 \neq 0$ (ver Notación (2.2)) y además ω es divisible por x_0.

Observación 67. Sea $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Podemos definir una acción de $\mathbb{C}^*$ en X'' dada por

$$\lambda \cdot (L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\lambda L_0, \lambda^k \mathbf{f}, \lambda^{k+1} \mathbf{g}),$$

y una acción multiplicativa en $S_k \oplus S_{k+1}$ dada por $\lambda \cdot (f, g) = (\lambda^k F, \lambda^{k+1} G)$. Veamos que el mapa ϕ es equivariante con respecto a esas acciones. En efecto, dado $(L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in X''$ un elemento cualquiera obtenemos mediante un cálculo directo que

$$\phi(\lambda \cdot (L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g})) = \left(\sum_{i=0}^{k} (\lambda^k f_i) x_0^i, \sum_{j=0}^{k} (\lambda^{k+1} g_j) x_0^j \right) = \lambda \cdot (F, G).$$

Definición 68. Definimos X' como el cociente del espacio $X'' \setminus \vec{0}$ por la acción de $\mathbb{C}^*$ definida en la Observación 67. Como el morfismo ϕ es equivariante, el mapa definido en (3.1) se factoriza por X' y define un mapa

$$\phi : X' \dashrightarrow \mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{P}(S_{k+1})$$

que lo denotamos también ϕ.

Observación 69. El espacio X' es isomorfo a un espacio proyectivo con pesos y por ende es una variedad racional.

Proposición 70. *El mapa $\phi : X' \dashrightarrow \mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{P}(S_{k+1})$ es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que existen dos elementos $(L_0,\mathbf{f},\mathbf{g}),(L_0',\mathbf{f}',\mathbf{g}')\in X''$ y dos escalares $\mu,\nu\in\mathbb{C}$ tales que $\phi(L_0,\mathbf{f},\mathbf{g})=(F,G)$, $\phi(L_0',\mathbf{f}',\mathbf{g}')=(F',G')$ y además $(F,G)=(\mu F',\nu G')$. Reduciendo ambas igualdades módulo $\langle x_0\rangle$, obtenemos que $L_0^k=\mu {L_0'}^k$ y $L_0^{k+1}=\nu {L_0'}^{k+1}$ y por ende $L_0=\frac{\nu}{\mu}L_0'$ y además $\mu^{k+1}=\nu^k$. Así, concluimos que $(L_0,\mathbf{f},\mathbf{g})=\frac{\nu}{\mu}\cdot(L_0',\mathbf{f}',\mathbf{g}')$ y por ende representan el mismo elemento en X'. Esto concluye la demostración. □

Observación 71. Existe una acción compatible del subgrupo $P\subseteq PGL(n+1)$ de isotropías de x_0 en el espacio X' tal que el mapa $\phi:X'\dashrightarrow\mathbb{P}(S_k)\times\mathbb{P}(S_{k+1})$ sea equivariante. Se define de la siguiente manera: dados un par de elementos $x'=(L_0,\mathbf{f},\mathbf{g})\in X'$ y $p\in P$, definimos la acción a derecha de P en X' vía $x'\cdot p=\phi^{-1}(p^*F,p^*G)$, donde F, G y ϕ se expresan como en (3.1). Veamos su buena definición. En efecto, si x_0 divide a $\omega=(k+1)GdF-kFdG$, entonces $p^*x_0=x_0$ divide a $p^*\omega=(k+1)p^*Gd(p^*F)-kp^*Fd(p^*G)$. Además, x_0 divide a F (resp. G) si y sólo si x_0 divide a p^*F (resp. G) ya que $p\in P$. Por ende, (p^*F,p^*G) está en la imagen de ϕ (ver Observación 66).

Al componer el mapa $\phi:X'\dashrightarrow\mathbb{P}(S_k)\times\mathbb{P}(S_{k+1})$ con la parametrización de la componente racional $\rho:\mathbb{P}S_k\times\mathbb{P}S_{k+1}\dashrightarrow\mathcal{F}(n,2k+1)$ (ver (1.5) de la Sección 1.2.2) obtenemos una parametrización de la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ de $\pi_1:\mathcal{D}(\mathbf{d},1^1)\to\mathbb{P}S_1$ (ver Definición 52). Componiendo además con el correspondiente morfismo de división, obtenemos una parametrización de los conjuntos $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$.

Definición 72. Definimos la parametrización σ de $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$ como el mapa racional

$$\sigma:X:=\left(PGL(n+1)\times X'\right)/P\dashrightarrow\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n,\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(2k))$$
$$[(\varphi,L_0,\mathbf{f},\mathbf{g})]\mapsto\varphi^*\widetilde{\omega}.$$

Recordar que $\widetilde{\omega}$ fue definido en la Notación 65. Para no recargar la notación, omitiremos la notación de clase con corchetes para los elementos de X. Notar que la parametrización está bien definida en el cociente. Recordar que P actúa como la acción diagonal (ver Observación 47). Así, dado $p\in P$ y usando que $p^*(x_0)={p^{-1}}^*(x_0)=x_0$, obtenemos que

$$\sigma((\varphi,L_0,\mathbf{f},\mathbf{g})\cdot p)=\sigma(p^{-1}\varphi,(F,G)\cdot p)=\sigma(p^{-1}\varphi,\phi^{-1}(p^*F,p^*G))=\varphi^*\widetilde{\omega}.$$

En el Capítulo 4 probaremos que los conjuntos $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$ en cuestión son estables, es decir que forman una componente irreducible del correspondiente espacio de móduli $\mathcal{F}(n,d)$. Antes de terminar la sección, hacemos algunas observaciones sobre la parametrización σ de $\mathcal{L}((k,k+1),(1^1))$.

Observación 73. El mapa σ definido en la Definición 72 es una composición de morfismos y mapas previamente definidos, como se ve en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}\times\phi"] \arrow[drr, dashed, "\sigma"'] & (PGL(n+1)\times \operatorname{im}\phi)/P \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}\times\rho"] & \mathcal{D}((k,k+1)),1^1) \arrow[d, "\delta"] \\ & & \overline{\mathcal{F}}(n,d) \end{tikzcd}$$

Aquí, $\rho : \mathbb{P}S_k \oplus \mathbb{P}S_{k+1} \dashrightarrow \overline{\mathcal{F}}(n,d)$ es la parametrización de la componente racional (ver (1.5) de la Sección 1.2.2) y $\delta : \mathcal{D}((k,k+1),1^1) \to \overline{\mathcal{F}}(n,d)$ es el correspondiente morfismo de división definido en la Definición 45 restringido a $\mathcal{D}((k,k+1),1^1)$. Notar que en la sección previa, hemos probado que la composición $(\mathrm{id}\times\rho)\circ(\mathrm{id}\times\phi)$ es dominante (gracias a la Observación 64). Finalmente, definimos $\sigma' := (\mathrm{id}\times\rho)\circ(\mathrm{id}\times\phi)$ de modo que $\sigma = \delta\circ\sigma'$.

Observación 74. Como X es unirracional y la imagen de σ es la correspondiente componente S-logarítmica, se deduce que $\mathcal{L}((k,k+1)),(1^1))$ es unirracional.

Observación 75. Notemos que si bien sabemos que todo elemento de la componente $\mathcal{L}((k,k+1)),(1^1))$ satisface la condición de Frobenius (ver Observación 46), a priori no sabemos que un elemento genérico de $\mathcal{L}((k,k+1)),(1^1))$ satisfaga que su conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2 (es decir, que no tiene contenido). Esto es cierto y será probado en el Lema 88.

3.2 Base locus

En esta sección, calculamos la descomposición en componentes irreducibles del base locus de σ. Para ello, recordemos la descomposición en componentes irreducibles del base locus de la parametrización $\rho : \mathbb{P}S_k \oplus \mathbb{P}S_{k+1} \dashrightarrow \overline{\mathcal{F}}(n,d)$ de la correspondiente componente racional (ver (1.5)). En efecto, ese base locus consiste de una única componente irreducible dada por $B_\rho = \left\{(L^k, L^{k+1}) : L \in S_1\right\}$, como vimos en el Ejemplo 39. Usando esto y el hecho de que el morfismo de división δ está bien definido en todo su dominio, podemos calcular el base locus de σ.

Proposición 76. *El base locus B_σ de σ tiene tres componentes irreducibles dadas por los siguientes subconjuntos algebraicos de X:*

$$B_F = \{(\varphi, 0, \mathbf{0}, \mathbf{g})\}\,,\ B_G = \{(\varphi, 0, \mathbf{f}, \mathbf{0})\}\ \text{ y } B_0 = \overline{\left\{(\varphi, L_0, \mathbf{0}, \mathbf{0})\right\}}.$$

Demostración. Un elemento $x = (\varphi, L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in X$ pertenece al base locus de σ si y sólo si $F = 0$ o bien $G = 0$ o bien (F, G) pertenece al base locus de ρ. Es claro que $F = 0$ si y sólo si $x \in B_F$ y $G = 0$ si y sólo si $x \in B_G$. Finalmente, x es tal que (F, G) pertenece al base locus de ρ si y sólo si existe un polinomio lineal L tal que $F = L^k$ y $G = L^{k+1}$. Si L no es un múltiplo escalar de x_0, existe un automorfismo $p \in P$ tal que $p^* L_0 = L$. Luego, obtenemos que $(p\varphi, L_0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \cdot p = x$ y obtenemos que $x \in B_0$. Por último, si L es un múltiplo escalar de x_0, podemos obtener a x como un límite de elementos del conjunto $\left\{(\varphi, L_0, \mathbf{0}, \mathbf{0})\right\}$. Esto concluye la demostración. $\square$

3.3 Ideal singular

En esta sección, calculamos las componentes irreducibles del conjunto de Kupka de un elemento genérico del conjunto $\mathcal{L}((k, k+1)), (1^1))$ definido previamente. Para ello, a partir de ahora usamos la Notación 65. Podemos suponer que la 1-forma ω genérica es divisible por x_0, porque sino actuamos por el grupo $PGL(n+1)$ y se obtiene una descripción análoga del conjunto singular. Comencemos con algunas definiciones.

Definición 77. Sea ω una 1-forma diferencial divisible por x_0. Usando la Notación 65, definimos

$$\widetilde{G} = \frac{G - L_0 F}{x_0},\ P = \frac{kL_0^{k-1}\widetilde{G} - f_1 F}{x_0} \text{ y}$$
$$Q = \frac{k+1}{k} f_1^2 - 2kL_0^{k-1} g_2 + (2k+2) L_0^k f_2$$

y la 1-forma diferencial

$$\gamma = \frac{L_0 dF - k(F dL_0 + \widetilde{G} dx_0)}{x_0}.$$

Además, definimos para todo $0 \leq i \leq 2k-2$ los polinomios

$$\widetilde{g}_i = g_{i+1} - L_0 f_{i+1} \text{ y } p_i = kL_0^{k-1}\widetilde{g}_{i+1} - f_1 f_{i+1}$$

Observación 78. Como $f_0 = L_0^k$ y $g_0 = L_0^{k+1}$, obtenemos que $G - L_0 F$ es divisible por x_0 y por ende $\widetilde{G}$ es un polinomio de grado k. Usando las expresiones para g_1 y f_0 de la Notación 65, obtenemos que $kL_0^{k-1}\widetilde{g}_0 - f_1 f_0 = 0$ y por ende que P es un polinomio de grado $2k-2$. También, es claro que Q es un polinomio de grado $2k-1$ y valen las igualdades

$$\widetilde{G} = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{g}_i x_0^i,\ P = \sum_{i=0}^{2k-2} p_i x_0^i \text{ y } \widetilde{g}_0 = \frac{L_0 f_1}{k}. \tag{3.2}$$

Usando estas igualdades y haciendo cálculos directos, obtenemos las siguientes expresiones para dF y $d\widetilde{G}$ módulo el ideal $\langle x_0 \rangle$:

$$dF = kL_0^{k-1}dL_0 + f_1dx_0 \text{ y } d\widetilde{G} = \frac{L_0df_1 + f_1dL_0}{k} + \widetilde{g}_1dx_0. \tag{3.3}$$

Con estos cálculos, podemos deducir que $L_0dF - k(FdL_0 + \widetilde{G}dx_0)$ se anula módulo $\langle x_0 \rangle$ y por ende γ tiene coeficientes polinomiales. Por otro lado, de la definición de $\widetilde{G}$ y usando la regla de Leibniz, obtenemos que

$$G = L_0F + x_0\widetilde{G} \text{ y } dG = L_0dF + FdL_0 + x_0d\widetilde{G} + \widetilde{G}dx_0. \tag{3.4}$$

Reemplazando ambas expresiones en la definición de ω, sale x_0 como factor común. Cancelándolo, obtenemos

$$\widetilde{\omega} = (k+1)\widetilde{G}dF + F(\gamma - kd\widetilde{G}). \tag{3.5}$$

Por último, mirando la última ecuación módulo $\langle x_0 \rangle$ y haciendo un cálculo directo llegamos a las siguientes igualdades módulo $\langle x_0 \rangle$:

$$\gamma = L_0(df_1 + 2f_2dx_0) - k(f_1dL_0 + (g_2 - L_0f_2)dx_0) \text{ y } \widetilde{\omega} = L_0Qdx_0. \tag{3.6}$$

Con estas definiciones en mente, ya estamos en condiciones de definir los ideales I_1, I_2, I_3, que definen las componentes irreducibles del conjunto singular de $\widetilde{\omega}$.

Definición 79. Definimos los polinomios

$$F_1 = \frac{F - f_0}{x_0}, G_1 = \frac{G - g_0}{x_0} \text{ y } \widetilde{G}_1 = \frac{\widetilde{G} - \widetilde{g}_0}{x_0},$$

los tres ideales

$$I_1 = \langle x_0, L_0 \rangle, I_2 = \langle x_0, Q \rangle \text{ y } I_3 = \langle F, \widetilde{G}, P \rangle$$

y sus respectivos conjuntos de ceros

$$C_1 = V(I_1), C_2 = V(I_2) \text{ y } C_3 = V(I_3).$$

Observación 80. Usando la igualdad (3.3) y haciendo cálculos directos, obtenemos las siguientes igualdades módulo I_1:

$$\gamma = -k(g_2dx_0 + f_1dL_0), d\widetilde{G} \wedge \gamma = (1-k)f_1g_2dx_0 \wedge dL_0,$$
$$dF \wedge \gamma = -kf_1^2dx_0 \wedge dL_0 \text{ y } dF \wedge d\widetilde{G} = \frac{f_1^2}{k}dx_0 \wedge dL_0$$

Observación 81. Usando que $f_0 = L_0^k$, que $\widetilde{g}_0 = \frac{L_0 f_1}{k}$ y la definición de P (ver Definición 77) obtenemos las igualdades

$$x_0 P = kL_0^{k-1}\widetilde{G} - f_1 F \text{ y } L_0 P = -kF_1\widetilde{G} + kF\widetilde{G}_1.$$

Esto da relaciones entre los generadores del ideal I_3. Veremos en la Proposición 85 que estas relaciones generan (junto con las relaciones de Koszul) el ideal de relaciones de I_3. En particular, daremos una resolución de largo 2 para el ideal I_3.

Observación 82. Sabiendo que $F = L_0^k + x_0 F_1$ y que valen las igualdades

$$dF = kL_0^{k-1}dL_0 + F_1 dx_0 + x_0 dF_1 \text{ y } dF \wedge \gamma = -k\frac{dF \wedge (\widetilde{G}dx_0 + FdL_0)}{x_0},$$

podemos reemplazar la expresión de dF para obtener

$$dF \wedge \gamma = kPdx_0 \wedge dL_0 - k\widetilde{G}dG \wedge dx_0 - kFdG \wedge dL_0$$

Observación 83. Haciendo cálculos directos con las definiciones de γ y P, podemos deducir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x_0\gamma &= L_0 dF - k(\widetilde{G}dx_0 + FdL_0), \\ L_0^{k-1}\gamma &= F\frac{dF - f_1 dx_0 - kL_0^{k-1}dL_0}{x_0} - Pdx_0 - F_1 dF \text{ y} \\ f_1\gamma &= kPdL_0 + k\widetilde{G}\frac{dF - f_1 dx_0 - kL_0^{k-1}dL_0}{x_0} - k\widetilde{G}_1 dF. \end{aligned}$$

Notar además que $\frac{dF - f_1 dx_0 - kL_0^{k-1}dL_0}{x_0}$ tiene coeficientes polinomiales, gracias a la Ecuación (3.3) de la Observación 78.

Las variedades C_1, C_2 y C_3 definidas previamente serán (genéricamente) las componentes irreducibles del conjunto de Kupka de $\widetilde{\omega}$. Teniendo esto en mente, probemos que hay una resolución de largo 2 del haz de funciones de C_3, es decir que C_3 es *aritméticamente Cohen-Macaulay*. Pero antes, hacemos la siguiente observación.

Observación 84. La condición de que los polinomios $F, G, \widetilde{G}, P$ y Q sean irreducibles es una condición abierta en X. Es decir, el conjunto de elementos $x = (\varphi, L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ tales que tales polinomios son irreducibles es un abierto. Probémoslo para F y G, pero la demostración es análoga para los otros polinomios. En efecto, sabemos que el conjunto de pares de polinomios irreducibles es un abierto Zariski del espacio $\mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{P}(S_{k+1})$. Si tomamos preimagen de este abierto por el mapa ϕ definido en la Definición 68, obtenemos que el conjunto $U' \subseteq X'$ de elementos $x' = (L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ tales que los correspondientes polinomios F y G son irreducibles es un abierto y en definitiva que $U := (PGL(n+1) \times U')/P \subseteq X$ es el conjunto buscado y es abierto. Además, ese conjunto U es no vacío, como veremos en el Ejemplo 92.

Proposición 85. *Sean $F, \widetilde{G}, P$ irreducibles (lo cual es una condición genérica por la Observación 84). Entonces existe una resolución de I_3 de largo 2 dada por*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-2k)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2k) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus 2}(-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2-2k) \xrightarrow{\delta_2} I_3 \to 0$$

donde los morfismos δ_1 y δ_2 están definidos en las respectivas bases canónicas $\{e_i\}$ por

$$\delta_1(e_1) = kL_0^{k-1}e_2 - f_1e_1 - x_0e_3,\ \delta_1(e_2) = kF_1e_2 - k\widetilde{G}_1e_1 + L_0e_3$$
$$\delta_1(e_3) = Fe_2 - \widetilde{G}e_1,\ \delta_2(e_1) = F,\ \delta_2(e_2) = \widetilde{G} \text{ y } \delta_2(e_3) = P.$$

En particular, el esquema C_3 es aritméticamente Cohen-Macaulay.

Demostración. La sobreyectividad de δ_2 es clara. Por otro lado, si llamamos $\mathcal{K}$ al núcleo de δ_1, viendo la tercera coordenada, obtenemos que $\mathcal{K}$ es un subhaz de un haz localmente libre (y por ende es libre de torsión) y tiene soporte contenido en C_1. Esto implica que $\mathcal{K} = 0$ y por ende δ_1 es inyectivo. Finalmente, veamos que $\mathrm{im}(\delta_1) = \ker(\delta_2)$. La inclusión $\mathrm{im}(\delta_1) \subseteq \ker(\delta_2)$ se deduce de las expresiones para x_0P, L_0P de la Observación 81. Para la otra inclusión, sean A, B, C polinomios tales que $\delta_2(Ae_1 + Be_2 + Ce_3) = AF + B\widetilde{G} + CP = 0$. Podemos suponer que A, B, C son polinomios limpiando denominadores. Reduciendo módulo I_1 obtenemos que $-Cf_1^2 = 0$ y por ende $C = 0$ módulo I_1. Así, existen C_1, C_2 polinomios tales que $C = C_1x_0 + C_2L_0$. Reemplazando y usando las expresiones de la Observación 81, obtenemos que

$$(A - C_1f_1 + kC_2\widetilde{G}_1)F + (B + kC_1L_0^{k-1} - kC_2F_1)\widetilde{G} = 0.$$

Como $F, \widetilde{G}, P$ son irreducibles, sabemos que existe un polinomio C_3 tal que

$$A = C_1f_1 - kC_2\widetilde{G}_1 - C_3\widetilde{G} \text{ y } B = -kC_1L_0^{k-1} + kC_2F_1 + C_3F.$$

Esto implica que $-C_1\delta_1(e_1) + C_2\delta_1(e_2) + C_3\delta_1(e_3) = Ae_1 + Be_2 + Ce_3$ y por ende que $Ae_1 + Be_2 + Ce_3$ está en la imagen de δ_1. Esto concluye la demostración □

Con estas definiciones y cálculos en mente, podemos describir el conjunto de Kupka de una foliación genérica $\omega \in \mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$. Para ello, probemos antes un par de lemas.

Lema 86. *Vale la siguiente igualdad de ideales*

$$\langle F, \widetilde{G} \rangle = I_1 \cap I_3.$$

Demostración. Como f_0 y $\widetilde{g}_0$ son múltiplos de L_0, deducimos que hay una inclusión $\langle F, \widetilde{G} \rangle \subseteq I_1 \cap I_3$. Veamos la otra inclusión. Para ello, tomemos un polinomio perteneciente a $I_1 \cap I_3$ con una escritura de la forma $AF + B\widetilde{G} + CP$ para ciertos polinomios A, B, C. Como I_1 es primo, $P \notin I_1$ (ya que $p_0 = kL_0^{k-1}\widetilde{g}_1 - f_1^2$ y $f_1 \notin I_1$ por genericidad, ver Definición 77) y $F, \widetilde{G} \in I_1$, obtenemos que $C \in I_1$ y por ende tiene una escritura de la forma $C = C_1 x_0 + C_2 L_0$. Usando las igualdades de la Observación 81, obtenemos que $CP \in \langle F, \widetilde{G} \rangle$ y en definitiva que $AF + B\widetilde{G} + CP \in \langle F, \widetilde{G} \rangle$. Esto concluye la demostración. □

Observación 87. Usando que $G = x_0\widetilde{G} + L_0 F$, deducimos que $\langle F, G \rangle \subsetneq I_1 \cap I_3$. Además, si $x \in V(F, G)$, entonces $x \in V(x_0\widetilde{G})$ y por lo tanto $x \in V(x_0)$ o $x \in V(\widetilde{G})$. Como $V(x_0, F) = V(x_0, f_0) = V(x_0, L_0^k)$, obtenemos que x se anula en $I_1 \cap I_3$ y por ende $V(I_1 \cap I_3)$ y $V(F_1, F_2)$ coinciden como conjuntos algebraicos (pero no como esquemas). Gracias al Nullstellensatz de Hilbert, obtenemos que $\sqrt{I_1 \cap I_3} = \sqrt{\langle F, G \rangle}$ y por ende el ideal $\langle F, G \rangle$ no es radical. De hecho, veremos que para una elección genérica de $F, \widetilde{G}$, los ideales I_1 e I_3 son primos y por ende I_1, I_3 e $I_1 \cap I_3$ son ideales radicales.

En este trabajo, estudiaremos propiedades de foliaciones genéricas del conjunto $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$, así como propiedades que satisface su parametrización σ genéricamente. Para ello, tenemos que puntualizar a qué nos referimos con un elemento genérico. Esto lo haremos en la Definición 89. Pero antes, enunciamos el siguiente Lema.

Lema 88. *Sean* $\mathbf{f}, \mathbf{g}, F, G, \widetilde{G}, P, Q, I_1, I_2, I_3, C_1, C_2, C_3$ *como en la Notación 65 y las Definiciones 77 y 79. Existe un abierto Zariski no vacío U de X tal que para cada elemento $x = (\varphi, L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in U$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) Los polinomios $F, G, \widetilde{G}, P, Q$ son irreducibles.

(ii) Los ideales I_1, I_2, I_3 son primos.

(iii) La 1-forma $\widetilde{\omega}$ no tiene contenido.

(iv) La 2-forma $d\widetilde{\omega}$ no es idénticamente nula en C_1, C_2, C_3.

(v) Los polinomios x_0, L_0, f_1, g_2 son suaves y el divisor $D = V(x_0 L_0 f_1 g_2)$ es un divisor con simple normal crossings.

(vi) La 2-forma $dF \wedge d\widetilde{G}$ no se anula en el conjunto $C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}$.

Demostración. Veamos que el subconjunto de X tal que valen cada una de las condiciones del enunciado es un abierto Zariski. Hemos visto en la Observación 84 que el conjunto de elementos que satisfacen (i) es abierto. Además, la condición (iii) también es abierta porque la condición de que una 1-forma diferencial proyectiva no tenga contenido es equivalente a que sus coeficientes polinomiales no tengan factores no constantes en común, lo cual es una condición abierta. Del mismo modo, la condición (v) es abierta, ya que la condición de que ciertos polinomios sean suaves y simple normal crossings es abierta y no vacía (ver [19, pp. 449]). Por otro lado, en el abierto $\{x_0 \neq 0\}$ vale que C_3 es una variedad intersección completa. Así, en (vi) estamos pidiendo que los polinomios F y $\widetilde{G}$ sean suaves y sus espacios tangentes estén en posición general en todos los puntos de $C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}$. Veamos ahora que la condición (iv) es abierta. Lo vemos para C_1 y para C_2 y C_3 el argumento es análogo. Llamamos $H^{2,q}$ al conjunto de 2-formas diferenciales en $\mathbb{C}^{n+1}$ de grado q con coeficientes polinomiales homogéneos. Consideramos ahora el subconjunto de $X' \times \mathbb{P}H^{2,q}$ de pares (x', η) tales que $\eta = d\widetilde{\omega}$ (usando los coeficientes de $x' = (L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ para construir $d\widetilde{\omega}$) y además $\eta|_{C_1} \equiv 0$. Este es un subconjunto cerrado y por ende su proyección en la primera coordenada X' también es cerrada. Por ende, el conjunto de elementos x' tales que $d\widetilde{\omega}$ es idénticamente nula en C_1 es cerrado y por ende su complemento $U' \subseteq X'$ es abierto. Luego $U = PGL(n+1) \times U'/P$ es abierto y por ende los x que satisfacen la condición (iv) forman un conjunto abierto. Finalmente, probemos que los x tales que I_1, I_2 e I_3 son ideales primos forman un abierto de X. En efecto, I_1 siempre es un ideal primo ya que está generado por dos polinomios lineales e independientes. Por otro lado, I_2 es primo siempre que Q sea un polinomio irreducible, ya que Q no depende de x_0. Pero que Q sea irreducible es una condición abierta (ya lo demostramos en la condición (i)). Finalmente, probemos que la condición de que I_3 sea primo es abierta en X. Para ello, consideremos el subconjunto cerrado Y de $X' \times \mathbb{P}^n$ de pares (x', z) tales que $F(z) = \widetilde{G}(z) = P(z) = 0$ y su proyección $\pi : Y \to X'$. Sus fibras son claramente los conjuntos C_3 en cuestión y queremos probar que el conjunto de elementos $x' \in X'$ tales que su fibra es geométricamente íntegra (es decir, reducida e irreducible) es abierto. Esto es cierto si Y es propio y π es playo y propio (ver por ejemplo [18, Section E.1, (12)] o [20, (12.2.1)]). Claramente Y y π son propios. Para ver que el morfismo π es playo, basta ver que el polinomio de Hilbert de las fibras se mantiente constante (ver [25, Proposition 2.1.2]). Pero esto se deduce de la sucesión exacta de la Proposición 85 y de que la característica de Euler es aditiva en sucesiones exactas.

Finalmente, basta ver que el conjunto de elementos x que satisface cada una de las condiciones del enunciado es no vacío. Para ello, mostramos un ejemplo concreto en el Ejemplo 92. Esto concluye la demostración. □

Definición 89. Decimos que $x \in X$, $(x_0, \omega) = \sigma'(x) \in \mathcal{D}((k, k+1), 1^1)$, F, $\widetilde{G}$ y $\widetilde{\omega} = \sigma(x) \in \overline{\mathcal{F}}(n, d)$ son *genéricos* si x pertenece al abierto Zariski $U \subseteq X$ del enunciado del Lema 88.

Ahora sí, describimos el conjunto de singularidades Kupka de un elemento genérico $\widetilde{\omega} \in \mathcal{L}((k, k+1),(1^1))$.

Proposición 90. *Sea $\widetilde{\omega}$ un elemento genérico de $\mathcal{L}((k, k+1),(1^1))$ (ver Definición 89). La clausura Zariski de su conjunto de Kupka $K(\widetilde{\omega})$ está dada por*

$$\overline{K(\widetilde{\omega})} = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

Demostración. Tomemos $\widetilde{\omega}$ genérica en el sentido de la Definición 89. Sabemos que el punto genérico de C_1, C_2 y C_3 es de Kupka, por lo que basta ver que todo punto de Kupka pertenece a $C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Sea $x \in K(\widetilde{\omega})$ y supongamos primero que $F(x) = 0$. Luego, como F es no singular, sabemos que $dF(x) \neq 0$. Así, de la Ecuación (3.5) obtenemos que $\widetilde{G}(x) = 0$ y en definitiva que $x \in C_1 \cup C_3$ gracias al Lema 86. En caso de que $F(x) \neq 0$, sabemos que

$$0 = \omega(x) \wedge dF(x) = kF(x)dF(x) \wedge dG(x) = \frac{-k}{2k+1} F(x) d\omega(x),$$

y por ende deducimos que $d\omega(x) = 0$. Finalmente, evaluando en x la igualdad $d\omega = x_0 d\widetilde{\omega} + dx_0 \wedge \widetilde{\omega}$, obtenemos que $x \in V(x_0)$. Usando la Ecuación (3.6), obtenemos que $\widetilde{\omega} = L_0 Q dx_0$ módulo $\langle x_0 \rangle$ y por ende concluimos que $x \in C_1 \cup C_2$. Esto concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 91. En el caso en que $k = 2$ y el espacio ambiente es $\mathbb{P}^3$, la imagen del conjunto singular es muy bonita. Fue estudiada en [5]. El conjunto singular consiste de 3 componentes irreducibles, dadas por una twisted cubic, una de sus rectas tangentes y una cónica osculante. En nuestra notación, son C_3, C_1 y C_2 respectivamente. Notar que la twisted cubic está dada por la intersección de 3 cuádricas dadas por $F, \widetilde{G}$ y P y es el conjunto de ceros de una variedad determinantal, dada por los menores 2×2 de una matriz de 2×3 (Proposición 85). Además al intersecar los conjuntos de ceros de F y $\widetilde{G}$, obtenemos la unión de la twisted cubic C_3 con una recta C_1 tangente a la twisted cubic; esto es un hecho conocido, ver por Ejemplo [21, Exercise 1.11].

Para terminar la sección, se exhiben ejemplos de elementos $(L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ que satisfacen las condiciones del Lema 57.

Ejemplo 92. Fijemos $L_0 = x_1$, $F_1 = x_2^{k-1} + x_0^{k-1}$, $G_1 = \frac{k+1}{k} x_1 x_2^{k-1} + x_0^{k-1} x_3$. En este caso obtenemos que

$$G = x_1^{k+1} + \frac{k+1}{k} x_0 x_1 x_2^{k-1} + x_0^k x_3,\ \widetilde{G} = \frac{x_1 x_2^{k-1}}{k} + x_0^{k-1}(x_3 - x_1),$$
$$P = kx_0^{k-2} x_1^{k-1}(x_3 - x_1) - x_2^{2k-2} + x_2^{k-1} x_0^{k-1} \text{ y } F = x_1^k + x_0 x_2^{k-1} + x_0^k.$$

Mostremos que este ejemplo cumple todas las condiciones de (i) para el Lema 57, salvo que Q sea irreducible. Notar que los cuatro polinomios en cuestión son irreducibles en el abierto $\{x_0 \neq 0\}$ y por ende son irreducibles. En efecto, los polinomios $F, \widetilde{G}$ y P son lineales en la variable x_3 y con coeficientes coprimos (vistos como polinomios en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, \hat{x_3}, \dots, x_n]$). Y el polinomio F es irreducible por una sencilla aplicación del criterio de Eisenstein. Veamos ahora que I_1 e I_3 son ideales primos, por lo que este ejemplo cumple las condiciones de (ii) para el Lema 57, salvo que I_2 es primo. Es claro que $I_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$ es primo. Veamos ahora que I_3 lo es. En efecto, el esquema $V(I_3) \cap \{x_0 \neq 0\}$ está definido por los polinomios $P_1 = x_1^k + x_2^{k-1} + 1$ y $P_2 = \frac{x_1 x_2^{k-1}}{k} + x_3 - x_1$, ya que en ese abierto de $V(I_3)$, podemos escribir a P como combinación lineal de F y $\widetilde{G}$. Ahora, como $T/(P_2) \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, \hat{x_3}, \dots, x_n]$ y P_1 es irreducible en ese anillo (gracias a una simple aplicación del criterio de Eisenstein). Concluimos que $T/\langle P_1, P_2 \rangle$ es un dominio, que el esquema $V(I_3) \cap \{x_0 \neq 0\}$ es irreducible y genéricamente reducido y por ende que C_3 también lo es. Como C_3 es una variedad aritméticamente Cohen-Macaulay gracias a la Proposición 85, sabemos que C_3 es reducida gracias al Criterio de Reducibilidad de Serre (también conocido como el Teorema $(R0)+(S1)$, ver por ejemplo [32, (17.I) pp. 125]). Veamos que vale la condición (vi) del Lema 57, es decir que $dF \wedge d\widetilde{G}$ no se anula en $C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}$. Haciendo un cálculo directo, obtenemos que el coeficiente que acompaña a $dx_0 \wedge dx_3$ es $-x_0^{k-1}(x_2^{k-1} + kx_0^{k-1})$ y el que acompaña a $dx_2 \wedge dx_3$ es $(1-k)x_0^k x_2^{k-2}$. Ambos coeficientes no pueden anularse simultáneamente en $C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}$. Por ende, $dF \wedge d\widetilde{G}$ no se anula en $C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}$. Usando este hecho, tomando diferencial exterior en la expresión (3.5) para $\widetilde{\omega}$ y mirando en $C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}$, obtenemos que

$$d\widetilde{\omega} = -(2k+1) dF \wedge d\widetilde{G} \text{ en } C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}.$$

Esto nos dice entonces que $d\widetilde{\omega}$ no es idénticamente nula en C_3. Veamos también que $d\widetilde{\omega}$ no es idénticamente nula en C_1, con lo que probamos que se cumplen la condición (iv) del Lema 57 para C_1 y C_3. Usando las expresiones para $dF \wedge d\widetilde{G}$ y $dF \wedge \gamma$ módulo I_1 de la Observación 80, obtenemos que

$$d\widetilde{\omega} = -(2 + \frac{1}{k} + k) f_1^2 dx_0 \wedge dL_0 \text{ módulo } I_1$$

y por ende $d\widetilde{\omega}$ no es idénticamente nula en C_1. Finalmente, veamos que vale la condición (iii) del Lema 57, es decir que $\widetilde{\omega}$ no tiene contenido. En efecto, la 1-forma $\omega = (k+1)GdF - kFdG$ tiene como coeficiente que acompaña a dx_3 a $-kFx_0^k$. Como F es irreducible y no divide a ω, obtenemos que ω se anula en codimensión 1 solamente a lo largo de x_0. Pero recordar de (3.6) de la Observación 78 que $\frac{\omega}{x_0} = \widetilde{\omega} = L_0 Q dx_0$. Es claro entonces que $\widetilde{\omega}$ no se anula a lo largo de x_0 y por ende el contenido de ω es x_0.

Basta ver que valen las condiciones (i) para Q, (ii) para I_2 y (iv) para C_2 del Lema 57. Para ello, exhibimos un ejemplo distinto: consideramos los polinomios $L_0 = x_1$, $F_1 = x_2^{k-1} + x_0 x_1^{k-2}$, $G_1 = \frac{k+1}{k} x_1 x_2^{k-1} + x_0 x_1^{k-2} x_3$ y obtenemos que $Q = \frac{k+1}{k} x_2^{2k-2} + (2k+2) x_1^{2k-2} - 2k x_1^{2k-3} x_3$. Como Q no es divisible por x_1 y el deshomogeneizado de Q es $\frac{k+1}{k} x_2^{2k-2} + (2k+2) - 2k x_3$ que es irreducible, obtenemos que Q es irreducible. Como Q no depende de x_0, deducimos también que $S/I_2 \simeq T/\langle Q \rangle$ es un dominio y por ende I_2 es un ideal primo. Haciendo un cálculo directo con la expresión (3.5), obtenemos que $d\widetilde{\omega}$ no es idénticamente nula en C_2. Con estos dos casos, hemos exhibido un ejemplo que satisfaga cada una de las condiciones del Lema 57.

3.4 Inyectividad genérica y dimensión

En esta sección, calculamos la dimensión de los conjuntos $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$. Para ello, probamos primero la inyectividad genérica de la parametrización σ. Recordemos de la Observación 73 que podemos escribir esta parametrización como la composición de dos mapas δ y σ'. Probaremos la inyectividad genérica de ambos mapas separadamente.

Proposición 93. *El morfismo* $\delta : \mathcal{D}((k, k+1), 1^1) \to \overline{\mathcal{F}}(n, d)$ *es genéricamente inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $\widetilde{\omega} = \delta(H, \omega) = \delta(H', \omega')$ y que

$$\omega = (k+1) G dF - k F dG \text{ y } \omega' = (k+1) G' dF' - k F' dG'$$

son elementos genéricos (en el sentido de la Definición 89). Así, sabemos que

$$\frac{F^{k+1}}{G^k} \text{ y } \frac{F'^{k+1}}{G'^k}$$

son dos integrales primeras racionales de $\widetilde{\omega}$. Esto nos dice que F'^{k+1} y G'^k están en el pencil generado por F^{k+1} y G^k. Usando la Proposición 35, deducimos que $G^k d(F^{k+1}) - F^{k+1} d(G^k)$ es divisible por F^k, G^{k-1}, F'^k y G'^{k-1}. Usando la irreducibilidad de los polinomios y por cuestiones de grado, deducimos que $G = G'$. Más aún, cuando $k \geq 3$ también deducimos que $F = F'$. Y cuando $k = 2$, suponemos que G no es un múltiplo escalar de G', entonces obtenemos que ω es divisible por G' y por ende ω / G' es una forma integrable de grado 2 que define una foliación por hiperplanos, lo cual contradice que el pencil generado por F^{k+1} y G^k es irreducible (ver Proposición 33). En cualquier caso, concluimos que $G = G'$ y por ende que $\omega = \omega'$ y $H = H'$. Esto concluye la demostración. $\square$

Proposición 94. *El mapa* $\sigma' : X \dashrightarrow \mathcal{D}((k, k+1), 1^1)$ *es genéricamente inyectivo.*

Demostración. Consideremos un par de elementos genéricos (ver Definición 89) $x = (\varphi, L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ y $x' = (\varphi', L_0', \mathbf{f}', \mathbf{g}')$ de X tales que $\sigma'(x) = \sigma'(x')$ y llamemos

$$F = \sum_{i=0}^{k} f_i x_0^i,\ F' = \sum_{i=0}^{k} f_i' x_0^i,\ G = \sum_{i=0}^{k+1} g_i x_0^i,\ G' = \sum_{i=0}^{k+1} g_i' x_0^i,$$
$$\omega = (k+1) G dF - kF dG \text{ y } \omega' = (k+1) G' dF' - kF' dG'.$$

Obtenemos que $(\varphi^* x_0, \varphi^* \omega) = (\varphi'^* x_0, \varphi'^* \omega')$. Por ende, denotando $p = \varphi \circ \varphi'^{-1}$, deducimos que $p \in P$ y que $p^* \omega = \omega'$. Usando un argumento análogo al usado para demostrar la Proposición 93, deducimos que $p^* F = F'$ y $p^* G = G'$. Por otro lado, usando la Proposición 70, deducimos que $p^*(L_0) = L_0'$, $p^*(\mathbf{f}) = \mathbf{f}'$ y $p^*(\mathbf{g}) = \mathbf{g}'$. Con todo esto, concluimos que $(\varphi, L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \cdot p = (\varphi', L_0', \mathbf{f}', \mathbf{g}')$ (ver Observación 71). Esto concluye la demostración. □

Combinando estos dos resultados podemos deducir que la parametrización σ es genéricamente inyectiva. Con esto en mente, calculamos la dimensión de su imagen $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$.

Corolario 95. *La parametrización* σ *de* $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ *es genéricamente inyectiva.*

Demostración. Como $\sigma = \delta \circ \sigma'$ (ver Observación 73), el resultado se deduce inmediatamente de las Proposiciones 93 y 94. □

Corolario 96. *La dimensión de los conjuntos* $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ *es* $2n - 1 + 2\binom{n+k-1}{n}$.

Demostración. Como la parametrización σ es genéricamente inyectiva, basta calcular la dimensión de X. Por definición, sabemos que

$$\dim(X) = \dim(X') + \dim(PGL(n+1)) - \dim(P).$$

Sabemos que $\dim(PGL(n+1)) = n^2 + 2n$ y $\dim(P) = n^2 + n$. Basta ver entonces que $\dim(X') = n - 1 + 2\binom{n+k-1}{n}$. Esto se deduce del isomorfismo $\bigoplus_{i=1}^{k} T_{k-i} \simeq S_{k-1}$ y de que $\dim(S_{k-1}) = \binom{n+k-1}{n}$. Esto concluye la demostración. □

Hemos explicado en la Observación 41 que la componente excepcional es *rígida* (ver Definición 20). Sin embargo, esto no es cierto para los conjuntos de foliaciones $\mathcal{L}((k, k+1)), (1^1))$. Más aún, los conjuntos $\mathcal{L}((k, k+1)), (1^1))$ son rígidos solamente en el caso de la componente excepcional (es decir, cuando $k = 2$), como mostramos en la siguiente Observación.

Observación 97. Notar que la acción del grupo de isotropías $P \subseteq PGL(n+1)$ en la fibra $\pi_1^{-1}(x_0) \subseteq \mathcal{D}((k, k+1), 1^1)$ tiene una órbita densa únicamente en el caso $k = 2$. En efecto, la dimensión de tal fibra es $\dim(X') = n - 1 + 2\binom{n+k-1}{n}$, que es estrictamente mayor que $\dim(P) = n^2 + n$ si $k > 2$. En el caso $k = 2$, tomemos dos pares de polinomios de la forma

$$\begin{cases} F = L_0^2 + x_0 f_1 + x_0^2 f_2 \\ G = L_0^3 + \frac{3}{2} L_0 g_1 x_0 + g_2 x_0^2 + g_3 x_0^3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} F' = {L'_0}^2 + x_0 f'_1 + x_0^2 f'_2 \\ G' = {L'_0}^3 + \frac{3}{2} L'_0 g'_1 x_0 + g'_2 x_0^2 + g'_3 x_0^3 \end{cases}$$

donde $L_0, L'_0, f_1, f'_1, g_2, g'_2$ son lineales y f_2, f'_2, g_3, g'_3 son constantes. Si los conjuntos $\{x_0, L_0, f_1, g_2\}$ y $\{x_0, L'_0, f'_1, g'_2\}$ de polinomios lineales son linealmente independientes (lo cual es cierto si son elementos genéricos, ver Definición 89), entonces podemos conseguir un automorfismo $p \in P$ tal que

$$p^*(x_0) = x_0,\ p^*(L_0) = L'_0,\ p^*(f_1) = f'_1 + x_0(f'_2 - f_2) \text{ y}$$
$$p^*(g_2) = g'_2 - \frac{3}{2} L'_0(f'_2 - f_2) + x_0(g'_3 - g_3).$$

Con un cálculo directo deducimos que $p^*(F) = F'$ y $p^*(G) = G'$. Por ende, existe una órbita densa de la acción de P en la fibra $\pi_1^{-1}(x_0)$ cuando $k = 2$. Esto prueba además que la componente excepcional $\mathcal{L}((k, k+1)), (1^1))$ es rígida (un hecho conocido, ver Ejemplo 41).

3.5 Derivada del morfismo de división

A lo largo de esta sección, escribiremos $\mathbf{d}$ para denotar la partición $(k, k+1)$. Nuestro objetivo será calcular el espacio tangente Zariski al espacio $\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)$ y la derivada Zariski del morfismo de división $\delta : \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1) \to \overline{\mathcal{F}}(n, d)$. Esto será de gran utilidad en el siguiente capítulo en el que probaremos la estabilidad de los conjuntos $\mathcal{L}((k, k+1), 1^1)$ probando la sobreyectividad de la derivada Zariski en un punto genérico del dominio de su parametrización σ.

Proposición 98. *El espacio tangente Zariski a $\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)$ en el punto (H, ω) es*

$$T_{(H,\omega)}\left(\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)\right) = \left\{(H', \eta) \in \left(S_1/(H)\right) \times T_\omega(\mathcal{L}(\mathbf{d})) \,:\, H^2 | (H\eta - H'\omega)\right\}$$

Demostración. Como $\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1) \subseteq \mathbb{P}S_1 \times \mathcal{L}(\mathbf{d})$, identificamos un vector tangente a $\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)$ con un par $(H', \eta) \in T_H S_1 \times T_\omega(\mathcal{L}(\mathbf{d}))$ que además satisface la condición extra de que $H + \varepsilon H'$ divide a $\omega + \varepsilon\eta$ modulo ε^2. Notar que hemos hecho la identificación $T_H(S_1) \simeq S_1/(H)$. Como

$$(H + \varepsilon H')\left(\frac{1}{H} - \varepsilon\frac{H'}{H^2}\right) = 1 \bmod(\varepsilon^2),$$

los pares (H', η) deben satisfacer que el vector tangente $\left(\frac{1}{H} - \varepsilon\frac{H'}{H^2}\right)(\omega+\varepsilon\eta)$ tenga coeficientes polinomiales. En otras palabras, las 1-formas diferenciales

$$\frac{\omega}{H} \text{ y } \frac{H\eta - \omega H'}{H^2}$$

deben tener coeficientes polinomiales. Como $(H, \omega) \in \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)$, la primera condición se satisface automáticamente y solamente queda impuesta la condición del enunciado: que H^2 divida a $H\eta - H'\omega$. Esto concluye la demostración. □

Calculemos la derivada Zariski del morfismo $\delta : \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1) \to \overline{\mathcal{F}}(n, d)$.

Proposición 99. *La derivada Zariski del morfismo* $\delta : \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1) \to \overline{\mathcal{F}}(n, d)$ *en un punto* $(H, \omega) \in \mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)$ *está dada por*

$$\begin{aligned} d_{(H,\omega)}\delta : T_{(H,\omega)}\left(\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)\right) &\to T_{\frac{\omega}{H}}\overline{\mathcal{F}}(n, d) \\ (H', \eta) &\mapsto \frac{\eta - H'\frac{\omega}{H}}{H}. \end{aligned}$$

Demostración. Tomemos un elemento $(H', \eta) \in T_{(H,\omega)}\left(\mathcal{D}(\mathbf{d}, 1^1)\right)$ y calculemos $\delta(H + \varepsilon H', \omega + \varepsilon\eta)$ módulo ε^2. Obtenemos que

$$\delta(H + \varepsilon H', \omega + \varepsilon\eta) = \frac{\omega + \varepsilon\eta}{H + \varepsilon H'} = \left(\frac{1}{H} - \varepsilon\frac{H'}{H^2}\right)(\omega + \varepsilon\eta) = \frac{\omega}{H} + \varepsilon\frac{\eta - H'\frac{\omega}{H}}{H}.$$

Esto concluye la demostración. □

Observación 100. Recordemos que el mapa σ' definido en la Observación 73 es dominante y por ende su derivada Zariski es sobreyectiva para $x \in X$ genérico, gracias al Teorema de Suavidad Genérica, ver [22, Corollary 10.7] (recordar que un morfismo suave en el contexto algebraico es el equivalente a una *submersión* en el contexto diferencial y por ende tiene derivada sobreyectiva en todo punto). Por otro lado, la imagen del mapa de división δ está contenida en la variedad de 1-formas diferenciales integrables proyectivas (ver Observación 46) y un elemento genérico define una foliación. Por ende, para cada elemento genérico $\delta(H, \omega)$, tenemos una inclusión de espacios tangentes

$$\operatorname{im} d_{(H,\omega)}\delta \subseteq T_{\frac{\omega}{H}}\mathcal{F}(n, 2k). \tag{3.7}$$

Nuestro objetivo principal de la próxima sección será demostrar que esta última inclusión es en verdad una igualdad, para (H, ω) suficientemente genérica. Esto dice que la derivada Zariski $d_{(H,\omega)}\sigma$ es sobreyectiva y por ende (gracias a la Proposición 25) que los conjuntos $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ son *estables*, o sea que son una componente irreducible del espacio de móduli $\mathcal{F}(n, 2k)$.

Capítulo 4

Estabilidad de foliaciones S-logarítmicas de tipo $((k, k+1), (1^1))$

El objetivo de este capítulo es probar la estabilidad del conjunto de foliaciones $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ estudiado en el capítulo anterior. Probaremos que la derivada Zariski del morfismo de división $\delta : \mathcal{D}((k, k+1), 1^1) \to \overline{\mathcal{F}}(n, 2k)$ es sobreyectiva en un conjunto abierto y denso de su dominio. Para ello, restringiremos la condición de tangencia (1.4) que cumplen los vectores tangentes Zariski al correspondiente espacio de móduli de foliaciones a su *conjunto de Kupka*. Esta condición es mucho más sencilla y nos permite deducir condiciones que deben satisfacer tales vectores tangentes a través de un *lema de división* adaptado a nuestra situación. Usando esta información, reducimos el problema a probar que la imagen de la diferencial contiene a los vectores tangentes que se anulan en el subconjunto $C_1 \cup C_3$ del conjunto de Kupka. Terminaremos la demostración operando con la condición (1.4) de tangencia módulo $\left(I_1 \cap I_3\right)^2$.

Notación 101. A lo largo de este capítulo, fijamos $k \geq 2, n \geq 3$ enteros positivos, $d = 2k+1$, la partición $\mathbf{d} = (k, k+1)$ de d. Además, usamos la Notación 65, la Definición 77 y la Definición 79 para $F, G, \widetilde{G}, L_0, f_j, g_j, P, Q$, las 1-formas diferenciales $\omega, \widetilde{\omega}, \gamma$, los ideales I_1, I_2, I_3 y los conjuntos algebraicos C_1, C_2, C_3.

Nuestro principal objetivo en este capítulo será demostrar el siguiente teorema:

Teorema 102. *Sea $k \geq 2$ un entero. La derivada $d_x\sigma : T_x(X) \to T_{\sigma(x)}\mathcal{F}(n, 2k)$ de la parametrización de $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ es sobreyectiva para todo $x \in X$ genérico (ver Definición 89).*

Demostración. Será probado en varios pasos en la Sección 4.3, concatenando varios enunciados de interés independiente que serán enunciados y demostrados en las Secciones 4.1 y 4.2. □

Usando el Teorema 102 y el Corolario 25, deducimos la estabilidad de los conjuntos $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$.

Teorema 103. *Sea $k \geq 2$ un entero. El conjunto $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ es una componente irreducible genéricamente reducida del espacio de móduli de foliaciones $\mathcal{F}(n, 2k)$.*

Observación 104. En el caso en que $k = 2$, el conjunto $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ es la *componente excepcional* (ver Observación 61). Por ende, al demostrar el Teorema 103, estamos también exhibiendo una demostración nueva de la estabilidad de la *componente excepcional*. Para simplificar la lectura, demostraremos el Teorema 102 en el caso $k \geq 3$ y luego aclararemos las pocas modificaciones necesarias para adaptarla al caso excepcional $k = 2$.

Observación 105. Como dijimos en la Observación 100, para demostrar el Teorema 102 debemos probar que la inclusion (3.7) es una igualdad para un elemento genérico $(H, \omega) \in \mathcal{D}(\mathcal{L}((k, k+1), 1^1))$. Además, basta probarla para un elemento (x_0, ω) donde ω sea genérica, ya que se obtiene lo mismo para un elemento genérico de la forma (H, ω) actuando con el grupo $PGL(n+1)$. Es decir que dado un vector $\widetilde{\eta} \in T_{\widetilde{\omega}}\mathcal{F}(n, 2k)$, basta hallar $(H', \eta) \in \left(S_1/(x_0)\right) \times T_\omega(\mathcal{L}(k, k+1))$ tal que $\widetilde{\eta} = \frac{\eta - H'\widetilde{\omega}}{x_0}$, o equivalentemente, tal que

$$\eta = x_0\widetilde{\eta} + H'\widetilde{\omega}. \tag{4.1}$$

4.1 Lema de división y ecuación de tangencia

En esta sección, enunciamos y demostramos varios resultados que utilizaremos posteriormente en la sección 4.3 para demostrar el Teorema 102. Varios de estos resultados buscan caracterizar un vector tangente al espacio de móduli de foliaciones en un punto genérico de $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$, para así poder demostrar que vale la igualdad (3.7) de la Observación 100. Si bien esta sección no es muy larga, el lector puede hallarla algo técnica. En tal caso, puede ser una buena idea para una primera lectura leer directamente la Sección 4.3 y revisar en esta sección los enunciados de los resultados utilizados, dejando para una segunda lectura las demostraciones que considere muy técnicas.

A lo largo de esta sección, $\widetilde{\omega}$ es un elemento genérico (ver Definición 89) de $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ y $\widetilde{\eta} \in T_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{F}(n, 2k))$ es un vector tangente arbitrario.

Como dijimos anteriormente, iniciamos el argumento restringiendo la condición de tangencia de un vector tangente $\widetilde{\eta}$ a $\widetilde{\omega} \in \mathcal{F}(n, 2k+1)$ a parte de su conjunto de Kupka $K(\widetilde{\omega})$ (más específicamente a $C_1 \cup C_3$).

Observación 106. Sean $\widetilde{\omega} \in \mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ un elemento genérico (ver Definición 89) y $\widetilde{\eta} \in T_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{F}(n, 2k+1))$ un vector tangente Zariski. Vale entonces la ecuación de tangencia

$$\widetilde{\eta} \wedge d\widetilde{\omega} + \widetilde{\omega} \wedge d\widetilde{\eta} = 0. \tag{4.2}$$

Así, obtenemos que $\widetilde{\eta} \wedge d\widetilde{\omega} = 0$ en la clausura $\overline{K(\widetilde{\omega})}$ del conjunto de Kupka de $\widetilde{\omega}$.

Lema 107. *Se satisfacen las siguientes igualdades de 1-formas diferenciales en C_1 y C_3 respectivamente:*

$$d\widetilde{\omega} = -(k^2 + 2k + 1)d\widetilde{F_1} \wedge dF_2 \text{ en } C_1 \text{ y } d\widetilde{\omega} = -(2k+1)dF \wedge d\widetilde{G} \text{ en } C_3.$$

Demostración. Usando la expresión (3.5) para $\widetilde{\omega}$, obtenemos que

$$d\widetilde{\omega} = -(2k+1)dF \wedge d\widetilde{G} + dF \wedge \gamma \text{ en } C_1 \cup C_3.$$

Además, usando la igualdad de la Observación 82, obtenemos la siguiente igualdad módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$:

$$dF \wedge \gamma = kPdx_0 \wedge dL_0 \operatorname{mod}(\langle \widetilde{F_1}, F_2\rangle). \tag{4.3}$$

Así, sabemos que $dF \wedge \gamma = 0$ en C_3 y $dF \wedge \gamma = -kf_1^2 dx_0 \wedge dL_0 = -k^2 dF \wedge d\widetilde{G}$ en C_1 (ver Observación 80). Esto concluye la demostración. □

Observación 108. El lema anterior dice que $d\widetilde{\omega}$ es un múltiplo escalar de $dF \wedge d\widetilde{G}$ a lo largo de $C_1 \cup C_3$. Por ende, usando la Observación 106 obtenemos que un vector $\widetilde{\eta} \in T_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{F}(n, 2k))$ satisface la igualdad $\widetilde{\eta} \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0$ en $C_1 \cup C_3 = V(F, \widetilde{G})$.

Observación 109. En esta situación y a partir de la Observación 108, puede parecer natural utilizar el Lema de de Rham-Saito (ver [35]) para deducir información sobre $\widetilde{\eta}$. Describamos brevemente este resultado. Dados un anillo R, un R-módulo libre M y k elementos $\omega_1, \dots, \omega_k$ de M. Definimos los conjuntos de ciclos y bordes

$$Z^p = \left\{ \omega \in \bigwedge^p M \,:\, \omega \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = 0 \right\} \text{ y } B^p = \sum_{i=1}^{k} \left(\omega_i \wedge \bigwedge^{p-1} M \right)$$

y la cohomología $H^p = Z^p / B^p$ para todo $p \geq 0$. Estos conjuntos pueden ser interpretados como la cohomología de un cierto complejo que generaliza el complejo de Koszul (para más detalles sobre el complejo ver [31, Appendice]). Así, el Lema de de Rham-Saito dice que esta cohomología es nula para los valores de p más chicos que la profundidad del ideal de R generado por los coeficientes polinomiales de una escritura de $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ en términos de una base de M. En este sentido, uno podría intentar aplicar este resultado en nuestro caso. Para ello, definimos $H^{1,i}$ como el conjunto de 1-formas diferenciales en $\mathbb{C}^{n+1}$ de grado i y con coeficientes polinomiales homogéneos. En nuestro ejemplo, podemos considerar $R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i/\langle F, \widetilde{G}\rangle$, $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H^{1,i}/\langle F, \widetilde{G}\rangle$, $k = 2$, $\omega_1 = dF$ y $\omega_2 = d\widetilde{G}$. Si pudieramos usar el Lema de división para $p = 1$, junto con la Observación 108, deduciríamos una escritura para $\widetilde{\eta}$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ de la forma

$$\widetilde{\eta} = AdF + Bd\widetilde{G} + \alpha F + \beta \widetilde{G},$$

para ciertos polinomios A, B homogéneos y 1-formas α, β con coeficientes polinomiales homogéneos. Sin embargo, esto no es posible ya que no se cumplen las hipótesis del Lema de de Rham-Saito: el conjunto singular de la variedad $V(F, \widetilde{G})$ es de codimensión 1 (visto como subvariedad de $V(F, \widetilde{G})$) y por ende la profundidad del ideal de los coeficientes polinomiales de $dF \wedge d\widetilde{G}$ es 1. Por lo tanto, no podemos usar el Lema de división para $p = 1$. Más aún, demostraremos en nuestro Lema 110 de división adaptado que la cohomología H^1 en nuestro caso está generada (como módulo sobre el anillo de polinomios) por un elemento no nulo, que es γ (ver Definición 77).

Una vez que restringimos la condición de tangencia (1.4) a $C_1 \cup C_3$, queremos usar esa información para caracterizar vectores tangentes Zariski al espacio de móduli de foliaciones $\mathcal{F}(n, 2k)$ en $\widetilde{\omega} \in \mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ genérico. Ese es el contenido del siguiente *lema de división*, que enunciamos a continuación. Se trata de una variante adaptada a esta situación del Lema de de Rham-Saito (ver [35]). Lo demostraremos en la Sección 4.2.

Lema 110 (Lema de División). *Sea $\mu \in H^0(\mathbb{C}^{n+1}, \Omega^1_{\mathbb{C}^{n+1}})$ una 1-forma diferencial con coeficientes polinomiales homogéneos que satisface $\mu \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$ y sean $L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}, F, \widetilde{G}$ genéricos (ver Definición 89). Entonces existen polinomios homogéneos A, B, C y 1-formas diferenciales α, β con coeficientes polinomiales homogéneos tales que*

$$\mu = AdF + Bd\widetilde{G} + C\gamma + \alpha F + \beta \widetilde{G}. \tag{4.4}$$

En particular, existen polinomios homogéneos A', B' y 1-formas α', β' con coeficientes polinomiales homogéneos tales que

$$x_0\mu = A'dF + B'dG + \alpha' F + \beta' \widetilde{G}. \tag{4.5}$$

Usando el Lema de División, podremos reducirnos a encontrar una solución (H', η) a la Ecuación (4.1) en el caso en que $x_0\widetilde{\eta}$ se anula en $C_1 \cup C_3$, como veremos en el siguiente Corolario.

Corolario 111. *Sean $\widetilde{\omega} \in \mathcal{F}(n, 2k)$ genérica (en el sentido de la Definición 89) y $\widetilde{\eta} \in T_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{F}(n, 2k))$. Existe $\eta_1 \in T_\omega(\mathcal{L}(k, k+1))$ y 1-formas con coeficientes polinomiales θ_1, θ_2 tales que*

$$x_0\widetilde{\eta} = \eta_1 + \theta_1 F + \theta_2 \widetilde{G}.$$

Demostración. Gracias a la Observación 108, sabemos que $\widetilde{\eta} \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0$ en $C_1 \cup C_3$ y por ende podemos usar el Lema 110 de División para $\widetilde{\eta}$. Obtenemos que

$$x_0\widetilde{\eta} = A' dF + B' dG + \alpha' F + \beta' \widetilde{G}$$

para ciertos A', B', α', β' como en el enunciado del Lema 110. Tomemos así un vector tangente $\eta_1 \in T_\omega(\mathcal{L}(\mathbf{d}))$ de la forma $\eta_1 = i_R(dF \wedge dG' + dF' \wedge dG)$ donde $F' = \frac{1}{k} B'$ y $G' = \frac{1}{k+1} A'$ (ver Observación 27). Deducimos que

$$\eta_1 = A' dF + B' dG - \frac{k}{k+1} F dA' - \frac{k+1}{k} G dB'.$$

Definiendo las 1-formas diferenciales

$$\theta_1 := \alpha' + \frac{k}{k+1} dA' \text{ y } \theta_2 := \beta' + \frac{k+1}{k} dB',$$

obtenemos lo deseado con una cuenta directa. Esto concluye la demostración. □

Observación 112. Sabemos que si $\widetilde{\eta} \in T_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{F}(n, 2k))$, luego $x_0\widetilde{\eta} \in T_\omega(\mathcal{F}(n, 2k+1))$ (ver Observación 23). Usando este hecho y el Corolario 111, podemos reducir la demostración del Teorema 102 a probar que existen $\eta \in T_\omega(\mathcal{L}(k, k+1))$ y $H' \in S_1$ que satisfacen la Ecuación

$$\theta + H'\widetilde{\omega} = \eta \tag{4.6}$$

para todo $\theta \in T_\omega(\mathcal{F}(n, 2k+1))$ tal que $\theta = x_0\widetilde{\eta} = \theta_1 F + \theta_2 \widetilde{G}$ como en el Corolario 111.

Buscamos deducir aún más información sobre el vector $x_0\widetilde{\eta} = \theta_1 F + \theta_2 \widetilde{G}$ de la Observación anterior. En ese caso, demotraremos que las 1-formas θ_1 y θ_2 también satisfacen las hipótesis del Lema 110 de División.

Lema 113. *Sean θ_1, θ_2 dos 1-formas diferenciales que satisfacen que la 1-forma $\theta := \theta_1 F + \theta_2 \widetilde{G}$ es tangente al espacio $\overline{\mathcal{F}}(n, 2k+1)$ en el punto ω y sean $F, \widetilde{G}$ genéricas en el sentido de la Definición 89. Entonces*

$$\theta_1 \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0 \text{ en } C_1 \cup C_3 \text{ y } \theta_2 \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0 \text{ en } C_1 \cup C_3.$$

Demostración. En primer lugar, usando que $\omega = x_0\widetilde{\omega}$ y las expresiones (3.4) y (3.5) de la Observación 78 obtenemos las siguientes igualdades módulo F:

$$\theta = \theta_2\widetilde{G},\ d\theta = d\widetilde{G}\wedge\theta_2 + \widetilde{G}d\theta_2 + dF\wedge\theta_1,$$
$$\omega = (k+1)x_0\widetilde{G}dF \text{ y } d\omega = -(2k+1)dF\wedge(x_0 d\widetilde{G} + \widetilde{G}dx_0).$$

Ahora, reduzcamos módulo F la ecuación de tangencia (1.4) de θ a ω. Definiendo $\xi := (2k+1)\theta_2\wedge dx_0\wedge dF + (k+1)x_0 d\theta_2\wedge dF$ y reemplazando en la ecuación de tangencia, obtenemos la igualdad

$$-kx_0\widetilde{G}\theta_2\wedge dF\wedge d\widetilde{G} + \widetilde{G}^2\xi = 0 \operatorname{mod}(F).$$

Como F y $\widetilde{G}$ son genéricos, podemos cancelar $\widetilde{G}$. Obtenemos

$$-kx_0\theta_2\wedge dF\wedge d\widetilde{G} + \widetilde{G}\xi = 0 \operatorname{mod}(F). \tag{4.7}$$

Reduciendo módulo el ideal primo I_3 (ver Definición 79) y usando que x_0 no es divisor de cero, obtenemos que $\theta_2\wedge dF\wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo I_3. Por otro lado, notemos que $\xi = (2k+1)kL_0^{k-1}\theta_2\wedge dx_0\wedge dL_0$ módulo $\langle x_0\rangle$ y además que vale la igualdad $\widetilde{G}L_0^{k-1} = x_0\widetilde{G}_1L_0^{k-1} + \frac{f_1}{k}L_0^k = x_0\widetilde{G}_1L_0^{k-1} - x_0\frac{f_1}{k}F_1$ módulo $\langle F\rangle$. Por ende, usando que $F_1 = f_1$ módulo I_1, podemos cancelar x_0 en la Ecuación (4.7) y reducir módulo I_1 para obtener

$$-k\theta_2\wedge dF\wedge d\widetilde{G} - (2k+1)f_1^2\theta_2\wedge dx_0\wedge dL_0 = 0 \operatorname{mod}(I_1).$$

Finalmente, como $f_1^2dx_0\wedge dL_0 = kdF\wedge d\widetilde{G}$ módulo I_1 (ver Observación 80), obtenemos $\theta_2\wedge dF\wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo I_1. Observar que como la elección de F y $\widetilde{G}$ es genérica, f_1 no se anula módulo I_1 y por ende también $\theta_2\wedge dx_0\wedge dL_0 = 0$ módulo I_1.

Del mismo modo que antes, usando que $\omega = x_0\widetilde{\omega}$ y las igualdades (3.5) y (3.4) de la Observación 78 obtenemos las siguientes igualdades módulo $\widetilde{G}$:

$$\omega = x_0F(\gamma - kd\widetilde{G}),\ \theta = F\theta_1,\ d\theta = d(F\theta_1) + d\widetilde{G}\wedge\theta_2 \text{ y}$$
$$d\omega = -(2k+1)dF\wedge(x_0d\widetilde{G} + FdL_0).$$

Reemplazando en la ecuación de tangencia (1.4) de θ a ω módulo $\widetilde{G}$ y cancelando F (ya que θ y ω son divisibles por F), obtenemos la siguiente igualdad módulo $\widetilde{G}$

$$\theta_1\wedge d\omega + (dF\wedge\theta_1 + Fd\theta_1 + d\widetilde{G}\wedge\theta_2)\wedge x_0(\gamma - kd\widetilde{G}) = 0. \tag{4.8}$$

Usando que $x_0\gamma = L_0dF$ módulo I_3 y que $\theta_2\wedge dF\wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo I_3, reducimos la ecuación (4.8) módulo I_3 para obtener $x_0\theta_1\wedge dF\wedge d\widetilde{G} = 0 \operatorname{mod}(I_3)$ y en definitiva que $\theta_1\wedge dF\wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo I_3, ya que I_3 es un ideal primo que no contiene a

x_0. Por otro lado, notar que $FdF \wedge dL_0 = Ff_1 dx_0 \wedge dL_0$ módulo $\langle x_0 \rangle$ y además que $Ff_1 = (L_0^k + x_0 F_1) f_1 = -k x_0 L_0^{k-1} \widetilde{G}_1 + x_0 F_1 f_1$ módulo $\langle \widetilde{G} \rangle$. Así, podemos cancelar x_0 y reducir módulo I_1 en la Ecuación (4.8). Usando las igualdades de la Observación 80 y que $\theta_2 \wedge dx_0 \wedge dL_0 = 0$ módulo I_1, obtenemos la siguiente igualdad módulo I_1:

$$\left(-\frac{2k+1}{k} - k \right) f_1^2 \theta_1 \wedge dx_0 \wedge dL_0 = 0.$$

Como f_1 no se anula módulo I_1, obtenemos que $\theta_1 \wedge dx_0 \wedge dL_0 = 0$ y por ende que $\theta_1 \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo I_1. Esto concluye la demostración. □

La siguiente proposición nos permitirá reducirnos al caso en que $x_0 \widetilde{\eta}$ tiene una escritura del tipo $\theta := \tau \widetilde{G}$ donde τ es una 1-forma diferencial. En otras palabras, nos dice que podemos suponer que $\theta_1 = 0$ en la Observación 112.

Proposición 114. *Sean $\omega, F, \widetilde{G}$ genéricos (en el sentido de la Definición 89) y sean θ_1, θ_2 dos 1-formas diferenciales tales que $\theta := \theta_1 F + \theta_2 \widetilde{G} \in T_\omega \mathcal{F}(n, 2k+1)$. Entonces existen un polinomio lineal H', una 1-forma $\eta_2 \in T_\omega(\mathcal{L}(k, k+1))$ y una 1-forma τ con coeficientes polinomiales tales que*

$$\theta = \eta_2 + H' \widetilde{\omega} + \tau \widetilde{G}.$$

Demostración. Combinando los Lemas 110 y 113, obtenemos que

$$\theta_1 = L_1 dF + L_2 d\widetilde{G} + F dL_3 + \widetilde{G} dL_4 + L_5 \gamma, \tag{4.9}$$

para ciertos polinomios lineales L_i (por cuestiones de grado). En primer lugar, definiendo $\eta_2' = \frac{1}{k} i_R(dF \wedge d((L_2 + kL_5)\widetilde{G}))$ y usando la expresión (3.5) de la Observación 78, obtenemos que

$$\eta_2' + L_5 \widetilde{\omega} = F \left(L_2 d\widetilde{G} + L_5 \gamma \right) \ \mathrm{mod}(\widetilde{G}).$$

Por otro lado, reduciendo $i_R \theta = 0$ módulo $\widetilde{G}$ y cancelando F, obtenemos que $L_3 + kL_1 = 0$ módulo $\widetilde{G}$, y en definitiva que $L_3 = -kL_1$. Así, si definimos

$$\eta_2'' = i_R(dF \wedge d(-FL_1)) = F(L_1 dF - kF dL_1)$$

y llamamos $\eta_2 = \eta_2' + \eta_2''$ y $H' = L_5$, obtenemos que $\theta = \eta_2 + H' \widetilde{\omega} \ \mathrm{mod}(\widetilde{G})$. Esto concluye la demostración. □

Observación 115. Teniendo en mente la Observación 112 y usando la Proposición 114, podemos reducirnos al caso en que $\theta_1 = 0$, o equivalentemente, al caso en que $x_0 \widetilde{\eta} = \theta = \tau \widetilde{G}$. Es decir, buscamos una 1-forma $\eta \in T_\omega(\mathcal{L}(k, k+1))$ y un polinomio lineal H' que satisfacen

$$\theta + H' \widetilde{\omega} = \eta$$

para todo vector $\theta \in T_\omega(\mathcal{F}(n, d))$ con una escritura de la forma $x_0 \widetilde{\eta} = \theta = \tau \widetilde{G}$.

Usando nuevamente el Lema 110 de división, podemos describir un vector τ como el de la Observación 115. Ese es el contenido de la siguiente Observación.

Observación 116. Sea τ una 1-forma tal que $\theta := \tau\widetilde{G} \in T_\omega(\mathcal{F}(n,2k+1))$. Usando el Lema 113, obtenemos que $\tau \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$. Por ende, usando el Lema 110 de División, deducimos una escritura de la forma

$$\tau = L_1 dF + L_2 d\widetilde{G} + F dL_3 + \widetilde{G} dL_4 + L_5\gamma, \tag{4.10}$$

donde los L_i son polinomios lineales. Además, podemos suponer que $L_5 \in T_1$ (es decir que no depende de x_0) ya que $x_0\gamma = L_0 dF - k\widetilde{G}dx_0 - kF dL_0$. Sabemos además que $i_R\theta = 0$ y por ende $i_R\tau = 0$. Usando que $i_R\gamma = -k\widetilde{G}$, las expresiones para $x_0 R$ y $L_0 R$ de la Observación 81 y reagrupando, obtenemos que

$$0 = i_R\tau = (kL_1 + L_3)F + (kL_2 + L_4 - kL_5)\widetilde{G}.$$

Para elecciones genéricas de los parámetros (ver Definición 89) F y $\widetilde{G}$ son irreducibles distintos, obtenemos que los polinomios lineales $kL_2+L_4-kL_5$ y kL_1+L_3 son divisibles por F y $\widetilde{G}$ respectivamente y por ende se anulan. Deducimos así las siguientes dos igualdades para L_3 y L_4

$$L_3 = -kL_1 \text{ y } L_4 = k(L_5 - L_2). \tag{4.11}$$

Observación 117. A partir de ahora, para simplificar la lectura del argumento, supondremos que $k \geq 3$. En la subsección 4.3.1, mostraremos cómo adaptar la demostración de los resultados para el caso $k = 2$.

En la siguiente proposición, probamos que si θ_1 tiene una escritura como en la Ecuación (4.10) de la Observación 116, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $L_1 = -\frac{c}{k}L_0$ y $L_3 = cL_0$.

Proposición 118. *Sean $\widetilde{\omega}$, F y $\widetilde{G}$ genéricos (Definición 89), $L_1, L_2, L_3, L_4 \in S_1$, $L_5 \in T_1$ y $\tau = L_1 dF + L_2 d\widetilde{G} + F dL_3 + \widetilde{G} dL_4 + L_5\gamma$ una 1-forma diferencial tal que $\theta = \tau\widetilde{G} \in T_\omega(\mathcal{F}(n,2k+1))$. Entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $L_1 = -\frac{c}{k}L_0$ y $L_3 = cL_0$.*

Demostración. En primer lugar, reducimos la ecuación (1.4) de tangencia de θ a ω módulo $\widetilde{G}$. Notar que $\theta = 0$ y $d\theta = d\widetilde{G} \wedge \tau$ módulo $\widetilde{G}$. Obtenemos así la igualdad $d\widetilde{G} \wedge \tau \wedge \omega = 0$ módulo $\widetilde{G}$. Además, usando las expresiones para $\widetilde{\omega}$ y γ de la Observación 78 y la Definición 77 obtenemos que $\omega = Fx_0(\gamma - kd\widetilde{G})$ y $x_0\gamma = L_0 dF - kF dL_0$ módulo $\widetilde{G}$. Por ende, como F y $\widetilde{G}$ son irreducibles y coprimos, podemos cancelar F, reemplazar la expresión de τ en la ecuación anterior y usar que vale $\gamma \wedge x_0\gamma = 0$ para obtener la siguiente igualdad módulo $\widetilde{G}$:

$$d\widetilde{G} \wedge (L_1 dF + F dL_3) \wedge (L_0 dF - kF dL_0) = 0. \tag{4.12}$$

Cancelando F, usando que $-kL_1 = L_3$ (Ecuación (4.11) de la Observación 116) y reduciendo la ecuación módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$ obtenemos la igualdad

$$(L_0 dL_3 - L_3 dL_0) \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0.$$

Esto nos permite usar el Lema 110 de División. Como $k \geq 3$ (ver Observación 117), obtenemos que $L_0 dL_3 - L_3 dL_0 = 0$. Tomando diferencial exterior, deducimos que $dL_3 \wedge dL_0 = 0$ y por ende existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $L_3 = cL_0$. Esto concluye la demostración. □

De forma análoga, en la siguiente Proposición probamos que si θ_1 tiene una escritura como en la Ecuación (4.10) de la Observación 116, entonces existe $c' \in \mathbb{C}$ tal que $L_2 = \frac{kL_5 + c'x_0}{2k+1}$ y $L_4 = \frac{(k^2+k)L_5 - kc'x_0}{2k+1}$.

Proposición 119. *Sean $\widetilde{\omega}$, F y $\widetilde{G}$ genéricos (Definición 89), $L_1, L_2, L_3, L_4 \in S_1$, $L_5 \in T_1$ y*

$$\tau = L_1 dF + L_2 d\widetilde{G} + F dL_3 + \widetilde{G} dL_4 + L_5 \gamma$$

una 1-forma diferencial tal que $\theta = \tau\widetilde{G} \in T_\omega(\mathcal{F}(n, 2k+1))$. Entonces existe $c' \in \mathbb{C}$ tal que $L_2 = \frac{kL_5 + c'x_0}{2k+1}$ y $L_4 = \frac{(k^2+k)L_5 - kc'x_0}{2k+1}$.

Demostración. Al igual que en (4.7), escribimos la ecuación de tangencia de θ a ω módulo F y cancelamos $\widetilde{G}$ para obtener la ecuación

$$-kx_0\tau \wedge dF \wedge d\widetilde{G} + \widetilde{G}\xi = 0 \bmod (F), \tag{4.13}$$

donde $\xi := (2k+1)\tau \wedge dx_0 \wedge dF + (k+1)x_0 d\tau \wedge dF$. Usando la igualdad $x_0 d\tau = d(x_0\tau) + \tau \wedge dx_0$, obtenemos que

$$\xi = (3k+2)\tau \wedge dx_0 \wedge dF + (k+1)d(x_0\tau) \wedge dF.$$

De la Definición 77 para $x_0\gamma$, deducimos la siguiente igualdad módulo F:

$$x_0\tau \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = \widetilde{G}(x_0 dL_4 - kL_5 dx_0) \wedge dF \wedge d\widetilde{G} \bmod (F)$$

Del mismo modo, deducimos las siguientes dos igualdades módulo F:

$$\begin{aligned} d(x_0\tau) \wedge dF &= (-d(x_0L_2) + (x_0 dL_4 - kL_5 dx_0)) \wedge dF \wedge d\widetilde{G} \\ &\qquad + \widetilde{G} dx_0 \wedge d(L_4 + kL_5) \wedge dF \\ \tau \wedge dx_0 \wedge dF &= L_2 dx_0 \wedge dF \wedge d\widetilde{G} + \widetilde{G}(dL_4 \wedge dx_0 \wedge dF) \end{aligned}$$

Así, podemos cancelar $\widetilde{G}$ en la ecuación de tangencia (4.13) y reducir módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$ para obtener

$$(-(k+1)x_0 dL_2 + (2k+1)L_2 dx_0 + x_0 dL_4 - kL_5 dx_0)) \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0.$$

Además, sabemos que $-kL_2 + kL_5 = L_4$. Reemplazando y definiendo la 1-forma $\xi' := ((k+1)L_2 - L_4)dx_0 - x_0 d((k+1)L_2 - L_4)$ obtenemos que $\xi' \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$. Así, deducimos que ξ' satisface las hipótesis del Lema 110 de División. Como $k \geq 3$ (Observación 117), obtenemos que $\xi' = 0$ y por ende ξ' es cerrada. Tomando diferencial exterior, obtenemos que $dx_0 \wedge d((k+1)L_2 - L_4) = 0$ y por ende que existe $c' \in \mathbb{C}$ tal que $(k+1)L_2 - L_4 = c'x_0$. Combinando esta última igualdad con la expresión (4.11) de la Observación 116, obtenemos lo deseado. Esto concluye la demostración. $\square$

Finalizaremos la sección con dos resultados sencillos que serán de utilidad más adelante.

Proposición 120. *Sean $\widetilde{\omega}$, F y $\widetilde{G}$ genéricos (ver Definición 89), $c' \in \mathbb{C}$ y consideremos $\tau = c'(x_0 d\widetilde{G} - k\widetilde{G}dx_0)$ una 1-forma diferencial tal que $\theta = \widetilde{G}\tau$ es un elemento de $T_\omega(\mathcal{F}(n, 2k+1))$. Entonces $c' = 0$ y por ende $\tau = 0$.*

Demostración. Usando que $d\theta = c'(2k+1)\widetilde{G}dx_0 \wedge d\widetilde{G}$, podemos cancelar $\widetilde{G}$ en la ecuación de tangencia (1.4) de θ a ω y reducir módulo $\widetilde{G}$ para obtener

$$c'x_0 d\widetilde{G} \wedge d\omega + c'(2k+1)dx_0 \wedge d\widetilde{G} \wedge \omega = 0. \tag{4.14}$$

Como $d\widetilde{G} \wedge d\omega = (2k+1)F d\widetilde{G} \wedge dL_0 \wedge dF$ y $d\widetilde{G} \wedge \omega = F d\widetilde{G} \wedge x_0\gamma$, podemos cancelar F en la Ecuación (4.14) y reducir módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$. Usando además que $x_0\gamma = L_0 dF$ módulo $\langle F, \widetilde{G}\rangle$, obtenemos que

$$(2k+1)c'(L_0 dx_0 - x_0 dL_0) \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0.$$

Por ende, podemos usar el Lema 110 de División sobre $c'(L_0 dx_0 - x_0 dL_0)$. Como $k \geq 3$ (ver Observación 117), obtenemos que $c'(L_0 dx_0 - x_0 dL_0) = 0$ y por ende es una 1-forma cerrada. Deducimos que $c' = 0$. Esto concluye la demostración. $\square$

Observación 121. Sea $c \in \mathbb{C}$ y sean $F' = \frac{c}{2k+1}\widetilde{G}$ y $G' = \frac{c(k+1)}{k(2k+1)}L_0\widetilde{G}$ dos polinomios homogéneos. El vector tangente Zariski (ver Observación 27) de la forma $\eta_3 = i_R(dF \wedge dG' + dF' \wedge dG) \in T_\omega \mathcal{L}(k, k+1)$ cumple que

$$\eta_3 = c\widetilde{G}\left(-\frac{x_0 d\widetilde{G}}{2k+1} - \frac{L_0 dF}{k} + \frac{k\widetilde{G}dx_0}{2k+1} + F dL_0\right).$$

Esto se puede verificar con una cuenta directa usando que $G = L_0 F + x_0\widetilde{G}$.

4.2 Demostración del Lema de división

El objetivo de esta sección es probar el Lema de división 110. Si bien esta demostración es un paso importante en la demostración del Teorema 102, es bastante técnica e intrincada. El autor sugiere fuertemente que en una primera lectura, el lector se saltee esta sección y pase directamente a la Sección 4.3, para entender la demostración del Teorema 102 asumiendo la validez del Lema de división 110 para regresar a leer esta sección más técnica luego de tener las ideas y motivación del Teorema 102.

Antes de demostrar el Lema de división, hagamos la siguiente definición.

Definición 122. Definimos el ideal

$$J := I_3 + \langle x_0 \rangle = \langle x_0, L_0^k, L_0 f_1, kL_0^{k-1} g_2 - f_1^2 \rangle.$$

Notar que el ideal J no es radical (y por ende no es primo). Probamos así el siguiente Lema que nos permitirá obtener información sobre ciertos productos de polinomios que pertenecen al ideal.

Lema 123. *Sea A un polinomio homogéneo y sean $L_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ genéricos como en la Definición 89. Valen las siguientes afirmaciones:*

(i) Si $L_0^i A \in J$, entonces $A \in \langle x_0, L_0^{k-i}, f_1 \rangle$ para todo $0 < i < k$.

(ii) Si $f_1^2 A \in J$, entonces $A \in \langle x_0, L_0, f_1 \rangle$.

(iii) Si $g_2 A \in J$, entonces $A \in J$.

Demostración. (i) Como $L_0^i A \in J$, sabemos que existen polinomios $B_1, \ldots, B_4$ tales que

$$L_0^i A = B_1 x_0 + B_2 L_0^k + B_3 L_0 f_1 + B_4 (kL_0^{k-1} g_2 - f_1^2). \tag{4.15}$$

Reduciendo módulo I_1 y usando que $D := V(x_0 L_0 f_1 g_2)$ es un divisor con simple normal crossings, obtenemos que $0 = -g_2^2 B_4$ módulo I_1 y en definitiva que $B_4 = 0$ módulo I_1. Por ende, podemos suponer que $B_4 = 0$, modificando tal vez B_1, B_2 y B_3. Volviendo a la ecuación (4.15) y reduciendo módulo $\langle x_0, f_1 \rangle$, obtenemos que $L_0^i A = B_2 L_0^k$ módulo $\langle x_0, f_1 \rangle$. Nuevamente usando que $D = V(x_0 L_0 f_1 g_2)$ es un divisor con simple normal crossings, cancelamos L_0^i y obtenemos lo deseado.

(ii) Del mismo modo que en el item anterior, existen polinomios B_i tales que

$$f_1^2 A = B_1 x_0 + B_2 L_0^k + B_3 L_0 f_1 + B_4 (kL_0^{k-1} g_2 - f_1^2). \tag{4.16}$$

Reduciendo módulo $\langle x_0, f_1\rangle$ y cancelando L_0^{k-1} (por ser genéricos), obtenemos que $0 = L_0B_2 + kg_2B_4$ módulo $\langle x_0, f_1\rangle$. Nuevamente usando que $V(x_0L_0f_1g_2)$ es un divisor con simple normal crossings, deducimos la pertenencia $B_4 \in \langle x_0, L_0, f_1\rangle$. Reduciendo la ecuación (4.16) módulo I_1 y cancelando f_1^2 obtenemos que $A = -B_4$. Esto implica que $A \in \langle x_0, L_0, f_1\rangle$, como queríamos demostrar.

(iii) Del mismo modo que en el item anterior, existen polinomios B_i tales que

$$g_2A = B_1x_0 + B_2L_0^k + B_3L_0f_1 + B_4(kL_0^{k-1}g_2 - f_1^2). \tag{4.17}$$

Reduciendo módulo $\langle x_0, L_0, g_2\rangle$ obtenemos que $0 = -f_1^2B_4$ y usando que $V(x_0L_0f_1g_2)$ es un divisor con simple normal crossings, deducimos la pertenencia $B_4 \in \langle x_0, L_0, g_2\rangle$. Además, podemos suponer sin perder generalidad que B_4 no depende de x_0 ni L_0, por lo que B_4 es divisible por g_2. Así, reduciendo módulo $\langle x_0, g_2\rangle$ y cancelando un factor L_0, obtenemos la igualdad $0 = B_2L_0^{k-1} + B_3f_1$ módulo $\langle x_0, g_2\rangle$. Esto dice que L_0^{k-1} divide a B_3 módulo $\langle x_0, g_2\rangle$. Modificando tal vez B_1 y B_2 podemos suponer que g_2 divide a B_3. Reduciendo la ecuación (4.17) módulo $\langle x_0, g_2\rangle$ y cancelando el polinomio L_0^k, obtenemos que $B_2 \in \langle x_0, g_2\rangle$ y por ende podemos suponer (modificando tal vez B_1) que g_2 divide a B_2. Finalmente, reduciendo la ecuación (4.17) módulo $\langle g_2\rangle$ y cancelando x_0, obtenemos que B_1 también es divisible por g_2. Hemos deducido que existen polinomios B_i' tales que $B_i = g_2B_i'$ para todo $i = 1, \dots, 4$. Cancelando g_2 en la ecuación (4.17) y obtenemos lo deseado.

□

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar el Lema de división.

Demostración del Lema 110 de división. Como F y $\widetilde{G}$ son genéricos (ver la Definición 89), sabemos que $dF \wedge d\widetilde{G}$ no se anula sobre $C_3 \cap \{x_0 \neq 0\}$. Por ende, existe un exponente entero $e \geq 0$ mínimo tal que

$$x_0^e\mu = A'dF + B'd\widetilde{G} \operatorname{mod}(I_3), \tag{4.18}$$

para ciertos polinomios A', B' homogéneos.

Probaremos primero que el enunciado es cierto siempre que $e = 1$. En tal caso, podemos mirar la Ecuación (4.18) módulo J, reemplazar dF y $d\widetilde{G}$ usando las igualdades (3.3) de la Observación 78, y multiplicarla por L_0 para obtener

$$B'L_0\left(g_2dx_0 + L_0\left(\frac{1}{k}df_1 - f_2dx_0\right)\right) = 0 \operatorname{mod}(J). \tag{4.19}$$

Veamos que $B'L_0 = 0$ módulo J. En efecto, supongamos que $B'L_0^{i+2} = 0$ para cierto entero $i \geq 0$. Multiplicando la Ecuación (4.19) por L_0^i deducimos que

$B' L_0^{i+1} g_2 = 0$ y en definitiva que $B' L_0^{i+1} = 0$ módulo J gracias al Lema 123 (iii). Como $L_0^k = 0$ módulo J, deducimos que $B' L_0 = 0$ módulo J iterando este último argumento. Por ende, obtenemos que $B' \in \langle x_0, L_0^{k-1}, f_1 \rangle$ gracias al Lema 123 (i). Deducimos así una escritura para B' de la forma $B' = x_0 B + L_0^{k-1} B_1 + f_1 B_2$, donde B_1, B_2 y B son polinomios homogéneos. Reemplazando nuevamente en la igualdad (4.18), usando las igualdades (3.3) de la Observación 78 para dF y $d\widetilde{G}$ y la escritura para B_2, obtenemos la siguiente igualdad módulo J:

$$\left(kA' L_0^{k-1} + \frac{f_1^2}{k} B_2 \right) dL_0 + \left(A' f_1 + (L_0^{k-1} B_1 + f_1 B_2) g_2 \right) dx_0 = 0.$$

Veamos las ecuaciones que se obtienen mirando el coeficiente que acompaña a dL_0 y multiplicando el coeficiente que acompaña a dx_0 por f_1. Usando que vale la igualdad $\frac{f_1^2}{k} = -kL_0^{k-1} g_2$ y $f_1^3 = 0$ módulo J, llegamos a las siguientes igualdades módulo J:

$$(kA' + g_2 B_2) L_0^{k-1} = 0 \text{ y } f_1^2 (A' + g_2 B_2) = 0.$$

Usando el Lema 123 (i) y (ii) sobre estas dos ecuaciones, deducimos (haciendo combinaciones lineales de los términos entre paréntesis) que $A', B_2 \in \langle x_0, L_0, f_1 \rangle$. Reemplazando B_2 y tal vez modificando B y B_1, obtenemos una igualdad de la forma $B' = -kL_0^{k-1} B_1$ módulo J. Escribiendo $A' = x_0 A + L_0 A_1 + f_1 A_2$ módulo J y reemplazando en la Ecuación (4.18) módulo J, obtenemos que

$$(-kL_0^{k-1} g_2 B_1 + f_1^2 A_2) dx_0 = 0 \text{ mod}(J).$$

Como $kL_0^{k-1} g_2 = f_1^2$ módulo J, obtenemos que $f_1^2 (A_2 - B_1) = 0$ módulo J y en definitiva que $A_2 - B_1 \in \langle x_0, L_0, f_1 \rangle$ gracias al Lema 123 (ii). Entonces, modificando tal vez A y A_1, podemos suponer que $A_2 = B_1$ módulo J.

Con todo esto, siempre que $e \leq 1$ podemos levantar la ecuación (4.18) a $\mathbb{C}^{n+1}$ para obtener una escritura de la forma

$$x_0 \mu = A' dF + B' d\widetilde{G} + \alpha' F + \beta' \widetilde{G} + \delta' P, \tag{4.20}$$

donde $A' = L_0 A_1 + f_1 A_2 + x_0 A$ y $B' = -kL_0^{k-1} B_1 + x_0 B$. Aquí, A_1 y B_1 no depende de x_0; A_2 y δ' no dependen de x_0 ni de L_0 y α', β' son 1-formas con coeficientes en S (en el caso $e = 0$ además vale que $A_1 = B_1 = 0$). Reduciendo la igualdad módulo I_1, obtenemos que $0 = f_1^2 (A_2 dx_0 - \delta')$ y por ende $\delta' = A_2 dx_0$. Por otro lado, sabemos que $L_0 dF = x_0 \gamma$ módulo $\langle F, \widetilde{G} \rangle$ y además que

$$-x_0 dP = P dx_0 - d(x_0 P) = P dx_0 + f_1 dF - kL_0^{k-1} d\widetilde{G} \text{ mod}(\langle F, \widetilde{G} \rangle).$$

Con esto en mente, usando que $A_2 = B_1$ módulo J y modificando tal vez las 1-formas α' y β', obtenemos una expresión de la forma

$$x_0\mu = x_0 A dF + x_0 B d\widetilde{G} + \alpha' F + \beta' \widetilde{G} + x_0 A_1 \gamma - x_0 A_2 dP. \tag{4.21}$$

Escribiendo $\alpha' = \alpha_0 + x_0\alpha$ y $\beta' = \beta_0 + x_0\beta$ para ciertas 1-formas α y β que no dependen de x_0, obtenemos (mirando módulo x_0) que $\alpha_0 L_0^k + \beta_0 \frac{L_0 f_1}{k} = 0$. Cancelando L_0 y usando que L_0, f_1 son genéricos (ver Definición 89), obtenemos que $\alpha_0 = -f_1\xi$ y $\beta_0 = kL_0^{k-1}\xi$ para cierta 1-forma ξ. Por ende, deducimos que $\alpha' \frac{L_0 f_1}{k} + \beta' L_0^k = x_0(\alpha F + \beta \widetilde{G} + P\xi)$. Estamos en condiciones así de dividir por x_0 en la ecuación (4.21), para obtener:

$$\mu = A dF + B d\widetilde{G} + \alpha F + \beta \widetilde{G} + A_1\gamma - A_2 dP + P\xi. \tag{4.22}$$

Además, sabemos que $\mu \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = 0$ módulo I_1. Usando que $P = -f_1^2$ y $dP \wedge dx_0 \wedge dL_0 = -2f_1 df_1 \wedge dx_0 \wedge dL_0$ módulo I_1 (que las obtenemos de la Definición 77) y que $k dF \wedge d\widetilde{G} = f_1^2 dx_0 \wedge dL_0$ módulo I_1 (ver Observación 82), podemos tomar $\wedge dF \wedge d\widetilde{G}$ en la Ecuación (4.22) y reducir módulo I_1. Cancelando f_1^3, obtenemos que

$$0 = \mu \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = (-f_1\xi + 2A_2 df_1) \wedge dx_0 \wedge dL_0.$$

Como A_2 y ξ no dependen de x_0 ni L_0, obtenemos las dos expresiones $A_2 = f_1\widetilde{A_2}$ y $\xi = 2\widetilde{A_2} df_1 + Q_1 dx_0 + Q_2 dL_0$ para ciertos polinomios $\widetilde{A_2}, Q_1$ y Q_2 que no dependen de x_0 ni L_0. Finalmente, tomamos $\wedge dF \wedge d\widetilde{G}$ en la Ecuación (4.22) y reducimos módulo $\langle x_0, F, \widetilde{G}\rangle = \langle x_0, L_0 f_1, L_0^k\rangle$. Como $k dF \wedge d\widetilde{G} = f_1^2 dx_0 \wedge dL_0$ módulo $\langle x_0, L_0 f_1, L_0^k\rangle$, cancelamos f_1^2 y obtenemos

$$0 = \mu \wedge dF \wedge d\widetilde{G} = -2kL_0^{k-1}\widetilde{A_2} g_2 df_1 \wedge dx_0 \wedge dL_0.$$

Como $V(x_0 L_0 f_1 g_2)$ es un divisor con simple normal crossings (ver Definición 89), obtenemos que $L_0^{k-1}\widetilde{A_2} g_2 = 0$ módulo $\langle x_0, L_0 f_1, L_0^k\rangle$ y en definitiva que $\widetilde{A_2}$ es un múltiplo de f_1, gracias al Lema 123 (i) y (iii). Esto nos dice entonces que A_2 es múltiplo de f_1^2 y por ende $A_2 = -P$ módulo I_1. Usando las igualdades $x_0 dP = d(x_0 P) - P dx_0$ y $L_0 dP = d(L_0 P) - P dL_0$ y las expresiones de la Observación 81, podemos suponer (modificando tal vez A, B, α, β, A_1) que $A_2 = 0$ y por ende $\xi = Q_1 dx_0 + Q_2 dL_0$. Finalmente, usando las igualdades de la Observación 83, obtenemos que $P dx_0$ y $P dL_0$ pueden escribirse como combinaciones con coeficientes polinomiales de $dF, d\widetilde{G}, F, \widetilde{G}$ y γ. Por ende, podemos suponer que $\xi = 0$ y obtenemos la expresión del enunciado.

Volvamos ahora a la Ecuación (4.18) y probemos que $e \leq 1$ por el absurdo. Supongamos que $e \geq 2$. Usando lo visto anteriormente, deducimos que existen polinomios A, B y C homogéneos tales que

$$x_0^{e-1}\mu = AdF + Bd\widetilde{G} + C\gamma \bmod(I_3). \tag{4.23}$$

Veamos que $C \in \langle x_0, L_0^{k-1}, f_1\rangle$. Para ello, reducimos la Ecuación (4.23) módulo J y usamos que las 1-formas dx_0, dL_0, df_1 son linealmente independientes (al ser $V(x_0L_0f_{2,1})$ un divisor con simple normal crossings). Usando las expresiones (3.6) y (3.3) de la Observación 78 para $dF, d\widetilde{G}$ y γ en $V(x_0)$, miramos el coeficiente que acompaña a df_1 y multiplicamos por L_0 el coeficiente que acompaña a dx_0. Obtenemos las siguientes igualdades módulo J:

$$L_0\left(\frac{B}{k} + C\right) = 0 \text{ y } L_0(B - kC)(g_2 + L_0f_2((k+2)C - B)) = 0.$$

Con un argumento iterativo análogo al usado en el caso $e = 1$ para probar que $B'L_0 = 0$ módulo J, deducimos de la segunda igualdad que $L_0(B - kC) = 0$ módulo J. Usando el Lema 123 (i), obtenemos que $B - kC$ y $\frac{B}{k} + C$ pertenecen al ideal $\langle x_0, L_0^{k-1}, f_1\rangle$ y en definitiva que $B, C \in \langle x_0, L_0^{k-1}, f_1\rangle$. Pero usando la Definición 77 de γ y la Observación 83, sabemos que $x_0\gamma, L_0^{k-1}\gamma$ y $f_1\gamma$ se escriben como combinación polinomial de dF y $d\widetilde{G}$ módulo I_3. Por ende, podemos suponer que $C = 0$ en la expresión (4.23). Esto contradice la minimalidad de e. Esto demuestra que $e \leq 1$ y por ende que vale la expresión para μ del enunciado. Finalmente, la expresión para $x_0\mu$ del enunciado se deduce inmediatamente de la expresión $x_0\gamma = L_0dF - k(FdL_0 + \widetilde{G}dx_0)$ y del hecho de que $x_0d\widetilde{G} = dG - \widetilde{G}dx_0 - L_0dF - FdL_0$. Esto concluye la demostración. □

4.3 Demostración del Teorema Principal

En esta sección, damos una demostración del Teorema 102 usando los resultados de las Secciones 4.1 y 4.2. En principio, damos la demostración para $k \geq 3$ y después, en la Subsección 4.3.1 explicamos cómo adaptar la demostración al caso $k = 2$.

Demostración del Teorema 102 ($k \geq 3$). Como dijimos en la Observación 105, debemos probar que para todo vector tangente Zariski $\widetilde{\eta} \in T_{\widetilde{\omega}}\mathcal{F}(n, 2k)$ existe un elemento $(H', \eta) \in \left(S_1/(x_0)\right) \times T_\omega(\mathcal{L}(k, k+1))$ tal que

$$\eta = x_0\widetilde{\eta} + H'\widetilde{\omega}. \tag{4.24}$$

PASO I: Aplicando el Corolario 111, deducimos que existe $\eta_1 \in T_\omega(\mathcal{L}(k, k+1))$ y 1-formas con coeficientes polinomiales θ_1, θ_2 tales que

$$x_0\widetilde{\eta} - \eta_1 = \theta_1 F + \theta_2\widetilde{G}.$$

PASO II: Usando la Proposición 114, sobre el vector $\theta = x_0\widetilde{\eta} - \eta_1$, obtenemos que existen un polinomio lineal H', una 1-forma $\eta_2 \in T_\omega(\mathcal{F}(n, 2k+1))$ y una 1-forma τ con coeficientes polinomiales tales que

$$x_0\widetilde{\eta} - \eta_1 = \eta_2 + H'\widetilde{\omega} + \tau\widetilde{G}. \tag{4.25}$$

Además, como vimos en la Observación 116, podemos deducir que la 1-forma τ tiene una escritura de la forma

$$\tau = L_1 dF + L_2 d\widetilde{G} + F dL_3 + \widetilde{G} dL_4 + L_5\gamma,$$

donde $L_1, L_2, L_3, L_4 \in S_1$ y $L_5 \in T_1$.
PASO III: Usando las Proposiciones 118 y 119 y combinándolas con las Ecuaciones (4.11) de la Observación 116, deducimos que existen $c, c' \in \mathbb{C}$ tales que

$$L_1 = -\frac{c}{k}L_0,\ L_2 = \frac{kL_5 + c'x_0}{2k+1},\ L_3 = cL_0 \text{ y } L_4 = \frac{(k^2+k)L_5 - kc'x_0}{2k+1}.$$

PASO IV: Restando el vector η_3 de la Observación 121 miembro a miembro en la Ecuación (4.25), modificando $c' \in \mathbb{C}$ y reagrupando, obtenemos la expresión

$$x_0\widetilde{\eta} - \eta - H'\widetilde{\omega} = \widetilde{G}\tau', \tag{4.26}$$

estableciendo $\tau' := \frac{1}{2k+1}\left((kL_5 + c'x_0)d\widetilde{G} + ((k^2+k)dL_5 - kc'dx_0)\widetilde{G} + L_5\gamma\right)$ y $\eta := \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$. Por otro lado, sabemos que existen polinomios F' y G' tales que $\eta = i_R(dF' \wedge dG + dF \wedge dG')$. Reduciendo la igualdad (4.26) módulo I_1, obtenemos que $-(k+1)G' f_1 dx_0 = 0$ y por ende $G' \in I_1$.
PASO V: Volvemos a la ecuación (4.26), le tomamos $\wedge dx_0$ y reducimos módulo x_0. Como $\widetilde{\omega} \wedge dx_0 = 0$ módulo x_0, obtenemos que

$$\eta \wedge dx_0 = L_0 f_1 \left(\frac{kL_5}{2k+1} d\widetilde{G} + \widetilde{G} d\left(\frac{(k^2+k)L_5}{2k+1}\right) + L_5\gamma\right) \wedge dx_0. \tag{4.27}$$

Usando que $G' \in I_1$, que L_0 divide a F y $dF \wedge dx_0$ módulo x_0, que L_0^2 divide a G y $dG \wedge dx_0$ módulo x_0 y que $\gamma \wedge dx_0 = -kf_1 dL_0 \wedge dx_0$ módulo I_1, podemos cancelar L_0 en la Ecuación (4.27) y reducir módulo I_1 para obtener la igualdad

$$f_1^2 L_5 \left(\frac{1}{2k+1} - k\right) dL_0 \wedge dx_0 = 0.$$

Como $L_5 \in T_1$, deducimos que existe $c'' \in \mathbb{C}$ tal que $L_5 = c'' L_0$.
PASO VI: Como $k \geq 3$ (ver Observación 117), sabemos que $G' \in I_1$, que L_0^2 divide a F y $dF \wedge dx_0$ módulo x_0, que L_0^3 divide a G y $dG \wedge dx_0$ módulo x_0 y

que $\gamma \wedge dx_0 = -kf_1 dL_0 \wedge dx_0$ módulo I_1. Podemos entonces cancelar L_0^2 en la Ecuación (4.27) y reducir módulo I_1 para obtener la igualdad

$$c'' f_1^2 \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{k+1}{2k+1} - k \right) dL_0 \wedge dx_0 = 0.$$

De aquí deducimos inmediatamente que $c'' = 0$ y por ende que $L_5 = 0$.
PASO VII: Del paso anterior, obtenemos que

$$x_0 \widetilde{\eta} - \eta - H' \widetilde{\omega} = c' \widetilde{G}(x_0 d\widetilde{G} - k\widetilde{G} dx_0).$$

Finalmente, usando la Proposición 120, inferimos que $c' = 0$. Esto concluye la demostración. □

4.3.1 Caso excepcional: $k = 2$

La demostración del Teorema 102 fue hecha en el caso $k \geq 3$, pero puede ser adaptada con pequeñas modificaciones al caso $k = 2$. En esta sección, señalaremos cuáles son tales modificaciones. Recordar que cuando $k = 2$, la componente $\mathcal{L}((k, k+1), (1^1))$ es la *componente excepcional* (ver Ejemplo 41). Si bien en la literatura ya fue demostrada la estabilidad de la componente excepcional (ver por ejemplo [8], [12], [5]), esto da una demostración diferente de este hecho usando teoría de deformaciones. Enumeramos entonces cómo adaptar la demostración al caso $k = 2$:

- En la Proposición 118, usamos que $k \geq 3$ sobre el final de la demostración para deducir que $L_0 dL_3 - L_3 dL_0 = 0$. Si $k = 2$, usamos el Lema 110 de División para deducir que existen constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ tales que

  $$L_0 dL_3 - L_3 dL_0 = c_1 dF + c_2 d\widetilde{G} + c_3 \gamma. \tag{4.28}$$

  Contrayendo contra el campo radial R, obtenemos $0 = 2c_1 F + 2(c_2 - c_3)\widetilde{G}$. Como F y $\widetilde{G}$ son polinomios irreducibles y coprimos, deducimos las igualdades $c_1 = c_2 - c_3 = 0$. Por otro lado, tomando $\wedge dx_0 \wedge dL_0$ y mirando módulo L_0, obtenemos que $c_2 x_0 d\widetilde{G}_1 \wedge dx_0 \wedge dL_0 = 0$ módulo L_0. Cancelando x_0 y mirando módulo I_1, deducimos que

  $$c_2 d\widetilde{G}_1 \wedge dx_0 \wedge dL_0 = c_2 dg_2 \wedge dx_0 \wedge dL_0 = 0 \bmod(I_1)$$

  y por ende que $c_2 = 0$ (ya que $V(x_0 L_0 f_1 g_2)$ es un divisor con simple normal crossings). De aquí, concluimos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y por ende que $L_0 dL_3 - L_3 dL_0 = 0$.

- En la Proposición 119, usamos que $k \geq 3$ para deducir que ξ' es una 1-forma cerrada. Si $k = 2$, usamos el Lema 110 de división para obtener que $\xi' = c_1 dF + c_2 d\widetilde{G} + c_3\gamma$. Además, es claro de la definición de ξ' que $d\xi' \wedge dx_0 = 0$. Poniendo la última expresión para ξ' en $d\xi' \wedge dx_0 = 0$, inferimos que

  $$c_3 d\gamma \wedge dx_0 = c_3(k+1)dL_0 \wedge dF_1 \wedge dx_0 = 0. \tag{4.29}$$

  Reduciendo módulo I_1 deducimos que $c_3(k+1)df_1 \wedge dL_0 \wedge dx_0 = 0$ módulo I_1 y por ende que $c_3 = 0$, ya que $V(x_0L_0f_1)$ es un divisor con simple normal crossings. Obtenemos así que $d\xi' = 0$.

- En la Proposición 120, usamos que $k \geq 3$ sobre el final de la demostración para deducir que $c'(L_0dx_0 - x_0dL_0)$ es cerrada. Si $k = 2$, usamos el Lema 110 de División y obtenemos que existen constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ tales que

  $$c'(L_0dx_0 - x_0dL_0) = c_1dF + c_2d\widetilde{G} + c_3\gamma.$$

  Tomando diferencial exterior y aplicando $\wedge dx_0$ miembro a miembro, obtenemos que $c_3d\gamma \wedge dx_0 = 0$ y por ende $c_3 = 0$, gracias al cálculo (4.29) hecho en el ítem anterior. Esto prueba que la 1-forma $c'(L_0dx_0 - x_0dL_0)$ es cerrada.

- En la demostración del Teorema 102, usamos que $k \geq 3$ en los pasos VI y VII. Veamos cómo adaptarlos separadamente.

  PASO VI: En el caso $k = 2$, existen $H'' \in S_1$ y $\eta' \in T_\omega\mathcal{L}(k, k+1)$ tales que

  $$H''\widetilde{\omega} + \eta' = \frac{c''}{5}\widetilde{G}\left(2L_0d\widetilde{G} + 6\widetilde{G}dL_0 + 5L_0\gamma\right).$$

  Para ello, consideraremos los polinomios $H'' = \frac{-c''f_1}{2} + \frac{3x_0}{5}$, $F' = \frac{-c''P}{5}$ y $G' = \frac{9c''f_1\widetilde{G}}{10} - \frac{3c''F(g_2+x_0g_3)}{5}$ y la 1-forma diferencial definida por la fórmula $\eta' = i_R(dF' \wedge dG + dF \wedge dG')$. Así, obtenemos mediante un cálculo directo que

  $$H''\widetilde{\omega} + \eta' = \frac{c''}{5}\widetilde{G}\left(2L_0d\widetilde{G} + 6\widetilde{G}dL_0 + 5L_0\gamma\right).$$

  Deducimos entonces que $\widetilde{G}\tau = H''\widetilde{\omega} + \eta' + c'\widetilde{G}(x_0d\widetilde{G} - k\widetilde{G}dx_0)$.

  PASO VII: Finalmente, obtenemos que

  $$x_0\widetilde{\eta} - \eta - \eta' - H'\widetilde{\omega} - H''\widetilde{\omega} = c'\widetilde{G}(x_0d\widetilde{G} - k\widetilde{F}dx_0).$$

  y usando la Proposición 120, obtenemos que $c' = 0$. Finalmente, renombrando $\eta + \eta'$ como η y $H' + H''$ como H', obtenemos lo deseado. $\square$

Bibliografía

[1] R. Bott, S. Gitler and I. M. James. *Lectures on Algebraic and Differential Topology* Springer, Vol. 279 (2006).

[2] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt and P. A. Griffiths. *Exterior differential systems.* Vol. 18. Springer Science & Business Media (2013).

[3] O. Calvo-Andrade. *Irreducible components of the space of foliations.* Mathematische Annalen 299 (1994).

[4] O. Calvo-Andrade, D. Cerveau, L. Giraldo and A. Lins-Neto. *Irreducible components of the space of foliations associated to the affine Lie algebra.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 24 (2004), pp. 987-1014.

[5] O. Calvo-Andrade and F. Cukierman. *A Note on the j Invariant and Foliations*, Actas del Congreso Latinoamericano de Matematica. arXiv: 0611595 (2006).

[6] C. Camacho and A. Lins-Neto. *The topology of integrable differential forms near a singularity.* Publications Mathematiques de l'IHES 55 (1982), pp. 5-35.

[7] D. Cerveau, S. J. Edixhoven and A. Lins Neto. *Pull-back components of the space of holomorphic foliations in* $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$. J. Algebraic Geom. 10(4) (2001), pp. 695–711.

[8] D. Cerveau and A. Lins-Neto. *Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in CP(n).* Annals of Mathematics 143 (1996).

[9] D. Cerveau and J. F. Mattei. *Formes intégrables holomorphes singuliéres. Asterisque 97.* Societé Mathématique de France, Paris (1982).

[10] R. Constant da Costa, R. Lizarbe and J. V. Pereira. *Codimension one foliations of degree three on projective spaces.* arXiv: 2102.10608 (2021).

[11] F. Cukierman, J. N. Gargiullo Acea and C. Massri. *Stability of logarithmic differential one-forms.* Transactions of the American Mathematical Society 371.9 (2019), pp. 6289-6308.

[12] F. Cukierman and J. V. Pereira. *Stability of Holomorphic Foliations with Split Tangent Sheaf.* American journal of mathematics, vol. 130, no 2 (2008), pp. 413-439.

[13] F. Cukierman, J. V. Pereira and I. Vainsencher. *Stability of foliations induced by rational maps.* Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques - 18(4) (2009), pp. 685-715.

[14] F. Cukierman, M. Soares and I. Vainsencher *Singularities of logarithmic foliations.* Compositio Mathematica - 142(01) (2006), pp. 131-142.

[15] V. Ferrer and I. Vainsencher. *Linear pullback components of the space of codimension one foliations.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (2020).

[16] F. G. Frobenius. *Ueber das Pfaffsche Problem.* Journal fur die reine und angewandte Mathematik ¨ 82 (1877), pp. 230-315.

[17] X. Gomez-Mont and A. Lins-Neto. *Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral*. Topology, Vol. 30 Issue 3 (1991), pp. 315-334.

[18] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes with examples and applications*. Vieweg & Teubner Verlag, Wiesbaden, 2010.

[19] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebric geometry*. John Wiley and Sons, 2014.

[20] A. Grothendieck with J.A. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique IV*. Publ. Math. IHÉS 20 (1964), 5–259; 24 (1965), 5–231; 28 (1966), 5–255; 32 (1967), 5–361.

[21] J. Harris. *Algebraic geoemtry: a first course.* Graduate texts in mathematics, Springer, 1992.

[22] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52, Springer, 1977.

[23] T. Hawkins. *Frobenius, Cartan, and the Problem of Pfaff.* Archive for History of Exact Sciences, vol. 59, no. 4 (2005), pp. 381–436.

[24] T. Hawkins. *The Mathematics of Frobenius in Context.* Springer-Verlag, New York, 2013.

[25] D. Huybrechts and M. Lehn. *The geometry of moduli spaces of sheaves*. Cambridge University Press, 2010.

[26] J. P. Jouanoulou. *Équations de Pfaff Algébriques.* Springer Lecture Notes in Mathematics 163 (1970).

[27] I. Kupka, *The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 52 (1964), pp. 1431-1432.

[28] D. Leite and I. Vainsencher. *Degrees of spaces of holomorphic foliations of codimension one in* $\mathbb{P}^n$. J. Pure Appl. Algebra (2017).

[29] A.Lins Neto. *Componentes irredutíveis dos espaços de folheaçoes.* Publicaçoes Matematicas do IMPA, 2007.

[30] A. Lins Neto and B. A. Scárdua. *Folheaçoes Algébricas Complexas.* 21° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1997.

[31] B. Malgrange. *Frobenius avec singularités II. Le cas general.* Invent. Math., 39(1):67–89 (1977).

[32] H. Matsumura. *Commutative Algebra*. Math. Lecture Notes Series, Benjamin/Cummings, Reading, 1980.

[33] J. F. Pfaff. *Methodus generalis aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi.* Abhandlungen d. Akad. der Wiss. zu Berlin 1814–15 (1818), pp. 76–136.

[34] A. Rossini and I. Vainsencher. *Degree of the exceptional component of foliations in* $\mathbb{P}^3$. RAC-SAM (2019).

[35] K. Saito. *On a generalization of de Rham lemma.* Annales de l'institut Fourier. Vol. 26. No. 2 (1976).

[36] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate texts in mathematics, Vol. 94, Springer-Verlag, New York (1983).