Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Consecuencias del efecto Casimir dinámico en la termodinámica y la información cuántica

Tesis presentada para optar por el título de

Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

Lic. Nicolás Francisco Del Grosso

Director: Dr. Fernando C. Lombardo

Directora adjunta: Dr. Paula I. Villar

Consejero de estudios: Dr. Pablo Cobelli

Lugar de trabajo: Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, 2023

Consecuencias del efecto Casimir dinámico en la termodinámica y la información cuántica

Resumen

En esta tesis se estudia el efecto Casimir dinámico (DCE) y sus consecuencias en la termodinámica, almacenamiento y procesamiento de la información cuántica. Estos estudios han sido llevados a cabo en sistemas tanto de cavidades optomecánicas como electromagnéticas y con potenciales implementaciones en circuitos superconductores. El DCE surge cuando se modifican las condiciones de contorno de un campo cuántico de manera no-adiabática dando lugar a la generación de pares de fotones a partir del estado de vacío cuántico. La conexión estrecha entre el DCE con otros fenómenos de generación de partículas en teoría de campos como el efecto Unruh, la radiación de Hawking y el efecto Schwinger permite indagar sobre propiedades fundamentales de la teoría de campos, tales como la aparente pérdida de información entre distintos observadores. Por otro lado, la observación del DCE en circuitos superconductores, arquitectura por excelencia para la experimentación de tecnologías cuánticas actuales, permite considerar también la influencia de este efecto sobre nuevos dispositivos tecnológicos como compuertas para el procesamiento de información cuántica o máquinas térmicas.

En primera instancia estudiamos un sistema optomecánico consistente de una cavidad óptica cuyo extremo consta de un espejo móvil sometido a un potencial cuadrático con ambos grados de libertad cuantizados. Esto permite estudiar el proceso de conversión de energía e información cuántica contenidos en los fonones de la pared en fotones dentro de la cavidad. En particular, estudiamos la dinámica y la eficiencia de este proceso para diferentes estados iniciales como los de tipo número, coherentes y térmicos. Presentamos un modelo sencillo que permite reproducir los resultados de forma aproximada y determinamos los estados más prometedores para maximizar la transferencia de energía.

Seguidamente, estudiamos las consecuencias del efecto Casimir dinámico sobre la información cuántica relativista. Para ello consideramos dos observadores cada uno en posesión de una cavidad con un campo cuántico en su interior que comparten inicialmente un estado entrelazado de modos de ambas cavidades y estudiamos como se modifica el entrelazamiento observado a medida que uno de ellos se agita. Esto permite sacar conclusiones sobre la degradación del entrelazamiento de ambos observadores y su dependencia con el estado inicial, el espectro de la cavidad y el movimiento al que son sometidos.

Para comprender el impacto del DCE, no sólo sobre la transferencia de energía sino sobre su conversión en trabajo, analizamos una máquina térmica paradigmática como es el caso de una cavidad con una pared móvil en cuyo interior se halla un

campo cuántico que es sometido a un ciclo Otto. Identificamos la contribución nociva del efecto Casimir dinámico al trabajo extraído cuando es operado en tiempo finito, y estudiamos la eficiencia y potencia entregadas tanto cuando la máquina es operada como un motor térmico como cuando actúa como un refrigerador.

Teniendo claro el impacto negativo del DCE sobre las máquinas térmicas cuánticas y con el objetivo de hacerlas más eficientes estudiamos la existencia de atajos adiabáticos en teoría cuántica de campos. Esto significa que mostramos la existencia y damos métodos prácticos para encontrar trayectorias de la pared móvil que no produzcan generación neta de fotones.

Por último, luego de haber visto las consecuencias negativas del efecto Casimir dinámico, analizamos cómo aprovechar los fotones generados por excitación paramétrica en un sistema de circuitos superconductores para generar una compuerta de controlled-squeeze. Estudiamos la universalidad de ésta, así como la factibilidad de su implementación experimental.

Palabras clave: Efecto Casimir dinámico, atajos adiabáticos, máquinas térmicas cuánticas, información cuántica, termodinámica cuántica, cavidades optomecánicas, circuitos superconductores.

Consequences of the dynamical Casimir effect on thermodynamics and quantum information

Abstract

In this thesis we study the dynamical Casimir effect (DCE) and its consequences on thermodynamics, as well as on processing and storage of quantum information. These studies have been carried out in systems of both optomechanical and electromagnetic cavities and with potential implementations in superconducting circuits. The DCE arises when the boundary conditions of a quantum field are modified in a non-adiabatic manner, leading to the generation of photon pairs out of the quantum vacuum state. The close connection between the DCE with other particle generation phenomena in field theory such as the Unruh effect, Hawking radiation and the Schwinger effect allows us to investigate fundamental properties of quantum field theory, such as the apparent loss of information between different observers. On the other hand, the observation of DCE in superconducting circuits, the architecture par excellence for current quantum experimentation, also allows us to consider the influence of this effect on new technological devices such as gates for processing quantum information or thermal machines.

First, we study an optomechanical system consisting of an optical cavity whose end consists of a mobile mirror subjected to a quadratic potential with both degrees of freedom quantized. This allows us to study the process of converting energy and quantum information contained in the phonons on the wall into photons inside the cavity. In particular, we study the dynamics and efficiency of this process for different initial states such as number, coherent and thermal states. We present a simple model that allows the results to be reproduced approximately and we determine the most promising states to maximize energy transfer.

Next, we study the consequences of the dynamical Casimir effect on relativistic quantum information. To do this, we consider two observers, each in possession of a cavity with a quantum field inside that initially share an entangled state of modes of both cavities, and we study how the perceived entanglement changes as one of them shakes. This allows conclusions to be drawn about the degradation of the entanglement of both observers and its dependence on the initial state, the cavity spectrum and the motion to which they are subjected.

To understand the impact of DCE, not only on the transfer of energy but also on its conversion into work, we analyze a paradigmatic thermal machine such as a cavity with a mobile wall inside which is a quantum field that is subjected to an Otto cycle. We identify the harmful contribution of the dynamical Casimir effect to the work extracted when it is operated in finite time, and we study the efficiency and power delivered both when the machine is operated as a heat engine and when

it acts as a refrigerator.

Being clear about the negative impact of DCE on quantum thermal machines and with the aim of making them more efficient, we study the existence of adiabatic shortcuts in quantum field theory. That is, we find the existence and give practical methods for finding moving wall trajectories that do not produce net photon generation.

Finally, after having seen the negative consequences of the dynamical Casimir effect, we analyze how to take advantage of the photons generated by parametric excitation in a system of superconducting circuits to generate a controlled-squeeze gate. We study its universality, as well as the feasibility of its experimental implementation.

Keywords: Dynamical Casimir effect, adiabatic shortcuts, quantum heat engines, quantum information, quantum thermodynamics, optomechanical cavities, superconducting circuits.

Agradecimientos

Primero que nada les quiero agradecer a quienes dirigieron esta tesis, Fernando y Paula. Gracias por haber confiado en mí desde el principio, por haberme dado la libertad y la motivación para adentrarme en terrenos desconocidos y ayudarme a descubrirlos juntos. Además les quiero agradecer por haberme permitido el honor de dictar materias con ustedes ya que su honestidad, paciencia, empatía y buena onda son contagiosas y me han ayudado a crecer no solo en la investigación sino también en la docencia.

Mil gracias a Diego, por su generosa ayuda siempre que estuve trabado con una cuenta. Me llevo todas las discusiones que hemos tenido que han enriquecido enormemente mi forma de ver la física.

Gracias a la Universidad de Buenos Aires, por darme una educación pública, gratuita y de calidad. Gracias al Departamento de Física por hacerme un lugar entre tantos profesionales de primer nivel. Gracias al CONICET y al Estado Argentino por financiar esta beca.

También le quiero dar las gracias a todos mis amigos y amigas, su compañía, aliento y cariño durante estos años han sido invaluables.

Eternamente agradecido a Papá, Mámá y Agos, por ayudarme a encontrar y nutrir mi pasión, por su apoyo y amor incondicional. Y gracias también a Nati, por ser mi compañera, mi mejor amiga, la que me aguanta todos los días y la que me hace acostar y despertar siempre con una sonrisa.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Efecto Casimir dinámico **9**

2.1. Cavidad con espejos en movimiento 9

2.1.1. Coeficientes de Bogoliubov 12

2.1.2. Hamiltoniano 16

2.1.3. Funciones de Moore 20

2.2. Cavidad superconductora y observaciones 23

3. Transferencia cuántica de energía **26**

3.1. Modelo 28

3.2. Estados número 30

3.2.1. Generación estimulada e inhibida de fotones 34

3.2.2. Desintonía 39

3.3. Estados coherentes 40

3.4. Estados térmicos 42

3.4.1. Distribuciones y termalización 45

3.5. Conclusiones 48

4. Degradación del entrelazamiento **50**

4.1. Cavidad en movimiento rígido 51
4.1.1. Cavidad tridimensional y espectro no-equidistante: dos modos acoplados 54
4.1.2. Cavidad unidimensional y espectro equidistante: Infinitos modos acoplados 56
4.2. Medición del entrelazamiento 58
4.3. Degradación del entrelazamiento 61
4.3.1. Cavidad 3D y espectro no-equidistante: Dos modos acoplados 62
4.3.2. Caso 1D y espectro equidistante: Infinitos modos acoplados . . 65
4.4. Redistribución del entrelazamiento 71
4.5. Conclusiones 74

5. Maquinas térmicas cuánticas **76**
5.1. Ciclo de Otto en un cavidad 76
5.1.1. Evolución adiabática 80
5.1.2. Evolución no-adiabática 81
5.1.3. Una cota superior a la energía de fricción 84
5.2. Motor térmico 85
5.2.1. DCE como energía de fricción cuántica 87
5.3. Refrigerador cuántico 90
5.3.1. Evolución adiabática 91
5.3.2. Régimen no-adiabático 92
5.4. Conclusiones 93

6. Atajos adiabáticos **96**
6.1. Un análogo sencillo: el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo 97
6.1.1. El enfoque de Lewis-Riesenfeld y la ecuación de Ermakov . . . 99
6.1.2. Desexcitación del oscilador armónico 100
6.2. STA en Teoría cuántica de Campos 102
6.2.1. Cavidad electromagnética: Aproximación de un solo modo . . 102
6.2.2. Atajos para una cavidad optomecánica 103

6.3. Atajos adiabáticos para un espejo móvil . . . 105
6.3.1. Trayectoria límite, eficiencia y potencia . . . 108
6.4. Atajos adiabáticos para dos espejos móviles . . . 112
6.4.1. Límite de las trayectorias efectivas . . . 112
6.4.2. Trayectorias de referencia . . . 114
6.4.3. Contracción . . . 115
6.4.4. Expansión . . . 117
6.4.5. Movimiento rígido . . . 118
6.5. Completando un STA en una cavidad optomecánica . . . 121
6.5.1. Ingeniería inversa . . . 121
6.5.2. Pulsos cortos . . . 123
6.5.3. Reversa temporal . . . 129
6.6. Conclusiones . . . 133

7. Información cuántica con el efecto Casimir dinámico en cQED 136
7.1. El sistema y la implementación propuesta . . . 136
7.2. Protocolo de squeezing condicional . . . 139
7.3. Universalidad . . . 144
7.4. Conclusiones . . . 144

8. Conclusiones 146

Apéndice 163

A. Funciones de Moore adiabáticas para dos espejos móviles 163

B. Algoritmo para las ecuaciones de Moore 167

C. Hamiltoniano para un resonador terminado en un SQUID 170

D. Ecuación maestra para la compuerta controlled-squeeze 174

CAPÍTULO 1

Introducción

Una de las características más sobresalientes de la teoría cuántica de campos es que predice la producción de partículas a partir del vacío cuántico [1]. Hay ejemplos muy destacables, de la conversión dinámica de fluctuaciones de vacío en partículas reales: la radiación de Unruh detectada por un observador uniformemente acelerado [2], la radiación de Hawking originada por un agujero negro [3, 4], y el efecto Schwinger que produce pares de electrones y positrones en presencia de un campo electromagnético fuerte [5]. Sin embargo, si bien hay fuerte apoyo teórico para estos efectos, ninguno ha sido observado experimentalmente. Un fenómeno relacionado de cerca es el efecto Casimir dinámico (DCE), el cual consiste en la creación de partículas a partir de condiciones externas que dependen del tiempo [6–9]. Fue propuesto por primera vez en 1970 por Moore, quién sugirió que en una cavidad de Fabry-Perot donde uno de los espejos oscila armónicamente al doble de la frecuencia de un modo de la cavidad llevaría a la generación de fotones a partir del vacío. Más tarde, se mostró que un solo espejo en el espacio libre sujeto a una aceleración no-uniforme también produciría radiación de fotones [10]. Sin embargo, en todos los casos, la velocidad del espejo requerida para producir fotones era comparable a la velocidad de la luz y por lo tanto no eran accesibles por espejos móviles masivos [11, 12]. Re-

cientemente surgió una propuesta basada en la sugerencia de que el DCE podría ser simulado modificando una condición de contorno del campo [13, 14]. Esta idea llevó a la observación experimental del DCE. En este setup la cavidad es reemplazada por una guía de ondas superconductora terminada en un dispositivo de interferencia cuántica superconductora (SQUID) y las condiciones de contorno son modificadas aplicándole un flujo magnético dependiente del tiempo [15]. De esta manera el DCE se ha convertido en una herramienta indispensable para el estudio teórico y experimental de las consecuencias de la dinámica relativista sobre áreas de frontera como la termodinámica cuántica [16–18] o la información cuántica relativista (RQI de sus siglas en inglés).

En particular, en la última década ha surgido un interés creciente en RQI dado que se han reportado nuevos efectos interesantes sobre el entrelazamiento de observadores en movimiento [19–23]. Por ello, esta área de investigación ha tratado preguntas relacionadas con los aspectos relativistas de la física cuántica, en particular sumergiéndose en la relación entre la teoría cuántica de campos y la teoría de la información cuántica [24]. Por ejemplo, los agujeros negros, que alguna vez se creyó que eran meros artefactos matemáticos, son hoy en día una parte establecida del universo y uno de los más grandes misterios de la física moderna. Si bien se los entiende bien en términos de la relatividad general se sabe poco de su naturaleza cuántica. El descubrimiento de Hawking de que emiten radiación térmica [3, 4] y la paradoja de la pérdida de información que este fenómeno originó [25] es uno de los esfuerzos hechos para obtener un entendimiento completo de su relación con la mecánica cuántica. En particular, la RQI posee un rol crucial en explicar los efectos cuánticos alrededor de un agujero negro.

En este sentido en la Ref. [26] se investiga la posibilidad de transmitir señales entre el interior y el exterior del horizonte de eventos de un agujero negro. Allí, se considera un par de partículas entrelazadas, cada una en posesión de dos observadores distintos: uno es inercial cayendo en caída libre dentro del agujero negro mientras que el otro acelera y se mantiene por fuera del horizonte a una distancia fija. Los autores notan que este estudio puede ser aproximadamente descripto por un campo escalar cuántico en el espacio de Minkowski con dos modos entrelazados.

En este marco, calculan que el entrelazamiento entre dos modos libres del campo escalar visto por un observador inercial detectando uno de los modos y un observador uniformemente acelerado detectando el segundo modo. Luego, afirman que a medida que la aceleración de este observador aumenta, el entrelazamiento percibido entre dos modos decrece asintóticamente a cero, dañando la posibilidad de transmisión de señales [27]. Este trabajo dio lugar a múltiples ramificaciones y numerosas investigaciones sobre el efecto del movimiento relativista en la información cuántica [28–33]. Por ejemplo, en [28], el entrelazamiento compartido por observadores en movimiento relativo acelerado es analizado y encuentran que se anula entre los modos de baja frecuencia. En un enfoque diferente, los autores en [32] mostraron que si el campo escalar es reemplazado por un campo de Dirac el entrelazamiento no se anula en el límite de aceleración infinita lo que significa que puede ser usado para tareas de información cuántica. A veces los resultados pueden ser incluso más dramáticos. En la referencia [33] se ha mostrado que el entrelazamiento entre dos detectores de Unruh-DeWitt que están siendo acelerados, se puede perder repentinamente en una cantidad finita de tiempo [34]. De manera similar, en [29,30] se afirma que el entrelazamiento entre dos cavidades en movimiento uniforme acelerado oscila a medida que pasa el tiempo, durante el tiempo que dura el movimiento. En este contexto podemos notar que la motivación original ha llevado a una pregunta más general sobre cómo el entrelazamiento se modifica por el movimiento relativo de los observadores. En particular, la degradación del entrelazamiento causada por el movimiento relativista es una propiedad que ha recibido mucha atención recientemente y que estudiaremos con más detalle en esta tesis.

Si bien hemos dicho que el efecto Casimir dinámico a sido verificado experimentalmente en un circuito superconductor, debemos señalar que dicha observación carece de una parte fundamental de la física del efecto que es la conversión de energía mecánica en fotones. Debido a ello esta realización experimental a veces ha sido llamada una simulación del efecto y todavía se espera una verdadera observación en una cavidad optomecánica. Los sistemas optomecánicos están compuestos se una cavidad óptica formada por dos espejos uno de los cuales es libre de moverse [35]. Se han obtenido estructuras fotomecánicas prácticas en las cuales el espejo oscila tan

rápido como 6 mil millones de veces por segundo. Sin embargo, esto puede no ser suficientemente rápido; estudios previos han mostrado que la oscilación mecánica de la frecuencia debe ser al menos dos veces la frecuencia del modo de menor energía de la cavidad para poder observar el DCE. En un trabajo reciente [36], los autores trataron tanto al campo dentro de la cavidad como al espejo móvil como un sistema cuántico y notaron la existencia de separaciones de Casimir-Rabi para frecuencias del espejo menores al doble de la fundamental . El análisis realizado sugirió que los sistemas optomecánicos actuales pueden ser usados para observar la conversión de energía mecánica en luz, lo que significa que la emisión de luz podría ser lograda en este tipo de estructuras para frecuencias menores. Más aún, desarrollos recientes en la tecnología de nanoresonadores [37] junto con cavidades de mayor factor de calidad hacen que esta observación del efecto sea posible en el futuro cercano. Otra cualidad importante sugerida es el hecho de que el DCE podría ser analizado en una forma más fundamental con un hamiltoniano independiente del tiempo donde un estado inicial de fonones en la pared evoluciona en fotones dentro de la cavidad. Si bien se han considerado algunas extensiones de este trabajo en [38, 39], en esta tesis ahondaremos en la transferencia cuántica de energía de un grado de libertad mecánico a uno electromagnético. Otras propuestas consideradas para observar la conversión de energía mecánica en fotones producidos por el DCE incluyen sistemas híbridos de resonadores mecánicos y guías de ondas superconductoras [40, 41].

El efecto Casimir dinámico tiene también relaciones interesantes con la termodinámica cuántica. Esta área de estudio de la física surge como consecuencia de la incesante miniaturización de los dispositivos tecnológicos [37, 42, 43] y captura dos propiedades diferentes pero complementarias. Por un lado, apunta a obtener una derivación rigurosa de las leyes de la termodinámica a partir de interacciones microscópicas a nivel cuántico. Por otro, en un aspecto más aplicado, busca mejorar los procesos termodinámicos, tales como la conversión de calor en trabajo, usando fenómenos cuánticos sin análogo clásico como la coherencia [44, 45] o el entrelazamiento [46, 47]. El concepto de información, y su íntima relación con la entropía y la termodinámica, juego un rol muy importante en ambos aspectos [48].

La mayoría de la investigación realizada en esta área ha sido implementada en

qubits [49] u osciladores armónicos sujetos a diferentes ciclos termodinámicos [50]. Mientras que en ciertos casos un campo cuántico en una cavidad puede ser estudiado para algunos pocos modos que se comportan como osciladores armónicos, hay circunstancias importantes bajo las cuales esta aproximación falla. Sin embargo, solo un puñado de trabajos han estudiado los efectos que surgen de un campo cuántico completo [51–54] y la mayoría de ellos como un baño y no como un medio de trabajo. Por ello en esta tesis investigaremos la operación de una máquina térmica basada en un ciclo termodinámico de un campo cuántico.

Una de las dificultades que surge con la operación en tiempo finito de estas máquinas térmicas cuánticas es la emergencia de coherencias en el estado del sistema que resulta en una pérdida de eficiencia [49, 50, 55]. Como respuesta a este problema han surgido protocolos llamados "atajos adiabáticos" (o STAs por sus siglas en inglés) que permiten llevar al sistema hasta el estado final que se hubiera obtenido con una evolución adiabática, infinitamente lenta, pero en un tiempo finito [56]. En general, esto significa que no se generarán nuevas excitaciones en el estado final; sin embargo, vale la pena notar que algunos métodos de STA, tales como "transitionless quantum driving" [57, 58], también aseguran la supresión de excitaciones no-adiabáticas en tiempos intermedios. Otros métodos para implementar atajos adiabáticos incluyen el uso de protocolos de "fast forward" [59], invariantes [60], protocolos óptimos [61], protocolos "fast quasiadiabatic" (FAQUAD), etc. Una desventaja de estos métodos es que típicamente requieren del un control cuántico completo del sistema, por lo que su implementación resulta extremadamente desafiante desde un punto de vista experimental.

Los STA han sido considerados tanto desde un punto de vista teórico como experimental para una variedad de sistemas físicos tales como: iones atrapados [62], átomos fríos [63], gases de Fermi ultra-fríos [64], condensados de Bose-Einstein en chips atómicos [65], sistemas de espines [66], etc.

En relación con las máquinas térmicas, estos protocolos han sido propuestos para aliviar la relación entre eficiencia y potencia [67–69], tanto para motores cuánticos de una partícula [70] como para sistemas de muchas partículas [71–74]. Incluso se ha hecho un experimento con un gas de Fermi que implementó estos protocolos [75].

Además los atajos adiabáticos han sido obtenidos para sistemas cuánticos relativistas que evolucionan bajo la dinámica de Dirac [76, 77]. A pesar de su eficacia para mejorar la eficiencia de las máquinas térmicas, los atajos adiabáticos también tienen un costo energético que debe ser tenido en cuenta [78, 79] y que puede ser utilizado para establecer una relación entre los motores cuánticos y la tercera ley de la termodinámica [80]. Por estas razones, más adelante estudiaremos la implementación de atajos adiabáticos sobre un campo cuántico.

Otro campo de vanguardia tecnológica donde el efecto Casimir dinámico juega un rol importante es la electrodinámica cuántica de circuitos (cQED) puesto que fue allí donde el efecto se observó por primera vez. Esta área se ha vuelto recientemente la arquitectura líder para computación cuántica [81]. En este tipo de sistemas uno puede controlar la interacción entre átomos artificiales (o qubits en la aproximación de 2 niveles) y el campo electromagnético [43]. Los fotones son almacenados en un resonador de microondas y los qubits son diseñados por circuitos que incluyen junturas de Josephson, capacitores y/o inductores.

Esta arquitectura ha florecido recientemente con la emergencia de tecnologías para ingeniería cuántica no solo debido a su éxito en la manipulación y medición sino también por sus propiedades de escalabilidad. De hecho cQED es una de las principales candidatas para alcanzar la computación cuántica escalable y ha sido usada para manipular decenas de qubits realizando tareas que ponen a esta tecnología cerca del objetivo de la supremacía cuántica [82]. También ha sido usada para probar las ideas principales de corrección de errores cuánticos y la implementación de arquitecturas tolerantes a errores [83–89]. Más adelante mostraremos cómo utilizar esta arquitectura para implementar compuertas cuánticas y generar estados robustos frente a los errores.

En resumen, la estructura de esta tesis es la siguiente. En el capítulo 2, repasamos el origen y las propiedades fundamentales del efecto Casimir dinámico; así como tres descripciones matemáticas equivalentes del fenómeno que serán empleadas más adelante. En el capítulo 3, daremos una descripción completamente cuántica del efecto en una cavidad optomecánica. Veremos cómo el DCE puede ser usado para la transferencia cuántica de energía de un grado de libertad mecánico a uno

electromagnético y estudiaremos la eficiencia de este proceso. En el capítulo 4, analizaremos la relación entre la información cuántica relativista y el efecto Casimir dinámico. Más en particular, veremos cómo se modifica el entrelazamiento entre dos cavidades cuando una de ellas es agitada a velocidades cercanas a la de la luz y cómo esto depende del espectro de la cavidad y de la frecuencia de agitación. En el capítulo 5, investigaremos el impacto del DCE sobre el desempeño de una máquina térmica basada en un campo cuántico. En el capítulo 6, mostraremos cómo implementar un atajo adiabático para un campo escalar cuántico en una cavidad optomecánica. Además generalizaremos los resultados al caso de dos paredes móviles y estudiaremos las propiedades de las trayectorias que generan estos atajos para compresiones, expansiones y traslaciones rígidas. Además, utilizaremos estos resultados para estudiar como completar atajos adiabáticos. Esto es, dada una trayectoria inicial, encontrar otra que al ser ejecutada a continuación implemente de principio a fin un atajo adiabático sobre el campo. En el capítulo 7, veremos cómo el efecto Casimir dinámico puede ser empleado para implementar una compuerta de *controlled-squeeze* en una arquitectura de electrodinámica cuántica de circuitos. Mostraremos también cómo utilizar esta compuerta para generar estados de relevancia metrológica y de corrección de errores; así como también su universalidad para producir operaciones unitarias cuando es combinada con una operación de desplazamiento. Por último, en el capítulo 8 presentaremos las conclusiones de la tesis.

Lista de publicaciones

1. Del Grosso, N. F., Lombardo, F. C., & Villar, P. I. (2019). "Photon generation via the dynamical Casimir effect in an optomechanical cavity as a closed quantum system", *Physical Review A*, 100 (6), 062516.

2. Del Grosso,N. F., Lombardo, F.C., & Villar, & P. I. (2020). "Entanglement degradation of cavity modes due to the dynamical Casimir effect", *Physical Review D*, 102 (12), 125008.

3. Del Grosso, N. F., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., & P. I. Villar (2022).

"Quantum otto cycle in a superconducting cavity in the nonadiabatic regime", *Physical Review A*, 105 (2), 022202.

4. Del Grosso, N. F., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., & P. I. Villar (2022). "Shortcut to adiabaticity in a cavity with a moving mirror", *Physical Review A*, 105 (5), 052217.

5. Del Grosso, N. F., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., & Villar, P. I. (2022). "Fast adiabatic control of an optomechanical cavity", *Entropy* 25 (1), 18.

6. Velasco, C. I., Del Grosso, N. F., Lombardo, F. C., Soba, A. & Villar, P. I. (2022). "Photon generation and entanglement in a double superconducting cavity", *Physical Review A*, 106 (4), 043701.

7. Del Grosso, N. F., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., Villar, & P. I. (2023). "Adiabatic Shortcuts Completion in Quantum Field Theory: Annihilation of Created Particles", *Entropy* 25 (9), 1249.

CAPÍTULO 2

Efecto Casimir dinámico

En este capítulo introduciremos el efecto Casimir dinámico a partir del movimiento de espejos en cavidades ópticas y revisaremos sus principales propiedades. Presentaremos, además, tres métodos de cálculo para la resolución de la dinámica del sistema: los coeficientes de Bogoliuvob, la formulación hamiltoniana y la función de Moore. Estudiaremos cómo utilizar cada uno de ellos y revisaremos sus beneficios y desventajas.

2.1. Cavidad con espejos en movimiento

El efecto Casimir dinámico consiste en la generación de partículas a partir del vacío mediante la variación temporal de las condiciones de contorno aplicadas sobre un campo cuántico. Este efecto reconocido por primera vez por Moore [6] en 1970 al estudiar un modelo simplificado de un modo del campo electromagnético en una cavidad tipo Fabry-Pérot. Este modelo consiste en un campo escalar sin masa $\Phi(x,t)$ en una cavidad unidimensional formada por dos espejos perfectamente reflectivos, planos, paralelos e infinitos ubicados en las posiciones $x = L(t)$ a la izquierda y $x = R(t)$ a la derecha que se mueven con el tiempo con trayectorias prescritas (Fig.

2.1). En analogía con el campo electromagnético, asumiremos que su dinámica viene dada por la ecuación de ondas

$$\partial_x^2 \Phi(x,t) - \partial_t^2 \Phi(x,t) = 0 \tag{2.1}$$

con condiciones de contorno de Dirichlet en cada espejo

$$\Phi(L(t),t) = \Phi(R(t),t) = 0. \tag{2.2}$$

En la ecuación anterior y a lo largo de toda la tesis usaremos unidades naturales tales que $\hbar = c = k_B = 1$ salvo que se explicite lo contrario. La justificación de este modelo proviene del hecho de que los modos transverso-eléctrico (TE) y transverso magnético (TM) del campo electromagnético pueden ser descritos por campos escalares [90].

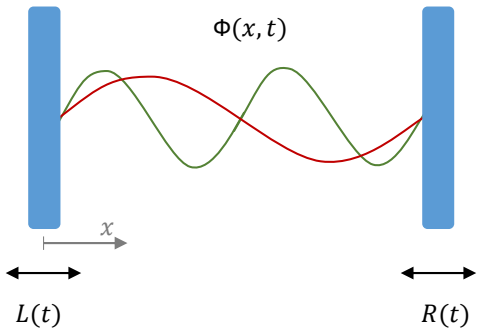


Figura 2.1: Esquema de una cavidad unidimensional con un campo escalar cuántico adentro $\hat{\Phi}(x,t)$ y dos espejos móviles con trayectorias $L(t)$ y $R(t)$. Las curvas roja y verde ilustran dos modos del campo en la cavidad.

La cuantización de campos con condiciones de contorno dependientes del tiempo, al igual que para espacios curvos, suele ser delicada [1]. Esto se debe a que no existe una formulación hamiltoniana exacta del problema, puesto que si la hubiese existiría un operador unitario de evolución temporal tal que

$$\hat{\Phi}(x,t) = U^\dagger(t,t_0)\hat{\Phi}(x,t_0)U(t,t_0), \tag{2.3}$$

pero si el espejo estaba en (x, t_0) entonces tendremos $\hat{\Phi}(x,t) = 0$ lo que es absurdo. Concluimos entonces que no existe tal operador unitario y por ende, tampoco un hamiltoniano que genere la evolución temporal; asimismo se deduce que no existe un picture de Schrödinger.

Sin embargo, para tiempos tempranos, antes de que los espejos comiencen a moverse, la cavidad se encuentra estática y el campo se puede expandir como

$$\hat{\Phi}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\hat{a}_n^{\text{in}} u_n(x,t) + h.c.\right], \tag{2.4}$$

donde $\hat{a}_n^{\text{in}}$ son los operadores bosónicos correspondientes a los fotones de diferentes frecuencias y las funciones u_n son las soluciones de frecuencia positiva de la ecuación de ondas

$$u_n(x,t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{d(0)}}\sin(k_n x)\frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{2\omega_n}} \tag{2.5}$$

con $k_n = \frac{n\pi}{d(0)}$ el número de onda, $\omega_n = k_n$ la frecuencia y $d(t) = R(t) - L(t)$ la longitud de la cavidad. Los espejos comienzan a moverse a $t = 0$ y esta base inicial es deformada de forma continua, mediante la ecuación de movimiento, en otra que satisfaga las nuevas condiciones de contorno. Así, al detenerse en la posición original nuevamente, la cuantización y la noción de partículas estarán bien definidas pero tendremos una nueva base $v_k(x,t)$ y nuevos operadores bosónicos finales $\hat{a}_n^{\text{out}}$, por lo que el campo se expandirá como

$$\hat{\Phi}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\hat{a}_n^{\text{out}} v_n(x,t) + h.c.\right]. \tag{2.6}$$

Sin embargo, el campo puede ser expresado alternativamente tanto en esta expansión, surgida de la evolución temporal, como en la inicial, lo que significa que existen coeficientes α_{nk} y β_{nk} tales que

$$v_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_{nk} u_k + \beta_{nk} u_k^*\right]. \tag{2.7}$$

Reemplazando esto en la Ec.(2.6) e igualándola a la Ec.(2.4) podemos relacionar

ambos conjuntos de operadores bosónicos como

$$\hat{a}_n^{\text{out}} = \sum_k \left[\alpha_{nk} \hat{a}_k^{\text{in}} + \beta_{nk}^* \hat{a}_k^{\text{in}\dagger} \right], \tag{2.8}$$

lo que se conoce como una transformación de Bogoliubov. Es importante destacar que estas son transformaciones gaussianas, es decir, que mapean estados gaussianos (como los estados coherentes, térmicos, squeezed) en estados gaussianos.

Más adelante veremos distintos métodos para calcular los coeficientes de Bogoliuvob pero ya podemos apreciar la propiedad fundamental del efecto Casimir dinámico. Para ello consideramos un estado inicial dado por la matriz densidad $\hat{\rho}$ y calculamos el valor medio del número de fotones en el modo k al final del movimiento, $N_k = \text{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{N}_k\right)$, expresando a los operadores finales en términos de los iniciales

$$N_k^{\text{out}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(|\alpha_{nk}|^2 N_n^{\text{in}} + |\beta_{nk}|^2 N_n^{\text{in}} + |\beta_{nk}|^2 \right), \tag{2.9}$$

donde N_n^{in} es el número medio de fotones en el modo n. Vemos entonces que para $|\beta_{nk}| \neq 0$ se generan fotones en el modo n aún si el número inicial de fotones es nulo, es decir, a partir del vacío. Este fenómeno se conoce comúnmente como el **efecto Casimir dinámico** (DCE).

2.1.1. Coeficientes de Bogoliubov

A continuación revisaremos el cálculo de los coeficientes de Bogoliuvob, lo que nos permitirá entender con mayor profundidad el origen físico del DCE. Esto lo haremos en el caso en que solo se mueve la pared de la derecha tomando $L(t) = 0$. Para obtener dichos coeficientes será necesario evolucionar en el tiempo la base de soluciones inicial u_n hasta la base final v_n y luego reescribir esta última en función de la primera. Para ello podemos expresar la nueva base de soluciones en la base instantánea dada por

$$\psi_j''(x) + k_j \psi_j(x) = 0 \tag{2.10}$$

y condiciones de contorno de Dirichlet

$$\psi_j(0) = \psi_j(R(t)) = 0, \tag{2.11}$$

donde $k_j(R) = \frac{j\pi}{R} = \omega_j(R)$. Si además pedimos que sea una base ortonormal en cada instante respecto del producto interno

$$\langle \psi_k, \psi_j \rangle = \int_0^{R(t)} \psi_k(x, R(t))\psi_j(x, R(t))dx = \delta_{kj}, \tag{2.12}$$

entonces las funciones son de la forma

$$\psi_j(x, R) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sin\left[k_j(R)x\right]. \tag{2.13}$$

Esto nos permite expandir a la base final como

$$v_n(x,t) = \sum_k \left[Q_k^{(n)}(t)\psi_k(x, R(t)) + Q_k^{(n)*}(t)\psi_k(x, R(t)) \right] \tag{2.14}$$

donde $Q_k^{(n)}(t)$ son coeficientes que dependen del tiempo. Los mismos se pueden hallar reemplazando la Ec.(2.14) en Ec.(2.6) y luego el campo en la ecuación de ondas. A continuación, usando la ortogonalidad de las ψ_j podemos dar un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\ddot{Q}_k^{(n)} + \omega_k^2(t)Q_k^{(n)} = 2\dot{R}\sum_j M_{kj}\dot{Q}_j^{(n)} + \ddot{R}\sum_j M_{kj}Q_j^{(n)} + \dot{R}^2\sum_j S_{kj}Q_j^{(n)}, \tag{2.15}$$

donde definimos los coeficientes de acoplamiento

$$M_{kj} = \langle \psi_j, \partial_R \psi_k \rangle = -M_{jk} \tag{2.16}$$

$$S_{kj} = \langle \partial_R \psi_j, \partial_R \psi_k \rangle = \sum_l M_{lk}M_{lj}, \tag{2.17}$$

siendo que la segunda igualdad para M_{kj} proviene de escribir el producto interno como integral e integrar por partes, mientras que la segunda igualdad proviene de la completitud de la base de soluciones. Estos coeficientes se pueden calcular de

manera explícita usando la expresión para ψ_j.

Notemos que, tanto para tiempos tempranos como tardíos, la cavidad se encuentra estática y por ende el lado derecho de la Ec. (2.15) se anula, lo que da como resultado que la solución sea la de un oscilador armónico de frecuencia ω_k. Luego, si fijamos las condiciones iniciales

$$Q_k^{(n)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\delta_{nk} \tag{2.18}$$

$$\dot{Q}_k^{(n)}(0) = \frac{-i}{\sqrt{2\omega_k}}\delta_{nk} \tag{2.19}$$

tendremos que para tiempos tempranos

$$Q_k^{(n)}(t<0) = \frac{e^{-i\omega_k t}}{2\omega_k}, \tag{2.20}$$

es decir que esta expansión instantánea coincide con la base inicial $Q_k^{(n)}(t)\psi_k(x, R(t)) = u_k(x,t)$ como queríamos; mientras que para tiempos tardíos volveremos a tener un oscilador armónico

$$Q_k^{(n)}(t>t_f) = \frac{1}{2\omega_k}\left(\alpha_{nk}e^{-i\omega_k t} + \beta_{nk}e^{i\omega_k t}\right), \tag{2.21}$$

donde los coeficientes α_{nk} y β_{nk} se obtienen de resolver la ecuación diferencial para los $Q_k^{(n)}$. Además si reemplazamos la Ec. (2.21) en la Ec. (2.14) y comparamos con la Ec. (2.7) es claro que estos coeficientes son precisamente los de Bogoliuvob.

Hemos reducido entonces el problema original de un campo escalar cuántico en una cavidad con una pared móvil a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Esto puede hacerse numéricamente para cualquier trayectoria del espejo truncando la cantidad de modos pero también existen métodos analíticos, como el análisis de escalas múltiples (MSA) que analizaremos a continuación, que permiten dar una solución aproximada para ciertas trayectorias de interés.

2.1.1.1. Análisis de escalas múltiples

Es importante destacar que, si bien desde el punto de vista teórico siempre que el coeficiente de Bogoliuvob β_{nk} no se anule tendremos creación de fotones del vacío,

existen ciertas trayectorias que permiten aumentar considerablemente este efecto. A continuación veremos que tal es el caso para trayectorias oscilatorias armónicas del espejo de la forma

$$R(t) = R_0(1 + \epsilon \sin \Omega t), \tag{2.22}$$

siendo R_0 la posición inicial y de equilibrio, $\epsilon \ll 1$ un parámetro adimensional pequeño que determina la amplitud de la oscilación y Ω la frecuencia de oscilación.

En este punto, una posibilidad para resolver la Ec. (2.15) sería hacer un desarrollo perturbativo en ϵ y resolver orden a orden en esta variable. Sin embargo, este método sólo es válido para tiempos cortos tales que $\Omega\epsilon t \ll 1$, ya que aparecen términos "seculares" en las ecuaciones que a tiempos largos hacen que un orden tenga una magnitud comparable al del siguiente rompiendo la aproximación. Para ir a tiempos más largos podemos usar el análisis de escalas múltiples que consiste en definir una escala de tiempo más lenta $\tau = \epsilon t$ y hacer la siguiente expansión

$$Q_k^{(n)}(t, \tau) = \frac{1}{2\omega_k} \left(\alpha_{nk}(\tau) e^{-i\omega_k t} + \beta_{nk}(\tau) e^{i\omega_k t} \right), \tag{2.23}$$

Luego, si expandimos la Ec. (2.15) a primer orden en ϵ y multiplicamos por $e^{-i\omega_k t}$ y $e^{i\omega_k t}$ e integramos obtenemos ecuaciones diferenciales lineales para los coeficientes de Bogoliuvob

$$\begin{aligned}\beta'_{nk} =& \frac{\omega'_k R_0}{2} \alpha_{nk} \delta(\Omega - 2\omega_k) + \frac{R_0 \Omega}{2\omega_k} \sum_j M_{kj} \left(\left(-\omega_k + \frac{\Omega}{2} \right) \alpha_{nj} \delta(-\omega_j - \omega_k + \Omega) \right) \\ &+ \frac{R_0 \Omega}{2\omega_k} \sum_j M_{kj} \left(\left(\omega_j + \frac{\Omega}{2} \right) \beta_{nj} \delta(\omega_j - \omega_i + \Omega) + \left(\omega_j - \frac{\Omega}{2} \right) \beta_{nj} \delta(\omega_j - \omega_k - \Omega) \right)\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{nk} =& \frac{\omega'_k R_0}{2} \beta_{nk} \delta(\Omega - 2\omega_k) + \frac{R_0 \Omega}{2\omega_k} \sum_j M_{kj} \left(\left(-\omega_k + \frac{\Omega}{2} \right) \beta_{nj} \delta(-\omega_j - \omega_k + \Omega) \right) \\ &+ \frac{R_0 \Omega}{2\omega_k} \sum_j M_{kj} \left(\left(\omega_j + \frac{\Omega}{2} \right) \alpha_{nj} \delta(\omega_j - \omega_i + \Omega) + \left(\omega_j - \frac{\Omega}{2} \right) \alpha_{nj} \delta(\omega_j - \omega_k - \Omega) \right)\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde tomamos $\delta(x) = 1$. Recordemos además que las condiciones iniciales para $Q_k^{(n)}$, Ec. (2.18), implican las siguientes condiciones iniciales para los coeficientes de

Bogoliuvob

$$\alpha_{nk}(0) = \delta_{nk} \tag{2.26}$$

$$\beta_{nk}(0) = 0. \tag{2.27}$$

De estas ecuaciones, aún sin resolverlas, ya podemos sacar varias conclusiones físicas interesantes. Por un lado como los β_{nk} son inicialmente nulos y su derivada depende de los α_{nk} a través de dos términos con deltas, los mismos no se anularán solo si

$$\Omega = 2\omega_k$$

$$\Omega = \omega_k + \omega_j. \tag{2.28}$$

Dicho de otro modo, bajo esta aproximación, solo habrá creación de fotones si se cumplen estas condiciones de **resonancia paramétrica**. Mientras que si $\Omega = |\omega_k - \omega_j|$ solo evolucionarán en el tiempo los coeficientes α_{nk} lo que generará una redistribución de los fotones iniciales de un modo del campo a otros. También podemos notar que el espectro de la cavidad se vuelve fundamental para entender la generación de fotones puesto que de ello dependerá cuáles y cuántos términos contribuyen en la ecuación diferencial de los coeficientes de Bogoliuvob.

2.1.2. Hamiltoniano

Existen muchos casos en los que la formulación anterior en términos de los coeficientes de Bogoliuvob es suficiente para dar una descripción completa y cabal del sistema. Sin embargo, la misma sólo describe la evolución de los operadores de creación y destrucción mientras que, para un tratamiento cuántico, sería útil entender la dinámica de los estados en el espacio de Hilbert. El problema es que, como mencionamos anteriormente, no existe un operador unitario que describa de forma exacta este sistema. Aún así, veremos que es posible construir un hamiltoniano que genera un operador unitario aproximado que describe bien la dinámica de los estados.

Para ello podemos comenzar escribiendo el lagrangiano que da lugar a la ecuación

de ondas

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{R(t)} (\partial_t^2\Phi(x,t) - \partial_x^2\Phi(x,t))dx. \tag{2.29}$$

Si ahora expandimos nuevamente el campo en una base instantánea

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_n(t)\psi_n(x,R(t)) + \text{h.c.}\right], \tag{2.30}$$

donde las funciones $\psi_n(x,R(t))$ son las mismas de la Ec. (2.10) y usamos las propiedades de la sección anterior tenemos

$$L = \frac{1}{2}\sum_k \left(\dot{Q_k}^2 - \omega_k^2 Q_k^2\right) - \dot{R}\sum_{k,j} M_{kj}\dot{Q}_k Q_j + \frac{\dot{R}^2}{2}\sum_{k,j,l} M_{jk}M_{lk}Q_kQ_j. \tag{2.31}$$

Vale destacar que este lagrangiano da lugar a ecuaciones de movimiento para los coeficientes Q_k idénticas a la Ec. (2.15). Seguidamente calculamos el momento canónico conjugado

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \dot{Q}_k - \dot{R}\sum_{l,j} M_{lj}\delta_{lk}Q_j = \dot{Q}_k - \dot{R}\sum_j M_{kj}Q_j \tag{2.32}$$

que podemos reemplazar para obtener el hamiltoniano del sistema clásico

$$H = \sum_i P_i\dot{Q}_k - L \tag{2.33}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k \left[P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2\right] + \dot{R}\sum_{k,j} M_{kj}P_kQ_j. \tag{2.34}$$

El hamiltoniano cuántico se puede obtener por medio de la cuantización canónica, promoviendo los variables canónicas conjugadas a operadores y estableciendo las reglas de conmutación usuales

$$Q_k \to \hat{Q}_k, \quad P_k \to \hat{P}_k$$
$$[\hat{Q}_k, \hat{P}_j] = i\delta_{kj}. \tag{2.35}$$

Ahora podemos definir los operadores de creación $\hat{a}_k^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}_k$ como

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k(R)}}(\omega_k(R\hat{Q}_k + i\hat{P}_k), \tag{2.36}$$

y a partir de ellos el espacio de Hilbert usual $|n\rangle = (a^\dagger)^n|0\rangle/\sqrt{n!}$.

También se puede ver la equivalencia con el enfoque anterior, expresando a los operadores finales (en el picture de Heisenberg) en términos de los iniciales

$$\hat{Q}_n(t) = \sum_k \left[Q_n^{(k)}(t)\hat{a}_k + Q_n^{(k)*}(t)\hat{a}_k^\dagger\right] \tag{2.37}$$

donde las funciones $Q_n^{(k)}(t)$ deben ser una base de soluciones de la Ec. (2.15) tales que

$$\hat{Q}_n(0) = \sum_k \left[Q_n^{(k)}(0)\hat{a}_k + Q_n^{(k)*}(0)\hat{a}_k^\dagger\right] = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}\left(\hat{a}_n + \hat{a}_k^\dagger\right) \tag{2.38}$$

$$\hat{P}_k(0) = \dot{\hat{Q}}_n(0) = \sum_k \left[\dot{Q}_n^{(k)}(0)\hat{a}_k + \dot{Q}_n^{(k)*}(0)\hat{a}_k^\dagger\right] = \frac{-i}{\sqrt{2\omega_n}}\left(\hat{a}_n - \hat{a}_k^\dagger\right), \tag{2.39}$$

de donde se sigue que satisfacen las condiciones iniciales (Ec. (2.18)) con lo que coinciden con las funciones de la sección anterior y, salvo un factor, con los coeficientes de Bogoliuvob. De esta forma queda claro que el subíndice está presente ya en la dinámica clásica mientras que el superíndice proviene de que en mecánica cuántica es necesario resolver las ecuaciones clásicas para todas las condiciones iniciales posibles.

Habiendo entendido la equivalencia con la sección anterior podemos escribir al hamiltoniano en función de los operadores de creación y aniquilación como

$$H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \dot{R}\sum_{j,k} M_{jk}\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\omega_j}{\omega_k}}\left(a_j - a_j^\dagger\right)\left(a_k + a_k^\dagger\right). \tag{2.40}$$

Si además consideramos una trayectoria con una variación pequeña alrededor de su posición de equilibrio

$$R(t) \approx R_0 + \delta R(t) \tag{2.41}$$

y expandimos a los operadores de creación a primer orden

$$a_k(R) \approx a_k + \delta R \frac{\omega_k'}{2\omega_k} a_k^\dagger, \tag{2.42}$$

obtenemos el hamiltoniano

$$\begin{aligned} H =& \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k \omega_k' \delta R a_k^\dagger a_k + \sum_k \frac{\omega_k'}{2} \delta R (a_k^2 + a_k^{\dagger 2}) \\ &+ \dot{R} \sum_{j,k} M_{jk} \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\omega_j}{\omega_k}} \left(a_j a_k - a_j^\dagger a_k + a_j a_k^\dagger - a_j^\dagger a_k^\dagger \right) + \mathcal{O}(\delta R^2). \end{aligned} \tag{2.43}$$

En este hamiltoniano podemos identificar tres contribuciones que, si bien ya estaban presentes en las Ec. (2.24), acá se vuelven evidentes y su significado más claro. Por un lado, el primer término del hamiltoniano es la energía libre del oscilador armónico en la posición de referencia, mientras que el segundo es una corrección debida a que el movimiento de la pared modifica la frecuencia de los fotones. El tercero ya es la esencia del efecto Casimir dinámico y evidencia la creación de pares de fotones, o un "one-mode squeeze", en un modo del campo, mientras que el último término contiene la generación de pares de fotones en dos modos $a_k^\dagger a_j^\dagger$, o una operación de "two-mode squeeze" (ambos están asociados con los β_{nk} de la sección anterior). Por último, tenemos términos $a_k a_j^\dagger$ que permiten el scattering de fotones de un modo a otro pero preservando el número total (asociados con los α_{nk} de la sección anterior).

Más adelante veremos que tanto este método hamiltoniano como el de coeficientes de Bogoliuvob son fácilmente generalizables a una cavidad 3D, o a un campo escalar masivo, o a condiciones de contorno más generales; tanto para una cavidad optomecánica como para circuitos superconductores. Lo que es importante es que si bien dichas generalizaciones requerirán considerar otras bases, o espectros, o productos internos (modificando los coeficientes de acoplamiento) los procesos básicos, de scattering o creación de fotones, que describimos acá estarán presentes en todas ellas.

2.1.3. Funciones de Moore

Los dos métodos vistos hasta ahora nos permitieron dar una descripción del efecto Casimir dinámico en términos de la evolución temporal de los coeficientes de Bogoliuvob y por ende, de los operadores de creación y destrucción para cada modo. No obstante, estas descripciones tienen sus limitaciones puesto que, estando los modos deslocalizados en toda la cavidad, estudiar fenómenos localizados en el espacio se vuelve extremadamente difícil tanto a nivel teórico como computacional; pensemos que si consideramos solo N modos debemos resolver esa cantidad de ecuaciones diferenciales y cada una para N condiciones iniciales distintas y después para cada punto del espacio sumar los N términos de la serie. Afortunadamente, en el caso de un campo escalar sin masa con una condición de contorno móvil en una dimensión existe una descripción alternativa mediante las funciones de Moore.

Bajo estas hipótesis, la observación básica que permite dar una nueva descripción matemática del sistema es la simetría conforme. Recordemos que esto significa que si hacemos el cambio de variables

$$\bar{t} + \bar{x} = G(t + x), \qquad \bar{t} - \bar{x} = F(t - x), \tag{2.44}$$

donde F y G son funciones cuya derivada nunca se anula, entonces el campo en las nuevas variables $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{t}) = \Phi(x, t)$ sigue satisfaciendo la ecuación de ondas

$$(\partial_{\bar{x}}^2 - \partial_{\bar{t}}^2)\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{t}) = 0. \tag{2.45}$$

Para nuestro problema estas funciones nos otorgan dos grados de libertad que nos permiten mapear dos puntos a otros dos puntos cualesquiera. Así podemos elegir funciones de Moore que a cada instante mapeen los bordes de la cavidad a los mismos puntos, por ejemplo el borde izquierdo en $L(t)$ a $\bar{x} = 0$ y el derecho a $\bar{x} = 1$, lo que hace que, en las nuevas coordenadas, el problema se reduzca a resolver la ecuación de ondas en una cavidad estática. Matemáticamente podemos encontrar estas transformaciones restando las Eqs. (2.44) y reemplazando tenemos

las ecuaciones de Moore

$$G(t + L(t)) - F(t - L(t)) = 0 \tag{2.46}$$

$$G(t + R(t)) - F(t - R(t)) = 2. \tag{2.47}$$

Como dijimos en estas coordenadas conformes la solución del campo se puede hallar fácilmente y volviendo a las reales la solución del campo se puede expresar como

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n v_n(x,t) + a_n^\dagger v_n^*(x,t) \right], \tag{2.48}$$

donde los modos vienen dados por [91]

$$v_n(x,t) = \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} [e^{-in\pi G(t+x)} + e^{in\pi F(t-x)}]. \tag{2.49}$$

Si consideramos como en las secciones anteriores que $L(t) = 0$ tenemos $F(z) = G(z)$ y tenemos solo una ecuación de Moore

$$F(t + R(t)) - F(t - R(t)) = 2. \tag{2.50}$$

La relación con el método de coeficientes de Bogoliuvob es inmediata y viene dada por la Ec. (2.7). Luego, para entender cómo se observa la generación de fotones en este formalismo es útil resolver la ecuación de Moore para tiempos tempranos y tardíos. En ambos casos la posición de la pared es constante, $R \neq R(t)$, y debemos resolver la ecuación

$$F(t + R) - F(t - R) = 2. \tag{2.51}$$

La solución de ella es de la forma

$$F(z) = \frac{z}{R} + g(z), \tag{2.52}$$

es decir, una función lineal más otra $R-$periódica $g(z)$. Para tiempos tempranos, $t < 0$, esta función se puede determinar pidiendo que la base v_n anterior coincida

con las u_n de la Ec. (2.5) de donde obtenemos

$$F(z<0)=\frac{z}{R(0)}, \tag{2.53}$$

anulando así la función periódica. Luego tomando esto como condición inicial y resolviendo la ecuación de Moore de principio a fin determinaremos la función periódica g para tiempos tardíos. La misma en general será no nula dando lugar a una nueva base y por ende coeficientes de Bogoliuvob $\beta_{nk}\neq 0$ que señalan la creación de fotones por efecto Casimir dinámico.

Además, utilizando la expansión de la Ec. (2.48) se puede calcular el valor medio del tensor de energía impulso renormalizado [91]. Esto se puede hacer usando el enfoque estándar basado la regularización de point-splitting (ver por ejemplo [10]), pero también puede ser derivada usando la anomalía conforme asociada con la transformación conforme [1, 92]. En cualquier caso se obtiene la densidad de energía del campo

$$\langle T_{tt}(x,t)\rangle_{\rm ren}=f_G(t+x)+f_F(t-x), \tag{2.54}$$

donde

$$\begin{aligned} f_G &= -\frac{1}{24\pi}\left[\frac{G'''}{G'}-\frac{3}{2}\left(\frac{G''}{G'}\right)^2\right]+\frac{(G')^2}{2}\left[-\frac{\pi}{24}+Z(Td_0)\right] \\ f_F &= -\frac{1}{24\pi}\left[\frac{F'''}{F'}-\frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right]+\frac{(F')^2}{2}\left[-\frac{\pi}{24}+Z(Td_0)\right], \end{aligned} \tag{2.55}$$

siendo $d_0=|R(0)-L(0)|$ la longitud inicial de la cavidad. Estamos considerando que el estado inicial del campo es térmico a temperatura T, y el factor $Z(Td_0)$ está relacionado con la energía media inicial

$$Z(Td_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\exp\left(\frac{n\pi}{Td_0}\right)-1}. \tag{2.56}$$

Estas ecuaciones son una ligera generalización de los resultados para temperatura nula de [10], ver también [93].

Finalmente, podemos notar que cuando la función de Moore es lineal la densidad de energía renormalizada se reduce a la energía del efecto Casimir estático. Indicando nuevamente que la creación de partículas aparece cuando las funciones $F(z)$ y $G(z)$ son no-lineales.

Este método es evidentemente más eficiente que cualquiera de los dos anteriores puesto que no involucra resolver un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales acopladas o calcular la evolución temporal de un hamiltoniano que depende del tiempo, sino resolver a lo sumo dos ecuaciones para las funciones de Moore. El costo de esta enorme simplificación es la imposibilidad de generalizar este método a nuevos sistemas que no posean simetría conforme como una cavidad tridimensional, un campo escalar con masa o condiciones de contorno más generales. A pesar de ello más adelante veremos que la potencia de este método no radica únicamente en la velocidad computacional sino que además permite dar soluciones exactas y simples a problemas teóricos que con otros métodos resultan de enorme complejidad.

2.2. Cavidad superconductora y observaciones

Desde un punto de vista experimental, la propuesta original de observar el efecto Casimir dinámico en un cavidad optomecánica tiene serios problemas. El más importante de ellos consiste en que la cantidad de fotones producida es proporcional a la relación entre la velocidad del espejo y la velocidad de luz, es decir, que para generar una cantidad mensurable de fotones es necesario mover la pared a una fracción grande de la velocidad de la luz, lo cual para un espejo masivo es extremadamente difícil de alcanzar experimentalmente. Por está razón, se ha planteado que el DCE en su esencia consiste en la generación de excitaciones de un campo cuántico con una condición de contorno que depende del tiempo. En el caso de las cavidades optomecánicas el campo es el electromagnético y el espejo móvil genera la condición de contorno dependiente del tiempo. Basándonse en este principio se propuso un sistema equivalente que consiste de una guía de microondas superdonductora, terminada en un SQUID (superconducting quantum interference device) al que se le aplica un campo magnético dependiente del tiempo. La principal ventaja de este

sistema es que la condición de contorno no requiere del movimiento ultrarrapido de un objeto masivo sino simplemente de la variación rápida de un campo magnético, siendo esto último mucho más accesible dado que frecuencias de GHz son habituales en circuitos de este tipo.

Matemáticamente, la equivalencia se puede ver partiendo del lagrangiano del campo de fase $\Phi(x,t)$ en una guía de ondas superconductora de longitud L_0 con capacitancia c e inductancia l por unidad de longitud terminada en un SQUID es [94]

$$\begin{aligned} L_{\rm cav} &= \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{c}{2}\int_0^{L_0} dx\left((\partial_t\Phi)^2 - v^2(\partial_x\Phi)^2\right) \\ &+ \left[\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{2C_J}{2}\partial_t\Phi(L_0,t)^2 - E_J\cos f(t)\Phi(L_0,t)^2\right], \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde $v = 1/\sqrt{lc}$ es la velocidad de propagación del campo y $f(t) = \frac{2e}{\hbar}\phi_x(t)$ es la fase a través del SQUID controlada por el flujo magnético externo $\phi_x(t)$. Además, E_J y C_J denotan la energía de Josephson y la capacitancia del SQUID, respectivamente. Como anticipamos, la descripción de la cavidad involucra un campo $\Phi(x,t)$ para $0 < x < L_0$ y el grado de libertad adicional $\Phi(L_0,t)$. Las ecuaciones dinámicas son

$$\partial_t^2\Phi - v^2\partial_x^2\Phi = 0\,, \tag{2.58}$$

(en lo que sigue tomaremos $v = 1$), y [95, 96]

$$\frac{\hbar^2}{E_C}\partial_t^2\Phi(L_0,t) + 2E_J\cos f(t)\Phi(L_0,t) + E_{l,\rm cav}L_0\partial_x\Phi(L_0,t) = 0 \tag{2.59}$$

donde $E_C = (2e)^2/(2C_J)$ y $E_{l,\rm cav} = (\hbar/2e)^2(1/lL_0)$. La ecuación de arriba surge de la variación de la acción con respecto a $\Phi(L_0,t)$, y puede ser considerada como una condición de contorno generalizada para el campo. Podríamos considerar condiciones de contorno generalizadas también en $x = 0$, pero por simplicidad asumiremos que $\Phi(0,t) = 0$ (físicamente corresponde a la situación en que la cavidad está desacoplada). Bajo cierta elección de los parámetros de la cavidad y el SQUID, y además ajustando el campo magnético a través del SQUID, la segunda derivada temporal

del campo se vuelve despreciable y la Ec. (2.59) puede ser escrita como

$$0 = \Phi(L_0, t) + \frac{E_{l,\mathrm{cav}} L_0}{2E_J \cos f(t)} \partial_x \Phi(L_0, t) \tag{2.60}$$

$$\approx \Phi(L_0 + \frac{E_{l,\mathrm{cav}} L_0}{2E_J \cos f(t)}, t) \tag{2.61}$$

con lo que la cavidad superconductora se comporta como una cavidad perfecta con un espejo móvil en el extremo, es decir L_0 pasa a ser de manera efectiva una función del tiempo que denotaremos $L_0 \equiv L(t) = L_0 + \frac{E_{l,\mathrm{cav}} L_0}{2E_J \cos f(t)}$. En este escenario, tenemos que las condiciones de contorno se pueden escribir como $\Phi(0, t) = \Phi(L(t), t) = 0$ [97–99]. De hecho, se han observado los efectos de condiciones de contorno no estacionarias en un circuito superconductor [15,100]. En particular en el trabajo [101] hemos estudiado cómo SQUIDs ubicados en el medio y extremos de una guía de ondas superconductora permiten simular un sistema optomecánico formado por dos paredes perfectamente reflectantes y una membrana dieléctrica entre ellas con una permitividad arbitraria separando ambas mitades. Así, estas condiciones de contorno más generales nos permiten ajustar tanto el espectro de la cavidad como la forma de sus modos electromagnéticos.

CAPÍTULO 3

Transferencia cuántica de energía

En este capítulo, estudiamos al efecto Casimir dinámico como un sistema cerrado donde tanto el campo electromagnético como el espejo son tratados cuánticamente. La aproximación de un sistema cerrado recae en la suposición de que las pérdidas tanto ópticas como mecánicas son lo suficientemente bajas en las escalas de tiempo estudiadas. Un análisis más detallado del caso disipativo fue hecho en [36] donde se muestra que tanto para cavidades tecnológicamente accesibles [102] como para nanoresonadores [103, 104] las pérdidas podrían ser despreciadas, para tiempos tempranos, dados que el estado evoluciona como si el sistema fuese de hecho cerrado. Este estudio disipativo es especialmente relevante dado que una medición directa del DCE podría ser hecha permitiendo que algunos fotones salgan de la cavidad, en cuyo caso se utilizaría una cavidad con un menor factor de calidad. Por otro lado, el sistema que estudiaremos deberá tener un factor de calidad alto tanto para la cavidad como para el nanoresonador. En esta configuración se podría hacer una medición indirecta del DCE, estudiando el caso del nanoresonador, por ejemplo, acoplándolo a un qubit. El procedimiento sería el siguiente: primero, uno preparía un estado del resonador con la cavidad y el qubit fuera de sintonía. Luego, la cavidad debería ser rápidamente puesta en sintonía con el resonador y, luego de un cierto tiempo de

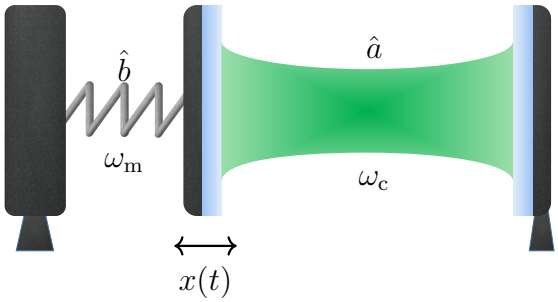


Figura 3.1: Presentamos el modelo estudiado: una cavidad con un espejo móvil en en un extremo (con el otro extremo fijo), el cual está sometido a un potencial armónico análogo a un resorte con frecuencia ω_{m} sujeto a una pared. Las oscilaciones del resorte están cuantizadas con un operador bosónico $\hat{b}$ correspondiente a fonones. Adentro de la cavidad se produce luz como resultado de la interacción del efecto Casimir dinámico en un modo del campo con frecuencia ω_{c} y operador bosónico $\hat{a}$.

interacción, sacada de sintonía nuevamente; por último, el número de excitaciones en el resonador podría ser obtenido sintonizando al qubit con la frecuencia del resonador y midiendo el qubit (como ha sido hecho en [103]). La pérdida de excitaciones en el resonador nos permitiría inferir el número de fotones producidos por el DCE. En el caso de que algunas pequeñas pérdidas estuvieran presentes en el sistema esperamos que nuestros resultados se sostengan para tiempos cortos, mientras que el número de excitaciones debería decrecer monótonamente para tiempos largos.

En lo que sigue investigamos en detalle el mecanismo por el cual la energía mecánica es convertida en fotones a través de resonancia paramétrica ($\omega_{\mathrm{m}} = 2\omega_{\mathrm{c}}$) en el régimen de acoplamiento débil para diferentes estados iniciales, siguiendo [105].

El capítulo se estructura de la siguiente manera. En la sección 3.1, describimos el modelo para una cavidad optomecánica donde tanto los grados de libertad del campo como del movimiento del espejo están descritos cuánticamente y comentamos sobre posibles refinamientos. En al sección 3.2, estudiamos numérica y analíticamente la evolución temporal de estado tipo número entre el espejo y el campo. Nos enfocamos en la eficiencia de la producción de fotones y el desarrollo de entrelazamiento para estados de energía creciente. También estudiamos cómo cambia esta eficiencia para diferentes situaciones: un estado inicial con algunos fotones presentes desde el inicio y el efecto de una desintonización de la cavidad. En la sección 3.2.1, realizamos un

análisis numérico con el objetivo de establecer una conexión entre el sistema tratado y el modelo de un campo cuántico con una pared semi-clásica. Así, consideramos un estado inicial con un movimiento coherente del espejo. La sección 3.4.1 está dedicada al estudio numérico de un proceso de equilibración como resultado de un espejo inicialmente caliente y una cavidad en vacío. Finalmente, en la sección 3.5, resumimos los resultados y presentamos las conclusiones de este capítulo.

3.1. Modelo

El modelo que utilizaremos es el de un campo cuántico en un cavidad con una pared móvil que, cómo vimos en el capítulo 2, da lugar a un lagrangiano de la forma dada en la Ec. (2.29). Si además consideramos al desplazamiento de la pared, $\delta R = q$, como un grado de libertad más, sometido a un potencial cuadrático, deberemos añadir la energía cinética y potencial del mismo $(\dot{q}^2 - \Omega q^2)/(2m)$. Con este modelo clásico, podemos obtener el hamiltoniano y luego cuantizarlo de forma canónica. Si hacemos una aproximación lineal en el desplazamiento y nos quedamos con solo un modo del campo electromagnético obtenemos el hamiltoniano del sistema

$$H = H_0 + V_{\rm om} + V_{\rm DCE}, \tag{3.1}$$

donde

$$H_0 = \hbar\omega_{\rm c}\hat{N}_a + \hbar\omega_{\rm m}\hat{N}_b \tag{3.2}$$

es el hamiltoniano libre, compuesto por los operadores número de fotones y fonones (las excitaciones en de la pared móvil) $\hat{N}_{\rm a} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ y $\hat{N}_{\rm b} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ respectivamente con sus frecuencias $\omega_{\rm c}$ y $\omega_{\rm m}$, mientras que el término

$$V_{\rm om} = g\hbar\ \hat{N}_a(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \tag{3.3}$$

es la interacción optomecánica entre el espejo y el campo con constante de acoplamiento g, y el término

$$V_{\rm DCE} = \frac{g\hbar}{2}(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2})(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \tag{3.4}$$

es la interacción del efecto Casimir dinámico.

El hamiltoniano libre H_0 tiene autoestados dados por la base número

$$|n, k\rangle = \hat{a}^{\dagger n}\hat{b}^{\dagger k}|0, 0\rangle \tag{3.5}$$

formada por n fotones y k fonones.

Podemos ver fácilmente que el hamiltoniano H captura algunas de las propiedades claves del DCE. Por ejemplo, dado que este término no conmuta con el operador número de partículas $\hat{N}_a$, es posible comenzar con la cavidad en el estado de vacío y producir fotones a partir de los fonones en la pared. Otra característica esperada es la producción de luz en pares de fotones que corresponde al término $\hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}$ que convierte un fonón en un par de fotones. De hecho, si descomponemos al espacio de Hilbert como

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}, \tag{3.6}$$

donde $\mathcal{E}$ es el subespacio de estados con un número par de fotones y $\mathcal{O}$ es aquel con un número impar; podemos ver que el hamiltoniano deja invariante a los subespacios $H\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$ y $H\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$. Esto significa que dado $|e\rangle \in \mathcal{E}$, su evolución temporal satisface $|e(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|e\rangle \in \mathcal{E}$ y por ende sigue en el mismo subespacio. Es decir que la paridad de los estados es preservada por la evolución temporal.

Este modelo con un solo modo de fotones es una buena aproximación siempre y cuando los otros modos no sea excitados de forma significativa por los fonones. Como ya hemos mencionado, resultados previos muestran que esto sucede cuando las frecuencias de los modos no están equiespaciadas lo cual puede ocurrir para un campo masivo en 1 dimensión o un campo sin masa en 2 o más dimensiones. Adicionalmente, debemos decir que solo estamos considerando un estado de polarización del campo electromagnético en este modelo. Considerando a ambos, solo duplica el

problema, con el hamiltoniano dado por

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_{\rm c}\hat{N}_{a,x} + \hbar\omega_{\rm m}\hat{N}_b + g\hbar\ N_{a,x}(\hat{b}+\hat{b}^\dagger) \\ &+ \frac{g\hbar}{2}(\hat{a}_{\rm x}^2 + \hat{a}_{\rm x}^{\dagger 2})(\hat{b}+\hat{b}^\dagger) + \hbar\omega_{\rm c}\hat{N}_{a,y} \\ &+ g\hbar\ \hat{N}_{a,y}(\hat{b}+\hat{b}^\dagger) + \frac{g\hbar}{2}(\hat{a}_{\rm y}^2 + \hat{a}_{\rm y}^{\dagger 2})(\hat{b}+\hat{b}^\dagger). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sin embargo, los estados de polarización en x e y $\hat{a}_{\rm x}^{\dagger n}|0\rangle$ y $\hat{a}_{\rm y}^{\dagger n}|0\rangle$, no son autoestados del verdadero hamiltoniano del campo electromagnético dado que no conmutan con el operador de helicidad. Los autoestados del hamiltoniano del campo EM están dados por $\hat{a}_\uparrow^{\dagger n}|0\rangle$ y $\hat{a}_\downarrow^{\dagger n}|0\rangle$ con $\hat{a}_\uparrow = \hat{a}_{\rm x} + i\hat{a}_{\rm y}$ y $\hat{a}_\downarrow = \hat{a}_{\rm x} - i\hat{a}_{\rm y}$. Escribiendo el hamiltoniano anterior con estos operadores resulta en

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_{\rm c}(\hat{N}_{a,\uparrow} + \hat{N}_{a,\downarrow}) + \hbar\omega_{\rm m}\hat{N}_b \\ &+ g\hbar\ (\hat{N}_{a,\uparrow} + \hat{N}_{a,\downarrow})(\hat{b}+\hat{b}^\dagger) + \frac{g\hbar}{2}(\hat{a}_\uparrow\hat{a}_\downarrow + \hat{a}_\uparrow^\dagger\hat{a}_\downarrow^\dagger)(\hat{b}+\hat{b}^\dagger). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Podemos ver que la única diferencia con nuestro modelo es que los pares de fotones serían producidos en un estado entrelazado tipo EPR $(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$. Un comentario final sobre este modelo es que sería posible agregar un driving coherente del espejo añadiendo al hamiltoniano el término dependiente del tiempo como

$$V_{\rm d} = f(t)(\hat{b}+\hat{b}^\dagger), \tag{3.9}$$

con $f(t)$ proporcional a la fuerza aplicada al espejo. Sin embargo, aquí nos enfocaremos en la interconversión de fonones en fotones a través del DCE como un sistema cuántico cerrado.

3.2. Estados número

Se espera que el efecto Casimir dinámico produzca un incremento de energía exponencial para un driving externo coherente de la pared y por eso en esta sección vamos a estudiar la dinámica del sistema para estados iniciales con energía creciente.

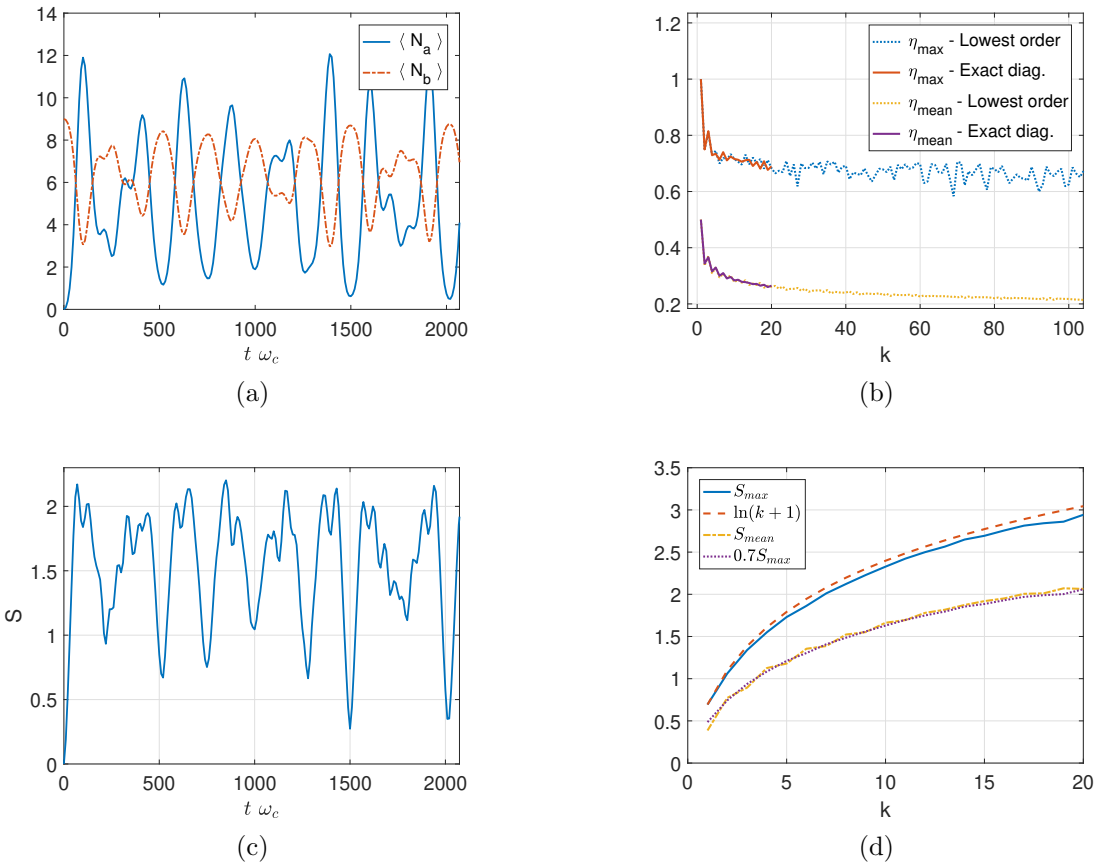


Figura 3.2: a) Evolución temporal para el valor medio de fotones y fonones. Oscilan erráticamente con el tiempo para el estado número $|0, 9\rangle$. b) Tanto la eficiencia máxima como la media de la conversión de energía mecánica en fotones convergen para un número grande de fotones iniciales. Mostramos ambas magnitudes como una función de los fonones iniciales por diagonalización exacta del hamiltoniano y usando teoría de perturbaciones al orden más bajo. c) La entropía de entrelazamiento como una función del tiempo para el estado $|0, 9\rangle$. d) Tanto la máxima como la media de la entropía de entrelazamiento muestra una dependencia logarítmica con el número inicial de fonones. En todos los casos, los resultados obtenidos para $g = 0.01$ y resonancia paramétrica.

Precisamente, vamos a considerar estados iniciales de la forma

$$|\psi_0\rangle = |0, k\rangle \tag{3.10}$$

con el sistema en resonancia paramétrica, esto es $\omega_{\rm m} = 2\omega_{\rm c}$, y acoplado débilmente ($g/\omega_c \ll 1$). Estos son autoestados del hamiltoniano libre y pertenecen al subespacio degenerado $D_{\rm k}$ generado por la base $\{|2n, k-n\rangle\}_{0\leq n\leq k}$. Podemos resolver la dinámica en el límite de acoplamiento débil usando teoría de perturbaciones al orden más bajo, lo que corresponde a diagonalizar la restricción de $V_{\rm DCE}$ a $D_{\rm k}$ dada por

$$V_{\rm DCE}|_{D_{\rm k}} = \frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & v_{\rm k} \\ 0 & 0 & 0 & v_k & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

con $v_{\rm j} = \sqrt{2j(2j-1)(k+1-j)}$.

Para el caso de $k = 1$, se ha hecho en [36], donde mostraron que el estado está dado por

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\Omega t)|0, 1\rangle + i\sin(\Omega t)|2, 0\rangle. \tag{3.12}$$

Así, es posible convertir toda la energía de los fonones en energía electromagnética para $t = \pi/(2\Omega)$. Aquí vamos a estudiar esta interconversión de energía en más detalle para una varidad de diferentes estados iniciales.

En la Fig. (3.2a) presentamos la evolución temporal del número medio de fotones $\langle\hat{N}_a\rangle$ y los fonones $\langle\hat{N}_b\rangle$ para el estado representativo $|0, 9\rangle$. Ambas magnitudes oscilan en el tiempo entre un valor máximo y 0, estando correlacionadas vía conservación de la energía $\langle\hat{N}_a\rangle(t) + 2\langle\hat{N}_b\rangle(t) = 2k$, en el límite de acoplamiento débil.

Se encuentra una particularidad: aunque el valor máximo de $\langle\hat{N}_a\rangle(t)$ crece linealmente con el número inicial de fonones siempre menor a $2k$ (debido a la conservación de la energía), excepto para $k = 1$. De hecho, si definimos la eficiencia máxima de

conversión de energía mecánica en electromagnética como

$$\eta_{\max} := \max_t \frac{E_a(t) - E_a(0)}{E_b(0)}, \tag{3.13}$$

donde $E_a(t) = \hbar\omega_{\rm c}\langle\hat{N}_a\rangle(t)$ y $E_b(t) = \hbar\omega_{\rm m}\langle\hat{N}_b\rangle(t)$ son las energías de los fotones y fonones respectivamente y análogamente $\eta_{\rm mean}$; entonces, $\eta_{\max}$ como función del número de fonones comienza en 100 % y tiene un valor asintótico de alrededor de 70 % (como podemos ver en Fig. 3.2b). Esta asimetría se deriva de la interacción $V_{\rm DCE}$ que distingue entre fotones y fonones.

Es posible estudiar también el entrelazamiento entre el campo EM dentro de la cavidad y la pared. Para ello usamos la entropía de Von-Neumann $S = -tr(\hat{\rho}_a \ln(\hat{\rho}_a))$, con $\hat{\rho}_a$ la matriz densidad reducida de los fotones. En la Fig. 3.2c podemos notar que esta magnitud oscila en el tiempo entre 0 y $\ln(k+1)$, lo que significa que podemos recuperar aproximadamente el estado inicial en una escala de tiempo corta. Por otro lado, el comportamiento de $S_{\max} \approx \ln(k+1)$ en la Fig. 3.2d se puede entender usando teoría de perturbaciones. Como el estado inicial $|0,k\rangle$ pertenece a $D_{\rm k}$, el estado evolucionado en el tiempo también está en $D_{\rm k}$, lo que significa que su entropía de entrelazamiento está acotada por la del estado máximamente entrelazado

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{k+1}} |2n, k-n\rangle \tag{3.14}$$

cuya entropía es $S_{\max} = \ln(k+1)$. Por lo tanto, a medida que pasa el tiempo, un estado puro evoluciona en un estado entrelazado (en el subespacio permitido) y eventualmente regresa de forma aproximada al inicial. Esta gran cantidad de entrelazamiento no es un valor excepcional en la evolución temporal sino que es la regla. De hecho, el valor medio de la entropía coincide con un alto grado de precisión en un 70 % del máximo. Podríamos especular que excitando externamente el sistema, incrementaremos la energía de los fonones exponencialmente. Si combinamos esto con el comportamiento logarítmico encontrado para el entrelazamiento, daría como resultado un incremento lineal de la entropía de entrelazamiento con el tiempo.

3.2.1. Generación estimulada e inhibida de fotones

En la sección previa, hemos analizado la dinámica y eficiencia de la producción de fotones para estados con una cavidad inicialmente vacía. Naturalmente surge una pregunta sobre qué ocurre si comenzamos con una cavidad con algunos fotones y fonones ya presentes: ¿estimularán la producción de aún más fotones incrementando la eficiencia o inhibirán en cambio la conversión? Para responder esta pregunta, consideraremos un estado inicial de la forma $|2n, k_0\rangle$ y estudiamos la eficiencia máxima $\eta_{\max}$ y media η_{mean} de la generación de fotones para un número fijo de fonones; variando el número inicial de fotones. Podemos decir que tomamos los fotones iniciales como un catalizado y analizamos cuántos nuevos fotones se producen a partir de los fonones iniciales. En la Fig. 3.3, mostramos la eficiencia de conversión como función de los pares de fotones. Se puede ver que es en realidad mejor tener algunos fotones presentes al inicio para incrementar la eficiencia. Sin embargo, agregar demasiados fotones inhibe la producción de otros nuevos. Ambas medidas de la eficiencia coinciden en esto, a pesar de que $\eta_{\max}$ es máxima para solo un par de fotones, mientras que η_{mean} alcanza un pico para alrededor de 10 % de los fonones iniciales. Luego de alcanzar estos picos, ambas eficiencias decrecen de manera casi lineal con el aumento del número de fotones iniciales. La eficiencia máxima se anula cuando los fotones exceden 2/3 de la energía total, mientras que la eficiencia media se vuelve negativa cuando los fotones iniciales superan el 56 % de la energía y luego continúa disminuyendo. Los valores negativos de la eficiencia media reflejan el hecho de que los fotones iniciales dejan de actuar como catalizador y, en cambio, comienzan a ser consumidos para producir fonones; mientras que la eficiencia máxima (siendo no-negativa por definición) cae a cero dado que el máximo número de fotones es en realidad el valor inicial. Esto ocurre porque si el estado inicial tiene $0.56k < n < 0.66k$ (en las raíces de ambas eficiencias), se alcanza un equilibrio entre el número de fotones y de fonones donde ninguno es generado o consumido.

El comportamiento descrito se puede entender en un primer acercamiento, rees-

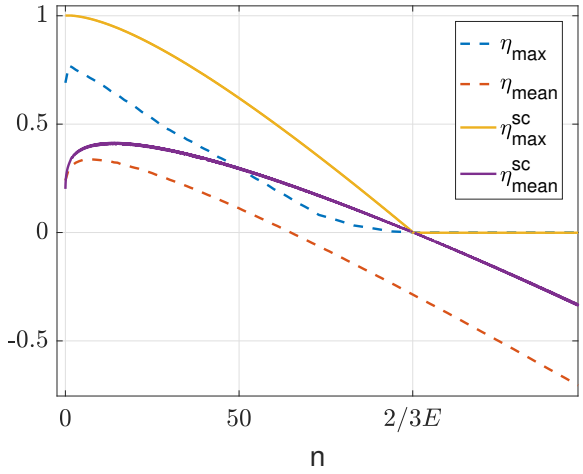


Figura 3.3: Eficiencia de la conversión de energía como función de los pares de fotones para un estado inicial de la forma $|2n, 50\rangle$. Las magnitudes exactas obtenidas por diagonalización numérica $\eta_{\max}$ y η_{mean} son comparadas con las aproximaciones semiclásicas $\eta^{\text{sc}}_{\max}$ y $\eta^{\text{sc}}_{\max}$.

cribiendo el hamiltoniano en las variables canónicas

$$H_{\text{ps}} = \frac{\hbar\omega_c}{2}(X^2 + P_{\text{X}}^2) + \frac{\hbar\omega_m}{2}(Y^2 + P_{\text{Y}}^2) - \frac{g\hbar}{\sqrt{2}}X^2Y \tag{3.15}$$

con

$$X = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2} \tag{3.16}$$

$$P_{\text{X}} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/(i\sqrt{2}) \tag{3.17}$$

$$Y = -(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)/\sqrt{2} \tag{3.18}$$

$$P_{\text{Y}} = -(\hat{b} - \hat{b}^\dagger)/(i\sqrt{2}). \tag{3.19}$$

Notamos que el sistema clásico asociado a este hamiltoniano tiene una posición de equilibrio no-trivial en $(X_{\text{EQ}}, Y_{\text{EQ}}) = (\sqrt{2\omega_{\text{m}}\omega_{\text{c}}}/g, \omega_{\text{c}}/(\sqrt{2}g))$. En resonancia paramétrica, este equilibrio corresponde a que 2/3 de la energía total esté en los fotones, lo que explica por qué $\eta_{\max} \simeq 0$ alrededor de este punto. Asimismo, quisieramos explicar cómo esto surge cuánticamente. Para ello, podemos hacer una aproximación de onda rotante (RWA) del hamiltoniano original y descartar los términos con oscilaciones rápidas para conseguir un hamiltoniano más simple $H_{\text{RWA}} = H_0 + V_{\text{RWA}}$

con

$$V_{\mathrm{RWA}} = \frac{g\hbar}{2}(\hat{a}^2\hat{b}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}) \tag{3.20}$$

y $H_0 = \hbar\omega_{\mathrm{c}}\hat{N}_a + 2\hbar\omega_{\mathrm{c}}\hat{N}_b$ el hamiltoniano libre. Es posible ver que, en resonancia paramétrica, $[H_{\mathrm{RWA}}, H_0] = 0$ y en consecuencia el hamiltoniano de onda rotante conserva la suma de las energías de ambos subsistemas (fotones y fonones). Luego, usando la ecuación de Heisenberg para las variables que varían lentamente $\bar{\hat{b}} = e^{-i\omega_m t}\hat{b}$ y $\bar{\hat{a}}^2 = e^{-i\omega_m t}\hat{a}^2$, tenemos

$$\frac{d\hat{N}_a}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{N}_a, H_{\mathrm{RWA}}] = \frac{g}{2}\frac{2}{i}\left(\bar{\hat{a}}^{\dagger 2}\hbar - \bar{\hat{a}}^2\bar{\hat{b}}^\dagger\right) \tag{3.21}$$

$$\frac{d\bar{\hat{b}}}{dt} = t\frac{1}{i\hbar}[\bar{\hat{b}}, V_{\mathrm{RWA}}] = \frac{g}{2}\frac{1}{i}\bar{\hat{a}}^2 \tag{3.22}$$

$$\frac{d\bar{\hat{a}}^2}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\bar{\hat{a}}^2, V_{\mathrm{RWA}}] = \frac{g}{2}\left(\frac{2}{i}\bar{\hat{b}} + \frac{4}{i}\hat{N}_{\mathrm{a}}\bar{\hat{b}}\right). \tag{3.23}$$

Una vez más, podemos derivar la ecuación para $\hat{N}_{\mathrm{a}}$ con respecto al tiempo y, combinándola con las otras dos ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2\hat{N}_a}{dt^2} &= \left(\frac{g}{2}\right)^2 4(2\hat{N}_b + \hat{N}_a) + \left(\frac{g}{2}\right)^2 4\hat{N}_a(4\hat{N}_b - \hat{N}_a) \\ &= g^2\frac{H_0}{\hbar\omega_{\mathrm{c}}} + g^2\hat{N}_a\left(2\frac{H_0}{\hbar\omega_{\mathrm{c}}} - 3\hat{N}_a\right),\end{aligned} \tag{3.24}$$

donde usamos que $\hat{N}_b = (H_0 - \hat{N}_a)/2$. Dado que estamos interesados en la evolución de un esta número $|\psi_0\rangle$ en el subespacio D_{k}, podemos simplemente llamar $\langle H_0\rangle = E$ y escribir

$$\frac{d^2\hat{N}_a}{dt^2} = g^2\frac{E}{\hbar\omega_{\mathrm{c}}} + g^2\hat{N}_a\left(2\frac{E}{\hbar\omega_{\mathrm{c}}} - 3\hat{N}_a\right), \tag{3.25}$$

donde usamos que $H_0|_{D_{\mathrm{k}}} = E\ Id.$ Finalmente, notando que esta ecuación puede ser reescrita como $\frac{d^2\hat{N}_a}{dt^2} = -V'(\hat{N}_a)$, donde

$$V(\hat{N}_a) = g^2\left(\hat{N}_a^3 - \frac{E}{\hbar\omega_{\mathrm{c}}}\hat{N}_a^2\right) - g^2\frac{E}{\hbar\omega_{\mathrm{c}}}\hat{N}_a, \tag{3.26}$$

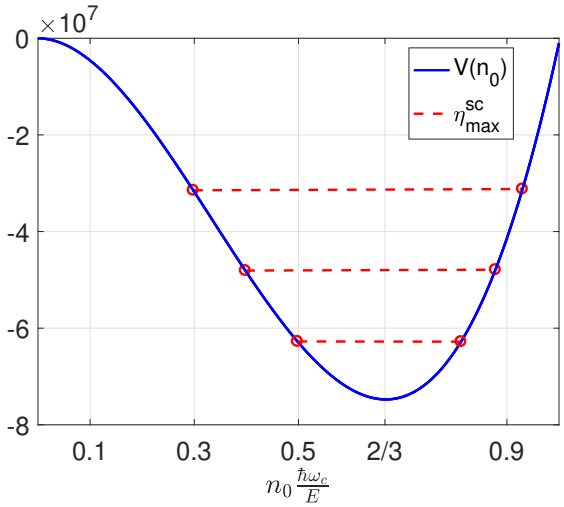


Figura 3.4: Potencial efectivo para $E/(\hbar\omega_c) = 500$ y $g = 1$. Un estado tipo número con un valor medio de n_0 fotones iniciales evoluciona a otro con un máximo de n_1 fotones, donde n_1 viene dado por $V(n_0) = V(n_1)$. La diferencia entre n_0 y n_1 es proporcional a $\eta_{\max}$.

podemos ver que la evolución del número de fotones corresponde a un oscilador cuántico anarmónico. Entonces, podemos tomar el valor de expectación y, haciendo una aproximación semi-clásica $\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \rangle \simeq \langle \hat{N}_a \rangle \langle \hat{N}_b \rangle$, $\langle \hat{N}_a^2 \rangle \simeq \langle \hat{N}_a \rangle^2$, obtenemos la siguiente estimación

$$\frac{d^2\langle \hat{N}_a \rangle}{dt^2} = g^2 \frac{E}{\hbar\omega_c} + g^2 \langle \hat{N}_a \rangle \left(2\frac{E}{\hbar\omega_c} - 3\langle \hat{N}_a \rangle \right). \tag{3.27}$$

Esta última ecuación diferencial captura la dinámica que convierte a los fonones en fotones de una manera aproximada pero simple. Podemos pensar en $\langle \hat{N}_a \rangle$ como la posición de una partícula moviéndose en el potencial $V(\langle \hat{N}_a \rangle)$ el cual, para $E \gg 1$, tiene nuevamente un mínimo en $\hbar\omega_c \langle \hat{N}_a \rangle = 2/3E$ y satisface que $V(0) = V(E/(\hbar\omega_c)) = 0$. Esto nos dice que las soluciones a esta ecuación con las condiciones iniciales $(\langle \hat{N}_a \rangle(0), d\langle \hat{N}_a \rangle/dt(0)) = (n_0, 0)$ son oscilaciones $\langle \hat{N}_a \rangle(t)$ entre n_0 y n_1 tales que $V(n_1) = V(n_0)$, como se ilustra en la Fig. 3.4. Usando esto podemos calcular la eficiencia semi-clásica $\eta^{\text{sc}}_{\max}$, que reproduce bastante bien la características principales de la solución exacta $\eta_{\max}$ mostrada en la Fig. 3.3. La diferencia entre las curvas se origina en las correlaciones cuánticas que producen una cierta distorsión. El resultado semi-clásico establece entonces una cota útil para la eficiencia de la producción de fotones.

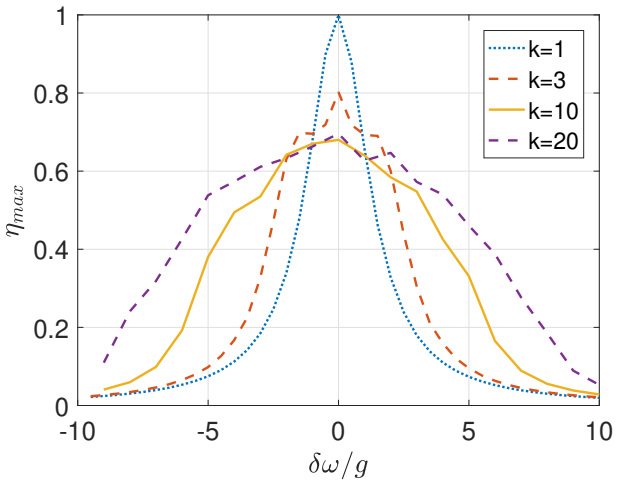
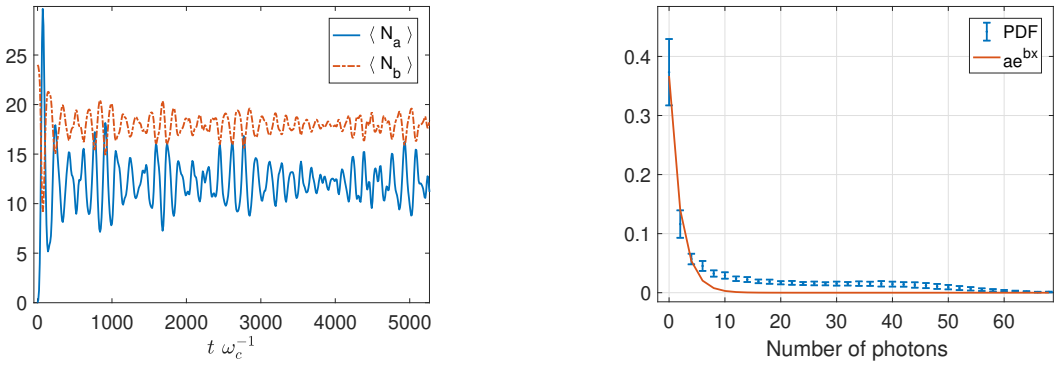


Figura 3.5: Eficiencia de la conversión de energía como función de la desintonización para estados iniciales de la forma $|0, k\rangle$.

Finalmente, podemos mencionar que la Ec. (3.25) también puede ser usada para entender la convergencia de la eficiencia para un número grande de fonones (Fig. 3.2b). Definiendo $\hat{\eta} := \hbar\omega_c \hat{N}_a/E$, podemos usar la Ec. (3.25) para obtener una ecuación diferencial para $\hat{\eta}$, asumiendo $E \gg 1$,

$$\frac{d^2\hat{\eta}}{dt^2} = \frac{g^2 E}{\hbar\omega_c}\hat{\eta}\,(2 - 3\hat{\eta})\,. \tag{3.28}$$

El resultado es una ecuación diferencial para un oscilador anarmónico sometido al potencial $V_{\text{eff}}(\hat{\eta}) = g^2E/(\hbar\omega_c)(\hat{\eta}^3 - \hat{\eta}^2)$. Por lo tanto, la ´amplitud de la solución no depende de la energía. Este es un resultado muy útil dado que nos permite predecir rápidamente el número máximo de fotones que serán generados para un estado dado. Previamente, dado el estado $|248, 251\rangle$, estábamos forzados a diagonalizar una matriz de 375×375, para hacer teoría de perturbaciones y luego obtener el número de fotones producidos. Sin embargo, usando la aproximación semi-clásica obtenida, podemos predecir que la eficiencia máxima será de aproximadamente 0.9 y entonces el número de fotones generados será $0.9 \times (248 + 2 \times 251) = 675$ simplemente analizando el potencial.



(a) (b)

Figura 3.6: a) Evolución temporal del valor medio de fotones y fonones para el estado inicial $|0\rangle \otimes |\alpha = 5\rangle$. b) Distribución de fonones con barras de error indicando la magnitud de las fluctuaciones temporales y comparado con un ajuste exponencial.

3.2.2. Desintonía

Hemos mostrado que ajustando la frecuencia de la pared móvil al doble de aquella de la cavidad es posible convertir la mayor parte de la energía del sistema en radiación por DCE. Sin embargo, en la práctica experimental, siempre hay algún nivel de desintonía que reduce este efecto. En esta sección, estudiaremos precisamente cómo debemos ajustar estas frecuencias para observar la emisión de fotones.

En primer lugar, consideramos un estado inicial de la forma $|0,1\rangle$ y una frecuencia mecánica ligeramente desintonizada de la resonancia paramétrica $\omega_{\mathrm{m}} = 2\omega_{\mathrm{c}} + \delta\omega$. Podemos resolver la dinámica al orden más bajo en teoría de perturbaciones diagonalizando la nueva interacción

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{g\hbar}{2} V_{\mathrm{DCE}} + \hat{N}_b \delta\omega\hbar \tag{3.29}$$

en el subespacio D_1. En la base $\{|0,1\rangle, |2,0\rangle\}$ la perturbación es

$$W_{\mathrm{int}}|_{D_1} = \frac{g\hbar}{2} \begin{pmatrix} 2\delta\omega/g & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

y puede ser diagonalizada para encontrar el estado evolucionado

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\Omega t) + \frac{i\delta\omega/g\,\sin(\Omega t)}{\sqrt{2+(\delta\omega/g)^2}}|0,1\rangle + \frac{i\sqrt{2}\,\sin(\Omega t)}{\sqrt{2+(\delta\omega/g)^2}}|2,0\rangle$$

con $\Omega = \sqrt{2}g\hbar/2$. Esto corresponde a la eficiencia máxima

$$\eta_{\max} = \frac{\hbar\omega_{\rm c}\,\text{máx}_t\langle\hat{N}_a\rangle}{2\hbar\omega_{\rm c}} = \frac{2}{2+(\delta\omega/g)^2}, \tag{3.31}$$

que es una función lorentziana que se reduce a la mitad para $\delta\omega = g\sqrt{2}$. Esto significa que incluso para $g = 0.01$, podemos producir la mitad de los fotones de resonancia con una desintonía de $1.4\,\%$.

Más aún, estudiamos numéricamente cómo la eficiencia depende de la desintonía para diferentes estados iniciales de la forma $|0,k\rangle$ encontrando que el ancho de la curva crece linealmente con k (Fig. 3.5). Es decir, encontramos que si bien la eficiencia decrece en resonancia paramétrica, a medida que incrementamos la energía la producción de fotones se vuelve menos sensible a la desintonía de la cavidad. Esto nos dice que si intentamos excitar al sistema de forma externa en desintonía podríamos no observar una producción de fotones hasta que alcancemos un número crítico de fonones en la pared.

3.3. Estados coherentes

Como hemos dicho, el efecto Casimir dinámico ha sido estudiado extensamente en teoría cuántica de campos considerando a la pared como una condición de contorno que oscila armónicamente en el tiempo. Sin embargo, los estamos iniciales que hemos estudiado hasta ahora no tienen un análogo clásico dado que los observables posición y el momento no evolucionan en el tiempo. Por esta razón, en esta sección estudiaremos los estados coherentes para describir el estado del espejo. Asumiendo que la cavidad está inicialmente en vacío, analizaremos la evolución del estado y la generación de fotones.

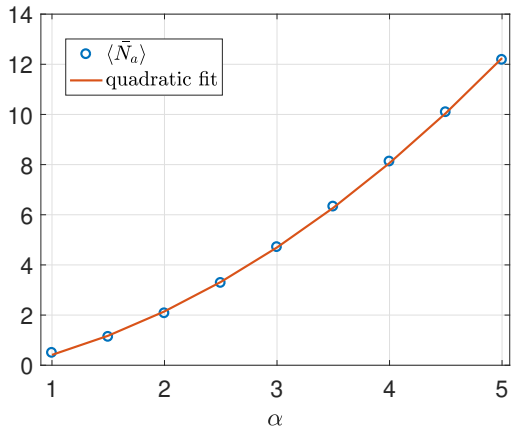


Figura 3.7: El valor asintótico de la media de fotones para un estado inicial coherente de fonones $|0\rangle \otimes |\alpha\rangle$ muestra un incremento cuadrático con el desplazamiento inicial α.

La dinámica para un estado inicial coherente de fonones de la forma

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |0, k\rangle \tag{3.32}$$

difiere significativamente de aquella de los estados número dado que la evolución temporal del número de fotones muestra un comportamiento irreversible. Como se muestra en la Fig. 3.6 (a), los fotones son producidos rápidamente, alcanzando un máximo para luego disminuir a un estado estacionario para tiempos largos, $\langle \bar{N}_a \rangle$, alrededor del cual fluctúan. Más aún, la distribución de fotones completa se vuelve estacionaria mostrando una alta probabilidad de medir un número pequeño de fotones, seguido por un decaimiento exponencial y luego una meseta de probabilidad para un gran número de fotones (Fig. 3.6 (b)).

Mientras que el valor estacionario de la media de fotones, se puede ver que en la Fig. 3.7 que crece cuadráticamente con α. Es posible entender este comportamiento recordando el resultado para una cavidad con una pared móvil de amplitud ϵ. En ese caso, se ha visto que el número de partículas creadas del vacío viene dado por

$$\langle \hat{N}_a \rangle = \sinh^2(\gamma \epsilon t), \tag{3.33}$$

siendo $\langle \bar{N}_a \rangle \propto \epsilon^2$ para una pequeña amplitud del movimiento [90]. Este resultado es

consistente con aquel de teoría de campos dado que obtenemos un número de fotones generados que es cuadrático en α. Finalmente, también hemos visto que la eficiencia converge a alrededor del 25 % a medida que se incremente la amplitud de los fonones iniciales α. Esto puede ser entendido con los resultados de la sección previa. Dado que el estado inicial $|\psi_0\rangle$ es una superposición de muchos estados de tipo número, cada uno evoluciona con oscilaciones que se compensan para dar un valor medio constante de fotones. Este número, para un valor alto de α, viene dado por el límite de la eficiencia para un estado tipo número para altas energías correspondiendo a la eficiencia media de Fig. 3.3 (para $n = 0$ dado que empezamos con la cavidad en vacío).

Con todo esto, la interacción del DCE para estados coherentes puede ser vista como un tipo de fricción cuántica que al convertir fonones en el espejo a fotones reduce la amplitud de la oscilación del espejo. Esto ha sido notado previamente en [106] usando una técnica diferente, trazando sobre los grados de libertad del campo y mirando solamente el movimiento de la pared. Ahora podemos entender el mecanismo por el cual este proceso ocurre, cuantificarlo y obtener el estado final del campo EM. Así, este resultado sugiere que, siempre que las pérdidas en la cavidad sean lo suficientemente pequeñas, una observación indirecta del efecto Casimir dinámico sería posible. La idea sería preparar al espejo en un estado coherente y observar cómo su amplitud decrece con el tiempo a medida que los fonones son convertidos en fotones. En una cavidad real donde los fotones producidos por el DCE podrían ser confundidos con otros térmicos esto sería especialmente útil.

3.4. Estados térmicos

En esta sección, vamos a considerar otro tipo de estado inicial para los fonones en el pared. Esto es porque en la práctica puede ser muy desafiante preparar un estado tipo número o coherente de la pared, lo que nos hace considerar la preparación de un estado mucho más accesible como son los estados térmicos. Por eso estudiaremos la evolución de un estado inicial de fonones en la pared y vacío dentro de la cavidad

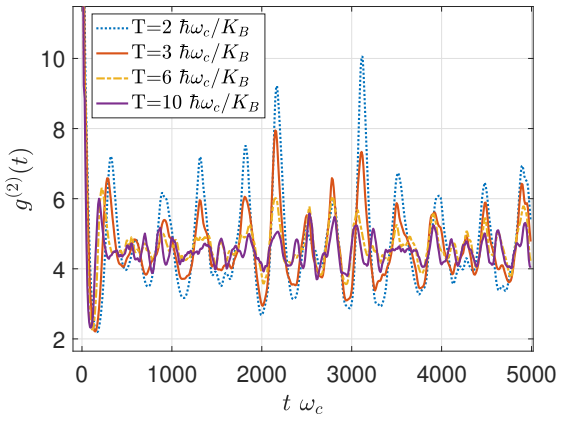


Figura 3.8: La función de correlación $g^{(2)}$ para fotones toma valores de alrededor de 4.5 lo que indica una distribución super-poissoniana como sería esperable para la producción de pares de partículas. Las fluctuaciones alrededor de estos valores tiende a disminuir para mayores temperaturas.

para un rango de diferentes temperaturas iniciales, definido como

$$|\psi_0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\hbar\omega_m k/(K_B T_0)}}{\sqrt{1-e^{-2\hbar\omega_m/(K_B T_0)}}} |0,k\rangle. \tag{3.34}$$

Comenzamos estudiando la función de correlación de segundo orden normalizada a tiempos iguales para los fotones

$$g^{(2)}(t,t) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\hat{a}(t)\rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle^2}, . \tag{3.35}$$

graficada en Fig.3.8. El interés en esta magnitud radica en que nos permite distinguir si la radiación producida es térmica o de origen cuántico. Como la función de correlación alcanza un valor estacionario para estados térmicos de alrededor de 4.5, esto implica que la estadística de la luz producida es super-poissoniana y que la probabilidad de producir dos fotones al mismo tiempo es más alta que el simple azar, reforzando la idea de que los fotones son producidos de a pares. A medida que la temperatura aumenta las fluctuaciones alrededor de este valor estacionario se vuelven más pequeñas dado que la producción de fotones se vuelve más uniforme en el tiempo.

Continuamos estudiando el número de fotones generados en la cavidad para comparar los diferentes estados iniciales considerados. En la Fig. 3.9(a), presentamos

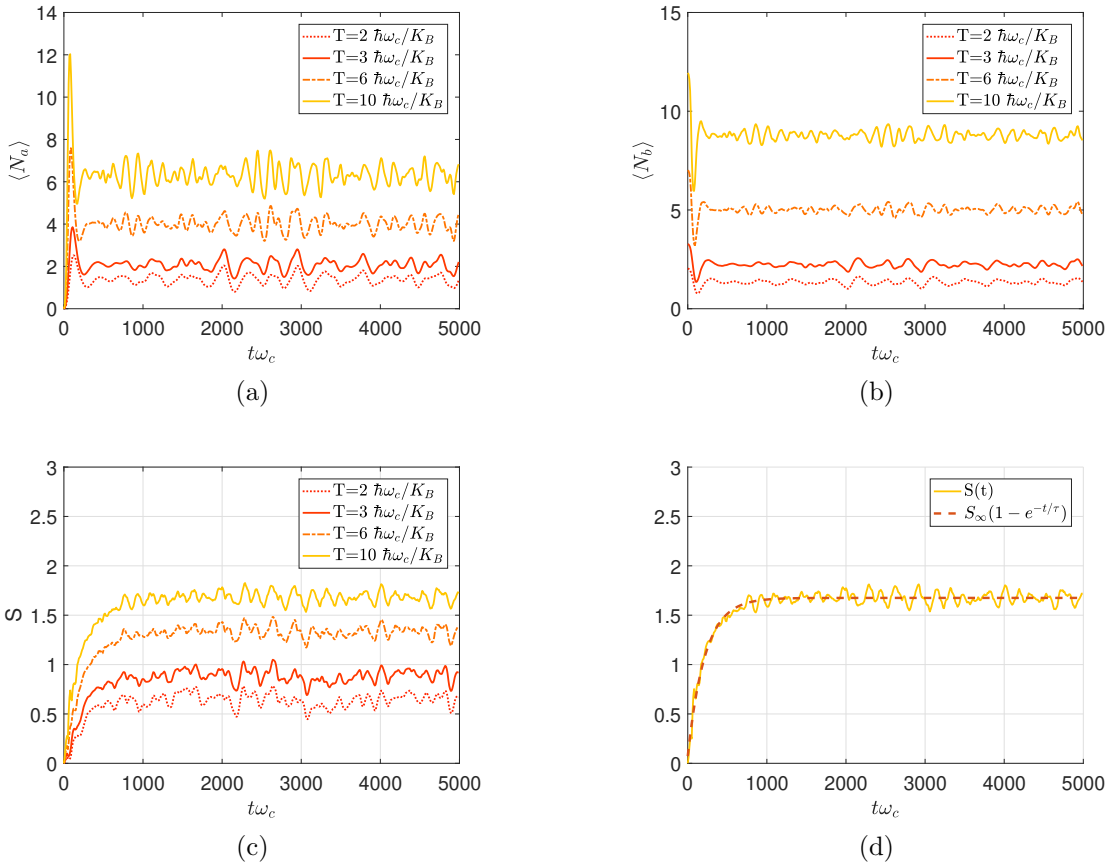


Figura 3.9: a) Valor medio del número de fotones como función del tiempo para diferentes temperaturas iniciales. b) Valor medio de fonones como función del tiempo para diferentes temperaturas. c) Entropía de entrelazamiento como función del tiempo para diferentes temperaturas. d) Entropía de entrelazamiento como función del tiempo para un estado inicial de fonones con un ajuste exponencial.

el valor medio de fotones a medida que pasa el tiempo. Podemos detectar claramente un comportamiento similar al de los estados coherentes: un incremente repentino de fotones, seguido por un pico alto y luego un decrecimiento fuerte a un valor estacionario alrededor del cual hay fluctuaciones para tiempos largos. La dinámica de los fonones es, por supuesto, la opuesta dado que obedecen la conservación de la energía debida al régimen de acoplamiento débil Fig. 3.9(b). Ambos observables aumentan con mayores temperaturas y sus fluctuaciones disminuyen con respecto a su valor medio estacionario. Por otro lado, la entropía de entrelazamiento aumenta con el tiempo y alcanza un valor estacionario para tiempos largos mostrado en Fig. 3.9(c). En este caso, se vuelve evidente que el equilibrio ocurre para tiempos mayores a $10^3\ \omega_c^{-1}$ para todas las temperaturas consideradas. Más aún, es posible ajustar la evolución de entrelazamiento con la función

$$S(t) = S_\infty(1 - e^{-t/\tau}), \tag{3.36}$$

donde S_∞ y τ son constantes, hasta un alto grado de precisión, mostradas en (Fig. 3.9d).

3.4.1. Distribuciones y termalización

El hecho de que el número medio de fotones y fonones alcance un valor estacionario y que la entropía parece saturar a tiempos largos, sugiere que el sistema alcanza un estado estacionario. En esta sección, caracterizamos el estado estacionario obtenido mirando las distribuciones de fonones y fotones y la relación entre ellas. Consideramos que la distribución de fotones (respectivamente fonones) $P_\rho(n)$ de un estado $\hat{\rho}(t)$ son los elementos diagonales de la matriz densidad reducida de fotones (respectivamente fonones) en la base de estados número. Se puede ver que los elementos fuera de la diagonal son despreciables y no son necesarios para reproducir los valores de expectación luego de la equilibración.

Dado el estado inicial térmico en la pared, podríamos sospechar que se está dando un proceso de termalización. Si ese fuera el caso, entonces la matriz densidad

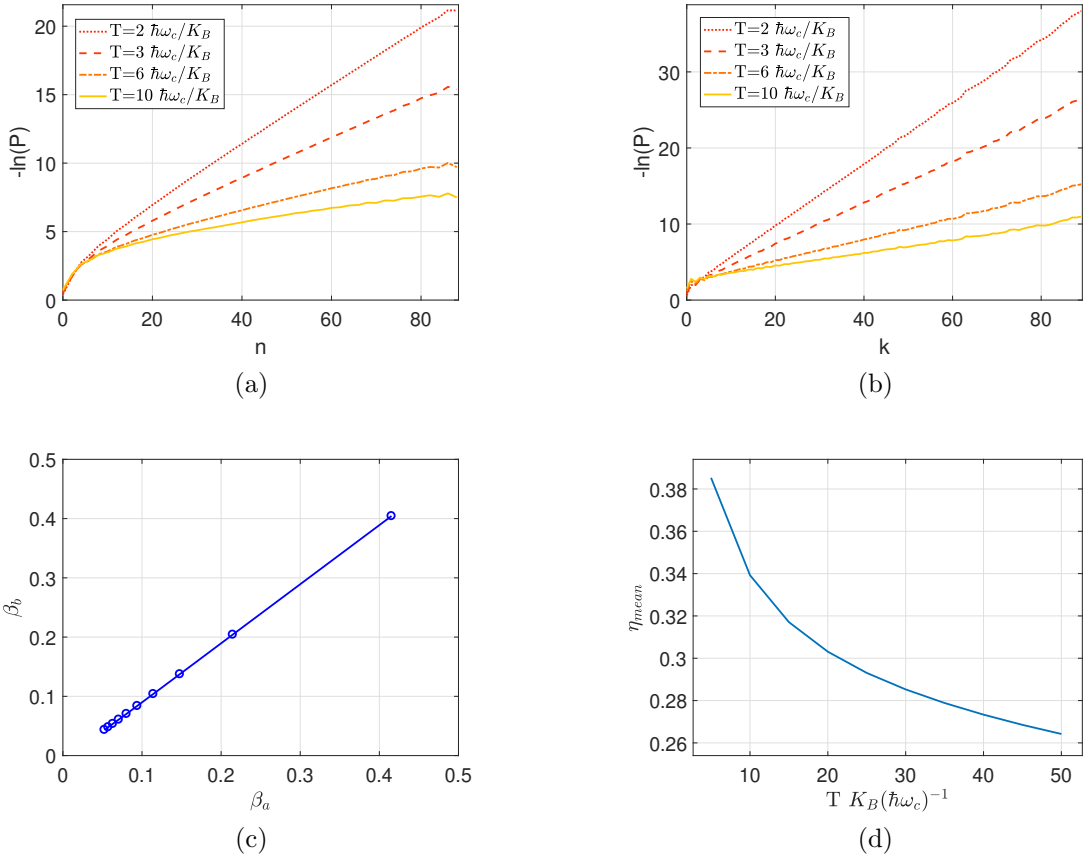


Figura 3.10: Distribución logarítmica de fotones (a) y fonones (b) para diferentes temperaturas iniciales. c) La relación entre las temperaturas de los fotones y fonones es lineal con pendiente 1, lo que indica que los subsistemas comparten la misma temperatura. d) Eficiencia de estados térmicos iniciales para diferentes temperaturas.

reducida de fotones debería ser el estado de Gibbs

$$\hat{\rho}_a = \sum_{n \text{ pares}} \frac{e^{-\beta_a H_a}}{Z} |n\rangle\langle n| = \sum_{n \text{ pares}} \frac{e^{-\beta_a \hbar\omega_c n}}{Z} |n\rangle\langle n|, \tag{3.37}$$

donde $\beta_a = 1/(K_B T_a)$ es la inversa de la temperatura de fotones y Z la función de partición. Asimismo, la distribución de fotones sería de la forma

$$P(n) = \frac{e^{-\beta_a \hbar\omega_c n}}{Z}. \tag{3.38}$$

En la Fig. 3.10, presentamos $-\ln(P(n))$ en función de n y diferentes valores de la temperatura inicial para fonones (Fig. 3.10a). Podemos ver que el comportamiento ajusta casi a la perfección a una función lineal para n grande y para todas las temperaturas, con una pendiente decreciente al aumentar la temperatura. El mismo comportamiento puede ser reproducido para los fonones (Fig. 3.10b), sugiriendo que ambos sistemas están muy cerca de un estado térmico.

Como tenemos más evidencia de que un proceso de termalización puede estar teniendo lugar, recordamos que si el estado fuese efectivamente térmico tendríamos

$$-\ln(P(n)) = \beta_a \hbar\omega_c n + \ln(Z). \tag{3.39}$$

Ajustando una línea recta para esta magnitud para fotones y fonones podemos definir una temperatura inversa β_a and β_b para cada subsistema. Estudiando la relación entre estas dos temperaturas para un rango de estados iniciales, encontramos que son de hecho iguales y podemos concluir que el sistema efectivamente termaliza, como se muestra en la Fig. 3.10c.

Los estados térmicos pueden ser mucho más fáciles de preparar y resultan en una eficiencia aceptable. De hecho, el valor medio de su eficiencia es alrededor de 25 % para temperaturas altas (Fig. 3.10d), que es aproximadamente lo mismo que para estados iniciales tipo número con un gran número de fotones (comparar con Fig. 3.3 para $n = 0$).

3.5. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado el efecto Casimir dinámico como un sistema cuántico descrito por una interacción entre fotones en una cavidad y fonones en una cavidad con una pared móvil. Hemos encontrado que la eficiencia de la producción de fotones se reduce a medida que aumenta la energía para estados iniciales de la forma $|0, k\rangle$, alcanzando asintóticamente alrededor del 70 %. La entropía de entrelazamiento, tanto en valor medio como en su máximo, por otro lado aumenta logarítmicamente con la energía y están relacionadas como $S_{\text{mean}} = 0.7\ S_{\text{max}}$. También hemos visto que empezando con algunos fotones ya en la cavidad se puede estimular la emisión de más fotones, incrementando la eficiencia. Sin embargo, hemos mostrado que, si seguimos agregando fotones, la eficiencia decrece linealmente inhibiendo la generación de fotones. De hecho, tenemos un equilibrio estable donde si el estado inicial es de la forma $|n, k\rangle$ con $0.56k \leq n \leq 0.66k$ no hay casi producción de fotones o fonones. También pudimos obtener una ecuación diferencial para el número de fotones indicando que evoluciona con el tiempo de la misma forma que un oscilador cuántico anarmónico. La dependencia de la sintonía para el DCE también fue estudiada, encontrando una curva Lorentziana para la producción de fotones con un ancho proporcional a la constante de acoplamiento del sistema y la energía del estado inicial. Esto dice que el DCE es menos sensible a la desintonía a medida que aumentamos la energía del estado inicial.

La dinámica encontrada para estados iniciales de la pared coherentes es muy diferente a la de los estados número, dado que el valor medio del número de fotones y fonones parece alcanzar un valor estacionario. Hemos encontrado que estos valores dependen cuadráticamente con el parámetro α del estado inicial, lo que parece indicar una dependencia cuadrática de la producción de fotones con la amplitud de la oscilación de la pared. Este resultado es consistente con los resultados previos de teoría de campos derivados en la literatura.

Finalmente, hemos analizado la evolución temporal de un estado inicial térmico de fonones y vacío en la cavidad. En este caso, tanto el número de fonones como de fotones parece llegar a un estado estacionario. Similarmente, el entrelazamiento encontrado parece estar muy bien descrito por una función de la forma $S(t) =$

$S_\infty(1 - e^{-t/\tau})$ para todas las temperaturas iniciales. También hemos visto que el estado estacionario alcanzado por el sistema es muy cercano a uno térmico tanto para fotones como fonones. Aún más, se puede definir una temperatura para ambos subsistemas y coinciden para diferentes estados iniciales lo que nos lleva a concluir que el sistema termaliza.

CAPÍTULO 4

Degradación del entrelazamiento

En este capítulo estudiaremos el efecto que tiene el movimiento en el almacenamiento y transporte de la información cuántica en una cavidad rígida, siguiendo [107]. Consideraremos que inicialmente los modos de dos cavidades optomecánicas han sido entrelazados y analizaremos el efecto que tiene hacer oscilar una de ellas rígidamente con una perturbación de alta frecuencia sobre la información, clásica y cuántica, compartida.

Se ha demostrado, en la literatura previa sobre información cuántica relativista, que el movimiento acelerado de un observador cambia el estado del campo debido al efecto Unruh [2]. Alternativamente aquí veremos que el estado del campo será afectado por el efecto Casimir dinámico. Una de las razones para considerar esta configuración es que desde un punto de vista experimental, hacer uso del efecto Unruh requiere un movimiento lineal no acotado lo que lleva a tiempos de operación o configuraciones rotantes muy complejas [108]. Por otro lado, para el efecto Casimir dinámico el movimiento es lineal y acotado para tiempos arbitrariamente largos de operación.

4.1. Cavidad en movimiento rígido

Vamos a comenzar repasando el efecto del movimiento rígido de una cavidad sobre el estado de un campo escalar cuántico en su interior. Consideraremos tanto que la cavidad es rectangular, formada por espejos perfectos con dimensiones L_x, L_y y L_z, como el caso en que la cavidad es unidimensional con longitud L_z. Siguiendo el capítulo 2 asumiremos que el campo satisface la ecuación de ondas

$$\Box\hat{\Phi}(\mathbf{x},t)=0 \tag{4.1}$$

sujeta a condiciones de contorno de Dirichlet sobre los espejos que se mueven con desplazamiento $r(t)$,

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(x=0+r(t),y,z,t)=\hat{\Phi}(x=L_x+r(t),y,z,t)=0\\ \hat{\Phi}(x,y=0,z,t)=\hat{\Phi}(x,y=L_y,z,t)=0\\ \hat{\Phi}(x,y,z=0,t)=\hat{\Phi}(x,y,z=L_z,t)=0.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Para tiempos tempranos $t<0$, todos los espejos están quietos, $r(t<0)=0$, y el campo puede ser expandido como

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x},t)=\sum_k\left[\hat{a}_k^{\text{in}}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x},t)+h.c.\right], \tag{4.3}$$

donde $\hat{a}_k^{\text{in}}$ son los operadores bosónicos correspondientes a distintos modos del campo y las funciones $u_{\mathbf{n}}$ son las soluciones de frecuencia positiva de la ecuación de ondas

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x},t)=\sqrt{\frac{2}{L_x}}\sin(k_xx)\sqrt{\frac{2}{L_y}}\sin(k_yy)\sqrt{\frac{2}{L_z}}\sin(k_zz)\frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \tag{4.4}$$

con $\mathbf{k}=\left(\frac{k_x\pi}{L_x},\frac{k_y\pi}{L_y},\frac{k_z\pi}{L_z}\right)$ siendo k_x,k_y,k_z números naturales y

$$\omega_{\mathbf{k}}=|\mathbf{k}|=\sqrt{\frac{k_x^2}{L_x^2}+\frac{k_y^2}{L_y^2}+\frac{k_z^2}{L_z^2}}. \tag{4.5}$$

Notemos que si bien esta es una generalización directa de lo visto en el capítulo 2

a una cavidad tridimensional hay una novedad que será fundamental, puesto que el espectro de frecuencias dado por la ecuación anterior ya no es equidistante como pasaba en una cavidad unidimensional.

A continuación, en $t = 0$, los espejos comienzan a moverse en el eje-x, manteniendo la distancia entre ellos fija, mientras los otros dos pares de espejos, en el eje y y z se mueven acompañando para producir un movimiento rígido de la cavidad entera [91, 96, 98]. Como ya vimos en el caso unidimensional esto da lugar a una nueva base de salida en la que podemos expandir el campo

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_n \left[\hat{a}_n^{\text{out}} v_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) + h.c.\right], \tag{4.6}$$

con nuevos operadores de aniquilación de salida $\hat{a}_n^{\text{out}}$. Para encontrar la transformación de Bogoliuvob entre ambas bases podemos expresar a la de salida en la base instantánea

$$v_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{n})}(t) \psi_{\mathbf{k}}(x, t) \tag{4.7}$$

donde ahora la base instantánea que satisface las condiciones de contorno de movimiento rígido es

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin(k_x(x - r(t))) \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin(k_y y) \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin(k_z z). \tag{4.8}$$

Este conjunto de funciones resulta ortonormal bajo el producto interno

$$\langle \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{j}} \rangle = \int_{r(t)}^{L+r(t)} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \varphi_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) dz dy dx = \delta_{\mathbf{kj}}, \tag{4.9}$$

que proviene de tomar el producto interno en una dimensión (Ec. (2.12)), y extenderlo naturalmente a tres.

Ahora podemos encontrar los coeficientes dependientes del tiempo $Q_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{n})}(t)$ reemplazado en la Ec. (4.6) y luego esta descomposición en la ecuación de ondas. Finalmente, usando la ortogonalidad de la base $\psi_{\mathbf{k}}$ encontramos las siguientes ecua-

ciones diferencial para los coeficientes

$$\ddot{Q}^{(\mathbf{n})}_{\mathbf{k}}(t) - 2\dot{r}(t)\sum_{\mathbf{j}}\dot{Q}^{(\mathbf{n})}_{\mathbf{j}}(t)g_{\mathbf{kj}} - \ddot{r}(t)\sum_{\mathbf{j}}Q^{(\mathbf{n})}_{\mathbf{j}}(t)g_{\mathbf{kj}}$$
$$- \dot{r}^2(t)\sum_{\mathbf{jl}}Q^{(\mathbf{n})}_{\mathbf{j}}(t)g_{\mathbf{lj}}g_{\mathbf{lk}} + \omega^2_{\mathbf{k}}Q^{(\mathbf{n})}_{\mathbf{k}}(t) = 0, \tag{4.10}$$

donde los coeficientes de acoplamiento quedan definidos nuevamente por

$$g_{\mathbf{kj}} = \langle(\partial_x\psi_{\mathbf{k}})\psi_{\mathbf{j}}\rangle \tag{4.11}$$
$$= \begin{cases} \left((-1)^{j_x+k_x}-1\right)\frac{2k_xj_x}{k_x^2-j_x^2}\delta_{k_yj_y}\delta_{k_zj_z} & k_x \neq j_x \\ 0 & k_x = j_x \end{cases}.$$

Vamos a considerar un movimiento armónico para el desplazamiento de los espejos dado por $r(t) = \epsilon\sin(\Omega t)$ y utilizaremos el método de escalas múltiples para buscar soluciones de la forma

$$Q^{(\mathbf{n})}_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{nk}}(\tau)\frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} + \beta_{\mathbf{nk}}(\tau)\frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}, \tag{4.12}$$

donde definimos la escala de tiempo lenta $\tau := \frac{1}{2L_x}\epsilon\omega_1 t$ (con ω_1 la frecuencia fundamental de la cavidad dada por Ec. (4.4) y las funciones $\alpha_{\mathbf{nk}}$ y $\beta_{\mathbf{nk}}$ serán los coeficientes de Bogoliuvob cuando el movimiento finalice. Luego de sustituir esta expansión en la Ec. (4.12) y promediar sobre las oscilaciones rápidas obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\beta_{\mathbf{nk}}}{d\tau} = \sum_{\mathbf{j}}\frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{k}}}g_{\mathbf{kj}}\beta_{\mathbf{nj}}\left[\left(\omega_{\mathbf{j}}+\frac{\Omega}{2}\right)\delta(\Omega+\omega_{\mathbf{j}}-\omega_{\mathbf{k}}) + \left(\omega_{\mathbf{j}}-\frac{\Omega}{2}\right)\delta(-\Omega+\omega_{\mathbf{j}}-\omega_{\mathbf{k}})\right]$$
$$+ \sum_{\mathbf{j}}\frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{k}}}g_{\mathbf{kj}}\left(-\omega_{\mathbf{j}}+\frac{\Omega}{2}\right)\alpha_{\mathbf{nj}}\delta(\Omega-\omega_{\mathbf{j}}-\omega_{\mathbf{k}}) \tag{4.13}$$

$$\frac{d\alpha_{\mathbf{nk}}}{d\tau} = \sum_{\mathbf{j}}\frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{k}}}g_{\mathbf{kj}}\alpha_{\mathbf{nj}}\left[\left(\omega_{\mathbf{j}}+\frac{\Omega}{2}\right)\delta(\Omega+\omega_{\mathbf{j}}-\omega_{\mathbf{k}}) + \left(\omega_{\mathbf{j}}-\frac{\Omega}{2}\right)\delta(-\Omega+\omega_{\mathbf{j}}-\omega_{\mathbf{k}})\right]$$
$$+ \sum_{\mathbf{j}}\frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{k}}}g_{\mathbf{kj}}\left(-\omega_{\mathbf{j}}+\frac{\Omega}{2}\right)\beta_{\mathbf{nj}}\delta(\Omega-\omega_{\mathbf{j}}-\omega_{\mathbf{k}}), \tag{4.14}$$

donde nuevamente $\delta(0) = 1$ y $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$.

Hay esencialmente dos casos distintos en los que podemos resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas dependiendo si el espectro de la cavidad es equidistante o no-equidistante. Este último caso se presenta, por ejemplo, cuando consideramos una cavidad tridimensional o al considerar un campo escalar masivo. En tales casos, solo dos modos se verán acoplados (excepto por algunos casos excepcionales descriptos en [90]). De manera opuesta, si la cavidad es unidimensional, el espectro es equidistante $\omega_n = n\pi/L_x$ y todos los modos se acoplarán entre sí. A continuación, describiremos brevemente ambas situaciones.

4.1.1. Cavidad tridimensional y espectro no-equidistante: dos modos acoplados

Consideremos el caso en que tenemos una cavidad tridimensional. Si asumimos una frecuencia de agitación $\Omega = \omega_{\mathbf{s}} + \omega_{\mathbf{c}}$ tal que coincide con la suma de las frecuencias de dos modos, $\omega_{\mathbf{s}}$ y $\omega_{\mathbf{c}}$, de la cavidad; entonces, como el espectro es no-equidistante, no hay (casi) ningún otro modo $\omega_{\mathbf{d}}$ que cumpla $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} \pm \omega_{\mathbf{d}}|$ o $\Omega = |\omega_{\mathbf{c}} \pm \omega_{\mathbf{d}}|$. En ese caso, las Ecs. (4.13) y (4.14) se reducen a

$$\frac{d\beta_{\mathbf{ns}}}{d\tau} = \frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{s}}} g_{\mathbf{sc}} \left(-\omega_{\mathbf{c}} + \frac{\Omega}{2} \right) \alpha_{\mathbf{nc}} \tag{4.15}$$

$$\frac{d\alpha_{\mathbf{nc}}}{d\tau} = \frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{c}}} g_{\mathbf{cs}} \left(-\omega_{\mathbf{s}} + \frac{\Omega}{2} \right) \beta_{\mathbf{ns}}. \tag{4.16}$$

Este es un sistema lineal de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas que puede ser resuelto fácilmente dando como resultado la evolución temporal de los coeficientes de Bogoliuvob. Estos se pueden reemplazar en la Ec.(2.8) para obtener la relación entre los nuevos operadores bosónicos en términos de los iniciales

$$a_{\mathbf{s}}^{\text{out}} = \cosh(\gamma^- \tau) a_{\mathbf{s}}^{\text{in}} + \sinh(\gamma^- \tau) a_{\mathbf{c}}^{\text{in}\dagger} \tag{4.17}$$

$$a_{\mathbf{c}}^{\text{out}} = \cosh(\gamma^- \tau) a_{\mathbf{c}}^{\text{in}} + \sinh(\gamma^- \tau) a_{\mathbf{s}}^{\text{in}\dagger} \tag{4.18}$$

donde

$$\gamma^{-} = \frac{\Omega}{2} g_{\mathbf{sc}} \sqrt{\frac{\left(\omega_{\mathbf{s}} - \frac{\Omega}{2}\right)\left(\frac{\Omega}{2} - \omega_{\mathbf{c}}\right)}{\omega_{\mathbf{s}}\omega_{\mathbf{c}}}}. \tag{4.19}$$

Esta transformación corresponde a una operación de *two-mode squeeze* con parámetro $\gamma^{-}\tau$, que genera simultáneamente pares de excitaciones en los modos $\omega_{\mathbf{s}}$ y $\omega_{\mathbf{c}}$. Esto también se puede ver a partir del número de fotones creados a partir del vacío dado por la Ec.(2.9), y como en este caso tenemos $\beta_{\mathbf{nk}} \neq 0$, hay una generación de fotones exponencial en el tiempo [90, 97, 109].

Otro posible acoplamiento entre dos modos ocurre si $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{c}}|$. En ese caso, el sistema de la Ec. (4.14) se transforma en

$$\frac{d\alpha_{\mathbf{ns}}}{d\tau} = \frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{s}}} g_{\mathbf{sc}} \left(\omega_{\mathbf{c}} - \frac{\Omega}{2}\right) \alpha_{\mathbf{nc}} \tag{4.20}$$

$$\frac{d\alpha_{\mathbf{nc}}}{d\tau} = \frac{\Omega}{2\omega_{\mathbf{c}}} g_{\mathbf{cs}} \left(\omega_{\mathbf{s}} + \frac{\Omega}{2}\right) \alpha_{\mathbf{ns}}. \tag{4.21}$$

Este conjunto de ecuación también se puede resolver y da como resultado

$$a_{\mathbf{s}}^{\text{out}} = \cos(\gamma^{+}\tau) a_{\mathbf{s}}^{\text{in}} + \sin(\gamma^{+}\tau) a_{\mathbf{c}}^{\text{in}} \tag{4.22}$$

$$a_{\mathbf{c}}^{\text{out}} = \cos(\gamma^{+}\tau) a_{\mathbf{c}}^{\text{in}} - \sin(\gamma^{+}\tau) a_{\mathbf{s}}^{\text{in}}. \tag{4.23}$$

donde

$$\gamma^{+} = \frac{\Omega}{2} g_{\mathbf{sc}} \sqrt{\frac{\left(\omega_{\mathbf{s}} + \frac{\Omega}{2}\right)\left(\omega_{\mathbf{c}} - \frac{\Omega}{2}\right)}{\omega_{\mathbf{s}}\omega_{\mathbf{c}}}}. \tag{4.24}$$

Vale la pena destacar que en esta situación $\beta_{\mathbf{nk}} = 0$ y por lo tanto no se generan nuevos fotones. Esto quiera decir que para un estado inicial de vacío la dinámica es trivial. Sin embargo, dado un estado inicial con algunos fotones presentes en uno de estos modos, el número de fotones en cada modo oscilará manteniendo el número total de fotones constante.

4.1.2. Cavidad unidimensional y espectro equidistante: Infinitos modos acoplados

Ahora vamos a considerar el caso en que la cavidad es unidimensional [110] y el espectro resultante es equidistante. Como la única dimensión relevante corresponde al eje x, descartamos los índices con negrita para mantener solo esa componente. Luego usando los coeficientes descritos en la Ec. (4.11), el conjunto de Ecs. (4.13) y (4.14) se reducen a

$$\frac{d\beta_{nk}}{d\tau} = \sum_{j+k \text{ odd}} \frac{\Omega}{2\omega_k} g_{kj}\beta_{nj}\left[\left(\omega_j + \frac{\Omega}{2}\right)\delta(q+j-k) + \left(\omega_j - \frac{\Omega}{2}\right)\delta(-q+j-k)\right] + \sum_{j+k \text{ odd}} \frac{\Omega}{2\omega_k} g_{kj}\left(-\omega_j + \frac{\Omega}{2}\right)\alpha_{nj}\delta(q-j-k) \tag{4.25}$$

$$\frac{d\alpha_{nk}}{d\tau} = \sum_{j+k \text{ odd}} \frac{\Omega}{2\omega_k} g_{kj}\alpha_{nj}\left[\left(\omega_j + \frac{\Omega}{2}\right)\delta(q+j-k) + \left(\omega_j - \frac{\Omega}{2}\right)\delta(-q+j-k)\right] + \sum_{j+k \text{ odd}} \frac{\Omega}{2\omega_k} g_{kj}\left(-\omega_j + \frac{\Omega}{2}\right)\beta_{nj}\delta(q-j-k), \tag{4.26}$$

donde hemos definido $q = \Omega/\omega_1$ y usado el hecho de que el espectro viene dado por $\omega_j = j\omega_1$ y que $g_{kj} = 0$ si $k+j$ es par. Es importante notar que, como $k+j$ es impar, $k-j$ también lo es. Esto significa que si q no es un número impar entonces el lado derecho de las Ecs.(4.25) y (4.26) es nulo y la evolución resulta trivial.

Con el objetivo de obtener una solución analítica para este sistema, vamos a repasar la situación en que solo oscila una de las paredes de una cavidad unidimensional (digamos la de la derecha). En tal caso, como vimos en el capítulo 2 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d\tilde{\beta}_k^{(n)}}{d\tau} = -\frac{\pi^2 k^2}{2\omega_k L_x^2}\tilde{\alpha}_k^{(n)}\delta(2k-q) + \sum_j \frac{\Omega}{2\omega_k}\tilde{g}_{kj}\tilde{\beta}_j^{(n)}\left[\left(\omega_j + \frac{\Omega}{2}\right)\delta(q+j-k) + \left(\omega_j - \frac{\Omega}{2}\right)\delta(-q+j-k)\right] + \sum_j \frac{\Omega}{2\omega_k}\tilde{g}_{kj}\left(-\omega_j + \frac{\Omega}{2}\right)\tilde{\alpha}_j^{(n)}\delta(q-j-k) \tag{4.27}$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}_k^{(n)}}{d\tau} = -\frac{\pi^2 k^2}{2\omega_k L_x^2}\tilde{\beta}_k^{(\mathbf{n})}\delta(2k-q) + \sum_j \frac{\Omega}{2\omega_k}\tilde{g}_{\mathbf{kj}}\tilde{\alpha}_j^{(n)}\left[\left(\omega_j+\frac{\Omega}{2}\right)\delta(q+j-k)+\left(\omega_j-\frac{\Omega}{2}\right)\delta(-q+j-k)\right] + \sum_j \frac{\Omega}{2\omega_k}\tilde{g}_{kj}\left(-\omega_j+\frac{\Omega}{2}\right)\tilde{\beta}_j^{(n)}\delta(q-j-k), \tag{4.28}$$

donde hemos calculado explícitamente los coeficientes de acoplamiento

$$\tilde{g}_{kj} = \begin{cases} \frac{2kj}{k^2-j^2} & k \neq j \\ 0 & k = j. \end{cases} \tag{4.29}$$

Este conjunto de ecuaciones es muy similar a las Ecs. (4.25) y (4.26), con dos diferencias. La primera de ellas es que las Ecs. (4.27) y (4.28) tienen un término extra proporcional a $\delta(2k-q)$ que no está presente en las Ecs. (4.27) y (4.28)) [95]. Este término, como vimos, crea pares de fotones en el modo k y solo es relevante cuando $q = 2k$. La segunda diferencia es que $\tilde{g}_{kj} \neq g_{kj}$. Sin embargo, es fácil ver que $2\tilde{g}_{kj} = g_{kj}$ si $k+j$ es impar, y este factor 2 no genera una diferencia cualitativa en la dinámica puesto que puede ser reabsorbido en la amplitud de oscilación. Por lo tanto, si excitamos a la cavidad con una pared oscilando a frecuencia q, conseguimos que el primer término en el lado derecho de las Ecs.(4.27) y (4.28) se anule. Además todos los otros también desaparecen, a excepción del caso en que $k+j$ es impar (debido a las δ). Esto prueba que cuando q es impar las Ecs. (4.25), (4.26) son equivalentes a las Ecs. (4.27), (4.28). En consecuencia, una cavidad que es agitada de forma rígida con una frecuencia impar se comporta de manera idéntica a otra donde solo se mueve una pared con la misma frecuencia y el doble de amplitud. Este resultado es muy importante y, si bien se había notado una relación previamente [91], no se había afirmado de esta forma tan clara en la literatura. Afortunadamente se conoce la solución analítica del sistema Ecs.(4.27), (4.28) y se tiene que en ese caso los operadores de salida vienen dados por [111]

$$a_m^{\text{out}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{m}{n}}\left[\rho_m^{(n)}a_m^{\text{in}} - \rho_{-m}^{(n)*}a_m^{\text{in}\dagger}\right]. \tag{4.30}$$

donde

$$\rho_{j+mq}^{(j+nq)} = \frac{\Gamma(1+n+j/q)(\sigma\kappa)^{n-m}}{\Gamma(1+m+j/q)\Gamma(1+n-m)} F(n+j/q, -m-j/q; 1+n-m; \kappa^2) \tag{4.31}$$

para $j = 0, 1, ..., q$, $n = 1, 2, 3, ...$ $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ y

$$\rho_{j+mq}^{(k+nq)} = 0 \tag{4.32}$$

si $j \neq k$, donde

$$\sigma = (-1)^q \tag{4.33}$$

$$\kappa = \tanh(q\tilde{\tau}). \tag{4.34}$$

Como hemos expuesto más arriba, esta también es la solución de la cavidad agitada rígidamente tomando $\tilde{\tau} = 2\tau = \epsilon\omega_1 t$, es decir duplicando el valor de la amplitud ϵ.

Similarmente a lo que hemos discutido en el caso tridimensional, hay dos regímenes cualitativamente distintos dependiendo de la frecuencia de agitación. Por un lado si $\Omega = \omega_1 = \omega_{j+1} - \omega_j$ entonces no se generan, de forma neta, nuevos fotones. Sin embargo, dado un número inicial estos pueden "saltar" entre modos adyacentes. Así, para tiempos largo, el número de fotones en cualquier modo tiende a cero a medida que migran a modos de frecuencia cada vez más alta. Por otro lado, si $\Omega = q\omega_1$ con q un número impar mayor a 1, se crean pares de fotones del vacío en cualquier par de modos j y k tal que $\Omega = \omega_j + \omega_k$.

4.2. Medición del entrelazamiento

Después de presentar la solución del campo en función de una transformación de Bogoliuvob para el problema de interés, resulta necesario repasar cómo medir el entrelazamiento entre modos y su cálculo a partir de esta solución.

Para ello debemos revisar las propiedades de los estados gaussianos. Estos estados son relevantes desde un punto de vista práctico puesto que incluyen a los estados

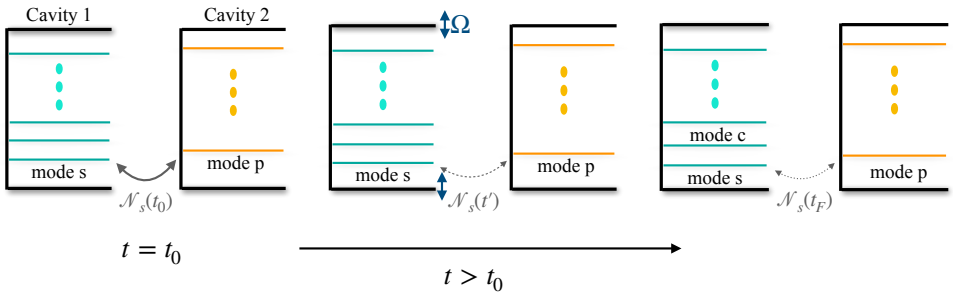


Figura 4.1: La dos cavidades están inicialmente estáticas y los modos s y p, un de cada una, están entrelazados (línea gris gruesa). A medida que comenzamos a agitar a la cavidad 1 con frecuencia Ω, el entrelazamiento entre estos modos se debilita (línea gris de trazos). Finalmente, la agitación cesa pero el entrelazamiento (medido por la negatividad $\mathcal{N}_s$), es mucho más débil que el inicial $\mathcal{N}_s(t_F) < \mathcal{N}_f(\sqcup_\prime)$ (línea punteada).

coherentes (como los producidos por un láser), los "squeezed" y los térmicos, pero son además muy relevantes desde un punto de vista teórico dado que las operaciones gaussianas, como la evolución temporal debida a un hamiltoniano cuadrático o una transformación de Bogoliuvob, transforman un estado gaussiano en otro estado gaussiano. Más aún, si un sistema se encuentra en un estado que es globalmente gaussiano, cualquier subsistema tiene un estado que es también gaussiano [112].

Veamos entonces cómo se caracterizan. Dado un conjunto de osciladores armónicos, podemos tomar una base de operadores de cuadratura $R = (q_1, p_1, ..., q_n, p_n)$ donde

$$q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_j + a_j^\dagger) \tag{4.35}$$

$$p_j = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a_j - a_j^\dagger) \tag{4.36}$$

y caracterizar completamente a un estado gaussiano ρ por su vector de desplazamiento

$$d_j = \langle R_j \rangle_\rho \tag{4.37}$$

donde notamos $\langle A \rangle_\rho = \mathrm{Tr}(A\rho)$ y su matriz de covarianza

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\langle R_i R_j + R_j R_i \rangle_\rho - \langle R_i \rangle_\rho \langle R_j \rangle_\rho. \tag{4.38}$$

Así, el estado del subsistema formado por los índices $i_1, i_2, ..., i_M$, puede ser calculado sencillamente restringiendo el vector desplazamiento y la matriz de covarianza a esos índices.

Para este tipo de estados es posible cuantificar el entrelazamiento de un estado mixto [113] usando la negatividad logarítmica [114–117], que es un monótono de entrelazamiento dada por

$$\mathcal{N}(\rho) = \log_2 ||\rho^{\Gamma_A}||_1, \tag{4.39}$$

donde $||\rho^{\Gamma_A}||_1 = \mathrm{Tr}\sqrt{\rho^{\Gamma_A}\rho^{\Gamma_A\dagger}}$ es la norma traza de la traspuesta parcial de ρ con respecto al subsistema A.

Aquí queremos calcular el entrelazamiento entre dos modos en estados gaussianos. En tal caso, la matriz de covarianza es de la forma

$$V_{A|B} = \begin{vmatrix} V_A & V_C \\ V_C^T & V_B \end{vmatrix} \tag{4.40}$$

y la negatividad logarítmica puede ser calculada como [118]

$$\mathcal{N} = \text{máx}\{0, -\log 2\nu_-\} \tag{4.41}$$

donde definimos

$$\nu_- = \sqrt{\frac{\Sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma^2 - 4\det V_{A|B}}} \tag{4.42}$$

$$\Sigma = \det V_A + \det V_B - 2\det V_C. \tag{4.43}$$

Para determinar si todavía hay información compartida entre los subsistemas cuando el entrelazamiento se anula, usaremos la información mutua [119, 120]

$$I(\rho_{A|B}) = S_V(\rho_A) + S_V(\rho_B) - S_V(\rho_{A|B}), \tag{4.44}$$

que mide la correlación total (cuántica y clásica), con S_V siendo la entropía de Von

Neumann. En el caso de un estado gaussiano, se puede calcular fácilmente como [118]

$$\begin{aligned} I(V_{A|B}) &= f(\sqrt{\det 2V_A}) + f(\sqrt{\det 2V_B}) \\ &- f(\eta^-_{A|B}) - f(\eta^+_{A|B}) \end{aligned} \tag{4.45}$$

donde definimos la función

$$f(x) = \frac{x+1}{2}\log\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{x-1}{2}\log\left(\frac{x-1}{2}\right) \tag{4.46}$$

siendo $\eta^-_{A|B}, \eta^+_{A|B}$ los autovalores simplécticos de la matriz $2V_{A|B}$.

4.3. Degradación del entrelazamiento

En esta sección, estudiaremos cómo se modifica el entrelazamiento entre modos en dos cavidades cuando una de ellas es agitada.

Para ello consideraremos que ambas cavidades están inicialmente en un estado entrelazado dado por un estado "two-mode squeezed" entre los modos **s** en la cavidad 1 y **p** en la cavidad 2. Esta elección se debe a que es el estado gaussiano más sencillo que posee entrelazamiento entre ambas cavidades, lo que nos permitirá aprovechar que el movimiento genera una transformación de Bogoliuvob la cual preserva los estados gaussianos.

Seguidamente, a tiempo $t = t_0$, agitamos armónicamente la cavidad 1 de manera rígida (como vimos en la sección 4.1) y estudiamos cómo evoluciona el entrelazamiento entre ambas con el tiempo. Podemos pensar en este sistema en el contexto de RQI como imitando dos observadores en movimiento relativo, uno de ellos estático y el otro yendo y viniendo armónicamente, y que solo pueden acceder a un modo (**p** y **s** respectivamente).

El estado inicial del sistema puede ser escrito en términos de operadores de

creación y aniquilación como

$$a_{\mathbf{s}}^{\text{in}} = \cosh(r)a_{\mathbf{s}} + \sinh(r)a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$$
$$a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} = \cosh(r)a_{\mathbf{p}} + \sinh(r)a_{\mathbf{s}}^{\dagger} \tag{4.47}$$

donde $a_{\mathbf{s}}$ y $a_{\mathbf{s}}^{\dagger}$ son los operadores de aniquilación modos descorrelacionados que satisfacen $\langle a_{\mathbf{j}}^{\dagger} a_{\mathbf{j}} \rangle = 0$ y $\langle a_{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}} \rangle = 0$, para $\mathbf{j} = \mathbf{s}, \mathbf{p}$. Como se ha mencionado previamente, hay dos comportamientos cualitativamente diferentes para la evolución del campo en una cavidad agitada dependiendo de si el espectro es aproximadamente equidistante o no. Por lo tanto analizaremos todos los casos por separado.

4.3.1. Cavidad 3D y espectro no-equidistante: Dos modos acoplados

En el caso en que la cavidad que se agita es tridimensional, el espectro no resulta equiespaciado y en consecuencia el modo excitado **s** se verá acoplado a lo sumo a un modo más, que llamaremos **c**. Como se explicó en la Sec. 4.1, el estado del campo alterado resultará cualitativamente distinto cuando la frecuencia de agitación es $\Omega = \omega_{\mathbf{s}} + \omega_{\mathbf{c}}$ o $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{c}}|$.

En primera instancia, comenzamos analizando el sistema cuando la cavidad 1 es agitada con un frecuencia $\Omega = \omega_{\mathbf{s}} + \omega_{\mathbf{c}}$. Además asumimos que estos dos modos no se acoplan a ningún otro de la cavidad. Al agitar a la cavidad 1 con esta frecuencia se generan pares de fotones en los modos **c** y **s** y de acuerdo a la sección anterior los nuevos operadores $a_{\mathbf{s}}^{\text{out}}$ y $a_{\mathbf{c}}^{\text{out}}$ vienen dados por las Ecs.(4.17), (4.18). Teniendo en cuenta que la relación entre operadores y cuadraturas viene dada por (4.35-4.36) podemos calcular la matriz de covarianza $V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}}$ del estado final, que en la base $(q_{\mathbf{p}}, p_{\mathbf{p}}, q_{\mathbf{s}}, p_{\mathbf{s}})$, viene dada por

$$V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh(2r)}{2} & 0 & \frac{\cosh(\gamma\tau)\sinh(2r)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\cosh(2r)}{2} & 0 & -\frac{\cosh(\gamma\tau)\sinh(2r)}{2} \\ \frac{\cosh(\gamma\tau)\sinh(2r)}{2} & 0 & \frac{\cosh^2(r)\cosh(2\gamma\tau)+\sinh^2(r)}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\cosh(\gamma\tau)\sinh(2r)}{2} & 0 & \frac{\cosh^2(r)\cosh(2\gamma\tau)+\sinh^2(r)}{2} \end{bmatrix}.$$

Más aún, podemos calcular las propiedades de este estado para tiempos largos. Por ejemplo, se puede ver que la negatividad logarítmica ($\mathcal{N} = -\log 2\nu_-$) se anula para tiempos largos

$$\mathcal{N} = -\log 2 \sqrt{\frac{\det V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}}}{\Sigma} \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\Sigma}\frac{\det(V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}})}{\Sigma}}}} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0, \tag{4.48}$$

donde usamos que $\frac{\det V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}}}{\Sigma} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \frac{1}{4}$ a pesar de que $\Sigma \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \infty$.

También podemos estudiar la información mutua entre las cavidades calculando los autovalores simplécticos de $2V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}}$. Estos vienen dados por

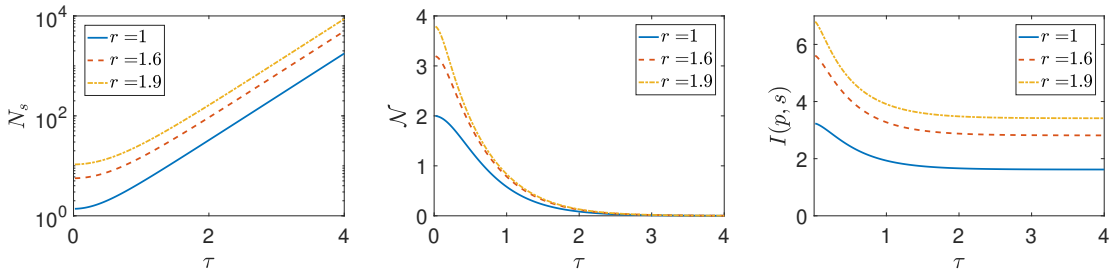
$$\begin{aligned} \eta_- &= 1, \\ \eta_+ &= |\cosh(r)^2 \cosh(2\gamma\tau) - \sinh(r)^2| \end{aligned} \tag{4.49}$$

y entonces la información mutua para tiempos largos es

$$\begin{aligned} I &= f(\cosh(r)^2 \cosh(2\gamma\tau) + \sinh(r)^2) + f(\cosh(2r)) \\ &\quad - f(|\cosh(r)^2 \cosh(2\gamma\tau) - \sinh(r)^2|) \\ &\xrightarrow[\tau\to\infty]{} f(\cosh(2r)). \end{aligned} \tag{4.50}$$

En la Fig. 4.2 compilamos todas las propiedades calculadas para este caso. En el panel (a) mostramos el número de partículas en el modo **s**, que como se puede ver refleja la creación exponencial de pares de partículas en los modos **s** y **c** como esperábamos. En el panel (b) se observa la evolución temporal del entrelazamiento medida por la negatividad logarítmica, la cual se ve evidentemente degradada a medida que el tiempo avanza, tendiendo a cero para tiempos largos y destruyendo el entrelazamiento inicial entre las cavidades. En el panel (c) graficamos la información mutua y evidencia que las correlaciones clásicas entre los modos persisten a todo tiempo. Concluimos entonces que si bien para tiempos largos la información cuántica se pierde aún existe información clásica contenida en las correlaciones entre ambas cavidades.

A continuación analizaremos el otro caso en que la cavidad 1 es agitada con una



(a) (b) (c)

Figura 4.2: Cavidad tridimensional y espectro no-equidistante con frecuencia de agitación $\Omega = \omega_{\mathbf{s}} + \omega_{\mathbf{c}}$. (a) Se observa la creación exponencial de pares de partículas, como función del tiempo, en el modo $\mathbf{s}$ para diferentes valores del parámetro de squeezing r. (b) Degradación del entrelazamiento medida por la negatividad logarítmica a medida que pasa el tiempo, anulándose para tiempos largos. (c) Información mutua como función del tiempo. A pesar de que las correlaciones cuántica tienden a desaparecer, las correlaciones clásicas entre los modos persisten en el límite de tiempos largos.

frecuencia $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{c}}|$.

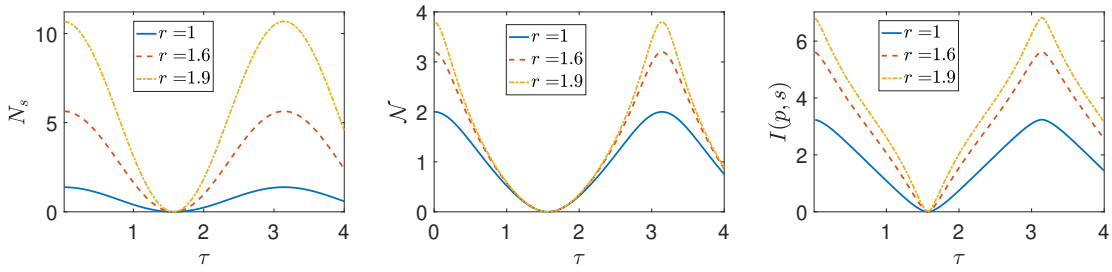
Como mencionamos antes, esta frecuencia no genera nuevos fotones sino que solo redistribuye los iniciales entre los modos. En este caso, los operadores de salida vienen dados por las Ecs. (4.22), (4.23), luego la matriz de covarianza se puede escribir como

$$V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh(2r)}{2} & 0 & \frac{\cos(\gamma^+\tau)\sinh(2r)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\cosh(2r)}{2} & 0 & -\frac{\cos(\gamma^+\tau)\sinh(2r)}{2} \\ \frac{\cos(\gamma^+\tau)\sinh(2r)}{2} & 0 & \frac{\cos^2(\gamma\tau)\cosh(2r)+\sin^2(\gamma^+\tau)}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\cos(\gamma^+\tau)\sinh(2r)}{2} & 0 & \frac{\cos^2(\gamma^+\tau)\cosh(2r)+\sin^2(\gamma^+\tau)}{2} \end{bmatrix}.$$

Las componentes de esta matriz oscilan armónicamente con el tiempo y para $\tau_n := \frac{\pi(2n+1)}{2}/\gamma^+$ obtenemos una matriz de covarianza diagonal

$$V_{\mathbf{p}|\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\cosh(2r), \cosh(2r), 1, 1) \tag{4.51}$$

lo que significa que la negatividad logarítmica, el número de fotones en el modo $\mathbf{s}$ y la información mutua entre $\mathbf{s}$ y $\mathbf{p}$, todas se anulan. Al contrario, para $\tau_m = \frac{m\pi}{\gamma}/\gamma^+$ esta magnitudes oscilan de regreso a sus valores iniciales máximos, como se puede ver en la Fig.4.3. En el panel (a) se muestra el número de partículas en el modo $\mathbf{s}$. Como se puede inferir, no hay creación de nuevas excitaciones, sino una oscilación



(a) (b) (c)

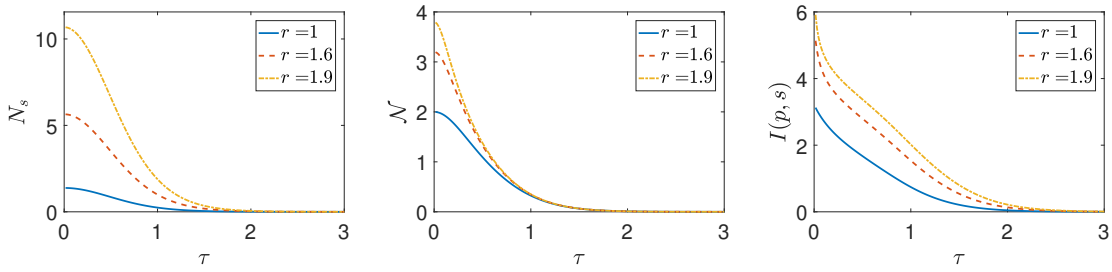
Figura 4.3: Cavidad tridimensional y un espectro no-equidistante con una frecuencia de agitación $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{c}}|$. (a) El sistema evoluciona de forma periódica con los fotones, originalmente en el modo **s**, yendo y viniendo entre los modos **s** y **c**. Esto a su vez lleva a un comportamiento oscilatorio en el entrelazamiento (b) y la información mutua (c). En ambos casos vemos una oscilación entre un máximo donde los fotones están en **s** y cero, cuando están en**c**.

que redistribuye las ya existentes en la cavidad. Los fotones son transferidos del modo **s** al **c**, hasta que no quedan más fotones en **s** a tiempo τ_m. En los paneles (b) y (c) vemos que al irse los fotones de este modo el entrelazamiento y la información mutua entre **s** en la primera cavidad y el modo **p** en la segunda también se pierde.

4.3.2. Caso 1D y espectro equidistante: Infinitos modos acoplados

Si la cavidad es unidimensional entonces el espectro resulta equidistante. Esto implica que se acoplan infinitos modos a medida que la cavidad es agitada (ver Sec.4.1). En esta situación los operadores de salida son descritos por una transformación de Booliuvob más general dada por la Ec.(2.8). De manera similar al caso de las cavidades tridimensionales, podemos ver que hay dos casos distintos para considerar dependiendo de que la frecuencia de agitación de la cavidad 1 sea $\Omega = \omega_1$ o $\Omega = q\omega_1$.

En primer lugar, vamos a comenzar estudiando el caso en que $\Omega = \omega_1$ y no hay generación de partículas en la cavidad 1. Usando la Ec. (2.8), podemos calcular la



(a) (b) (c)

Figura 4.4: Cavidad unidimensional con un espectro equiespaciado agitada con frecuencia $\Omega = \omega_1$. No se observa creación de partícuas para esta frecuencia. (a) El número de partículas disminuye a medida que los fotones iniciales en el modo $s = 1$ se pierden hacia modos de alta frecuencia para diferentes valores del parámetro de squeezing r. (b) Esta pérdida de fotones ocasiona que el entrelazamiento y (c)la información mutua disminuyan para tiempos largos.

matriz de covarianza para este caso como

$$V_{s|p} = \begin{bmatrix} \frac{|\alpha_{ss}|^2\cosh(2r)+\sum_{j\neq s}|\alpha_{sj}|^2}{2} & 0 & \frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{|\alpha_{ss}|^2\cosh(2r)+\sum_{j\neq s}|\alpha_{sj}|^2}{2} & 0 & -\frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} \\ \frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} & 0 & \frac{\cosh(2r)}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} & 0 & \frac{\cosh(2r)}{2} \end{bmatrix},$$

donde ya hemos usado que $\beta_{sj} = 0$ y que $\alpha_{sj}(\tau)$ es una función real dada por la Ec. (4.31). Para entender el comportamiento asintótico de este estado, podemos usar que los coeficientes de Bogoliuvob satisfacen la relación

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{sj}|^2 - |\beta_{sj}|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{sj}|^2 \tag{4.52}$$

para reducir el problema en términos de un único coeficiente de Bogoliuvob

$$\begin{aligned}(V_{s|p})_{11} = (V_{s|p})_{22} &= \frac{1}{2}\left(|\alpha_{ss}|^2\cosh(2r) + \sum_{j\neq s}^{\infty}|\alpha_{sj}|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\alpha_{ss}|^2(\cosh(2r)-1)+1\right).\end{aligned} \tag{4.53}$$

De hecho, la expresión explícita de este coeficiente $|\alpha_{ss}|$ ya se sabe que viene dada

por [121]

$$\alpha_{ss}(\tau) = \sum_{j=1}^{s} \left[(s-1)!(s+j-1)!(-1)^{s-j}\right] \left[(s-1)!j!(s-j)!\right]^{-1} (\cosh\tau)^{-2j} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0.$$

Usando todo esto, se puede ver que la matriz de covarianza converge a

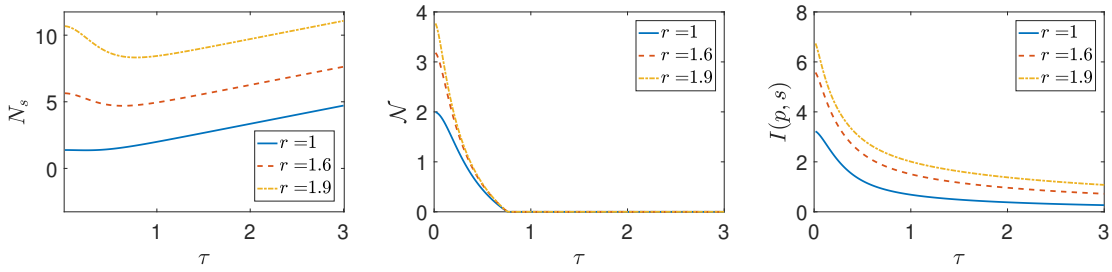
$$V_{s|p} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \frac{1}{2}\mathrm{diag}(1, 1, \cosh(2r), \cosh(2r)). \tag{4.54}$$

Esto significa que no solo el entrelazamiento sino que también la información mutua se anulan en el límite de tiempos largos. En la Fig. 4.4 compilamos los resultados obtenidos para una cavidad unidimensional cuando es agitada con $\Omega = \omega_1$. En el panel (a) mostramos el proceso de redistribución de partículas para diferentes valores del parámetro de squeezing inicial r. Cuanto más chico es el valor inicial de r, más pronto las partículas son distribuidas a otros modos. En el panel (b) se observa que la evolución del entrelazamiento se comporta de acuerdo al número de partículas N_s: el entrelazamiento se pierde rápidamente a medida que pasa el tiempo y decrece asintóticamente a cero. En el panel (c), se ve que la información mutua exhibe un comportamiento similar en acuerdo con el resto de las magnitudes consideradas.

Es importante notar que la degradación del entrelazamiento en una cavidad unidimensional es cualitativamente diferente de lo que ocurre en una cavidad tridimensional. En el primer caso, la pérdida de entrelazamiento se debe a que los muchos modos que se acoplan con el inicial y absorben los fotones al agitar la cavidad. Esto se puede puede pensar como un gran entorno hacia el cual se pierde la información. En contraste con el caso tridimensional donde, al haber un único modo al que se puede acoplar el inicial, el entrelazamiento no se pierde asintóticamente sino que oscila siguiendo las partículas.

Finalmente, consideramos que la cavidad 1 es agitada con una frecuencia $\Omega = q\omega_1$. Esto excita una resonancia paramétrica que crea pares de fotones los cuales, luego, son redistribuidos hacia modos de frecuencias más altas.

En este caso, los operadores de salida están dados por la Ec. (4.30), a partir de



(a) (b) (c)

Figura 4.5: Cavidad unidimensional y espectro equidistante agitada con frecuencia $\Omega = q\omega_1$. (a) El número de fotones inicialmente decrece dado que ocurre una redistribución entre los modos acoplados. Como este caso implica generación de partículas, eventualmente el número de partículas comienza a crecer linealmente a medida que se producen pares de fotones en los modos s and c. (b) El entrelazamiento evidencia una muerte súbita mientras que (c) el comportamiento de la información mutua implica que permanecen correlaciones clásicas en el sistema las cuales tienden a cero para tiempos largos. Para el gráfico se consideró $q = 3$.

los cuales podemos calcular la matriz de covarianza

$$V_{s|p} = \begin{bmatrix} \frac{|\alpha_{ss}|^2\cosh(2r)+\sum_{j\neq s}|\alpha_{sj}+\beta_{sj}|^2}{2} & 0 & \frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{|\alpha_{ss}|^2\cosh(2r)+\sum_{j\neq s}|\alpha_{sj}-\beta_{sj}|^2}{2} & 0 & -\frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} \\ \frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} & 0 & \frac{\cosh(2r)}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sinh(2r)\alpha_{ss}}{2} & 0 & \frac{\cosh(2r)}{2} \end{bmatrix}.$$

Podemos simplificar esta expresión notando que $V_{11} = V_{22}$. Esto es porque $\beta_{1,k+np} = -\sqrt{1/(k+np)}\rho_{-1}^{(k+np)} = 0$ para $k \neq p-1$ mientras que $\alpha_{1,k+np} = \sqrt{1/(k+np)}\rho_1^{(k+np)} = 0$ para $k \neq 1$ y entonces $\alpha_{1,k+np}\beta^*_{1,k+np} = 0$, de lo que podemos concluir que $|\alpha_{1,k+np} \pm \beta_{1,k+np}|^2 = |\alpha_{1,k+np}|^2 + |\beta_{1,k+np}|^2$. Escribiendo explícitamente los elementos de la matriz usando la Ec.(4.38), podemos ver que

$$V_{11} + V_{22} = 1 + 2N_s, \tag{4.55}$$

donde $N_s = \langle a_s^{\text{out}\dagger} a_s^{\text{out}} \rangle$ es el número de fotones creados en el modo s y entonces $V_{11} = N_s + 1/2$. La matriz de covarianza se reduce entonces a solo 3 componentes independientes V_{11}, V_{33}, V_{24}.

De esta forma procedemos a estudiar el comportamiento del estado para tiempos

largos. Primero debemos notar que

$$\lim_{t\to\infty} V_{13} = -\lim_{t\to\infty} V_{24} < \infty, \tag{4.56}$$

dado que $V_{13}, V_{24} \propto F(a,b,c;\kappa^2)$ y para $t \to \infty$ tenemos $\kappa \to 1$ y $F(a,b,c;\kappa^2) \to F(a,b,c;1) < \infty$.

En este punto, es importante mencionar que en la Ref. [111] los autores han probado que cuando una cavidad con una pared oscilante es agitada con esta frecuencia, el número de fotones generados a partir del vacío $N_s(r=0)$ crece linealmente con el tiempo [1]. Luego, usando la equivalencia entre esta configuración y la de una cavidad agitada rígidamente, podemos ver que

$$V_{11} = \frac{1}{2}|\alpha_{ss}|^2(\cosh(2r)-1) + \frac{1}{2} + N_s(r=0) \propto t. \tag{4.57}$$

Las simplificaciones previas nos permiten escribir las expresiones explícitas

$$\begin{aligned} \det V &= V_{13}^2 V_{24}^2 - V_{11}V_{13}^2 V_{33} - V_{11}V_{24}^2 V_{33} + V_{11}^2 V_{33}^2 \\ \Sigma &= V_{11}^2 - 2V_{13}V_{24} + V_{33}^2, \end{aligned} \tag{4.58}$$

que al combinarla con la Ec. (4.56) resulta en que a tiempos largos

$$\frac{\det V}{\Sigma} \xrightarrow[t\to\infty]{} V_{33}^2 = (\frac{1}{2}\cosh(2r))^2. \tag{4.59}$$

Este resultado implica directamente que

$$-\log 2\nu_- = -\log 2\sqrt{\frac{\det V}{\Sigma}\frac{1}{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{\Sigma}\frac{\det(V)}{\Sigma}}}} \tag{4.60}$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} -\log(\cosh(2r)) < 0, \tag{4.61}$$

lo que lleva a un resultado sorprendente: la negatividad logarítmica $\mathcal{N}$ (Ec. (4.41))

[1] Una excepción para este comportamiento ocurre cuando la frecuencia del modo excitado inicialmente s coincide con la frecuencia de agitación $\omega_s = q\omega_1$. En este caso las soluciones se comportan como para $\Omega = \omega_1$, que ya hemos analizado.

manifiesta una "muerte súbita", es decir, se anula exactamente a partir de un tiempo finito. Mientras que para analizar el comportamiento de la información mutua podemos usar que los autovalores simplécticos vienen dados por

$$\eta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_{11}^2 + V_{33}^2 + 2V_{13}V_{24} \\ \pm \sqrt{V_{11}^4 + V_{33}^4 + 4V_{33}^2V_{13}V_{24} - 2V_{11}^2(V_{33}^2 - 2V_{13}V_{24}) + 4V_{11}V_{33}(V_{13}^2V_{24}^2)}\Big)^{1/2}. \quad (4.62)$$

Usando las Ecs. (4.56) y (4.57), tenemos

$$\eta_+ \approx V_{11}, \quad \text{for } \tau \gg 1 \\ \eta_- \approx V_{33}, \quad \text{for } \tau \gg 1 \quad (4.63)$$

lo que nos permite concluir que la información mutua también se anula en el límite de tiempos largos

$$I = f(V_{11}) + f(V_{33}) - f(\eta_-) - f(\eta_+) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0. \quad (4.64)$$

En la Fig. 4.5 presentamos los resultados numéricos para $q = 3$. En el panel (a), calculamos la evolución numérica del número de fotones N_s, mientras que en (b) se muestra la degradación del entrelazamiento a medida que transcurre el tiempo. Es fácil notar que el entrelazamiento se comporta de manera cualitativamente distinta a los casos previos dado que se anula repentinamente para un tiempo finito. Esto se debe a la combinación de dos efectos diferentes: redistribución de fotones y generación de pares. En el panel (c), podemos notar que la información mutua, sin embargo, decrece lenta y asintóticamente a cero.

Este último caso es completamente diferente a los otros vistos anteriormente. Inicialmente, se puede ver que el número de excitaciones N_s disminuye porque son redistribuidos a modos más altos (siendo mucho más evidente para $r > 1$). Pero para un tiempo crítico el ritmo de creación de partículas comienza a ganar importancia haciendo que el número de fotones en el modo s empiece a aumentar. Sorprendentemente, este tiempo crítico es similar al tiempo en que el entrelazamiento se anula. Este comportamiento tan distintivo se asocia a la conjunción de los procesos de

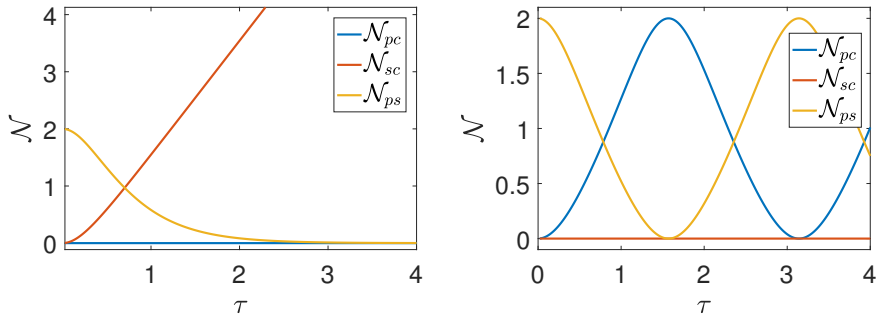


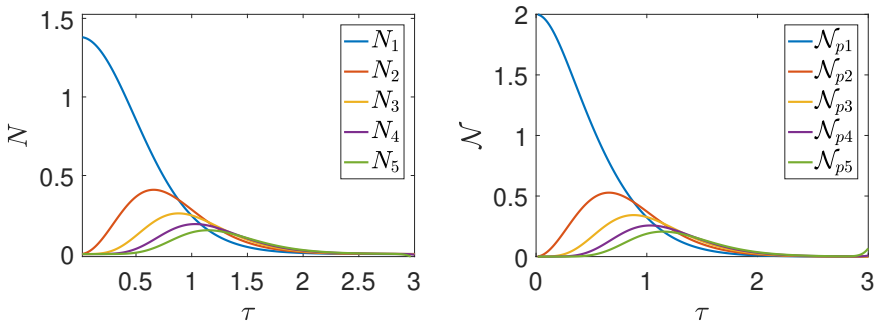
Figura 4.6: (a) Cavidad tridimensional con espectro no-equidistante y agitada con frecuencia $\Omega = \omega_{\mathbf{s}} + \omega_{\mathbf{c}}$ para un parámtro de squeezing inicial $r = 1$. El entrelazamiento $\mathcal{N}$ entre los pares de modos **p** y **c**, **s** y **c**, **p** y **s** medido por la negatividad logarítmica a medida que pasa el tiempo. La creación de pares de fotones entrelaza los modos **s** y **c** ($\mathcal{N}_{\mathbf{sc}}$), pero no los **p** y **c** ($\mathcal{N}_{\mathbf{pc}}$); en cambio degrada el entrelazamiento $\mathcal{N}_{\mathbf{ps}}$. (b) Cavidad tridimensional con un espectro no-equidistante y agitada con frecuencia $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{c}}|$. El sistema se comporta periódicamente con los fotones, originalmente en el modo **s**, yendo y viniendo entre **s** y **c**. Este comportamiento oscilatorio también se manifiesta en la dinámica del entrelazamiento $\mathcal{N}$ entre los modos de la primera cavidad y la segunda.

generación y resdistribución de partículas que no sucedía en los otros ejemplos.

4.4. Redistribución del entrelazamiento

En esta sección, vamos a estudiar a donde va el entrelazamiento inicial $\mathcal{N}_{\mathbf{ps}}$ (entre los modos **p** de la cavidad 2 y **s** de la 1) luego de haber alterado el estado del campo dentro de la cavidad por el efecto Casimir dinámico. Para ello vamos a ver qué sucede con el entrelazamiento ya no solamente entre los modos a los que tienen acceso los observadores sino entre todos los pares de modos. Como antes discutiremos por separado los casos en que la cavidad es unidimensional o tridimensional y en que hay o no resonancia paramétrica dado que su comportamiento es cualitativamente distinto.

Para la cavidad tridimensional, ya hemos mencionado que solo dos modos se acoplan al agitarla. La excitación externa se puede considerar que es de la forma $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} \pm \omega_{\mathbf{c}}|$ y dependiendo del signo se tiene un comportamiento bien diferente con respecto a la generación de partículas y degradación del entrelazamiento. En el



(a) (b)

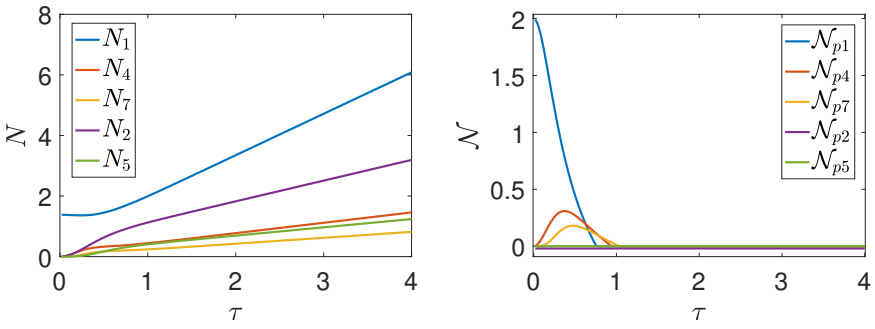
Figura 4.7: Cavidad unidimensional con un espectro equidistante agitada con una frecuencia $\Omega = \omega_1$, asumiendo $s = 1$ y $r = 1$. (a) Bajo estas condiciones no se producen partículas sino que, en cambio, las partículas iniciales en el modo 1 son redistribuidas hacer modos de frecuencias más altas. Esto lleva a un flujo de entrelazamiento hacia esos modos en detrimento del entrelazamiento inicial entre los modos de la cavidad móvil y la estática.

caso en que $\Omega = \omega_{\mathbf{s}} + \omega_{\mathbf{c}}$ hemos mostrado que hay producción de pares de partículas entrelazadas en estos modos y que aumentan exponencialmente con el tiempo. De esta forma, las partículas generadas en el modo **c** nunca están entrelazadas con el modo **p** de la otra cavidad pero a medida que transcurre el tiempo incrementan su entrelazamiento con el modo **s** lo que genera que se degrade el entrelazamiento entre **p** y **s** (ver Fig. 4.6(a)).

Por otro lado, si $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{c}}|$, hemos mostrado que no hay generación de fotones dentro de la cavidad 1. Esto significa que a medida que se sacude la cavidad, el número de partículas inicialmente en el modo **s** son redistribuidas al modo **c** y luego de vuelta a **s**, exhibiendo un comportamiento oscilatorio. La dinámica del entrelazamiento es similar, con la información siendo transferida entre los dos modos. Así el entrelazamiento inicial entre las cavidades $\mathcal{N}_{\mathbf{ps}}$ decrece a medida que el de los modos de la cavidad 1 $\mathcal{N}_{\mathbf{sc}}$ aumenta, mostrando ambos un comportamiento oscilatorio en contra fase (Fig. 4.6(b)).

Es importante remarcar que en los dos casos considerados para la cavidad tridimensional, la dinámica del entrelazamiento se da entre solo dos modos, debido a la distribución no-equidistante del espectro.

En el caso de una cavidad unidimensional, al tener un espectro equidistante, infinitos modos se ven acoplados por el movimiento. Esto implica una dinámica



(a) (b)

Figura 4.8: Cavidad unidimensional con espectro equidistante agitada con una frecuencia $\Omega = q\omega_1$. En este caso hemos asumido $q = 3$, $s = 1$ and $r = 1$. (a) El número de fotones en el modo 1 inicialmente disminuye a medida que ocurre una redistribución hacia los modos de mayor energía 4, 7, 10, ...$3n + 1$. Como este caso también implica producción de partículas, eventualmente el número de partículas producidas en los modos 1 y 2 empieza a crecer linealmente. (b) Los fotones producidos en los modos 2, 5, 8, ... $3n-1$ están entrelazados con los modos 1, 4, 7, ...$3n+1$ pero no con el modo de la cavidad estática, análogamente al caso de la cavidad tridimensional Fig. 4.6(a). Sin embargo, el entrelazamiento que había originalmente entre 1 y p es redistribuido hacia modos de frecuencia más alta de la forma $3n + 1$ y presenta una muerte súbita a tiempo finito.

mucho más compleja, en la cual se da la transferencia de fotones y entrelazamiento hacia modos de mayor frecuencia. Cuando la frecuencia es $\Omega = \omega_1$, no hay generación de partículas en la cavidad. En la Fig. 4.7(a), se observa el número de fotones en los diferentes modos de la cavidad. Podemos notar que a medida que transcurre el tiempo disminuye el número de partículas en el primer modo y aumentan en los adyacentes de mayor frecuencia. En el panel (b), notamos que este incremento conlleva una transferencia de entrelazamiento a otros pares de modos de la cavidad, incrementando $\mathcal{N}_{p2}$, $\mathcal{N}_{p3}$, etc. Cuanto más alta es la frecuencia del modo, menos entrelazamiento adquiere puesto que se encuentra más esparcido y en el límite de tiempos muy largos la degradación del entrelazamiento es completa.

Finalmente, debemos mencionar el caso en que la frecuencia de agitación es $\Omega = q\omega_1$. Bajo esta condición, tenemos generación de fotones entre pares de modos cuya frecuencia suma Ω, como se puede ver en la Fig. 4.8(a). Sin embargo, no es la única consecuencia que debemos considerar. Como el espectro es equiespaciado tenemos infinitos modos acoplados. Por lo tanto, hemos mostrado que se tiene tanto

redistribución como creación de partículas dentro de la cavidad móvil. Esto produce un dinámica para entrelazamiento fundamentalmente diferente a los casos previos. El entrelazamiento inicial entre los modos s y p se redistribuye hacia modos de frecuencia más alta de la forma $\text{mód}_q(s)+q\,n$ (con n un número natural y $\text{mód}_q(s)$ el resto de s cuando es dividido por q) pero eventualmente tenemos una muerte súbita. A pesar de esto, los pares producidos entre $\text{mód}_q(s)$ y $q-\text{mód}_q(s)$ no se entrelazan con p y entonces ninguno de los modos de frecuencia mayor acoplados con estos (de la forma $q-\text{mód}_q(s)+q\,n$) se entrelazan con p (ver Fig. 4.8(b) para un ejemplo).

La pérdida de entrelazamiento es precisamente explicada como una consecuencia de la redistribución del entrelazamiento inicial y la generación de entrelazamiento de correlaciones cuánticas multipartitas entre modos accesibles e inaccesibles dentro de la cavidad.

4.5. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado cómo el entrelazamiento y las correlaciones clásicas iniciales entre dos modos en dos cavidades distintas se modifican cuando una de ellas es sometida a un movimiento oscilatorio. Para ello hemos analizados el proceso de creación de partículas debida al DCE en los casos en que el espectro es o no equiespaciado. Encontrando en este último caso una equivalencia con el caso, previamente analizado, de una pared móvil; lo que nos permitió dar una descripción analítica completa para una dinámica compleja.

Hemos encontrado que hay esencialmente cuatro comportamientos cualitativamente distintos para el sistema, dependiendo de si el espectro es o no equiespaciado y de cuál es la frecuencia de agitación Ω. La primera propiedad determina si se acoplan solo dos modos o más en la cavidad y la segunda si hay o no generación de partículas. Si el espectro es no-equiespaciado (como pasa en una cavidad tridimensional) y hay un modo adicional $\mathbf{c}$ tal que $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{c}}|$ entonces los fotones oscilan entre $\mathbf{s}$ y $\mathbf{c}$. Esto causa, a su vez, que el entrelazamiento entre las cavidades y la información mutua oscile con el tiempo. Sin embargo, si $\mathbf{c}$ tiene una frecuencia

tal que $\Omega = |\omega_{\mathbf{s}} + \omega_{\mathbf{c}}|$, entonces se crean pares de fotones entrelazados en estos modos, los cuales a su vez degradan el entrelazamiento entre las cavidades anulándolo asintóticamente. A pesar de esto, las correlaciones clásicas persisten para tiempos largos como evidencia la convergencia de la información mutua a un valor finito no nulo. Este resultado es análogo al encontrado en [26] y [28] donde el entrelazamiento entre dos observadores se degrada cuando uno de ellos acelera.

Nuestros resultados muestran que la situación se vuelve cualitativamente diferente cuando el espectro de la cavidad es equiespaciado, dado que esto ocasiona que se acoplen infinitos modos. En este caso, si la cavidad en movimiento es agitada con su frecuencia fundamental no se producen fotones. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo de agitación, los fotones en el modo inicialmente excitado se van perdiendo a otros de mayor frecuencia, lo que ocasiona que el entrelazamiento y la información mutua entre las cavidades se anule también. Por otro lado, si la cavidad oscila con una frecuencia que es un múltiplo impar de la fundamental, hay además una producción de excitaciones que fuerza a que el entrelazamiento tenga una muerte súbita, mientras que la información mutua converge lentamente a cero. Esta situación produce un resultado similar al encontrado en [34] donde el entrelazamiento entre dos osciladores armónicos se pierde por completo de forma repentina cuando se acelera a uno de ellos.

Esta configuración captura muchos de los efectos encontrados para observadores y cavidades en movimiento acelerado. En ambos casos tenemos transformaciones de Bogoliuvob que generan pares de fotones. Sin embargo, en la literatura previa la alteración del campo se debía al efecto Unruh. En este capítulo explotamos la estructura no trivial del vacío cuántico y los efectos derivados de las condiciones de contorno dependientes del tiempo. El resultado obtenido es una aparente degradación del entrelazamiento y pérdida de información para la mayoría de los casos considerados. Creemos que esta configuración tiene más cualidades experimentales prometedoras ya que solo requiere un movimiento acotado de un sistema optomecánico. Si bien hay todavía desafíos tecnológicos que deben ser superados para que sea probado experimentalmente para cavidades móviles, una simulación con cavidades superconductoras está al alcance de los experimentos donde el DCE ya ha sido observado.

CAPÍTULO 5

Maquinas térmicas cuánticas

Siguiendo [55], en este capítulo introduciremos los conceptos fundamentales de la termodinámica cuántica y los aplicaremos al estudio de una máquina térmica que consiste en un campo cuántico en una cavidad que es sujeto a un ciclo cuántico de Otto. El objetivo será comprender el impacto del efecto Casimir dinámico en la eficiencia y potencias entregadas por una máquina térmica cuántica, tanto en el régimen de operación como motor térmico como de refrigerador cuántico.

5.1. Ciclo de Otto en un cavidad

En términos generales, el ciclo cuántico de Otto involucra un sistema, o medio de trabajo, regido por un hamiltoniano H_0 al cual se le aplican cuatro operaciones básicas. En primer lugar, el sistema es puesto en contacto con un baño frío a temperatura inversa β_A; dejando al sistema en un estado térmico, con una energía interna E_A. En segundo lugar, el sistema es aislado del baño y sujeto a un hamiltoniano dependiente del tiempo; alcanzando un estado con energía interna E_B. En tercer lugar, el sistema es puesto en contacto con un baño caliente a temperatura inversa β_C; alcanzando una vez más un estado térmico pero esta vez con energía interna E_C.

Finalmente, el sistema es aislado una vez más del baño y sujeto a un hamiltoniano dependiente del tiempo que restaura el hamiltoniano original H_0, dejando al sistema en un estado con energía interna E_D.

Como consecuencia, en la tercera rama se provee a la máquina de un calor

$$Q = E_C - E_B$$

y se extrae trabajo entre las operaciones A y B dado por $W_{AB} = E_A - E_B$ y entre C y D $W_{CD} = E_C - E_D$. Esto suma un trabajo extraído neto de

$$W = W_{AB} + W_{CD}.$$

Si este trabajo es positivo, $W > 0$, decimos que la máquina actúa como un motor térmico, lo que significa que convierte calor de los baños térmicos en trabajo útil con una eficiencia dada por

$$\eta = \frac{W}{Q}.$$

Por otro lado, si el trabajo y el calor son negativos, $W, Q < 0$, se dice que la máquina actúa como un refrigerador, lo que significa que consume trabajo y lo usa para calentar un reservorio caliente y enfriar el frío.

En particular, vamos a estudiar la siguiente implementación de un ciclo Otto para un campo escalar cuántico en una cavidad optomecánica con una pared móvil (aunque también se puede implementar en arquitecturas de cQED). Como vimos en el capítulo 2 si la pared de la cavidad describe entre $t = 0$ y $t = \tau$ una trayectoria dada por

$$L(t) = L_0 + \delta L(t) = L_0[1 - \epsilon\delta(t)] \tag{5.1}$$

con $0 = \delta(0) < \delta(t) < \delta(\tau) = 1$ and $0 < \epsilon \ll 1$, entonces el hamiltoniano del campo cuántico se puede escribir como

$$H(t) = H_0 + H_1(t) \tag{5.2}$$

donde el hamiltoniano H_0 se puede descomponer como

$$H_0 = H_{\text{free}} + E_{\text{SC}}(L) \tag{5.3}$$

siendo $H_{\text{free}} = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k N_k$ el término de la evolución libre de los modos con operador número de fotones $N_k = a_k^\dagger a_k$ en el modo de frecuencia $\omega_k = \omega_k(L_0)$, mientras que $E_{\text{SC}}(L_0) = -\pi\hbar/(24L_0)$ es la energía correspondiente al efecto Casimir estático. Por otro lado, la parte dinámica de la evolución de la pared viene dada por la Ec. (2.43)

$$\begin{aligned} H_1(t) = \hbar \sum_{k=1}^{\infty} \left[\omega_k' \delta L(t) a_k^\dagger a_k + \frac{\omega_k'}{2} \delta L(t) \left(a_k^{\dagger 2} + a_k^2 \right) \right] \\ + \frac{\hbar}{2i} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{\dot{\delta L}(t)}{L_0} g_{kj} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_j}} \left(a_k a_j - a_k^\dagger a_j + a_k a_j^\dagger - a_k^\dagger a_j^\dagger \right), \end{aligned} \tag{5.4}$$

expresión que es válida a primer orden en ϵ y donde las constantes de acoplamiento g_{kj} vienen dadas por

$$g_{kj} = -g_{jk} = L \int_0^L dx \, (\partial_L \psi_k) \, \psi_j, \tag{5.5}$$

que son esencialmente las mismas constantes M_{kj} del Capítulo 2 adimensionalizadas por la longitud.

Así, el ciclo está representado en la Fig. 5.1 y puede ser descrito como:

A. Primero, el sistema es puesto en contacto con el baño frío a temperatura inversa β_A. Asumimos que la termalización es perfecta y que esto deja al sistema en un estado térmico

$$\rho^{\beta_A} = \frac{\exp(-\beta_A H_{\text{free}})}{Z} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_A \hbar\omega_k N_k}}{Z_k}, \tag{5.6}$$

con

$$Z_k = \text{Tr}(e^{-\beta_A \hbar\omega_k N_k}) = \frac{1}{1 - e^{-\beta_A \hbar\omega_k}}$$

y energía interna

$$\begin{aligned} E_A &= \mathrm{Tr}(\rho^{\beta_A} H_{\mathrm{free}}/Z) + E_{\mathrm{SC}}(L_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hbar\omega_k}{e^{\beta_A \hbar\omega_k} - 1} + E_{\mathrm{SC}}(L_0) \\ &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k \bar{N}_k^{\beta_A} + E_{\mathrm{SC}}(L_0)\,, \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde en la última línea hemos introducido la notación $\bar{N}_k^{\beta_A}$ para el número de ocupación térmica.

B. Segundo, la pared es desplazada de L_0 a $L_1 = L(\tau) = L_0(1-\epsilon)$ siguiendo la trayectoria Ec. (5.1) y comprimiendo la cavidad. Como consecuencia el sistema evoluciona bajo el hamiltoniano dado por Ec. (5.4) resultando en la energía interna

$$E_B = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k(L_1)\mathrm{Tr}(\rho N_k) + E_{\mathrm{SC}}(L_1). \tag{5.8}$$

C. Tercero, el sistema es puesto en contacto con un baño caliente a temperatura inversa β_C. Esto deja al sistema en un estado térmico con energía interna

$$E_C = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k(L_1) \bar{N}_k^{\beta_C} + E_{\mathrm{SC}}(L_1)\,, \tag{5.9}$$

donde $\bar{N}_k^{\beta_C}$ también está evaluado en $\omega_k(L_1)$.

D. Cuarto, la pared es movida otra vez, para volver de L_1 a L_0, siguiendo la trayectoria reversa temporal $\tilde{L}(t) = L(\tau - t)$. De esta forma la cavidad se expande a su tamaño original, terminando el proceso con una energía interna de

$$E_D = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k \mathrm{Tr}(\tilde{\rho} N_k) + E_{\mathrm{SC}}(L_0), \tag{5.10}$$

donde $\tilde{\rho}$ es la matriz densidad asociada con la trayectoria reversa.

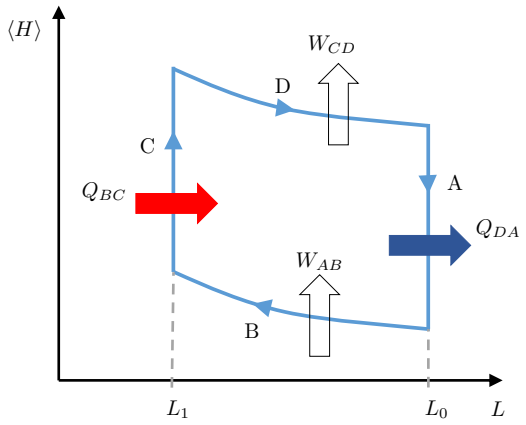


Figura 5.1: Las cuatro ramas del ciclo Otto en términos de la longitud de la cavidad y el valor medio de energía en el campo cuántico en la cavidad.

5.1.1. Evolución adiabática

Si ahora asumimos que la pared se mueve lo suficientemente lento para estar en las condiciones del teorema cuántico adiabático, o sea, si $\tau \gg 1/\omega_1$, entonces no habría cambio en la población de los niveles de energía y se tiene

$$\mathrm{Tr}(\rho N_k) = \mathrm{Tr}(\rho^{\beta_A} N_k) \tag{5.11}$$

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\rho} N_k) = \mathrm{Tr}(\rho^{\beta_C} N_k). \tag{5.12}$$

Entonces el calor dado al sistema sería simplemente la diferencia

$$Q^{\mathrm{Otto}} = E_C - E_B = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k(L_1)(\bar{N}_k^{\beta_C} - \bar{N}_k^{\beta_A}) \tag{5.13}$$

y el trabajo viene dado por

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{Otto}} =& (E_A - E_B) + (E_C - E_D) \\ =& \sum_{k=1}^{\infty} \hbar(\omega_k(L_1) - \omega_k)(\bar{N}_k^{\beta_C} - \bar{N}_k^{\beta_A}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Como podemos ver la energía estática de Casimir E_{SC} no modifica ni el calor ni el trabajo entregado por la máquina térmica. Adicionalmente, si la condición $\omega_k\beta_A \leq \omega_k(L_1)\beta_C$ es satisfecha para todo k, entonces $Q^{\mathrm{Otto}} > 0$. También podemos ver que

como $\omega_k(L_1) > \omega_k$ para $L_1 < L_0$ y el trabajo termina siendo positivo $W > 0$.

A la luz de estos resultados, la eficiencia puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\eta^{\text{Otto}} &= \frac{W^{\text{Otto}}}{Q^{\text{Otto}}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \hbar(\omega_k(L_1) - \omega_k)(N_k^{\beta_C} - \bar{N}_k^{\beta_A})}{\sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k(L_1)(\bar{N}_k^{\beta_C} - \bar{N}_k^{\beta_A})} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k(L_1)(1 - \omega_k/\omega_k(L_1))(\bar{N}_k^{\beta_C} - \bar{N}_k^{\beta_A})}{\sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k(L_1)(\bar{N}_k^{\beta_C} - \bar{N}_k^{\beta_A})}\end{aligned} \tag{5.15}$$

y, si el espectro viene dado por $\omega_k(L) = k\pi/L$, tenemos

$$\frac{\omega_k}{\omega_k(L_1)} = \frac{k\pi/L_0}{k\pi/L_1} = \frac{L_1}{L_0} = 1 - \epsilon \tag{5.16}$$

de lo cual se sigue el siguiente resultado sencillo para la eficiencia

$$\eta^{\text{Otto}} = \epsilon. \tag{5.17}$$

Esta expresión implica que la eficiencia del ciclo Otto para este sistema, en el límite adiabático, solo depende de la relación de compresión. Además, debemos resaltar que si que deseamos lograr la máxima eficiencia posible (que es la dada por el ciclo de Carnot η^{Carnot}), entonces los baños térmicos y la cavidad deben satisfacer

$$\epsilon = \eta^{\text{Otto}} = \eta^{\text{Carnot}} = 1 - \frac{\beta_C}{\beta_A}. \tag{5.18}$$

5.1.2. Evolución no-adiabática

En esta sección iremos más allá de la aproximación adiabática y mostraremos que el efecto Casimir dinámico induce un tipo de "fricción cuántica" que reduce la eficiencia del ciclo. Para ello será necesario calcular la energía luego de un movimiento no adiabático de la pared

$$E = \text{Tr}(\rho H) = \text{Tr}(U\rho^{\beta_A}U^{\dagger}H), \tag{5.19}$$

donde U es la operación unitaria que genera el movimiento de la pared sobre el estado del campo.

Para calcular esta magnitud procederemos usando teoría de perturbaciones al orden más bajo en epsilon no adiabático. Nuestro hamiltoniano dado por la Ec.(5.2) es apto para realizar este cálculo en la representación de interacción. Es importante recordar que en esta representación los estados evolucionan de acuerdo a

$$|\psi_I(t)\rangle = U_1|\psi_S\rangle \tag{5.20}$$

donde U_1 viene dado por

$$U_1 = \mathcal{T}\exp(-i\int_0^t H_1(t)dt/\hbar),$$

mientras que los operadores varían en el tiempo como

$$A_I(t) = U_0 A_S(t) U_0^\dagger, \tag{5.21}$$

donde $U_0 = \exp(-iH_{\text{free}}t/\hbar)$ (estamos usando los subíndices I y S para la representación de interacción y Schrödinger respectivamente).

En nuestro caso, la energía del campo cuántico a tiempo $t = \tau$ viene dada por

$$E(\tau) = \text{Tr}(\rho^{\beta_A} U_1^\dagger H_I(\tau) U_1). \tag{5.22}$$

Calcularemos esta energía perturbativamente a segundo orden en ϵ. Podemos hacer esto aproximando primero U_1 a segundo orden y reemplazar ese resultado en la Ec. (5.22) para obtener

$$\begin{aligned} E(\tau) = \quad & \text{Tr}(\rho^{\beta_A} H_I(\tau)) - \frac{1}{\hbar} i \int_0^\tau dt_1 [\text{Tr}(\rho^{\beta_A} H_I H_{1,I}(t_1)) - \text{Tr}(\rho^{\beta_A} H_{1,I}(t_1) H_I)] \\ & + \frac{1}{\hbar^2}(-i)^2 \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \text{Tr}(\rho^{\beta_A} H_{1,I}(t_1) H_I H_{1,I}(t_2)) \\ & + \frac{1}{\hbar^2}(-i)^2 \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \text{Tr}(\rho^{\beta_A} H_{1,I}(t_2) H_{1,I}(t_1) H_I) \\ & + \frac{1}{\hbar^2}(i)^2 \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \text{Tr}(\rho^{\beta_A} H_I H_{1,I}(t_1) H_{1,I}(t_2)). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Como el hamiltoniano fue expresado a primer orden en ϵ y buscamos la energía a orden 2, debemos volver a expandir los operadores bosónicos según la Ec. (2.42) para obtener la siguiente expansión de los términos del H_0 en la representación de interacción

$$\begin{aligned}\omega_k(L)N_k(\omega(L)) =&\omega_k(1+\delta L(t))[N_k+\delta L\frac{\omega_k'}{2\omega_k}(e^{i2\omega_k t}a_k^{\dagger 2}+e^{-i2\omega_k t}a_k^2)\\ &+\left(\delta L\frac{\omega_k'}{2\omega_k}\right)^2(2N_k+1)]\,. \end{aligned}\tag{5.24}$$

Reemplazando este resultado en la Ec.(5.23) y simplificando la expresión encontramos que la energía interna viene dada por

$$E(\tau) \;=\; \sum_k\left[\hbar\omega_k(\tau)\bar{N}_k^{\beta_A}+\frac{\epsilon^2}{4}\hbar\omega_k\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2 F^{\beta_A}(t_1,t_2)\right] \tag{5.25}$$

donde,

$$\begin{aligned}F^{\beta_A}(t_1,t_2) =& \frac{\omega_k'^2L_0^2}{\omega_k^2}\dot\delta(t_1)\dot\delta(t_2)\cos\left[2\omega_k(t_1-t_2)\right]\left\{2\bar{N}_k^{\beta_A}+1\right\}\\ &+\sum_{j=0}^{\infty}\dot\delta(t_1)\dot\delta(t_2)\frac{g_{jk}^2}{\omega_j\omega_k}\Big[(\omega_k-\omega_j)^2\cos\left[(\omega_j+\omega_k)(t_1-t_2)\right]\left\{\bar{N}_k^{\beta_A}+\bar{N}_j^{\beta_A}+1\right\}\\ &+(\omega_j+\omega_k)^2\cos\left[(\omega_j-\omega_k)(t_1-t_2)\right]\left\{\bar{N}_j^{\beta_A}-\bar{N}_k^{\beta_A}\right\}\Big].\end{aligned}\tag{5.26}$$

Podemos ver que la contribución no-adiabática a la energía es

$$E_F^{\beta_A}(\tau)=\frac{\epsilon^2}{4}\sum_k\hbar\omega_k\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2 F^{\beta_A}(t_1,t_2)\,, \tag{5.27}$$

que es una forma de *fricción cuántica* [50,122–125]. Esto es porque no es conservativa, ya que no es una función del estado de la cavidad, sino que depende fundamentalmente de la trayectoria $\delta(t)$ que haya sido usada para alcanzar el estado final. Más aún, como E_F depende cuadráticamente de $\delta(t)$ y $\dot\delta(t)$ esta contribución a la energía será la misma, en módulo y signo, sin importar si la pared se mueve hacia adelante o hacia atrás. Esto es un claro contraste con las fuerzas conservativas, y más similar a la energía disipada a un medio viscoso que depende de la trayectoria (e incluso la

velocidad $\dot{\delta}$) pero no de la dirección. Además, podemos mostrar que esta energía es siempre definida positiva. Notando que

$$\begin{aligned}&\int_0^t dx \int_0^t dy f(x) f(y) \cos(w(x-y)) \\ &= [\int_0^t dx f(x) \cos(wx)]^2 + [\int_0^t dx f(x) \sin(wx)]^2 \geq 0, ,\end{aligned} \tag{5.28}$$

queda claro que el primer y segundo términos en la Ec.(5.26) son positivos. El tercer término de la misma ecuación puede ser escrito como

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{h_{jk}}{\omega_j} \left[\bar{N}_j^{\beta_A} - \bar{N}_k^{\beta_A}\right] = \sum_{k>j=1}^{\infty} \frac{h_{jk}}{\omega_j \omega_k} (\omega_k - \omega_j) \left[\bar{N}_j^{\beta_A} - \bar{N}_k^{\beta_A}\right],$$

que es positivo porque $\omega_k > \omega_j$ para $k > j$ y entonces tenemos $\bar{N}_j^{\beta_A} \geq \bar{N}_k^{\beta_A}$. Esto prueba que $E_F^{\beta_A}(\tau) \geq 0$, como queríamos ver.

5.1.3. Una cota superior a la energía de fricción

Podemos establecer una cota superior para la energía que se pierde por la fricción cuántica asumiendo que la pared tiene una aceleración nula al principio y al final del movimiento, $\ddot{\delta}(0) = \ddot{\delta}(\tau) = 0$. Usando esto podemos integrar por partes en la Ec. (5.27) para obtener

$$\begin{aligned}|E_F^{\beta_A}(\tau)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar \epsilon^2}{4} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \Bigg\{ \frac{L_0^2 \omega_k'^2}{16 \omega_k^5} \dddot{\delta}(t_1) \dddot{\delta}(t_2) \cos\left[2\omega_k(t_1 - t_2)\right] \left\{2\bar{N}_k^{\beta_A} + 1\right\} \right. \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{jk}^2}{\omega_j} \dddot{\delta}(t_1) \dddot{\delta}(t_2) \left[\frac{(\omega_k - \omega_j)^2}{(\omega_k + \omega_j)^4} \cos\left[(\omega_j + \omega_k)(t_1' - t_2')\right] \left\{\bar{N}_k^{\beta_A} + \bar{N}_j^{\beta_A} + 1\right\} \right. \\ &\left. \left. + \frac{(\omega_k + \omega_j)^2}{(\omega_k - \omega_j)^4} \cos\left[(\omega_j - \omega_k)(t_1' - t_2')\right] \left[\bar{N}_j^{\beta_A} - \bar{N}_k^{\beta_A}\right] \right] \Bigg\} \right| \\ &\leq \left(\int_0^\tau dt \left| \dddot{\delta}(t) \right| \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar \epsilon^2}{4} \Bigg\{ \frac{L_0^2 \omega_k'^2}{16 \omega_k^5} \left(2\bar{N}_k^{\beta_A} + 1\right) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{jk}^2}{\omega_j} \left[\frac{(\omega_k - \omega_j)^2}{(\omega_k + \omega_j)^4} \left(\bar{N}_k^{\beta_A} + \bar{N}_j^{\beta_A} + 1\right) + \frac{(\omega_k + \omega_j)^2}{(\omega_k - \omega_j)^4} \left(\bar{N}_j^{\beta_A} - \bar{N}_k^{\beta_A}\right) \right] \Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Si además asumimos que la aceleración de la pared tiene un máximo global a tiempo t_M y un mínimo global en t_m podemos establecer la cota

$$|E_F^{\beta_A}(\tau)| \leq \left(\ddot{\delta}(t_M) - \ddot{\delta}(t_m)\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \hbar\epsilon^2 \Bigg\{ \frac{L_0^2 \omega_k'^2}{16\omega_k^5} \left(2\bar{N}_k^{\beta_A} + 1\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{jk}^2}{\omega_j} \left[\frac{(\omega_k - \omega_j)^2}{(\omega_k + \omega_j)^4} \left(\bar{N}_k^{\beta_A} + \bar{N}_j^{\beta_A} + 1\right) + \frac{(\omega_k + \omega_j)^2}{(\omega_k - \omega_j)^4} \left(\bar{N}_j^{\beta_A} - \bar{N}_k^{\beta_A}\right) \right] \Bigg\}. \tag{5.30}$$

De esta manera, haciendo unas pocas suposiciones razonables, podemos acotar la energía de fricción debida al DCE sobre un rango amplio de trayectorias.

5.2. Motor térmico

Después de definir el sistema, el ciclo a realizar y calcular la energía al final de cada rama en el límite no-adiabático estamos en condiciones de analizar la eficiencia de esta máquina empleada como un motor térmico.

Para ello, tomando la energía generada por la pared móvil, es directo calcular el calor disipado

$$\begin{aligned} Q &= E_C - E_B \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k(L_1)\bar{N}_k^{\beta_C} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\hbar\omega_k(L_1)\bar{N}_k^{\beta_A} + \epsilon^2 \frac{\hbar\omega_k(L_1)}{4} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 F^{\beta_A}(t_1, t_2) \right]. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Dado que la energía de fricción ya es cuadrática en ϵ, podemos aproximar $\omega_k(L_1) \approx \omega_k$ en ese término y entonces el calor viene dado por

$$Q = Q^{\text{Otto}} - E_F^{\beta_C}(\tau), \tag{5.32}$$

a segundo orden en ϵ.

El trabajo también es fácil de calcular

$$\begin{aligned} W &= W_{AB} + W_{CD} \\ &= W^{\text{Otto}} - \left[E_F^{\beta_A} + E_F^{\beta_C}\right]. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Finalmente, la eficiencia del motor térmico para el ciclo no-adiabático viene dada por

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W^{\text{Otto}} - \left[E_F^{\beta_A} + E_F^{\beta_C}\right]}{Q^{\text{Otto}} - E_F^{\beta_C}} \\ &\approx \frac{W^{\text{Otto}}}{Q^{\text{Otto}}} + \frac{W^{\text{Otto}} E_F^{\beta_C} - Q^{\text{Otto}}\left[E_F^{\beta_A} + E_F^{\beta_C}\right]}{(Q^{\text{Otto}})^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &\approx \eta^{\text{Otto}} - \frac{E_F^{\beta_A} + E_F^{\beta_C}}{Q^{\text{Otto}}} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \tag{5.34}$$

que siempre es menor a la eficiencia adiabática η^{Otto}. Más aún, podemos usar la Ec.(5.30) para establecer un límite inferior a la eficiencia del ciclo Otto para régimen no-adiabático

$$\begin{aligned} \eta \geq& \eta^{Otto} - \frac{|E_F^{\beta_A} + E_F^{\beta_C}|}{Q^{Otto}} \\ \geq& \eta^{Otto} - \frac{\left(\ddot{\delta}(t_M) - \ddot{\delta}(t_m)\right)^2}{Q^{otto}} \sum_{k=0}^{\infty} \hbar\epsilon^2 \Bigg\{ \frac{L_0^2 \omega_k'^2}{16\omega_k^5}\left(2\bar{N}_k^{\beta_A} + 1\right) + \frac{L_0^2 \omega_k'^2}{16\omega_k^5}\left(2\bar{N}_k^{\beta_C} + 1\right) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{jk}^2}{\omega_j}\left[\frac{(\omega_k - \omega_j)^2}{(\omega_k + \omega_j)^4}\left(\bar{N}_k^{\beta_A} + \bar{N}_j^{\beta_A} + 1\right) + \frac{(\omega_k + \omega_j)^2}{(\omega_k - \omega_j)^4}\left(\bar{N}_j^{\beta_A} - \bar{N}_k^{\beta_A}\right)\right] \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{jk}^2}{\omega_j}\left[\frac{(\omega_k - \omega_j)^2}{(\omega_k + \omega_j)^4}\left(\bar{N}_k^{\beta_C} + \bar{N}_j^{\beta_C} + 1\right) + \frac{(\omega_k + \omega_j)^2}{(\omega_k - \omega_j)^4}\left(\bar{N}_j^{\beta_C} - \bar{N}_k^{\beta_C}\right)\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

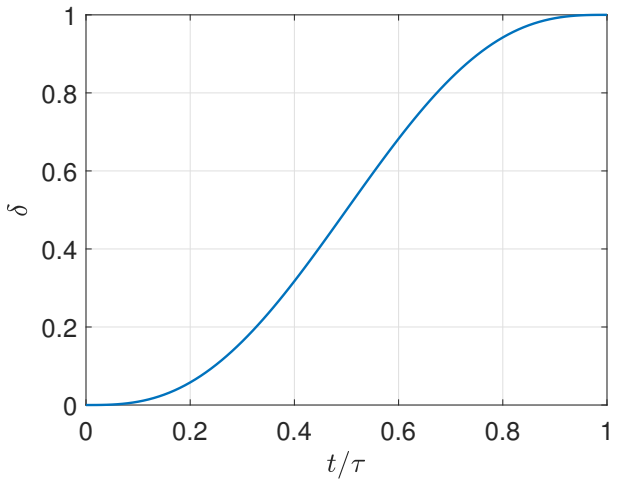


Figura 5.2: Trayectoria elegida para ejemplificar los resultados, que verifica todas las restricciones impuestas en la Ec.(5.37).

5.2.1. DCE como energía de fricción cuántica

Para ilustrar nuestros resultados, consideramos la trayectoria dada por el polinomio de menor orden

$$\delta(t) = 10(t/\tau)^3 - 15(t/\tau)^4 + 6(t/\tau)^5. \tag{5.36}$$

que satisface todas las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} &\delta(0) = \dot{\delta}(0) = \ddot{\delta}(0) = 0, \\ &\dot{\delta}(\tau) = \ddot{\delta}(\tau) = 0, \\ &\delta(\tau) = 1. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Esta trayectoria se muestra en la Fig. (5.2). Usando esta trayectoria y los resultados anteriores calculamos la energía de fricción cuántica producida por el DCE, como se muestra en la Fig. (5.3). Es importante notar que esta energía se anula para para movimientos muy lentos ($\tau \to \infty$) y se hace arbitrariamente grande para movimientos cada vez más rápidos de la pared. Por otro lado, para un τ fijo, la energía de fricción converge a un valor finito a medida que se incrementa la temperatura inversa del estado inicial β (Fig. (5.4)). Esto está claramente asociado a

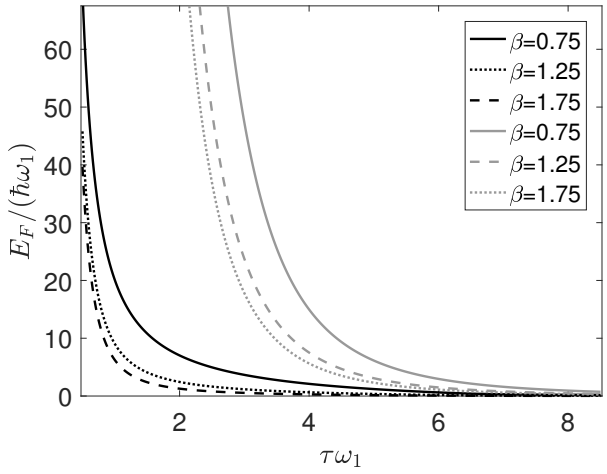


Figura 5.3: Energía de fricción como un función del tiempo adimensional, para diferentes valores de temperatura inversa β. En cada caso, presentamos la energía de fricción computada para la trayectoria ejemplo (líneas negras) y la comparamos contra la cota derivada independiente de la trayectoria (líneas grises). La relación de compresión usada fue en todos los casos de $\epsilon = 0.01$.

la producción de fotones dada por el DCE que persiste aún cuando partimos de un estado de vacío.

Como hemos mencionado antes, la energía de fricción del DCE es siempre positiva y, al igual que la fricción en un pistón clásico, disminuye la eficiencia del motor respecto de la eficiencia del ciclo Otto no-adiabático η^{Otto}. En general, la fricción cuántica se incrementa a medida que el movimiento de la pared se vuelve más rápido ($\tau \to 0$). De hecho, debido a esto surge una escala de tiempo mínima por debajo de la cual el motor ya no puede funcionar como tal, dado que el trabajo entregado se vuelve negativo (ver Fig. 5.5).

Continuamos el estudio de la potencia P producida por este motor térmico. En el caso adiabático, cuando $\tau\omega_1 \gg 1$, el trabajo es independiente de la escala de tiempo τ y entonces la potencia se incrementa a medida que el tiempo decrece, dado que $P \sim 1/\tau$. En el límite opuesto $\tau\omega_1 \ll 1$ (no-adiabático), la potencia resulta ser proporcional a $1/\tau^4$. Entonces la potencia tendrá dos contribuciones, con diferentes signos, que escalean con diferentes potencial de τ. Como consecuencia, esperamos un pico alrededor del tiempo en que la energía de fricción empieza a ser comparable con la obtenida en el límite adiabático, $\tau\omega_1 \sim 1$. Esto es ilustrado en la Fig. 5.6.

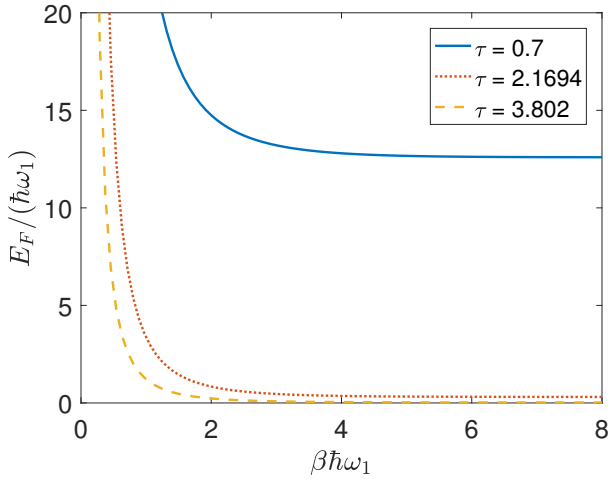


Figura 5.4: Energía de fricción como función de $\beta\hbar\omega_1$, para diferentes valores de τ. La producción de fotones se incrementa a medida que el intervalo de tiempo τ disminuye, y por lo tanto la energía de fricción se vuelve más relevante. La relación de compresión usada fue $\epsilon = 0.01$.

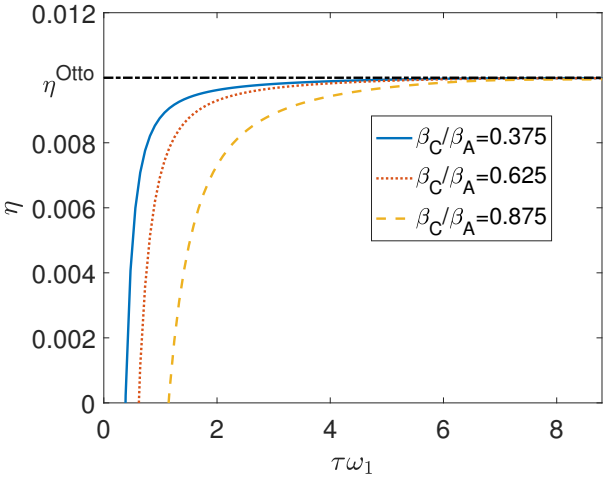


Figura 5.5: Eficiencia de un motor para diferentes relaciones entre las temperaturas de los baños térmicos (β_C/β_A) como función de la escala de tiempo adimensional $\tau\omega_1$. El motor cuántico operado en régimen no-adiabático tiene una eficiencia menor a la del caso adiabático, indicado como η^{Otto} en el gráfico. La relación de compresión usada $\epsilon = 0.01$.

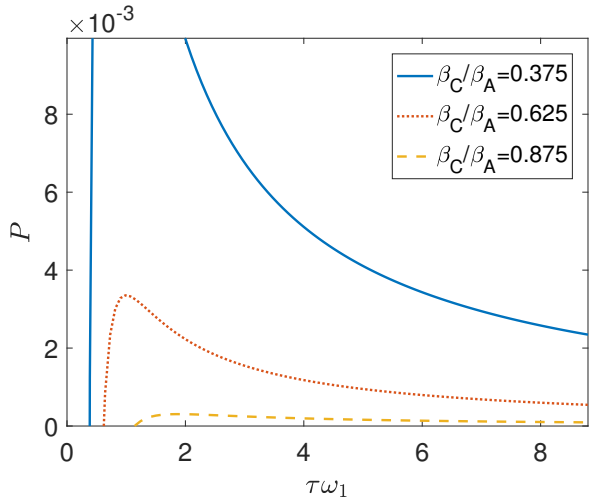


Figura 5.6: Potencia producida por el motor para diferentes relaciones de temperaturas como función del tiempo. Para cada relación tiene un pico a aproximadamente $\tau\omega_1 \sim 1$ indicando una escala de tiempo óptima de operación. La relación de compresión usada fue $\epsilon = 0.01$.

.

Finalmente, en la Fig. (5.7) se muestra el trabajo extraído. Allí podemos notar que el mismo es positivo para grandes relaciones de temperaturas entre los baños (β_C/β_A) y escalas de tiempo largas. De lo contrario, si $\tau \to 0$ y $\beta_C/\beta_A \to 1$, se observa que el trabajo se anula.

5.3. Refrigerador cuántico

Como vimos al final de la sección anterior, también es posible implementar un refrigerador cuántico usando este sistema; esto es usar esta máquina térmica para enfriar un baño ya frío y calentar uno caliente consumiendo trabajo externo. En esta sección, calcularemos el coeficiente de desempeño de un refrigerador cuántico de Otto y el efecto que la fricción cuántica del DCE tiene sobre este.

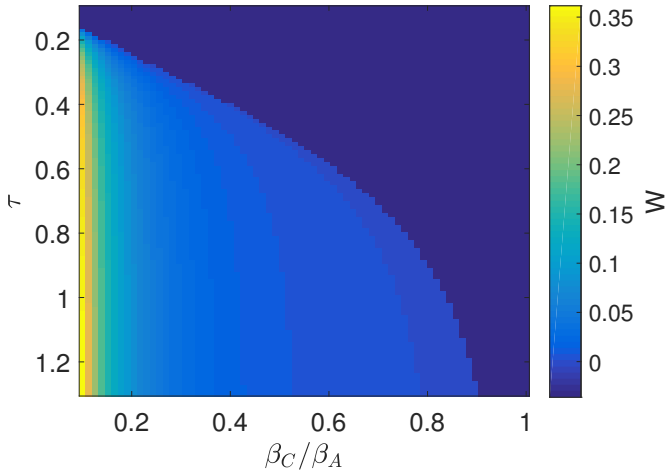


Figura 5.7: Trabajo extraído por el motor. Podemos identificar regiones donde no se puede extraer trabajo del ciclo de Otto. La relación de compresión usada fue $\epsilon = 0.01$.

5.3.1. Evolución adiabática

En el caso adiabático, el calor extraído del reservorio frío viene dado por

$$\begin{aligned} Q^{\text{Otto}} &= E_A - E_D \\ &= \sum_k \hbar\omega_k \left[N_k^{\beta_A}(\omega_k) - N_k^{\beta_C}(\omega_k(L_1)) \right] \end{aligned} \tag{5.38}$$

que es positivo siempre que

$$\frac{L_1}{L_0} \leq \frac{\beta_C}{\beta_A} \leq 1. \tag{5.39}$$

Estas condiciones implican que el trabajo consumido por el sistema

$$\begin{aligned} W^{\text{Otto}} &= (E_B - E_A) + (E_D - E_C) \\ &= \sum_k \hbar \left[\omega_k(L_1) - \omega_k \right] \left[N_k^{\beta_A}(\omega_k) - N_k^{\beta_C}\omega_k(L_1) \right], \end{aligned} \tag{5.40}$$

es también siempre positivo. Medimos entonces la eficiencia de esta máquina por cociente entre el calor extraído y el trabajo consumido para realizar esa tarea. En términos matemáticos, esto es el coeficiente de desempeño que podemos calcular

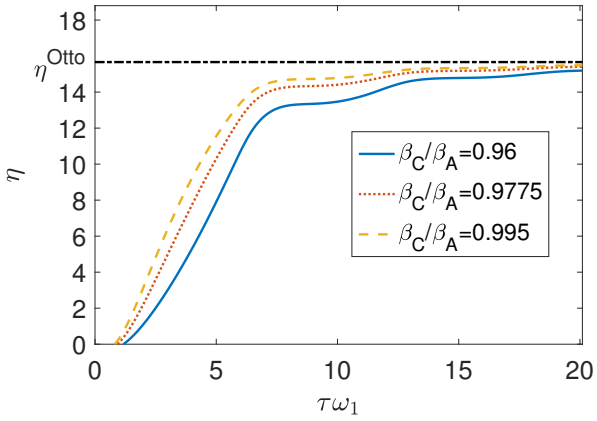


Figura 5.8: El coeficiente de desempeño a tiempo finito es siempre menor que del régimen adiabático y decrece rápidamente para tiempos de operación menores. La relación compresión usada fue $\epsilon = 0.06$.

como

$$\eta^{\text{Otto}} = \frac{Q^{\text{Otto}}}{W^{\text{Otto}}} = \frac{1}{\omega_k(L_1)/\omega_k - 1} = \frac{1}{\epsilon} - 1, \tag{5.41}$$

asumiendo un espectro equidistante y $L_1 = L_0(1-\epsilon)$.

5.3.2. Régimen no-adiabático

Por otro lado, si el movimiento de la pared no es adiabático es necesario incluir la energía de fricción debida al DCE. Procediendo de la misma forma en que en el caso del motor térmico, podemos calcular el calor extraído por el refrigerador. En este caso, el coeficiente de desempeño en el régimen no-adiabático viene dado por

$$\eta = \frac{Q^{\text{Otto}} - E_F^{\beta_C}}{W^{\text{Otto}} + E_F^{\beta_A} + E_F^{\beta_C}} \leq \frac{Q^{\text{Otto}}}{W^{\text{Otto}}}. \tag{5.42}$$

En la Fig. (5.8), mostramos este coeficiente para distintas relaciones entre temperaturas de los baños térmicos β_C/β_A. Se puede notar fácilmente que este coeficiente es siempre menor que el del caso adiabático (η^{Otto}). Además podemos observar una jerarquía en la relación entre las temperaturas: cuanto más similares son, más grande es el coeficiente de desempeño que se obtiene.

En la Fig.(5.9) presentamos el calor extraído Q por el refrigerador propuesto

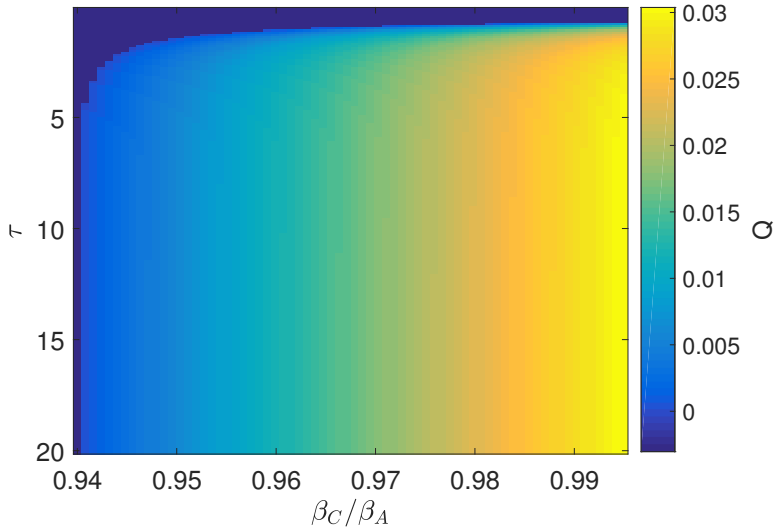


Figura 5.9: El calor extraído por el refrigerador Q es superior para baños térmicos con temperaturas similares y escalas de tiempo de operación τ mayores, de lo contrario puede incluso ser negativo, lo que implica que la máquina deja de funcionar como un refrigerador. La relación de compresión utilizada fue $\epsilon = 0.06$.

para diferentes relaciones de baños térmicos β_C/β_A y diferentes escalas de tiempo de operación τ. Podemos notar que hay valores pequeños de τ para los cuales el calor Q se vuelve negativo, implicando que la máquina deja de funcionar como un refrigerador. Los mayores valores de calor extraído se obtienen para baños con temperaturas similares y tiempos de operación más largos.

Finalmente en la Fig. (5.10), se muestra la potencia de enfriamiento del refrigerador en función de la escala de tiempo τ. Notamos que existe un valor máximo para la potencia cuando $\tau\omega_1 \sim 1$, alcanzando un valor superior cuando los baños térmicos tienen temperaturas similares $\beta_C/\beta_A \to 1$.

5.4. Conclusiones

Hemos discutido varios aspectos del ciclo Otto sobre un campo escalar cuántico confinado a una cavidad con un contorno móvil. En particular, hemos calculamos la eficiencia de la máquina térmica al operar como un de motor y el coeficiente de desempeño en su operación como un refrigerador cuántico en la aproximación adiabática. Más aún, hemos resuelto la evolución temporal para el campo a segundo

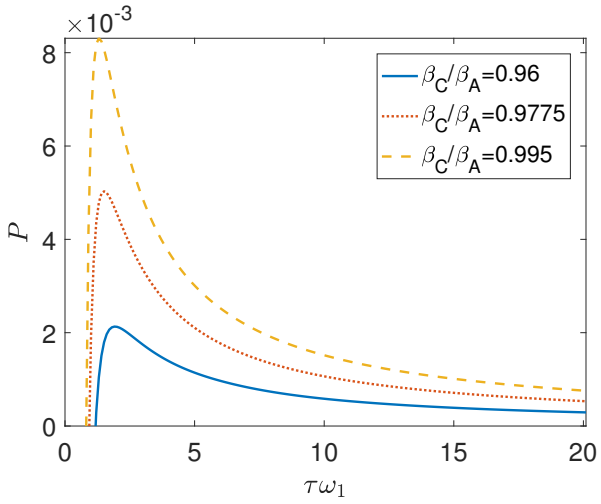


Figura 5.10: La potencia de enfriamiento del refrigerador también tiene un pico en una escala de tiempo óptima de $\tau\omega_1 \sim 1$. La relación de compresión usada fue $\epsilon = 0.06$.

orden en la relación de compresión, y la usamos para evaluar la eficiencia del ciclo operando en tiempo finito. Hemos visto que el movimiento de la pared genera fotones a través del DCE, los cuales están asociados a una forma de fricción cuántica. Mostramos que esta energía de fricción es positiva, y hemos podido encontrar una cota superior para la misma. Estos resultados fueron luego usados para calcular la eficiencia del motor y mostrar que la operación en tiempo finito conlleva una reducción de la eficiencia comparada con el caso adiabático. Esto se debe a la energía desperdiciada en producir los fotones del efecto Casimir dinámico. En concordancia, hemos visto que la energía de fricción crece muy rápidamente a medida que el movimiento de la pared es más rápido. Esto ocasiona que la potencia entregada por la máquina posea un pico para una escala de tiempo crítica y a partir de la cual la potencia decrece hasta volverse negativa para movimientos muy bruscos, lo que implica que la máquina deja de funcionar como un motor. También hemos estudiado el uso de este ciclo como un refrigerador cuántico operado en tiempo finito encontrando resultados similares: un pérdida de eficiencia y una potencia de enfriamiento acotada.

En vista de las dificultades que genera el efecto Casimir dinámico sobre estas máquinas térmicas cuánticas, en el siguiente capítulo, analizaremos la posibilidad

de encontrar trayectorias para el movimiento de los contornos tales que no haya generación neta de fotones y permitan una mejora de la eficiencia termodinámica.

CAPÍTULO 6

Atajos adiabáticos

En el capítulo anterior estudiamos un caso paradigmático de un motor cuántico de campos en tiempo finito comprendido por un campo escalar en cavidad con una pared móvil. Vimos que la operación en tiempo finito da lugar a radiación por efecto Casimir dinámico de la pared, aún a temperatura cero, y que el costo energético de producir estos fotones genera una fuerte disminución de la eficiencia del motor. Además es deseable obtener el menor tiempo de operación necesario, de manera de obtener alta potencia y evitar la introducción de ruido y decoherencia al sistema. Por esta razón sería de suma utilidad encontrar, si es que existiesen, trayectorias del espejo tales que el campo evolucione adiabáticamente pero en un tiempo finito; esto es lo que se conoce como un atajo adiabático (o STA).

En este capítulo, siguiendo [126], veremos que a pesar de la enorme cantidad de grados de libertad que posee un campo escalar cuántico, es posible encontrar atajos adiabáticos para el caso no-masivo. Luego estudiaremos propiedades de estas trayectorias, por empezar, en qué condiciones resultan físicas y cual es su duración mínima, lo que nos permitirá establecer la potencia obtenida para ellas. Por otro lado, como vimos en el capítulo 4 el movimiento de una cavidad puede generar la pérdida de información cuántica debido al DCE lo que motiva a buscar atajos adiabáticos

para el movimiento de dos paredes. Por lo tanto, siguiendo [127], generalizaremos los resultados anteriores al movimiento de dos paredes, estudiando con detenimiento los casos de movimientos rígidos, compresiones y expansiones. Finalmente, siguiendo [128], estudiaremos cómo completar una cierta trayectoria dada para, mediante un movimiento adicional, generar un atajo adiabático. En otros términos, buscaremos trayectorias que permitan reabsorber los fotones generados por el DCE.

6.1. Un análogo sencillo: el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo

Hay varias maneras de introducir atajos adiabáticos en sistemas cuánticos. Un enfoque natural es imponer que los autoestados instantáneos sean las soluciones de una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con un nuevo hamiltoniano efectivo, que será el original más un término contradiabático [58]. Este procedimiento se conoce como "transitionless quantum driving" y lleva en general a términos no-locales en el hamiltoniano efectivo que son difíciles de implementar experimentalmente. Para algunos sistemas (tales como el oscilador armónico con una frecuencia dependiente del tiempo $\omega(t)$), una transformación unitaria adicional simplifica el hamiltoniano efectivo sin modificar los estados iniciales y finales [129]. Además para estos sistemas, existe un enfoque alternativo [79] basado en la solución adiabática de WKB que presentaremos a continuación para después aplicarlo al campo escalar.

La dinámica del oscilador armónico con una frecuencia dependiente del tiempo viene dada por

$$\ddot{q} + \omega^2(t) q = 0 \,. \tag{6.1}$$

El operador posición $\hat{q}$ puede ser escrito en términos de operadores de aniquilación y creación ($\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$) como

$$\hat{q}(t) = q(t)\hat{a} + q^*(t)\hat{a}^\dagger \,, \tag{6.2}$$

donde $q(t)$ es una solución de la Ec. (6.1) con el Wronskiano dado por

$$\dot{q}q^* - \dot{q}^* q = i \,. \tag{6.3}$$

La condición del Wronskiano implica que las soluciones pueden ser escritas en términos de una función real $W(t)$ como

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2W(t)}} e^{i\int^t W(t')dt'} \tag{6.4}$$

que satisface la ecuación

$$\omega^2 = W^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{W}}{W} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{W}}{W}\right)^2\right), \tag{6.5}$$

que es equivalente a la Ec. (6.1).

Para una función $\omega(t)$ que varía lentamente, tenemos $W \simeq \omega$ y la Ec. (6.4) devuelve la solución de WKB usual al orden más bajo. La Ec. (6.5) puede ser usada para obtener las correcciones de orden superior resolviéndola recursivamente y usando una expansión en el número de derivadas de ω. Alternativamente, uno puede usar un enfoque de ingeniería inversa y pensar a la Ec. (6.4) como la solución exacta del problema con frecuencia ω^2 dado por la Ec. (6.5).

Asumiendo que la frecuencia tiende a valores constantes $\omega^{\rm in,out}$ para $t \to \pm\infty$, y que el oscilador está en el estado fundamental $|0_{\rm in}\rangle$ para $t \to -\infty$, en el caso de una evolución no-adiabática el oscilador será excitado para $t \to +\infty$, esto es $|\langle 0_{\rm out}|0_{\rm in}\rangle| \neq 1$. Las bases in y out son las soluciones de la Ec. (6.4) que satisface

$$q^{\rm in,out}(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\omega^{\rm in,out}}} e^{-i\omega^{\rm in,out}t}. \tag{6.6}$$

Como ya dijimos antes, cuando la transformación de Bogoliuvob que conecta las bases in y out es no-trivial, es una señal de la excitación del sistema debida a la dependencia externa con el tiempo:

$$\begin{aligned} q^{\rm out} &= \alpha\, q^{\rm in} + \beta\, q^{\rm in\,*} \\ \hat{a}^{\rm out} &= \alpha^*\, \hat{a}^{\rm in} - \beta^*\, \hat{a}^{\rm in\,\dagger}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Como es bien sabido, y descrito en más detalle abajo, el vacío in puede ser escrito como un estado squeezeado en términos de los estados out.

Una frecuencia $\omega(t)$ que conduce a una evolución que no produce una excitación del oscilador armónico constituye un atajo adiabático (STA). Es importante remarcar que la evolución a tiempo intermedios es, en general, no-adiabática pero el sistema retorna a las poblaciones iniciales cuando la frecuencia efectiva se vuelve constante a $t \to +\infty$.

6.1.1. El enfoque de Lewis-Riesenfeld y la ecuación de Ermakov

En el enfoque de Lewis-Riesenfeld, las soluciones de la Ec. (6.1) son escritas en términos de la llamada función de Ermakov $\rho = 1/\sqrt{W}$, que satisface la ecuación de Ermakov

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho - \frac{1}{\rho^3} = 0\,, \tag{6.8}$$

que es equivalente a la Ec. (6.5).

Es posible mostrar que, dentro de un intervalo temporal donde $\omega = \omega_0$ es constante, la solución general de la Ecuación de Ermakov se lee [130, 131]

$$\rho^2(t) = \frac{1}{\omega_0}\big[\cosh\delta - \sinh\delta\sin(2\omega_0 t + \varphi)\big]\,, \tag{6.9}$$

donde δ y φ son constantes arbitrarias. Para $\delta = 0$ tenemos la solución usual para el oscilador armónico con frecuencia ω_0. Si la frecuencia es ω_0 para $t < 0$, depende del tiempo en el intervalo $0 < t < \tau$, y luego se detiene en ω_1, para $t < 0$ tendremos $\rho^2 = 1/\omega_0$, y al final del movimiento, para $t > \tau$, ρ^2 vendrá dada por la Ec. (6.9) con $\omega_0 \to \omega_1$. Los valores de δ y φ dependerán de toda la evolución temporal de la frecuencia. En general, el oscilador terminará en un estado squeezeado. En [132] se ha mostrado que, para el caso particular de $\omega_0 = \omega_1$, diferentes evoluciones $\omega(t)$ pueden dar lugar a la misma función de Ermakov para $t > \tau$, y por lo tanto al mismo estado excitado. Si la evolución es tal que ρ es constante también para $t > \tau$, entonces tenemos una evolución no-excitante, es decir, un atajo adiabático del oscilador armónico.

Uno puede usar ingeniería inversa para encontrar evoluciones efectivas no-excitantes

(o STAs) $\omega^2_{\text{eff}}(t)$ tomando un elección adecuada de $\rho^2_{\text{ref}} = 1/\omega_{\text{ref}}(t)$: así es, asumiendo que ρ^2_{ref} es constante para $t < 0$ y $t > \tau$, y reemplazando esta función de Ermakov de "referencia" en la Ec. (6.8) uno puede obtener una evolución efectiva como

$$\omega^2_{\text{eff}} = \frac{1}{\rho^4_{\text{ref}}} - \frac{\ddot{\rho}_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}}\,. \tag{6.10}$$

Notemos que para esta evolución efectiva la función $q(t)$ evoluciona como la solución adiabática para la frecuencia de referencia ω_{ref}, en un tiempo finito. El sistema puede admitir, o no, situaciones donde $\omega^2_{\text{eff}}(t) < 0$, entonces se podría elegir $\rho_{\text{ref}}(t)$ apropiadamente en modelos donde esto es físicamente inaceptable.

6.1.2. Desexcitación del oscilador armónico

Ahora consideraremos la siguiente pregunta: asumamos que la frecuencia es igual a ω_- para $t < 0$ y evoluciona desde ω_- a ω_+ durante el intervalo $0 < t < \tau_1$, de tal manera que la evolución "genera partículas", es decir, que el oscilador armónico está en un estado excitado para $t > \tau_1$. Denotaremos por $\omega_{\text{I}}(t)$ a la función que interpola entre ω_- y ω_+ ¿Es posible encontrar una evolución temporal subsecuente de la frecuencia, $\omega_{\text{II}}(t)$, en un intervalo $\tau_1 < t < \tau_2$, tal que la frecuencia final sea ω_{++}y el estado final del oscilador sea $|0_{++}\rangle$? En otras palabras, estamos buscando una función dependiente del tiempo complementaria $\omega_{\text{II}}(t)$ tal que el protocolo efectivo conjunto

$$\omega_{\text{eff}}(t) = \begin{cases} \omega_- & t < 0 \\ \omega_{\text{I}}(t) & 0 < t < \tau_1 \\ \omega_+ & \tau_1 < t < t_1 \\ \omega_{\text{II}}(t) & t_1 < t < t_1 + \tau_2 \\ \omega_{++} & t_1 + \tau_2 < t \end{cases}, \tag{6.11}$$

complete a una evolución inicial no-adiabática en un STA.

Después de la evolución inicial (descrita por $\omega_{\text{I}}(t)$), uno puede probar que el estado de vacío inicial se vuelve un estado squeezeado. Esto es, para $\tau_1 < t < t_1$

tenemos [133]

$$|0_-\rangle = c_0 \sum_{n\geq 0} (-\frac{\beta^*}{\alpha})^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} |2\, n_+\rangle\,, \tag{6.12}$$

donde α y β son los coeficientes de la transformación de Bogoliuvob, de donde se tiene que el número de ocupación media de los estados + es

$$\langle 0_-|a_+^\dagger\, a_+|0_-\rangle = |\beta|^2\,. \tag{6.13}$$

Para deshacer la evolución, y generar el anti-squeezing correspondiente, uno puede elegir una función de Ermakov de la siguiente manera: para $t < \tau_1$, $\rho(t)$ está determinada por $\omega_{\rm I}(t)$ y es una función oscilante para $\tau_1 < t < t_1$. Ahora podemos considerar una continuación suave de esta función que comience en t_1 y se vuelva constante $\rho^2(t) = 1/\omega_{++}$ para $t > t_1 + \tau_2$. De la función de Ermakov completa uno puede determinar la evolución de la "frecuencia de desexcitación" $\omega_{\rm II}(t)$ en el intervalo $t_1 < t < t_1 + \tau_2$, que interpola entre ω_+ y ω_{++}. Luego como la combinación de las dos evoluciones genera una función de Ermakov que es constante al principio y al final, tenemos que implementa un STA.

Cuando buscamos que la frecuencia final coincida con la inicial, $\omega_- = \omega_{++}$, la segunda evolución $\omega_{\rm II}(t)$ puede ser elegida para que sea la reversa-temporal de la primera evolución $\omega_{\rm I}(t)$. Esta trayectoria simétrica siempre existe puesto que la ecuación Ermakov tiene simetría de inversión temporal, es decir, si $\omega(t)$ tiene como solución a $\rho(t)$ entonces $\omega(-t)$ tiene como solución a $\rho(-t)$. Luego como $\rho(t)$ es lineal al comienzo, su reversa temporal lo será al final, entonces si unimos ambas soluciones de manera continua tendremos una función de Ermakov que comienza lineal y termina lineal, es decir, un STA. Unirlas implica decir a qué tiempo ejecutar la reversa temporal, pero este tiempo viene fijado por la función de Ermakov que es senoidal al final de un protocolo y al principio del otro. Este tiempo t_n no es entonces único, puesto que si existe uno la periodicidad del seno implica que más adelante habrá otro, pero sí son discretos (por ejemplo se podrían elegir los máximos del seno) y vienen dados por el número de oscilaciones del seno entre una lineal y la siguiente. Así uno puede extender de forma continua la función de Ermakov como $\rho_{\rm II}(t) = \rho_{\rm I}(2t_n - t)$ para $t > t_n$.

Vale la pena destacar que, por lo dicho antes respecto de la invariancia de la ecuación de Ermakov ante reversión temporal, se tiene que la reversa temporal de un atajo adiabático es también un atajo adiabático para el oscilador armónico.

Finalmente, es importante señalar que si bien podemos revertir una evolución temporal dada y reestablecer el estado inicial, esto no es posible para un estado general con el mismo número medio de fotones.

6.2. STA en Teoría cuántica de Campos

Cuando un campo es sujeto a condiciones externas que dependen del tiempo, el fenómeno de creación de partículas parece inevitable. Sin embargo, como mencionamos antes, en algunas situaciones particulares este fenómeno puede ser sorteado. Discutiremos algunos ejemplos a continuación.

6.2.1. Cavidad electromagnética: Aproximación de un solo modo

Consideremos una cavidad electromagnética con propiedades que dependen del tiempo (longitud variable y/o propiedades electromagnéticas). Es usual describir la física dentro de la cavidad usando la aproximación de un solo modo para el campo electromagnético cuántico. La dinámica de este modo es aquella de un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo

$$\ddot{Q}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2(t) Q_{\mathbf{k}} = 0\,, \tag{6.14}$$

donde $\mathbf{k}$ es índice que identifica el modo. La frecuencia $\omega_{\mathbf{k}}(t)$ depende del tiempo si, por ejemplo, la longitud de la cavidad $d(t)$ depende del tiempo.

Asumiendo que la frecuencia es constante para tiempo tempranos y tardíos ($t \to \pm\infty$) y que el modo está en el estado fundamental $|0_{\text{in}}\rangle$ al principio (para $t \to -\infty$), en el caso de una evolución rápida el modo electromagnético estará excitado para tiempos tardíos ($t \to +\infty$). En términos matemáticos tendremos que la transformación de Bogoliuvob que conecta los espacios in y out de Fock será, en

general, no trivial y tendremos creación de fotones en ese modo de la cavidad.

Una vez hecha esta aproximación resulta evidente que si queremos evitar excitar este modo del campo bastará con variar la frecuencia del modo utilizando un atajo adiabático como los que describimos en la sección anterior para un oscilador armónico. En tal caso se crearán fotones en tiempos intermedios y más tarde serán reabsorbidos para devolver a la cavidad al estado final correspondiente a una evolución adiabática infinitamente lenta.

Por supuesto esto es simplemente una aproximación que no describe de forma completa lo que sucede con la totalidad del campo electromagnético sobretodo cuando la pared se mueve de forma extremadamente rápida y su tiempo característico supera al período del modo considerado.

Los atajos adiabáticos descritos antes no pueden ser generalizados más allá de la aproximación de un solo modo dado que la frecuencia efectiva correspondiente a una dada longitud son diferentes para cada modo, por lo que no es posible evitar la creación de partículas en todos los modos. Más aún, para este sistema, un campo electromagnético dentro de una cavidad, todos los modos se ven acoplados entre sí.

En el resto de este capítulo consideraremos un sistema en el que es posible encontrar un STA no-trivial para todo el campo cuántico. Por no-trivial queremos decir que, si bien no hay creación de partículas al final de la evolución, la dinámica es no-adiabática a tiempos intermedios, es decir tenemos creación y posterior reabsorción de fotones. Antes de hacer esto, mencionamos algunos ejemplo de campos cuántico en fondos dependientes del tiempo en los cuales no hay creación de partículas, esto es porque los modos de los campos se comportan como osciladores armónicos con una frecuencia que depende del tiempo.

6.2.2. Atajos para una cavidad optomecánica

Es particularmente desafiante encontrar un atajo adiabático para el campo cuántico sin masa en un cavidad, dado que los únicos parámetros que podemos usar para controlar la evolución temporal del campo son las posiciones de los espejos a la izquierda y derecha, $L(t)$ y $R(t)$ respectivamente. Sin embargo, veremos que esto no solo es posible sino que diremos explícitamente cómo hacerlo.

Primero, es necesario conocer cual debería ser la evolución adiabática que estamos buscando reproducir. Como ya establecimos en el capítulo 2 se puede describir completamente la evolución temporal del campo sin masa con dos paredes móviles usando solo las dos funciones de Moore. En este caso y recordando el enfoque de WKB para el oscilador armónico asumiremos que tenemos trayectorias de referencia $L_{\rm ref}(t)$ y $R_{\rm ref}(t)$ y que en el límite adiabático estas funciones evolucionan el campo de acuerdo a funciones de Moore adiabáticas $F_{\rm ad}(t)$ y $G_{\rm ad}(t)$. Podemos buscar entonces trayectorias efectivas $L_{\rm eff}(t)$ y $R_{\rm eff}(t)$ tales que estas funciones de Moore no sean solo una aproximación adiabática sino que sean exactamente las soluciones de las ecuaciones de Moore para estas nuevas trayectorias

$$G_{\rm ad}(t + L_{\rm eff}(t)) - F_{\rm ad}(t - L_{\rm eff}(t)) = 0 \tag{6.15}$$

$$G_{\rm ad}(t + R_{\rm eff}(t)) - F_{\rm ad}(t - R_{\rm eff}(t)) = 2. \tag{6.16}$$

Así, podemos usar las trayectorias de referencia para obtener las funciones de Moore adiabáticas correspondientes y con ellas resolver las ecuaciones de Moore para encontrar trayectorias efectivas que generar esa evolución temporal de manera exacta para todo el campo, implementando así un atajo adiabático.

En las próximas secciones daremos las funciones adiabáticas de Moore y resolveremos numéricamente las Ecs. (6.15-6.16) para ciertas trayectorias de referencia propuestas y encontraremos las trayectorias efectivas. Primero para una pared móvil y luego veremos cómo generalizarlo para dos paredes.

Una vez obtenidas las trayectorias efectivas, necesitaremos utilizar una magnitud para decidir si se ha logrado un STA y medir cuan lejos estamos de uno. Para ello definimos el coeficiente de adiabaticidad

$$Q(t) := \frac{E(t)}{E_{\rm ad}(t)}, \tag{6.17}$$

donde $E(t)$ es la energía total en la cavidad

$$E(t) = \int_{L(t)}^{R(t)} dx \langle T_{00}(x,t) \rangle_{\rm ren}, \tag{6.18}$$

mientras que la energía adiabática viene dada por

$$E_{\rm ad}(t) = -\frac{\pi}{24d(t)} + \frac{Z(Td(0))}{d(t)}, \tag{6.19}$$

donde $d(t) = |R(t) - L(t)|$ es la longitud de la cavidad y T es la temperatura del estado térmico inicial. Notemos que el parámetro de adiabaticidad es igual a 1 si el campo ha evolucionado de manera adiabática. Sin embargo, debido a la energía de Casimir estática (el primer término de $E_{\rm ad}$), Q puede ser mayor o menor a un uno para temperaturas bajas o mayor a uno para temperaturas altas, si la cavidad es estática.

6.3. Atajos adiabáticos para un espejo móvil

Veamos cómo obtener atajos adiabáticos para un campo cuántico escalar sin masa en una cavidad con una sola pared móvil. En ese caso si la trayectoria de la pared viene dada por la función $L(t)$, se sabe que la función de Moore adiabática viene dada por [6]

$$R_{\rm ad}[L] = \int^t \frac{dt'}{L(t')}\,. \tag{6.20}$$

Consideremos una trayectoria de referencia (no-adiabática) $L_{\rm ref}(t)$ que comienza en L_0 y termina en L_1. Quisiéramos encontrar una trayectoria efectiva, $L_{\rm eff}(t)$, tal que la evolución temporal de los modos viene dada por la solución adiabática $L_{\rm ref}(t)$. Entonces, reemplazando la función de Moore adiabática en la ecuación de Moore y pidiendo que se satisfaga para la trayectoria efectiva obtenemos la siguiente ecuación

$$\int_0^{t+L_{\rm eff}(t)} \frac{1}{L_{\rm ref}(t')}dt' - \int_0^{t-L_{\rm eff}(t)} \frac{1}{L_{\rm ref}(t')}dt' = 2. \tag{6.21}$$

Insistimos en que esta ecuación define la trayectoria efectiva $L_{\rm eff}(t)$. Por lo tanto, implementando esta trayectoria, los modos del campo serán descritos exactamente por la función de Moore adiabática para la trayectoria de referencia $L_{\rm ref}$. Más aún, las longitudes iniciales y finales de la cavidad serán las mismas para ambas trayectorias, y la población de los modos será también la misma a tiempos iniciales y finales

debido a la linealidad de la función de Moore: $L_{\text{eff}}(t)$ es entonces un atajo adiabático asociado con la trayectoria de referencia $L_{\text{ref}}(t)$, de la misma manera que $\omega_{\text{eff}}(t)$ es un atajo adiabático para el oscilador armónico con frecuencia $\omega_{\text{ref}}(t)$.

Es sencillo ver que para tiempos tempranos la posición de ambas trayectorias coincide y es estática, ya que si $t + L_{\text{eff}}(t) < 0$ entonces $L_{\text{eff}}(t) = L_{\text{ref}}(0) = L_0,$ para $t < -L_{\text{ref}}(0)$. Análogamente se puede ver que lo mismo ocurre para tiempos tardíos, si $t - L_{\text{eff}}(t) > \tau$ entonces $L_{\text{eff}}(t) = L_{\text{ref}}(\tau) = L_1,$ para $t > \tau + L_{\text{ref}}(\tau)$. Una pregunta relevante es si esta trayectoria es en efecto una trayectoria real, es decir si es continua y con velocidad siempre menor a la de la luz $c = 1$. Podemos responder esta pregunta tomando la derivada temporal de la ecuación de Moore que la define y resolver para la velocidad de la pared

$$\frac{d}{dt}L_{\text{eff}}(t) = \frac{L(t + L_{\text{eff}}(t)) - L(t - L_{\text{eff}}(t))}{L(t - L_{\text{eff}}(t)) + L(t + L_{\text{eff}}(t))} \leq 1, \tag{6.22}$$

de donde podemos ver que la velocidad está efectivamente acotada por la velocidad de la luz.

Una trayectoria suave sencilla que interpola entre la posición inicial L_0 y la final L_1 viene dada por

$$L_{\text{ref}}(t) = \begin{cases} L_0\,, & t < 0 \\ L_0\left(1 - \epsilon\delta(t)\right), & 0 < t < \tau \\ L_1\,, & \tau < t\,, \end{cases} \quad . \tag{6.23}$$

donde ϵ es una constante positiva menor a 1, la distancia final viene dada por $L_1 = L_0(1 - \epsilon)$ y la función de evolución es

$$\delta(t) = 10(t/\tau)^3 - 15(t/\tau)^4 + 6(t/\tau)^5. \tag{6.24}$$

En la Fig. 6.1 mostramos la trayectoria efectiva $L_{\text{eff}}(t)$ asociada a esta $L_{\text{ref}}(t)$ obtenida mediante una resolución numérica de la ecuación de Moore. La densidad de energía dentro de la cavidad evoluciona desde la energía de Casimir estática térmica correspondiente a la longitud L_0 hasta la correspondiente a L_1 a la misma tem-

peratura. La evolución es no-adiabática en tiempos intermedios, como se muestra en Fig.6.2 para el caso particular de temperatura nula $T = 0$: de hecho, para una evolución adiabática la densidad de energía sería constante dentro de la cavidad a cada instante, e igual a la densidad de energía del efecto Casimir estático correspondiente al tamaño instantáneo de la cavidad. Notemos también que, para una trayectoria arbitraria (no un atajo), la densidad de energía final también contendrá la contribución de las partículas creadas por DCE. En la Fig. 6.3, graficamos el parámetro de adiabaticidad Q^* para la cavidad como una función del tiempo, durante un atajo, a diferentes temperaturas para la trayectoria de referencia al igual que para el STA correspondiente. Este parámetro efectivamente mide la distancia entre la energía adiabática para un movimiento infinitamente lento (adiabático) y la energía que efectivamente se encuentra en la cavidad para el STA encontrado, siendo por supuesto igual a 1 cuando ambos coinciden. Podemos ver que si bien ambos se desvían del resultado adiabático a tiempos intermedios, el STA regresa a 1 al final del movimiento confirmando la implementación de un atajo adiabático y su desviación a tiempos intermedios es relativamente pequeña. Si bien hay ciertos tiempos en los cuales las trayectorias de referencias cruzan $Q^* = 1$ esto no constituye un STA, dado que si detuviéramos la pared repentinamente en ese instante, la misma desaceleración generaría fotones de DCE que dejarían $Q^* \neq 1$ luego. Esta es la razón por la que es crucial que las trayectorias consideradas tengan velocidad y aceleración final nula.

Para resumir, resolviendo la ecuación de Moore $L_{\text{eff}}(t)$ conseguimos una trayectoria que cuando es implementada genera una evolución del estado del campo cuántico que al final coincide con aquel de una evolución adiabática exacta a lo largo de la trayectoria $L_{\text{ref}}(t)$. Esto es, hemos encontrado un atajo adibático para un campo escalar cuántico sin masa en una cavidad con una pared móvil. Estos resultados pueden ser generalizados a otros campos conformes de mayor dimensión confinados a una cavidad de longitud variable, como un campo de Dirac sin masa que satisface condiciones de contorno de tipo bolsa (bag boundary conditions) [134].

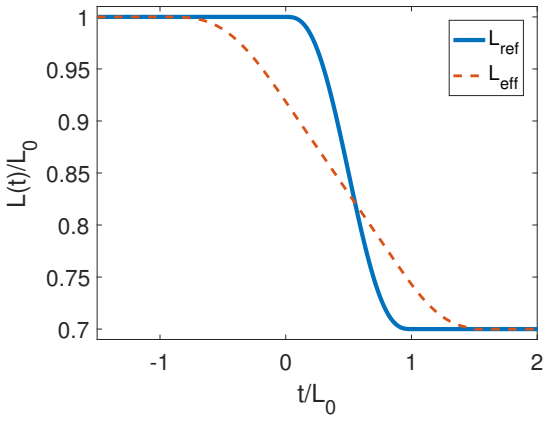


Figura 6.1: 'Trayectoria de referencia (línea azul sólida) dada por Eq. (6.23) con $\epsilon = 0.3$ y $\tau/L_0 = 1$. La trayectoria efectiva correspondiente (línea naranja punteada) calculada a partir de la Ec. (6.21) que genera el atajo adiabático.

6.3.1. Trayectoria límite, eficiencia y potencia

Para poder discutir algunos límites fundamental para la potencia y la eficiencia del ciclo Otto cuántico estudiado en el capítulo anterior, vamos a considerar la siguiente trayectoria límite $L_{\text{ref}}(t) = L_0\theta(-t) + L_1\theta(t)$, que corresponde a un desplazamiento temporal infinitamente pequeño, $\tau \ll L_0, L_1$.

En este caso podemos reemplazar en la Ec. (6.21) para encontrar que la trayectoria efectiva viene dada por

$$L_{\text{eff}}(t) = \begin{cases} L_0 & t < -L_0 \\ \frac{2L_0L_1 - t(L_0 - L_1)}{L_0 + L_1} & -L_0 < t < L_1 \\ L_1 & L_1 < t \end{cases} . \tag{6.25}$$

Esto significa que en caso límite donde queremos implementar un cambio de longitud instantáneo sin una generación espuria de fotones, necesitamos al menos $L_0 + L_1$ unidades de tiempo real para implementarla y consiste de un movimiento uniforme. Esto es consistente con resultados previos para este caso particular [10, 135].

Hemos mencionado previamente que es necesario considerar un movimiento en tiempo finito para mejorar la potencia entregada por un motor como el de la sección previa, pero esto usualmente resulta en una energía de fricción adicional sobre el

medio de trabajo que disminuye la eficiencia del motor. En el caso de una campo escalar cuántico con una pared móvil hemos encontrado un STA, que maximiza el trabajo entregado, que resulta ser el adiabático $\langle w_{\rm ad}\rangle$, con una eficiencia $\eta = \eta^{\rm ad}$. Más aún, la potencia producida por el tiempo mínimo que toma implementar un STA (el doble para compresión y expansión bajo la suposición que la termalización es mucho más rápida que esas ramas) resulta ser

$$P = \frac{W_{\rm ad}}{2(L_0 + L_1 + \tau)} \leq \frac{W_{\rm ad}}{2(L_0 + L_1)}. \tag{6.26}$$

En la Fig. 6.4 comparamos la potencia entregada por el motor bajo la acción de un ciclo cuántico de Otto cuyas ramas de expansión y compresión vienen dadas por un trayectoria de referencia o su correspondiente atajo adiabático. Podemos ver que para movimientos lentos (es decir, τ grande) convergen al mismo valor $P \to 0$, dado que $\tau \gg L_0$ y $W \approx W_{\rm ad}$, pero para movimientos extremadamente rápidos la potencia de la trayectoria de referencia decrece rápidamente y se vuelve negativa mientras que para el STA, que siempre tiene una eficiencia superior, también entrega más potencia.

Si bien hemos dado una forma explícita de calcular un STA que maximiza tanto la eficiencia como la potencia entregada, puede ser muy difícil implementarlo en la práctica. Por ejemplo, para un ciclo de Otto la eficiencia viene dada por

$$\eta^{\rm otto} = 1 - \frac{L_1}{L_0} \leq \eta^{\rm carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_0}, \tag{6.27}$$

y está acotada por la eficiencia de Carnot. Entonces dada una longitud de la cavidad L_0 y que disponemos de baños térmicos a temperaturas T_1 y T_0, si queremos lograr la mejor eficiencia posible la longitud final está fija en $L_1/L_0 = T_1/T_0$. Implementando luego el mejor STA posible nos fuerza a mover el espejo a velocidad $v = (L_0 - L_1)/(L_0 + L_1)$, lo cual para $T_0 \gg T_1$ nos da $L_0 \gg L_1$, y la velocidad se aproxima a la de la luz $v \approx 1$, llevándonos a una imposibilidad experimental.

Alternativamente, podemos plantear el problema con la restricción de que la velocidad del espejo sea a lo sumo una constante v. Entonces, para conseguir la máxima potencia posible elegiríamos un STA con velocidad constante dada por $v =$

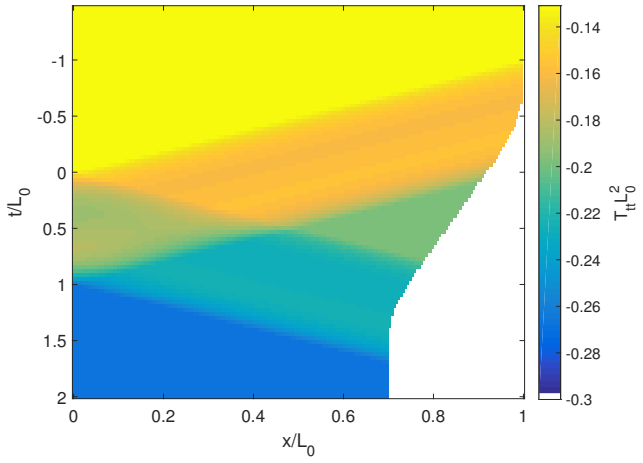


Figura 6.2: Densidad de energía para un atajo adiabático correspondiente a una trayectoria polinomial con longitud $L_1/L_0 = 0.7$ y $\tau/L_0 = 1$ desde $t = -L_0$ a $t = L_1 + \tau$ y el campo inicialmente en el estado de vacío. La densidad de energía es una constante negativa antes y después de la compresión dada por la energía de Casimir estática.

$(L_0 - L_1)/(L_0 + L_1)$. Esto determina que la longitud final sea $L_1 = L_0(1-v)/(1+v)$. Ahora podemos ver claramente que la eficiencia

$$\eta^{\text{otto}} = 1 - \frac{(1-v)}{(1+v)} \tag{6.28}$$

está relacionada directamente con la velocidad máxima que puede alcanzar el espejo.

Ahora tocamos otro problema relacionado ¿es posible realizar una traslación de la cavidad evitando la excitación espuria de los modos? Si permitimos que la cavidad se desplace de forma no-rígida entonces esto se puede lograr trivialmente usando dos pasos de atajos adiabáticos, moviendo primero el espejo de la derecha y luego el de la izquierda hacia el mismo lado, ambos ejecutando un STA. El resultado es una traslación sin excitaciones que es de suma relevancia para discusiones sobre información cuántica relativista en donde hemos visto que el DCE puede degradar el entrelazamiento entre los observadores en movimiento relativo [107].

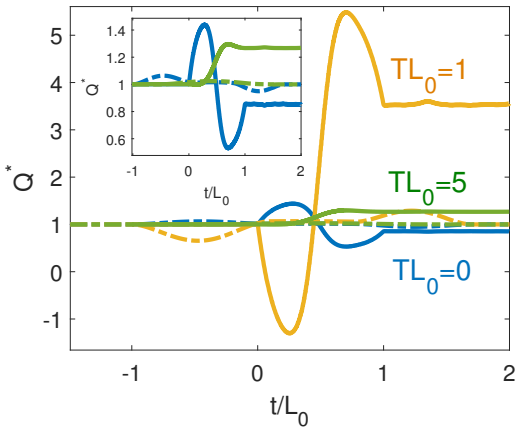


Figura 6.3: Parámetro de adiabaticidad como función del tiempo para las trayectorias de referencia (línea sólida) y efectiva (línea punteada) a tres temperaturas diferentes. Un inset ha sido agregado para visualizar mejor las curvas para $TL_0 = 0$ y $TL_0 = 5$. Los parámetros usados para la trayectoria de referencia fueron $\epsilon = 0.3$ y $\tau/L_0 = 1$.

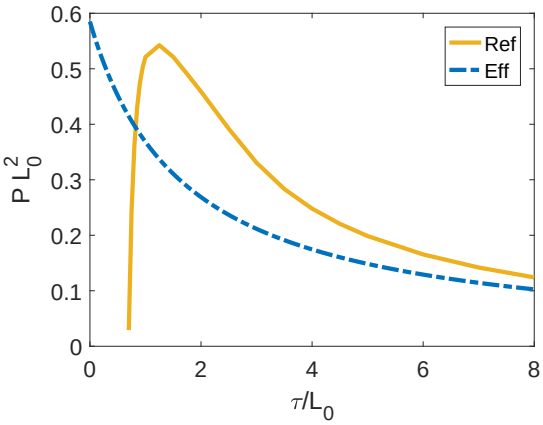


Figura 6.4: Potencia para un ciclo Otto como función de la escala temporal, τ, implementando la trayectoria de referencia (línea sólida) o la trayectoria efectiva del STA (línea punteada) para las ramas de compresión y expansión. El parámetro usado para la trayectoria fue $\epsilon = 0.3$, mientras que los baños térmicos usados para el ciclo tenían temperaturas $T_0 L_0 = 1$ y $T_1 L_0 = 5$.

6.4. Atajos adiabáticos para dos espejos móviles

Para generalizar los resultados anteriores al caso de dos espejos móviles nos encontramos fundamentalmente con dos dificultades. La primera de ellas es que no conocemos la forma de las funciones de Moore adiabáticas las cuales son imprescindibles para resolver las Ecs. (6.15-6.16). La segunda dificultad es que para compararla con la trayectoria de referencia es necesario un algoritmo para obtener las funciones de Moore F y G dadas las trayectorias de los espejos. Estos resultados son obtenidos en el apéndice A, en las próximas secciones los presentaremos y utilizaremos para calcular propiedades de los atajos adiabáticos para dos espejos móviles.

6.4.1. Límite de las trayectorias efectivas

Una vez obtenidas las funciones de Moore adiabáticas para una cavidad con dos espejos móviles

$$F_{\rm ad}(t) = \int dt \frac{1}{R(t) - L(t)} + \frac{1}{2}\frac{R(t) + L(t)}{R(t) - L(t)} \tag{6.29}$$

$$G_{\rm ad}(t) = \int dt \frac{1}{R(t) - L(t)} - \frac{1}{2}\frac{R(t) + L(t)}{R(t) - L(t)}. \tag{6.30}$$

ya podemos obtener ciertas propiedades analíticas de las trayectorias efectivas que producen los atajos adiabáticos en este sistema. Vamos entonces a resolver las ecuaciones de Moore para el caso en que las trayectorias de referencia vienen dadas por un movimientos instantáneo

$$R_{\rm ref}(t) = R_0\theta(-t) + R_f\theta(t) \tag{6.31}$$

$$L_{\rm ref}(t) = L_0\theta(-t) + L_f\theta(t). \tag{6.32}$$

Estamos buscando el límite de las trayectorias efectivas $L_{\rm lim}(t)$ y $R_{\rm lim}(t)$ tales que

$$G_{\rm ad}(t + L_{\rm lim}(t)) - F_{\rm ad}(t - L_{\rm lim}(t)) = 0 \tag{6.33}$$

$$G_{\rm ad}(t + R_{\rm lim}(t)) - F_{\rm ad}(t - R_{\rm lim}(t)) = 2. \tag{6.34}$$

Para estas trayectorias de referencia las funciones de Moore vienen dadas por

$$F_{\rm ad}(t) = \frac{t+L_0}{R_0-L_0}\theta(-t) + \frac{t+L_f}{R_f-L_f}\theta(t) \tag{6.35}$$

$$G_{\rm ad}(t) = \frac{t-L_0}{R_0-L_0}\theta(-t) + \frac{t-L_f}{R_f-L_f}\theta(t), \tag{6.36}$$

lo que significa que las funciones de Moore son lineales antes y después de $t = 0$. Podemos usar este resultado para analizar las ecuaciones de Moore una por una. Si $t < -R_0$, entonces

$$t - R_{\rm eff}(t) < 0, \quad t + R_{\rm eff}(t) < 0 \tag{6.37}$$

y la solución es

$$R_{\rm lim}(t < -R_0) = R_0. \tag{6.38}$$

Adicionalmente, si $t > R_f$, cuando

$$t - R_{\rm lim}(t) > 0, \quad t + R_{\rm lim}(t) > 0 \tag{6.39}$$

y la solución es

$$R_{\rm lim}(t > R_f) = R_f. \tag{6.40}$$

Sin embargo, si $-R_0 < t < R_f$, entonces

$$t + R(t) > 0, \quad t - R(t) < 0 \tag{6.41}$$

y la ecuación de Moore viene dada por

$$\frac{(t+R_{\rm lim}(t)) - L_f}{R_f - L_f} - \frac{(t-R_{\rm lim}(t)) + L_0}{R_0 - L_0} = 2. \tag{6.42}$$

Resolviendo esta ecuación para $R_{\rm lim}(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} R_{\rm lim}(t) &= \frac{2(R_0-L_0)(R_f-L_f) + L_f(R_0-L_0) + L_0(R_f-L_f)}{(R_0-L_0)+(R_f-L_f)} \\ &- t\frac{(R_0-L_0)-(R_f-L_f)}{(R_0-L_0)+(R_f-L_f)} = R_c + v_{\rm lim}t. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Similarmente, tenemos $L_{\rm lim}(t < -L_0) = L_0$, $L_{\rm lim}(t > L_f) = L_f$ y

$$L_{\rm lim}(-L_0 < t < L_F) = \frac{L_f(R_0 - L_0) + L_0(R_f - L_f)}{(R_0 - L_0) + (R_f - L_f)} + v_{\rm lim}t. \tag{6.44}$$

En palabras simples, las trayectorias efectivas límites, a tiempos tempranos y tardíos, coinciden con la posición constante de la trayectoria de referencia. Para tiempos intermedios, las trayectorias límite son simplemente movimientos uniformes con la misma velocidad, $v_{\rm lim}$, para los espejos de la izquierda y la derecha. Esta velocidad está determinada solo por las longitudes finales e iniciales, siendo negativa para una contracción, positiva para una expansión y cero si la cavidad se mueve rígidamente.

Adicionalmente, es posible notar que, en general, estas trayectorias límite no son funciones continuas. Esto está relacionado con el hecho de que si el movimiento de referencia ocurre en una escala de tiempo τ, existe un τ_c crítico (el cual depende de la forma del movimiento de referencia) para el cual las trayectorias efectivas dejan de ser físicamente realizables dado que la velocidad debería ser mayor que la velocidad de la luz en algún punto.

Sin embargo, imponiendo continuidad para las funciones,

$$R_0 = R_{\rm lim}(-R_0), \quad R_f = R_{\rm lim}(R_f), \tag{6.45}$$

$$L_0 = L_{\rm lim}(-L_0), \quad L_f = L_{\rm lim}(L_f), \tag{6.46}$$

encontramos que si $L_f R_0 = L_0 R_f$, las trayectorias límite son de hecho continuas. Dos casos simples donde esto se verifica es o bien cuando hay un movimiento de referencia trivial (o sea si $L_0 = L_f$ y $R_0 = R_f$) o en el caso en que una de las paredes está en reposo en el origen, $L_0 = L_f = 0$, y la otra se mueve libremente.

6.4.2. Trayectorias de referencia

En las secciones siguientes utilizaremos el algoritmo desarrollado (ver la sección B del apéndice) para hacer un análisis numérico comparando las trayectorias de referencia con sus correspondientes trayectorias efectivas (o STA). También calcularemos el parámetro de adiabaticidad para diferentes temperaturas. Para hacer esto

necesitamos una densidad de energía del campo en la cavidad que sea continua y bien definida a todo tiempo. Sin embargo, de acuerdo a la Ec. (2.54) tenemos que $\langle T_{tt}(x,t)\rangle_{\rm ren}$ involucra derivadas de hasta tercer orden en la función de Moore, lo que implica derivadas de hasta tercer orden en las trayectorias. Si además pedimos que el movimiento de las paredes se encuentre restringido a un intervalo de tiempo finito, podemos satisfacer estas condiciones eligiendo trayectorias de referencia de la forma

$$L_{\rm ref}(t) = (L_f - L_0)\delta(t/\tau) + L_0 \tag{6.47}$$

$$R_{\rm ref}(t) = R_0\left[1 - \epsilon\delta(t/\tau)\right] \tag{6.48}$$

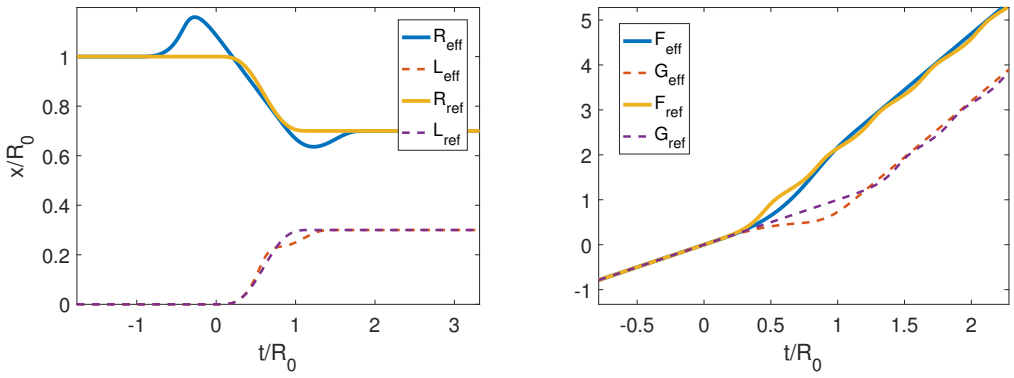
donde el polinomio $\delta(x) = 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7$ satisface $\delta(0) = \delta'(0) = \delta''(0) = \delta'''(0) = \delta'(1) = \delta''(1) = \delta'''(1) = 0$ y $\delta(1) = 1$. Notemos que este polinomio difiere de los que usamos para el ciclo Otto o para un cavidad con una sola pared móvil debido que antes bastaba con derivadas continuas de hasta orden 2 pero ahora necesitamos ir hasta orden 3.

En las siguientes secciones utilizaremos estas trayectorias para analizar diferentes tipos de movimientos, tales como contracciones, expansiones y desplazamientos rígidos. Para ellas calcularemos las trayectorias efectivas correspondientes para compararlas y revisar si se logra implementar un atajo adiabático.

6.4.3. Contracción

Primero analizamos una contracción simétrica de la cavidad, es decir, el caso en que ambos espejos realizan el mismo movimiento de referencia al mismo tiempo pero en sentido opuestos. Representamos esto tomando las funciones de referencia en Ecs. (6.47-6.48) y resolviendo numéricamente las Ecs. (6.15-6.16) para las trayectorias efectivas, $R_{\rm eff}(t)$ and $L_{\rm eff}(t)$.

En la Fig. 6.5a, mostramos las trayectorias de referencia y atajo correspondiente para el espejo de la izquierda (línea punteada) y derecha (línea sólida) en una contracción simétrica. Notamos que la trayectoria efectiva para el espejo de la derecha comienza a moverse primero cerca de $t = -R_0$, mientras que el espejo de la izquierda



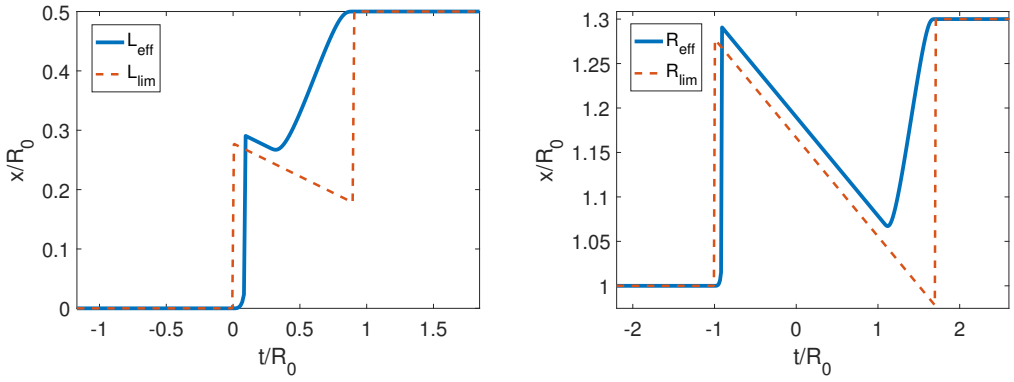
(a) (b)

Figura 6.5: (**a**) Trayectorias de referencia con sus correspondientes trayectorias efectivas para los espejos de la izquierda y derecha en el caso de una contracción simétrica. (**b**) Funciones de Moore resultantes para las trayectorias de referencia y efectivas. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 1.2$, $\epsilon = 0.3$, $L_0/R_0 = 0$, $L_f/R_0 = 0.3$ y $R_f/R_0 = 0.7$.

se mueve luego en $t = -L_0$, como señalamos en nuestro análisis para las trayectorias límite. Si miramos a R_{eff}, también podemos notar que los mínimos y máximos locales cerca de estos puntos se desarrollan en discontinuidades para τ muy chicos. Esto también puede ser visto en la Fig. 6.6, donde comparamos las trayectorias efectivas para una contracción asimétrica con $\tau/R_0 = 0.4$ y las trayectorias efectivas límite analíticas (Ecs. (6.43-6.44)). Allí, las discontinuidades se vuelven más evidentes. También es notable que la trayectoria de la derecha converge más rápido que la de la izquierda y que la pendiente de la curva, es decir, la velocidad es negativa, siendo consistente con nuestros resultados analíticos.

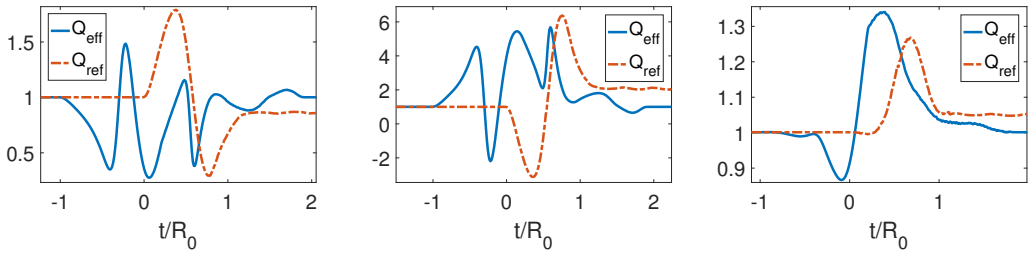
En la Fig. 6.5b, mostramos las funciones de Moore resultantes para las trayectorias de referencia y efectivas. Para estas últimas, vemos que las funciones son lineales a tiempos tempranos y tardíos. Por otro lado, las funciones de Moore para trayectoria de referencia son lineales más una oscilación a tiempos tardíos, manifestando la creación de partículas.

Por último analizamos el parámtro de adiabaticidad para diferentes temperaturas iniciales, como se muestra en la Fig. 6.7. Notamos que el parámetro de adiabaticidad es inicialmente 1. Luego, si bien ambas trayectorias se desvían de este valor, la trayectoria de referencia termina en valores muy superiores a la unidad mientras



(a) (b)

Figura 6.6: (**a**) Trayectorias efectiva y límite del espejo de la izquierda para una contracción asimétrica. (**b**) Trayectorias efectiva y límite del espejo derecho. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 0.4$, $\epsilon = -0.3$, $L_0/R_0 = 0$, $L_f/R_0 = 0.5$ y $R_f/R_0 = 1.3$.



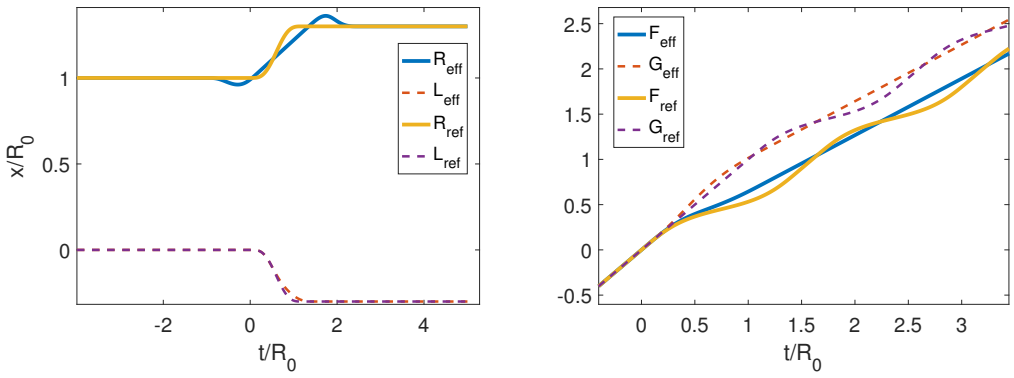
(a) (b) (c)

Figura 6.7: Parámetro de adiabaticidad para una contracción simétrica a tres temperatus diferentes: (**a**) $TR_0 = 0$, (**b**) $TR_0 = 1$ y (**c**) $TR_0 = 5$. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 1.2$, $\epsilon = 0.3$, $L_0/R_0 = 0$ y $L_f/R_0 = 0.3$, $R_f/R_0 = 0.7$.

que la trayectoria efectiva regresa al valor inicial indicando que se ha logrado una evolución adiabática de principio a fin en la que se reabsorben los fotones emitidos. También es destacable que a medida que la temperatura se incrementa, las curvas se vuelven más suaves.

6.4.4. Expansión

A continuación analizaremos el atajo adiabático propuesto para una trayectoria de referencia dada por una expansión simétrica de la cavidad. Para esto usamos las funciones de referencia dadas por las Ecs. (6.47-6.48) con $\epsilon < 0$ y $L_f = \epsilon R_0$.



(a) (b)

Figura 6.8: (**a**) Trayectorias de referencia y atajo correspondiente para los espejos de la derecha e izquierda en el caso de una expansión simétrica. (**b**) Funciones de Moore resultantes para las trayectorias de referencia y efectivas anteriores. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 1.2$, $\epsilon = -0.3$, $L_0/R_0 = 0$, $L_f/R_0 = -0.3$ y $R_f/R_0 = 1.3$.

En la Fig. 6.8a, mostramos las trayectorias de referencia y efectivas del espejo izquierdo (línea punteada) y derecho (línea sólida) junto con la correspondiente trayectoria efectiva para una expansión simétrica. Notamos que el atajo adiabático para el espejo derecho tiene, nuevamente, un mínimo y máximo local cercanos al punto donde se desarrollará una discontinuidad para $\tau \to 0$, en acuerdo con las trayectorias efectivas límite obtenidas antes. Por otro lado, la trayectoria efectiva del espejo derecho es muy similar a la de referencia. Esto es porque, como dijimos antes, la convergencia de esta trayectoria a su límite es mucho más lenta. Las funciones de Moore, sin embargo, tienen un comportamiento similar al caso anterior.

En la Fig. 6.9, presentamos el parámetro de adiabaticidad para una expansión simétrica para tres temperaturas diferentes. En este caso, parámetro de adiabaticidad de nuevo confirma que hemos obtenido un STA, dado que es 1 para la trayectoria efectiva a tiempos tardíos. También podemos ver que el efecto de la temperatura sobre este parámetro, consiste en suavizar la curva a medida que la temperatura aumenta. El STA nos permite ahorrar más energía para temperaturas más altas.

6.4.5. Movimiento rígido

Motivados por el problema de la degradación del entrelazamiento en una cavidad que se mueve rígidamente, sería de gran utilidad disponer de un atajo que preserve

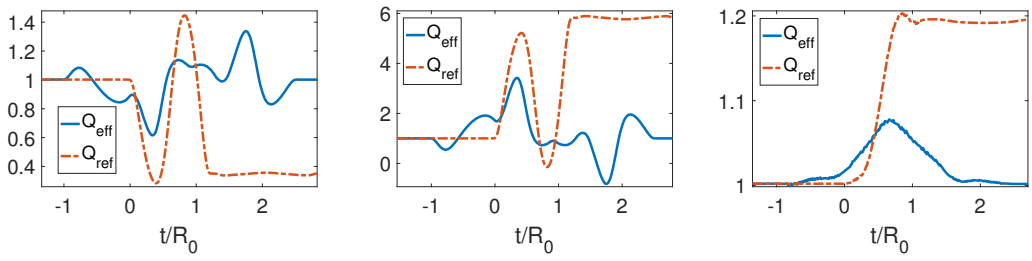
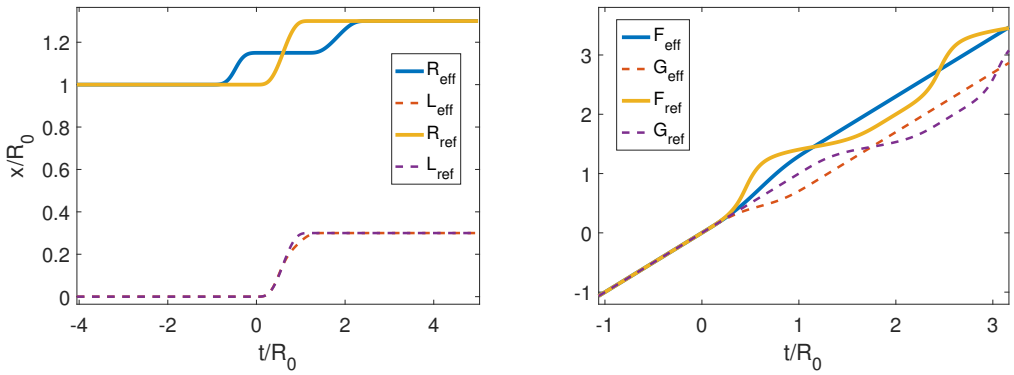


Figura 6.9: Parámetro de adiabaticdad para una expansión simétrica para tres temperaturas diferentes: (**a**) $TR_0 = 0$, (**b**)$TR_0 = 1$ y (**c**) $TR_0 = 5$. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 1.2$, $\epsilon = -0.3$, $L_0/R_0 = 0$, $L_f/R_0 = -0.3$ y $R_f/R_0 = 1.3$.

la información. Por ello el último tipo de trayectoria de referencia que vamos a considerar es una traslación rígida. Implementaremos este movimiento usando las funciones de referencia dadas por las Ecs. (6.47-6.48) con $\epsilon < 0$ y $L_f = -\epsilon R_0$.

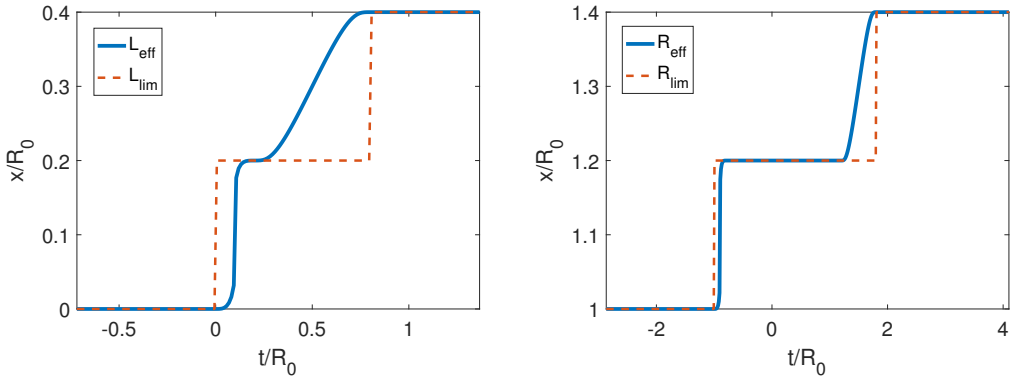
En la Fig. 6.10, mostramos las trayectorias de referencia y efectivas para el espejo de la izquierda (línea punteada) y derecha (línea sólida) cuando la cavidad se mueve rígidamente. Podemos ver que la trayectoria efectiva para el espejo izquierdo es muy similar a la trayectoria de referencia. Sin embargo, para el espejo de la derecha el atajo es extremadamente diferente de los otros dos casos estudiados previamente. Observamos que el espejo de la derecha se mueve la mitad de la distancia objetivo, se detiene, luego se mueve el espejo de la izquierda y por último se mueve de nuevo el espejo de la derecha el tramo restante. Si bien este movimiento puede parecer extraño a primera vista, está muy bien descrito por la trayectoria efectiva límite en Fig. 6.11, la cual predice que la velocidad del movimiento debería ser cero para una trayectoria de referencia que no modifica la longitud de la cavidad. Las funciones de Moore también tienen un comportamiento similar a los casos previos exhibiendo oscilaciones a tiempos tardíos para la trayectoria de referencia y lineal para el atajo adiabático.

Finalmente, estudiamos el parámetro de adiabaticidad para el movimiento rígido de referencia como se muestra en la Fig. 6.12. Vemos que las trayectorias efectivas dadas por las Ecs. (6.47-6.48) resultan en un atajo adiabático exitoso, ya que dan como resultado $Q_{\text{eff}} = 1$ para tiempos tardíos. La energía ahorrada por usar este



(a) (b)

Figura 6.10: (**a**) Trayectorias de referencia con su atajo adiabático correspondiente para los espejos de la izquierda y derecha en el caso de una traslación rígida. (**b**) Funciones de Moore resultantes para las trayectorias de referencia y efectivas. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 1.2$, $\epsilon = -0.3$, $L_0/R_0 = 0$ y $L_f/R_0 = 0.3$ $R_f/R_0 = 1.3$.



(a) (b)

Figura 6.11: Trayectorias efectivas y límite para el espejo izquierdo (**a**) y derecho (**b**) para un movimiento rígido. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 0.4$, $\epsilon = -0.4$, $L_0/R_0 = 0$, $L_f/R_0 = 0.4$ y $R_f/R_0 = 1.3$.

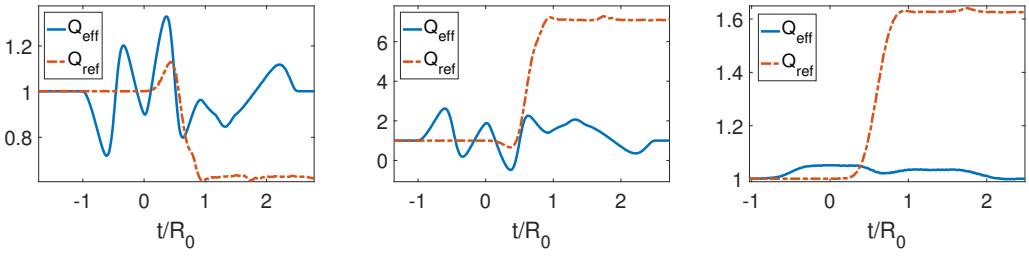


Figura 6.12: Parámetro de adiabaticidad para una traslación rígida a tres temperaturas diferentes: (**a**) $TR_0 = 0$, (**b**) $TR_0 = 1$ y (**c**) $TR_0 = 5$. Los parámetros usados para este cálculo fueron $\tau/R_0 = 1.2$, $\epsilon = -0.3$, $L_0/R_0 = 0$, $L_f/R_0 = 0.3$ y $R_f/R_0 = 1.3$.

protocolo crece para temperaturas altas.

6.5. Completando un STA en una cavidad optomecánica

En esta sección presentaremos distintos métodos para completar una trayectoria dada a un atajo adiabático para un campo escalar cuántico sin masa en un cavidad con una pared móvil (después generalizaremos a dos). Esto es, asumimos que la cavidad está inicialmente en un cierto estado gaussiano en la posición R_- y ha sufrido una perturbación que movió la pared de la derecha de acuerdo a la trayectoria $R_{\rm I}(t)$ con una función de Moore asociada $F(z)$. Nuestro objetivo entonces será encontrar una segunda trayectoria $R_{\rm II}(t)$ tal que la trayectoria conjunta $R_{\rm eff}(t)$ tenga una función de Moore que sea lineal tanto a tiempos tempranos como tardíos, lo que dará como resultado una evolución adiabática del campo. Presentaremos diferentes estrategias para conseguir esto, basadas en las ideas expresadas en la Sec. 6.1.2 para el oscilador armónico.

6.5.1. Ingeniería inversa

Ahora presentamos el primer método para completar una trayectoria a un atajo adiabático. Este método es teóricamente bastante simple y funciona para una posición final arbitraria. Por otro lado, su implementación práctica es más desafiante e

involucra tres pasos: el cálculo de las funciones de Moore asociadas a la evolución inicial, su posterior continuación suave a funciones lineales y por último el cálculo de la trayectoria efectiva usando ingeniería inversa a partir de la función de Moore extendida.

De esta forma, por construcción, la función de Moore de esta trayectoria efectiva será lineal al comienzo y al final, dando como resultado un atajo adiabático para el campo desde el instante en que comienza la primera trayectoria hasta el fin de la segunda. Notemos que este método es totalmente análogo al presentado previamente para el oscilador armónico, donde ahora la derivada de la función lineal, siendo constante al comienzo y al final, cumple el rol de la función de Ermakov.

Para ilustrar esta estrategia consideremos una trayectoria inicial para los espejos dada por

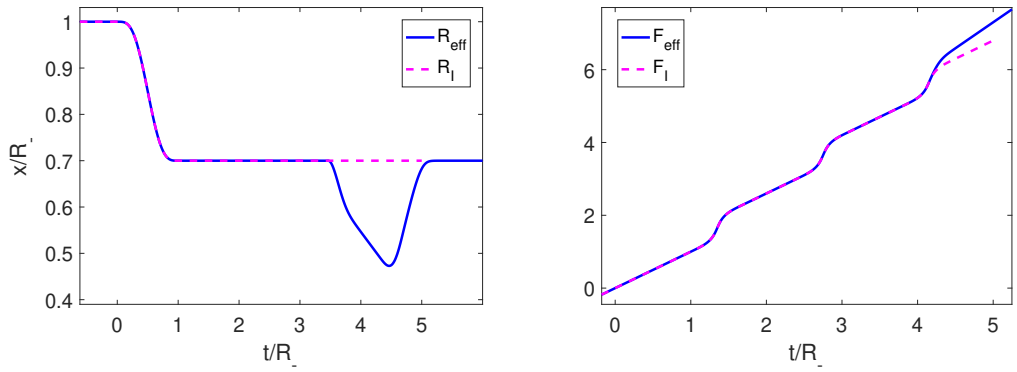
$$\begin{aligned} L_{\mathrm{I}}(t) &= 0 \\ R_{\mathrm{I}}(t) &= \begin{cases} R_- & t < 0 \\ f(t) & 0 < t < \tau \\ R_+ & \tau < t \end{cases} , \end{aligned} \tag{6.49}$$

donde la función $f(t)$ viene dada por el siguiente polinomio

$$\begin{aligned} f(t) &= R_-(1 - \epsilon\delta(t/\tau)) \\ \delta(x) &= 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7, \end{aligned} \tag{6.50}$$

el cual verifica $\delta(0) = 0$ y $\delta(1) = 1$. Como vimos antes, la elección de este polinomio nos asegura que $R_{\mathrm{I}}(t)$ y sus tres derivadas sean continuas. Esto es necesario para evitar divergencias espurias en el tensor de energía-momento (ver Ec. (2.54)).

Usando esta trayectoria, podemos calcular numéricamente la función de Moore asociada F_{I}, la cual es oscilante a tiempos tardíos debido a la creación de fotones, y extenderla de forma continua en una función lineal F_{eff} con cualquier pendiente deseada (lo cual a su vez determina la posición final de la pared). Luego podemos recuperar la trayectoria del espejo correspondiente $R_{\mathrm{eff}}(t)$ para la función extendida



(a) (b)

Figura 6.13: a) Trayectoria inicial para el espejo de la derecha en magenta y su completación a un atajo adiabático en azul. b) Funciones de Moore para las trayectorias correspondientes. Los parámetros empleados para la primera trayectoria fueron $R_{-} = 1$, $\epsilon = 0.3$ y $\tau = 1$.

resolviendo la Ec. (2.47) (ver Fig. 6.13).

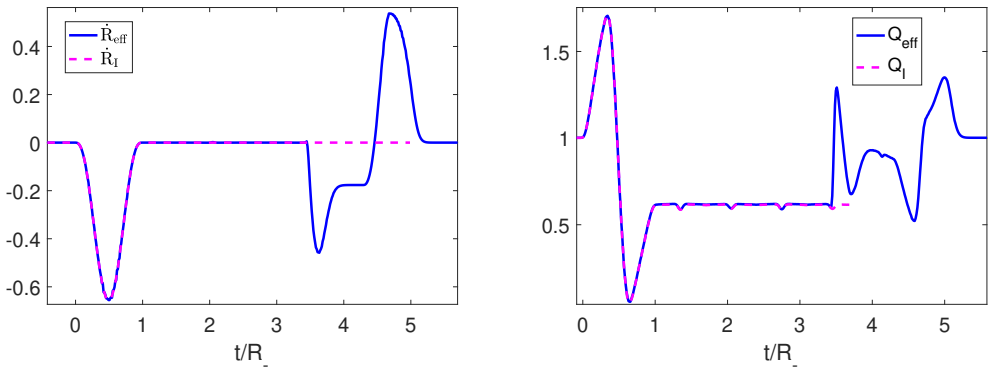
La trayectoria resultante es una función continua bien definida que comienza en la posición final de la perturbación y termina en la posición establecida por la pendiente seleccionada para la lineal a tiempos tardíos. Se puede ver que la velocidad se halla por debajo de la velocidad de la luz. También podemos comprobar que la trayectoria del comienzo al final constituye un atajo adiabático dado que el parámetro de adiabaticidad Q_{eff} comienza y termina en 1 (Figure 6.14).

La desventaja de este método es que para borrar los fotones generados por el movimiento inicial se necesita calcular la función de Moore del campo, extenderla suavemente y luego calcular la trayectoria que completa a un STA resolviendo la ecuación de Moore y todo esto es computacionalmente muy demandante además de que no nos provee una solución analítica o un entendimiento mayor del fenómeno.

6.5.2. Pulsos cortos

En esta sección exploramos cómo completar un STA usando la idea de la sección anterior pero ahora aplicada a un pulso corto arbitrario. En otras palabras, mostraremos cómo borrar los fotones generados por cualquier movimiento breve de uno de los espejos de la cavidad, y devolver el campo a su estado inicial.

Consideraremos nuevamente una trayectoria inicial dada por las Ecs. (6.49-6.50)



(a) (b)

Figura 6.14: a) Velocidad para la trayectoria inicial del espejo y para su completación a un atajo adiabático en azul. b) Coeficientes de adiabaticidad para las trayectorias correspondientes. Los parámetros empleados para la primera trayectoria fueron $R_- = 1$, $\epsilon = 0.3$ y $\tau = 1$.

tales que $\tau \leq R_\pm$. Se puede ver que en este caso que la derivada de la función de Moore, $F_I'(z)$, tiene una estructura simple. Esta viene dada por una constante inicial, $1/R_-$, seguida por un pulso que comienza en $z = R_-$ y termina en $z = R_+$. Desde allí hasta $z = 2R_+$, la función toma de nuevo el valor de la constante inicial. Esta estructura se repite periódicamente con período $2R_+$ (Fig. 6.15).

Para probar esto, consideramos la derivada de la ecuación de Moore (2.47)

$$F_I'[t + R(t)][1 + \dot{R}_I(t)] - F_I'[t - R_I(t)][1 - \dot{R}_I(t)] = 0, \quad \forall t. \tag{6.51}$$

Usando la condición inicial $R_I(t < 0) = R_-$ y $F_I'(z < 0) = 1/R_-$ tenemos

$$F_I'[t + R_I(t)] = \frac{1}{R_-}\frac{[1 - \dot{R}_I(t)]}{[1 + \dot{R}_I(t)]} = \frac{1}{R_-} \quad \text{si } t < 0 \tag{6.52}$$

de donde se concluye que la derivada de la función de Moore es constante hasta $z < R_-$

$$F_I'[z] = \frac{1}{R_-} \quad \text{si } z < R_-. \tag{6.53}$$

Adicionalmente, podemos usar la Ec. (6.52) para mostrar que, si $0 < t < \tau < R_\pm$

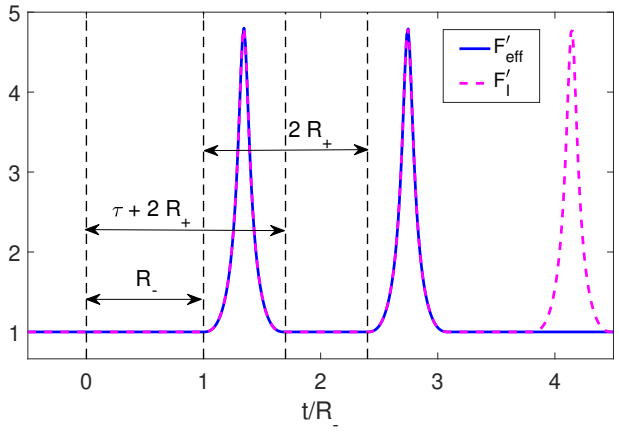


Figura 6.15: Estructura de la derivada de la función de Moore para un pulso breve arbitrario en línea punteada magenta y su completación para un atajo adiabático en línea sólida azul.

entonces $t - R(t) < 0$ y tenemos

$$F_{\rm I}'[t + R_{\rm I}(t)] = \frac{1}{R_-}\frac{[1 - \dot{R}_{\rm I}(t)]}{[1 + \dot{R}_{\rm I}(t)]} \quad \text{si } 0 < t < \tau. \tag{6.54}$$

Esta ecuación establece la forma de $F_{\rm I}'$ para $R_- < z = t + R_{\rm I}(t) < \tau + R_+$. Por último, una vez que la trayectoria se ha detenido tenemos

$$F_{\rm I}'[t + R_+] = F_{\rm I}'[t - R_+] \quad \text{si } \tau < t, \tag{6.55}$$

que relaciona la $F_{\rm I}'$ a tiempos tardíos a su valor en un tiempo anterior. De hecho, podemos re-escribir

$$F_{\rm I}'[z] = F_{\rm I}'[z - 2R_+] \quad \text{si } \tau + R_+ < t + R_+ = z, \tag{6.56}$$

y esto establece la $2R_+$ periodicidad a tiempos tardíos. Podemos usar esto para encontrar el valor de la derivada para $z < R_- + 2R_+$ usando la Ec. (6.53) para encontrar

$$F_{\rm I}'[z] = \frac{1}{R_-} \quad \text{si } \tau + R_+ < z < R_- + 2R_+, \tag{6.57}$$

lo que establece que la derivada de la función de Moore es constante en ese intervalo.

A partir de esta estructura es muy fácil encontrar una extensión de la función

de Moore que sea lineal a tiempos tardíos, aprovechándose del hecho de que la derivada de la función de Moore es constante en el intervalo $\tau + R_+ < z < R_- + 2R_+$. La extensión natural, entonces, es completar la derivada de la función de Moore asumiendo que es constante para $t > R_- + 2R_+$. De esta forma tendremos $F_{\text{eff}}(z) = z/R_-$ para $z > R_- + 2R_+$. La función de Moore extendida dará lugar a una trayectoria $R_{\text{eff}}(t)$ que coincidirá con $R_{\text{I}}(t)$ inicialmente, luego la trayectoria será constante y finalmente habrá una trayectoria de borrado $R_{\text{II}}(t)$ que volverá a R_- para satisfacer la pendiente final de la función de Moore.

Para encontrar la trayectoria de borrado notemos que la misma debe satisfacer la Ec. (6.51)

$$\frac{1}{R_-}\left(\frac{1+\dot{R}_{\text{II}}(t)}{1-\dot{R}_{\text{II}}(t)}\right) = F'_{\text{eff}}[t - R_{\text{II}}(t)], \quad \text{si } t > R_- + R_+ \tag{6.58}$$

donde hemos usado la condición de extensión $F'_{\text{eff}}(t + R_{\text{eff}}(t)) = 1/R_-$ para $z = t + R_{\text{eff}}(t) > R_- + 2R_+$. Por supuesto, esta ecuación debería estar acoplada con la condición de que la trayectoria de borrado comienza donde terminó R_{I}, es decir

$$R_{\text{II}}(t = R_+ + R_-) = R_+. \tag{6.59}$$

La ecuación previa puede ser resuelta exactamente en términos de la trayectoria inicial tomando

$$R_{\text{II}}(t) = R_+ - \left[R_{\text{I}}(t - t_1) - R_-\right], \text{si } t_1 < t < t_1 + \tau \tag{6.60}$$

donde $t_1 = R_- + R_+$.

Esto se puede ver reemplazando en la Ec. (6.58)

$$\frac{1}{R_-}\left(\frac{1-\dot{R}_{\text{I}}(t-(R_-+R_+))}{1+\dot{R}_{\text{I}}(t-(R_-+R_+))}\right) = F'_{\text{eff}}[t-(R_-+R_+) + R_{\text{I}}(t-(R_-+R_+))], \tag{6.61}$$

que se satisface porque es simplemente la Ec. (6.52) evaluada en $0 < t' = t - (R_- + R_+) < \tau$.

Vale la pena mencionar un par de generalizaciones que se pueden derivar del

resultado previo. La primera es que, como la función de Moore inicial $F_{\rm I}$ es $2R_+$-periódica, puede ser extendida a una función lineal en $z_n = R_- + 2nR_+$ para cualquier natural n, lo que corresponde a aplicar la trayectoria de borrado $R_{\rm II}(t)$ en $t_n = R_- + (2n-1)R_+$. En resumen, hasta ahora hemos mostrado que cualquier trayectoria inicial dada $R_{\rm I}(t)$ con una duración lo suficientemente chica ($\tau < R_\pm$), puede ser completada a un atajo adiabático implementando el siguiente protocolo

$$R_{\rm eff}(t) = \begin{cases} R_- & t < 0 \\ R_{\rm I}(t) & 0 < t < \tau \\ R_+ & \tau < t < t_n \\ R_{\rm II}(t) & t_n < t < t_n + \tau \\ R_- & t_n + \tau < t \end{cases} , \tag{6.62}$$

con $R_{\rm II}(t)$ establecido por la Ec. (6.60).

Una segunda generalización, que también puede ilustrar el mecanismo detrás de esta "completación" de atajos para pulsos cortos, es permitir que la trayectoria de borrado sea ejecutada por el espejo de la izquierda. En ese caso, como inicialmente el espejo de la izquierda está en reposo, tenemos $L(0 < t < \tau) = 0$. Entonces las Ecs. ((2.46)-2.47) implican que $F_{\rm I} = G_{\rm I}$ y

$$F_{\rm I}(t + R_{\rm I}(t)) - F_{\rm I}(t - R_{\rm I}(t)) = 2\,. \tag{6.63}$$

Por lo tanto, la derivada de F satisface la Ec. (6.52) y podemos entonces extenderla suavemente de la misma manera que antes.

Sin embargo, ahora la trayectoria de borrado tiene un espejo derecho estático y $R_{\rm II}(t) = R_+$ tiene una trayectoria no-trivial para el espejo de la izquierda, $L_{\rm II}(t)$, que será determinada por las ecuaciones de Moore

$$G_{\rm eff}(t + L_{\rm II}(t)) - F_{\rm eff}(t - L_{\rm II}(t)) = 0 \tag{6.64}$$

$$G_{\rm eff}(t + R_-) - F_{\rm eff}(t - R_-) = 2. \tag{6.65}$$

La segunda ecuación implica $G_{\text{eff}}(t) = 2 + F_{\text{eff}}(t - 2R_-)$ lo cual, reemplazando en la primera y tomando la derivada temporal, da como resultado

$$F'_{\text{eff}}(t + L_{\text{II}}(t) - 2R_-) = \frac{1}{R_-}\frac{[1 - \dot{L}_{\text{II}}(t)]}{[1 + \dot{L}_{\text{II}}(t)]}. \tag{6.66}$$

Esta ecuación determina la trayectoria de borrado para el espejo de la izquierda y puede ser resuelta tomando

$$L_{\text{II}}(t) = R(t - t_n) - R_-,\ t_n < t < t_n + \tau \tag{6.67}$$

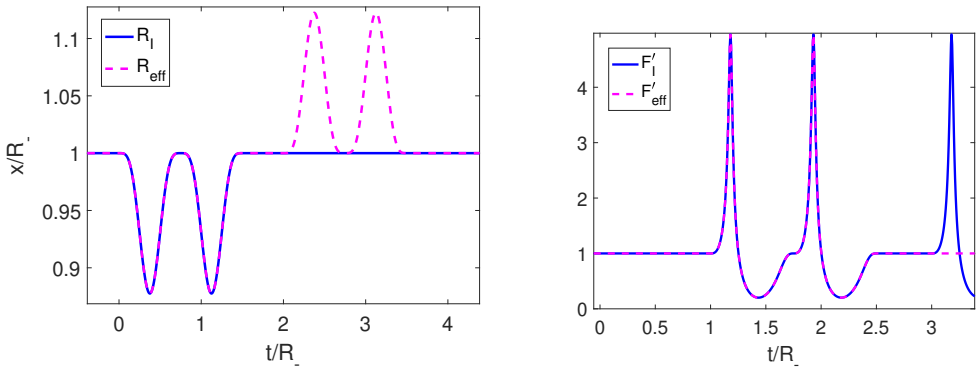
donde $t_n = 2nR_+ + R_-$ para cualquier número natural n. Esto puede ser visto simplemente reemplazando en la ecuación anterior y comparando con la Ec. (6.52).

Para ilustrar estos resultados, vamos a considerar una trayectoria inicial dada por la Ec. (6.49) con

$$f(t) = R_- \cos\left[A \sin^2(\omega t)\right], \tag{6.68}$$

dondo A y ω son parámetros fijos. Como en el ejemplo anterior, esta elección asegura la continuidad de $R_{\text{I}}(t)$ y sus primeras derivadas. En la Fig. 6.16 podemos ver que el siguiente protocolo dado por la Ec. (6.62), es decir, ejecutando la trayectoria R_{II} en el momento preciso $t_1 = 2R_-$, la derivada de la función de Moore permanece constante, borrando los fotones generados por el pulso R_{I} y produciendo un atajo adiabático.

Para entender mejor cómo se logra esto físicamente, podemos mirar la densidad de energía dentro de la cavidad en la Fig. 6.17. Allí observamos que un pulso de energía es emitido por el espejo derecho, luego se refleja en el espejo de la izquierda y vuelve al espejo de la derecha precisamente cuando la trayectoria de borrado R_{II} comienza y lo reabsorbe moviéndose en la dirección opuesta a la que lo generó. Este mecanismo también puede ser visto en el caso de dos espejos móviles. Una vez más, vemos que la interferencia destructiva necesaria para borrar los fotones inicialmente generados requiere que, durante la segunda trayectoria, el espejo se mueva en una dirección opuesta, en el momento preciso cuando el pulso alcanza la pared (ver Ec.



(a) (b)

Figura 6.16: a) Trayectoria para la velocidad inicial del espejo en azul y para su completación a un atajo adiabática en magenta. b) Derivada de la función de Moore para las trayectorias correspondientes. Los parámetros empleados para la primera trayectoria fueron $R_- = R_+ = 1$, $A = 0.5$ y $\omega = 2\pi/\tau = 2\pi/1.5$.

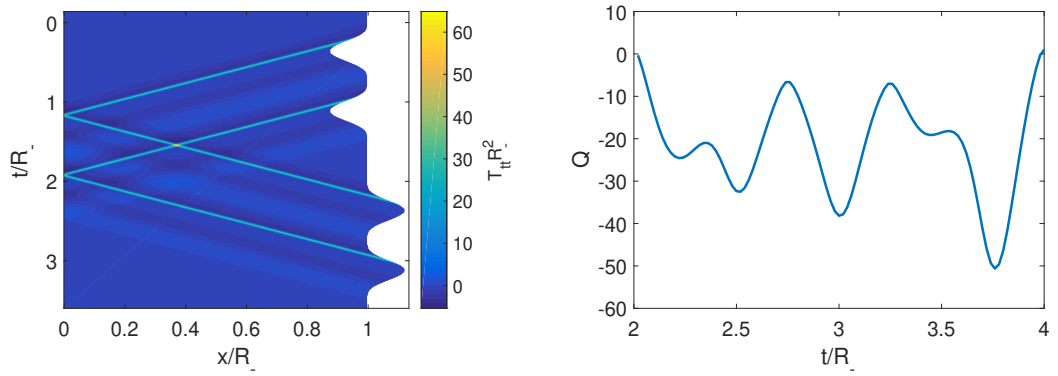
(6.67)). Por lo tanto, uno esperaría que el parámetro de adiabaticidad y por lo tanto el estado final de la cavidad dependa fuertemente de este tiempo t_n. Este es, de hecho, el caso como puede ser visto en la Fig. 6.17, donde si bien tenemos $Q = 1$ para $t = t_1 = 2R_-, t_2 = 4R_-$, a tiempos intermedios Q se desvía mucho de la adiabaticidad.

La ventaja de este método por sobre el presentado previamente es clara: para pulsos cortos uno no necesita calcular la función de Moore, es suficiente con aplicar la trayectoria de borrado para el espejo derecho R_{II} (o L_{II} para el espejo izquierdo) a cualquiera de los tiempos t_n. Esto aniquilará las partículas y ejecutará un STA, lo que devolverá el estado de la cavidad al estado fundamental con la misma longitud inicial.

6.5.3. Reversa temporal

En esta sección, presentaremos un tercer método para completar atajos adiabáticos aprovechando una simetría de inversión temporal del sistema. Como subproducto de este enfoque, mostraremos que la reversa temporal de un STA es también un STA, un resultado que puede ser suma utilidad cuando se consideran ciclos termodinámicos donde en una rama es necesaria una compresión y en otra una expansión.

Primero, notamos que si bien la teoría física no tiene simetría de inversión



(a) (b)

Figura 6.17: a) Densidad de energía para el campo dentro de la caivad para una trayectoria efectiva compuesta de una perturbación inicial seguida de una trayectoria de borrado en t_1. b) Coeficiente de adiabaticidad obtenido cuando se implementa la trayectoria de borrado Ec. (6.60) a tres tiempos diferentes t_n. Notemos que $Q = 1$ para $t = t_1$ y $t = t_2$. Los parámetros empleados para la primera trayectoria fueron $R_- = R_+ = 1$, $A = 0.5$, $\omega = 2\pi/1.5$, $t_1 = 2R_-$.

temporal debido al contorno móvil, haciendo una transformación a las variables conformes dadas por Ec. (2.44) tenemos que ahí sí la teoría es simétrica respecto de la inversión de esta nueva variable temporal $\bar{t} \to -\bar{t}$. Es sencillo ver que esta simetría en las variables conformes genera una simetría en la teoría física dada por la transformación $t \to -t$, es decir, una inversión temporal, y el cambio $F(z) \to -G(-z), G(z) \to -F(-z)$. Llamaremos a esto: simetría de inversión temporal conforme.

A partir de esto podemos establecer dos resultados. Uno es que, incluso cuando una trayectoria $L(t), R(t)$ no es un STA para el campo, si existen constantes $\tau, \tilde{z}, C_F, C_G$ tales que las funciones de Moore satisfacen

$$F(z) = -G(-z + \tilde{z}) + C_F \quad z \gg \tau \tag{6.69}$$

$$G(z) = -F(-z + \tilde{z}) + C_G \quad z \gg \tau, \tag{6.70}$$

entonces existen tiempos a los cuales implementar $L(t), R(t)$ seguido de su reversa temporal $L(-t), R(-t)$ genera un STA. Esto es porque bajo estas condiciones, es posible continuar suavemente las funciones de Moore de las trayectorias con aquellas asociadas con su reversa temporal. Dado que la primera es inicialmente lineal, la

última también debe ser lineal a tiempos tardíos. Por lo tanto, una continuación suave de la primera función de Moore en la otra genera un STA formado por la trayectoria inicial seguida de su reversa temporal.

En el caso en que $L(t) = 0$ tenemos $F(z) = G(z)$ y la condición anterior puede ser expresada más sencillamente como

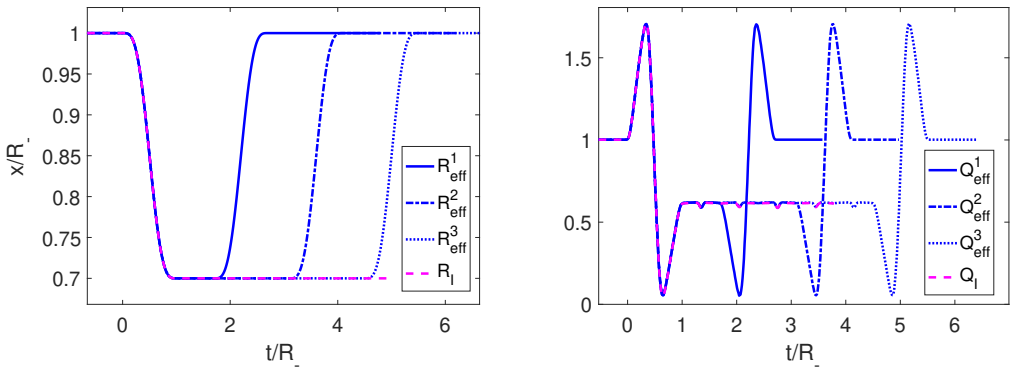
$$F'(z) = F'(-z + \tilde{z}) \quad z \gg \tau, \tag{6.71}$$

es decir que la derivada de la función de Moore a tiempos tardíos debería ser una función par para alguna elección adecuada del origen de tiempo. De hecho, como la función de Moore es R_+-periódica, si $\tilde{z}$ satisface esta condición entonces $\tilde{z}_n = \tilde{z} + 2nR_+$ también lo hace y entonces para completar una atajo adiabático la trayectoria reversa temporal debe ser implementada a ciertos tiempos discretos t_n.

Este método funciona solo cuando el atajo adiabático comienza y termina en la misma posición, dado que la posición final de la inversa temporal será igual a la inicial de la primera trayectoria. Sin embargo, funciona para cualquier evolución inicial, es decir, no necesita ser un pulso corto sino que puede tener cualquier duración siempre y cuando la función de Moore satisfaga la Ec. (6.69).

Para comprobar estos resultados numéricamente, consideramos las trayectorias iniciales R_{I} dadas por las Ecs. (6.49-6.50) y luego la aplicamos a la cavidad seguida por su reversa temporal a tiempos t_n, cuidadosamente elegidos para que las dos funciones de Moore coincidan para formar una trayectoria más larga R_{eff}. Como podemos ver en la Fig. 6.18 actuando con la reversa temporal a tiempos discretos logramos llevar el coeficiente de adiabaticidad Q de 0.6 de vuelta a 1 señalando un atajo adiabático exitoso.

Un segundo resultado que puede ser obtenido de la simetría de inversión temporal conforme es que si las trayectorias $L(t), R(t)$ constituyen un STA, entonces las trayectorias reversas también son atajos adiabáticos. Para ver que este es el caso, notemos que las funciones de Moore del STA original son lineales tanto a tiempos



(a) (b)

Figura 6.18: a) Primera trayectoria para el espejo en magenta y la trayectoria efectiva R^n_{eff} usando su reversa temporal a diferentes tiempos t_n en azul. b) Coeficientes de adiabaticidad para las trayectorias correspondientes a las funciones de Moore anteriores. Los parámetros empleado para la primera trayectoria fueron $R_- = 1$, $\epsilon = 0.3$ y $\tau = 1$.

tempranos como tardíos

$$F(z \to \pm\infty) = \frac{z}{R_\pm - L_\pm} + \frac{1}{2}\frac{R_\pm + L_\pm}{R_\pm - L_\pm} \tag{6.72}$$

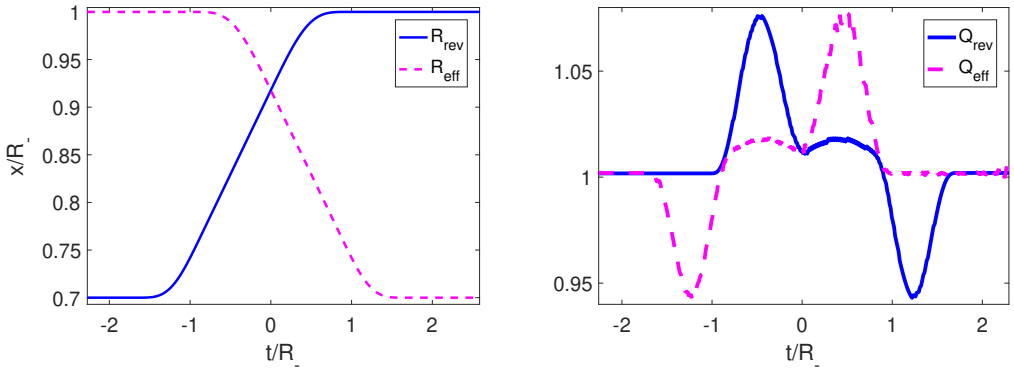
$$G(z \to \pm\infty) = \frac{z}{R_\pm - L_\pm} - \frac{1}{2}\frac{R_\pm + L_\pm}{R_\pm - L_\pm}. \tag{6.73}$$

Entonces, aplicando una transformación de inversión temporal conforme podemos concluir que las trayectorias reversas temporales $L(-t), R(-t)$ tiene funciones de Moore reversas dadas por

$$F_{\text{rev}}(z \to \pm\infty) = \frac{z}{R_\mp - L_\mp} + \frac{1}{2}\frac{R_\mp + L_\mp}{R_\mp - L_\mp} \tag{6.74}$$

$$G_{\text{rev}}(z \to \pm\infty) = \frac{z}{R_\mp - L_\mp} - \frac{1}{2}\frac{R_\mp + L_\mp}{R_\mp - L_\mp}, \tag{6.75}$$

y entonces estas trayectorias, al ser lineales al principio y al final, son también atajos adiabáticos pero con posiciones iniciales y finales intercambiadas. Esta propiedad es particularmente útil cuando consideramos ciclos termodinámicos en los cuales no solo necesitamos un STA para llevar la posición de los espejos de L_-, R_- a L_+, R_+, sino también durante una segunda rama que devuelve los espejos a sus posiciones originales.



(a) (b)

Figura 6.19: a) Trayectorias para el espejo de la derecha para un atajo adiabático en magenta y su reversa temporal en azul. b) Coeficientes de adiabaticidad para el STA y su reversa temporal. Los parámetros empleados para la trayectoria que genera el atajo adiabático fueron $R_{-} = 1$, $\epsilon = 0.3$ y $\tau = 1$.

Podemos ilustrar esto numéricamente considerando una trayectoria de referencia dada por las Ecs. (6.49-6.50) y usándolas para calcular el atajo adiabático correspondiente (siguiendo lo hecho en la Sección 6.2.2), $R_{\text{eff}}(t)$, el cual comienza en t_{i} y termina en t_{f}. Después calculamos la reversa temporal $R_{\text{rev}}(t) = R_{\text{eff}}(t_{\text{f}} - t)$ y el coeficiente de adiabaticidad Q_{rev}. Podemos ver claramente de la Fig. 6.19 que Q_{rev} comienza igual a 1, oscila y vuelve de nuevo a 1 cuando el movimiento se detiene indicando que la evolución ha sido de hecho un atajo adiabático.

Como ya mencionamos, esta propiedad es también válida para un oscilador armónico: la reversa temporal de un STA es también un STA.

6.6. Conclusiones

A medida que la tecnología mejora y los sistemas cuánticos pueden ser operados en escalas de tiempo más pequeñas, se vuelve cada vez más importante considerar los efectos no-adiabáticos de estas operaciones para desarrollar nuevas maneras de mitigar o incluso evitar estos efectos por completo. Con esta motivación en mente, en este capítulo hemos encontrado atajos adiabáticos para un campo escalar cuántico sin masa en una cavidad unidimensional con dos espejos móviles. Esto permite evitar los efectos disipativos generados por el efecto Casimir dinámico estudiados en el

capítulo anterior, logrando una manipulación eficiente y rápida ya sea de cavidades optomecánicas o resonadores de microondas.

Estos atajos adiabáticos están dados por trayectorias efectivas que replican la evolución adiabática de ciertas trayectorias de referencia. Se analizaron, entonces, de manera teórica las propiedades de estas trayectorias efectivas en el límite en que las trayectorias de referencia son arbitrariamente rápidas. Se encontró que en ese caso, para un movimiento arbitrario de dos espejos las trayectorias efectivas límite no resultan continuas, señalando que existe una escala de tiempo crítica a partir de las cuales las trayectorias efectivas dejan de ser físicas. No obstante, en el caso en que solo se mueve una de las paredes de la cavidad se demostró que las trayectorias límite son continuas y vienen dadas por un movimiento uniforme con una duración dada por la suma de las longitudes inicial y final.

Adicionalmente, resolvimos de forma numérica las trayectorias efectivas para tres diferentes tipos de movimientos de referencia: contracción, expansión y traslación rígida. Nuestros resultados numéricos confirmaron el análisis analítico, mostrando que el protocolo propuesto implementa de manera exitosa un atajo adiabático y que las trayectorias efectivas límite están bien descritas por las trayectorias límite halladas explícitamente.

Los atajos adiabáticos no solo pueden ser de utilidad en aplicaciones de termodinámica cuántica sino también para la manipulación de estados e información cuántica. Por ejemplo, permiten generar compuertas más rápidas sin perder fidelidad o restaurar un estado que ha sido perturbado externamente a su condición inicial. Para estudiar esta segunda posibilidad consideramos una cavidad en la que se preparó un estado del campo y fue perturbada a través del movimiento de las paredes de la cavidad. Buscamos, entonces, trayectorias de borrado que permitan completar la trayectoria inicial a un atajo adiabático, borrando así las excitaciones indeseadas generadas por la perturbación.

Hemos presentado tres métodos diferentes para completar un STA para una cavidad optomecánica. Todos ellos se basan en el hecho de que las funciones de Moore deben ser lineales antes y después de la perturbación para que la trayectoria de los espejos consista en un atajo adiabático.

El primer método visto consiste de tres pasos: 1) calcular las funciones de Moore, 2) extenderlas de manera suave a funciones lineales y luego 3) usarlas para calcular la trayectoria usando ingeniería inversa. Este método es conceptualmente simple, puede ser usado para cualquier duración de la perturbación y ejecuta un STA para cualquier posición final del espejo; sin embargo, lo tres pasos requieren de mediciones precisas de la perturbación o son muy demandantes computacionalmente.

El segundo método, resuelve estos problemas para el caso en que la perturbación cosiste de un pulso de corta duración. En ese caso la segunda trayectoria que borra las excitaciones y restaura el estado del sistema puede ser dada explícitamente en términos de la perturbación inicial. Esto permite evitar por completo el cálculo e inversión de la función de Moore. Las únicas restricciones son que la perturbación debe durar poco tiempo y que la longitud final de la cavidad debe ser la misma que la inicial.

En el tercer método, aprovechamos una simetría del sistema para mostrar que la reversa temporal de la trayectoria inicial puede ser usada para completar un atajo adiabático si la derivada de la función de Moore de la perturbación es par a tiempos tardíos. En ese caso, la perturbación puede tener cualquier duración, pero es necesario calcular la función de Moore para comprobar su paridad. Sin embargo, cuando se compara con el primer método, evitamos extender la función suavemente e invertirla para calcular la trayectoria, lo que constituye un gran simplificación.

Estos resultados requieren más estudios para analizar en más profundidad la implementación experimental exacta en circuitos superconductores o cavidades optomecánicas. También sería interesante entender el costo energético de implementar estos atajos y su utilización para producir motores cuánticos más eficientes.

CAPÍTULO 7

Información cuántica con el efecto Casimir dinámico en cQED

En los capítulos previos hemos estudiado el impacto del efecto Casimir en distintos sistemas donde el mismo no es objetivo principal sino un medio, como en el caso de la transferencia de energía de fonones a fotones en el capítulo 3, o es un subproducto indeseado que buscamos entender o corregir en máquinas térmicas. En este capítulo, por el contrario, aprovecharemos que el DCE genera pares de fotones en un estado *squeeze* [136] y estudiaremos la posibilidad de usar una compuerta de *squeezing* en circuitos superconductores ajustables por flujo y controlados por una ancilla, resultando en una compuerta de *controlled-squeezig*. A continuación veremos cómo implementarla en esta arquitectura y su aplicación en tareas de computación cuántica tales como la universalidad, la generación de estados de relevancia para metrología y la implementación de códigos de corrección de errores.

7.1. El sistema y la implementación propuesta

Como mencionamos en el capítulo 2 el efecto Casimir dinámico ha sido observado exitosamente en una arquitectura de electrodinámica cuántica de circuitos (o cQED) [15]. Por esta razón consideraremos, para la implementación de esta compuerta, un

resonador superconductor sintonizable terminado en un SQUID (superconducting quantum interference device).

El campo de fase en el resonador puede ser descrito por un campo escalar cuántico $\Phi(x,t)$. Además, aplicando un campo magnético externo $\phi_x(t)$ sobre el SQUID en $x = d$ podemos efectivamente regular la condición de contorno del campo cuántico en cada extremo de la guía de ondas, la cual a su vez cambia el espectro del resonador. El lagrangiano de tal sistema, en el caso de campo débil ($\Phi \ll 1$) puede ser expresado como [94]

$$L = \left(\frac{1}{2e}\right)^2 C_0 \frac{1}{2}\int_0^d (\dot{\Phi}^2 - v^2\Phi'^2)dx + \left(\frac{1}{2e}\right)^2 2C_J\frac{\dot{\Phi}_d^2}{2} + 2E_J\cos(\Phi_d)\cos\left(2e\phi_x(t)\right). \tag{7.1}$$

Aquí $v = 1/\sqrt{L_0C_0}$ es la velocidad de propagación del campo, $\Phi_d(t) = \Phi(d,t)$ es el campo en $x = d$, mientras que $\phi_x(t)$ es el flujo magnético externo aplicado al SQUID en $x = d$. Además asumimos, por simplicidad, que el SQUID es simétrico con dos junturas de Josephson idénticas, cada una con energía E_J y capacitancia C_J.

En el capítulo 2 vimos que este sistema es equivalente a una cavidad con una pared móvil. Así, de manera análoga al hamiltoniano dado por la Ec. (2.43) para la cavidad optomecánica, tenemos que el hamiltoniano para este sistema en la aproximación de un solo modo viene dado por

$$H = \omega a^\dagger a + g_d\delta\phi_x(t)\left[a^\dagger a + \frac{1}{2}(a^2 + a^{\dagger 2})\right], \tag{7.2}$$

donde a es el operador de destrucción del modo de la cavidad y g_d es una constante de acoplamiento (ver Apéndice C). Aquí ya podemos ver que la evolución temporal en resonancia paramétrica generará un estado *squeezeado*. En la siguiente sección mostraremos cómo utilizar esto para generar una compuerta cuántica de *squeezing* condicional.

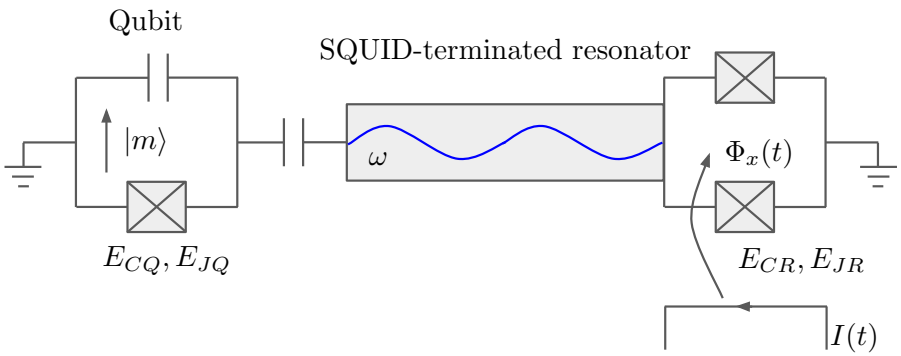


Figura 7.1: La implementación propuesta consiste de una guía de ondas coplanar actuando como un resonador terminado en un SQUID en el extremo derecho y acoplado capacitivamente a un qubit trasmón a la izquierda. El SQUID es usado para agitar paramétricamente el resonador aplicando un flujo magnético dependiente del tiempo. El qubit trasmón es inicialmente preparado en un estado cuántico que actúa como un interruptor que sintoniza o desintoniza el resonador a la frecuencia de agitación.

7.2. Protocolo de squeezing condicional

Proponemos, entonces, utilizar un resonador de $\lambda/4$ terminado en un SQUID cuyo flujo puede ser variado mediante un flujo magnético oscilante externo. Además acoplaremos dispersivamente el resonador a un qubit transmon el cual usaremos como ancilla de control (Fig. 7.1). Este es un elemento estándar de circuitos usado en diferentes experimentos [43] y da lugar al siguiente hamiltoniano del sistema completo

$$H = \omega a^\dagger a + g_d \delta\phi_x(t) \left[a^\dagger a + \frac{1}{2}(a^2 + a^{\dagger 2}) \right] + \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + \chi a^\dagger a \sigma_z, \tag{7.3}$$

siendo ω_q la frecuencia del qubit y χ una constante de acoplamiento.

El hamiltoniano de la Ec. (7.3) puede interpretarse como el de un oscilador armónico con una frecuencia de resonancia $\Omega(t) = \omega + g_d\delta\phi_x(t) + \chi\hat{\sigma}_z$ que varía en el tiempo y está condicionada al estado del qubit. Aquí χ es una constante de acoplamiento que desplaza la frecuencia del modo del resonador a $\omega_- = \omega - \chi$, cuando el qubit está en el estado $|0\rangle$, o $\omega_+ = \omega + \chi$, cuando el qubit está en el estado $|1\rangle$. De esta manera, si variamos el flujo magnético del SQUID armónicamente $\delta\phi_x(t) = \epsilon\phi_0 \sin(\omega_d t)$ (siendo $\phi_0 = \pi/e$ el cuanto de flujo magnético) a una frecuencia de $\omega_d = 2\omega_\pm$, satisfacemos la condición de resonancia paramétrica generando *squeezing* de manera condicional al estado de la ancilla (*squeezeando* solo si el qubit está en el estado $|\pm\rangle$), asumiendo que χ es lo suficientemente grande para separar claramente las dos resonancias. El hamiltoniano efectivo estático que se obtiene luego de hacer la aproximación de onda rotante (RWA) es

$$\hat{H}^{\pm}_{\text{ctrl-sqz}} = \frac{1}{2} i g_d \epsilon (e^{i\theta}\hat{a}^2 - e^{-i\theta}\hat{a}^{\dagger 2}) \otimes \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\sigma}_z). \tag{7.4}$$

Esto implica que la evolución temporal generada por este hamiltoniano efectivo puede ser interpretada como una operación de *squeezing* de un modo controlada por la ancilla

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}^{\pm}_{\text{ctrl-sqz}} t) = \hat{S}(r,\theta) \otimes \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\sigma}_z) := \text{C} - \text{Sqz}(r,\theta),$$

donde $\hat{S}(r,\theta)$ es el operador de *squeezing* y el parámetro viene dado por la amplitud del bombeo o *driving*, la constante de acoplamiento y la duración del driving, $r = -g_d \epsilon t$. En otra palabras, variando el flujo sobre el SQUID en resonancia paramétrica el modo del resonador resultará *squeezeado* o no, dependiendo del estado del qubit.

Debemos señalar que en el contexto de trampas de iones se ha propuesto una operación similar [137]. En ese caso el estado de movimiento del ion puede ser *squeezeado* usando una red óptica con un amplitud dependiente del tiempo.

En lo que sigue mostraremos cómo usar este resultado para codificar el estado de un qubit en el estado del resonador haciéndolo más robusto frente al ruido. Primero, debemos definir los estados $|\chi_+\rangle$ y $|\chi_-\rangle$, que corresponden a superposiciones coherentes pares e impares, respectivamente, de dos estados que se encuentran *squeezeados* a lo largo de cuadraturas ortogonales

$$|\chi_\pm\rangle = \frac{1}{c_\pm}(|r,\theta\rangle \pm |r,\theta+\pi\rangle), \tag{7.5}$$

donde $|r,\theta\rangle$ es estado *squeezeado* de un modo dado por

$$|r,\theta\rangle = \hat{S}(r,\theta)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-i\theta}\tanh r)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}|2n\rangle$$

y $c_\pm = \sqrt{2 \pm 2/\sqrt{\cosh 2r}}$. Usando la expresión de $|r,\theta\rangle$ dada arriba es sencillo mostrar que los estados $|\chi_+\rangle$ y $|\chi_-\rangle$ se obtienen como superposición de estados número de la forma $|4k\rangle$ y $|4k+2\rangle$, respectivamente.

En [137], se ha presentado un protocolo por el cual una compuerta *controlled-squeeze* puede ser usada para generar el estado entrelazado

$$|\Psi_{\mathrm{RQ}}\rangle = \frac{c_+}{2}|\chi_+\rangle \otimes |0\rangle + \frac{c_-}{2}|\chi_-\rangle \otimes |1\rangle, \tag{7.6}$$

entre el resonador y el qubit. Este estado puede ser usado como un recurso para codificar información cuántica en el resonador de r.f. usando el espacio generado por los estados $|\chi_+\rangle$ y $|\chi_-\rangle$. De esta manera uno implementaría una codificación que es resistente al tipo de error más común en este setup que es la pérdida de un fotón. Esto se debe a que como mencionamos antes los dos estados lógicos $|0\rangle_{\mathrm{R}} = |\chi_+\rangle$

y $|1\rangle_{\mathrm{R}} = |\chi_-\rangle$ consisten de una superposición de estados con $4k$ o $4k+2$ fotones respectivamente, lo que implica que al perder un fotón el estado codificado todavía guarda la superposición coherente y el error puede ser detectado con una subsecuente medición de paridad del número de fotones dentro de la cavidad.

La forma de codificar el estado cuántico es la siguiente: supongamos que preparamos un qubit llamado Q' en un estado cuántico arbitrario del la forma $|\phi_{Q'}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, entonces para preparar el resonador en el estado $|\Phi_{\mathrm{R}}\rangle = \alpha|\chi_+\rangle + \beta|\chi_-\rangle$ solo necesitamos teleportar el estado de Q' en R. Para hacer esto, que no es otra cosa que el protocolo de codificación, podemos usar el recurso dado en la Ec. (7.6) que en el límite de alto *squeezing* es un estado de Bell efectivo del sistema resonador qubit. Así cuando este recurso está disponible la teleportación de Q' a C solo requiere una medición de Bell del sistema formado por Q y Q' y la aplicación de una transformación unitaria sobre C que depende del resultado de la medición de Bell.

Vale la pena mencionar que la aplicación de esta unitaria puede ser reemplazado usando una codificación diferente para cada uno de los cuatro resultado de la medición de Bell. Esta medición sobre el sistema Q-Q' solo requiera una operación tipo CNOT entre ellos seguida de una compuerta de Hadammard en Q' (y una subsecuente medición de los estado de Q y Q', la cual revela el estado de Bell obtenido por la medición). Así, es sencillo mostrar que, por ejemplo, si luego de que la secuencia CNOT-Hadammard es aplicada nos encontramos con dos qubits en estados $|0\rangle$, el estado codificado $|\phi_{\mathrm{R}}\rangle = \alpha|\chi_+\rangle + \beta|\chi_-\rangle$ es obtenido. En cambio, si ambos qubits se encuentran en los estados $|1\rangle$ el estado resultante en R es $|\phi_{\mathrm{R}}\rangle = \beta|\chi_+\rangle - \alpha|\chi_-\rangle$ el cual puede ser escrito como $\alpha|0_{\mathrm{R}}\rangle + \beta|1_{\mathrm{R}}\rangle$ definiendo $|0_{\mathrm{R}}\rangle = -|\chi_-\rangle$ y $|1_{\mathrm{R}}\rangle = |\chi_+\rangle$. De manera similar se pueden definir codificaciones para los otros dos resultados. De esta manera hemos mostrado que usando la compuerta *controlled-squeeze* podemos producir un recurso esencial para la codificación de un qubit en los estado de "cuatro patas" $|\chi_\pm\rangle$ haciendo inmune a la información cuántica a la pérdida de un solo fotón en la cavidad.

Para analizar la factibilidad experimental de generar estos estados hemos simulado el sistema y protocolo presentados aquí bajo condiciones de laboratorio. Esto es, hemos considerado una evolución unitaria dada por el hamiltoniano de la Ec.

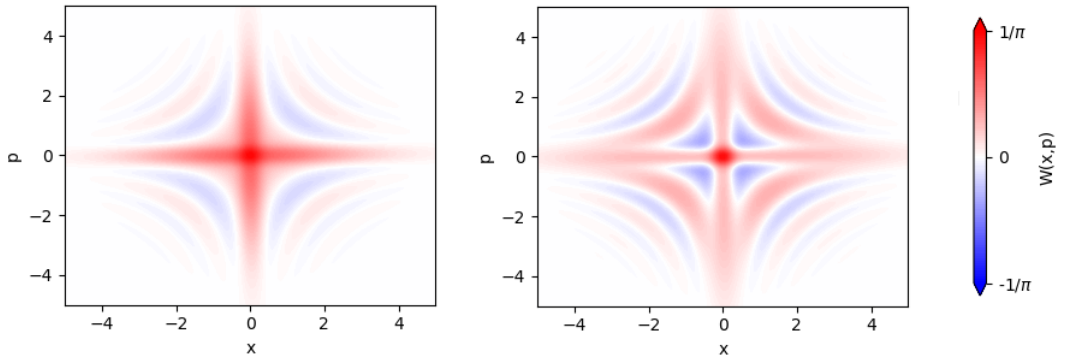


Figura 7.2: Mostramos la función de Wigner para los estados par $|\chi_+\rangle$ (izquierda) e impar $|\chi_-\rangle$ generados como resultado de la evolución del sistema descripto bajo las condiciones experimentales descritas en el texto.

(7.4) donde el modo del resonador tiene una frecuencia de $\omega = 6$GHz, el qubit tiene una frecuencia de $\omega_q = 9$GHz, la constante de acoplamiento es 10MHz, la amplitud de las flujo magnético externo es $\epsilon = 0.1$ y la constante de acoplamiento del qubit es $g_d = 1$MHz. Tanto el resonador como el qubit están en contacto térmico con un entorno (línea de transmisión) a una temperatura de $T_{tl} = 30$mK la cual es simulada a través de una ecuación maestra que tiene un ritmo de disipación de $\kappa_c = 1/200\mu$s para el resonador y $\kappa_q = 1/50\mu$s para el qubit el cual también tiene un ritmo de decoherencia de $\kappa_\phi = 1/30\mu$s (esto está detallado en el Apéndice D). Bajo un tiempo de evolución de 1224 ns para cada operación de squeeze y anti-squeeze obtenemos el estado par con una fidelidad de 97.6 % y una pureza de 90.8 %, mientras que el estado impar fue obtenido con una fidelidad de 89 % y una pureza de 66 %, como se puede ver en la Fig. 7.2. Sin embargo, si consideramos parámetros más optimistas $\kappa_c = 1/200\mu$s para el resonador y $\kappa_q = 1/500\mu$s para el qubit que además tiene una ritmo de defasaje de $\kappa_\phi = 1/300\mu$s la fidelidad sube a 99.4 % y la pureza 97.6 % para el estado par; mientras que para el estado impar la fidelidad es 97.9 % y la pureza es 92 %. También hemos analizado estas medidas para un rango más amplio de condiciones experimentales Fig. 7.3.

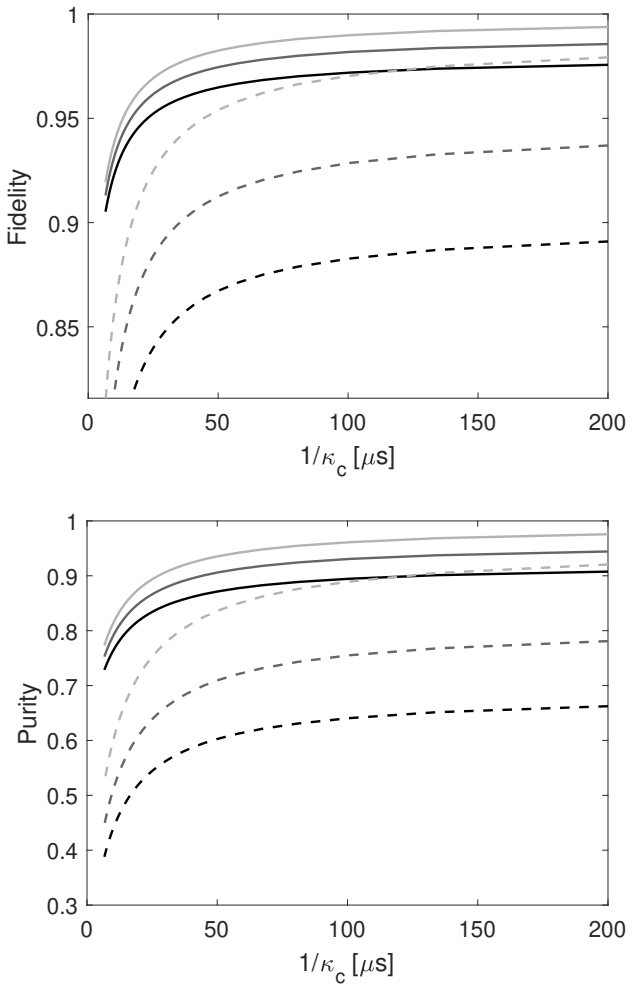


Figura 7.3: Fidelidad y pureza obtenidas comparando el estado target teórico contra el estado obtenido al evolucionar el estado inicial bajo diferentes condiciones experimentales para los estados par (línea continua) e impar (línea punteada). Los ritmos de decoherencia usados fueron $\kappa_\phi = 1/30\mu s$ y $\kappa_q = 1/50\mu s$ para las curvas negras; $\kappa_\phi = 1/60\mu s$ y $\kappa_q = 1/100\mu s$ para las curvas grises; y $\kappa_\phi = 1/300\mu s$ y $\kappa_q = 1/500\mu s$ para las curvas gris claras. El resto de los parámetros están descriptos en el texto.

7.3. Universalidad

Podemos mostrar que la operación de *controlled-squeeze* en conjunción con una operación de desplazamiento es una operación universal, es decir, puede ser usada para realizar cualquier operación unitaria sobre el estado del resonador. Para ver esto consideremos un estado arbitrario inicial del sistema qubit-resonador $|\psi_0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|\phi\rangle$, luego podemos aplicar una compuerta *anti-squeeze* con parámetro $\zeta = re^{i\theta}$, seguida por una operación de desplazamiento $D(\gamma)$ y luego una compuerta *controlled-squeeze* tenemos

$$\alpha|0\rangle D(\gamma)|\phi\rangle + \beta|1\rangle S(\zeta)D(\gamma)S^{-1}(\zeta)|\phi\rangle = \alpha|0\rangle D(\gamma)|\phi\rangle + \beta|1\rangle D(\gamma')|\phi\rangle \tag{7.7}$$

con $\gamma' = \gamma\cosh r - \gamma^* e^{i\theta}\sinh r$ que es una combinación lineal de dos estados desplazados del resonador cada uno acoplado a un estado lógico diferente del qubit. Finalmente, podemos deshacer el desplazamiento del estado de vacío para obtener

$$D^{-1}(d)|\psi\rangle = \alpha|0\rangle|\phi\rangle + \beta|1\rangle D(\gamma' - \alpha)|\phi\rangle, \tag{7.8}$$

que no es más que una operación de desplazamiento controlada, la cual se ha probado que es una operación universal [138]. De esto podemos concluir que la compuerta *controlled-squeeze* en conjunción con una operación de desplazamiento es universal.

Por supuesto que la acumulación de imperfecciones seleccionará un protocolo universal por sobre el otro dependiendo del hardware disponible y la operación final que se desee implementar. El desarrollo de una compuerta *controlled-squeeze* puede entonces encontrar aplicaciones en tareas importantes de información cuántica y metrología.

7.4. Conclusiones

Hemos discutido la implementación de un hamiltoniano de *controlled-squeeze* y mostramos que puede producir estados exóticos de interés tecnológico para la codificación de información cuántica y con fidelidades razonables sin una optimización

profunda. Además mostramos que esta compuerta junto con una operación de desplazamiento es universal, esto permite generar cualquier operación unitaria sobre el resonador a partir únicamente de estas dos. De esta manera el trabajo presentado provee herramientas de suma utilidad para la computación cuántica, tanto para la codificación y almacenamiento de información como para su procesamiento. Hacia el futuro sería interesante comparar este método universal con otros ya conocidos y determinar bajo qué circunstancias puede ser más efectivo el uso de uno u otro. Además es probable que haciendo disponible esta compuerta a un agente con un modelo de libre optimización, como en [139], genere mejores algoritmos de control cuántico.

CAPÍTULO 8

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado las consecuencias del efecto Casimir dinámico sobre la termodinámica y la información cuántica en una diversidad de sistemas. El objetivo ha sido identificar por un lado en qué procesos este efecto puede impactar de manera negativa y, en tal caso, si es posible mitigarlo; y por otro lado qué procesos pueden beneficiarse de su aplicación y cómo maximizarlo. Entre estos procesos consideramos la transferencia de energía de fonones en una pared móvil a fotones en una cavidad, donde el DCE es aprovechado de forma virtuosa; pero también estudiamos el caso de una máquina térmica basada en ramas donde el efecto Casimir dinámico aparece como un subproducto que afecta el desempeño de forma negativa. Desde el punto de vista de la información cuántica hemos estudiado el entrelazamiento entre dos cavidades en movimiento oscilatorio relativo donde el DCE incide de forma negativa en el almacenamiento de información pero también hemos visto que el efecto puede ser aprovechado en circuitos superconductores para hacer compuertas y estados cuánticos que facilitan el procesamiento y almacenamiento de la información cuántica.

Más precisamente, en el capítulo 3, hemos estudiado la transferencia de energía en un sistema cuántico cerrado formado por una cavidad optomecánica. Allí hemos

visto que las excitaciones en una pared de la cavidad, los fonones, puede ser convertidos a fotones en la cavidad mediante el efecto Casimir dinámico. Si bien este proceso es siempre posible, en el caso de acoplamiento débil, resulta especialmente relevante cuando la frecuencia de la pared duplica aquella de la cavidad. Consideramos entonces diferentes tipos de estados iniciales para el sistema compuesto y estudiamos la eficiencia de este proceso como el cociente entre la energía transferida a los fotones en la cavidad y la energía disponible en los fonones. Dado que consideramos un sistema cuántico cerrado, la evolución resulta unitaria y se observan oscilaciones en el número de fotones generados en la cavidad con el tiempo. Sin embargo, mostramos que la oscilación en la energía puede ser aproximadamente descripta por un oscilador anarmónico lo que nos permitió dar buenas aproximaciones para la eficiencia máxima del proceso sin necesidad de resolver de forma exacta la evolución cuántica del sistema. También nos permitió dar una descripción de la frecuencia y amplitud de las oscilaciones.

Procedimos, luego, a la resolución exacta del sistema para comparar y obtener más información sobre la eficiencia del proceso. Respecto de la dinámica, encontramos que los estados tipo número presentan oscilaciones temporales importantes como anticipamos. Por otro lado, vimos que si bien introducir algunos fotones en la cavidad empeoran la eficiencia máxima, inicialmente mejoran la eficiencia media para estados tipo número, llevándola del 25 % a cerca del 40 %, pero en gran cantidad se vuelven nocivos. La entropía de Von Neumann para los fotones evoluciona de forma similar al número de fotones con su máximo determinado por el logaritmo del número de excitaciones iniciales.

Por otra parte, los estados iniciales coherentes y térmicos para los fonones muestran un transitorio en el número medio de fotones producidos en la cavidad para luego estabilizarse alrededor de un valor medio del cual varían muy poco, siendo la eficiencia media similar a la de los estados número (alrededor del 25 %). En el caso de los estados térmicos, se observa que la entropía para los fotones evoluciona aproximadamente como $S_\infty(1 - e^{-t/\tau})$ donde τ es una constante que determina la escala de tiempo del transitorio y S_∞ es el valor asintótico de la entropía que crece con la temperatura del estado inicial de fonones. Por último se encontró que el sistema

parece alcanzar un estado final aproximadamente térmico en las distribuciones de fotones y fonones, con la misma temperatura para ambos. De esto se desprende que este sistema parece alcanzar un equilibrio térmico entre los subsistemas de fotones y fonones determinado por la conservación de la energía total.

En el capítulo 4 estudiamos el impacto del efecto Casimir dinámico sobre el almacenamiento y transporte de la información cuántica. En particular consideramos dos cavidades con modos inicialmente entrelazados y estudiamos cómo la agitación de una de ellas modifica el entrelazamiento entre ambas. De esta forma buscamos comprender cómo el movimiento y, en particular, las perturbaciones de alta frecuencia modifican la información accesible. Encontramos que si bien el DCE siempre afecta de manera negativa al entrelazamiento, la magnitud depende fuertemente de la frecuencia de agitación y del espectro de la cavidad.

Así, una cavidad con un espectro no-equiespaciado dificulta el acoplamiento de muchos modos y, salvo casos particulares, solo se acoplan dos modos. Se mostró que existen dos casos paradigmáticos que aparecen cuando la frecuencia de agitación coincide con la suma o resta de dos modos de la cavidad. En el primer caso, si coincide con la suma, vimos que el entrelazamiento se degrada de manera monótona con el tiempo de agitación, tendiendo a cero para tiempos largos. Sin embargo, aunque la información mutua también disminuye tiende a un valor no nulo para tiempos largos, lo que indica que permanecen correlaciones entre las cavidades. En el segundo caso, en que la frecuencia de agitación coincide con la resta de frecuencias de dos modos, se tiene un comportamiento oscilatorio tanto para el entrelazamiento como para la información mutua. Es decir que si bien la información cuántica parece disminuir, se puede recuperar tan solo agitando la cavidad un poco más, en clara contraposición con el caso anterior.

Si la cavidad tiene una espectro equiespaciado el comportamiento es cualitativamente diferente, debido a que se acoplan entre sí infinitos modos del campo. Por ejemplo, si el modo que entrelazamos inicialmente es el fundamental de frecuencia ω_1, tenemos dos casos bien distintos dependiendo de la frecuencia de agitación. Encontramos que si ésta coincide con la frecuencia fundamental el entrelazamiento se degrada monótonamente con el tiempo y tiende a cero para tiempos largos pero,

a diferencia del caso no-equiespaciado con frecuencia suma, la información mutua también se anula para tiempos largos; es decir, que se pierden incluso las correlaciones clásicas entre las cavidades. Por otro lado, vimos que si la frecuencia de agitación es un múltiplo de la fundamental el comportamiento del entrelazamiento es aún más dramático puesto que presenta una muerte súbita, es decir, un tiempo finito a partir del cual el entrelazamiento es exactamente cero. De donde concluimos que para mitigar el impacto del DCE en el transporte de información cuántica sería deseable contar con un espectro no-equiespaciado y disminuir lo más posible las perturbaciones de muy alta frecuencia.

En el capítulo 5, estudiamos las consecuencias del efecto Casimir dinámico en una cavidad optomecánica sometida a un ciclo de Otto. Para ello encontramos una expresión analítica para la energía generada por el efecto Casimir dinámico en función de la trayectoria de la pared. Vimos que la misma es siempre positiva independientemente de la dirección del movimiento y proporcional al cuadrado de la velocidad, de lo que se evidencia su carácter de fricción cuántica. Además mostramos que esto trae como consecuencia una fuerte disminución en la eficiencia del ciclo para tiempos de operación muy cortos. En consecuencia, la potencia entregada por un motor que utiliza este ciclo aumenta al disminuir el tiempo de operación pero alcanza un máximo, a partir del cual la energía de fricción debida al DCE se vuelve dominante y el trabajo entregado disminuye abruptamente y se anula a partir de un tiempo de operación finito.

En el capítulo 6 buscamos combatir impacto nocivo del DCE mediante la obtención de atajos adiabáticos. Consideramos como antes un campo escalar sin masa en una cavidad con paredes que se mueven con el tiempo con una cierta trayectoria de referencia y encontramos trayectorias efectivas que generan en tiempo finito exactamente la misma evolución para el campo que se habría obtenido siguiendo la trayectoria de referencia de forma infinitamente lenta. Estos atajos adiabáticos nos permiten entonces evitar por completo la generación neta de fotones debida al DCE y mejorar la eficiencia de ciclos termodinámicos. Adicionalmente, pudimos generalizar el método propuesto al movimiento simultáneo de ambas paredes de la cavidad y analizamos las trayectorias efectivas para trayectorias de referencia dadas

por compresiones, expansiones o movimientos rígidos. Encontramos que, cuando solo se mueve una pared, las trayectorias efectivas límites para trayectorias de referencia infinitamente rápidas, son continuas cuando se mueve una sola pared pero se vuelven discontinuas cuando se mueven dos paredes en simultáneo.

Por último consideramos el problema de completar una trayectoria inicial a un atajo adiabático y presentamos tres métodos diferentes para lograrlo. El primero consiste en calcular numéricamente la función de Moore asociada, extenderla de manera contínua a una lineal para tiempos tardíos e invertirla para obtener la trayectoria que completa la perturbación inicial a un atajo. Este método es completamente general, sin importar cuanto dura la primera trayectoria o a qué posición final queremos llegar, pero resulta computacionalmente muy demandante. Por esa razón presentamos un segundo método que permite obtener una trayectoria explícita para completar una perturbación inicial a un atajo. Este método es explícito y no requiere mayores cálculos pero requiere que la duración de la perturbación sea corta y que el atajo vuelva a la posición inicial. Por último, se presentó un tercer método que se basa en una simetría de inversión temporal conforme del campo, que permite completar una trayectoria de cualquier duración a un atajo adiabático utilizando su inversa temporal. Si bien esto es una mejora del segundo método en términos de la duración de la perturbación, requiere que la función de Moore sea simétrica para tiempos largos lo que constituye un restricción importante además del costo de calcular esta función.

Para terminar en el capítulo 7, mostramos cómo el *squeezing* que genera el efecto Casimir dinámico puede ser aprovechado para producir un compuerta de tipo *controlled-squeeze*. Más aún se presentó una propuesta experimental concreta basada en una guía de ondas superconductora terminada en un SQUID y controlada por un qubit transmón acoplado capacitivamente. Mostramos que dicha implementación permite generar la evolución unitaria de *squeezing* controlado cuánticamente por un qubit y analizamos se factibilidad experimental mediante la simulación con parámetros realistas. Asimismo, se estudió el uso de dicha compuerta para la generación de estados superposición de *squeeze* con importantes aplicaciones en metrología. Por último mostramos que la compuerta *controlled-squeeze* en conjunción con una ope-

ración de desplazamiento, permiten generar cualquier otra operación unitaria sobre la cavidad, es decir, son universales, lo que la convierte en una herramienta valiosa para la computación cuántica.

Bibliografía

[1] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1982. 1, 2.1, 2.1.3

[2] W. G. Unruh, "Notes on black-hole evaporation," *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 870–892, Aug 1976. 1, 4

[3] S. W. Hawking, "Particle creation by black holes," *Communications In Mathematical Physics*, vol. 43, p. 199–220, Aug 1975. 1

[4] S. W. HAWKING, "Black hole explosions?," *Nature*, vol. 248, p. 30–31, Mar 1974. 1

[5] J. Schwinger, "The theory of quantized fields. i," *Phys. Rev.*, vol. 82, pp. 914–927, Jun 1951. 1

[6] G. T. Moore, "Quantum Theory of the Electromagnetic Field in a Variable-Length One-Dimensional Cavity," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 11, pp. 2679–2691, 9 1970. 1, 2.1, 6.3, A

[7] P. Lähteenmäki, G. S. Paraoanu, J. Hassel, and P. J. Hakonen, "Dynamical casimir effect in a josephson metamaterial," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 110, p. 4234–4238, Feb 2013. 1

[8] D. A. R. Dalvit, P. A. M. Neto, and F. D. Mazzitelli, *Fluctuations, Dissipation and the Dynamical Casimir Effect*, pp. 419–457. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. 1

[9] V. Dodonov, "Fifty years of the dynamical casimir effect," *Physics*, vol. 2, no. 1, pp. 67–104, 2020. 1

[10] S. A. Fulling, P. C. W. Davies, and R. Penrose, "Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly," *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 348, no. 1654, pp. 393–414, 1976. 1, 2.1.3, 2.1.3, 6.3.1

[11] A. Lambrecht, M.-T. Jaekel, and S. Reynaud, "Motion induced radiation from a vibrating cavity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 615–618, Jul 1996. 1

[12] C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, C. D. Noce, G. Galeazzi, A. Lombardi, A. Palmieri, G. Ruoso, and D. Zanello, "A novel experimental approach for the detection of the dynamical casimir effect," *Europhysics Letters*, vol. 70, p. 754, may 2005. 1

[13] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, and F. Nori, "Dynamical casimir effect in superconducting microwave circuits," *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 052509, Nov 2010. 1

[14] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, and F. Nori, "Dynamical casimir effect in a superconducting coplanar waveguide," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 147003, Sep 2009. 1

[15] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori, and P. Delsing, "Observation of the dynamical casimir effect in a superconducting circuit," *Nature*, vol. 479, p. 376–379, Nov 2011. 1, 2.2, 7.1

[16] A. D. Helfer, "Moving mirrors and thermodynamic paradoxes," *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 025016, Dec 2000. 1

[17] A. V. Dodonov, D. Valente, and T. Werlang, "Antidynamical casimir effect as a resource for work extraction," *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 012501, Jul 2017. 1

[18] Z. Fei, J. Zhang, R. Pan, T. Qiu, and H. T. Quan, "Quantum work distributions associated with the dynamical casimir effect," *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 052508, May 2019. 1

[19] P. M. Alsing and G. J. Milburn, "Teleportation with a uniformly accelerated partner," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 180404, Oct 2003. 1

[20] H. Terashima and M. Ueda, "Spin decoherence by spacetime curvature," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, p. 2029, feb 2005. 1

[21] Q. Pan and J. Jing, "Hawking radiation, entanglement, and teleportation in the background of an asymptotically flat static black hole," *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 065015, Sep 2008. 1

[22] J. L. Ball, I. Fuentes-Schuller, and F. P. Schuller, "Entanglement in an expanding spacetime," *Physics Letters A*, vol. 359, no. 6, pp. 550–554, 2006. 1

[23] D. Ahn, Y. Moon, R. Mann, and I. Fuentes-Schuller, "The black hole final state for the dirac fields in schwarzschild spacetime," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2008, p. 062, jun 2008. 1

[24] R. B. Mann and T. C. Ralph, "Relativistic quantum information," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, p. 220301, nov 2012. 1

[25] S. W. Hawking, "Breakdown of predictability in gravitational collapse," *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 2460–2473, Nov 1976. 1

[26] I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann, "Alice falls into a black hole: Entanglement in noninertial frames," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 120404, Sep 2005. 1, 4.5

[27] *The Physics of Quantum Information*. Springer Berlin Heidelberg, 2000. 1

[28] G. Adesso, I. Fuentes-Schuller, and M. Ericsson, "Continuous-variable entanglement sharing in noninertial frames," *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 062112, Dec 2007. 1, 4.5

[29] N. Friis, D. E. Bruschi, J. Louko, and I. Fuentes, "Motion generates entanglement," *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 081701, Apr 2012. 1

[30] D. E. Bruschi, I. Fuentes, and J. Louko, "Voyage to alpha centauri: Entanglement degradation of cavity modes due to motion," *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 061701, Mar 2012. 1

[31] T. G. Downes, I. Fuentes, and T. C. Ralph, "Entangling moving cavities in noninertial frames," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 210502, May 2011. 1

[32] P. M. Alsing, I. Fuentes-Schuller, R. B. Mann, and T. E. Tessier, "Entanglement of dirac fields in noninertial frames," *Phys. Rev. A*, vol. 74, p. 032326, Sep 2006. 1

[33] S.-Y. Lin, C.-H. Chou, and B. L. Hu, "Disentanglement of two harmonic oscillators in relativistic motion," *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 125025, Dec 2008. 1

[34] B. L. Hu, S.-Y. Lin, and J. Louko, "Relativistic quantum information in detectors–field interactions," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, p. 224005, oct 2012. 1, 4.5

[35] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, "Cavity optomechanics," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 86, pp. 1391–1452, Dec 2014. 1

[36] V. Macrì, A. Ridolfo, O. Di Stefano, A. F. Kockum, F. Nori, and S. Savasta, "Nonperturbative dynamical casimir effect in optomechanical systems: Vacuum casimir-rabi splittings," *Phys. Rev. X*, vol. 8, p. 011031, Feb 2018. 1, 3, 3.2

[37] B. Arash, J.-W. Jiang, and T. Rabczuk, "A review on nanomechanical resonators and their applications in sensors and molecular transportation," *Applied Physics Reviews*, vol. 2, Apr 2015. 1

[38] A. Settineri, V. Macrì, L. Garziano, O. Di Stefano, F. Nori, and S. Savasta, "Conversion of mechanical noise into correlated photon pairs: Dynamical casimir effect from an incoherent mechanical drive," *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 022501, Aug 2019. 1

[39] W. Qin, V. Macrì, A. Miranowicz, S. Savasta, and F. Nori, "Experimentally feasible dynamical casimir effect in parametrically amplified cavity optomechanics," *arXiv: Quantum Physics*, 2019. 1

[40] A. Motazedifard, A. Dalafi, M. Naderi, and R. Roknizadeh, "Controllable generation of photons and phonons in a coupled bose–einstein condensate-optomechanical cavity via the parametric dynamical casimir effect," *Annals of Physics*, vol. 396, pp. 202–219, 2018. 1

[41] M. Sanz, W. Wieczorek, S. Gröblacher, and E. Solano, "Electro-mechanical Casimir effect," *Quantum*, vol. 2, p. 91, Sept. 2018. 1

[42] Z. D. Romaszko, S. Hong, M. Siegele, R. K. Puddy, F. R. Lebrun-Gallagher, S. Weidt, and W. K. Hensinger, "Engineering of microfabricated ion traps and integration of advanced on-chip features," *Nature Reviews Physics*, vol. 2, p. 285–299, May 2020. 1

[43] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. Girvin, and A. Wallraff, "Circuit quantum electrodynamics," *Reviews of Modern Physics*, vol. 93, May 2021. 1, 7.2

[44] M. O. Scully, K. R. Chapin, K. E. Dorfman, M. B. Kim, and A. Svidzinsky, "Quantum heat engine power can be increased by noise-induced coherence," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 108, p. 15097–15100, Aug 2011. 1

[45] R. Uzdin, "Coherence-induced reversibility and collective operation of quantum heat machines via coherence recycling," *Phys. Rev. Appl.*, vol. 6, p. 024004, Aug 2016. 1

[46] R. Alicki and M. Fannes, "Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries," *Phys. Rev. E*, vol. 87, p. 042123, Apr 2013. 1

[47] N. Brunner, M. Huber, N. Linden, S. Popescu, R. Silva, and P. Skrzypczyk, "Entanglement enhances cooling in microscopic quantum refrigerators," *Phys. Rev. E*, vol. 89, p. 032115, Mar 2014. 1

[48] J. Goold, M. Huber, A. Riera, L. d. Rio, and P. Skrzypczyk, "The role of quantum information in thermodynamics—a topical review," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 49, p. 143001, Feb 2016. 1

[49] B. Karimi and J. P. Pekola, "Otto refrigerator based on a superconducting qubit: Classical and quantum performance," *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 184503, Nov 2016. 1

[50] R. Kosloff and Y. Rezek, "The quantum harmonic otto cycle," *Entropy*, vol. 19, no. 4, 2017. 1, 5.1.2

[51] M. Gluza, J. a. Sabino, N. H. Ng, G. Vitagliano, M. Pezzutto, Y. Omar, I. Mazets, M. Huber, J. Schmiedmayer, and J. Eisert, "Quantum field thermal machines," *PRX Quantum*, vol. 2, p. 030310, Jul 2021. 1

[52] E. Arias, T. R. de Oliveira, and M. S. Sarandy, "The unruh quantum otto engine," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, Feb 2018. 1

[53] F. Gray and R. B. Mann, "Scalar and fermionic unruh otto engines," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, Nov 2018. 1

[54] G. R. Kane and B. R. Majhi, "Entangled quantum unruh otto engine is more efficient," *Phys. Rev. D*, vol. 104, p. L041701, Aug 2021. 1

[55] N. F. Del Grosso, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, and P. I. Villar, "Quantum otto cycle in a superconducting cavity in the nonadiabatic regime," *Phys. Rev. A*, vol. 105, p. 022202, Feb 2022. 1, 5

[56] D. Guéry-Odelin, A. Ruschhaupt, A. Kiely, E. Torrontegui, S. Martínez-Garaot, and J. G. Muga, "Shortcuts to adiabaticity: Concepts, methods, and applications," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 91, p. 045001, Oct 2019. 1

[57] M. V. Berry, "Transitionless quantum driving," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, p. 365303, aug 2009. 1

[58] A. del Campo, "Shortcuts to adiabaticity by counterdiabatic driving," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 100502, Sep 2013. 1, 6.1

[59] S. Masuda and K. Nakamura, "Fast-forward problem in quantum mechanics," *Phys. Rev. A*, vol. 78, p. 062108, Dec 2008. 1

[60] X. Chen, A. Ruschhaupt, S. Schmidt, A. del Campo, D. Guéry-Odelin, and J. G. Muga, "Fast optimal frictionless atom cooling in harmonic traps: Shortcut to adiabaticity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 063002, Feb 2010. 1

[61] E. Torrontegui, X. Chen, M. Modugno, S. Schmidt, A. Ruschhaupt, and J. G. Muga, "Fast transport of bose–einstein condensates," *New Journal of Physics*, vol. 14, p. 013031, jan 2012. 1

[62] M. Palmero, R. Bowler, J. P. Gaebler, D. Leibfried, and J. G. Muga, "Fast transport of mixed-species ion chains within a paul trap," *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 053408, Nov 2014. 1

[63] E. Torrontegui, X. Chen, M. Modugno, A. Ruschhaupt, D. Guéry-Odelin, and J. G. Muga, "Fast transitionless expansion of cold atoms in optical gaussian-beam traps," *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 033605, Mar 2012. 1

[64] T. Dowdall, A. Benseny, T. Busch, and A. Ruschhaupt, "Fast and robust quantum control based on pauli blocking," *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 043601, Oct 2017. 1

[65] S. Amri, R. Corgier, D. Sugny, E. M. Rasel, N. Gaaloul, and E. Charron, "Optimal control of the transport of bose-einstein condensates with atom chips," *Scientific Reports*, vol. 9, Mar 2019. 1

[66] B. i. e. i. f. m. c. Çakmak and O. E. Müstecaplıoğlu, "Spin quantum heat engines with shortcuts to adiabaticity," *Phys. Rev. E*, vol. 99, p. 032108, Mar 2019. 1

[67] O. Abah and M. Paternostro, "Shortcut-to-adiabaticity otto engine: A twist to finite-time thermodynamics," *Phys. Rev. E*, vol. 99, p. 022110, Feb 2019. 1

[68] O. Abah and E. Lutz, "Performance of shortcut-to-adiabaticity quantum engines," *Phys. Rev. E*, vol. 98, p. 032121, Sep 2018. 1

[69] O. Abah and E. Lutz, "Energy efficient quantum machines," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 118, p. 40005, May 2017. 1

[70] A. d. Campo, J. Goold, and M. Paternostro, "More bang for your buck: Superadiabatic quantum engines," *Scientific Reports*, vol. 4, Aug 2014. 1

[71] M. Beau, J. Jaramillo, and A. Del Campo, "Scaling-up quantum heat engines efficiently via shortcuts to adiabaticity," *Entropy*, vol. 18, no. 5, 2016. 1

[72] Y.-Y. Chen, G. Watanabe, Y.-C. Yu, X.-W. Guan, and A. del Campo, "An interaction-driven many-particle quantum heat engine and its universal behavior," *npj Quantum Information*, vol. 5, Oct 2019. 1

[73] T. Keller, T. Fogarty, J. Li, and T. Busch, "Feshbach engine in the thomas-fermi regime," *Phys. Rev. Res.*, vol. 2, p. 033335, Aug 2020. 1

[74] J. Li, T. Fogarty, S. Campbell, X. Chen, and T. Busch, "An efficient nonlinear feshbach engine," *New Journal of Physics*, vol. 20, p. 015005, jan 2018. 1

[75] S. Deng, A. Chenu, P. Diao, F. Li, S. Yu, I. Coulamy, A. del Campo, and H. Wu, "Superadiabatic quantum friction suppression in finite-time thermodynamics," *Science Advances*, vol. 4, no. 4, p. eaar5909, 2018. 1

[76] S. Deffner, "Shortcuts to adiabaticity: suppression of pair production in driven dirac dynamics," *New Journal of Physics*, vol. 18, p. 012001, dec 2015. 1

[77] A. Roychowdhury and S. Deffner, "Time-rescaling of dirac dynamics: Shortcuts to adiabaticity in ion traps and weyl semimetals," *Entropy*, vol. 23, no. 1, 2021. 1

[78] A. Tobalina, I. Lizuain, and J. G. Muga, "Vanishing efficiency of a speeded-up ion-in-paul-trap otto engine(a)," *Europhysics Letters*, vol. 127, p. 20005, aug 2019. 1

[79] E. Calzetta, "Not-quite-free shortcuts to adiabaticity," *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 032107, Sep 2018. 1, 6.1

[80] X. Chen and J. G. Muga, "Transient energy excitation in shortcuts to adiabaticity for the time-dependent harmonic oscillator," *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 053403, Nov 2010. 1

[81] A. Blais, S. M. Girvin, and W. D. Oliver, "Quantum information processing and quantum optics with circuit quantum electrodynamics," *Nature Physics*, vol. 16, p. 247–256, Mar. 2020. 1

[82] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell, *et al.*, "Quantum supremacy using a programmable superconducting processor," *Nature*, vol. 574, no. 7779, pp. 505–510, 2019. 1

[83] N. Ofek, A. Petrenko, R. Heeres, P. Reinhold, Z. Leghtas, B. Vlastakis, Y. Liu, L. Frunzio, S. M. Girvin, L. Jiang, M. Mirrahimi, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, "Extending the lifetime of a quantum bit with error correction in superconducting circuits," *Nature*, vol. 536, p. 441–445, July 2016. 1

[84] R. W. Heeres, P. Reinhold, N. Ofek, L. Frunzio, L. Jiang, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, "Implementing a universal gate set on a logical qubit encoded in an oscillator," *Nature Communications*, vol. 8, July 2017. 1

[85] K. S. Chou, J. Z. Blumoff, C. S. Wang, P. C. Reinhold, C. J. Axline, Y. Y. Gao, L. Frunzio, M. H. Devoret, L. Jiang, and R. J. Schoelkopf, "Deterministic teleportation of a quantum gate between two logical qubits," *Nature*, vol. 561, p. 368–373, Sept. 2018. 1

[86] Y. Y. Gao, B. J. Lester, K. S. Chou, L. Frunzio, M. H. Devoret, L. Jiang, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, "Entanglement of bosonic modes through an engineered exchange interaction," *Nature*, vol. 566, p. 509–512, Feb. 2019. 1

[87] Y. Xu, Y. Ma, W. Cai, X. Mu, W. Dai, W. Wang, L. Hu, X. Li, J. Han, H. Wang, Y. P. Song, Z.-B. Yang, S.-B. Zheng, and L. Sun, "Demonstration of controlled-phase gates between two error-correctable photonic qubits," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, p. 120501, Mar 2020. 1

[88] P. Reinhold, S. Rosenblum, W.-L. Ma, L. Frunzio, L. Jiang, and R. J. Schoelkopf, "Error-corrected gates on an encoded qubit," *Nature Physics*, vol. 16, p. 822–826, June 2020. 1

[89] S. Rosenblum, P. Reinhold, M. Mirrahimi, L. Jiang, L. Frunzio, and R. J. Schoelkopf, "Fault-tolerant detection of a quantum error," *Science*, vol. 361, no. 6399, pp. 266–270, 2018. 1

[90] M. Crocce, D. A. R. Dalvit, and F. D. Mazzitelli, "Resonant photon creation in a three-dimensional oscillating cavity," *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 013808, Jun 2001. 2.1, 3.3, 4.1, 4.1.1

[91] D. A. R. Dalvit and F. D. Mazzitelli, "Creation of photons in an oscillating cavity with two moving mirrors," *Phys. Rev. A*, vol. 59, pp. 3049–3059, Apr 1999. 2.1.3, 2.1.3, 4.1, 4.1.2

[92] E. A. Calzetta and B.-L. B. Hu, *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2008. 2.1.3

[93] D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva, and M. G. Lima, "Quantum radiation force on the moving mirror of a cavity, with dirichlet and neumann boundary conditions for a vacuum, finite temperature, and a coherent state," *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 025016, Jan 2010. 2.1.3

[94] W. Wustmann and V. Shumeiko, "Parametric resonance in tunable superconducting cavities," *Phys. Rev. B*, vol. 87, p. 184501, May 2013. 2.2, 7.1

[95] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, A. Soba, and P. I. Villar, "Dynamical casimir effect in superconducting circuits: A numerical approach," *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 032501, Mar 2016. 2.2, 4.1.2

[96] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, A. Soba, and P. I. Villar, "Dynamical casimir effect in a double tunable superconducting circuit," *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 022512, Aug 2018. 2.2, 4.1

[97] P. I. Villar and A. Soba, "Adaptive numerical algorithms to simulate the dynamical casimir effect in a closed cavity with different boundary conditions," *Phys. Rev. E*, vol. 96, p. 013307, Jul 2017. 2.2, 4.1.1

[98] P. I. Villar, A. Soba, and F. C. Lombardo, "Numerical approach to simulating interference phenomena in a cavity with two oscillating mirrors," *Phys. Rev. A*, vol. 95, p. 032115, Mar 2017. 2.2, 4.1

[99] J. Doukas and J. Louko, "Superconducting circuit boundary conditions beyond the dynamical casimir effect," *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 044010, Feb 2015. 2.2

[100] T. Fujii, S. Matsuo, N. Hatakenaka, S. Kurihara, and A. Zeilinger, "Quantum circuit analog of the dynamical casimir effect," *Phys. Rev. B*, vol. 84, p. 174521, Nov 2011. 2.2

[101] C. I. Velasco, N. F. Del Grosso, F. C. Lombardo, A. Soba, and P. I. Villar, "Photon generation and entanglement in a double superconducting cavity," *Phys. Rev. A*, vol. 106, p. 043701, Oct 2022. 2.2

[102] A. Megrant, C. Neill, R. Barends, B. Chiaro, Y. Chen, L. Feigl, J. Kelly, E. Lucero, M. Mariantoni, P. J. J. O'Malley, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. C. White, Y. Yin, J. Zhao, C. J. Palmstrøm, J. M. Martinis, and A. N. Cleland, "Planar superconducting resonators with internal quality factors above one million," *Applied Physics Letters*, vol. 100, p. 113510, 03 2012. 3

[103] A. D. O'Connell, M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, J. M. Martinis, and A. N. Cleland, "Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator," Mar 2010. 3

[104] R. Riedinger, A. Wallucks, I. Marinković, C. Löschnauer, M. Aspelmeyer, S. Hong, and S. Gröblacher, "Remote quantum entanglement between two micromechanical oscillators," *Nature*, vol. 556, p. 473–477, Apr 2018. 3

[105] N. F. Del Grosso, F. C. Lombardo, and P. I. Villar, "Photon generation via the dynamical casimir effect in an optomechanical cavity as a closed quantum system," *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 062516, Dec 2019. 3

[106] D. A. R. Dalvit and P. A. Maia Neto, "Decoherence via the dynamical casimir effect," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 798–801, Jan 2000. 3.3

[107] N. F. Del Grosso, F. C. Lombardo, and P. I. Villar, "Entanglement degradation of cavity modes due to the dynamical casimir effect," *Phys. Rev. D*, vol. 102, p. 125008, Dec 2020. 4, 6.3.1

[108] M. Fink, A. Rodriguez-Aramendia, J. Handsteiner, A. Ziarkash, F. Steinlechner, T. Scheidl, I. Fuentes, J. Pienaar, T. C. Ralph, and R. Ursin, "Experimental test of photonic entanglement in accelerated reference frames," *Nature Communications*, vol. 8, May 2017. 4

[109] M. Crocce, D. A. R. Dalvit, F. C. Lombardo, and F. D. Mazzitelli, "Model for resonant photon creation in a cavity with time-dependent conductivity," *Phys. Rev. A*, vol. 70, p. 033811, Sep 2004. 4.1.1

[110] D. A. R. Dalvit and F. D. Mazzitelli, "Renormalization-group approach to the dynamical casimir effect," *Phys. Rev. A*, vol. 57, pp. 2113–2119, Mar 1998. 4.1.2

[111] V. V. Dodonov, "Resonance photon generation in a vibrating cavity," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 31, p. 9835, dec 1998. 4.1.2, 4.3.2

[112] G. Adesso, S. Ragy, and A. R. Lee, "Continuous variable quantum information: Gaussian states and beyond," *Open Systems & Information Dynamics*, vol. 21, no. 01n02, p. 1440001, 2014. 4.2

[113] D. Bruß, "Characterizing entanglement," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43, pp. 4237–4251, 08 2002. 4.2

[114] A. Peres, "Separability criterion for density matrices," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 1413–1415, Aug 1996. 4.2

[115] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, "Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions," *Physics Letters A*, vol. 223, no. 1, pp. 1–8, 1996. 4.2

[116] G. Vidal and R. F. Werner, "Computable measure of entanglement," *Phys. Rev. A*, vol. 65, p. 032314, Feb 2002. 4.2

[117] M. B. Plenio and S. Virmani, "An introduction to entanglement measures," *Quantum Info. Comput.*, vol. 7, p. 1–51, jan 2007. 4.2

[118] G. Adesso and F. Illuminati, "Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, p. 7821, jun 2007. 4.2, 4.2

[119] A. S. Holevo and R. F. Werner, "Evaluating capacities of bosonic gaussian channels," *Phys. Rev. A*, vol. 63, p. 032312, Feb 2001. 4.2

[120] A. Serafini, F. Illuminati, and S. D. Siena, "Symplectic invariants, entropic measures and correlations of gaussian states," *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 37, p. L21, dec 2003. 4.2

[121] V. Dodonov, "Resonance excitation and cooling of electromagnetic modes in a cavity with an oscillating wall," *Physics Letters A*, vol. 213, no. 5, pp. 219–225, 1996. 4.3.2

[122] P. Salamon, K. H. Hoffmann, Y. Rezek, and R. Kosloff, "Maximum work in minimum time from a conservative quantum system," *Phys. Chem. Chem. Phys.*, vol. 11, pp. 1027–1032, 2009. 5.1.2

[123] O. Abah, J. Roßnagel, G. Jacob, S. Deffner, F. Schmidt-Kaler, K. Singer, and E. Lutz, "Single-ion heat engine at maximum power," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 203006, Nov 2012. 5.1.2

[124] D. Stefanatos, J. Ruths, and J.-S. Li, "Frictionless atom cooling in harmonic traps: A time-optimal approach," *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 063422, Dec 2010. 5.1.2

[125] D. Stefanatos, "Minimum-time transitions between thermal equilibrium states of the quantum parametric oscillator," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 8, pp. 4290–4297, 2017. 5.1.2

[126] N. F. Del Grosso, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, and P. I. Villar, "Shortcut to adiabaticity in a cavity with a moving mirror," *Phys. Rev. A*, vol. 105, p. 052217, May 2022. 6

[127] N. F. Del Grosso, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, and P. I. Villar, "Fast adiabatic control of an optomechanical cavity," *Entropy*, vol. 25, no. 1, 2023. 6

[128] N. F. Del Grosso, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, and P. I. Villar, "Adiabatic shortcuts completion in quantum field theory: Annihilation of created particles," *Entropy*, vol. 25, no. 9, 2023. 6

[129] S. Ibáñez, X. Chen, E. Torrontegui, J. G. Muga, and A. Ruschhaupt, "Multiple schrödinger pictures and dynamics in shortcuts to adiabaticity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 100403, Sep 2012. 6.1

[130] J. Lewis, H. R. and W. B. Riesenfeld, "An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field," Aug 1969. 6.1.1

[131] I. Gjaja and A. Bhattacharjee, "Asymptotics of reflectionless potentials," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, pp. 2413–2416, Apr 1992. 6.1.1

[132] S. S. Coelho, L. Queiroz, and D. T. Alves, "Squeezing equivalence of quantum harmonic oscillators under different frequency jumps," 2023. 6.1.1

[133] B. L. HU, G. KANG, and A. MATACZ, "Squeezed vacua and the quantum statistics of cosmological particle creation," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 09, no. 07, pp. 991–1007, 1994. 6.1.2

[134] F. Diego Mazzitelli, J. P. Paz, and M. A. Castagnino, "Fermions between moving boundaries," *Physics Letters B*, vol. 189, no. 1, pp. 132–136, 1987. 6.3

[135] M. Castagnino and R. Ferraro, "The radiation from moving mirrors: The creation and absorption of particles," *Annals of Physics*, vol. 154, no. 1, pp. 1–23, 1984. 6.3.1

[136] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, P. Delsing, and F. Nori, "Nonclassical microwave radiation from the dynamical casimir effect," *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 043804, Apr 2013. 7

[137] M. Drechsler, M. Belén Farías, N. Freitas, C. T. Schmiegelow, and J. P. Paz, "State-dependent motional squeezing of a trapped ion: Proposed method and applications," *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 052331, May 2020. 7.2, 7.2

[138] A. Eickbusch, V. Sivak, A. Z. Ding, S. S. Elder, S. R. Jha, J. Venkatraman, B. Royer, S. Girvin, R. J. Schoelkopf, and M. H. Devoret, "Fast universal control of an oscillator with weak dispersive coupling to a qubit," *Nature Physics*, vol. 18, no. 12, pp. 1464–1469, 2022. 7.3

[139] V. V. Sivak, A. Eickbusch, B. Royer, S. Singh, I. Tsioutsios, S. Ganjam, A. Miano, B. L. Brock, A. Z. Ding, L. Frunzio, S. M. Girvin, R. J. Schoelkopf, and M. H. Devoret, "Real-time quantum error correction beyond break-even," 2022. 7.4

[140] C. K. Cole and W. C. Schieve, "Radiation modes of a cavity with a moving boundary," *Phys. Rev. A*, vol. 52, pp. 4405–4415, Dec 1995. B

APÉNDICE A

Funciones de Moore adiabáticas para dos espejos móviles

Comenzamos buscando funciones F y G que satisfacen la Ecuaciones (2.46) y (2.47). Podemos tomar la derivada de ese conjunto de ecuaciones para obtener

$$G'\left[t+L(t)\right]\left[1+\dot{L}(t)\right]-F'\left[t-L(t)\right]\left[1-\dot{L}(t)\right]=0 \tag{A.0.1}$$

$$G'\left[t+L(t)\right]\left[1+\dot{R}(t)\right]-F'\left[t-R(t)\right]\left[1-\dot{R}(t)\right]=0 \tag{A.0.2}$$

y definimos

$$A(z):=F'(z) \tag{A.0.3}$$

$$B(z):=G'(z). \tag{A.0.4}$$

Luego, es fácil reescribir las ecuaciones anteriores como

$$B\left[t+L\right]\left[1+\dot{L}\right]-A\left[t-L\right]\left[1-\dot{L}\right]=0 \tag{A.0.5}$$

$$B\left[t+R\right]\left[1+\dot{R}\right]-A\left[t-R\right]\left[1-\dot{R}\right]=0. \tag{A.0.6}$$

Más aún, podemos expandir las funciones en una serie de Taylor

$$B\left[t+x\right]=\sum_{n}\frac{d^{n}B(t)}{dt^{n}}\frac{x^{n}}{n!} \tag{A.0.7}$$

$$A\left[t+x\right]=\sum_{n}\frac{d^{n}A(t)}{dt^{n}}\frac{x^{n}}{n!} \tag{A.0.8}$$

la cual resulta en el siguiente conjunto de ecuaciones a tercer orden

$$\begin{aligned}&\left[B+\frac{dB(t)}{dt}L+\frac{1}{2}\frac{d^{2}B(t)}{dt^{2}}L^{2}+\frac{1}{3!}\frac{d^{3}B(t)}{dt^{3}}L^{3}\right]\left[1+\dot{L}\right]\\&-\left[A-\frac{dA(t)}{dt}L+\frac{1}{2}\frac{d^{2}A(t)}{dt^{2}}L^{2}-\frac{1}{3!}\frac{d^{3}A(t)}{dt^{3}}L^{3}\right]\left[1-\dot{L}\right]=0\end{aligned} \tag{A.0.9}$$

$$\begin{aligned}&\left[B+\frac{dB(t)}{dt}R+\frac{1}{2}\frac{d^{2}B(t)}{dt^{2}}R^{2}+\frac{1}{3!}\frac{d^{3}B(t)}{dt^{3}}R^{3}\right]\left[1+\dot{R}\right]\\&-\left[A-\frac{dA(t)}{dt}L+\frac{1}{2}\frac{d^{2}A(t)}{dt^{2}}L^{2}-\frac{1}{3!}\frac{d^{3}A(t)}{dt^{3}}L^{3}\right]\left[1-\dot{R}\right]=0.\end{aligned} \tag{A.0.10}$$

Estas pueden ser escritas como

$$B-A+((B+A)L)'+\frac{1}{2}\left((B'-A')L^{2}\right)'+\frac{1}{6}\left((B''+A'')L^{3}\right)'=0 \tag{A.0.11}$$

$$B-A+((B+A)R)'+\frac{1}{2}\left((B'-A')R^{2}\right)'+\frac{1}{6}\left((B''+A'')R^{3}\right)'=0, \tag{A.0.12}$$

descartando los términos $B'''L'$, $A'''L'$, $B'''R'$ y $A'''R'$ debido a que involucran terceras derivadas del tiempo. En este punto, podemos expandir estas funciones en diferentes escalas temporales

$$A=A_{0}+A_{1}+A_{2}+A_{3}+\ldots \tag{A.0.13}$$

$$B=B_{0}+B_{1}+B_{2}+B_{3}+\ldots \tag{A.0.14}$$

donde los subíndices indican cuantas derivadas temporales están involucradas en cada contribución. Usando esta expansión, la ecuación anterior resulta para orden 0 en

$$A_{0}=B_{0} \tag{A.0.15}$$

Siguiendo, a primer orden tenemos que

$$B_1 - A_1 + (2A_0 L)' = 0 \tag{A.0.16}$$

$$B_1 - A_1 + (2A_0 R)' = 0 \tag{A.0.17}$$

y por lo tanto

$$(2A_0(R-L))' = 0 \quad \implies A_0 = \frac{1}{R-L}. \tag{A.0.18}$$

Con este resultado, $B_1 - A_1$ puede ser calculado reemplazando en las ecuaciones previas.

El segundo orden nos da

$$B_2 - A_2 + ((A_1 + B_1)L)' = 0 \tag{A.0.19}$$

$$B_2 - A_2 + ((A_1 + B_1)R)' = 0, \tag{A.0.20}$$

donde hemos usado que $A_0 = B_0$. Restando, obtenemos

$$[(A_1 + B_1)(L-R)]' = 0 \implies A_1 + B_1 = \frac{k}{L-R}, \tag{A.0.21}$$

donde k es alguna constante. Sin embargo, debemos notar que, por definición, A_1 y B_1 deberían tener una y solo una derivada temporal. Por lo tanto

$$k = 0 \implies A_1 = -B_1. \tag{A.0.22}$$

Ahora si reemplazamos este resultado en la ecuación para $B_1 - A_1$, encontramos que

$$A_1 = -B_1 = (A_0 R)' = \left(\frac{R}{R-L}\right)' = \left(\frac{1}{2}\frac{R+L}{R-L}\right)'. \tag{A.0.23}$$

De esta forma concluimos que las funciones de Moore vienen dadas por

$$F(t) = \int dt A(t) = \int dt A_0(t) + \int dt A_1(t) + \int dt A_2(t) + ... \tag{A.0.24}$$

$$G(t) = \int dtB(t) = \int dtB_0(t) + \int dtB_1(t) + \int dtB_2(t) + ..., \tag{A.0.25}$$

donde $A_j(t)$ y $B_j(t)$ incluyen j derivadas temporales. Si la escala temporal en la cual se mueve el espejo viene dada por τ luego $\int dtA_j(t) \propto \tau^{j-1}$, y en el límite adiabático ($\tau \to \infty$), solo los primeros dos términos son relevantes. Concluimos, entonces, que las funciones de Moore adiabáticas para una cavidad con dos espejos móviles vienen dadas por

$$F_{\rm ad}(t) = \int dt \frac{1}{R(t) - L(t)} + \frac{1}{2}\frac{R(t) + L(t)}{R(t) - L(t)} \tag{A.0.26}$$

$$G_{\rm ad}(t) = \int dt \frac{1}{R(t) - L(t)} - \frac{1}{2}\frac{R(t) + L(t)}{R(t) - L(t)}. \tag{A.0.27}$$

Claramente estas funciones se reducen a las que usamos para calcular atajos para una pared móvil cuando $L(t) \equiv 0$.

Continuando con este procedimiento, uno puede calcular los órdenes adiabáticos superiores, generalizando al caso de dos espejos los resultados en [6]. Sin embargo, se puede ver que los resultados de arriba son suficiente para nuestros propósitos.

APÉNDICE B

Algoritmo para las ecuaciones de Moore

En lo que sigue, derivamos un algoritmo para resolver las ecuaciones de Moore (2.46-2.47) para $F(z)$ y $G(z)$ el cual puede ser usado para trayectorias arbitrarias $L(t)$ y $R(t)$ para los espejos. Este algoritmo es una generalización del usado para un solo espejo móvil en [140].

Para hallar el valor de la función en un punto dado $G(z_1)$, buscamos un tiempo t_1 tal que

$$z_1 = t_1 + R(t_1), \tag{B.0.1}$$

lo que se puede hacer sencillamente resolviendo una ecuación algebraica. Luego, de la Ec. (2.47) sabemos que la función G se relaciona con la F como

$$G(t_1 + R(t_1)) = F(t_1 - R(t_1)) + 2 \tag{B.0.2}$$

y, resolviendo para t_1^*, tal que

$$t_1 - R(t_1) = t_1^* - L(t_1^*), \tag{B.0.3}$$

encontramos, usando la Ec. (2.46), que

$$F(t_1^* - L(t_1^*)) = G(t_1^* + L(t_1^*)) \tag{B.0.4}$$

$$\implies G(t_1 + R(t_1)) = F(t_1^* - L(t_1^*)) + 2 = G(t_1^* + L(t_1^*)) + 2. \tag{B.0.5}$$

Entonces, dado

$$z_2 := t_1^* + L(t_1^*), \tag{B.0.6}$$

podemos expresar a G en el punto inicial z_1 por su valor en z_2 como

$$G(z_1) = G(z_2) + 2. \tag{B.0.7}$$

Si ahora asumimos que z_2 es el punto inicial e iteramos lo anterior n veces, obtenemos

$$G(z_1) = G(z_{n+1}) + 2n. \tag{B.0.8}$$

Notemos que, si $L(t) < R(t)$ para todo t, entonces

$$t_1 - R(t_1) = t_1^* - L(t_1^*) \implies t_1 - t_1^* = R(t_1) - L(t_1^*) > 0 \implies t_1 > t_1^* \tag{B.0.9}$$

$$t_1^* + L(t_1^*) = t_2 + R(t_2) \implies t_1^* - t_2 = R(t_2) - L(t_1^*) > \implies t_1 > t_1^* > t_2, \tag{B.0.10}$$

que a su vez significa que la sucesión de puntos es decreciente $z_1 > z_2 > ... > z_n$. Esto significa que hemos reducido el problema original de encontrar el valor de la función en un cierto tiempo a conocerlo en algún tiempo previo. Podemos iterar este procedimiento hacia atrás en el tiempo hasta que $G(z_n)$ sea conocido, lo cual eventualmente sucede dado que conocemos la solución para los espejos estáticos, Ec. (6.36).

Análogamente, para la otra función de Moore, si deseamos conocer $F(w_1)$, podemos buscar t_1 tal que

$$w_1 = t_1 - L(t_1). \tag{B.0.11}$$

Luego, por medio de la Ec. (2.46), sabemos que

$$F(t_1 - L(t_1)) = G(t_1 + L(t_1)). \tag{B.0.12}$$

Si resolvemos para $\tilde{t}_1$

$$\tilde{t}_1 + R(\tilde{t}_1) = t_1 + L(t_1), \tag{B.0.13}$$

podemos obtener

$$G(\tilde{t}_1 + R(\tilde{t}_1)) = 2 + F(\tilde{t}_1 - R(\tilde{t}_1)) \tag{B.0.14}$$

$$\implies F(t_1 - L(t_1)) = G(t_1 + L(t_1)) = G(\tilde{t}_1 + R(\tilde{t}_1)) = 2 + F(\tilde{t}_1 - R(\tilde{t}_1)) \tag{B.0.15}$$

$$F(w_1) = 2 + F(\tilde{t}_1 - R(\tilde{t}_1)). \tag{B.0.16}$$

Finalmente, definiendo

$$w_2 := \tilde{t}_1 - R(\tilde{t}_1) \tag{B.0.17}$$

podemos expresar el valor de la función en el punto w_1 en términos del valor de la función en w_2

$$F(w_1) = 2 + F(w_2). \tag{B.0.18}$$

En general, iterando, obtenemos que la función en un punto se puede expresar arbitrariamente atrás en el tiempo

$$F(w_1) = 2n + F(w_{n+1}). \tag{B.0.19}$$

Una vez más, si vamos lo suficientemente atrás en el tiempo, eventualmente llegamos al punto en que los espejos están estáticos y la función $F(z_n)$ puede ser evaluada usando la Ec. (6.35). Al final, obtenemos un algoritmo iterativo para evaluar las funciones de Moore $F(z)$ y $G(z)$ en cualquier punto.

APÉNDICE C

Hamiltoniano para un resonador terminado en un SQUID

En este apéndice mostraremos cómo obtener, de primeros principios, el hamiltoniano 7.2 que describe un resonador superconductor terminado en un SQUID utilizado en el capítulo 7.

Formulación lagrangiana

Comenzamos con el lagrangiano para el campo de fase $\Phi(x,t)$ en un resonador superconductor de longitud d con inductancia L_0 y capacitancia C_0 por unidad de longitud, terminado en un SQUID en $x = d$

$$L = \left(\frac{1}{2e}\right)^2 C_0 \frac{1}{2}\int_0^d (\dot{\Phi}^2 - v^2\Phi'^2)dx + \left(\frac{1}{2e}\right)^2 2C_J\frac{\dot{\Phi}_d^2}{2} + 2E_J\cos(\Phi_d)\cos\left(2e\phi_x(t)\right) \tag{C.0.1}$$

Aquí $v = 1/\sqrt{L_0C_0}$ es la velocidad de propagación del campo, $\Phi_d(t) = \Phi(d,t)$ es el campo en $x = d$, mientras que $\phi_x(t)$ es el flujo magnético externo aplicado al SQUID en $x = d$. Además asumimos que el SQUID es simétrico por simplicidad, con dos junturas de Josephson idénticas, cada una con energía E_J y capacitancia C_J.

Las ecuaciones de movimiento para este lagrangiano son la ecuación de ondas

para el campo

$$\ddot{\Phi} - v^2\Phi'' = 0 \tag{C.0.2}$$

y la condición de contorno

$$\left(\frac{1}{2e}\right)^2 2C_J\ddot{\Phi}_d + 2E_J\cos\left(2e\phi_x(t)\right)\sin(\Phi_d) + \left(\frac{1}{2e}\right)^2 C_0 v^2\Phi'_d = 0. \tag{C.0.3}$$

Estas ecuaciones junto con la condición de contorno de Neumann en $x = 0$ $(\partial_x\Phi)(0,t) = 0$ definen el campo en el resonador.

Luego, si el flujo magnético no depende del tiempo $\phi_x(t) = \bar{\phi}_x$ tenemos una base de soluciones de la forma

$$\Phi(x,t) = e^{i\omega_n t}\psi_n(x) \tag{C.0.4}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{N_n}\cos(k_n x), \tag{C.0.5}$$

con N_n una constante de normalización y frecuencia angular $\omega_n = k_n v$. Reemplazando esta solución en Ec. (C.0.3) encontramos una ecuación trascendente para k_n

$$\left(\frac{1}{2e}\right)^2 C_0 v^2 k_n \tan(k_n d) = 2E_J\cos\left(2e\bar{\phi}_x\right) - \left(\frac{1}{2e}\right)^2 2C_J v^2 k_n^2 \tag{C.0.6}$$

Esta ecuación implícita determina de manera unívoca el espectro ω_n del resonador dado el flujo magnético a través del SQUID.

Más aún, si definimos el producto interno

$$\langle\psi_i,\psi_j\rangle = \int_0^d \epsilon(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx, \tag{C.0.7}$$

con $\epsilon(x) = \left(\frac{1}{2e}\right)^2 C_0 + \left(\frac{1}{2e}\right)^2 2C_J\delta(x-d)$, encontramos que esta base resulta ortogonal $\langle\psi_i,\psi_j\rangle = 0$ si $i \neq j$. Luego, tomando la constante de normalización como $N_n^2 = \langle\psi_n,\psi_n\rangle$, la base ψ_n resulta ortonormal.

Si ahora permitimos que el flujo magnético sobre el SQUID varíe con el tiempo $\phi_x(t) = \bar{\phi}_x + \delta\phi_x(t)$ alrededor un valor constante $\bar{\phi}_x$, tendremos que el espectro también tendrá esta dependencia $\omega_n = \omega_n(\phi_x(t))$ a través de (C.0.6) pero el campo

todavía puede ser expandido en una base instantánea como

$$\Phi(x,t) = \sum_n Q_n(t)\psi_n(x), \tag{C.0.8}$$

donde $Q_n(t)$ son coeficientes que dependen del tiempo.

En el caso de campo débil, $\Phi \ll 1$, el lagrangiano puede ser expresado como

$$L = \frac{1}{2}\int_0^d \epsilon(x)\dot{\Phi}^2 dx - \left(\frac{1}{2e}\right)^2 C_0 \frac{1}{2}\int_0^d v^2\Phi'^2 dx - 2E_J\frac{\Phi_d^2}{2}\cos\left(2e\phi_x(t)\right) \tag{C.0.9}$$

sustituyendo la expansión (C.0.8) el lagrangiano puede ser escrito como

$$L = \frac{1}{2}\sum_i \left(\dot{Q_i}^2 - \omega_i^2 Q_i^2\right) - \dot{\delta\phi}_x \sum_{i,j} M_{ij}\dot{Q}_i Q_j + \frac{\dot{\delta\phi}_x^2}{2}\sum_{i,j,k} M_{ik}M_{jk}Q_iQ_j. \tag{C.0.10}$$

donde definimos las constantes de acoplamiento

$$M_{ij} = (2e)\left\langle \psi_j, \frac{d\psi_i}{d\phi_x}\right\rangle. \tag{C.0.11}$$

Formulación hamiltoniana

Para encontrar el hamiltoniano clásico comenzamos calculando los momentos canónico conjugados

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \dot{Q}_i - \dot{\delta\phi}_x \sum_k M_{ik}Q_k. \tag{C.0.12}$$

$$(C.0.12) \implies \dot{Q}_i = P_i + \dot{\delta\phi}_x \sum_k M_{ik}Q_k. \tag{C.0.13}$$

Luego, reemplazando en la definición de hamiltoniano, obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \sum_i P_i\dot{Q}_i - L \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \left[P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2\right] + \dot{\delta\phi}_x \sum_{i,k} M_{ik}P_iQ_k. \end{aligned} \tag{C.0.14}$$

Para continuar procedemos a cuantizar el hamiltoniano promoviendo las coorde-

nadas y momentos canónicos a operadores e imponiendo la relación de conmutación

$$[Q_k, P_j] = i\delta_{kj}. \tag{C.0.15}$$

Además definimos los operadores de destrucción como

$$a_k = \sqrt{\frac{1}{2\omega_k(\phi_x)}}(\omega_k(\phi_x)Q_k + iP_k), \tag{C.0.16}$$

que satisfacen la relación de conmutación $[a_k, a_k^\dagger] = 1$.

Asumiendo que el sistema es perturbado débilmente

$$\phi_x(t) = \bar{\phi}_x + \delta\phi_x(t), \tag{C.0.17}$$

con $\delta\phi \ll \bar{\phi}_x$, los operadores de destrucción pueden ser aproximados por

$$a_k \approx a_{k1} + \delta\phi_x \frac{\omega'_{k1}}{2\omega_{k1}} a_{k1}^\dagger, \tag{C.0.18}$$

donde los operadores a_{k1} corresponden a las excitaciones del resonador estático y $\omega'_{k1} = (d\omega_k/d\phi_x)(\bar{\phi})$. Finalmente, reemplazando estos resultados en la Ec. (C.0.14) podemos expresar al hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H &= \sum_k [\omega_{k1} a_{k1}^\dagger a_{k1} + \omega'_{k1}\delta\phi_x a_{k1}^\dagger a_{k1} + \frac{\omega'_{k1}}{2}\delta\phi_x(a_{k1}a_{k1} + a_{k1}^\dagger a_{k1}^\dagger)] \\ &+ \delta\dot{\phi}_x \sum_{i,k} \frac{M_{ik}}{2i}\sqrt{\frac{\omega_{i1}}{\omega_{k1}}}\left(a_{i1}a_{k1} - a_{i1}^\dagger a_{k1} + a_{i1}a_{k1}^\dagger - a_{i1}^\dagger a_{k1}^\dagger\right), \end{aligned} \tag{C.0.19}$$

donde M_{ij} son constantes de acoplamiento que dependen solo de $\bar{\phi}_x$. Así, el hamiltoniano de la Ec. (7.2) se obtiene de la ecuación anterior quedándonos con la aproximación de un solo modo.

APÉNDICE D

Ecuación maestra para la compuerta controlled-squeeze

Para simular el protocolo propuesto en el capítulo 7 bajo condiciones experimentales adoptamos una descripción del sistema a partir de una ecuación maestra. Así, el estado conjunto del sistema (resonador más qubit) viene descrito por una matriz densidad. Tomando una variación armónica del flujo magnético $\delta\phi_x(t) = \epsilon\phi_0 \sin(\Omega t + \theta)$ (siendo $\phi_0 = \pi/e$ la unidad de cuanto de flujo magnético) y realizando la aproximación de onda rotante, la matriz densidad del sistema en la representación de interacción evoluciona de acuerdo a la ecuación maestra

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_I(t) = & -iH_I(t), \rho_I(t)] \\
& + \frac{1}{2}\kappa_1 \left[2a\rho_I(t)a^\dagger - \rho_I(t)a^\dagger a - a^\dagger a\rho_I(t)\right] \\
& + \frac{1}{2}\kappa_2 \left[2a^\dagger\rho_I(t)a - \rho_I(t)aa^\dagger - aa^\dagger\rho_I(t)\right] \\
& + \frac{1}{2}\kappa_1' \left[2\sigma_-\rho_I(t)\sigma_+ - \rho_I(t)\sigma_+\sigma_- - \sigma_+\sigma_-\rho_I(t)\right] \\
& + \frac{1}{2}\kappa_2' \left[2\sigma_+\rho_I(t)\sigma_- - \rho_I(t)\sigma_-\sigma_+ - \sigma_-\sigma_+\rho_I(t)\right] \\
& + \frac{1}{2}\frac{\kappa_\phi}{2} \left[2\sigma_z\rho_I(t)\sigma_z^\dagger - \rho_I(t)\sigma_z^\dagger\sigma_z - \sigma_z^\dagger\sigma_z\rho_I(t)\right],
\end{aligned}$$

donde

$$\kappa_1 = (e^{-\omega/(k_B T)} + 1)\kappa$$
$$\kappa_2 = e^{-\omega/(k_B T)}\kappa$$
$$\kappa_1' = (e^{-\omega_q/(k_B T)} + 1)\kappa'$$
$$\kappa_2' = e^{-\omega_q/(k_B T)}\kappa'$$

siendo $\kappa = 1/200\mu s$ la tasa de decaimiento del resonador, $\kappa' = 1/50\mu s$ la tasa de decaimiento del qubit, $\kappa_\phi = 1/30\mu s$ la tasa de decoherencia del qubit, $T = 30mK$ la temperatura del baño térmico y donde el hamiltoniano de interacción es

$$H_I = g_d \epsilon \phi_0 \frac{1}{2i}(a^2 e^{-i\theta} - a^{\dagger 2} e^{i\theta})|1\rangle\langle 1| + \mathrm{Id}|0\rangle\langle 0|. \tag{D.0.1}$$

con $g_d \epsilon \phi_0 = 1MHz$. La evolución fue realizada usando Qutip y el espacio de Fock para el resonador fue truncado a una base de dimensión $N = 70$.