



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Comportamientos emergentes en procesos de influencia social: teoría, modelos y experimentos

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de
Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas.

Lucía Pedraza

Director: Dr. Pablo Balenzuela

Codirector: Dr. Juan Pablo Pinasco

Consejera de Estudios: Dra. Silvina Ponce Dawson

Lugar de trabajo: DF (FCEyN-UBA), INFINA (CONICET).

Buenos Aires, 2023

Comportamientos emergentes en procesos de influencia social: teoría, modelos y experimentos

Las sociedades construyen opiniones colectivas sobre temas relevantes para su funcionamiento en comunidad. El estudio de la dinámica en la que se forman estas opiniones, cómo evolucionan los disensos y cómo se conforman las identidades ideológicas puede resultar de gran ayuda para comprender los procesos sociales, estudiar fenómenos políticos y para la construcción de políticas públicas que fortalezcan la democracia.

Las razones por las que un individuo o una comunidad puede modificar sus opiniones son diversas y complejas, pudiendo comprender tanto razones de tipo materiales, la influencia de medios de comunicación o incluso la propia interacción con la opinión de otros individuos. En los últimos tiempos la emergencia de relaciones a través de las redes sociales ha complejizado aún más estos procesos y ha fomentado el interés en su estudio.

Desde el campo de la física se tiene una amplia gama de herramientas para aportar a resolver este tipo de problemas provenientes de las áreas de sistemas complejos y física estadística. El desarrollo de modelos nos permite analizar diversos mecanismos de interacción e influencia social en una escala micro y estudiar los efectos que estos provocan en una escala macro.

En esta tesis analizamos un conjunto de modelos de opinión, que nos permiten estudiar los efectos de mecanismos de influencia social como la imitación y la influencia cultural. Estudiamos representaciones de la opinión tanto discretas como continuas y analizamos los efectos que producen los debates sociales cuando hay más de un tópico involucrado.

Escribimos las ecuaciones maestras que explican la dinámica de estos modelos. En algunos casos encontramos una descripción exacta, salvo por la aproximación de campo medio, mientras que para otros modelos utilizamos otro tipo de aproximación que nos permita hacer una reducción de la dimensionalidad y obtener ecuaciones más simples pero con gran poder descriptivo. De esta manera podemos desarrollar una mayor comprensión de las principales propiedades de la dinámica, el rol que cumple cada parámetro en el modelo y los valores críticos para los cuales observamos una transición en los comportamientos emergentes.

Por último, para que los modelos elaborados reflejen elementos y características de la realidad, es importante el trabajo con datos, ya sea en la elaboración o comprobación de las hipótesis como contrastando los efectos emergentes con fenómenos sociales observados. En este sentido, abordamos el desarrollo de modelos basados en datos provenientes de experimentos sociales controlados, y

utilizamos datos observacionales para contrastar con los resultados obtenidos.

Palabras claves: sociofísica, modelos de opinión, modelos basados en agentes, ecuaciones maestras, formulación analítica.

Emergent behaviors in social influence processes: theory, models, and experiments

Societies develop collective opinions on relevant issues for their functioning as a community. Studying the dynamics of opinion formation, the evolution of disagreements, and the shaping of ideological identities can greatly contribute to understanding social processes, studying political phenomena, and constructing public policies that strengthen democracy.

The reasons why an individual or a community may modify their opinions are diverse and complex, encompassing material factors, the influence of media, and even interaction with the opinions of others. In recent times, the emergence of relationships through social networks has further complicated these processes and fostered interest in their study.

From the field of physics, there is a wide range of tools available to contribute to solving these types of problems, drawing from the areas of complex systems and statistical physics. Developing models allows us to analyze various mechanisms of social interaction and influence on a micro scale and study the effects they have on a macro scale.

In this thesis, we analyze a set of opinion models that allow us to study the effects of social influence mechanisms such as imitation, cultural influence, and argument exchange. We examine representations of opinion both discretely and continuously, and analyze the effects produced by social debates when multiple topics are involved.

We formulate master equations that explain the dynamics of these models. In some cases, we find an exact description, except for the mean-field approximation, while for other models, we use different approximations that allow us to reduce dimensionality and obtain simpler yet highly descriptive equations. In this way, we can develop a better understanding of the main properties of the dynamics, the role played by each parameter in the model, and the critical values at which we observe a transition in the emergent behaviors.

Lastly, to ensure that the developed models reflect elements and characteristics of reality, working with data is crucial, whether in the formulation or testing of hypotheses or in comparing the emergent effects with observed social phenomena. In this regard, we approach the development of models based on data from controlled social experiments and utilize observational data to compare with the obtained results.

Keywords: socio-physics, opinion models, agent-based models, master equations, analytical formulation.

*A la ciencia nacional y la educación pública
que permitieron esta tesis.*

*A las personas que trabajaron y lucharon por
una ciencia nacional y una educación pública.*

Agradecimientos

A Pablo, por acompañarme durante este doctorado y preocuparse siempre por plantearme nuevos desafíos para que pudiera hoy llevarme la mayor cantidad posible de herramientas y capacidades. Por tener un parámetro de convergencia muy alto [1]: es decir, lograr convencerme en general y tener razón casi siempre, pero también escucharme mucho.

A Juan Pablo por codirigir esta tesis siempre con ideas novedosas y creativas. A los jurados y las juradas por aceptar leerla y evaluarla. A las personas con las que tuve la suerte de trabajar, de quienes aprendí un montón, Seba, Nico, Vika, Fede, Joaquín. Al SoPhy, Pablo, Lucio, Ale, Seba, Favio, Sofi, Marcos, Diego, Tomi, Ale bis, Fede, Franco por permitirme ser parte de la construcción de un proyecto en conjunto, con gente buena y mucha buena onda. A Lucio, Gonza y Cris con los que me tocó compartir la oficina más linda del pabellón. A Lucía por la experiencia de compartir ciencia de una manera tan sincera y entusiasta. A Vichy por siempre estar dispuesta a recibirnos y por su mirada sobre el mundo científico.

A la política, porque sigo convencida que es la herramienta para cambiar la realidad. Y en particular quiero agradecer a las personas con las que tuve la suerte de hacer política en este último tiempo. A Eze y a Santi, por nunca dejar de soñar y siempre creer en esos sueños. Por construir lo posible con prepotencia de trabajo. A Agus, Caro, Maia, Ale, Tobi, Marce, Ullu, Lenny, Flai, Lipa, a todo el lumpeneando y todos quienes fueron, son o serán parte de este espacio. A la banda interclaustró que se propuso cambiar la Facultad con creatividad y audacia. A Tomi por compartir proyectos, mates y birras. A Ideas de Pie y a Nueva Mayoría por dejarme formar parte de un espacio político que nunca pierde de vista ni sus valores ni la vocación de transformación. Al dream team del Taller de Datos y la diplomatura, Lari, Ari, Ine, Pablo, Yami, Pepe, Salva y tantos otros que saben combinar brillantes, buena onda y compromiso para llevar adelante estos proyectos tan hermosos. A Carlo y Ema por ofrecer siempre uno de los costados más humanos que encontré en Exactas.

A las pibas por estar siempre ahí para escuchar, para una reflexión profunda, un abrazo y, sobre todo, para un vino. A Jule por todos estos años de amistad verdadera. Por compartir doctorados, casas, viajes, cuarentenas, preocupaciones y alegrías. Por siempre estar. A Maru por siempre buscar y compartir lo profundo y lo verdadero, a Meli por tener siempre la posta y la sinceridad para decirlo, a la Rosca por siempre tener a mano soluciones, a Vale, a Jaz, Tetu, Meri, Galle, Gina y Luz por tantos asados, vinos, rompecabezas y risas. También a la grupita ampliada: Rago y San San. A Lau por toda una vida de amigas, por siempre aportar una mirada sensible y buenas energías.

A mi familia. A mis papás, por no solo aprobar todo lo que se me ocurre y

me propongo, sino apoyar y ser los primeros fanes de todos mis proyectos. Por siempre aportar lo que haga falta: una escucha, un consejo, una torta. A Marce, por ser mi hermano, compañero y amigo.

A Chacoma, por esto hermoso que estamos construyendo juntos. Por acompañarme y apoyarme, por dejarme ser, por confiar, por compartir, por las charlas, por las risas, las milanesas y los abrachitos. Porque le das una magia especial a todo lo cotidiano y volvés cotidianos los momentos especiales. Te quiero un montón, y espero que nos esperen mil aventuras más.

Índice general

Índice general	ix
1 Introducción	1
1.1. Evolución del estudio de procesos de formación de opinión	1
1.2. Modelos de opinión	1
1.3. Modelos basados en Agentes (ABM)	3
1.4. Ecuaciones maestras	8
1.5. Modelos de opinión basados en datos	12
1.6. Esquema	13
2 Soluciones exactas	15
2.1. Introducción	15
2.2. Modelo de opinión continua en dos dimensiones	17
2.3. Dinámica de opinión basada en medidas	34
3 Aproximaciones analíticas	57
3.1. Introducción	57
3.2. Modelo de tres estados	57
3.3. Solución analítica para el modelo de Axelrod	70
4 Modelos basados en datos	95
4.1. Introducción	95
4.2. Efectos de la coherencia de grupo	95
5 Conclusiones y perspectivas	109
A Trabajos publicados relacionados con esta tesis	113
Bibliografía	115

Capítulo 1

Introducción

1.1. Evolución del estudio de procesos de formación de opinión

Uno de los temas mas relevantes en los últimos años en el campo de la sociofísica y de las ciencias sociales computacionales es la comprensión de los mecanismos de la formación y dinámica de la opinión pública. Es decir, dilucidar cómo las personas forman su opinión sobre ciertos temas, cómo se posicionan en torno a los asuntos públicos y sobre todo, cómo estas opiniones se modifican cuando los sujetos interactúan entre sí y qué influencia causan en el resto.

Utilizando la definición de Mora y Araujo [2] entendemos que la opinión es "lo que la gente piensa y dice, los juicios que formula cada individuo acerca de objetos o situaciones del mundo externo". En algunos casos, la formación y la dinámica de opiniones pueden producir efectos de comportamiento como el fortalecimiento o caída de gobiernos, conflictos sociales, modificación de legislación, generación de liderazgos, etc. Si bien hay algunos acercamientos al estudio de la opinión en las ideas de la democracia griega, o en autores como Maquiavelo, no es sino ante la aparición de la cultura de masas en el siglo XIX donde la opinión, y en particular la opinión pública, toma un rol relevante. Es por eso que también es un tema fundamental de estudio en el desarrollo de varias disciplinas como la ciencia política, la comunicación, la sociología, la psicología social, etc. La opinión pública se diferencia de otros conceptos como la ideología, las creencias y valores. Mientras estos últimos se modifican pero en escalas más lentas, la opinión pública se modifica en el corto plazo, ante cada tema específico que adquiere relevancia pública. La opinión pública está íntimamente relacionada con conceptos como los de instituciones, el estado, las clases sociales, las elites. También la existencia y aparición de medios de comunicación como la radio, la prensa, la televisión y las redes sociales cambian las maneras y las dinámicas en que las opiniones fluyen y se construyen en las sociedades. Sin embargo en este trabajo nos enfocaremos en las opiniones y las dinámicas de la gente cuando interactúa entre sí.

1.2. Modelos de opinión

Nos enfocaremos en estudiar los procesos de formación de opinión y la dinámica que genera la influencia social, desde un enfoque físico.

Podemos considerar que un sistema social es un sistema complejo. Esto es, un sistema en el que hay un gran número de elementos que interactúan entre sí de manera autónoma y no centralizada, produciendo fenómenos emergentes más allá de las reglas microscópicas que rigen la interacción entre ellos [3]. Las

herramientas de la física estadística han resultado de gran ayuda para la investigación de la dinámica colectiva en estos sistemas [4]. El objetivo es derivar el comportamiento general macroscópico a partir de las reglas de interacción microscópicas por lo que la llamada teoría de transiciones de fase, fenómenos críticos y las ideas de universalidad, son ingredientes esenciales que han brindado nuevas perspectivas al problema de pasar de una escala de realidad a la siguiente [5]. Más allá de su uso clásico, en los últimos años han surgido múltiples aplicaciones en los ámbitos de la biología, la medicina, la tecnología de la información, etc. [6]. En las ciencias sociales no hay teorías que tengan una capacidad explicativa equivalente a la que tienen las teorías físicas. Sin embargo, el desarrollo de modelos matemáticos en este contexto es útil, no por sus posibilidades de predicción en situaciones reales sino que pueden poner de manifiesto los mecanismos que rigen procesos característicos de estos sistemas. De esta manera ofrecen una herramienta para explicar estos procesos de manera cualitativa [7].

Cuando utilizamos estas herramientas para estudiar comportamiento social los elementos no son partículas sino humanos que interactúan con sus pares. Este abordaje enfrenta el problema de que los humanos son mucho más complejos que las partículas. El comportamiento humano no puede ser explicado con reglas simples y responde al resultado de muchos procesos fisiológicos y psicológicos así como de preferencias personales, normas sociales, etc. [3, 4, 6]. Peor aún, no conocemos (e incluso podría no existir) una ley universal del comportamiento de grupos de individuos pero podemos suponer que, en caso de existir, serían mucho más complicados que el de, por ejemplo, los átomos.

Sin embargo, cuando observamos las sociedades a grandes escalas, es posible encontrar regularidades globales en el comportamiento humano [4]. Si bien para la construcción de modelos que expliquen la realidad es necesario realizar suposiciones y simplificaciones, estos pueden ser muy útiles para entender muchos aspectos de la formación de opiniones, como el acuerdo, la formación de grupos, las transiciones entre el orden (consenso) y el desorden (fragmentación). Por ejemplo, observamos estos fenómenos en la formación de un lenguaje o de una cultura común, o en la construcción de consenso social sobre determinados temas [8]. Estas transiciones de orden a desorden son similares a las descritas en los sistemas clásicos estudiados por la física estadística y el análisis de los fenómenos críticos y las transiciones de fase, por lo que dichas herramientas nos pueden resultar de gran ayuda para dilucidar qué mecanismos en la escala microscópica permiten la emergencia de los fenómenos sociales que observamos en la escala macroscópica.

Otra situación donde surge el análisis de la dinámica de opinión es el problema de la ponderación de opiniones de personas expertas, también conocido como *opinion pooling* [9-12]. En este caso, un agente debe tomar una decisión conociendo la opinión de un conjunto de expertos y expertas. Se han propuesto varios métodos, principalmente a través de promedios ponderados de las distribuciones de probabilidad o mediante procedimientos de comportamiento en los que cada agente reconsidera su propia distribución de probabilidad combinándola con las distribuciones de las otras personas. Esta dinámica puede entenderse

como un problema en el cual un conjunto de expertos y expertas busca alcanzar un consenso entre sí a partir del debate. En este sentido podemos encontrarlos con importantes contribuciones de Stone [13], Winkler [14] y especialmente DeGroot [15] quien propuso el primer modelo dinámico de este tipo.

Es posible por lo tanto construir modelos que busquen una descripción simplificada que mantenga la esencia del problema en consideración, pero que también avance sobre nuestra comprensión y, eventualmente, sea capaz de hacer predicciones útiles. Los modelos nos sirven entonces para buscar comprender los mecanismos más allá de una simple descripción de patrones colectivos de comportamiento [5].

De esta manera se han abordado una gran diversidad de problemas de comportamiento social, donde el estudio de los modelos de formación de opinión es uno de los más populares [16], pero que también comprende problemas como la formación de rasgos lingüísticos además de otros fenómenos sociales como la dinámica de multitudes, mercados financieros, distribución de riqueza, movilidad humana, epidemias, etc. [6].

1.3. Modelos basados en Agentes (ABM)

Una de las maneras de elaborar modelos que ayuden a comprender fenómenos sociales, y en particular los procesos de formación de opinión son los modelos basados en agentes (ABM por sus siglas en inglés). En estos modelos un sistema se describe como una colección de entidades autónomas que toman decisiones llamadas agentes. Cada agente representa típicamente a un individuo humano que evalúa su situación y toma decisiones en base a un conjunto de reglas. En un ABM, muchos agentes simulados interactúan entre sí y con un entorno a lo largo del tiempo. De esta manera podemos observar las consecuencias a gran escala de las suposiciones teóricas sobre el comportamiento de los agentes cuando son muchos e interactúan sucesivamente durante un período prolongado de tiempo [16, 17].

Para desarrollar un modelo es necesario representar la magnitud que queremos estudiar de manera matemática asignándole a cada agente un estado. Este estado puede representar la opinión, la cultura, el lenguaje que utiliza, su situación con respecto a una enfermedad, etc. El primer paso es elegir el espacio donde viven los estados. En algunos casos éste puede ser discreto cuando hay una cantidad finita de opciones (por ejemplo a favor o en contra de un tema, o una elección con un conjunto de candidatos, respuestas en una encuesta, etc.) [18-22]. En algunos casos no alcanza solo una cantidad finita de opciones y es conveniente una representación continua de la opinión introduciendo de esta manera el concepto de distancia entre opiniones [1, 23, 24]. Además el estado puede ser unidimensional o estar en un espacio de mayor dimensión cuando se estudia la opinión sobre varios temas o ejes [25-28].

Por otro lado es importante establecer los mecanismos de interacción. Es decir, cómo representar matemáticamente las reglas de interacción que siguen los agentes luego del intercambio de opinión. Existen varias hipótesis sobre los

mecanismos que intervienen en estos casos como por ejemplo la imitación, el promedio sobre los individuos con opinión similar, la regla mayoritaria, o reglas más sofisticadas.

Otro factor importante a considerar es la topología de las conexiones, es decir qué agentes pueden interactuar con cuáles, con qué frecuencia y con qué intensidad. En este sentido son útiles los conceptos de la teoría de redes complejas, ya que podemos pensar en los agentes en términos de vértices de una red, que pueden interactuar si un link las conecta entre sí [6]. Esto nos permite estudiar los modelos de opinión en distintas redes, y observar sus diferencias.

Otros fenómenos que pueden estudiarse son el rol de campos externos y cómo influyen por ejemplo los medios de comunicación [8, 29] o la existencia de agentes con comportamientos particulares como los intransigentes [30] u obstinados [31-33] que son menos propensos a modificar su opinión.

También es posible considerar interacciones con ruido. El ruido aparece en la dinámica como una variable aleatoria que representa el pensamiento libre, y añaden un término de difusión al plantear las ecuaciones maestras en las dinámicas [1, 23, 24, 31, 33-35]. Es posible proponer una clase diferente de ruido, que depende del canal de comunicación, y se ha estudiado principalmente a través de simulaciones [36-40]. En este caso el ruido aparece en la emisión del mensaje, modificando la opinión que el segundo agente recibe del primero. Este problema puede ser estudiado con el modelo que proponemos en el capítulo 2 donde la opinión está representada por una variable aleatoria. Al considerar los efectos del ruido aparecen fenómenos muy interesantes, ya que la intensidad del ruido puede destruir el consenso tanto en problemas discretos como continuos, o puede ayudar a alcanzar un estado de cuasi-consenso destruyendo los *clusters* en los modelos de *bounded confidence*, o cambiar a los agentes entre diferentes equilibrios.

A continuación discutiremos varias familias de modelos, que serán la base de algunos de los modelos que presentamos en esta tesis.

1.3.1. Modelos de opinión discreta

En algunos casos queremos estudiar la dinámica de opinión cuando consideramos un conjunto finito de opciones. Esto puede ocurrir si queremos conocer la preferencia sobre un candidato electoral, la respuesta a una encuesta con variables categóricas o también puede significar una posición (a favor o en contra) con respecto a una medida o una política.

Uno de los modelos donde se considera una opinión discreta es el modelo del votante. En su versión clásica cada agente puede tener una opinión representada por una variable binaria que puede tomar los valores 1 o -1 y que indica dos posibles opciones. En cada paso un agente es seleccionado aleatoriamente y copia el estado de alguno de sus vecinos.

Este modelo fue primeramente considerado por Clifford y Sudbury [20] como un modelo de competencia entre especies, y llamado modelo del votante por Holley y Liggett [21]. En la red completa, cuando todos los agentes pueden interactuar con todos, la ecuación para la densidad de la magnetización puede

ser resuelta analíticamente [41]. Este modelo ha sido estudiado ampliamente [18, 42] tomando en cuenta la dinámica en distintas redes [43-49], introduciendo un factor ruido [50-53] o a través de variaciones como el modelo del q-votante donde cada agente busca unanimidad en un conjunto de vecinos para cambiar su opinión [40, 54-56].

Otros modelos clásicos, como los modelos de Snajd-Weron [22, 57-61], también emplean una representación binaria de la opinión. Estos modelos se basan en la regla de que es más fácil ser persuadido por dos o más individuos que comparten una opinión que por una sola persona. Otro ejemplo de modelos con opiniones discretas son los basados en reglas mayoritarias, en los que en cada paso se forma un grupo de debate y todos los participantes de dicho grupo adoptan la opinión mayoritaria [62-65].

En algunos casos, resulta conveniente considerar no solo posturas a favor o en contra, sino también una tercera opinión intermedia. Esta opción puede representar a personas indecisas o neutrales, cuyo comportamiento puede ser diferente, generalmente más inclinado a cambiar su opinión. Se han propuesto y estudiado varios modelos de este tipo [66-72]. Además, se han desarrollado algunas versiones que también consideran la presencia de agentes obstinados, quienes son menos propensos a cambiar su opinión [30, 73].

Modelos con tres grupos o partidos distintos pueden encontrarse en [74-77]. También pueden considerarse un mayor número de opciones, entre esos casos se encuentran los modelos de Potts, que es la extensión natural del modelo del votante donde en lugar de haber solo dos candidatos hay varios [19, 78, 79].

1.3.2. Modelo de opinión continua

En algunos casos queremos representar situaciones donde la opinión pueda tomar un rango de valores intermedios y no solo los extremos. En este caso es posible representar las opiniones con variables continuas, es decir por un número real, de manera que siempre es posible encontrar una opinión intermedia entre dos opiniones [80]. Según el contexto, esta opinión puede referirse al grado de apoyo a una política, el ranking de un producto o una película, a una orientación ideológica en un eje de izquierda-derecha, o incluso un valor que se desconoce pero es estimado (por ejemplo cuánto mide el obelisco), etc. Algunos de los primeros modelos en considerar variables continuas propusieron que las opiniones se actualizaban en función del promedio de las opiniones del resto de los agentes [15, 81].

Por otro lado, las variables continuas permiten fácilmente establecer una noción de distancia para implementar reglas de interacción basadas en ella. Una hipótesis común es asumir que si dos agentes poseen opiniones demasiado distantes, serán menos propensos a interactuar entre sí. Esto da lugar a los modelos de *bounded confidence* donde los agentes interactúan entre sí solamente si su opinión es lo suficientemente cercana como los propuestos por Deffuant y Weron [1] y por Hegselmann y Krause [23]. Si bien típicamente la función de *bounded confidence* es considerada una función escalón donde para opiniones

con distancias mayores a una cota fija no hay interacción, algunos modelos consideran otras variantes [82].

En [1] la interacción entre dos agentes cuya opinión se diferencia menos que una cota dada (ε) produce un acercamiento de las dos opiniones a un valor intermedio entre ambas. Matemáticamente esto significa que si se consideran dos agentes i y j y sus respectivas opiniones en el tiempo t son $x_i(t)$ y $x_j(t)$, si $|x_i(t) - x_j(t)| < \varepsilon$ entonces, en el tiempo $t + 1$ la opinión de los agentes será $x_i(t + 1) = x_i(t) + \mu(x_j(t) - x_i(t))$ y $x_j(t + 1) = x_j(t) + \mu(x_i(t) - x_j(t))$ respectivamente con $\mu \in [0, 1]$. En el último tiempo este modelo fue extensamente estudiado [83-88]. El modelo presentado por Hegselmann-Krause es similar, con excepción de que en lugar de considerar interacciones de a pares los agentes actualizan su opinión al promedio de todos los vecinos cuyas opiniones satisfacen la condición de *bounded confidence* [89, 90].

También se utiliza una representación continua en los modelos de opinión planteados en [24, 31, 34, 91]. Cuando las interacciones ocurren a pares, es posible pensar en términos de colisiones. En estos casos se utiliza el enfoque de la teoría cinética para plantear una dinámica de opinión de a pares de acuerdo a mecanismos de compromiso y de difusión. Es posible utilizar los métodos estándares utilizados usualmente en la teoría cinética de los gases granulares de manera que se pueden obtener las ecuaciones que rigen esta dinámica. Desde este enfoque, aplicando los métodos estándar de la teoría cinética de interacciones binarias [92] se puede recuperar la evolución temporal de la densidad de estados como un equilibrio entre términos de ganancia y pérdida bilineales de opinión, descritos por la ecuación integro-diferencial de tipo Boltzmann.

1.3.3. Modelos multidimensionales

En muchas ocasiones escuchar la opinión sobre un tema puede modificar nuestra opinión sobre otro. Por ejemplo, algunos de los argumentos o razones que nos pueden llevar a apoyar la legalización del aborto también nos pueden hacer cambiar de opinión sobre la legalización de la marihuana. De la misma manera, podemos suponer que hay algunos temas que están más relacionados entre sí, y que por lo tanto las opiniones sobre esos temas cambiarán en conjunto. Por lo tanto, podemos asumir que las opiniones sobre varios temas pueden evolucionar en conjunto.

Uno de los primeros modelos en contemplar parcialmente esta situación fue el propuesto por Axelrod en 1997 [93, 94]. En él, Axelrod no se refiere a opiniones sino que se refiere a *cultura* como el conjunto de elementos personales que pueden ser influenciados socialmente. De esta manera asume que la cultura se puede describir como un conjunto de atributos como las creencias, el lenguaje, la religión, el arte, la forma de vestir, la tecnología, las normas sociales, etc. Estos atributos son representados de manera vectorial, de modo que para cada atributo existe un conjunto finito y discreto de rasgos culturales posibles. De esta forma, si bien es un modelo discreto, es posible establecer una noción de similitud entre culturas, teniendo en cuenta la cantidad de atributos en común que comparten dos agentes. El modelo postula que los agentes serán más pro-

pensos a copiar un atributo cultural cuanto más similitud tengan entre si. Este concepto es llamado homofilia [95, 96]. El objetivo del modelo es explicar la diversidad cultural existente a través de los mecanismos de influencia social y de homofilia.

En el modelo original de Axelrod la topología según la cuál interactúan los agentes es una red cuadrada bidimensional. Para este caso se observa una transición de fase al variar la cantidad de rasgos culturales. Cuando la cantidad de rasgos culturales es baja, la probabilidad de que los agentes compartan atributos es mayor y por lo tanto es más posible que interactúen, lo que lleva a un estado monocultural donde todos los agentes tienden a compartir la cultura. Cuando la cantidad de rasgos culturales aumenta el sistema alcanza un estado de equilibrio donde conviven distintos estados culturales ortogonales, que no interactúan entre sí. El carácter de esta transición ha sido ampliamente estudiado. En particular se encuentra que el tipo de transición puede ser de primer orden, de segundo orden o no existir y depende de la topología [97-100], de la cantidad de atributos considerados [55, 101, 102] así como también puede cambiar si se considera una red finita o el problema en el límite termodinámico [103].

Una representación multidimensional de opiniones también puede ser una expresión de un perfil ideológico. Si buscamos identificar la taxonomía política en las sociedades actuales, el eje tradicional izquierda-derecha muchas veces falla para explicar otras ideologías. En 1971 David Nolan [104] creó un diagrama de espectro político, que ubica las opiniones ideológicas en dos ejes: un eje representa la libertad económica y el otro eje la libertad social. Según Nolan, el progresismo aboga solo por la libertad personal, el conservadurismo solo defiende la libertad económica, mientras que el liberalismo puede condensar la defensa de ambas libertades. Una representación bidimensional similar había sido utilizada por Bryson y McDill [105] en un artículo de 1968 donde el eje vertical representaba el control gubernamental (estatismo vs. anarquía) y la posición horizontal representaba el grado de igualitarismo (izquierda vs. derecha). Este tipo de representaciones bidimensionales fueron muy utilizadas en el campo de las ciencias políticas e incluso dieron lugar a cuestionarios y encuestas que permiten clasificar la ideología política y representarla en un gráfico a través de unas pocas preguntas [106, 107]. Este tipo de representaciones es utilizado también en los últimos años en modelos basados en datos para clasificar las opiniones políticas de la sociedad [108, 109].

Los modelos multidimensionales son una herramienta para estudiar la representación política en estos casos. La opinión de un individuo es representada ahora ya no por un valor, sino por varios valores o por un vector, donde la dimensión representa la cantidad de tópicos o de ejes que se quieren analizar. En el caso de los modelos continuos, una versión multidimensional es fácilmente extensible. Incluso, en varios casos los modelos son definidos originalmente de manera multidimensional [1, 80], aunque luego sean estudiados en una dimensión. Sin embargo, el análisis multidimensional puede mostrarnos algunas diferencias.

Analizar la evolución de la opinión sobre varios temas en conjunto nos permite analizar nuevos fenómenos, como por ejemplo la alineación de tópicos [110,

111] (también llamada coherencia [112] o consistencia ideológica [113, 114]). Esto es, la propensión, cada vez mayor [115], a que los temas de debate en las sociedades se encuentren correlacionados. Además podemos observar que determinadas posiciones ideológicas comparten la opinión sobre varios temas (como por ejemplo que los sectores progresistas estén a favor de la despenalización del aborto, a favor de un estado presente y en contra de la libre portación de armas) incluso cuando a priori podrían no estar correlacionados.

En una mayor dimensionalidad el concepto de distancia puede variar. Por lo tanto el concepto de *bounded confidence* describe un área en donde los agentes interactúan entre sí, que puede ser distinta según se consideren distintas normas o reglas [26, 116].

No existe una gran cantidad de modelos que estudien las particularidades que se observan cuando se analizan modelos con la opinión representada en dos o más dimensiones. En [116-118] se presentan estudios bidimensionales para el modelo de Hegselmann-Krause. También hay ejemplos de modelos multidimensionales con opiniones binarias [27]. La incorporación de opiniones multidimensionales permite incorporar como mecanismo la teoría de balance, por la cual los individuos intentarán no compartir opiniones contradictorias [119, 120]. También se han desarrollado modelos bidimensionales donde se estudia el efecto del ruido [121]. Otros casos similares son modelos en donde la opinión está representada en una dimensión, pero hay otra variable que representa otro atributo que influye en las reglas de interacción [122, 123]. En [25] se presenta un modelo multidimensional donde la opinión está representada en un espacio euclideo no ortogonal, que da cuenta de la relación existente entre los tópicos.

1.4. Ecuaciones maestras

Una vez planteado el modelo, una posibilidad es simular el comportamiento del sistema a través de métodos computacionales. Sin embargo, obtener ecuaciones que describan temporalmente la dinámica del sistema puede presentar algunas ventajas. Por un lado, aunque estas ecuaciones no puedan ser resueltas analíticamente y sean resueltas numéricamente, el tiempo computacional será mucho más corto. Por otro lado, conocer las ecuaciones nos permiten obtener en algunos casos resoluciones explícitas, comprender mejor el rol de los parámetros implicados y obtener conclusiones generales sobre la dinámica, como por ejemplo el valor medio o la varianza de la distribución de estados. Por lo tanto introduciremos una serie de métodos para obtener las ecuaciones maestras de la dinámica.

Hemos presentado modelos donde un conjunto de agentes posee cada uno un estado, que puede modificarse a lo largo del tiempo. Observamos que la centralidad de esta formulación se basa en los estados (es decir que para cada tiempo conocemos el valor de su opinión, su cultura o su propensión, etc.) y hemos definido interacciones microscópicas que indican en qué caso estos estados se modifican. Sin embargo nos interesa conocer valores macroscópicos del sistema. Es decir, no nos importa tanto qué estado tiene un agente, sino que queremos

saber por ejemplo, si todos los agentes tienen el mismo estado. En algunos casos la variable a observar puede ser el propio estado, ya sea que éste tenga una representación discreta como continua. Pero en otros casos es útil introducir nuevas variables que nos permitan conocer sobre características del sistema en su conjunto.

Por ejemplo, en el caso de los modelos del votante, muchas veces suele ser útil enfocarse no en los estados de los agentes, sino en los enlaces entre ellos, y contabilizar cuántos de estos enlaces unen dos agentes con estados distintos. Entre estos dos agentes puede haber una interacción y un agente puede copiar el estado de otro, por lo tanto son llamados *enlaces activos*. El estudio de la densidad global de enlaces activos nos permite saber si un sistema llegó a un consenso (si no hay ningún enlace activo), y en caso de que no ocurra, estimar el nivel de fragmentación. En este caso interpretar las reglas de interacción desde el punto de vista de la densidad global permite encontrar representaciones analíticas que explican la dinámica del sistema, como se ha hecho por ejemplo en [124].

Similarmente, el modelo de Axelrod puede estudiarse utilizando no el estado cultural de los agentes, sino la similaridad correspondiente a los enlaces que unen cada par de agentes, es decir cuántos rasgos culturales son compartidos. Nuevamente, la evolución de esta variable, nos da información sobre el estado macroscópico del sistema, siendo un estado de consenso, un estado en el que todos los enlaces tienen similaridad mayor. Este método de análisis sobre el modelo de Axelrod fue realizado en [99], y es retomado en esta tesis.

Para estos casos, es posible calcular la ecuación maestra que gobierna la dinámica estocástica en estos procesos. Debido a las transiciones, la probabilidad de encontrar el sistema en un estado dado cambia hasta que se alcanza un estado final estacionario en el que las transiciones no pueden causar más cambios en la distribución de probabilidad [125]. Para eso deberemos calcular las tasas de transición que estarán dadas por la frecuencia en la que ocurren las interacciones, y por la probabilidad de que ocurra una transición luego de una interacción.

Llamamos $P(x, t)$ a la densidad de probabilidad de que la variable estocástica considerada alcance un estado x en el tiempo t . Si el tiempo cambia de manera continua podemos introducir la ecuación maestra que es una ecuación diferencial que gobierna la evolución temporal de la distribución de probabilidad.

Por un lado podemos observar que la probabilidad de estar en un estado x luego de un tiempo Δt , suponiendo que hay una cantidad de M estados discretos es

$$P(x, t + \Delta t) = \sum_{x^p=1}^M P(x^p, t) P(x, t + \Delta t | x^p, t), \quad (1.1)$$

donde $P(x, t + \Delta t | x^p, t)$ es la probabilidad condicional de estar en el estado x a tiempo $t + \Delta t$ dado que se estaba en el estado previo x^p a tiempo t .

La ecuación diferencial para $P(x, t)$ puede ser construida si notamos que

$$\begin{aligned}
\frac{dP(x, t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t} \right) \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{x^p=1}^m P(x, t) (P(x, t + \Delta t | x^p, t) - \delta_{x, x^p}).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Como estamos tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$, podemos expandir la probabilidad de transición $P(x, t + \Delta t | x^p, t)$ en una serie de potencias en Δt y quedarnos solo con los términos de menor orden.

$$P(x, t + \Delta t | x^p, t) = \delta_{x, x^p} \left(1 - \Delta t \sum_{z=1}^M w_{x^p, z}(t) \right) + w_{x^p, x} \Delta t + \dots \tag{1.3}$$

donde $w_{x^p, x}$ es la tasa de probabilidad de transición. En la Ec. (1.3), $w_{x^p, x} \Delta t$ es la probabilidad de que ocurra una transición del estado x^p al estado x durante el intervalo de tiempo $t \rightarrow t + \Delta t$. Similarmente, $\left(1 - \Delta t \sum_{z=1}^M w_{x^p, z}(t) \right)$ es la probabilidad de que no ocurra una transición desde x^p en ese intervalo. De esta manera esta ecuación puede leerse como que la probabilidad de que el estado ya sea x en el tiempo t y no se produzca un cambio, más la probabilidad de que en el intervalo de tiempo considerado el estado cambie de x^p a x . Si reemplazamos la Ec.(1.3) en (1.2) obtenemos:

$$\frac{dP(x, t)}{dt} = \sum_{x^p=1}^M w_{x^p, x} P(x^p, t) - w_{x, x^p} P(x, t). \tag{1.4}$$

Esta ecuación es llamada la ecuación maestra. En algunos casos podemos construirla asumiendo que el primer término es la función de ganancia $G(x)$, o equivalentemente el flujo hacia x , es decir, la probabilidad de que un nuevo agente pase a estar en ese estado en una interacción, y llamar al segundo término $L(x)$, la función de pérdida, o el flujo desde x , es decir la probabilidad de que un agente en un estado deje de estarlo luego de una interacción. De esta manera podemos escribir la ecuación como:

$$\frac{dP(x, t)}{dt} = k(G(x) - L(x)), \tag{1.5}$$

donde la constante k representa la cantidad de interacciones que ocurren en cada paso temporal.

Las probabilidades de transición están dadas por el modelo elegido. En algunos casos, para calcularlas es necesario realizar una aproximación de campo medio, donde se considera que cada agente tiene la misma probabilidad de interacción con todo el resto de los agentes.

En el caso particular donde tomamos interacciones de a pares es posible que la probabilidad de transición entre estados esté dada no solo por el estado del agente, sino por el estado con el que actúa, y por lo tanto, los flujos serán

proporcionales a la distribución de ambos estados. En este caso obtendremos una ecuación del tipo Boltzmann.

Notamos que si en lugar de estados discretos consideramos estados continuos, la ecuación es la misma, reemplazado las sumatorias por integrales.

$$\frac{dP(x, t)}{dt} = \int w_{x^p, x} P(x^p, t) - w_{x, x^p} P(x, t) dx^p. \quad (1.6)$$

Para estos casos, si la ecuación maestra no puede ser resuelta, puede ser aproximada por una ecuación del tipo Fokker-Plank. Esto es, una ecuación diferencial de segundo orden que puede ser obtenida a partir de la ecuación maestra cuando se cumplen algunas condiciones. En este caso podemos realizar una expansión de Kramers-Moyal, que cuando se realiza sobre una ecuación del tipo Boltzmann usualmente se llama *grazing limit* [126]. Este método consiste en realizar una aproximación de Taylor sobre la ecuación maestra y obtener el límite cuando el paso espacial tiende a 0.

Observamos también que para desarrollar estas ecuaciones es importante conocer la cantidad de interacciones que ocurrirán en una unidad de tiempo. Al establecer las reglas del modelo se pueden considerar distintas variables, como por ejemplo que las interacciones sigan un proceso de Poisson, o bien que todos los agentes interactúen en cada paso temporal, etc. Sin embargo, a la hora de escribir las ecuaciones maestras solo es importante considerar la cantidad de interacciones y de cambios de opinión que se producen en promedio en una unidad de tiempo y solo influirán como un factor en la ecuación.

Más aún, realizando un reescalo temporal podemos modificar ese factor. Esto puede ser útil para simplificar las ecuaciones cancelando parámetros, o bien para hacer coincidir las ecuaciones con las simulaciones cuando por razones computacionales en estas se realizan más interacciones por unidad de tiempo que en las planteadas en el modelo.

En algunos casos es conveniente trabajar con la formulación débil de estas ecuaciones [127]. Para pasar de las ecuaciones diferenciales a su formulación débil mostramos un ejemplo con la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(t, x) = - \frac{d}{dx} f(t, x) \quad (1.7)$$

podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por una función test $\phi \in C_c^\infty$ el espacio infinitamente diferenciable con soporte compacto e integrar a ambos lados en función de x . Por último, teniendo en cuenta que ϕ tiene soporte compacto es posible integrar por partes de manera que queda la expresión débil de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int f(t, x) \phi(x) dx = \int f(t, x) \frac{d}{dx} \phi(x) dx. \quad (1.8)$$

Observamos que una función que cumple la Ec. (1.7) cumplirá (1.8), pero que en el segundo caso no será necesario que sea diferenciable en x .

Por último, en algunos casos no será posible resolver estas ecuaciones ni obtener información de ellas, y por lo tanto será conveniente realizar aproximaciones que permitan trabajarlas.

1.5. Modelos de opinión basados en datos

Más allá del interés desde una perspectiva física de estos modelos, para que puedan aportar a una mejor comprensión de las sociedades, es fundamental su correlato con la realidad y con datos empíricos. Para esto los modelos pueden tener conexiones en sus dos escalas: ya sea con datos empíricos o teorías sociales. De esta manera - idealmente - los agentes son modelados de acuerdo a los estándares en la disciplina relevante y luego admiten ser calibrados con datos empíricos y admiten una validación cuantitativa entre el sistema simulado y las observaciones [3].

Recopilar datos empíricos sobre opiniones es difícil: tenemos que convertir algo tan ambiguo y multifacético como una opinión en una medida cuantitativa abierta a la modelización y luego convencer a las personas para que la expresen en voz alta [128]. Una manera de acceder a la opinión es a través de encuestas de opinión pública o mejor aún en las elecciones donde se puede recabar la opinión de toda una sociedad a la vez [50, 129-132]. En los últimos años el desarrollo de la actividad social virtual, a través de redes sociales, también ha dado lugar a una gran disponibilidad de datos. En muchos casos estos datos están en formato escrito y pueden ser procesados a través de técnicas de procesamiento de lenguaje natural [133]. También es fundamental apoyarse en la enorme cantidad de trabajo acumulado por las ciencias sociales, especialmente la psicología y la sociología [3, 134]. En ese sentido experimentos sociales controlados son una fuente rica para obtener datos que validen modelos idealizados de opinión particularmente para identificar aquellos mecanismos que son más relevantes para emular el comportamiento social [135].

Las teorías psicológicas sobre la influencia social pueden ser de gran utilidad para proponer y justificar los mecanismos de interacción en los modelos. Por ejemplo, la imitación [136, 137] puede ser una estrategia racional para los individuos en situaciones de incertidumbre, donde es común imitar las opiniones y comportamientos de los demás. Asimismo, la presión social [138, 139] hace que los individuos busquen ajustarse al pensamiento de los demás. Por otro lado, la teoría de la cognición [140] sugiere que tendemos a ser como las personas con las que interactuamos, lo que puede llevar a cambios en nuestra forma de pensar y actuar. Finalmente, según la teoría de argumentos persuasivos (PAT), los agentes intercambian argumentos durante su interacción [141]. Además, la teoría de impacto social [142, 143] ha estudiado cómo afecta a la influencia social tanto la cantidad de individuos presentes en la interacción, así como la fuerza existente en esa relación.

Por último, es importante estudiar los fenómenos presentes en las dinámicas sociales, para comprender qué situaciones esperamos ver y explicar a través de los modelos. La polarización existente en la agenda social y su creciente au-

mento es uno de los grandes ejes de estudio [144-147]. Al examinar múltiples temas simultáneamente, también podemos descubrir nuevos fenómenos, como la alineación temática o la alineación partidaria [110, 111, 123, 148]. En otras palabras, entender cómo los temas se correlacionan entre sí y cómo ciertas identidades políticas se alinean con la misma posición en diferentes debates.

Además, en los últimos tiempos, especialmente con la aparición de redes sociales que incorporan algoritmos propios para facilitar las interacciones entre usuarios, se ha prestado mucha atención al fenómeno de las cámaras de eco [96, 149, 150]. Estas cámaras de eco se refieren a las interacciones que solo ocurren entre individuos previamente similares, lo cual genera un impacto significativo en la polarización de las sociedades y en la generación y difusión de noticias falsas.

1.6. Esquema

En este capítulo hemos presentado una introducción de los objetivos que nos hemos propuesto para desarrollar esta tesis. Hemos hecho una breve descripción bibliográfica de las herramientas que se utilizan desde la física estadística y el estudio de los sistemas complejos para modelar la opinión de las personas y su dinámica y así aportar a la comprensión de los mecanismos que actúan en ese proceso.

En el capítulo 2 desarrollamos dos modelos donde la opinión está representada de manera continua para los que escribimos y estudiamos la ecuación maestra. Ambos modelos son variaciones del modelo de influencia social estudiado en [151, 152]. En primer lugar consideraremos un modelo donde la opinión está representada en dos dimensiones y con una regla de interacción más general. En segundo lugar trabajaremos con un modelo donde la opinión no está representada por un valor continuo sino por una distribución de probabilidad donde analizaremos la dinámica de las medias.

En el capítulo 3 trabajamos con dos modelos donde logramos obtener una ecuación maestra para explicar la dinámica, pero a través de una aproximación que considera las particularidades del modelo. En el primer caso obtenemos una aproximación para un modelo donde el estado de los individuos está descrito por dos variables: una propensión que indica su valoración acerca de un tema y está representada por una variable continua, y una opinión discreta, que representa la respuesta pública a su opinión sobre ese tema y puede ser a favor, en contra o neutral. Obtenemos un conjunto de ecuaciones que más allá de su simplicidad nos permite una descripción muy completa de la dinámica. En el segundo caso presentamos una nueva aproximación de campo medio que permite dar ecuaciones para explicar la dinámica del modelo de Axelrod [93, 94] para vectores culturales de dos y tres dimensiones. Estas ecuaciones permiten predecir no solo las transiciones de fase entre la fase fragmentada y la de consenso, sino también la dinámica con la que el sistema se ordena hasta llegar a su estado de equilibrio.

En el capítulo 4 trabajamos con datos para contrastarlos con resultados y con las hipótesis de los modelos. Utilizamos las hipótesis que se desprenden

de resultados experimentales para construir un modelo, para el que podemos encontrar la ecuación exacta que describe su dinámica. Además, utilizamos datos provenientes de diversas encuestas para ajustar el modelo.

En conjunto hemos desarrollado técnicas que permiten escribir las ecuaciones que rigen la dinámica de una serie de modelos de opinión, logrando en algunos casos una ecuación exacta y en otros a través de una simplificación. Estas ecuaciones nos permitieron un entendimiento más profundo de los modelos y sus propiedades. Por último hemos contrastado algunos de los modelos con datos de la realidad provenientes de experimentos sociales o de datos públicos, tanto para corroborar las hipótesis elegidas, como para verificar los fenómenos observados.

Capítulo 2

Soluciones exactas en modelos de variable continua

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos variaciones de un modelo donde la opinión es representada por una variable continua y unidimensional. En este modelo, presentado en [151, 152], la regla de interacción es similar a la propuesta en el modelo planteado por Deffuant [1] ya que las interacciones ocurren de a pares y la opinión de los agentes luego de la interacción asume un valor entre ambas opiniones. Sin embargo, para este caso no consideraremos la hipótesis de *bounded confidence*, por lo que todos los agentes pueden interactuar entre sí en todo momento. Además, la modificación de la opinión luego de la interacción no será proporcional a la distancia entre ambas opiniones, sino que se modificará una cantidad fija h .

Una de las ventajas de este modelo es que nos permite calcular la ecuación maestra que rige la dinámica y resolverla analíticamente para algunas condiciones iniciales. En la mayoría de los casos, los modelos continuos son estudiados a partir de simulaciones, mientras que unos pocos modelos que presentan una ecuación analítica, y menos aún, la resuelven. Por ejemplo, en el modelo presentado en [1], los agentes solo interactúan con otros de opinión similar. Esto permite realizar una expansión de Taylor de la ecuación maestra y obtener una ecuación de Fokker-Planck, pero solamente considerando interacciones en un umbral pequeño. En [88] se obtiene la ecuación maestra para el caso de umbral grande, donde todos los agentes pueden interactuar entre sí. Sin embargo, esta ecuación no puede ser resuelta para calcular la dinámica de la opinión completa.

Presentaremos algunas variantes para el modelo propuesto [151, 152] y las estudiaremos, siguiendo el mismo método, a través del desarrollo de la ecuación maestra. En primer lugar consideraremos un modelo donde la opinión está representada en dos dimensiones y con una regla de interacción más general. En segundo lugar trabajaremos con un modelo donde la opinión no está representada por un valor continuo sino por una distribución de probabilidad donde analizaremos la dinámica de las medias.

La formulación matemática del modelo original es la siguiente. Se tienen N agentes, cada uno con una opinión $x_i \in S = [-1, 1]$. Si dos agentes con opiniones x_i y x_j interactúan, su nueva opinión será determinada de la siguiente manera:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i + h & \text{si } x_i < x_j \\ x_i - h & \text{si } x_i > x_j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para calcular la ecuación maestra comenzaremos considerando una represen-

tación discreta de la opinión, utilizando que en cada interacción la opinión de un agente solo puede modificarse un paso fijo h , y por lo tanto un agente cuya opinión pertenece a un intervalo de esa longitud, solo puede pasar a pertenecer a alguno de los intervalos vecinos luego de interactuar. De esta manera, dividimos el intervalo S en un conjunto de pequeños intervalos $\{I_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de longitud h .

Definimos

$$s(t, x) \sim \frac{\#\{i/x_i \in I_j\}}{N}.$$

la proporción de agentes con opinión en el intervalo I_j .

Asumimos que en las interacciones se modifican las opiniones de los dos agentes involucrados. Por lo tanto la ecuación maestra será

$$s(t + \Delta t, j) = s(t, j) + \frac{2}{N} \left(G(t, j) - L(t, j) \right), \quad (2.2)$$

donde G y L serán los términos de ganancia y pérdida. La función de ganancia para un intervalo j en un tiempo t será la probabilidad de que el agente seleccionado tenga opinión en un intervalo vecino en ese tiempo e interactúe con otro agente que lo haga cambiar su opinión de manera de pasar a pertenecer al intervalo j :

$$G(j, t) = s(t, j-1) \sum_{i>j} s(t, i) + s(t, j+1) \sum_{i<j} s(t, i). \quad (2.3)$$

De la misma manera, la única forma de que un agente deje de pertenecer al intervalo I_j , es que esté en ese intervalo e interactúe con cualquier otro que lo haga modificar su opinión:

$$L(t, j) = s(t, j) \sum_{i \in \mathbb{Z}} s(t, i).$$

Si juntamos ambos términos podemos escribir la ecuación discreta como

$$\begin{aligned} \frac{s(t + \Delta t, j) - s(t, j)}{\Delta t} &= \frac{2}{N} \left((s(t, j-1) - s(t, j)) \sum_{i>j} s(t, i) + \right. \\ &\quad \left. (s(t, j+1) - s(t, j)) \sum_{i<j} s(t, i) + s(t, j)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Una vez obtenida la ecuación maestra discreta, podemos pasar a una representación continua si tomamos en cuenta la función $f(t, x) : \mathbb{R}_{>0} \times S \rightarrow \mathbb{R}$ que representa la distribución de opiniones en S . Esta función puede ser aproximada en término de la proporción de agentes en los intervalos I_j de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s(t, j) &= \int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} f(t, x) dx \approx hf(t, jh), \\ s(t, j \pm 1) &\approx hf(t, jh \pm h) \approx hf(t, jh) \pm h^2 \partial_x f(t, jh), \end{aligned}$$

$$\frac{s(t + \Delta t, j) - s(t, j)}{\Delta t} \approx \frac{\partial f}{\partial t}$$

de manera que al remplazar en la Ec. (2.2) obtenemos la ecuación de Boltzmann de la dinámica correspondiente

$$\frac{\tau N}{2h} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\infty}^x f(y, t) dy - \int_x^{\infty} f(y, t) dy + 2f^2(x, t) \right). \quad (2.5)$$

Esta ecuación puede ser resuelta explícitamente para algunas condiciones iniciales siguiendo las ideas de Li y Toscani [153]. En este capítulo utilizaremos el mismo método para obtener la ecuación maestra y su correspondiente ecuación del Boltzmann de algunas variaciones de este modelo.

2.2. Modelo de opinión continua en dos dimensiones

Hemos observado que en algunos casos resulta conveniente representar una opinión en dos o más dimensiones. Esta representación puede indicar, por ejemplo, la opinión de un individuo sobre dos tópicos diferentes o una representación ideológica en dos ejes.

Como hemos visto en la introducción, son pocos los trabajos que analizan modelos multidimensionales. Son menos aún aquellos que plantean la ecuación dinámica general para modelos multidimensionales y realizan un estudio analítico a través de ella para obtener las particularidades de los modelos en mayor dimensión.

En [28] se analizan varios modelos para fenómenos auto-organizados que son definidos de manera general independiente de la dimensión del problema. Se demuestra que si se mantienen las interacciones globales (es decir, todos los agentes interactúan entre sí en todo momento) y atractivas se obtiene consenso. Además, en [82] se propone un modelo de variación para la dinámica de opinión basado en potenciales de interacciones de pares. Este modelo se plantea de manera general y multidimensional; sin embargo, solo se estudia la dinámica para dos o tres agentes y en una sola dimensión.

En [154] se desarrolla un modelo para la dinámica de opinión con respecto a múltiples partidos que incorpora el efecto de los medios masivos al mecanismo de interacción de pares. En este caso, se plantea la ecuación maestra y se prueba la unicidad y existencia, pero no se encuentra la solución de la ecuación. A pesar de que en los últimos años ha habido varios esfuerzos por analizar la dinámica de modelos de opinión multidimensionales, aún queda pendiente un estudio analítico completo n-dimensional.

En esta sección, nos enfocaremos en una extensión bidimensional del modelo planteado previamente. Desarrollaremos las ecuaciones maestras y las utilizaremos para obtener propiedades de la dinámica y para comparar diferentes tipos de interacciones. Los resultados detallados en esta sección fueron publicados en [155].

2.2.1. Modelo

Consideramos un conjunto de N agentes, cada uno de los cuales tiene una valoración acerca de varios tópicos. Asumimos que esta valoración es continua por lo que el estado de un agente puede ser representado por un vector de opinión en el espacio $\mathbb{R}^n$. Las opiniones de los agentes pueden cambiar debido a interacciones con otros agentes y la dinámica está dada por una sucesión de pasos temporales donde en cada paso seleccionamos al azar dos agentes con opiniones $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_j$ para que interactúen entre sí (donde la notación en negrita es utilizada para exponer el carácter vectorial de las variables). La interacción provoca que ambos agentes modifiquen sus opiniones de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{x}_i + h\mathbf{I}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \\ \tilde{\mathbf{x}}_j &= \mathbf{x}_j + h\mathbf{I}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}_i$ y $\tilde{\mathbf{x}}_j$ indican los nuevos vectores de opinión que adquieren los agentes después de la interacción, $\mathbf{I} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n$ es una regla general de interacción entre dos agentes cuya opinión difiere en $\mathbf{z} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$, y $h \in \mathbb{R}$ es un parámetro que representa la fuerza de la interacción. Normalizamos el tiempo, para que en cada unidad de tiempo se produzcan N pasos temporales, de manera que cada agente interactúe en promedio dos veces por paso temporal.

La generalidad de la interacción descripta nos permite condensar un gran abanico de variaciones del problema original. Si además asumimos algunas condiciones sobre la función de interacción, podemos representar distintas situaciones en los modelos de opinión. Por ejemplo, si $\mathbf{I}$ es una función impar, estamos en presencia de un modelo donde las interacciones entre cada par de agentes son antisimétricas (esto es, ambos se repelen o se atraen con idéntica fuerza entre sí). Si además pedimos que $\mathbf{z}\mathbf{I}(\mathbf{z}) < 0$ estamos asumiendo que las interacciones son atractivas.

En la Fig. 2.1 mostramos los gráficos en su versión bidimensional de algunas posibles funciones de interacción a modo de ejemplo. En el recuadro de cada panel se puede ver un esquema de la interacción generada. Por ejemplo, en el panel (a) se observa la gráfica de la función de interacción $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$ que genera una atracción simétrica de tamaño constante y en la dirección en la que la distancia euclideana es medida. En el panel (b) se ve la gráfica de la función de interacción $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = (\frac{z_x}{|z_x|}, \frac{z_y}{|z_y|})$ que corresponde a una interacción atractiva similar al caso anterior pero donde el movimiento ocurre con un paso fijo en cada una de las coordenadas. En el panel (c) la interacción es $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = -\frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$, similar a la del primer panel pero repulsiva. En el panel (d) la función de interacción es $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ y genera un cambio de opinión proporcional a la distancia que separa a ambos agentes.

2.2.2. Ecuación maestra

Como vimos anteriormente si asumimos que tenemos una cantidad grande de agentes que realiza pequeñas interacciones en instancias cortas de tiempo,

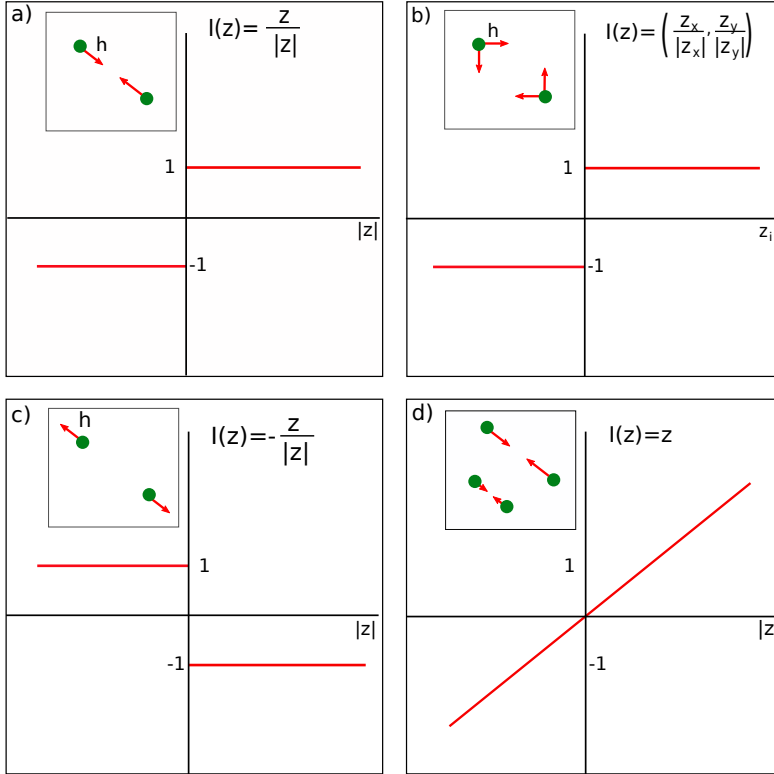


Figura 2.1: Panel (a): $I(z) = \frac{z}{|z|}$ genera una atracción simétrica en la dirección de la distancia Euclideana entre dos opiniones. Panel (b): Es una interacción similar pero en la dirección de la distancia Manhattan: $I(z) = \left(\frac{z_x}{|z_x|}, \frac{z_y}{|z_y|} \right)$. Panel (c): La interacción es similar a la del primer panel pero repulsiva: $I(z) = -\frac{z}{|z|}$. Panel (d): La opinión se actualiza proporcionalmente a la distancia entre las opiniones de los dos agentes que interactúan: $I(z) = z$.

podemos asumir continuidad, tanto en el espacio como en el tiempo.

De esta manera consideramos la distribución de opinión para cada momento del tiempo $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Esta función satisface la ecuación maestra de la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 2 \left(G(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}) \right), \quad (2.7)$$

donde $G(\mathbf{x})$ y $L(\mathbf{x})$ son las funciones de ganancia y pérdida respectivamente y el valor 2 representa la cantidad de interacciones promedio que un agente realiza en una unidad temporal.

El término de ganancia estará dado por

$$G(\mathbf{x}) = \int W_{(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}_*^p) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*)} f(\mathbf{x}^p) f(\mathbf{x}_*^p) d\mathbf{x}_*^p, \quad (2.8)$$

Donde $W_{(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}_*^p) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*)}$ es la probabilidad de que dos agentes con opinión $(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}_*^p)$ adopten la opinión $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*)$ luego de una interacción. Asumiendo que todos los pares de agentes pueden interactuar entre sí con la misma probabilidad, W solo vale 1 cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}^p + I(\mathbf{x}_*^p - \mathbf{x}^p)$, por lo que $W_{(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}_*^p) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*)} = \delta_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^p + I(\mathbf{x}_*^p - \mathbf{x}^p)}$.

Para calcular la función de pérdida calculamos la probabilidad de que un agente modifique una opinión $\mathbf{x}$. Eso ocurrirá si un agente con dicha opinión interactúa con otro, que lo obliga a modificarla. Por lo tanto, si pedimos que $I(\mathbf{z}) \neq 0$ salvo cuando $\mathbf{z} = 0$, obtenemos:

$$L(\mathbf{x}) = \int W_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*) \rightarrow (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}_*)} f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_*) d\mathbf{x}_* = f(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

ya que los agentes con la misma opinión son un conjunto de medida 0 fuera del equilibrio, y para cualquier otro agente $W_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*) \rightarrow (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}_*)} = 1$.

Como vimos en la introducción, en algunas ocasiones puede ser útil utilizar la formulación débil de la ecuación. Por lo tanto realizamos la deducción de dicha ecuación.

Dada una función test $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e integrando en el espacio de opiniones obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2 \iint \phi(\mathbf{x}) \delta_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^p + I(\mathbf{x}_*^p - \mathbf{x}^p)} f(\mathbf{x}^p) f(\mathbf{x}_*^p) d\mathbf{x}_*^p d\mathbf{x}^p \\ &\quad - \iint \phi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \\ &= 2 \iint \phi(\mathbf{x}^p + I(\mathbf{x}_*^p - \mathbf{x}^p)) f(\mathbf{x}^p) f(\mathbf{x}_*^p) d\mathbf{x}_*^p d\mathbf{x}^p \\ &\quad - \iint \phi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \end{aligned} \quad (2.10)$$

y si cambiamos las variables $(\mathbf{x}_*^p, \mathbf{x}^p)$ por $(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})$ en el término de ganancia obtenemos la ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = 2 \iint [\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x})) - \phi(\mathbf{x})] f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Notamos que la Ec. (2.11) puede ser simplificada en el límite $h \ll 1$ por:

$$\frac{d}{dt} \int \phi(\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2h \iint \nabla \phi(\mathbf{x}) \mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \quad (2.12)$$

Si ahora, tomamos como función test una función que depende del tiempo, $\phi(t, \mathbf{x}) : (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ entonces al derivar en la variable temporal obtenemos la derivada de un producto, por lo que:

$$\frac{d}{dt} \int \phi(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \frac{d\phi(t, \mathbf{x})}{dt} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int \phi(t, \mathbf{x}) \frac{df(t, \mathbf{x})}{dt} d\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

Para el segundo término podemos utilizar, para valores pequeños de h , la expresión de la Ec. (2.12) y de esta manera obtenemos la formulación débil temporal:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ 2h \iint \nabla \phi(t, \mathbf{x}) \mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2.3. Evolución del primer y segundo momento de la función de densidad de la opinión

En esta sección nos concentraremos en el comportamiento asintótico de la función de densidad de la opinión $f(t, \mathbf{x})$. En particular nos interesa probar que, bajo ciertas condiciones generales de la función de interacción $\mathbf{I}(\mathbf{z})$, un conjunto de agentes que inicialmente tienen su opinión distribuida de manera aleatoria, convergen a un consenso. Este resultado fue demostrado en [151] para una dimensión cuando $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$, donde los autores prueban que cuando $t \rightarrow +\infty$, $f(t, \cdot)$ converge (en el sentido débil) a una Delta de Dirac centrada en el valor promedio de las opiniones iniciales $\mathbf{m}(0) = \int \mathbf{x} f(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$, es decir: $f(t, \cdot) \rightarrow \delta_{\mathbf{m}(0)}$. Una conclusión similar se obtiene en [88] para un modelo unidimensional con $\mathbf{I}(z) = z$ y $h = \frac{1}{2}$ donde se demuestra que una población de agentes que inicialmente tiene sus opiniones uniformemente distribuidas en el intervalo, converge de manera exponencial a un consenso, en el punto medio del intervalo.

Vamos a generalizar este resultado a una familia de funciones de interacción y a un espacio n -dimensional de vectores de opinión. Primero demostraremos que si $\mathbf{I}(\mathbf{z})$ es una función impar, el promedio de la opinión se conserva y que por lo tanto $f(t, \cdot)$ es simétrica si lo era en su condición inicial:

Proposición 2.2.1. *Si $\mathbf{I}(-\mathbf{z}) = -\mathbf{I}(\mathbf{z})$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ (i.e. $\mathbf{I}$ es una función impar), entonces*

$$\int \mathbf{x} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x} f(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.15)$$

Más aún, si $f(0, -\mathbf{x}) = f(0, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (i.e. $f(0, \cdot)$ es simétrica), entonces $f(t, \cdot)$ es simétrica para todo $t \geq 0$.

Demostración. Utilizando en la Ec. (2.11) la función test $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \mathbf{x} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2h \iint \mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_* \\ &= -2h \iint \mathbf{I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_* \\ &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{x} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

en donde hemos usado que $\mathbf{I}$ es impar, y hemos realizado los cambios de variables $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_* \rightarrow -\mathbf{x}_*$ en la última igualdad. De esta manera $\frac{d}{dt} \int \mathbf{x} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ y se concluye el resultado.

Ahora suponemos que $f(0, -\mathbf{x}) = f(0, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y definimos $g(t, \mathbf{x}) := f(t, -\mathbf{x})$. Entonces $\int \phi(\mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \phi(-\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(\mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2 \iint \left[\phi(-\mathbf{x} - h\mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x})) \right. \\ &\quad \left. - \phi(-\mathbf{x}) \right] f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Realizando los cambios de variables $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_* \rightarrow -\mathbf{x}_*$, y usando nuevamente que $\mathbf{I}$ es impar, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(\mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2 \iint \left[\phi(\mathbf{x} - h\mathbf{I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)) \right. \\ &\quad \left. - \phi(\mathbf{x}) \right] g(t, \mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_* \\ &= 2 \iint \left[\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x})) \right. \\ &\quad \left. - \phi(\mathbf{x}) \right] g(t, \mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por otro lado, la Ec. (2.11) puede ser resuelta usando el teorema del punto fijo de Banach, (al igual que se hizo en [31] para la ecuación en una dimensión),

por lo tanto la solución de la ecuación existe y es única. Entonces, como tanto la funciones $f(t, \mathbf{x})$ y $g(t, \mathbf{x})$ resuelven la ecuación para las mismas condiciones iniciales, ambas funciones son iguales. $\square$

Si además pedimos que las interacciones sean atractivas, podemos investigar el comportamiento a largo plazo de $f(t, \cdot)$ para estudiar la convergencia de las opiniones y generalizar los resultados obtenidos en [151].

Proposición 2.2.2. *Supongamos que (i) $\mathbf{I}$ es una función impar y que (ii) $\mathbf{z}\mathbf{I}(\mathbf{z}) \geq 0$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ alcanzando la igualdad solamente cuando $\mathbf{z} = 0$. Entonces, $f(t, \cdot) \rightarrow \delta_{\mathbf{m}(0)}$ donde $\mathbf{m}(0)$ es el promedio de la opinión inicial.*

Demostración. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que el valor promedio de $f(0, \cdot)$ es 0. Entonces, por el resultado previo, podemos afirmar que $f(t, \cdot)$ también tiene un valor promedio cero para todo $t \geq 0$. Por lo tanto es suficiente con ver que

$$\int |\mathbf{x}|^2 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty. \quad (2.19)$$

Tomando $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2$ en la Ec. (2.12) obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\mathbf{x}|^2 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2h \iint \mathbf{x}\mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \quad (2.20)$$

Para simplificar la notación, llamamos

$$A = \iint \mathbf{x}\mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*$$

, por lo

$$\frac{1}{2h} \frac{d}{dt} \int |\mathbf{x}|^2 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2A. \quad (2.21)$$

Usando que $\mathbf{I}$ es impar, podemos escribir A como

$$\begin{aligned} A &= - \iint \mathbf{x}\mathbf{I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_* \\ &= - \iint \mathbf{x}_*\mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde hemos realizado los cambios de variables $\mathbf{x}_* \rightarrow \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_*$ en la última igualdad. Usando la última expresión, la definición de A , obtenemos

$$2A = - \iint (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) \mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \quad (2.23)$$

De esta manera podemos reescribir la Ec. (2.21) como

$$\frac{1}{2h} \frac{d}{dt} \int |\mathbf{x}|^2 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \iint (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) \mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad (2.24)$$

que es siempre negativa por la hipótesis (ii) del teorema. Más aún, por esta misma hipótesis ,

$$\begin{aligned}
 A = 0 &\iff (\mathbf{x}_* - \mathbf{x})I(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) = 0 && \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{x}_* \in \text{supp}(f(t, \cdot)) \\
 &\iff \mathbf{x}_* = \mathbf{x} && \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{x}_* \in \text{supp}(f(t, \cdot)) \\
 &\iff f(t, \cdot) \text{ es una Delta de Dirac.}
 \end{aligned}$$

Entonces la varianza $\int |\mathbf{x}|^2 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ de $f(t, \cdot)$ no crece a lo largo del tiempo, y es estrictamente decreciente mientras $f(t, \cdot)$ no sea una Delta de Dirac, es decir mientras las opiniones de los agentes aún no se encuentren concentradas.

Por lo tanto, hemos visto que el valor promedio de $f(t, \cdot)$ se conserva a lo largo del tiempo, y por lo tanto es constantemente igual a $\mathbf{m}(0)$. Luego $f(t, \cdot)$ converge a $\delta_{\mathbf{m}(0)}$ con lo que se termina la prueba. $\square$

En la Fig. 2.2 mostramos una simulación para $N = 1000$ agentes en un espacio de opiniones de 2D comenzando con una distribución de opiniones uniformemente distribuidas en $[-0,5; 0,5] \times [-0,5; 0,5]$, y un paso espacial $h = 0,01$. Mostramos la distribución de estados en diferentes tiempos para dos funciones de interacción $\mathbf{I}$ distintas, donde cada punto verde representa la opinión de uno de los agentes en ese tiempo. En los paneles superiores de la Fig. 2.2, la función de interacción considerada es $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$ la cual describe una interacción simétrica en la dirección de los dos agentes considerados similar al modelo desarrollado en [151]. En los paneles inferiores la función de interacción considerada es $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$, de manera que los cambios de la opinión son proporcionales a la distancia entre las opiniones de los dos agentes involucrados en la interacción, similar a las interacciones consideradas en el modelo clásico de Deffuant [1] si no se considera *bounded confidence*. Observamos que ambas funciones de interacción son impares y cumplen la condición $\mathbf{z}\mathbf{I}(\mathbf{z}) \geq 0$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ alcanzando la igualdad solo en $\mathbf{z} = 0$. Luego, por los resultados demostrados en esta sección la distribución de opiniones converge a una delta del promedio de las opiniones (indicada en la figura con una cruz roja).

2.2.4. Interacciones de tipo Euclideo y Manhattan

Nos vamos a enfocar en dos funciones de interacción en particular. Por un lado consideramos la función $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$, que representa un modelo en el que cada vez que dos agentes interactúan se acercan una distancia fija h en la dirección de su distancia Euclidea. Llamaremos a estas interacciones de tipo Euclideo. Por otro lado observaremos la evolución del modelo cuando la función de interacción es $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = (\frac{z_x}{|z_x|}, \frac{z_y}{|z_y|})$. En este caso estamos representando un modelo donde luego de interactuar los agentes cambian su opinión acercándose a la opinión de otro un paso fijo h en cada coordenada. Diremos que estas interacciones son de tipo Manhattan ya que los agentes cambian su opinión en la dirección en la que se mide dicha distancia.

Para simplificar la notación usaremos $d = 2$, pero todos los resultados pueden ser extendidos a más dimensiones.

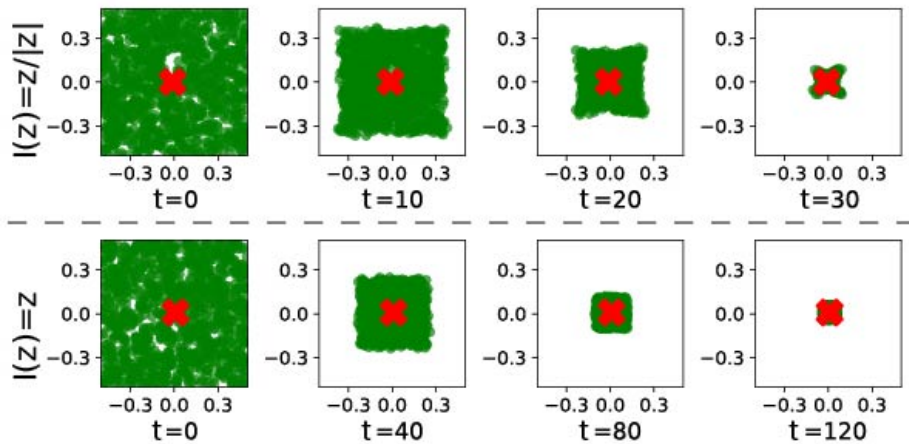


Figura 2.2: La evolución del sistema para $N = 1000$ agentes, $h = 0,01$ y condiciones iniciales distribuidas uniformemente en un espacio de dimensión dos. En los paneles de arriba se ven distintos momentos para una dinámica donde se utilizó la función de interacción dada por $I(z) = \frac{z}{|z|}$ (describe atracciones simétricas de paso fijo en la dirección entre las opiniones de los agentes involucrados). Los paneles de abajo muestran una dinámica con una función de interacción $I(z) = z$ (los cambios de opinión se realizan proporcionales a la distancia entre las opiniones de los agentes involucrados). Las cruces rojas representan el promedio de las opiniones en cada momento.

Utilizando el resultado de la sección anterior y comprobando que ambas funciones cumplen las hipótesis de las proposiciones 2.2.1 y 2.2.2 podemos concluir que tanto la dinámica con interacciones de tipo Euclidea como las de tipo Manhattan convergen a un consenso de todas las opiniones con el valor igual al valor promedio de las opiniones iniciales.

Por otro lado, observamos que en la interacción de tipo Manhattan el cambio de opinión que se produce en una coordenada es independiente de las opiniones que ambos agentes tienen en la otra. Por lo tanto podemos afirmar que el modelo es equivalente a proponer dos modelos unidimensionales como los descritos en [151] actuando desacopladamente en cada coordenada. Observamos que no ocurre lo mismo en las interacciones de tipo Euclidea.

Formalizaremos esta afirmación en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3. *Si la función de interacción $I(x)$ es independiente en cada una de sus coordenadas, es decir que existe una función unidimensional $I(x)$ tal que $I(x, y) = (I(x), I(y))$, y $f(t, x)$ cumple la Ec. (2.12) para dicha interacción, entonces las distribuciones marginales (es decir, la proyección de f sobre ambos*

ejes)

$$F_X(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, y) dy, \quad F_Y(t, y) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, y) dx. \quad (2.25)$$

cumplen la ecuación equivalente para una dimensión

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) F_X(t, x) dx = 2h \iint_{\mathbb{R}, \mathbb{R}} \phi'(x) I(x_* - x) F_X(t, x) F_X(t, x_*) dx dx_*, \quad (2.26)$$

y su correspondiente con $F_Y(t, y)$

Demostración. Si utilizamos la función de interacción con variables independientes en (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \frac{d}{dt} \int \phi(\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \iint \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{x}) I(x_* - x) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{x}) I(y^* - y) \right) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Consideramos el campo vectorial $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ definido por

$$\begin{aligned} v_x(\mathbf{x}) &= v[f](x) = \int I(x_* - x) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x}_* \\ v_y(\mathbf{x}) &= v[f](y) = \int I(y^* - y) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x}_* \end{aligned} \quad (2.28)$$

Entonces

$$v_x(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} I(x_* - x) F_X(t, x_*) dx_* \quad (2.29)$$

y equivalentemente para v_y . De esta manera podemos reescribir la ecuación maestra como

$$\frac{d}{dt} \int \phi(\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2h \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{x}) v_x(\mathbf{x}) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{x}) v_y(\mathbf{x}) \right) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.30)$$

que es la formulación débil de

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 2h \nabla \cdot (vf) = 0. \quad (2.31)$$

Para el caso particular donde $I(x) = x/|x|$ y $I(y) = y/|y|$, obtenemos

$$v_x(x) = v[F_X](t, x) = \int_{\{s > x\}} F_X(t, s) ds - \int_{\{s < x\}} F_X(t, s) ds, \quad (2.32)$$

y equivalentemente para la coordenada y . Esta ecuación es la ecuación maestra para el modelo unidimensional descrito en [151].

Veremos ahora que F_X cumple con la Ec. (2.26). Tomamos una función test tal que $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x)$ y notamos que $\int \phi(x)f(t, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)F_X(t, x)dx$. Entonces (2.30) se vuelve

$$\begin{aligned} h \frac{d}{dt} \int \phi(x)F_X(t, x)dx &= \int f(t, \mathbf{x})\phi'(x)v_x(x)d\mathbf{x} \\ &= \int F_X(t, x)\phi'(x)v_x(x)dx. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Lo mismo se cumple con F_Y . De esta manera F_X y F_Y resuelven la ley de conservación en $\mathbb{R}$ dada por

$$\frac{\partial F_X}{\partial t} + 2h \frac{\partial}{\partial x}(v_x F_X) = 0, \quad (2.34)$$

como queríamos ver. Teniendo en cuenta la Ec. (2.29), podemos reescribir (2.33) como la Ec. (2.26) que es la versión en una dimensión de la Ec. 2.12. Un razonamiento equivalente es válido para F_Y . $\square$

De la misma manera que en el caso multidimensional se puede demostrar que cuando $t \rightarrow +\infty$, $F_X(t)$ y $F_Y(t)$ convergen a la Delta de Dirac centrada en el valor medio de $F_X(0)$ y $F_Y(0)$: $m_x(0)$ y $m_y(0)$ respectivamente. Es decir $F_X(t) \rightarrow \delta_{m_x(0)}$ en donde

$$m_x(0) := \int x F_X(0, x)dx = \int x f(0, \mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (2.35)$$

y equivalentemente para $F_Y(t)$. Como consecuencia

$$f(t, \mathbf{x}) \rightarrow \delta_{\mathbf{m}(0)} \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty, \quad (2.36)$$

donde $\mathbf{m}(0) = (m_x(0), m_y(0))$ es el valor medio de la opinión inicial.

2.2.5. Tiempo hasta el consenso

Hemos demostrado que bajo ciertas condiciones de la función de interacción los agentes llegan a un consenso, a partir del cual todos sostienen la misma opinión. En esta sección, nos enfocaremos en determinar el tiempo que tarda un conjunto de agentes en alcanzar este estado de equilibrio, representado por t_c . Para lograrlo, vamos a deducir analíticamente la expresión que describe la evolución del segundo momento de la función de densidad de opinión. A partir de este cálculo, podremos determinar el momento en el que dicho segundo momento alcanza el valor cero.

Podemos asumir (sin pérdida de generalidad) que $f(t, \cdot)$ tiene una condición inicial donde el promedio de todas las opiniones es cero, y que están simétricamente distribuidas alrededor de $\mathbf{x} = 0$. Esto corresponde a reetiquetar todas las opiniones de los agentes con la misma traslación. De esta manera, de acuerdo a la proposición 2.2.1 que hemos demostrado anteriormente $f(t, \cdot)$ tiene promedio 0 para todo t .

Por la tanto la varianza de $f(t, \cdot)$ vale

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t) = \int |\mathbf{x}|^2 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.37)$$

La evolución de esta magnitud ya fue estudiada en la proposición 2.2.2 en general. Lo haremos ahora en particular con las interacciones de tipo Euclidianas y Manhattan.

Comenzaremos con las interacciones del tipo Euclidianas donde la interacción es $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$. Observamos que $(\mathbf{x}_* - \mathbf{x})\mathbf{I}(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}) = |\mathbf{x}_* - \mathbf{x}|$ y por lo tanto podemos escribir la Ec. (2.24) como

$$\frac{1}{2h} \frac{d\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt} = - \iint |\mathbf{x}_* - \mathbf{x}| f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \quad (2.38)$$

Notamos que $\iint |\mathbf{x}_* - \mathbf{x}| f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_* =: \text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_2}(t)$ corresponde a la diferencia media absoluta con la distancia L_2 , de manera que

$$\frac{d\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt} = -2h \text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_2}(t). \quad (2.39)$$

Para calcular la segunda derivada de $\langle \mathbf{x}^2 \rangle$, será útil introducir la siguiente función:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) := \int |\mathbf{x}_* - \mathbf{x}| f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x}_*,$$

de manera que

$$\frac{1}{2h} \frac{d\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt} = - \int \Phi(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.40)$$

Tomamos la segunda derivada temporal utilizando la ecuación de la dinámica débil para funciones test dependientes de tiempo (2.14) para la función $\Phi(t, \mathbf{x})$. Obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2h} \frac{d^2 \langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt^2} &= \int \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ 2h \iint \nabla \Phi(t, \mathbf{x}) \mathbf{I}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \bar{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} d\bar{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para calcular $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \mathbf{x})$, utilizamos la Ec. (2.12) eligiendo como función test $\phi(\mathbf{x}_*) = |\mathbf{x}_* - \mathbf{x}|$. Considerando que $\nabla \phi(\mathbf{x}_*) = (\mathbf{x}_* - \mathbf{x})/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} \int |\mathbf{x}_* - \mathbf{x}| f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x}_* \\ &= 2h \iint \frac{(\mathbf{x}_* - \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*|} \mathbf{I}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_*) f(t, \bar{\mathbf{x}}) f(t, \mathbf{x}_*) d\bar{\mathbf{x}} d\mathbf{x}_*. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Si volvemos a considerar ahora la Ec. (2.41) con $\nabla \Phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*|} f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x}_*$ y $\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}/|\mathbf{z}|$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4h^2} \frac{d^2 \langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt^2} &= \iiint \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*|} \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_*}{|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_*|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{x}_* - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_* - \mathbf{x}|} \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|} \right) f(t, \mathbf{x}) f(t, \bar{\mathbf{x}}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\bar{\mathbf{x}} d\mathbf{x}_* \\
&= 2 \iiint \left(\frac{\mathbf{x}_* - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_* - \mathbf{x}|} \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|} \right) f(t, \mathbf{x}) f(t, \bar{\mathbf{x}}) f(t, \mathbf{x}_*) d\mathbf{x} d\bar{\mathbf{x}} d\mathbf{x}_*.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Por razones simétricas, podemos concluir

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8h^2} \frac{d^2 \langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt^2} &= \iiint \left(\frac{\mathbf{x}_* - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_* - \mathbf{x}|} \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|} + \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_*}{|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_*|} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{x}_* - \bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}_* - \bar{\mathbf{x}}|} \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} \right) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) f(t, \bar{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} d\bar{\mathbf{x}} d\mathbf{x}_*.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Notamos que si tenemos tres opiniones diferentes $\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, la suma que observamos en la integral es la suma de los cosenos de los ángulos formados por el triángulo cuyos vértices son los puntos $\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \bar{\mathbf{x}}$. Por lo tanto considerando que al ser ángulos pertenecientes a un triángulo deben estar entre 0 y π y sumar π , obtenemos una restricción para la suma considerada, que alcanza su máximo en $3/2$, cuando el triángulo es equilátero y su mínimo en 1, cuando uno de los ángulos es 0 y los otros dos $\pi/2$. En el panel (a) de la Fig. 2.3 se ilustra este argumento geométrico.

También notamos que la probabilidad de que al elegir tres opiniones al azar de N agentes éstas no sean diferentes entre sí, es despreciables pues es de orden $1/N$. Por lo tanto concluimos de la Ec. (2.44) que

$$\frac{8}{3} h^2 \leq \frac{d^2 \langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt^2} \leq 4h^2. \tag{2.45}$$

De esta manera hemos obtenido una cota para la segunda derivada del segundo momento. Por lo tanto, si integramos dos veces con respecto al tiempo podemos obtener una cota para el segundo momento.

$$\frac{4}{3} h^2 t^2 - 2h \text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_2}(0)t + \langle \mathbf{x}^2 \rangle(0) \leq \langle \mathbf{x}^2 \rangle(t) \leq 2h^2 t^2 - 2h \text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_2}(0)t + \langle \mathbf{x}^2 \rangle(0). \tag{2.46}$$

donde hemos usado la Ec. (2.39) para calcular $\frac{d\langle \mathbf{x}^2 \rangle}{dt}(0)$ que depende de la condición inicial.

Si aproximamos $\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)$ por el promedio entre la cota superior y la inferior:

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t) \approx \frac{5}{3} h^2 t^2 - 2h \text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_2}(0)t + \langle \mathbf{x}^2 \rangle(0). \tag{2.47}$$

Por otro lado, para la interacción de tipo Manhattan utilizamos el resultado obtenido en la proposición 2.2.3 que muestra que la dinámica es equivalente a considerar un modelo unidimensional evaluado en cada coordenada evolucionando independientemente. Por lo tanto el consenso se alcanzará cuando se alcance el consenso en ambas coordenadas, es decir el tiempo de consenso equivale al del modelo en una dimensión. Para este caso la ecuación maestra puede ser escrita como la Ec. (2.27) eligiendo como función test $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \frac{d\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt} &= - \iint (|x_* - x| + |y_* - y|) f(t, \mathbf{x}_*) f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}_* d\mathbf{x} \\ &= -\text{MD}_x(t) - \text{MD}_y(t) = -2\text{MD}_x(t) = -\text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_1}(t), \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde $\text{MD}_x(t) = \text{MD}_y(t)$ es la diferencia media absoluta de la proyección en una dimensión, y $\text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_1}(t)$ es la diferencia media absoluta con la distancia L_1 .

Si realizamos una deducción similar al caso de tipo Euclideo, pero considerando cada coordenada en una dimensión, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8h^2} \frac{d^2\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt^2} &= 2 \iiint \left(\frac{x_* - x}{|x_* - x|} \frac{\bar{x} - x}{|\bar{x} - x|} + \frac{\bar{x} - x_*}{|\bar{x} - x_*|} \frac{x - x_*}{|x - x_*|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_* - \bar{x}}{|x_* - \bar{x}|} \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}_*) f(t, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \end{aligned} \quad (2.49)$$

A pesar de que en este caso los vértices $x, x_*, \bar{x}$ no forman un triángulo, pues están en la recta real, podemos imaginar que sí forman un triángulo degenerado. En el panel (b) de la Fig. 2.3 se ilustra esta situación. En este caso uno de los ángulos es igual a π , y su coseno -1 mientras que los otros dos son 0, y el correspondiente coseno vale 1. Por lo tanto la suma de los cosenos es 1 y podemos calcular la solución exacta para la segunda derivada

$$\frac{d^2\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t)}{dt^2} = \frac{16}{3} h^2. \quad (2.50)$$

Integrando la expresión (2.50) dos veces se obtiene

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle(t) = \frac{8}{3} h^2 t^2 - 2h \text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_1}(0)t + \langle \mathbf{x}^2 \rangle(0). \quad (2.51)$$

El consenso se alcanza cuando la varianza se hace mínima, por lo tanto el tiempo hasta el consenso puede ser calculado analíticamente encontrando los valores mínimos de las ecuaciones cuadráticas (2.47) y (2.51). De esta manera obtenemos las siguientes expresiones:

$$t_c = \begin{cases} \frac{3\text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_2}(0)}{5h} & \text{para la interacción de tipo Euclidea,} \\ \frac{3\text{MD}_{\mathbf{x}}^{L_1}(0)}{8h} & \text{para la interacción de tipo Manhattan.} \end{cases} \quad (2.52)$$

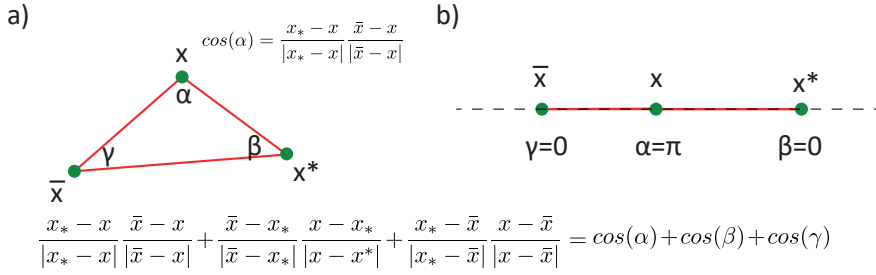


Figura 2.3: Se ilustra el argumento geométrico por el que es posible acotar el integrando de las Ecs. (2.44) y (2.49). En el panel (a) se muestra el caso bidimensional, mientras que en el panel (b) se ilustra el caso unidimensional.

En la Fig. 2.4 comparamos el modelo con los dos tipos de interacciones, tanto a través de simulaciones como de manera analítica. En los paneles (a) y (d) mostramos la densidad de opiniones proyectados en la coordenada x (resultados equivalentes se obtienen si se proyecta sobre la coordenada y). En los paneles (b) y (e) mostramos la evolución de $\langle x^2 \rangle(t)$ calculado (i) a través de simulaciones de agentes, promediando el valor de $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^i(t)$ de varias ejecuciones (círculos verdes), y (ii) analíticamente utilizando las Ecs. (2.47) y (2.51) (líneas rojas). En los paneles (c) y (f) mostramos la evolución temporal de $MD_{\mathbf{x}}^{L_2}(t)$ y $MD_{\mathbf{x}}^{L_1}(t)$ calculando (i) a través de simulaciones de agentes, promediando en varias ejecuciones el valor de $\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x}^j(t)|$ y $\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x^i(t) - x^j(t)| + |y^i(t) - y^j(t)|$ respectivamente (círculos verdes), y (ii) analíticamente derivando las Ecs. (2.47) y (2.51) (líneas rojas). El tiempo de consenso t_c que hemos obtenido analíticamente es graficado en líneas grises punteadas. Observamos que las simulaciones y la deducción analítica tienen una gran coincidencia.

Para comparar los tiempos de convergencia entre ambos tipos de interacción utilizaremos la expresión 2.52. Sin embargo notamos que $MD_{\mathbf{x}}^{L_1}(0)$ y $MD_{\mathbf{x}}^{L_2}(0)$ que aparecen en ambas soluciones son distintos entre sí. Para poder compararlas utilizamos la cota para las normas $|\cdot|_{L^1} \geq |\cdot|_{L^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |\cdot|_{L^1}$ por lo que obtenemos

$$MD_{\mathbf{x}}^{L_1}(t) \geq MD_{\mathbf{x}}^{L_2}(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} MD_{\mathbf{x}}^{L_1}(t). \quad (2.53)$$

Este resultado es válido para todo tiempo, y en particular para $t = 0$ por lo que ahora sí podemos comparar las expresiones. Por ejemplo en las simulaciones realizadas en las Figs. 2.4 y 2.5 donde los agentes comienzan con una distribución uniformemente distribuida en $[-0,5; 0,5] \times [-0,5; 0,5]$ obtenemos que, independientemente de los valores de h y N , $MD_{\mathbf{x}}^{L_1}(0) \approx 0,66$ y $MD_{\mathbf{x}}^{L_2}(0) \approx 0,52$, produciendo que el modelo con interacciones de tipo Manhattan llegue al consenso antes.

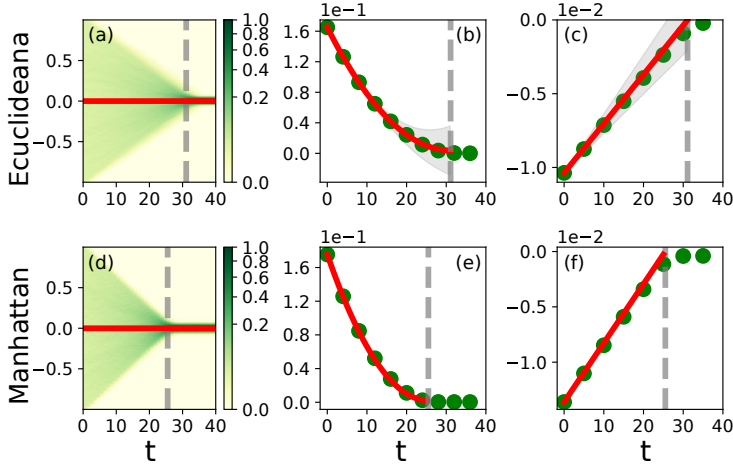


Figura 2.4: Evolución del sistema para $N = 1000$ agentes, $h = 0,01$ y una condición inicial de las opiniones distribuidas uniformemente. Paneles (a) y (d) muestran la proyección de la función de densidad de opiniones sobre el eje x . Los paneles del medio ((b) y (e)) muestran la evolución del segundo momento $\langle x^2 \rangle(t)$ a lo largo del tiempo para las simulaciones (círculos verdes) y para la estimación teórica (líneas rojas). En los paneles de la derecha ((c) y (f)) mostramos los valores obtenidos en las simulaciones (círculos verdes) y en las estimaciones teóricas (líneas rojas) para $MD_x^{L_2}(t)$ y $MD_x^{L_1}(t)$ respectivamente (ver el texto para los detalles de los cálculos). En los paneles de arriba se muestra la dinámica del modelo con una interacción de tipo Euclideana, mientras que en los paneles de abajo se muestran los resultados cuando la interacción es de tipo Manhattan. En los tres pares de figuras se puede observar la diferencia en los tiempos de convergencia marcados con una línea vertical gris.

El tiempo de consenso t_c también puede ser estimado numéricamente a través de las simulaciones basadas en agentes, asumiendo que hemos alcanzado al consenso cuando el valor de la varianza se estabiliza, es decir cuando:

$$|\langle x^2 \rangle(t) - \langle x^2 \rangle(t-1)| = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x^i(t)|^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x^i(t-1)|^2 \right| < h^2. \quad (2.54)$$

Hemos visto analíticamente que el tiempo de consenso t_c , depende solo de h y de la distribución inicial de opiniones. Por lo tanto en la Fig. 2.5 graficamos (con líneas) la expresión analítica de t_c como una expresión de $\frac{1}{h}$ para una distribución de agentes uniforme. Como esperábamos, hemos obtenido una relación lineal con pendiente $\frac{3}{8}MD_x^{L_1}(0)$ para el caso de la interacción de tipo Manhattan y $\frac{3}{5}MD_x^{L_2}(0)$ para el caso de la interacción de tipo Euleriana. Para comparar el resultado analítico con las simulaciones basadas en agentes realizamos simulaciones de Monte Carlo para $N = 1000, 1500, 2000$ y condiciones

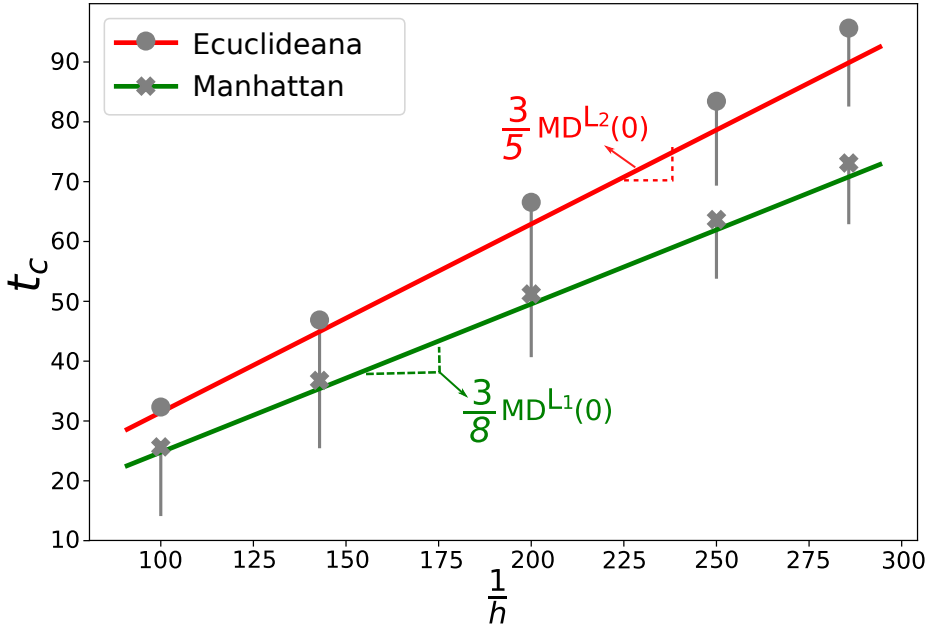


Figura 2.5: Relación entre los tiempos de convergencia entre $\langle \mathbf{x}^2 \rangle$ y $\frac{1}{h}$ para las interacciones de tipo Euclideo y de tipo Manhattan. Los resultados analíticos están en líneas, mientras que las simulaciones en símbolos. Para las simulaciones utilizamos distribuciones iniciales uniformemente distribuidas y $N = 2000$ (aunque resultados idénticos fueron obtenidos con $N = 1000$ y $N = 1500$).

iniciales uniformemente distribuidas y obtenemos idénticos resultados (graficados con símbolos verdes en la figura).

Notamos que nuevamente los resultados analíticos coinciden considerablemente bien con las simulaciones. La pequeña discrepancia que se observa ocurre debido a que los resultados analíticos no valen cuando la distribución se concentra y se asimila a una Delta de Dirac. Por lo tanto el tiempo para llegar al consenso está sobrestimado. Para obtener un límite inferior para el tiempo de consenso obtenido a partir de simulaciones, estimamos el momento en que la segunda derivada deja de ser constante (aproximadamente, cuando se separa h^2 del valor teórico), es decir,

$$\frac{d\text{MD}_{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1, j=1}^{N, N} |\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x}^j(t)| < t_c - h^2. \quad (2.55)$$

De esta manera comprobamos que el resultado analítico está dentro del margen de error (en líneas gris en el gráfico).

Por último, la relación entre los tiempos de convergencia de ambas interacciones t_c^E/t_c^M (donde el supra índice E indica la interacción de tipo Euclideo y M de tipo Manhattan)

y la M la de tipo Manhattan puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{t_c^E}{t_c^M} = \frac{8}{5} \frac{\text{MD}_x^{L_2}}{\text{MD}_x^{L_1}}. \quad (2.56)$$

Por un lado, el factor $\frac{\text{MD}_x^{L_2}}{\text{MD}_x^{L_1}}$ está acotado en el intervalo $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. Podemos interpretar que este resultado tiene que ver con la diferencia del tamaño de cambio de opinión que se produce luego de interactuar para cada uno de los casos estudiados. Para el caso de tipo Euclideano, el cambio de opinión es de tamaño h , mientras que en el caso de tipo Manhattan los agentes cambian su opinión una distancia $\sqrt{2}h$. A pesar de que es esperable una convergencia más rápida en las interacciones de tipo Manhattan, ya que las opiniones cambian una distancia mayor en cada interacción con respecto a las de tipo Euclideana, la relación que hemos encontrado entre ambos tiempos de convergencia no es trivial. En cambio, el factor $8/5$ no se deduce directamente de esta diferencia. Podemos concluir que este factor aparece como un fenómeno geométrico que proviene de las diferencias entre los términos cuadráticos de las expresiones (2.47) y (2.51).

2.3. Dinámica de opinión basada en medidas

Como hemos visto en el capítulo 1 una opinión puede ser representada matemáticamente de manera continua, discreta, en una o más dimensiones, etc. Sin embargo, en algunos casos la opinión de un individuo puede ser inherentemente incierta y solo representar un grado de creencia. Esto puede ocurrir cuando se intenta predecir el valor futuro de un activo o pronosticar el tiempo. En esos casos, es natural modelar la opinión de cada agente como una distribución de probabilidad.

Otro de los casos donde puede ser útil esta representación es para estudiar *opinion pooling*, cuando se utilizan métodos de comportamiento como los que se han descrito en la introducción. En estos casos donde se busca un consenso de un conjunto de expertos y expertas, es razonable suponer que la opinión no es un valor exacto sino una variable aleatoria con una distribución de probabilidad. Sin embargo, es posible que no podamos conocer completamente esta variable aleatoria, sino solo una realización de ella.

Proponemos aquí un modelo basado en interacciones de a pares donde la opinión de cada agente está representada con una densidad de probabilidad con soporte en los números reales. En una interacción un agente emite una opinión, representada con un número real, de acuerdo a su distribución y ese valor (y no su distribución total) es lo que es observado por otro agente. Luego actualizan sus distribuciones. Consideraremos que la actualización modificará solo la media de la distribución, acercándose al valor observado, mientras que el resto de la distribución, así como la varianza, se mantienen. Sin embargo es posible incorporar variaciones al modelo - que no serán estudiadas en esta tesis - si por ejemplo se considera *bounded confidence* o se asume que al interactuar cada agente modifica toda su distribución y no solo su media.

Al modificar solamente los valores medios de la distribución, es posible proyectar la dinámica en un espacio unidimensional y procedemos como en los modelos continuos de formación de opiniones que hemos detallado en el capítulo 1. Incluso podemos recuperar los modelos clásicos de dinámica de opinión como un caso particular de este modelo, donde las opiniones de los agentes están identificadas solamente con Deltas de Dirac. Sin embargo, la principal diferencia al incorporar una distribución con mayor varianza es la falta de certeza en la observación de las opiniones de los demás agentes, por lo que las interacciones dependerán de las realizaciones particulares de las opiniones y no estarán previamente definidas.

Esto nos obliga a abandonar la noción de consenso y a hablar en cambio de “cuasi-consenso”. La incertidumbre en las opiniones implica que los agentes nunca alcanzan un estado de consenso, ya que nuevas interacciones podrían cambiar este estado. Por lo tanto, diremos que los agentes alcanzan un estado de cuasi-consenso cuando todas las medias están concentradas en un pequeño intervalo.

El modelo y los resultados presentados en esta sección fueron publicados en [156].

2.3.1. Modelo matemático

En esta sección presentamos el modelo, cuando las opiniones de todos los agentes están representadas por la misma familia de distribuciones de probabilidad y lo único que varía es el valor de la media. Para este caso derivaremos la ecuación de Boltzmann asociada a la distribución de las medias.

Utilizando esa ecuación probaremos que para algunas condiciones extras en la distribución de probabilidad que representa las opiniones, podemos mostrar algunas de las dinámicas que tendrá la distribución en las medias de las opiniones. En particular estudiaremos con más profundidad el caso donde las distribuciones son normales con una varianza fija igual para todos los agentes. Para ese caso realizamos el *grazing limit* obteniendo una ecuación de campo medio de primer orden, no local, y caracterizamos el valor esperado del cuasi-consenso.

2.3.1.1. Modelado a escala microscópica

Supongamos que las opiniones de los agentes pertenecen a la misma familia de distribuciones de probabilidad con diferentes medias x_i . Por ejemplo, cada agente podría tener como opinión una distribución normal $N(x_i, \sigma^2)$ con σ^2 fijo (la misma para cada agente) y la opinión media x_i cambiará durante las interacciones.

Formalmente, consideramos una población con N agentes y representamos la opinión de cada agente i , como una variable aleatoria de valor real $\mathbb{X}_i$ con valor medio x_i y varianza σ^2 , la misma para todos los agentes. Por lo tanto podemos escribir

$$\mathbb{X}_i = \sigma \mathbb{Y}_i + x_i$$

donde $\mathbb{Y}_i$ es una variable aleatoria estandarizada. Suponemos que $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_N$ son copias independientes de una variable aleatoria estandarizada $\mathbb{Y}$ que además suponemos simétrica con segundo momento finito.

Como resultado de las interacciones, los agentes modifican su opinión. Suponemos que durante una interacción las variables aleatorias $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_N$ y la varianza común σ^2 permanecen invariantes y que sólo cambian las medias $x_1, x_2, \dots, x_N$. Fijamos un pequeño parámetro positivo h de modo que si el agente i observa una señal m_j del agente j , mayor que (respectivamente, menor que) su propia media x_i , entonces su nueva media será $x_i + h$ (respectivamente, $x_i - h$). Por lo tanto, si los dos agentes que interactúan tienen opiniones $\mathbb{X} = \sigma\mathbb{Y} + x$, $\mathbb{X}_* = \sigma\mathbb{Y}_* + x_*$ antes del encuentro y el segundo agente emite una opinión $m_* \in \mathbb{R}$, es decir, m_* es una realización de $\mathbb{X}_*$, entonces el primer agente actualizará su opinión media x de la siguiente manera:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x + h & \text{si } x < m_* \\ x - h & \text{si } x > m_* \end{cases} \quad (2.57)$$

siendo $\tilde{\mathbb{X}} = \sigma\mathbb{Y} + \tilde{x}$ la nueva opinión después de la interacción.

Esta regla de interacción modela la tendencia al compromiso de los agentes, ya que el primer agente desplaza ligeramente su opinión media x hacia la opinión emitida por el segundo agente. Observamos que las medias de las opiniones de los agentes son variables aleatorias debido a la naturaleza estocástica de esta regla de actualización.

2.3.2. La ecuación de Boltzmann

Al igual que en [151], trabajaremos con la versión continua de densidad de agentes $f^h(t, x)$ que da la distribución de agentes cuya opinión tiene media x en el tiempo $t \geq 0$ y que, dado un tiempo fijo, es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}$. Intuitivamente $f^h(t, x)dx$ es la proporción de agentes cuya opinión media pertenece a $[x, x + dx]$ en el momento t .

Notamos que la distribución depende del valor de h , pues la dinámica puede variar con ese parámetro. Suponemos que en todos los casos el número de agentes se conserva,

$$\int f^h(t, x)dx = 1, \quad t \geq 0.$$

El estado x cambiará por interacciones de pares, de acuerdo con las reglas microscópicas (2.57) descritas anteriormente. Suponemos que los encuentros entre agentes se producen según un proceso de Poisson con tasa constante, que podemos suponer igual a uno tomando el tiempo de re-escalado y que los tiempos de los encuentros y los $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_N$ son independientes.

La evolución temporal de $f^h(t, x)$ resulta del equilibrio de los términos de ganancia y pérdida y puede describirse mediante una ecuación integrodiferencial de tipo Boltzmann. Tomando una función test $\phi \in C_b(\mathbb{R})$ obtenemos la formulación débil de la ecuación maestra

$$\frac{d}{dt} \int \phi(x) f^h(t, x) dx = \int \mathbb{E}[\phi(x)](G[f] - L[f]) dx,$$

Subrayemos que $f(t, x) dx$ es sólo una convención de notación ya que no estamos suponiendo que f tenga una densidad. De hecho, f podría ser una medida Delta de Dirac. Los términos $G[f]$, $L[f]$ indican las funciones de ganancia y pérdida, a saber

$$G[f^h](t, x) = \iint W_{(x^p, x_*^p) \rightarrow (x, x_*)} f^h(t, x^p) f^h(t, x_*^p) dx^p dx_*^p,$$

$$L[f^h](t, x) = \int f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx_* = f^h(t, x),$$

donde W es la función núcleo que define las transiciones admisibles y la probabilidad de que las opiniones previas x^p , x_*^p , se transformen a la opinión x , x_* luego de la interacción.

Recordemos que tomamos el valor esperado $\mathbb{E}$ de los cambios ya que x es una variable aleatoria.

Por último, realizamos un cambio de variables en el término de ganancia $x^p \rightarrow x$ y $x_*^p \rightarrow x$ de manera que $x \rightarrow \tilde{x}$ y $x_* \rightarrow \tilde{x}_*$ y consideramos la función núcleo dentro de la esperanza obteniendo

$$\frac{d}{dt} \int \phi(x) f^h(t, x) dx = \int \mathbb{E}[\phi(\tilde{x}) - \phi(x)] f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx dx_*. \quad (2.58)$$

Para escribir explícitamente los términos de ganancia y pérdida observamos primero que

$$P(\mathbb{X}_* \leq x) = P(\sigma \mathbb{Y}_* + x_* \leq x) = P(\sigma \mathbb{Y} \leq x - x_*).$$

Denotamos por F a la función de distribución acumulativa de $\mathbb{Y}$, es decir, $F(x) = P(\mathbb{Y} \leq x)$ para $x \in \mathbb{R}$, y $F_\sigma(\cdot) = F(\cdot/\sigma)$ la distribución acumulativa de $\sigma \mathbb{Y}$. Entonces

$$P(\mathbb{X}_* \leq x) = F_\sigma(x - x_*). \quad (2.59)$$

Como consecuencia, para cualquier $x, x_* \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\phi(\tilde{x})] = \phi(x + h)(1 - F_\sigma(x - x_*)) + \phi(x - h)F_\sigma(x - x_*).$$

Se sigue que (2.58) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(x) f^h(t, x) dx &= \int \phi(x + h)(1 - F_\sigma(x - x_*)) + \\ &\quad \phi(x - h)F_\sigma(x - x_*) f(t, x) f(t, x_*) dx dx_* \\ &\quad - \int \phi f(t, x) dx \end{aligned} \quad (2.60)$$

para todo $\phi \in C_b(\mathbb{R})$.

En [156] se demuestra la existencia y unicidad de soluciones a esta ecuación utilizando algunos resultados enunciados en el trabajo de A. Bressan[157, 158]. Denotamos por $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ el espacio de medidas acotadas de Borel sobre $\mathbb{R}$, y por $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ el conjunto de medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}$ (remitimos a el anexo 2.3.6 para las definiciones precisas y las propiedades necesarias de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$).

2.3.2.1. Propiedades de f_t^h

Utilizando la Ec. (2.58) podemos encontrar expresiones para el valor medio y la varianza de x . Llamamos $\langle x \rangle_t$ al valor medio de x en el tiempo t , es decir,

$$\langle x \rangle_t = \int x f^h(t, x) dx.$$

Proposición 2.3.1. *El valor medio $\langle x \rangle_t$ es constante en el tiempo:*

$$\langle x \rangle_t = \langle x \rangle_{|t=0}.$$

Demostración. Tomemos como función test $\phi(x) = x$ en (2.58). Entonces

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle_t = \int \mathbb{E}(x' - x) f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx dx_*. \quad (2.61)$$

De acuerdo con la regla de interacción (2.57), tenemos la siguiente expresión para el valor esperado:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x' - x) &= hP(\mathbb{X}_* \geq x) - hP(\mathbb{X}_* \leq x) = h(1 - 2P(\mathbb{X}_* \leq x)) \\ &= h(1 - 2F_\sigma(x - x_*)) \end{aligned}$$

donde usamos (2.59) en la última igualdad.

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{d}{dt} \langle x \rangle_t &= \int (1 - 2F_\sigma(x - x_*)) f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx dx_* \\ &= 1 - 2 \int F_\sigma(x - x_*) f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx dx_*. \end{aligned}$$

Y usando que $F_\sigma(-x) = 1 - F_\sigma(x)$ (debido a la simetría de $\mathbb{Y}$), observamos que la integral en el lado derecho es igual a $1/2$, con lo que el resultado queda demostrado. $\square$

A partir de ahora supondremos sin pérdida de generalidad que $f(0)$ tiene media cero. Observemos que esto corresponde a reetiquetar todas las opiniones de los agentes con la misma traslación. Esto implica que $f^h(t, \cdot)$ tiene media cero para cualquier t, h por la proposición 2.3.1. La varianza de $f^h(t, \cdot)$ está dada por

$$Var[f^h](t) = \langle x^2 \rangle = \int x^2 f^h(t, x) dx.$$

Proposición 2.3.2. *La varianza de f^h cumple*

$$\frac{d}{dt} \text{Var}[f^h](t) = h^2 - 4h \int x(F_\sigma * f^h(t, \cdot))(x) f^h(t, x) dx.$$

donde el operador $*$ indica la convolución $(F_\sigma * f^h(t, \cdot))(x) := \int F_\sigma(x - x_*) f^h(t, x_*) dx_*$

Demostración. Notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(x')^2 - x^2] &= \mathbb{E}[(x' - x)(x' + x)] \\ &= h(2x + h)P(x \leq \mathbb{X}_*) - h(2x - h)P(x \geq \mathbb{X}_*) \\ &= h(2x + h) - 4xhF_\sigma(x - x_*). \end{aligned}$$

Tomando $\phi(x) = x^2$ como función test, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Var}[f^h](t) &= \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \\ &= 2h \langle x \rangle|_{t=0} + h^2 - 4h \int x(F_\sigma * f^h(t, \cdot))(x) f^h(t, x) dx \\ &= h^2 - 4h \int x(F_\sigma * f^h(t, \cdot))(x) f^h(t, x) dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\langle x \rangle|_{t=0} = 0$. De esta manera queda demostrado. $\square$

Dadas $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ definimos

$$I_\sigma(f) := \int x(F_\sigma * f)(x) f(x) dx = \int x F_\sigma(x - y) f(x) f(y) dx dy.$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \text{Var}[f_t^h] = h^2 - 4h I_\sigma(f_t^h).$$

También definimos

$$J_\sigma(f) := \int x(\Psi_\sigma * f)(x) f(x) dx = \int x \Psi_\sigma(x - y) f(x) f(y) dx dy$$

donde

$$\Psi_\sigma := 1 - 2F_\sigma.$$

Si $\mathbb{X}$ es una variable aleatoria real con distribución $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ también denotamos

$$\begin{aligned} I_\sigma(\mathbb{X}) &:= I_\sigma(f), \\ J_\sigma(\mathbb{X}) &:= J_\sigma(f). \end{aligned}$$

Proposición 2.3.3. *Tenemos: Sea $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$. Entonces,*

1. si $\mathbb{E}[f] = 0$,

$$J_\sigma(f) = -2I_\sigma(f).$$

2. Más aún,

$$J_\sigma(f) = \int_{\{x,y \in \mathbb{R}: x-y > 0\}} (x-y) \Psi_\sigma(x-y) f(x) f(y) dx dy. \quad (2.62)$$

3. Si f tiene varianza positiva entonces, como función de $\sigma > 0$, $J_\sigma(f)$ es estrictamente creciente y tiende a 0 cuando $\sigma \rightarrow +\infty$. Entonces si $\mathbb{E}[f] = 0$, $I_\sigma(f)$ es estrictamente decreciente con σ y tiende a 0 cuando $\sigma \rightarrow +\infty$.

4. Se cumplen las siguientes relaciones de escala: para cualquier $t > 0$ y una variable aleatoria real $\mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} I_\sigma(t\mathbb{X}) &= t I_{\sigma/t}(\mathbb{X}) \\ J_\sigma(t\mathbb{X}) &= t J_{\sigma/t}(\mathbb{X}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Demostración. Comenzaremos demostrando (2.62). Como Ψ es simétrica, tenemos $F_\sigma(0) = 0$ y entonces $\Psi_\sigma(0) = 0$. Se sigue que

$$\begin{aligned} J_\sigma(f) &= \int_{\{x-y > 0\}} x \Psi_\sigma(x-y) f(t,x) f(t,y) dx dy \\ &\quad + \int_{\{x-y < 0\}} x \Psi_\sigma(x-y) f(t,x) f(t,y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Reescribimos la segunda integral en el lado derecho intercambiando x e y , y usando que Ψ es impar, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\{x-y < 0\}} x \Psi_\sigma(x-y) f(t,x) f(t,y) dx dy &= \int_{\{y-x < 0\}} y \Psi_\sigma(y-x) f(t,x) f(t,y) dx dy \\ &= - \int_{\{x-y > 0\}} y \Psi_\sigma(x-y) f(t,x) f(t,y) dx dy, \end{aligned} \quad (2.65)$$

y obtenemos (2.62).

De esta manera

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} J_\sigma(f) &= \int_{\{x,y \in \mathbb{R}: x-y > 0\}} (x-y) \frac{\partial}{\partial \sigma} \Psi_\sigma(x-y) f(t,x) f(t,y) dx dy \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\{x,y \in \mathbb{R}: x-y > 0\}} (x-y)^2 F'(\frac{x-y}{\sigma}) f(t,x) f(t,y) dx dy \end{aligned}$$

Esta integral es positiva, ya que F' es la densidad (positiva) de $\mathbb{Y}$, excepto cuando $f \otimes f$ se concentra en la diagonal $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ lo que sólo ocurre si f es una masa de Dirac, es decir, si f tiene varianza cero (en ese caso

$J_\sigma(f) = 0$ para todo σ). Por lo tanto si $Var[f] > 0$ entonces $\frac{d}{d\sigma}J_\sigma(f) > 0$ o $J_\sigma(f) = 0$ para todo σ .

Finalmente, como $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \Psi_\sigma(x) = 0$, tenemos por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue (si f tiene un primer momento finito) que $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} J_\sigma(f) = 0$.

El reescalado en el punto (4) se sigue utilizando que si $\mathbb{X}$ tiene una distribución f , entonces $t\mathbb{X}$ tiene una distribución $\frac{1}{t}f(x/t)$. Entonces

$$\begin{aligned} I_\sigma(t\mathbb{X}) &= \int xF_\sigma(x-y)f(x/t)f(y/t)\frac{dxdy}{t^2} = t \int xF_\sigma(t(x-y))f(x)f(y)dxdy \\ &= t \int xF_{\sigma/t}(x-y)f(x)f(y)dxdy = tI_{\sigma/t}(\mathbb{X}) \end{aligned}$$

y la proposición queda demostrada. □

Intuitivamente, esto sugiere la siguiente dinámica de $Var[f_t^h]$. Inicialmente, si $Var[f_0] \gg h$ entonces $Var[f_t^h](t)$ disminuye estrictamente con el tiempo a un ritmo decreciente hasta que $Var[f_t^h](t) \simeq h$, y después de este punto oscilará alrededor de h .

Cuando $h \rightarrow 0$ esperamos que $Var[f_t^h](t) \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow +\infty$ y así $f(t, \cdot) \rightarrow \delta_0$, ya que $E[f(0, \cdot)] = 0$.

Ambos fenómenos son observados en la dinámica de simulación de agentes, que mostraremos en la última sección.

Para justificar la observación anterior, realizaremos el límite de *grazing* en la siguiente sección y obtendremos una ecuación diferencial ordinaria para $Var[f_t]$ que describe su comportamiento.

2.3.3. El límite de *Grazing* y el comportamiento a largo tiempo de f_t

Realizamos el llamado límite de *grazing* (o cuasi-invariante) cuando el parámetro h tiende a cero [126].

Obtenemos una ecuación de campo medio de primer orden y mostramos que su solución única se aproxima a las soluciones de la ecuación de Boltzmann para h pequeños.

Intuitivamente la idea es la siguiente. Si realizamos una expansión de Taylor

sobre la Ec. (2.58) y denotando ϕ' , ϕ'' las derivadas de la función test obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int \phi(x) f^h(t, x) dx &\simeq \int \mathbb{E}(x' - x) \phi'(x) f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx dx_* + \\
&\frac{1}{2} \int \mathbb{E}[(x' - x)^2] \phi''(x) f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx dx_* \\
&= h \int (1 - 2F_\sigma(x - x_*)) \phi'(x) f^h(t, x) f^h(t, x_*) dx dx_* + \\
&\frac{h^2}{2} \int \phi''(x) f(t, x) dx \\
&= h \int (\Psi_\sigma * f(t, \cdot))(x) \phi'(x) f^h(t, x) dx + \frac{h^2}{2} \int \phi''(x) f^h(t, x) dx.
\end{aligned}$$

Reescalamos el tiempo considerando $\tau := ht$ y $g^h(\tau, \cdot) := f^h(t, \cdot)$. Observamos que $\frac{d}{dt} \int \phi(x) f^h(t, x) dx = h \frac{d}{d\tau} \int \phi(x) g^h(\tau, x) dx$, por lo que si además tomamos el límite $h \rightarrow 0$ y suponemos que existe una función $g(\tau, \cdot)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} g^h(\tau, \cdot) = g(\tau, \cdot)$ podemos encontrar la ecuación que describe esta función. Esperamos que la evolución a largo plazo de $f^h(t, \cdot)$ sea aproximadamente la misma que $g(\tau, \cdot)$.

Formalmente esto se enuncia en el siguiente teorema. La demostración puede encontrarse en el anexo 2.3.7.

Teorema 2.3.1. *Supongamos que $f(0, \cdot)$ tiene primer momento finito y que $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ está dotado de la convergencia débil. Llamamos $g^h(\tau, \cdot) := f^h(t, \cdot)$ con $\tau = ht$. Entonces, hay una subsucesión con $h \rightarrow 0$, $\{g^h(\tau, \cdot)\}$ que converge en $C([0, T], \mathbb{P}(\mathbb{R}))$ para cualquier $T > 0$ a $g_\tau \in C([0, +\infty), \mathbb{P}(\mathbb{R}))$, una solución de*

$$\frac{d}{d\tau} \int \phi(x) g(\tau, x) dx = \int (\Psi_\sigma * g(\tau, \cdot))(x) \phi'(x) g(\tau, x) dx, \quad (2.66)$$

con condición inicial $g(0, \cdot) = f(0, \cdot)$.

Recordemos que ésta es la formulación débil de la ecuación de campo medio de primer orden (2.67)

$$\partial_\tau g_\tau + \partial_x \left((\Psi_\sigma * g_\tau) g_\tau \right) = 0. \quad (2.67)$$

Además, podemos demostrar que el valor esperado de la distribución de las medias de los agentes es constante en el tiempo y que la varianza de esta distribución disminuye hasta 0. Así, los agentes alcanzan asintóticamente un estado de cuasi-consenso cuyo valor esperado es igual al valor esperado de la distribución inicial f_0 de las medias de las opiniones:

Teorema 2.3.2. *Si $g(0, \cdot)$ tiene segundo momento finito. La solución $g(\tau, \cdot)$ de la Ec. (2.67) converge como $\tau \rightarrow +\infty$ a la masa de Dirac situada en $\mathbb{E}[f(0)]$*

$$g(\tau, \cdot) \rightarrow \delta_{\mathbb{E}[f(0)]}.$$

Demostración. Como hicimos para $f^h(t, \cdot)$, podemos ver fácilmente que

$$E[g(\tau)] = E[f(0)] \quad t \geq 0.$$

Así pues, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(0, \cdot)$ tiene media cero (desplazando todas las opiniones si es necesario) y así $g(\tau, \cdot)$ tiene media cero para cualquier $\tau \geq 0$. También se ve fácilmente de (2.66) que

$$\frac{d}{dt} \text{Var}[g](\tau) = 2 \int x(\Psi_\sigma * g(\tau, \cdot))(x) g(\tau, x) dx = 2J_\sigma(g(\tau, \cdot)).$$

Como por la proposición 2.3.3, $J_\sigma(g(\tau, \cdot)) \leq 0$ y la igualdad se alcanza si y sólo si $\text{Var}[g](\tau) = 0$, obtenemos que $\text{Var}[g](\tau)$ decrece a 0 con el tiempo, de modo que

$$g(\tau, \cdot) \rightarrow \delta_0.$$

□

2.3.3.1. Tiempo de convergencia

El siguiente resultado nos da una estimación explícita del tiempo de convergencia al cuasi-consenso. Suponemos que las opiniones de los agentes son de la forma $x + \sigma\mathbb{Y}$ donde $\sigma > 0$ está dado e $\mathbb{Y}$ es una variable aleatoria simétrica con media 0 y varianza 1 que tiene una densidad $f_\mathbb{Y} \in C^1(\mathbb{R})$. Suponemos que $f'_\mathbb{Y}$ está acotada y $F(x) > F(0)$ para $x > 0$ (esto se cumple si, por ejemplo, $f_\mathbb{Y}(0) > 0$), donde F es la función de distribución acumulativa de $\mathbb{Y}$. Bajo estos supuestos podemos demostrar el siguiente teorema. La demostración completa puede encontrarse en el anexo 2.3.7:

Teorema 2.3.3. *Suponemos que $g(0, \cdot)$ tiene soporte compacto y fijamos $R_0 > 0$ de manera que $\text{supp } g(0, \cdot) \subset [-R_0, R_0]$. Entonces, cuando $\tau \rightarrow +\infty$, el soporte de g_τ se reduce al punto aislado $c = \mathbb{E}[f(0)]$, y para todo $t \geq 0$,*

$$W_2(g(\tau, \cdot), \delta_c)^2 = \text{Var}[g](\tau) \leq (\text{Var}[g](0))e^{\frac{4\tau}{\sigma} \left(-f_\mathbb{Y}(c/\sigma) + \frac{R_0}{\sigma} \|f'_\mathbb{Y}\|_\infty \right)}.$$

Más aún, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\tau_\varepsilon > 0$ tal que

$$W_2(g(\tau, \cdot), \delta_c)^2 = \text{Var}[g](\tau) \leq (\text{Var}[g](0))e^{\tau \left(-\frac{4f_\mathbb{Y}(c/\sigma)}{\sigma} + \varepsilon \right)}, \quad \tau \geq \tau_\varepsilon. \quad (2.68)$$

Donde, $W_2(\cdot, \cdot)$ es la distancia Wasserstein, definida en el anexo 2.3.6.

La demostración del teorema se encuentra en el anexo 2.3.7.

Observación 2.3.1. *Si $f_\mathbb{Y} \in C^1$ es no creciente en $(0, +\infty)$, podemos dar una cota menor para $W_2(g(\tau, \cdot), \delta_c)$:*

$$W_2(g(\tau, \cdot), \delta_c)^2 = \text{Var}[g](\tau) \geq (\text{Var}[g](0))e^{(-\frac{4f_\mathbb{Y}(c/\sigma)}{\sigma})\tau},$$

por lo que la estimación dada por la desigualdad (2.68) es asintóticamente óptima en este caso.

Observemos que este límite inferior se cumple en el caso particular de que $\mathbb{Y} \sim N(0, 1)$.

2.3.4. Ejemplos y simulaciones

En esta sección presentamos algunas simulaciones numéricas basadas en agentes para ilustrar los resultados de convergencia expuestos en el teorema 2.3.2 y en el teorema 2.3.3. Consideramos una población finita de N agentes que interactúan siguiendo la reglas presentadas anteriormente.

Observamos que hemos obtenido la ecuación límite no local (2.67) de la ecuación de Boltzmann (2.58) que suponía implícitamente una población infinita. Dado que consideraremos una población grande pero finita de N agentes en las simulaciones, primero tenemos que encontrar la escala temporal correcta que relacione N y h . Para eso consideramos un reescaleo del tiempo de manera que $\tau = \frac{h}{N}t$. Eso quiere decir que un paso temporal $\Delta\tau$ corresponde a N/h interacciones.

2.3.5. Simulaciones

Consideramos un conjunto de agentes numerados del 1 a N . Consideramos que cada uno tiene una opinión representada por una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 1$ y con sus medias x_i inicialmente uniformemente distribuidas en $[-1/2, 1/2]$. En cada paso temporal todos los agentes actualizan su opinión. La dinámica ocurre de la siguiente manera:

- A cada agente i se le asigna otro agente j al azar.
- El agente j expresa una opinión m_j que es una realización de la función de distribución correspondiente a su opinión.
- Cada agente i actualiza su opinión siguiendo la regla (2.57), es decir su nueva opinión es $x'_i = x_i + \text{sign}(m_j - x_i)h$.

Las simulaciones fueron realizadas con distintos valores de N . Sin embargo solo presentamos las simulaciones para $N = 5000$, ya que el resto resulta similar. Consideramos un paso espacial $h = 10^{-3}$.

En la Fig. 2.9 se muestra para cada tiempo la distribución de los valores medios de las opiniones de los agentes en el intervalo de opiniones donde mayor color indica mayor concentración de agentes. Observamos que la distribución de los valores medios convergen a un valor de cuasi-consenso, y a partir de ese momento fluctúa alrededor de ese valor debida al paso h .

Observación 2.3.2. *Observemos que diferentes simulaciones para los mismos parámetros muestran una distribución de valores de cuasi-consenso que se asemeja a una distribución Normal (véase la Fig. 2.7 que muestra el histograma del valor final de cuasi-consenso correspondiente a 500 simulaciones que parten de la misma condición inicial). Conjeturamos que aquí es válido algún Teorema Central del Límite, ya que el valor de cuasi-consenso de las medias se obtiene en el proceso aleatorio definido por la selección aleatoria de opiniones en cada interacción y, cuando $h \rightarrow 0$, la media en la ecuación de Boltzmann implica la*

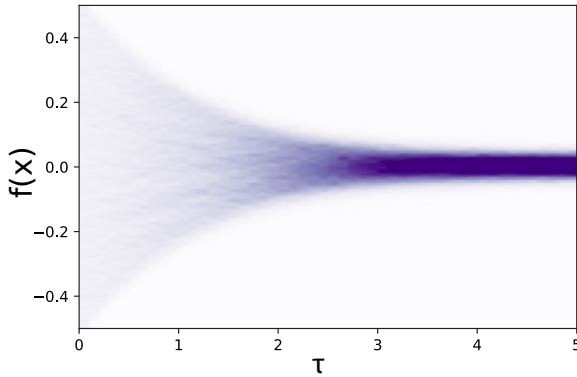


Figura 2.6: Evolución de los valores medios de los agentes para $N = 5000$ agentes, $h = 10^{-3}$ y una distribución inicial uniforme en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Mayor color indica mayor concentración de agentes.

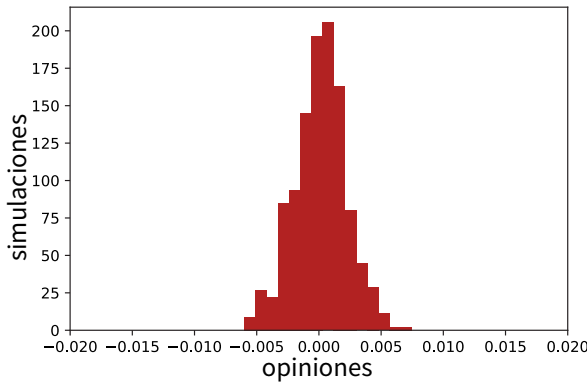


Figura 2.7: Histograma para los valores de cuasi-consenso alcanzados por los valores medios de las opiniones correspondientes a 500 simulaciones donde la distribución inicial de los valores medios sigue una distribución uniforme en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ con $N = 1000$ agentes y $h = 10^{-3}$.

convergencia al valor esperado de esta distribución demostrada en el teorema 2.3.2.

En las Figs. 2.8, 2.9, analizamos el tiempo hasta el cuasi-consenso para distintos valores de h . Consideramos los casos $h = 10^{-2}$, 5×10^{-3} , 10^{-3} , 10^{-4} . Estas curvas son obtenidas promediando 100 simulaciones para cada valor de h .

En la Fig. 2.8 mostramos la evolución temporal de R_τ , que hemos introducido en el comienzo del teorema 2.3.3, donde sabemos que $R_\tau \downarrow 0$ y la distribución de

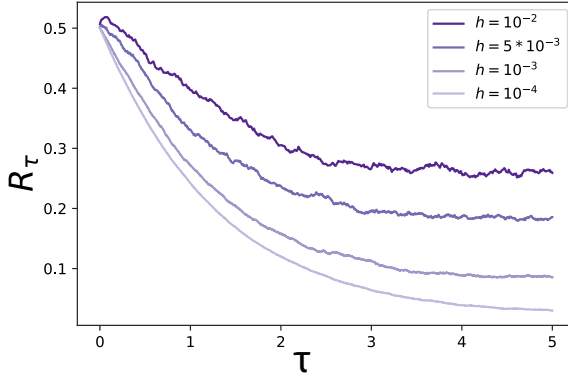


Figura 2.8: Evolución temporal de R_τ , es decir el valor mínimo para el cual la distribución de agentes en el tiempo τ está en el soporte $[-R_\tau, R_\tau]$. Se muestran simulaciones para $N = 1000$ agentes, y para valores de $h = 10^{-2}$, $h = 5 \times 10^{-3}$, $h = 10^{-3}$, $h = 10^{-4}$.

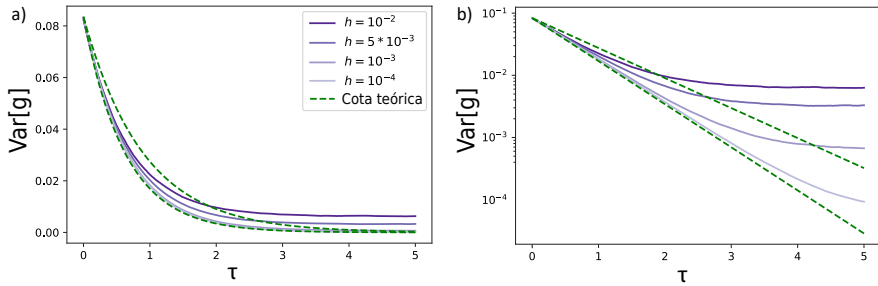


Figura 2.9: Evolución temporal de la varianza de la distribución de las medias de los agentes x_i , $i = 1, \dots, N = 1000$. En líneas azules se muestran el promedio de 100 simulaciones para $N = 1000$ agentes y distintos valores de h ($h = 10^{-2}$, $h = 5 \times 10^{-3}$, $h = 10^{-3}$, $h = 10^{-4}$, mostrados en distintos tonos de azul). En líneas punteadas verdes se muestran las cotas teóricas obtenidas en 2.3.3 y 2.3.1. En el panel (a) se muestran en escala lineal, mientras que en panel (b) en escala logarítmica.

los valores medios de las opiniones de los agentes en un tiempo τ tiene soporte en $[-R_\tau, R_\tau]$.

En la Fig. 2.9 graficamos la evolución de la varianza (panel (a)) y el logaritmo de la varianza (panel (b)) de la distribución de los valores medios de las opiniones de los agentes a lo largo del tiempo.

Las curvas violetas dibujadas con líneas corresponden a los distintos valores de h : ($h = 10^{-2}$, $h = 5 \times 10^{-3}$, $h = 10^{-3}$ y $h = 10^{-3}$). Las curvas verdes punteadas representan las cotas teóricas obtenidas en el teorema 2.3.3 y en la observación 2.3.1 para el caso de opiniones con una distribución normal, $\sigma = 1$ y los valores medios de las opiniones inicialmente distribuidos uniformemente en $[-1/2, 1/2]$. De esta manera observamos que $R_0 = 1/2$ y la varianza inicial es $\text{Var}(\text{Unif}(-1/2, 1/2)) = 1/12$.

La *cota superior* que hemos encontrado en el teorema 2.3.3 está dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[g_t] &\leq \text{Var}[g_0] \exp \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \left(-1 + e^{-1/2} \frac{R_0}{\sigma} \right) t \right\} \\ &= \frac{1}{12} \exp \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(-1 + \frac{1}{2} e^{-1/2} \right) t \right\} \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

mientras que la *cota inferior* es obtenida en la observación 2.3.1 y está dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[g_t] &\geq \text{Var}[g_0] \exp \left\{ -\frac{2\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} t \right\} \\ &= \frac{1}{12} \exp \left\{ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} t \right\} \end{aligned} \tag{2.69}$$

Observamos una gran coincidencia entre las simulaciones de agentes y los resultados teóricos para el *grazing limit*. Todas las curvas se desvían de las estimaciones teóricas cuando el soporte de las medias es suficientemente pequeño, del orden de $O(h)$.

2.3.6. Anexo: Notación y definiciones

Dado $K \subset \mathbb{R}$, denotamos por $\mathbb{P}(K)$ el conjunto convexo de medidas de probabilidad sobre K .

$\mathcal{M}(K)$ representa el espacio de medidas con signo de Borel en K , y $\mathcal{M}_b(K) \subset \mathcal{M}(K)$ denota las medidas con masa total finita. Estos conjuntos están dotados de la norma de variación total,

$$\|f\|_{TV} = \sup \left\{ \int_K \phi df : \phi \in C(K) \text{ tal que } \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}. \tag{2.70}$$

Observemos que $\mathcal{M}(K)$ se convierte en un espacio de Banach con esta norma.

Necesitaremos dotar al conjunto $\mathbb{P}(K)$ de la topología débil*. Utilizaremos también las distancias de Wasserstein W_p , con $p \geq 1$, entre dos medidas de

probabilidad μ, ν , que se definen como

$$W_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{\alpha \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{K \times K} |x - y|^p d\alpha(x, y) \right)^{1/p} \quad p \geq 1, \quad (2.71)$$

siendo $\Gamma(\mu, \nu)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre $K \times K$ con medidas marginales ν y μ sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Cualquiera distancia de Wasserstein W_p , $p \geq 1$, mide la convergencia débil* cuando K está acotada. Cuando $p = 1$ el Teorema de Kantorovich-Rubinstein proporciona una representación dual de W_1 , a saber

$$W_1(\nu, \mu) = \sup \left\{ \int_K \varphi d(\mu - \nu) : \varphi \text{ es 1-Lipschitz} \right\}. \quad (2.72)$$

Ver [159, 160] para más detalles.

Sea $\mathbb{Y}$ una variable aleatoria. Decimos que $\mathbb{Y}$ es simétrica si

$$P(\mathbb{Y} \in [-x, 0]) = P(\mathbb{Y} \in [0, x]) \quad \text{para cualquier } x \geq 0.$$

Obsérvese que una variable aleatoria simétrica tiene valor esperado 0. Decimos que $\mathbb{Y}$ tiene momento finito k -ésimo, $k \in \mathbb{N}$, si $\mathbb{E}(|\mathbb{Y}|^k) < \infty$.

2.3.7. Anexo: Demostraciones

2.3.7.1. Prueba del teorema 2.3.1

Antes de la demostración de este resultado, recordamos un resultado útil de Gabetta, Toscani y Wennberg[159].

Llamamos $\rho(\mu, \nu)$ a la distancia Prokhorov entre $\mu, \nu \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$. Siguiendo [159][Ec. (5.6)], también consideramos

$$\|\mu\|_* := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu : \|\phi\|_2 := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)| + |\phi''(x)| \leq 1 \right\}$$

y

$$d(\mu, \nu) := \|\mu - \nu\|_*. \quad (2.73)$$

Notamos que como μ y ν tienen la misma masa, $d(\mu, \nu)$ no cambia si añadimos una constante a la función de prueba ϕ . En particular podemos suponer que $\phi(0) = 0$ es decir consideramos

$$\|\mu\|_* := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu : \|\phi\|_2 := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)| + |\phi''(x)| \leq 1, \phi(0) = 0 \right\}. \quad (2.74)$$

De acuerdo con el Lema 5.3 y el Corolario 5.5 en [159], d define una distancia que mide la convergencia débil-* (es decir, la convergencia entre funciones en $C_b(\mathbb{R})$). Más aún, el corolario 5.5 en [159] dice así

$$\rho(\mu, \nu) \leq \max \{ C(d(\mu, \nu))^{1/3}; d(\mu, \nu) \} \quad \text{para todo } \mu, \nu \in \mathbb{P}(\mathbb{R}).$$

Como $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ es completo para ρ deducimos que también lo es para d .

Ahora sí, estamos en condiciones de dar la demostración del teorema del *Grazing limit* 2.3.1.

La medida reescalada $g_\tau^h := f_t^h$, donde $\tau = ht$, resuelve la ecuación de Boltzmann

$$\frac{d}{d\tau} \int \phi(x) g^h(\tau, x) dx = \frac{1}{h} \int \mathbb{E}[\phi(\tilde{x}) - \phi(x)] g^h(\tau, x) g^h(\tau, x_*) dx dx_* \quad (2.75)$$

para cualquier función test ϕ . Realizando una expansión de Taylor de primer orden obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int \phi(x) g^h(\tau, x) dx &= \frac{1}{h} \int \left\{ \mathbb{E}[\tilde{x} - x] \phi'(x) + \frac{1}{2} \mathbb{E}[(\tilde{x} - x)^2] \phi''(\hat{x}) \right\} \\ &\quad g^h(\tau, x) g^h(\tau, x_*) dx dx_* \\ &= \frac{1}{h} \int \left\{ h \Psi_\sigma(x - x_*) \phi'(x) + \frac{h^2}{2} \phi''(\hat{x}) \right\} \\ &\quad g^h(\tau, x) g^h(\tau, x_*) dx dx_* \end{aligned}$$

donde $\hat{x} = x + \theta h$ para algún $\theta \in (-1, 1)$ es un punto intermedio entre x y $\tilde{x}$. Entonces

$$\frac{d}{d\tau} \int \phi(x) g^h(\tau, x) dx = \int (\Psi_\sigma * g_\tau^h)(x) \phi'(x) g^h(\tau, x) dx + R_\tau^h$$

donde

$$R_\tau^h := \frac{h}{2} \int \phi''(\hat{x}) g^h(\tau(x), x) dx.$$

Integrando la expresión de arriba entre τ' y τ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int \phi(x) (g^h(\tau, x) - g^h(\tau', x)) dx &= \int \phi(x) d(g_\tau^h - g_{\tau'}^h) \\ &= \int_{\tau'}^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \phi'(x) dg_s^h(x) ds + \int_{\tau'}^\tau R_s^h ds, \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde en la primer igualdad solo se modifica la notación escribiendo las integrales como integrales de Lebesgue, para poder utilizar la definición 2.73. Como $\|\Psi_\sigma\|_\infty \leq 1$, también $\|\Psi_\sigma * g_s^h\|_\infty \leq 1$, y $|R_\tau^h| \leq \frac{h}{2} \|\phi''\|_\infty$. Entonces, obtenemos

$$\left| \int \phi d(g_\tau^h - g_{\tau'}^h) \right| \leq (\|\phi'\|_\infty + \frac{h}{2} \|\phi''\|_\infty) |\tau - \tau'|. \quad (2.77)$$

Tomando el supremo sobre ϕ tenemos

$$d(g_\tau^h, g_{\tau'}^h) \leq |\tau - \tau'| \quad \text{para todo } \tau, \tau' \geq 0 \text{ y } h < 1,$$

donde d está definida en (2.73). Esto significa que la sucesión de funciones reales continuas de medida de probabilidad $g^h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{P}(K)$ es uniformemente

equicontinua. Más aún, para cada τ fijo, la secuencia $(g_\tau^h)_h$ es acotada ya que para cada ϕ posible en la definición de $\|\cdot\|_*$,

$$\left| \int \phi dg_\tau^h \right| = \left| \int \phi g^h(\tau, x) dx \right| \leq \int |x| g^h(\tau, x) dx \leq \tau + \int |x| dg^h(0, x) dx.$$

Para demostrar la segunda desigualdad usamos $|x|$ como función de test en (2.75), y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int |x| g^h(\tau, x) dx &= \frac{1}{h} \int \mathbb{E}[|\tilde{x}| - |x|] g^h(\tau, x) g^h(\tau, x_*) dx dx_* \\ &= \frac{1}{h} \int (|x+h| - |x|)(1 - \Phi_\sigma(x - x_*)) g^h(\tau, x) g^h(\tau, x_*) dx dx_* \\ &\quad + \frac{1}{h} \int (|x-h| - |x|) \Phi_\sigma(x - x_*) g^h(\tau, x) g^h(\tau, x_*) dx dx_* \\ &\leq \frac{1}{h} \int ((|x|+h) - |x|) g^h(\tau, x) g^h(\tau, x_*) dx dx_* \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema de Arzela-Ascoli, junto con el argumento diagonal, asegura la existencia de $g \in C([0, +\infty); \mathbb{P}(\mathbb{R}))$ y una subsucesión $(h_n)_n$ que converge a 0 tal que $g^{h_n} \rightarrow g$ en $C([0, T]; \mathbb{P}(\mathbb{R}))$ para todo $T > 0$, lo que implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq s \leq T} \max_{\text{Lip}(\phi) \leq 1} |(g_s^h - g_s, \phi)| \right) = 0. \quad (2.78)$$

Queda pasar al límite en (2.76) con $\tau' = 0$ y un ϕ dado, y obtenemos

$$\begin{aligned} \int \phi g^h(\tau, x) dx - \int \phi g^h(0, x) dx &= \int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \phi'(x) dg_s^h(x) ds + \int_0^\tau R_s^h ds \\ &= \int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \phi'(x) dg_s^h(x) ds + O(h). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \phi'(x) dg_s^h(x) ds - \int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s)(x) \phi'(x) dg_s(x) ds \\ &= \left(\int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \phi'(x) dg_s^h(x) ds - \int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \phi'(x) dg_s(x) ds \right) \\ &\quad + \left(\int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \phi'(x) dg_s(x) ds - \int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s)(x) \phi'(x) dg_s(x) ds \right) \\ &=: A_h + B_h. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ la función $x_* \rightarrow \Psi_\sigma(x - x_*)$ tiene constante de Lipschitz menor que $\text{Lip}(\Psi_\sigma) < \infty$. Se sigue de (2.78) que, para todo s y x , tenemos

$(\Psi_\sigma * g_s^h)(x) \rightarrow (\Psi_\sigma * g_s)(x)$. Más aún, $|(\Psi_\sigma * g_s^h)(x)| \leq \|\Psi_\sigma\| \leq 1$ para todo x . Concluimos que $B_h \rightarrow 0$ por Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

También deducimos que $(\Psi_\sigma * g_s^h)\phi'$ tiene constante de Lipschitz acotada uniformemente en h . Por lo tanto, se deduce de (2.78) que $|(g_s^h - g_s, (\Psi_\sigma * g_s^h)\phi')| = 0$ uniformemente en s en $[0, \tau]$. Deducimos que $A_h \rightarrow 0$. Podemos así pasar al límite $h \rightarrow 0$ en (2.80) para obtener para cualquier $\tau > 0$ y cualquier ϕ que

$$\int \phi dg_\tau - \int \phi df_0 = \int_0^\tau \int (\Psi_\sigma * g_s)(x) \phi'(x) dg_s(x) ds,$$

lo que implica la formulación débil (2.66).

Por último, utilizamos como resultado conocido que las ecuaciones como (2.67) tienen solución única, de modo que toda la sucesión $(g^h)_h$ converge a la solución g y el teorema queda demostrado.

2.3.7.2. Prueba del teorema 2.3.3

En esta sección realizaremos una estimación de la tasa de convergencia de g_τ .

Seguimos suponiendo que $\mathbb{Y}$ es simétrica y a su vez suponemos que tiene una densidad $f_{\mathbb{Y}} \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f'_{\mathbb{Y}}$ está acotada y $F(x) > F(0)$ para $x > 0$.

Para demostrar el Teorema 2.3.3 necesitamos algunos resultados y notaciones auxiliares. Llamamos

$$\alpha_{R,\sigma} = \sup \left\{ \int_0^{+\infty} x \Psi_\sigma(x) g(x) dx : g \in \mathbb{P}(\mathbb{R}), \text{supp}(g) \subset [-R, R], \right. \\ \left. g \text{ simétrica, } \mathbb{E}[g] = 0, \text{Var}[g] = 1 \right\},$$

y

$$\alpha_{\infty,\sigma} = \sup \left\{ \int_0^{+\infty} x \Psi_\sigma(x) g(x) dx : g \in \mathbb{P}(\mathbb{R}), g \text{ simétrica, } \mathbb{E}[g] = 0, \text{Var}[g] = 1 \right\}.$$

Proposición 2.3.4. *Se cumple que $\alpha_{R,\sigma} < 0$ aumenta a medida que $R \uparrow +\infty$ hasta $\alpha_{\infty,\sigma} = 0$. Más aún,*

$$\left| \alpha_{R,\sigma} + \frac{1}{\sigma} f_{\mathbb{Y}}(0) \right| \leq \frac{R}{2\sigma^2} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty \quad (2.81)$$

si $R \geq 1$ y

$$\left| \alpha_{R,\sigma} + \frac{1}{\sigma} f_{\mathbb{Y}}(0) \right| \leq \frac{R^3}{2\sigma^2} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty \quad (2.82)$$

si $R < 1$.

Demostración. Como $\Psi_\sigma(x) \leq 0$ si $x \geq 0$ tenemos $\alpha_{R,\sigma}, \alpha_{\infty,\sigma} \leq 0$.

Consideramos la medida de probabilidad $g_n = \frac{1}{2n^2}(\delta_n + \delta_{-n}) + (1 - \frac{1}{2n^2})\delta_0$, $n \in \mathbb{N}$. Notamos que $\mathbb{E}[g_n] = 0$ y $Var[g_n] = \int x^2 g_n(x) dx = \frac{1}{2n^2}(n^2 + (-n)^2) = 1$. Entonces

$$0 \geq \alpha_{\infty, \sigma} \geq \int_0^{+\infty} x \Psi_\sigma(x) g_n(x) dx = n \Psi_\sigma(n) \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \Psi_\sigma(n)$$

que tiende a 0 cuando $n \rightarrow +\infty$.

Por el otro lado, dada $R > 0$, tomamos una sucesión minimizadora $(g_n)_n$ para $\alpha_{R, \sigma}$. Como $[-R, R]$ es compacto, una subsucesión de los g_n converge en $C([-R, R])'$ para algún g . Entonces $g \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ es admisible, ya que

$$\mathbb{E}[g] = \int x g(x) dx = \int_{-R}^R x g(x) dx = \lim_n \int_{-R}^R x g_n(x) dx = 0$$

y de la misma manera $Var[g] = \lim Var[g_n] = 1$. Entonces $\alpha_{R, \sigma} = \int_0^{+\infty} x \Psi_\sigma(x) g(x) dx$. Como $\Psi_\sigma(x) < 0$ si $x > 0$, tenemos $\alpha_{R, \sigma} = 0$ si y sólo si g tiene soporte en $(-\infty, 0]$. Por ejemplo, $g = \delta_0$ ya que $E[g] = 0$, pero esto contradice $Var[g] = 1$. Por lo tanto $\alpha_{R, \sigma} < 0$.

Para demostrar (2.81) simplemente escribimos para una función admisible g que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x \Psi_\sigma(x) g(x) dx &= \int_0^{+\infty} x \left(\Psi'_\sigma(0)x + \frac{1}{2} \Psi''_\sigma(\theta(x)x^2) \right) g(x) dx \\ &= -\frac{2}{\sigma} f_{\mathbb{Y}}(0) \int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Psi''_\sigma(\theta(x)x) x^3 g(x) dx \end{aligned}$$

donde $\theta(x) \in [0, 1]$. Notamos que

$$\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx = \frac{1}{2} Var[g] = \frac{1}{2}$$

como g es simétrica y $\mathbb{E}[g] = 0$. Más aún, como $\Psi''_\sigma(x) = -\frac{2}{\sigma^2} f'_{\mathbb{Y}}(x/\sigma)$ con $f'_{\mathbb{Y}}$ acotado, y el soporte de g es $[-R, R]$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \Psi''_\sigma(\theta(x)x) x^3 g(x) dx \right| \leq \frac{2}{\sigma^2} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty R \int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx = \frac{R}{\sigma^2} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty$$

si $R \geq 1$, lo que demuestra (2.81), y

$$\left| \int_0^{+\infty} \Psi''_\sigma(\theta(x)x) x^3 g(x) dx \right| \leq \frac{2}{\sigma^2} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty R^3 \int_0^{+\infty} g(x) dx = \frac{R^3}{\sigma^2} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty$$

si $R < 1$, lo que demuestra (2.82). $\square$

Observación 2.3.3. *Observemos que esta cota puede mejorarse para determinadas funciones de densidad. En el caso particular cuando $\mathbb{Y} \sim N(0, 1)$, obtenemos*

$$\left| \alpha_{R, \sigma} + \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{e^{-1/2} R}{2\sqrt{2\pi} \sigma^2} \mathbf{1}\{R \geq 1\} + \frac{e^{-R^2/2} R^3}{2\sqrt{2\pi} \sigma^2} \mathbf{1}\{R < 1\}. \quad (2.83)$$

como $f_{\mathbb{Y}}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ y $\|f'_{\mathbb{Y}}\|_{\infty} = |f'_{\mathbb{Y}}(\pm 1)| = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}$, y, para $R < 1$, el valor máximo de $|f'_{\mathbb{Y}}|$ en $[0, R]$ es alcanzado cuando $x = R$.

El valor de $\alpha_{R,\sigma}$ puede ser útil para estimar $J_{\sigma}(f)$:

Lemma 2.3.1. Para todo $R > 0$ y $\sigma > 0$, definimos

$$A_{R,\sigma} := \sup \{J_{\sigma}(f) : f \in \mathbb{P}(\mathbb{R}), \text{supp}(f) \subset [-R, R], \mathbb{E}[f] = 0, \text{Var}[f] = 1\}.$$

Entonces,

$$A_{R,\sigma} \leq \sqrt{2}\alpha_{\sqrt{2}R,\sigma/\sqrt{2}} = -\frac{2f_{\mathbb{Y}}(0)}{\sigma} + C(R,\sigma), \quad |C(R,\sigma)| \leq 2\|f'_{\mathbb{Y}}\|_{\infty} \frac{R}{\sigma^2}.$$

Observación 2.3.4. Cuando $\mathbb{Y} \sim N(0, \sigma^2)$ obtenemos

$$A_{R,\sigma} \leq -\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} + C(R,\sigma),$$

donde

$$|C(R,\sigma)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \left(Re^{-1/2} \mathbf{1}\{R \geq 1\} + e^{-R^2/2} R^3 \mathbf{1}\{R < 1\} \right).$$

Demostración. Sea $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ be admisible en la definición de $A_{R,\sigma}$. Podemos suponer por densidad que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, por (2.62),

$$\begin{aligned} J_{\sigma}(f) &= \int_{\{x,y \in \mathbb{R}: x-y > 0\}} (x-y)\Psi_{\sigma}(x-y)f(x)f(y) dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} u\Psi_{\sigma}(u) \int f(v)f(v-u) dv du \end{aligned}$$

donde hemos realizado el cambio de variables $u = x - y$, $v = x$.

Sea $\check{f}(x) := f(-x)$ y $\tilde{g} := f * \check{f}$. Entonces,

$$J_{\sigma}(f) = \int_0^{+\infty} u\Psi_{\sigma}(u)\tilde{g}(u) du. \quad (2.84)$$

Obsérvese que $\tilde{g} \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ es simétrica y tiene soporte en $[-2R, 2R]$ con $\mathbb{E}[\tilde{g}] = 0$ y $\text{Var}[\tilde{g}] = 2\text{Var}[f] = 2$. De hecho $\tilde{g}$ es la distribución de la variable aleatoria $X + Y$ donde X y Y son independientes y tienen distribución f y $\check{f}$ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} A &\leq \sup \left\{ \int_0^{+\infty} x\Psi_{\sigma}(x)\tilde{g}(x)dx : \tilde{g} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}), \right. \\ &\quad \left. \text{supp}(\tilde{g}) \subset [-2R, 2R], \tilde{g} \text{ simétrica}, \mathbb{E}[\tilde{g}] = 0, \text{Var}[\tilde{g}] = 2 \right\}. \end{aligned}$$

A continuación, consideremos $g(t) = \sqrt{2}\tilde{g}(\sqrt{2}t)$ es decir, g es la distribución de la variable aleatoria $\frac{1}{\sqrt{2}}X$ si X tiene distribución $\tilde{g}$. Entonces $g \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ es simétrica, con soporte en $[-R\sqrt{2}, R\sqrt{2}]$, $\mathbb{E}[g] = 0$ y $Var[g] = 1$. Dado que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x \Psi_\sigma(x) d\tilde{g}(x) &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} x \Psi_\sigma(\sqrt{2}x) g(x) dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} x \Psi_{\sigma/\sqrt{2}}(x) g(x) dx \end{aligned}$$

obtenemos el resultado y el lema queda demostrado. $\square$

Ahora sí, podemos demostrar el teorema 2.3.3:

Prueba del teorema 2.3.3. Para facilitar la notación escribimos la variable temporal t en lugar de τ . Denotemos por X_t la inversa generalizada de la función de distribución acumulativa de g_t . Entonces

$$\partial_t X_t(r) = (\Psi * g_t)(X_t(r)) \quad t > 0, r \in [0, 1].$$

De esta manera g_t tiene soporte en $[X_t(0^+), X_t(1^-)]$. Notamos que para todo t , el conjunto

$$\{y \in [X_t(0^+), X_t(1^-)] : y > X_t(0^+)\}$$

tiene medida positiva para g_t salvo $X_t(0^+) = X_t(1^-)$, es decir, salvo que g_t sea una Delta de Dirac.

Así,

$$X_t(0^+) = X_0(0^+) + \int_0^t \int_{[X_s(0^+), X_s(1^-)]} \Psi_\sigma(X_s(0^+) - y) g(s, y) ds dy$$

es estrictamente creciente mientras $Var[g_t] > 0$. De la misma manera $X_t(1^-)$ decrece estrictamente. Podemos entonces encontrar $R_t \searrow 0$ tal que g_t tenga soporte en $[-R_t, R_t]$.

Utilizando la relación de escala (2.63) y denotando por $\mathbb{Y}_t$ una variable aleatoria con distribución g_t , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Var[g_t] &= 2J_\sigma(\mathbb{Y}_t) \\ &= 2\sqrt{Var[g_t]} J_{\sigma/\sqrt{Var[g_t]}}\left(\frac{\mathbb{Y}_t}{\sqrt{Var[g_t]}}\right). \end{aligned}$$

Observemos que la variable $\frac{\mathbb{Y}_t}{\sqrt{Var[g_t]}}$ tiene varianza igual a 1 y tiene soporte en el intervalo $[-R_t/\sqrt{Var[g_t]}, R_t/\sqrt{Var[g_t]}]$. Entonces, el lema 2.3.1 nos da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Var[g_t] &\leq 2\sqrt{Var[g_t]} \left(-\frac{2f_{\mathbb{Y}}(0)}{\sigma} \sqrt{Var[g_t]} + 2\|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty \sqrt{Var[g_t]} \frac{R_t}{\sigma^2} \right) \\ &= \frac{4Var[g_t]}{\sigma} \left(-f_{\mathbb{Y}}(0) + \frac{R_t}{\sigma} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_\infty \right) \end{aligned}$$

Usando que $R_t \leq R_0$ obtenemos

$$Var[g_t] \leq Var[g_0] \exp \left\{ \frac{4t}{\sigma} \left(-f_{\mathbb{Y}}(0) + \frac{R_0}{\sigma} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_{\infty} \right) \right\}$$

Podemos obtener una mejor estimación a largo plazo. Fijemos $\varepsilon > 0$. Dado que $R_t \searrow 0$ podemos encontrar un tiempo $t_{\varepsilon} > 0$ tal que $\frac{4R_t}{\sigma^2} \|f'_{\mathbb{Y}}\|_{\infty} \leq \varepsilon$ for $t \geq t_{\varepsilon}$. Entonces para $t \geq t_{\varepsilon}$,

$$\frac{d}{dt} Var[g_t] \leq \left(-\frac{4f_{\mathbb{Y}}(0)}{\sigma} + \varepsilon \right) Var[g_t]$$

lo que nos da

$$\frac{d}{dt} Var[g_t] \leq C_{\varepsilon} \exp \left\{ \left(-\frac{4f_{\mathbb{Y}}(0)}{\sigma} + \varepsilon \right) t \right\} \quad t \geq t_{\varepsilon}.$$

De esta manera queda demostrado. $\square$

Si $f_{\mathbb{Y}} \in C^1$ es no creciente en $(0, +\infty)$, podemos demostrar un límite inferior para $Var[g_t]$ como se menciona en la observación 2.3.1. Observamos que $\Psi'' = -2f'$, y entonces

$$\int_0^{+\infty} \Psi''_{\sigma}(\theta(u)u) u^3 \tilde{g}(t, u) du \geq 0.$$

Llamamos $\check{g}_t(x) := g_t(-x)$ y $\tilde{g}_t := g_t * \check{g}_t$ como antes, y recordamos que $\tilde{g}_t \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ es simétrica con $\mathbb{E}[\tilde{g}_t] = 0$ y $Var[\tilde{g}_t] = 2Var[g_t]$.

Por lo tanto, juntando todo esto y recordando (2.84) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Var[g_t] &= 2J_{\sigma}(\mathbb{Y}_t) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} u \Psi_{\sigma}(u) \tilde{g}_t(u) du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} u \left(\Psi'_{\sigma}(0)u + \frac{1}{2} \Psi''_{\sigma}(\theta(u)u)u^2 \right) \tilde{g}_t(u) du \\ &= -\frac{4}{\sigma} f_{\mathbb{Y}}(0) \int_0^{+\infty} u^2 \tilde{g}_t(u) du + \int_0^{+\infty} \Psi''_{\sigma}(\theta(u)u) u^3 \tilde{g}_t(u) du \\ &\geq -\frac{4}{\sigma} f_{\mathbb{Y}}(0) \int_0^{+\infty} u^2 \tilde{g}_t(u) du \\ &= -\frac{4}{\sigma} f_{\mathbb{Y}}(0) Var[g_t]. \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $\int_0^{+\infty} u^2 d\tilde{g}_t(u) = \frac{1}{2} Var[\tilde{g}_t] = Var[g_t]$.

Así, la cota superior asintótica obtenida en el teorema 2.3.3 es óptima si $f_{\mathbb{Y}} \in C^1$ es no creciente en $(0, +\infty)$. En los ejemplos de la siguiente sección veremos que las simulaciones cuando $\mathbb{Y} \sim N(0, 1)$ se aproximan a este límite inferior.

Capítulo 3

Aproximaciones analíticas y reducción de la dimensionalidad

3.1. Introducción

En el capítulo anterior desarrollamos modelos que permiten obtener una ecuación maestra para explicar la dinámica de los estados de los agentes dentro de la aproximación de campo medio, a través de un método clásico en los modelos de opinión continua. Sin embargo para algunos modelos, esos métodos no permiten obtener la ecuación maestra de la dinámica u obtienen una ecuación que es compleja de resolver. En este capítulo examinaremos una serie de modelos en los que esto ocurre pero es posible realizar una aproximación particular y adaptada al modelo considerado.

En primer lugar analizamos un modelo donde las interacciones de los agentes dependen de la opinión que poseen. Debido a su complejidad, las ecuaciones pueden escribirse, pero no pueden resolverse analíticamente. Por lo tanto, en lugar de estudiar la dinámica del conjunto de agentes, nos centramos en los valores medios de sus opiniones. Para explicar esta dinámica, deducimos tres ecuaciones muy simples que, sin embargo, reconstruyen con precisión algunos elementos de la dinámica original.

En el segundo lugar presentamos una ecuación que explica la dinámica del modelo de Axelrod. En lugar de escribir la ecuación que rige los estados, utilizamos la dinámica de la similitud vectorial entre pares de agentes en el sistema.

Aunque no se obtienen ecuaciones exactas en estos casos, son útiles para comprender propiedades y fenómenos del sistema, como las transiciones de fase y los tiempos de convergencia. El análisis y los resultados presentados en esta sección fueron publicados en [161]

3.2. Modelo de tres estados con variable interna continua

En esta sección trabajaremos con un modelo propuesto en [152] en el que la opinión está dada por una variable de tres estados (a favor, en contra o indeciso acerca de un tema) que a su vez está definida por otra variable continua subyacente que definimos como la *propensión*. El comportamiento de los agentes dependerá de la opinión discreta que posean. En ese trabajo se muestra que el sistema presenta una amplia gama de soluciones, las cuales dependen de la fracción de individuos indecisos y del cambio en la propensión individual después de la interacción. Se derivan las ecuaciones maestras que gobiernan el proceso de la dinámica de formación de opiniones. Estas ecuaciones son un sistema no lineal acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden de tipo hiperbólico con tér-

minos no locales y son de especial interés debido a sus propiedades no triviales. Sin embargo, son muy difíciles de resolver ya sea numérica o analíticamente.

Mostramos que es posible obtener ecuaciones mesoscópicas para describir la dinámica del promedio de la propensión de los agentes con la misma opinión. Descubrimos que para un conjunto de parámetros, la dinámica ocurre en dos escalas temporales distintas. Existe una dinámica rápida donde cada grupo de agentes con la misma opinión, tiende a converger a un valor común de propensión. Además, hay una escala más lenta en la que el valor promedio de las propensiones cambia debido a las interacciones entre los agentes con distintas opiniones. Al derivar las ecuaciones para describir la dinámica del valor promedio de la propensión, se obtienen tres ecuaciones acopladas. Verificamos que a pesar de la simplicidad de las ecuaciones obtenidas, éstas proporcionan una excelente aproximación para el modelo.

3.2.1. Modelo

Consideramos N agentes que interactúan entre sí. El estado de cada agente está determinado por dos variables independientes: una *propensión* representada por una variable continua $x \in [-L, L]$, $L \in \mathbb{R}_{>0}$ y una *opinión* O , que puede ser positiva, negativa o neutral. Ambas variables están interrelacionadas por los *umbrales* $\pm C$ (ver la Fig. 3.1(a)). Si la propensión x de un agente está en el intervalo $[-C, C]$ el agente tendrá una opinión neutral $O = 0$. Si $x < -C$ tendrá una opinión negativa $O = -1$, y en caso contrario, si $x > C$, el agente tendrá una opinión positiva $O = 1$. Decimos que los agentes con la misma opinión pertenecen a la misma *comunidad*. Hay por lo tanto tres comunidades: $\{-1, 0, 1\}$.

La dinámica viene dada por interacciones de a pares. En cada paso de tiempo Δt , dos agentes son seleccionados al azar para interactuar, y las propensiones de ambos se modifican un pequeño Δ de manera que adquieren nuevas opiniones $\tilde{x}_i$ y $\tilde{x}_j$, siguiendo las reglas (ver Fig. 3.1 (b)):

- Si ambos agentes comparten la misma opinión, $O_i(t) = O_j(t)$, y $x_i(t) > x_j(t)$, entonces se aproximan entre sí. Es decir, los agentes con opiniones afines se influyen mutuamente de manera que sus propensiones se hacen más similares:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_j(t) - \Delta, \\ \tilde{x}_j &= x_i(t) + \Delta.\end{aligned}$$

- Si los agentes poseen opiniones distintas y extremas (sin pérdida de la generalidad podemos suponer $O_i(t) = +1$, y $O_j(t) = -1$) se rechazan, es decir se alejan uno de otro.

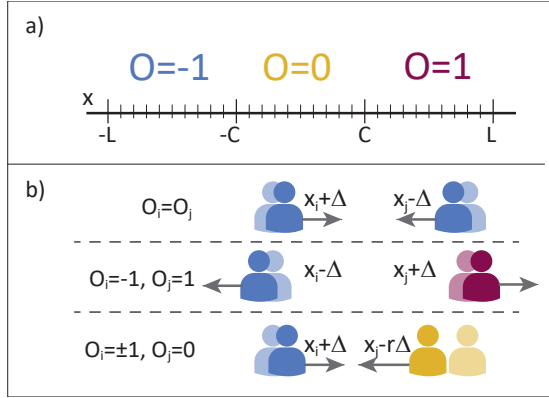


Figura 3.1: Panel (a): Se ilustra la relación entre los dos estados, el continuo y el discreto, de cada agente. Los agentes con propensión en los intervalos $[-L, -C]$, $[-C, C]$ y $[C, L]$ tienen una opinión de $O = -1$, $O = 0$ y $O = 1$, respectivamente. Panel (b): Reglas de interacción de pares. Los agentes con las mismas opiniones se acercan después de una interacción, mientras que los agentes con opiniones extremas y diferentes se distancian. Los agentes con opiniones neutrales, que participan en la interacción, se sienten atraídos pero de manera asimétrica.

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_j(t) + \Delta, \\ \tilde{x}_j &= x_i(t) - \Delta.\end{aligned}$$

- Si uno de los agentes tiene una opinión extrema y el otro una neutral, $O_i(t) = \pm 1$ y $O_j(t) = 0$, entonces la propensión de los agentes se modifica acercándose de manera asimétrica:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_j(t) \mp \Delta, \\ \tilde{x}_j &= x_i(t) \pm r\Delta,\end{aligned}$$

donde $r > 1$ explica la asimetría mencionada por lo que los agentes con opiniones neutra tienen un mayor cambio de propensión.

A su vez, si tras una interacción alguna de las propensiones de los agentes cruza el umbral C , las opiniones también cambiarán y se modificará el número de agentes en cada comunidad. Consideramos también una condición de borde, por la que los agentes no pueden cruzar el límite L y $-L$ y en caso de que la regla de interacción indique eso es ignorada.

Los estados macroscópicos del sistema pueden describirse en términos de la proporción de agentes en cada comunidad: $n_+(t)$, $n_-(t)$ y $n_0(t)$ (proporción de positivos, negativos o neutros respectivamente), donde todos los agentes pertenecen a una y solo una de estas comunidades por lo que $n_+(t) + n_-(t) + n_0(t) = 1$.

En el estado inicial, la proporción de agentes en cada comunidad es fijada en función de los parámetros n_0^i (la proporción inicial de agentes neutrales) y d (la diferencia entre las proporciones de comunidades positivas y negativas):

$$\begin{aligned} n_0(0) &= n_0^i, \\ n_+(0) &= (1 - n_0^i)/2 + d, \\ n_-(0) &= (1 - n_0^i)/2 - d. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Consideramos el estado de equilibrio a una distribución de estados en donde no hay ninguna interacción posible que produzca una nueva modificación. Los tres posibles estados finales serán:

- Estado bipolarizado. Hay dos comunidades extremas: $0 < n_+(t_f) < 1$ y $0 < n_-(t_f) < 1$, y no hay agentes neutrales, $n_0(t_f) = 0$.
- Consenso neutral. Solamente existe la comunidad neutral: $n_0(t_f) = 1$.
- Consenso extremo. Todos los agentes tienen opinión extrema, ya sea negativa o positiva. $n_+(t_f) = 1$ o $n_-(t_f) = 1$.

Una vez dada la descripción del sistema podemos examinar las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema. Como hemos detallado en la introducción 1.4 escribiremos la ecuación maestra en términos de la densidad de la propensión de los agentes $f(t, x) : [-L, L] \times [0, t_f] \rightarrow [0, 1]$. La función de densidad puede ser utilizada para calcular la fracción de agentes en cada comunidad mediante la relación:

$$\begin{aligned} n_-(t) &= \int_{-L}^{-C} f(t, x) dx, \\ n_0(t) &= \int_{-C}^C f(t, x) dx, \\ n_+(t) &= \int_C^L f(t, x) dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De la manera explicada anteriormente, es posible derivar la ecuación maestra de esta función (para detalles se puede ver [152]):

$$\frac{\Delta t N}{2\Delta} \frac{d}{dt} f(t, x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[f(t, x) \left(\int_{-L}^x f(t, y) dy - \int_x^{-C} f(t, y) dy \right) \right] \\ + \frac{d}{dx} f(t, x) (n_0(t) - n_+(t)) & \text{para } x \in [-L, -C], \\ \frac{d}{dx} \left[f(t, x) \left(\int_{-C}^x f(t, y) dy - \int_x^C f(t, y) dy \right) \right] \\ + \frac{d}{dx} f(t, x) (n_+(t) - n_-(t)) & \text{para } x \in [-C, C], \\ \frac{d}{dx} \left[f(t, x) \left(\int_C^x f(t, y) dy - \int_x^L f(t, y) dy \right) \right] \\ + r \frac{d}{dx} f(t, x) (n_-(t) - n_0(t)) & \text{para } x \in [C, L]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Para simplificar la ecuación, podemos establecer la escala de tiempo de la tasa de interacciones como $\Delta t N = 2\Delta$. Omitimos en este caso todas las condiciones de contorno.

Tratar con este tipo de ecuaciones es extremadamente difícil y en algunos casos es imposible obtener la solución exacta. Sin embargo, si observamos la dinámica de la propensión de los agentes, tal y como se muestra en la Fig. 3.2(a), podemos ver dos escalas de tiempo claras: una rápida, en la que los agentes con la misma opinión convergen a su propensión media, tal y como se describe en [151], y otra lenta, en la que los agentes con la misma opinión tienen aproximadamente la misma propensión y se modifican en conjunto.

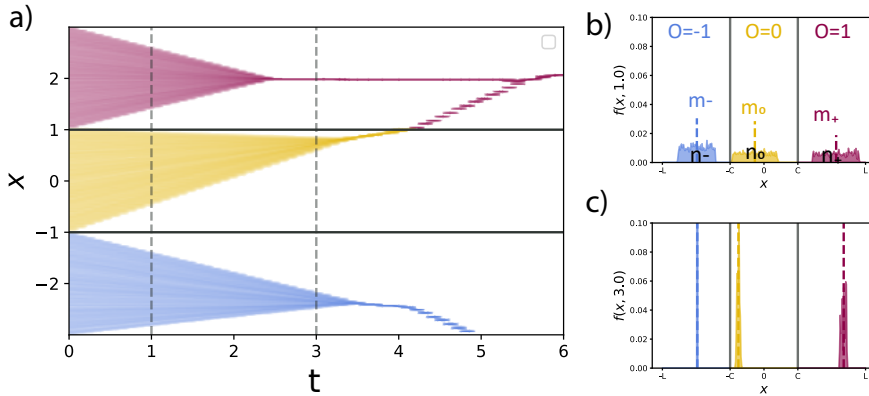


Figura 3.2: Panel (a): Se muestra la dinámica de la distribución de propensiones con $N = 10000$, $L = 3$, $C = 1$ y fracciones iniciales de agentes en cada comunidad $n_-(0) = 0,29$, $n_0(0) = 0,3$, $n_+(0) = 0,41$, uniformemente distribuidas en cada comunidad. Panel (b) y (c): Distribución de propensión de los agentes para la misma realización del sistema en dos momentos distintos, $t = 1$ (panel (b)) y $t = 3$ (panel (c)).

Este comportamiento es la pieza clave de nuestro enfoque dado que nos dice que la dinámica de todos los agentes puede aproximarse mediante la propen-

sión media de los agentes con la misma opinión, reduciendo drásticamente la dimensión del problema.

En este sentido tenemos que abordar dos preguntas:

1. ¿En qué condiciones la dinámica de todos los agentes con la misma opinión puede aproximarse por la de su propensión media?
2. ¿Es posible deducir ecuaciones dinámicas para la propensión media de agentes con la misma opinión partiendo de la Ec. (3.3)?

Para la primer pregunta, daremos aquí una explicación intuitiva de por qué es razonable estudiar solamente la dinámica del valor medio de la propensión de cada comunidad. En la sección 3.2.4 damos una demostración formal. Cuando un agente interactúa con otro, éste puede pertenecer a cualquiera de las otras tres comunidades, pero el efecto será distinto en cada caso: las propensiones de los agentes se acercarán entre sí si son de la misma comunidad y se acercarán o alejarán si son de una comunidad distinta, dependiendo cuál sea. Por ejemplo, si un agente con una opinión negativa interactúa con un agente neutral producirá que su propensión se acerque a la opinión neutral, mientras que si su interacción es con un agente de opinión positiva, reforzará su opinión, siendo su propensión aún más negativa. Supongamos por un momento que el número de agentes en cada comunidad es la misma. Considerando que los pares que interactúan son seleccionados de manera aleatoria podemos asumir que los efectos de atracción y rechazo producidos por las comunidades distintas se cancelan entre sí. Por lo tanto, el único efecto visible será el producido por las interacciones entre agentes de la misma comunidad que, por el resultado citado previamente, produce una concentración de dichos agentes. Si en cambio, los agentes originalmente están distribuidos de manera que la proporción de agentes de cada comunidad es similar pero no igual, intuitivamente podemos pensar que los efectos de la interacción entre agentes de distintas comunidades estarán mayormente equilibrados.

Para la segunda pregunta presentamos, en la siguiente sección, las ecuaciones maestras explícitas para la dinámica de la propensión media de los agentes con la misma opinión, partiendo de la Ec. (3.3).

3.2.2. Ecuaciones maestras de la propensión media

Definimos la propensión media de los agentes de cada comunidad a partir de la función de densidad como

$$\begin{aligned}
 m_{-}(t) &= \frac{1}{n_{-}(t)} \int_{-L}^{-C} x f(t, x) dx, \\
 m_0(t) &= \frac{1}{n_0(t)} \int_{-C}^C x f(t, x) dx, \\
 m_{+}(t) &= \frac{1}{n_{+}(t)} \int_C^L x f(t, x) dx.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces, una comunidad puede cambiar su propensión media mediante dos eventos:

- La propensión de un agente cambia, pero su opinión se mantiene.
- La opinión de un agente cambia y por lo tanto un agente pasa de una comunidad a otra. En este caso cambia la propensión media de ambas comunidades.

En general, el primer tipo de cambio domina la dinámica, como se puede observar en la Fig. 3.2(a). La excepción ocurre en un periodo limitado de tiempo cuando la propensión de todos los agentes de una comunidad cruza el umbral C y cambian su opinión todos juntos. En ese momento una de las comunidades desaparece y es absorbida por otra.

La dinámica para la propensión media de agentes con las mismas opiniones puede deducirse de la Ec. (3.3) mediante el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *La propensión media de los agentes con la misma opinión está gobernada por las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned}\frac{dm_+(t)}{dt} &= n_-(t) - n_0(t), \\ \frac{dm_-(t)}{dt} &= n_0(t) - n_+(t), \\ \frac{dm_0(t)}{dt} &= r(n_+(t) - n_-(t)).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Demostración. Mostramos la demostración sólo para una de las comunidades ya que el resto se demuestra de manera similar.

A tal efecto, calculemos

$$\frac{dm_+(t)}{dt} = \frac{1}{n_+(t)} \frac{d}{dt} \int_C^L x f(t, x) dx.\tag{3.6}$$

Como hemos señalado anteriormente, si los agentes de cada comunidad tienen una propensión suficientemente concentrada y alejada del umbral C , podemos suponer que la fracción de agentes en cada comunidad (en este caso $n_+(t)$) permanece constante. En otras palabras, las propensiones medias sólo se modifican por los cambios de propensión de los agentes dentro de la comunidad y no por los cambios de opinión.

Desarrollemos entonces el lado derecho de la ecuación utilizando la ecuación 3.3:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_C^L x f(t, x) dx &= \int_C^L x \frac{d}{dt} f(t, x) dx \\ &= \int_C^L x \frac{d}{dx} \left[f(t, x) \left(\int_C^x f(t, y) dy - \int_x^L f(t, y) dy \right) \right. \\ &\quad \left. + f(t, x)(n_0(t) - n_-(t)) \right] dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes y asumiendo que la densidad está concentrada lejos de los umbrales, y que por lo tanto, $f(L, t) = f(C, t) = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_C^L x f(t, x) dx &= - \int_C^L \left[f(t, x) \left(\int_C^x f(t, y) dy - \int_x^L f(t, y) dy \right) \right. \\ &\quad \left. + f(t, x) (n_0(t) - n_-(t)) \right] dx \\ &= - \int_C^L \left[f(t, x) \left(\int_C^x f(t, y) dy - \int_x^L f(t, y) dy \right) \right] dx \\ &\quad + n_+(t) (n_0(t) - n_-(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_+(t) &= \frac{1}{n_+} \left(- \int_C^L \left[f(t, x) \left(\int_C^x f(t, y) dy - \int_x^L f(t, y) dy \right) \right] dx + \right. \\ &\quad \left. n_+(t) (n_0(t) - n_-(t)) \right). \end{aligned}$$

Demostremos ahora que la primera integral del lado derecho es igual a cero. Para ello, llamemos

$$F(t, x) = \int_C^x f(t, y) dy,$$

y observamos que $\frac{d}{dx} F(t, x) = f(t, x)$, y $\int_x^L f(t, y) dy = n_+(t) - F(t, x)$. Reescribimos y resolvemos la integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_C^L f(t, x) (2F(t, x) - n_+(t)) dx &= \frac{1}{4} \int_C^L \frac{d}{dx} (2F(t, x) - n_+(t))^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \left(2F(t, x) - n_+(t) \right)^2 \Big|_L^C \\ &= \frac{1}{4} \left(2F(t, L) - n_+(t) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(2F(t, C) - n_+(t) \right)^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $F(t, L) = n_+(t)$ y $F(t, C) = 0$.

Por lo tanto,

$$\frac{dm_+(t)}{dt} = - \frac{1}{n_+} (n_+(t) (n_0(t) - n_-(t))) = n_-(t) - n_0(t)$$

y el teorema queda demostrado. $\square$

Notamos que la Ec. (3.5) no es una expresión cerrada, ya que la fracción de agentes en cada comunidad $n_j(t)$ para $j \in \{+, -, 0\}$ depende del tiempo. Sin embargo, si podemos suponer que permanecen invariables (mientras los agentes no modifiquen sus opiniones), podemos tomar $n_j(t) = n_j(0) = n_j$ para los

tiempos anteriores a que se produzca el primer cambio de opinión y de esta manera las solución de esas ecuaciones se vuelven lineales:

$$\begin{aligned} m_+(t) &= m_+(0) + (n_0 - n_-)t, \\ m_-(t) &= m_-(0) + (n_+ - n_0)t, \\ m_0(t) &= m_0(0) + r(n_- - n_+)t. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La dinámica de la propensión media en cada comunidad se mantiene muy simple siempre y cuando los agentes que tienen la misma opinión la cambien todos simultáneamente. Por supuesto, esto puede servir como una buena aproximación si inicialmente todos los agentes con la misma opinión tienen también las mismas propensiones. Pero, ¿qué tan buena es esta aproximación cuando las propensiones iniciales se distribuyen uniformemente en los tres intervalos? En la sección 3.2.4 se demuestra que sigue siendo muy buena siempre y cuando los agentes con la misma opinión converjan a su propensión media antes de cruzar el umbral y cambiar de opinión.

Así, los momentos relevantes son aquellos en los que la propensión media de cada comunidad alcanza los umbral, C y $-C$ y se producen cambios en las opiniones.

Sean t_+ y t_- los tiempos en los que las propensiones medias de las comunidades extremas tardan en llegar al umbral que las separa de la comunidad neutral, y t_0^+ y t_0^- los tiempos en los la propensión media de la comunidad neutral tarda en llegar ya sea al umbral positivo o negativo respectivamente. Como asumimos que las propensiones de cada comunidad se modifican de manera concentrada en ese tiempo todos los agentes cambiarán su opinión en conjunto.

$$\begin{aligned} t_+ &= \frac{C - m_+(0)}{n_0 - n_-}, \\ t_- &= \frac{-C - m_-(0)}{n_+ - n_0}, \\ t_0^+ &= \frac{C - m_0(0)}{r(n_- - n_+)}, \\ t_0^- &= \frac{-C - m_0(0)}{r(n_- - n_+)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Debemos tener en cuenta aquí que las únicas soluciones relevantes corresponden a tiempos positivos. Si alguna de las comunidades cambia de opinión, las ecuaciones dinámicas cambiarán a partir de ese momento.

Sea $T_1 = \min\{t_+, t_-, t_0^+, t_0^-\}$ el tiempo en el que se produce el primer cambio de opinión. Las Ecs. 3.7 serán válidas hasta el momento T_1 . En ese momento, todos los agentes de la comunidad que alcanza el umbral cambian su opinión y pasan a ser de otra comunidad. Todos los posibles resultados están esbozados en la Fig. 3.3.

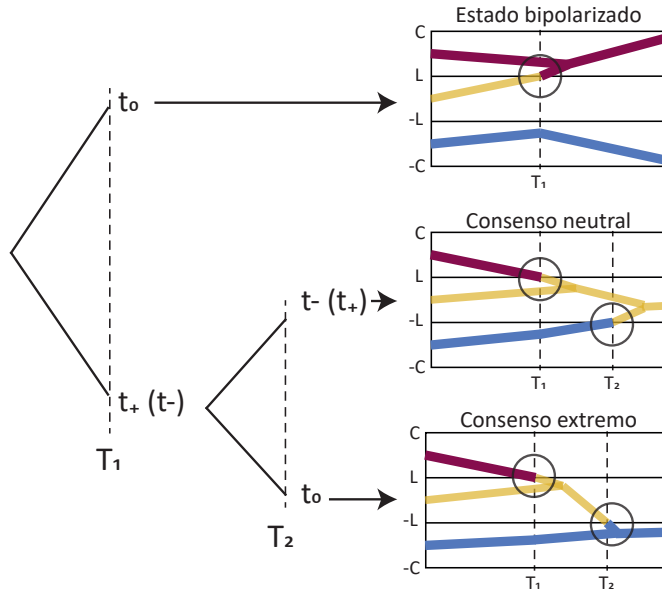


Figura 3.3: Esquema que muestra las posibles dinámicas del modelo. Si $T_1 = t_0$, la primera comunidad en alcanzar un umbral es la neutral. Por lo tanto, el estado final está bipolarizado. Si $T_1 = t_+$ (equivalente a $T_1 = t_-$), una comunidad extrema cambia a la neutral. Luego, las dos comunidades restantes continúan atrayéndose y se llega a un consenso. Este consenso podría ser neutral o extremo dependiendo de T_2 .

La Fig. 3.3 muestra que las ecuaciones simplificadas basadas en la dinámica de la propensión media (Ecs. 3.7) producen también los tres posibles estados finales presentados en el modelo original [152]: Bipolarización, consenso neutral y consenso extremo. En particular, este último caso (el consenso extremo) solo aparece cuando el factor de asimetría en las interacciones entre agentes neutrales y extremos (r) es muy grande y las condiciones iniciales están muy sesgadas hacia los estados extremos. Por lo tanto no tomamos en cuenta estos estados en este trabajo.

Para d y r fijos, existe una transición en n_0 entre los estados bipolarizado y de consenso neutral. Podemos calcular n_0^c , el valor crítico, cuando $t_+ = t_0^+$ como:

$$n_0^c = \frac{2}{3}(2r - 1)d + \frac{1}{3}. \quad (3.9)$$

Para valores bajos de n_0 , $T_1 = t_0^+$ y el estado final será bipolar. Para valores más altos, $T_1 = t_+$ y todos los agentes pertenecerán a la comunidad neutral.

3.2.3. Resultados

En esta sección comparamos las predicciones analíticas de nuestro modelo simplificado con simulaciones numéricas. Consideramos $L = 3$ y el umbral $C = 1$ para determinar las comunidades. Las fracciones iniciales de cada comunidad son establecidas en función de la Ec. (3.1) y la distribución de propensiones para cada comunidad en la condición inicial es distribuida uniformemente en los intervalos $[-3, -1]$, $[-1, 1]$ y $[1, 3]$ respectivamente. Fijamos el parámetro $r = 2$, que tiene en cuenta la actualización asimétrica de las propensiones.

En la Fig. 3.4(a), calculamos la fracción final de agentes en cada comunidad en función de la proporción inicial de agentes neutrales, n_0^i para $d = 0,06$. Observamos la transición esperada entre el estado bipolarizado y el consenso neutral en el valor n_0^i , predicho por la Ec. (3.9). Los símbolos corresponden a simulaciones del modelo original, con $N = 10000$ agentes y las líneas representan la solución analítica del modelo simplificado. Podemos constatar la plena coincidencia entre las simulaciones y las curvas analíticas. En particular, el modelo simplificado permite una interpretación sencilla de la dependencia de $n_{+/-}(t_f)$ con n_0^i , aprovechando que todos los agentes cambian de opinión al mismo tiempo.

El estado bipolarizado se produce porque todos los agentes neutrales cambian su opinión por la opinión extrema dominante (n_+ según la Ec. (3.1)) y por tanto: $n_+(t_f) = n_0(0) + n_+(0) = \frac{1+n_0^i}{2} + d$ y $n_-(t_f) = n_-(0) = \frac{1-n_0^i}{2} - d$.

También observamos la evolución temporal de la proporción de agentes para las comunidades, partiendo de dos condiciones iniciales diferentes que corresponden a ambos lados de la transición. Para $n_0^i = 0,3$ (ver Fig. 3.4(b)), observamos un ejemplo en el que una de las comunidades cambia su opinión en $T_1 = t_0 \approx 4,17$ alcanzando un estado final bipolarizado. Para $n_0^i = 0,47$ (ver Fig. 3.4(c)), hay dos comunidades que cambian su opinión, la primera en el tiempo $T_1 = t_+ \approx 3,77$, y la segunda en $T_2 = \hat{t}_- \approx 4,34$, alcanzando un consenso neutral.

Además, exploramos la transición entre un estado bipolarizado y un consenso neutral variando ambos parámetros: d y n_0^i , como se muestra en la Fig. 3.5(a). Podemos observar una coincidencia perfecta entre las simulaciones numéricas y las predicciones analíticas de nuestro modelo simplificado, dado por la Ec. (3.9) (línea negra).

Debe tenerse en cuenta que nuestro modelo simplificado predice no sólo el estado final, sino también la dinámica media de las poblaciones. En la Fig. 3.5(b, c), mostramos la predicción analítica (línea negra) y las simulaciones para la distribución de propensiones del agente (colores), para dos condiciones iniciales particulares: para $d = 0,04$ y $n_0^i = 0,47$ se alcanza un estado bipolarizado (panel (b)), para $d = 0,08$ y $n_0^i = 0,35$ el estado final es un consenso neutral.

3.2.4. Condiciones de validez del modelo simplificado

Una hipótesis importante para la aproximación que hemos considerado es que las comunidades se concentran rápidamente en comparación con el movi-

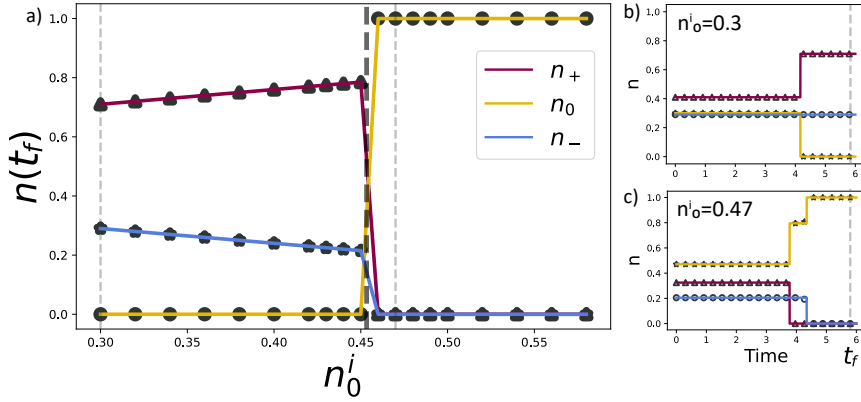


Figura 3.4: Simulaciones (símbolos) y predicciones analíticas (líneas) para las comunidades positivas (violeta), neutrales (amarillo) y negativas (azul) de agentes en cada comunidad. Los parámetros utilizados son: $L = 3$, $C = 1$, $r = 2$, $N = 10000$ agentes, $d = 0,06$. El panel (a) muestra la proporción de agentes en el estado final. Los paneles (b) y (c) muestran la evolución temporal para $n_0^i = 0,3$ (b) y $n_0^i = 0,47$ (c).

miento del promedio de propensión. Por lo tanto, podemos suponer que toda la comunidad se concentra cerca del promedio de propensión y los agentes cambian de opinión todos juntos al mismo tiempo.

En esta sección presentamos las condiciones necesarias para cumplir esta hipótesis. Consideramos los resultados de [151] donde se analiza un modelo similar con una sola comunidad. Para una sola comunidad y una distribución inicial de opiniones constante, muestran que la solución explota cuando t llega a 1. Utilizamos este resultado para la densidad en la Ec. (3.3). Considerando que las únicas interacciones que tienden a concentrar una comunidad son las intracomunitarias, los agentes se concentran en diferentes tiempos para cada comunidad. Este tiempo será $\tilde{t}_i = \frac{1}{n_i}$ para $i \in \{-, +, 0\}$. A partir de ese momento, las comunidades se concentran cerca del centro de masa y se mueven juntas. Para que se cumpla la suposición hecha en la sección anterior, necesitamos que el tiempo de convergencia de cada comunidad ocurra antes del cambio de opinión. Por lo tanto, cuando el centro de masa alcanza el umbral, la comunidad está concentrada. Entonces, $\tilde{t}_i$ debe ser menor que su tiempo respectivo de cambio de opinión t_i dado en la Ec. (3.8). Por ejemplo, para $i = +$ tenemos:

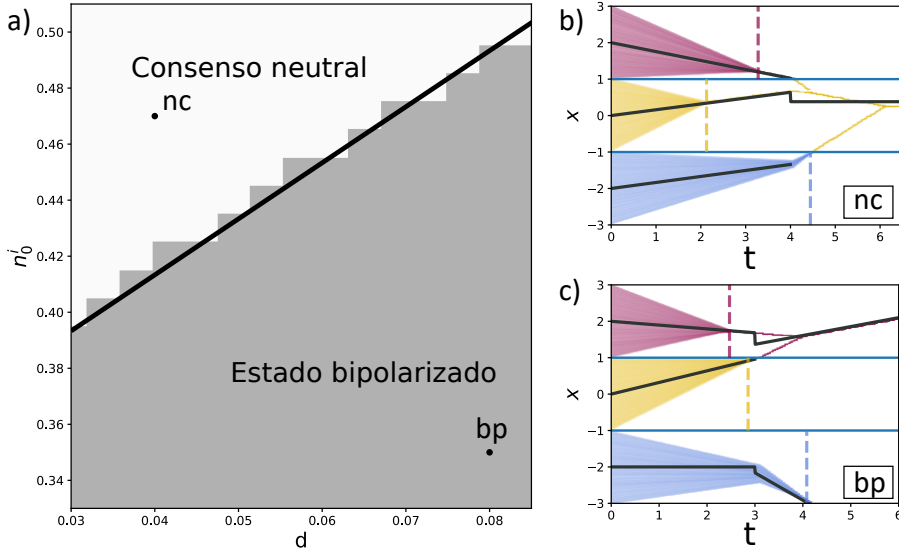


Figura 3.5: Estado final y dinámica temporal. Los parámetros están establecidos en $L = 3$, $C = 1$, $r = 2$ y $N = 10000$. La propensión inicial de los agentes está distribuida uniformemente para cada opinión. El panel (a) muestra la transición entre estados finales de consenso y bipolares en función de d y n_0^i . La predicción teórica para la transición (línea negra) muestra un acuerdo perfecto con las simulaciones. Los paneles (b) y (c) muestran ejemplos de la dinámica temporal para dos condiciones iniciales particulares: una dinámica bipolarizada ($d = 0,04$ y $n_0^i = 0,47$), y una dinámica de consenso ($d = 0,08$ y $n_0^i = 0,35$), las predicciones teóricas están en negro.

$$\begin{aligned}
 t_+ &> \tilde{t}_+ \\
 \frac{C - m_+(0)}{n_-(0) - n_0(0)} &> \frac{1}{n_+(0)}, \\
 \frac{1}{n_-(0) - n_0(0)} &> \frac{1}{n_+(0)}, \\
 n_+(0) &> n_-(0) - n_0(0),
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $C - m_+(0) = 1$ para la distribución inicial de opinión uniforme y asumimos $C = 2$ y $L = 3$. De manera equivalente, para las otras comunidades, obtenemos

$$\begin{aligned}
n_+(0) &> n_-(0) - n_0(0), \\
n_-(0) &> n_0(0) - n_+(0), \\
n_0(0) &> r(n_+(0) - n_-(0)).
\end{aligned}$$

Si reemplazamos estas condiciones con los parámetros libres iniciales en 3.1, obtenemos que la condición que debe cumplirse para que se cumplan las hipótesis de los resultados anteriores es la siguiente.

$$2rd < n_0^i < \frac{1}{2}, \quad (3.10)$$

Por ejemplo, en los ejemplos mostrados en la Fig. 3.5(b, c) la condición 3.10 se cumple. Por lo tanto el tiempo de concentración de cada comunidad $\tilde{t}$ (líneas verticales discontinuas) es menor que el tiempo que tarda una comunidad en cambiar de opinión t_i . Observamos que cuando las comunidades alcanzan un umbral, las propensiones de todos los agentes ya se han concentrado en su media, y los agentes cambian de opinión simultáneamente al mismo tiempo. También en este caso, la predicción analítica concuerda perfectamente con las simulaciones.

Por último, analizamos qué ocurre cuando no se cumple la condición proporcionada por la Ec. (3.10) y por tanto, la propensión media de una de las comunidades alcanza un umbral antes de que se hayan concentrado todas las propensiones. En la Fig. 3.6(a), representamos simulaciones numéricas para condiciones iniciales dadas por $d = 0,04$ y $n_0^i = 0,52$. Podemos observar que algunos agentes neutrales adquieren opiniones positivas antes de que la mayoría de la comunidad cambie de opinión, lo que evidencia las deficiencias del modelo simplificado para explicar adecuadamente la dinámica de la propensión media de cada comunidad. En el panel (b), se muestra el resultado de simulaciones para las condiciones iniciales dadas por $d = 0,08$ y $n_0^i = 0,3$. Aquí vemos cómo algunos agentes con opiniones extremas cambian a neutral antes del primer cambio de opinión de la propensión media. Sin embargo, dado que el número de agentes que siguen este comportamiento es pequeño, la aproximación propuesta sigue siendo razonable y nos permite predecir el estado final.

Al abordar la evolución del sistema utilizando la propensión media de los agentes con la misma opinión, desarrollamos un conjunto de ecuaciones extremadamente básicas que, sin embargo, nos permiten predecir el estado final y la dinámica temporal para cualquier valor inicial que siga las restricciones dadas por la Ec. (3.10). Además, incluso para valores de los parámetros fuera de la restricción, comprobamos la utilidad de esta afirmación.

3.3. Solución analítica para el modelo de Axelrod

3.3.1. Modelo de Axelrod

En esta sección desarrollaremos una formulación analítica para el modelo de Axelrod [93, 94]. En este trabajo Robert Axelrod realiza la siguiente pregunta

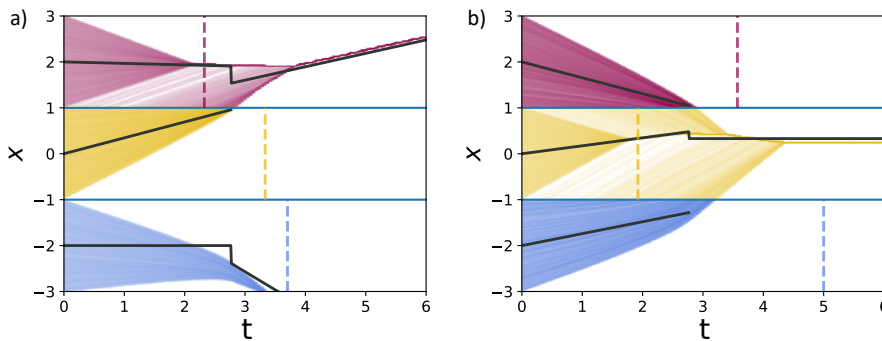


Figura 3.6: Ejemplos de la dinámica temporal para condiciones iniciales que no cumplen la condición de convergencia dada por la Ec. (3.10): $d = 0,04$ y $n_0^i = 0,52$ (panel a), y $d = 0,08$ y $n_0^i = 0,3$ (panel b). Los parámetros se establecen en $L = 3$, $C = 1$, $r = 2$, $N = 10000$ y la propensión inicial de los agentes para cada opinión está uniformemente distribuida. Aunque algunos agentes cambian de opinión antes de que la propensión promedio alcance el umbral, la aproximación sigue siendo muy buena.

y propone un modelo para tratar de contestarla:

Si las personas tienden a volverse más similares en sus creencias, actitudes y comportamiento cuando interactúan, ¿por qué no desaparecen finalmente todas estas diferencias? [...] El mecanismo propuesto aquí trata sobre cómo las personas realmente se vuelven más similares a medida que interactúan, pero también proporciona una explicación de por qué la tendencia a converger se detiene antes de alcanzar la completitud. Por lo tanto, proporciona un nuevo tipo de explicación de por qué no todos nos volvemos similares. [...]

Matemáticamente el modelo puede describirse de la siguiente forma. Se considera un conjunto de N agentes situados en los nodos de una red que indicará qué pares están conectados entre sí. Cada individuo está descrito por F rasgos culturales (que pueden representar por ejemplo su religión, gustos musicales, equipo de fútbol y cualquier otra característica que pueda ser modificada mediante la influencia social). A su vez cada rasgo puede tomar Q posibles valores diferentes. De esta manera el estado de un individuo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ es representado por un vector cultural $v_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{iF})$ donde cada valor ω_{if} puede tomar los valores $\{1, 2, \dots, Q\}$. La dinámica temporal será la siguiente:

- Se selecciona al azar un agente y uno de sus vecinos.
- Se calcula la similaridad cultural (la cantidad de rasgos compartidos) $s_{ij} = \sum_{f=1}^F \sigma_{\omega_{if}=\omega_{jf}}$. Diremos que la arista (i, j) es activa si $0 < s_{ij} < F$.

- Si la arista es activa, con probabilidad s_{ij}/F ambos agentes interactuarán. En ese caso el agente i copiará un rasgo al azar entre los que sean distintos con respecto al agente j .

El sistema evoluciona de esta manera hasta que no hay más aristas activas, es decir cuando todos los agentes conectados o bien no comparten ningún atributo, o bien comparten todos. Esto puede ocurrir en un estado homogéneo o monocultural, en el que todos los agentes comparten el mismo estado, o un estado inhomogéneo o multicultural en el que dos o más componentes de nodos conectados entre sí con el mismo estado cultural están conectadas con todas las otras componentes por aristas de similaridad 0. El parámetro de orden con que suele estudiarse para medir la diversidad del estados en el estado de equilibrio es el tamaño relativo de la componente de mayor tamaño S_{max}/N .

El modelo de Axelrod original es planteado en una red cuadrada. En este caso se observa una transición entre un estado monocultural (donde el parámetro de orden es cercano a 1) a un estado multicultural con un parámetro de orden cercano a 0 [55]. Si se considera F fijo el sistema alcanza estados monoculturales para valores de $Q < Q_c$ y estados multiculturales para valores de $Q > Q_c$. Resultados similares se han encontrado cuando se considera el modelo en otras redes [103, 162] donde también se ha encontrado un factor de escala entre F y Q que hace colapsar las curvas.

3.3.2. Formulación analítica

En esta sección realizamos una formulación analítica del modelo de Axelrod en términos de la similaridad vectorial. Esto es, estudiaremos las dinámicas de las aristas, considerando cuántos y cuáles rasgos son compartidos por cada par de nodos conectados. Si bien el modelo de Axelrod suele estudiarse mediante simulaciones numéricas, se han desarrollado diferentes aproximaciones analíticas [55, 99, 163, 164]. Para lograr esto se realiza un análisis de campo medio de la similaridad de los enlaces. Sea $P_m(t)$ la probabilidad de que, al tomar una arista al azar, una dos agentes que compartan m rasgos. El conjunto de valores de P_m con $m \in \{0, 1, \dots, F\}$ nos indicará la distribución de la similaridad de las aristas en un momento dado. Podemos escribir las ecuaciones que rigen la dinámica de estas magnitudes escribiendo las ecuaciones maestras y calculando las probabilidades de transición. Estos valores pueden ser utilizados como parámetros de orden. Todas las aristas son activas, excepto aquellas con similaridad 0 y F . Por lo tanto en el estado estacionario, solo P_0 y P_F serán positivos, mientras que todos los otros valores serán 0. Cuando el sistema está en un estado monocultural, todos los agentes tendrán el mismo estado, por lo que $P_F = 1$. Por otro lado, cuando estamos en un estado multicultural, habrá algunas componentes cuyas aristas conectadas entre sí tendrán similaridad F , mientras que las aristas que conecten distintas componentes tendrán similaridad 0. Cuanto más fragmentado esté el sistema mayor será la proporción de aristas de similaridad 0, P_0 .

En nuestro caso nos enfocaremos en distinguir no solo cuántos rasgos culturales comparten dos nodos, sino cuáles son. Esto dará lugar a una representación

vectorial de la similaridad donde por ejemplo, para $F = 2$, P_1 será separado en dos poblaciones: $P_{(1,0)}$ indicará la proporción de agentes que comparten el primer rasgo y no el segundo, y $P_{(0,1)}$ representará la proporción de agentes que solamente comparten el segundo rasgo.

Esta forma de representar la dinámica presenta algunas ventajas. Por un lado, comprobamos que el parámetro Q solo influye en la determinación de las condiciones iniciales. Una vez fijadas éstas, las ecuaciones que representan la dinámica del sistema son independientes de este parámetro. Esto nos permite desacoplar el rol de Q y del resto de los parámetros. Por otro lado, para calcular las probabilidades de transición es necesario realizar una aproximación de campo medio. Este método nos permite una aproximación más precisa que desarrollos analíticos anteriores, basados en el estado del sistema y en la distribución de coincidencias en cada rasgo en lugar de una aproximación general del total de rasgos compartidos. De esta manera el método nos permite una aproximación analítica no solo del estado estacionario del sistema y la transición, sino también de la dinámica temporal, que resulta exacta para $F = 2$ y aproximada para $F = 3$. El análisis y los resultados de esta sección fueron publicados en [165].

3.3.3. Vectores de similaridad

El primer paso de este enfoque consiste en reescribir la dinámica del modelo de Axelrod en términos de vectores de similaridad. Dados dos agentes que llamaremos a y b , el vector de similaridad correspondiente al enlace entre ellos es un vector binario de dimensión F , $v^{(a,b)}$, donde una coordenada dada toma el valor 1 si ambos agentes comparten el valor de dicho atributo y 0 en otro caso. Estos vectores no son completamente independientes entre sí: si un atributo i es compartido entre los agentes a y b (y por lo tanto $v_i^{(a,b)} = 1$), entonces, sea c cualquiera de los $N - 2$ agentes restantes, el valor correspondiente en esa coordenada del vector de similaridad definido entre los agentes a y c y el de los agentes b y c debe ser el mismo ($v_i^{(a,c)} = v_i^{(b,c)}$).

El panel (a) de la Fig. 3.7 muestra un ejemplo de cómo es posible pasar del modelo definido en términos de los estados culturales de los agentes a una explicación en términos de la similaridad vectorial asociada a todos los pares de agentes. Esta formulación implica describir un sistema de N agentes en términos de $\frac{N(N-1)}{2}$ vectores de similaridad (formados por todas las posibles parejas).

En términos de los vectores de similaridad, una actualización de un estado de un agente será equivalente a modificar de manera aleatoria una coordenada de uno de los vectores asociados a un enlace, con probabilidad dada por el mecanismo de homofilia. Luego, deben modificarse también todos los vectores de similaridad implicados en este cambio, de manera que cumplan la condición explicada arriba. En el panel (b) de la Fig. 3.7 se muestra un ejemplo de los efectos que produce cambiar el valor de una de las coordenadas de un vector de similaridad.

Por lo tanto, las reglas que explican la dinámica de Axelrod en términos de similaridad pueden ser resumidas de la siguiente manera:

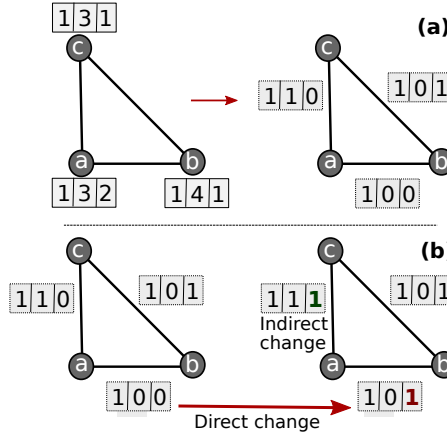


Figura 3.7: Modelo de Axelrod descrito en términos de sus vectores de similitud. El panel (a) muestra los estados culturales para tres agentes, tres atributos $F = 3$ y cuatro posibles valores por atributo $Q = 4$ (figura izquierda) y la descripción correspondiente en términos de similitud vectorial asociada a cada par de agentes (figura derecha). El panel (b) muestra un ejemplo del comportamiento dinámico en términos de la similitud vectorial. Si el agente a copia un atributo cultural del agente b , entonces la coordenada correspondiente del vector de similitud del enlace que los une cambia de 0 a 1 (cambio directo). Como el vector de similitud entre b y c no cambia, el vector de similitud entre a y c debe modificarse y adoptar el mismo valor que la componente correspondiente del vector entre b y c para cumplir las condiciones explicadas en el texto principal (cambios indirectos).

- **Cambios directos:** Se elige al azar un agente a y uno de sus vecinos b , quedando definido así un vector de similitud $v^{(a,b)}$. Debido al mecanismo de homofilia, la probabilidad de que estos agentes interactúen será equivalente a su similitud, es decir $\frac{1}{F} \sum_j v_j^{(a,b)}$. En caso de interactuar el agente a copia al azar alguno de los atributos culturales del agente b que previamente no tengan en común. Eso es equivalente, en términos de similitud vectorial, a que la coordenada respectiva del vector ($v_i^{(a,b)}$) cambie de 0 a 1.
- **Cambios indirectos:** Como el vector $v^{(a,b)}$ cambia debido a un cambio en un atributo cultural del agente a , entonces para $c \neq a, b$ ($(N-2)$ enlaces), el valor de la coordenada correspondiente de $v_i^{(a,c)}$ puede modificarse, para coincidir con la de $v_i^{(b,c)}$.

Como puede observarse en la primera regla, no pueden ocurrir cambios directos si los agentes no comporten ningún atributo ($\sum_j v_j^{(a,b)} = 0$) o si su cultura

es la misma ($\sum_j v_j^{(a,b)} = F$).

Elegimos una escala temporal de manera que en cada paso temporal se elijan para interactuar una cantidad de pares de agentes igual a la cantidad total de enlaces, es decir $M = \frac{N\langle k \rangle}{2}$ donde $\langle k \rangle$ es el grado medio de la red. Para una red completa $\langle k \rangle = (N - 1)$. La dinámica en términos de la similitud vectorial es equivalente a la dinámica clásica en términos de los estados culturales. Para ilustrar esta afirmación en la Fig. 3.8, se ve el tamaño relativo del fragmento de mayor tamaño en el estado final S_{max}/N en ambas representaciones para simulaciones con distintas cantidades de agentes. En la figura vemos que no hay diferencias significativas entre ambas representaciones.

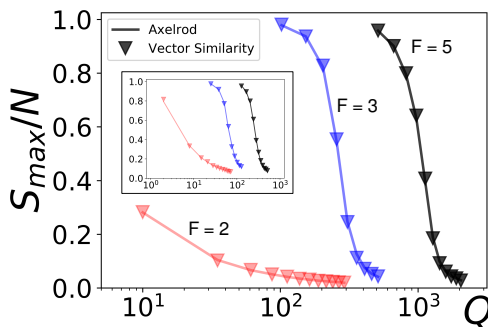


Figura 3.8: Equivalencia de la descripción de similitud vectorial y la similitud clásica. Ilustramos el mismo modelo descrito tanto por vectores culturales (líneas completas) como por vectores de similitud (triángulos) en una red completa para $N = 1024$ agentes y diferentes valores de F . El recuadro muestra los mismos resultados para $N = 256$. Esta figura muestra que ambas representaciones son equivalentes.

El estado inicial de los estados culturales de los agentes juega un rol importante para determinar el estado final. Si asignamos el estado inicial de manera aleatoria, cada atributo cultural de cada agente recibe uno de los Q posibles valores, con igual probabilidad. Un estado cultural inicial define un estado inicial de vectores de similitud entre cada par de agentes, siguiendo las reglas mostradas en el panel (a) de la Fig. 3.7. Por la probabilidad de que en el tiempo inicial un enlace tenga asociado un vector de similitud de longitud F y k coordenadas iguales a 1 y el resto 0 es:

$$P_k^0 \equiv P(k|F, Q) = \binom{F}{k} \left(\frac{1}{Q}\right)^k \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{F-k} \quad (3.11)$$

Como veremos en las siguientes secciones la formulación en términos de vectores muestra una conclusión importante: el parámetro Q del modelo de Axelrod solo juega un rol al establecer las condiciones iniciales de los vectores similares, pero a partir de ese momento no modifica la dinámica.

3.3.4. Ecuación Maestra

La formulación del modelo de Axelrod en términos de la similaridad vectorial nos permite escribir un conjunto de ecuaciones maestras que describe la dinámica de la densidad de estados de similaridad. Desarrollamos esas ecuaciones para los casos $F = 2$ y $F = 3$. Consideramos que dado un par de agentes al azar están topológicamente conectados con probabilidad $\gamma = \frac{\langle k \rangle}{N-1}$, donde γ es la proporción de links en la red con respecto a todos los posibles pares de agentes en el sistema. Los cambios directos solo ocurren entre agentes conectados.

3.3.4.1. $F = 2$

En el caso bidimensional ($F = 2$), los vectores de similaridad pueden adoptar los siguientes cuatro estados: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ o $(1, 1)$. Calculamos para cada uno las densidades en las que se encuentran en un determinado momento $P_{(0,0)}$, $P_{(1,0)}$, $P_{(0,1)}$ y $P_{(1,1)}$, respectivamente. Estas densidades pueden cambiar debido a cambios directos o indirectos. La dinámica de las densidades de vectores de densidad pueden ser obtenidas considerando todos los posibles cambios y sus posibilidades de ocurrencia.

El panel (a) de la Fig. 3.9 muestra un ejemplo de un cambio indirecto (señalado con una flecha) que origina algunos de los términos en la ecuación maestra de $F = 2$ que se muestra abajo. En el caso $F = 2$ los cambios directos necesariamente ocurren en vectores del tipo $(1, 0)$ o $(0, 1)$ ya que no ocurren ni entre dos agentes totalmente iguales ni entre dos agentes distintos. Por ejemplo en el panel (a) un enlace de tipo $(1, 0)$ evoluciona a $(1, 1)$ con probabilidad igual a $\frac{1}{F} = \frac{1}{2}$, debido al mecanismo de homofilia.

Como hemos dicho antes, un cambio directo implica cambios indirectos. Por ejemplo, si suponemos que el cambio directo descrito anteriormente procede del cambio en el vector cultural del agente a , entonces el vector de similitud $v^{(a,c)}$ (señalado por la línea punteada en la figura) debe actualizarse. En este caso, como la segunda coordenada de $v^{(a,b)}$ cambia a 1, $v_2^{(a,c)}$ copia el valor de la segunda coordenada del vector $v^{(b,c)}$, es decir, $v_2^{(a,c)} = v_2^{(b,c)}$. Por lo tanto, el vector $v^{(a,c)}$, que inicialmente se encontraba en el estado $(0, 0)$, se modifica a $(1, 0)$, produciéndose un cambio indirecto.

En resumen, el cambio directo mostrado en el panel (a) de la Figura 3.9 se representará en las ecuaciones maestras con los siguientes términos lineales: $\dot{P}_{(1,0)} \sim -\frac{1}{2}P_{(1,0)}$ y $\dot{P}_{(1,1)} \sim \frac{1}{2}P_{(1,0)}$. Por otro lado, el cambio indirecto será representado por los términos cúbicos $\dot{P}_{(0,0)} \sim -\frac{1}{2}P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)}$ y $\dot{P}_{(0,1)} \sim \frac{1}{2}P_{(0,0)}P_{(0,1)}$. El factor $1/2$ corresponde a la probabilidad de que ocurra el cambio directo (debido a la homofilia). El producto $P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)}$ es la probabilidad de encontrar la configuración particular de estados mostrada en la figura.

Considerando todos los posibles cambios para todas las posibles triadas de estados, obtenemos las siguientes ecuaciones de densidad de los vectores de

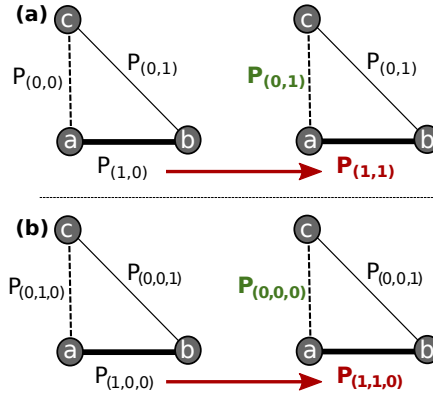


Figura 3.9: Ejemplos de la dinámica en términos de la similaridad vectorial de los vectores para $F = 2$ y $F = 3$. Dos ejemplos de actualización de vectores de similaridad que involucran interacciones directas e indirectas. El panel (a) corresponde al caso $F = 2$ donde un cambio directo (marcado con flecha) es representado en la ecuación maestra con los términos lineales $\dot{P}_{(1,0)} \sim -\frac{1}{2}P_{(1,0)}$ y $\dot{P}_{(1,1)} \sim \frac{1}{2}P_{(1,0)}$. Los cambios directos conllevan cambios indirectos (en líneas punteadas) que son representados en la ecuación con los términos cúbicos $\dot{P}_{(0,0)} \sim -\frac{1}{2}P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)}$ y $\dot{P}_{(0,1)} \sim \frac{1}{2}P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)}$. El panel (b) se corresponde con el caso $F = 3$, donde el cambio directo se representa en la ecuación con el término lineal $\dot{P}_{(1,0,0)} \sim -\frac{1}{6}P_{(1,0,0)}$ y $\dot{P}_{(0,0,0)} \sim \frac{1}{6}P_{(1,0,0)}$, y el cambio indirecto a los términos cúbicos $\dot{P}_{(0,1,0)} \sim -\frac{1}{6}P_{(1,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(0,0,1)}$ y $\dot{P}_{(0,0,0)} \sim \frac{1}{6}P_{(1,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(0,0,1)}$.

similaridad:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(0,0)}}{dt} &= \frac{(N-2)}{4} \left(-P_{(1,0)}P_{(0,1)}P_{(0,0)} - P_{(1,0)}P_{(0,1)}P_{(0,0)} \right. \\
 &\quad \left. + P_{(1,0)}P_{(0,1)}P_{(0,0)} + P_{(1,0)}P_{(0,1)}P_{(0,0)} \right) \\
 \frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(1,0)}}{dt} &= -\frac{P_{(1,0)}}{2} + \frac{(N-2)}{4} \left(-P_{(1,0)}^2P_{(1,1)} - P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)} \right. \\
 &\quad \left. + P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)} + P_{(1,0)}^2P_{(1,1)} \right) \\
 \frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(0,1)}}{dt} &= -\frac{P_{(0,1)}}{2} + \frac{(N-2)}{4} \left(-P_{(0,1)}^2P_{(1,1)} - P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)} \right. \\
 &\quad \left. + P_{(0,0)}P_{(1,0)}P_{(0,1)} + P_{(0,1)}^2P_{(1,1)} \right) \\
 \frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(1,1)}}{dt} &= \frac{P_{(0,1)} + P_{(1,0)}}{2} + \frac{(N-2)}{4} \left(-P_{(1,0)}^2P_{(1,1)} - P_{(0,1)}^2P_{(1,1)} \right. \\
 &\quad \left. + P_{(1,0)}^2P_{(1,1)} + P_{(0,1)}^2P_{(1,1)} \right),
 \end{aligned}$$

donde γ es la probabilidad de que dados dos agentes elegidos al azar, estén efectivamente conectados. Podemos observar que, para este caso, los términos cúbicos provenientes de los cambios indirectos son cancelados entre sí y solo se mantienen los términos lineales, provenientes de los cambios directos.

Por último, consideramos P_k a la densidad de enlaces con similaridad k , es decir $P_0 = P_{(0,0)}$, $P_1 = P_{(1,0)} + P_{(0,1)}$ y $P_2 = P_{(1,1)}$. De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma} \frac{dP_0}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{P_1}{2} \\ \frac{1}{\gamma} \frac{dP_2}{dt} &= \frac{P_1}{2}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Observamos que la suma de todas las ecuaciones debe anularse, por lo que la densidad total se mantiene constante y se cumple la restricción $P_0 + P_1 + P_2 = 1$.

3.3.4.2. $F = 3$

En el caso de $F = 3$ la similaridad vectorial puede admitir los siguientes estados: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$ y en una configuración dada, podemos indicar la proporción en la que aparece cada tipo de vector como $P_{(0,0,0)}$, $P_{(1,0,0)}$, $P_{(0,1,0)}$, $P_{(0,0,1)}$, $P_{(1,0,1)}$, $P_{(0,1,1)}$ y $P_{(1,1,1)}$, respectivamente.

Análogamente al caso $F = 2$ en el panel (b) de la Fig. 3.9 se muestra un ejemplo de un cambio directo en un vector de similaridad de tipo $(1, 0, 0)$ que pasa a ser $(1, 1, 0)$. Por el mecanismo de homofilia, una vez seleccionado el enlace, este cambio ocurre con probabilidad $\frac{1}{F} = \frac{1}{3}$. Además multiplicamos por un factor $\frac{1}{2}$, ya que es equiprobable que ese cambio ocurra en cualquiera de los dos atributos cuya coordenada correspondiente es 0. Notamos que si el cambio directo hubiese ocurrido en un vector correspondiente a un enlace con dos atributos en común, el factor que acompaña al término solo estaría relacionado con el mecanismo de homofilia ($\frac{2}{F} = \frac{2}{3}$) pues en este caso hay una única actualización posible.

Nuevamente, este cambio directo produce un conjunto de cambios indirectos. En particular el ejemplo que mostramos en el panel (b) cambia del estado $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 0)$. Para que ocurra este cambio indirecto la configuración de vectores en los tres enlaces correspondientes a esos tres agentes deben ser los de la figura, y por lo tanto ocurre con probabilidad $\frac{1}{6}P_{(1,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(0,0,1)}$. En resumen, el cambio directo que se muestra en el panel (b) de la figura, se ve reflejado en las ecuaciones maestras en los términos lineales $\dot{P}_{(1,0,0)} \sim -\frac{1}{6}P_{(1,0,0)}$ y $\dot{P}_{(0,0,0)} \sim \frac{1}{6}P_{(1,0,0)}$, mientras que los cambios indirectos se ven reflejados en los términos cúbicos $\dot{P}_{(0,1,0)} \sim -\frac{1}{6}P_{(1,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(0,0,1)}$ y $\dot{P}_{(0,0,0)} \sim \frac{1}{6}P_{(1,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(0,0,1)}$, respectivamente.

Si consideramos todos los posibles cambios directos como en el caso $F = 2$ y escribimos todos los términos correspondientes a los cambios directos e

indirectos, obtenemos las ecuaciones maestras para las densidades de los vectores de similitud en el caso $F = 3$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(0,0,0)}}{dt} &= \frac{(N-2)}{3} \left(-P_{(0,0,0)}P_{(0,0,1)}P_{(1,1,0)} - P_{(0,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(1,0,1)} \right. \\
&\quad \left. - P_{(0,0,0)}P_{(1,0,0)}P_{(0,1,1)} + 3P_{(1,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(0,0,1)} \right) \\
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(1,0,0)}}{dt} &= -\frac{P_{(1,0,0)}}{3} + \\
&\quad + \frac{(N-2)}{3} \left(-P_{(1,0,0)}^2P_{(1,1,1)} - P_{(1,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(0,0,1)} \right. \\
&\quad + P_{(1,0,0)}P_{(1,0,1)}P_{(1,1,0)} + P_{(0,0,0)}P_{(0,1,0)}P_{(1,0,1)} \\
&\quad + P_{(0,0,0)}P_{(0,0,1)}P_{(1,1,0)} - \frac{1}{2}P_{(1,0,0)}^2P_{(0,0,1)} - \frac{1}{2}P_{(1,0,0)}^2P_{(0,1,0)} \left. \right) \\
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(0,1,1)}}{dt} &= \frac{P_{(0,1,0)}}{6} + \frac{P_{(0,0,1)}}{6} - \frac{2P_{(0,1,1)}}{3} \\
&\quad + \frac{(N-2)}{3} \left(-P_{(1,0,0)}P_{(0,1,1)}P_{(0,0,0)} - P_{(0,1,1)}P_{(0,1,0)}P_{(1,1,0)} \right. \\
&\quad - P_{(0,1,1)}P_{(1,0,1)}P_{(0,0,1)} + \frac{1}{2}P_{(0,1,0)}^2P_{(0,0,1)} \\
&\quad + \frac{1}{2}P_{(0,0,1)}^2P_{(0,1,0)} + P_{(1,1,1)}P_{(0,1,0)}^2 + P_{(1,1,1)}P_{(0,0,1)}^2 \left. \right) \\
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_{(1,1,1)}}{dt} &= \frac{2P_{(0,1,1)}}{3} + \frac{2P_{(1,0,1)}}{3} + \frac{2P_{(1,1,0)}}{3} \\
&\quad + \frac{(N-2)}{3} \left(-P_{(1,1,1)}P_{(1,0,0)}^2 - P_{(1,1,1)}P_{(0,1,0)}^2 - P_{(1,1,1)}P_{(0,0,1)}^2 + \right. \\
&\quad + P_{(0,1,1)}P_{(0,1,0)}P_{(1,1,0)} + P_{(0,1,1)}P_{(0,0,1)}P_{(1,0,1)} \\
&\quad \left. + P_{(1,0,1)}P_{(1,0,0)}P_{(1,1,0)} \right)
\end{aligned}$$

donde γ es la probabilidad de que el enlace elegido sea efectivamente un enlace topológico (por ejemplo, $\gamma = 1$ en la red completa). Las ecuaciones $\dot{P}_{(0,1,0)}$, $\dot{P}_{(0,0,1)}$, $\dot{P}_{(1,0,1)}$, $\dot{P}_{(1,1,0)}$ son análogas.

Suponiendo que la evolución de los diferentes estados con la misma cantidad de características son equivalente, es decir $P_{(1,0,0)} = P_{(0,1,0)} = P_{(0,0,1)} = \frac{P_1}{3}$ y $P_{(0,1,1)} = P_{(1,0,1)} = P_{(1,1,0)} = \frac{P_2}{3}$, $P_0 = P_{(0,0,0)}$ y $P_3 = P_{(1,1,1)}$, obtenemos la ecuación del sistema para $F = 3$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_0}{dt} &= \frac{(N-2)}{27} (P_1^3 - 3P_0P_1P_2) \\
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{P_1}{3} + \frac{(N-2)}{27} (-2P_1^3 - 3P_1^2P_3 + P_1P_2^2 + 6P_0P_1P_2) \\
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_2}{dt} &= \frac{P_1}{3} - \frac{2P_2}{3} + \frac{(N-2)}{27} (P_1^3 + 6P_1^2P_3 - 2P_1P_2^2 - 3P_0P_1P_2) \\
\frac{1}{\gamma} \frac{dP_3}{dt} &= \frac{2P_2}{3} + \frac{(N-2)}{27} (-3P_1^2P_3 + P_1P_2^2)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde P_k es la proporción de enlaces con vectores con similaridad k , con $k = 0, 1, 2, 3$. Debido a la condición de normalización $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$, el sistema de ecuaciones es en realidad un sistema tridimensional dado por las Ecs. (3.11).

3.3.5. Resultados analíticos y comparación con las redes completas.

Comenzaremos comparando el enfoque analítico que hemos desarrollado con las simulaciones del modelo de Axelrod, en una red completa donde los cambios directos pueden ocurrir en un enlace que une cualquier par de agentes ($\gamma = 1$). En la sección 3.3.6 extendemos este análisis en otras topologías.

3.3.5.1. $F = 2$

En el caso $F = 2$ las ecuaciones del sistema (3.12) pueden ser resueltas explícitamente:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_0}{dt} &= 0 \implies P_0(t) = P_0^0 \\
\frac{dP_1}{dt} &= -\frac{P_1}{2} \implies P_1(t) = P_1^0 e^{-\frac{1}{2}t} \\
\frac{dP_2}{dt} &= \frac{P_1}{2} \implies P_2(t) = 1 - P_0^0 - P_1^0 e^{-\frac{1}{2}t}
\end{aligned}$$

donde la condición inicial está dada por las Ecs. (3.11).

La Fig. 3.10 muestra una concordancia total entre la solución analítica y las simulaciones: el sistema de Ecs. (3.12) predicen correctamente que P_0 se mantiene constante durante toda la dinámica en su valor inicial $(1 - 1/Q)^2$, mientras que P_1 y P_2 decrece y crece exponencialmente respectivamente. Por otro lado, vemos que no hay ninguna dependencia en el tamaño del sistema una vez que se ajusta el paso temporal $dt = \frac{1}{M}$, donde $M = \frac{N(N-1)}{2}$ es el número de pares de agentes del sistema.

La conservación de P_0 no significa que una arista de ese tipo no pueda modificarse, pero sí que en promedio la cantidad de aristas con similaridad igual a cero se mantiene constante. Esto nos da una representación intuitiva de la dinámica de Axelrod para $F = 2$ donde, en un sentido medio, puede ser explicada como el reordenamiento de los tipos de enlaces de manera que en

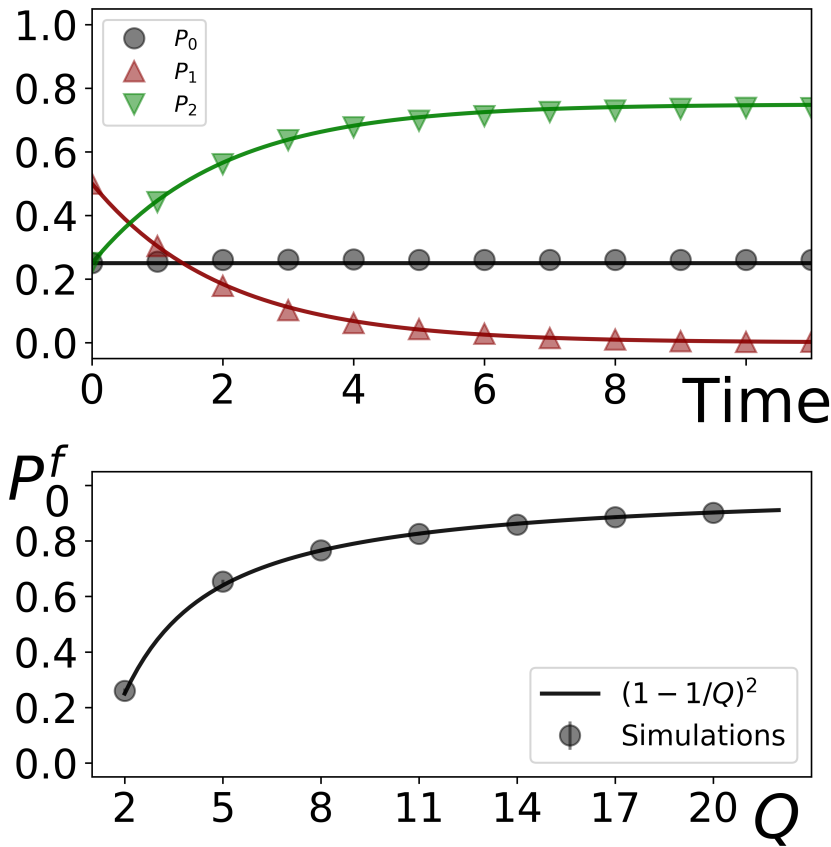


Figura 3.10: Integración analítica y simulaciones para $F = 2$. Evolución temporal de la distribución de similaridad para $F = 2$ y $Q = 2$ (panel (a)) y el valor de P_0 en el estado final para distintos valores de Q . Los puntos representan simulaciones mientras que las líneas son las predicciones analíticas. En este caso se muestran simulaciones con $N = 256$, pero no se ha observado una dependencia con el tamaño del sistema.

el estado final los enlaces correspondientes a vectores nulos sean las fronteras entre conjuntos de nodos con el mismo estado - *cliques* - y donde cada clique no comparte ningún atributo con el resto de los cliques.

3.3.5.2. $F = 3$

En el caso de $F = 3$, el sistema de Ecs. (3.13) no puede ser resuelto de forma explícita, por lo que llevamos a cabo un análisis dinámico en conjunto con una exploración numérica. Al examinar los puntos fijos, notamos que el sistema se anula en un conjunto de soluciones cuando $P_1 = P_2 = 0$, lo que implica la

ausencia de enlaces activos en el sistema. Esta condición deja los valores de P_0 y P_3 sin restricciones. Por lo tanto, el estado estacionario será completamente determinado por el valor de P_0 en el estado final (P_0^f). El valor de P_3 en el estado final, P_3^f , quedará determinado por la condición de normalización $P_3^f = 1 - P_0^f$. Hay además otro punto fijo dependiente del valor N , cuando

$$\begin{aligned} P_0 &= -2 \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - \frac{2}{3c}} \\ P_1 &= 3 \mp \sqrt{9 - \frac{2}{3c}} \\ P_2 &= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9 - \frac{2}{3c}} \\ P_3 &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{9 - \frac{2}{3c}} \end{aligned}$$

con $c = (N - 2)/27$. No obstante, este punto fijo resulta infactible en el contexto de nuestro problema ya que $P_1 = -2P_2$, lo que implica que ambos son iguales a 0 y, por lo tanto, nos encontramos en el caso anterior o bien uno de ellos es negativo, lo cual resulta imposible en el contexto de las ecuaciones, ya que deben representar una distribución de probabilidad.

Para analizar la estabilidad de los puntos obtenidos estudiamos las ecuaciones linealizadas alrededor de los puntos donde $P_1 = P_2 = 0$ obteniendo la siguiente matriz:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores y autovectores son:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0 & v_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ \lambda_1 &= -1/3 & v_1 &= (0, -1/2, -1/2, 1) \\ \lambda_2 &= -2/3 & v_2 &= (0, 0, -1, 1) \\ \lambda_3 &= 0 & v_3 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

De esta manera comprobamos que el conjunto de puntos fijos que hemos encontrado es estable.

3.3.5.3. Estado estacionario

Nos centramos ahora en el valor estacionario, que como hemos notado está caracterizado por P_0^f y depende de dos parámetros del modelo, Q y N . Estos parámetros desempeñan dos papeles bien separados: por un lado, Q determina las condiciones iniciales del sistema según la Ec. (3.11), mientras que, por otro, N pondera el acoplamiento de los términos cúbicos con los lineales. El panel (a) de la Fig. 3.11 muestra que, para valores pequeños de N (aproximadamente

$N < 100$), el sistema se mueve continuamente de $P_0^f = 0$ a $P_0^f = 1$ a medida que Q aumenta, mientras que P_0^f muestra un salto brusco de 0 a 1 cuando N es aproximadamente mayor que 100. Este salto, asociado al paso de un estado monocultural a un estado multicultural en el modelo Axelrod, se mantiene para N y Q grandes, donde surge una relación lineal entre estos dos parámetros. Esto sugiere que una relación escalar Q/N es un parámetro eficaz para estudiar la transición.

En el panel (b) de la Fig. 3.11 se muestra que en el modelo analítico se produce una transición en el valor crítico $Q_c/N \simeq 0,4$. Este panel también muestra la transición observada en las simulaciones numéricas en función de Q/N . Podemos ver que el enfoque analítico difiere respecto al modelo Axelrod durante la transición, pero coincide con las simulaciones cuando $Q/N \sim 0$ y $Q/N > 0,4$.

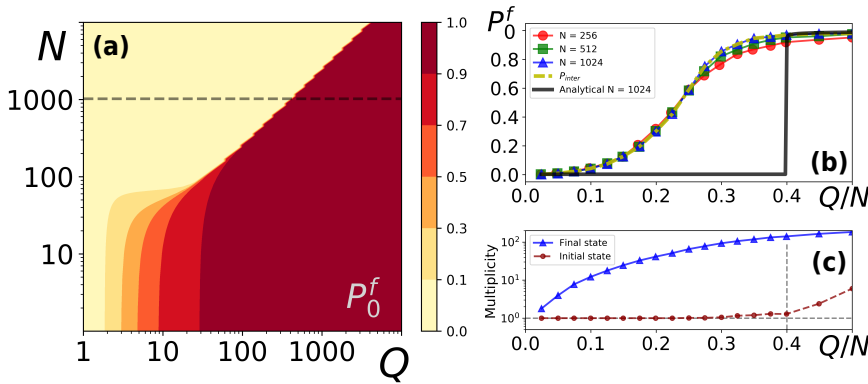


Figura 3.11: Diagramas de fase y curvas de transición. El panel (a) muestra la solución estacionaria P_0^f (código de colores) del sistema analítico en función de N y Q . El panel (b) muestra la transición para diferentes valores de N en el modelo numérico junto con la transición analítica para $N = 1024$ (señalada también por la línea punteada en el panel (a)). El panel (c) muestra la multiplicidad (número) de fragmentos en el estado inicial y final del modelo Axelrod numérico para $N = 1024$. Se puede observar que la diferencia entre el modelo Axelrod y el enfoque analítico se debe a un sistema fragmentado en el estado final, donde P_0^f es igual a la fracción de enlaces de similitud cero entre fragmentos P_{inter} , mientras que la transición analítica muestra un salto en P_0^f donde el sistema ya está fragmentado en el estado inicial.

Las discrepancias observadas en P_0^f entre el modelo de Axelrod y su aproximación analítica para valores inferiores a $Q/N \sim 0,4$ se explican por la fragmentación del sistema durante la dinámica. Aunque la topología del sistema considerado es un grafo completo, definimos un fragmento como un grupo de agentes conectados por enlaces con vectores de similitud no nula, aislados del resto de los agentes a los que solo están unidos por vectores de similitud cero. Cuando un grupo de agentes adopta un estado ortogonal con respecto a otro

grupo, ambos comienzan a actuar como dos fragmentos independientes. Una vez que estos *clusters* aparecen, el modelo no tiene ningún mecanismo para volver a conectarlos. En el panel (c) de la Fig. 3.11 se muestra la cantidad de fragmentos en el estado inicial y en el estado final para distintos valores de Q y $N = 1024$. Como se puede observar, el sistema comienza con un solo *cluster*, pero durante la dinámica, se fragmenta. Cuando el sistema se fragmenta, la hipótesis de campo medio que hemos considerado para las ecuaciones ya no se cumple. Esta figura también sugiere una posible explicación de por qué el enfoque analítico muestra un salto en P_0^f : para $Q/N > 0,4$, el sistema ya está fragmentado en el estado inicial.

Como todos los enlaces que conectan a agentes dentro del mismo fragmento tienen un vector de similitud de 1 en el estado final (de lo contrario, el sistema seguiría evolucionando), el valor de P_0^f en las simulaciones corresponde a la proporción de enlaces entre fragmentos (que en el estado final tienen una similitud de 0) en función del total de enlaces. En el panel (b) de la Fig. 3.11, se observa que la curva de transición para el modelo de Axelrod coincide efectivamente con la contribución de los enlaces inter-fragmentos, cuya proporción llamaremos P_{inter} y se calcula a partir de la distribución de tamaños de los fragmentos en el estado final.

La Fig. 3.12 proporciona una imagen ilustrativa para comprender la definición de P_{inter} . En una red completa, el estado final se compone de un conjunto de *clusters* que también son *cliques*. Dentro de cada *cluster*, todos los agentes terminan con el mismo estado cultural, lo que significa que todos los enlaces tienen una similitud igual a 1. En contraste, la similitud entre cualquier par de agentes pertenecientes a *clusters* diferentes es cero. Estos enlaces de similitud cero se indican con líneas grises discontinuas en la figura.

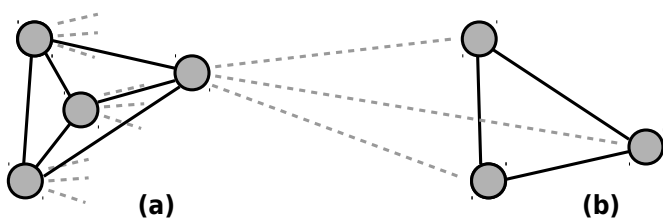


Figura 3.12: Definición de P_{inter} . Dado dos fragmentos en el estado final del sistema (nodos conectados por líneas sólidas negras), definimos P_{inter} como el número de enlaces faltantes entre los fragmentos (líneas grises discontinuas), normalizado por el número total de pares de agentes en el sistema. Cada nodo del *cluster* (a) está conectado a todos los nodos del *cluster* (b) con enlaces de similitud cero (las líneas punteadas interrumpidas también se refieren a las conexiones entre nodos del *cluster* (a) con nodos del *cluster* (b)).

En un sistema compuesto por N agentes, P_{inter} se define como el cociente

entre el número de enlaces de similitud cero que conectan agrupaciones distintas y el número total de posibles enlaces de similitud cero en el sistema, es decir, $N(N-1)/2$. Dado que la fragmentación mencionada es un proceso dinámico, P_{inter} es una cantidad que depende del tiempo. La Fig. 3.13 muestra la evolución temporal de $P_{inter}(t)$ para $N = 512$ y $Q = 128$, junto con la fracción de enlaces de similitud cero del sistema completo $P_0(t)$. Como se observa en la figura, en el estado final, P_0 está compuesto exclusivamente por enlaces inter-fragmentos, lo que implica que $P_0(\infty) = P_{inter}(\infty)$.

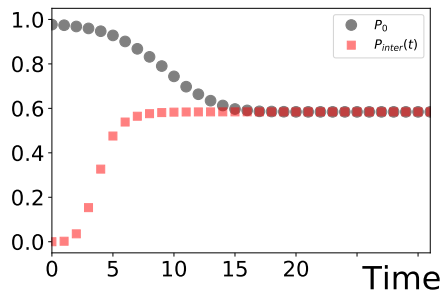


Figura 3.13: Dinámica de P_{inter} . Cantidad normalizada de enlaces faltantes entre fragmentos. Se puede observar que, en el estado final, el valor de P_{inter} es igual a la fracción de enlaces con similitud igual a 0, P_0 . Utilizamos los parámetros $N = 512$, $Q = 128$.

Luego, añadir P_{inter} a la predicción analítica de P_0^f , que para N grandes es casi cero, permite recuperar la curva de transición obtenida a partir de simulaciones.

3.3.5.4. Dinámica

Hasta ahora hemos analizado el estado final del sistema. A partir de ahora nos concentraremos en analizar la dinámica de la ecuaciones que hemos obtenido, es decir, la distribución de las proporciones de similitudes a la largo del tiempo. Para poder analizarla y graficarla nos concentraremos en el plano P_0 - P_3 , utilizando que a lo largo de la dinámica P_1 y P_2 se anulan. Observamos las trayectorias para distintos valores de N y un valor fijo de Q en la Fig. 3.14. Aquí, la línea recta de pendiente -1 es el conjunto de puntos estables de todo el sistema.

Observamos que para valores grandes de N , en la Ec. (3.13) los términos lineales pueden ser despreciados con respecto a los cúbicos cuando estos no son nulos, dando lugar a un sistema de ecuaciones puramente no lineal. Esta reducción del sistema, también produce un conjunto de puntos fijos estables con una componente predominantemente atractiva, que cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned} P_1^2 - 3P_0P_2 &= 0 \\ P_2^2 - 3P_1P_3 &= 0 \end{aligned}$$

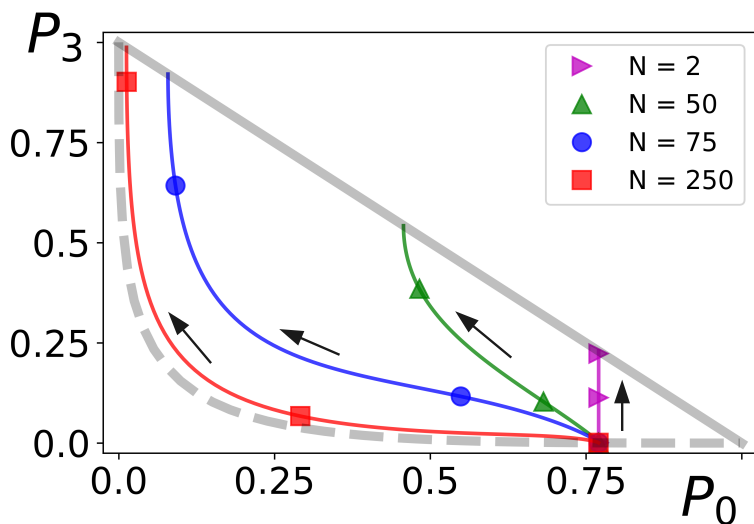


Figura 3.14: Trayectorias analíticas en el diagrama de fases. Las trayectorias pertenecen a diferentes valores de N con la misma condición inicial ($Q = 12$). La línea discontinua representa el conjunto de condiciones iniciales, la línea recta continua es el conjunto de puntos fijos, y las flechas señalan la dirección del tiempo.

Si observamos esta condición en el plano P_0 - P_3 vemos que describe la curva $P_3 = (1 - \sqrt[3]{P_0})^3$ que llamaremos la variedad cúbica estable y es representada por la línea gris en la Fig. 3.14.

Para comprobar la estabilidad calculamos la matriz de primer orden, evaluada en los puntos de esa curva:

$$D = \begin{bmatrix} -3P_1P_2 & 3P_1^2 - 3P_0P_2 & -3P_0P_1 & 0 \\ 6P_2P_1 & -6P_1^2 - 6P_1P_3 + 6P_0P_2 + P_2^2 & 6P_0P_1 + 2P_2P_1 & -3P_1^2 \\ -3P_1P_2 & -3P_0P_2 - 2P_2^2 + 12P_3P_1 + 3P_1^2 & -3P_0P_1 - 4P_2P_1 & 6P_1^2 \\ 0 & -6P_3P_1 + P_2^2 & 2P_2P_1 & -3P_1^2 \end{bmatrix}$$

Calculamos numéricamente los autovalores de esta matriz. La Fig. 3.15 muestra estos valores en función tanto del valor inicial de P_0 como del parámetro Q . Como podemos ver en esta figura, el valor propio más dominante tiene signo negativo, lo que implica que es predominantemente estable.

Notamos a su vez que las condiciones iniciales del sistema definidas por las Ecs. (3.11) viven en esta variedad cuando son proyectadas al plano de la figura. Por lo tanto, cuando $t = 0$, los términos cúbicos de la Ec. (3.13) son cero, y la dinámica solo está impulsada por los términos lineales.

Las cuatro trayectorias esbozadas ($Q = 12$ y $N = 2; 50; 75; 250$) en la Fig. 3.14 muestran cómo el equilibrio entre términos lineales y cúbicos rige la dinámi-

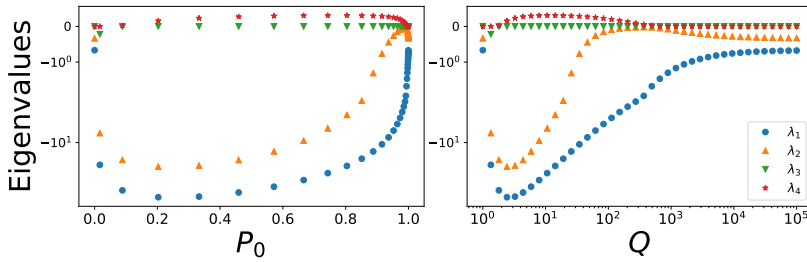


Figura 3.15: Autovalores para el sistema linealizado de los términos no lineales. Como función del valor inicial de P_0 y del parámetro Q , respectivamente.

ca. Cuando N es pequeño, el término lineal es dominante y el sistema evoluciona hacia el punto fijo más cercano en la línea recta, como se muestra en el caso de $N = 2$, donde los términos cúbicos están ausentes.

Para valores intermedios de N , la dinámica se rige por la competencia entre los términos lineales y cúbicos. Sin embargo, para valores grandes de N (más concretamente, cuando $Q/N < 0,4$, como por ejemplo $N = 250$ y $Q = 12$), los términos lineales dirigen la dinámica en el primer momento, pero una vez que el sistema abandona la línea gris discontinua, estos términos se vuelven despreciables con respecto a los cúbicos y el sistema se rige completamente por la estabilidad de la variedad cúbica. Por tanto, la trayectoria busca un punto estable en la recta, pero permaneciendo cerca de la línea gris discontinua (trayectoria roja). Obsérvese que una trayectoria que siga la línea discontinua significa que, en cada momento, la distribución de similitudes puede aproximarse bien por la Ec. (3.11) a través de un Q efectivo que cambia con la dinámica.

La comparación en las dinámicas entre el modelo analítico y las simulaciones para el modelo de Axelrod se muestran en la Fig. 3.16. En los tres paneles de arriba se muestran las trayectorias para los cuatro tipos de similitud en función de tiempo, y en los paneles de abajo se ven las trayectorias en el plano $P_3 - P_0$. El caso tridimensional, a diferencia del bidimensional, muestra una dependencia en la dinámica en función de N . Además, la correspondencia entre las ecuaciones y las simulaciones crece cuando aumenta la cantidad de agentes para un Q finito. Cuando esto pasa, P_0 disminuye a cero, obteniendo un estado monocultural en el límite termodinámico para un Q fijo (paneles (a) y (d)). En los paneles (b) y (e) vemos un ejemplo en donde la solución analítica no sigue la dinámica de Axelrod. Esto ocurre durante la transición.

Si bien la solución analítica no siempre predice la dinámica, un resultado interesante es que podemos hacer un reescalo que nos permita predecirla para esos casos. Por ejemplo, en el panel (e) de la Fig. 3.16 podemos observar que aunque la trayectoria analítica no coincide con las simulaciones, la forma es similar, lo que nos induce a pensar que puede ser corregida por un reescalo de las variables. Para eso es necesario excluir del análisis los enlaces inter-fragmentos del estado final (P_{inter}) que hemos descrito más arriba, y considerar el resto de los enlaces como la totalidad. Las relaciones de escala propuestas son:

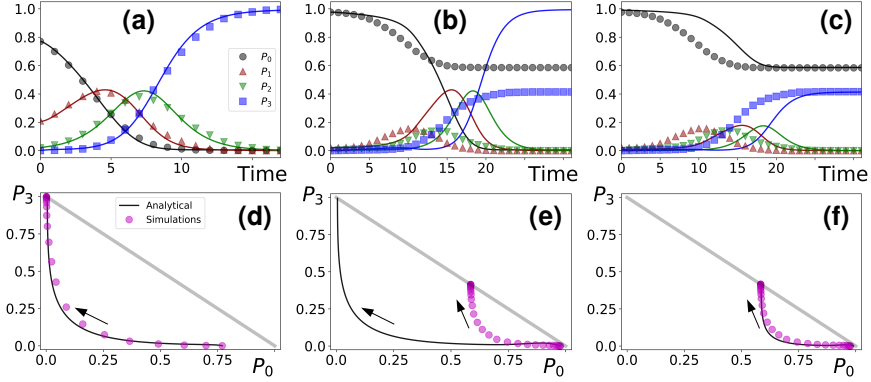


Figura 3.16: Evolución temporal y diagramas de fase para $F = 3$, $Q = 12$ (paneles (a) y (d)), $Q = 128$ (paneles (b) y (e)) y reescalado para $Q = 128$ (paneles (c) y (f)). Los puntos representan simulaciones, mientras que las líneas representan el enfoque analítico. Los paneles superiores muestran la evolución temporal de la distribución de similitud, mientras que los paneles inferiores muestran la misma información como diagramas de fase. Las flechas indican la dirección del tiempo. $N = 512$.

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_0(t) &= P_{inter} + (1 - P_{inter})P_0(t) \\
 \hat{P}_1(t) &= (1 - P_{inter})P_1(t) \\
 \hat{P}_2(t) &= (1 - P_{inter})P_2(t) \\
 \hat{P}_3(t) &= (1 - P_{inter})P_3(t),
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $\hat{P}_i(t)$ es el valor corregido de la solución analítica $P_i(t)$. Como para valores grandes de N , $P_0^f = 0$ en el sistema analítico, $\hat{P}_0^f = P_{inter}$, como esperamos.

La idea que está detrás de este reescalo es que si sabemos la distribución de fragmentos en el estado de equilibrio, podemos remover esos fragmentos (que sabemos que en el estado final tendrán similitud cero) en el momento inicial, dado que no contribuyen a la dinámica. En los paneles (c) y (f) de la Fig. 3.16 podemos observar las trayectorias reescaladas $\hat{P}_i$. Observamos que la solución analítica con esta corrección logran una gran aproximación a las trayectorias de las simulaciones proyectadas sobre el plano P_0 - P_3 , aunque fallan cuando las observamos como función del tiempo. Sin embargo, las relaciones simuladas entre P_i son correctamente capturadas.

3.3.6. Comparación con otras topologías

En la sección anterior, hemos demostrado que el conjunto cerrado de ecuaciones maestras propuesto para el modelo Axelrod se ajusta bien a las simulaciones en redes completas. Sin embargo, una de las premisas de nuestro enfoque es que

el sistema tiene una estructura homogénea. En esta sección, investigamos si las predicciones analíticas se pueden aplicar a otros tipos de redes homogéneas, como las redes regulares aleatorias. Además, dado que las interacciones sociales se producen en redes que no son homogéneas, también evaluamos la validez de nuestro modelo analítico en diferentes redes complejas y reales.

En los casos donde la red no es completa, podemos definir la distribución de similitud de dos maneras. En primer lugar, podemos tener en cuenta solamente la similitud entre agentes conectados, que denominaremos distribución de similitud de enlaces físicos. Sin embargo, la similitud entre agentes está bien definida independientemente de que estén topológicamente conectados. Por ello, en segundo lugar, definimos también la distribución de similitud del sistema completo, que incluye la similitud entre todos los pares de agentes, independientemente de que estén conectados o no. Se puede observar que ambas distribuciones coinciden para redes completas. Por tanto, comparamos la solución del sistema analítico tanto con la distribución de similitud de los enlaces físicos como con el sistema completo. Restringimos este análisis al caso $F = 3$ y $Q = 6$, donde los efectos de fragmentación descritos en la sección anterior están ausentes.

3.3.6.1. Redes regulares aleatorias

Comenzamos el estudio de la dinámica de ambas distribuciones de similitud en redes regulares aleatorias, las cuales consisten en un conjunto de N nodos enlazados aleatoriamente con la restricción de que cada nodo tiene exactamente grado k , lo que resulta en un sistema altamente homogéneo.

En el panel (a) de la Fig. 3.17, se muestra la dinámica de la distribución de similitud de los enlaces físicos para varios valores de k y N en el plano $P_0 - P_3$, junto con la integración numérica del sistema analítico de la Ec. (3.13). Se observa que el modelo analítico no puede predecir exactamente la dinámica de la distribución de similitudes cuando el sistema no es una red completa. Sin embargo, la discrepancia entre las simulaciones y la predicción analítica disminuye a medida que k aumenta y el modelo parece ser una buena aproximación para $k = 16$. Esta discrepancia también es independiente del tamaño del sistema, como se muestra en el panel (a) para dos casos extremos ($N = 512$ y $N = 8192$).

Además, al analizar la distribución de similitud del sistema completo, se muestra en el panel (b) de la Fig. 3.17 que la evolución predicha por las ecuaciones analíticas coincide con los resultados numéricos para todos los valores de k analizados. Este resultado no es evidente ya que la topología del sistema establece en qué enlaces puede tener lugar un cambio directo, lo que afecta significativamente a la dinámica del modelo Axelrod.

3.3.6.2. Redes complejas

Más allá de las redes homogéneas, el modelo analítico es también una buena aproximación en otras topologías complejas cuando el grado medio $\langle k \rangle$ es grande. La Fig. 3.18 muestra la distribución de similitudes de los enlaces físicos (panel (a)) y del sistema completo (panel (b)) en una red Erdős-Rényi y una red sin

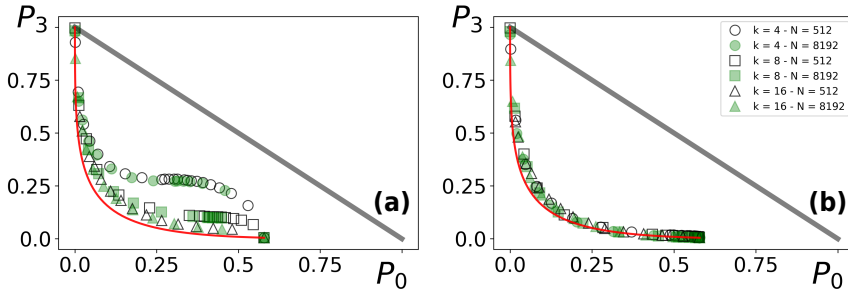


Figura 3.17: Diagramas de fase para una red regular aleatoria con grado k . El panel (a) corresponde a los enlaces físicos, mientras que el panel (b) corresponde a la distribución de similitud de todos los pares de agentes (sistema completo). $F = 3$ y $Q = 6$. El modelo analítico (línea sólida roja) fue integrado con $N = 8192$.

escala Barabasi-Albert con grado medio $\langle k \rangle = 16$, $N = 8192$, $\langle k \rangle = 4$ y $\langle k \rangle = 8$ junto con una red regular aleatoria con grado y tamaño equivalentes. La figura muestra que no hay diferencias significativas variando la topología del sistema.

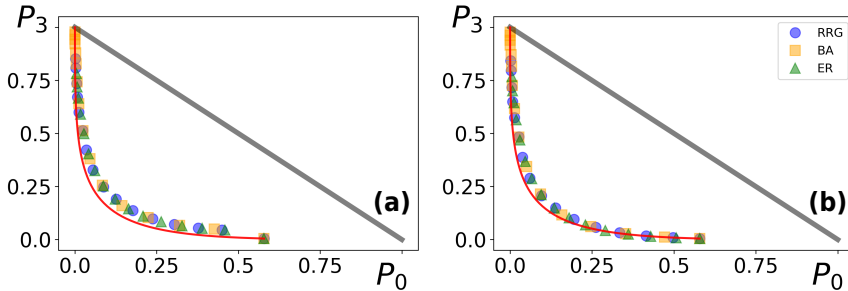


Figura 3.18: Diagramas de fase para distintas topologías. Distribución de similitud de los enlaces físicos (panel (a)) para un grafo regular aleatorio, una red Erdős-R'enyi y una red Barabasi-Albert de escala libre, todas con un grado medio de $\langle k \rangle = 16$. El panel (b) corresponde a la distribución de similitud del sistema completo. $N = 8192$, $F = 3$ y $Q = 6$. La línea roja sólida pertenece a la integración del modelo analítico.

Por último, en la Fig. 3.19 observamos el comportamiento del modelo observando nuevamente tanto los enlaces físicos como la red completa para las mismas redes topológicas pero con menor grado.

Por lo tanto concluimos, como en los casos anteriores, que el sistema analítico predice exactamente la distribución de similitudes del sistema completo y es una buena aproximación para enlaces físicos para grandes $\langle k \rangle$. Observamos que la dinámica es independiente de la topología de la red y que las diferencias entre el modelo analítico y las simulaciones parecen depender solo del grado medio $\langle k \rangle$.

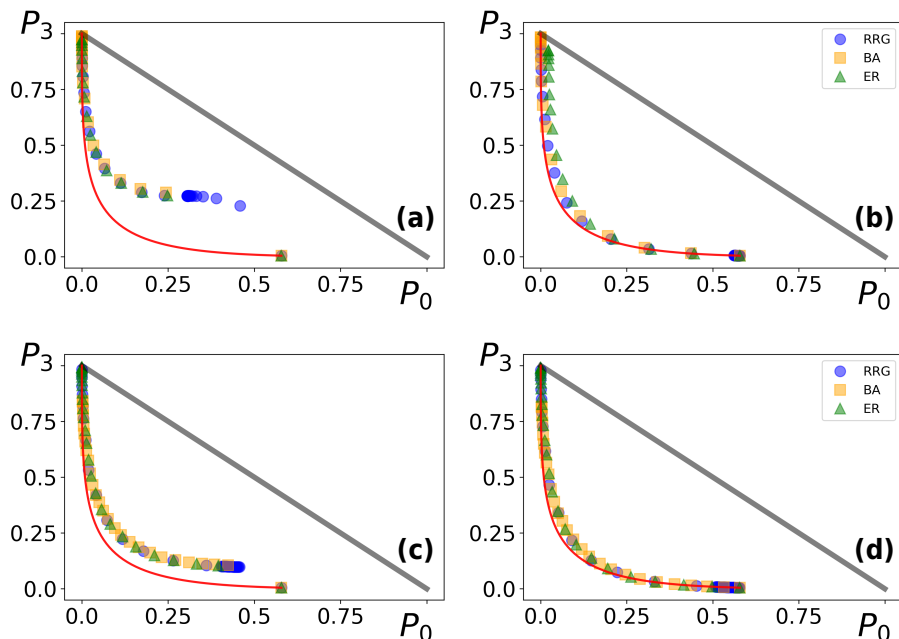


Figura 3.19: Diagrama de fase para diferentes topologías con grado medio menor. Distribución de similitud de enlaces físicos (paneles (a) y (c)) para una red regular aleatoria, una red de Erdős-Rényi y una red libre de escala Barabasi-Albert, todas con grado medio $\langle k \rangle = 4$ (panel (a)) y $\langle k \rangle = 8$ (panel (c)). El panel (b) y (d) corresponde a la distribución de similitud del sistema completo para $\langle k \rangle = 4$ y $\langle k \rangle = 8$, respectivamente. $N = 8192$, $F = 3$ y $Q = 6$. La línea sólida roja corresponde a la integración del modelo analítico.

3.3.6.3. Redes reales

Finalmente, nuestro modelo analítico fue probado en dos redes reales. La primera es una red acumulativa de contactos en un colegio de primaria, reportada en [166] (específicamente, los datos corresponden al primer día de los dos días reportados). Esta red es en realidad una red ponderada, donde cada arista representa el número de interacciones cara a cara entre alumnos/as y profesores/as. Sin embargo, la convertimos en una red binaria considerando solo las aristas más pesadas y manteniendo la red como una única componente conectada. La red binaria resultante consta de 236 nodos, con un grado medio de $\langle k \rangle \sim 11$. Cada nodo está etiquetado según su clase y curso escolar, si es un alumno/a, y con la etiqueta “Profesor/a” en el caso de los/as profesores/as. Con estas etiquetas, el coeficiente de modularidad $Q \sim 0,65$, lo que indica una estructura altamente modular en esta red.

La segunda red real en la que se probó el modelo analítico es un grafo página-página de páginas oficiales de Facebook, donde los enlaces representan enlaces mutuos entre sitios [167]. Esta red binaria tiene 22470 nodos con un grado medio

de $\langle k \rangle \sim 15,22$, pero con una distribución de grados de cola pesada.

La Fig. 3.20 muestra la distribución de similitud de los enlaces físicos y el sistema completo en la red escolar (panel (a)) y la red de Facebook (panel (b)), junto con la integración numérica del modelo analítico con el correspondiente valor de N . A pesar de la compleja topología de cada red, la Fig. 3.20 muestra que el modelo analítico predice con precisión la distribución de similitud del sistema completo en ambas redes, mientras que también es una buena aproximación para la similitud de los enlaces físicos en la red escolar. Por otro lado, el desajuste entre el modelo analítico y los enlaces físicos de la red de Facebook observado en el panel (b) no es significativamente diferente del observado en la Fig. 3.17 para valores bajos de k . Como en los casos anteriores, este desajuste puede captarse mediante una formulación analítica más específica para redes dispersas.

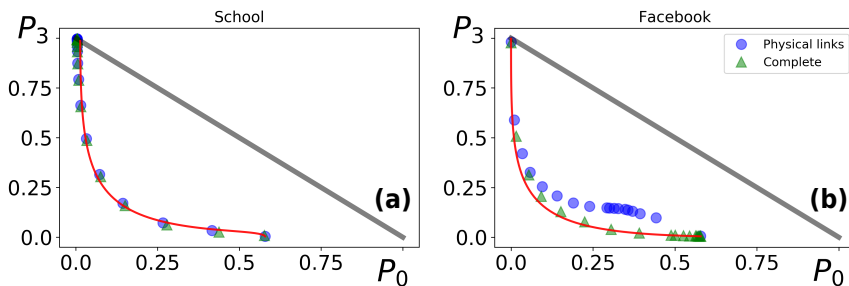


Figura 3.20: Diagrama de fases para redes reales. Distribución de similitud de enlaces físicos y sistema completo para la red de la escuela (panel (a)) y la red de Facebook (panel (b)). $F = 3$ y $Q = 6$. En ambos casos, la línea sólida roja corresponde a la integración del modelo analítico con el N correspondiente ($N = 236$ para el panel (a) y $N = 22470$ para el panel (b)).

3.3.7. Conclusiones

En esta sección hemos presentado un enfoque de campo medio basado en vectores de similitud para modelos sociales en un espacio multidimensional o cultural en términos de Axelrod. Dado que el estado del sistema suele clasificarse en términos de consenso o polarización, la variable relevante no es el estado absoluto de los agentes, sino la similitud entre ellos. Siguiendo este enfoque, escribimos y analizamos las ecuaciones maestras para dos y tres dimensiones y sentamos las bases para su generalización a cualquier dimensión. Suponemos que:

- el modelo multidimensional puede ser escrito en términos de los vectores de similaridad entre agentes, y
- las reglas de la dinámica son una combinación de cambios directos (que son representados por términos lineales en las ecuaciones maestras) y cambios

indirectos (que son representados por términos cúbicos en las ecuaciones maestras).

Con respecto al modelo de Axelrod, nuestro enfoque revela que:

- el parámetro Q (en conjunto con F) establece la condición inicial de la distribución de similitud, mientras que el tamaño del sistema N acopla los términos lineales con los cúbicos en las ecuaciones maestras;
- la concordancia entre las simulaciones y la solución analítica para dos dimensiones en redes completas es perfecta;
- las ecuaciones analíticas aproximan bien simulaciones en tres dimensiones ($F = 3$) mientras el sistema está formado por un único fragmento, condición que se cumple en el límite termodinámico para Q fijo ($Q/N \rightarrow 0$);
- el enfoque analítico predice con precisión la distribución de similitud de todo el sistema en topologías dispersas, y proporciona una buena aproximación de la similitud de los enlaces físicos, que mejora con el aumento del grado medio.

Más allá de las condiciones iniciales particulares exploradas (dadas por la Ec. (3.11)), los resultados posteriores se basan en el hecho de que los rasgos culturales no están correlacionados. Con esta condición, el estado inicial del sistema será siempre una distribución binomial y, por tanto, un punto fijo de términos no lineales. En comparación con anteriores aproximaciones teóricas al modelo de Axelrod, como [55] o [99], en nuestro enfoque, las correlaciones entre los agentes se tienen en cuenta explícitamente escribiendo todas las combinaciones posibles de vectores de similitud. Aunque restringimos nuestro análisis a los casos en los que $F = 2$ y $F = 3$, este enfoque puede traducirse en ecuaciones maestras para valores mayores de F , proporcionando un marco general para desarrollar ecuaciones maestras de modelos n -dimensionales de influencia social. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la precisión de este método está limitada a redes con valores suficientemente grandes de grado medio y valores bajos de Q (donde el estado final es monocultural).

Dejamos para futuras investigaciones el desarrollo de un marco analítico especializado en topologías dispersas, con el fin de captar las diferencias observadas entre la distribución de similitud de los enlaces físicos y el enfoque analítico introducido aquí, en particular cuando el grado medio de la red es bajo.

Capítulo 4

Modelos basados en datos

4.1. Introducción

El desarrollo de modelos de opinión permite estudiar diversos mecanismos de interacción y observar qué relación tienen con algunos fenómenos macroscópicos. Sin embargo, para que estos modelos puedan aportar una explicación de la realidad es fundamental que se basen en análisis de datos, tanto a nivel de los mecanismos como de los fenómenos observados.

Medir la opinión pública y los mecanismos que pueden modificarla representa un desafío y hay distintas aproximaciones que puede realizarse para hacerlo. Por ejemplo es posible utilizar encuestas o cuestionarios, donde directamente se les pregunte a los individuos su opinión sobre un determinado tema. Por otro lado, es posible analizar la opinión cuando es plasmada en distintos registros, ya sean plataformas digitales, foros, chats, etc.

En este capítulo desarrollamos un modelo basado en datos, tanto para determinar los mecanismos de interacción, como para verificar los resultados obtenidos.

4.2. Efectos de la coherencia de grupo

Hemos visto en el capítulo 1 que al considerar más de una dimensión en el espacio en el que se representan los tópicos puede ser necesario incluir nuevos mecanismos de interacción que den cuenta de nuevos fenómenos observados. Por ejemplo, en [25] se presenta un modelo en el cual las opiniones están representadas de manera bidimensional y donde cada dimensión representa un tópico sobre el cual los agentes discuten. Sin embargo, los tópicos no necesariamente son ortogonales entre sí y por lo tanto pueden estar correlacionados de manera que la opinión en un tópico puede influir en el otro. Este fenómeno es conocido como alineación de tópicos. Por ejemplo es común que aquellas personas que están a favor de libertades sociales como el derecho al aborto también lo estén en la identidad de género autopercibido, pero también estén en contra de la libre portación de armas. Este fenómeno puede corroborarse en experimentos y encuestas [110, 148, 168] y, más aún, se observa que la alineación de tópicos, así como la polarización, son fenómenos cada vez más presentes en nuestras sociedades [115].

Nos proponemos explorar qué mecanismos y qué dinámicas pueden producir la alineación de tópicos. Para eso desarrollamos un modelo, donde el mecanismo de interacción está propuesto siguiendo los resultados experimentales obtenidos en [112]. En dicho experimento, se realizó una prueba de comportamiento presencial con más de 5000 participantes, a cada uno de los cuales se les presentaron

cinco afirmaciones y se les pidió que expresaran su opinión sobre cada una de ellas (a favor, en contra o neutral). Posteriormente, interactuaron con un compañero o compañera desconocida y dialogaron durante 5 minutos. Finalmente, se les hicieron algunas preguntas para calcular su preferencia interpersonal.

Se encontró que además de sentirse atraídas por las personas más similares (es decir la presencia de la homofilia [169, 170]), las personas también se sienten más atraídas por aquellas de su grupo con ideología más coherente antes que con aquellas que sostienen posiciones ambiguas o ambivalentes. Es decir, una persona con pensamiento mayoritariamente de izquierda, aunque no haya contestado en sentido izquierda en todas las preguntas, prefiere a aquellas personas que sí han respondido coherentemente todas las preguntas en el sentido izquierdo. Encontraron que este mecanismo estaba presente en los temas pertenecientes a la agenda política y partidaria, pero no en aquellas preguntas de tipo personal o individual. Este mecanismo, también es estudiado en otros trabajos (como por ejemplo en [171]).

Proponemos desarrollar un modelo de opinión bidimensional que tome en cuenta ambos mecanismos y explique la alineación de los tópicos. Además, podemos medir el nivel de alineación de los tópicos en encuestas y otros datos experimentales, y observar que, dependiendo del debate, se presentan diferentes grados de alineación. De este modo, a través del modelo, podemos explicar estos distintos grados de alineación como una proporción variable en el uso de los mecanismos de coherencia y homofilia. Los resultados presentados en este trabajo están en proceso de redacción para su publicación en un artículo académico y actualmente se encuentran disponibles como un preprint [172].

4.2.1. Modelo

Consideramos un sistema de N agentes. Cada agente posee una opinión multidimensional, donde cada dimensión refleja la opinión del agente sobre un tema particular. Para simplificar el modelo, solo consideramos dos temas y para cada uno de ellos el agente puede estar en contra, indeciso, o a favor. Asumimos que cada tema político que expresa una postura de derecha se representa con un $+1$, las opiniones de izquierda con un -1 , y las indecisas con un 0 . Por lo tanto, al haber considerado dos tópicos, cada uno con tres posibles respuestas, cada agente puede tener nueve posibles opiniones distintas. En términos de coherencia podemos distinguir cuatro comunidades:

1. Agentes coherentes (C): Agentes que mantienen opiniones afirmativas y coincidentes en ambos temas. Los agentes coherentes de izquierda (C_L) mantienen ambas opiniones de izquierda ($O = (-1, -1)$) mientras que los agentes coherentes de derecha (C_R) mantienen sus dos opiniones de derecha ($O = (1, 1)$).
2. Agentes incoherentes (I): Agentes que mantienen opiniones afirmativas pero opuestas sobre los dos temas diferentes. Los agentes incoherentes mantienen una opinión de izquierda y una opinión de derecha ($O = (-1, 1)$ u $O = (1, -1)$).

3. Agentes débiles (W): Agentes que mantienen una opinión afirmativa en un tema y están indecisos respecto al otro. La ideología del agente se determina por la inclinación política de su opinión afirmativa ($O = (-1, 0)$ u $O = (0, -1)$ se consideran agentes débiles de izquierda y $O = (1, 0)$ u $O = (0, 1)$ agentes débiles de derecha).
4. Agentes apáticos (A): Agentes que están indecisos en ambos temas ($O = (0, 0)$).

Siguiendo estas definiciones, todas las posibles opiniones de los agentes se pueden mapear gráficamente en un tablero 3x3 como se muestra en la Fig. 4.1(a), donde se indican con distintos colores cada comunidad.

En esta tesis, estudiaremos la dinámica de la proporción de agentes pertenecientes a cada comunidad. Suponemos que inicialmente las opiniones de los agentes fueron distribuidas aleatoriamente entre las tres posibles opciones e independientemente en ambos tópicos, por los que las nueve posibles opiniones ocurrirán con igual probabilidad. Sin embargo, debido a que el número de posibles combinaciones de opiniones no es el mismo para cada comunidad, la proporción inicial de agentes en cada comunidad variará. Por ejemplo, la proporción inicial de coherentes e incoherentes será $2/9$, mientras que la proporción de agentes débiles será $4/9$.

4.2.2. Métricas entre agentes

A continuación, mostramos cómo definimos la similitud y la coherencia dentro del grupo, y cómo implementarlas en el mecanismo de interacción entre agentes.

En primer lugar, definimos la similitud entre los agentes i y j (S_{ij}) como una función de la distancia de Manhattan entre sus opiniones. La distancia de Manhattan se calcula como la suma de las distancias absolutas en cada coordenada. Si dos agentes tienen las mismas opiniones en ambos temas, la similitud es 1, mientras que si tienen posturas opuestas en ambos temas, la similitud es 0. La fórmula para calcular la similitud es la siguiente: $S_{ij} = 1 - \frac{|O_i - O_j|}{2}$

En la Fig. 4.1 (b), podemos observar la posición de los agentes i y j con opiniones $O_i = (0, 1)$ y $O_j = (1, 1)$. En este caso, su similitud será $S_{ij} = S_{ji} = \frac{3}{4}$. En cambio, para el agente k con opinión $O_k = (-1, 0)$, la similitud con respecto a i será $S_{ik} = S_{ki} = \frac{2}{4}$.

En segundo lugar, para implementar la atracción basada en la coherencia de grupo, definimos dos métricas:

La ideología de los agentes se calcula como: $I_i = \frac{O_i^{(x)} + O_i^{(y)}}{2}$ y varía de -1 a $+1$. El valor $I_i = -1$ corresponde a agentes coherentes de izquierda que mantienen dos opiniones de izquierda e $I_i = +1$ corresponde a los de derecha. Los agentes débiles tienen un valor absoluto de $I_i = 0,5$ y los incoherentes tienen $I_i = 0$. El signo del valor de la ideología corresponde a la inclinación del agente: un valor positivo describe a agentes de derecha y uno negativo describe a agentes

de izquierda. Los agentes cuya ideología es 0 son neutrales, ya que no pertenecen a ninguno de los dos grupos.

La coherencia de grupo se calcula como $C_{ij} = I_i \delta_{ij}$, donde δ_{ij} toma el valor de 1 si los agentes i y j tienen el mismo signo ideológico y 0 en caso contrario. Esta medida depende tanto de la ideología de los agentes como de la coherencia del agente con el que interactúan. Los pares que comparten el mismo signo ideológico tienen valores positivos, mientras que aquellos que no, tienen valores igual a 0. El valor máximo posible de esta medida se alcanza cuando los agentes son coherentes y pertenecen al mismo grupo y es 0 para los agentes externos al grupo. Es importante destacar que esta medida no es conmutativa, lo que coincide con los resultados experimentales que han demostrado que la influencia social no siempre es recíproca [173].

En la Fig. 4.1 (c) se muestra un ejemplo para los tres agentes i , j y m . La coherencia dentro del grupo que j percibe de i es $C_{ij} = 0,5$, mientras que la coherencia que i percibe de j es $C_{ji} = 1$. Mientras tanto, la coherencia dentro del grupo entre i y m es 0, ya que tienen ideologías con signos opuestos. Es interesante destacar que la coherencia dentro del grupo para los agentes neutrales es 0 al interactuar con todas las comunidades.

4.2.3. Dinámica de interacción

En este modelo los agentes interactúan entre sí y estas interacciones influyen en las opiniones de los agentes. En cada paso de tiempo, se seleccionan dos agentes al azar y su interacción llevará a que uno de los agentes influya en el otro con una probabilidad P . Incorporamos dos mecanismos diferentes que afectan la influencia de los agentes: la similaridad (que expresa la homofilia) y la coherencia dentro del grupo, como se definieron anteriormente. Esta probabilidad de influencia se implementa como una combinación lineal de ambos mecanismos: $P_{ij} = (1 - k)S_{ij} + kC_{ij}$. El parámetro k modula la fuerza de cada uno de los dos términos y varía de 0 a 1. Cuando k es 0, las interacciones son impulsadas solo por la homofilia y, cuando es 1, solo por la coherencia dentro del grupo. Cualquier valor intermedio tiene en cuenta ambas dinámicas como el propuesto por trabajos experimentales previos.

Las interacciones de a pares llevan a cambios de opinión que solo pueden ocurrir en uno de los dos temas en discusión. Las interacciones de este modelo pueden ser atractivas, repulsivas o no tener efecto según la similitud entre los agentes. Cuando los agentes son suficientemente similares, la influencia será atractiva y el agente i se moverá más cerca de j cambiando una de sus propias opiniones, como se muestra en la Fig. 4.1 (d). Por el contrario, para agentes disímiles, pueden repelerse o ignorarse mutuamente. En este último caso (variante no repulsiva), se puede pensar en una extensión bidimensional de un mecanismo de *bounded confidence*. En el caso de la repulsión, el agente i cambia una de sus opiniones (seleccionada al azar) alejándose de j y reduciendo su similitud, como se muestra en la Fig. 4.1 (e). Puede suceder que el agente no pueda moverse más en la dirección seleccionada y, en este caso particular, no se hará ningún cambio y la interacción no tendrá efecto alguno. Por ejemplo, en el caso de un agente

que tiene $O = (-1, -1)$ y que no puede moverse más en valores negativos en ninguna dimensión.

Establecemos el límite de atracción en una similitud de $3/4$. Esto significa que para valores de similitud iguales o superiores a $3/4$, las interacciones son atractivas y, de lo contrario, son repulsivas o no tienen efecto.

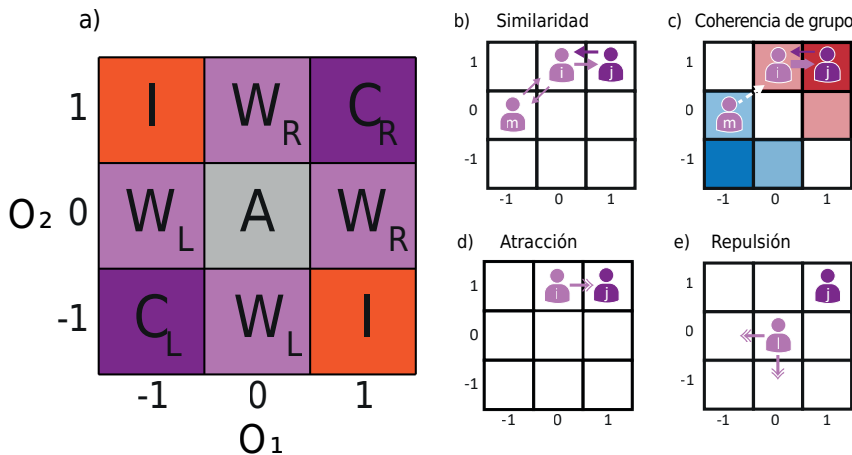


Figura 4.1: Descripción del modelo. Panel (a): Cada agente tiene una opinión independiente sobre dos temas diferentes y, según sus opiniones, se clasifican en cuatro comunidades diferentes: coherente (C), incoherente (I), débil (W) o apático (A). Además, las opiniones de los agentes definen su ideología. Los agentes pueden considerarse de izquierda o de derecha (L o R) según si la mayoría de sus opiniones están orientadas hacia la izquierda o hacia la derecha. Panel (b): La similitud mide qué tan similares son las opiniones entre dos agentes. Es una medida conmutativa. La similitud entre los agentes i y j ($S_{ij} = S_{ji} = 0,75$) es mayor que la similitud entre i y m ($S_{ik} = 0,5$) debido a que la distancia de Manhattan es menor. Panel (c): La coherencia interna mide la coherencia política del agente objetivo. Esta es una medida no conmutativa. C_{ji} es 1 porque el agente j es coherente, pero C_{ij} es 0,5 porque i es un agente débil. C_{ki} es 0 porque los agentes no comparten la misma ideología. Mientras que i es un agente orientado hacia la derecha, m está orientado hacia la izquierda. Panel (d): Las interacciones entre agentes similares son atractivas. Después de una interacción entre i y j , i cambia su opinión y se acerca más a j . Panel (e): Las interacciones entre agentes diferentes son repulsivas. Después de una interacción entre l y j , l cambia su opinión y se aleja más de j . Este movimiento podría ser hacia la izquierda o hacia abajo con una probabilidad del 0.5.

4.2.3.1. Resumen de las reglas de interacción

En resumen, sean N agentes que tienen distintas opiniones, inicialmente distribuidas aleatoriamente, para cada paso:

- Dos agentes i y j son aleatoriamente seleccionados.
- Se computa S_{ij} y C_{ij} de acuerdo con sus opiniones
- El agente i es influenciado por el agente j con probabilidad P_{ij} .
- La influencia puede ser atractiva, repulsiva o no tener efecto dependiendo de la similaridad entre los agentes.
- El agente i puede modificar su opinión en alguno de los tópicos.

4.2.4. Simulaciones

Presentamos los resultados de las simulaciones del modelo. Todas las simulaciones se realizaron para sistemas con $N = 1000$ agentes y se ejecutaron 100 simulaciones por conjunto de parámetros. El parámetro k es variado de 0 a 1 en incrementos de 0,05. Las simulaciones se detuvieron cuando el sistema alcanzó el estado estacionario y ningún agente pudo moverse de una comunidad a otra. Observamos la proporción de agentes en cada comunidad a lo largo del tiempo y nos centramos en el estado final del sistema. Para cada $k < 1$, las comunidades débiles y apáticas desaparecen. La Fig. 4.2(a) muestra la distribución final de las comunidades coherentes e incoherentes para diferentes valores de k . Cuando $k = 0$, la proporción de agentes coherentes e incoherentes es la misma ($C(t_f) = I(t_f) = 0,5$) y no hay correlación entre opiniones (Fig. 4.2(a), gráfico secundario superior izquierda). A medida que el valor de k aumenta, también lo hace la proporción de agentes coherentes (Fig. 4.2(a), gráfico secundario superior derecho). En el caso específico en el que las interacciones están impulsadas únicamente por la coherencia dentro del grupo ($k = 1$), los agentes apáticos e incoherentes no interactúan con ninguna otra población, por lo que la proporción de estos grupos no cambia con el tiempo.

4.2.5. Ecuaciones maestras

Escribimos un conjunto de ecuaciones maestras que describen la dinámica de las comunidades de los agentes. Dado que en cada interacción se seleccionan al azar dos agentes, la probabilidad de elegir a un agente de una comunidad particular depende de la proporción de la comunidad. Calculamos la probabilidad de cambiar de opinión después de las interacciones de a pares y obtenemos el valor esperado del flujo entre poblaciones.

Por ejemplo, calculamos la probabilidad de que un agente débil se vuelva coherente o viceversa, considerando los cuatro escenarios posibles en los que esto podría ocurrir:

- Un agente débil interactúa con un vecino coherente con una probabilidad de $WC/2$ (donde W y C son la proporción de agentes débiles y coherentes, respectivamente). Con una probabilidad de influencia dada por $P = (1 - k)\frac{3}{4} + k$, el agente débil se movería a la población coherente.
- Un agente débil interactúa con otro agente débil con una ideología opuesta con una probabilidad de $W^2/4$. Con una probabilidad de $P = (1 - k)\frac{1}{2}$ y debido a una interacción repulsiva se volverá coherente.
- Un agente débil interactúa con un agente coherente de ideología opuesta con una probabilidad de $WC/2$. Con una probabilidad de $P = (1 - k)\frac{3}{4}$, se movería a la población coherente debido a una interacción repulsiva.
- Un agente coherente interactúa con un agente débil adyacente con una probabilidad de $WC/2$. Con una probabilidad de $P = (1 - k)\frac{3}{4} + \frac{k}{2}$, el agente coherente se moverá a la población débil.

Al repetir este análisis con las otras comunidades, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{dC}{dt} &= WC\left(\frac{1-k}{16} + \frac{k}{4}\right) + W^2\frac{1-k}{16} \\
 \frac{dI}{dt} &= WI\frac{1-k}{16} + W^2\frac{1-k}{16} \\
 \frac{dA}{dt} &= -AC\frac{1-k}{2} - AI\frac{1-k}{2} \\
 \frac{dW}{dt} &= WC\left(\frac{1-k}{16} + \frac{k}{4}\right) - WI\frac{1-k}{16} - W^2\frac{1-k}{8} + AC\frac{1-k}{2} + AI\frac{1-k}{2}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se calculó una solución numérica a este problema dinámico cuando las opiniones iniciales de los agentes están distribuidas aleatoriamente. Esta situación corresponde a $C(0) = I(0) = 2/9$, $A(0) = 1/9$ y $W(0) = 4/9$. Luego observamos la distribución final de cada comunidad, como se puede observar en la en la Fig. 4.2(b) para comunidades coherentes e incoherentes para diferentes valores de k . Obtuvimos los mismos resultados a partir de las soluciones analíticas (Fig. 4.2(b)) y los estados finales de las simulaciones (Fig. 4.2(a)). En particular, cuando $k = 0$, las interacciones solo se rigen por la homofilia, las poblaciones coherentes e incoherentes muestran el mismo comportamiento ($dC/dt = dI/dt$). En consecuencia, las proporciones finales de agentes son las mismas para ambas comunidades. Cuando $k = 1$, las interacciones solo se rigen por la coherencia de grupo y, en promedio, las poblaciones apáticas e incoherentes no cambian con el tiempo ($dA/dt = dI/dt = 0$). De la misma manera que en las simulaciones, observamos que a medida que k aumenta, también lo hace el número de agentes coherentes.

Además desarrollamos y resolvimos las ecuaciones para la variante del modelo no repulsiva. Los términos que involucran interacciones repulsivas no están presentes y las ecuaciones dinámicas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= WC \frac{k}{4} \\
\frac{dI}{dt} &= 0 \\
\frac{dA}{dt} &= 0 \\
\frac{dW}{dt} &= -WC \frac{k}{4}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

En esta variante, las comunidades incoherentes y apáticas, en promedio, no cambian con el tiempo. Cuando $k > 0$, todos los agentes débiles se vuelven coherentes y, como consecuencia, las proporciones finales de agentes en sus comunidades no dependen de k . La Fig. 4.2 (C) muestra el estado final de las simulaciones y la Fig. 4.2 (D) las soluciones numéricas para el modelo no repulsivo.

4.2.6. Comparación con los datos empíricos

Aquí nos enfocamos en uno de los múltiples fenómenos de polarización política: el *sorting* ideológico (o alineación ideológica), en el cual las opiniones sobre temas aparentemente no relacionados muestran una fuerte correlación entre sí. En el contexto del modelo propuesto, un mayor *sorting* ideológico corresponde a un aumento en la proporción de agentes coherentes. A continuación, analizamos hasta qué punto las opiniones reales sobre una amplia variedad de temas controvertidos están clasificadas y pueden ser analizadas en el contexto del modelo desarrollado para estudiar el papel de la homofilia y la coherencia de grupo en la dinámica de opinión. Trabajamos con múltiples fuentes de datos con más de 20000 respuestas sobre 80 temas polarizantes diferentes. Todas las respuestas indican si los participantes están de acuerdo o no con cada tema diferente (Tabla 4.1).

4.2.6.1. Datos

- **Zimmerman et al. 2022.** En este trabajo se realizaron múltiples experimentos conductuales para entender cómo las personas perciben a individuos políticamente coherentes. Primero, realizaron una encuesta en línea preguntando a 180 participantes de Argentina su opinión sobre 28 temas diferentes para seleccionar temas políticos relevantes y controvertidos. Esta encuesta les permitió seleccionar los cinco temas políticos y los cinco temas no políticos que utilizaron en un experimento con 5038 participantes.
- **ANES 2020 y 2016.** Los Estudios Electorales Nacionales de América (ANES, por sus siglas en inglés) son encuestas representativas nacionales de votantes estadounidenses elegibles. Las encuestas se han realizado antes

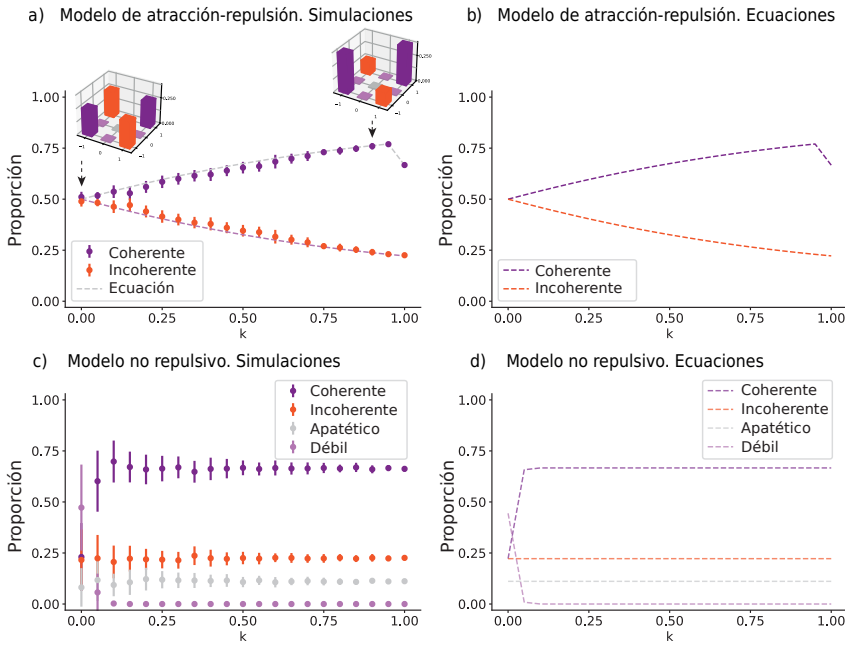


Figura 4.2: Se muestran los estados finales del modelo para diferentes valores de k . Modelo atrayente-repulsivo: Panel (a). La figura muestra los valores promedio (puntos) y la desviación estándar (barra de error) de las proporciones finales de las poblaciones. La comunidad coherente se muestra en púrpura y la incoherente en naranja. Para $k < 1$, a medida que k aumenta, también lo hace la proporción final de agentes coherentes. El recuadro superior izquierdo muestra la distribución final media de las opiniones de los agentes para $k = 0$ y el recuadro superior derecho para $k = 0.9$. Panel (b) La figura muestra la solución analítica del modelo. Muestra la proporción final de agentes coherentes en púrpura y la proporción final de agentes incoherentes en naranja. Modelo no repulsivo: Panel (c) La figura muestra las proporciones finales de las poblaciones. La comunidad coherente se muestra en púrpura, la incoherente en naranja, la apática en gris y la débil en rosa. Para $k > 0$, sus proporciones finales de agentes coherentes no varían significativamente con k . Panel (d) La figura muestra la solución analítica del modelo no repulsivo.

y después de cada elección presidencial desde 1948. Todas las preguntas están relacionadas con la política de EE. UU. Solo utilizamos las preguntas de la encuesta que expresan la aprobación o desaprobación de temas controvertidos por parte de los participantes, y trabajamos con datos de las últimas dos encuestas. La encuesta realizada antes de las elecciones presidenciales de 2020 fue completada por 8280 personas, mientras que la realizada antes de las elecciones de 2016 fue completada por 4270.

- **Freira et al. 2021.** En este trabajo se realizó un experimento comportamental en línea durante el año 2020 en cuatro países diferentes para comprender cómo las diferencias partidistas influenciaron la percepción de la pandemia de COVID-19. 1995 participantes de Argentina, Brasil, Uruguay y Estados Unidos expresaron su opinión sobre ocho políticas preventivas de la pandemia.
- **Encuestas Pew Research 2020 y 2014.** El Centro de Investigación Pew es un centro de estudios estadounidense que proporciona información sobre temas sociales y tendencias de opinión pública. Sus diferentes encuestas representativas cubren una amplia variedad de temas, como la política estadounidense, el clima, la religión y los vehículos autónomos. Para nuestros propósitos, seleccionamos dos encuestas: una orientada a comprender la opinión pública sobre las agencias federales estadounidenses y la otra para estudiar cómo la religión influye en la vida cotidiana de los estadounidenses. La primera se realizó en 2020 y 1013 participantes completaron una encuesta expresando si favorecen o no a diferentes organizaciones federales estadounidenses. En la encuesta de tendencias de panel de 2014, 3278 estadounidenses completaron una encuesta web autoadministrada que cubría una amplia gama de temas, incluida la religión y las opiniones personales. Dentro de esta encuesta, nos enfocamos en las opiniones personales sobre temas como mentir o meditar.

Aunque todas las opiniones populares son de interés para la política, observamos que algunos de los conjuntos de datos seleccionados cubren temas que forman parte de agendas partidarias específicas, como el aborto o el control de armas. Consideramos este conjunto de opiniones como políticas. Además, algunos temas no son relevantes para ninguna plataforma política, como las mascotas o las preferencias alimentarias. Este último grupo de temas se etiquetó como no político (Tabla 4.1).

Para cada conjunto de datos, seleccionamos las preguntas que expresan las opiniones de los participantes sobre un tema en particular. Además, solo consideramos temas controvertidos en los que no hay una opinión mayoritaria. Las respuestas de los temas seleccionados exhiben una alta varianza ($\sigma_2 > 0,5$). Siguiendo el modelo propuesto, todas las respuestas se mapearon en tres posibles respuestas: -1 , 0 o 1 , donde 0 expresa una postura indecisa o neutral. Para algunas preguntas, este procedimiento fue trivial, pero para otras, fusionamos diferentes grados de aceptación en una única alternativa. Por ejemplo, todas las siguientes respuestas se consideraron como un acuerdo con nuestro modelo: “muy de acuerdo”, “algo de acuerdo”, “muy favorable” y “en su mayoría favorable”. Además, para observar la alineación ideológica, necesitábamos codificar las respuestas como en el modelo: las opiniones de derecha como 1 y las opiniones de izquierda como -1 , independientemente de cómo se presentara la pregunta. Para hacerlo, seguimos el procedimiento propuesto en [112], donde proyectaron las respuestas de acuerdo / desacuerdo al primer componente principal de los

datos, que (en el ámbito político) es equivalente a codificarlas como respuestas de izquierda / derecha y alinear las respuestas en su ideología correspondiente.

4.2.6.2. *Sorting*

Para contrastar el ordenamiento partidario-ideológico de los datos con el modelo bidimensional propuesto, nos enfocamos solo en la relación entre la proporción de opiniones coherentes (C) e incoherentes (I). Calculamos el *sorting* (S) como la proporción de agentes coherentes en relación con las comunidades coherentes e incoherentes para todos los posibles pares de opiniones dentro de cada conjunto de datos: $S = \frac{C}{C+I}$. Por medio de este procedimiento estamos desestimando la proporción de ajenos (A) y débiles (W). La Figura 4.3 (a) muestra el valor de *sorting* medio para cada conjunto de datos clasificado de menor a mayor. Los conjuntos de datos no políticos se muestran como puntos grises y se usan rombos negros para los conjuntos de datos políticos. Es destacable que los conjuntos de datos políticos muestran los valores de *sorting* más altos.

Por otro lado, seguimos el mismo procedimiento utilizado para los datos para calcular el valor de *sorting* medio de 100 simulaciones en las que $k=0$, es decir, simulaciones solo homofílicas. Primero, para el estado final de cada simulación, proyectamos las opiniones a su primer componente principal y luego calculamos el valor de *sorting* correspondiente. El valor de *sorting* medio de las simulaciones ($y = 0,52$) se muestra en una línea discontinua horizontal gris (Fig. 4.3 (a)). Observamos que ningún valor de *sorting* no político es significativamente diferente de las simulaciones homofílicas (t-test de una muestra; $ts < 3,1$, $ps > 0,013$) y 10 de los 12 valores de *sorting* políticos sí lo son ($ts > 5,7$, $ps < 0,0004$).

Además, tener la solución analítica del modelo nos permite mapear cada valor de *sorting* en su correspondiente parámetro k del modelo, como se muestra en la Figura 4.3 (b). En consecuencia, los conjuntos de datos políticos corresponden a los valores más altos de k .

En conjunto, al combinar el modelo con datos reales, encontramos que las opiniones no políticas muestran los niveles más bajos observados de *sorting*, lo que puede explicarse por la homofilia y las interacciones atractivo-repulsivas. Pero en el ámbito político, la homofilia por sí sola no puede explicar la aparición de los niveles observados de *sorting* ideológico. Estos resultados concuerdan con trabajos experimentales recientes que mostraron que tanto la homofilia como el favoritismo de la coherencia de grupo son relevantes en las interacciones políticas. Además, nuestro modelo nos permitió estudiar cómo estos mecanismos impactan en el panorama macroscópico de las opiniones, en particular, cómo se relacionan con la polarización de temas y la alineación ideológica.

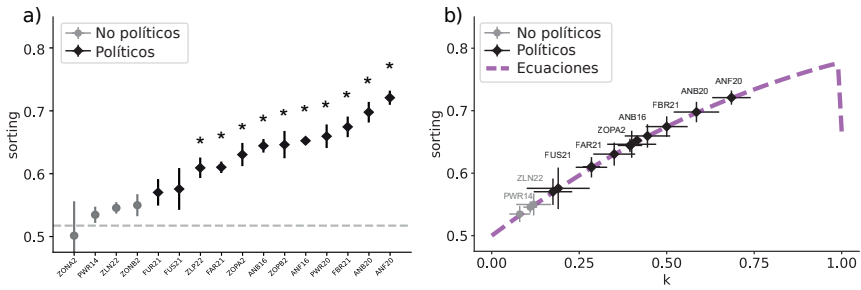


Figura 4.3: Ajuste de los parámetros del modelo a opiniones reales sobre diferentes temas. En el panel (a) la figura muestra el valor medio de *sorting* para cada conjunto de datos, clasificados de menor a mayor. Los conjuntos de datos no políticos se muestran como puntos grises claros y los políticos como rombos negros. Los acrónimos se refieren a diferentes conjuntos de preguntas como se describe en la Tabla 4.1. Los asteriscos indican si el valor de *sorting* es significativamente mayor que el observado en simulaciones donde el único mecanismo es la homofilia ($*p < 0,01$). En el panel (b) el valor medio de *sorting* de cada conjunto de datos se asignó a su correspondiente valor k del modelo. Los conjuntos de datos no políticos se muestran en gris claro y los políticos en negro.

Fuente y año	# de temas	# de participantes	País	Tópico
Zimmerman et al. 2022	20	5218	Argentina	Político y no político
ANES 2020	14	8280	USA	Político
ANES 2016	28	4270	USA	Político
Freira et al. 2021	8	1642	Argentina, Brasil, Uruguay, USA	Político
Pew Research 2020	5	1013	USA	Político
Pew Research 2014	5	3278	USA	No político

Cuadro 4.1: Breve resumen de las características más relevantes de las seis fuentes de datos consideradas en este trabajo: la fuente, el año en que se realizó la encuesta, el número de temas seleccionados, el número de participantes que completaron cada encuesta, el país y si los temas están relacionados con la política o no. Se utilizaron más de 20000 respuestas sobre 80 temas diferentes.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis estudiamos procesos de dinámica de formación de opinión por influencia social mediante diferentes enfoques: formulaciones analíticas basadas en ecuaciones de tipo Boltzmann, aproximaciones novedosas al estudio de modelos clásicos, dinámicas de opinión en espacios multidimensionales y modelos basados en datos.

Para los modelos propuestos obtuvimos una formulación analítica ya sea de manera exacta o aproximada. Esto nos permite ampliar su comprensión pudiendo por ejemplo identificar el rol de los parámetros, conocer los posibles estados finales y el conjunto de condiciones para llegar a ellos y comprender mejor las transiciones de fase.

Uno de los ejes principales de esta tesis es el estudio de modelos donde la opinión está representada de manera multidimensional. Este tipo de problemas ha comenzado a estudiarse con más profundidad recientemente [25, 27, 117, 119], pero sin embargo encontramos muy pocos aportes analíticos en la literatura, como el que brindamos en el capítulo 2. Al incorporar más dimensiones en el desarrollo de los modelos clásicos de opinión se abre un nuevo abanico de fenómenos y de interacciones posibles. En este contexto es posible estudiar fenómenos como la alineación de tópicos [111, 174]. Estudiar cómo se conforman las relaciones entre los tópicos y qué efectos producen, en especial para explicar la alineación de tópicos es un tema todavía pendiente, en el que nos encontramos trabajando actualmente.

En el capítulo 1 se realiza una introducción y un recorrido bibliográfico sobre los modelos clásicos de opinión y algunas variantes que han abordado estas problemáticas en los últimos años. Analizamos algunos modelos de opinión continua, discreta y multidimensionales. Presentamos también los fundamentos para desarrollar las ecuaciones maestras, que después utilizaremos en el resto de los capítulos. Por último resaltamos la importancia de elaborar modelos basados en datos y realizamos un recorrido por distintas variantes presentes en la literatura para hacerlo.

En el capítulo 2 estudiamos dos modelos con opinión continua. La primera variante nos permite analizar un modelo en un espacio bidimensional y comparar distintos mecanismos de interacción en ese contexto. Desarrollamos una expresión analítica para la dinámica y mostramos que bajo algunas condiciones en la interacción podemos asegurar que la dinámica converge. La ecuación maestra nos permite estudiar no solo el desarrollo temporal, sino también, en los casos donde hay convergencia, el tiempo hasta el consenso. Encontramos una diferencia en los tiempos de convergencia según el mecanismo elegido que se condice con los observados en las simulaciones. En este capítulo también se analiza un modelo donde la opinión no está expresada por un valor determinista

sino que es representada como una variable aleatoria con una distribución de probabilidad asociada. En cada interacción la opinión percibida es una realización de esa variable, que puede modificar la distribución del agente con el que interactúa. Este modelo permite estudiar lo que ocurre cuando se analiza la opinión de expertos y expertas sobre un tema que presenta una aleatoriedad, o bien una dinámica donde hay un ruido en el canal de comunicación, que produce que el mensaje emitido pueda ser modificado antes de la recepción. Encontramos la ecuación maestra para la dinámica, y la utilizamos para demostrar la tendencia al consenso y dar una cota para la varianza que nos permite obtener los tiempos de convergencia.

En el capítulo 3 se estudia un modelo donde las opiniones son discretas pero están determinadas por una variable subyacente continua. La expresión analítica obtenida es de compleja resolución por lo que realizamos una aproximación en términos de los valores medios de las percepciones de cada conjunto de agentes con la misma opinión. Si bien obtenemos ecuaciones muy simples, estas nos permiten predecir con precisión la dinámica total del sistema y el estado final en función de los parámetros iniciales. De esta manera podemos obtener una expresión analítica entre un estado de consenso y un estado de polarización en función de las condiciones iniciales. En el mismo sentido, en este capítulo, estudiamos otra aproximación que permite obtener una resolución analítica novedosa para el modelo de Axelrod con dos o tres atributos. Esta aproximación permite explicar no solo el estado final y las transiciones del sistema, sino también la dinámica completa. Además, la expresión analítica nos permite separar el rol de los dos parámetros principales del modelo: F , la cantidad de atributos y Q la cantidad de opciones por atributo. Concluimos que este último solo juega un rol en la definición de la condición inicial, y luego la dinámica queda determinada en la relación entre F y el tamaño del sistema N .

Por último, para desarrollar modelos que sean útiles para estudiar fenómenos de la dinámica de opinión en la realidad, es importante hacerlo en conjunto con un análisis de datos. En este sentido, en el capítulo 4 presentamos un modelo en dos dimensiones cada una de las cuales se divide en tres posibles opiniones. Para desarrollar este modelo incorporamos los ingredientes trabajados en los capítulos anteriores. Al modelar la interacción tomamos en cuenta los resultados de un estudio experimental [112]. De esta manera construimos un mecanismo basado en la homofilia y la coherencia de grupo. El modelo permite explicar distintos grados de alineación de tópicos en función de la presencia de cada uno de estos dos mecanismos. A su vez lo utilizamos para explicar la diferencia en la alineación de tópicos registrada en datos provenientes de distintos experimentos y encuestas. Encontramos que aquellos datos que reflejan la opinión acerca de tópicos relacionados con la agenda política muestran una mayor alineación de tópicos, que puede explicarse a través del modelo como una mayor predominancia de la coherencia de grupo como mecanismo de interacción. Esta observación se condice con el estudio experimental donde en aquellos debates “más políticos” se observa una mayor preferencia por las personas con mayor coherencia de grupo que en los debates acerca de gustos personales o individuales.

Actualmente y con perspectiva a futuros trabajos, nos encontramos estudian-

do el desarrollo de modelos y la comprobación de las hipótesis que utilizamos en ellos a partir de datos. En este sentido nos proponemos realizar una evaluación cuantitativa de un aspecto de la teoría de argumentos persuasivos utilizando textos de debates legislativos.

La teoría de argumentos persuasivos (PAT) es un mecanismo propuesto para explicar cómo los individuos pueden cambiar sus opiniones y comportamientos [141, 175, 176]. A diferencia de las teorías de la imitación o de la comparación, la PAT asume que cuando dos individuos interactúan, no comparan simplemente sus opiniones, sino que intercambian un conjunto de ideas, imágenes o pensamientos relacionados con el tema en cuestión, los cuales son definidos como argumentos. Se presume que existe una cantidad finita de posibles argumentos determinada por la cultura, y que cuando un individuo emite una opinión, considera un subconjunto de esos argumentos. La preponderancia de argumentos a favor o en contra determinará la dirección y la magnitud de dicha opinión. Esta teoría permite explicar fenómenos de polarización e incluso cómo un grupo de individuos inicialmente en consenso puede alcanzar un estado de polarización [177].

Actualmente estamos enfocados en un trabajo que busca analizar si, en determinadas circunstancias, la opinión de un grupo de sujetos se basa en argumentos. En este contexto, los discursos legislativos son un escenario ideal, ya que los y las legisladoras emiten su opinión sobre el tema en discusión y la fundamentan a través de sus discursos. Nos encontramos trabajando para, utilizando herramientas de procesamiento de lenguaje natural (NLP por sus siglas en inglés), encontrar conjuntos de palabras que aparecen en contextos similares, que pueden ser denominadas como argumentos. Además, queremos encontrar indicios de que lo que hemos encontrado tiene comportamientos que podamos asociar con los esperables por los argumentos en el contexto de la PAT. Por ejemplo, buscamos identificar qué argumentos expresan una opinión favorable o desfavorable con el tema debatido y comprobar si de esta manera es posible recuperar la información del voto.

Este trabajo, que se encuentra actualmente en proceso, nos permitirá analizar la presencia de argumentos en un debate. Sin embargo, los datos disponibles no permiten estudiar los intercambios de argumento y la dinámica de opinión. Por eso, para complementar este análisis estamos trabajando en la elaboración de un modelo basado en la PAT. Aquí buscamos incorporar el concepto de argumentos como el elemento central para la formación de la opinión, pero simplificar el modelo a sus ingredientes mínimos de manera de poder desarrollar la ecuación maestra. De esta manera, al considerar argumentos positivos y negativos pero de igual peso que se intercambian en cada interacción, la posibilidad de perder y de ganar un argumento solo está definida por la cantidad de argumentos de cada tipo de los agentes que interactúan. Por lo tanto, nos encontramos ante un modelo equivalente a los presentados en el capítulo 2. Utilizando la misma técnica podemos encontrar la expresión analítica, y de esta manera el objetivo es extender el estudio de la dinámica y calcular la transición entre un estado polarizado y uno de consenso.

En conclusión, intentar comprender y elaborar reglas e hipótesis sobre los

comportamientos sociales, y en especial los procesos de influencia social y de formación de opinión es un problema complejo y de carácter interdisciplinario. El comportamiento humano no necesariamente obedece ninguna ley universal y más aún puede estar mediado por interacciones a distintos niveles: entre personas, con medios de comunicación, instituciones, convenciones sociales, cultura, etc. Sin embargo, desde la física estadística podemos aportar herramientas y construir modelos que nos permitan aislar mecanismos y fenómenos, y poder estudiar su relación. El uso de modelos basados en agentes en conjunto con el desarrollo de ecuaciones que rigen la dinámica nos permite una comprensión más profunda de estos modelos. A su vez, el acceso a cada vez mayor cantidad de datos que nos pueden dar evidencia sobre las características propias de las interacciones humanas es fundamental para la elaboración y contrastación de los modelos. Más aún, es posible acercarse a estas cuestiones desde un enfoque interdisciplinario que se nutra de los estudios provenientes de otras disciplinas sobre el comportamiento humano y social para el desarrollo de modelos que a su vez servir como herramienta para aportar a esas disciplinas. El abordaje conjunto de estas tres perspectivas; modelos, datos y estudios sociales; es la clave para una comprensión cada vez más profunda sobre la dinámica de influencia social a la que esta tesis pretendió hacer un aporte.

Apéndice A

Trabajos publicados relacionados con esta tesis

A continuación, se presentan las publicaciones elaboradas en el marco de esta tesis:

- Pedraza, L., Pinasco, J. P., Saintier, N.: **Measure-valued opinion dynamics.** – *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2020.
- Pedraza, L., Pinasco, J. P., Saintier, N., Balenzuela, P.: **An analytical formulation for multidimensional continuous opinion models.** – *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021.
- Pedraza, L., Pinasco, J. P., Semeshenko, V., Balenzuela, P.: **Mesoscopic analytical approach in a three-state opinion model with continuous internal variable.** – *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023.
- Pedraza, L., Pinto, S., Pinasco, J. P., Balenzuela, P.: **Analytical approach to the Axelrod model based on similarity vectors.** – *Physical Review E*, 2021.
- Zimmerman, F., Pedraza, L., Navajas, J., Balenzuela, P.: **Attraction by ingroup coherence drives the emergence of ideological sorting.** – *arXiv preprint arXiv:2304.12559* 2023.

Bibliografía

1. Deffuant, G., Neau, D., Amblard, F. y Weisbuch, G. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems* **3**, 87-98 (2000).
2. Mora y Araujo, M. *Elementos para una teoría de la opinión pública: Tomo I. La opinión pública (2a)* (La Crujía, Buenos Aires, 2012).
3. Schweitzer, F. Sociophysics. *Phys. Today* **71**, 40 (2018).
4. Fortunato, S., Macy, M. y Redner, S. Statistical mechanics and social sciences. *arXiv preprint arXiv:1304.1171* (2013).
5. San Miguel, M. y Toral, R. *Introduction to the chaos focus issue on the dynamics of social systems* 2020.
6. Castellano, C., Fortunato, S. y Loreto, V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of modern physics* **81**, 591 (2009).
7. García, R. *Sistemas complejos: conceptos, métodos y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria* (Editorial Gedisa, 2006).
8. Sîrbu, A., Loreto, V., Servedio, V. D. y Tria, F. Opinion dynamics: models, extensions and external effects. *Participatory sensing, opinions and collective awareness*, 363-401 (2017).
9. Savage, L. J. *The foundations of statistics* (Wiley, New York, 1954).
10. Clemen, R. T. y Winkler, R. L. Combining probability distributions from experts in risk analysis. *Risk analysis* **19**, 187-203 (1999).
11. Hogarth, R. M. en *Decision making and change in human affairs* 231-255 (Springer, 1977).
12. Jacobs, R. A. Methods for combining experts' probability assessments. *Neural computation* **7**, 867-888 (1995).
13. Stone, M. The opinion pool. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1339-1342 (1961).
14. Winkler, R. L. The consensus of subjective probability distributions. *Management Science* **15**, B-61 (1968).
15. DeGroot, M. H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical association* **69**, 118-121 (1974).
16. Aletti, G., Naimzada, A. K. y Naldi, G. Mathematics and physics applications in sociodynamics simulation: the case of opinion formation and diffusion. *Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences*, 203-221 (2010).

17. Smith, E. R. y Conrey, F. R. Agent-based modeling: A new approach for theory building in social psychology. *Personality and social psychology review* **11**, 87-104 (2007).
18. Liggett, T. *Interacting Particle Systems* (Springer Berlin Heidelberg, 1985).
19. Sire, C. y Majumdar, S. N. Coarsening in the q-state potts model and the ising model with globally conserved magnetization. *Physical Review E* **52**, 244 (1995).
20. Clifford, P. y Sudbury, A. A model for spatial conflict. *Biometrika* **60**, 581-588 (1973).
21. Holley, R. A. y Liggett, T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *The annals of probability*, 643-663 (1975).
22. Sznajd-Weron, K. y Sznajd, J. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C* **11**, 1157-1165 (2000).
23. Hegselmann, R. y Krause, U. Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation. *J. Artificial Societies and Social Simulation* **5** (2002).
24. Toscani, G. Kinetic models of opinion formation. *Communications in mathematical sciences* **4**, 481-496 (2006).
25. Baumann, F., Lorenz-Spreen, P., Sokolov, I. M. y Starnini, M. *Emergence of polarized ideological opinions in multidimensional topic spaces* 2021.
26. Huet, S., Deffuant, G. y Jager, W. A rejection mechanism in 2D bounded confidence provides more conformity. *Advances in Complex Systems* **11**, 529-549 (2008).
27. Laguna, M., Abramson, G. y Zanette, D. Vector opinion dynamics in a model for social influence. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **329**, 459-472 (nov. de 2003).
28. Motsch, S. y Tadmor, E. Heterophilious dynamics enhances consensus. *SIAM review* **56**, 577-621 (2014).
29. Gimenez, M. C., Reinaudi, L. y Vazquez, F. Contrarian Voter Model under the Influence of an Oscillating Propaganda: Consensus, Bimodal Behavior and Stochastic Resonance. *Entropy* **24**, 1140 (2022).
30. Crokidakis, N., Blanco, V. H. y Anteneodo, C. Impact of contrarians and intransigents in a kinetic model of opinion dynamics. *Physical Review E* **89**, 013310 (2014).
31. Pérez-Llanos, M., Pinasco, J. P., Saintier, N. y Silva, A. Opinion formation models with heterogeneous persuasion and zealotry. *arXiv preprint arXiv:1803.10114* (2018).
32. Mobilia, M., Petersen, A. y Redner, S. On the role of zealotry in the voter model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2007**, P08029 (2007).

33. Khalil, N., San Miguel, M. y Toral, R. Zealots in the mean-field noisy voter model. *Physical Review E* **97**, 012310 (2018).
34. Aletti, G., Naldi, G. y Toscani, G. First-order continuous models of opinion formation. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **67**, 837-853 (2007).
35. Vieira, A. R. y Crokidakis, N. Phase transitions in the majority-vote model with two types of noises. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **450**, 30-36 (2016).
36. Harras, G., Tessone, C. J. y Sornette, D. Noise-induced volatility of collective dynamics. *Physical Review E* **85**, 011150 (2012).
37. Huang, M. y Manton, J. H. *Opinion dynamics with noisy information* en *52nd IEEE Conference on Decision and Control* (2013), 3445-3450.
38. Pineda, M., Toral, R. y Hernández-García, E. The noisy Hegselmann-Krause model for opinion dynamics. *The European Physical Journal B* **86**, 490 (2013).
39. Su, W., Chen, G. y Hong, Y. Noise leads to quasi-consensus of Hegselmann-Krause opinion dynamics. *Automatica* **85**, 448-454 (2017).
40. Vieira, A. R., Peralta, A. F., Toral, R., San Miguel, M. y Anteneodo, C. Pair approximation for the noisy threshold q-voter model. *Physical Review E* **101**, 052131 (2020).
41. Ben-Naim, E., Frachebourg, L. y Krapivsky, P. L. Coarsening and persistence in the voter model. *Physical Review E* **53**, 3078 (1996).
42. Cox, J. T. y Griffeath, D. Diffusive clustering in the two dimensional voter model. *The Annals of Probability*, 347-370 (1986).
43. Suchecki, K., Eguíluz, V. M. y San Miguel, M. Conservation laws for the voter model in complex networks. *Europhysics Letters* **69**, 228 (2004).
44. Suchecki, K., Eguíluz, V. M. y San Miguel, M. Voter model dynamics in complex networks: Role of dimensionality, disorder, and degree distribution. *Physical Review E* **72**, 036132 (2005).
45. Sood, V. y Redner, S. Voter model on heterogeneous graphs. *Physical review letters* **94**, 178701 (2005).
46. Sood, V., Antal, T. y Redner, S. Voter models on heterogeneous networks. *Physical Review E* **77**, 041121 (2008).
47. Castellano, C., Vilone, D. y Vespignani, A. Incomplete ordering of the voter model on small-world networks. *Europhysics Letters* **63**, 153 (2003).
48. Vilone, D. y Castellano, C. Solution of voter model dynamics on annealed small-world networks. *Physical Review E* **69**, 016109 (2004).
49. Vazquez, F. y Eguíluz, V. M. Analytical solution of the voter model on uncorrelated networks. *New Journal of Physics* **10**, 063011 (2008).
50. Fernández-Gracia, J., Suchecki, K., Ramasco, J. J., San Miguel, M. y Eguíluz, V. M. Is the voter model a model for voters? *Physical review letters* **112**, 158701 (2014).

51. Peralta, A. F., Carro, A., San Miguel, M. y Toral, R. Analytical and numerical study of the non-linear noisy voter model on complex networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28**, 075516 (2018).
52. Carro, A., Toral, R. y San Miguel, M. The noisy voter model on complex networks. *Scientific reports* **6**, 24775 (2016).
53. Granovsky, B. L. y Madras, N. The noisy voter model. *Stochastic Processes and their applications* **55**, 23-43 (1995).
54. Vieira, A. R. y Anteneodo, C. Threshold q-voter model. *Physical Review E* **97**, 052106 (2018).
55. Castellano, C., Marsili, M. y Vespignani, A. Nonequilibrium phase transition in a model for social influence. *Physical Review Letters* **85**, 3536 (2000).
56. Mobilia, M. Nonlinear q-voter model with inflexible zealots. *Physical Review E* **92**, 012803 (2015).
57. Sznajd-Weron, K. Mean-field results for the two-component model. *Physical Review E* **71**, 046110 (2005).
58. Stauffer, D., Sousa, A. O. y De Oliveira, S. M. Generalization to square lattice of Sznajd sociophysics model. *International Journal of Modern Physics C* **11**, 1239-1245 (2000).
59. Schneider, J. J. The influence of contrarians and opportunists on the stability of a democracy in the Sznajd model. *International Journal of Modern Physics C* **15**, 659-674 (2004).
60. Slanina, F. y Lavicka, H. Analytical results for the Sznajd model of opinion formation. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **35**, 279-288 (2003).
61. Sznajd-Weron, K., Sznajd, J. y Weron, T. A review on the Sznajd model—20 years after. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **565**, 125537 (2021).
62. Galam, S. Majority rule, hierarchical structures, and democratic totalitarianism: A statistical approach. *Journal of Mathematical Psychology* **30**, 426-434 (1986).
63. Galam, S. Social paradoxes of majority rule voting and renormalization group. *Journal of Statistical Physics* **61**, 943-951 (1990).
64. Galam, S. Real space renormalization group and totalitarian paradox of majority rule voting. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **285**, 66-76 (2000).
65. Galam, S. Sociophysics: A review of Galam models. *International Journal of Modern Physics C* **19**, 409-440 (2008).
66. De La Lama, M., Szendro, I., Iglesias, J. y Wio, H. Van Kampen's expansion approach in an opinion formation model. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **51**, 435-442 (2006).

67. Couzin, I. D. *et al.* Uninformed Individuals Promote Democratic Consensus in Animal Groups. *Science* **334**, 1578-1580 (2011).
68. Sobkowicz, P. Discrete model of opinion changes using knowledge and emotions as control variables (2012).
69. Vazquez, F. y Redner, S. Ultimate fate of constrained voters. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37**, 8479 (2004).
70. Singh, P., Sreenivasan, S., Szymanski, B. K. y Korniss, G. Competing effects of social balance and influence. *Physical Review E* **93**, 042306 (2016).
71. Marvel, S. A., Hong, H., Papush, A. y Strogatz, S. H. Encouraging moderation: clues from a simple model of ideological conflict. *Physical review letters* **109**, 118702 (2012).
72. Travieso, G. y da Fontoura Costa, L. Spread of opinions and proportional voting. *Physical Review E* **74**, 036112 (2006).
73. Svenkeson, A. y Swami, A. Reaching consensus by allowing moments of indecision. *Scientific Reports* **5**, 1-9 (2015).
74. Galam, S. The drastic outcomes from voting alliances in three-party democratic voting (1990→ 2013). *Journal of Statistical Physics* **151**, 46-68 (2013).
75. Gekle, S., Peliti, L. y Galam, S. Opinion dynamics in a three-choice system. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **45**, 569-575 (2005).
76. Galam, S. Sociophysics: A review of Galam models. *International Journal of Modern Physics C* **19**, 409-440 (2008).
77. Galam, S. *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena* (Springer, 2016).
78. Chmiel, A., Sienkiewicz, J. y Sznajd-Weron, K. Tricriticality in the q-neighbor Ising model on a partially duplex clique. *Physical Review E* **96**, 062137 (2017).
79. Jedrzejewski, A., Chmiel, A. y Sznajd-Weron, K. Oscillating hysteresis in the q-neighbor Ising model. *Physical Review E* **92**, 052105 (2015).
80. Lorenz, J. Continuous opinion dynamics under bounded confidence: A survey. *International Journal of Modern Physics C* **18**, 1819-1838 (2007).
81. Abelson, R. Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy. *Contributions to mathematical psychology* (1964).
82. Noorazar, H., Sottile, M. y Vixie, K. An energy-based interaction model for population opinion dynamics with topic coupling. *International Journal of Modern Physics C* (jul. de 2016).
83. Amblard, F. y Deffuant, G. The role of network topology on extremism propagation with the relative agreement opinion dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **343**, 725-738 (2004).

84. Deffuant, G., Amblard, F., Weisbuch, G. y Faure, T. How can extremism prevail? A study based on the relative agreement interaction model. *Journal of artificial societies and social simulation* **5** (2002).
85. Deffuant, G. Comparing extremism propagation patterns in continuous opinion models. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* **9** (2006).
86. Weisbuch, G., Deffuant, G. y Amblard, F. Persuasion dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **353**, 555-575 (2005).
87. Anteneodo, C. y Crokidakis, N. Symmetry breaking by heating in a continuous opinion model. *Physical Review E* **95**, 042308 (2017).
88. Ben-Naim, E., Krapivsky, P., Vazquez, F. y Redner, S. Unity and discord in opinion dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **330**, 99-106 (2003).
89. Hegselmann, R. y Krause, U. Opinion dynamics driven by various ways of averaging. *Computational Economics* **25**, 381-405 (2005).
90. Slanina, F. Dynamical phase transitions in Hegselmann-Krause model of opinion dynamics and consensus. *The European Physical Journal B* **79**, 99-106 (2011).
91. Pérez-Llanos, M., Pinasco, J. y Saintier, N. Opinion fitness and convergence to consensus in homogeneous and heterogeneous populations. *Networks & Heterogeneous Media* **16**, 257 (2021).
92. Cercignani, C., Illner, R. y Pulvirenti, M. *The mathematical theory of dilute gases* (Springer Science & Business Media, 2013).
93. Axelrod, R. The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization. *Journal of conflict resolution* **41**, 203-226 (1997).
94. Axelrod, R. *The complexity of cooperation* 1997.
95. McPherson, M., Smith-Lovin, L. y Cook, J. M. Birds of a feather: Homophily in social networks. *Annual review of sociology* **27**, 415-444 (2001).
96. Asikainen, A., Iñiguez, G., Ureña-Carrión, J., Kaski, K. y Kivelä, M. Cumulative effects of triadic closure and homophily in social networks. *Science Advances* **6**, eaax7310 (2020).
97. Klemm, K., Eguíluz, V. M., Toral, R. y San Miguel, M. Role of dimensionality in Axelrod's model for the dissemination of culture. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **327**, 1-5 (2003).
98. Reia, S. M. y Fontanari, J. F. Effect of long-range interactions on the phase transition of Axelrod's model. *Physical Review E* **94**, 052149 (2016).
99. Vázquez, F. y Redner, S. Non-monotonicity and divergent time scale in Axelrod model dynamics. *EPL (Europhysics Letters)* **78**, 18002 (2007).
100. Lanchier, N., Scarlatos, S. *et al.* Fixation in the one-dimensional Axelrod model. *The Annals of Applied Probability* **23**, 2538-2559 (2013).

101. Lanchier, N. y Moisson, P.-H. Fixation results for the two-feature Axelrod model with a variable number of opinions. *Journal of Theoretical Probability* **29**, 1554-1580 (2016).
102. Pinto, S. y Balenzuela, P. Erdős-Rényi phase transition in the Axelrod model on complete graphs. *Physical Review E* **101**, 052319 (2020).
103. Klemm, K., Eguiluz, V. M., Toral, R. y San Miguel, M. Nonequilibrium transitions in complex networks: A model of social interaction. *Physical review E* **67**, 026120 (2003).
104. Nolan, D. Classifying and Analyzing Politico-Economic Systems, The Individualist. *Society for Individual Liberty* (1971).
105. Bryson, M. y McDill, W. The political spectrum: A bi-dimensional approach. *Rampart Journal of Individualist Thought* **4**, 19-26 (1968).
106. *The Political Compass* <https://politicalcompass.org>.
107. For Self-Government Inc., A. <https://www.theadvocates.org>.
108. Albanese, F., Tessone, C. J., Semeshenko, V. y Balenzuela, P. A data-driven model for Mass Media influence in electoral context. *arXiv preprint arXiv:1909.10554* (2019).
109. Falck, F. *et al.* Measuring proximity between newspapers and political parties: the sentiment political compass. *Policy & internet* **12**, 367-399 (2020).
110. Baldassarri, D. y Gelman, A. Partisans without constraint: Political polarization and trends in American public opinion. *American Journal of Sociology* **114**, 408-446 (2008).
111. Converse, P. E. The nature of belief systems in mass publics (1964). *Critical review* **18**, 1-74 (2006).
112. Zimmerman, F., Garbulsky, G., Ariely, D., Sigman, M. y Navajas, J. Political coherence and certainty as drivers of interpersonal liking over and above similarity. *Science Advances* **8**, eabk1909 (2022).
113. Abramowitz, A. *The disappearing center: Engaged citizens, polarization, and American democracy* (Yale University Press, 2010).
114. Lelkes, Y. Mass polarization: Manifestations and measurements. *Public Opinion Quarterly* **80**, 392-410 (2016).
115. Kozlowski, A. C. y Murphy, J. P. Issue alignment and partisanship in the American public: Revisiting the ‘partisans without constraint’ thesis. *Social Science Research* **94**, 102498 (2021).
116. Lorenz, J. en *Managing complexity: insights, concepts, applications* 321-334 (Springer, 2008).
117. Fortunato, S., Latora, V., Pluchino, A. y Rapisarda, A. Vector opinion dynamics in a bounded confidence consensus model. *International Journal of Modern Physics C* **16**, 1535-1551 (2005).

118. Pluchino, A., Latora, V. y Rapisarda, A. Compromise and synchronization in opinion dynamics. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **50**, 169-176 (2006).
119. Schweighofer, S., Garcia, D. y Schweitzer, F. An agent-based model of multi-dimensional opinion dynamics and opinion alignment. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **30**, 093139 (2020).
120. Schweighofer, S., Schweitzer, F. y Garcia, D. A weighted balance model of opinion hyperpolarization. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* **23** (2020).
121. Schwämmle, V., González, M., Moreira, A., Andrade Jr, J. S. y Herrmann, H. J. Different topologies for a herding model of opinion. *Physical Review E* **75**, 066108 (2007).
122. Flache, A. y Mäs, M. Why do faultlines matter? A computational model of how strong demographic faultlines undermine team cohesion. *Simulation Modelling Practice and Theory* **16**, 175-191 (2008).
123. DellaPosta, D., Shi, Y. y Macy, M. Why do liberals drink lattes? *American Journal of Sociology* **120**, 1473-1511 (2015).
124. Vazquez, F. y Eguíluz, V. Analytical solution of the voter model on uncorrelated networks. *New Journal of Physics* **10**, 063011 (2008).
125. Helbing, D. *Quantitative sociodynamics: stochastic methods and models of social interaction processes* (Springer Science & Business Media, 2010).
126. Pareschi, L. y Toscani, G. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods* (OUP Oxford, 2013).
127. Evans, L. C. *Partial differential equations* (American Mathematical Society, 2022).
128. Peralta, A. F., Kertész, J. e Iñiguez, G. Opinion dynamics in social networks: From models to data. *arXiv preprint arXiv:2201.01322* (2022).
129. Costa Filho, R., Almeida, M., Andrade, J., Moreira, J. *et al.* Scaling behavior in a proportional voting process. *Physical Review E* **60**, 1067 (1999).
130. Fortunato, S. y Castellano, C. Scaling and universality in proportional elections. *Physical review letters* **99**, 138701 (2007).
131. Kononovicius, A. Empirical analysis and agent-based modeling of the Lithuanian parliamentary elections. *Complexity* **2017** (2017).
132. Albanese, F., Pinto, S., Semeshenko, V. y Balenzuela, P. Analyzing mass media influence using natural language processing and time series analysis. *Journal of Physics: Complexity* **1**, 025005 (2020).
133. Willaert, T., Van Eecke, P., Beuls, K. y Steels, L. Building social media observatories for monitoring online opinion dynamics. *Social Media+ Society* **6**, 2056305119898778 (2020).

134. Xia, H., Wang, H. y Xuan, Z. Opinion dynamics: A multidisciplinary review and perspective on future research. *International Journal of Knowledge and Systems Science (IJKSS)* **2**, 72-91 (2011).
135. Moussaïd, M., Kämmer, J. E., Analytis, P. P. y Neth, H. Social influence and the collective dynamics of opinion formation. *PloS one* **8**, e78433 (2013).
136. Akers, R. L., Krohn, M. D., Lanza-Kaduce, L. y Radosevich, M. Social learning and deviant behavior: A specific test of a general theory. *Contemporary masters in criminology*, 187-214 (1995).
137. Bikhchandani, S., Hirshleifer, D. y Welch, I. A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades. *Journal of political Economy* **100**, 992-1026 (1992).
138. Festinger, L. y Schachter, S. Sc Black, K. *Social pressures in informal groups*. London: Tavistock (1950).
139. Homans, G. The human group Harcourt. Brace, and World New York (1950).
140. Festinger, L. *A theory of cognitive dissonance* (Stanford university press, 1962).
141. Meyers, R. A. Persuasive Arguments Theory A Test of Assumptions. *Human Communication Research* **15**, 357-381 (1989).
142. Latané, B. y Wolf, S. The social impact of majorities and minorities. *Psychological Review* **88**, 438 (1981).
143. Nowak, A., Szamrej, J. y Latané, B. From private attitude to public opinion: A dynamic theory of social impact. *Psychological Review* **97**, 362-376 (1990).
144. Moscovici, S. y Zavalloni, M. The group as a polarizer of attitudes. *Journal of personality and social psychology* **12**, 125 (1969).
145. Layman, G. C., Carsey, T. M. y Horowitz, J. M. Party polarization in American politics: Characteristics, causes, and consequences. *Annu. Rev. Polit. Sci.* **9**, 83-110 (2006).
146. Dandekar, P., Goel, A. y Lee, D. T. Biased assimilation, homophily, and the dynamics of polarization. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**, 5791-5796 (2013).
147. Fiorina, M. P. y Abrams, S. J. Political polarization in the American public. *Annu. Rev. Polit. Sci.* **11**, 563-588 (2008).
148. DiMaggio, P., Evans, J. y Bryson, B. Have American's social attitudes become more polarized? *American journal of Sociology* **102**, 690-755 (1996).
149. Cinelli, M., De Francisci Morales, G., Galeazzi, A., Quattrociocchi, W. y Starnini, M. The echo chamber effect on social media. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **118**, e2023301118 (2021).

150. Del Vicario, M. *et al.* Echo chambers: Emotional contagion and group polarization on facebook. *Scientific reports* **6**, 37825 (2016).
151. Pinasco, J. P., Semeshenko, V. y Balenzuela, P. Modeling opinion dynamics: Theoretical analysis and continuous approximation. *Chaos, Solitons & Fractals* **98**, 210-215 (2017).
152. Balenzuela, P., Pinasco, J. P. y Semeshenko, V. The undecided have the key: Interaction-driven opinion dynamics in a three state model. *PloS one* **10**, e0139572 (2015).
153. Li, H. y Toscani, G. Long-time asymptotics of kinetic models of granular flows. *Archive for rational mechanics and analysis* **172**, 407-428 (2004).
154. Boudin, L., Monaco, R. y Salvarani, F. Kinetic model for multidimensional opinion formation. *Physical Review E* **81**, 036109 (2010).
155. Pedraza, L., Pinasco, J. P., Saintier, N. y Balenzuela, P. An analytical formulation for multidimensional continuous opinion models. *Chaos, Solitons & Fractals* **152**, 111368 (2021).
156. Pedraza, L., Pinasco, J. P. y Saintier, N. Measure-valued opinion dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **30**, 225-260 (2020).
157. Alonso, R., Gamba, I. M. y Tran, M.-B. The Cauchy problem and BEC stability for the quantum Boltzmann-Condensation system for bosons at very low temperature. *arXiv preprint arXiv:1609.07467* (2016).
158. Bressan, A. Notes on the Boltzmann equation. *Lecture notes for a summer course, SISSA Trieste* (2005).
159. Gabetta, G., Toscani, G. y Wennberg, B. Metrics for probability distributions and the trend to equilibrium for solutions of the Boltzmann equation. *Journal of statistical physics* **81**, 901-934 (1995).
160. Villani, C. *Topics in optimal transportation* (American Mathematical Soc., 2003).
161. Pedraza, L., Pinasco, J. P., Semeshenko, V. y Balenzuela, P. Mesoscopic analytical approach in a three state opinion model with continuous internal variable. *Chaos, Solitons & Fractals* **168**, 113135 (2023).
162. Klemm, K., Eguíluz, V. M., Toral, R. y San Miguel, M. Globalization, polarization and cultural drift. *Journal of Economic Dynamics and Control* **29**, 321-334 (2005).
163. Stivala, A. y Keeler, P. Another phase transition in the Axelrod model. *arXiv preprint arXiv:1612.02537* (2016).
164. Vilone, D., Vespignani, A. y Castellano, C. Ordering phase transition in the one-dimensional Axelrod model. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **30**, 399-406 (2002).
165. Pedraza, L., Pinto, S., Pinasco, J. P. y Balenzuela, P. Analytical approach to the Axelrod model based on similarity vectors. *Physical Review E* **103**, 012307 (2021).

166. Stehlé, J. *et al.* High-resolution measurements of face-to-face contact patterns in a primary school. *PloS one* **6**, e23176 (2011).
167. Rozemberczki, B., Allen, C. y Sarkar, R. Multi-scale attributed node embedding. *Journal of Complex Networks* **9**, cnab014 (2021).
168. Mason, W. A., Conrey, F. R. y Smith, E. R. Situating social influence processes: Dynamic, multidirectional flows of influence within social networks. *Personality and social psychology review* **11**, 279-300 (2007).
169. Brady, W. J., Wills, J. A., Jost, J. T., Tucker, J. A. y Van Bavel, J. J. Emotion shapes the diffusion of moralized content in social networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **114**, 7313-7318 (2017).
170. Byrne, D. y Nelson, D. Attraction as a linear function of proportion of positive reinforcements. *Journal of personality and social psychology* **1**, 659 (1965).
171. Goldenberg, A. *et al.* Homophily and acrophily as drivers of political segregation. *Nature Human Behaviour* **7**, 219-230 (2023).
172. Zimmerman, F., Pedraza, L., Navajas, J. y Balenzuela, P. Attraction by ingroup coherence drives the emergence of ideological sorting. *arXiv preprint arXiv:2304.12559* (2023).
173. Mahmoodi, A., Bahrami, B. y Mehring, C. Reciprocity of social influence. *Nature communications* **9**, 2474 (2018).
174. Baldassarri, D. y Gelman, A. Partisans without constraint: Political polarization and trends in American public opinion. *American Journal of Sociology* **114**, 408-446 (2008).
175. Burnstein, E. y Vinokur, A. Testing two classes of theories about group induced shifts in individual choice. *Journal of experimental social psychology* **9**, 123-137 (1973).
176. Burnstein, E. y Vinokur, A. Persuasive argumentation and social comparison as determinants of attitude polarization. *Journal of experimental social psychology* **13**, 315-332 (1977).
177. Mäs, M. y Flache, A. Differentiation without distancing. Explaining bipolarization of opinions without negative influence. *PloS one* **8**, e74516 (2013).