UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

# Caracterización de ciertos marcos en espacios de Hilbert via subespacios invariantes por dos operadores shift y ciclicidad en espacios tipo Dirichlet

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

**Alejandra Patricia Aguilera Aguilera**

**Director de tesis:** Carlos Cabrelli
**Directora adjunta de tesis:** Victoria Paternostro
**Consejero de estudios:** Daniel Carando

Buenos Aires, 7 de septiembre de 2023

Resumen

**Caracterización de ciertos marcos en espacios de Hilbert via subespacios invariantes por dos operadores shift y ciclicidad en espacios tipo Dirichlet**

En esta tesis se estudia el problema de encontrar condiciones sobre dos operadores lineales y acotados $T$ y $L$ que conmutan entre sí y actúan en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, y sobre un conjunto de vectores finito o numerable $\{v_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ para que el sistema de iteraciones $\{T^k L^j v_i\}$ forme un marco de $\mathcal{H}$. Las condiciones obtenidas se basan en establecer una correspondencia vía un isomorfismo entre cada marco de la forma anterior y un marco "canónico" que resulta ser un marco de Parseval de algún subespacio cerrado $\mathcal{N}$ de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Hardy vectorial.

Motivados por lo anterior, el segundo problema que se estudia en este trabajo es buscar una descripción explícita de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ que están generados por marcos canónicos. Esto se enmarca en el problema de caracterizar los subespacios invariantes por operadores lineales y acotados actuando en espacios de Hilbert. Para ello se estudian resultados clásicos de Beurling, Helson y Halmos, sobre los subespacios del espacio de Hardy escalar $H^2$, el espacio $L^2(\mathbb{T})$ y el espacio de Hardy vectorial $H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ que son invariantes por los operadores shift unilateral, shift bilateral y el shift unilateral con multiplicidad, respectivamente.

Por último, consideramos una familia de espacios de Hilbert de funciones analíticas con núcleo reproductivo que incluyen al espacio de Hardy escalar $H^2$ y damos respuesta a la pregunta de si la función límite de una sucesión convergente de funciones cíclicas (no cíclicas) es cíclica (no cíclica). En particular, demostramos que el conjunto de las funciones outer no es cerrado en la topología de la norma de $H^2$. Por otro lado, damos una relación cuantitativa entre los polinomios aproximantes óptimos de una sucesión de funciones y los polinomios aproximantes óptimos del límite de dicha sucesión en el caso que ésta sea convergente.

*Palabras clave:* Espacio de Hardy, marcos, subespacios invariantes, operador shift, funciones cíclicas, polinomios aproximantes óptimos.

Abstract

**Characterization of certain frames in Hilbert spaces via invariant subspaces under two shift operators and cyclicity in Dirichlet-type spaces**

In this thesis we study the problem of finding conditions on two linear and bounded operators $T$ and $L$ that commute, acting on a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ and on an at most countable set of vectors $\{v_i\}$ in order that the system of iterations $\{T^k L^j v_i\}$ forms a frame of $\mathcal{H}$. This characterization is based on a correspondence via an isomorphism between the mentioned frame and a canonical frame which is a Parseval frame of a closed subspace $\mathcal{N}$ of $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$, where $\mathcal{K}$ is a vectorial Hardy space.

Motivated by the previous problem, the second problem that we study in this work is to give an explicit description of the subspaces of $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ that are generated by canonical frames. This is related with the problem of characterizing the invariant subspaces under a linear bounded operator acting on a Hilbert space. To do this it was necessary revisited classical results due to Beurling, Helson and Halmos about the subspaces of the scalar Hardy space $H^2$, the space $L^2(\mathbb{T})$ and the vectorial Hardy space $H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ that are invariant under the unilateral shift, the bilateral shift and the bilateral shift with multiplicity, respectively.

Finally, we consider a family of Hilbert spaces of analytic functions with reproducing kernel that includes the scalar Hardy space $H^2$ and we answer the question whether the limit of a sequence of cyclic (non-cyclic) functions must be cyclic (non-cyclic). In particular, we prove that the set of outer functions in not closed in the topology of the $H^2$ norm. Besides, we give a quantitative relation between the optimal polynomials approximant of a sequence of functions and the optimal polynomial approximant of the limit of that sequence, in the case it converges.

*Keywords:* Hardy space, frames, invariant subspaces, shift operator, cyclic functions, optimal polynomial approximant.

# Índice general

# Introducción

El problema de muestreo en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se puede formular de la siguiente manera: encontrar condiciones sobre una sucesión $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ con $I$ un conjunto a lo sumo numerable, para que cualquier $x \in \mathcal{H}$ se pueda recuperar de forma estable a partir de las *muestras* $\{\langle x, x_i\rangle\}_{i\in I}$. Para que esto ocurra, es necesario y suficiente que $\{x_i\}_{i\in I}$ forme un *marco* del espacio $\mathcal{H}$, es decir, que existan constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \qquad \forall\ x \in \mathcal{H}.$$

La condición de estabilidad se refiere a que si $\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2$ es chica, entonces $\|x\|^2$ también lo es, o equivalentemente, la distancia $\|x - y\|$ entre dos vectores $x, y \in \mathcal{H}$ no puede ser arbitrariamente grande si la suma $\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle - \langle y, x_i\rangle|^2$ es chica.

Un ejemplo clásico de muestreo en $\mathbb{R}$ es cuando se trata de reconstruir los elementos del espacio de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$ cuya transformada de Fourier $\widehat{f}$ satisface que $\operatorname{sop} \widehat{f} \subset [-1/2, 1/2]$. Este conjunto se conoce como el espacio de *Paley-Wiener* y se suele denotar por $PW_{1/2}$. Recordar que la transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define por $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i\xi x}\, dx$ y luego se extiende por densidad a $L^2(\mathbb{R})$. La fórmula de reconstrucción en $PW_{1/2}$ es un teorema que fue demostrado por Shannon en 1949 [56], y antes en 1915 ya haba sido demostrado por Whittaker [60] y por Kotelnikov [44] en 1933. El teorema establece que una función $f \in PW_{1/2}$ se puede reconstruir a partir de sus muestras $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mediante la fórmula de interpolación:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)},$$

donde la convergencia es uniforme y en la norma de $L^2(\mathbb{R})$. Cabe acotar que $PW_{1/2}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo, es decir, para todo $y \in \mathbb{R}$ existen funciones $k_y$ llamadas núcleos tales $f(y) = \langle f, k_y\rangle$ para $f \in PW_{1/2}$ y se puede ver que $k_y(x) = \frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)}$. Más aún, $\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $PW_{1/2}$. Este es un ejemplo de muestreo uniforme (el conjunto de muestreo está equiespaciado) y es un resultado fundamental en la ingeniería y el procesamiento de señales e imágenes.

El muestreo dinámico es un caso especial del problema de muestreo que se aplica cuando las muestras tomadas sobre un conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ son insuficientes para recuperar los elementos de una clase de funciones $V$. Se refiere al proceso de recuperar una señal $f$ tomando muestras espaciales a través de un conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$, y muestras temporales haciendo evolucionar dicha señal aplicando un operador de evolución $A$, obteniendo así, nuevas funciones $Af$, $A^2f$,..., $A^nf$,... . El problema consiste en encontrar condiciones sobre $A$, un conjunto de puntos $\{x_i\}_{i\in I}$ y un conjunto de índices $J$ para que cualquier $f \in V$ se pueda recuperar de forma estable a partir de las muestras $\{(A^nf)(x_i) : n \in J,\ i \in I\}$.

Más en general, si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable, quisiéramos encontrar condiciones sobre un operador lineal y acotado $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, un conjunto de vectores $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ y un conjunto de índices $J$ para que cualquier $x \in \mathcal{H}$ se pueda recuperar de forma estable a partir de las muestras

$$\{\langle A^n x, x_i\rangle : n \in J, i \in I\} = \left\{\langle x, A^{*n} x_i\rangle : n \in J, i \in I\right\}.$$

Esto es equivalente a que el conjunto $\{A^{*n}x_i : n \in J, i \in I\}$ forme un marco de $\mathcal{H}$. El problema del muestreo dinámico ha sido estudiado por diversos autores en diferentes contextos. Por ejemplo, en [7], Aldroubi, et. al. estudiaron este problema en espacios de dimensión finita $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ y cualquier transformación lineal $A$ actuando en este espacio. También consideraron el caso de tomar el espacio de dimensión infinita $\ell^2(\mathbb{N})$ y una clase particular de operadores de evolución que contiene a los operadores compactos autoadjuntos.

El muestreo dinámico ha motivado en los últimos años el problema de dar condiciones sobre un operador $L$ actuando en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, un conjunto de vectores $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ y un conjunto de índices $J$ de manera que el sistema de iteraciones de la forma $\left\{L^j x_i : j \in J,\ i \in I\right\}$ forme un marco de $\mathcal{H}$. Para algunos resultados teóricos sobre este problema se pueden ver por ejemplo [6, 7, 8, 9, 12, 13, 22, 25, 46], y por otra parte algunas aplicaciones se pueden encontrar en [10, 11, 59].

En [2], se estudió una versión del problema del muestreo dinámico en el contexto de subespacios invariantes por traslaciones enteras de $L^2(\mathbb{R})$. Un subespacio cerrado $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ se dice invariante por traslaciones enteras (o SIS, por las siglas en inglés de *shift-invariant space*) si para todo $k \in \mathbb{Z}$, $f \in V$ implica $T_1^k f \in V$, donde $T_1 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es el operador de traslación por 1, es decir, $T_1 f(x) = f(x-1)$. Se encontraron condiciones necesarias y suficientes sobre un operador $L : V \to V$ lineal, acotado, normal que conmuta con $T_1$, y un conjunto finito de funciones $\mathcal{A} \subset V$ para que el conjunto de iteraciones $\left\{L^j\varphi : j \in J, \varphi \in \mathcal{A}\right\}$ forme un conjunto generador de un marco de $V$, es decir, que el sistema de traslaciones

$$\left\{T_1^k L^j \varphi : k \in \mathbb{Z}, j \in J, \varphi \in \mathcal{A}\right\} \tag{0.1}$$

forme un marco de $V$. Para enunciar un teorema que da condiciones necesarias y suficientes para que el sistema (0.1) forme un marco de $V$, se recurrió a un tipo especial de diagonalización de operadores que actúan en espacios invariantes por traslaciones [1]. Los resultados obtenidos también son válidos si se remplaza $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^d$ o por un grupo abeliano localmente compacto $G$.

Motivados por el problema anterior, en esta tesis nos planteamos encontrar una caracterización de los marcos de iteraciones por dos operadores que conmutan entre sí y actúan en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. Introducimos la notación $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ para indicar que estamos considerando dos operadores lineales y acotados $T$ y $L$ en $\mathcal{H}$ que conmutan entre sí (asumimos que $T$ es inversible), y un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$. Nos preguntamos bajo qué condiciones necesarias y suficientes, el sistema de iteraciones

$$\left\{T^k L^j v_i : k \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I\right\}$$

forma un marco, un marco de Parseval o una base de Riesz de $\mathcal{H}$. El conjunto de índices $J$ considerado será $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ó $\mathbb{Z}$.

En [25], O. Christensen et. al. proveen caracterizaciones de los marcos de un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ que son de la forma $\{L^n v_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{L^n v_0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineal y acotado, y $v_0 \in \mathcal{H}$. Dicha caracterización está dada en términos de la *similaridad* entre $L$ y la *compresión* del operador shift definido por $Sf(z) = zf(z)$ con $z \in \mathbb{T}$, actuando en un subespacio $\mathcal{N}_\phi$ del espacio de Hardy $H^2$ de la forma $\mathcal{N}_\phi = H^2 \ominus \phi H^2$, conocido en la bibliografía como un espacio modelo [34]. Un espacio modelo $\mathcal{N}$ es el complemento ortogonal de un subespacio invariante por $S$, es decir, $\mathcal{N}$ es invariante por $S^*$. El término *espacio modelo* surgió de la teoría de operadores modelo desarrollada por Sz. Nagy, Foias et. al. [45], donde demuestran que cierta clase de operadores de contracción en espacios de Hilbert son unitariamente equivalentes a las compresiones del shift unilateral a un espacio modelo. Es importante resaltar que todos los subespacios de $H^2$ invariantes por $S$ fueron completamente caracterizados por Beurling [17].

Más tarde, en [24] los autores extendieron el caso anterior caracterizando los marcos de la forma $\{L^n v_i : n \in \mathbb{N}_0, i \in I\}$ con $\#I > 1$.

Usando la noción de similaridad (ver Definición 2.1) entre operadores, en este trabajo damos una caracterización de todas las tuplas de la forma $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ que generan marcos de iteraciones de $\mathcal{H}$, estableciendo un isomorfismo de espacios de Hilbert entre $\mathcal{H}$ y un subespacio cerrado del espacio de funciones vectoriales $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$. Este subespacio posee las propiedades de reducir al shift bilateral con multiplicidad $\mathbf{U}$ actuando en $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ y al mismo tiempo ser invariante por el adjunto del operador $\widehat{S}$ el cual actúa puntualmente como el shift unilateral con multiplicidad en $H^2_{\ell^2(I)}$ (ver Definición 2.5).

Dado que existen caracterizaciones de los subespacios de $H^2(\mathbb{T})$ y $L^2(\mathbb{T})$ que son invariantes por el shift (unilateral y bilateral respectivamente), las cuales se deben principalmente a Helson y Lowdenslager [40, 41], y Beurling [17], otro aporte de este trabajo es dar una descripción explícita de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ con $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable, que reducen a $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{S}$. Tomando $\mathcal{K} = \ell^2(I)$, la descripción anterior permite caracterizar todos los vectores $v \in \mathcal{H}$ que satisfacen que la tupla $(\mathcal{H}, T, L, v)$ genera un marco de iteraciones de $\mathcal{H}$. Más aún, se puede ver que, en cierto sentido, todos los vectores $v \in \mathcal{H}$ que generan marcos de la forma

$$\left\{T^k L^j v : k \in \mathbb{Z},\ j \in J\right\}$$

fijando previamente $\mathcal{H}$, $T$ y $L$, están en una misma clase de equivalencia. Sin embargo, esto no ocurre cuando se itera más de un vector.

Por último, incluimos en esta tesis un capítulo dedicado a estudiar una clase de espacios de Hilbert de funciones analíticas definidas en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$, que denotamos por $D_\alpha$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ y se conocen como *espacios tipo Dirichlet*. El producto interno en $D_\alpha$ está dado por

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \overline{b_j} (j+1)^\alpha$$

para $f, g \in D_\alpha$ con $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ y $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$. Los espacios $D_{-1}$, $D_0$ y $D_1$ se corresponden con los espacios de Bergman, Hardy y Dirichlet, respectivamente, los cuales han sido ampliamente estudiados, por ejemplo, en [29, 30, 31, 53].

Una función $f \in D_\alpha$ se dice *cclica* si satisface que

$$D_\alpha = \overline{\text{gen}}\{S^j f : j \in \mathbb{N}_0\},$$

donde $Sf(z) = zf(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, $f \in D_\alpha$ es cíclica si es un vector cíclico para el operador $S$. En general, caracterizar todas las funciones cíclicas en un espacio de funciones analíticas no es un problema sencillo. Sin embargo, para el caso $\alpha = 0$ las funciones cíclicas están completamente caracterizadas: una función $f \in H^2$ es cíclica si y solo si es *outer* (ver Corolario 1.27). Esto es consecuencia del teorema de Beurling que caracteriza todos los subespacios de $H^2$ invariantes por $S$.

Las funciones cíclicas juegan un papel importante en el análisis complejo ya que es posible reducir la prueba de que alguna propiedad $P$ se satisface para todos los elementos de un espacio de dimensión infinita demostrando que $P$ se preserva por convergencia, es lineal y se verifica para funciones cíclicas. Diferentes autores, por ejemplo [16, 21], han comenzado estudiando polinomios cíclicos con el objetivo de extender las conclusiones obtenidas a funciones más generales. Recientemente, se han estudiado algunas applicaciones de las funciones cíclicas en el procesamiento de señales [14, 55].

En este sentido, se podría pensar que la ciclicidad es una propiedad que se preserva por convergencia. En [5], probamos que este no es el caso para la familia de espacios $D_\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). En particular, probamos que el conjunto de las funciones cíclicas en $D_\alpha$ no es cerrado respecto a la topología de la norma de $D_\alpha$. Más aún, damos condiciones necesarias para que el límite de una sucesión de funciones cíclicas sea cíclica.

Otro enfoque para el estudio de la ciclicidad de funciones en $D_\alpha$ se basa en los llamados *polinomios aproximantes óptimos* (p.a.o) (ver Definición 4.20), los cuales fueron desarrollados en [15]. En [21], L. Brown and A. L. Shields establecieron la siguiente condición equivalente para que una función $f \in D_\alpha$ sea cíclica: $f$ es cíclica si y solo si existe una sucesión de polinomios $\{p_d\}$ tal que

$$\lim_{d\to\infty} \|p_d f - 1\|_\alpha = 0$$

Dada $f \in D_\alpha$ y $d \in \mathbb{N}$, sea $p_d$ el polinomio de grado a lo sumo $d$ que realiza el siguiente mínimo:

$$\epsilon_d = \min_{p_d \in \mathcal{P}_d} \|p_d f - 1\|_\alpha$$

donde $\mathcal{P}_d$ denota el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a $d$. Por la condición de Brown y Shields, la función $f$ resultará cíclica si y solo si $\lim_{d\to\infty} \epsilon_d = 0$. Esto permite dar una caracterización de la ciclicidad de $f \in D_\alpha$ mediante sus p.a.o.

Aunque el límite $f$ de una sucesión de funciones cíclicas $\{f_n\}$, no hereda, en general, la propiedad de ciclicidad, veremos que algunas propiedades de los polinomios aproximantes óptimos sí se preservan via convergencia. Se puede ver que los coeficientes del p.a.o de grado $d$ asociado a una función $f \in D_\alpha$ se pueden determinar a través de un sistema lineal. En particular, si $p_d$ es el p.a.o asociado a $f$ y denotamos por $Mc = b$ al sistema lineal correspondiente, donde $M$ y $b$ son conocidos y $c$ es el vector de coeficientes de $p_d$, y si para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $p_{n,d}$ al p.a.o de $f_n$ y $M_n c_n = b_n$ es su correspondiente sistema lineal, probamos que $M_n$, $c_n$, $b_n$ y $p_{n,d}$ convergen a $M$, $c$, $b$ y $p_d$ respectivamente, en las normas que corresponden a cada objeto, y la tasa de convergencia depende de la norma $\|f_n - f\|_\alpha$ y una constante $C$ dependiente de $d$, $\alpha$ y $f$.

El contenido de esta tesis está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 haremos un repaso de los resultados más relevantes sobre bases y marcos en espacios de Hilbert, incluimos una discusión sobre el problema de subespacios invariantes y los resultados más conocidos en $L^2(\mathbb{T})$ y $H^2$. Luego, desarrollamos la teoría sobre los espacios de funciones vectoriales $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $H^2_{\mathcal{K}}$ con $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert separable.

El Capítulo 2 está dedicado a presentar los resultados obtenidos en relación a la caracterización de las tuplas $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ que generan marcos de iteraciones de $\mathcal{H}$. Para ello se define una relación de similaridad entre tuplas y usamos muchos de los resultados incluidos en la sección de preliminares sobre marcos.

Dedicamos el Capítulo 3 al estudio y caracterización de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen al shift bilateral con multiplicidad $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{S}$.

Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos los espacios de funciones analíticas $D_\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y mostramos los resultados que obtuvimos en este contexto.

A lo largo de esta tesis, se incluirán los resultados obtenidos en los siguientes artículos:

- A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal, and V. Paternostro, Frames by orbits of two operators that commute, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **66** (2023), 46-61.

- A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal, and V. Paternostro, Reducing and invariant subspaces under two commuting shift operators, *J. Math. Anal. Appl.* (2023), 127481.

- A. Aguilera and D. Seco, Convergence and preservation of cyclicity, (2023), Aceptado en *J. Oper. Theory*.

# Capítulo 1

# Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir notaciones, definiciones y resultados que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Desarrollaremos en varias secciones los aspectos teóricos en los que se basan los resultados obtenidos. En algunos casos se omitirán las demostraciones y se referirá al lector a la bibliografía correspondiente.

Este capítulo de preliminares estará organizado de la siguiente manera: en la Sección 1.1 repasaremos los conceptos de base ortonormal, marco, marco de Parseval y base de Riesz en espacios de Hilbert separables, y resumiremos sus propiedades más importantes, Además, definiremos tres operadores claves en esta teoría: el operador de análisis, el operador de síntesis y el operador de marco.

Dedicamos la Sección 1.2 a recordar algunas definiciones equivalentes, propiedades y resultados más relevantes sobre el espacio de Hardy $H^2$. En la Sección 1.3 mostraremos algunos resultados clásicos obtenidos por Beurling [17] y Helson [40] sobre el problema de subespacios invariantes por el operador shift actuando en los espacios $L^2(\mathbb{T})$ y el espacio de Hardy $H^2$. Seguidamente, en la Sección 1.4 introduciremos dos espacios de funciones cuyas imágenes están en un espacio de Hilbert, y repasaremos algunas generalizaciones del resultado de Beurling [17] a estos espacios, las cuales fueron obtenidas por Lax [47] y Halmos [38]. Finalmente, en la Sección 1.5 desarollamos la teoría básica sobre subespacios wandering, los cuales fueron introducidos por Halmos en [38].

A lo largo de este trabajo, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ denotarán espacios de Hilbert complejos separables. Como es usual, se denotará al conjunto de los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ por $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, denotaremos su norma por $\|T\|_{op}$.

Si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{M}$ se denotará por $P_{\mathcal{M}}$, y escribiremos $T|_{\mathcal{M}}$ para denotar la restricción de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ al subespacio $\mathcal{M}$.

La letra $I$ denotará un conjunto de índices a lo sumo numerable cuyo cardinal será expresado con el símbolo $\#I$.

## 1.1 Bases y marcos en espacios de Hilbert

En esta sección resumiremos la teoría básica sobre bases y marcos en espacios de Hilbert que necesitaremos en los siguientes capítulos. Para un desarrollo más amplio sobre estos temas se pueden consultar las referencias [26, 37, 39].

**Definición 1.1.** Sea $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ una sucesión en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se dice que:

i) $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es ortonormal si $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = 0$ para $i \neq j$ y $\|\varepsilon_i\| = 1$ para todo $i \in I$.

ii) $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es completo si $\langle x, \varepsilon_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$ implica $x = 0$.

Si $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ cumple las condiciones *i*) y *ii*) simultáneamente se dice que $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es una *base ortonormal* de $\mathcal{H}$.

**Teorema 1.2.** *Sea $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ una sucesión ortonormal en $\mathcal{H}$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

*i) $\sum_{i\in I} |\langle x, \varepsilon_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{H}$ (desigualdad de Bessel).*

*ii) Si $\sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i$ converge a $x \in \mathcal{H}$ entonces $a_i = \langle x, \varepsilon_i\rangle$.*

*iii) $\sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i$ converge si y solo si $\sum_{i\in I} |a_i|^2$ converge.*

*iv) Si $x \in \mathcal{H}$, entonces la proyección ortogonal de $x$ sobre $V = \overline{\mathrm{gen}}\{\varepsilon_i : i \in I\}$ está dada por $p = \sum_{i\in I}\langle x, \varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$.*

La afirmación *iv*) del teorema anterior permite probar que la completitud de una sucesión ortonormal $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$, es equivalente a que para cada $x \in \mathcal{H}$ exista una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in I}$ tal que $x = \sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i$ con $a_i = \langle x, \varepsilon_i\rangle$ para todo $i \in I$. En particular, una base ortonormal en un espacio de Hilbert provee una representación única para cada vector del espacio $\mathcal{H}$ en términos de los vectores de la base como se enuncia en el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.** *Sea $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ una sucesión ortonormal en $\mathcal{H}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i) $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es completo en $\mathcal{H}$.*

*ii) Para cada $x \in \mathcal{H}$, existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in I}$ tal que $x = \sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i$.*

*iii) Para cada $x \in \mathcal{H}$, $x = \sum_{i\in I}\langle x, \varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$.*

*iv) Igualdad de Plancherel: para cada $x \in \mathcal{H}$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, \varepsilon_i\rangle|^2$.*

*v) Igualdad de Parseval: para cada $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, \varepsilon\rangle\langle y, \varepsilon\rangle$.*

En muchas aplicaciones, la unicidad en la representación de los vectores de $\mathcal{H}$ con respecto a una sucesión dada no es un requerimiento esencial. Es decir, dada una sucesión $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ podría ocurrir que para cada $x \in \mathcal{H}$ existan dos sucesiones $\{a_i\}_{i\in I}$ y $\{b_i\}_{i\in I}$ tales que $\sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i = x = \sum_{i\in I} b_i\varepsilon_i$.

Con esta idea en mente, introduciremos un tipo de sucesiones en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que llamamos *marcos* y que generalizan el concepto de base, permitiendo reconstruir todos los elementos de $\mathcal{H}$ con una representación en serie cuyos coeficientes no son necesariamente únicos.

**Definición 1.4.** Una sucesión $\{x_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ es un *marco* de $\mathcal{H}$ si existen constantes positivas $A$ y $B$ tales que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall\ x \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

Las constantes $A$ y $B$ se conocen como las *cotas de marco*.

Si una sucesión $\{x_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ verifica la desigualdad superior en (1.1) para todo $x \in \mathcal{H}$, decimos que es una *sucesión de Bessel*. En este caso, se define el *operador de análisis* $R : \mathcal{H} \to \ell^2$ asociado a la sucesión $\{x_i\}_{i\in I}$ por

$$Rx = \{\langle x, x_i\rangle\}_{i\in I}$$

y es lineal y acotado. Además, veremos en el siguiente teorema que su adjunto $R^*$ está bien definido y es acotado. Llamamos *operador de síntesis* a $C = R^*$.

**Teorema 1.5.** *Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una sucesión de Bessel en $\mathcal{H}$ con cota $B$. Si $a = \{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, entonces $\sum_{i\in I} a_i x_i$ converge incondicionalmente en la norma de $\mathcal{H}$ y*

$$Ca = \sum_{i\in I} a_i x_i \tag{1.2}$$

*define un operador acotado de $\ell^2$ en $\mathcal{H}$. Más aún, $C = R^*$ y $\|C\| = \|R\| \leq B^{1/2}$, es decir,*

$$\left\| \sum_{i\in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \sum_{i\in I} |a_i|^2, \quad \forall\ \{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I). \tag{1.3}$$

*Demostración.* Para probar que $\sum_{i\in I} a_i x_i$ converge incondicionalmente, veamos que la cola de la serie tiende a cero para cualquier reordenamiento de $I$. Si consideramos $I = \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$ y tomamos la norma en $\mathcal{H}$ tenemos que

$$\left\| \sum_{n=M+1}^{N} a_{i_n} x_{i_n} \right\| = \sup_{\|y\|=1} \left| \left\langle \sum_{n=M+1}^{N} a_{i_n} x_{i_n}, y \right\rangle \right| = \sup_{\|y\|=1} \left| \sum_{n=M+1}^{N} a_{i_n} \langle x_{i_n}, y\rangle \right|.$$

Luego, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left\|\sum_{n=M+1}^{N} a_{i_n} x_{i_n}\right\| \leq \left(\sum_{n=M+1}^{N} |a_{i_n}|^2\right)^{1/2} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n=M+1}^{N} |\langle x_{i_n}, y\rangle|^2\right)^{1/2} \leq B^{1/2} \left(\sum_{n=M+1}^{N} |a_{i_n}|^2\right)^{1/2}. \qquad (1.4)$$

Ahora, como $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, la serie $\sum_{i\in I} |a_i|^2$ converge incondicionalmente y por lo tanto $\sum_{n=M+1}^{N} |a_{i_n}|^2$ tiende a cero cuando $M$ y $N$ tienden a infinito. A partir de la desigualdad (1.4) deducimos que la norma de $\sum_{n=M+1}^{N} a_{i_n} x_{i_n}$ tiende a cero si $M$, $N$ tienden a infinito y por lo tanto la serie $\sum_{i\in I} a_i x_i$ converge incondicionalmente en la norma de $\mathcal{H}$.

Para ver que $C$ es el adjunto de $R$ es suficiente observar que para todo $x \in \mathcal{H}$ y $a \in \ell^2(I)$ se cumple que

$$\langle Rx, a\rangle_{\ell^2(I)} = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle \overline{a_i} = \left\langle x, \sum_{i\in I} a_i x_i \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, Ca\rangle_{\mathcal{H}}.$$

La desigualdad (1.3) se sigue inmediatamente de $\|C\| = \|C^*\| = \|R\| \leq B^{1/2}$.

■

**Proposición 1.6.** *Dada una sucesión $\{x_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i) $\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de $\mathcal{H}$.*

*ii) El operador de análisis $R$ es acotado, inyectivo y tiene rango cerrado.*

*iii) El operador de síntesis $C$ es acotado y sobreyectivo.*

*Demostración.* $i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que $\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de $\mathcal{H}$ con cotas $A$ y $B$. Sea $x \in \mathcal{H}$ tal que $Rx = 0$. Entonces por la desigualdad inferior de marco tenemos que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 = \|Rx\|^2 = 0,$$

con lo cual $x = 0$. Esto prueba la inyectividad de $R$.

Para ver que rango$(R)$ es cerrado, consideremos $\{Ry_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en rango$(R)$ que converge a $z \in \ell^2(I)$. Usando la desigualdad inferior de marco tenemos que

$$A\|y_n - y_m\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle y_n - y_m, x_i\rangle|^2 = \|R(y_n - y_m)\|^2 = \|Ry_n - Ry_m\|^2$$

lo que implica que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como $\mathcal{H}$ es completo, existe $y \in \mathcal{H}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|Ry_n - Ry\| = 0$, ya que $R$ es continuo. Por unicidad del límite, $z = Ry \in$ rango$(R)$ y en consecuencia rango$(R)$ es cerrado.

$ii) \Rightarrow iii)$ Como $\{0\} = \ker(R) = \ker(C^*) = \text{rango}(C)^\perp$, entonces $\overline{\text{rango}(C)} = \mathcal{H}$, es decir, $C$ tiene rango denso en $\mathcal{H}$. El hecho de que rango$(C)$ es cerrado es consecuencia de que si $T$

es un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert, entonces rango$(T)$ es cerrado si y solo si rango$(T^*)$ lo es (ver [27]). En conclusión, rango$(C) = \overline{\text{rango}(C)} = \mathcal{H}$, es decir, $C$ es sobreyectivo.

*iii*) $\Rightarrow$ *ii*) Notemos que $\ker(R) = \ker(C^*) = \text{rango}(C)^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$ y por lo tanto $R$ es inyectivo. Además, como rango$(C) = \mathcal{H}$ es cerrado entonces tenemos que rango$(C^*) =$ rango$(R)$ es cerrado (ver [27]).

*ii*) $\Rightarrow$ *i*) Supongamos que $R$ es inyectivo y de rango cerrado. Como $R$ es acotado, existe una constante $b > 0$ tal que $\|Rx\| \leq b\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, es decir, se cumple la desigualdad

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall\ x \in \mathcal{H}$$

con $B = b^2$. Esto prueba que $\{x_i\}_{i\in I}$ es Bessel.

Para ver la desigualdad inferior de marco, definimos $\widetilde{R} : \mathcal{H} \to \text{rango}(R)$ por $\widetilde{R}x = Rx$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Notemos que $\widetilde{R}$ es acotado y biyectivo pues $R$ lo es. Luego, $\widetilde{R}^{-1} : \text{rango}(R) \to \mathcal{H}$ es acotado, es decir, existe $c > 0$ tal que $\|\widetilde{R}^{-1}y\| \leq c\|y\|$, para todo $y \in$ rango$(R)$ o equivalentemente

$$\frac{1}{c^2}\|x\|^2 \leq \|Rx\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2, \quad \forall\ x \in \mathcal{H},$$

con lo cual, $\{x_i\}_{i\in I}$ resulta ser un marco de $\mathcal{H}$ con cota inferior $A = 1/c^2$ y cota superior $B = b^2$.

■

Si $\{x_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel con correspondientes operadores de análisis y síntesis $R$ y $C$, se define el *operador de marco* $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como $M = CR$. Por definición vemos que $M$ satisface la fórmula

$$Mx = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle x_i, \quad \forall\ x \in \mathcal{H}.$$

Como $R$ y $C$ son acotados, $M$ también lo es. Además, $M$ es semidefinido positivo y autoadjunto. En efecto, $M^* = (CR)^* = R^*C^* = CR = M$ y cumple

$$\langle Mx, x\rangle = \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \geq 0.$$

**Teorema 1.7.** *([37, Teorema 8.13]) Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ un marco en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con cotas $A$ y $B$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

*i) El operador de marco $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un isomorfismo y $AI \leq M \leq BI$.*

*ii) El inverso del operador de marco $M^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un isomorfismo y $B^{-1}I \leq M \leq A^{-1}I$.*

*iii) La sucesión $\{M^{-1}x_i\}_{i\in I}$ es un marco con cotas $B^{-1}$ y $A^{-1}$.*

*iv) Para cada $x \in \mathcal{H}$,*

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, M^{-1}x_i\rangle\, x_i = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle\, M^{-1}x_i$$

*donde las series convergen incondicionalmente en la norma de $\mathcal{H}$.*

Una consecuencia del teorema anterior es que cada marco $\{x_i\}_{i\in I}$ tiene asociado un sistema dual $\{M^{-1}x_i\}_{i\in I}$ que también es un marco y se le conoce como *marco dual canónico*. Cualquier otra sucesión $\{y_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ con la propiedad

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, y_i\rangle x_i \quad \forall\ x \in \mathcal{H}$$

es llamado un *dual alternativo* de $\{x_i\}_{i\in I}$. Si $\{y_i\}_{i\in I}$ es un marco (lo cual no ocurre en general), entonces se llama *marco dual alternativo* o simplemente *marco dual* de $\{x_i\}_{i\in I}$.

Observamos que un marco $\{x_i\}_{i\in I}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ puede tener varios marcos duales y en ese caso los coeficientes de la representación de los vectores de $\mathcal{H}$ en términos del marco no es única.

Notemos que una base ortonormal es, en particular, un marco y su correspondiente operador de marco es $M = I_{\mathcal{H}}$. Sin embargo, existen marcos que no son bases ortonormales y cuyo operador de marco también es la identidad, éstos se conocen como *marcos de Parseval*.

**Definición 1.8.** Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ un marco de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

i) Se dice que $\{x_i\}_{i\in I}$ es un *marco de Parseval* si $A = B = 1$ son cotas de marco.

ii) Se dice que $\{x_i\}_{i\in I}$ es un *marco exacto* si deja de ser un marco cuando eliminamos cualquier elemento de la sucesión.

iii) Se dice que $\{x_i\}_{i\in I}$ es una *Base de Riesz* si existe una base ortonormal $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ y un isomorfismo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T\varepsilon_i = x_i$ para todo $i \in I$.

*Observación* 1.9.

i) Se puede ver que $\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco exacto si y solo si es una base de Riesz (ver [37]).

ii) $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal si y solo si es un marco de Parseval exacto (ver [37]).

iii) Notemos que el operador de síntesis asociado a una base de Riesz es un isomorfismo. En efecto, si $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$, entonces $x_i = T\varepsilon_i$ para todo $i \in I$, donde $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Luego, si $C : \ell^2(I) \to \mathcal{H}$ es su operador de síntesis asociado tenemos que

$$Ca = \sum_{i\in I} a_i x_i = \sum_{i\in I} a_i T\varepsilon_i = T\left(\sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i\right),$$

de donde se deduce que $C$ es inyectivo y sobreyectivo.

Una condición necesaria y suficiente para que el marco dual sea único es que $\{x_i\}_{i\in I}$ sea exacto, como se enuncia en el siguiente lema y cuya demostración se puede encontrar en [37].

**Lema 1.10.** *Si $\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces $\{x_i\}_{i\in I}$ tiene un único marco dual si y solo si es un marco exacto. En este caso, el único marco dual es el canónico.*

En el Capítulo 2 estaremos interesados en relacionar marcos entre dos espacios de Hilbert a través de un operador acotado. Para ello tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.11.** *Sean $\{x_i\}_{i\in I}$ una sucesión en $\mathcal{H}$ y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ un isomorfismo. Si $\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de $\mathcal{H}$ con cotas $A$ y $B$, entonces $\{Tx_i\}_{i\in I}$ es un marco de $\mathcal{K}$ con cotas $A\|T^{-1}\|^{-2}$ y $B\|T\|^2$.*

*Demostración.* Supongamos que $\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de $\mathcal{H}$ con cotas $A$ y $B$. Usando el operador adjunto de $T$ tenemos para todo $y \in \mathcal{K}$ que

$$\sum_{i\in I} |\langle y, Tx_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle T^*y, x_i\rangle|^2 \leq B\,\|T^*y\|^2 \leq B\,\|T^*\|^2\|y\|^2 = B\,\|T\|^2\|y\|^2. \tag{1.5}$$

Por otro lado, $\|y\| \leq \|T^{*-1}\|\,\|T^*y\| = \|T^{-1}\|\,\|T^*y\|$, con lo cual $\|T^{-1}\|^{-1}\,\|y\| \leq \|T^*y\|$ para todo $y \in \mathcal{K}$. Por lo tanto,

$$\sum_{i\in I} |\langle x, Tx_i\rangle|^2 \geq A\,\|T^*x\|^2 \geq A\,\|T^{-1}\|^{-2}\,\|x\|^2. \tag{1.6}$$

Las dos cotas (1.5) y (1.6) demuestran el teorema. ■

Un resultado conocido de la teoría de espacios de Hilbert es que todas las bases ortonormales de espacios de Hilbert de igual dimensión son equivalentes, es decir, existe un operador unitario que manda una base ortonormal en otra. Más aún, la imagen de una base ortonormal por un operador unitario es una base ortonormal del espacio imagen. A continuación veremos que las mismas propiedades valen para marcos de Parseval. Las demostraciones de los siguientes resultados se pueden ver en [37] y [39].

**Teorema 1.12.** *Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ un marco de Parseval de $\mathcal{H}$ y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ un isomorfismo.*

*i) Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ es unitario (es decir, $T^*T = I_{\mathcal{H}}$ y $TT^* = I_{\mathcal{K}}$) entonces $\{Tx_i\}_{i\in I}$ es un marco de Parseval de $\mathcal{K}$.*

*ii) Si $\{y_i\}_{i\in I}$ es un marco de Parseval de $\mathcal{K}$ tal que $Tx_i = y_i$ para todo $i \in I$, entonces $T$ es unitario. En este caso se dice que $\{x_i\}_{i\in I}$ e $\{y_i\}_{i\in I}$ son unitariamente equivalentes.*

Los marcos también se pueden caracterizar como imagen de bases ortonormales por operadores sobreyectivos.

**Teorema 1.13.** *Supongamos que $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita. Una sucesión $\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de $\mathcal{H}$ si y solo si existe una base ortonormal $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ y un operador sobreyectivo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T\varepsilon_i = x_i$ para todo $i \in I$.*

El caso en que $\mathcal{H}$ es de dimensión finita el resultado es ligeramente distinto.

**Teorema 1.14.** *Supongamos que* $\dim(\mathcal{H}) = n$ *y* $\dim(\mathcal{K}) = m$*. Una sucesión $\{x_1, ..., x_m\}$ es un marco de $\mathcal{H}$ si y solo si existe una base ortonormal $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$ de $\mathcal{K}$ y un operador lineal sobreyectivo $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ tal que $T\varepsilon_i = x_i$ para todo $i = 1, ..., m$.*

Por ejemplo, las proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados de un espacio de Hilbert son operadores sobreyectivos, éstos mandan bases ortonormales en marcos de Parseval. Más aún se tiene el siguiente resultado (ver [40, Corolario 8.34]):

**Teorema 1.15** (Dualidad de Naimark)**.** *Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una sucesión en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

*i)* *$\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de $\mathcal{H}$ si y solo si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ y una base de Riesz $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$ tal que $P_{\mathcal{H}}\varepsilon_i = x_i$ para todo $i \in I$, donde $P_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$.*

*ii)* *$\{x_i\}_{i\in I}$ es un marco de Parseval de $\mathcal{H}$ si y solo si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ y una base ortonormal $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$ tal que $P_{\mathcal{H}}\varepsilon_i = x_i$ para todo $i \in I$.*

Para concluir esta sección, enunciamos el siguiente teorema que afirma que dos marcos de Parseval de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que se obtienen proyectando una misma base ortonormal en subespacios cerrados $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$ son unitariamente equivalentes si y solo si ambos subespacios coinciden. Su demostración se puede ver en [39, Proposición 2.6].

**Teorema 1.16.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ y $P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}$ las proyecciones ortogonales de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente. Entonces los marcos de Parseval $\{x_i\}_{i\in I}$ e $\{y_i\}_{i\in I}$ definidos por $x_i = P_{\mathcal{M}}\varepsilon_i$ e $y_i = P_{\mathcal{N}}\varepsilon_i$ para todo $i \in I$ son unitariamente equivalentes si y solo si $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.*

## 1.2 El espacio de Hardy $H^2$

En esta sección recordaremos la definición y propiedades generales del espacio de Hardy $H^2$. Esta teoría será necesaria para los siguientes capítulos que incluirán resultados novedosos tanto en el contexto de los marcos en espacios de Hilbert como en la teoría sobre los espacios de tipo Dirichlet que mencionamos en la introducción de este trabajo.

Existen varias definiciones equivalentes del espacio de Hardy $H^2$. Incluimos algunas de ellas en el Teorema 1.17 cuya demostración se puede encontrar en [54, Teorema 17.10]. Más detalles sobre las distintas caracterizaciones de $H^2$ se pueden encontrar en la Sección 3.1 de [34].

Como es usual denotaremos por $\mathbb{T}$ al círculo unitario en $\mathbb{C}$. Sea $\sigma$ la medida de Lebesgue normalizada en $(-\pi,\pi]$ y dada $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ le asociamos la función $\tilde{f}(t) := f(e^{it})$, $t \in (-\pi,\pi]$. Si llamamos $z = e^{it}$, tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\, d\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, dt = \int_{\mathbb{T}} f(z)\, \frac{dz}{2\pi i z} = \int_{\mathbb{T}} f(z)\, dm(z)$$

donde $dm(z) := dz/2\pi iz$ es la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$.

El espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, m)$ consiste de todas las funciones medibles $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|^2 := \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2\, dm(z) < \infty.$$

Identificando las funciones que son iguales en casi todo punto de $\mathbb{T}$, se define el producto interno en $L^2(\mathbb{T})$ por

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f(z)\, \overline{g(z)}\, dm(z).$$

Notar que existe un isomorfismo natural entre los espacios $L^2(\mathbb{T})$ y $L^2((-\pi,\pi],\sigma)$ los cuales tienen bases ortonormales $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con $\gamma_k(z) = z^k$, y $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con $e_k(t) = e^{itk}$, respectivamente. Más aún, los coeficientes de Fourier de $f$ respecto a la base $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ se corresponden con los coeficientes de Fourier usuales de $\tilde{f}$, es decir, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\, e^{-ikt}\, d\sigma(t) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\, z^{-k}\, dm(z).$$

Enunciamos en el siguiente teorema algunas propiedades y caracterizaciones del espacio de Hardy $H^2$.

**Teorema 1.17.**

*i) Una función $f$ analítica en $\mathbb{D}$ de la forma $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ ($z \in \mathbb{D}$) está en $H^2$ si y solo si $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$. En ese caso,*

$$\|f\|^2 := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2.$$

*ii) Si $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ ($z \in \mathbb{D}$) está en $H^2$, entonces existe el límite radial $f^*$ de $f$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$, es decir, $f^*(z) = \lim_{r\to 1^-} f(rz)$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$; $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ y sus coeficientes de Fourier son*

$$\widehat{f^*}(j) = \begin{cases} a_j & si\ j \geq 0, \\ 0 & si\ j < 0. \end{cases}$$

*Además, se cumple que*

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^2\,dm(z) = \int_{\mathbb{T}} |f^*(z)|^2\,dm(z) = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 = \|f\|^2$$

*y $f$ es la integral de Poisson y la integral de Cauchy de $f^*$, esto es, si $z = re^{i\theta}$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f^*(e^{it})\,dt \qquad y \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

*donde $P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}$ y $\Gamma$ es el círculo unitario orientado positivamente.*

*iii) La correspondencia $f \mapsto f^*$ es un isomorfismo isométrico de $H^2$ en el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ que consiste de todas las funciones $g \in L^2(\mathbb{T})$ cuyos coeficientes de Fourier negativos son cero, es decir, $\widehat{g}(j) = 0$ para todo $j < 0$.*

Para los objetivos que nos planteamos en los Capítulos 2 y 3, resultará más conveniente usar la caracterización *iii*) de $H^2$ dada en el Teorema 1.17. Sin embargo, en el Capítulo 4 usaremos la caracterización *i*) del Teorema 1.17. Las razones para ello se irán entendiendo a medida que avancemos en la discusión.

En los resultados y propiedades que resumiremos en el resto de esta sección, usaremos la notación $H^2$ para referimos al conjunto de las funciones analíticas en el disco tales que los coeficientes de su serie de Taylor están en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, es decir, usamos la descripción *i*) del Teorema 1.17. Igualmente, aclaramos que la mayoría de las propiedades valen si se considera $H^2$ como el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ de todas las funciones con coeficientes de Fourier negativos iguales a cero.

Dadas $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ y $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ en $H^2$, el producto interno entre $f$ y $g$ se define por

$$\langle f, g\rangle := \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,\overline{b_j}.$$

*Observación* 1.18. Si identificamos $H^2$ con un subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ como en el ítem *iii*) del Teorema 1.17, el producto interno en $H^2$ es el que se hereda de $L^2(\mathbb{T})$, es decir,

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z)\,\overline{g(z)}\,dm(z).$$

para $f, g \in H^2$.

En la siguiente proposición resumimos las propiedades más importantes de $H^2$ cuyas demostraciones se pueden encontrar en la Sección 3.1 de [34].

**Proposición 1.19.**

*i)* *$H^2$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo, es decir, para cada $w \in \mathbb{D}$ existen funciones $k_w \in H^2$ tal que para $f \in H^2$ se cumple que $f(w) = \langle f, k_w \rangle$. Más aún, $k_w$ está dado por la fórmula explícita*
$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \overline{w}z}.$$

*ii)* *$H^2 = \overline{\text{gen}}\,\{k_w : w \in \mathbb{D}\}$.*

*iii)* *Los polinomios son densos en $H^2$.*

*iv)* *Si denotamos por $H^\infty$ al conjunto de todas las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$, entonces se cumple que $H^\infty \subset H^2$ y la inclusión es propia.*

En la Sección 1.3 veremos que uno de los operadores para los que se ha estudiado el problema de encontrar subespacios invariantes no triviales, es el *shift unilateral* $S : H^2 \to H^2$, el cual se define por
$$Sf(z) = zf(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Se ve fácilmente que $S$ es una isometría ya que si $f \in H^2$ con $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $z \in \mathbb{D}$, tenemos que
$$\|Sf\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{j-1}|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 = \|f\|^2, \tag{1.7}$$
y además su operador adjunto $S^* : H^2 \to H^2$ está dado por
$$S^* f(z) = \frac{f(z) - a_0}{z}.$$

Los subespacios cerrados de $H^2$ que son invariantes por $S$ fueron completamente caracterizados por Beurling en [17] quien demostró el resultado dado en el Teorema 1.23. Antes de enunciar dicho teorema, vamos a definir un tipo de función que es clave para la caracterización dada por Beurling.

**Definición 1.20.** Una función $\phi \in H^\infty$ se dice *inner* si $|\phi(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$.

*Observación* 1.21. Desde el punto de vista de la descripción *iii*) del Teorema 1.17 una función en $H^2$ visto como subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ es inner si $\phi \in H^2$ y $|\phi(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$.

**Ejemplo 1.22.** A continuación se dan algunos ejemplos de funciones inner (no inner) que serán de utilidad más adelante. Cabe acotar que como $H^\infty \subset H^2$ (Proposición 1.19), basta verificar que las funciones dadas son acotadas en $\mathbb{D}$ y tienen módulo 1 para casi todo $z \in \mathbb{T}$.

1. Las funciones $\gamma_j(z) = z^j$, $j \in \mathbb{N}_0$ son funciones inner ya que $|\gamma_j(z)| = |z|^j < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|\gamma_j(z)| = |z|^j = 1$ para todo $z \in \mathbb{T}$.

2. Otro ejemplo de función inner es

$$g(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Observamos que esta función está definida en todo $z \in \mathbb{T}$ salvo en 1. Usando la identidad $|e^w| = e^{\mathrm{Re}(w)}$ tenemos que

$$\left|\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)\right| = \exp\left\{-\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right\} = \exp\left(-\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) \leq 1 \quad \forall\ z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$$

y además

$$\lim_{r\to 1^-} \exp\left(-\frac{1-r^2}{|1-r|^2}\right) = 0.$$

Por lo tanto, $|g(z)| \leq 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$. Este es un ejemplo particular de función inner singular.

3. Dada una medida de Borel finita y positiva $\mu$ en $\mathbb{T}$ que es singular con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}$, se define la *función inner singular* correspondiente a $\mu$ por

$$F(z) := \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z}\, d\mu(w)\right), \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

La función $g$ del ítem 2. es la función inner singular correspondiente a la medida de Dirac $\delta_{\{1\}}$.

4. Mostramos ahora un ejemplo de una función que no es inner. Definamos

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

En el ejemplo anterior vimos que $|g(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$, entonces $f$ cumple la misma propiedad. Sin embargo,

$$\lim_{r\to 1^-} \exp\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = +\infty,$$

con lo cual tenemos que $f$ no es acotada en $\mathbb{D}$.

**Teorema 1.23** (Beurling)**.** *Un subespacio cerrado $\mathcal{M} \subseteq H^2$ es invariante por $S$ si y solo si existe una función inner $\phi \in H^2$ tal que*

$$\mathcal{M} = \phi H^2 = \left\{\phi f : f \in H^2\right\}.$$

*Además, $\phi_1 H^2 = \phi_2 H_2$ con $\phi_1, \phi_2$ funciones inner si y solo si $\phi_1(z)/\phi_2(z)$ es una constante de módulo 1 para casi todo $z \in \mathbb{T}$.*

*Observación* 1.24. Si $\phi$ es una función inner, entonces el subespacio invariante por $S$ asociado a $\phi$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_\phi = \phi H^2 = \overline{\text{gen}}\left\{S^j\phi : j \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Vale que $\{S^j\phi\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ es una base ortonormal de $\mathcal{M}_\phi$. En efecto, usando que $|\phi(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$ tenemos que

$$\langle S^j\phi, S^k\phi\rangle = \int_{\mathbb{T}} |\phi(z)|^2 z^{j-k}\, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} z^{j-k}\, dm(z) = \delta_{j,k}.$$

Además, si $f \in M_\phi$ es tal que $\langle f, S^j\phi\rangle = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, entonces existe $g \in H^2$ tal que $f = \phi g$ y

$$0 = \langle f, S^j\phi\rangle = \langle \phi g, S^j\phi\rangle = \int_{\mathbb{T}} |\phi(z)|^2 g(z)\, z^{-j}\, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} g(z)\, z^{-j}\, dm(z),$$

es decir, todos los coeficientes de Fourier positivos de la función $g$ son cero y dado que $g \in H^2$, concluimos que $g(z) = 0$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$ y por lo tanto $f(z) = \phi(z)g(z) = 0$ a.e. $z \in \mathbb{T}$.

Notemos que la función constantemente igual a $1 \in H^2$ es claramente inner, y nos da el subespacio invariante

$$\mathcal{M} = H^2 = \overline{\text{gen}}\left\{S^j 1 : j \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Aquí es claro que $\{S^j 1\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ es una base ortonormal de $H^2$. Una pregunta interesante que se plantea en este contexto es:

¿cuáles son todas las funciones $f \in H^2$ tales que $H^2 = \overline{\text{gen}}\left\{S^j f : j \in \mathbb{N}_0\right\}$?

Las funciones $f$ que satisfacen $[f] := \overline{\text{gen}}\left\{S^j f : j \in \mathbb{N}_0\right\} = H^2$ se les llama *cíclicas*, pues son vectores cíclicos para el operador $S$. La respuesta a la pregunta anterior da lugar a otra clase importante de funciones en el espacio $H^2$ que se conocen como funciones *outer*.

**Definición 1.25.** Una función analítica $F$ en $\mathbb{D}$ se dice *outer* si es una función de la forma

$$F(z) = C\, \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z}\, \log(\phi(w))\, dm(w)\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

donde $C \in \mathbb{T}$ y $\phi : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ es una función tal que $\log(\phi) \in L^1(\mathbb{T})$.

En $H^2$ vale el siguiente teorema de factorización en términos de funciones inner y outer (ver [54, Teorema 17.17]).

**Teorema 1.26.** *Si $f \in H^2$, entonces $f = f_i f_o$ donde $f_i$ es inner y $f_o$ es outer con $f_o \in H^2$. Esta factorización es única.*

Volviendo a la discusión sobre cuáles son todas las funciones $f \in H^2$ que cumplen que $H^2 = \overline{\text{gen}}\left\{S^j f : j \in \mathbb{N}_0\right\}$ tenemos el siguiente corolario del Teorema de Beurling.

**Corolario 1.27.** *Una función $f \in H^2$ es cíclica si y solo si $f$ es una función outer.*

Una demostración del Corolario anterior se puede ver en [34, Corolario 4.5]. Igualmente, incluimos a continuación la idea de la prueba.

*Idea de la demostración del Corolario 1.27.* Supongamos que $f \in H^2$ es outer. Es claro que $[f] := \overline{\text{gen}}\left\{S^j f : j \in \mathbb{N}_0\right\}$ es un subespacio de $H^2$ invariante por $S$. Luego, por el Teorema 1.23, existe una función inner $\phi$ tal que $[f] = \phi H^2$. Como $f \in \phi H^2$, entonces $f = \phi g$ para alguna función $g \in H^2$ y dado que $f$ es outer, se tiene que $\phi$ debe ser una constante de módulo 1, con lo cual $[f] = H^2$.

Recíprocamente, supongamos que $f = f_i f_o$ donde $f_i$ es inner y $f_o \in H^2$ es outer. La clave está en ver que vale la inclusión $[f] \subset f_i H^2$ y en consecuencia $H^2 = [f] \subset f_i H^2$, con lo cual $H^2 = f_i H^2$. Esto implica que la función $f_o$ es un elemento de $f_i H^2$. Por la unicidad de la factorización de $f$ (Teorema 1.26), $f_i$ debe ser una constante de módulo 1 y por lo tanto $f = f_o$. ■

## 1.3 Subespacios invariantes

Existe un problema en la teoría de operadores que ha estado abierto por más de medio siglo captando la atención de muchos matemáticos y se conoce como *el problema del subespacio invariante* que plantea lo siguiente: todo operador lineal y acotado $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ con $\dim(\mathcal{X}) > 1$ tiene algún subespacio lineal cerrado invariante no trivial, es decir, un subespacio lineal cerrado $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ distinto de $\{0\}$ y $\mathcal{X}$ tal que $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Enflo [32] y Read [50, 51, 52] probaron que la afirmación anterior es falsa en algunos espacios de Banach. Sin embargo, este problema continúa abierto para el caso en que $\mathcal{X} = \mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable.

Para los objetivos que nos planteamos en los siguientes capítulos de esta tesis, abordaremos a continuación algunos resultados relevantes en este contexto.

Algunos de los operadores más simples para los que se ha estudiado el problema del subespacio invariante son ciertas isometrías que actúan en los espacios de sucesiones $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$ que se conocen como el shift bilateral $U$ y el shift unilateral $S$, y están definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \qquad & U(\{..., a_{-1}, (a_0), a_1, ...\}) = \{..., a_{-2}, (a_{-1}), a_0, , ...\}, \\ S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0), \qquad & S(\{a_0, a_1, ...\}) = \{0, a_0, a_1, ...\}. \end{aligned}$$

En la sección anterior vimos que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es isométricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{T})$. De hecho, dada $f \in L^2(\mathbb{T})$ y sus coeficientes de Fourier $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\, z^{-k}\, dm(z)$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $m$ la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$, la correspondencia

$$f \longleftrightarrow \left\{\widehat{f}(k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

resulta un isomorfismo isométrico entre $L^2(\mathbb{T})$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$. Análogamente, vimos que $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ es isométricamente isomorfo a $H^2$, el cual se puede identificar con el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ que consiste de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{T})$ con coeficientes de Fourier negativos iguales a cero (ver Teorema 1.17), es decir,

$$H^2 = \left\{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(k) = 0 \text{ para todo } k < 0\right\}.$$

Con esto en mente, los operadores $U$ y $S$ se pueden definir actuando en los espacios de funciones $L^2(\mathbb{T})$ y $H^2$ respectivamente como

$$Uf(z) = zf(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, z^{k+1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k-1)\, z^k,$$

$$Sf(z) = zf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)\, z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k-1)\, z^k.$$

Se ve fácilmente que $U$ es un operador unitario y su operador adjunto $U^* : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ está dado por $U^*f(z) = \overline{z}f(z) = z^{-1}f(z)$. Por otro lado, $S$ es una isometría (ver (1.7)) y su adjunto es el operador $S^* : H^2 \to H^2$, dado por

$$S^*f(z) = \frac{g(z) - g(0)}{z}$$

para casi todo $z \in \mathbb{T}$.

En la Sección 1.2 vimos que los subespacios cerrados de $H^2$ que son invariantes por el shift unilateral fueron completamente caracterizados por Beurling [17] en 1949 (Teorema 1.23) quien demostró que todo subespacio cerrado $\mathcal{M} \subseteq H^2$ es invariante por $S$ si y solo si existe una función inner $u$ tal que $\mathcal{M} = uH^2$.

*Observación* 1.28. Aunque $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ es isométricamente isomorfo a $H^2$, no existe una caracterización de los subespacios de $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ que son invariantes por $S$ debido a que la descripción dada por Beurling depende de la definición de función inner las cuales no han sido caracterizadas en términos de sus coeficientes.

También estaremos interesados en una clase especial de subespacios invariantes que son los que *reducen* a un operador $T$ que actúa en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

**Definición 1.29.** Sean $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se dice que $\mathcal{M}$ *reduce* a $T$ si $\mathcal{M}$ es invariante por $T$ y $T^*$. En este caso es posible descomponer

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$$

donde $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\perp}$ son invariantes por $T$ y $T^*$ simultáneamente.

*Observación* 1.30. Si denotamos por $P_{\mathcal{M}}$ a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{M}$, se puede ver que $\mathcal{M}$ es invariante por $T$ si y solo $TP_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}TP_{\mathcal{M}}$, y que $\mathcal{M}$ reduce a $T$ si y solo si $TP_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}T$ (ver [27, Capítulo II, Proposición 3.7]).

Se sabe que no existen subespacios propios de $H^2$ que reduzcan al operador $S$ (ver [49, Teorema 3.5]), en este caso se dice que $S$ es irreducible. Sin embargo, para el caso del shift bilateral se tiene el siguiente resultado demostrado por T.P. Srinivasan [57] que caracteriza completamente a los subespacios de $L^2(\mathbb{T})$ que reducen $U$.

**Teorema 1.31.** *Un subespacio $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T})$ reduce a $U$ si y solo si existe un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{T}$ tal que $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T})$.*

El teorema anterior se puede generalizar a dos dimensiones, es decir, al espacio $L^2(\mathbb{T}^2)$ considerando dos operadores shift, uno en cada coordenada. En el Capítulo 2 enunciaremos ese caso ya que será de utilidad para demostrar el Teorema 2.32.

La familia de todos los subespacios invariantes por $U$ incluye a los que fueron caracterizados en el Teorema 1.31, pero es más grande. En [49, Teorema 3.9] dieron la siguiente descripción de los subespacios de $L^2(\mathbb{T})$ que son invariantes por $U$ y no lo reducen.

**Teorema 1.32.** *Un subespacio $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T})$ es invariante por $U$ (y no reduce a $U$) si y solo si existe una función medible $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ con $|\phi(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$, tal que*

$$\mathcal{M} = \phi H^2 = \left\{\phi f : f \in H^2\right\}.$$

*Además, $\phi_1 H^2 = \phi_2 H^2$ con $|\phi_1(z)| = |\phi_2(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$, si y solo si $\phi_1(z)/\phi_2(z)$ es igual a una constante para casi todo $z \in \mathbb{T}$.*

Notar que el teorema anterior y el Teorema de Beurling (Teorema 1.23) se diferencian en que la función $\phi$ que caracteriza el subespacio invariante por $S$ en el teorema de Beurling debe ser inner.

## 1.4 Espacios de funciones $\mathcal{K}$-valuadas

En esta sección se introducirán dos tipos de espacios de funciones vectoriales: $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert complejo separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ y norma $\| \cdot \|_{\mathcal{K}}$. También definiremos dos operadores que serán fundamentales para los resultados que se discutirán a lo largo de esta tesis: el *shift bilateral con multiplicidad* $\mathbf{U}$ actuando en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ que es un operador unitario, y el *shift unilateral con multiplicidad* $\mathbf{S}$ que es una isometría en $H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$.

Primero recordaremos las nociones de medibilidad para funciones $f : \Omega \to \mathcal{K}$ donde $(\Omega, \Sigma, \mu)$ es un espacio de medida finita y $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert complejo (no necesariamente separable). Para más detalles sobre este tema se puede ver, por ejemplo [28, Capítulo II] y [48].

**Definición 1.33.**

i) Una función $f : \Omega \to \mathcal{K}$ se dice *simple* si existen conjuntos disjuntos $E_1, ..., E_n \in \Sigma$ y vectores $x_1, ..., x_n \in \mathcal{K}$ tales que $f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{E_k}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \Omega$.

ii) Una función $f : \Omega \to \mathcal{K}$ se dice *fuertemente medible* si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(\lambda) - f(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = 0$ para casi todo $\lambda \in \Omega$.

iii) Una función $f : \Omega \to \mathcal{K}$ se dice *débilmente medible* si la función $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible Lebesgue para todo $x^* \in \mathcal{K}^*$, donde $\mathcal{K}^*$ denota el espacio dual de $\mathcal{K}$.

*Observación* 1.34. Notar que la medibilidad fuerte implica la medibilidad débil. En efecto, supongamos que $f : \Omega \to \mathcal{K}$ es una función fuertemente medible, es decir, existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(\lambda) - f(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = 0$ para casi todo $\lambda \in \Omega$. Ahora, para todo $x^* \in \mathcal{K}^*$ y $\lambda \in \Omega$, tenemos por la linealidad y continuidad de $x^*$ que

$$|x^*(f_n(\lambda)) - x^*(f(\lambda))| = |x^*(f_n(\lambda) - f(\lambda))| \leq M\, \|f_n(\lambda) - f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(f_n(\lambda)) = x^*(f(\lambda))$. Dado que $f_n$ es simple para todo $n$, $x^* \circ f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función simple (compleja) y como $x^* \circ f$ es el límite de funciones simples, resulta medible.

La medibilidad débil y la medibilidad fuerte no son equivalentes en general. El siguiente teorema muestra la relación que existe entre ambas (ver [28, Teorema 2, Capítulo II]).

**Teorema 1.35** (Pettis)**.** *Una función $f : \Omega \to \mathcal{K}$ es fuertemente medible si y solo si*

*i) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es un subconjunto separable de $\mathcal{K}$, y*

*ii) $f$ es débilmente medible.*

Observar que en el caso que $\mathcal{K}$ es separable, el ítem i) del teorema anterior se verifica para cualquier función $f : \Omega \to \mathcal{K}$ tomando $E$ como el conjunto vacío, pues $f(\Omega) \subseteq \mathcal{K}$ también es separable. Se deduce entonces del Teorema 1.35 que en este caso las nociones de medibilidad fuerte y débil son equivalentes.

Dado que en este trabajo consideraremos espacios de Hilbert separables, en virtud del Teorema de representación de Riesz, adoptaremos la siguiente definición de medibilidad para funciones $\mathcal{K}$-valuadas.

**Definición 1.36.** Una función $f : \Omega \to \mathcal{K}$ se dice *medible* si para cada $x \in \mathcal{K}$, la función compleja $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{K}}$ es medible Lebesgue en $\Omega$.

**Proposición 1.37.** *Sea $f : \Omega \to \mathcal{K}$ una función medible. Entonces se cumple lo siguiente:*

*i) La función $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}$ es medible Lebesgue en $\Omega$.*

*ii) Si $g : \Omega \to \mathcal{K}$ es medible, entonces $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), g(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}}$ es medible Lebesgue en $\Omega$.*

*Demostración.* *i*) Primero observamos que como $f(\lambda) \in \mathcal{K}$ para cada $\lambda \in \Omega$, podemos escribir

$$\|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = \sup_{x\in\mathcal{K},\, \|x\|_{\mathcal{K}}=1} |\langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{K}}|$$

Por otro lado, dado que $\mathcal{K}$ es separable, contiene un conjunto denso numerable $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n/\|y_n\|_{\mathcal{K}}$ y veamos que

$$\|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f(\lambda), x_n\rangle_{\mathcal{K}}|. \tag{1.8}$$

Es claro que $\|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f(\lambda), x_n\rangle_{\mathcal{K}}|$. Además, si fijamos $x \in \mathcal{K}$, dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_{N_0}\|_{\mathcal{K}} < \epsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}
|\langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{K}}| - |\langle f(\lambda), x_{N_0}\rangle_{\mathcal{K}}| &\leq |\langle f(\lambda), x - x_{N_0}\rangle_{\mathcal{K}}| \\
&\leq \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}\, \|x - x_{N_0}\|_{\mathcal{K}} \\
&\leq \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}\, \epsilon
\end{aligned}$$

y por lo tanto $|\langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{K}}| \leq |\langle f(\lambda), x_{N_0}\rangle_{\mathcal{K}}| + \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}\, \epsilon$. Más aún,

$$|\langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{K}}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f(\lambda), x_n\rangle_{\mathcal{K}}| + \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}\, \epsilon$$

y como $\epsilon$ es arbitrario tenemos que $|\langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{K}}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f(\lambda), x_n\rangle_{\mathcal{K}}|$. Ahora, tomando supremo sobre todos los $x \in \mathcal{K}$ de norma uno, obtenemos que

$$\|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f(\lambda), x_n\rangle_{\mathcal{K}}|$$

lo cual demuestra (1.8).

Concluimos que la función $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}$ es medible Lebesgue por ser el supremo de una sucesión de funciones medibles Lebesgue (pues $f$ es medible por hipótesis).
*ii*) Para demostrar la afirmación, basta recordar la identidad de polarización:

$$\langle f(\lambda), g(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}} = \frac{1}{4}\left(\|f(\lambda) + g(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} - \|f(\lambda) - g(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} - i\|f(\lambda) + ig(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} + i\|f(\lambda) - ig(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}\right)$$

y algunas propiedades de funciones medibles Lebesgue. ■

### 1.4.1 El espacio $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y el espacio de Hardy vectorial $H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$

Antes de definir el espacio $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$, recordamos que el producto (o suma ortogonal) de una sucesión de espacios de Hilbert $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$, donde $I$ es un conjunto de índices a lo sumo numerable, es el espacio de Hilbert

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \{g_i\}_{i\in I} : g_i \in \mathcal{H}_i \ \forall\ i \in I \ \text{ y } \sum_{i\in I} \|g_i\|^2_{\mathcal{H}_i} < \infty \right\}$$

con el producto interno

$$\langle \{f_i\}, \{g_i\} \rangle = \sum_{i \in I} \langle f_i, g_i \rangle_{\mathcal{H}_i}.$$

En el caso que $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ para todo $i \in I$, denotaremos el producto por $\mathcal{H}^I$. Cuando todos los $\mathcal{H}_i$ son subespacios cerrados de un mismo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, los elementos de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ se suelen denotar por $g = \sum_{i \in I} g_i$ ya que existe el isomorfismo natural $\mathcal{H}_i \cong \left\{ \{g_i \delta_{i,j}\}_{j \in I} : g_i \in \mathcal{H}_i \right\}$ y se cumple que $\sum_{i \in I} \|g_i\|^2 = \|g\|^2$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ de todas funciones medibles $f : \mathbb{T} \to \mathcal{K}$ que satisfacen $\int_{\mathbb{T}} \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda) < \infty$, donde $m$ denota la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$. Como la función $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}}$ es Lebesgue medible si $f$ y $g$ son medibles (ver Proposición 1.37), tiene sentido calcular la integral

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda), \tag{1.9}$$

de hecho, esta integral es convergente, ya que aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $| \langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}} | \leq \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}} \, \|g(\lambda)\|_{\mathcal{K}}$ y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}} \right| \, dm(\lambda) \leq \left( \int_{\mathbb{T}} \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda) \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{T}} \|g(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda) \right)^{1/2} < \infty.$$

Se puede ver fácilmente que la fórmula (1.9) es una forma sesquilineal semidefinida positiva. Con el objetivo de que (1.9) defina un producto interno, al igual que en el caso escalar se considera la siguiente relación de equivalencia en $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$: se dice que dos funciones $f$ y $g$ son equivalentes (o están en la misma clase) si $f(\lambda) = g(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Luego, si denotamos por $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ al espacio cociente $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})/\sim$ obtenemos que $(L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno (observando que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bien definido en el espacio cociente). Haciendo un abuso de notación, siempre que trabajemos con elementos de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ utilizaremos una función representante de la clase correspondiente, con lo cual podremos evaluar en todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y las igualdades entre elementos de la misma clase valdrán en casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

A continuación veremos que cualquier $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ tiene dos posibles expansiones en serie que nos resultarán útiles más adelante.

**Teorema 1.38.** *Sea $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{K}$ con $\#I = \dim(\mathcal{K})$. Para cada $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ se cumplen las siguientes condiciones:*

*i) Existe una sucesión $\{f_i\}_{i \in I} \subset L^2(\mathbb{T})$ tal que*

$$f = \sum_{i \in I} f_i \, \varepsilon_i \quad y \quad \|f\|^2 = \sum_{i \in I} \|f_i\|^2,$$

*donde la primera serie converge en la norma de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$. En consecuencia, $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ es isométricamente isomorfo al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T})^I$, y por lo tanto es completo.*

*Para cada $i \in I$, la función $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ se llama la i-ésima función coordenada de $f$ respecto a la base $\mathcal{B}$ y está definida por $f_i(\lambda) = \langle f(\lambda), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

*ii) Existe una sucesión $\{c_k^f\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{K}$ tal que*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^f \gamma_k \quad y \quad \|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|c_k^f\|^2_{\mathcal{K}},$$

*donde la primera serie converge en la norma de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$. Llamamos a $c_k^f$ el k-ésimo coeficiente de Fourier de $f$.*

*Demostración.*
*i*) Observamos que si $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ entonces $f(\lambda) \in \mathcal{K}$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y por lo tanto tenemos que

$$f(\lambda) = \sum_{i\in I} \langle f(\lambda), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}} \, \varepsilon_i \quad \text{y} \quad \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} = \sum_{i\in I} |\langle f(\lambda), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}}|^2, \tag{1.10}$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, donde la convergencia de la primera serie en (1.10) es en la norma de $\mathcal{K}$. Veamos que para cada $i \in I$, la función $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ definida por $f_i(\lambda) = \langle f(\lambda), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}}$ pertenece a $L^2(\mathbb{T})$. Dado que $f$ es medible, las funciones coordenadas $f_i$ también lo son, por la Proposición 1.37. Además, como $| \langle f(\lambda), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}} | \leq \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} |f_i(\lambda)|^2 \, dm(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} |\langle f(\lambda), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}}|^2 \, dm(\lambda) \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda) = \|f\|^2,$$

con lo cual $f_i \in L^2(\mathbb{T})$ para todo $i \in I$. Por otro lado, la segunda igualdad en (1.10) implica que

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{i\in I} |f_i(\lambda)|^2 \, dm(\lambda) = \sum_{i\in I} \int_{\mathbb{T}} |f_i(\lambda)|^2 \, dm(\lambda) = \sum_{i\in I} \|f_i\|^2.$$

Concluimos que cada función $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ está en correspondencia con una sucesión $\{f_i\}_{i\in I} \in L^2(\mathbb{T})^I$ que satisface lo deseado.

*ii*) Como cada función coordenada $f_i$ asociada a $f$ pertenece a $L^2(\mathbb{T})$, y dado que $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con $\gamma_k(\lambda) = \lambda^k$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$, tenemos que vale lo siguiente:

$$f_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f_i, \gamma_k \rangle \, \gamma_k \quad \text{y} \quad \|f_i\|^2_{\mathcal{K}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f_i, \gamma_k \rangle|^2.$$

donde la primera serie converge en la norma de $L^2(\mathbb{T})$. Ahora, notemos que para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo, la suma $\sum_{i\in I} \langle f_i, \gamma_k \rangle \varepsilon_i$ converge en norma a un elemento de $\mathcal{K}$ pues, por Cauchy- Schwarz

$\sum_{i\in I} |\langle f_i, \gamma_k\rangle|^2 \leq \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 = \|f\|^2$. Por otro lado, la suma $\sum_{i\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f_i, \gamma_k\rangle\, \lambda^k\, \varepsilon_i$ converge en $\mathcal{K}$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$ ya que

$$\sum_{i\in I} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f_i, \gamma_k\rangle\, \lambda^k \right|^2 = \sum_{i\in I} |f_i(\lambda)|^2 = \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}},$$

y por lo tanto, para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ tenemos que

$$f(\lambda) = \sum_{i\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f_i, \gamma_k\rangle\, \lambda^k\, \varepsilon_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in I} \langle f_i, \gamma_k\rangle\, \varepsilon_i\, \lambda^k$$

en $\mathcal{K}$, y en consecuencia

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^f\, \gamma_k$$

en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ donde $c_k^f = \sum_{i\in I} \langle f_i, \gamma_k\rangle\, \varepsilon_i \in \mathcal{K}$. Veamos finalmente que también vale la igualdad de Plancherel con los coeficientes $\{c_k^f\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|c_k^f\|^2_{\mathcal{K}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| \sum_{i\in I} \langle f_i, \gamma_k\rangle \varepsilon_i \right\|^2 = \sum_{i\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f_i, \gamma_k\rangle|^2 = \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 = \|f\|^2.$$

■

Como consecuencia del siguiente teorema obtenemos que los coeficientes de Fourier asociados a una función $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ son únicos.

**Teorema 1.39.** *Sea $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\mathcal{K}$ tal que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|d_k\|^2$ es finita. Si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\gamma_k = 0$, entonces $d_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración.* Basta probar que $\{d_k\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión ortogonal en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$, ya que en ese caso,

$$0 = \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\gamma_k \right\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|d_k\|^2_{\mathcal{K}}$$

con lo cual $d_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora, para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $g_k : \mathbb{T} \to \mathcal{K}$ dada por $g_k(\lambda) = d_k\lambda^k$. La función $g_k$ es medible, pues para cada $x \in \mathcal{K}$, $\lambda \mapsto \langle g_k(\lambda), x\rangle_{\mathcal{K}} = \langle d_k\lambda^k, x\rangle_{\mathcal{K}} = \lambda^k \langle d_k, x\rangle_{\mathcal{K}}$ es medible. Además, la integral

$$\int_{\mathbb{T}} \|g_k(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \|d_k\lambda^k\|^2_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda) = \|d_k\|^2_{\mathcal{K}}$$

es finita. Por lo tanto, $g_k \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por último, vemos que $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortogonal:

$$\langle g_k, g_{k'}\rangle = \langle d_k, d_{k'}\rangle_{\mathcal{K}} \int_{\mathbb{T}} \lambda^{k-k'}\, dm(\lambda) = \begin{cases} \|d_k\|^2_{\mathcal{K}} & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{si } k \neq k'. \end{cases}$$

■

**Corolario 1.40.** *Sean $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$, $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{\tilde{d}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sucesiones en $\mathcal{K}$ tales que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|d_k\|^2$ y $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\tilde{d}_k\|^2$ son finitas. Si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\gamma_k = f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_k\gamma_k$ en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$, entonces $d_k = \tilde{d}_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En particular, los coeficientes de Fourier de $f$ son independientes de cualquier base ortonormal de $\mathcal{K}$.*

Notemos que una consecuencia de la discusión anterior y el Teorema 1.39 es que $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}$, es decir,

$$L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) = \left\{ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\gamma_k : \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{K} \text{ y } \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|^2_{\mathcal{K}} < \infty \right\}.$$

En consecuencia $L^2(\mathbb{T})^I$ (donde $\#I = \dim(\mathcal{K})$) es isométricamente isomorfo a $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}$.

De forma análoga al caso escalar, se define el espacio de Hardy vectorial de la siguiente manera:

**Definición 1.41.** El *espacio de Hardy vectorial* $H^2_{\mathcal{K}} := H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ es el subespacio de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ tales que sus coeficientes de Fourier $c_k^f$ son iguales a cero para todo $k < 0$, esto es,

$$H^2_{\mathcal{K}} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) : c_k^f = 0 \text{ para todo } k < 0 \right\}.$$

*Observación* 1.42. Equivalentemente, se puede ver que $H^2_{\mathcal{K}}$ consiste de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ cuyas funciones coordenadas respecto a cualquier base ortonormal de $\mathcal{K}$ pertenecen al espacio de Hardy (escalar) $H^2$. En efecto, si $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ es tal que $c_k^f = 0$ para todo $k < 0$ entonces, usando la escritura de los coeficientes de Fourier de $f$ respecto a una base ortonormal $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$ tenemos que

$$c_k^f = \sum_{i\in I} \langle f_i, \gamma_k\rangle\, \varepsilon_i = 0 \tag{1.11}$$

para todo $k < 0$, con lo cual los coeficientes de Fourier $\langle f_i, \gamma_k\rangle = \int_{\mathbb{T}} f_i(\lambda)\, \lambda^{-k}\, dm(\lambda)$ de $f_i$ son nulos para todo $k < 0$ y para todo $i \in I$, y en consecuencia $f_i \in H^2$ para todo $i \in I$.

Recíprocamente, si todas las funciones coordenadas $f_i$ de $f$ están en $H^2$, entonces sus coeficientes de Fourier dados por $\langle f_i, \gamma_k\rangle$ en $L^2(\mathbb{T})$ son cero para todo $k < 0$. Luego, si $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es cualquier base ortonormal de $\mathcal{K}$ tenemos que los coeficientes de Fourier $c_k^f$ de $f$ cumplen (1.11) para todo $k < 0$.

Recordando la correspondencia que vimos entre una función $f$ de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y sus coeficientes de Fourier podemos deducir que el espacio de Hardy vectorial $H^2_{\mathcal{K}}$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{K}^{\mathbb{N}_0}$, es decir,

$$H^2_{\mathcal{K}} = \left\{ f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\gamma_k : \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{K} \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2_{\mathcal{K}} < \infty \right\}.$$

Por otro lado, a través del desarrollo de $f$ en términos de las funciones coordenadas se puede ver que $H^2_{\mathcal{K}}$ es isométricamente isomorfo al producto $(H^2)^I$ de $\#I$ copias de $H^2$, donde $\#I = \dim(\mathcal{K})$.

En este punto, conviene notar que si $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, los espacios $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $H^2_{\mathcal{K}}$ coinciden con los espacios $L^2(\mathbb{T})$ y $H^2$ de funciones escalares y los coeficientes de Fourier asociados serían los usuales para el caso de funciones definidas en $\mathbb{T}$ (ver Sección 1.2).

A continuación definiremos los operadores shift que actúan en los espacios $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $H^2_{\mathcal{K}}$.

**Definición 1.43.** El operador $\mathbf{U} : L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) \to L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ dado por $\mathbf{U}f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ se llama el *shift bilateral con multiplicidad* en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$.

Es fácil ver que, igual que en el caso escalar, $\mathbf{U}$ es un operador unitario y su adjunto está dado por $\mathbf{U}^* f(\lambda) = \overline{\lambda} f(\lambda) = \lambda^{-1} f(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$.

**Definición 1.44.** El operador $\mathbf{S} : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$ dado por la restricción de $\mathbf{U}$ a $H^2_{\mathcal{K}}$ se llama el *shift unilateral con multiplicidad* en $H^2_{\mathcal{K}}$.

Se puede ver fácilmente que $H^2_{\mathcal{K}}$ es invariante por $\mathbf{U}$, ya que si $f \in H^2_{\mathcal{K}}$ entonces

$$\mathbf{U}f(\lambda) = \lambda f(\lambda) = \lambda \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k^f \lambda^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^f \lambda^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}^f \lambda^k$$

la cual es una función cuyos coeficientes de Fourier negativos son iguales a cero, es decir, $\mathbf{U}f$ está en $H^2_{\mathcal{K}}$. Además, $\mathbf{S}$ resulta una isometría, ya que

$$\|\mathbf{S}f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|c_{k-1}^f\|^2_{\mathcal{K}} = \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k^f\|^2_{\mathcal{K}} = \|f\|^2.$$

Sin embargo, se puede ver que $\mathbf{S}$ no es sobreyectivo, pues, dado $x \in \mathcal{K}$, $x \neq 0$, no hay ninguna función $g \in H^2_{\mathcal{K}}$ tal que $\mathbf{S}g = x\gamma_0 \in H^2_{\mathcal{K}}$. Esto se prueba observando que la solución de la ecuación $\mathbf{U}g = x\gamma_0$ es $g(\lambda) = x\lambda^{-1} \notin H^2_{\mathcal{K}}$.

Además, como $\mathbf{S}f(\lambda) = \lambda f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}^f \lambda^k$, se puede ver que el operador adjunto $\mathbf{S}^* : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$ viene dado por

$$\mathbf{S}^* f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^f \lambda^k = \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda}. \tag{1.12}$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

*Observación* 1.45. Debido al isomorfismo isométrico que existe entre los espacios $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $L^2(\mathbb{T})^I$ con $\#I = \dim(\mathcal{K})$, el operador $\mathbf{U}$ dado en la Definición 1.43 se pueden entender como un operador actuando en $L^2(\mathbb{T})^I$. Para ello recordamos que a cada función $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ le corresponde una sucesión de funciones coordenadas $\{f_i\}_{i\in I} \in L^2(\mathbb{T})^I$ tales que para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$

$$f(\lambda) = \sum_{i\in I} f_i(\lambda)\,\varepsilon_i$$

con $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{K}$. Luego,

$$\mathbf{U}f(\lambda) = \lambda f(\lambda) = \sum_{i\in I} \lambda f_i(\lambda)\,\varepsilon_i = \sum_{i\in I} U f_i(\lambda)\,\varepsilon_i$$

donde $U : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ es el shift bilateral que vimos en la Sección 1.3. Por lo tanto $\mathbf{U}$ se puede ver como el shift bilateral (sin multiplicidad) actuando en todas funciones coordenadas $\{f_i\}_{i\in I} \subset L^2(\mathbb{T})$. Por esta razón, se le llama a $\mathbf{U}$ *shift bilateral con multiplicidad*, donde la multiplicidad viene dada por la cantidad de funciones coordenadas, la cual coincide con la dimensión del espacio de Hilbert $\mathcal{K}$. Usando el mismo argumento, se le llama a $\mathbf{S}$ *shift unilateral con multiplicidad*.

A partir de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{S}$ es posible construir bases ortonormales canónicas de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $H^2_{\mathcal{K}}$ de la siguiente manera:

**Teorema 1.46.** *Sea $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{K}$. Entonces*

*i)* $\left\{\boldsymbol{U}^k\varepsilon_i : k \in \mathbb{Z},\ i \in I\right\}$ *es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$.*

*ii)* $\left\{\boldsymbol{S}^j\varepsilon_i : j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\right\}$ *es una base ortonormal de $H^2_{\mathcal{K}}$.*

Antes de demostrar el Teorema 1.46 observamos que el espacio $\mathcal{K}$ se puede pensar como el subespacio de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ de todas las funciones constantes con valores en $\mathcal{K}$ mediante la siguiente identificación: si $x \in \mathcal{K}$ se define $\tilde{x} : \mathbb{T} \to \mathcal{K}$ por $\tilde{x}(\lambda) = x\,\gamma_0(\lambda) = x$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Haciendo un abuso de notación escribiremos $x$ para denotar la función constantemente igual a $x \in \mathcal{K}$.

*Demostración del Teorema 1.46.* Fijemos $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{K}$. Sea $\{\varepsilon_i\}_{i\in I} \subset L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ la sucesión de funciones constantes cuyos valores coinciden con la base ortonormal $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$. Luego, para cada $k, k' \in \mathbb{Z}$ e $i, i' \in I$

$$\langle \mathbf{U}^k\varepsilon_i, \mathbf{U}^{k'}\varepsilon_{i'}\rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle \lambda^k\varepsilon_i, \lambda^{k'}\varepsilon_{i'}\rangle_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda) = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_{i'}\rangle_{\mathcal{K}} \int_{\mathbb{T}} \lambda^{k-k'}\, dm(\lambda) = \delta_{i,i'}\,\delta_{k,k'},$$

con lo cual $\left\{\mathbf{U}^k\varepsilon_i : k \in \mathbb{Z},\ i \in I\right\}$ es un conjunto ortonormal. Para ver la completitud, notamos que si $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ es ortogonal a cada elemento de la base, entonces

$$0 = \langle f, \mathbf{U}^k\varepsilon_i\rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle f(\lambda), \lambda^k\varepsilon_i\rangle_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \langle f(\lambda), \varepsilon_i\rangle_{\mathcal{K}}\, \lambda^{-k}\, dm(\lambda), \quad \forall\ k \in \mathbb{Z},\ \forall\ i \in I.$$

En consecuencia, las funciones coordenadas $f_i(\lambda) = \langle f(\lambda), \varepsilon_i\rangle_{\mathcal{K}}$ de $f$ respecto a la base $\mathcal{B}$ son cero para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, y en consecuencia $f \equiv 0$.

Análogamente, se puede ver que el sistema $\left\{\mathbf{S}^j\varepsilon_i : j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\right\}$ es una base ortonormal de $H^2_{\mathcal{K}}$. ∎

Una consecuencia directa del Teorema 1.46 es que si $\mathcal{K}$ es separable entonces $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ y $H^2_{\mathcal{K}}$ también lo son.

### 1.4.2 Subespacios que reducen al shift bilateral con multiplicidad

El objetivo de esta subsección será describir los subespacios de $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ que reducen al shift bilateral $\mathbf{U}$. Estos subespacios fueron estudiados y completamente caracterizados por Helson en [40] en términos de funciones rango.

**Definición 1.47.** Una función rango $\mathcal{J}$ en $\mathcal{K}$ es una aplicación

$$\mathcal{J} : \mathbb{T} \to \{\text{subespacios cerrados de } \mathcal{K}\}.$$

La función rango $\mathcal{J}$ se dice medible si para cada $x \in \mathcal{K}$ la función $\mathcal{K}$-valuada $\lambda \mapsto P_{\mathcal{J}(\lambda)}x$ es medible en $\mathbb{T}$, donde $P_{\mathcal{J}(\lambda)}$ denota la proyección ortogonal de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{J}(\lambda)$, es decir, para cada $x, y \in \mathcal{K}$, $\lambda \mapsto \langle P_{\mathcal{J}(\lambda)}x, y\rangle_{\mathcal{K}}$ es medible Lebesgue.

El teorema de caracterización de los subespacios de $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ que reducen al operador $\mathbf{U}$ demostrado en [40] fue posteriormente extendido por Bownik y Ross en [20]. En esta tesis enunciamos esta última versión aclarando que en el contexto de [20], los subespacios de $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ que reducen a $\mathbf{U}$ son llamados subespacios *multiplicativamente invariantes* de $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ respecto al conjunto determinante (o *determining* set en inglés) $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, con $\gamma_k(\lambda) = \lambda^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Cabe mencionar que en [20], los autores consideran espacios más generales de la forma $L^2(\Omega,\mathcal{K})$, donde $(\Omega,\mu)$ es un espacio de medida $\sigma$-finito tal que $L^2(\Omega) := L^2(\Omega,\mu)$ es separable. Para ver más detalles sobre estos conceptos de pueden consultar las Definiciones 2.2 y 2.3 en [20] o la Sección 3.3 del Capítulo 3 esta tesis.

**Teorema 1.48.** *Un subespacio cerrado $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ reduce a $\boldsymbol{U}$ si y solo si existe una función rango medible $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ tal que*

$$\mathcal{M} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) : f(\lambda) \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \text{ para casi todo } \lambda \in \mathbb{T} \right\}.$$

*Identificando las funciones que son iguales en casi todo punto $\lambda \in \mathbb{T}$, existe una correspondencia uno a uno entre los subespacios que reducen a $\boldsymbol{U}$ y las funciones rango medibles. Además, si existe $\mathcal{A} \subset L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ a lo sumo numerable tal que*

$$\mathcal{M} = \overline{\text{gen}} \left\{ \boldsymbol{U}^k\varphi : k \in \mathbb{Z},\ \varphi \in \mathcal{A} \right\}$$

*entonces la función rango medible asociada a $\mathcal{M}$ satisface que para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$,*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \overline{\text{gen}}\, \{\varphi(\lambda) : \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

En [40], Helson demostró la siguiente propiedad en términos de proyecciones: Si $\mathcal{M}$ reduce a $\mathbf{U}$ y $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ es su correspondiente función rango medible, entonces

$$P_{\mathcal{M}}f(\lambda) = P_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)}(f(\lambda)) \tag{1.13}$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y $f \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$.

*Observación* 1.49. Como $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ es un espacio de Hilbert separable, todo subespacio cerrado $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ admite un conjunto de generadores $\mathcal{A} \subset L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ a lo sumo numerable tal que

$$\mathcal{M} = \overline{\operatorname{gen}}\left\{\mathbf{U}^k\varphi : k \in \mathbb{Z},\ \varphi \in \mathcal{A}\right\}.$$

Para ver esto, recordemos que si $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{K}$, entonces el conjunto $\left\{\mathbf{U}^k\varepsilon_i : k \in \mathbb{Z}, i \in I\right\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$. Luego, si $P_{\mathcal{M}}$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ en $\mathcal{M}$, vale que $\left\{P_{\mathcal{M}}\mathbf{U}^k\varepsilon_i : k \in \mathbb{Z}, i \in I\right\}$ es un marco y por lo tanto un conjunto de generadores de $\mathcal{M}$ a lo sumo numerable. Como $\mathcal{M}$ reduce a $\mathbf{U}$, sabemos que $P_{\mathcal{M}}\mathbf{U}^k\varepsilon_i = \mathbf{U}^k P_{\mathcal{M}}\varepsilon_i$ para todo $i \in I$ y $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, llamando $\varphi_i = P_{\mathcal{M}}\varepsilon_i$ para todo $i \in I$, y teniendo en cuenta que algunos $\varphi_i$ podrían ser cero, concluimos que

$$\mathcal{M} = \overline{\operatorname{gen}}\left\{\mathbf{U}^k\varphi_i : k \in \mathbb{Z}, i \in I'\right\}$$

donde $I' \subseteq I$.

Notemos que si $\mathcal{J}$ es una función rango, podría ocurrir que $\mathcal{J}(\lambda) = \{0\}$ para algunos $\lambda \in \mathbb{T}$. Más aún, la dimensión de $\mathcal{J}(\lambda)$ como subespacio de $\mathcal{K}$ podría variar con $\lambda \in \mathbb{T}$.

**Definición 1.50.** Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ un subespacio que reduce a $\mathbf{U}$ con función rango $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$. Se define:

i) El *espectro* de $\mathcal{M}$ es el conjunto medible

$$\sigma(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{T} : \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \neq \{0\}\}.$$

ii) La *función de dimensión* asociada a $\mathcal{M}$ es $\dim_{\mathcal{M}} : \mathbb{T} \to \{0, 1, 2, ..., \dim(\mathcal{K})\}$,

$$\dim_{\mathcal{M}}(\lambda) = \dim(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)).$$

Veremos a continuación una propiedad importante cuando un subespacio $\mathcal{M}$ que reduce a $\mathbf{U}$ está generado por una sola función $\varphi \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$. Un resultado análogo en el contexto de subespacios invariantes por traslaciones fue demostrado por Bownik en [18].

**Proposición 1.51.** *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$ tal que $\mathcal{M} = \overline{\operatorname{gen}}\left\{\boldsymbol{U}^k\varphi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Son equivalentes:*

*i) Para toda $f \in \mathcal{M}$, $\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \boldsymbol{U}^k\varphi\rangle|^2$.*

*ii) $\|\varphi(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = \chi_{\sigma(\mathcal{M})}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

*Demostración.* Primero observamos que por el Teorema 1.48 la función rango asociada a $\mathcal{M}$ satisface $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \operatorname{gen}\{\varphi(\lambda)\}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. También, es claro que $\varphi(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\mathcal{M})$. Ahora, si $f \in \mathcal{M}$ entonces $f(\lambda) \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y por lo tanto,

$f(\lambda) = c_\lambda\, \varphi(\lambda)$, donde $c_\lambda$ es una constante que depende de $\lambda \in \mathbb{T}$. Notemos que $c_\lambda$ cumple que $\langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}} = c_\lambda\, \|\varphi(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}$ para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{M})$ y definamos la función $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ por

$$g(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}}}{\|\varphi(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}} & \text{si } \lambda \in \sigma(\mathcal{M}) \\ 0 & \text{si } \lambda \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\mathcal{M}). \end{cases} \tag{1.14}$$

Luego, $g$ es medible Lebesgue pues $f$ y $\varphi$ son medibles (ver Proposición 1.37). Ahora, usando que $f(\lambda) = c_\lambda\, \varphi(\lambda) = g(\lambda)\, \varphi(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, tenemos que

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda) = \int_{\sigma(\mathcal{M})} |g(\lambda)|^2\, \|\varphi(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda).$$

Asumiendo que vale *i*), la igualdad de Plancherel aplicada a la función $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}}$ de $L^2(\mathbb{T})$, implica que

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \mathbf{U}^k\varphi\rangle|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{T}} \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}}\, \lambda^{-k}\, dm(\lambda) \right|^2 \\ &= \int_{\mathbb{T}} |\langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}}|^2\, dm(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(\mathcal{M})} |g(\lambda)|^2\, \|\varphi(\lambda)\|^4_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\sigma(\mathcal{M})} |g(\lambda)|^2\, \|\varphi(\lambda)\|^2 \left| 1 - \|\varphi(\lambda)\|^2 \right| dm(\lambda) = 0$$

con lo cual $\varphi$ satisface $\|\varphi(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = 1$ para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{M})$, es decir, se cumple *ii*).

Para probar que *ii*) implica *i*) observamos que si $\|\varphi(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = 1$ para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{M})$ entonces $g$ dada por (1.14) está en $L^2(\mathbb{T})$ ya que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\mathbb{T}} |g(\lambda)|^2\, dm(\lambda) = \int_{\sigma(\mathcal{M})} |\langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}}|^2\, dm(\lambda) \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Además, tenemos por la igualdad de Plancherel en $L^2(\mathbb{T})$ que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \mathbf{U}^k\varphi\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{T}} \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}}\, \lambda^{-k}\, dm(\lambda) \right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \widehat{g}(k) \right|^2 = \int_{\mathbb{T}} |g(\lambda)|^2\, dm(\lambda)$$

y como $f(\lambda) = g(\lambda)\, \varphi(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, implica $|g(\lambda)|^2 = \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, concluimos entonces que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \mathbf{U}^k\varphi\rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Lo cual demuestra *i*). ■

Más adelante, estaremos interesados en caracterizar la función rango de una suma ortogonal de subespacios cerrados para lo cual será útil el siguiente lema que demostraremos a continuación. Una versión más general del Lema 1.52 se puede ver en [20, Lema 2.5 y Teorema 2.6] en el contexto de los subespacios multiplicativamente invariantes.

**Lema 1.52.**

*i) Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ un subespacio que reduce a $\mathbf{U}$ con función rango $\mathcal{J}$. Entonces, $\mathcal{M}^\perp$ reduce a $\mathbf{U}$ y su correspondiente función rango está dada por $\lambda \mapsto (\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda))^\perp$.*

*ii) Sea $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ una sucesión a lo sumo numerable de subespacios en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ mutuamente ortogonales que reducen a $\mathbf{U}$, con funciones rango $\{\mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}\}_{i\in I}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$ reduce a $\mathbf{U}$ y su función rango es $\lambda \mapsto \bigoplus_{i\in I} \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

*Demostración.* $i$) Por definición, si $\mathcal{M}$ reduce a $\mathbf{U}$, $\mathcal{M}^\perp$ también reduce a $\mathbf{U}$. Ahora, para probar que su función rango es $\lambda \mapsto (\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda))^\perp$ debemos ver que $f \in \mathcal{M}^\perp$ si y solo si $f(\lambda) \in (\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda))^\perp$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Sea $\mathcal{A} \subset L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ un conjunto de generadores de $\mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{M} = \overline{\text{gen}}\left\{\mathbf{U}^k\varphi : k \in \mathbb{Z},\ \varphi \in \mathcal{A}\right\}$. Por el Teorema 1.48 sabemos que la función rango de $\mathcal{M}$ está dada, en términos del conjunto de generadores, por

$$\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda) = \overline{\text{gen}}\,\{\varphi(\lambda) : \varphi \in \mathcal{A}\}\,.$$

Veamos primero que si $f \in \mathcal{M}^\perp$ entonces, $f(\lambda) \in (\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda))^\perp$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Para ello, basta probar que $\langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_\mathcal{K} = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y para toda $\varphi \in \mathcal{A}$. Fijemos $\varphi \in \mathcal{A}$ y consideremos la función compleja $g : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $g(\lambda) = \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_\mathcal{K}$. Entonces, $g \in L^1(\mathbb{T})$ ya que $|g(\lambda)| = |\langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_\mathcal{K}| \leq \|f(\lambda)\|_\mathcal{K}\, \|\varphi(\lambda)\|_\mathcal{K}$ y luego

$$\int_\mathbb{T} |g(\lambda)|\, dm(\lambda) \leq \left(\int_\mathbb{T} \|f(\lambda)\|_\mathcal{K}^2\, dm(\lambda)\right)^{1/2} \left(\int_\mathbb{T} \|\varphi(\lambda)\|_\mathcal{K}^2\, dm(\lambda)\right)^{1/2} = \|f\|\,\|\varphi\| < \infty.$$

Ahora, para todo $k \in \mathbb{Z}$ los coeficientes de Fourier de $g$ satisfacen

$$\int_\mathbb{T} \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle\, \lambda^{-k}\, dm(\lambda) = \int_\mathbb{T} \langle f(\lambda), \mathbf{U}^k\varphi(\lambda)\rangle_\mathcal{K}\, dm(\lambda) = \langle f, \mathbf{U}^k\varphi\rangle = 0 \tag{1.15}$$

pues $f \perp \mathbf{U}^k\varphi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $g(\lambda) = \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle_\mathcal{K} = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ como queríamos probar.

Por otro lado, si $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ cumple que $f(\lambda) \in (\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda))^\perp$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, entonces $f \in \mathcal{M}^\perp$ ya que

$$\langle f, \mathbf{U}^k\varphi\rangle = \int_\mathbb{T} \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle\, \lambda^{-k}\, dm(\lambda) = 0 \tag{1.16}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{A}$. Concluimos entonces que la función rango de $\mathcal{M}^\perp$ es $\lambda \mapsto (\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda))^\perp$.

*ii*) Como cada $\mathcal{M}_i$ reduce a $\mathbf{U}$, es decir, es invariante por $\mathbf{U}$ y por $\mathbf{U}^*$, se ve fácilmente que si $f = \sum_{i\in I} f_i \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$ entonces $\mathbf{U}f = \sum_{i\in I} \mathbf{U}f_i$ y $\mathbf{U}^*f = \sum_{i\in I} \mathbf{U}^*f_i$ también pertenecen a $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$, con lo cual $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$ reduce a $\mathbf{U}$.

Veamos que $f = \sum_{i\in I} f_i \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$ si y solo si $f(\lambda) = \sum_{i\in I} f_i(\lambda) \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Supongamos primero que $f = \sum_{i\in I} f_i \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Como $f_i \in \mathcal{M}_i$ para todo $i \in I$, sabemos que $f_i(\lambda) \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y para todo $i \in I$. Para ver que $f(\lambda) = \sum_{i\in I} f_i(\lambda) \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)$ resta probar que $f_i(\lambda) \perp f_j(\lambda)$ para todo $i \neq j$ y casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Será suficiente ver que para cualquier $f_i \in \mathcal{M}_i$ y cualquier generador $\varphi_j$ de $\mathcal{M}_j$ se cumple que $f_i(\lambda) \perp \varphi_j(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, o equivalentemente que $\langle f_i(\lambda), \varphi_j(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}} = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Esto se prueba, repitiendo la cuenta (1.15) reemplazando $f$ por $f_i$ y $\varphi$ por $\varphi_j$.

Recíprocamente si $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ cumple que $f(\lambda) \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, $f(\lambda)$ tiene una descomposición ortogonal de la forma $f(\lambda) = \sum_{i\in I} f_i(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y por hipótesis vale que $f_i \in \mathcal{M}_i$ para todo $i \in I$. Luego, para ver que $f = \sum_{i\in I} f_i \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$ basta probar que $f_i \perp f_j$ para todo $i \neq j$. Para ello, procedemos como en (1.16) reemplazando $f$ por $f_i$ y $\varphi$ por cualquier generador $\varphi_j$ de $\mathcal{M}_j$. Esto concluye la demostración.

■

Dado que los subespacios $\mathcal{M}$ de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ que reducen a $\mathbf{U}$ pueden ser caracterizados vía su correspondiente función rango $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$, muchas de las propiedades de estos subespacios se pueden entender a través de las propiedades puntuales de la función rango, siempre que éstas se verifiquen *uniformemente*. Para ello será conveniente analizar por separado los subconjuntos de $\mathbb{T}$ en los cuales $\dim(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda))$ es constante. Siguiendo esta idea, el Lema 1.54 muestra que existe una partición medible de $\mathbb{T}$ en conjuntos donde $\dim(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda))$ es constante y exhibe una base ortonormal medible de $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

Antes de demostrar el Lema 1.54, enunciamos el siguiente teorema de descomposición que fue demostrado por Bownik y Ross en [20, Teorema 2.6] en el contexto de subespacios multiplicativamente invariantes y cuya demostración se puede aplicar directamente a nuestro caso.

**Teorema 1.53.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ un subespacio que reduce a $\boldsymbol{U}$. Entonces existen subespacios $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que reducen a $\boldsymbol{U}$ tal que*

*i)* *$\mathcal{M}$ se puede descomponer como una suma ortogonal*

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i$$

*ii)* *Las funciones de dimensión satisfacen* $\dim_{\mathcal{M}_i} \leq 1$ *para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y* $\dim_{\mathcal{M}_i} = 1$ *si y solo si* $\dim_{\mathcal{M}} \geq i$ *para $i \in \mathbb{N}$.*

*iii)* *Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una función $\phi_i \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ tal que $\|\varphi_i(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = \chi_{\sigma(\mathcal{M})}(\lambda)$, y la función rango $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}$ de $\mathcal{M}_i$ está dada por* $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda) = \mathrm{gen}\{\varphi_i(\lambda)\}$.

**Lema 1.54.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ un subespacio que reduce a $\boldsymbol{U}$ con función rango $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se definen los conjuntos $A_n = \{\lambda \in \mathbb{T} : \dim(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)) = n\}$ y*

$$A_\infty = \{\lambda \in \mathbb{T} : \dim(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)) = \infty\}.$$

*Entonces $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $A_\infty$ forman una familia de conjuntos medibles disjuntos tal que*

$$\mathbb{T} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n\right) \cup A_\infty$$

*y existen funciones $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ que cumplen las siguientes propiedades:*

*i)* $\left\{\boldsymbol{U}^k\varphi_i : i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *es un marco de Parseval de $\mathcal{M}$.*

*ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $i > n$, $\varphi_i(\lambda) = 0$ para casi todo $\lambda \in A_n$.*

*iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{\varphi_1(\lambda), ..., \varphi_n(\lambda)\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in A_n$.*

*Demostración.* Sea $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ las funciones dadas en la descomposición del Teorema 1.53. Por el ítem *iii*) del Teorema 1.53, tenemos que cada $\mathcal{M}_i$ de la descomposición de $\mathcal{M}$ cumple que

$$\mathcal{M}_i = \overline{\text{gen}}\left\{\mathbf{U}^k\varphi_i : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Por lo tanto, si $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i \in \mathcal{M}$, tenemos por la Proposición 1.51 que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \mathbf{U}^k\varphi_i\rangle|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|f_i\|^2 = \|f\|^2,$$

es decir, se cumple *i*).

Para probar *ii*) fijamos $n \in \mathbb{N}$ y tomamos $\lambda \in A_n$. Recordando que la función rango admite la descomposición ortogonal $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, donde $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda) = \text{gen}\{\varphi_i(\lambda)\}_{i\in I}$ es la función rango asociada a $\mathcal{M}_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\|\varphi_i(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = \mathcal{X}_{\sigma(\mathcal{M})}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, escribiendo $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ de la siguiente manera

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{J}_{\mathcal{M}_i}(\lambda)\right),$$

tenemos que debe ocurrir que $\varphi_i(\lambda) = 0$ para todo $i > n$, ya que de lo contrario $\dim(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda))$ sería mayor que $n$, lo cual contradice que $\lambda \in A_n$. Finalmente, iii) se deduce de *ii*) y del hecho de que para $\lambda \in A_n$, $\{\varphi_1(\lambda), ..., \varphi_n(\lambda)\}$ es un conjunto de generadores que satisfacen $\|\varphi_i(\lambda)\|_{\mathcal{K}} = 1$ para todo $i = 1, ..., n$. ∎

*Observación* 1.55. Observar que si $\dim(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)) \leq m$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, entonces $|A_n| = 0$ para todo $n > m$ y luego $\varphi_i \equiv 0$ para todo $i > m$. Por lo tanto, en este caso, podemos asumir que la partición $\{A_n\}_n$ de $\mathbb{T}$ y las funciones $\{\varphi_i\}_i$ son finitas (a lo sumo $m$).

### 1.4.3 Funciones $\mathcal{B}(\mathcal{K})$-valuadas

El propósito de esta subsección es estudiar las funciones medibles definidas en el círculo unitario $\mathbb{T}$ y cuyas imágenes son operadores lineales y acotados en $\mathcal{K}$. Estas funciones inducen operadores lineales y acotados en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ que están íntimamente relacionados con los shifts unilateral y bilateral con multiplicidad **S** y **U**, como veremos en la Proposición 1.62. Dichos operadores son parte fundamental en los resultados obtenidos por Lax [47] y Halmos [38] sobre la caracterización de los subespacios de $H^2_{\mathcal{K}}$ que son invariantes por **S**.

Este tipo de funciones también fueron estudiadas por M. Bownik e J. W. Iverson en [19] en el contexto de subespacios multiplicativamente invariantes y son llamados *operadores rango* (ver [20, Definición 3.6]).

**Definición 1.56.** Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable. Una función $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ se dice medible si para cada $x \in \mathcal{K}$, la función $\mathcal{K}$-valuada $\lambda \mapsto F(\lambda)x$ es medible en el sentido de la Definición 1.36. Esto es, para cada $x, y \in \mathcal{K}$, la función $\lambda \mapsto \langle F(\lambda)x, y\rangle_{\mathcal{K}}$ es medible Lebesgue.

Notemos que para cada $\lambda \in \mathbb{T}$, $F(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, y por lo tanto está definido $\|F(\lambda)\|_{op}$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Definimos

$$\|F\|_\infty := \operatorname*{sup\,es}_{\lambda\in\mathbb{T}} \|F(\lambda)\|_{op}.$$

Denotaremos por $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las clases de equivalencia (módulo conjuntos de medida cero) de funciones medibles $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ que cumplen $\|F\|_\infty < \infty$.

Si se define la suma, la multiplicación y el adjunto en $\mathcal{F}$ puntualmente, esto es,

$$(F + G)(\lambda) = F(\lambda) + G(\lambda), \qquad (FG)(\lambda) = F(\lambda)\,G(\lambda) \quad \text{y} \quad F^*(\lambda) = (F(\lambda))^* \tag{1.17}$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, se puede ver fácilmente que $\mathcal{F}$ es un álgebra normada con involución, con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

**Definición 1.57.** Dada $F \in \mathcal{F}$ se define el operador $\widehat{F} : L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) \to L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ por

$$\widehat{F} f(\lambda) = F(\lambda) f(\lambda)$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$. Denotamos por $\widehat{\mathcal{F}}$ al conjunto de todos los operadores inducidos por los elementos de $\mathcal{F}$, es decir, $\widehat{\mathcal{F}} = \{\widehat{F} : F \in \mathcal{F}\}$.

*Observación* 1.58. Notemos que si $F(\lambda) = G(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, entonces $\widehat{F} = \widehat{G}$. El operador $\widehat{F}$ asociado a $F \in \mathcal{F}$ es lineal (pues $F(\lambda)$ es lineal para todo $\lambda \in \mathbb{T}$) y es acotado ya que para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ se tiene que

$$\|\widehat{F} f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \|F(\lambda) f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda) \leq \int_{\mathbb{T}} \|F(\lambda)\|^2_{op}\, \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}}\, dm(\lambda) \leq \|F\|^2_\infty\, \|f\|^2,$$

es decir que $\|\widehat{F}\| \leq \|F\|_\infty$. Además, las operaciones dadas en (1.17) inducen las siguientes operaciones en la clase $\widehat{\mathcal{F}}$: si $\widehat{F}, \widehat{G} \in \widehat{\mathcal{F}}$, entonces

$$\widehat{F} + \widehat{G} = \widehat{F+G}, \qquad \widehat{F}\,\widehat{G} = \widehat{FG} \quad \text{y} \quad \widehat{F}^* = \widehat{F^*}.$$

Se deduce de lo anterior que $\widehat{\mathcal{F}}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}))$.

**Teorema 1.59.** *La correspondencia $F \mapsto \widehat{F}$ es un isomorfismo de álgebras que preserva la propiedad de tomar adjuntos. Además, se cumple que $\widehat{F}$ es normal (autoadjunto, unitario o una proyección) si y solo si $F(\lambda)$ es normal, autoadjunto, unitario o una proyección) para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

Una demostración del teorema anterior se puede encontrar en [49, Teorema 3.17].

**Ejemplo 1.60.** Sea $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ dada por $F(\lambda) = \lambda I_{\mathcal{K}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, donde $I_{\mathcal{K}}$ es el operador identidad en $\mathcal{K}$, entonces $F \in \mathcal{F}$ y $\widehat{F} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}))$ coincide con el shift bilateral con multiplicidad $\mathbf{U}$ actuando en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$.

Para ver esto, observamos primero que para cada $x, y \in \mathcal{K}$, la función compleja $\lambda \mapsto \langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$ es medible Lebesgue. Por otro lado,

$$\|F(\lambda)\|_{op} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{K}}=1} \|F(\lambda)x\|_{\mathcal{K}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{K}}=1} \|\lambda x\|_{\mathcal{K}} = |\lambda|,$$

con lo cual $\|F\|_\infty = \operatorname{sup\,es}_{\lambda\in\mathbb{T}} \|F(\lambda)\|_{op} = 1 < \infty$ y por lo tanto $F \in \mathcal{F}$. Además, para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ tenemos que

$$\widehat{F} f(\lambda) = F(\lambda) f(\lambda) = \lambda I_{\mathcal{K}}(f(\lambda)) = \lambda f(\lambda) = \mathbf{U} f(\lambda)$$

con lo cual $\widehat{F} = \mathbf{U}$.

Análogamente vemos que $\mathbf{S} : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$ pertenece a la clase $\widehat{\mathcal{F}}$.

Como vimos en la Sección 1.4.2, $H^2_{\mathcal{K}}$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$. A los elementos de la clase $\widehat{\mathcal{F}}$ que dejan invariante a $H^2_{\mathcal{K}}$ se les conoce como *analíticos*.

**Definición 1.61.** Se dice que una función $F \in \mathcal{F}$ es *analítica* si $\widehat{F}(H^2_{\mathcal{K}}) \subseteq H^2_{\mathcal{K}}$. Se denota por $\mathcal{F}_0$ al conjunto de todos los elementos analíticos de $\mathcal{F}$.

En este punto, recordamos que el conmutante de un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el conjunto $\{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TA = AT\}$ de todos los operadores lineales y acotados en $\mathcal{H}$ que conmutan con $A$. Tenemos entonces la siguiente proposición que describe los conmutantes de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{S}$, respectivamente

**Proposición 1.62.** *Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$, sean $\mathbf{U}$ y $\mathbf{S}$ los shifts bilateral y unilateral con multiplicidad actuando en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $H^2_{\mathcal{K}}$, respectivamente. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

*i)* *El conmutante de* $\mathbf{U}$ *es* $\widehat{\mathcal{F}}$.

*ii)* *El conmutante de* $\mathbf{S}$ *es* $\left\{\widehat{F}|_{H^2_{\mathcal{K}}} : F \in \mathcal{F}_0\right\}$.

Para ver una demostración de la proposición anterior referimos a [49, Corolarios 3.19 y 3.20].

En el siguiente lema se resumen algunas propiedades de las funciones $\mathcal{B}(\mathcal{K})$-valuadas y la relación entre algunos subespacios que reducen al operador $\mathbf{U}$ y sus respectivas funciones rango. Las propiedades *i*)-*v*) fueron demostradas en [19] en el contexto de operadores multiplicativamente invariantes y operadores rango, y se pueden aplicar directamente para el caso que estamos discutiendo en esta sección.

Recordamos que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ si $A|_{\mathcal{M}}$ es una isometría y $\ker(A) = \mathcal{M}^{\perp}$.

**Lema 1.63.** *Sean* $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ *en* $\mathcal{F}$, $A = \widehat{F} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}))$, *y* $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ *dos subespacios cerrados que reducen a* $\mathbf{U}$ *con funciones rango medibles* $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}, \mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ *respectivamente. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

*i)* *El subespacio* $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ *reduce a* $\mathbf{U}$ *y su correspondiente función rango medible es* $\lambda \to \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \cap \mathcal{J}_{\mathcal{N}}(\lambda)$ *para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*ii)* *El subespacio* $\overline{A(\mathcal{M})} \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ *reduce a* $\mathbf{U}$ *y su correspondiente función rango medible es* $\lambda \mapsto \overline{F(\lambda)(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda))}$ *para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*iii)* *El subespacio* $\ker(A) \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ *reduce a* $\mathbf{U}$ *y su correspondiente función rango medible es* $\lambda \mapsto \ker(F(\lambda))$ *para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*iv)* $A$ *es una isometría si y solo si* $F(\lambda)$ *es una isometría para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*v)* $A$ *es una isometría parcial con espacio inicial* $\mathcal{M}$ *si y solo si* $F(\lambda)$ *es una isometría parcial con espacio inicial* $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ *para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*vi)* *El subespacio* $\mathcal{R} = \mathcal{M} \ominus \overline{A(\mathcal{M})}$ *reduce a* $\mathbf{U}$ *y su correspondiente función rango es* $\lambda \mapsto \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \ominus F(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda))$ *para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*vii)* *Si* $A|_{\mathcal{M}} = 0$, *entonces* $F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)} = 0$ *para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*viii)* *Si* $A|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *es un isomorfismo, entonces* $F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)} : \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \to \mathcal{J}_{\mathcal{N}}(\lambda)$ *también es un isomorfismo para casi todo* $\lambda \in \mathbb{T}$.

*Demostración.* Haremos solo la demostración de los ítems *vii*) y *viii*).

Para probar el ítem *vii*) observamos que como $A|_{\mathcal{M}} = 0$, tenemos que $A\varphi = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es un conjunto de generadores de $\mathcal{M}$. Luego, $0 = A\varphi(\lambda) = F(\lambda)\varphi(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y para toda $\varphi \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \overline{\text{gen}}\,\{\varphi(\lambda) : \varphi \in \mathcal{A}\}$, entonces $F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)} = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ como queríamos ver.

Ahora, para ver *viii*) primero observamos que si $\mathcal{M} = \overline{\text{gen}}\left\{\mathbf{U}^k\varphi : k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathcal{A}\right\}$ y $\mathcal{N} = A(\mathcal{M})$, entonces

$$\mathcal{N} = \overline{\text{gen}}\left\{\mathbf{U}^k A\varphi : k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathcal{A}\right\}.$$

Luego, $F(\lambda)(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)) = \overline{\text{gen}}\{F(\lambda)\varphi(\lambda) : \varphi \in \mathcal{A}\} = \overline{\text{gen}}\{A\varphi(\lambda) : \varphi \in \mathcal{A}\} = \mathcal{J}_{\mathcal{N}}(\lambda)$, es decir, $F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)}$ es sobreyectivo para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

Resta ver que que $F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)}$ es inyectivo para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, o equivalentemente, que $\ker(F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)}) = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Por el ítem *ii*), $\lambda \mapsto \ker(F(\lambda))$ es una función rango medible y por lo tanto, $\lambda \mapsto \ker(F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)})$ es una función rango medible ya que $\ker(F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)}) = \ker(F(\lambda)) \cap \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$, y la intersección de funciones rango medibles es medible por el ítem *i*). Por el Teorema 1.48, existe un subespacio $\mathcal{M}_0 \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ que reduce a $\mathbf{U}$ asociado a $\lambda \mapsto \ker(F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)})$. Como $\ker(F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)}) \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, entonces $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$. Ahora, para $f \in \mathcal{M}_0$, $f(\lambda) \in \ker(F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)})$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y entonces

$$Af(\lambda) = F(\lambda)f(\lambda) = 0$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Luego, como $A|_{\mathcal{M}}$ es inyectivo, $f$ debe ser cero y entonces $\mathcal{M}_0 = 0$ y en conclusión $\ker(F(\lambda)|_{\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)}) = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ como queríamos probar.

■

A través de las funciones $\mathcal{B}(\mathcal{K})$-valuadas es posible dar una caracterización de los subespacios de $H^2_{\mathcal{K}}$ que son invariantes por el shift unilateral $\mathbf{U}$. Estos fueron caracterizados por P. Lax [47] en 1959 en el caso que $\dim(\mathcal{K})$ es finita y mayor que 1 y luego por P. Halmos [38] en 1961 quien demostró un teorema equivalente cuando la dimensión de $\mathcal{K}$ es infinita. Una demostración del siguiente teorema se puede ver en [49, Corollary 3.26].

**Teorema 1.64** (Beurling-Lax-Halmos)**.** *Un subespacio cerrado $\mathcal{M} \subset H^2_{\mathcal{K}}$ es invariante por $\mathbf{S}$ si y solo si existe un subespacio $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ y una función $F \in \mathcal{F}_0$ tal que*

$$\mathcal{M} = \widehat{F}(H^2_{\mathcal{K}_1}),$$

*donde $F(\lambda)$ es una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{K}_1$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

## 1.5 Subespacios wandering

En esta sección introduciremos una clase de subespacios de $\mathcal{H}$ que se conocen como subespacios wandering (término en inglés) y fueron definidos por Halmos en [38]. Estos subespacios están relacionados con los subespacios invariantes por un operador y serán claves en la demostración del Teorema 3.10 del Capítulo 3.

**Definición 1.65.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Un subespacio $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$ se dice *wandering* para $A$ si satisface que $\mathcal{R} \perp A^j(\mathcal{R})$ para todo $j \geq 1$.

En la siguiente proposición veremos que a cada subespacio invariante por un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se le puede asociar un subespacio wandering para $A$, y viceversa.

**Proposición 1.66.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

*i) Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio wandering para $A$, entonces el subespacio definido por $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} := \overline{\text{gen}}\{A^j x : j \geq 0,\ x \in \mathcal{R}\}$ es invariante por $A$.*

*ii) Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio invariante por $A$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \ominus A(\mathcal{M})$ es wandering para $A$.*

*Demostración. i)* Por la linealidad y continuidad de $A$ tenemos que

$$A(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = \overline{\text{gen}}\left\{A^{j+1}x : j \geq 0,\ x \in \mathcal{R}\right\} = \overline{\text{gen}}\left\{A^j x : j \geq 1,\ x \in \mathcal{R}\right\} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{R}},$$

lo cual demuestra que $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ es un subespacio invariante por $A$.

*ii)* Veamos que $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \perp A^j(\mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ para todo $j \geq 1$. Sean $x, y \in \mathcal{R}_{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \ominus A(\mathcal{M})$, entonces $x, y \in \mathcal{M}$ y $x, y \perp A(\mathcal{M})$. Luego, $\langle x, Ay\rangle = 0$ y $\langle x, A^j y\rangle = \langle x, A(A^{j-1}y)\rangle = 0$ para $j \geq 2$, pues $A(A^{j-1}y) \in A(\mathcal{M})$ por la invariancia de $\mathcal{M}$ por $A$.

■

*Observación* 1.67. Observar que si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una isometría y $\mathcal{R}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$, son equivalentes:

i) $\mathcal{R} \perp A^j(\mathcal{R})$ para todo $j \geq 1$.

ii) $A^j(\mathcal{R}) \perp A^{j'}(\mathcal{R})$ para todo $j \neq j'$.

En efecto, si se cumple i) y suponemos que $j < j'$ tenemos que para todo $x \in \mathcal{R}$, $\langle A^j x, A^{j'} x\rangle = \langle x, A^{j'-j} x\rangle = 0$. Recíprocamente, si asumimos que se cumple ii) y tomamos $j = 0$, tenemos que $\langle x, A^{j'} x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$ y $j' \geq 1$.

Debido a la equivalencia anterior, siempre que $A$ sea una isometría, el subespacio invariante $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ asociado a $\mathcal{R}$ se puede escribir como la suma ortogonal

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{R}).$$

El siguiente teorema permitirá descomponer el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en una suma ortogonal, a través del subespacio invariante asociado a un wandering para un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, y posteriormente estudiar como queda dicha descomposición si $A$ tiene otras propiedades como por ejemplo ser unitario.

**Teorema 1.68.** *Sean $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría, $\mathcal{R} = (A\mathcal{H})^{\perp}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{R})$. Entonces $\mathcal{R}$ es wandering para $A$ y*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\perp} = \bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{H}). \tag{1.18}$$

*Demostración.* Veamos primero que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\perp} = \bigcap_{j=0}^{\infty}(A^j(\mathcal{R}))^{\perp}.$$

Si $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\perp}$, se cumple que $x \perp A^j(\mathcal{R})$ para todo $j \geq 0$ (por la definición de $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$), es decir, $x \in \bigcap_{j=0}^{\infty}(A^j(\mathcal{R}))^{\perp}$. Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{j=0}^{\infty}(A^j(\mathcal{R}))^{\perp}$, entonces $x \perp A^j(\mathcal{R})$ para todo $j \geq 0$ y en consecuencia $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\perp}$.

Para obtener la igualdad (1.18) basta probar que $\bigcap_{j=0}^{\infty}(A^j(\mathcal{R}))^{\perp} = \bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{H})$. Supongamos que $x \in \bigcap_{j=0}^{\infty}(A^j(\mathcal{R}))^{\perp}$ y veamos por inducción que $x \in A^j(\mathcal{H})$ para todo $j \geq 0$. Es claro que se cumple para $j = 0$ pues $x$ es un elemento de $\mathcal{H}$. Si asumimos que $x \in A^j(\mathcal{H})$, existe $y \in \mathcal{H}$ tal que $x = A^j y$. Como $x \in (A^{\ell}(\mathcal{R}))^{\perp}$ para todo $\ell \geq 0$, se satisface que $A^j y \perp A^j(\mathcal{R})$, en particular, $y \perp \mathcal{R} = (A(\mathcal{H}))^{\perp}$. Por lo tanto, $y \in A(\mathcal{H})$ y $x = A^j y \in A^{j+1}(\mathcal{H})$, como queríamos ver.

Para probar la otra inclusión, usamos la siguiente propiedad: si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una isometría y $\mathcal{M}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ entonces $T(\mathcal{M}^{\perp}) \subset (T(\mathcal{M}))^{\perp}$. En efecto, si $x \in T(\mathcal{M}^{\perp})$, entonces $x = Ty$ para algún $y \in \mathcal{M}^{\perp}$. Luego, usando que $T$ es una isometría, se tiene que para todo $z \in \mathcal{M}$,

$$\langle x, Tz\rangle = \langle Ty, Tz\rangle = \langle y, z\rangle = 0,$$

con lo cual $x \in (T(\mathcal{M}))^{\perp}$. Ahora, por la propiedad anterior, tenemos que

$$A^{j+1}(\mathcal{H}) = A^j(A(\mathcal{H})) = A^j(\mathcal{R}^{\perp}) \subset (A^j(\mathcal{R}))^{\perp}$$

para todo $j \geq 0$ y por lo tanto $\bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{H}) \subseteq \bigcap_{j=0}^{\infty}(A^j(\mathcal{R}))^{\perp}$, lo cual concluye la prueba. ■

*Observación* 1.69.

i) Como consecuencia del Teorema 1.68 tenemos la siguiente descomposición ortogonal para el espacio $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \oplus \bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{H}). \tag{1.19}$$

con $\mathcal{R} = (A(\mathcal{H}))^{\perp}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{R})$.

ii) Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado invariante por $A$, entonces podemos aplicar el Lema 1.68 a $A|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (la restricción de $A$ a $\mathcal{M}$) obteniendo que $\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}^{\perp} = \bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{M})$ para $\mathcal{R}' = \mathcal{M} \ominus A(\mathcal{M})$ (el complemento ortogonal de la imagen de $A$ en $\mathcal{M}$) y por lo tanto $\mathcal{M}$ se puede descomponer en la suma ortogonal

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}'} \oplus \bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{M}). \tag{1.20}$$

Es importante resaltar que, en los términos del Teorema 1.68, si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador unitario entonces $\mathcal{R} = (A(\mathcal{H}))^{\perp} = \{0\}$ y luego $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \{0\}$ y por lo tanto $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\perp} = \mathcal{H}$. El otro caso extremo es cuando $\bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{H}) = \{0\}$ lo cual implica que $\mathcal{H} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ con $\mathcal{R} = (A(\mathcal{H}))^{\perp}$. A las isometrías que cumplen esta última propiedad se les llama *puras*.

**Definición 1.70.** Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría. Se dice que $A$ es una *isometría pura* si $\bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{H}) = \{0\}$.

**Ejemplo 1.71.** El shift unilateral con multiplicidad $\mathbf{S} : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$ dado por la Definición 1.44 es un ejemplo de una isometría pura. Para ver esto, recordemos que $H^2_{\mathcal{K}}$ es el subespacio

$$H^2_{\mathcal{K}} = \left\{ f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \gamma_k : \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{K} \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2_{\mathcal{K}} < \infty \right\}$$

(donde $\gamma_k(\lambda) = \lambda^k$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y $k \in \mathbb{Z}$) y su imagen por el operador $\mathbf{S}$ es el conjunto

$$\mathbf{S}(H^2_{\mathcal{K}}) = \left\{ f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \gamma_k : \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{K} \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2_{\mathcal{K}} < \infty \right\}.$$

Luego, su complemento ortogonal en $H^2_{\mathcal{K}}$ es $\mathcal{R} = (\mathbf{S}(H^2_{\mathcal{K}}))^{\perp} = \{f = x_0\gamma_0 : x_0 \in \mathcal{K}\}$. Más aún, para todo $j \geq 0$,

$$\mathbf{S}^j(\mathcal{R}) = \left\{ f = x_0\gamma_j : x_0 \in \mathcal{K} \right\}.$$

Por lo tanto, $\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(\mathcal{R}) = H^2_{\mathcal{K}}$. La ecuación (1.19) implica que $\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(\mathcal{H}) = \{0\}$.

*Observación* 1.72. Notemos que en ejemplo anterior el subespacio wandering $\mathcal{R}$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{K}$, son lo cual si vemos a $\mathcal{K}$ como el subespacio de $H^2_{\mathcal{K}}$ que consiste de todas las funciones constantes, podemos escribir

$$H^2_{\mathcal{K}} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(\mathcal{K}).$$

Teniendo en mente la descomposición ortogonal (1.19), se deduce que cualquier isometría $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la suma de una isometría pura y un operador unitario. Estos dos operadores se obtienen restringiendo $A$ a cada componente de dicha descomposición ortogonal.

Para las isometrías puras se cumple que *todo* subespacio invariante se obtiene a partir de un único subespacio wandering, como se demuestra en el siguiente teorema.

**Teorema 1.73.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría pura. Entonces si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio invariante por $A$, tenemos que*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{R}), \tag{1.21}$$

*donde $\mathcal{R} = \mathcal{M} \ominus A(\mathcal{M})$ es el único subespacio wandering para $A$ que satisface* (1.21).

*Demostración.* Observar que $\bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{M}) \subseteq \bigcap_{j=0}^{\infty} A^j(\mathcal{H}) = \{0\}$ (ya que $A$ es una isometría pura). Luego de (1.20) se deduce (1.21) ■

El siguiente resultado será necesario para demostrar el Teorema 3.13, que establece cierta unicidad en la caracterización que se obtendrá en el Teorema 3.10 del Capítulo 3. Introducimos la notación $\mathcal{H}_1 \simeq_\Phi \mathcal{H}_2$ para indicar que los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son isométricamente isomorfos vía la isometría $\Phi$.

**Teorema 1.74.** *Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{H}_i$ espacio de Hilbert, $A_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ isometría pura y $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{H}_i$ un subespacio invariante por $A_i$ con subespacio wandering asociado $\mathcal{R}_i$. Si $\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es una isometría tal que $\Phi A_1 = A_2 \Phi$ entonces, $\mathcal{M}_1 \simeq_\Phi \mathcal{M}_2$ si y solo si $\mathcal{R}_1 \simeq_\Phi \mathcal{R}_2$.*

*Demostración.* Primero observamos que por hipótesis,

$$\mathcal{M}_i = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A_i^j(\mathcal{R}_i)$$

para $i = 1, 2$. Además, como $\Phi A_1 = A_2 \Phi$, entonces $\Phi A_1^j = A_2^j \Phi$ para todo $j \geq 0$. Luego,

$$\Phi(\mathcal{M}_1) = \Phi\left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} A_1^j(\mathcal{R}_1)\right) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A_2^j \Phi(\mathcal{R}_1). \tag{1.22}$$

Si $\Phi(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$, por la unicidad del subespacio wandering para $A_2$ asociado a $\mathcal{M}_2$, obtenemos que $\Phi(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$. Recíprocamente, si $\Phi(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$, se deduce de (1.22) que $\Phi(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$. ■

Finalizamos esta sección con el siguiente lema que da una cota para la dimensión de los subespacios wandering del shift unilateral con multiplicidad $\mathbf{S}$ actuando en $H^2_{\mathcal{K}}$.

**Lema 1.75.** *Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{M} \subseteq H^2_{\mathcal{K}}$ un subespacio cerrado que es invariante por $\mathbf{S}$. Entonces, el subespacio wandering $\mathcal{R} = \mathcal{M} \ominus \mathbf{S}(\mathcal{M}) \subseteq H^2_{\mathcal{K}}$ satisface que* $\dim(\mathcal{R}) \leq \dim(\mathcal{K})$.

*Demostración.* Sea $\{g_i\}_{i \in I}$ un conjunto ortonormal de $\mathcal{R}$. Como $H^2_{\mathcal{K}}$ es separable, el conjunto $I$ debe ser numerable.

Dado que $\mathcal{R}$ es wandering para $\mathbf{S}$, se cumple que $\mathcal{R} \perp \mathbf{S}^j(\mathcal{R})$ para todo $j \geq 1$. En particular, $\langle g_i, \mathbf{S}^j g_{i'} \rangle = 0$ para todo $j \geq 1$ e $i, i' \in I$. Luego,

$$0 = \langle g_i, \mathbf{S}^j g_{i'} \rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle g_i(\lambda), \lambda^j g_{i'}(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \langle g_i(\lambda), g_{i'}(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}} \, \lambda^{-j} \, dm(\lambda)$$

es decir, todos los coeficientes de Fourier de la función compleja $\lambda \mapsto \langle g_i(\lambda), g_{i'}(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}}$ son cero, excepto posiblemente el coeficiente $j = 0$. Por lo tanto, $\langle g_i(\lambda), g_{i'}(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}}$ es constante para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Por otro lado, como

$$\delta_{i,i'} = \langle g_i, g_{i'} \rangle_{\mathcal{K}} = \int_{\mathbb{T}} \langle g_i(\lambda), g_{i'}(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}} \, dm(\lambda),$$

entonces $\langle g_i(\lambda), g_{i'}(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}} = \delta_{i,i'}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Como hay una cantidad numerable de conjuntos de medida cero donde no se cumple lo anterior, podemos afirmar que existe al menos un $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $\langle g_i(\lambda), g_{i'}(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}} = \delta_{i,i'}$ con lo cual hemos probado que $\mathcal{K}$ contiene un conjunto ortonormal de la misma cardinalidad de $\{g_i\}_{i\in I}$. ■

# Capítulo 2

# Marcos de iteraciones de dos operadores de conmutan

Dedicaremos este capítulo a estudiar y caracterizar todas las tuplas de la forma $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable, $T, L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ son dos operadores que conmutan entre sí, con $T$ inversible, y $\{v_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de vectores a lo sumo numerable en $\mathcal{H}$.

Para ello consideraremos dos casos:

- El caso unilateral que consistirá en tomar tuplas $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ que generen marcos de la forma $\left\{T^k L^j v_i : k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0, i \in I\right\}$, es decir, las iteraciones de $L$ se toman en $\mathbb{N}_0$. Esto será discutido en la Sección 2.1.

- El caso bilateral se discutirá en la Sección 2.2 y consideraremos tuplas $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ que generen marcos de la forma $\left\{T^k L^j v_i : k, j \in \mathbb{Z}, i \in I\right\}$, es decir, el operador $L$ se itera en $\mathbb{Z}$. Notamos que para este caso será necesario asumir que $L$ también es inversible.

La idea será demostrar que cualquier tupla de la forma $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ (caso unilateral y bilateral) se corresponde con una única tupla *básica* que consistirá de un subespacio cerrado $\mathcal{N}$ de un espacio de funciones $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ (ver Sección 1.4) con $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert conocido, dos operadores definidos en $\mathcal{N}$ que conmutan entre sí y un conjunto de vectores $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ que será obtenido a partir de una base ortonormal de $\mathcal{K}$. Dicha correspondencia se entenderá de acuerdo a siguiente Definición 2.1.

**Definición 2.1.** Para $r = 1, 2$, sean $\mathcal{H}_r$ espacios de Hilbert, $T_r, L_r \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_r)$ con $T_r$ inversible y $T_r L_r = L_r T_r$, y sean $\{v_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}_1$, $\{w_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}_2$ conjuntos de vectores, donde $I$ es un conjunto de índices a lo sumo numerable.

Se dice que las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *similares* si existe un isomorfismo $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que satisface $\Psi(v_i) = w_i$ para todo $i \in I$, y cumple $\Psi T_1 = T_2 \Psi$ y

$\Psi L_1 = L_2\Psi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{H}_2 \\ {\scriptstyle T_1, L_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T_2, L_2} \\ \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{H}_2 \end{array}$$

Se dice que las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *unitariamente equivalentes* si el operador $\Psi$ que da la similaridad es unitario.

Es fácil ver que la similaridad es una relación de equivalencia.

**Definición 2.2.** Se dice que la tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ genera un marco (marco de Parseval o base de Riesz) del correspondiente espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si la colección

$$\left\{T^k L^j v_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in J,\ i \in I\right\}$$

forma un marco (un marco de Parseval o una base de Riesz, respectivamente).

Como se mencionó al inicio del capítulo, el conjunto de índices $J$ que consideraremos será $\mathbb{N}_0$ ó $\mathbb{Z}$. Cuando $J = \mathbb{N}_0$ diremos que $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una *tupla unilateral* y si $J = \mathbb{Z}$ diremos que $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una *tupla bilateral*. Los siguientes dos lemas se cumplen tanto para tuplas unilaterales como para bilaterales.

**Lema 2.3.** *La relación de similaridad entre tuplas de la forma $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ preserva la propiedad de marco.*

*Demostración.* Supongamos que las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son similares vía el isomorfismo $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Esto es, $\Psi$ satisface que $\Psi(v_i) = w_i$ para todo $i \in I$, $\Psi T_1 = T_2\Psi$ y $\Psi L_1 = L_2\Psi$. En particular, tenemos que $\Psi T_1^k = T_2^k\Psi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\Psi L_1^j = L_2^j\Psi$ para todo $j \in J$ (aquí $J = \mathbb{N}_0$ ó $\mathbb{Z}$ dependiendo del caso, unilateral o bilateral). Por lo tanto,

$$\Psi(T_1^k L_1^j v_i) = T_2^k L_2^j w_i.$$

Si asumimos que $\{T_1^k L_1^j v_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in J,\ i \in I\}$ es un marco de $\mathcal{H}_1$, como $\Psi$ es un isomorfismo, se deduce del Teorema 1.11 que $\{T_2^k L_2^j w_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in J,\ i \in I\}$ es un marco de $\mathcal{H}_2$. Análogamente, dado que $\Psi^{-1}$ también es un isomorfismo y $\Psi^{-1}(T_2^k L_2^j w_i) = T_1^k L_1^j v_i$, tenemos por el mismo Teorema 1.11 que si $\{T_2^k L_2^j w_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in J,\ i \in I\}$ es un marco de $\mathcal{H}_2$, entonces $\{T_1^k L_1^j v_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in J,\ i \in I\}$ es un marco de $\mathcal{H}_1$. ∎

**Lema 2.4.** *Si dos tuplas que generan marcos de Parseval son similares, entonces son unitariamente equivalentes.*

*Demostración.* El resultado es consecuencia del ítem *ii*) del Teorema 1.12. ∎

## 2.1 Tuplas unilaterales que generan marcos de un espacio de Hilbert

El objetivo principal de esta sección es caracterizar las tuplas unilaterales que generan marcos de un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, es decir, aquellas tuplas $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ donde $T, L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T$ es inversible, $TL = LT$ y $\{v_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ son tales que el sistema

$$\left\{T^k L^j v_i : k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0, i \in I\right\} \tag{2.1}$$

forma un marco de $\mathcal{H}$.

Para formular nuestro teorema de caracterización para el caso de las tuplas unilaterales, la idea principal consiste en considerar el operador de síntesis dado por la ecuación (1.2) asociado al marco (2.1), es decir,

$$C : \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \to \mathcal{H}, \qquad C(\{a_{k,j,i}\}) = \sum_{k,j,i} a_{k,j,i} T^k L^j v_i.$$

con $\{a_{k,j,i}\} \in \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I)$, con el objetivo de definir un isomorfismo que permita establecer una similaridad entre la tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ y una tupla que llamaremos *básica* y cuya primera componente será un subespacio cerrado del espacio de funciones $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$, donde $H^2_{\ell^2(I)}$ es el espacio de Hardy vectorial dado en la Definición 1.41, tomando $\mathcal{K} = \ell^2(I)$.

Con esta idea en mente, veremos primero que el dominio del operador de síntesis $C$, es decir, el espacio de sucesiones $\ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I)$ es isométricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$. Para ver esto, dado un espacio de Hilbert separable $\mathcal{K}$, consideremos el siguiente operador definido en $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que actúa puntualmente como el shift unilateral con multiplicidad $\mathbf{S} : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$. En los teoremas de caracterización estaremos interesados en el caso $\mathcal{K} = \ell^2(I)$, pero las definiciones y resultados que veremos a continuación valen para $\mathcal{K}$ general.

**Definición 2.5.** Sea $\widehat{\mathbf{S}} : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ el operador definido por

$$\widehat{\mathbf{S}} f(\lambda) = \mathbf{S}(f(\lambda)),$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$.

*Observación* 2.6. El operador $\widehat{\mathbf{S}}$ se puede ver como un levantamiento de $\mathbf{S} : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$ al espacio $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ en el sentido de que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{S}}} & L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \\ {\scriptstyle ev_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ev_\lambda} \\ H^2_{\mathcal{K}} & \xrightarrow{\mathbf{S}} & H^2_{\mathcal{K}} \end{array}$$

donde $ev_\lambda : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to H^2_{\mathcal{K}}$ es el operador "evaluar en $\lambda$", es decir, $ev_\lambda(f) = f(\lambda)$, con lo cual la Definición 2.5 se puede escribir como

$$ev_\lambda(\widehat{\mathbf{S}}f) = \mathbf{S}(ev_\lambda f),$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

Otra manera de entender a $\widehat{\mathbf{S}}$ es como el operador $\widehat{G} \in \widehat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}))$ asociado a la función $G : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(H^2_{\mathcal{K}})$ que verifica que $G(\lambda) = \mathbf{S}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ (ver Subsección 1.4.3), es decir,

$$(\widehat{G}f)(\lambda) = G(\lambda)f(\lambda) = \mathbf{S}(f(\lambda)),$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. De esta explicación queda claro el uso de la notación $\widehat{\mathbf{S}}$.

**Proposición 2.7.** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

*i) El operador $\widehat{\mathbf{S}}$ es una isometría pura.*

*ii) El operador adjunto $\widehat{\mathbf{S}}^* : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ de $\widehat{\mathbf{S}}$ viene dado por $\widehat{\mathbf{S}}^* f(\lambda) = \mathbf{S}^*(f(\lambda))$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

*iii) Los operadores $\widehat{\mathbf{S}}$ y $\widehat{\mathbf{S}}^*$ conmutan con el shift bilateral con multiplicidad $\boldsymbol{U}$ actuando en $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$.*

*Demostración.* *i*) Dado que $\widehat{\mathbf{S}} = \widehat{G} \in \widehat{\mathcal{F}}$ con $G(\lambda) = \mathbf{S}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, y sabemos que $\mathbf{S}$ es una isometría en $H^2_{\mathcal{K}}$, se obtiene del ítem *iv*) del Lema 1.63 que $\widehat{\mathbf{S}}$ es una isometría.

Veamos que $\widehat{\mathbf{S}}$ es pura (ver Definición 1.70). Supongamos que

$$f \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{S}}^j (L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})),$$

es decir, $f \in \widehat{\mathbf{S}}^j(L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}))$ para todo $j \geq 0$. Luego, $f = \widehat{\mathbf{S}}^j g$ para alguna $g \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ y $f(\lambda) = \mathbf{S}^j(g(\lambda)) \in H^2_{\mathcal{K}}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y para todo $j \geq 0$. Por lo tanto, $f(\lambda) \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(H^2_{\mathcal{K}})$, y como $\mathbf{S}$ es una isometría pura (ver Ejemplo 1.71) tenemos que $f(\lambda) = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, con lo cual $f = 0$, obteniendo así que

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{S}}^j (L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})) = \{0\}.$$

*ii*) Recordemos que cualquier elemento $\widehat{F}$ de la clase $\widehat{\mathcal{F}}$ cumple que $\widehat{F}^* = \widehat{F^*}$. En particular, como $\widehat{\mathbf{S}} = \widehat{G} \in \widehat{\mathcal{F}}$ con $G(\lambda) = \mathbf{S}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, tenemos para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ y para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$,

$$\widehat{\mathbf{S}}^* f(\lambda) = \widehat{G}^* f(\lambda) = \widehat{G^*} f(\lambda) = G^*(\lambda) f(\lambda) = G(\lambda)^* f(\lambda) = \mathbf{S}^*(f(\lambda)),$$

lo cual demuestra lo deseado.

*iii*) Vemos a través del siguiente cálculo que $\widehat{\mathbf{S}}$ conmuta con $\mathbf{U}$:

$$\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{U}f(\lambda) = \mathbf{S}(\mathbf{U}f(\lambda)) = \mathbf{S}(\lambda f(\lambda)) = \lambda\mathbf{S}(f(\lambda)) = \lambda(\widehat{\mathbf{S}}f)(\lambda) = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{S}}f(\lambda)$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ y para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, con lo cual $\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{U} = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{S}}$. Como $\mathbf{U}$ es unitario se deduce de lo anterior que $\widehat{\mathbf{S}}^*\mathbf{U} = (\mathbf{U}\widehat{\mathbf{S}})^* = (\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{U})^* = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{S}}^*$. ■

En el siguiente teorema veremos a partir de una base ortonormal de $\mathcal{K}$ y de los operadores $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$ se puede construir una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$.

**Teorema 2.8.** *Si $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{K}$, entonces el sistema*

$$\left\{\boldsymbol{U}^k\widehat{\boldsymbol{S}}^j\varepsilon_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\right\}$$

*es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$.*

*Demostración.* Por *ii*) del Teorema 1.46, el sistema $\{\mathbf{S}^j\varepsilon_i : j \in \mathbb{N}_0, i \in I\}$ es una base ortonormal de $H^2_{\mathcal{K}}$, donde $\#I = \dim(\mathcal{K})$. Además, si vemos a la base $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ como un subconjunto de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ tenemos que $\{\widehat{\mathbf{S}}^j\varepsilon_i : j \in \mathbb{N}_0, i \in I\}$ es un sistema cuyas imágenes para cada $\lambda \in \mathbb{T}$ forma una base ortonormal de $H^2_{\mathcal{K}}$. Por lo tanto, por el ítem *i*) del Teorema 1.46 se obtiene el resultado. ■

Volvemos al caso particular $\mathcal{K} = \ell^2(I)$. En vista del Teorema 2.8, si $\{\delta_i\}_{i\in I}$ es la *base canónica* de $\ell^2(I)$, entonces

$$\left\{\mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\right\} \tag{2.2}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$. Luego, cualquier función $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ cumple que

$$f = \sum_{k,j,i}\langle f, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle\, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i \qquad \text{y} \qquad \|f\|^2 = \sum_{k,j,i}|\langle f, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle|^2,$$

es decir, la correspondencia $f \mapsto \{\langle f, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle\}_{k,j,i}$ define un isomorfismo isométrico entre los espacios $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ y $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_0\times I)$. Ahora, el operador de síntesis asociado al marco (2.1) se puede definir de la siguiente manera:

$$C : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) \to \mathcal{H}, \qquad Cf = \sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\, T^k L^j v_i \tag{2.3}$$

donde $f^i_{k,j} := \langle f, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle$ para $k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0, i \in I$ son los coeficientes de $f$ en la base (2.2). Recordar que si el sistema (2.1) es un marco, en particular es una sucesión de Bessel, con lo cual la serie (2.3) converge incondicionalmente, como vimos en el Teorema 1.5. Además, $C$ es un operador sobreyectivo (ver Proposición 1.6). En la siguiente proposición demostramos otras propiedades que satisface el operador $C$, las cuales serán muy importantes para establecer los resultados principales de esta sección.

**Proposición 2.9.** *Sea* $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ *una tupla unilateral que genera un marco del correspondiente espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *y sea* $C$ *el operador de síntesis como en* (2.3) *asociado al sistema* (2.1)*. Entonces:*

*i) Si* $\{\delta_i\}_{i\in I}$ *es la base canónica de* $\ell^2(I)$*, se cumple que* $C(\delta_i) = v_i$ *para todo* $i \in I$*. Además,*

$$C\boldsymbol{U} = TC, \quad C\boldsymbol{U}^* = T^{-1}C \quad y \quad C\widehat{\boldsymbol{S}} = LC. \tag{2.4}$$

*ii) El subespacio* $\ker(C)^\perp \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ *reduce a* $\boldsymbol{U}$ *y es invariante por* $\widehat{\boldsymbol{S}}^*$*.*

*Demostración.* $i$) Notemos que $\langle \delta_{i'}, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $i \in I$ excepto para $k = j = 0$ y $i = i'$ en cuyo caso $\langle \delta_{i'}, \delta_{i'}\rangle = 1$. Entonces,

$$C(\delta_{i'}) = \sum_{k,j,i}\langle \delta_{i'}, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle T^k L^j v_i = v_{i'}.$$

para todo $i' \in I$.

Para ver que se cumplen las igualdades (2.4), consideremos $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ y su expansión en serie con respecto a la base (2.2), esto es,

$$f = \sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\,\mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i, \qquad f^i_{k,j} = \langle f, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0, i \in I.$$

Como $\mathbf{U}$ es un operador unitario, los coeficientes en la base (2.2) correspondientes a las funciones $\mathbf{U}f$ y $\mathbf{U}^*f$ están dados por

$$\langle \mathbf{U}f, \mathbf{U}^k\widehat{S}^j\delta_i\rangle = \langle f, \mathbf{U}^{k-1}\widehat{S}^j\delta_i\rangle = f^i_{k-1,j} \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{U}^*f, \mathbf{U}^k S^j\delta_i\rangle = \langle f, \mathbf{U}^{k+1}S^j\delta_i\rangle = f^i_{k+1,j},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $i \in I$. De forma análoga, como $\widehat{\mathbf{S}}$ es una isometría y conmuta con $\mathbf{U}$ (ver Proposición 2.7), los coeficientes en la base (2.2) de la función $\widehat{\mathbf{S}}f$ vienen dados por

$$\langle\widehat{\mathbf{S}}f, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i\rangle = \langle\widehat{\mathbf{S}}f, \widehat{\mathbf{S}}^j\mathbf{U}^k\delta_i\rangle = \langle f, \widehat{\mathbf{S}}^{j-1}\mathbf{U}^k\delta_i\rangle = f^i_{k,j-1},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, $i \in I$; y si $j = 0$, tenemos que $\langle\widehat{\mathbf{S}}f, \mathbf{U}^k\delta_i\rangle = \langle f, \widehat{\mathbf{S}}^*\mathbf{U}^k\delta_i\rangle = \langle f, \mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^*\delta_i\rangle = 0$ ya que $\widehat{\mathbf{S}}^*\delta_i(\lambda) = S^*\delta_i\gamma_0 = (\delta_i - \delta_i)/\lambda = 0$ (ver ecuación (1.12)).

En consecuencia, se satisfacen las siguientes propiedades:

$$C\mathbf{U}f = \sum_{k,j,i} f^i_{k-1,j}\,T^kL^jv_i = \sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\,T^{k+1}L^jv_i = T\left(\sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\,T^kL^jv_i\right) = TCf,$$

$$C\mathbf{U}^*f = \sum_{k,j,i} f^i_{k+1,j}\,T^kL^jv_i = \sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\,T^{k-1}L^jv_i = T^{-1}\left(\sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\,T^kL^jv_i\right) = T^{-1}Cf,$$

y

$$C\widehat{\mathbf{S}}f = \sum_{k,j,i} f^i_{k,j-1}\, T^k L^j v_i = \sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\, T^k L^{j+1} v_i = L\left(\sum_{k,j,i} f^i_{k,j}\, T^k L^j v_i\right) = LCf.$$

Esto demuestra (2.4).

*ii*) Si $f \in \ker(C) \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell(I)})$, entonces

$$C\mathbf{U}f = TCf = 0, \quad C\mathbf{U}^* f = T^{-1}Cf = 0 \quad \text{y} \quad C\widehat{\mathbf{S}}f = LCf = 0,$$

es decir, $\ker(C)$ reduce a $\mathbf{U}$ (es invariante por $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^*$) y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$, o equivalentemente, $\ker(C)^\perp$ reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$ como queríamos ver.

■

En resumen, a través del operador de síntesis dado en (2.3) asociado a (2.1), es posible obtener un subespacio de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ que es isomorfo a $\mathcal{H}$, reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$. Con base en esta discusión, definiremos a continuación un tipo de tupla canónica que permitirá establecer la relación de similaridad entre éstas y las tuplas unilaterales $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ que generan marcos.

Si $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un subespacio $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$, el operador definido por

$$R : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \qquad R = P_{\mathcal{M}} T|_{\mathcal{M}},$$

se llama una *compresión* de $T$ al subespacio $\mathcal{M}$, y $T$ es una *dilatación* de $R$ a $\mathcal{H}$.

**Definición 2.10.** Para cada subespacio cerrado $\mathcal{N} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ que reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$, denotamos por $\mathbf{A}$ a la compresión de $\widehat{\mathbf{S}}$ al subespacio $\mathcal{N}$, es decir, $\mathbf{A} = P_{\mathcal{N}}\widehat{\mathbf{S}}|_{\mathcal{N}}$, y definimos $\varphi_i := P_{\mathcal{N}}\delta_i$ para todo $i \in I$. Llamamos a $(\mathcal{N}, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}}, \mathbf{A}, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ una *tupla unilateral básica*.

*Observación* 2.11. Notemos que los operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{U}|_{\mathcal{N}}$ considerados en la definición de tupla unilateral básica conmutan. En efecto, usando que $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$ conmutan y que $P_{\mathcal{N}}\mathbf{U} = \mathbf{U}P_{\mathcal{N}}$, ya que $\mathbf{U}$ reduce a $\mathcal{N}$ (ver Observación 1.30), tenemos que para toda $f \in \mathcal{N}$ se cumple

$$\mathbf{UA}f = \mathbf{U}P_{\mathcal{N}}\widehat{\mathbf{S}}f = P_{\mathcal{N}}\mathbf{U}\widehat{\mathbf{S}}f = P_{\mathcal{N}}\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{U}f = \mathbf{AU}f.$$

Una propiedad importante de las tuplas unilaterales básicas es que siempre generan marcos de Parseval del correspondiente subespacio $\mathcal{N}$. Probaremos esto en la siguiente proposición.

**Proposición 2.12.** *Toda tupla unilateral básica genera un marco de Parseval.*

*Demostración.* Veamos que

$$\left\{\mathbf{U}^k\mathbf{A}^j\varphi_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\right\} \tag{2.5}$$

es un marco de Parseval de $\mathcal{N}$. Para ello basta observar que el (2.5) es la proyección ortogonal a $\mathcal{N}$ de la base ortonormal (2.2) (ver item *ii*) del Teorema 1.15). Para ver esto, notemos que como $\mathcal{N}$ es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$ tenemos que $\widehat{\mathbf{S}}^* P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{S}}^* P_{\mathcal{N}}$ (ver Observación 1.30) y por lo tanto para todo $j \in \mathbb{N}_0$, $P_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{S}}^j = P_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{S}}^j P_{\mathcal{N}}$. Además, como $\mathcal{N}$ reduce a $\mathbf{U}$, vale que $P_{\mathcal{N}} \mathbf{U}^k = \mathbf{U}^k P_{\mathcal{N}}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego, tenemos que

$$P_{\mathcal{N}} \mathbf{U}^k \widehat{\mathbf{S}}^j \delta_i = \mathbf{U}^k P_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{S}}^j \delta_i = \mathbf{U}^k P_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{S}}^j P_{\mathcal{N}} \delta_i = \mathbf{U}^k \mathbf{A}^j \varphi_i, \tag{2.6}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}_0$ y $i \in I$.

■

Por la proposición anterior y el ítem ii) del Teorema 1.12, tenemos que si dos tuplas básicas son similares, ellas deben ser unitariamente equivalentes. Más aún, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.13.** *Si dos tuplas básicas son similares, entonces son iguales.*

*Demostración.* Sean $(\mathcal{N}_1, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}_1}, \mathbf{A}_1, \{P_{\mathcal{N}_1}\delta_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{N}_2, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}_2}, \mathbf{A}_2, \{P_{\mathcal{N}_2}\delta_i\}_{i\in I})$ dos tuplas unilaterales básicas similares. Entonces, existe un operador unitario $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ tal que $\Psi \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \Psi$, $\Psi \mathbf{U}|_{\mathcal{N}_1} = \mathbf{U}|_{\mathcal{N}_2} \Psi$ y $\Psi P_{\mathcal{N}_1} \delta_i = P_{\mathcal{N}_2} \delta_i$ para todo $i \in I$.

Además, por las propiedades de $\Psi$ y (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi(P_{\mathcal{N}_1}(\mathbf{U}^k \widehat{\mathbf{S}}^j \delta_i)) &= \Psi(\mathbf{U}^k \mathbf{A}_1^j P_{\mathcal{N}_1} \delta_i) = \mathbf{U}^k \mathbf{A}_2^j \Psi(P_{\mathcal{N}_1} \delta_i) = \mathbf{U}^k \mathbf{A}_2^j P_{\mathcal{N}_2} \delta_i \\ &= P_{\mathcal{N}_2}(\mathbf{U}^k \widehat{\mathbf{S}}^j \delta_i)\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $i \in I$. Como $\left\{\mathbf{U}^k \widehat{\mathbf{S}}^j \delta_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\right\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$, entonces el Teorema 1.16 implica que $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$. ■

Ahora, estamos listos para demostrar el teorema de la caracterización de las tuplas unilaterales que generan marcos.

**Teorema 2.14.** *Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una tupla unilateral que genera un marco si y solo si es similar a una tupla unilateral básica. Más aún, esta tupla básica es única.*

*Demostración.* Supongamos primero que $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una tupla unilateral que genera un marco. Queremos encontrar una tupla unilateral básica que sea similar a $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$.

Sea $C$ el operador de síntesis definido en (2.3). Por *ii*) de la Proposición 2.9, el subespacio $\mathcal{N} := \ker(C)^\perp$ de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$, lo cual sugiere que la tupla básica $(\mathcal{N}, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}}, \mathbf{A}, \{P_{\mathcal{N}}\delta_i\}_{i\in I})$ es la buscada. Para ver esto, consideremos el operador dado por la restricción del operador de síntesis al subespacio $\mathcal{N}$, es decir,

$$\Psi := C|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{H}.$$

Como el sistema (2.1) es un marco para $\mathcal{H}$, sabemos que $C$ es un operador sobreyectivo, con lo cual $\Psi$ es un isomorfismo. Veamos que $\Psi$ es el operador que verifica la similaridad entre ambas tuplas. Por un lado, observamos que $C(P_{\mathcal{N}^\perp}\delta_i) = 0$ para todo $i \in I$, y por la Proposición 2.9 se cumple que

$$\Psi(P_{\mathcal{N}}\delta_i) = C(P_{\mathcal{N}}\delta_i) + C(P_{\mathcal{N}^\perp}\delta_i) = C(P_{\mathcal{N}}\delta_i + P_{\mathcal{N}^\perp}\delta_i) = C\delta_i = v_i,$$

para todo $i \in I$. Además, como $C$ cumple las siguientes relaciones dadas en (2.4) tenemos que las mismas se cumplen para $\Psi$, es decir,

$$\Psi\mathbf{U}|_{\mathcal{N}} = T\Psi, \quad \Psi\mathbf{U}|_{\mathcal{N}}^* = T^{-1}\Psi \quad \text{y} \quad \Psi\mathbf{A} = L\Psi.$$

Concluimos que $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es similar a $(\mathcal{N}, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}}, \mathbf{A}, \{P_{\mathcal{N}}\delta_i\}_{i\in I})$ vía el isomorfismo $\Psi$.

El recíproco es consecuencia del Lema 2.3. La unicidad se deduce del Teorema 2.13. En efecto, si existiese otra tupla básica similar a $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$, entonces por transitividad, ésta también debe ser similar a $(\mathcal{N}, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}}, \mathbf{A}, \{P_{\mathcal{N}}\delta_i\}_{i\in I})$, y por lo tanto son iguales. ■

Si $\#I = 1$ en el Teorema 2.14, entonces $\ell^2(I) = \mathbb{C}$ y $H^2_{\ell^2(I)} = H^2$. Luego, tenemos el siguiente:

**Corolario 2.15.** *Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, v)$ es una tupla unilateral que genera un marco si y solo si existe un subespacio cerrado $\mathcal{N} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2)$ que reduce a $\boldsymbol{U}$ y es invariante por $\widehat{\boldsymbol{S}}^*$ tal que $(\mathcal{H}, T, L, v)$ es similar a $(\mathcal{N}, \boldsymbol{U}|_{\mathcal{N}}, \boldsymbol{A}, P_{\mathcal{N}}1)$, donde $\boldsymbol{A}$ es la compresión de $\widehat{\boldsymbol{S}}$ to $\mathcal{N}$.*

Otra consecuencia del Teorema 2.14 es la caracterización de las tuplas que generan marcos de Parseval.

**Corolario 2.16.** *Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una tupla unilateral que genera un marco de Parseval si y solo si es unitariamente equivalente a una tupla unilateral básica.*

*Demostración.* Supongamos que $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una tupla unilateral que genera un marco de Parseval. Entonces, del Teorema 2.14, $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es similar a una tupla básica, la cual genera un marco de Parseval (ver Proposición 2.12). Luego, por el Lema 2.4, ambas tuplas deben ser unitariamente equivalentes. La otra implicación es inmediata del ítem i) del Teorema 1.12. ■

En el siguiente resultado veremos que *cualquier* tupla unilateral que genera una base de Riesz debe ser similar a la tupla unilateral básica cuya primera componente es todo el espacio $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$.

**Proposición 2.17.** *Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una tupla unilateral que genera una base de Riesz si y solo es similar a $\left(L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}), \boldsymbol{U}, \widehat{\boldsymbol{S}}, \{\delta_i\}_{i\in I}\right)$, donde $\{\delta_i\}_{i\in I}$ es la base canónica de $\ell^2(I)$.*

*Demostración.* Si $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una tupla unilateral que genera una base de Riesz, entonces el operador de síntesis $C$ asociado al sistema (2.1) es un isomorfismo (ver Observación 1.9) entre $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ y $\mathcal{H}$. Además, $C$ cumple que $C(\delta_i) = v_i$ para todo $i \in I$ y $C\mathbf{U} = TC$, $C\mathbf{U}^* = T^{-1}C$ y $C\widehat{\mathbf{S}} = LC$ (ver Proposición 2.9). Es decir, $C$ da la similaridad entre las tuplas $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}), \mathbf{U}, \widehat{\mathbf{S}}, \{\delta_i\}_{i\in I})$. Recíprocamente, supongamos que $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es similar a $(L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}), \mathbf{U}, \widehat{\mathbf{S}}, \{\delta_i\}_{i\in I})$ vía el operador $\Psi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) \to \mathcal{H}$ (ver Definición 2.1). Como $\{\mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ y se satisface que

$$\Psi(\mathbf{U}^k\widehat{\mathbf{S}}^j\delta_i) = T^kL^jv_i,$$

por la Definición 1.8 tenemos que $\{T^kL^jv_i : k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}_0,\ i \in I\}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$. ∎

## 2.2 Tuplas bilaterales que generan marcos de un espacio de Hilbert

En esta sección consideramos tuplas de la forma $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$, con $L$ inversible, y buscamos condiciones necesarias y suficientes para que el sistema

$$\left\{T^kL^jv_i : k, j \in \mathbb{Z}, i \in I\right\} \tag{2.7}$$

sea un marco (un marco de Parseval o una base de Riesz) de $\mathcal{H}$.

Usando argumentos análogos a los de la sección anterior, veremos que el conjunto de iteraciones (2.7) forma un marco (un marco de Parseval o una base de Riesz) para $\mathcal{H}$ si y solo si la tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es similar a una *tupla bilateral básica* que definiremos más adelante. Seguiremos ideas similares, reemplazando el operador de síntesis por el que corresponde en este caso.

En principio, el operador de síntesis asociado al sistema (2.7) viene dado por

$$C : \ell^2(\mathbb{Z}^2 \times I) \to \mathcal{H}, \qquad C(\{b_{k,j,i}\}) = \sum_{k,j,i} b_{k,j,i}\, T^kL^jv_i$$

con $\{b_{k,j,i}\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2 \times I)$ para todo $k, j \in \mathbb{Z}, i \in I$. De forma análoga a la Sección 2.1, se puede probar que el espacio de sucesiones $\ell^2(\mathbb{Z}^2 \times I)$ es isométricamente isomorfo al espacio de funciones $L^2(\mathbb{T}, L^2(\mathbb{T}, \ell^2(I)))$, considerando el operador shift bilateral con multiplicidad $\mathbf{U}$ actuando en ese espacio y otro operador $\widehat{\mathbf{U}}$ que actúa puntualmente como el shift bilateral definido en $L^2(\mathbb{T}, \ell^2(I))$. Luego, usando razonamientos similares se obtienen los análogos de los resultados de la sección anterior.

Sin embargo, con el objetivo de demostrar algunos resultados de la siguiente Sección 2.3, veremos que también es posible establecer un isomorfismo isométrico entre $\ell^2(\mathbb{Z}^2 \times I)$ y el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$ que consiste de todas las funciones medibles $f : \mathbb{T}^2 \to \ell^2(I)$ (ver Definición 1.36) tales que

$$\int_{\mathbb{T}^2} \|f(z_1, z_2)\|^2_{\ell^2(I)} \, dm_2(z_1, z_2) < \infty,$$

dotado con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^2} \langle f(z_1, z_2), g(z_1, z_2)\rangle_{\ell^2(I)} \, dm_2(z_1, z_2),$$

para $f, g \in L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$, donde $m_2 = m \times m$ es la medida producto en $\mathbb{T}^2$.

Para ello consideramos dos operadores shift con multiplicidad actuando en cada variable dados en la siguiente definición.

**Definición 2.18.** Para $i = 1, 2$, se define $\mathbf{U}_i : L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I)) \to L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$ como el operador

$$\mathbf{U}_i f(z_1, z_2) = z_i \, f(z_1, z_2)$$

para casi todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$.

*Observación* 2.19. Se ve fácilmente que $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ conmutan.

Mediante los operadores $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ es posible construir una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$.

**Teorema 2.20.** *Si $\{\delta_i\}_{i\in I}$ es la base ortonormal canónica de $\ell^2(I)$, entonces el sistema*

$$\left\{\boldsymbol{U}_1^k \boldsymbol{U}_2^j \delta_i : k, j \in \mathbb{Z},\ i \in I\right\} \tag{2.8}$$

*es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$.*

En vista del teorema anterior tenemos que cualquier $f \in L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$ se puede escribir como

$$f = \sum_{k,j,i} \langle f, \mathbf{U}_1^k \mathbf{U}_2^j \delta_i\rangle \, \mathbf{U}_1^k \mathbf{U}_2^j \delta_i \qquad \text{y} \qquad \|f\|^2 = \sum_{k,j,i} |\langle f, \mathbf{U}_1^k \mathbf{U}_2^j \delta_i\rangle|^2,$$

es decir, la correspondencia $f \mapsto \{\langle f, \mathbf{U}_1^k \mathbf{U}_2^j \delta_i\rangle\}_{k,j,i}$ define un isomorfismo isométrico entre los espacios $L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$ y $\ell^2(\mathbb{Z}^2 \times I)$. Ahora, el operador de síntesis asociado al marco (2.7) se puede definir de la siguiente manera:

$$C : L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I)) \to \mathcal{H}, \qquad Cf = \sum_{k,j,i} f^i_{k,j} \, T^k L^j v_i$$

donde $f^i_{k,j} := \langle f, \mathbf{U}_1^k \mathbf{U}_2^j \delta_i\rangle$ para $k, j \in \mathbb{Z}, i \in I$ son los coeficientes de $f$ en la base (2.8).

Tenemos entonces el análogo de la Proposición 2.9.

**Proposición 2.21.** *Sea* $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ *una tupla bilateral que genera un marco del correspondiente espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *y sea* $C$ *el operador de síntesis asociado al sistema* (2.7). *Entonces:*

*i) Si* $\{\delta_i\}_{i\in I}$ *es la base canónica de* $\ell^2(I)$*, entonces* $C(\delta_i) = v_i$ *para todo* $i \in I$*. Además,*

$$C\boldsymbol{U}_1 = TC, \quad C\boldsymbol{U}_1^* = T^{-1}C, \quad C\boldsymbol{U}_2 = LC, \quad y \quad C\boldsymbol{U}_2^* = L^{-1}C$$

*ii) El subespacio* $\ker(C)^\perp \subseteq L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$ *reduce a* $\boldsymbol{U}_1$ *y* $\boldsymbol{U}_2$*.*

**Definición 2.22.** Para cada subespacio cerrado $\mathcal{N} \subseteq L^2(\mathbb{T}, \ell^2(I))$ que reduce a $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ simultáneamente, y vectores $\varphi_i := P_{\mathcal{N}}\delta_i$ para todo $i \in I$, llamamos a $(\mathcal{N}, \mathbf{U}_1|_{\mathcal{N}}, \mathbf{U}_2|_{\mathcal{N}}, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ una *tupla bilateral básica*.

La Proposición 2.12 y el Teorema 2.13 también son válidos para las tuplas bilaterales básicas.

A continuación enunciaremos los resultados correspondientes a las tuplas bilaterales que son análogos al Teorema 2.14, los Corolarios 2.15 y 2.16 y la proposición correspondiente al resultado sobre las tuplas que generan bases de Riesz. Estos resultados serán enunciados sin demostración ya que las técnicas son bastante similares al caso unilateral desarrollado en la Sección 2.1.

**Teorema 2.23.**

*i) Una tupla* $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ *es una tupla bilateral que genera un marco si y solo si es similar a una tupla bilateral básica. Esta tupla básica es única.*

*ii) Una tupla* $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ *es una tupla bilateral que genera un marco de Parseval si y solo si es unitariamente equivalente a una tupla bilateral básica.*

*iii) Una tupla* $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ *es una tupla bilateral que genera una base de Riesz si y solo si es similar a* $\left(L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I)), \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \{\delta_i\}_{i\in I}\right)$*, donde* $\{\delta_i\}_{i\in I}$ *es la base canónica de* $\ell^2(I)$*.*

Al igual que en el caso unilateral, tenemos el siguiente caso particular del ítem *i*) Teorema 2.23 cuando $\#I = 1$. Separamos este caso ya que será clave para demostrar el Teorema 2.30 de la siguiente sección.

**Corolario 2.24.** *Una tupla* $(\mathcal{H}, T, L, v)$ *es una tupla bilateral que genera un marco si y solo si existe un subespacio cerrado* $\mathcal{N} \subseteq L^2(\mathbb{T}^2)$ *que reduce a* $\boldsymbol{U}_1$ *y* $\boldsymbol{U}_2$ *tal que* $(\mathcal{H}, T, L, v)$ *es similar a* $(\mathcal{N}, \boldsymbol{U}_1|_{\mathcal{N}}, \boldsymbol{U}_2|_{\mathcal{N}}, P_{\mathcal{N}}1)$*, donde* $1 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ *es la función constante* 1.

## 2.3 Marcos de iteraciones de un solo vector

Dado que el concepto de similaridad entre tuplas (ver Definición 2.1) define una relación de equivalencia, en esta sección analizaremos si existe alguna relación entre $\#I$, es decir, la cantidad de vectores que se consideran en una tupla de la forma $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ que genera un marco del correspondiente espacio $\mathcal{H}$, y el número de clases de equivalencia determinadas por la relación de similaridad.

Veremos que en el caso $\#I = 1$, existe una única clase de equivalencia. Esto permite a su vez caracterizar todos los vectores $w \in \mathcal{H}$ tales que la correspondiente tupla $(\mathcal{H}, T, L, w)$ genera un marco de $\mathcal{H}$. Demostraremos esto en el Teorema 2.31 para el caso unilateral y en el Teorema 2.32 para el caso bilateral. Sin embargo, no es cierto que para $\#I \geq 2$ existan $\#I$ clases de equivalencia, como veremos en el Ejemplo 2.25.

Supongamos que $\mathcal{H}, T, L$ y el conjunto de índices $I = \{1, \ldots, n\}$ están fijos y consideremos el conjunto

$$\mathcal{V}_n := \{\{v_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H} : (\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I}) \text{ es una tupla unilateral (bilateral) que genera un marco}\}.$$

Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathcal{V}_n$:

$$\{v_i\}_{i\in I} \sim \{w_i\}_{i\in I} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I}) \text{ es similar a } (\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I}). \tag{2.9}$$

**Ejemplo 2.25.** Supongamos que $\mathcal{V}_n$ no es vacío para algún $n > 1$. Sea $\{v_i\}_{i\in I} \in \mathcal{V}_n$, es decir, $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ es una tupla unilateral (bilateral) que genera un marco de $\mathcal{H}$, y supongamos que $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente. Entonces, es fácil ver que $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{v_1 + v_2\}$ y $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{v_1 - v_2\}$ pertenecen a $\mathcal{V}_{n+1}$. Supongamos que las correspondientes tuplas

$$(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I} \cup \{v_1 + v_2\}) \quad \text{y} \quad (\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I} \cup \{v_1 - v_2\})$$

son similares vía un isomorfismo $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces, en particular, se debe cumplir que

$$\Psi(v_1) = v_1,\ \Psi(v_2) = v_2,\ \ldots,\ \Psi(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$$

lo cual no es posible.

Para probar el Teorema 2.31, veremos primero que cuando $\#I = 1$ se requiere una condición más débil que la similaridad para concluir que dos tuplas unilaterales básicas que generan marcos son iguales. Para demostrar el siguiente resultado usaremos la caracterización de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2)$ que reducen a $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}^*$, dada por el Corolario 3.11. También requeriremos algunos resultados sobre *contracciones $C_0$ cuasi-similares* y *funciones minimales* que fueron desarrollados en [45, Chapter III.2], los cuales incluimos a continuación.

**Definición 2.26.** Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una contracción si $\|T\|_{op} \leq 1$. Se dice que $T$ es una contracción completamente no unitaria si no existe un subespacio no trivial $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ que reduce a $T$ tal que $T|_{\mathcal{M}}$ es un operador unitario.

Recordemos que $H^\infty$ es el conjunto de todas las funciones analíticas y acotadas en el disco abierto $\mathbb{D}$.

Para una contracción completamente no unitaria $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existe un cálculo funcional en $H^\infty$ que se define de la siguiente manera: a cada $\phi \in H^\infty$ le asociamos el operador

$$\phi(T) = \lim_{r\to 1^-} \phi_r(T)$$

donde $\phi_r(z) := \phi(rz)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y la convergencia es en la norma de operadores. Explícitamente, si $\phi(z) = \sum_{j=0}^\infty a_j z^j$, entonces $\phi_r(T) = \sum_{j=0}^\infty a_j r^j T^j$, donde la convergencia es en la norma de operador.

La aplicación $\phi \mapsto \phi(T)$ define un homomorfismo de álgebras entre $H^\infty$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

**Definición 2.27.** Una contracción completamente no unitaria $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice que pertenece a la clase $C_0$ si existe alguna función no trivial $\phi \in H^\infty$ tal que $\phi$ anule a $T$, es decir, $\phi(T) = 0$. Se dice que $\phi$ es la *función minimal* de $T$ si no existen divisores de $\phi$ que anulen a $T$.

**Proposición 2.28.** *[45, Proposition 4.3, Chapter III] Sea $\phi \in H^\infty$ una función inner no constante, y consideremos el subespacio $\mathcal{N} = H^2 \ominus \phi H^2$ y la compresión del shift unilateral (sin multiplicidad) $S$ actuando en $\mathcal{N}$ dado por $A := P_{\mathcal{N}} S|_{\mathcal{N}}$. Entonces, $A$ pertenece a las clase $C_0$ y su función minimal es $\phi$.*

Enunciamos ahora un resultado más general que establece condiciones para que las funciones minimales de dos contracciones completamente no unitarias coincidan.

**Proposición 2.29.** *[45, Proposition 4.6, Chapter III] Sean $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$ y $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ dos contracciones completamente no unitarias y supongamos que existe un isomorfismo $\Psi : H_1 \to H_2$ tal que $\Psi T_1 = T_2 \Psi$. Entonces las funciones minimales de $T_1$ y $T_2$ coinciden.*

Estamos listos para enunciar nuestro resultado.

**Teorema 2.30.** *Para $r = 1, 2$, sea $\mathcal{N}_r \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2)$ un subespacio cerrado que reduce a $\boldsymbol{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$, y sea $\boldsymbol{A}_r = P_{\mathcal{N}_r} \widehat{\mathbf{S}}|_{\mathcal{N}_r}$. Si existe un isomorfismo $\Phi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que*

$$\Phi \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 \Phi \quad y \quad \Phi \boldsymbol{U}|_{\mathcal{N}_1} = \boldsymbol{U}|_{\mathcal{N}_2} \Phi, \tag{2.10}$$

*entonces $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ y $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2$.*

*Demostración.* Como $\mathcal{N}_r \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2)$ para $r = 1, 2$ reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$, entonces por el Corolario 3.11 existe $\phi_r \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$ tal que $\phi_r(\lambda)$ es una función inner para casi todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{N}_r^\perp)$ y $\mathcal{N}_r = (\phi_r L^2(\mathbb{T}, H^2))^\perp$. Luego, su función rango $\mathcal{J}_r$ está dada por

$$\mathcal{J}_r : \lambda \mapsto \mathcal{J}_r(\lambda) = \left(\phi_r(\lambda) H^2\right)^\perp.$$

Para demostrar que $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, y en consecuencia $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$, será suficiente demostrar que $\phi_1 = \phi_2$.

Observamos primero que si extendemos $\Phi$ como cero en $\mathcal{N}_1^\perp$, a partir de la segunda ecuación en (2.10) tenemos que esta extensión conmuta con $\mathbf{U}$ y por lo tanto, por *i*) de la Proposición 1.62, existe $\widehat{F} \in \widehat{\mathcal{F}}$ tal que $\widehat{F} = \Phi$ en $\mathcal{N}_1$ y $\widehat{F} = 0$ en $\mathcal{N}_1^\perp$. Además, como $\widehat{F}|_{\mathcal{N}_1} = \Phi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ es un isomorfismo, *viii*) del Lema 1.63 implica que $F(\lambda)|_{\mathcal{J}_1(\lambda)} : \mathcal{J}_1(\lambda) \to \mathcal{J}_2(\lambda)$ es un isomorfismo para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

Por otro lado, la primera ecuación en (2.10) se puede reescribir en términos de $\widehat{F}|_{\mathcal{N}_1}$ como

$$\widehat{F}|_{\mathcal{N}_1}\, \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2\, \widehat{F}|_{\mathcal{N}_1}. \tag{2.11}$$

Veamos ahora que $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ pertenecen a $\widehat{\mathcal{F}}$. Para ver esto, definimos para $r = 1, 2$ la función $G_r : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(H^2)$ dada por $G_r(\lambda) := P_{\mathcal{J}_r(\lambda)}\mathbf{S}|_{\mathcal{J}_r(\lambda)}$ (la compresión de $\mathbf{S}$ a $\mathcal{J}_r(\lambda)$) para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Entonces, $\lambda \mapsto G_r(\lambda)$ es medible, ya que $\lambda \mapsto P_{\mathcal{J}_r(\lambda)}$ lo es, y además $\|G_r\|_\infty = \sup_{\lambda\in\mathbb{T}} \|G_r(\lambda)\|_{op} = \sup_{\lambda\in\mathbb{T}} \|P_{\mathcal{J}_r(\lambda)}\mathbf{S}|_{\mathcal{J}_r(\lambda)}\|_{op} \leq 1 < \infty$. Esto prueba que $G_r \in \mathcal{F}$ para $r = 1, 2$.

Luego, para $r = 1, 2$ tenemos que $\widehat{G_r}$ y $\mathbf{A}_r$ coinciden. Esto es consecuencia de la propiedad (1.13). En efecto, para cada $f \in \mathcal{N}_r$ y para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ tenemos que

$$\widehat{G_r} f(\lambda) = G_r(\lambda)(f(\lambda)) = P_{\mathcal{J}_r(\lambda)}(\mathbf{S}f(\lambda)) = P_{\mathcal{J}_r(\lambda)}((\widehat{\mathbf{S}}f)(\lambda)) = P_{\mathcal{N}_r}(\widehat{\mathbf{S}}f)(\lambda) = \mathbf{A}_r f(\lambda),$$

con lo cual, se deduce de (2.11) que para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$

$$F(\lambda)|_{\mathcal{J}_1(\lambda)}\, G_1(\lambda) = G_2(\lambda)\, F(\lambda)|_{\mathcal{J}_1(\lambda)}. \tag{2.12}$$

donde $G_1(\lambda)$ y $G_2(\lambda)$ son dos compresiones del shift unilateral que actúan en los subespacios $\mathcal{J}_1(\lambda) = \left(\phi_1(\lambda)H^2\right)^\perp$ y $\mathcal{J}_2(\lambda) = \left(\phi_2(\lambda)H^2\right)^\perp$, respectivamente.

Primero, observamos que por la Proposición 2.28, para $r = 1, 2$ y para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, el operador $G_r(\lambda)$ es una contracción $C_0$ cuya función minimal es $\phi_r(\lambda)$. Finalmente, como $G_1(\lambda)$ y $G_2(\lambda)$ cumplen (2.12) para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, entonces por la Proposición 2.29 tenemos que las funciones minimales $\phi_1(\lambda)$ y $\phi_2(\lambda)$ coinciden para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y por lo tanto $\phi_1 = \phi_2$, con lo cual concluimos la prueba. ■

A continuación demostramos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 2.31.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T, L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $T$ inversible y $LT = TL$ y consideramos el conjunto*

$$\mathcal{V} := \{v \in \mathcal{H} : (\mathcal{H}, T, L, v) \text{ es una tupla unilateral que genera un marco de } \mathcal{H}\}.$$

*Supongamos que $w \in \mathcal{V}$. Entonces, $v \in \mathcal{V}$ si y solo si $(\mathcal{H}, T, L, v)$ es similar a $(\mathcal{H}, T, L, w)$, es decir, $v \in \mathcal{V}$ si y solo si existe un isomorfismo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que conmuta con $T$ y $L$ tal que $v = B(w)$.*

*Demostración.* Notemos que si $v \in \mathcal{H}$ es tal que $(\mathcal{H}, T, L, v)$ es similar a $(\mathcal{H}, T, L, w)$, entonces por el Lema 2.3, la tupla unilateral $(\mathcal{H}, T, L, v)$ genera un marco de $\mathcal{H}$, y por lo tanto $v \in \mathcal{V}$.

Recíprocamente, veamos que si $v \in \mathcal{V}$, entonces se puede definir un isomorfismo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $BT = TB$, $BL = LB$ y $B(w) = v$.

Como $w, v \in \mathcal{V}$, entonces $(\mathcal{H}, T, L, w)$ y $(\mathcal{H}, T, L, v)$ son tuplas unilaterales que generan marcos de $\mathcal{H}$. Por lo tanto, por el Corolario 2.15, existen dos tuplas unilaterales básicas $(\mathcal{N}_1, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}_1}, \mathbf{A}_1, P_{\mathcal{N}_1}1)$ y $(\mathcal{N}_2, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}_2}, \mathbf{A}_2, P_{\mathcal{N}_2}1)$ que son similares a $(\mathcal{H}, T, L, w)$ y $(\mathcal{H}, T, L, v)$ respectivamente. Recordemos que los isomorfismos $\Psi_r \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_r, \mathcal{H})$ para $r = 1, 2$ dados por la relación de similaridad satisfacen que

$$\Psi_1\mathbf{U}|_{\mathcal{N}_1} = T\Psi_1, \quad \Psi_1\mathbf{A}_1 = L\Psi_1, \quad \text{y} \quad \Psi_1(P_{\mathcal{N}_1}1) = w \tag{2.13}$$

y

$$\Psi_2\mathbf{U}|_{\mathcal{N}_2} = T\Psi_2, \quad \Psi_2\mathbf{A}_2 = L\Psi_2, \quad \text{y} \quad \Psi_2(P_{\mathcal{N}_2}1) = v. \tag{2.14}$$

Ahora, a partir de las ecuaciones (2.13) y (2.14) tenemos que

$$\Psi_1\mathbf{U}|_{\mathcal{N}_1}\Psi_1^{-1} = T = \Psi_2\mathbf{U}|_{\mathcal{N}_2}\Psi_2^{-1} \quad \text{y} \quad \Psi_1\mathbf{A}_1\Psi_1^{-1} = L = \Psi_2\mathbf{A}_2\Psi_2^{-1}$$

o equivalentemente,

$$\Phi\mathbf{U}|_{\mathcal{N}_1} = \mathbf{U}|_{\mathcal{N}_2}\Phi \quad \text{y} \quad \Phi\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2\Phi,$$

donde $\Phi = \Psi_2^{-1}\Psi_1 : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$. Como $\Phi$ es un isomorfismo que cumple las hipótesis del Teorema 2.30, tenemos que $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ y en consecuencia $P_{\mathcal{N}_1}1 = P_{\mathcal{N}_2}1$.

Definimos $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $B := \Psi_2\Psi_1^{-1}$. Notemos que $B$ es acotado e inversible, y además

$$B(w) = \Psi_2\Psi_1^{-1}(w) = \Psi_2\Psi_1^{-1}\Psi_1(P_{\mathcal{N}_1}1) = \Psi_2(P_{\mathcal{N}_2}1) = v.$$

Por otro lado, $B$ también cumple que,

$$BL = \Psi_2\Psi_1^{-1}L = \Psi_2\mathbf{A}_1\Psi_1^{-1} = \Psi_2\mathbf{A}_2\Psi_1^{-1} = L\Psi_2\Psi_1^{-1} = LB,$$

con lo cual $B$ y $L$ conmutan. Análogamente se puede ver que $B$ conmuta con $T$. Esto completa la demostración. ∎

La caracterización dada en el Teorema 2.31 también se puede obtener cuando consideramos tuplas bilaterales. Más precisamente, tenemos lo siguiente:

**Teorema 2.32.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T, L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $LT = TL$ y el conjunto*

$$\mathcal{V} := \{v \in \mathcal{H} : (\mathcal{H}, T, L, v) \text{ es una tupla bilateral que genera un marco de } \mathcal{H}\}.$$

*Supongamos que $w \in \mathcal{V}$. Entonces, $v \in \mathcal{V}$ si y solo si $(\mathcal{H}, T, L, v)$ es similar a $(\mathcal{H}, T, L, w)$, es decir, $v \in \mathcal{V}$ si y solo si existe un isomorfismo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que conmuta con $T$ y $L$ tal que $v = B(w)$.*

La demostración de este teorema se basa en el Corolario 2.24 y en la siguiente descripción de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}^2)$ que reducen a los operadores $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ dados en la Definición 2.18, simultáneamente (ver, por ejemplo, [36]). El siguiente teorema es una versión más general del Teorema 1.31.

**Teorema 2.33.** *Un subespacio $\mathcal{M} \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ reduce a $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2$ (ver Defnición 2.18) si y solo si existe un conjunto de Borel $E \subseteq \mathbb{T}^2$ tal que $\mathcal{M} = \chi_E\, L^2(\mathbb{T}^2)$.*

*Demostración del Teorema 2.32.* Sea $w \in \mathcal{V}$. Como $(\mathcal{H}, T, L, w)$ y $(\mathcal{H}, T, L, v)$ son tuplas bilaterales que generan marcos de $\mathcal{H}$, entonces por el Corolario 2.24 son similares a tuplas bilaterales básicas $(\mathcal{M}, \mathbf{U}_1|_{\mathcal{M}}, \mathbf{U}_2|_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{M}}1)$ y $(\mathcal{N}, \mathbf{U}_1|_{\mathcal{N}}, \mathbf{U}_2|_{\mathcal{N}}, P_{\mathcal{N}}1)$ respectivamente.

Análogamente como en la demostración del caso unilateral, la clave será probar que los subespacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son iguales.

A partir de los isomorfismos dados por las relaciones de similaridad, podemos definir un isomorfismo $V : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ que satisface

$$V\,\mathbf{U}_1|_{\mathcal{M}} = \mathbf{U}_1|_{\mathcal{N}} V \quad \text{y} \quad V\,\mathbf{U}_2|_{\mathcal{M}} = \mathbf{U}_2|_{\mathcal{N}} V. \tag{2.15}$$

Como $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ reducen a $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ simultáneamente, por el Teorema 2.33 tenemos que existen conjuntos de Borel $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{T}^2$ tales que $\mathcal{M} = \chi_{E_1} L^2(\mathbb{T}^2)$ y $\mathcal{N} = \chi_{E_2} L^2(\mathbb{T}^2)$.

Para ver que $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, bastará probar que las funciones características $\chi_{E_1}$ y $\chi_{E_2}$ coinciden para casi todo punto $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$. Definamos $g = \chi_{E_1 \setminus E_2} \in \mathcal{M} \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ y consideremos su expansión es serie respecto a la base (2.8):

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_{kj}\, \mathbf{U}_1^k\, \mathbf{U}_2^j 1$$

cuyos coeficientes satisfacen que $\{\beta_{kj}\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$. Aplicando el isomorfismo $V$ a $g$ y usando las ecuaciones (2.15) tenemos que

$$Vg = V(P_{\mathcal{M}} g) = V\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_{kj}\, \mathbf{U}_1^k\, \mathbf{U}_2^j (P_{\mathcal{M}} 1) \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_{kj}\, \mathbf{U}_1^k|_{\mathcal{N}}\, \mathbf{U}_2^j|_{\mathcal{N}} V(P_{\mathcal{N}} 1).$$

Sea $h = V(P_{\mathcal{N}} 1)$ y notemos que $\operatorname{supp}(g) \subseteq E_1 \setminus E_2$ y $\operatorname{supp}(h) \subseteq E_2$. Entonces,

$$Vg = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_{kj}\, \mathbf{U}_1|_{\mathcal{N}}^k\, \mathbf{U}_2|_{\mathcal{N}}^j\, h = gh = 0.$$

Como $V$ es un isomorfismo, en particular inyectivo, concluimos que $g = 0$. Haciendo un cálculo similar se puede demostrar que $\chi_{E_2 \setminus E_1} = 0$. Luego, $|E_2 \setminus E_1| = 0 = |E_1 \setminus E_2|$, y por lo tanto $\chi_{E_1}(z_1, z_2)$ coincide con $\chi_{E_2}(z_1, z_2)$ para casi todo punto $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$. En consecuencia, $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

El resto de la demostración es igual a la del Teorema 2.31. ∎

Hasta ahora vimos que si fijamos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y dos operadores $T$ y $L$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, los Teoremas 2.31 y 2.32 dicen que todas las tuplas (unilaterales o bilaterales) que generan marcos de $\mathcal{H}$ iterando un solo vector son similares. En el Ejemplo 2.25 observamos que esto no es cierto cuando se itera más de un vector.

Con respecto a la pregunta que nos planteamos al inicio de la sección referente a si existe alguna relación entre $\#I$ y el número de clases de equivalencia inducidas por la relación (2.9) definida al comienzo de esta sección, probamos que si $\#I = 1$ y $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, entonces existe una única clase de equivalencia. Sin embargo, una pequeña modificación del Ejemplo 2.25 muestra que para $\#I = n > 1$ existen infinitas clases de equivalencia. De hecho, supongamos que $n > 1$ y que $\mathcal{V}_n \neq \emptyset$. Consideremos $\{v_i\}_{i\in I} \in \mathcal{V}_n$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces, para $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenemos que $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{av_1 + bv_2\} \in \mathcal{V}_{n+1}$. Al igual que en el Ejemplo 2.25, se puede ver que cada conjunto de vectores $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{av_1 + bv_2\}$ pertenece a una clase de equivalencia distinta. Luego, existen infinitas clases cuando iteramos conjuntos de tres o más vectores. Esta misma idea se aplica para dos generadores, ya que si $v \in \mathcal{V}_1$, $\{v, av\} \in \mathcal{V}_2$ para cada $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y todos ellos pertenecen a distintas clases de equivalencia.

# Capítulo 3

# Caracterización de subespacios invariantes por dos shift con multiplicidad

El objetivo de este capítulo es estudiar y dar una descripción de los subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen al shift bilateral con multiplicidad $\mathbf{U}$ y son invariantes por el operador $\widehat{\mathbf{S}}$ dado en la Definición 2.5. La necesidad se estudiar este tipo de subespacios surgió a partir del problema de encontrar una caracterización de las tuplas unilaterales de la forma $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ que generan un marco del correspondiente espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que estudiamos en el Capítulo 2.

Recordemos que vimos en el Teorema 2.14 que cualquier tupla unilateral $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ genera un marco del correspondiente espacio $\mathcal{H}$ si y solo si es similar (ver Definición 2.1) a una única tupla unilateral básica $(\mathcal{N}, \mathbf{U}|_{\mathcal{N}}, \mathbf{A}, \{\varphi_i\}_{i\in I})$, siendo $\mathcal{N}$ un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ que reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}^*$, $\mathbf{A}$ es la compresión de $\widehat{\mathbf{S}}$ a $\mathcal{N}$ y $\varphi_i = P_{\mathcal{N}}\delta_i$ para todo $i \in I$ con $\{\delta_i\}_{i\in I}$ la base canónica de $\ell^2(I)$ (ver Definición 2.10)).

Por otro lado, vimos en el Teorema 2.23 que toda tupla bilateral $(\mathcal{H}, T, L, \{v_i\}_{i\in I})$ genera un marco de $\mathcal{H}$ si y solo si es similar a una única tupla básica bilateral de la forma $(\mathcal{N}, \mathbf{U}_1|_{\mathcal{N}}, \mathbf{U}_2|_{\mathcal{N}}, \{\varphi_i\}_{i\in I})$, donde $\mathcal{N}$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T}^2, \ell^2(I))$ que reduce a los shift bilaterales $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ dados en la Definición 2.18. Se sabe que para este tipo de subespacios existe una caracterización en términos de funciones rango, la cual fue dada por Bownik y Ross en [20] y es una generalización del Teorema 1.48 que enunciamos en la sección de preliminares de esta tesis.

Notemos que al encontrar una descripción de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen a $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$, en particular, tendremos caracterizados los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ que reducen a $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}^*$.

La idea para demostrar nuestro resultado consistirá en usar la descripción de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen a $\mathbf{U}$ a través de funciones rango (ver Teorema 1.48) y luego usar el Teorema de Beurling-Lax-Halmos (Teorema 1.64) que caracteriza a los subespacios de $H^2_{\mathcal{K}}$ que son invariantes por $\mathbf{S}$.

Para comenzar, recordemos que si $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ es un subespacio que reduce a $\mathbf{U}$, entonces existe una función rango medible $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ en $H^2_{\mathcal{K}}$ asociada a $\mathcal{M}$ (ver Teorema 1.48). Por otro lado, si asumimos que $\mathcal{M}$ es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$, como $\widehat{\mathbf{S}}$ es una isometría pura, se puede construir un subespacio wandering $\mathcal{R}$ para $\widehat{\mathbf{S}}$ a partir de $\mathcal{M}$ (ver Teorema 1.73). Más aún, tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.1.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ un subespacio de reduce a $\mathbf{U}$ con función rango $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ en $H^2_{\mathcal{K}}$.*

*i) $\mathcal{M}$ es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$ si y solo si $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ es invariante por $\mathbf{S}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

*ii) Si $\mathcal{M}$ es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$, donde $\mathcal{R} = \mathcal{M} \ominus \widehat{\mathbf{S}}(\mathcal{M})$ es un subespacio wandering para $\widehat{\mathbf{S}}$ que reduce a $\mathbf{U}$. Además, la función rango correspondiente a $\mathcal{R}$, $\lambda \mapsto \mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda) = \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \ominus \mathbf{S}(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda))$ satisface que*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)), \tag{3.1}$$

*y $\dim(\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)) \leq \dim(\mathcal{K})$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

*Demostración. i)* Sea $\mathcal{A} \subset L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ un conjunto de generadores de $\mathcal{M}$ a lo sumo numerable, es decir, $\mathcal{M} = \overline{\operatorname{gen}}\left\{\mathbf{U}^k\varphi : k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathcal{A}\right\}$. Por el Teorema 1.48, para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ se tiene que $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \overline{\operatorname{gen}}\,\{\varphi(\lambda) : \varphi \in \mathcal{A}\}$.

Ahora, si $\mathcal{M}$ es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$, entonces para toda $\varphi \in \mathcal{A}$ tenemos que $\widehat{\mathbf{S}}\varphi \in \mathcal{M}$. Luego, $(\widehat{\mathbf{S}}\varphi)(\lambda) = \mathbf{S}(\varphi(\lambda)) \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Finalmente, por la linealidad y la continuidad de $\mathbf{S}$, tenemos que

$$\mathbf{S}(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)) \subseteq \overline{\operatorname{gen}}\,\{\mathbf{S}(\varphi(\lambda)) : \varphi \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda).$$

El recíproco es consecuencia inmediata del Teorema 1.48.

*ii)* Como $\widehat{\mathbf{S}}$ es una isometría pura (ver Proposición 2.7), por el Teorema 1.73 tenemos que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{S}}^j(\mathcal{R}),$$

donde $\mathcal{R} = \mathcal{M} \ominus \widehat{\mathbf{S}}(\mathcal{M})$ es un subespacio wandering para $\widehat{\mathbf{S}}$. Por el ítem *vi)* del Lema 1.63 tenemos que $\mathcal{R}$ reduce a $\mathbf{U}$ y su correspondiente función rango $\lambda \mapsto \mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)$ viene dada por $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda) = \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \ominus \mathbf{S}(\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda))$. Dado que $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ es invariante por $\mathbf{S}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, y $\mathbf{S}$ es una isometría pura, tenemos que $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)$ es un subespacio wandering para $\mathbf{S}$ y

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)), \tag{3.2}$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Finalmente, del Lema 1.75 se deduce que $\dim(\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)) \leq \dim(\mathcal{K})$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. ∎

Un primer intento para obtener una descripción de los subespacios cerrados $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen a $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$ es aplicar directamente el Teorema de Beurling-Lax-Halmos (Teorema 1.64) a cada subespacio $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) \subseteq H^2_{\mathcal{K}}$, $\lambda \in \mathbb{T}$. Haciendo esto, tendríamos que para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, existen subespacios $\mathcal{K}_\lambda \subseteq \mathcal{K}$ y funciones $\mathcal{B}(\mathcal{K})$-valuadas $F_\lambda : \mathbb{T} \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{K})$ con $F_\lambda \in \mathcal{F}_0$ tales que para todo $z \in \mathbb{T}$, $F_\lambda(z) : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ es una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{K}_\lambda$, de forma tal que que se satisface

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \widehat{F_\lambda}(H^2_{\mathcal{K}_\lambda}).$$

Sin embargo, para dar una caracterización de $\mathcal{M}$ requerimos que las funciones $\lambda \mapsto F_\lambda$ y $\lambda \mapsto K_\lambda$ sean medibles, y además necesitamos cierta *uniformidad* en las propiedades que ellas verifican. Con la finalidad de cumplir con estas condiciones vamos a construir estas funciones sistemáticamente usando las propiedades de $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$.

## 3.1 Subespacios full-Hardy

Con el objetivo de entender la estructura de todos los subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen a $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$, nos dedicaremos a estudiar en esta sección una subclase de ellos: aquellos subespacios que reducen a ambos operadores $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$ simultáneamente, los cuales llamaremos subespacios *full-Hardy*. Más adelante quedará claro el término utilizado. Para dar una definición apropiada de los subespacios full-Hardy, necesitamos demostrar el siguiente lema.

**Lema 3.2.** *Sea $\mathcal{J}$ una función rango en $\mathcal{K}$. Entonces, $\mathcal{J}$ es medible si y solo si $\lambda \mapsto H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ es una función rango medible en $H^2_{\mathcal{K}}$.*

*Demostración.* Por la Observación 1.72 sabemos que $\mathbf{S} : H^2_{\mathcal{J}(\lambda)} \to H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ es una isometría pura y

$$H^2_{\mathcal{J}(\lambda)} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(\mathcal{J}(\lambda)), \tag{3.3}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, entendiendo a $\mathcal{J}(\lambda)$ como el subespacio de $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ dado por

$$\mathcal{J}(\lambda) = H^2_{\mathcal{J}(\lambda)} \ominus \mathbf{S}(H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}). \tag{3.4}$$

Si asumimos que $\lambda \mapsto \mathcal{J}(\lambda)$ es medible, tenemos por el Teorema 1.48 y *ii*) del Lema 1.52 que $\lambda \mapsto \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbf{S}^j(\mathcal{J}(\lambda))$ es medible, con lo cual $\lambda \mapsto H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ dada por (3.3) es medible.

Por otro lado, de *ii*) y *vi*) del Lema 1.63 se deduce que $\mathcal{J}(\lambda)$ dada por la ecuación (3.4) es medible.

∎

**Definición 3.3.** Sea $\mathcal{J}$ una función rango medible en $\mathcal{K}$. El subespacio *full-Hardy* con *base* $\mathcal{J}$ es el único subespacio cerrado $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reduce a $\mathbf{U}$ y cuya función rango está dada por $\lambda \mapsto H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

Esta definición tiene sentido porque, dada una función rango medible $\mathcal{J}$ en $\mathcal{K}$, por el Lema 3.2, sabemos que la función $\lambda \mapsto H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ es una función rango medible en $H^2_{\mathcal{K}}$.

A continuación veremos que el complemento ortogonal de un subespacio full-Hardy también es full-Hardy.

**Proposición 3.4.** *Si $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ es un subespacio full-Hardy, entonces $\mathcal{W}^\perp$ también es un subespacio full-Hardy.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{W}$ es full-Hardy con base $\mathcal{J}$ para $\mathcal{J}$ una función rango medible en $\mathcal{K}$. Por i) del Lema 1.52, la función rango medible de $\mathcal{W}^\perp$ está dada por $\lambda \mapsto (H^2_{\mathcal{J}(\lambda)})^\perp$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Ahora, como $(H^2_{\mathcal{J}(\lambda)})^\perp = H^2_{\mathcal{J}(\lambda)^\perp}$ (ver Observación 3.5), si denotamos por $\mathcal{J}^\perp$ a la función rango dada por $\mathcal{J}^\perp(\lambda) = (\mathcal{J}(\lambda))^\perp$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ (la cual es medible por el Lema 3.2), tenemos que $\mathcal{W}^\perp$ es el subespacio full-Hardy con base $\mathcal{J}^\perp$. ■

*Observación* 3.5. Dado un subespacio cerrado $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$, tenemos la descomposición ortogonal $H^2_{\mathcal{K}} = H^2_{\mathcal{K}_1} \oplus (H^2_{\mathcal{K}_1})^\perp = H^2_{\mathcal{K}_1} \oplus H^2_{\mathcal{K}_1^\perp}$, y en consecuencia $(H^2_{\mathcal{K}_1})^\perp = H^2_{\mathcal{K}_1^\perp}$. El hecho de que ambas componentes sean invariantes por $\mathbf{S}$ implica que $H^2_{\mathcal{K}_1}$ reduce a $\mathbf{S}$. Más aún, estos son los únicos subespacios de $H^2_{\mathcal{K}}$ que reducen a $\mathbf{S}$ (ver [49, Teorema 3.22]).

Como se mencionó al comienzo de la sección, los subespacios full-Hardy, son aquellos que reducen ambos operadores $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$. Demostramos esto en el siguiente teorema.

**Teorema 3.6.** *Sea $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ un subespacio cerrado. Entonces, $\mathcal{W}$ reduce a $\boldsymbol{U}$ y a $\widehat{\mathbf{S}}$ simultáneamente si y solo si $\mathcal{W}$ es un subespacio full Hardy.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{W}$ reduce a $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$ simultáneamente y su correspondiente función rango medible es $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}$ en $H^2_{\mathcal{K}}$. Por *i*) del Lema 3.1 y i) del Lema 1.52, tenemos que $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda) \subseteq H^2_{\mathcal{K}}$ reduce a $\mathbf{S}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ (como $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}^\perp$ son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$, entonces $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda)$ y $\mathcal{J}_{\mathcal{W}^\perp}(\lambda) = (\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda))^\perp$ son invariantes por $S$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$). Como se discutió en la Observación 3.5, esto implica que $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda) = H^2_{\mathcal{K}_\lambda}$, donde $\mathcal{K}_\lambda$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Como $\mathcal{J}_{\mathcal{W}} : \lambda \mapsto H^2_{\mathcal{K}_\lambda}$ es medible, por el Lema 3.2 $\mathcal{J} : \lambda \mapsto \mathcal{K}_\lambda$ también es medible. Concluimos que $\mathcal{W}$ es un full-Hardy con base $\mathcal{J}$.

Recíprocamente, si $\mathcal{W}$ es un subespacio full-Hardy con base $\mathcal{J}$, para $\mathcal{J}$ una función rango medible en $\mathcal{K}$, por la Proposición 3.4 y *i*) del Lema 3.1 tenemos que $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}^\perp$ son claramente invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$. Por lo tanto, $\mathcal{W}$ reduce a $\widehat{\mathbf{S}}$.

■

*Observación* 3.7.

i) Sea $\mathcal{J}$ una función rango medible en $\mathcal{K}$, sea $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ un subespacio full-Hardy con base $\mathcal{J}$ y sea $\mathcal{R}$ el subespacio wandering para $\widehat{\mathbf{S}}$ asociado a $\mathcal{W}$, es decir, $\mathcal{R} = \mathcal{W} \ominus \widehat{S}(\mathcal{W})$. Por *ii*) del Lema 3.1 sabemos que $\mathcal{R}$ reduce a $\mathbf{U}$ y que su función rango está dada por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda) = \mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda) \ominus \mathbf{S}(\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda)) = H^2_{\mathcal{J}(\lambda)} \ominus \mathbf{S}(H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}) = \mathcal{J}(\lambda) \tag{3.5}$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, donde $\mathcal{J}(\lambda) \subseteq \mathcal{K} \subseteq H^2_{\mathcal{K}}$ se entiende como un subespacio de $H^2_{\mathcal{K}}$ de funciones constantes. Esto implica que el subespacio wandering para $\widehat{\mathbf{S}}$ asociado a un subespacio full-Hardy puede ser pensado como un subespacio de $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reduce a $\mathbf{U}$.

ii) Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{M}_i \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ un subespacio invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$ y sea $\mathcal{R}_i$ el subespacio wandering para $\widehat{\mathbf{S}}$ asociado a $\mathcal{M}_i$, es decir, $\mathcal{R}_i = \mathcal{M}_i \ominus \widehat{S}(\mathcal{M}_i)$. Supongamos que existe una isometría $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que conmuta con $\widehat{\mathbf{S}}$ y $\mathbf{U}$ tal que $\mathcal{M}_1 \simeq_\Phi \mathcal{M}_2$. Entonces, por el Lema 1.74, tenemos que $\mathcal{R}_1 \simeq_\Phi \mathcal{R}_2$. Ahora, como $\Phi$ conmuta con $\mathbf{U}$, entonces $\Phi = \widehat{F} \in \widehat{\mathcal{F}}$ (ver Proposición 1.62). Además, por *iv*) y *viii*) del Lema 1.63 obtenemos que $F(\lambda)$ es una isometría que satisface $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_1}(\lambda) \simeq_{F(\lambda)} \mathcal{J}_{\mathcal{R}_2}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

En particular, sean $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ dos subespacios full-Hardy con funciones rango base $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$, respectivamente, que cumplen que $\mathcal{W}_1 \simeq_\Phi \mathcal{W}_2$, donde $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ es una isometría que conmuta con $\widehat{\mathbf{S}}$ y $\mathbf{U}$. Entonces si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son los subespacios wandering para $\widehat{\mathbf{S}}$ asociados a $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ respectivamente, tenemos que $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_1}(\lambda) \simeq \mathcal{J}_{\mathcal{R}_2}(\lambda)$ isométricamente para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, pero esto implica (por (3.5)) que las funciones rango base satisfacen $\mathcal{J}(\lambda) \simeq \mathcal{J}(\lambda)$ isométricamente para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

En la siguiente proposición veremos los subespacios full-Hardy están íntimamente relacionados con las isometrías parciales actuando en $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que conmutan con $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$.

**Proposición 3.8.** *Si $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ es una isometría parcial que conmuta con $\boldsymbol{U}$ y $\widehat{\boldsymbol{S}}$, entonces el espacio inicial de $\Phi$ es full Hardy.*

Antes de la prueba, veamos que vale el siguiente lema.

**Lema 3.9.** *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría y $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{M}$ que conmuta con $T$. Entonces $\mathcal{M}$ reduce a $T$.*

*Demostración.* Observamos que si $f \in \mathcal{M}^\perp$, entonces $0 = T(Vf) = V(Tf)$ implica que $Tf \in \ker(V) = \mathcal{M}^\perp$. Luego, $\mathcal{M}^\perp$ es invariante por $T$. Por otro lado, si $f \in \mathcal{M}$ entonces,

$$\|V(Tf)\| = \|T(Vf)\| = \|Vf\| = \|f\| = \|Tf\|.$$

Por lo tanto, $V$ preserva la norma de $Tf$ con lo cual $Tf$ está en el espacio inicial de $V$. Concluimos que $\mathcal{M}$ reduce a $T$. ■

*Demostración de la Proposición 3.8.* Sea $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ el espacio inicial de $\Phi$. Vamos a aplicar dos veces el Lema 3.9. Primero a $\mathbf{U}$ y $\Phi$, de donde concluimos que $\mathcal{W}$ reduce a $\mathbf{U}$, y luego a $\widehat{\mathbf{S}}$ y $\Phi$, con lo cual $\mathcal{W}$ reduce a $\widehat{\mathbf{S}}$. En consecuencia, por el Teorema 3.6, $\mathcal{W}$ es un subespacio full-Hardy.

∎

## 3.2 Subespacios que reducen a U y son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$

En la sección anterior demostramos que los subespacios full-Hardy son los únicos subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen a $\mathbf{U}$ y a $\widehat{\mathbf{S}}$ simultáneamente. En el siguiente teorema mostramos que cualquier otro subespacio que reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$ debe ser isométricamente isomorfo a un subespacio full-Hardy.

**Teorema 3.10.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ un subespacio cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) $\mathcal{M}$ reduce a $\boldsymbol{U}$ y es invariante por $\widehat{\boldsymbol{S}}$.*

*ii) Existe un subespacio full-Hardy $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ y una isometría parcial $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ con espacio inicial $\mathcal{W}$ que conmuta con $\boldsymbol{U}$ y $\widehat{\boldsymbol{S}}$ tal que $\mathcal{W} \simeq_{\Phi} \mathcal{M}$.*

*Demostración.*
*i)* $\Rightarrow$ *ii)* Supongamos que $\mathcal{M}$ reduce a $\mathbf{U}$ y es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$. La idea es encontrar un subespacio full-Hardy $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ y una isometría parcial $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ con espacio inicial $\mathcal{W}$ que conmuta con $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$ tal que $\mathcal{W} \simeq_{\Phi} \mathcal{M}$. Notar que como $\Phi$ debe conmutar con $\mathbf{U}$, por la Proposición 1.62 tenemos que $\Phi \in \widehat{\mathcal{F}}$, es decir, $\Phi = \widehat{F}$ para alguna $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(H^2_{\mathcal{K}})$ perteneciente a la clase $\mathcal{F}$ (ver Subsección 1.4.3). Sea $\mathcal{R}$ el subespacio wandering para $\widehat{\mathbf{S}}$ asociado a $\mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{R} = \mathcal{M} \ominus \widehat{\mathbf{S}}(\mathcal{M})$. Como $\mathcal{M}$ y $\mathcal{W}$ son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$, por el ítem ii) de la Observación 3.7, deducimos que la función rango base $\mathcal{J}$ de $\mathcal{W}$ debe cumplir que $\mathcal{J}(\lambda) \simeq_{F(\lambda)} \mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

El objetivo de la demostración será construir una función rango medible $\mathcal{J}$ en $\mathcal{K}$ tal que $\dim(\mathcal{J}(\lambda)) = \dim(\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda))$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ y una función medible $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(H^2_{\mathcal{K}})$ con $\|F\|_\infty < \infty$ tal que para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, $F(\lambda)$ sea una isometría parcial con espacio inicial $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ que conmuta con $\mathbf{S}$ y satisface que

$$F(\lambda)(H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}) = \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda). \tag{3.6}$$

Como la dimensión de $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(\lambda)$ podría variar con $\lambda \in \mathbb{T}$, consideraremos los conjuntos medibles $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ y las funciones $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ dadas por el Lema 1.54 aplicado al subespacio $\mathcal{R}$.

Fijamos una base ortonormal $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$ donde $I = \{1, ..., k\}$ en el caso que $\dim(\mathcal{K}) = k \in \mathbb{N}$ o $I = \mathbb{N}$ si $\dim(\mathcal{K}) = \infty$. Para todo $n \in I$, definimos los subespacios $\mathcal{K}_n = \text{gen}\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ y $\mathcal{K}_0 = \{0\}$. Construimos una función rango $\mathcal{J}$ en $\mathcal{K}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{J}(\lambda) = \begin{cases} \mathcal{K}_n & \text{si } \lambda \in A_n,\ n \in I, \\ \mathcal{K} & \text{si } \lambda \in A_\infty. \end{cases}$$

Es claro que $\mathcal{J}$ es medible ya que es constante en cada subconjunto medible $A_n$ de la partición de $\mathbb{T}$. Además, tenemos que $\dim(\mathcal{J}_\mathcal{R}(\lambda)) = \dim(\mathcal{J}(\lambda))$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$ por la definición de $\mathcal{J}$, pues $A_n = \{\lambda \in \mathbb{T} : \dim(\mathcal{J}_\mathcal{R}(\lambda)) = n\}$. Sea $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_\mathcal{K})$ el subespacio full-Hardy con base $\mathcal{J}$.

Para construir $F$ de manera que se cumpla (3.6), procedemos de la siguiente manera: para casi todo $\lambda \in A_0$, definimos $F(\lambda) \equiv 0$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Observamos que de (3.2) podemos deducir que para casi todo $\lambda \in A_n$, el sistema $\{\mathbf{S}^j\varphi_i(\lambda) : i = 1, ..., n,\ j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda)$. Por otro lado, para casi todo $\lambda \in A_n$, tenemos que $\{\mathbf{S}^j\varepsilon_i : i = 1, ..., n,\ j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortonormal de $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$. Luego, para casi todo $\lambda \in A_n$, definimos $F(\lambda) : H^2_{\mathcal{J}(\lambda)} \to \mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda)$ por

$$F(\lambda)(\mathbf{S}^j\varepsilon_i) = \mathbf{S}^j\varphi_i(\lambda), \quad i = 1, ..., n\ \ j \in \mathbb{N}_0, \tag{3.7}$$

y lo extendemos por linealidad a todo $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$. Para $n = \infty$, procedemos de forma similar: para casi todo $\lambda \in A_\infty$, el sistema $\left\{\mathbf{S}^j\varphi_i(\lambda) : i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\right\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{J}_\mathcal{M}(\lambda)$, y $\left\{\mathbf{S}^j\varepsilon_i : i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\right\}$ es una base ortonormal de $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$. Luego, definimos $F(\lambda)$ como en (3.7) para todo $i \in \mathbb{N}$.

Ahora, para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, definimos $F(\lambda)f = 0$ para toda $f \in H^2_\mathcal{K} \ominus H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$, obteniendo que el operador $F(\lambda) : H^2_\mathcal{K} \to H^2_\mathcal{K}$ es una isometría parcial con espacio inicial $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ y la ecuación (3.6) se verifica. Finalmente, es claro que $F(\lambda)$ conmuta con $\mathbf{S}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.

Veamos que la función $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(H^2_\mathcal{K})$ que hemos construido pertenece a la clase $\mathcal{F}$. En efecto, $F$ satisface que $\|F\|_\infty < \infty$ ya que $\|F(\lambda)\|_{op} \leq 1$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Para probar que es una función medible necesitamos ver que la función compleja

$$\lambda \mapsto \langle F(\lambda)f, g\rangle_{H^2_\mathcal{K}} = \langle F(\lambda)P_{H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}}f, g\rangle_{H^2_\mathcal{K}} \tag{3.8}$$

es medible para cada $f, g \in H^2_\mathcal{K}$. Vamos a probar la medibilidad en cada conjunto de la partición medible $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ de $\mathbb{T}$. En el conjunto $A_0$ es claro que $F(\lambda) \equiv 0$ es medible. Luego, fijamos $n \in \mathbb{N}$. Para casi todo $\lambda \in A_n$ y para $f \in H^2_\mathcal{K}$, tenemos que

$$P_{H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}}f = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle f, S^j\varepsilon_i\rangle_{H^2_\mathcal{K}}\mathbf{S}^j\varepsilon_i.$$

Usando la linealidad y continuidad de $F(\lambda)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\langle F(\lambda)P_{H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}} f, g\rangle_{H^2_{\mathcal{K}}} &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle f, \mathbf{S}^j\varepsilon_i\rangle_{H^2_{\mathcal{K}}}\,\langle F(\lambda)(\mathbf{S}^j\varepsilon_i), g\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle f, \mathbf{S}^j\varepsilon_i\rangle_{H^2_{\mathcal{K}}}\,\langle \mathbf{S}^j\varphi_i(\lambda), g\rangle.\end{aligned}$$

Entonces, (3.8) es medible para cada $f, g \in H^2_{\mathcal{K}}$ ya que la función

$$\lambda \mapsto \langle \mathbf{S}^j\varphi_i(\lambda), g\rangle = \langle (\widehat{\mathbf{S}}^j\varphi_i)(\lambda), g\rangle$$

es medible para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y $i = 1, ..., n$.

Si $n = \infty$, consideramos

$$P_{H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}} f = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\langle f, \mathbf{S}^j\varepsilon_i\rangle_{H^2_{\mathcal{K}}}\mathbf{S}^j\varepsilon_i$$

y repetimos el cálculo anterior.

Sea $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ la función definida por $\Phi = \widehat{F}$ (y por lo tanto $\Phi$ conmuta con $\mathbf{U}$). Como $F(\lambda)$ conmuta con $\mathbf{S}$ entonces $\Phi$ conmuta con $\widehat{\mathbf{S}}$. Finalmente, como $F(\lambda)$ es una isometría con espacio inicial $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ y se cumple (3.6) para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, concluimos por v) y viii) del Lema 1.63 que $\Phi$ es una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{W}$ y $\Phi(\mathcal{W}) = \mathcal{M}$.

*ii*) $\Rightarrow$ *i*) Supongamos que $\mathcal{W}$ es un subespacio full-Hardy con función rango base $\mathcal{J}$. Por el Teorema 3.6, tenemos que $\mathcal{W}$ reduce a $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$ simultáneamente. Entonces, como $\Phi$ conmuta con $\widehat{\mathbf{S}}$ y $\mathcal{M} = \Phi(\mathcal{W})$ obtenemos que

$$\widehat{\mathbf{S}}(\mathcal{M}) = \widehat{\mathbf{S}}\,\Phi(\mathcal{W}) = \Phi\,\widehat{\mathbf{S}}(\mathcal{W}) \subseteq \Phi(\mathcal{W}) = \mathcal{M},$$

con lo cual $\mathcal{M}$ es invariante por $\widehat{\mathbf{S}}$. Análogamente, se puede ver que $\mathcal{M}$ reduce a $\mathbf{U}$ dado que $\Phi$ también conmuta con $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^*$. ∎

Tomando $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ en el Teorema 3.10, podemos deducir una caracterización de los subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{T}, H^2)$ que reducen a $\mathbf{U}$ y son invariantes por $\widehat{S}$ (notar que $S$ es el shift sin multiplicidad actuando en $H^2$), la cual es similar a la caracterización dada por Beurling para los subespacios de $H^2$ que son invariantes por $S$ (ver Teorema 1.23).

**Corolario 3.11.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2)$ un subespacio cerrado. Las siguientes son equivalentes:*

*i) $\mathcal{M}$ reduce a $\boldsymbol{U}$ y es invariante por $\widehat{S}$,* *ii)* *Existe $\phi \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$ tal que $\phi(\lambda)$ es inner para casi todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{M})$ y*

$$\mathcal{M} = \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2) = \left\{\phi f : f \in L^2(\mathbb{T}, H^2)\right\},$$

*donde $\sigma(\mathcal{M})$ es el espectro de $\mathcal{M}$ (ver Definición 1.50).*

*Demostración.*
*i)* $\Rightarrow$ *ii)* Eligiendo $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ en el Teorema 3.10, tenemos que existe un subespacio full-Hardy $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2)$ y una isometría parcial $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2) \to L^2(\mathbb{T}, H^2)$ con espacio inicial $\mathcal{W}$ que conmuta con $\mathbf{U}$ y $\widehat{S}$ tal que $\mathcal{M} = \Phi(\mathcal{W})$.

Observando que $\Phi = \widehat{F}$, con $F \in \mathcal{F}$, dado que $\Phi$ es una isometría con espacio inicial $\mathcal{W}$, tenemos por el ítem *v)* del Lema 1.63 que $F(\lambda)$ es una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda)$. Como

$$F(\lambda)(\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda)) = \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$$

(ver (3.6)), tenemos entonces que $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda) \simeq_{F(\lambda)} \mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Esto implica que $\sigma(\mathcal{W}) = \sigma(\mathcal{M}) =: E$. Sea $\mathcal{J}$ la función rango en $\mathbb{C}$ para la cual $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(\lambda) = H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Notar que la función rango medible $\mathcal{J}$ en $\mathbb{C}$ es de la forma $\mathcal{J}(\lambda) = \chi_E(\lambda)\,\mathbb{C}$ y por lo tanto, $H^2_{\mathcal{J}(\lambda)} = \chi_E(\lambda)\, H^2$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, con lo cual

$$\mathcal{W} = \left\{f \in L^2(\mathbb{T}, H^2) : f(\lambda) \in \chi_E(\lambda)\, H^2\right\} = \chi_E\, L^2(\mathbb{T}, H^2).$$

Ahora, como $F(\lambda)$ conmuta con $S$, para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, existe una función $h_\lambda \in H^\infty$ tal que $F(\lambda) = M_{h_\lambda}$, donde $M_{h_\lambda}(f) = h_\lambda f$ para $f \in H^2$ (ver [49, Teorema 3.4]). Más aún, como $F(\lambda)$ es una isometría parcial con espacio inicial $\chi_E(\lambda)\, H^2$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, entonces $h_\lambda \equiv 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T} \setminus E$, y para casi todo $\lambda \in E$ se cumple que $|h_\lambda(z)| = 1$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$ (es decir, $h_\lambda$ es una función inner). Usando la medibilidad de $\lambda \mapsto F(\lambda)$ obtenemos que $\lambda \mapsto h_\lambda = F(\lambda)1$ es una función medible. Por lo tanto, si definimos $\phi(\lambda) = h_\lambda$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$, obtenemos que $\phi \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$. Finalmente, veamos que $\Phi = M_\phi$, con $M_\phi(f) = \phi f$ para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$. En efecto, para $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$ y para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$,

$$(\Phi f)(\lambda) = F(\lambda) f(\lambda) = h_\lambda f(\lambda) = \phi(\lambda) f(\lambda) = (\phi f)(\lambda) = M_\phi(f)(\lambda).$$

En consecuencia, $\mathcal{M} = \Phi(\mathcal{W}) = \phi \chi_E\, L^2(\mathbb{T}, H^2) = \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2)$ como queríamos probar.

*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Supongamos que $\mathcal{M} = \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2)$ con $\phi \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$ tal que $\phi(\lambda)$ es una función inner para casi todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{M})$, entonces

$$\widehat{S}(\mathcal{M}) = \widehat{S}\, \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2) = \phi\, \widehat{S}\, L^2(\mathbb{T}, H^2) \subseteq \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2) = \mathcal{M}.$$

Análogamente, se puede ver que $\mathbf{U}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathbf{U}^*(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. ■

El siguiente resultado que describe las funciones rango asociadas a los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2)$ que son de la forma $\mathcal{M} = \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2)$ para alguna $\phi \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$.

**Proposición 3.12.** *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$. Si $\mathcal{M} = \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2)$, entonces la función rango medible asociada a $\mathcal{M}$ está dada por*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \phi(\lambda)\, H^2$$

*para casi todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.8 tenemos que $\{U^k \widehat{S}^j 1 : k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, H^2)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{M} = \phi\, L^2(\mathbb{T}, H^2) = \overline{\text{gen}}\left\{U^k \widehat{S}^j \phi : k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Luego, por el Teorema 1.48, la función rango medible correspondiente a $\mathcal{M}$ viene dada por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\lambda) = \overline{\text{gen}}\left\{S^j \phi(\lambda) : j \in \mathbb{N}_0\right\} = \overline{\text{gen}}\left\{\phi(\lambda)\, S^j 1 : j \in \mathbb{N}_0\right\} = \phi(\lambda)\, H^2.$$

∎

En los siguientes teoremas demostramos que las caracterizaciones dadas en el Teorema 3.10 y el Corolario 3.11 son únicas, módulo una isometría parcial que cumple las propiedades que se mencionan a continuación.

**Teorema 3.13.** *Sean $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ dos subespacios full-Hardy y $\Phi_1, \Phi_2 : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ dos isometrías parciales con espacios iniciales $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, respectivamente. Supongamos que $\Phi_1$ y $\Phi_2$ conmutan con $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$ y que $\Phi_1(\mathcal{W}_1) = \Phi_2(\mathcal{W}_2)$. Entonces, existe una isometría parcial $\Psi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ con espacio inicial $\mathcal{W}_2$ que conmuta con $\mathbf{U}$ y con $\widehat{\mathbf{S}}$ tal que $\Psi(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_1$ y $\Phi_2 = \Phi_1\Psi$.*

*Demostración.* Sea $\Psi := (\Phi_1|_{\mathcal{W}_1})^{-1}\Phi_2$. El operador $\Psi$ está bien definido en $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ y satisface que $\Psi(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_1$ y $\Phi_2 = \Phi_1\Psi$. Más aún, $\Psi$ es una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{W}_2$. En efecto, para $f \in \mathcal{W}_2$, tenemos que $\|f\| = \|\Phi_2(f)\| = \|\Phi_1(\Psi(f))\| = \|\Psi(f)\|$, y para $f \in \mathcal{W}_2^{\perp}$, $\Psi(f) = 0$.

Veamos ahora que $\Psi$ conmuta con $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$. Usando que $\Phi_2 = \Phi_1\Psi$ y que $\Phi_1$ y $\Phi_2$ conmutan con $\mathbf{U}$, tenemos para toda $f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que

$$\Phi_2\mathbf{U}f = \Phi_1\Psi\,\mathbf{U}f \quad \text{y} \quad \Phi_2\mathbf{U}f = \mathbf{U}\,\Phi_2 f = \mathbf{U}\,\Phi_1\Psi f = \Phi_1\mathbf{U}\,\Psi f.$$

Luego, $\Phi_1\Psi\,\mathbf{U}f = \Phi_1\mathbf{U}\,\Psi f$. Ahora, si $f \in \mathcal{W}_2$ entonces $\mathbf{U}\Psi f$ y $\Psi\mathbf{U}f$ pertenecen a $\mathcal{W}_1$ y como $\Phi_1$ es inyectiva en $\mathcal{W}_1$ (por ser isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{W}_1$) tenemos que $\Psi\mathbf{U}f = \mathbf{U}\Psi f$. Por otro lado, si $f \in \mathcal{W}_2^{\perp}$ entonces $\mathbf{U}\Psi f = 0 = \Psi\mathbf{U}f$, ya que $\mathcal{W}_2$ es el espacio inicial de $\Psi$ y reduce a $\mathbf{U}$. La conmutatividad de $\Psi$ con $\widehat{\mathbf{S}}$ se demuestra de forma análoga, reemplazando $\mathbf{U}$ por $\widehat{\mathbf{S}}$. ∎

**Teorema 3.14.** *Sean $\phi_1, \phi_2 \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$ dos funciones tales que $\phi_i(\lambda)$ es una función inner para casi todo $\lambda \in E_i := \operatorname{sop}(\phi_i)$ para $i = 1, 2$ y $\phi_1 L^2(\mathbb{T}, H^2) = \phi_2 L^2(\mathbb{T}, H^2)$. Entonces $E_1 = E_2 =: E$ y existe una función $\psi \in L^2(\mathbb{T}, H^2)$ tal que $\psi(\lambda)$ es una función inner para todo $\lambda \in E$ y $\phi_2 = \psi\phi_1$.*

*Demostración.* Como $\phi_1 L^2(\mathbb{T}, H^2) = \phi_2 L^2(\mathbb{T}, H^2)$, es claro que $E_1 = E_2 = E$. Además, sus funciones rango vienen dadas por $\phi_1(\lambda)H^2$ y $\phi_2(\lambda)H^2$, por la Proposición 3.12, y por lo tanto,

$$\phi_1(\lambda)H^2 = \phi_2(\lambda)H^2$$

para casi todo $\lambda \in E$. Como $\phi_1(\lambda)$ y $\phi_2(\lambda)$ son funciones inner para casi todo $\lambda \in E$, obtenemos por el Teorema 1.23 que para casi todo $\lambda \in E$, $\phi_1(\lambda)/\phi_2(\lambda) = c_\lambda$, donde $c_\lambda \in \mathbb{C}$ con $|c_\lambda| = 1$. La función $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} c_\lambda & \text{si } \lambda \in E, \\ 0 & \text{si } \lambda \in \mathbb{T} \setminus E \end{cases}$$

es la función buscada, ya que es medible (pues $\phi_1$ y $\phi_2$ lo son), $\psi(\lambda)$ es inner para todo $\lambda \in E$ y satisface $\phi_2 = \psi\phi_1$. ∎

## 3.3 Subespacios $\mathcal{D}$-invariantes

A lo largo de esta sección discutiremos como los resultados presentados en las Sección 3.2 se pueden enunciar con mayor generalidad, reemplazando el círculo $\mathbb{T}$ por un espacio de medida $\sigma$-finito $(\Omega, \mu)$ para el cual $L^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mu)$ es separable. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$, se define $L^2(\Omega, \mathcal{K})$ de la misma manera como en la Sección 1.4, donde las funciones $\mathcal{K}$-valuadas están definidas en $\Omega$.

**Definición 3.15.** Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{K})$. Se dice que $\mathcal{M}$ es *multiplicativamente invariante* si para cada $f \in \mathcal{M}$ y $\phi \in L^\infty(\Omega)$ se tiene que $\phi f \in \mathcal{M}$.

Para ver que se cumple la propiedad dada en la definición anterior, es suficiente ver que la invariancia se satisface para un subconjunto de $L^\infty(\Omega)$ llamado *conjunto determinante* (o *determining set*, en inglés).

**Definición 3.16.** Un subconjunto $\mathcal{D}$ de $L^\infty(\Omega)$ se dice un *conjunto determinante* para $L^1(\Omega)$ si para cada $f \in L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \phi f \, d\mu = 0 \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

**Ejemplo 3.17.** Si $\Omega = \mathbb{T}$ y $\mu = m$ es la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$, el sistema $\mathcal{D} := \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, donde $\gamma_k(\lambda) = \lambda^k$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, es un conjunto determinante para $L^1(\mathbb{T})$. Esto es consecuencia de la unicidad de los coeficientes asociados a una función $f \in L^1(\mathbb{T})$:

$$\widehat{f}(k) := \int_\mathbb{T} f(\lambda)\, \lambda^{-k}\, dm(\lambda) = 0 \quad \forall\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

**Definición 3.18.** Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{K})$. Se dice que $\mathcal{M}$ es *$\mathcal{D}$-invariante* con respecto a un conjunto determinante $\mathcal{D}$ para $L^1(\Omega)$ si para cada $f \in \mathcal{M}$ y $\phi \in \mathcal{D}$ se tiene que $\phi f \in \mathcal{M}$.

*Observación* 3.19. Notar que un subespacio $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ reduce al shift bilateral (con multiplicidad) $\mathbf{U}$ si y solo si es $\mathcal{D}$-invariante, con $\mathcal{D} := \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. En efecto, como $\mathbf{U}^k f = \gamma_k f$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que si $\mathcal{M}$ reduce a $\mathbf{U}$, entonces $\mathbf{U}^k f \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\gamma_k f \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, si $\mathbf{U}^k f = \gamma_k f \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, en particular, $\mathcal{M}$ reduce a $U$.

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 1.48.

**Teorema 3.20.** *([20, 19]) Sea $(\Omega, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finito tal que $L^2(\Omega)$ es separable. Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{K})$ un subespacio cerrado. Para cada conjunto determinante $\mathcal{D}$ para $L^1(\Omega)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i)* *$\mathcal{M}$ es multiplicativamente invariante.*

*ii)* *$\mathcal{M}$ es $\mathcal{D}$-invariante.*

*iii)* *Existe una función rango $\mathcal{J} : \Omega \mapsto \{$subespacios cerrados de $\mathcal{K}\}$ medible en el sentido que la función compleja $\omega \mapsto \langle P_{\mathcal{J}(\omega)} x, y\rangle_{\mathcal{K}}$ es medible para cualesquiera $x, y \in \mathcal{K}$, tal que*
$$\mathcal{M} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) : f(\omega) \in \mathcal{J}(\omega) \text{ para casi todo } \omega \in \Omega \right\}.$$

*Identificando las funciones que son iguales en casi todo punto $\omega \in X$, hay una correspondencia uno a uno entre los subespacios $\mathcal{D}$-invariantes y las funciones rango medibles en $\mathcal{K}$. Además, si existe $\mathcal{A} \subset L^2(X, \mathcal{K})$ a lo sumo numerable tal que*

$$\mathcal{M} = \overline{\text{gen}}\, \{\phi\varphi : \phi \in L^\infty(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{A}\}$$

*entonces la función rango medible asociada a $\mathcal{M}$ satisface $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(\omega) = \overline{\text{gen}}\, \{\varphi(\omega) : \varphi \in \mathcal{A}\}$ para casi todo $\omega \in \Omega$.*

En la sección anterior dimos una caracterización de los subespacios de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que reducen a $\mathbf{U}$ (es decir, son $\mathcal{D}$-invariantes con $\mathcal{D} := \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$) y son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$ (ver Teorema 3.10). Un punto clave para dicha caracterización fue tener una descripción de los operadores $\Phi : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$ que conmutan con $\mathbf{U}$ y $\widehat{\mathbf{S}}$.

Con esto en mente, la idea sería dar una caracterización de los subespacios cerrados $\mathcal{M}$ de $L^2(\Omega, H^2_{\mathcal{K}})$ (donde $H^2_{\mathcal{K}} := H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ igual que antes) que son $\mathcal{D}$-invariantes para algún conjunto determinante $\mathcal{D}$ de $L^1(\Omega)$ y que son invariantes por $\widehat{\mathbf{S}}$, ya que este último operador se puede definir en $L^2(\Omega, H^2_{\mathcal{K}})$ de la misma manera que en el caso $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\mathcal{K}})$, es decir,

$$\widehat{\mathbf{S}} f(\omega) = \mathbf{S}(f(\omega)),$$

para toda $f \in L^2(\Omega, H^2_{\mathcal{K}})$ y para casi todo $\omega \in \Omega$.

**Definición 3.21.** Se dice que un operador $\Phi : L^2(\Omega, \mathcal{K}) \to L^2(\Omega, \mathcal{K})$ es multiplicativamente invariante si es lineal y acotado y para cada $\phi \in L^\infty(\Omega)$, $\phi$ conmuta con el operador de multiplicación $M_\phi : L^2(\Omega, \mathcal{K}) \to L^2(\Omega, \mathcal{K})$ definido por $M_\phi(f) = \phi f$ para $f \in L^2(\Omega, \mathcal{K})$.

Como antes, si $\mathcal{D}$ es un conjunto determinante para $L^1(\Omega)$, para ver que $\Phi$ es multiplicativamente invariante, es suficiente probar que $\Phi$ conmuta con $M_\phi$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$, tal como se enuncia en el siguiente teorema.

**Teorema 3.22.** *([19, Teorema 3.7]) Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos subespacios cerrados de $L^2(\Omega, \mathcal{K})$ multiplicativamente invariantes con funciones rango medibles $\mathcal{J}_\mathcal{M}$ y $\mathcal{J}_\mathcal{N}$ respectivamente y sea $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un operador lineal y acotado. Para cada conjunto determinante $\mathcal{D}$ para $L^1(\Omega)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) $T$ es un operador multiplicativamente.*

*ii) Para cada $\phi \in \mathcal{D}$, $TM_\phi|_\mathcal{M} = M_\phi|_\mathcal{N} T$.*

*iii) Existe una aplicación llamado operador rango*

$$R : \Omega \to \{\textit{operadores acotados definidos en subespacios cerrados de } \mathcal{K}\},$$

*la cual es medible en el sentido que la función $\omega \mapsto \langle R(\omega) P_{\mathcal{J}_\mathcal{M}(\omega)} x, y\rangle$ es medible para todo $x, y \in \mathcal{K}$, que satisface $Tf(\omega) = R(\omega) f(\omega)$ para toda $f \in \mathcal{M}$ y para casi todo $\omega \in \Omega$.*

*Observación* 3.23. En el caso que $\Omega = \mathbb{T}$, un operador acotado $\Phi : L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) \to L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ conmuta con el shift bilateral $\mathbf{U}$ si y solo si $\Phi$ conmuta con $M_\phi$ para toda $\phi \in \mathcal{D} = \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, o equivamentemente, $\Phi$ es multiplicativamente invariante.

Recordemos que la demostración del Teorema 3.10 se basó en dos conceptos principales. Por un lado, la existencia de una función rango medible $\mathcal{J}$ que determina al subespacio full-Hardy $\mathcal{W}$ en el sentido que su función rango viene dada por $\lambda \mapsto \mathcal{J}_\mathcal{W}(\lambda) = H^2_{\mathcal{J}(\lambda)}$. La existencia de esta función rango está asegurada por el Teorema 1.48, lo cual se puede extender al caso general $L^2(\Omega, \mathcal{K})$ por el Teorema 3.20. Además, los resultados de la Sección 1.4.2 también se extienden al caso $L^2(\Omega, \mathcal{K})$ (ver [20, 19]). Por otro lado, requerimos probar la existencia de una función $F : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ que define un operador $\widehat{F}$ en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}))$ que conmuta con $\mathbf{U}$ (ver Proposición 1.62). Este resultado se puede extender al caso general usando el Teorema 3.22, que como vimos, muestra que un operador multiplicativamente invariante $\Phi : L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) \to L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ admite un operador rango.

Además, el concepto de subespacio full-Hardy dado en la Definición 3.3 también vale en el caso $L^2(\Omega, H^2_\mathcal{K})$. Por lo tanto obtenemos la siguiente versión del Teorema 3.10 en $L^2(\Omega, H^2_\mathcal{K})$.

**Teorema 3.24.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq L^2(\Omega, H^2_\mathcal{K})$ un subespacio cerrado. Para cada conjunto determinante $\mathcal{D}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i)* $\mathcal{M}$ *es* $\mathcal{D}$*-invariante y es invariante por* $\widehat{\mathbf{S}}$.

*ii)* *Existe un subespacio full-Hardy* $\mathcal{W} \subseteq L^2(\Omega, H^2_{\mathcal{K}})$ *y una isometría parcial* $\Phi : L^2(\Omega, H^2_{\mathcal{K}}) \to L^2(\Omega, H^2_{\mathcal{K}})$ *con espacio inicial* $\mathcal{W}$ *que es multiplicativamente invariante y conmuta con* $\widehat{S}$ *tal que* $\mathcal{W} \simeq_{\Phi} \mathcal{M}$.

# Capítulo 4

# Espacios tipo Dirichlet y ciclicidad

En este capítulo discutiremos las propiedades generales de una familia $\{D_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ de espacios de Hilbert de funciones analíticas en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, que contienen a los polinomios como subconjunto denso y son llamados *espacios tipo Dirichlet*.

Los resultados principales que serán expuestos en este capítulo se encuentran en [5] y están relacionados con el conjunto de las funciones cíclicas en $D_\alpha$. Más específicamente, discutiremos distintas caracterizaciones de las funciones cíclicas y demostraremos que el conjunto de funciones cíclicas no es un subespacio cerrado de $D_\alpha$ en la topología inducida por la norma. Sin embargo, es posible imponer algunas hipótesis adicionales para que el límite en $D_\alpha$ de una sucesión de funciones cíclicas resulte cíclica. Posteriormente, presentaremos algunos resultados cuantitativos sobre los llamados *polinomios aproximantes óptimos*, a través de los cuales se puede dar una caracterización equivalente de ciclicidad y medir en cierto sentido cuán cerca está una función de ser cíclica.

Algunas referencias donde se pueden encontrar las nociones básicas sobre estos tema son [21, 31, 34].

## 4.1 Espacios $D_\alpha$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos el espacio de Hilbert $D_\alpha$ de todas las funciones analíticas $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $z \in \mathbb{D}$ que satisfacen

$$\|f\|_\alpha^2 := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \,(j+1)^\alpha < \infty.$$

El producto interno en $D_\alpha$ está definido por

$$\langle f, g\rangle_\alpha := \sum_{j=0}^{\infty} a_j \,\overline{b_j}\,(j+1)^\alpha$$

con $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ y $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$.

Lo primero que observamos es que existen tres valores de $\alpha$ para los cuales los espacios $D_\alpha$ correspondientes han sido ampliamente estudiados:

- $D_{-1}$ se corresponde al espacio de Bergman $B$, que consiste de todas las funciones $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ analíticas en $\mathbb{D}$ tal que

$$\|f\|_B^2 := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_j|^2}{j+1} < \infty.$$

- $D_0$ se corresponde con el espacio de Hardy $H^2$ que estudiamos en la Sección 1.2.

- $D_1$ se corresponde con el espacio de Dirichlet $D$ que consiste de todas las funciones $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ analíticas en $\mathbb{D}$ tal que

$$\|f\|_D^2 := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+1) < \infty.$$

Para más detalles sobre el estudio de estos espacios clásicos se pueden consultar [35, 30, 31].

En el siguiente teorema se enuncian algunas propiedades que relacionan entre sí los espacios $D_\alpha$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ (ver [21] ).

**Teorema 4.1.** *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

*i) Si $\alpha \geq \beta$, entonces $D_\alpha \subseteq D_\beta$. Más aún, $\|f\|_\beta \leq \|f\|_\alpha$ para toda $f \in D_\alpha$.*

*ii) $f \in D_\alpha$ si y solo si $f' \in D_{\alpha-2}$.*

*iii) $D_\alpha$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo, es decir, para cada $w \in \mathbb{D}$ existen funciones $k_w^\alpha \in D_\alpha$ tal que para $f \in D_\alpha$ se cumple que $f(w) = \langle f, k_w^\alpha \rangle$. Más aún, $k_w^\alpha$ está dado por la fórmula explícita*

$$k_w^\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{w}^j z^j}{(j+1)^\alpha}.$$

*iv) Los polinomios son densos en $D_\alpha$.*

*Demostración.* Para ver $i$) basta observar que si $\alpha \geq \beta$ entonces $(j+1)^\alpha \geq (j+1)^\beta$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Luego, si $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $z \in \mathbb{D}$ está en $D_\alpha$ tenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+1)^\beta \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+1)^\alpha = \|f\|_\alpha^2,$$

lo cual demuestra que $f \in D_\beta$ y $\|f\|_\beta \le \|f\|_\alpha$.

Veamos *ii*). Si $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $z \in \mathbb{D}$ está en $D_\alpha$, su derivada es analítica en $\mathbb{D}$ y su serie de Taylor se obtiene derivando término a término la serie de Taylor de $f$:

$$f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, j\, z^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1}\,(j+1)\, z^j.$$

Luego, si llamamos $b_j$ a los coeficientes de la serie de Taylor de $f'$, es decir, $b_j := a_{j+1}\,(j+1)$ tenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2\,(j+1)^{\alpha-2} = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j+1}|^2\,(j+1)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j+1}|^2 \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^{\alpha} (j+2)^{\alpha}$$

y haciendo un cambio de índices en la suma de la derecha

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2\,(j+1)^{\alpha-2} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \left(\frac{j}{j+1}\right)^{\alpha} (j+1)^{\alpha}.$$

Observando que $\frac{1}{2} \le \frac{j}{j+1} \le 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ podemos encontrar constantes $A_\alpha$ y $B_\alpha$ tales que

$$A_\alpha \left(\|f\|_\alpha^2 - |a_0|^2\right) \le \|f'\|_{\alpha-2}^2 \le B_\alpha\, \|f\|_\alpha^2$$

con lo cual concluimos que $f \in D_\alpha$ si y solo si $f' \in D_{\alpha-2}$.

Para ver *iii*), observamos primero que $k_w^\alpha \in D_\alpha$ ya que la serie

$$\|k_w^\alpha\|_\alpha^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|w|^2}{(j+1)^\alpha}$$

converge absolutamente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{D}$. Veamos además que $k_w^\alpha$ tiene la propiedad reproductiva. Sea $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ en $D_\alpha$, entonces para todo $w \in \mathbb{D}$ tenemos que

$$\langle f, k_w^\alpha \rangle_\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{w^j}{(j+1)^\alpha}(j+1)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, w^j = f(w).$$

Para demostrar *iv*) es suficiente observar que las sumas parciales de la serie de Taylor de $f \in D_\alpha$ aproxima a $f$ en la norma de $D_\alpha$. En efecto, si $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ pertenece a $D_\alpha$ y $p_N(z) := \sum_{j=1}^{N} a_j z^j$, entonces

$$\|f - p_N\|_\alpha^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j|^2\,(j+1)^\alpha$$

y esta serie converge por ser la cola de una serie convergente. Esto concluye la demostración.

■

*Observación* 4.2. El Teorema 4.1 implica, en particular, que $D_\alpha \subseteq D_0 = H^2$ para todo $\alpha \geq 0$, y $H^\infty \subset H^2 \subseteq D_\alpha$ para $\alpha \leq 0$. Por otro lado, podemos observar que para $w \in \mathbb{D}$, el núcleo

$$k_w^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{w}^j z^j = \frac{1}{1 - \overline{w} z}$$

se corresponde con el núcleo reproductivo del espacio $H^2$ dado en la Proposición 1.19.

Hasta el momento hemos visto diversas propiedades y características que tienen en común todos los espacios $D_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Sin embargo, uno de los aspectos en los cuales se diferencian estos espacios es en el comportamiento de las funciones analíticas en la frontera de $\mathbb{D}$. Si denotamos por $A(\mathbb{D}) \subset H^\infty$ al conjunto de todas las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}}$, con la norma del supremo, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.**

*i) Si $\alpha > 1$, $D_\alpha$ es una subálgebra cerrada de $A(\mathbb{D})$.*

*ii) Para $\alpha \leq 1$, $D_\alpha$ no es un álgebra.*

La proposición anterior es válida para una clase más general de espacios de Banach de funciones analíticas. Para más detalles se puede ver [42, Teorema 2 y 3].

*Demostración de la Proposición 4.3.* Supongamos que $\alpha > 1$. Sea $f \in D_\alpha$, $f(z) = \sum_{j=0}^\infty a_j z^j$, $z \in \mathbb{D}$. Notemos que la serie que define a $f$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$, pues por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j z^j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \frac{(j+1)^{\alpha/2}}{(j+1)^{\alpha/2}} \leq \left( \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+1)^\alpha \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^\alpha} \right) < \infty.$$

Por lo tanto, $f$ es continua y acotada en $\overline{\mathbb{D}}$ y analítica en $\mathbb{D}$, es decir, $f \in A(\mathbb{D})$. Veamos ahora que $D_\alpha$ es cerrada con respecto al producto de funciones, es decir, si $f, g \in D_\alpha$, entonces $fg \in D_\alpha$.

Sean $f(z) = \sum_{j=0} a_j z^j$ y $g(z) = \sum_{j=0} b_j z^j$. El producto de Cauchy de $f$ y $g$ está dado por

$$f(z)g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) z^j.$$

La idea es ver que existe $C > 0$ tal que $\|fg\|_\alpha \leq C \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha$:

$$\begin{aligned} \|fg\|_\alpha^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right|^2 (j+1)^\alpha \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^\alpha \left[ \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(k+1)^{\alpha/2} (j-k+1)^{\alpha/2}} (k+1)^{\alpha/2} |a_k| (j-k+1)^{\alpha/2} |b_{j-k}| \right]^2 \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos acotar la expresión anterior por

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(k+1)^{\alpha}(j-k+1)^{\alpha}}\right]\left[\sum_{k=0}^{j}(k+1)^{\alpha}|a_k|^2(j-k+1)^{\alpha}|b_{j-k}|^2\right].$$

Llamando $C_j := (j+1)^{\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(k+1)^{\alpha}(j-k+1)^{\alpha}}$ y observando que

$$C_j = \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{j-k+1}\right)^{\alpha} \leq 2^{\alpha}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}$$

tenemos que $C = \sup_{j\in\mathbb{N}} C_j$ es finito. Por lo tanto,

$$\|fg\|_{\alpha}^2 \leq C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}(k+1)^{\alpha}|a_k|^2(j-k+1)^{\alpha/2}|b_{j-k}|^2 = C\,\|f\|_{\alpha}^2\,\|g\|_{\alpha}^2,$$

con lo cual $fg \in D_\alpha$ como queríamos ver.

Para ver *ii*) observamos que si $D_\alpha$ fuese un álgebra para $\alpha \leq 1$ entonces toda $f \in D_\alpha$ cumple que $fD_\alpha \subset D_\alpha$, es decir, todo elemento de $D_\alpha$ es un multiplicador (ver Definición 4.8). En particular, por el Corolario 4.10 tenemos que $D_\alpha \subseteq M(D_\alpha) \subset D_\alpha \cap H^\infty$, con lo cual toda función en $D_\alpha$ debe ser acotada en $\mathbb{D}$.

Ahora, para demostrar que $D_\alpha$ con $\alpha \leq 1$ no es un álgebra basta encontrar alguna $f \in D_\alpha$ tal que $f \notin H^\infty$.

Sea

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)\ln(j+1)}z^j, \qquad z\in\mathbb{D}.$$

Entonces, $f \in D_\alpha$ para $\alpha < 1$, ya que usando el criterio de la integral se puede ver que que la serie

$$\|f\|_{\alpha}^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{2-\alpha}(\ln(j+1))^2}$$

converge para $\alpha < 1$. Además, $f$ no es acotada en $\mathbb{D}$ pues si para $r \in (0,1)$ escribimos $f(r) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)\ln(j+1)}r^j$ tenemos que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(j+1)\ln(j+1)} \leq \lim_{r\to 1^-} f(r)$$

con lo cual

$$+\infty = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)\ln(j+1)} \leq \lim_{r\to 1^-} f(r).$$

■

## 4.2 Funciones cíclicas en $D_\alpha$

Con el objetivo de introducir el concepto de función cíclica en $D_\alpha$ recordamos que una función $f \in H^2$ es cíclica si cumple la propiedad

$$[f]_0 := \overline{\text{gen}}\left\{S^j f : j \in \mathbb{N}_0\right\} = H^2,$$

donde $S : H^2 \to H^2$ es el operador shift dado por $Sf(z) = zf(z)$, $z \in \mathbb{D}$, el cual es una isometría en $H^2$. A continuación veremos que el operador $S$ está bien definido en $D_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y que para $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $S : D_\alpha \to D_\alpha$ es un operador lineal y acotado no isométrico.

**Teorema 4.4.** *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, el operador shift $S : D_\alpha \to D_\alpha$, $Sf(z) = zf(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ está bien definido, es lineal y acotado y su norma está dada por*

$$\|S\|_{op} = \begin{cases} 1 & si\ \alpha \leq 0, \\ 2^\alpha & si\ \alpha > 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Sea $f \in D_\alpha$ tal que $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces, $Sf(z) = zf(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} z^j$ y

$$\|Sf\|_\alpha^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{j-1}|^2 (j+1)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+2)^\alpha$$

Si $\alpha < 0$, tenemos que $(j+2)^\alpha < (j+1)^\alpha$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, con lo cual

$$\|Sf\|_\alpha^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+2)^\alpha \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+1)^\alpha = \|f\|_\alpha^2.$$

Esto prueba que $Sf \in D_\alpha$ y $\|S\|_{op} \leq 1$ para $\alpha < 0$. Además, si consideramos para $j \in \mathbb{N}_0$ las funciones $f_j(z) = z^j$, entonces $\|f_j\|_\alpha^2 = (j+1)^\alpha$ y $\|Sf_j\|_\alpha^2 = (j+2)^\alpha$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ y por lo tanto

$$\|S\|_{op} := \sup_{f \in D_\alpha, f \neq 0} \frac{\|Sf\|_\alpha}{\|f\|_\alpha} \geq \lim_{j \to \infty} \frac{\|Sf_j\|_\alpha^2}{\|f_j\|_\alpha^2} = \lim_{j \to \infty} \left(\frac{j+2}{j+1}\right)^\alpha = 1.$$

Concluimos que $\|S\|_{op} = 1$ si $\alpha < 0$.

El caso $\alpha = 0$ se corresponde con el shift unilateral actuando en $H^2$, el cual ya vimos que es una isometría (Sección 1.2).

Por último, si $\alpha > 0$, entonces

$$\|Sf\|_\alpha^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+2)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+1)^\alpha \left(\frac{j+2}{j+1}\right)^\alpha \leq 2^\alpha \|f\|_\alpha^2,$$

con lo cual $\|S\|_{op} \leq 2^{\alpha/2}$. Para ver la igualdad es suficiente notar que si elegimos la función constantemente igual a $f(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, tenemos que $\|f\|_\alpha = 1$ y $\|Sf\|_\alpha = 2^{\alpha/2}$. ∎

**Definición 4.5.** Una función $f \in D_\alpha$ se dice *cíclica* si es un vector cíclico para el operador $S$ en $D_\alpha$, es decir,

$$[f]_\alpha := \overline{\text{gen}}\left\{S^j f : j \in \mathbb{N}_0\right\} = D_\alpha.$$

**Ejemplo 4.6.** El ejemplo más sencillo de función cíclica en $D_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ es la función constantemente 1. Esto es consecuencia del hecho de que el conjunto de todos los polinomios se puede expresar como $\text{gen}\{S^j 1 : j \in \mathbb{N}_0\}$ y como vimos que dicho conjunto es denso en $D_\alpha$ tenemos que

$$[1]_\alpha := \overline{\text{gen}}\{S^j 1 : j \in \mathbb{N}_0\} = D_\alpha.$$

Más aún, cualquier función constante en $\mathbb{D}$ es cíclica en $D_\alpha$.

En [21, Proposición 4, 5 y 6], Brown y Shields demostraron las siguientes propiedades de las funciones cíclicas.

**Proposición 4.7.** *Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in D_\alpha$. Entonces:*

*i) Si $f$ es cíclica, entonces $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

*ii) Si $\alpha > 1$, $f \in D_\alpha$ es cíclica si y solo si $f$ no tiene ceros en $\mathbb{D}$, o equivalentemente, si existe una constante $c$ tal que*

$$|f(z)| > c > 0, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{4.1}$$

*iii) Si $g \in [f]_\alpha$ y $g$ es cíclica, entonces $f$ es cíclica.*

*iv) $f$ es cíclica en $D_\alpha$ si y solo si existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n f - 1\|_\alpha = 0.$$

*v) Si $\beta < \alpha$ y $f$ es cíclica en $D_\alpha$, entonces $f$ es cíclica en $D_\beta$.*

A continuación estudiaremos otra clase especial de funciones en $D_\alpha$ que llamamos *multiplicadores* y que serán utilidad más adelante cuando presentemos los resultados recientemente obtenidos con respecto al conjunto de las funciones cíclicas en $D_\alpha$.

**Definición 4.8.** Una función $\phi \in D_\alpha$ es llamada un *multiplicador* (en $D_\alpha$) si cumple que $\phi D_\alpha \subset D_\alpha$. Denotamos el conjunto de todos los multiplicadores en $D_\alpha$ por $M(D_\alpha)$.

**Teorema 4.9.** *Sea $\phi \in D_\alpha$ un multiplicador. Entonces el operador de multiplicación*

$$M_\phi : D_\alpha \to D_\alpha, \qquad M_\phi f = \phi f$$

*está bien definido, es lineal y acotado, y $|\phi(z)| \leq \|M_\phi\|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, $\phi$ es una función acotada.*

*Observar que el operador shift $S : D_\alpha \to D_\alpha$ es un caso particular de operador de multiplicación, donde el multiplicador asociado es la función identidad $\phi(z) = z$, $z \in \mathbb{D}$.*

*Demostración.* Para probar que $M_\phi$ es acotado vamos a usar el Teorema del gráfico cerrado. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f$ y $g$ en $D_\alpha$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\alpha = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|M_\phi f_n - g\|_\alpha = 0$. Queremos ver que $g = M_\phi f$. Para $z \in \mathbb{D}$, usando la propiedad reproductiva del núcleo $k_z^\alpha$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}|g(z) - M_\phi f(z)| &\leq |g(z) - M_\phi f_n(z)| + |M_\phi f_n(z) - M_\phi f(z)| \\ &\leq \|g - M_\phi f_n\|_\alpha \, \|k_z^\alpha\|_\alpha + \|\phi\|_\alpha \, \|f_n - f\|_\alpha \, \|k_z^\alpha\|_\alpha^2\end{aligned}$$

donde la suma de la derecha tiende a 0 cuando $n$ tiende a $\infty$. Luego, $g(z) = M_\phi f(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Lo anterior demuestra que $M_\phi$ es un operador cerrado, y por el Teorema del gráfico cerrado concluimos que $M_\phi$ es acotado.

Ahora, como $M_\phi$ es un operador acotado, tenemos para toda $f \in D_\alpha$ y $z \in \mathbb{D}$ que

$$|\phi(z)\, f(z)| = |\langle M_\phi f, k_z^\alpha \rangle_\alpha| \leq \|M_\phi\|_{op} \, \|f\|_\alpha \, \|k_z^\alpha\|_\alpha.$$

Tomando supremo sobre las funciones $f \in D_\alpha$ de norma 1 y teniendo en cuenta que

$$\|k_z^\alpha\|_\alpha = \sup_{f \in D_\alpha,\, \|f\|_\alpha = 1} |\langle f, k_z^\alpha \rangle_\alpha| = \sup_{f \in D_\alpha,\, \|f\|_\alpha = 1} |f(z)| > 0$$

tenemos que

$$|\phi(z)| \, \|k_z^\alpha\|_\alpha \leq \|M_\phi\|_{op} \, \|k_z^\alpha\|_\alpha.$$

y en consecuencia $|\phi(z)| \leq \|M_\phi\|_{op}$. ■

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente corolario.

**Corolario 4.10.** *Para $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que $M(D_\alpha) \subset D_\alpha \cap H^\infty$. En particular, si $\alpha \leq 0$, entonces $M(D_\alpha) = H^\infty$; y si $\alpha > 1$, entonces $M(D_\alpha) = D_\alpha$.*

El hecho de que $M(D_\alpha) = H^\infty$ para $\alpha \leq 0$, implica que la condición (4.1) es suficiente para que $f \in D_\alpha$ sea cíclica. Más aún, se tiene el siguiente resultado (ver [21]).

**Proposición 4.11.** *Sea $\alpha \leq 0$. Si $f, g \in D_\alpha$ con $|f(z)| \geq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $g$ es cíclica, entonces $f$ es cíclica.*

*Observación* 4.12. Caracterizar el conjunto de multiplicadores $M(D_\alpha)$ para $0 < \alpha \leq 1$ es un problema de mayor dificultad y requiere estudiar medidas de Carleson en $D_\alpha$, lo cual no abordaremos en este trabajo. Una explicación detallada sobre este caso se puede encontrar en [58].

A cada multiplicador $\phi$ en $M(D_\alpha)$ le asociamos la norma del correspondiente operador de multiplicación $M_\phi$, la cual denotaremos por $\|\phi\|_{M(D_\alpha)} := \|M_\phi\|_{op}$. El conjunto de todos los multiplicadores $M(D_\alpha)$ de $D_\alpha$ con la norma $\|\cdot\|_{M(D_\alpha)}$ es un espacio de Banach.

Antes de demostrar los resultados principales que obtuvimos acerca de la ciclicidad (no ciclicidad) del límite de una sucesión de funciones cíclicas, necesitamos introducir algunos conceptos de teoría geométrica de la medida que están fuertemente relacionados con los espacios $D_\alpha$. Para más detalles sobre estas definiciones y conexiones con los espacios $D_\alpha$ referimos a [31].

**Definición 4.13.** sea $E$ un subconjunto cerrado $\mathbb{T}$. Se dice que $E$ es un *conjunto de Carleson* si cumple que

$$\int_{\mathbb{T}} \log\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\zeta, E)}\right) dm(\zeta) < \infty.$$

Equivalentemente, $E \subset \mathbb{T}$ es un conjunto de Carleson si $|E| = 0$ y

$$\sum_k |I_k| \log(1/|I_k|) < \infty, \tag{4.2}$$

donde $\{I_k\}$ son las componentes conexas de $\mathbb{T} \setminus E$ (siendo cada $I_k$ un intervalo).

Para la siguiente definición introducimos para $0 < \alpha \leq 1$ los siguientes dos tipos de núcleos:

- Para $0 < \alpha < 1$, consideramos el *núcleo de Riesz* dado por la función $K_\alpha(t) = t^{\alpha-1}$.
- Para $\alpha = 1$, consideramos el *núcleo logarítmico* definido por $K_1(t) = \max\{\log(2/t), 0\}$.

**Definición 4.14.** Dado un subconjunto compacto $E \subset \mathbb{T}$ y $0 < \alpha \leq 1$, se define la $\alpha$-capacidad $c_\alpha$ ($\alpha$-capacidad de Riesz o capacidad logarítmica según sea el caso) de $E$ como

$$c_\alpha(E) = 1/\inf\left\{\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} K_\alpha(d(x,y))\, d\mu(x)\, d\mu(y)\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre el conjunto de todas las medidas de Borel de probabilidad en $E$, y $d(x, y)$ denota la longitud del arco de extremos $x$ e $y$ en $\mathbb{T}$.

El concepto de capacidad satisface algunas propiedades básicas como por ejemplo $c_\alpha(\emptyset) = 0$, es monótona y finitamente subaditiva, lo cual se demuestra en [31, Teorema 2.1.3]. Con el objetivo de aplicar más adelante algunos resultados sobre $c_\alpha$, cabe acotar que nuestra definición de los espacios $D_\alpha$ se corresponde con los espacios $D_{1-\alpha}$ en [31].

Por último, incluiremos un resultado referente a $\alpha$-capacidad de conjuntos de Cantor.

**Definición 4.15.** Se dice que $E$ es un *conjunto de Cantor* si es un subconjunto compacto de $\mathbb{T}$ de la siguiente manera

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{2^n} E_n^j$$

donde $\left\{E_n^j : 1 \leq j \leq 2^n, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ son subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{T}$ tal que para $j = 1, ..., 2^n$ los conjuntos $E_n^j$ son disjuntos dos a dos y cada conjunto $E_{n-1}^j$ contiene precisamente dos conjuntos $E_n^j$.

A partir de la definición anterior podemos escribir el resultado mostrado en [31, Teorema 2.3.5] de la siguiente manera:

**Teorema 4.16.** *Sea E el conjunto de cantor correspondiente a* $\left\{E_n^j : 1 \leq j \leq 2^n, n \in \mathbb{N}_0\right\}$. *Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_\alpha(d_n)}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{c_\alpha(E)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_\alpha(e_n)}{2^{n+1}}, \tag{4.3}$$

*donde*

$$\begin{aligned} d_n &= \max\left\{\operatorname{diam}(E_n^j) : 1 \leq j \leq 2^n\right\} \\ e_n &= \min\left\{d(E_{n+1}^j, E_{n+1}^k) : E_{n+1}^j, E_{n+1}^k \subset E_n^i \text{ } para \text{ } j \neq k\right\}. \end{aligned}$$

*En particular, si el lado derecho en* (4.3) *converge, entonces* $c_\alpha(E) > 0$.

### 4.2.1 Sobre el límite de una sucesión de funciones cíclicas

Recordemos que las funciones cíclicas en $D_0 = H^2$ están completamente caracterizadas en el Corolario 1.27, el cual se obtuvo como consecuencia del Teorema de Beurling sobre los subespacios invariantes de $H^2$ (ver Teorema 1.23). Estas funciones son las que se conocen como funciones *outer*.

Para otros valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la condición de que una función sea outer no es suficiente para que sea cíclica, en [21] se consideraron agregar algunas hipótesis adicionales de manera que una función outer $f$ resulte cíclica en $D_\alpha$ para algunos $\alpha \neq 0$. Particularmente para $\alpha = 1$, en [31] demostraron que existe una función outer en $f \in D_1 \cap A(\mathbb{D})$ que no es cíclica en $\mathcal{D}_1$.

En general, caracterizar todas las funciones cíclicas en un espacio de Hilbert de funciones analíticas es un problema difícil. En algunos casos, por ejemplo [16, 21], el primer intento es estudiar los polinomios cíclicos con la intención de extender las conclusiones obtenidas a funciones más generales. Con esto en mente, una pregunta que surge es si la propiedad de ciclicidad (o la no ciclicidad) se preserva vía límites.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y una sucesión de funciones cíclicas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_\alpha$ que converge a una función $f \in D_\alpha \setminus \{0\}$ en la norma de $D_\alpha$, en el siguiente teorema damos condiciones necesarias para que la función límite también sea cíclica en $D_\alpha$. En lo que sigue, denotaremos por $Z(g)$ al conjunto de ceros de $g \in D_\alpha$ en $\mathbb{D}$.

**Teorema 4.17.** *Sean* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones cíclicas en* $D_\alpha$ *que converge a* $f$ *en la norma de* $D_\alpha$. *Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

*i)* *Existe* $C > 0$ *tal que* $\|f/f_n\|_{M(D_\alpha)} \leq C$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

*ii)* $\lim_{n\to\infty} \|1 - f/f_n\|_\alpha = 0$.

*Entonces, $f$ es cíclica en $D_\alpha$.*

*Además, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, existe una función no cíclica $f \in D_\alpha$ tal que $Z(f) \cap \mathbb{D} = \emptyset$ y una sucesión de funciones cíclicas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $f$ en $D_\alpha$, que satisface ii) siendo $f/f_n$ un multiplicador para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Para demostrar que $f$ es cíclica, vamos a usar la caracterización *iv*) de la Proposición 4.7, es decir, queremos encontrar una sucesión de polinomios $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{m\to\infty} \|p_m f - 1\|_\alpha = 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Como $f_n \in D_\alpha$ es cíclica para todo $n \in \mathbb{N}$, por *iv*) de la Proposición 4.7 existe una sucesión de polinomios $\{p_{m,n}\}_{m=0}^{\infty}$ y una constante $M(n)$ dependiente de $n$ tal que $\|p_{m,n} f_n - 1\|_\alpha < \epsilon$ si $m > M(n)$. Veamos que es posible elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|p_{m,n_0} f - 1\|_\alpha < \epsilon$ si $m > M(n_0)$. Observamos que podemos descomponer $p_{m,n_0} f - 1$ en una diferencia de forma tal que:

$$\|p_{m,n_0} f - 1\|_\alpha = \|f/f_{n_0}(p_{m,n_0} f_{n_0} - 1) - (1 - f/f_{n_0})\|_\alpha.$$

Usando la definición de la norma de multiplicador y la desigualdad triangular obtenemos que la norma anterior se puede acotar por

$$\|f/f_{n_0}\|_{M(D_\alpha)} \|p_{m,n_0} f_{n_0} - 1\|_\alpha + \|1 - f/f_{n_0}\|_\alpha. \tag{4.4}$$

Ahora, por *i*), como $f_{n_0}$ es cíclica podemos acotar el primer término de la suma (4.4) por $\epsilon/2$ si $m > M(n_0)$. Por lo tanto, basta elegir $n_0$ suficientemente grande de manera que $\|1 - f/f_{n_0}\|_\alpha < \epsilon/2$, lo cual es posible por *ii*). Esto demuestra la conclusión principal del Teorema.

Para demostrar lo que resta del teorema, vamos a considerar los casos $\alpha \le 0$, $0 < \alpha \le 1$ y $\alpha > 1$.

Para $\alpha \le 0$, consideramos la función inner singular (ver Ejemplo 1.22)

$$g(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right).$$

la cual verifica que $|g(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego, $g \in H^\infty = M(D_\alpha) \subset D_\alpha$ para todo $\alpha \le 0$. Además, $g$ no es cíclica en $D_\alpha$ (ver por ejemplo [43]). Veamos que $g$ se puede aproximar por una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones cíclicas en la norma de $D_\alpha$. Para ello consideramos para $n \in \mathbb{N}$ las funciones

$$g_n(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{(1+1/n) - z}\right)$$

y observamos que $g_n$ satisface la siguiente desigualdad

$$e^{-2n} \le |g_n(z)| < 1, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Luego, $g_n \in H^\infty \subset D_\alpha$ y está acotada inferiormente por una constante positiva para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $g_n$ es cíclica para todo $n \in \mathbb{N}$. Resta ver que $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\alpha = 0$. Como $\|f\|_\alpha \le \|f\|_0$ para toda $f \in D_\alpha$ con $\alpha \le 0$, es suficiente probar la convergencia en $H^2$.

Ahora, notemos que como $g_n$ es analítica en una región que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$, entonces existe el límite radial $g_n^*$ de $g_n$ satisface $g_n^*(e^{i\theta}) = g_n(e^{i\theta})$ para todo $\theta \in (-\pi, \pi]$. Por otro lado, si $\theta \neq 0$, la función límite $g$ tiene límite radial

$$g^*(e^{i\theta}) = \begin{cases} g(e^{i\theta}) = -ie^{\cot(\theta/2)} & \text{si } \theta \neq 0, \\ 0 & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\|g_n - g\|_0^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n^*(e^{i\theta}) - g^*(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = (I) + (II),$$

donde $(I)$ es la integra en el conjunto $\epsilon \leq |\theta| \leq \pi$ y $(II)$ es la integral en la región complementaria $|\theta| < \epsilon$.

A partir de la definición de $g_n$ y el hecho de que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, se puede ver que

$$|g_n^*(e^{i\theta}) - g^*(e^{i\theta})|^2 \leq 4.$$

Para $\epsilon \leq |\theta| \leq \pi$, vemos además que

$$|g_n^*(e^{i\theta}) - g^*(e^{i\theta})|^2 = e^{2\operatorname{Re}(A)} - 2\operatorname{Re}(e^A) + 1 \tag{4.5}$$

donde

$$A = \frac{1}{n}\frac{1 + e^{i\theta}}{((1 + 1/n) - z)(1 - e^{i\theta})},$$

que converge a 0 cuando $n$ tiende a $\infty$. Luego, (4.5) converge a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, (I) tiende a cero cuando $n \to \infty$. La integral (II) se puede acotar por $4\epsilon/\pi$. Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_0 = 0$.

Supongamos ahora que $0 < \alpha \leq 1$. Sea $E \subset \mathbb{T}$ un conjunto de medida de Lebesgue cero y $\alpha$-capacidad positiva. Este conjunto existe y se puede construir de la siguiente manera: fijamos $\alpha$ y tomamos $\varepsilon = 1 - 2^{\alpha/(\alpha-2)}$. Observamos que entonces

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\log(2)}{\log(\frac{2}{1-\varepsilon})}.$$

Consideremos el conjunto de Cantor $E$ que se obtiene removiendo en cada paso $k$ un intervalo abierto intermedio de longitud $\varepsilon$ veces la longitud de cada intervalo del nivel $k - 1$. Mediante un cálculo estndar se demuestra que $E$ tiene medida de Lebesgue cero y dimensión de Hausdorff $\log(2)/\log(2/1 - \varepsilon)$.

Por lo tanto, (como $\alpha > 1 - \log(2)/\log(2/1 - \varepsilon)$) $c_\alpha(E) > 0$ por el Teorema 4.16. Además, usando la condición (4.2) se ve fácilmente que $E$ es un conjunto de Carleson.

Ahora, por el (ver [31, Teorema 9.2.8]) existe una función outer, no cíclica la cual es un multiplicador $f \in D_1 \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ (y en consecuencia $f \in D_\alpha \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ para $0 < \alpha < 1$) tal que su conjunto de ceros $Z(f)$ coincide con $E$. Además, la restricción de $f$ a $\mathbb{T}$ define una función real *no negativa*.

La idea es definir una sucesión de funciones cíclicas que convergen a $f$. Para ello, definimos la sucesión $\{f_n = f + 1/n\}_{n=1}^\infty \subset D_\alpha$. Como todas las funciones $f_n$ son outer y sus restricciones a $\mathbb{T}$ están acotadas inferiormente por $1/n$ para el correspondiente $n \in \mathbb{N}$, todas ellas son cíclicas en $D_\alpha$.

Finalmente, para $\alpha > 1$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n(z) = 1 + \frac{1}{n} - z$. Entonces, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones cíclicas en $D_\alpha$ (por *ii*) de la Proposición 4.7) que converge a $f(z) = 1-z$. Sin embargo, como consecuencia de la misma Proposición 4.7 es claro que $f$ no es cíclica en $D_\alpha$ para $\alpha > 1$. ■

Como consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.18.** *El conjunto de las funciones cíclicas en $D_\alpha$ no es cerrado en la topología de la norma $D_\alpha$. En particular, el conjunto de las funciones outer no es cerrado en la topología de la norma de $H^2$.*

Otra pregunta natural es si el límite de funciones no cíclicas debe ser no cíclica. Para responder esta pregunta tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 4.19.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:*

*i) Si $\alpha > 1$, el límite de una sucesión convergente de funciones no cíclicas en $D_\alpha$ es no cclica.*

*ii) Si $\alpha \leq 1$, existe una sucesión de funciones no cíclicas en $D_\alpha$ que converge a una función cíclica.*

*Demostración.* *i*) Sean $\alpha > 1$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones no cíclicas en $D_\alpha$ que converge a $f \in D_\alpha$. Como $f_n$ es no cíclica, *ii*) de la Proposición 4.7 implica que existe $z_n \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $f_n(z_n) = 0$. Por compacidad, existe una subsucesión convergente $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ y un punto $z_\infty \in \overline{\mathbb{D}}$ al cual converge dicha subsucesión. Se puede ver que $f(z_\infty) = 0$, y por lo tanto $f$ no es cíclica, aplicando nuevamente la Proposición 4.7.

*ii*) Consideramos $f_n(z) = 1 - \frac{1}{n} - z$ y $f(z) = 1 - z$. Entonces, $f_n, f \in D_\alpha$ (ya que son polinomios), $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a $f$, $f_n$ no es cíclica en $D_\alpha$ para $n \in \mathbb{N}$ ya que su único cero está en el interior de $\mathbb{D}$, pero $f$ es cíclica en $D_\alpha$. Esto último se deduce del hecho de que $1 - z$ es cíclica en $D_1$ (ver [21, Lemma 8]) y que si una función $g$ es cíclica en $D_1$ entonces es cíclica en $D_\alpha$ para $\alpha \leq 1$. ■

### 4.2.2 Algunos resultados sobre polinomios aproximantes óptimos

Hasta ahora hemos estudiado distintas propiedades y caracterizaciones acerca de las funciones cíclicas en $D_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Una de las propiedades más importantes que hemos utilizado en los resultados previos para demostrar la ciclicidad o la no ciclicidad de ciertas funciones es la siguiente: una función $f$ es cíclica en $D_\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) si y solo si existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n f - 1\|_\alpha = 0. \tag{4.6}$$

En [15], los autores se plantearon la pregunta de si es posible obtener explícitamente una sucesión de polinomios que satisfagan la propiedad (4.6) y además se preguntaron si es posible dar una estimación de la tasa de decaimiento de las normas $\|p_n f - 1\|_\alpha$ cuando $n \to \infty$. Para responder estas interrogantes introdujeron el concepto de *polinomio aproximante óptimo*.

Denotamos por $\mathcal{P}_d$ al espacio de todos los polinomios de grado a lo sumo $d$ equipado con la norma $\|\cdot\|_\alpha$. Observamos que para $f \in D_\alpha \backslash \{0\}$ la proyección ortogonal de 1 en el espacio de dimensión finita $f\mathcal{P}_d = \{pf : p \in \mathcal{P}_d\}$ siempre existe y está únicamente determinado, con lo cual existe un único elemento $p_d^* f \in f\mathcal{P}_d$ que minimiza la norma $\min_{p\in\mathcal{P}_d} \|pf - 1\|_\alpha$.

**Definición 4.20.** Sea $f \in D_\alpha \setminus \{0\}$. Se dice que un polinomio $p_d^* \in \mathcal{P}_d$ de grado a lo sumo $d$ es un *polinomio aproximante óptimo* (p.a.o) de orden $d$ de $1/f$ si

$$\min_{p\in\mathcal{P}_d} \|pf - 1\|_\alpha = \|p_d^* f - 1\|_\alpha.$$

En términos de la definición anterior tenemos que $f$ es cíclica si y solo si

$$\|p_d^* f - 1\|_\alpha \to 0 \text{ as } d \to \infty.$$

En [33, Theorem 2.1], se demostró que los coeficientes del p.a.o. de orden $d$ de $1/f$ son las entradas de la única solución $c \in \mathbb{C}^{d+1}$ del sistema lineal

$$Mc = b \tag{4.7}$$

donde $M \in \mathbb{C}^{(d+1)\times(d+1)}$ es la matriz con entradas

$$m_{j,k} = \langle S^k f, S^j f\rangle_\alpha \qquad \text{para} \qquad j, k = 0, ..., d,$$

y $b \in \mathbb{C}^{(d+1)}$ es el vector con entradas

$$b_k = \langle 1, S^k f\rangle_\alpha \qquad \text{para} \qquad k = 0, ..., d,$$

donde $S$ es el operador shift actuando en $D_\alpha$.

Nuestro objetivo es demostrar que dada $f \in D_\alpha \setminus \{0\}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_\alpha$ que converge a $f$, entonces el p.a.o. de orden $d$ de $1/f$ se puede aproximar por los p.a.o. de orden $d$ de $1/f_n$. En el siguiente resultado veremos una estimación cuantitativa de la distancia entre los p.a.o. de orden $d$ correspondientes a $f$ y $f_n$. Recordemos que la norma de Frobenius de una matriz $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, se define por

$$\|A\|_F = \left( \sum_{j,k=1}^{m} |a_{j,k}|^2 \right)^{1/2}.$$

**Teorema 4.21.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D_\alpha$ y $f \in D_\alpha$. Consideramos el p.a.o. $p_d$ de orden $d$ de $1/f$ y los p.a.o. $p_{d,n}$ de orden $d$ de $1/f_n$, y sus correspondientes sistemas lineales de la forma* (4.7)*, los cuales denotamos por $Mc = b$ y $M_n c_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$, respectivamente. Entonces, existe una constante $\varphi(d, \alpha)$ independiente de $n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$*

*i)* $\|b_n - b\|_0 \leq \|f_n - f\|_\alpha$,

*ii)* $\|M_n - M\|_F \leq \varphi(d, \alpha)\,(\|f_n\|_\alpha + \|f\|_\alpha)\,\|f_n - f\|_\alpha$.

*Más aún, existe $\psi(d, \alpha)$ tal que*

$$\|p_{d,n} - p_d\|_\alpha \leq \psi(d, \alpha)\,\|M_n^{-1}\|_F\,\left(\|b_n - b\|_0 + \|M^{-1}\|_F\,\|M - M_n\|_F\,\|b\|_0\right).$$

Naturalmente, estamos interesados en el caso en el que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en $D_\alpha$. En ese caso tenemos la siguiente consecuencia inmediata.

**Corolario 4.22.** *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 4.21, si asumimos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en la norma de $D_\alpha$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n - b\|_0 = \lim_{n\to\infty} \|M_n - M\|_F = \lim_{n\to\infty} \|p_{d,n} - p_d\|_\alpha = 0$$

*donde la tasa de decaimiento en todos los casos en de la forma $C(d, \alpha, f)\,\|f_n - f\|_\alpha$.*

*Observación* 4.23. Antes de demostrar el Teorema 4.21 queremos recordar algunos aspectos sobre transformaciones lineales $T : (\mathcal{P}_d, \|\cdot\|_0) \to (\mathcal{P}_d, \|\cdot\|_0)$. Sea $\mathcal{B} = \{z^k\}_{k=0}^{d}$ la base ortonormal canónica de $(\mathcal{P}_d, \|\cdot\|_0)$. Entonces, si $[T]_{\mathcal{B}} = \left(t_{j,k}\right)_{j,k=0}^{d}$ es la matriz asociada a $T$ y $[p]_{\mathcal{B}} = (a_k)_{k=0}^{d}$ es el vector coordenado de $p \in \mathcal{P}_d$, ambos en la misma base $\mathcal{B}$, tenemos que $[Tp]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{B}}$. Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|T\|^2 := \sup_{\|p\|_0=1} \|[Tp]_{\mathcal{B}}\|_0^2 = \sup_{\|p\|_0=1} \sum_{j=0}^{d} \left|\sum_{k=0}^{d} t_{j,k} a_k\right|^2 \leq \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=0}^{d} |t_{j,k}|^2\right) = \|\,[Tp]_{\mathcal{B}}\|_F^2.$$

Para nuestros propósitos, queremos determinar una representación de la matriz $T$ actuando en el espacio $\mathcal{P}_d$ equipado con la norma $\|\cdot\|_\alpha$. Sea $\mathcal{B}' = \{z^k/(k+1)^{\alpha/2}\}_{k=0}^{d}$ la base ortonormal de $(\mathcal{P}_d, \|\cdot\|_\alpha)$.

La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2^{\alpha/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/(d+1)^{\alpha/2} \end{pmatrix},$$

y entonces, $D[p]_{\mathcal{B}'} = [p]_{\mathcal{B}}$. Luego, tenemos que

$$[T]_{\mathcal{B}'}[p]_{\mathcal{B}'} = [Tp]_{\mathcal{B}'} = D^{-1}[Tp]_{\mathcal{B}} = D^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{B}} = D^{-1}[T]_{\mathcal{B}}D[p]_{\mathcal{B}'},$$

es decir,

$$[T]_{\mathcal{B}'} = D^{-1}[T]_{\mathcal{B}}D.$$

En consecuencia, tenemos que que

$$\|\,[T]_{\mathcal{B}'}\|_F^2 = \text{traza}([T]_{\mathcal{B}'}^*[T]_{\mathcal{B}'}) = \sum_{j,k=0}^{m} |t_{j,k}|^2 \frac{(j+1)^\alpha}{(k+1)^\alpha}.$$

*Demostración del Teorema 4.21.* La condición *i*) se obtiene fácilmente, notando que $|b_{n,0} - b_0| = |f_n(0) - f(0)|$ y $|b_{n,k} - b_k| = 0$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto,

$$\|b_n - b\|_0^2 = \sum_{k=0}^{d} |b_{n,k} - b_k|^2 = |f_n(0) - f(0)|^2 \leq \|f_n - f\|_\alpha^2.$$

Ahora, veamos que se cumple *ii*). Denotamos las entradas de $M_n$ y $M$ por $m_{j,k}^n$ y $m_{j,k}$ respectivamente. A partir de las definiciones $M_n$ y $M$ tenemos que

$$|m_{j,k}^n - m_{j,k}| = |\langle S^k f_n, S^j f_n\rangle_\alpha - \langle S^k f, S^j f\rangle_\alpha|.$$

Usando la desigualdad triangular obtenemos

$$|m_{j,k}^n - m_{j,k}| \leq |\langle S^k f_n, S^j(f_n - f)\rangle_\alpha| + |\langle S^k(f_n - f), S^j f\rangle_\alpha|.$$

Luego, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite acotar la expresión anterior y obtener lo siguiente:

$$|m_{j,k}^n - m_{j,k}| \leq \|S^j\|_{op}\ \|S^k\|_{op}\ \|f_n - f\|_\alpha \left(\|f_n\|_\alpha + \|f\|_\alpha\right).$$

Notar que $\|S^t\|$ es comparable con $(t+1)^{\alpha/2}$ cuando $\alpha \geq 0$ y es 1 en otro caso. Por lo tanto,

$$\|M_n - M\|_F^2 = \sum_{j,k=0}^{d} |m_{j,k}^n - m_{j,k}|^2 \frac{(j+1)^\alpha}{(k+1)^\alpha}$$

se puede acotar superiormente por

$$\varphi(d,\alpha)^2\ (\|f_n\|_\alpha + \|f\|_\alpha)^2\ \|f_n - f\|_\alpha^2,$$

donde,

$$\varphi(d,\alpha) = \begin{cases} \|D\|_F\ \|D^{-1}\|_F & \text{si } \alpha < 0, \\ d+1 & \text{si } \alpha = 0, \\ (d+1)\ \|D^{-2}\|_F & \text{si } \alpha > 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

usando la notación introducida en la Observación 4.23. Esto concluye la prueba de *ii*).

Finalmente, usando *i*) y *ii*) podemos probar que $\|p_{d,n} - p_d\|_\alpha$ es acotado y describir la cota en términos de $\|f_n - f\|_\alpha$.

Expresando las cotas obtenidas anteriormente en términos de la Observación 4.23, si identificamos los vectores $b_n$ y $b$ con las constantes $b_n(0)$ y $b(0)$ como elementos de $\mathcal{P}_d$, podemos escribir la ecuación (4.7) como

$$M_n[p_{n,d}]_{\mathcal{B}} = [b_n]_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad M[p_d]_{\mathcal{B}} = [b]_{\mathcal{B}}. \tag{4.9}$$

Observar que (4.9) se verifica con respecto a cualquier base de $\mathcal{P}_d$, en particular, con respecto a la base $\mathcal{B}'$ que definimos en la Observación 4.23. Obtenemos entonces que

$$\|p_{d,n} - p_d\|_\alpha^2 = \sum_{j=0}^{d} \left| c_j^n (j+1)^{\alpha/2} - c_j (j+1)^{\alpha/2} \right|^2$$

lo cual es igual a

$$\left\| [p_{d,n}]_{\mathcal{B}'} - [p_d]_{\mathcal{B}'} \right\|_0^2 = \left\| [M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b_n]_{\mathcal{B}'} - [M]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b]_{\mathcal{B}'} \right\|_0^2.$$

Aplicando la desigualdad triangular, tenemos que $\|p_{d,n} - p_d\|_\alpha$ está acotado superiormente por

$$\left\| [M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b_n]_{\mathcal{B}'} - [M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b]_{\mathcal{B}'} \right\|_0 + \left\| [M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b]_{\mathcal{B}'} - [M]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b]_{\mathcal{B}'} \right\|_0. \tag{4.10}$$

Recordando que $[M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} = D^{-1} M_n^{-1} D$, $[M]_{\mathcal{B}'}^{-1} = D^{-1} M^{-1} D$ y $[b]_{\mathcal{B}'} = D^{-1} [b]_{\mathcal{B}}$ tenemos la siguiente estimación para el primer término del lado derecho en (4.10)

$$\left\| [M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b_n]_{\mathcal{B}'} - [M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b]_{\mathcal{B}'} \right\|_0 \leq \|D^{-1}\|_F \, \|M_n^{-1}\|_F \, \|b_n - b\|_0.$$

Para acotar el segundo sumando en (4.10) usamos la siguiente factorización: si $A, B$ son dos matrices inversibles, entonces

$$A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - A)A^{-1},$$

y por lo tanto

$$\|A^{-1} - B^{-1}\|_F \leq \|B^{-1}\|_F \, \|B - A\|_F \, \|A^{-1}\|_F.$$

Esta última desigualdad implica que

$$\left\| [M_n]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b]_{\mathcal{B}'} - [M]_{\mathcal{B}'}^{-1} [b]_{\mathcal{B}'} \right\|_0 \leq \|D^{-1}\|_F \left\| M_n^{-1} - M^{-1} \right\|_F \|b\|_0,$$

lo cual está acotado por

$$\|D^{-1}\|_F \, \|M^{-1}\|_F \, \|M - M_n\|_F \, \|M_n^{-1}\|_F \, \|b\|_0.$$

En resumen, obtuvimos que $\|p_{d,n} - p_d\|_\alpha$ está acotado superiormente por

$$\|D^{-1}\|_F \, \|M_n^{-1}\|_F \left( \|b_n - b\|_0 + \|M^{-1}\|_F \, \|M - M_n\|_F \, \|b\|_0 \right).$$

Observando que $\|D^{-1}\|_F$ depende únicamente de $d$ y $\alpha$, la conclusión del teorema se obtiene tomando $\psi(d, \alpha) = \|D^{-1}\|_F$. ∎

En el siguiente Corolario encontramos explícitamente las cotas del Teorema 4.21.

**Corolario 4.24.** *Las constantes $\varphi(d,\alpha)$ y $\psi(d,\alpha)$ halladas en el Teorema 4.21 se pueden elegir de la forma $\varphi(d,\alpha) = C(\alpha)\ \varphi'(d,\alpha)$ donde*

$$\varphi'(d,\alpha) \leq \begin{cases} (d+1)^{(2-\alpha)/2} & si\ \alpha < -1, \\ (d+1)^{(1-\alpha)/2}\sqrt{\ln(d+2)} & si\ \alpha = -1, \\ d+1 & si\ -1 < \alpha < 0, \\ (d+1)^{\alpha+1} & si\ \alpha \geq 0, \end{cases}$$

*y*

$$\psi(d,\alpha) \leq \begin{cases} d+1 & si\ \alpha < -1, \\ \ln(d+2) & si\ \alpha = -1, \\ (\alpha+1)^{-1}(d+1)^{\alpha+1} & si\ \alpha > -1. \end{cases}$$

*Demostración.* Recordemos que ambas constantes $\varphi(d,\alpha)$ y $\psi(d,\alpha)$ sólo dependen de la norma de Frobenius de $D$, $D^{-1}$ y $D^{-2}$. Luego, estimando estas normas para los distintos valores de $\alpha$ obtenemos que

$$\|D\|_F^2 = \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{(j+1)^\alpha} \leq (d+1)^{1-\alpha}, \quad \alpha \leq 0,$$

y

$$\|D^{-1}\|_F^2 = \sum_{j=0}^{d} (j+1)^\alpha \leq \begin{cases} d+1 & \text{si } \alpha < -1, \\ \log(d+2) & \text{si } \alpha = -1, \\ (\alpha+1)^{-1}(d+1)^{\alpha+1} & \text{si } \alpha > -1. \end{cases}$$

Además, para $\alpha > 0$ tenemos que

$$\|D^{-2}\|_F^2 = \sum_{j=0}^{d} (j+1)^{2\alpha} \leq (d+1)^{2\alpha+1}.$$

Por lo tanto, usando (4.8) obtenemos las cotas buscadas. ■

Dado que las cotas que encontramos en el Teorema 4.21 para la norma $\|p_{d,n} - p_d\|_\alpha$ dependen de la norma de Frobenius $\|M^{-1}\|_F$, nos preguntamos si existen cotas uniformes para los valores de las normas de Frobenius de distintas matrices $M^{-1}$ asociadas a distintas funciones $f$ en el espacio $D_\alpha$ ($f$ de norma 1).

**Proposición 4.25.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe una sucesión de funciones de norma 1 $\{g_n\}_{n=0}^\infty \subset D_\alpha \setminus \{0\}$ con p.a.o. de grado 1 de $1/g_n$ dado por una sucesión de matrices $\{M_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que*

$$\|M_n^{-1}\|_F \to \infty \qquad si \qquad n \to \infty.$$

*Demostración.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos explícitamente la matriz $M_n$ asociada al p.a.o. de $1/g_n$ dada en el sistema lineal (4.7), esto es,

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \langle g_n, S g_n\rangle_\alpha \\ \langle S g_n, g_n\rangle_\alpha & \|S g_n\|_\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Notamos que $M_n^{-1}$ está bien definida ya que la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que el determinante de $M_n$ es estrictamente positivo. Luego, la matriz inversa $M_n^{-1}$ está dada por

$$M_n^{-1} = \frac{1}{\|S g_n\|_\alpha^2 - |\langle S g_n, g_n\rangle_\alpha|^2} \begin{pmatrix} \|S g_n\|_\alpha^2 & -\langle g_n, S g_n\rangle_\alpha \\ -\langle S g_n, g_n\rangle_\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

y su norma de Frobenius es

$$\|M_n^{-1}\|_F^2 = \frac{1}{\left(\|S g_n\|_\alpha^2 - |\langle g_n, S g_n\rangle_\alpha|^2\right)^2} \left(\|S g_n\|_\alpha^4 + 2|\langle S g_n, g_n\rangle_\alpha|^2 + 1\right).$$

Para definir $g_n$, fijamos una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Veamos primero el caso $\alpha \le 0$: para $n \in \mathbb{N}$, elegimos la sucesin $g_n \in D_\alpha$ como los núcleos reproductivos normalizados en $D_\alpha$

$$g_n = \frac{k^\alpha_{1/a_n}}{\|k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha}.$$

Usando la propiedad reproductiva obtenemos que

$$\|k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha^2 = \langle k^\alpha_{1/a_n}, k^\alpha_{1/a_n}\rangle_\alpha = k^\alpha_{1/a_n}(1/a_n) = \sum_{j=0}^\infty \frac{|a_n|^{-2j}}{(j+1)^\alpha}.$$

A partir de la definición de los núcleos podemos calcular las normas de $\|S k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha^2$, en efecto,

$$\langle S k^\alpha_{1/a_n}, S k^\alpha_{1/a_n}\rangle_\alpha = |a_n|^2 \sum_{j=1}^\infty \frac{|a_n|^{-2j}}{j^{2\alpha}}(j+1)^\alpha \le |a_n|^2 \, \|k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha^2.$$

Luego, podemos acotar la entrada $(1,1)$ de la matriz $M_n^{-1}$ de la siguiente manera

$$\|S g_n\|_\alpha^2 = \langle S g_n, S g_n\rangle_\alpha = \frac{\|S k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha^2}{\|k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha^2} \le |a_n|^2.$$

En este punto, resta acotar $|\langle S g_n, g_n\rangle|^2$, sin embargo, es posible encontrar su valor exacto usando una vez más la propiedad reproductiva de los núcleos. En efecto, $|\langle S g_n, g_n\rangle_\alpha|^2$ está dado por

$$\frac{|\langle S k^\alpha_{1/a_n}, k^\alpha_{1/a_n}\rangle_\alpha|^2}{\|k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha^4} = \frac{1}{|a_n|^2} \frac{|k^\alpha_{1/a_n}(1/a_n)|^2}{\|k^\alpha_{1/a_n}\|_\alpha^4} = \frac{1}{|a_n|^2}.$$

Por lo tanto, una cota interior para la norma de $M_n^{-1}$ es,

$$\|M_n^{-1}\|_F^2 \geq \frac{1}{(|a_n|^2 - (1/|a_n|^2))^2} \left(2(1/|a_n|^2) + 1\right).$$

El lado derecho diverge si $a_n \to 1$. Luego, tomando $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ se obtiene el resultado deseado.

Analizamos ahora el caso $\alpha > 0$. Consideramos

$$f_n(z) = \frac{1}{1 - z/a_n} \qquad \text{y} \qquad g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_\alpha}.$$

Notar que

$$\|f_n\|_\alpha^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_n|^{-2j}(j+1)^\alpha = |a_n|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |a_n|^{-2j} j^\alpha = |a_n|^2 \operatorname{Li}_{-\alpha}(|a_n|^{-2}),$$

donde $\operatorname{Li}_s(z)$ se llama el polilogaritmo de orden $s$ y argumento $z$.

Haciendo un cálculo sencillo se demuestra que $\|S f_n\|_\alpha^2 = |a_n|^2(\|f_n\|_\alpha^2 - 1)$ y $\langle S f_n, f_n\rangle_\alpha = a_n(\|f_n\|_\alpha^2 - 1)$. Remplazando estas expresiones en la definición de $g_n$ obtenemos directamente que

$$\|S g_n\|_\alpha^2 = |a_n|^2 \left(1 - \frac{1}{\|f_n\|_\alpha^2}\right),$$

y de forma análoga tenemos que

$$|\langle S g_n, g_n\rangle_\alpha|^2 = |a_n|^2 \left(1 - \frac{1}{\|f_n\|_\alpha^2}\right)^2.$$

El numerador en la expresión de $\|M_n^{-1}\|_F^2$ es mayor o igual que 1 para todo $n \in \mathbb{N}$ y el denominador se puede expresar en términos de $\|f_n\|_\alpha^2$ como

$$|a_n|^2 \left(1 - \frac{1}{\|f_n\|_\alpha^2}\right) \frac{1}{\|f_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{\operatorname{Li}_{-\alpha}(|a_n|^{-2})} \left(1 - \frac{1}{|a_n|^2 \operatorname{Li}_{-\alpha}(|a_n|^{-2})}\right).$$

Como $j^\alpha \geq 1$ para todo $j \geq 1$ y $\alpha > 0$ tenemos que

$$\operatorname{Li}_{-\alpha}(|a_n|^{-2}) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_n|^{-2j} j^\alpha \geq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n|^{-2j} = \frac{|a_n|^2}{1 - |a_n|^{-2}} = \frac{|a_n|^4}{|a_n|^2 - 1},$$

lo cual tiende a infinito si $a_n \to 1$. Esto implica que $\|M_n^{-1}\|_F$ diverge si $n$ tiende a $\infty$. Esto concluye la demostración. ∎

# Bibliografía


[1] A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal, and V. Paternostro, Diagonalization of shift-preserving operators, *Adv. Math.* **389** (2021), Paper No. 107892, 32 pp. 8

[2] A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal, and V. Paternostro, Dynamical sampling for shift-preserving operators, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **51** (2021), 258–274. 8

[3] A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal, and V. Paternostro, Reducing and invariant subspaces under two commuting shift operators, *J. Math. Anal. Appl.* (2023), 127481.

[4] A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal, and V. Paternostro, Frames by orbits of two operators that commute, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **66** (2023), 46-61.

[5] A. Aguilera and D. Seco, Convergence and preservation of cyclicity, (2023), Aceptado en *J. Oper. Theory*. 10, 85

[6] A. Aldroubi, C. Cabrelli, A. F. Cakmak, U. Molter, and A. Petrosyan, Iterative actions of normal operators, *J. Funct. Anal.*, **272**, 3 (2017), 1121–1146. 8

[7] A. Aldroubi, C. Cabrelli, U. Molter, and S. Tang, Dynamical Sampling, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **42**, 3 (2017), 378–401. 8

[8] A. Aldroubi, J. Davis, and I. Krishtal, Dynamical sampling: time-space trade-off, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **34**, 3 (2013), 495–503. 8

[9] A. Aldroubi, J. Davis, and I. Krishtal, Exact reconstruction of signals in evolutionary systems via spatiotemporal trade-off, *J. Fourier Anal. Appl.*, **21**, 1 (2015), 11–31. 8

[10] A. Aldroubi and I. Krishtal, Krylov subspace methods in dynamical sampling, *STSIP, Shannon Centennial Volume*, **15** (2016), 9–20. 8

[11] A. Aldroubi, I. Krishtal, and S. Tang., Phaseless reconstruction from space–time samples, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **48**, 1 (2020), 395–414. 8

[12] A. Aldroubi and K. Grchenig, Nonuniform Sampling and Reconstruction in Shift-Invariant Spaces, *SIAM*, **43** (4) (2001), 585620. 8

[13] A. Aldroubi and A. Petrosyan, *Dynamical sampling and systems from iterative actions of operators*, Frames and Other Bases in Abstract and Function Spaces, Springer, 2017. 8

[14] C. Bnteau and R. Centner, A survey of optimal polynomial approximants, applications to digital filter design, and related open problems, *Complex Anal. Its Synerg.*, **7** (2021), Article 16. 10

[15] C. Bénéteau, A. Condori, C. Liaw, D. Seco and A. Sola, Cyclicity in Dirichlet-type spaces and extremal polynomials, *J. Anal. Math.*, **126** (2015), 259–286. 10, 98

[16] C. Bénéteau, G. Knese, Ł. Kosiński, C. Liaw, D. Seco, and A. Sola, Cyclic polynomials in two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368** No. 12, Dec. 2016, 8737–8754. 10, 94

[17] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81**, (1949), 239-255. 9, 13, 23, 27

[18] M. Bownik, The structure of shift-invariant subspaces of $L^2(R^n)$, *J. Funct. Anal.*, 177(2) (2000), 282309. 38

[19] M. Bownik and J. Iverson, Multiplication-invariant operators and the classification of LCA group frames, *J. Funct. Anal.*, **280** (2) (2021), Paper No. 108780. 43, 45, 82, 83

[20] M. Bownik and K. Ross, The Structure of Translation-Invariant Spaces on Locally Compact Abelian Groups, *J. Fourier Anal. Appl.*, **21**, (2015), 849-884. 37, 40, 41, 43, 71, 82, 83

[21] L. Brown and A. L. Shields, Cyclic vectors in the Dirichlet space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**, No. 1 (1984), 269–304. 10, 85, 86, 91, 92, 94, 97

[22] C. Cabrelli, U. Molter, V. Paternostro, and F. Philipp, Finite sensor dynamical sampling, *2017 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*, (2017), 50–54. 8

[23] C. Cabrelli, U. Molter, V. Paternostro, and F. Philipp, Dynamical sampling on finite index sets, *J. Anal. Math.*, **140**,2, (2020), 637–667.

[24] C. Cabrelli, U. Molter, and D. Suarez, Frames of iterations and vector valued model spaces, preprint (2022), arXiv:2203.01301. 9

[25] O. Christensen, M. Hasannasab, and F. Philipp, Frame properties of operator orbits, *Math. Nachrichten*, **293**, 1 (2019), 52-66. 8, 9

[26] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Second Edition, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2016. 14

[27] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag New York, Inc, (1990). 17, 28

[28] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, American Mathematical Soc. 1977. 28, 29

[29] P. L. Duren, *Theory of $H^p$ Spaces*, Academic Press, New York, 1970. 10

[30] P. Duren and A. Schuster, *Bergman Spaces*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2004. 10, 86

[31] O. El-Fallah, K. Kellay, J. Mashreghi, and T. Ransford, *A primer on the Dirichlet space*, Cambrige University Press, 2014. 10, 85, 86, 93, 94, 96

[32] P. Enflo, On the invariant subspace problem for Banach spaces, On the invariant subspace problem for Banach spaces, *Acta Math.*, **158** (3) (1987), 213-313. 26

[33] E. Fricain, J. Mashreghi, and D. Seco, Cyclicity in Reproducing Kernel Hilbert Spaces of Analytic Functions, *Comput. Methods Funct. Theory*, **14** (2014), 665–680. 98

[34] S. R. Garcia, J. Mashreghi, and W. T. Ross, *Introduction to Model Spaces and their Operators*, Cambridge U.P. (2015). 9, 20, 22, 26, 85

[35] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press Inc., 1981. 86

[36] P. Gathage and V. Mandrekar, On Beurling type invariant subspaces of $L^2(\mathbb{T}^2)$ and their equivalence, *J. Oper. Theory*, **20**, 1 (1988), 83-89. 69

[37] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, Expanded Edition, Birkhäuser, 1998. 14, 17, 18, 19

[38] P. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **1961**, (1961), 102–112. 13, 43, 46

[39] D. Han and D. R. Larson, Frames, bases and group representations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **147** (697) (2000). 14, 19, 20

[40] H. Helson, *Lectures on Invariant Subspaces*, Academic Press, London, 1964. 9, 13, 20, 37

[41] H. Helson, and D. Lowdenslager, Invariant subspaces, *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960)*, (1961), 251262. 9

[42] R. P. Kopp, A subcollection of algebras in a collection of Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 433–435. 88

[43] B. Korenblum, Cyclic elements in some spaces of analytic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **5** (1981), 317–318. 95

[44] V. A. Kotelnikov, On the transmission capacity of the ether and of cables in electrical com- munications, *Proc. First All-Union Conference on the Technological Reconstruction of the Communications Sector and the Development of Low-current Engineering*, Moscow, 1933. 7

[45] B. Sz. Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*, Springer, 2010. 9, 65, 66

[46] F. Philipp, Bessel orbits of normal operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **448**, 2 (2017), 767–785. 8

[47] P. D. Lax, Translation invariant subspaces, *Acta Math.*, **101**, (1959), 163-178 . 13, 43, 46

[48] B. J. Pettis, On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (2), (1938), 277-304. 28

[49] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1973. 28, 44, 45, 46, 74, 79

[50] C. J. Read, A solution to the invariant subspace problem, *Bull. London Math. Soc.*, **16** (4) (1984), 337-401. 26

[51] C. J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space $l_1$, *Bull. London Math. Soc.*, **17** (4) (1985), 305-317. 26

[52] C. J. Read, The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, 2: hypercyclic operators, *Israel J. Math.*, **63** (1) (1988), 1-40. 26

[53] W. T. Ross, The classical Dirichlet space, in *Recent Advances in Operator-Related Function Theory, Contemp. Math.*, **393** (2006), 171197. 10

[54] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, International Student Edition, Mc Graw-Hill Series in Higher Mathematics, 1970. 20, 25

[55] M. Sargent and A. Sola, Optimal approximants and orthogonal polynomials in several variables, *Canad. J. Math.*, (2020) 119. 10

[56] C. E. Shannon, Communication in the Presence of Noise, *Proc. IRE*, **37** (1) (1949), 10-21. 7

[57] T.P. Srinivasan, Double invariant subspaces, *Pacific J. Math.*, **14** (2) (1964), 701-707. 28

[58] D. A. Stagenga, Multipliers of the Dirichlet space, *Ill. J. Math.*, **24** (1) (1980), 113-139. 92

[59] S. Tang, System identification in dynamical sampling, *Adv. Comput. Math.*, **43**, 3 (2017), 555–580. 8

[60] E. T. Whittaker, On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 35, pp. 181194, Jul. 1915. 7