



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

# **Cargas conservadas e invariantes conformes en teorías gravitatorias de alto orden en la curvatura**

Tesis presentada para optar al título de  
Doctor de la Universidad de Buenos Aires  
en el área de Ciencias Físicas

**Lic. Edmundo Federico Lavia**

Director de tesis: Dr. Gastón Giribet

Consejero de estudios: Dr. Pablo Balenzuela

Lugar de trabajo: Dirección de Investigación de la Armada

Buenos Aires, 2023

## GLOSARIO DE SIGLAS

AdS	Anti-de Sitter
BTZ	Agujero negro de Bañados Teitelboim y Zanelli
CAS	Computer Algebra System (Sistema de Algebra Computacional)
CEH	Cosmological Einstein Hilbert
CFT	Conformal Field Theory
CG	Critical Gravity (también Chiral Gravity)
CTC	Closed Timelike Curves (Curvas temporales cerradas)
dS	de Sitter
EH	Einstein Hilbert
EMG	Exotic Massive Gravity
GR	General Relativity (Relatividad General)
LCS	Lagrangiano de Chern Simons
MMG	Minimal Massive Gravity
NMG	New Massive Gravity
ODE	Ordinary Differential Equation (Ecuación Diferencial Ordinaria)
QFT	Quantum Field Theory
TMG	Topologically Massive Gravity
UV	UltraViolet
WAdS	Warped Anti-de Sitter
WBH	Warped Black Hole
ZDG	Zwei-Dreibein Gravity

## Convenciones y notación

En el capítulo 3 explícitamente se utilizan unidades MLT de manera que los factores  $c$  y  $G$  aparecen explícitamente. Para el resto del trabajo se utilizan unidades  $c = 1$  y la convención de la signatura  $(-, +, \dots, +)$ .

Otras convenciones de notación empleada en este trabajo son:

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2} (A_{[ab]} - A_{[ba]}) \quad \text{Antisimetrizador}$$

$$A_{(ab)} = \frac{1}{2} (A_{(ab)} + A_{(ba)}) \quad \text{Simetrizador}$$

$$\partial_a A_b \equiv A_{b,a} \quad \text{Derivada ordinaria}$$

$$\nabla_a A_b \equiv A_{b;a} \quad \text{Derivada covariante}$$

# Cargas conservadas e invariantes conformes en teorías gravitatorias de alto orden en la curvatura

## Resumen

Esta tesis constituye un reporte de trabajos que se pueden enmarcar dentro de la gran corriente de investigación que conlleva la construcción de una teoría gravitatoria consistente con las demás interacciones básicas de la naturaleza; o sea, una teoría gravitatoria que contemple los preceptos cuánticos. El punto de partida de esta construcción aquí, y en una gran parte de las investigaciones actuales, es la teoría de la relatividad general, encarnada en la acción de Einstein-Hilbert, suplementada con correcciones de mayor orden en derivadas, lo cual posibilita construir modelos para explorar ciertos aspectos de la teoría cuántica a la que se aspira. Dentro de esa gran corriente una avenida importante *per se* es aquella asociada a la Conjetura de Maldacena (Correspondencia Anti-de Sitter/Conformal Field Theory), que vincula gravedad en  $D+1$  dimensiones con una teoría cuántica, que posee simetría conforme, en  $D$  dimensiones. Esta conexión *holográfica* ha potenciado el estudio de teorías en  $D = 3$  dimensiones con diversas correcciones (que aparecen como términos suplementarios) las cuales resultan en general masivas, o sea que prescriben un gravitón con masa, pero que pese a tal patología aún permiten investigar muchas otras características puramente cuánticas. Los primeros capítulos de esta tesis se vinculan con tres trabajos englobados dentro de lo que se podría llamar “gravedad masiva 3D”. Los dos primeros se ocupan de la determinación de cargas conservadas para dos espaciotiempos que son solución, entre otras, de la teoría conocida como New Massive Gravity (NMG), consolidada desde su aparición en 2009 como un prometedor *toy-model* de gravedad cuántica. Estos espaciotiempos, Warped Anti-de Sitter y Lifshitz, son ejemplos conspicuos de la llamada holografía no-AdS, que involucra espacios que no son asintóticamente Anti-de Sitter, lo que genera un interés extra en razón de que ensancha el espectro de aplicaciones en la física de altas energías de sistemas cuánticos provistos de otras simetrías. Luego, continuando en las teorías masivas 3D, se analizan los puntos críticos de la llamada Exotic Massive Gravity (EMG), la cual generaliza Topologically Massive Gravity (TMG), que fuera la primer teoría masiva aparecida. Estos puntos críticos ocurren en valores especiales de los parámetros y son importantes debido a que en dichos valores la teoría cuántica asociada presenta características que la hacen aplicable a sistemas como los de materia condensada fuertemente acoplada. Finalmente, la tesis se cierra con la presentación de un estudio concerniente a una teoría gravitatoria para dimensión  $D \geq 4$  basada en una generalización del tensor de Einstein que se apoya en el concepto de la Q-curvatura, un invariante conforme que se ha estudiado en los últimos años en varios contextos dentro de la física y la matemática.

# Conserved charges and conformal invariants in gravitational theories with higher order curvature terms

## Abstract

This thesis constitutes a report of works that can be framed within the stream of research that entails the construction of a gravitational theory consistent with the other basic interactions of nature; that is, a gravitational theory that contemplates the quantum precepts. The starting point for this construction here, and in a large part of current research, is the theory of General Relativity, embodied in the Einstein-Hilbert action, supplemented by higher order corrections in derivatives, which makes it possible to build models to explore certain aspects of the quantum theory that constitutes the ultimate aspiration. Within this stream, an important avenue *per se* is that associated with the Maldacena Conjecture (the Anti-de Sitter/Conformal Field Theory correspondence), which links gravity in  $D+1$  dimensions with a quantum theory provided with conformal symmetry in  $D$  dimensions. This *holographic* connection has promoted the study of theories in  $D=3$  dimensions with various corrections in the form of supplementary terms which are generally massive, that is, they prescribe a graviton with mass. In spite of such a pathology they still allow us to investigate many other purely quantum features. The first chapters of this thesis are related to three works encompassed within what could be called 3D massive gravity. The first two deal with the determination of conserved charges for two spacetimes that are solutions, among others, of the theory known as New Massive Gravity (NMG), consolidated since its appearance in 2009 as a promising *toy-model* of quantum gravity. These spacetimes, Warped Anti-de Sitter and Lifshitz, are conspicuous examples of so-called non-AdS holography, which involves spaces that are not asymptotically Anti-de Sitter, which generates an extra interest because it broadens the spectrum of applications in high-energy physics of quantum systems provided with other symmetries. Then, continuing in the 3D massive theories realm, the critical points of the Exotic Massive Gravity (EMG) are analyzed. This theory generalizes the first massive theory appeared, which was Topologically Massive Gravity (TMG). These critical points occur at special values of the parameters and are important because for these values, the associated quantum field theory presents characteristics that make it applicable to systems such as those of strongly coupled condensed matter. Finally, the thesis ends with the presentation of a study concerning a gravitational theory for dimension  $D \geq 4$  based on a generalization of the Einstein tensor and grounded on the concept of Q-curvature, a conformal invariant that has been studied in recent years in various contexts within physics and mathematics.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Sobre la notación y el uso de palabras en inglés . . . . .	16
1.2. Nuevos resultados provistos por esta tesis . . . . .	16
<b>2. Teorías masivas y algunas soluciones</b>	<b>19</b>
2.1. Topologically massive gravity (TMG) . . . . .	19
2.2. Gravedad quirál . . . . .	20
2.3. New massive gravity (NMG) . . . . .	21
2.4. Exotic Massive Gravity (EMG) . . . . .	22
2.5. Acción para espaciotiempos con bordes . . . . .	23
2.6. Espacios anti-de Sitter (AdS) . . . . .	25
2.6.1. El agujero negro BTZ . . . . .	26
2.7. Espacios warped AdS . . . . .	26
2.7.1. Agujeros negros Warped AdS . . . . .	27
2.8. Espacios Lifshitz . . . . .	28
2.8.1. Agujero negro de Lifshitz . . . . .	29
<b>3. Cálculo de cargas conservadas</b>	<b>31</b>
3.1. Leyes de conservación integrales y diferenciales . . . . .	31
3.2. Cálculo de cargas conservadas en espacio-tiempos planos . . . . .	34
3.3. Cargas conservadas en espacios curvos: el problema . . . . .	36
3.4. Construcción de pseudotensores . . . . .	37
3.5. El enfoque de energía quasilocal . . . . .	40
3.6. Vectores de Killing y leyes de conservación . . . . .	42
3.7. El formalismo covariante . . . . .	44
3.7.1. Expansión de las ecuaciones de movimiento . . . . .	44
3.7.2. Ley de conservación . . . . .	46
3.7.3. Cálculo de carga conservada por integración . . . . .	47
3.7.4. Cálculo de cargas: procedimiento analítico . . . . .	48
3.7.5. Potencial ADT para NMG . . . . .	51
3.7.6. Cálculo de cargas: procedimiento numérico . . . . .	52
3.8. Cálculo de cargas conservadas en el campo cercano . . . . .	53
3.8.1. Masa del agujero negro BTZ calculado en campo cercano . . . . .	55
3.8.2. Termodinámica del agujero negro BTZ . . . . .	56

<b>4. Cargas conservadas en WAdS<sub>3</sub></b>	<b>58</b>
4.1. Motivación . . . . .	58
4.2. Espacios timelike WAdS <sub>3</sub> a partir de la métrica de Gödel . . . . .	59
4.2.1. Introducción de un defecto con masa y momento angular en el es- paciotiempo de Gödel . . . . .	61
4.2.2. Timelike WAdS <sub>3</sub> como solución de NMG . . . . .	63
4.3. Cálculo quasilocal de cargas conservadas . . . . .	63
4.3.1. Términos de borde en NMG . . . . .	63
4.3.2. El tensor de esfuerzos quasi-local . . . . .	65
4.3.3. Energía gravitatoria quasi-local . . . . .	66
4.4. Cálculo de cargas conservadas por el formalismo covariante . . . . .	67
4.4.1. Masa y momento angular . . . . .	68
4.5. Conclusiones . . . . .	69
<b>5. Cargas conservadas en Lifshitz</b>	<b>70</b>
5.1. Motivación . . . . .	70
5.2. El problema del cálculo de la masa para el agujero negro de Lifshitz . . . . .	71
5.3. Cálculo bajo el formalismo covariante . . . . .	72
5.4. Cálculo de cargas en la región cercana . . . . .	74
5.4.1. Masa del agujero BTZ deformado . . . . .	74
5.4.2. Masa del agujero negro de Lifshitz . . . . .	76
5.5. Conclusiones . . . . .	77
<b>6. Puntos críticos de EMG</b>	<b>79</b>
6.1. Motivación . . . . .	79
6.2. Cargas centrales . . . . .	79
6.3. Ondas exóticas sobre agujeros negros . . . . .	81
6.3.1. Geometría BTZ deformada . . . . .	81
6.3.2. Límite de las soluciones en TMG . . . . .	84
6.3.3. Puntos confluentes . . . . .	84
6.3.4. Puntos quirales . . . . .	84
6.3.5. Puntos confluentes dobles . . . . .	86
6.3.6. Existencia de otros puntos críticos . . . . .	86
6.4. Discusión . . . . .	86
<b>7. Teoría gravitatoria modificada</b>	<b>89</b>
7.1. Motivación . . . . .	89
7.2. Q-curvatura . . . . .	91
7.3. Invariantes conformes . . . . .	93
7.4. Acción de la teoría . . . . .	94
7.5. Vacíos de la teoría . . . . .	96
7.6. Otras soluciones: agujeros negros, espacios no-Einstein y ondas gravitacionales	98
7.6.1. Agujeros negros . . . . .	98
7.6.2. Ondas gravitacionales . . . . .	98
7.6.3. Espacios no-Einstein . . . . .	100
7.7. Extensión dimensional alternativa . . . . .	101
<b>8. Conclusión</b>	<b>103</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	8
<b>A. Consistencia por la tercera vía</b>	<b>105</b>
<b>B. Linealización de ecuaciones de movimiento</b>	<b>106</b>
<b>C. Agujeros negros Warped</b>	<b>108</b>
<b>D. Métrica de agujero negro Lifshitz en campo cercano</b>	<b>110</b>
<b>E. Integración de carga en función de dos radios</b>	<b>113</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>114</b>



## Agradecimientos, y todo eso

Soy de la opinión, obviamente discutible, de que la selección natural de las especies y la representación de la gravedad como geometría (en la relatividad general) son las dos ideas más profundas y maravillosas que han surgido del intelecto humano. Una de ellas está vinculada directamente con la física de manera que fue esa fascinación, sumada a la que me produce la manipulación de estructuras matemáticas en aras de poder extraer una conclusión aplicable a nuestro mundo natural (i.e. “hacer” física teórica) la que terminó dando mi acercamiento a esta estimulante área de trabajo.

En la investigación formal dentro de la misma guió mis pasos el Dr. Gastón Giribet, quien se torna entonces destinatario de este primer agradecimiento. Él asumió el compromiso de dirección sabiendo que esta sería una tesis un poco diferente dadas las características particulares en las cuales se iba a desarrollar el trabajo; un alumno que llegaba en una edad donde “uno ya está para otras cosas” y que además se ganaba el pan haciendo investigación en otra área sin puntos de contacto evidentes. Creo que ambos asumimos un compromiso de confianza... Y aquí estamos.

A medida que uno se va haciendo grande, y yo me encuentro avanzado dentro de ese proceso, se llega a la conclusión de que dentro de la miriada de acontecimientos que determinaron el camino recorrido muchos de ellos dependen casi imperceptiblemente de una gran cantidad de otros seres humanos, algunos de los cuales están cercanos hoy en día y otros que resultaron con líneas de mundo que divergieron de la nuestra propia. Dirigiendo la vista, ya cansada, hacia atrás, es ahora, luego de haber hollado mucho los caminos, cuando uno puede darse cuenta cabalmente de esas conexiones, de que en realidad tiene a una legión de personas para agradecer. A continuación, entonces, un intento de reconocer esa deuda.

Quiero agradecer a todo el grupo de trabajo encabezado por Silvia Blanc, que forma parte del día a día laboral, que constituye mi *modus vivendi* desde 2011 cuando buscaba mi primer trabajo de investigación como físico recién recibido: Silvia, Igor, Mariano, Patricio, Rui, Juan, Michéle, Analía, Daniel y a los integrantes más recientes, Marcos y Sol. A Silvia debo agradecer especialmente el haberme brindado el espacio temporal para desarrollar estas actividades de doctorado y a Juan las innumerables charlas sobre lo que significa vivir la experiencia de ser un “doctorando”.

Dentro del ámbito de la FCEyN, quiero agradecer al Dr. Pablo Balenzuela, mi actual consejero de estudios y al Dr. Ariel Chernomoretz, directores de mi tesis de grado, por haber inculcado ciertos hábitos saludables de trabajo que aún me acompañan (y estimo que lo seguirán haciendo). A Mariano Mayochi, que en su función de gestión de los asuntos formales burocráticos de los alumnos de doctorado se toma un trabajo extra, paternal, para propiciar que todo sea lo más terso posible.

Agradezco a mis compañeros/as de cursada, que nucleados ahora bajo la lista “la pipa y el electrón” todavía siguen presentes luego de todos estos años. A Javier, José, Pancho,

Mariana, Joaquín, Andrés, Pablito, Ezekiel y el inefable Chino. Espero no olvidarme de alguno (que sabrá disculpar).

Debo agradecer también al grupo de discusión de temas “filosóficos” (lo que incluye los inefables bueyes perdidos) conocido como *El Gabinete* integrado por Adrián, Mauro, Guillermo y Daniel. Especialmente agradezco a Adrián sus lúcidas apreciaciones sobre los vericuetos de ser un investigador científico, con sus luces y sus sombras.

Agradezco a mis coautores en los trabajos amparados bajo esta tesis: L. Donnay, J.J. Fernández Melgarejo, N. Grandi y M. Chernicoff y especialmente a Andrés Goya, con quién establecí una comunión de trabajo y temas de la vida, sostenida en invitarnos, alternativamente, un café para charlar.

A Carlos Monteagudo, que hace más de veinte años me sugirió, basado solamente en sentido común, venir a estudiar a la UBA.

Agradezco a mi abuela Nai, que dedicó los últimos años de su vida –sin quejarse jamás– a criar un niño, y a mis padres, quienes no vivieron lo suficiente como para ver nada de esto pero que, sin embargo, construyeron los cimientos que me permitieron a mi llegar hasta acá. También, en la familia, a mi hermano Darío, que me demuestra que otra manera de atravesar la vida, dotándola de cierta épica fuera de todo convencionalismo, es posible.

Antes de terminar quiero sumar un agradecimiento a las fuerzas desconocidas u olvidadas que aportaron en hacer posible esto a través de conexiones demasiado sutiles para ser conscientemente percibidas o que fueron injustamente, por esos mecanismos selectivos de la memoria, pasadas al desierto del olvido.

El último agradecimiento, pero no el menos importante, es para mi esposa, Sol, con la cual compartimos, hace ya unos cuantos años, una línea de mundo de eventos espacio-temporales. Ese compartir hace más fácil, en promedio, atravesar la incertidumbre inherente a transitar este efecto macroscópico conocido como vida.

# Capítulo 1

## Introducción

Si bien es cierto que es esperable que GR (Relatividad General, la teoría clásica de la gravedad) quede en un futuro subsumida en una teoría mayor que abarque los aspectos cuánticos, no despreciables en ciertas situaciones físicas de gran relevancia como las de agujeros negros y cosmología inflacionaria –por citar dos ejemplos conspicuos–, es indudable que, siendo ella misma el límite de bajas energías de esta aún elusiva teoría cuántica de la gravedad<sup>1</sup>, provee un campo de investigación fértil para explorar su propia generalización cuántica.

Gran parte de esa fertilidad se debe a la llamada “Correspondencia AdS/CFT”, originada por la Conjetura de Maldacena [1], la cual permite vincular una teoría de cuerdas, que en bajas energías se asocia a una teoría clásica de gravedad, sobre un espacio tiempo de anti-de Sitter (AdS) en  $D+1$  dimensiones, con una teoría cuántica de campos conforme (una CFT, *Conformal Field Theory*) en  $D$  dimensiones, lo cual brinda una interesante y rica veta para estudiar teorías cuánticas de gravedad, como lo prueba la gran cantidad de trabajos dedicados a explorar diferentes aspectos de la Correspondencia aparecidos posteriormente. La Figura 1.1 provee un esquema cualitativo de la Correspondencia. La versatilidad de la Conjetura no se acaba con lo mencionado puesto que también provee aplicaciones en sistemas cuánticos fuertemente correlacionados de la física de la materia condensada, en sistemas hidrodinámicos y en la física de altas energías donde se pueden aproximar aspectos de la fuerza fuerte, explicados por QCD (*Quantum Chromo Dynamics*), a través de una teoría conforme.

El proceso de modificar la teoría clásica de la gravedad, representada por la acción de Einstein-Hilbert (EH) con o sin constante cosmológica, para incorporar correcciones que la aproximen (perturbativamente) a la teoría completa, corresponde al añadido de términos de mayor orden en la curvatura. Estos términos provocan correcciones importantes en las escalas altas de energía (lo que comúnmente se refiere como el régimen ultravioleta (UV, de *Ultra Violet*), en referencia a longitudes de onda pequeñas). Esto da origen a teorías modificadas de la gravedad, las cuales suelen explorarse en dimensiones diferentes a  $D=4$ , debido a que en un número de dimensiones menor ciertas patologías que surgen al intentar introducir los preceptos cuánticos en la gravedad se presentan de una manera más “suave”, y, por ello, pueden controlarse.

En  $D=3$  dimensiones la acción cosmológica de Einstein-Hilbert (CEH) es dinámica-

---

<sup>1</sup>GR también constituye el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas, lo cual es bastante natural ya que la misma es quizás la candidata más promisoría a proveer una *picture* consistente de gravedad cuántica.

mente estéril, pero no así sus modificaciones de mayor orden, como fuera visto ya en los años 80. En efecto, añadiéndole a la misma un término de Chern-Simons, construido a partir de la conexión métrica, se obtiene una teoría conocida como Topologically Massive Gravity (TMG) [2] que propaga, en el régimen lineal, una polarización (izquierda o derecha, dependiendo del parámetro de acople del término de Chern-Simons) de una partícula de spin-2 masiva. Es decir que las correcciones incorporadas a la acción generan, aún en el caso de una solución sin materia (solución de vacío de la teoría) partículas dotadas de masa, cuando la teoría es interpretada en el contexto de una teoría de campos. Otra característica indeseable es la no invarianza ante paridad, que es algo presente ya en el término añadido y que resulta heredada. Una teoría de gravedad 3D masiva posterior es New Massive Gravity (NMG) [3]. Esta teoría es invariante ante paridad y tiene algunas otras características interesantes, como el hecho de soportar mayor cantidad de soluciones de agujero negro, lo cual la convierte en un candidato para una teoría consistente, aunque reducida, de gravedad cuántica.

El hecho de que el gravitón, la partícula portadora de la interacción gravitatoria, aparezca dotada de masa, cuando los preceptos aceptados actualmente indican que debiera ser no masiva, puede interpretarse como una patología más –quizás la más distintiva– de las que afectan a estas teorías dimensionalmente simplificadas. En efecto, las teorías que son objeto de estudio en la primera parte de esta tesis forman parte de una categoría de teorías masivas de gravedad.

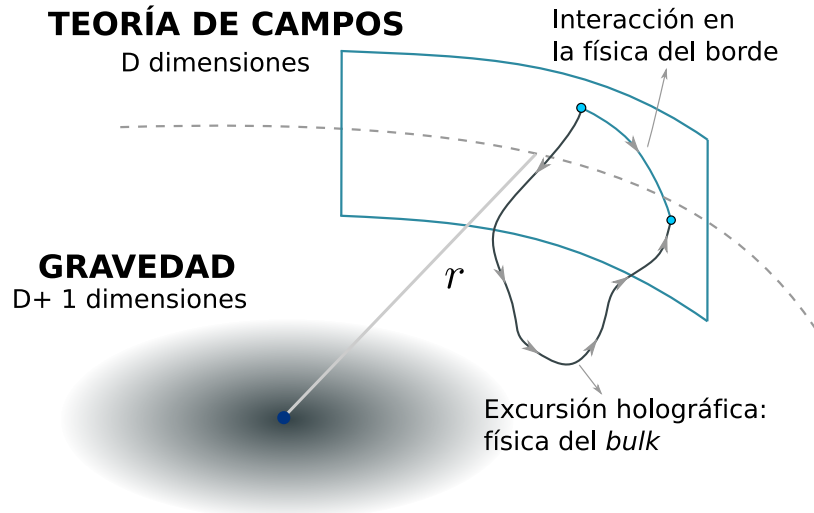


Figura 1.1: Esquema de la Correspondencia AdS/CFT. La física que postula una teoría gravitatoria (o más generalmente, de cuerdas) en  $D + 1$  dimensiones se puede asociar a la física de una teoría cuántica de campos con simetría conforme, definida en el borde del espaciotiempo, de  $D$  dimensiones. En este esquema pictórico, la coordenada  $r$  identifica la posición del borde. Desde el borde  $D$ -dimensional, una “excursión holográfica” sería una inmersión que incluye esa coordenada  $r$  que no forma parte de las  $D$  coordenadas del borde. El interior del espaciotiempo se refiere usualmente como el *bulk* y las teorías gravitatoria y de campos se vinculan entre sí por una relación de “dualidad” de modo que en la correspondencia a una teoría de campos le corresponde su dual gravitatorio y viceversa; a la teoría de gravedad su dual de campos.

En el marco de estas teorías modificadas un estudio de gran relevancia es el cálculo

de observables como lo son las cargas conservadas, las cuales, más allá de su importancia intrínseca dentro de la teoría gravitatoria, permiten, a través de la Correspondencia AdS/CFT, realizar análisis dentro del marco de la teoría cuántica de campos conforme que *vive* en el borde. Las soluciones de agujero negro son de interés especial puesto que constituyen una especie de “solución fundamental” que permite estudiar una configuración gravitatoria mínima pero que es, no obstante, suficiente para poder explorar unitariedad de los modos propagados por la teoría cuando se considera una linealización de la misma. Esta unitariedad está asociada a que la masa, i.e. la energía, de los agujeros negros sea positiva. Luego, la capacidad de que la teoría gravitatoria soporte diferentes soluciones de agujero negro le confiere también un espectro mayor a la hora de analizar la viabilidad de esas soluciones y de la teoría misma respecto de su posibilidad de modelar adecuadamente los aspectos cuánticos de la teoría del borde. No menos importante es el hecho de que la solución de agujero negro del lado gravitatorio se vincula mediante la Correspondencia con una teoría de campos a temperatura finita (es decir, no nula) lo cual le confiere a estas soluciones un grado de aplicabilidad superior respecto de las soluciones de vacío, que se relacionan directamente con teorías a temperatura cero.

Debido a que en relatividad general no hay un concepto local de densidad de energía-momento del campo gravitatorio, el cálculo de una cantidad asignable a la energía, por ejemplo, puede hacerse [4] a través de un cálculo basado en el formalismo hamiltoniano (la teoría de Hamilton-Jacobi) que implica la definición de un tensor de energía-momento sobre el borde del espaciotiempo en cuestión; un borde que se define haciendo una descomposición del tipo  $3 + 1$ , que separa el espacio y el tiempo, al precio de romper la covarianza explícita embebida normalmente en GR y en cualquier teoría gravitatoria. Este procedimiento de determinación del tensor de energía-momento de Brown-York no siempre está bien definido, lo que significa que algunos componentes del mismo pueden diverger cuando el borde es llevado a infinito espacial.

La Correspondencia provee [5] una interpretación para este tensor del borde como el valor de expectación del tensor de energía-momento de la CFT. Las divergencias que aparecen son simplemente las divergencias UV usuales de teoría cuántica de campos (QFT), que pueden ser removidas por el añadido de contratérminos locales. Esta conexión permite avanzar en el entendimiento de los aspectos cuánticos de la gravedad, un trabajo todavía en progreso, utilizando la teoría cuántica del borde, la cual se halla en un estado de consistencia mayor –en lo que hace a sus aspectos cuánticos– que el de su contraparte gravitatoria.

Trabajos posteriores han extendido la correspondencia considerando del lado gravitatorio un tipo de espacio más general que AdS dando origen a lo que se ha dado en llamar *non-AdS holography*. La correspondencia sería, entonces, un caso particular de un principio holográfico<sup>2</sup> más general, lo cual ha suscitado mucha investigación en esa dirección y la aparición de otras descripciones holográficas [6–9]. Dentro de estas uno de los más interesantes ejemplos es el brindado por el espacio *warped* Anti-de Sitter (WAdS<sub>3</sub>), el cual se asocia a una cierta deformación del espacio AdS en 3 dimensiones. Esta correspondencia WAdST/CFT fue propuesta en [8], en el contexto de la teoría TMG, a partir de lo cual sucesivos trabajos se han ocupado de estudiar diferentes aspectos de estos espacios dentro del marco de esta holografía especial [8, 10, 11]. Algunas propuestas sugieren que una teoría de gravedad cuántica en espacios asintóticamente WAdS<sub>3</sub> podría ser dual a una teoría

---

<sup>2</sup>Entendemos por “holográfico”, el concepto de que la información física contenida en un volumen estaría codificada de alguna manera en la frontera de este volumen, que es un conjunto con una dimensión menos.

2D con un cierto tipo de simetría<sup>3</sup> conforme [8, 12–14], de manera que resultan relevantes los estudios sobre el cómputo de observables en estos espacio tiempos.

Dentro de estas nuevas realizaciones del principio holográfico han cobrado interés en los últimos tiempos teorías de materia condensada aplicadas a sistemas fuertemente acoplados que, asimismo, son no-relativistas. En estos sistemas, se presentan transiciones de fase gobernadas por puntos fijos que exhiben un “escaleo dinámico”, anisótropo en tiempo y espacio,

$$t \longrightarrow \lambda^z t, \quad x \longrightarrow \lambda x, \quad (1.1)$$

donde el parámetro  $z \neq 1$  es el llamado exponente dinámico crítico, que cuantifica la anisotropía. El caso  $z = 1$  sería la invarianza de escala usual de la simetría conforme. En general, los sistemas de puntos fijos con la propiedad de escaleo anisótropo (1.1) se denominan *Lifshitz-fixed points*. En este caso la geometría de fondo del dual gravitatorio en la correspondencia necesariamente debe ser diferente a la provista por el espacio  $\text{AdS}_{D+1}$ , debido a que esta última métrica implica de por sí la invarianza de Lorentz  $D$ -dimensional para la teoría que vive en el borde, pero esto es justamente lo que estas teorías fuertemente correlacionadas no poseen.

Dos de los espaciotiempos que permiten esta conexión holográfica no-relativista son el de Schrödinger, que posee, además de la simetría de escala anisótropa una simetría galileana y el de Lifshitz, que solamente presenta la invarianza anisótropa. Estos espacios no aparecen en general como solución de las teorías ordinarias de gravitación, lo cual provee una motivación extra para el estudio de aquellas que sí los admiten. NMG, por ejemplo, cuenta entre sus soluciones a los espacios Lifshitz de manera que es una teoría que naturalmente se presta para explorar esta correspondencia Lif/CFT.

Los primeros dos trabajos que cubre esta tesis se vinculan directamente con el cálculo de cantidades conservadas para espaciotiempos, Warped  $\text{AdS}_3$  y Lifshitz, asociados a estas extensiones de la Correspondencia.

Posteriormente se continúa con el análisis de una teoría masiva de gravedad de  $D = 3$  dimensiones, que se ha denominado Exotic Massive Gravity (EMG), la cual puede verse como una generalización de TMG. Específicamente se discuten los valores de las cargas centrales y la correspondiente anomalía conforme en relación al espacio de fases de la teoría; todos ellos aspectos asociados fundamentalmente a la teoría cuántica conforme del borde.

Por otra parte, con respecto a teorías modificadas para dimensiones  $D \geq 3$ , un modelo de teoría corregida con órdenes superiores en la curvatura es el que consiste en suplementar la acción de Einstein-Hilbert con operadores adicionales construidos como extensiones dimensionales de invariantes topológicos. Este modelo se conoce como teoría de Lovelock [15–18] y ha sido investigado con atención en los últimos veinte años como un ejemplo resoluble para estudiar qué nuevos efectos aparecen en el contexto de la correspondencia AdS/CFT a consecuencia del añadido de contribuciones en órdenes superiores en la curvatura. Ejemplos de estos efectos son resultados como la violación de la cota de Kovtun-Son-Starinnet, el llamado colisionador conforme y las cotas a la energía de Hofman-Maldacena, entre otros.

La teoría de Lovelock está libre de fantasmas en torno al espacio-tiempo de Minkowski o de (A)dS, es resoluble analíticamente en escenarios diversos, y aproxima apropiadamente las modificaciones que la teoría de cuerdas produce a GR. Asimismo, al estar definida a

---

<sup>3</sup>La teoría tendría una simetría conforme parcial; sería simétrica ante dilataciones (del inglés *dilations*) de sentido derecho pero no de sentido izquierdo.

partir de la extensión dimensional de invariantes topológicos, la teoría de Lovelock resulta ser una generalización natural de la teoría de Einstein a dimensión arbitraria. Esto último se debe a que la acción de Einstein-Hilbert de GR es, también, la extensión dimensional de un invariante topológico, i.e. la característica de Euler en dimensión 2.

A través del agregado a la acción de Einstein-Hilbert de términos que corresponden a extensiones dimensionales de invariantes conformes, no necesariamente de invariantes topológicos, se logra una extensión que es, de alguna manera, tan natural como la propuesta por Lovelock, debido a que en dimensión  $D = 2$  el invariante conforme y el invariante topológico coinciden (en otras palabras, hay una sola clase de equivalencia conforme en 2 dimensiones). Este proceso engendra una generalización alternativa de la relatividad general a dimensión arbitraria y con órdenes arbitrarios en la curvatura, y que, aunque de mayor complejidad, tiene varias ventajas por sobre la teoría de Lovelock [15, 16, 19] entre las cuales son de destacar:

- La persistencia como solución de las variedades tipo Einstein, módulo renormalización de la constante cosmológica.
- La aparición de correcciones de orden superior en dimensión  $D = 3$  y  $D = 4$ .
- La aparición de campos masivos de spín 0 y 2 asociados a los grados de libertad locales generados por las derivadas de alto orden.

Para determinar qué invariantes conformes han de ser utilizados se desarrolla un criterio preciso, que requiere elementos de un área de la matemática denominada geometría conforme, que es la subdisciplina de la geometría diferencial que estudia las clases de equivalencias de variedades relacionadas mediante transformaciones locales de Weyl y sus propiedades locales; en especial, en relación a ecuaciones diferenciales. En la geometría conforme existe una cantidad conocida como la Q-curvatura (*Q-curvature* en inglés), que fue introducida por Branson en los 80's [20] y ha sido estudiada, desde entonces, fundamentalmente por matemáticos. La Q-curvatura puede ser pensada como una generalización de orden superior de la noción de curvatura de Gauss, tan presente en la teoría de la gravedad. Aunque su significado local no se ha entendido aún, sí existe una interpretación global muy clara, dado que calcula la característica de Euler de una dada clase conforme en dimensiones  $D \geq 3$ . La Q-curvatura encuentra muchas aplicaciones en matemática: en la geometría espectral, en la teoría de probabilidades, y en la teoría de ecuaciones diferenciales de cuarto orden, entre otras.

Esta tesis se cierra con la presentación de una aplicación novedosa de este concepto: el estudio de la Q-curvatura y sus generalizaciones de orden superior como una acción de gravedad  $n$ -dimensional con orden arbitrario,  $m$ , de potencias del tensor de curvatura [21–23]. La teoría de cuerdas, donde las correcciones cuánticas a la gravedad están bajo control, predice una dimensionalidad mayor para el espacio-tiempo, lo que vuelve interesante y añade una motivación extra al estudio de términos de órdenes superiores en la curvatura en combinación con la extensión a dimensión arbitraria.

Lo que sigue se organiza del siguiente modo:

En la primera parte del Capítulo 2 se provee un resumen de las teorías modificadas de gravedad sobre las que se trabajó durante esta tesis. Una segunda parte se destina a presentar las características básicas de los dos espacio-tiempos principales que fueron objeto de estudio, los previamente mencionados WAdS<sub>3</sub> y Lifshitz.

En el Capítulo 3 se presenta un tratamiento autocontenido, en cuanto a las necesidades prácticas de los resultados aquí presentados, sobre el cálculo de cargas conservadas en una teoría de gravedad. Partiendo desde los primeros intentos de definir adecuadamente el concepto de energía, pasando por el formalismo covariante, que se empleó para el cálculo de cargas en el espaciotiempo  $WAdS_3$ , y llegando hasta el método de campo cercano utilizado en el cálculo de la masa para el espaciotiempo Lifshitz. Esta presentación del tema no es, ni tiene credenciales como para pretenderlo, un resumen acabado del mismo. Solamente los ingredientes relevantes a la fundamentación de los cálculos realizados están contenidos y tratados con alguna extensión.

Estos dos primeros capítulos cubren los principales aspectos teóricos sobre formalismo y herramientas matemáticas relacionados con los resultados nuevos provistos aquí, que se detallan en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 4 se presenta el cálculo de cargas conservadas en un espacio time-like  $WAdS_3$  bajo la teoría NMG, que fuera objeto del trabajo publicado en la Ref. [24]. El Capítulo 5, por su parte, presenta el cálculo para la energía del espacio-tiempo de Lifshitz bajo la misma teoría, que apareció en la Ref. [25]. Ambos trabajos pueden enmarcarse en el contexto de la holografía No-AdS. Las motivaciones del interés por ambos tipos de espacio-tiempos se discuten en sus respectivos capítulos.

El Capítulo 6 exhibe los resultados del trabajo publicado en la Ref. [26] acerca del estudio de los puntos críticos en la teoría EMG. Son discutidos allí aspectos que se hallan asociados fundamentalmente a la teoría cuántica conforme del borde.

Finalmente, el Capítulo 7 detalla el estudio de una familia de teorías de gravedad modificadas (con términos de alto orden en la curvatura)  $n$ -dimensionales, con una acción que se construye a partir de invariantes conformes dimensionalmente extendidos, que son generalizaciones de la Q-curvatura de Branson. El estudio abarca la formulación de la acción de la teoría, ecuaciones de movimiento y algunas soluciones (de vacío, agujero negro, ondas gravitacionales y espacios no-einsteinianos). Este trabajo corresponde a la Ref. [27].

## 1.1 Sobre la notación y el uso de palabras en inglés

Dado que una traducción literal de todos los términos que se utilizan comúnmente en la literatura técnica de física gravitatoria sumaría una dificultad de comprensión y extrañeza innecesaria, se ha optado por conservar algunos términos (*timelike*, *background*) que están firmemente imbricados en cualquier especialista que no habla como lengua nativa el inglés. Esos anglicismos son tan naturales en esta área de la física que su traducción literal hacia el castellano provocaría no otra cosa que una distracción.

## 1.2 Nuevos resultados provistos por esta tesis

Los nuevos resultados amparados en esta tesis fueron publicados en los trabajos que se detallan a continuación, donde luego de su título se presenta el resumen original (en inglés). En función de lograr una presentación más o menos coherente a lo largo de esta tesis, diversas partes de estos trabajos se han redistribuido en los capítulos 2 y 3 sobre formalismo y herramientas.



- L. Donnay, J. J. Fernández-Melgarejo, G. Giribet, A. Goya y E. Lavia, *Conserved charges in timelike warped  $AdS_3$  spaces*, Phys. Rev. D 91, 125006 (2015).

*We consider the timelike version of Warped Anti-de Sitter space (WAdS), which corresponds to the three-dimensional section of the Gödel solution of four-dimensional cosmological Einstein equations. This geometry presents closed timelike curves (CTCs), which are inherited from its four-dimensional embedding. In three dimensions, this type of solutions can be supported without matter provided the graviton acquires mass. Here, among the different ways to consistently give mass to the graviton in three dimensions, we consider the parity-even model known as New Massive Gravity (NMG). In the bulk of timelike WAdS<sub>3</sub> space, we introduce defects that, from the three-dimensional point of view, represent spinning massive particle-like objects. For this type of sources, we investigate the definition of quasi-local gravitational energy as seen from infinity, far beyond the region where the CTCs appear. We also consider the covariant formalism applied to NMG to compute the mass and the angular momentum of spinning particle-like defects, and compare the result with the one obtained by means of the quasi-local stress-tensor. We apply these methods to special limits in which the WAdS<sub>3</sub> solutions coincide with locally AdS<sub>3</sub> and locally AdS<sub>2</sub> × ℝ spaces. Finally, we make some comments about the asymptotic symmetry algebra of asymptotically WAdS<sub>3</sub> spaces in NMG.*

- M. Chernicoff, G. Giribet, N. Grandi, E. Lavia y J. Oliva, *Q-curvature and gravity*, Phys. Rev. D 98, 104023 (2018).

*In this paper, we consider a family of  $n$ -dimensional, higher-curvature theories of gravity whose action is given by a series of dimensionally extended conformal invariants. The latter correspond to higher-order generalizations of the Branson  $Q$ -curvature, which is an important notion of conformal geometry that has been recently considered in physics in different contexts. The family of theories we study here includes special cases of conformal invariant theories in even dimensions. We study different aspects of these theories and their relation to other higher-curvature theories present in the literature.*

- G. Giribet, A. Goya, E. Lavia y J. Oliva, *Critical points of the exotic massive 3D gravity*, Physics Letters B 808, 135618 (2020).

*Exotic Massive 3D Gravity (EMG) is a higher order generalization of Topologically Massive Gravity. As in other theories of this sort, the conserved charges associated to the asymptotic diffeomorphisms that preserve the boundary conditions in AdS<sub>3</sub> spacetime span two copies of the Virasoro algebra with non-vanishing central charges. Here, we discuss the values of these central charges and the corresponding conformal anomaly in relation to the phase space of the theory.*

- G. Giribet y E. Lavia, *The mass of a Lifshitz black hole*, Eur. Phys. J. C 81, 835 (2021).

*It is well known that massive 3D gravity admits solutions that describe Lifshitz black holes as those considered in non-relativistic holography. However, the determination of the mass of such black holes remained unclear as many different results were reported in the literature presenting discrepancies. Here, by using a robust method that permits to tackle the problem in the strong field regime, we determine the correct mass of the Lifshitz black hole of the higher-derivative massive gravity and compare it with other results obtained by different methods. Positivity of the mass spectrum demands an odd normalization of the gravity action. In spite of this fact, the result turns out to be consistent with computations inspired in holography.*

## Capítulo 2

# Teorías masivas de gravedad y algunas de sus soluciones

La presentación de estas teorías de gravedad masiva seguirá un orden cronológico porque es el que refleja explícitamente en qué medida teorías posteriores vienen a corregir algunos de los defectos de las previas o bien presentan una dinámica más rica en el sentido de albergar mayor cantidad de soluciones con interés físico.

Las primeras cuatro secciones de este capítulo presentan tres de las teorías masivas que fueron objeto de estudio a lo largo de los trabajos de esta tesis. Para cada una de ellas se presentan la acción, en los casos en que corresponde, y sus ecuaciones de movimiento derivadas. Una corrección que debe hacerse a la acción en el caso de que se trabaje con el borde del espaciotiempo, cosa absolutamente mandatoria en el contexto de holografía, se explica en forma general en la Sección 2.5. Luego, las últimas dos secciones se abocan a la presentación de dos espaciotiempos importantes en este trabajo; la deformación de AdS conocida como Warped AdS y el espaciotiempo de Lifshitz.

### 2.1 Topologically massive gravity (TMG)

La más primitiva de las teorías masivas data de 1982 [2, 28] y consta de añadir a la acción de EH un término gravitatorio de Chern-Simons, que es un invariante topológico. La acción puede escribirse como

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[ (R - 2\Lambda) + \frac{1}{\mu} \text{LCS} \right], \quad (2.1)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de acoplamiento, que será proporcional a la masa del gravitón, y el término de Chern-Simons puede expresarse, en el formalismo métrico, como

$$\text{LCS} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\alpha\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \left[ \partial_{\alpha} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} \right],$$

donde  $\varepsilon^{\lambda\alpha\nu} = \epsilon^{\lambda\alpha\nu} / \sqrt{-g}$  es el tensor de Levi-Civita<sup>1</sup>. El término LCS es de orden dos en derivadas de la métrica pero no lineal para dicho orden (cosa que no sucede con el término de EH que es de orden dos pero de grado lineal). Este incremento en el número de derivadas de la métrica lleva a ecuaciones de movimiento de orden tres y la aparición de

---

<sup>1</sup>Como es usual en la literatura,  $\varepsilon$  refiere al tensor mientras que  $\epsilon$  al símbolo, de Levi-Civita.

nuevos grados de libertad en la teoría<sup>2</sup>. Ahora aparece un grado de libertad local masivo (la propagación de un gravitón masivo) así como la identificación en el borde de gravitones sin masa. La teoría es unitaria pero de paridad impar (es decir que viola paridad).

Las ecuaciones de campo de la teoría son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 R g_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y  $C_{\mu\nu}$ , que viene de variar el término LCS respecto de la métrica, es el tensor de Cotton-York (densidad tensorial conforme de Cotton), que se define como

$$C_{\mu\nu} = \varepsilon^{k\ell}{}_{\mu} \nabla_k \left( R_{\ell\nu} - \frac{1}{4} R g_{\ell\nu} \right) \quad (2.3)$$

El tensor de Cotton-York, que es simétrico y de divergencia nula, cumple el rol del tensor de Weyl en  $D = 3$  dimensiones (dado que este último es nulo para  $D < 4$ ) en el sentido de que dos métricas conectadas por una transformación conforme tienen el mismo tensor de Cotton-York<sup>3</sup>. En la definición de la Ec. (2.3) puede verse explícitamente el orden tres de las ecuaciones de movimiento; dado que tanto el tensor de Ricci como el escalar de curvatura son de segundo orden en derivadas de la métrica, la derivada de estos implicada en la definición del tensor de Cotton conduce a una derivada de orden tres.

La teoría es más rica en soluciones que CEH (teoría que se recupera en el límite  $\mu \rightarrow \infty$ ) y en cuanto a agujeros negros admite, además de la geometría de agujero negro de Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) [29] –que es asintóticamente AdS y es también solución de CEH–, el llamado agujero negro ACL<sup>4</sup> [30].

## 2.2 Gravedad quirral

Gravedad quirral (CG, de *Chiral Gravity*) [31] es un caso particular de Topologically Massive Gravity (TMG) con constante cosmológica negativa  $\Lambda = -1/\ell^2$ . Esto último implica que su espacio background natural es AdS<sub>3</sub>.

La característica distintiva de esta teoría es que su parámetro de masa toma un valor ( $\mu\ell = 1$ ) tal que la carga central izquierda de la CFT dual, o bien la derecha, se anula. Este punto especial  $\mu\ell = 1$  es un punto crítico de la teoría (el punto quirral) razón por la cual, en analogía con el caso de dimensión genérica, se la conoce también como Gravedad Crítica (CG, de *Critical Gravity*)<sup>5</sup>. Para valores genéricos del parámetro  $\mu$  la teoría es inconsistente en el sentido de que o bien los gravitones masivos o bien el agujero negro BTZ resultan de energía negativa.

La anulación de una de las cargas centrales se asocia usualmente a la emergencia en el bulk de un modo de gravitón no masivo, el cual produce una interacción de largo rango

<sup>2</sup>En el caso más general, si el lagrangiano de la acción depende de derivadas de orden  $n$ , las ecuaciones de movimiento serán a lo sumo de orden  $2n$ . Dependiendo de la forma específica de esta dependencia, las ecuaciones pueden ser de orden menor como sucede en las acciones de EH y de TMG.

<sup>3</sup>En mucha literatura especializada al tensor de Cotton-York se lo llama simplemente de Cotton.

<sup>4</sup>El nombre proviene de las iniciales de los autores del trabajo donde esta solución es presentada; Ait Moussa, Clément y Leygnac. Esta atribución no está exenta de cierto grado de polémica puesto que soluciones relacionadas a la misma fueron dadas previamente por otros autores pero adolecían del defecto de curvas temporales cerradas.

<sup>5</sup>En cualquiera de ambos casos la abreviatura CG le corresponde igualmente.

caracterizada por un decaimiento logarítmico cerca del borde [32, 33] del tipo

$$h \sim \log(r), \quad (2.4)$$

donde  $h \equiv h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$  proviene de escribir la métrica  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{AdS}} + h_{\mu\nu}$  como perturbación de AdS. Este modo logarítmico tiene energía negativa en el bulk, y convierte a la teoría dual  $\text{CFT}_2$  en no-unitaria. Esta es la razón por la cual, para que se pueda definir CG de una manera consistente (y que conduzca a una teoría del borde que sea unitaria), se necesitan imponer condiciones de contorno asintóticamente  $\text{AdS}_3$  que sean suficientes para eliminar modos como el de la Ec. (2.4) [34]. Estas condiciones de contorno resultan ser las condiciones asintóticas de Brown-Henneaux, i.e. lo mismo que en GR [35]. Si tales condiciones de contorno son impuestas, entonces la teoría dual resulta ser una  $\text{CFT}_2$  quiral.

La teoría puede ser fácilmente generalizada con el añadido a las ecuaciones de TMG, dadas por la Ec. (2.2), de otras contribuciones, representando deformaciones masivas de las ecuaciones de Einstein con sentido físico, aparecidas con posterioridad y que serán sumariadas en las próximas secciones, como New Massive Gravity (NMG) [3, 36], Minimal Massive Gravity (MMG) [37], o la más recientemente propuesta Exotic Massive Gravity (EMG) [38], todas ellas siendo casos particulares de un conjunto de modelos más generales [39].

### 2.3 New massive gravity (NMG)

La teoría gravitatoria 3D presentada en la Ref. [3], denominada New Massive Gravity (NMG)<sup>6</sup>, posee una dinámica que es la que se acerca en mayor medida a la dinámica gravitatoria en  $D = 4$ , debido a que propaga de manera unitaria, una vez linealizada en torno a alguna de sus soluciones maximalmente simétricas, dos polarizaciones de una partícula de spin-2 además de que preserva paridad y está libre de fantasmas (es *ghost free*).

La acción de la teoría es

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[ (\sigma R - 2\Lambda) + \frac{1}{m^2} \left( R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2 \right) \right] \quad (2.5)$$

donde  $m$  es la masa asociada a la partícula que se propaga (el gravitón). El coeficiente  $\sigma = \pm 1$  tiene como objeto solamente controlar el signo<sup>7</sup> de la constante de Newton  $G$ . Para el cálculo de cargas conservadas bajo esta teoría, a ser desarrollado en el Capítulo 4, será necesario, dado que se considera que el espaciotiempo tiene borde, suplementar la acción (2.5) con un término de borde, a fin de que el principio variacional resulte bien formulado. Esta acción de borde se discutirá en detalle oportunamente.

Las ecuaciones de campo de esta acción son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2} K_{\mu\nu} = 0 \quad (2.6)$$

<sup>6</sup>Inicialmente, en algún trabajo de la época, se la refería como BHT, en alusión a los apellidos de los autores. Ese nombre no prosperó.

<sup>7</sup>Considerar uno u otro signo en la acción tiene consecuencias en los gravitones propagados por la teoría. Por ello en la literatura se habla de común de un *wrong-sign* y un *right-sign* para el término de EH. Quién de ellos  $+1$  o  $-1$  es el *right* depende de la convención utilizada. En el caso de la signatura  $(-++)$  el *wrong-sign* es  $\sigma = -1$  mientras que en la otra convención  $(+-)$  es  $\sigma = +1$ . Esa elección de signos es la que asegura propagación unitaria de los modos cuando la teoría es linealizada.

donde el tensor  $K_{\mu\nu}$  es<sup>8</sup>

$$K_{\mu\nu} = 2\Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu R + \Box R g_{\mu\nu}) - 8R_{\mu}{}^\rho R_{\nu\rho} + \frac{9}{2}RR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left[ 3R^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} - \frac{13}{8}R^2 \right]. \quad (2.7)$$

Una característica curiosa de este tensor  $K_{\mu\nu}$  es que su traza resulta ser exactamente el escalar que aparece en la acción, es decir

$$K \equiv g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2$$

Este escalar es, además, el que se obtiene de la contracción  $G_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$ , donde  $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/4 R g_{\mu\nu}$  es el tensor de Schouten en tres dimensiones. Luego, la traza de las ecuaciones de movimiento (2.6) resulta

$$m^2 R = -K,$$

donde puede verse explícitamente una de las razones de la ausencia de fantasmas: los d'Alembertianos  $\Box R$  que aparecen al contraer el tensor (2.7), y que aparecerían como parte de la ecuación de onda para las perturbaciones, se cancelan exactamente.

La teoría NMG, encarnada por la acción (2.5), con respecto a espaciotiempos maximalmente simétricos coincide, en el límite de su linealización, con la acción de Pauli-Fierz para un campo libre masivo de spin-2, representando entonces una extensión totalmente covariante de esta última. Como se dijo previamente, la teoría propaga en un punto genérico del espacio de sus parámetros  $(\Lambda, m)$  dos grados de libertad masivos.

Con respecto a los espacios de curvatura constante, los mismos son solución de la teoría para los siguientes valores de la constante cosmológica efectiva

$$\Lambda_{\pm}^{\text{eff}} = 2m^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{m^2}} \right)$$

para  $m^2 \geq \Lambda$ . Esto implica que la teoría tiene dos vacíos naturales, que pueden ser o bien Minkowski o bien los espacios (A)dS, dependiendo del rango de los parámetros.

NMG admite una gran cantidad de soluciones, como los espacios invariantes de Schrödinger [41], espacios de Lifshitz y sus agujeros negros [42], deformaciones logarítmicas de la geometría de Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) [43], agujeros negros (A)dS<sub>3</sub> *hairy* [44], agujeros negros WAdS<sub>3</sub> y otros [45, 46].

## 2.4 Exotic Massive Gravity (EMG)

En el formalismo métrico<sup>9</sup>, la teoría Exotic Massive Gravity (EMG) se define por las ecuaciones [38]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde  $C_{\mu\nu}$  es el tensor de Cotton-York y el tensor  $T_{\mu\nu}$  se define como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} \varepsilon_\mu{}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha C_{\beta\nu} - \frac{1}{2m^4} \varepsilon_\mu{}^{\alpha\beta} \varepsilon_\nu{}^{\gamma\sigma} C_{\alpha\gamma} C_{\beta\sigma}. \quad (2.9)$$

<sup>8</sup>Otra escritura conveniente para este tensor, que difiere levemente de la presentada aquí, puede verse en la Ref. [40].

<sup>9</sup>La teoría también admite una formulación del tipo de Chern-Simons en términos del vielbein  $e_\mu^a$  y la conexión de spin  $\omega_\mu^{ab}$ ; ver [38, 47] para los detalles.

En la forma en que están escritas las ecuaciones (2.8), la teoría parecería ser simplemente TMG en presencia de materia, que estaría tenida en cuenta por el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}/\kappa$  de la derecha. En realidad siguen siendo ecuaciones de vacío pero se han ubicado los dos términos extra (respecto de TMG) del lado derecho para enfatizar solamente que la manera en que estos verifican ser de divergencia nula no es la misma en la que lo hacen los términos de la izquierda. En efecto, en las ecuaciones de movimiento de las acciones gravitatorias, que siempre son del tipo  $E_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$  donde la parte geométrica (la curvatura) está en el tensor  $E$  y la parte asociada a la materia se halla en el tensor  $T$ , se da que el lado izquierdo es de divergencia nula –es covariantemente conservado– por una razón geométrica (para el caso de las ecuaciones de Einstein, la razón son las identidades de Bianchi) mientras que la divergencia nula del lado derecho, necesaria por consistencia, se da en virtud de la verificación de las mismas ecuaciones de movimiento (lo que se suele expresar diciendo que se da *on-shell*).

Este tipo de teorías, que tienen términos de índole geométrica que verifican la conservación covariante de manera *on-shell*, no provienen de un principio variacional, razón por la cual no se presenta aquí la acción de la teoría sino que se comienza desde sus ecuaciones de movimiento. Este mecanismo para fabricar teorías se ha denominado en la literatura como “consistencia de la tercera forma” (de *third way consistency*). Mayores detalles sobre el mismo pueden verse en [39]. En el Apéndice A se presenta un esquema que provee un sumario del mecanismo de construcción de los términos para estas acciones *consistentes de la tercer forma*.

El límite  $m \rightarrow \infty$  de esta teoría recupera TMG, y el límite  $\mu \rightarrow 0^{10}$  conduce a la teoría 3D conformal gravity. Para  $|\mu| < \infty$  la teoría no tiene una paridad predefinida dado que los términos exóticos y los de relatividad general son pares respecto de paridad.

En alguna literatura, por ejemplo [38], esta teoría aparece como Exotic General Massive Gravity (EGMG) reservándose el nombre EMG para el caso  $\mu \rightarrow \infty$  de (2.8). Asimismo, el tensor (2.9) que da los aportes nuevos respecto de TMG suele escribirse como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} H_{\mu\nu} - \frac{1}{2m^4} L_{\mu\nu}.$$

Las cuatro teorías presentadas hasta aquí no agotan el catálogo de teorías masivas 3D que han visto la luz en los últimos años. Para dar una idea del zoológico actual, el cuadro en la Figura 2.1 presenta un listado más o menos completo.

## 2.5 Acción para espaciotiempos con bordes

La acción de una teoría gravitatoria, como las que aparecen en las Ec. (2.1) o (2.5), involucra una integral formal sobre el volumen del espaciotiempo de una cantidad indeterminada de métricas de las cuales el principio variacional, a través de las ecuaciones que emerjan de pedir que la variación de la acción con respecto a la métrica se anule, i.e.  $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = 0$ , se encargará de seleccionar las que son físicamente correctas.

Las acciones usuales de mecánica clásica o de campos consideran lagrangianos que dependen a lo sumo de derivadas primeras de los campos,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \phi, \partial\phi)$  de modo que las consiguientes ecuaciones que se obtienen de variar la acción son de orden dos y para tener un principio variacional bien formulado basta con exigir que las variaciones  $\delta\phi$  de los campos sobre el borde del dominio de integración  $\Omega$  se anulen. Es decir, que se cumpla

<sup>10</sup>Una manera elegante de decir que solamente sobrevive el tensor de Cotton.

Teoría	Año	Referencia	Características notables
TMG	1982	[2, 28]	CEH con un término de Chern-Simons.
CG	2008	[31]	Es TMG con $\Lambda < 0$ en el punto $\mu\ell = 1$ .
NMG	2009	[3]	Su linealización es unitaria y libre de fantasmas.
GMG	2009	[36]	Combina TMG y NMG.
ZDG	2013	[48]	Modelo de bigravidad.
MMG	2014	[37]	TMG con un término extra consistente por tercera vía.
EMG	2018	[38]	CEH y términos consistentes por tercera vía.
EGMG	2018	[38]	TMG y términos consistentes por tercera vía.

Figura 2.1: Principales teorías gravitatorias 3D masivas. El significado de cada uno de los acrónimos aparece en el texto principal y además dentro del glosario de siglas al comienzo de esta tesis. En la Ref. [49] aparece una tabla de teorías masivas 3D más completa, pero lo es fundamentalmente en razón de incluir una gran cantidad de variaciones logarítmicas de muchas de estas teorías.

$\delta\phi|_{\partial\Omega} = 0$ . Esto sería equivalente, en el cálculo de variaciones, a hacer una variación con extremos fijos.

En la variación de la acción correspondiente aparece un término que, vía integración por partes y el teorema de Gauss, se transforma en una integral de superficie. Ese término se anula normalmente utilizando de manera explícita el hecho de que las variaciones  $\delta\phi$  son nulas allí.

Cuando el lagrangiano depende de derivadas segundas de los campos, o sea que tiene la forma  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \phi, \partial\phi, \partial^2\phi)$ , en principio las ecuaciones de movimiento son de orden cuatro y en el término de superficie pueden aparecer no solamente variaciones de los campos sino derivadas de dichas variaciones. Si bien las primeras pueden anularse, no sucede lo mismo con las segundas, de modo que aparecen términos espúreos que alteran las ecuaciones de movimiento. No obstante, cuando el espaciotiempo en cuestión no tiene bordes (es lo que se denomina un *manifold* cerrado: uno que es compacto y sin borde) el término de superficie se anula independientemente del valor de las variaciones allí y el hecho de que la acción dependa de derivadas segundas no conlleva ningún problema. Asimismo, en las situaciones donde solamente interese la dinámica de *bulk* ese aporte también puede despreciarse.

En el caso de este trabajo de tesis, como se verá más adelante, la presencia de bordes es absolutamente relevante a los cálculos de cargas conservadas puesto que en dicho lugar es en donde aparecerá la CFT. Por dicha razón, las acciones gravitatorias se verán suplementadas en la forma

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{borde}},$$



donde el añadido  $S_{\text{borde}}$  es tal que cuando se realice la variación  $\delta S$  que conduce a las ecuaciones de movimiento, los términos que aparecen como integrales de superficie –que ahora no se anulan– son cancelados por contra-términos provenientes de la variación  $\delta S_{\text{borde}}$ .

El origen de esta corrección comienza con el trabajo de York [50] y sigue con la mejora propuesta por Gibbons y Hawking en [51]. En el caso de CEH para  $D = 4$  dimensiones, la acción con término de borde es

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{-\gamma} K \quad (2.10)$$

donde  $\gamma_{ij}$ ,  $\gamma$  son la métrica del borde y su determinante, respectivamente y  $K$  es la curvatura extrínseca. La integral de borde recibe el nombre de término de Gibbons-Hawking-York. Esta acción de borde que compensa los términos asociados a derivadas de las variaciones en el borde del espaciotiempo será, por supuesto, dependiente de la teoría.

## 2.6 Espacios anti-de Sitter (AdS)

El espaciotiempo de anti-de Sitter (AdS) constituye la solución maximalmente simétrica de la acción CEH con curvatura constante negativa, la cual está vinculada a la constante cosmológica  $\Lambda < 0$ . En efecto, a partir de la contracción de las ecuaciones de movimiento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

se obtiene  $R = 2D\Lambda/(D - 2)$  y también  $R_{\mu\nu} = R/Dg_{\mu\nu}$  donde  $D$  es la dimensión del espaciotiempo. La escritura del tensor de Ricci en términos de la métrica implica que AdS es lo que se llama un espacio de Einstein <sup>11</sup>.

Existen muchos sistemas de coordenadas de uso común para escribir la métrica del espacio AdS. Uno de ellos es el que utiliza las coordenadas globales  $t, r, \vec{x}$  en función de las cuales el elemento de línea resulta

$$ds^2 = -\frac{r^2}{\ell^2} dt^2 + \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.11)$$

donde las coordenadas  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{d-2}$  describen la métrica de una esfera 2-dimensional y  $\ell$  es el llamado radio del espaciotiempo, una longitud de escala asociada a la curvatura. En  $D=3$  dimensiones el  $d\Omega_{d-2}^2$  es 1-dimensional de manera que puede ser reemplazado por  $d\varphi$ , el diferencial de una coordenada angular  $\varphi$  con periodicidad  $2\pi$ . Otra forma de la métrica muy utilizada es la siguiente

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2,$$

donde se ve de manera explícita que para valores  $r/\ell \ll 1$  la métrica tiende a la de Minkowski. El espacio AdS tiene un papel destacado también por ser el involucrado en la conjetura original de Maldacena.

<sup>11</sup>Un Einstein-space es un espacio tal que su tensor de Ricci es proporcional a la métrica.

### 2.6.1 El agujero negro BTZ

Hasta comienzos de los años 90 se pensaba que no existían soluciones de agujero negro en  $D = 3$  dimensiones. En 1992 se descubre [29] el ahora llamado agujero negro BTZ (Bañados-Teitelboim-Zanelli), una geometría de agujero negro que es asintóticamente  $\text{AdS}_3$ .

La versión estática y extremal de la métrica, en coordenadas  $(t, r, \phi)$  resulta

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_0^2)^2}{l^2 r^2} dt^2 + \frac{l^2 r^2}{(r^2 - r_0^2)^2} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.12)$$

donde  $r_0$  es el radio del horizonte de eventos del agujero negro. El límite  $r_0 \rightarrow 0$  lleva esta métrica directamente a la forma de la métrica  $\text{AdS}$  escrita en la Ec. (2.11).

La métrica (2.12) es solución de las ecuaciones de NMG para

$$\Lambda = -\frac{1}{\ell^2} \left( 1 + \frac{1}{4\ell^2 m^2} \right),$$

una expresión que no depende del valor  $r_0$  del horizonte de sucesos. Esta es la misma condición que hace que la métrica de  $\text{AdS}$  sea solución de la teoría. En el límite  $m \rightarrow \infty$  la teoría NMG se reduce a CEH de manera que el agujero negro BTZ es solución de esta última, como fuera mencionado previamente, para  $\Lambda = -1/\ell^2$ .

## 2.7 Espacios warped $\text{AdS}$

Como se dijo en el Capítulo 1, el espacio  $\text{WAdS}_3$  es una deformación particular de un espacio  $\text{AdS}_3$ , cuyas consecuencias geométricas más importantes son la destrucción del comportamiento asintótico del espacio original y la pérdida de la condición de ser un espacio de Einstein. La deformación consiste en un estiramiento (*stretching*) o bien en un aplastamiento (*squashing*) del espacio  $\text{AdS}_3$  de una manera similar a como se realizan las mismas modificaciones sobre la 3-esfera [52]. De los seis vectores de Killing que presenta naturalmente  $\text{AdS}_3$ , sobreviven ahora cuatro y el grupo de isometrías pasa a ser  $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$ .

El espacio warped puede construirse escribiendo en primer lugar  $\text{AdS}_3$  como una Hopf fibration de  $\text{AdS}_2$  sobre la recta real [52], del tipo spacelike,

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{4} \left( -\cosh^2 x d\tau^2 + dx^2 + (dy + \sinh x d\tau)^2 \right),$$

o bien timelike,

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{4} \left( \cosh^2 x d\tau^2 + dx^2 - (dy + \sinh x d\tau)^2 \right)$$

y luego multiplicando la fibra por un factor de warp constante, parametrizando la deformación a través de una constante positiva  $\nu$ , tras lo cual resultan

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2 + 3} \left( -\cosh^2 x d\tau^2 + dx^2 + \frac{\nu^2}{\nu^2 + 3} (dy + \sinh x d\tau)^2 \right), \quad (2.13)$$

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2 + 3} \left( \cosh^2 x d\tau^2 + dx^2 - \frac{\nu^2}{\nu^2 + 3} (dy + \sinh x d\tau)^2 \right)$$

que son las variantes spacelike y timelike warped  $\text{AdS}_3$ , respectivamente. El parámetro  $\nu^2$  controla la deformación de modo que los espacios con  $\nu^2 > 1$  representan la deformación stretched mientras que aquellos que cumplen  $\nu^2 < 1$  representan la deformación squashed. El caso  $\nu^2 = 1$  recupera el espacio no deformado  $\text{AdS}_3$ . El radio  $\ell$  del espacio  $\text{AdS}_3$  se ve reescalado también de acuerdo con  $\ell^2 \rightarrow 4\ell^2/(\nu^2 + 3)$ . Cada una de estas deformaciones spacelike y timelike puede ser stretched o squashed de modo que se tienen cuatro clases (existe una tercer variante de la deformación, el caso null, pero tiene aplicaciones mayormente en el contexto de TMG [8], y no es relevante en este trabajo). Para transformar una métrica spacelike en timelike basta aplicar una doble rotación de Wick  $x, \tau \rightarrow ix, i\tau$ . El cuadro de la Figura 2.2 esquematiza la clasificación de los espacios warped  $\text{AdS}_3$ .

$$\boxed{\text{WAdS}_3 \left( \nu^2 \neq 1 \right) \begin{cases} \text{timelike} & \begin{cases} \nu^2 > 1 & \text{stretched} \\ \nu^2 < 1 & \text{squashed} \end{cases} \\ \text{spacelike} & \begin{cases} \nu^2 > 1 & \text{stretched} \\ \nu^2 < 1 & \text{squashed} \end{cases} \end{cases}}$$

Figura 2.2: Esquema de clasificación de los espacios warped  $\text{WAdS}_3$ .

Entre las características que hacen especialmente interesante al espacio  $\text{WAdS}_3$  merecen destacarse: (a) la existencia de geometrías de agujero negro (WBH, *Warped Black Holes*) y (b) que esta geometría aparece como solución exacta de una gran cantidad de modelos, entre los que figuran los de teoría de cuerdas [53–55], teorías de gauge topológicamente masivas, entre ellas TMG, [55–58], teorías con derivadas de alto orden [45], teorías de bi-gravedad [59], y la gravedad de Einstein no-mínimamente acoplada a campos de materia [60].

En el contexto de la correspondencia holográfica non-AdS, se ha visto que los espacios  $\text{WAdS}$  proveen duales gravitatorios para ciertos tipos de sistemas físicos en el área de materia condensada, particularmente aquellos que admiten una simetría de Schrödinger [6, 61] y además aparecen vinculados con otros aspectos puntuales de las teorías CFT del borde [12], alejados de los temas de esta tesis.

### 2.7.1 Agujeros negros Warped AdS

Los agujeros negros Warped  $\text{AdS}_3$  (WBH, de *Warped Black Hole*) [8] son soluciones que tienden asintóticamente al espacio  $\text{WAdS}_3$  y, simultáneamente, también son localmente equivalentes [62] en cualquier punto a dicho espacio. Esto es similar a lo que ocurre con los agujeros negros BTZ, los cuales son asintóticamente  $\text{AdS}_3$  y a la vez localmente equivalentes en todo punto a dicho espacio.

La métrica de agujeros negros  $\text{WAdS}_3$  stretched ( $\nu^2 > 1$ ), en coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta)$ , está dada [8] por

$$ds^2 = \ell^2 \left[ dt^2 + \frac{dr^2}{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)} + \left( 2\nu r - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right) dt d\theta + \frac{r}{4} \left( 3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right) d\theta^2 \right], \quad (2.14)$$

donde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Los parámetros  $r_+$ ,  $r_-$  son dos constantes de integración que para  $r_+ \geq r_- \geq 0$  representan la localización de los horizontes externo e interno, respectivamente, del agujero negro.

Curiosamente los escalares de curvatura de la métrica (2.14) resultan todos constantes, e independientes de los parámetros  $r_{\pm}$  de localización del agujero negro. Se tienen, por ejemplo,

$$R = -\frac{6}{\ell^2}, \quad R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = \frac{6}{\ell^4} (3 - 2\nu^2 + \nu^4)$$

donde puede verse que la dependencia es, a lo sumo, de los parámetros  $\nu, \ell$ .

El WBH dado por la métrica (2.14) es solución de NMG, Ec. (2.6), para los valores

$$\Lambda = -\frac{m^2(9 - 48\nu^2 + 4\nu^4)}{9 - 120\nu^2 + 400\nu^4} \quad m^2 = -\frac{(20\nu^2 - 3)\sigma}{2\ell^2}. \quad (2.15)$$

En el caso  $\nu = 1$ , cuando la métrica recupera el espaciotiempo no deformado  $\text{AdS}_3$ , se obtienen los valores

$$\Lambda = 35\sigma/(34\ell^2) \quad m^2 = -17\sigma/(2\ell^2), \quad (2.16)$$

que son aquellos para los cuales  $\text{AdS}_3$  es solución de la teoría.

## 2.8 Espacios Lifshitz

Según fuera mencionado en el Capítulo 1 la descripción holográfica de sistemas  $D$ -dimensionales no-relativistas y fuertemente acoplados, provistos de invarianza de escala anisótropa, pero con la ausencia de la simetría galileana, está dada del lado gravitatorio por los espacio-tiempos de Lifshitz, cuyo estudio tiene ya más de una década [7].

Estos sistemas se materializan geoméricamente a través de un tipo especial de métricas estáticas  $D+1$ -dimensionales, conocidas como métricas de Lifshitz. Su expresión es

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{\ell^{2z}} dt^2 + \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{\ell^2} dx^2 \quad (2.17)$$

donde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , y  $dx^2$  es el elemento de línea de la métrica plana sobre  $\mathbb{R}^{d-1}$ . Aquí, consideraremos  $d = 2$ , de modo que  $x \in \mathbb{R}$ . El parámetro  $z \in \mathbb{R}$  es, según se vio, el exponente crítico dinámico y  $\ell$  es una escala de longitud asociada a la curvatura del espaciotiempo.

Pese a que presentan invariantes de curvatura finitos, los espaciotiempos (2.17) con  $0 \neq z \neq 1$  son singulares; las geodésicas timelike que finalizan en  $r = 0$  son incompletas<sup>12</sup>. Para  $z = 1$ , en cambio, la métrica (2.17) es localmente equivalente al espaciotiempo  $\text{AdS}_3$  (corresponde por ello al comportamiento estandar de los sistemas con invarianza conforme) y el caso  $z = 0$  corresponde al espacio producto  $\mathbb{R} \times \text{AdS}_2$ . Para  $z$  genéricos, los espaciotiempos (2.17) verifican la invarianza de escala

$$t \rightarrow e^{z\sigma} t, \quad r \rightarrow e^{-\sigma} r, \quad x \rightarrow e^{\sigma} x, \quad (2.18)$$

<sup>12</sup>Se dice que el espaciotiempo no es geodésicamente completo. Serlo implica que comenzando en cualquier punto del mismo se puede seguir una “línea recta” (la trayectoria que seguiría una partícula en ausencia de fuerzas) indefinidamente en cualquier dirección.

donde  $\sigma$  es una constante arbitraria. La simetría de escaleo, junto con las traslaciones en  $t$  y  $x$ , generan el grupo completo de isometrías. Los casos  $z = 0$  y  $z = 1$  son, por supuesto, especiales, dado que presentan cuatro y seis vectores de Killing y generan los grupos  $\mathbb{R} \times SL(2, \mathbb{R})$  y  $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ , respectivamente. Para  $z$  arbitrario, los vectores de Killing son

$$H = \partial_t, \quad P = \partial_x, \quad D = zt\partial_t - r\partial_r + x\partial_x,$$

y generan el álgebra de isometrías nilpotente

$$[P, H] = 0, \quad [D, P] = P, \quad [D, H] = zH.$$

Los espaciotiempos Lifshitz son solución de NMG si los parámetros de la teoría toman los valores

$$m^2\ell^2 = -\frac{1}{2}(z^2 - 3z + 1), \quad \Lambda\ell^2 = -\frac{1}{2}(z^2 + z + 1), \quad (2.19)$$

lo que en particular significa que  $\Lambda\ell^2 < 0$ .

### 2.8.1 Agujero negro de Lifshitz

Un notable sorpresa ocurre para el valor del parámetro  $z = 3$ , donde la teoría NMG admite una solución extra de agujero negro [42]. Esto sucede sobre la curva del espacio de parámetros (2.19), donde se dan

$$m^2\ell^2 = -\frac{1}{2}, \quad \Lambda\ell^2 = -\frac{13}{2},$$

o bien

$$\Lambda = 13m^2. \quad (2.20)$$

Sobre esta curva, la métrica

$$ds^2 = -\frac{r^4}{\ell^4} \left( \frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left( \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} \right) dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (2.21)$$

verifica las ecuaciones de movimiento y representa una solución de agujero negro donde  $t, r$  cumplen los mismos supuestos que en la métrica (2.17) y donde la coordenada  $\varphi$  se considera periódica con período  $2\pi$ . El valor  $r = r_+ > 0$  es una constante de integración que determina la ubicación del horizonte de eventos, el cual enmascara (se suele decir que *viste*) una singularidad de la curvatura localizada en  $r = 0$ . Es fácil ver que cuando  $r_+ = 0$  la métrica (2.21) se reduce al espaciotiempo de Lifshitz (2.17) con  $z = 3$ <sup>13</sup>. El punto  $r = 0$  es una singularidad esencial del espaciotiempo puesto que el invariante dado por el escalar de Ricci, así también como otros invariantes, diverge. En efecto, se tienen, por ejemplo

$$R = -\frac{2}{\ell^2} \left( 13 - 4 \frac{r_+^2}{r^2} \right), \quad R_{ab}R^{ab} = \frac{4}{\ell^4} \left[ 65 - 38 \frac{r_+^2}{r^2} + 6 \left( \frac{r_+^4}{r^4} \right) \right], \quad (2.22)$$

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{4}{\ell^4} \left[ 91 - 48 \frac{r_+^2}{r^2} + 8 \left( \frac{r_+^4}{r^4} \right) \right]. \quad (2.23)$$

<sup>13</sup>En esta escritura de la métrica de agujero negro se ha pasado la coordenada lineal  $x \in \mathbb{R}$  a una coordenada periódica  $\varphi \in (0, 2\pi)$  en vistas al cálculo de la masa que se presentará más adelante. La recuperación de la métrica del espacio Lifshitz “vacío” que se da con  $r_+ \rightarrow 0$  requiere entonces deshacer esa coordenada periódica.

La métrica dada por la Ec. (2.21) no es localmente conforme a la plana, de manera que no resulta ser solución de CEH, de gravedad conforme ni de TMG. El grupo de isometrías correspondiente es  $\mathbb{R} \times SO(2)$ , el cual está generado por los vectores de Killing  $\partial_t, \partial_\varphi$ .

En el capítulo 5 se tratará en detalle el cálculo de masa para esta solución de agujero negro bajo NMG, motivándose el interés especial por este tipo de espaciotiempos.

## Capítulo 3

# Cálculo de cargas conservadas en gravitación

Sería difícil exagerar la importancia, teórica y práctica, que tiene en el contexto de la física la existencia de cantidades conservadas. Desde los cursos iniciales de mecánica clásica, donde se atacan problemas sobre sistemas discretos, la conservación de la energía y el momento (lineal y angular) permite no solamente simplificar su resolución sino ganar mucho entendimiento sobre los procesos físicos que gobiernan la dinámica de dichos sistemas. En esos problemas, las conservaciones referían siempre al estado de un sistema entre dos instantes de tiempo diferentes. Lo que indicaban es que determinado ente escalar o vectorial era el mismo en un instante  $t_0$  y en otro instante posterior  $t_1$ .

En los sistemas continuos clásicos, como los de la mecánica de fluidos y el electromagnetismo, las conservaciones aparecen localmente como leyes diferenciales que afectan a los campos que describen dichos sistemas. Para arribar a la cantidad conservada asociada es necesario integrar esa ley diferencial en algún volumen para instantes de tiempo diferentes.

### 3.1 Leyes de conservación integrales y diferenciales

Consideremos el ejemplo de la mecánica de fluidos, una teoría clásica de campos, en su formulación no relativista. La conservación de la masa se manifestaba a través de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\rho$  es el campo de densidad del fluido y  $\mathbf{v}$  el de velocidades. En general estos campos son funciones del tiempo y la posición.

Para pasar a la ley integral debe definirse primeramente un volumen de control  $\Omega$ , véase Figura 3.1, sobre el cual se integra la Ec. (3.1),

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3x.$$

Luego, extrayendo la derivada temporal hacia afuera en el lado izquierdo (lo cual puede hacerse debido a que la frontera del volumen de control  $\Omega$  está fija) y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss en el lado derecho resulta en

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \rho d^3x \right] = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2x,$$

donde  $\hat{n}$  es la normal exterior a la frontera  $\partial\Omega$  del volumen de control y la integral de la densidad no es otra cosa que la masa  $M$  de fluido contenida en el volumen  $\Omega$ . Se obtiene

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{n} d^2x,$$

lo que significa que la variación de la masa  $M$  dentro del volumen  $\Omega$  está asociada con el flujo neto de fluido que entra al mismo (si este flujo es positivo/negativo, el signo menos implica que se pierde/gana masa). Si el flujo es nulo no hay variación de la masa y se dice entonces que la misma se conserva<sup>1</sup>.

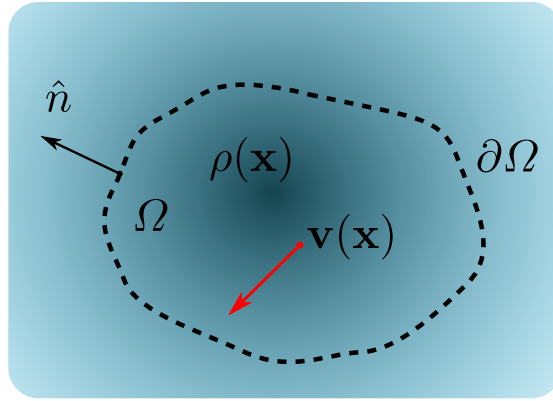


Figura 3.1: Ilustración de la aplicación de la ley diferencial de conservación de la masa en el seno de un fluido. Definiendo un volumen de control  $\Omega$  que está fijo en el tiempo, la integración de la ley de conservación diferencial dada por la Ec. (3.1), que vincula el campo de densidad  $\rho(t, \mathbf{x})$  y el de velocidades  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  conduce a la conservación de la masa contenida en el mismo.

El hecho de que el lado derecho de la ley diferencial de la Ec. (3.1) sea nulo significa que se está considerando que no hay fuentes ni sumideros dentro del fluido, lo cual suele ser una condición usual en la modelación o bien una asunción de la teoría subyacente. Si existieran términos en el lado derecho la ecuación de continuidad indica un balance en lugar de una conservación; la masa variará de acuerdo con el balance entre lo que entra, lo que sale y lo que se produce o desaparece dentro del volumen de control.

En electromagnetismo clásico, la ecuación de continuidad apropiada es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

donde ahora  $\rho$  refiere a la densidad de carga y  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente (carga en movimiento). De modo completamente análogo a lo hecho en el caso anterior, la integración dentro de un volumen de control desemboca en la conservación de la carga total  $Q = \int \rho dV$  del mismo.

Asimismo, a consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, el teorema de Poynting define una ecuación de balance para el campo [63], que es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>El flujo nulo puede deberse a que nada entra ni sale o a que lo que entra es igual a lo que sale, de manera que la masa se conserva, pero no son las mismas partículas instante a instante.



donde  $u = 1/2(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$  es la densidad de energía y  $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  es el vector de Poynting (los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  son los campos eléctrico y magnético, respectivamente), que posee la misma estructura que las anteriores. El lado derecho de la ecuación de balance (3.2) es el negativo del trabajo total realizado por los campos sobre las fuentes. La integración conduce ahora a

$$\frac{dU}{dt} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot \hat{n} d^2x = -W, \quad (3.3)$$

la cual implica que la variación de la energía  $U$  dentro del volumen dependerá del flujo del vector de Poynting a través de la superficie y del trabajo  $W = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ .

Las anteriores leyes diferenciales refieren a cantidades escalares (masa, carga y energía) pero también se tienen leyes vectoriales como la que define el balance del momento electromagnético, que es

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{T} = - \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right),$$

o bien, en componentes (con  $i, j = 1, 2, 3$ ),

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j} = - \left( \rho E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} J_j B_k \right),$$

donde resulta más clara la naturaleza tensorial de  $T$ , que es el tensor de esfuerzos de Maxwell, cuya expresión en vacío es

$$T_{ij} = \left[ E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (|\mathbf{E}|^2 + c^2 |\mathbf{B}|^2) \delta_{ij} \right].$$

La conservación/balance para cada componente de un vector, como por ejemplo los correspondientes a la densidad de momento electromagnético  $S^i/c^2$ , requiere en la ley diferencial la participación de un ente con dos índices, un tensor de rango dos cuya divergencia dará un flujo a través de la superficie del volumen de control para cada componente.

En el formalismo covariante de la relatividad especial estas expresiones se comprimen en función de que las partes temporal y espacial de las mismas resultan asociadas, respectivamente, a las componentes temporales y espaciales de vectores o tensores 4-dimensionales. Así, por ejemplo, el cuadrivector de velocidad para un fluido es  $U^\mu = (\gamma c, \gamma v^i)$ , donde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  y recordando que la derivada es  $\partial_\mu = (c^{-1} \partial_t, \nabla)$  la versión relativista de la ley diferencial (3.1) es

$$\partial_\mu (\rho U^\mu) = 0, \quad (3.4)$$

es decir que la conservación se manifiesta como una divergencia nula. No obstante, en dinámica de fluidos relativista la Ec. (3.4) no es válida siempre. La masa puede en general ser creada o aniquilada y en el caso particular de un fluido perfecto [64] sometido a una densidad de fuerza externa  $f^\mu$  se tiene

$$\partial_\mu (\rho U^\mu) = -\frac{1}{c^2} (f^\mu U_\mu + p \partial_\nu U^\mu),$$

donde  $p$  es la presión.

Dado que bajo una transformación de Lorentz energía y momento pueden transformarse entre sí es intuitivamente razonable que la ley covariante  $\partial_\mu S^\mu = 0$  para el 4-vector de Poynting  $S^\mu = (c/2 (E^2 + B^2), c \mathbf{E} \times \mathbf{B})$ , que uno puede construirse a partir de (3.3), no

nos dará información sobre la conservación de una cantidad escalar como la energía. No se tendrá, en general, conservación de un componente de vector, como la energía, sino de una cantidad vectorial, como el momento.

La energía, que es parte del 4-vector de momento  $p^\mu = (E/c, p^i)$  estará asociada a una conservación que implica la divergencia del tensor de energía-momento  $T^{\mu\nu}$ , el cual incluye al tensor de esfuerzos y las densidades de energía y momento, todos combinados de manera consistente. La ecuación correcta, vectorial, es

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\mu \quad (3.5)$$

donde la anterior ley para  $\partial_\mu S^\mu$  corresponde a uno de los componentes  $\nu$  de (3.5). La estructura en bloques del tensor de energía-momento para el electromagnetismo es

$$T^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} u & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & T^{ij} \end{pmatrix}$$

donde cada una de las entradas tiene unidades  $ML^{-1}T^{-2}$  (de densidad de energía). En el lado derecho de (3.5) aparece el tensor de intensidad de campo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  que incorpora a los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  a través del 4-potencial  $A_\mu$ .

En ausencia de fuentes la ley válida de conservación para las diferentes teorías relativistas que tienen asociado un tensor de energía-momento será

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.6)$$

la anulación de la divergencia de un tensor simétrico de rango dos.

## 3.2 Cálculo de cargas conservadas en espacio-tiempos planos

Dado que el teorema de la divergencia de Gauss es válido también para componentes, se puede transformar la integral de volumen de la divergencia de un tensor en un flujo sobre la superficie del volumen y llegar al concepto de cantidad conservada en el tiempo. Si lo que interesa es una determinación global de una cantidad conservada, i.e. no limitada a una pequeña porción del espacio tiempo, la integración deberá involucrar en un dado instante de tiempo una región espacial suficientemente vasta.

Supongamos un espacio tiempo plano, con métrica  $\eta_{\mu\nu}$  de Minkowski, para el cual el tensor de energía momento  $T^{\mu\nu}$  es diferente de cero sólo en una región finita del espacio en todo tiempo, ver Figura 3.2. Esa región se indica en la figura por la zona en color azul. Podemos encerrar dicha región por un tubo  $\mathcal{V}$  cuyas paredes están lo suficientemente alejadas (distancia espacial  $R$  grande) como para que sobre las mismas sea  $T^{\mu\nu} = 0$ . Si ahora se definen  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , dos hipersuperficies spacelike tal que sobre las mismas los valores de  $x^0$  son constantes ( $t_1, t_2$ , respectivamente), estas definen por intersección con  $\mathcal{V}$  una especie de cilindro 4-dimensional  $\Delta$ . Este cilindro  $\Delta$  tiene como borde una superficie 3D que se notará  $\partial\Delta = \Sigma_1 + \Sigma_L + \Sigma_2$ , donde  $\Sigma_L$  es la superficie de la pared lateral.

Si se integra en todo el cilindro  $\Delta$  la ley diferencial de la Ec. (3.6) la utilización del teorema de Gauss conduce a la anulación de la integral sobre la frontera  $\partial\Delta$ , es decir que se tiene

$$\int_{\Delta} \partial_\mu T^{\mu\nu} d^4x = \int_{\partial\Delta} n_\mu T^{\mu\nu} d^3y = 0.$$

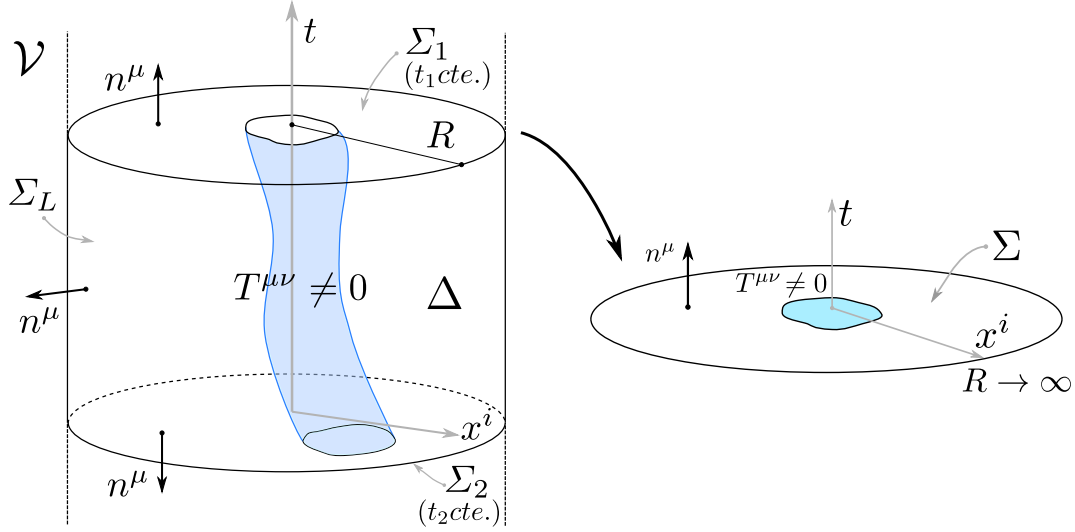


Figura 3.2: Esquema para el cálculo de cargas en un espacio plano. Se considera un espacio-tiempo plano en el cual el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  es no nulo en una región finita espacial y se define un cilindro  $\Delta$  con tapas  $\Sigma_i$  que son superficies spacelike (con normal timelike). La aplicación del teorema de Gauss sobre la ley diferencial  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  lleva a que el flujo a través de una superficie con normal  $n^\mu = t$  es una cantidad conservada.

Debido a que sobre la superficie  $\Sigma_L$  el propio tensor  $T^{\mu\nu}$  es nulo, la integral allí es nula de modo que

$$\int_{\partial\Delta} n_\mu T^{\mu\nu} d^3y = \int_{\Sigma_2} n_\nu T^{\mu\nu} d^3y + \int_{\Sigma_1} n_\nu T^{\mu\nu} d^3y = 0. \quad (3.7)$$

Sobre las tapas la normal es  $n^\nu = (1, 0, 0, 0)$  sobre  $\Sigma_1$  y  $n^\nu = (-1, 0, 0, 0)$  sobre  $\Sigma_2$ , de manera que sólo sobreviven los componentes del tensor  $T^{\mu\nu}$  en aquellas direcciones, es decir que se tiene

$$\int_{\Sigma_1} T^{\mu 0} d^3y - \int_{\Sigma_2} T^{\mu 0} d^3y = 0,$$

donde el signo negativo en la segunda integral invierte la normal en  $\Sigma_2$ . Entonces

$$\int_{\Sigma_1} T^{\mu 0} d^3y = \int_{\Sigma_2} T^{\mu 0} d^3y, \quad (3.8)$$

y como las superficies  $\Sigma_i$  son arbitrarias, esta relación (3.8) se cumple para cualesquiera superficies que elijamos. Si ahora dejamos que la superficie lateral vaya a infinito, con  $R \rightarrow \infty$ , las regiones de integración  $\Sigma_i$  “tapan” el espacio completamente y el flujo neto de  $T^{\mu\nu}$  a través de cualquier superficie  $\Sigma$  es nulo y por ende las cantidades

$$Q^\mu \equiv \int_{\Sigma} T^{\mu 0} d^3y, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

se conservan en el tiempo para todo el espacio. Dado que  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento, la cantidad conservada  $Q^\mu$  puede interpretarse como el 4-momento de relatividad especial mientras que  $T^{\mu 0}$  sería su densidad espacial.

La construcción de estas leyes de conservación para la relatividad general atenta contra la covarianza de la misma puesto que no trata en pie de igualdad espacio y tiempo en virtud de la misma definición de lo que nosotros interpretamos como una conservación (algo que no se altera en el “tiempo”).

Por otra parte, la construcción está restringida a que la métrica sea minkowskiana en el sentido de que, obviamente, representa un espacio plano pero también escrito en coordenadas cartesianas. En coordenadas esféricas la integración que define las cantidades conservadas incluso puede no converger.

### 3.3 Cargas conservadas en espacios curvos: el problema

Para aplicar la receta anterior a un espaciotiempo general se podría partir de la ley local que verifica el tensor de energía-momento de la relatividad general,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.9)$$

que vale en virtud de las ecuaciones de movimiento de la teoría (es decir que vale *on-shell*). Surgen inmediatamente dos problemas:

- No tenemos un equivalente del teorema de Gauss para la derivada covariante. Es decir que

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \neq \int_{\partial\Omega} n_{\mu} T^{\mu\nu} \sqrt{\gamma} d^3x$$

debido a que el teorema de Gauss es respecto de la divergencia con la derivada ordinaria  $\partial_{\mu}$  y no con la covariante  $\nabla_{\mu}$ .

La derivada covariante, no obstante, se reduce a la ordinaria en un par de casos particulares como son los de la divergencia de un vector  $F^{\mu}$ ,

$$\nabla_{\mu} F^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} F^{\mu}).$$

y la divergencia de un tensor antisimétrico  $F^{ab} = -F^{ba}$ , donde vale

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}).$$

Pero, dado que el tensor  $T^{\mu\nu}$  es de rango dos y simétrico, no se está en ninguno de estos dos casos favorables.

- La integral de un vector no es un invariante en un espacio curvo. Es decir que una expresión como  $\int_{\Omega} A^{\mu} \sqrt{-g} d^4x$  tiene un significado que depende del sistema de coordenadas elegido y eso la convierte, en cierto sentido, en un resultado de limitada utilidad. Se podría argüir que este mismo inconveniente aparece en un espacio-tiempo plano, lo cual es cierto, pero existe allí el atenuante de que la situación es algo mejor dado que si nos restringimos a cambios de coordenadas lineales la anulación de un tensor, como puede ser  $\nabla_a F^{ab}$ , es verificada para todos esos sistemas. Además, en un espacio plano es justificable la existencia de sistemas de coordenadas preferenciales –cartesianos ortogonales– y por ende adscribir un *status* especial a los valores que los tensores tienen en esos sistemas. En un espacio tiempo general, y por ende sin simetrías, esa posibilidad no existe.

### 3.4 Construcción de pseudotensores

Tempranamente se notó que se podía reescribir la parte que no es una derivada ordinaria en (3.9) para darle una forma apropiada y resolver el primer inconveniente, el más grave, que señalásemos en la sección anterior. En efecto, considerando el tensor mixto<sup>2</sup>  $T^\mu_\nu$ , utilizando su simetría y la expresión de los símbolos de Christoffel en términos de la métrica resulta

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^\mu_\nu) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial_\nu (g_{\sigma\mu}) T^{\sigma\mu},$$

es decir que la divergencia covariante se puede expresar como la ordinaria más un término extra. Si este último término pudiera llevarse a la forma

$$\frac{1}{2} \partial_\nu (g_{\mu\sigma}) T^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} t^\alpha_\nu),$$

para algún  $t^{\mu\nu}$  definido apropiadamente entonces se tendría un tensor de energía-momento efectivo  $T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$  que representaría la ley de conservación deseada. Subsistiría el inconveniente de la no invarianza de esas cantidades, pero este es un problema menor que puede mitigarse con algunas consideraciones pragmáticas al momento de evaluar la integral.

En teoría cuántica de campos ordinaria, donde la acción es de primer orden (el lagrangiano  $\mathcal{L}$  depende a lo sumo de derivadas primeras de los campos  $\phi$ ) se podía construir a partir de aquella un tensor de energía-momento canónico,

$$T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{L} - \partial_\alpha \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \phi)}$$

cuya conservación on-shell resultaba ser la ordinaria (es decir  $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ ). Si bien este tensor no es en general simétrico, lo cual es una característica necesaria para los sistemas físicos en cuestión (para la conservación del momento angular, por ejemplo), este hecho se puede enmendar sumándole a la acción la divergencia  $\partial^l \Psi_{ikl}$  de un tensor arbitrario  $\Psi_{ikl}$  antisimétrico en los índices  $k, l$ , lo cual no afecta ni las ecuaciones de movimiento ni la divergencia del tensor. Para campos en espacios curvos, la generalización de esta construcción es la receta<sup>3</sup>

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (3.10)$$

pero la conservación a la cual conduce es, como se vio, la covariante; es decir  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . No obstante, en el caso gravitatorio la acción  $S$  sobre la cual se toma derivada funcional en (3.10) es la de la materia solamente, que no incluye la acción del campo mismo. La evaluación de la derivada funcional de la acción del campo (por ejemplo, la acción de EH) resulta nula [65] de modo que la “receta” funciona cuando las variables de campo dentro de  $S$  no son las del mismo campo gravitatorio; es decir cuando el campo en cuestión no es la propia métrica<sup>4</sup>. Entonces, comprensiblemente, la anulación de la derivada covariante

<sup>2</sup>La expresión que resulta para el tensor totalmente covariante tiene un término extra.

<sup>3</sup>El tensor de energía-momento está dado por la derivada funcional de la acción. El campo gravitatorio, que se considera aquí un ente dado, aparece explícitamente en la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

<sup>4</sup>Por supuesto, la acción  $S$  depende de la métrica de forma explícita pero en ese caso la métrica corresponde a la de un campo gravitatorio background, que constituye el espacio curvo en el cual se propagan los campos  $\phi$  para los cuales se intenta hallar las ecuaciones de movimiento.

para este tensor se puede interpretar como el reflejo de que está faltando el tensor del campo gravitatorio, que no sería otro que el ente  $t^{\mu\nu}$  cuya divergencia covariante estaría asociada con la parte que “sobra” en  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ . Dado que existen ondas gravitacionales (suposición confirmada recientemente), y que las mismas transportan energía se sigue que la conservación del momento y de la energía en un sentido global no pueden darse en términos de la materia solamente. Se requiere el aporte del propio campo gravitatorio que estaría descrito por su tensor  $t^{\mu\nu}$ .

El problema es entonces construir este tensor a partir de la métrica de un modo tal que la conservación ordinaria se verifique a consecuencia de las ecuaciones de campo. Para la acción de EH en  $D=4$  dimensiones la construcción comienza por la descomposición de la acción [66] del siguiente modo

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [U(g, \partial g) + V]$$

donde hemos usado  $\kappa$  para la constante de Einstein y se ha indicado de forma explícita que la parte  $U$  del escalar  $R$  depende solamente de la métrica y sus primeras derivadas. La separación en  $U$  y  $V$ , esta última dependiendo de derivadas de la métrica hasta orden dos, permite expresar la acción como

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} U + \text{términos de superficie}$$

de modo que su variación conduce a

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0,$$

es decir que se recuperan las mismas ecuaciones de movimiento. Esto no es otra cosa que la integración por partes usual en la acción de EH, que lleva a descartar un término de superficie cuando el espaciotiempo no tiene bordes. Explícitamente el término que resulta eliminado es

$$V = \partial_\rho (\sqrt{-g} [g^{\sigma\rho} \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha - g^{\sigma\alpha} \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho]).$$

La construcción de la cantidad  $U$ , por separación del término ofensivo  $V$ , permite ahora emplear las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales de la mecánica<sup>5</sup> para arribar a

$$\sqrt{-g} G_{\mu\nu} = \frac{\delta(\sqrt{-g} U)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{-g} U)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} U)}{\partial[\partial_\lambda(g^{\mu\nu})]} \right).$$

Contrayendo con la derivada de la métrica, y haciendo un poco de álgebra para extraer la derivada hacia afuera,

$$\partial_\sigma g^{\mu\nu} \sqrt{-g} G_{\mu\nu} = \partial_\alpha \left[ (\sqrt{-g} U) \delta_\sigma^\alpha - \partial_\sigma g^{\mu\nu} \frac{\partial(\sqrt{-g} U)}{\partial[\partial_\alpha(g^{\mu\nu})]} \right]$$

donde resulta que la cantidad de la izquierda es una derivada total. Si se utilizan las ecuaciones de movimiento,  $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ , se suben y bajan índices de la métrica<sup>6</sup> y se añade un factor 1/2 se ve que

$$-\frac{1}{2} \partial_\sigma (g_{\mu\nu}) T^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa \sqrt{-g}} \partial_\alpha \left[ (\sqrt{-g} U) \delta_\sigma^\alpha - \partial_\sigma g^{\mu\nu} \frac{\partial(\sqrt{-g} U)}{\partial[\partial_\alpha(g^{\mu\nu})]} \right]$$

<sup>5</sup>Las ecuaciones de Euler-Lagrange para una acción con derivadas de orden dos incluyen un término extra, respecto de las usuales de mecánica clásica, que es una derivada de cuarto orden.

<sup>6</sup>El signo menos emerge merced a que  $\partial_\alpha (g^{\mu\nu}) g_{\mu\beta} = -g^{\mu\nu} \partial_\alpha (g_{\mu\beta})$ .

y entonces tenemos la prescripción para el tensor  $t^{\mu\nu}$  buscado de acuerdo con

$$\sqrt{-g} t^\alpha{}_\sigma = \frac{1}{2\kappa} \left[ (\sqrt{-g} U) \delta^\alpha_\sigma - \partial_\sigma g^{\mu\nu} \frac{\partial(\sqrt{-g} U)}{\partial[\partial_\alpha(g^{\mu\nu})]} \right],$$

ente que se suele llamar “pseudo-tensor del campo gravitatorio”. Entonces, se tiene

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^\mu{}_\nu + \sqrt{-g} t^\mu{}_\nu),$$

la divergencia covariante de  $T^\mu{}_\nu$  se transforma en la divergencia ordinaria de un nuevo tensor  $\hat{T}^\mu{}_\nu \equiv T^\mu{}_\nu + \sqrt{-g} t^\mu{}_\nu$ . Todo el cálculo hecho en la Sección 3.2 para espacios planos podría llevarse a cabo del mismo modo en función de este nuevo “tensor”  $\hat{T}^\mu{}_\nu$  y obtener cargas conservadas  $Q^\mu$ .

El problema es que esta construcción es algo limitada debido a que  $\hat{T}^\mu{}_\nu$  no es realmente un tensor<sup>7</sup>, lo cual está originado en que la división de la densidad escalar  $\sqrt{-g} R$  en  $\sqrt{-g} U + \sqrt{-g} V$  fracturó su carácter; las partes en que se ha dividido la densidad escalar no constituyen en sí mismas densidades escalares. Luego, todo lo que emerja de esta ley de conservación ha perdido la invarianza propia de las densidades tensoriales, de manera que es esperable que dependa del sistema de coordenadas. Por ejemplo, la suposición de que  $\hat{T}$  se anule en infinito espacial para unas coordenadas particulares, cartesianas por ejemplo, no basta para que suceda en cualquier otro sistema.

Asimismo esta construcción de  $t^\mu{}_\nu$  no es única (mencionemos entre ellas la del pseudotensor canónico de Einstein y el pseudotensor de Landau-Lifshitz), de modo que las cantidades conservadas también dependerán del tipo de tensor empleado.

Existe un procedimiento de construcción alternativo que es a partir de la definición de un superpotencial  $U^{\mu\nu\alpha}$ , cuyas propiedades de simetría requeridas

$$\partial_\alpha U^{\mu\nu\alpha} = \sqrt{-g}(G^{\mu\nu} + \kappa t^{\mu\nu}), \quad U^{\mu\nu\alpha} = -U^{\mu\alpha\nu}, \quad \partial_\alpha U^{\mu\nu\alpha} = \partial_\alpha U^{\nu\mu\alpha}$$

se logran escribiéndolo como la divergencia de otra cantidad  $U^{\mu\nu\alpha\beta}$ , según

$$U^{\mu\nu\alpha} = \partial_\beta U^{\mu\nu\alpha\beta}.$$

Este tipo de construcción puede verse en la Ref. [64] y en trabajos de las décadas del 60 y 70. En particular, la deducción del pseudotensor de Landau-Lifshitz, desarrollada en el párrafo §100 de [65], sigue este camino.

Este  $t^{\mu\nu}$  ha resultado simétrico, lo cual es algo deseable en vistas a la conservación del momento angular. Por otra parte, el carácter pseudotensorial del mismo no es otra cosa que la constatación de la inexistencia del concepto de energía-momento para el campo gravitatorio de manera local. En efecto, eligiendo un sistema de coordenadas localmente inercial con un cierto origen se tiene  $t^{\mu\nu} = 0$  (cosa que sucede al menos en el pseudotensor de Landau-Lifshitz, que se puede escribir en términos de los símbolos de Christoffel) para todo el espaciotiempo, lo que significaría –si  $t^{\mu\nu}$  fuese un tensor– que no existe la energía del campo gravitatorio. Por otra parte, en un espaciotiempo plano, en coordenadas cartesianas es  $t^{\mu\nu} = 0$  pero en coordenadas esféricas es  $t^{\mu\nu} \neq 0$ , solamente debido a que  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \neq 0$  en

<sup>7</sup>La derivada covariante de un tensor de rango dos es igual a la ordinaria, i.e.  $\nabla_a F^{ab} = (1/\sqrt{-g})\nabla_a(\sqrt{-g}F^{ab})$ , solamente en el caso en que  $F^{ab}$  es un tensor antisimétrico, pero esa situación no corresponde a casos físicamente razonables.

este último caso. No tiene sentido, entonces, hablar de una “localización” de la energía del campo gravitatorio; hablar de cuánta densidad de energía gravitatoria existe en un dado punto del espaciotiempo. Por esta razón, en la próxima sección, entrará en juego otro concepto más general, de índole global, para la energía gravitatoria, que es el de energía “quasilocal”.

Quizás no es este un fallo debido a la manera en que se manipulan las ecuaciones o una falta de imaginación a la hora de proponer construcciones adecuadas para  $\hat{T}^{\mu\nu}$ . Tal vez esta dificultad se halle enraizada en el mismo Principio de Equivalencia por el cual uno puede, mediante una elección adecuada del sistema de coordenadas, eliminar el campo gravitatorio en torno a un dado punto del espaciotiempo. Luego, no puede haber un “tensor”  $t^{\mu\nu}$  del campo. Las cantidades conservadas  $Q^\mu$ , que provienen de integrar una cierta región espaciotemporal, no sufren del mismo problema porque se puede utilizar un argumento por el cual se provee una pseudo-independencia de los sistemas coordenados (una invarianza más débil) aceptando que asintóticamente (en las direcciones espaciales) todos estos sistemas llevan a un espaciotiempo plano de modo que allí finalmente no hay gravedad. Para ese límite asintótico espacial se elige un sistema de coordenadas plano (Minkowski en coordenadas cartesianas) de modo que  $t^{\mu\nu} = 0$  para todo  $\mu, \nu$ . Pero dentro del “tubo” interno, donde los tensores de energía-momento no son nulos, se puede elegir cualquier otro sistema de coordenadas tal que su límite asintótico sea el espacio plano de Minkowski. Luego, la determinación de  $Q^\mu$  es invariante ante estos últimos cambios de coordenadas que preservan la asintotia.

### 3.5 El enfoque de energía quasilocal

En la Ref. [4] se presenta un enfoque para el cálculo de energía, que es comúnmente llamado “la energía quasilocal de Brown & York”, y que se basa en la analogía con la teoría de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica, para la cual la acción  $S$  de una teoría clásica puede verse como una función del intervalo temporal  $T$  entre una configuración inicial y final. El apelativo de “quasilocal” refiere a que estos cálculos se aplicarán a regiones del espaciotiempo acotadas tanto espacial como temporalmente y es para enfatizar el contraste con aquello que entendemos por “local”, es decir lo puntual, microscópico, si se quiere.

La idea es que el hamiltoniano  $H$ , que clásicamente se identifica con la energía, satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi  $H = -\partial S_{\text{cl}}/\partial T$  donde  $S_{\text{cl}}$  es la llamada acción clásica, la cual retiene solamente la parte de borde<sup>8</sup>. Así como la energía, por ejemplo, está definida, a menos del signo, como la tasa de cambio de la acción clásica respecto del tiempo, otras cargas conservadas como el momento o el momento angular pueden verse como las asociadas a las tasas de cambio respecto de las traslaciones espaciales o rotaciones. Este concepto está conectado por supuesto con la teoría de las conservaciones de Noether y tiene su correlato matemático preciso en la geometría diferencial merced a los vectores de Killing del espaciotiempo (sobre los cuales se hablará más adelante).

Transportar este concepto desde acciones de la mecánica clásica hacia las gravitatorias requiere considerar los términos de borde de la teoría en cuestión, es decir, un acción para un espaciotiempo con borde según se vio en la Sección 2.5. Sobre una región  $\mathcal{M}$  del

<sup>8</sup>La idea de  $S_{\text{cl}}$  aquí es que define una acción que captura variaciones respecto de las ecuaciones clásicas de movimiento de manera que la parte de la acción usual  $S$  que da origen a las ecuaciones de movimiento, está eliminada; puede decirse que es una acción on-shell o bien que es la acción evaluada en una solución clásica (véase [4]).



espaciotiempo, véase la Figura 3.3, se consideran hipersuperficies spacelike  $t'$  y  $t''$  y una 3-superficie timelike  ${}^3B$ . Una superficie genérica spacelike  $\Sigma$  tendrá un borde  $B$ , que es de 2-dimensiones, pese a que una de ellas está suprimida en el diagrama de la figura. Las 3-superficies  $\Sigma$  tienen métrica  $h_{ij}$  y derivada covariante  $D_i$  mientras que las hipersuperficies  ${}^3B$  tienen métrica  $\gamma_{ij}$  y derivada  $\mathcal{D}_i$ . Las normales son, respectivamente,  $u^\mu$  y  $n^\mu$  y verifican  $u^\mu n_\mu = 0$  sobre  ${}^3B$ .

El tiempo, que en la acción no-relativista define los instantes inicial y final (fijos) se traslada en el formalismo gravitatorio a condiciones sobre la métrica de borde  $\gamma_{ij}$  de modo que la noción de energía no-relativista se transforma ahora en un tensor de energía momento superficial (del borde) dado por

$$\tau^{ij} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_{\text{cl}}}{\delta \gamma_{ij}}, \quad (3.11)$$

una expresión similar a la definición para el tensor de energía-momento de la materia,

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^{\text{m}}}{\delta g_{\mu\nu}},$$

donde se debe enfatizar (y así lo hacen los autores en [4]) que este tensor del borde  $\tau^{ij}$  caracteriza el sistema entero; es decir que incluye contribuciones del campo gravitatorio y de los campos de materia. Debe notarse, también, que la variación en (3.11) es respecto de la métrica de borde y no de la métrica total del espaciotiempo. Logra, en suma, el cometido que pretendía el pseudo-tensor del campo gravitatorio construido en la sección anterior, pero sin estar lastrado por el carácter “pseudo”, que lo tornaba en un ente dependiente de las coordenadas.

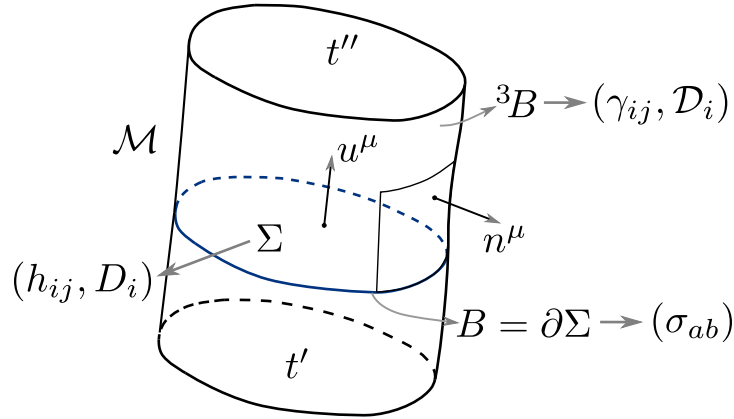


Figura 3.3: Región  $M$  del espaciotiempo de borde  $\partial M$  que consta de dos hipersuperficies spacelike  $t', t''$  y una superficie lateral  ${}^3B$ . Un corte arbitrario por una hipersuperficie  $t$  genérica da origen a una hipersuperficie spacelike  $\Sigma$  que tiene borde  $B$ . La nomenclatura es la de [4] para poder seguir más fácilmente el desarrollo. Las dos 3-superficies involucradas,  ${}^3B$  y  $\Sigma$  tienen métricas y derivadas covariantes identificadas según se muestra en la figura.

Obviamente, la característica de este tensor  $\tau^{ij}$ , de proveer de manera invariante una noción de densidad de energía-momento gravitatorio, está restringida al borde, puesto que es adonde pertenece el mismo, pero puede engendrar una noción (quasilocal) para la

energía-momento contenida en una región del espaciotiempo sobre la cual se realizará una integral con la misma prescripción que la realizada para el cálculo de cargas en espacios planos de la sección 3.2. Para que la construcción sea consistente es necesario que el principio variacional esté bien formulado, lo que significa que las variaciones de los campos en juego (la métrica y los campos de materia, si los hubiera) son las únicas variaciones que se anulan en los bordes. Es decir que no existe derecho a asumir que las variaciones de las derivadas normales son nulas allí. En el caso de la acción de EH esto implica, como se sabe desde la Sección 2.5, que se debe incorporar el término de borde de Gibbons-Hawking-York.

El tensor de borde de Brown-York está sometido a la relación

$$\mathcal{D}_i \tau^{ij} = -T^{nj} \quad (3.12)$$

donde  $n$  refiere a la dirección de la normal  $n^\mu$  y el lado derecho es la abreviatura  $T^{nj} \equiv T^{\mu\nu} n_\mu \gamma_\nu^j$ . Esta expresión es como una ley covariante  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  (puesto que  $\mathcal{D}_i$  es la derivada covariante correspondiente a  ${}^3B$ ) solamente que provista de un término de fuente del lado derecho. Este último se puede entender a partir de que  $T^{\mu\nu} n_\mu$  es la proyección del tensor de energía-momento en la dirección normal a  ${}^3B$ , sobre la cual la contracción con el tensor mixto  $\gamma_\nu^j$  cumple la función de proyectar en las direcciones  $j = 1, 2, 3$  de aquella superficie. Entonces, la ley covariante de balance (3.12) expresa el hecho de que las variaciones del tensor estarán vinculadas al flujo normal de  $T^{\mu\nu}$  a través de la frontera  ${}^3B$ . Claramente, esta ecuación tiene la forma de las ecuaciones de balance clásicas de la Sección 3.1. Para arribar, utilizando la relación (3.12), a una ecuación de balance o de conservación, debemos hacer ahora una pequeña digresión.

### 3.6 Vectores de Killing y leyes de conservación

En mecánica clásica, en el formalismo lagrangiano, existía un vínculo entre cantidades conservadas y simetrías del lagrangiano, que estaba enunciado en el teorema de Noether; si el lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$  es invariante ante una transformación continua  $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$  entonces hay una constante de movimiento asociada a dicha transformación. Esas constantes de movimiento eran las cantidades conservadas en los sistemas mecánicos: energía, momento lineal, momento angular.

En gravitación, como la física de la gravedad misma está dada en la métrica del espaciotiempo es intuitivamente claro que la simetría debería estar asociada a una invarianza de la misma, pero dada de una manera que sea independiente del sistema de coordenadas ya que justamente todos ellos están en pie de igualdad y son arbitrarios. Esta idea se puede hacer precisa considerando un campo vectorial  $\xi^\mu$  y buscando las condiciones bajo las cuales la métrica  $g_{\mu\nu}$  no varía cuando se considera un desplazamiento en la dirección  $\xi^\mu$ . Considerando una variación infinitesimal  $\varepsilon$  (dado que una variación finita se puede asociar a una sucesión de infinitesimales) se quiere ver que una variación

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu,$$

que provoca variaciones de la métrica  $\delta g_{\mu\nu}$  y del desplazamiento infinitesimal  $dx^\mu$  dadas por

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\alpha (g_{\mu\nu}) \xi^\alpha \varepsilon \quad \delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu) = \varepsilon \partial_\alpha (\xi^\mu) dx^\alpha$$

es tal que la distancia infinitesimal  $dx^2$  no varía entre los puntos cercanos  $x^\mu$  y  $x^\mu + \delta x^\mu$ . La condición para que esto suceda es

$$\delta(ds^2) = \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = [\partial_\alpha (g_{\mu\nu}) \xi^\alpha + g_{\alpha\nu} \partial_\mu (\xi^\alpha) + g_{\mu\alpha} \partial_\nu (\xi^\alpha)] dx^\mu dx^\nu \varepsilon = 0,$$

lo que implica que debe ser nulo el corchete anterior, es decir la condición

$$\partial_\alpha(g_{\mu\nu})\xi^\alpha + g_{\alpha\nu}\partial_\mu(\xi^\alpha) + g_{\mu\alpha}\partial_\nu(\xi^\alpha) = 0,$$

que en términos de la derivada covariante lleva, finalmente, a

$$\nabla_\beta\xi_\alpha + \nabla_\alpha\xi_\beta = \mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.13)$$

donde resulta que la derivada de Lie  $\mathfrak{L}$  de la métrica<sup>9</sup> a lo largo de la dirección  $\xi^\mu$  se anula. Los vectores  $\xi^\mu$  que son solución de la ecuación (3.13) son los vectores de Killing de la métrica, que caracterizan las simetrías de un cierto espaciotiempo de una manera invariante (sin importar el sistema de coordenadas utilizado).

Previamente se había establecido que como ley local de conservación la Ec. (3.9) no conducía, por inexistencia de un teorema de Gauss para la derivada covariante, a una ley de conservación integral. La Ec. (3.12) presenta, por esa razón, el mismo inconveniente. Suponiendo ahora que el espaciotiempo en cuestión admite un vector de Killing  $\xi^\mu$ , y se considera su contracción con el tensor de energía-momento  $\xi_\mu T^{\mu\nu}$  se verifica que

$$\nabla_\nu(\xi_\mu T^{\mu\nu}) = \nabla_\nu\xi_\mu T^{\mu\nu} + \xi_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0,$$

donde cada sumando de la expresión central se anula por separado; el primero por ser contracción entre un tensor simétrico  $T^{\mu\nu}$  y uno antisimétrico  $\nabla_\mu\xi_\nu$  (esta se deduce de la Ec. (3.13)), y el segundo por la misma ley diferencial (3.9). Se tiene la anulación de una divergencia covariante de un vector, la cual es –según se vio en la Sección 3.3– equivalente a la ordinaria.

A partir de la existencia de vectores de Killing del espaciotiempo (o de un borde del mismo) se pueden obtener ecuaciones de balance o eventualmente cargas conservadas en el sentido quasilocal referido. Asumiendo que el borde  ${}^3B$  tiene un vector de Killing  $\xi^i$  asociado con una isometría de la métrica  $\gamma_{ij}$  entonces se tiene  $\mathcal{D}_{(i}\xi_{j)} = 0$  y si se contrae la Ec. (3.12) con  $\xi_j$  e integra en el borde  ${}^3B$  entre las hipersuperficies, arbitrarias,  $t'$  y  $t''$ , de manera completamente equivalente a lo realizado para el espacio plano, se tiene

$$Q_\xi(t'' \cap {}^3B) - Q_\xi(t' \cap {}^3B) = - \int_{{}^3B} d^3x \sqrt{-\gamma} T^{nj} \xi_j,$$

donde

$$Q_\xi(t \cap {}^3B) = \int_{t \cap {}^3B} d^2x \sqrt{\sigma} u_i \tau^{ij} \xi_j \quad (3.14)$$

se define como la carga quasilocal asociada a la invarianza dada por  $\xi$  evaluada en la hipersuperficie  $t \cap {}^3B$ , de dimensión 2 o más generalmente  $D-2$ , y donde los componentes  $T^{nj}\xi_j$  sirven como su fuente (al estilo de las ecuaciones de balance de la Sección 3.1).

En el caso de que el término de fuente en Ec. (3.12) sea nulo o que, al menos el componente de  $T^{ni}$  en la dirección  $\xi_i$  se anule, se tiene la conservación de la carga  $Q_\xi(t \cap {}^3B)$  en una superficie  $t$  a través de la integración en el borde  $t \cap {}^3B$ . A menos de un signo se puede identificar la energía quasilocal con la carga conservada que surge del cálculo con un vector de Killing timelike de normal unitaria  $\xi^i \xi_i = -1$ , y que además coincide con la normal a la hipersuperficie  $t$ , es decir que se da  $\xi_i = u_i$ .

En resumen, el cálculo de cargas quasilocales implica en primer lugar obtener el tensor de Brown-York del borde a través de la receta (3.11), para luego realizar una integración en el borde utilizando el vector de Killing  $\xi$  apropiado obteniendo  $Q_\xi$  de acuerdo a (3.14).

<sup>9</sup>La elección del signo monetario  $\mathfrak{L}$  para la derivada de Lie responde más a evitar cualquier posible confusión con el símbolo  $\mathcal{L}$ , empleado para el lagrangiano, que a una abreviatura convencional.

### 3.7 El formalismo covariante

Lo que denominaremos el “formalismo covariante” es una manera de calcular cargas conservadas basada en el concepto de corriente conservada  $J^\nu \equiv \xi^\mu T_\mu{}^\nu$  que brindan los vectores de Killing. Surgió como generalización del cálculo para espacio plano, que fuera presentado en la Sección 3.2, y está asociado principalmente con los nombres de R. Arnowitt, L.F. Abbott, S. Deser, C.W. Misner y B. Tekin, los cuales, en diferentes momentos dentro de un período de 40 años, publicaron una serie de trabajos relevantes sobre cálculos de cargas conservadas para diferentes espacios y en el contexto de diferentes teorías gravitatorias. La Figura 3.4 muestra un cuadro sinóptico con los tres principales tipos de cálculos energéticos que han recibido una nomenclatura propia. Los acrónimos que aparecen en la tercer columna provienen de las iniciales de los autores mencionados previamente.

Teoría	Lagrangiano	Nomenclatura
EH	$\mathcal{L} \sim R$	ADM (1962)
CEH	$\mathcal{L} \sim R - 2\Lambda$	AD (1982)
Alto Orden	$\mathcal{L} \sim R - 2\Lambda + R^2 + \dots$	ADT (2003)

Figura 3.4: Nomenclaturas usuales dentro de la literatura especializada que identifican ciertos cálculos de cargas conservadas en las teorías gravitatorias más relevantes.

#### 3.7.1 Expansión de las ecuaciones de movimiento

La idea central es que las cargas conservadas se definen respecto de un espaciotiempo de *background*, solución de vacío de la teoría, sobre el cual se considera una perturbación que es la responsable de todos los efectos gravitatorios. Esto implica que la métrica del espaciotiempo se escribe como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

donde  $\bar{g}_{\mu\nu}$  es el background y  $h_{\mu\nu}$  una perturbación, no necesariamente pequeña, pero que se apaga en infinito espacial. Esto significa que el espaciotiempo  $g_{\mu\nu}$  es asintóticamente el de la métrica background  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . Si la teoría tiene ecuaciones de movimiento dadas genéricamente por

$$E_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

donde  $\kappa$  es la constante de Einstein y  $T_{\mu\nu}$  el correspondiente tensor de energía-momento que describe la materia, entonces, una expansión de Taylor en torno a  $\bar{g}_{\mu\nu}$  sería algo como

$$E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}(\bar{g}) + E_{\mu\nu\alpha\beta}^{(1)} h^{\alpha\beta} + \dots$$

donde el primer término se anula porque el background es solución de vacío de la teoría, es decir, porque verifica  $E_{\mu\nu}(\bar{g}) = 0$ .

El término  $E_{\mu\nu\alpha\beta}^{(1)}$  puede pensarse como una derivada, en el sentido de una expansión de Taylor multidimensional, del tipo

$$E_{\mu\nu\alpha\beta}^{(1)} \equiv \left. \frac{\partial E_{\mu\nu}}{\partial g^{\alpha\beta}} \right|_{\bar{g}}.$$

Las identidades de Bianchi implican que el miembro izquierdo de (3.16) está covariantemente conservado, lo cual es por supuesto consistente con el miembro derecho, de manera que

$$\nabla_{\mu} E^{\mu\nu} = 0$$

para la derivada  $\nabla_{\mu}$ , que involucra la conexión de la métrica total  $g_{\mu\nu}$ . Esta derivada covariante también se puede pensar como una expansión de Taylor en términos de la derivada covariante de la métrica background, es decir que se puede escribir

$$\nabla_{\mu} = \bar{\nabla}_{\mu} + \Phi_{\mu},$$

con un término  $\Phi_{\mu}$  que no implica derivadas parciales  $\partial_{\mu}$ , de modo que, hasta orden uno

$$\nabla_{\mu} E^{\mu\nu} \approx (\bar{\nabla}_{\mu} + \Phi_{\mu})(E^{\mu\nu}(\bar{g}) + E^{(1)\mu\nu}) = 0,$$

$$\bar{\nabla}_{\mu} E^{\mu\nu}(\bar{g}) + \Phi_{\mu} E^{\mu\nu}(\bar{g}) + \bar{\nabla}_{\mu}(E^{(1)\mu\nu}) = 0,$$

donde la contracción de  $E^1$  con  $h$ , en los índices  $\alpha\beta$ , se ha dejado implícita en  $E^{(1)\mu\nu}$ . Como la métrica background  $\bar{g}_{\mu\nu}$  es solución de vacío, se dan independientemente

$$\bar{\nabla}_{\mu} E^{\mu\nu}(\bar{g}) = 0 \quad \text{y} \quad \Phi_{\mu} E^{\mu\nu}(\bar{g}) = 0$$

de manera que

$$\bar{\nabla}_{\mu}(E^{(1)\mu\nu}) = 0, \tag{3.17}$$

lo cual implica que el término lineal está covariantemente conservado en relación a la derivada covariante respecto de la métrica del background.

La expansión anterior de la derivada covariante es quizás un poco heurística; a partir de la métrica, la derivada se construye como

$$\nabla_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$$

y para una métrica dada por  $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  se puede poner

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$$

y entonces considerando la forma  $\nabla = \bar{\nabla} + \Phi$  se identifica  $\Phi = \delta\Gamma$ .

Las ecuaciones de movimiento exactas de la teoría, Ec. (3.16), se pueden escribir del modo

$$E_{\mu\nu}(\bar{g}) + E_{\mu\nu}^{(1)}(h) + E_{\mu\nu}^{\text{nl}} = \kappa T_{\mu\nu},$$

donde  $E_{\mu\nu}^{\text{nl}}$  incorpora todos los órdenes no lineales (en potencias crecientes de la perturbación  $h_{\mu\nu}$ ). Usando que  $\bar{g}$  es solución de vacío de la teoría y pasando de miembro los términos no lineales se puede escribir, de manera equivalente,

$$E_{\mu\nu}^{(1)}(h) = \kappa \mathfrak{T}_{\mu\nu}, \quad \mathfrak{T}_{\mu\nu} \equiv \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa} E_{\mu\nu}^{\text{nl}} \right) \tag{3.18}$$

donde las no linealidades han pasado al lado de la materia (el derecho), representada por este nuevo tensor  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ , que obedece, en razón de la Ec. (3.17), la ley covariante de conservación

$$\nabla^\mu \mathfrak{T}_{\mu\nu} = \nabla^\mu \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa} E_{\mu\nu}^{(1)} \right) = 0. \quad (3.19)$$

En el caso de ausencia de materia,  $T_{\mu\nu} = 0$ , operar sobre el tensor de energía-momento  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$  es equivalente entonces a hacerlo sobre el término de orden uno de las ecuaciones de movimiento del desarrollo.

Un comentario [67] es pertinente sobre las ecuaciones (3.18). El haber pasado de miembro los términos no lineales (potencias de  $h_{\mu\nu}$  de orden dos y superior) de la expansión, implica que ahora el tensor de energía-momento  $\mathfrak{T}$  depende explícitamente del campo  $h_{\mu\nu}$ . Esta característica se puede interpretar asumiendo que el campo  $h_{\mu\nu}$  está generado por las densidades y flujos de energía-momento “totales”, es decir las que incluyen la materia (en  $T_{\mu\nu}$ ) y el campo (en la parte no lineal de las ecuaciones de movimiento). De esta suerte el añadido  $t_{\mu\nu} \equiv -1/\kappa E_{\mu\nu}^{\text{nl}}$  puede pensarse como el tensor de energía-momento del campo gravitatorio, por analogía con el tensor del campo electromagnético que es cuadrático en los campos  $F_{\mu\nu}$ . Este añadido era la parte que faltaba del lado derecho de las ecuaciones de movimiento y que se buscaba incorporar de manera explícita (pagando el precio de la rotura de la covarianza), con la construcción del pseudotensor del campo gravitatorio descrita en la Sección 3.4.

### 3.7.2 Ley de conservación

Los vectores de Killing de una métrica verifican en general la Ec. (3.13), de manera que para el caso de la métrica de background se tendrá

$$\mathfrak{L}_{\bar{g}} \xi = 0 = \bar{\nabla}_\mu \xi_\nu + \bar{\nabla}_\nu \xi_\mu$$

lo que conduce a que la parte de orden uno de las ecuaciones de movimiento verifique

$$\bar{\nabla}_\mu (\xi^\nu E^{(1)\mu}_\nu) = \bar{\nabla}_\mu \xi^\nu E^{(1)\mu}_\nu + \xi^\nu \bar{\nabla}_\mu E^{(1)\mu}_\nu = 0, \quad (3.20)$$

puesto que el primer término se anula por contracción simétrico-antisimétrico<sup>10</sup> y el segundo en virtud de la (3.17). Debe enfatizarse aquí que el vector de Killing corresponde de manera exacta a la métrica background  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , pero dado que la métrica total  $g_{\mu\nu}$  coincide asintóticamente con la de background se deduce que dicho vector es también vector de Killing asintótico para la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Entonces, según la Ec. (3.20) para el orden uno de las ecuaciones de movimiento estamos en la misma situación que se tenía para el tensor de energía-momento; una conservación dada por la anulación de la divergencia de una corriente conservada vectorial  $A^\mu \equiv \xi^\nu E^{(1)\mu}_\nu$ , de modo que se puede escribir asimismo

$$\bar{\nabla}_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{\bar{g}} A^\mu) = 0,$$

donde  $\sqrt{\bar{g}}$  es por supuesto la raíz del determinante de la métrica de background.

<sup>10</sup>Que  $E^{(1)\mu}_\nu$  sea simétrico es una propiedad que hereda de las ecuaciones de movimiento para la métrica total, que son obviamente simétricas.

Una divergencia nula  $\bar{\nabla}_\mu A^\mu = 0$  se puede aún reescribir en términos de otro ente. En efecto, si vale lo anterior se puede postular una escritura del vector  $A^\mu$  en términos de la divergencia de un tensor  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  antisimétrico, es decir<sup>11</sup>

$$A^\mu = \nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}.$$

Esta nueva escritura verifica  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ , lo cual se comprueba evaluando explícitamente la contracción

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}) &= \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{2} (R^\mu_{\sigma\mu\nu} \mathcal{F}^{\sigma\nu} + R^\nu_{\sigma\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\sigma}) = \frac{1}{2} (R_{\sigma\nu} \mathcal{F}^{\sigma\nu} + R_{\sigma\mu} \mathcal{F}^{\mu\sigma}) = 0 \end{aligned}$$

donde la equivalencia entre doble derivada covariante sobre  $\mathcal{F}$  y la contracción del Riemann con aquel proviene de utilizar la expresión del conmutador de derivadas covariantes, y el último término es nulo porque cada término lo es (contracción de tensor simétrico -el tensor de Ricci- con el  $\mathcal{F}$  que es antisimétrico).

Entonces, se puede escribir

$$\xi_\nu E^{(1)\mu\nu} = \nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

de modo que la contracción del vector de Killing con el tensor de orden uno de las ecuaciones de movimiento de la teoría es equivalente a la divergencia del tensor antisimétrico  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ .

### 3.7.3 Cálculo de carga conservada por integración

La divergencia de la corriente conservada es ahora la (3.19) de modo que la integración procede, como en el caso de espaciotiempo plano, sobre un volumen espaciotemporal  $\mathcal{V}$  de  $D$  dimensiones, definido por la “lata” que se muestra esquemáticamente en la Figura 3.5. Se tendrá entonces

$$I = \frac{1}{\kappa} \int_\Omega \bar{\nabla}^\mu (\xi^\nu E_{\mu\nu}^{(1)}) d^D x = \frac{1}{\kappa} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{g}} \partial^\mu (\sqrt{g} \xi^\nu E_{\mu\nu}^{(1)}) d^D x,$$

donde en el miembro de la derecha ya se ha transformado la divergencia covariante en una divergencia ordinaria, la cual permite la aplicación del teorema de Gauss para arribar a

$$I = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\Omega} \sqrt{\gamma} n^\mu \xi^\nu E_{\mu\nu}^{(1)} d^{D-1} x,$$

donde  $n^\mu$  es la normal a la superficie borde  $\partial\Omega$  y  $\gamma$  el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$  restringida a dicha superficie.

De esta superficie  $\partial\Delta = \Sigma_L + \Sigma_1 + \Sigma_2$  la superficie lateral  $\Sigma_L$  tendrá un aporte nulo puesto que suficientemente lejos la perturbación  $h_{\mu\nu}$ , que es fuente del tensor  $\mathfrak{T}$ , se apaga (nótese que el espacio es asintóticamente  $\bar{g}_{\mu\nu}$ ). De tal suerte basta entonces considerar la integral sobre las tapas  $\Sigma$

$$I = \frac{1}{\kappa} \int_\Sigma \sqrt{\gamma} \xi^\nu E_{0\nu}^{(1)} d^{D-1} x,$$

<sup>11</sup>Esta escritura está asociada con el hecho de que la definición de un vector a través de su divergencia es a menos de un rotor; es decir que  $A$  y  $A + \text{rot}(B)$  tienen la misma divergencia.

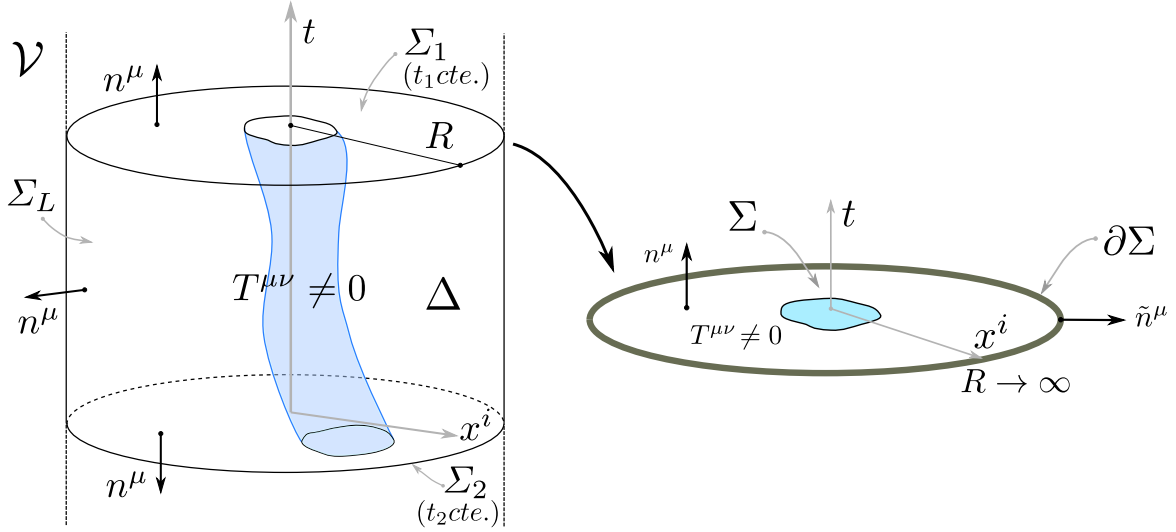


Figura 3.5: Esquema para el cálculo de cargas en un espacio curvo utilizando el formalismo covariante. A diferencia del caso de espaciotiempo plano, se integrará una divergencia ordinaria nula dada por  $\partial_\mu(\sqrt{-g}\xi^\mu\mathfrak{T}_\mu^\nu)$  sobre el borde del espaciotiempo. Asimismo, la escritura de la divergencia de  $\mathfrak{T}_\mu^\nu$  en términos de un tensor antisimétrico  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  permite aplicar una segunda ley de Gauss sobre el borde  $\partial\Sigma$  de manera que las cargas terminan siendo integrales  $D - 2$  dimensionales, al contrario que en el espacio plano que eran  $D - 1$  dimensionales.

donde debe notarse que, dada la elección particular de las superficies  $\Sigma$ , la normal  $n^\mu$  tendrá componente no nula solamente en la dirección temporal razón por la cual sobrevive la proyección en dicha dirección (coordenada cero).

Según se vio previamente en la Ec. (3.21), el integrando de la última integral se puede escribir asimismo como una divergencia covariante (de un tensor antisimétrico), motivo por el cual se puede realizar la misma operación previa, i.e. escribirla en términos de la divergencia ordinaria y aplicar una nueva ley de Gauss en la superficie  $\partial\Sigma$ . Es decir que la anterior se escribe como

$$I = \frac{1}{\kappa} \int_\Sigma \sqrt{\gamma} \nabla^\nu \mathcal{F}_{0\nu} d^{D-1}x = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\sigma} \tilde{n}^\nu \mathcal{F}_{0\nu} d^{D-2}x$$

donde ahora  $\tilde{n}^\nu$  es la normal exterior a  $\partial\Sigma$  y  $\sigma$  es el determinante de la métrica  $\gamma_{\mu\nu}$  restringida al borde de  $\Sigma$  (ver inserto lateral en la Figura 3.5).

Finalmente, la carga conservada asociada al vector de Killing  $\xi$  resulta

$$Q(\xi) = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\sigma} \tilde{n}^\nu \mathcal{F}_{0\nu} d^{D-2}x. \quad (3.22)$$

### 3.7.4 Cálculo de cargas: procedimiento analítico

La carga conservada se calcula realizando la integral que la define en la Ec. (3.22). Podemos identificar dos métodos diferentes de atacar la misma, que denominaremos “analítico” y “numérico” (aunque quizás en este último caso el mote de *pseudo-numérico* fuese



más apropiado). El primer enfoque consiste en determinar la expresión analítica del integrando para la teoría de interés, asumiendo solamente la descomposición de la métrica total como  $g = \bar{g} + h$  pero sin considerar a esta altura ninguna forma específica. Una vez obtenida esa expresión, que puede ser notablemente engorrosa dependiendo de las ecuaciones de la teoría en cuestión, se pueden calcular las cargas de cualquier métrica que sea solución de la teoría simplemente evaluando en  $\bar{g}_{\mu\nu}$  la expresión obtenida e insertando la forma explícita de la perturbación  $h_{\mu\nu}$ . Obtener analíticamente el integrando es un proceso que implica la *extracción* del tensor  $\mathcal{F}$  desde dentro de la divergencia utilizando propiedades algebraicas y aplicando la regla de Leibniz sobre las derivadas de manera que en general es una tarea de lápiz y papel que no es fácil que realice automáticamente un CAS<sup>12</sup>.

El método analítico comienza con la determinación explícita de  $\mathcal{F}$  para lo cual se toma la Ec. (3.21), es decir

$$\xi_\nu E^{(1)\mu\nu} = \nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu},$$

trabajándose el miembro izquierdo hasta darle forma de divergencia a través del proceso de *sacar hacia afuera* la derivada covariante.

A continuación se ilustra el procedimiento en el caso sencillo de GR con constante cosmológica (i.e. las ecuaciones de movimiento de la acción de CEH). Las ecuaciones completas de la teoría son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.23)$$

Luego, la linealización de las mismas en torno a la métrica background  $\bar{g}_{\mu\nu}$  comienza reemplazando la métrica total  $g_{\mu\nu}$  por el ansatz de la Ec. (3.15) y sometiendo a cada ente que depende de la misma al proceso de linealización, el cual consiste en escribir al mismo como una parte barrada (que corresponde al ente evaluado en la métrica background) y una parte lineal en  $h_{\mu\nu}$  (identificada con un supraíndice  $h$ ), eliminando los restantes términos de orden superior. Esta operación de linealización sobre un ente  $E$  se identificará con la nomenclatura  $(E)^L$ . Así, por ejemplo, la linealización sobre el tensor de Ricci resulta en la descomposición

$$(R_{\mu\nu})^L = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(h)}.$$

En el Apéndice B se presenta la deducción de las expresiones de las partes lineales del tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, que son los resultados básicos para la linealización de ecuaciones de movimiento en teorías gravitatorias.

La linealización de entes provenientes de una contracción debe hacerse de manera consistente, i.e. explicitando la métrica y tomando la linealización antes de la contracción. En el caso del escalar de curvatura la misma se evalúa según

$$(R)^L = (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})^L = (\bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(h)}) = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} + \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(h)}$$

de manera que resulta

$$(R)^L = \bar{R} + R^{(h)}, \quad \text{con} \quad R^{(h)} = \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(h)} - h^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} \quad (3.24)$$

donde puede verse que ha desaparecido el producto  $hR^{(h)}$ , por ser cuadrático, y donde se ve claramente que la subida y bajada de índices y las contracciones de los partes lineales de los entes son más complicadas que las de los entes completos.

<sup>12</sup>No obstante, hay posibilidades de que un software como Cadabra, que tiene una idiosincracia algo diferente a Maple y Mathematica en cuanto a tratamiento de álgebra tensorial, pueda ser útil en este tipo de manipulaciones.

Utilizando los resultados del Apéndice B, la linealización de la Ec. (3.23) lleva a

$$\bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}(\bar{R} + R^{(h)})(\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) + \Lambda(\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \approx 0,$$

o bien,

$$\left[ \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}\bar{g}_{\mu\nu} + \Lambda\bar{g}_{\mu\nu} \right] + R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}R^{(h)}\bar{g}_{\mu\nu} + \left( \Lambda - \frac{1}{2}\bar{R} \right) h_{\mu\nu} \approx 0,$$

donde el término entre corchetes es nulo puesto que la métrica de background es solución de vacío. Luego, la parte de orden uno de las ecuaciones de movimiento tiene la forma

$$E_{\mu\nu}^{(1)} \equiv R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}R^{(h)}\bar{g}_{\mu\nu} + \left( \Lambda - \frac{1}{2}\bar{R} \right) h_{\mu\nu}$$

y lo que se buscará ahora, previa contracción con un vector de Killing, es darle la forma de una divergencia, es decir el  $\mathcal{F}$  tal que  $\xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}$ . Incorporando las expresiones explícitas para los términos supra- $(h)$  se tiene

$$\begin{aligned} \xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)} = & \frac{1}{2} (\xi^\mu \nabla^\alpha \nabla_\mu h_{\nu\alpha} + \xi^\mu \nabla^\alpha \nabla_\nu h_{\mu\alpha} - \xi^\mu \nabla^\alpha \nabla_\alpha h_{\nu\mu} - \xi^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu h + \\ & - \xi_\nu \nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta} + \xi_\nu \nabla^\alpha \nabla_\alpha h + \xi_\nu \bar{R}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) + \left( \Lambda - \frac{1}{2}\bar{R} \right) \xi^\mu h_{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde hay que enfatizar el hecho de que los índices del vector de Killing  $\xi$ , al ser global, bajan y suben con la métrica de background.

Trabajando esta expresión, por sucesivas aplicaciones de la regla de Leibniz para ir extrayendo la derivada covariante fuera y considerando las propiedades de simetría de los diversos entes (muchas contracciones se anulan), se llega a

$$\begin{aligned} \xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)} = & \frac{1}{2} \nabla^\alpha \left[ 2\xi^\mu \nabla_{[\nu} h_{\alpha]\mu} + 2\xi_{[\nu} \nabla_{\alpha]} h + h \nabla_\nu \xi_\alpha + 2\xi_{[\alpha} \nabla^\mu h_{\nu]\mu} + 2h_{\mu[\alpha} \nabla^\mu \xi_{\nu]} \right] + \\ & \left( \bar{R}^{\alpha\beta} \xi_\beta h_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} \bar{R}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \xi_\nu - \frac{1}{2} \bar{R}_{\alpha\nu} \xi^\alpha h \right) + \left( \Lambda - \frac{1}{2}\bar{R} \right) \xi^\mu h_{\mu\nu} \quad (3.25) \end{aligned}$$

en la cual se observa que los dos últimos términos no tienen aún la forma apropiada. Estos términos dependen de cantidades evaluadas en el background, sobre el cual solamente se ha postulado que verifica las ecuaciones de vacío de la teoría. Utilizando estas últimas se tienen

$$\bar{R}_{\mu\nu} = - \left( \Lambda - \frac{1}{2}\bar{R} \right) \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \bar{R} = \frac{2\Lambda D}{D-2},$$

donde la segunda ecuación se obtiene de contraer la primera con la métrica  $\bar{g}$ . Incorporando estas relaciones en los dos últimos términos de la Ec. (3.25) puede verse que estos se anulan, de manera que se tiene

$$\xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \nabla^\alpha \left[ 2 \xi^\mu \nabla_{[\nu} h_{\alpha]\mu} + 2 \xi_{[\nu} \nabla_{\alpha]} h + h \nabla_\nu \xi_\alpha + 2 \xi_{[\alpha} \nabla^\mu h_{\nu]\mu} + 2 h_{\mu[\alpha} \nabla^\mu \xi_{\nu]} \right] \quad (3.26)$$

la cual permite identificar, dentro del corchete, al tensor  $\mathcal{F}$  correspondiente a las ecuaciones de movimiento de la teoría en cuestión, que resulta ser

$$\mathcal{F}_{\nu\alpha} = \xi^\mu \nabla_{[\nu} h_{\alpha]\mu} + \xi_{[\nu} \nabla_{\alpha]} h + \frac{1}{2} h \nabla_{[\nu} \xi_{\alpha]} + \xi_{[\alpha} \nabla^\mu h_{\nu]\mu} + h_{\mu[\alpha} \nabla^\mu \xi_{\nu]}, \quad (3.27)$$

donde el carácter antisimétrico de los índices  $\nu\alpha$  se ha dejado manifiesto de manera explícita; la presencia de los antisimetrizadores implica que el intercambio de  $\nu$  y  $\alpha$  genera un cambio de signo en cada término.

Este tensor  $\mathcal{F}$  se suele denominar como el potencial ADT de la teoría. En el caso de (3.27) es el potencial para CEH. Hay una sutileza respecto de los términos que sobran en (3.25) y es la siguiente: esos términos se van en virtud de las ecuaciones de movimiento cuando éstas son las de CEH. En una teoría que incluye en su lagrangiano, además de los términos correspondientes a la acción de CEH, otros escalares, todavía tendremos el aporte (3.27) pero ahora los términos sobrantes ya no se anulan necesariamente y su expresión explícita debe calcularse con las ecuaciones de movimiento completas de la teoría. Hay un caso en el cual estos términos se anulan, independientemente de las ecuaciones de movimiento y es cuando el background es un espaciotiempo de curvatura constante.

### 3.7.5 Potencial ADT para NMG

Las ecuaciones de movimiento de NMG,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2} K_{\mu\nu} = 0$$

son combinación de las de GR y las que provienen de la variación del escalar

$$K = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2,$$

según se mostró en la Sección 2.3. La expresión del tensor  $\mathcal{F}$  correspondiente a esta teoría se puede escribir del modo siguiente

$$\mathcal{F}^{i\mu} = \mathcal{F}_R^{i\mu} + \mathcal{F}_K^{i\mu},$$

donde

$$\mathcal{F}_K^{i\mu} = \mathcal{F}_{R_2}^{i\mu} - \frac{3}{8} \mathcal{F}_{R^2}^{i\mu}. \quad (3.28)$$

La parte  $\mathcal{F}_R^{i\mu}$  es la correspondiente a GR y está dada por la expresión (3.27) mientras que  $\mathcal{F}_K^{i\mu}$  es el aporte propio del término masivo y se puede escribir [68] de acuerdo con

$$\mathcal{F}_{R_2}^{\mu\nu} = 2R\mathcal{F}_R^{\mu\nu} + 4\xi^{[\mu}\nabla^{\nu]}\delta R + 2\delta R\nabla^{[\mu}\xi^{\nu]} - 2\xi^{[\mu}h^{\nu]\alpha}\nabla_\alpha R \quad (3.29)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{R^2}^{\mu\nu} = & \nabla^2 \mathcal{F}_R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{R_2}^{\mu\nu} - 2\mathcal{F}_R^{\alpha[\mu} R^{\nu]}_\alpha - 2\nabla^\alpha \xi^\beta \nabla_\alpha \nabla^{[\mu} h^{\nu]}_\beta - 4\xi^\alpha R_{\alpha\beta} \nabla^{[\mu} h^{\nu]\beta} + \\ & - R h_\alpha^{[\mu} \nabla^{\nu]} \xi^\alpha + 2\xi^{[\mu} R^{\nu]}_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} + 2\xi_\alpha R^{\alpha[\mu} \nabla_\beta h^{\nu]\beta} + 2\xi^\alpha h^{\beta[\mu} \nabla_\beta R^{\nu]}_\alpha + \\ & + 2h^{\alpha\beta} \xi^{[\mu} \nabla_\alpha R^{\nu]}_\beta - (\delta R + 2R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} - 3\xi^\alpha R_\alpha^{[\mu} \nabla^{\nu]} h - \xi^{[\mu} R^{\nu]\alpha} \nabla_\alpha h \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde

$$\delta R \equiv -R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta} - \nabla^2 h.$$

Estas expresiones corresponden a las ecuaciones (22) y (28) de la Ref. [68], que es donde aparecieron por primera vez. Debe notarse el hecho de que el aporte de NMG incluye además contribuciones que acoplan el propio término de GR.

### 3.7.6 Cálculo de cargas: procedimiento numérico

El segundo enfoque para realizar la integral de carga, que llamamos “numérico”, corresponden a utilizar, desde el comienzo, la forma explícita de la métrica de background  $\bar{g}_{\mu\nu}$  y la perturbación  $h_{\mu\nu}$  para hacer una expansión de las ecuaciones de movimiento completas de la teoría evaluadas en la métrica total  $g_{\mu\nu}$  a primer orden en  $h_{\mu\nu}$ . Es decir que se fija de entrada aquellas soluciones sobre las cuales se van a evaluar las cargas conservadas bajo la teoría gravitatoria de interés. Algo de libertad en la prescripción de la perturbación puede obtenerse si se la escribe en términos de funciones arbitrarias  $h_{\mu\nu}(x^\alpha)$  aunque es bastante conveniente incluir solamente los componentes no nulos de la misma y restringir la dependencia sobre las coordenadas a que sea aquella que se espera en función de consideraciones de simetría, dado que las cuentas rápidamente se tornan muy engorrosas en teorías de alto orden.

Así, por ejemplo, en el caso de calcular una métrica de agujero negro respecto de la métrica background de AdS se escribiría la métrica total, asumiendo coordenadas  $(t, r, \varphi)$ , del modo siguiente

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -r^2/\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ell^2/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^2/r^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{tt}(r) & 0 & h_{t\varphi}(r) \\ 0 & h_{rr}(r) & 0 \\ h_{t\varphi}(r) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde la perturbación  $h_{\mu\nu}$  solamente tiene tres componentes y la dependencia es respecto de la coordenada radial  $r$ . Esta economía de la prescripción evita el arrastrar derivadas respecto de las otras variables y componentes superfluos al costo de restringir el universo de perturbaciones admisible.

La evaluación y expansión de las ecuaciones de movimiento puede realizarse mediante la funcionalidad de un CAS como Maple, Mathematica o Sage Manifolds, asociando a los términos  $h_{\mu\nu}$  un parámetro pequeño  $\epsilon$ , por ejemplo<sup>13</sup>. Escribiendo la métrica como  $\bar{g}_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ , la expresión resultante de la evaluación de las ecuaciones de movimiento se puede agrupar por potencias de  $\epsilon$  de manera que los términos  $\epsilon^0 = \text{cte.}$  corresponden a las ecuaciones evaluadas en  $\bar{g}$ , que serán nulas, y los correspondientes a  $\epsilon^1$  el término lineal que constituye el tensor  $E_{\mu\nu}^{(1)}$ .

Luego, la contracción con el vector de Killing correspondiente a la carga que se quiera calcular nos lleva a

$$\xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \mathcal{F}_{\mu\nu})$$

o bien a

$$\sqrt{-g} \xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^\mu (\sqrt{-g} \mathcal{F}_{\mu\nu}).$$

Si se supone, como es efectivamente el caso con muchos de los espaciotiempos “sencillos” sobre los cuales se trabaja en cálculos energéticos, que la dependencia de la métrica es con respecto a una única coordenada –por ejemplo la coordenada  $r$ –, se tiene

$$\sqrt{-g} \xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)}(r) = \partial^r (\sqrt{-g} \mathcal{F}_{r\nu}(r)),$$

<sup>13</sup>Fui introducido a estas técnicas numéricas de expansiones de ecuaciones de movimiento por el Dr. Julio Oliva.

y entonces se puede integrar la anterior expresión para despejar el tensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  de manera que

$$\mathcal{F}_{r\nu}(r) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int \sqrt{-g} \xi^\mu E_{\mu\nu}^{(1)}(r') dr'$$

es el potencial para la teoría en cuestión, el cual solamente tiene –en razón de la dependencia exclusiva en  $r$ – a lo sumo cuatro componentes no nulos. Esto permite obtener el potencial y luego, por integración sobre el borde apropiado la carga conservada asociada a un dado vector de Killing mediante la expresión (3.22).

Este método numérico ofrece la ventaja de que no es necesario construir la forma explícita del tensor  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  para cada teoría de interés, lo cual en general como se remarcó, es un proceso de lápiz y papel sino que basta con evaluar y expandir las ecuaciones de movimiento, tarea que se encomienda a un CAS. No obstante, el despeje del potencial mediante una única integración directa solamente sobrevino a consecuencia de la particular dependencia sobre las coordenadas que fue asumida. En un caso completamente general no se puede aplicar esta idea y hay que recurrir al método analítico.

### 3.8 Cálculo de cargas conservadas en el campo cercano

De acuerdo con lo desarrollado hasta el momento en este capítulo, las cargas de borde en una teoría de gravedad  $D$ -dimensional, así como en una teoría de gauge  $D$ -dimensional, son entendidas como integrales  $(D - 2)$ -dimensionales de potenciales representados por formas de la teoría libre, como la expresión de la Ec. (3.22), que se obtienen mediante la linealización de la solución respecto de una configuración de fondo apropiada. Estas formas conservadas se hallan en correspondencia con los llamados “parámetros de reducibilidad” (*reducibility parameters*) de la geometría de fondo, de tal manera que los parámetros de reducibilidad asintóticos pueden interpretarse como los vectores de Killing asintóticos de la geometría de fondo [69]. En la Ref. [70], en el contexto de las teorías lagrangianas de gauge se construyen explícitamente formas cerradas dentro de la región donde la teoría está gobernada por las ecuaciones exactas, es decir sin necesidad de linealizar y considerar el régimen de campo lejano. Como resultado se puede utilizar el teorema de Gauss directamente en el bulk, en la zona no lineal e interactuante de la teoría para calcular, mediante integración de dicha forma, cargas conservadas tales que, si se utilizan condiciones apropiadas de decaimiento, se reducen asintóticamente cerca del borde a las cargas de la teoría linealizada.

Este método, basado en los desarrollos de [69, 70], se denominará aquí coloquialmente como el “cálculo de cargas en campo cercano”. En las aplicaciones ha demostrado ser suficientemente robusto como para evaluar las cargas conservadas donde los métodos previos presentan dificultades. Una buena prueba de ello será mostrada en el Capítulo 5, con el cálculo de la masa para el agujero negro de Lifshitz.

A continuación se provee un resumen de los pasos involucrados en el cálculo de cargas conservadas por este método de campo cercano más que una explicación fundamentada, la cual puede estudiarse de las referencias previas. La Figura 3.6 provee un esquema ilustrativo del procedimiento involucrado en la definición de la integración de carga para espaciotiempos donde podemos identificar una coordenada radial  $r$  y donde el horizonte de sucesos se define por un valor  $r_0$  de la misma.

El primer paso es tomar la métrica del espaciotiempo de agujero negro sobre el cual interesa calcular cargas conservadas y utilizar el hecho de que en las cercanías de su

horizonte de sucesos, siempre considerando que estamos en  $D=3$  dimensiones, la geometría puede expresarse [71] utilizando coordenadas gaussianas nulas según

$$ds^2 = f dv^2 - 2k dv d\rho + 2h dv d\phi + R^2 d\phi^2, \quad (3.31)$$

donde  $v \in \mathbb{R}$  es el tiempo retardado,  $\rho > 0$  es la distancia radial al horizonte y  $\phi$  es la coordenada angular de período  $2\pi$ . Para  $D=4$  dimensiones, por ejemplo, puede generalizarse la forma (3.31) de manera apropiada, ver [71]. Las funciones  $f, k, h, R$  dependen en principio de las coordenadas  $v, \rho, \phi$  y deben verificar las siguientes condiciones para  $\rho \sim 0$

$$\begin{aligned} f &= -2\kappa\rho + T(\phi)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3) \\ k &= 1 + \mathcal{O}(\rho^2) \\ h &= \Theta(\phi)\rho + \sigma(\phi)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3) \\ R^2 &= \gamma^2(\phi) + \lambda(\phi)\rho + \mathcal{O}(\rho^2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde los órdenes  $\mathcal{O}(\rho^p)$  implican comportamientos funcionales que se apagan de manera igual o más rápida que  $\rho^p$ . La constante  $\kappa$  es la gravedad superficial evaluada en el horizonte y se considerará fija en la evaluación de la carga conservada que corresponda. Estas condiciones de contorno dadas por la Ec. (3.32) describen el espectro de agujeros negros con temperatura de Hawking  $T = \kappa/(2\pi)$  fija<sup>14</sup>.

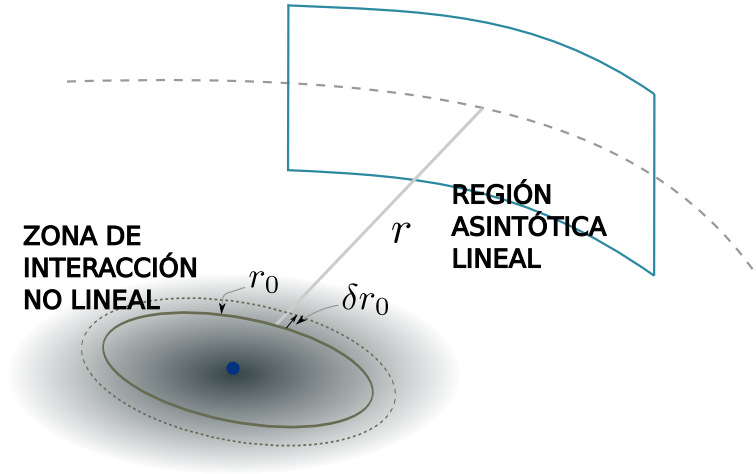


Figura 3.6: Esquema ilustrativo del cálculo de cargas en la región de campo cercano. Se considera una expansión de la métrica general válida en la región cercana al horizonte de sucesos  $r_0$ . Luego, la perturbación  $h_{\mu\nu}$  respecto de la solución de background está dada por una variación  $r_0 \rightarrow r_0 + \delta r_0$ . Es decir que todo el cálculo se realiza en la zona cercana a la fuente de gravitación, donde la teoría es no lineal.

Una vez escrita la métrica en la forma de horizonte cercano se considera una variación del horizonte de sucesos

$$r_0 \rightarrow r_0 + \delta r_0$$

la cual generará, consecuentemente, una perturbación de la métrica

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

<sup>14</sup>No confundir la temperatura de Hawking  $T$  con la función  $T$  en la forma de campo cercano.

donde  $\delta g_{\mu\nu}$  representa ahora el papel de  $h_{\mu\nu}$ . La integración angular de la forma  $k^{\mu\nu}$  define ahora una variación de la carga (respecto de la variación  $\delta r_0$ )

$$\delta Q[\xi; g, \delta g] = \frac{1}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\phi} k_{\xi}^{\mu\nu}[g, \delta g], \quad (3.33)$$

que luego debe ser integrada

$$Q = \int \delta Q dr_0$$

para obtener la carga conservada  $Q$ , a menos de una constante  $Q_0$  que en general consideraremos nula. El ente  $k^{\mu\nu}$  es la 1-forma potencial de superficie, que en el caso de NMG, está dada por tres diferentes contribuciones, que son:

$$k^{\mu\nu} = k_{(0,1)}^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k_{(0,2)}^{\mu\nu} + \frac{3}{8m^2} k_{(1,1)}^{\mu\nu},$$

donde el primer término es el que proviene de la parte de Einstein-Hilbert en la acción

$$k_{(0,1)}^{\mu\nu} = \xi_{\alpha} \nabla^{[\mu} h^{\nu]\alpha} - \xi^{[\mu} \nabla_{\alpha} h^{\nu]\alpha} - h^{\alpha[\mu} \nabla_{\alpha} \xi^{\nu]} + \xi^{[\mu} \nabla^{\nu]} h + \frac{1}{2} h \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]}. \quad (3.34)$$

Los otros dos aportes provienen de los términos de derivadas con alto orden en la acción, (2.5). Ellos son [68]

$$\begin{aligned} k_{(0,2)}^{\mu\nu} &= \nabla^2 k_{(0,1)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} k_{(1,1)}^{\mu\nu} - 2k_{(0,1)}^{\alpha[\mu} R_{\alpha}^{\nu]} - 2\nabla^{\alpha} \xi^{\beta} \nabla_{\alpha} \nabla^{[\mu} h^{\nu]}_{\beta} - 4\xi^{\alpha} R_{\alpha\beta} \nabla^{[\mu} h^{\nu]\beta} \\ &+ 2\xi^{[\mu} R_{\alpha}^{\nu]} \nabla_{\beta} h^{\alpha\beta} + 2\xi_{\alpha} R^{\alpha[\mu} \nabla_{\beta} h^{\nu]\beta} + 2\xi^{\alpha} h^{\beta[\mu} \nabla_{\beta} R_{\alpha}^{\nu]} + 2h^{\alpha\beta} \xi^{[\mu} \nabla_{\alpha} R_{\beta}^{\nu]} \\ & - (\delta R + 2R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} - 3\xi^{\alpha} R_{\alpha}^{[\mu} \nabla^{\nu]} h - \xi^{[\mu} R^{\nu]\alpha} \nabla_{\alpha} h - R h_{\alpha}^{[\mu} \nabla^{\nu]} \xi^{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

y

$$k_{(1,1)}^{\mu\nu} = 2R k_{(0,1)}^{\mu\nu} + 4\xi^{[\mu} \nabla^{\nu]} \delta R + 2\delta R \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} - 2\xi^{[\mu} h^{\nu]\alpha} \nabla_{\alpha} R, \quad (3.36)$$

con  $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ ,  $\delta R = -R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} h_{\alpha\beta} - \nabla^2 h$ , y  $h = h_{\mu}^{\mu}$ .

Comparando estas expresiones con el potencial ADT de la Sección 3.7.5 puede verse que (3.34) es (3.27), (3.36) es (3.29) y (3.35) es (3.30). Es decir que para la aplicación del método ya se tienen todos los ingredientes que entran en la integración definida por (3.33).

### 3.8.1 Masa del agujero negro BTZ calculado en campo cercano

Como primera verificación de que esta manera de calcular cargas realmente funciona, se ilustrará el procedimiento evaluando la masa del agujero negro BTZ, un espaciotiempo que fuera presentado en la Sección 2.6.1. La métrica del mismo se puede escribir según

$$ds^2 = -\frac{1}{\ell^2} (r^2 - r_0^2) dt^2 + \left( \frac{r^2 - r_0^2}{\ell^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 dx^2 \quad (3.37)$$

donde  $r_0$  define la localización del horizonte de eventos. Es fácil ver que los cambios de coordenadas

$$v = t - \ell^2 \int \frac{dr}{r^2 - r_0^2} \quad \rho = r - r_0$$

permiten reescribir la métrica como

$$ds^2 = - \left( \frac{2r_0\rho}{\ell^2} + \frac{\rho^2}{\ell^2} \right) dv^2 - 2 dv d\rho + (r_0^2 + 2r_0\rho + \rho^2) dx^2,$$

donde se identifican

$$\gamma = r_0 \quad \lambda = 2r_0 \quad \varkappa = \frac{r_0}{\ell^2} \quad \mathbb{T} = -\frac{1}{\ell^2} \quad \Theta = \sigma = 0$$

Se evaluará (3.33) para el vector de Killing  $\xi = \partial_v$ , realizando la variación funcional mediante la variación del parámetro  $\delta r_0$ . Esto implica variaciones

$$r_0 \rightarrow r_0 + \delta r_0, \quad r_0^2 \rightarrow r_0^2 + 2r_0\delta r_0,$$

que inducen una variación de la métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  donde

$$\delta g_{\mu\nu} = -\frac{2}{\ell^2} \rho \delta r_0 dv^2 + 2(r_0 + \rho)\delta r_0 d\varphi^2,$$

la cual conduce, luego de integrar, a una carga

$$Q[\partial_v; g, \delta g] = \frac{r_0^2}{8G\ell^2} \left( 1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} \right), \quad (3.38)$$

que representa el resultado correcto para la masa del agujero negro de BTZ en la teoría masiva de gravedad.

### 3.8.2 Termodinámica del agujero negro BTZ

En el caso de agujeros negros estáticos (no rotantes, y por ende sin momento angular) la primera ley de la termodinámica se puede escribir

$$dM = TdS \quad (3.39)$$

donde  $T = \varkappa/(2\pi)$  es la temperatura de Hawking y  $dS, dM$  son los diferenciales de entropía y masa, respectivamente. Usando la Ec. (3.39) y a partir de la entropía  $S$  puede obtenerse la masa  $M$  del agujero negro.

Si se considera una escritura de la métrica del agujero negro en la forma diagonal genérica

$$ds^2 = -h dt^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2 dx^2,$$

puede verse que la temperatura de Hawking puede determinarse de acuerdo con

$$T = \frac{\varkappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{f'(r_0)h'(r_0)} \quad (3.40)$$

donde  $f'$  y  $h'$  son las derivadas de dichas funciones evaluadas en el horizonte de sucesos  $r_0$ . Si se evalúa  $T$  de acuerdo con (3.40) para el agujero negro BTZ de la Ec. (3.37) se puede despejar el valor de la gravedad superficial obteniéndose  $\varkappa = r_0/\ell^2$ , un valor que coincide con la función  $\varkappa$  de la forma de campo cercano utilizada en la sección anterior para la métrica del BTZ.



La entropía del agujero negro se puede calcular, según Wald [72], a través de la integral

$$S = -2\pi \int_{\Sigma} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{abcd}} n_{ab} n_{cd} \quad (3.41)$$

donde la región de integración  $\Sigma$  es el horizonte,  $n_{ab}$  es la binormal al horizonte (normalizada de manera que  $n_{ab}n^{ab} = -2$ ) y donde  $\mathcal{L}$  es el lagrangiano de la teoría (para el caso de CEH sería  $R/(16\pi G)$  en unidades  $c = 1$ ). Para el caso de NMG la expresión equivalente sería  $(R - 2\Lambda - 1/m^2 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 3/(8m^2)R^2)/(16\pi G)$ , la cual debe expresarse en términos de contracciones del tensor de Riemann para poder tomar la variación implicada en (3.41). Puede verse que eso resulta en

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{abcd}} = \frac{1}{16\pi G} \left( g^{m\ell} g^{nq} - \frac{1}{m^2} 2R^{nq} g^{m\ell} + \frac{3}{4m^2} R g^{m\ell} g^{nq} \right),$$

que para el caso de espaciotiempos de curvatura constante puede simplificarse a

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{abcd}} = \frac{1}{16\pi G} \left( 1 - \frac{R}{m^2} \left[ \frac{2}{D} - \frac{3}{4} \right] \right) g^{m\ell} g^{nq},$$

donde  $D$  es la dimensión del espaciotiempo.

En el caso de AdS para  $D=3$  dimensiones es  $R = -6/\ell^2$  de manera que la integral de la entropía se expresa

$$S = -\frac{1}{8G} \left( 1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} \right) \int n_n^\ell n_\ell^n,$$

o bien

$$S = \frac{A}{4G} \left( 1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} \right)$$

donde  $A$  es el área del horizonte de sucesos. En el caso de  $m \rightarrow \infty$ , cuando las ecuaciones de NMG tienden a las de CEH, se tiene el resultado standard de que la entropía es  $1/4$  del área del horizonte de sucesos.

Luego, para el caso  $D=3$  y con la geometría usual de AdS el área es  $A = 2\pi r_0$  de manera que

$$\frac{\delta S}{\delta r_0} = \frac{\pi}{2G} \left( 1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} \right),$$

y entonces

$$T \frac{\delta S}{\delta r_0} = \frac{r_0}{4G\ell^2} \left( 1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} \right) = \frac{\delta M}{\delta r_0}$$

a partir de la cual se puede evaluar la masa por integración en la variable  $r_0$ , lo cual da

$$M = \frac{r_0^2}{8G\ell^2} \left( 1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} \right).$$

Este resultado coincide con el obtenido previamente en (3.38).

## Capítulo 4

# Cálculo de cargas conservadas en espacios WAdS<sub>3</sub>

### 4.1 Motivación

Una gran parte de los trabajos que consideran holografía bajo el espacio WAdS<sub>3</sub> se ocupan de la variante spacelike del mismo. Esto se debe a que por un lado, la variante espacial pueden albergar agujeros negros [30], los cuales son en sí mismos interesantes y, por otro lado, a que la variante timelike exhibe curvas temporales cerradas (CTC, de *Closed Timelike Curves*) lo cual es considerado históricamente como una patología que vuelve al espacio en cuestión un modelo con menor atractivo desde el punto de vista de su plausibilidad como representación física.

No obstante ello, hay razones todavía para estudiar la definición de cargas conservadas en espaciotiempos que sean asintóticamente timelike WAdS<sub>3</sub>. Una de esas motivaciones proviene de la correspondencia dS/CFT [9], en la cual la teoría dual del borde se supone que es una CFT euclídea formulada en infinito futuro. Como el espacio de de Sitter presenta, cuando se escribe la métrica en coordenadas estáticas<sup>1</sup>, un horizonte cosmológico  $r = \sqrt{3/\Lambda}$  más allá del cual las componentes  $t$  y  $r$  intercambian su carácter, es esperable la necesidad de aplicar algún tipo de técnica especial para manejar el lado gravitatorio de la correspondencia. Más aún, en el parche estático de la métrica de dS la conjetura holográfica es tal que la CFT resulta localizada más allá del horizonte cosmológico.

Por esta razón, al intentar aplicar técnicas de renormalización holográfica debe proponerse una manera de definir un tensor de energía regularizado lejos del horizonte, donde el vector que es timelike dentro del parche estático se vuelve spacelike. Una propuesta para realizar esto en dS ha sido brindada en la Ref. [73], donde los autores aducen que las cargas conservadas pueden definirse en términos del tensor de energía holográfico integrando en superficies de coordenada temporal  $t$  constante (superficie de codimension 2), siendo  $t$  la coordenada que es timelike dentro del parche estático. Esta construcción funciona bien en el marco de dS/CFT y parece ser un *truco* ingenioso para operar con backgrounds que no necesariamente admiten un vector de Killing globalmente timelike. Un argumento a favor

---

<sup>1</sup>En coordenadas estáticas  $t, r, \mathbf{x}$  con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{D-2}$  la métrica de de Sitter se escribe como

$$ds^2 = -(1 - r^2/\ell^2)dt^2 + (1 - r^2/\ell^2)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2,$$

donde  $\ell^2 = (D-1)(D-2)/2\Lambda$  que para los casos particulares  $D=3, 4$  es  $\ell^2 = 1/\Lambda, 3/\Lambda$  respectivamente.

de porqué esta prescripción funciona puede encontrarse en el hecho de que ha sido mostrado [74] que la descripción de la teoría dual CFT no necesariamente tiene que situarse en el borde conforme futuro, sino que también se verifica en cualquier corte timelike del parche estático.

En lo que sigue de este capítulo se explorará el mismo tipo de construcción en el contexto de los espacios timelike WAdS<sub>3</sub> dentro de la teoría NMG. En primer lugar se mostrará hasta qué punto puede darse una noción de energía quasilocal en este tipo de espaciotiempos a partir de un cálculo en infinito espacial. En segundo lugar, se calcularán y estudiarán cargas conservadas como la masa y el momento angular de objetos rotantes del tipo partícula, utilizando el formalismo covariante sobre NMG.

El hecho de que NMG preserve paridad (lo cual la distingue de TMG, por ejemplo, que no la preserva) es de particular importancia porque permite distinguir entre características quirales que emergen del grupo de isometrías  $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$  de aquellas inherentes a los efectos asociados con la violación de paridad (presentes en teorías como TMG).

En la Sección 4.2 se muestra cómo se obtiene el espaciotiempo timelike WAdS<sub>3</sub>, objeto de estudio, a partir de un “corte” del espaciotiempo de Gödel. La consideración de un objeto del tipo “partícula rotante” dentro del mismo se materializará mediante la introducción de un déficit angular y una transformación de coordenadas que acopla el tiempo con la coordenada angular. Luego, la Sección 4.3 presenta la construcción de la noción de energía cuasilocal en timelike WAdS<sub>3</sub> desde el infinito lejano, a través de la definición de un tensor de esfuerzos para NMG y el subsiguiente cálculo y estudio de las cargas conservadas. Como el análisis bajo este enfoque presentó algunas dificultades, también se utilizó el formalismo covariante para el cálculo de masa y momento angular de los objetos generados, lo cual se documenta en la Sección 4.4.

## 4.2 Espacios timelike WAdS<sub>3</sub> a partir de la métrica de Gödel

Puede verse que la deformación stretched del timelike WAdS<sub>3</sub> corresponde a la sección 3-dimensional de la generalización de un parámetro de Rebouças-Tiomno [75, 76] de la solución de Gödel [77] para las ecuaciones de Einstein cosmológicas (la acción CEH) con materia en  $D=4$  dimensiones. La existencia de curvas temporales cerradas (CTC) en timelike WAdS<sub>3</sub> es entonces una propiedad (o patología) heredada de su ancestro 4-dimensional, el espaciotiempo de Gödel. Estos espacios stretched timelike WAdS<sub>3</sub> constituyen entonces una buena *arena* de pruebas para estudiar y definir observables físicos en espacios con CTC.

La solución de Gödel es producto directo de la recta real y un espacio  $\Sigma$  con una métrica dada por [77, 78]

$$ds^2 = - \left( d\hat{t} + e^{\sqrt{2}\omega x} dy \right)^2 + dx^2 + \frac{1}{2} e^{2\sqrt{2}\omega x} dy^2, \quad (4.1)$$

donde  $x, y, \hat{t} \in \mathbb{R}$  son las coordenadas y  $\omega$  es un parámetro real que representa la vorticidad de este espaciotiempo. Este sistema de coordenadas mapea completamente el espacio y la solución 4-dimensional es entonces homeomorfa a  $\mathbb{R}^4$ . El espacio es geodésicamente completo y libre de singularidades, además es espacialmente homogéneo aunque no es isótropo.

En un sistema de coordenadas  $(\phi, \rho, t)$  conveniente, la métrica (4.1) adopta la forma

$$ds^2 = - \left( dt + \frac{2}{\omega} \sinh^2 \left( \frac{\omega\rho}{\sqrt{2}} \right) d\phi \right)^2 + \frac{1}{2\omega^2} \sinh^2(\sqrt{2}\omega\rho) d\phi^2 + d\rho^2, \quad (4.2)$$

donde la parte 3-dimensional de la métrica está escrita ahora como una fibrición de Hopf sobre el plano hiperbólico. Como ya fue mencionado, este espacio presenta CTC, las cuales pueden inferirse a partir de la escritura de la métrica, por el rol que cumplen las coordenadas  $t$  y  $\phi$  en el primer término de (4.2).

Las propiedades más relevantes del espacio de Gödel persisten si se considera una deformación mono-paramétrica particular de (4.2), la cual permite interpolar entre la sección 3-dimensional del espacio de Gödel y AdS<sub>3</sub> [75]. Esta deformación está dada por la métrica

$$ds^2 = - \left( dt + \frac{4\omega}{\lambda^2} \sinh^2 \left( \frac{\lambda\rho}{2} \right) d\phi \right)^2 + \frac{\sinh^2(\lambda\rho)}{\lambda^2} d\phi^2 + d\rho^2, \quad (4.3)$$

la cual, además de la vorticidad  $\omega$  incluye un nuevo parámetro real  $\lambda$  que controla la deformación. Puede constatarse que para el valor particular  $\lambda^2 = 2\omega^2$ , la métrica (4.3) corresponde a la sección 3D de la solución de Gödel (4.2) mientras que para  $\lambda^2 = 4\omega^2$  se tiene AdS<sub>3</sub> en su escritura *universal covering*. Para valores genéricos de  $\lambda$  y  $\omega$  dentro del rango  $0 \leq \lambda^2 \leq 4\omega^2$ , la métrica (4.3) describe el espacio timelike stretched WAdS<sub>3</sub> que es el objeto de interés aquí.

Resulta conveniente, no obstante, considerar una parametrización ligeramente diferente. Para ello se define un parámetro

$$\ell^2 = \frac{2}{\lambda^2 - 2\omega^2},$$

y luego se usan  $\omega$  y  $\ell^2$  (en lugar de  $\lambda$ ) para describir la familia de métricas WAdS<sub>3</sub>. Por ejemplo, en términos de  $\omega$  y  $\ell^2$ , la solución de Gödel corresponde a  $\ell^2 = \infty$ , mientras que el espacio AdS<sub>3</sub> corresponde a  $\ell^2 = \omega^{-2}$ . El intervalo  $0 \leq \lambda^2 \leq 4\omega^2$ , en términos de estos nuevos parámetros, se traduce en  $|\omega^2\ell^2| \geq 1$ . Nótese que  $\omega^2\ell^2$  puede tomar valores entre  $-1$  y  $-\infty$ . Espacios con  $|\omega^2\ell^2| < 1$  son también de interés, pese a que presentan una estructura causal diferente: ellos se corresponden a las versiones timelike squashed WAdS<sub>3</sub>.

Finalmente, siguiendo con lo dictado por la conveniencia, se define una nueva variable radial  $r = 2\lambda^{-2} \sinh^2(\lambda\rho/2)$ , donde  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . La métrica (4.3) ahora luce como

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\phi + 2(r + (\ell^{-2} - \omega^2)r^2) d\phi^2 + \frac{dr^2}{2(r + (\ell^{-2} + \omega^2)r^2)}. \quad (4.4)$$

Esta es una de las escrituras estándar del espacio timelike WAdS<sub>3</sub>. Los invariantes de curvatura asociados con esta métrica son constantes y, notablemente, pueden escribirse de manera sucinta como

$$R_{\mu_n}^{\mu_1} R_{\mu_1}^{\mu_2} R_{\mu_2}^{\mu_3} \dots R_{\mu_{n-1}}^{\mu_n} = (-1)^n \frac{2^n}{\ell^{2n}} (\omega^{2n} \ell^{2n} + 2). \quad (4.5)$$

Otra propiedad interesante de la métrica (4.2) es que es espacialmente homogénea. Como sucede en el caso del *universal covering* de AdS, los espacios WAdS no son globalmente hiperbólicos.

El grupo de isometrías de los espacios WAdS<sub>3</sub> (4.4) es  $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$ , como se anticipara en la Sección 2.7, el cual es generado por cuatro de los cinco vectores de Killing que admite la solución de Gödel. Esta isometría no es otra que la parte remanente del grupo de isometrías  $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$  de AdS<sub>3</sub> que sobrevive luego de la deformación stretched/squashed.

En la Ec. (4.4) es fácil verificar que el punto especial  $\omega^2 \ell^2 = 1$  corresponde al espacio AdS<sub>3</sub>. En efecto, definiendo nuevas coordenadas  $\theta = t - \phi$  y  $\rho^2 = 2r$  y reemplazando  $\omega = \ell = 1$  en (4.4), se obtiene

$$ds^2 = -(\rho^2 + 1)dt^2 + \frac{d\rho^2}{(\rho^2 + 1)} + \rho^2 d\theta^2,$$

que es una escritura usual para AdS<sub>3</sub>.

#### 4.2.1 Introducción de un defecto con masa y momento angular en el espaciotiempo de Gödel

Ahora se introducirá un defecto puntual en el espacio tiempo dado por (4.4). Esto puede hacerse mediante el cambio de coordenadas

$$\phi \rightarrow (1 - \mu)\varphi, \quad \text{con } 0 \leq \mu < 1, \quad (4.6)$$

manteniendo la misma periodicidad para la coordenada  $\varphi$ , es decir,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Esta modificación cambia las propiedades globales del espacio en un modo que es totalmente equivalente a introducir un déficit angular  $\delta\phi = \mu/(2\pi)$  en la coordenada angular original. La Figura 4.1 presenta una ilustración del proceso. Mediante la transformación dada por (4.6) y reescalando la coordenada radial de acuerdo con  $r \rightarrow r/(1 - \mu)$  se arriba a la métrica

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\varphi + 2r((\ell^{-2} - \omega^2)r + (1 - \mu)) d\varphi^2 + \frac{dr^2}{2r((\omega^2 + \ell^{-2})r + (1 - \mu))}, \quad (4.7)$$

donde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Esta métrica tiene el mismo comportamiento asintótico, para valores de  $r$  muy grandes, que la métrica de la Ec. (4.4). En efecto, ambas pueden expresarse, en el límite citado, como

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\varphi + 2r^2(\ell^{-2} - \omega^2) d\varphi^2 + \frac{dr^2}{2r^2(\ell^{-2} + \omega^2)} + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.8)$$

donde la parte  $h_{\mu\nu}$  de la métrica, que contiene al orden siguiente al dominante en la expansión en  $r$ , verifica las condiciones

$$\delta g_{\varphi\varphi} \equiv h_{\varphi\varphi} \simeq \mathcal{O}(r) \quad \delta g_{rr} \equiv h_{rr} \simeq \mathcal{O}(r^{-3}).$$

La expresión explícita de  $h_{\mu\nu}$ , expandiendo hasta el primer orden luego del dominante resulta en

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2r(1 - \mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1 - \mu}{2r^3(\ell^{-2} + \omega^2)^2} \end{pmatrix}.$$

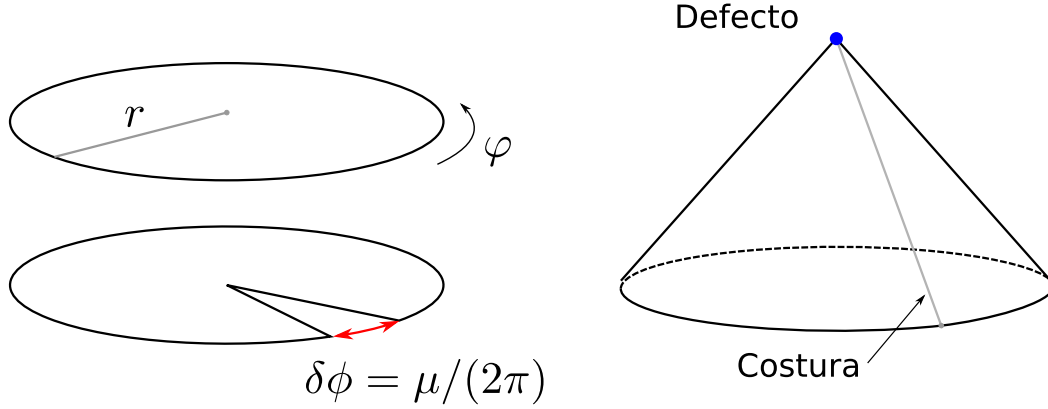


Figura 4.1: Esquema de la formación de un “defecto” a través de la introducción de un déficit angular en la coordenada  $\varphi$ . Cuando se realiza la identificación de los bordes abiertos por el déficit, en el origen de coordenadas  $r = 0$  surge un defecto, una singularidad, que puede interpretarse como la punta del cono que resultaría si se hace una “costura” uniendo las dos partes de un disco al que se le sacó una porción.

La métrica (4.7) representa un objeto “tipo partícula” situado en  $r = 0$ , en el interior del universo de Gödel. El objeto desaparece cuando  $\mu \rightarrow 0$ , lo cual permite anticipar que  $\mu$  estará de alguna manera relacionado con la masa del defecto.

Defectos de tipo más general pueden introducirse siguiendo el mismo esquema. En el caso de un defecto rotante, lo cual implica que la métrica en cuestión modelará un objeto con masa y momento angular definido, la introducción puede realizarse mediante una transformación del tipo  $t \rightarrow \tau + a\varphi$  (donde  $a$  es un coeficiente a ajustar relacionado con el valor del momento angular) que generará un término independiente de  $r$  en los coeficientes  $d\varphi^2$  y  $dr^2$  de la métrica. En otras palabras, como sucede en el caso del parámetro  $\nu$ , la introducción de momento angular (cuantificado por el parámetro  $j$ ) se logra a través de un difeomorfismo *impropio* (i.e., no definido globalmente) a partir de la métrica (4.4).

Luego de las modificaciones para incorporar una partícula rotante, la métrica del espacio tiempo de Gödel con masa y momento angular es <sup>2</sup>

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\varphi + \frac{dr^2}{(2r^2\omega^2 + \lambda_{\mu,j}(r))} - (2r^2\omega^2 - \lambda_{\mu,j}(r)) d\varphi^2, \quad (4.9)$$

donde

$$\lambda_{\mu,j}(r) = \frac{2r^2}{\ell^2} + 2(1 - \mu)r - j\ell^2, \quad (4.10)$$

y donde además  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ , y  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . La métrica dada por las Ecs. (4.9) y (4.10) involucra un nuevo parámetro  $j \in \mathbb{R}$ , y se reduce a (4.7) cuando  $j = 0$ . Debe notarse también que solamente  $\xi^t \sim \partial_t$  y  $\xi^\varphi \sim \partial_\varphi$  de un total de cuatro generadores de  $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$  sobreviven como vectores de Killing exactos para la métrica (4.9).

Es razonable que este “defecto” introducido en el espaciotiempo de Gödel, una especie de partícula puntual rotante, pueda interpretarse como un agujero negro en dicha geometría. La relación entre ambos entes puede verse en el Apéndice C.

<sup>2</sup>Nótese que se pueden asignar dimensiones a los parámetros y coordenadas del modo siguiente:  $[t] = l^1$ ,  $[r] = l^2$ ,  $[\varphi] = l^0$ ,  $[\ell] = l^1$ ,  $[\omega] = l^{-1}$ ,  $[\mu] = l^0$ ,  $[j] = l^0$ , donde  $l$  tiene dimensiones de longitud.

### 4.2.2 Timelike WAdS<sub>3</sub> como solución de NMG

Las métricas WAdS<sub>3</sub> dadas por las Ecs. (4.7) y (4.9) son solución de las ecuaciones de movimiento de NMG, Ecs. (2.6), si los parámetros  $\Lambda, m^2$  de la teoría verifican

$$\Lambda = \frac{(11\omega^4\ell^4 + 28\omega^2\ell^2 - 4)\sigma}{2(19\omega^2\ell^2 - 2)\ell^2} \quad m^2 = -\frac{(19\omega^2\ell^2 - 2)\sigma}{2\ell^2}. \quad (4.11)$$

En el caso  $\omega^2\ell^2 = 1$  (donde la métrica se convierte en AdS<sub>3</sub>) los parámetros recuperan los valores para cuales AdS<sub>3</sub> en esa escritura particular es solución de NMG, que son (véase (2.16))

$$\Lambda = -35\sigma/(34\ell^2) \quad m^2 = -17\sigma/(2\ell^2).$$

En las expresiones de (4.11) puede verse explícitamente que la *vorticidad*  $\omega$  aporta a la masa  $m$  del gravitón y también interpretarse, de manera equivalente, que la vorticidad necesaria para *sostener* el universo de Gödel, o dicho de manera más precisa, para sostener la sección 3-dimensional no-trivial del mismo, proviene en parte de la masa del gravitón. No debe perderse de vista que el universo de Gödel, en cuanto a solución 4-dimensional de la acción CEH requiere un tensor de energía-momento del lado derecho, es decir que es una solución no de vacío. Ese tensor es el responsable de la vorticidad. En el contexto actual, como solución 3D de vacío de NMG, la vorticidad debe venir de alguna otra parte.

## 4.3 Cálculo quasilocal de cargas conservadas

El cálculo del tensor de energía-momento de Brown-York requiere, como se dijo previamente en la Sección 3.5, un principio variacional bien formulado en relación con la especificación correcta de las condiciones de contorno; se puede pedir que se anulen las variaciones de los campos sobre el borde, pero no aquellas correspondientes a las variaciones de sus derivadas. Para la acción de EH esto se lograba con la introducción del término de borde de Gibbons-Hawking-York (GHY), como se vio en la Sección 2.5, pero para teorías con términos de alto orden en la curvatura el problema no está resuelto de un modo general aunque hay prescripciones que proveen una formulación para casos específicos.

### 4.3.1 Términos de borde en NMG

Una manera de eludir el problema es a través de la introducción de un campo auxiliar que permita escribir la acción de la teoría, o al menos la parte de alto orden de ésta, como una acción de orden menor para la cual se pueda definir, por analogía con la acción de EH, un término de borde de GHY generalizado [79]. Luego, las variaciones de ese campo auxiliar, que se anularán en el borde, reemplazan de alguna manera a las variaciones de las derivadas del campo original<sup>3</sup>.

En el caso de la acción dada por la Ec. (2.5) resulta conveniente reescribir el término de alto orden, el encabezado por  $m^{-2}$ , en términos de un campo auxiliar  $f_{\mu\nu}$ , representado

<sup>3</sup>El truco es equivalente al de reducir una ecuación diferencial de orden alto a un sistema de ecuaciones de orden menor.

por un tensor simétrico<sup>4</sup> de rango 2, de tal modo que la acción es ahora

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} \left[ (\sigma R - 2\Lambda) + f^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} m^2 (f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f^2) \right], \quad (4.12)$$

donde en el límite de la integración ahora se hace referencia explícita al volumen del manifold  $\Sigma$  dado que más adelante se considerará su borde  $\partial\Sigma$ . La acción (4.12) es ahora una acción de dos campos  $S = S(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu})$ . Luego la variación de la misma con respecto al campo  $f_{\mu\nu}$  da la ecuación de movimiento para ese campo auxiliar,

$$f_{\mu\nu} = \frac{2}{m^2} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \right) = \frac{2}{m^2} S_{\mu\nu}, \quad (4.13)$$

donde  $S_{\mu\nu}$  es el tensor de Schouten. Por supuesto, la reinscripción del campo auxiliar en la acción (4.12) recupera el término de alto orden  $1/m^2(|R_{\mu\nu}|^2 - 3/8 R^2)$ , dado que las acciones son equivalentes.

El próximo paso es considerar una descomposición ADM (Arnowitt-Deser-Misner) en la dirección radial, es decir escribir la métrica en la forma

$$ds^2 = N^2 dr^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dr)(dx^j + N^j dr),$$

donde  $N^2$  es el análogo radial de la función de *lapse*,  $N^i$  son las funciones de *shift* y  $\gamma_{ij}$  es la métrica 2-dimensional inducida sobre las superficies de coordenada  $r$  constante. Los índices latinos  $i, j = 0, 1$  refieren a coordenadas en las superficies de  $r$  constante (es decir  $x^0 = t$ ,  $x^1 = \varphi$ ), mientras los griegos  $\mu, \nu = 0, 1, 2$ , refieren a todas las coordenadas, incluyendo la dirección radial  $x^2 = r$ .

La acción (4.12) de la teoría permite ahora, merced a que las variaciones  $\delta g_{\mu\nu}$  y  $\delta f_{\mu\nu}$  de la métrica y el campo auxiliar se anulan en el borde  $\partial\Sigma$ , definir una acción de borde para que las ecuaciones de movimiento respeten el principio variacional. Mayores detalles pueden verse en [79]. La acción de borde está dada entonces por

$$S_B = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{-\gamma} \left( K + \frac{1}{2} \hat{f}^{ij} (K_{ij} - K \gamma_{ij}) \right), \quad (4.14)$$

donde, como se dijo,  $\gamma_{ij}$  es la métrica inducida sobre  $\partial\Sigma$ ,  $\gamma = \det(\gamma_{ij})$  es su determinante,  $K_{ij}$  es la curvatura extrínseca y  $K = \gamma^{ij} K_{ij}$  la contracción de la misma con la métrica. El ente del borde  $K_{ij} - K \gamma_{ij}$  es el llamado tensor de Israel. El tensor  $\hat{f}^{ij}$  en la Ec. (4.14) proviene de la descomposición del campo auxiliar  $f^{\mu\nu}$  de acuerdo con

$$f^{\mu\nu} = \delta_i^\mu \delta_j^\nu f^{ij} + 2\delta_r^{(\mu} \delta_i^{\nu)} h^i + \delta_r^\mu \delta_r^\nu s$$

tras lo cual se define

$$\hat{f}^{ij} \equiv f^{ij} + 2h^{(i} N^{j)} + s N^i N^j, \quad \text{con} \quad \hat{f} \equiv \gamma_{ij} \hat{f}^{ij},$$

y donde  $a^{(\mu} b^{\nu)} \equiv (a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu)/2$  representa la operación de simetrización.

El primer término en (4.14) corresponde al término de Gibbons-Hawking de la acción de EH, que ya fuera motivado y presentado en (2.10), mientras que los otros dos provienen de los términos de alto orden en la curvatura de la acción (4.12). Estos términos son los elementos preliminares para definir el tensor de esfuerzos del borde, el cual se discutirá a continuación.

<sup>4</sup>Se puede partir de un *ansatz*  $f_{\mu\nu} = c_1 R_{\mu\nu} + c_2 R g_{\mu\nu}$  y pedir que el término de alto orden de NMG se escriba en la forma  $f^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - m^2/4(|f^{\mu\nu}|^2 - f^2)$ , lo cual permite hallar los coeficientes  $c_1, c_2$ . Esta transformación a través de un campo auxiliar es la misma que hacen los autores de la Ref. [3], para mostrar que la acción de NMG es en efecto equivalente a la teoría de Pauli-Fierz.



### 4.3.2 El tensor de esfuerzos quasi-local

El tensor quasi-local de Brown-York  $T_{ij}$  se obtiene [4] variando la acción total, suma de (4.12) y (4.14), con respecto a la métrica  $\gamma^{ij}$ . Es decir,

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S}{\delta \gamma^{ij}} \Big|_{r=\text{const}}, \quad (4.15)$$

lo cual conduce [79] a

$$T^{ij} = \frac{1}{8\pi G} (K^{ij} - K\gamma^{ij}) - \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{1}{2} \hat{f} K^{ij} + \nabla^{(i} \hat{h}^{j)} - \frac{1}{2} \nabla_r \hat{f}^{ij} + K_k^{(i} \hat{f}^{j)k} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} N^2 s K^{ij} - \gamma^{ij} (\nabla_k \hat{h}^k - \frac{1}{2} N^2 s K + \frac{1}{2} \hat{f} K - \frac{1}{2} \nabla_r \hat{f}) \right), \quad (4.16)$$

donde  $\hat{h}^i = N(h^i + sN^i N^j)$ . El primer término de (4.16) es la contribución de la parte de CEH (el término de Israel), mientras que el segundo es el aporte proveniente de la parte de alta curvatura de la acción. Nótese que el parámetro de masa  $m$  de la acción ha quedado subsumido dentro del campo  $\hat{f}$ . La acción de la derivada covariante  $\nabla_r$  actuando sobre  $\hat{f}^{ij}$  se define como

$$\nabla_r \hat{f}^{ij} = \frac{1}{N} (\partial_r \hat{f}^{ij} - N^k \partial_k \hat{f}^{ij} + 2\hat{f}^{k(i} \partial_k N^{j)}), \quad \nabla_r \hat{f} = \frac{1}{N} (\partial_r \hat{f} - N^k \partial_k \hat{f}).$$

Cuando se toma el límite  $r \rightarrow \infty$  en la definición de la Ec. (4.15), puede verse que el tensor de esfuerzos (4.16) diverge. De no disponer de un procedimiento apropiado de regularización, esto resultaría en un valor infinito para las cargas conservadas. Para resolver este problema se puede seguir el camino de suplementar la acción que entra en la definición (4.15) mediante la inclusión de términos adicionales, siempre y cuando estos términos no afecten el principio variacional (deben conducir a las mismas ecuaciones de movimiento y seguir manteniendo la “buena formulación” respecto del borde). En la Ref. [80], los autores aplicaron este método al caso *spacelike* WAdS<sub>3</sub>. Se evidenció allí que, más allá de las divergencias persistentes de algunos componentes de  $T_{ij}$ , añadiendo un término cosmológico de borde (constante) a  $S_B$  se logra el efecto de hacer la acción finita y obtener un valor finito para la energía quasi-local.

Siguiendo aquí el mismo procedimiento para el caso timelike, se suplementa la acción con una contribución de borde

$$S'_B = \frac{\zeta}{8\pi G} \int d^2x \sqrt{-\gamma},$$

donde  $\zeta$  es un coeficiente fijado por el requerimiento de que la acción sea finita. Puede verse que la variación de la misma conduce a un tensor de esfuerzos que gana un término extra

$$T'_{ij} = -\frac{\zeta}{8\pi G} \gamma_{ij}. \quad (4.17)$$

El valor adecuado para el coeficiente es

$$\zeta = -\frac{\sigma 8\omega^2 \ell \sqrt{2(\omega^2 \ell^2 + 1)}}{(19\omega^2 \ell^2 - 2)}.$$

Si se especializa el anterior valor en  $\omega^2 \ell^2 = 1$ , que es cuando WAdS<sub>3</sub> se transforma en AdS<sub>3</sub>, se obtiene  $\zeta = -\sigma 16/(17\ell)$ . Este valor es el que debe añadirse para regularizar el tensor de esfuerzos del borde en el caso de AdS<sub>3</sub> bajo NMG, lo cual constituye un chequeo de consistencia. Utilizando el valor explícito de la masa, resulta  $\zeta = -(1 + 2\ell^2 m^2 / \sigma) / (2\ell^3 m^2)$ .

### 4.3.3 Energía gravitatoria quasi-local

El tensor de esfuerzo de borde (4.15), una vez suplementado por el añadido del término regularizador de la Ec. (4.17) lleva a la definición de cargas conservadas  $Q_{\tilde{\xi}}$ , asociadas a los vectores  $\tilde{\xi}$  que generan isometrías sobre el borde  $\partial\Sigma$ . El esquema de la construcción de las cargas se repasó en la Sección 3.5.

Estos vectores de Killing del borde  $\tilde{\xi}$  se definen por la ecuación

$$\mathcal{L}_{\tilde{\xi}}\gamma_{ij} = 0,$$

es decir, la anulación de la derivada de Lie en la dirección  $\tilde{\xi}$  respecto de la métrica inducida. Luego, las cargas se definen por la integración de la proyección del tensor de esfuerzo del borde sobre el vector  $\tilde{\xi}$  y un vector unitario  $u^i$  ortogonal a la superficies de  $t$  constante. En un espacio de  $D=4$  dimensiones esto corresponde a la expresión (3.14), una integral sobre un borde 2D. Aquí, la integral es unidimensional, en la coordenada angular

$$Q_{\tilde{\xi}} = \int d\varphi \varrho u^i T_{ij} \tilde{\xi}^j,$$

donde  $\varrho$  es una función de la métrica inducida, la cual se escribe en la forma ADM de acuerdo con

$$d\Sigma^2 = -N_\Sigma^2 dt^2 + \varrho^2 (dt + N_\Sigma^\varphi d\varphi)^2.$$

En el caso particular de los defectos sobre WAdS<sub>3</sub> se tienen

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= 2(1 - \mu)r + 2(\ell^{-2} - \omega^2)r^2, \\ N_\Sigma^\varphi &= -\frac{\omega r}{(1 - \mu)r + (\ell^{-2} - \omega^2)r^2}, \\ N_\Sigma^2 &= 1 + \frac{2\omega^2 r^2}{(1 - \mu)r + (\ell^{-2} - \omega^2)r^2}. \end{aligned}$$

Con estos ingredientes y el vector unitario ortogonal a la superficie de  $t$  constante, que está dado por  $u = -N_\Sigma(r)dt$ , ya es posible calcular la masa de los defectos. Considerando un vector de Killing del borde, tipo timelike,

$$\tilde{\xi}^i = N_\Sigma u^i,$$

i.e. timelike en la región donde la fuente está localizada, se halla un valor para la energía quasi-local  $\mathcal{M} \equiv Q_{\tilde{\xi}}$ , que resulta

$$\mathcal{M} = \frac{2\sigma\omega^2\ell^2(\mu-1)}{(19\omega^2\ell^2-2)G} = \frac{2(\mu-1)}{19G} \left( \sigma - \frac{1}{m^2\ell^2} \right), \quad (4.18)$$

donde se ha utilizado la relación  $2m^2\ell^2\sigma = 2 - 19\omega^2\ell^2$ , que proviene de (4.11).

En primer lugar, este resultado (4.18) puede compararse con el caso especial de las soluciones localmente AdS<sub>3</sub>, que como se dijo corresponden a  $\omega^2\ell^2 = 1$ . En este caso, (4.18) se reduce a

$$\mathcal{M}_{(\omega^2\ell^2=1)} = \frac{2\sigma(\mu-1)}{17G}, \quad (4.19)$$

y, en efecto, esto se ve que coincide con la masa de un defecto en un espacio tiempo localmente AdS<sub>3</sub> en NMG. Para ver este hecho de manera explícita es conveniente recordar

que en el caso de AdS<sub>3</sub>, bajo NMG, la masa de un déficit angular (un caso particular de la geometría BTZ) está dada por [36]

$$\mathcal{M}_{\text{AdS}_3} = \frac{(\mu - 1)}{8G} \left( \sigma + \frac{1}{2m^2\ell^2} \right) = \frac{2\sigma(\mu - 1)}{17G}, \quad (4.20)$$

donde se ha utilizado que  $\omega^2\ell^2 = 1$  corresponde precisamente a la relación  $2m^2\ell^2\sigma = -17$  que surge de especializar el valor del parámetro  $m^2$  en la Ec. (4.11) para el caso  $\omega^2\ell^2 = 1$ . Dicho de otra manera, la Ec. (4.18) se reduce a la (4.19) en ese punto del espacio de parámetros. En principio esta coincidencia puede verse como un chequeo de consistencia del resultado (4.18).

No obstante, pensándolo cuidadosamente, debe concluirse que no hay *a priori* una buena razón para esperar que (4.18) coincida con (4.20) en el límite  $\omega^2\ell^2 \rightarrow 1$ . Esto se debe a que, incluso cuando en ese límite WAdS<sub>3</sub> se convierte en AdS<sub>3</sub>, este último lo es en un sistema de coordenadas que no es aquel que usualmente se utiliza cuando se calculan las cargas quasilocales para la geometría BTZ. Esto es similar a lo que sucede en el caso de los agujeros negros asintóticamente WAdS<sub>3</sub>, cuyas cargas conservadas, como funciones del radio del horizonte, no tienden a las cargas de los agujeros negros BTZ en el límite  $\nu \rightarrow 1$  (donde  $\nu$  es el parámetro que controla la deformación en ese caso, ver las convenciones en la Ref. [8]). De hecho, podrá verse en la próxima sección que el valor correcto de la masa gravitacional asociada a un defecto puntual en el espacio timelike WAdS<sub>3</sub> coincide con (4.18) a menos de un factor 1/2. Esta característica ya fue observada en el contexto de las soluciones WAdS<sub>3</sub>, véase la Ref. [80].

Como sucede en el caso de los espacios spacelike WAdS<sub>3</sub>, el método de calcular cargas utilizando el tensor de energía momento quasi-local de Brown-York dado por la Ec. (4.15) no basta para hallar un resultado finito para el momento angular de los defectos rotantes. Esto se debe fundamentalmente a que no parece haber forma de regularizar todos los componentes de (4.15) por medio de contratérminos locales de borde [80]. Entonces, para estudiar los defectos rotantes es necesario considerar un método diferente para calcular las cargas conservadas. Con esta motivación en mente se considerará en la próxima sección el formalismo covariante.

## 4.4 Cálculo de cargas conservadas por el formalismo covariante

En el formalismo covariante, que fuera presentado en la Sección 3.7, las cargas conservadas asociadas a vectores de Killing asintóticos  $\xi$  están dadas, en geometrías 3D con una coordenada angular  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , por la expresión

$$Q_\xi[\delta g, g] = \frac{1}{2\kappa} \int_0^{2\pi} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\varphi} k_\xi^{\mu\nu}[\delta g, g] d\varphi, \quad (4.21)$$

donde  $g$  es una solución de background,  $\delta g$  una perturbación linealizada en torno a dicho background, y  $k_\xi^{\mu\nu}[\delta g, g]$  es la 1-forma potencial de la teoría linealizada. En la referencia [68], este potencial fue calculado para los vectores de Killing exactos en NMG utilizando el llamado formalismo de Abbott-Deser-Tekin (ADT). El resultado puede escribirse como

$$k_\xi^{\mu\nu} = Q_R^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2} Q_K^{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

donde la primer contribución proviene de la parte de la ecuación de movimiento asociada a la acción de EH, mientras que  $Q_K^{\mu\nu}$  da cuenta de la contribución del tensor  $K_{\mu\nu}$  de NMG, cuya expresión explícita fuera presentada en la Ec. (3.28) del capítulo previo, donde se explicó en detalle el formalismo covariante para esta teoría.

#### 4.4.1 Masa y momento angular

La masa y el momento angular pueden calcularse insertando en la Ec. (4.21) la expresión explícita de (4.22), teniendo en cuenta que los vectores de Killing apropiados son, respectivamente,  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$ . Para el caso  $\sigma = 1$  se obtienen<sup>5</sup>

$$\mathcal{M} = \frac{4(\mu - 1)\ell^2\omega^2}{G(19\ell^2\omega^2 - 2)}, \quad (4.23)$$

y

$$\mathcal{J} = -\frac{4j\ell^4\omega^3}{G(19\ell^2\omega^2 - 2)}, \quad (4.24)$$

para la masa y el momento angular de la solución (4.9), respectivamente. Nótese que, como es esperable, el momento angular cambia su signo cuando  $\omega$  lo hace.

Las expresiones (4.23), (4.24) son los valores correctos de las cargas conservadas. Curiosamente, el cálculo quasi-local a través del tensor de Brown-York obtenido en (4.18) da 1/2 del valor de la masa obtenido aquí<sup>6</sup>.

Un caso especial para considerar es el del espacio-tiempo de Gödel, que corresponde al límite  $\ell \rightarrow \infty$ . En este caso, la fórmula de la masa (4.23) resulta en

$$\mathcal{M}_{\text{Göd}} = \frac{4(\mu - 1)}{19G}, \quad (4.25)$$

la cual es independiente de  $\omega$ . Para  $\mu = 0$  el resultado es negativo, lo cual es importante en el estudio del espectro de los agujeros negros spacelike WAdS<sub>3</sub> [13, 81].

Otro caso especial para analizar es el del espacio AdS<sub>2</sub> × ℝ. Este corresponde al límite  $\omega \rightarrow 0$ . Para ver este hecho de manera explícita se define una coordenada  $\tilde{\rho}^2 = 1 + 4(r^2/\ell^4 + r/\ell^2)$ , tras lo cual la métrica para  $\omega = 0$  adquiere la forma

$$ds_{|\omega=0}^2 = -dt^2 + ds_{\text{AdS}_2}^2 = -dt^2 + \frac{\ell^2}{2}(\tilde{\rho}^2 - 1)d\phi^2 + \frac{\ell^2}{2}\frac{d\tilde{\rho}^2}{(\tilde{\rho}^2 - 1)}.$$

En este caso la masa tiende a cero,

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \text{AdS}_2} = 0.$$

Localmente, los espacios AdS<sub>2</sub> × ℝ aparecen en el límite en el cual (4.11) verifica  $\Lambda = -m^2$  [44].

<sup>5</sup>Este resultado es a menos de términos que no dependen de  $\mu$  y  $j$ , los cuales no pueden ser tenidos en cuenta por la integración.

<sup>6</sup>Este mismo fenómeno ha sido observado en el caso de los agujeros negros spacelike, donde la energía quasi-local da un medio de la masa calculada por los métodos covariantes, siendo este último el valor que verifica la primer ley de la termodinámica para agujeros negros [68].

## 4.5 Conclusiones

Los espaciotiempos timelike  $WAdS_3$ , estudiados en este capítulo en el marco de la teoría NMG, representan un excelente caso testigo sobre el cual explorar la física gravitatoria para contestar preguntas respecto de cómo definir observables con sentido físico, como cargas conservadas, en espacios que no poseen un vector de Killing temporal globalmente definido.

En el caso de los espacios stretched y squashed timelike  $WAdS_3$ , se han investigado varias características relacionadas con la factibilidad de definir cargas conservadas. Una de las cuestiones que hemos resuelto es la de cómo proveer una definición con sentido físico de energía gravitatoria quasi-local en estos espaciotiempos que exhiben curvas CTC. La motivación para realizar este análisis es estudiar hasta qué punto los métodos inspirados por el concepto de holografía pueden ser aplicados en este ejemplo de holografía no-AdS. Para los defectos no rotantes puede decirse que los métodos holográficos han tenido éxito, pero las dificultades halladas cuando se intentó adaptar este enfoque a defectos rotantes eventualmente hicieron necesario considerar una manera alternativa de calcular cargas. Se constató que el formalismo covariante aplicado a NMG resultó ser apropiado puesto que permitió determinar masa y momento angular, proveyendo entonces información física para un tipo más general de defectos que representan objetos rotantes tipo-partícula en el interior de  $WAdS_3$ .

La pregunta que persiste es si es posible formular una receta de renormalización holográfica en los espacios  $WAdS_3$ . La dificultad expuesta en la Sección 4.3 está relacionada con la imposibilidad de regularizar el tensor de energía del borde de manera completa, i.e. todos sus componentes, en términos de contratérminos locales del borde. Este fenómeno ha sido observado en TMG y en NMG para el caso del espaciotiempo spacelike  $WAdS_3$ , lo que sugiere que quizás es una característica general de este tipo de espacios. Si este es o no un problema relacionado con la falta de invarianza Lorentz en la teoría dual<sup>7</sup> es algo que todavía debe entenderse.

Antes de concluir este capítulo, es necesario mencionar que el método covariante de calcular cargas discutido aquí puede ser adaptado al caso de cargas asociadas a isometrías asintóticas. En un trabajo relacionado [81] se ha mostrado que el álgebra de cargas en espacios asintóticamente  $WAdS_3$  se halla dado por un álgebra infinito-dimensional que coincide con la suma semidirecta de un álgebra de Virasoro con una carga central no-nula y un álgebra afin de Kač-Moody.

---

<sup>7</sup>Recuérdese la mención que se hizo en el Capítulo 1 sobre la teoría dual CFT que correspondería a los espacios asintóticamente  $WAdS_3$ . Se había dicho allí que esta teoría tendría una simetría conforme parcial, una distinción entre izquierda y derecha, lo que implica una pérdida de la invarianza Lorentz.

## Capítulo 5

# Cálculo de cargas conservadas en espacios Lifshitz

### 5.1 Motivación

Los sistemas de  $D = 2$  dimensiones del tipo Lifshitz *fixed points* con exponente  $z$  a temperatura finita (i.e. con  $T > 0$ ) están vinculados holográficamente con los espaciotiempos de agujero negro  $D = 3$  que asintóticamente (en  $r$  muy grande) tienden a la métrica definida en la Ec. (2.17),

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{\ell^{2z}} dt^2 + \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{\ell^2} dx^2. \quad (5.1)$$

Es decir, que sus duales son los agujeros negros asintóticamente Lifshitz.

Las posibles aplicaciones a sistemas con temperatura finita constituyen un atractivo suficiente como para motivar la búsqueda de teorías gravitatorias físicamente consistentes que admitan dichos agujeros negros como soluciones exactas. No obstante, esto representa un problema difícil debido a la validez de teoremas del tipo Birkhoff en una gran variedad de sistemas<sup>1</sup>, lo cual impide la existencia de configuraciones de agujeros negros estáticos del tipo requerido. Esta es la razón por la cuál la construcción de agujeros negros asintóticamente Lifshitz involucra típicamente la introducción de un tensor de energía-momento, del lado derecho de las ecuaciones de movimiento, conteniendo materia exótica o la presencia de acoplamientos no-mínimos al sector gravitatorio.

Sin embargo, cuando se introdujeron los espacios de Lifshitz en esta tesis, en la Sección 2.8, se mencionó que la teoría masiva NMG admite entre sus soluciones los agujeros negros asintóticamente Lifshitz. En la Ref. [42] se mostró de manera explícita que se puede construir analíticamente, bajo NMG, una solución de agujero negro estático de Lifshitz con exponente dinámico  $z = 3$ . En  $D = 3$  dimensiones se conocen otros modelos que admiten agujeros negros de Lifshitz, pero o bien incluyen campos adicionales [59, 82] o bien involucran ecuaciones de campo para teorías de gravedad exóticas [83]. Por ello no es una exageración decir que las situaciones ideales donde se presentan estos agujeros negros son más bien escasas. Una buena prueba de ello es que bajo la mencionada teoría de gravedad

---

<sup>1</sup>El teorema de Birkhoff usual (para la acción de CEH) dice que toda solución de las ecuaciones de vacío que posea simetría esférica debe ser estática y asintóticamente plana. Un teorema de este tipo destierra la posibilidad de tener una simetría esférica, que es la asunción natural para una solución de agujero negro, con otro comportamiento asintótico que no sea el de una métrica plana.

masiva, ha sido demostrado [84] que esos agujeros negros estáticos existen solamente para valores  $z = 1$  y  $z = 3$  del exponente dinámico. Esta es la razón por la cual la solución presentada en [42] resulta particularmente interesante.

La métrica del agujero negro de Lifshitz, en coordenadas  $(t, r, \varphi)$  y utilizando una escritura que difiere levemente de la usada en [42], es

$$ds^2 = -\frac{r^4}{\ell^4} \left( \frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left( \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} \right) dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (5.2)$$

Esta solución ya se presentó en la Ec. (2.21), donde, además, se dijo que  $r = r_+$  señala la presencia de un horizonte de eventos que esconde una singularidad esencial en  $r = 0$ . También se dijo que el límite  $r_+ \rightarrow 0$  recupera la métrica del espaciotiempo de Lifshitz de la Ec. (5.1) con exponente crítico dinámico  $z = 3$ .

Para valores genéricos de  $r_+$ , y con  $r$  suficientemente grande, la métrica aún tiende asintóticamente al espacio Lifshitz con  $z = 3$ , lo cual significa que asintóticamente es localmente invariante bajo el reescalado

$$t \rightarrow e^{3\sigma} t, \quad r \rightarrow e^{-\sigma} r, \quad \varphi \rightarrow e^{\sigma} \varphi.$$

En realidad, la solución exhibe también la mencionada simetría de reescalado para valores finitos de  $r$  siempre y cuando, además de reescalar las coordenadas, también se reescalee el horizonte de eventos de acuerdo con  $r_+ \rightarrow e^{-\sigma} r_+$ . Esto deja la métrica de agujero negro de la Ec. (5.2) invariante. Por una parte, esto es consistente con el hecho de que todos los invariantes de curvatura del agujero negro de Lifshitz dependen de potencias del ratio  $r_+^2/r^2$  (véanse algunos de ellos en las Ec. (2.22) y (2.23)). Por otra parte, esto provee un argumento para anticipar, previamente a cualquier cálculo, la dependencia funcional de la masa, la cual aparece en la Ec. (5.3).

## 5.2 El problema del cálculo de la masa para el agujero negro de Lifshitz

Los argumentos de escala esgrimidos previamente muestran que la masa del agujero negro del espacio de Lifshitz, bajo NMG, debe adoptar la forma

$$M = \eta \frac{L r_+^4}{2\pi G \ell^5} \quad (5.3)$$

donde  $\eta$  es un coeficiente adimensional,  $G$  es la constante de Newton,  $r_+$  es el radio del horizonte de eventos,  $L$  es la longitud del segmento en el cual  $x$  puede tomar valores y  $\ell$  es la escala de longitud que aparece en la métrica (5.2), la cual se relaciona con la curvatura escalar del agujero negro, que es, c.f. (2.22),

$$R = -\frac{2}{\ell^2} \left( 13 - 4 \frac{r_+^2}{r^2} \right). \quad (5.4)$$

Es usual, y conveniente para el cálculo de masa, considerar la solución de agujero negro con la coordenada  $x \equiv \varphi \ell$  de naturaleza periódica con período  $2\pi\ell$ . Por dicha razón, la métrica se ha presentado en las Ecs. (2.21) y (5.2) con la tercer coordenada  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Esto, por supuesto, rompe la simetría de escala, haciendo que el grupo de isometrías sea

$\mathbb{R} \times SO(2)$ , incluso asintóticamente. Luego, en relación a la fórmula de (5.3), será  $L = 2\pi\ell$  y por ello

$$M = \eta \frac{r_+^4}{G\ell^4}.$$

En la literatura especializada, diferentes autores usando diferentes métodos para calcular cargas conservadas en teorías con términos de alto orden en la curvatura han arribado a distintos resultados para el valor de  $\eta$  en (5.3). Esto dispara la cuestión sobre el valor correcto para la energía gravitatoria en el caso del espaciotiempo de Lifshitz. La discrepancia puede ser justificada por la dificultad de calcular cargas conservadas para soluciones de teorías de alto orden que exhiben comportamientos asintóticos no-estandard.

El problema con este hecho presenta dos aspectos: en primer lugar, existe una ambigüedad en la elección de los contratérminos cuando hay presentes términos de alto orden en la curvatura; en segundo lugar, ya el espaciotiempo de Lifshitz *vacío* es singular<sup>2</sup>, lo cual hace que sea menos clara la identificación del fondo de referencia. Esto conduce a que no toda la maquinaria que se halla disponible para tratar con espacios que son maximalmente simétricos asintóticamente pueda ser aplicada con éxito al caso de espaciotiempos Lifshitz.

Estas dificultades llevaron a los investigadores a considerar varios métodos, utilizados con diferente grado de éxito. En [85], por ejemplo, los autores consideraron la fórmula de Wald para calcular la entropía e inferir así la masa, a partir de la primer ley de la termodinámica de agujeros negros, hallando para la misma una expresión (5.3) con  $\eta = -1/4$ . En [86], por contraste, los autores consideraron un método que involucra reducción dimensional y hallaron  $\eta = 1/16$ . En [79], se encontró el valor  $\eta = -1/4$  mediante la definición de un tensor holográfico y calculando la energía quasi-local. En [87], los autores adaptaron el enfoque de Abbott-Deser-Tekin (ADT) [88] para espacios de curvatura no constante y hallaron  $\eta = 7/8$ . En [89], los autores hicieron un análisis muy interesante de la termodinámica de agujeros negros Lifshitz y mostraron que esto es consistente con  $|\eta| = 1/4$ . El valor  $\eta = +1/4$  se obtuvo en [90] considerando otra adaptación de ADT.

Aquí, considerando el método robusto de evaluación en campo cercano, presentado en la Sección 3.8, que evita el análisis del comportamiento asintótico para radios tendiendo a infinito y permite asimismo atacar el problema en el régimen de campo fuerte, se mostrará que el valor correcto para la masa del agujero negro de Lifshitz (en el caso  $z = 3$  y bajo NMG) está dado por la Ec. (5.3) con  $\eta = -1/4$ . En particular, esto implica que la masa del agujero negro es negativa para valores positivos de la constante de Newton  $G$  y, por ello, como es usual en gravedades 3D masivas, es necesario considerar el llamado “signo equivocado” (*wrong sign*) de la misma para que el fondo de Lifshitz tenga sentido físico.

Como parte del análisis, y a modo de cálculo previo, se presenta en la sección siguiente el cálculo de masa según el enfoque ADT del formalismo covariante.

### 5.3 Cálculo bajo el formalismo covariante

A los efectos de realizar este cálculo se escribirá la métrica del agujero negro de Lifshitz (5.2) como una perturbación respecto de la solución background  $\bar{g}_{\mu\nu}$  dada por el espacio-

<sup>2</sup>Recuérdese el comentario en la Sección 2.8 sobre la incompletitud de las geodésicas en el espacio de Lifshitz.



tiempo (5.1). Es decir que la perturbación  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}$  tiene la forma

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & h_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$h_{tt} = \frac{r_+^2}{\ell^{2z}} r^{2(z-1)} \quad h_{rr} = \frac{\ell^2 r_+^2}{(r^2 - r_+^2) r^2}.$$

Los límites de  $r \rightarrow \infty$  de la perturbación  $h_{\mu\nu}$  son

$$h_{tt} \rightarrow \begin{cases} \infty & z > 1 \\ r_+^2/\ell^2 & z = 1 \\ 0 & z < 1 \end{cases} \quad h_{rr} \rightarrow 0$$

donde se constata que asintóticamente  $h_{tt}$  no solamente no se apaga sino que diverge para el caso del agujero negro de Lifshitz ( $z = 3$ ). No obstante, en dicho caso también el componente  $\bar{g}_{tt}$  de la métrica de background diverge y puede verse que el cociente  $h_{tt}/\bar{g}_{tt} = r_+^2/r^2$  tiende a cero. Se puede decir que la perturbación se apaga en un sentido débil. Esto es lo que en la sección anterior se refirió como un comportamiento asintótico no-estandar de la solución de fondo.

Procediendo con el cálculo puede verse que la integral que da la masa para el vector de Killing temporal  $\xi^\mu = (1, 0, 0)$  es

$$Q[\xi] = \frac{1}{8\pi G} \int_0^{2\pi\ell} d\varphi \sqrt{\sigma} n_\mu u_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

donde

$$n_\mu = \delta^t{}_\mu, \quad u_\nu = \delta^r{}_\nu$$

son 1-formas normalizadas correspondientes a las normales apropiadas para la integración proveniente de la doble aplicación de la ley de Gauss. En la Figura 5.1 se muestra un esquema de la integración involucrada en la carga definida por la Ec. (5.5). La métrica restringida  $D - 2$ -dimensional  $\sigma_{ij}$  tiene en este caso una única componente  $\sigma_{\varphi\varphi}$  de manera que su determinante es el valor absoluto de esa componente.

El resultado de la integración es

$$Q(r) = \frac{(7r^2 - 3r_+^2)(r^2 - 3r_+^2)r^2 r_+^4}{4G\ell^4 (r + r_+)^3 (r - r_+)^3},$$

que luego de expandirse en torno a  $r \rightarrow \infty$  resulta en

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) \equiv M = \frac{7r_+^4}{4G\ell^4}.$$

Este resultado, que es incorrecto como se mencionó previamente, no depende de qué enfoque (“analítico” o “numérico”) se siga para evaluar la carga bajo el formalismo covariante. En este sentido el método es consistente; bajo ambos enfoques el integrando es idéntico y conduce, luego de la integral angular y el límite  $r \rightarrow \infty$  al resultado, incorrecto,  $\eta = 7/4$ .

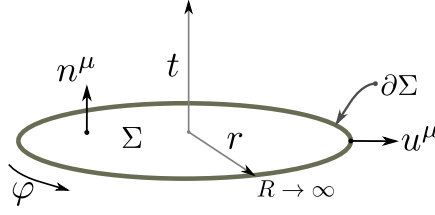


Figura 5.1: Esquema de la integración para el cálculo de la masa según el formalismo covariante en el caso del agujero negro de Lifshitz. La integración es sobre la superficie 1-dimensional  $\partial\Sigma$ , mediante la coordenada angular  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , que es el borde del disco  $\Sigma$  definido por la coordenada  $t$  constante y un radio  $r = R$ . La determinación de la masa procede cuando al resultado de la integración se lo lleva hacia  $R \rightarrow \infty$ .

## 5.4 Cálculo de cargas en la región cercana

Habiendo fallado el método covariante de cálculo de cargas y teniendo en cuenta las características especiales de asintotia de los espacios de Lifshitz es razonable pensar que un método de cálculo de cargas como el de campo cercano puede estar exento de los problemas que impiden al primero arribar a un resultado correcto. Bajo el método de campo cercano y de acuerdo con lo explicado en la Sección 3.8 la expresión de la variación funcional de la carga conservada asociada al vector de Killing  $\xi$  resultaba

$$\delta Q[\xi; g, \delta g] = \frac{1}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\varphi} k_{\xi}^{\mu\nu}[g, \delta g], \quad (5.6)$$

donde  $\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$  es la perturbación respecto de la solución de agujero negro  $g_{\mu\nu}$  que surgía de realizar una variación del horizonte de sucesos  $r_0 \rightarrow r_0 + \delta r_0$ , y donde  $k^{\mu\nu}$  es la 1-forma potencial de superficie (cuya expresión era idéntica al potencial ADT). En el caso de NMG, que es la teoría de mayor interés para esta tesis, esta forma estaba dada por las contribuciones

$$k^{\mu\nu} = k_{(0,1)}^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k_{(0,2)}^{\mu\nu} + \frac{3}{8m^2} k_{(1,1)}^{\mu\nu},$$

cuyas expresiones explícitas se mostraron en las Ec. (3.34), (3.35) y (3.36).

### 5.4.1 Masa del agujero BTZ deformado

El método de cálculo de cargas en el campo cercano ya fue probado con éxito en la Sección 3.8.1 donde se utilizó para evaluar la masa del agujero negro BTZ extremal. Se pudo constatar allí también que dicho cálculo estaba de acuerdo con la predicción que la termodinámica da para el mismo.

Ahora, se realizará una prueba un poco más general que aquella, utilizando el mismo método para calcular la masa en el contexto de la teoría de gravedad masiva NMG para una generalización del agujero negro BTZ que fuera estudiado en las Ref. [36, 44]. Este agujero negro, que solamente existe cuando  $2m^2\ell^2 = -1$ , tiene curvatura no-constante y es asintóticamente  $\text{AdS}_3$ , de una manera más débil que la prevista por las condiciones de contorno estandar de Brown-Henneaux y presenta, además, dos horizontes de sucesos  $r_{\pm}$ .

La métrica en cuestión, que aparece en las Ecs. (3.1) y (3.2) de la Ref. [44], es

$$ds^2 = - \left( \frac{r^2}{\ell^2} + br - \mu \right) dt^2 + \frac{1}{r^2/\ell^2 + br - \mu} dr^2 + r^2 d\phi^2,$$

donde

$$b = -\frac{1}{\ell^2}(r_+ + r_-), \quad \mu = -\frac{r_+ r_-}{\ell^2}.$$

En términos de las raíces de la ecuación cuadrática que aparece en  $g_{tt}$  y en  $g_{rr}$ , que son

$$r_{\pm} = -\frac{b\ell^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b\ell^2}{2}\right)^2 + \mu\ell^2}$$

la métrica adopta la forma

$$ds^2 = -\frac{1}{\ell^2} (r - r_+)(r - r_-) dt^2 + \frac{\ell^2}{(r - r_+)(r - r_-)} dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Suponiendo que  $r_+ > 0$ , se deduce que  $\mu\ell^2 > 0$  lo que implica que  $r_- < 0$ . Luego, el único término que dará horizonte es  $r_+$ . Los cambios de variables

$$v = t - \ell^2 \int \frac{dr}{r^2 + b\ell^2 r - \mu\ell^2}, \quad \rho = r - r_+$$

llevan la métrica a la forma de campo cercano

$$ds^2 = - \left( \frac{r_+ - r_-}{\ell^2} + \frac{\rho^2}{\ell^2} \right) dv^2 - 2 dv d\rho + (r_+^2 + 2r_+\rho + \rho^2) dx^2$$

que depende de los dos radios  $r_+, r_-$  de manera que deben considerarse dos variaciones independientes de los horizontes,

$$r_+ \rightarrow r_+ + \delta r_+ \quad r_- \rightarrow r_- + \delta r_- \quad r_+^2 \rightarrow r_+^2 + 2r_+ \delta r_+$$

que definen una perturbación de la métrica dada por

$$\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{\ell^2} \rho (\delta r_+ - \delta r_-) dv^2 + 2(r_+ + \rho) \delta r_+ d\varphi^2,$$

cuya integración, para el vector de Killing  $\partial_v$ , arroja

$$\delta Q = \frac{r_+ - r_-}{8G\ell^2} (\delta r_+ - \delta r_-), \quad (5.7)$$

en la cual se ha utilizado el vínculo  $2\ell^2 m^2 = -1$  dado por las ecuaciones de movimiento para hacer desaparecer  $m^2$ . La integración de (5.7) habría que hacerla con cuidado puesto que es en realidad define una integración parcial en términos de dos variables  $r_+, r_-$  pero se puede evitar merced al siguiente desarrollo

$$\delta Q = \frac{r_+ - r_-}{8G\ell^2} \delta(r_+ - r_-) = \frac{1}{16G\ell^2} \delta([r_+ - r_-]^2),$$

que conduce directamente a

$$Q[\partial_v; g, \delta g] = \frac{(r_+ - r_-)^2}{16G\ell^2}. \quad (5.8)$$

Este valor coincide con el valor correcto de la masa, véase Ec. (8) en la Ref. [91], Ec. (12) en [92] y también Ec. (49) de este último trabajo. En el caso particular  $r_- = r_+$  la solución se reduce al agujero negro estático BTZ, y en ese caso (5.8) se reduce a (3.38) para  $2m^2\ell^2 = -1$ . Esto indica que el método de cálculo de la masa a partir de las cargas en la formulación cercana al horizonte funciona adecuadamente, también en el caso de agujeros negros con geometrías que no son de curvatura constante.

En este punto uno podría preguntarse porqué este cálculo de horizonte cercano da el valor correcto de la masa y no, como en [71], el producto entre la temperatura de Hawking y la entropía de Bekenstein-Hawking, cf. [92, 93]. La respuesta es que, mientras que las condiciones de contorno de horizonte cercano consideradas aquí son exactamente las mismas que las de [71], la manera en la cual se implementa la variación funcional es diferente: Aquí no se consideran variaciones en el espacio de las métricas que mantienen la temperatura del horizonte constante sino variaciones arbitrarias en una familia de uno o dos parámetros. Como resultado, se puede reproducir correctamente el valor de la masa del agujero negro, con el factor numérico apropiado.

En la obtención de la expresión (5.8) se utilizó con provecho la forma conveniente  $\bar{r} \delta\bar{r} = 1/2 \delta\bar{r}^2$ , aunque por supuesto esto no representa un caso general. El Apéndice E detalla el procedimiento de integración que debe realizarse en un caso  $\delta Q = \delta Q(r_+, r_-)$  más general que el tratado previamente. La ilustración es, no obstante, para este mismo caso del BTZ y se llega, consiguientemente, al mismo resultado de la Ec. (5.8).

#### 5.4.2 Masa del agujero negro de Lifshitz

En el caso del agujero negro BTZ, el mismo resultado (3.38) puede ser obtenido recurriendo al método ADT, el cual involucra considerar soluciones linealizadas en torno a un vacío  $\text{AdS}_3$  en la región asintótica, cercana al borde. De cualquier manera, en el caso del agujero negro  $z = 3$  de Lifshitz, el método que recurre a la linealización de la métrica en la región de  $r \rightarrow \infty$  no conduce al resultado correcto para la masa. En ese caso el cálculo bajo el formalismo ADT, que se hizo en detalle en la Sección 5.3, condujo a

$$\bar{M} = \frac{7}{4} \frac{r_+^4}{G\ell^4},$$

el cual, insistimos, no es el resultado correcto para el agujero negro de Lifshitz. La razón por la cual esto sucede ha sido explicada en [68].

El valor correcto puede obtenerse a través del cálculo en campo cercano, como se hizo para el caso  $z = 1$  del agujero negro BTZ. Esto requiere, por supuesto, escribir la solución (5.2) en la forma cercana al horizonte

$$ds^2 = f(v, \varphi) dv^2 - 2k(v, \varphi) dvd\rho + 2h(v, \varphi) dvd\varphi + R^2(v, \varphi) d\varphi^2, \quad (5.9)$$

y considerar las condiciones de contorno de las Ec. (3.32). Esta transformación puede hacerse con los cambios de coordenadas

$$v = t - \ell^4 \int \frac{dr}{r^2(r^2 - r_+^2)}, \quad \rho = \frac{r^3 - r_+^3}{3\ell^2}. \quad (5.10)$$

El Apéndice D presenta en detalle la transformación que conduce a la escritura de campo cercano. Puede constatarse que  $\rho = 0$  en el horizonte  $r = r_+$  y se verifica además que

$$r - r_+ \simeq \frac{\ell^2}{r_+^2} \rho + \mathcal{O}(\rho^2)$$

para valores pequeños de  $\rho$ . El cambio de variables (5.10) basta para escribir la métrica (5.2) en la forma

$$ds^2 = - \left( \frac{2r_+^3}{\ell^4} \rho + \frac{7}{\ell^2} \rho^2 \right) dv^2 - 2 dv d\rho + \left( r_+^2 + \frac{2\ell^2}{r_+} \rho \right) dx^2$$

que es la forma necesaria dada por las Ecs. (3.32) con

$$-2\kappa = -\frac{2r_+^3}{\ell^4}, \quad \mathbb{T} = -\frac{7}{\ell^2}, \quad \gamma^2 = r_+^2, \quad \lambda = \frac{2\ell^2}{r_+}, \quad (5.11)$$

la cual en particular conduce a una gravedad superficial  $\kappa = r_+^3/\ell^4$ .

Con todo lo anterior, ya podemos embarcarnos en el cálculo de  $\delta Q$  según la Ec. (5.6) para el vector de Killing  $\xi = \partial_v$  y realizar la variación funcional a través de la variación del parámetro  $\delta r_+$ . Esto lleva a una variación de la métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  con

$$\delta g_{\mu\nu} = -\frac{6r_+^2}{\ell^4} \rho \delta r_+ dv^2 + \frac{2}{r_+^2} (r_+^3 - \ell^2 \rho) \delta r_+ d\varphi^2.$$

De este modo, finalmente se obtiene

$$Q[\partial_v; g, \delta g] = -\frac{r_+^4}{4G\ell^4} \frac{L}{2\pi\ell}$$

el cual es el resultado correcto para la masa (es decir, un valor  $\eta = -1/4$ ). El factor  $L/(2\pi\ell)$  en esta expresión proviene de la integración sobre la coordenada  $x = \varphi\ell$ , y es 1 para el caso que  $\varphi$  tenga un período  $2\pi$ .

## 5.5 Conclusiones

En resumen, puede concluirse que la masa, entropía y temperatura de la solución de agujero negro para  $z = 3$  están dadas (con los factores  $\hbar$  restaurados) por

$$M = -\frac{r_+^4}{4G\ell^4}, \quad S = -\frac{2\pi r_+}{\hbar G}, \quad T = \frac{\hbar r_+^3}{2\pi\ell^4}, \quad (5.12)$$

respectivamente. Mientras que la entropía puede ser calculada utilizando la fórmula de Wald, la temperatura se obtiene de los métodos geométricos standard. Estas cantidades satisfacen el primer principio  $dM = TdS$  y una fórmula del tipo de la de Smarr,  $M = \frac{1}{4}TS$ . Nótese que, pese a ser una solución de una teoría con derivadas de alto orden, el agujero negro de Lifshitz satisface la ley del área  $S \propto 2\pi r_+/G$ , pero con un factor especial: La masa y la entropía, ambos, resultan ser negativos, de manera que el cambio  $G \rightarrow -G$  es necesario para que la teoría tenga sentido físico en torno a este fondo.

Uno podría preguntarse qué sucede en el caso de un agujero negro estacionario (i.e. no-estático). Para el caso de agujeros negros rotantes asintóticamente  $\text{AdS}_3$  un cálculo del tipo near-horizon en gravedad 3D masiva fue realizado en [92]. En el caso de la versión rotante de (5.2), esta solución existe [94] y puede ser analíticamente construída mediante una transformación que involucra un boost impropio. No obstante, esta solución no verifica ser asintóticamente Lifshitz.

Antes de concluir es interesante comparar este resultado con aquellos de la literatura y explicar las diferencias: Como se dijo, en la Ref. [85] el autor halló que  $\eta = -1/4$ , de

acuerdo con la Ec. (5.12); véase la Ec. (2.23) en el mencionado trabajo. El valor  $\eta = -1/4$  fue también encontrado en [79]; véase la Ec. (5.70). Para poder comparar con [79] es necesario considerar que nuestra convención para el signo del término de Einstein-Hilbert en la acción gravitatoria corresponde a la elección  $\sigma = +1$  en dicho trabajo; por otra parte, esos autores consideran, en cambio, el signo opuesto para el término con  $m^2$ , lo cual es también consistente con (3.38). En la Ref. [86], los autores hallan un valor diferente,  $\eta = 1/16$  (en Ec. (27)). Otro valor diferente aparece en [87], donde se obtiene  $\eta = 7/8$  (véase Ec. (25)). En [89], los autores encontraron  $|\eta| = 1/4$ , véase su Ec. (37), lo cual es actualmente consistente con nuestro resultado dado que ellos han considerado un signo global opuesto para la acción gravitatoria.

Los resultados aquí presentados resultan ser consistentes con holografía. Una de las razones para ello es que están de acuerdo con el cálculo de la energía quasi-local con el tensor de energía del borde [79]. Mientras que en el caso de teorías en las cuales el sector gravitatorio es descrito por la acción de Einstein-Hilbert este cálculo procede más o menos inmediatamente a partir de la receta de renormalización holográfica, en el caso de teorías con derivadas de alto orden como lo es NMG la definición holográfica de un tensor de energía requiere prescripciones adicionales para definir el principio variacional y, consecuentemente, ser capaz de escribir los contratérminos. Esto introduce cierto grado de ambigüedad en los cálculos. Por ello, el cálculo que se presentó aquí puede ser considerado como un argumento más a favor de la definición de un tensor de energía quasi-local, como fue propuesto en [79]. Otra razón por la que nuestro resultado es compatible con holografía es que está de acuerdo con el espectro de masa que lleva a reproducir la entropía de un agujero negro de Lifshitz a partir de la fórmula generalizada de Cardy [89], la cual sigue a partir de considerar la generalización de la invarianza modular de la función de partición de la teoría dual para valores arbitrarios de  $z$ .

## Capítulo 6

# Puntos críticos de EMG

### 6.1 Motivación

Como se dijo previamente, en la Sección 2.2, un estudio de importancia en el contexto de holografía es el de las cargas centrales de la CFT de borde. La anulación de las mismas define puntos críticos de la teoría gravitatoria lo cual tiene consecuencias sobre la unitariedad de la teoría de borde, por ejemplo, característica de gran importancia si es que se desea que la teoría cuántica no tenga patologías que restrinjan o anulen su poder predictivo en las aplicaciones. Justamente en la Sección 2.2 fue presentada la teoría Chiral Gravity (que correspondía a las ecuaciones de TMG con constante cosmológica negativa) cuya característica esencial era que resultaba consistente solamente en un punto especial  $\mu\ell = 1$  de sus parámetros [31].

EMG (la teoría que se presentó en la Sección 2.4) fue objeto de análisis en una serie de trabajos recientes [47, 83, 95, 96], donde se estudiaron sus propiedades y las de su teoría dual  $CFT_2$  (véase también [97–100]) considerándose como espacio de fondo  $AdS_3$ . En particular, los valores de las cargas centrales fueron obtenidos y las características especiales que la teoría exhibe cuando esas cargas se anulan fueron también examinadas. No obstante, algunos aspectos relevantes sobre los puntos críticos quedaron fuera del análisis lo que motivó la realización del trabajo [26], que se presenta a continuación.

### 6.2 Cargas centrales

Como sucede en el caso de otras deformaciones masivas de la teoría gravitatoria de Einstein, las cargas conservadas asociadas a los difeomorfismos que preservan la asintotia  $AdS_3$  generan dos copias del álgebra de Virasoro [35]; es decir,

$$[L_m^\pm, L_n^\pm] = (m - n)L_{m+n}^\pm + \frac{c_\pm}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \quad (6.1)$$

donde  $L_m, L_n$  son operadores que representan cargas asociadas a vectores de Killing conformes que se obtienen a través de integraciones en un círculo que rodea al origen. Los signos “ $\pm$ ” diferencian el sentido: con movimiento hacia la derecha o hacia la izquierda (*right* o *left moving*). Estas son las dos copias del álgebra mencionada, valiéndose la propiedad  $[L_m^+, L_n^-] = 0$  entre ellas. Este álgebra de Virasoro es una extensión “central” no trivial del álgebra de Witt, dada por

$$[\ell_m, \ell_n] = -(m - n)\ell_{m+n}$$

donde el adjetivo de *central* refiere al hecho de que el término en (6.1) que es proporcional a  $c_{\pm}$  conmuta con todos los generadores; se dice por ello que está en el centro del álgebra.

Para el caso de EMG, las cargas centrales  $c_{\pm}$ , de acuerdo con el cálculo llevado a cabo en la Ref. [95] están dadas por

$$c_{\pm} = \frac{3\ell}{2G} \left( 1 - \frac{1}{\ell^2 m^2} \mp \frac{1}{\mu\ell} \right). \quad (6.2)$$

donde  $\ell = 1/\sqrt{-\Lambda}$  es el radio del espacio  $\text{AdS}_3$  y  $\mu, m$  los parámetros de masa de la teoría, cuyas ecuaciones de movimiento son las Ec. (2.8),

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} H_{\mu\nu} - \frac{1}{2m^4} L_{\mu\nu}$$

Este resultado difiere del obtenido en el trabajo posterior de la Ref. [47], que da la expresión

$$c_{\pm} = \frac{3\ell}{2G} \left[ -\frac{\ell m^2}{\mu} \pm \left( 1 + \frac{m^2}{\mu^2} - \frac{1}{\ell^2 m^2} \right) \right]. \quad (6.3)$$

En particular, las cargas (6.3) exhiben dos conjuntos de puntos críticos; es decir

$$\mu_{\text{crit},1\pm} = \pm m^2 \ell, \quad \mu_{\text{crit},2\pm} = \pm \frac{m^2 \ell}{m^2 \ell^2 - 1} \quad (6.4)$$

donde o bien  $c_-$  o  $c_+$  se anulan. En la Figura (6.1) se muestran las curvas  $\mu\ell$  en función del producto adimensional  $m\ell$  lo que permite ubicar la posición de los puntos críticos.

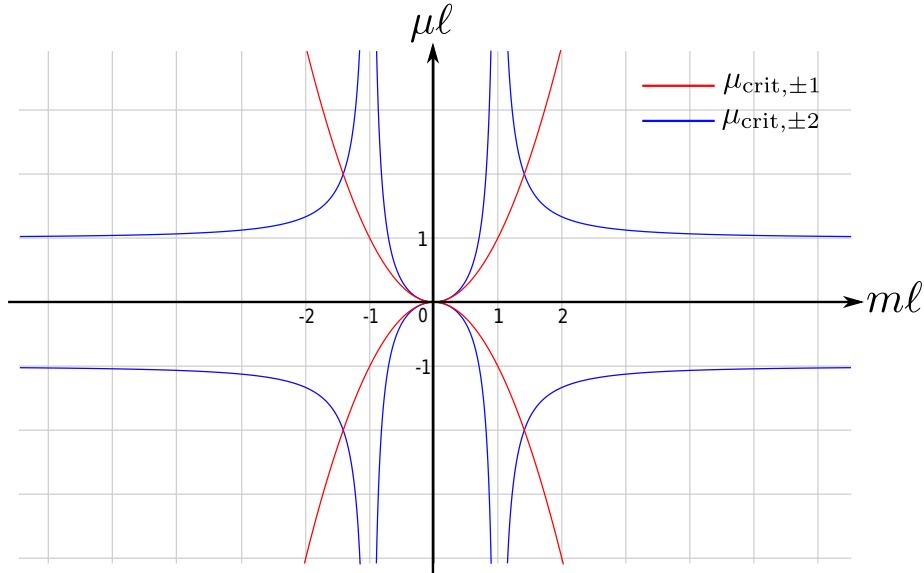


Figura 6.1: Valores  $\mu\ell$  como función de  $m\ell$ . Se asume  $m^2 > 0$ . Las curvas rojas corresponden a  $\mu = \mu_{\text{crit},1\pm}$ , donde  $c_{\pm} = 0$ , las curvas azules corresponden a  $\mu = \mu_{\text{crit},2\pm}$ , donde  $c_{\pm} = 0$  también. En el límite de valores grandes  $|m\ell|$  se recuperan los puntos quirales de TMG  $\ell\mu_{\text{crit},2\pm} = \pm 1$ . En  $|m\ell| = 1$  el valor crítico  $\ell\mu_{\text{crit},2\pm}$  diverge y  $c_- = c_+ = 0$ . El caso  $m^2 < 0$  no exhibe polos, y el comportamiento  $\ell\mu_{\text{crit},2\pm} \rightarrow \pm 1$  se recupera cuando  $|m\ell|$  es grande.



En la Ref. [95], por contraste, solamente los puntos  $\mu_{\text{crit},2\pm}$  fueron identificados como puntos críticos de la teoría, mientras nada especial fue observado en  $\mu_{\text{crit},1\pm}$ . En la Ref. [47], siendo conscientes del hecho de que típicamente aparecen modos logarítmicos cuando  $c_-$  o bien  $c_+$  se anulan, los autores destacaron que sería interesante comprobar que las soluciones logarítmicas que exhibe EMG en  $\mu_{\text{crit},2\pm}$  son también soluciones logarítmicas en  $\mu_{\text{crit},1\pm}$ . Esta cuestión y la discrepancia entre la expresión de las cargas centrales serán respondidas en las siguientes secciones de este capítulo.

### 6.3 Ondas exóticas sobre agujeros negros

Para explorar soluciones con modos logarítmicos en un fondo  $\text{AdS}_3$ , consideraremos una generalización de la solución Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) [29] que describe ondas gravitacionales propagándose sobre el fondo de una geometría estacionaria de agujero negro. Esta incluye la métrica de ondas gravitacionales AdS como caso particular. Estudiaremos sistemáticamente todo el comportamiento posible de larga distancia de tales soluciones cerca del borde  $\text{AdS}_3$ , demostrando que no aparecen modos logarítmicos en los puntos  $\mu_{\text{crit},1}$ .

#### 6.3.1 Geometría BTZ deformada

La solución de ondas gravitacionales BTZ se construye a partir de la llamada métrica de agujero negro rotante BTZ extremal (los dos horizontes coalescen) con parámetro de masa  $M$  y parámetro de spin  $J = \mp M\ell$ , esto es

$$ds_{M,\mp\ell M}^2 = -\frac{(r^2 - r_+^2)^2}{\ell^2 r^2} dt^2 + \frac{\ell^2 r^2}{(r^2 - r_+^2)^2} dr^2 + \frac{r^2}{\ell^2} \left( \ell d\varphi \pm \frac{r_+^2}{r^2} dt \right)^2, \quad (6.5)$$

donde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $r_+ = 4GM\ell$  es el horizonte del agujero negro, y donde  $G$ , como es usual, es la constante de Newton. Seguidamente se realiza una deformación sobre esta métrica del tipo<sup>1</sup>

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds_{M,-\ell M}^2 + h(x^+, r)(dx^+)^2, \quad (6.6)$$

donde  $x^\pm = t \pm \ell\varphi$ . La métrica (6.6) está dada por una descomposición del tipo  $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , como las del Capítulo 3, donde ahora la perturbación resulta (con el orden de coordenadas  $(t, \varphi, r)$ )

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h(x^+, r) & \ell h(x^+, r) & 0 \\ \ell h(x^+, r) & \ell^2 h(x^+, r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La métrica (6.5) es solución de EMG para  $\Lambda = -1/\ell^2$ . Asumiendo una onda con perfil de la forma  $h(x^+, r) = f(x^+) F(r)$  la métrica (6.6) será solución de EMG si, además de  $\Lambda = -1/\ell^2$ , se satisface la ecuación diferencial lineal

$$\left( p_1(r) \frac{d}{dr} + p_2(r) \frac{d^2}{dr^2} + p_3(r) \frac{d^3}{dr^3} + p_4(r) \frac{d^4}{dr^4} \right) F(r) = 0, \quad (6.7)$$

<sup>1</sup>De manera similar, podría considerarse una solución BTZ extrema con  $J = +\ell M$  deformada con un añadido del tipo  $h(x^-, r)(dx^-)^2$ .

con coeficientes  $p_i(r)$  dados por

$$\begin{aligned}
p_1(r) &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 - r_+^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{r_+^2 (r^2 - r_+^2)}{\mu \ell r^5} - \frac{3}{2} \frac{r_+^2 (r^2 - r_+^2) (2r^2 - 5r_+^2)}{m^2 \ell^2 r^7}, \\
p_2(r) &= \frac{1}{2} \frac{r^2 - r_+^2}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{r_+^2 (r^2 - r_+^2)}{\mu \ell r^4} + \frac{3}{2} \frac{r_+^2 (r^2 - r_+^2) (2r^2 - 5r_+^2)}{m^2 \ell^2 r^6}, \\
p_3(r) &= -\frac{1}{2} \frac{(r^2 - r_+^2)^2}{\mu \ell r^3} - \frac{(r^2 - r_+^2)^2 (r^2 + 3r_+^2)}{m^2 \ell^2 r^5}, \\
p_4(r) &= -\frac{1}{2} \frac{(r^2 - r_+^2)^3}{m^2 \ell^2 r^4}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Por valores genéricos de los coeficientes, tal ecuación tiene soluciones de la forma

$$F(r) = A (r^2 - r_+^2)^\Delta,$$

donde  $A$  es una constante, que conducen al polinomio indicial

$$\Delta(\Delta - 1) \left[ \Delta^2 - \left( 1 - \frac{m^2 \ell}{2\mu} \right) \Delta + \frac{1}{4} - \frac{m^2 \ell^2}{4} - \frac{m^2 \ell}{4\mu} \right] = 0, \tag{6.9}$$

el cual, en general, tiene cuatro raíces diferentes  $\Delta = \{0, 1, \Delta_-, \Delta_+\}$ , con

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2} - \frac{m^2 \ell}{4\mu} \pm \frac{m^2 \ell}{4\mu} \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{m^2}}. \tag{6.10}$$

Entonces, la solución completa para el perfil de onda  $h(x^+, r)$  resulta

$$h(x^+, r) = D(x^+) + C(x^+) (r^2 - r_+^2) + B(x^+) (r^2 - r_+^2)^{\Delta_+} + A(x^+) (r^2 - r_+^2)^{\Delta_-}, \tag{6.11}$$

donde  $A(x^+), B(x^+), C(x^+), D(x^+)$  son cuatro funciones arbitrarias que dependen solamente de  $x^+$ , esto es,

$$\partial_- A(x^+) = 0, \quad \partial_- B(x^+) = 0, \quad \partial_- C(x^+) = 0, \quad \partial_- D(x^+) = 0.$$

Los términos constantes y cuadráticos en (6.11), correspondientes a las raíces  $\Delta = 0$  y  $\Delta = 1$ , respectivamente, pueden ser removidos mediante difeomorfismos locales [41], i.e. son soluciones que ya están presentes en GR 3D. En cambio, los modos  $\Delta_\pm$  corresponden a modos masivos de EMG y están asociados a los grados de libertad locales de la teoría. La solución (6.11) generaliza las soluciones halladas en [95] en los puntos quirales  $\mu = \mu_{\text{crit}, 2\pm}$ . La geometría (6.6) con (6.10)-(6.11) representa una onda gravitatoria en un agujero negro extremo que *co-rota* (rota solidariamente) con el mismo. La co-rotación se puede inferir de la dependencia funcional de  $f(x^+)$  en  $h(x^+, r)$ ; en efecto, dado que  $x^+ = t + \ell\varphi$  derivando con regla de la cadena puede verse que  $f$  satisface un tipo de ecuación de onda entre el tiempo y una dirección de avance en  $\hat{\varphi}$  dada por

$$\partial^2 f / \partial t^2 - 1/\ell^2 \partial^2 f / \partial \varphi^2 = 0.$$

Asumiendo que  $\Delta_+ > 0$  y  $\Delta_- < 0$ , la geometría incluye una solución asintóticamente  $\text{AdS}_3$  cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = \left( \frac{2r_+^2}{\ell} + 2\ell A(t + \ell\varphi) (r^2 - r_+^2)^{\Delta_-} \right) d\varphi dt + \dots,$$

donde la elipsis representa a los términos diagonales. Este término se mueve en el sentido de las agujas del reloj como el agujero negro. La geometría está enrollada en torno al horizonte<sup>2</sup> y el efecto de la deformación  $h(x^+, r)$  se ve diluido cerca del borde. La geometría

<sup>2</sup>Nótese que con  $r \rightarrow r_+$  los coeficientes (6.8) verifican  $p_i \rightarrow 0$  para  $i = 1, \dots, 4$ .

completa tiene invariantes escalares

$$\text{Tr}(\text{Ric}^n) \equiv R_{\mu_1}^{\mu_2} R_{\mu_2}^{\mu_3} \dots R_{\mu_n}^{\mu_1} = -\frac{6(-2)^{n-1}}{\ell^{2n}},$$

que son los mismos que tiene el espacio  $\text{AdS}_3$ , pese a que no es localmente equivalente a  $\text{AdS}_3$ . De hecho, para  $A(x^+) \neq 0$  o  $B(x^+) \neq 0$ , la geometría no es conforme a la plana.

En conclusión, las ondas propagantes (6.6) pueden verse como excitaciones masivas, totalmente *backreacting*, del background dado por el agujero negro. Para reforzar esta interpretación, puede notarse que una perturbación de la forma  $\phi(t, \varphi, r) = f(x^+)(r^2 - r_+^2)^\Delta$  satisface la ecuación de onda

$$\square(\square - K_\Delta)\phi(t, \varphi, r) = 0, \quad (6.12)$$

donde  $\square$  es el operador de d'Alembert de la geometría deformada completa (6.6), y donde la masa efectiva  $K_\Delta$  es

$$K_\Delta = \frac{4}{\ell^2}\Delta(\Delta + 1),$$

la cual, tomando en cuenta (6.10), resulta en

$$K_{\Delta_\pm} = \frac{3}{\ell^2} + \frac{m^2\ell(m^2\ell - 4\mu + 2\mu^2\ell)}{2\mu^2\ell^2} \pm \frac{(4\mu - m^2\ell)m^2\ell}{2\mu^2\ell^2} \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{m^2}}.$$

Dado que se verifica  $(\square - K_\Delta)\phi = 0$ , se deduce que asimismo se cumple  $(\square^2 - K_\Delta^2)\phi = 0$ .

Para valores genéricos  $K_\Delta \neq 0$ , el espacio de soluciones de la ecuación de onda (6.12) es la suma directa de los kernels  $\text{Ker}(\square - K_\Delta) + \text{Ker}(\square)$ . En los puntos quirales  $\mu = \mu_{\text{crit},2-}$ ,  $K_\Delta$  se anula, dos raíces del polinomio indicial se hacen cero y una nueva solución logarítmica de (6.12) aparece. Esta solución logarítmica está en la diferencia de kernels  $\text{Ker}(\square^2) - \text{Ker}(\square)$ , como es usual en el caso de ecuaciones diferenciales confluentes.

La idea es que cada vez que dos raíces del polinomio indicial sean iguales (i.e. que “confluyan”) aparecerá una solución logarítmica. En el caso anterior esto sucede porque para  $\mu = \mu_{\text{crit},2-}$  se tienen raíces  $\Delta = \{0, 1, (1 + \ell^2 m^2)/2, 0\}$ . La raíz degenerada  $\Delta_+ = 0$  lleva a la anulación de  $K_{\Delta_+}$  y la consecuente emergencia de la solución logarítmica. No obstante,  $\Delta = -1$  también conduce a  $K_\Delta = 0$  pero ello no genera solución logarítmica porque aún se tienen cuatro raíces diferentes para el polinomio indicial.

En lo subsiguiente, se discutirán sistemáticamente los diferentes puntos confluentes de la ecuación de onda para constatar dónde aparecen y qué forma tienen estas soluciones logarítmicas. Para organizar la discusión, se clasificarán los puntos confluentes en términos de su grado de degeneración de las raíces de la Ec. (6.9). Los diferentes casos son

- (a) Las raíces  $\Delta_\pm$  coalescen, es decir que se da  $\Delta_+ = \Delta_-$ .
- (b) Una de las raíces  $\Delta_\pm$  es 0 o 1.
- (c) Los casos límite en los cuales ambos  $\Delta_-$  y  $\Delta_+$  son 0 o bien 1.

El caso (a) ocurre cuando  $m^2 = -4\mu^2$  y nos referiremos a este como el “punto degenerado” o el “punto confluyente”. El caso (b) corresponde al punto quiral  $\mu = \mu_{\text{crit},2\pm}$  y, por ello lo llamaremos como “punto quiral”. El caso (c), que será referido como el “punto confluyente doble”, sucede cuando  $\mu = \mu_{\text{crit},2\pm} = \pm 1/(2\ell)$ . Finalmente, se analizará el punto  $\mu = \mu_{\text{crit},1\pm}$ , para el cual no se observa un comportamiento especial.

### 6.3.2 Límite de las soluciones en TMG

Primeramente se estudia el límite de las soluciones generales en el caso en que EMG tiende a TMG, lo cual corresponde a  $m^2 \rightarrow \infty$ . Bajo este límite, los exponentes se reducen a  $\Delta_+ = (1 + \mu\ell)/2$  y  $\Delta_- \rightarrow -\infty$ , de manera que

$$h(x^+, r) = B(x^+)(r^2 - r_+^2)^{(1+\mu\ell)/2}, \quad (6.13)$$

junto con los modos  $\Delta = 0$  y  $\Delta = 1$  de GR. Estos son una generalización de las llamadas ondas AdS de TMG [33, 41]. Para  $B = \text{const}$ , la solución (6.13) es una deformación estacionaria del agujero negro BTZ y vale la pena mencionar que este hecho no está en contradicción con teoremas tipo Birkhoff, conocidos para TMG [101, 102]. En particular, la existencia de la solución (6.13) es consistente con una conjetura presentada en la Ref. [34], la cual asegura que, en el punto quiral  $\mu\ell = -1$ , todas las soluciones estacionarias de TMG que satisfacen las condiciones de contorno de Brown-Henneaux son Einstein manifolds, véase [103]. De hecho, cuando  $\mu\ell = -1$ , puede verse que la solución es solución de la acción de EH. Para  $\mu\ell < -1$ , la deformación satisface las condiciones de contorno Brown-Henneaux de manera asintótica [35] y por ello representa asintóticamente un espacio AdS<sub>3</sub> no-Einsteiniano. El caso  $\mu = 0$  es especial puesto que la geometría con  $h(x^+, r) = B(x^+)(r^2 - r_+^2)^{1/2}$  resulta ser conforme plana sin ser un espacio de Einstein de modo que corresponde a una solución no trivial de la teoría de gravedad conforme en 3D, que exhibe el típico comportamiento lineal  $h \sim r$  a grandes distancias.

### 6.3.3 Puntos confluentes

Cuando  $m^2 = -4\mu^2$ , las raíces  $\Delta_{\pm}$  coalescen, i.e.

$$\Delta_+ = \Delta_- = \frac{1}{2} + \mu\ell.$$

Dado que estas soluciones coinciden, una nueva solución linealmente independiente al sistema (6.7)-(6.8) debe emerger. Como sería de esperar, esta nueva solución tiene un comportamiento logarítmico; más precisamente

$$h(x^+, r) = B(x^+)(r^2 - r_+^2)^{1/2+\mu\ell} + A(x^+)(r^2 - r_+^2)^{1/2+\mu\ell} \log(r^2 - r_+^2). \quad (6.14)$$

Es necesario remarcar que esta solución no se obtiene haciendo el reemplazo  $m^2 = -4\mu^2$  en la solución (6.11) sino reemplazando esta equivalencia en el set de coeficientes (6.8) y procediendo luego a resolver la ODE resultante. Por esta razón los coeficientes  $A, B$  no se pueden identificar entre dichas soluciones. El mismo comentario es válido, por supuesto, para los casos de las dos secciones siguientes.

Dependiendo si  $\mu\ell < -1/2$  o  $\mu\ell > -1/2$ , la función  $h(x^+, r)$  que controla la deformación de la geometría del agujero negro BTZ diverge en el horizonte del agujero negro  $r = r_+$  o bien en la frontera  $r = \infty$ , respectivamente. En infinito, el comportamiento puede ser entonces regular: la solución correspondiente al modo  $B$  en (6.14) resulta en el caso  $\mu\ell < -1/2$  obedecer la condición de contorno de Brown-Henneaux.

### 6.3.4 Puntos quirales

Para la discusión actual son más relevantes los puntos  $\mu = \mu_{\text{crit}, 2\pm}$ , donde una de las raíces  $\Delta_{\pm}$  del polinomio indicial degenera en 0 o bien en 1 y donde una de las cargas

centrales (6.3) se anula. Existen, otra vez, nuevas soluciones a (6.7)-(6.8) que involucran la aparición de logaritmos. Estas soluciones ya fueron estudiadas en la Ref. [95] y pueden ser de dos tipos.

El primer tipo, surge de considerar  $\mu = \mu_{\text{crit},2+}$ , lo cual lleva a  $c_+ = 0$ . En este punto,  $\Delta_+ = 1$  y la deformación (6.6) resulta

$$h(x^+, r) = B(x^+)(r^2 - r_+^2)^{(1-m^2\ell^2)/2} + A(x^+)(r^2 - r_+^2) \log(r^2 - r_+^2). \quad (6.15)$$

Para  $m^2\ell^2 \geq 1$ , el modo  $B$  de (6.15) respeta las condiciones de contorno de Brown-Henneaux y por ello da una solución que es asintóticamente  $\text{AdS}_3$ . El modo  $A$ , por contraste, no verifica ni las condiciones de Brown-Henneaux fuertes [35] ni las condiciones débiles [32] de espacios asintóticamente  $\text{AdS}_3$ .

El segundo tipo requiere considerar el otro punto quiral  $\mu = \mu_{\text{crit},2-}$ . En este caso,  $\Delta_- = 0$  y, otra vez, un nuevo modo logarítmico aparece. Ahora el perfil de onda  $h(x^+, r)$  adopta la forma<sup>3</sup>

$$h(x^+, r) = B(x^+)(r^2 - r_+^2)^{(1+m^2\ell^2)/2} + A(x^+) \log(r^2 - r_+^2). \quad (6.16)$$

En  $\mu = \mu_{\text{crit},2-}$  se tienen  $c_- = 0$  y  $K_\Delta = 0$ . De hecho, el modo de largo rango, es decir el modo logarítmico en (6.16), se interpreta como debido a la presencia del gravitón no masivo: esta solución logarítmica pertenece a  $\text{Ker}(\square^2) - \text{Ker}(\square)$ .

La observación de que la masa efectiva  $K_\Delta$  de la ecuación de onda (6.12) se anula no debe tomarse como una afirmación de que la solución (6.16) tiene una masa nula. De hecho, justamente este no es el caso: el modo  $A$  en (6.16) verifica las condiciones de contorno de [32] y por ello puede ser pensado como una solución<sup>4</sup> en  $\text{AdS}_3$  con masa no nula. Su masa, de acuerdo al cálculo en [95], está dada por

$$M = \frac{1}{4\pi G\ell} \left(1 + \frac{1}{m^2\ell^2}\right) \int_0^{2\pi\ell} A(\tau) d\tau.$$

Esta masa se obtiene aplicando a EMG el enfoque ADT. Como fuera mostrado en [96], más allá de las peculiaridades de esta teoría, a nivel lineal las ecuaciones de campo llevan a una corriente conservada *on-shell* que tiene la forma

$$J^\mu(\bar{\xi}) = J_E^\mu(\bar{\xi}) + \frac{1}{\mu} J_C^\mu(\bar{\xi}) - \frac{1}{m^2} J_H^\mu(\bar{\xi}), \quad (6.17)$$

la cual está asociada a un vector de Killing  $\bar{\xi}$  de la geometría de fondo  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . Esta fórmula recibe contribuciones de los tensores de Einstein (subíndice  $E$ ) y Cotton (subíndice  $C$ ) así como de los términos “exóticos”  $T_{\mu\nu}$  en (2.8), y se construye como integral de superficie que contiene el campo  $\bar{\xi}$ , además de la perturbación  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}$  según los métodos vistos en el Capítulo 3. La forma explícita de  $J_H^\mu(\bar{\xi})$  puede hallarse en la mencionada Ref. [96].

<sup>3</sup>Se ha probado que soluciones logarítmicas como las de las Ec. (6.15)-(6.16) existen para teorías como TMG, NMG, MMG, y en otras como Zwei Dreibein Gravity (ZDG) [48] cada vez que una de las cargas centrales de la teoría dual  $\text{CFT}_2$  se anula [104].

<sup>4</sup>El modo B, por otra parte, cumple las condiciones de contorno  $\text{AdS}_3$  fuertes de Brown-Henneaux si se verifica que  $m^2\ell^2 \leq -1$ .

### 6.3.5 Puntos confluentes dobles

Ahora, repasaremos los “puntos confluentes dobles”, los cuales corresponden a  $\mu_{\text{crit},2\pm} = \pm 1/(2\ell)$ , donde tres raíces del polinomio indicial (6.9) coinciden:

- En el punto  $\mu = \mu_{\text{crit},2+} = +1/(2\ell)$ , se halla que  $\Delta_+ = \Delta_- = 1$  y  $c_+ = 0$ . El perfil de la onda  $h(x^+, r)$  toma en este caso la forma

$$h(x^+, r) = B(x^+)(r^2 - r_+^2) \log(r^2 - r_+^2) + A(x^+)(r^2 - r_+^2) \log^2(r^2 - r_+^2). \quad (6.18)$$

Este tipo de soluciones  $h \sim \log^2(r)$  también aparece en otras generalizaciones de alto orden de TMG; véase por ejemplo [41].

- En  $\mu = \mu_{\text{crit},2-} = -1/(2\ell)$ , por otra parte, uno halla que  $\Delta_+ = \Delta_- = 0$  y  $c_- = 0$ , y, como en el caso previo, dos nuevos modos logarítmicos aparecen; que son

$$h(x^+, r) = B(x^+) \log(r^2 - r_+^2) + A(x^+) \log^2(r^2 - r_+^2), \quad (6.19)$$

los cuales, para  $A = 0$ , resulta que son asintóticamente  $\text{AdS}_3$  en el sentido de [32].

### 6.3.6 Existencia de otros puntos críticos

Ahora se analizarán los puntos  $\mu_{\text{crit},1\pm} = \pm m^2\ell$ , donde las cargas (6.3) obtenidas en [47] también se anulan. En estos puntos, no parece ocurrir ningún comportamiento del tipo logarítmico cerca del borde del  $\text{AdS}_3$ . Consistentemente,  $K_\Delta$  no se anula ahí. Esto responde la pregunta que se planteó en [47] sobre la existencia de este tipo de soluciones logarítmicas en  $\mu = \mu_{\text{crit},1\pm}$ .

Actualmente, es fácil de ver desde (6.10) que en  $\mu = \mu_{\text{crit},1+}$  se tiene  $\Delta_\pm = (1 \pm \sqrt{1 + 4m^2\ell^2})/4$  mientras que en  $\mu = \mu_{\text{crit},1-}$  se tiene  $\Delta_\pm = (3 \mp \sqrt{1 + 4m^2\ell^2})/4$ , de modo que la solución toma la forma de una ley de potencias

$$h(x^+, r) = B(x^+)(r^2 - r_+^2)^{\Delta_+} + A(x^+)(r^2 - r_+^2)^{\Delta_-},$$

sin comportamiento logarítmico. Esto podría parecer desconcertante debido a que, como se dijo, en otras deformaciones masivas de gravedad tridimensional que han sido exploradas, cada vez que una carga central de la teoría conforme de borde se anula, se tiene la aparición de modos de comportamiento logarítmico. Esto ocurre, por ejemplo, en TMG, NMG, MMG y ZDG. Este hecho clama por un retorno a la cuestión de la discrepancia entre (6.3) y las cargas centrales en [95], la última siendo no nula en  $\mu = \mu_{\text{crit},1\pm}$ .

## 6.4 Discusión

Una primera observación para entender la razón de la discrepancia de las cargas centrales calculadas en [47] y aquellas calculadas en [95] es que, cuando se toma el límite  $\mu \rightarrow \infty$  en (6.4) y, luego de ello, el límite  $m \rightarrow \infty$ , se obtiene

$$c_+ = -c_- = \frac{3\ell}{2G},$$

lo cual está de acuerdo con las cargas centrales de la llamada *Gravedad Exótica* (Exotic Gravity, EG) [105]. En contraste, si uno considera el resultado de [95] y toma el límite  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$  del mismo uno obtiene

$$c_+ = c_- = \frac{3\ell}{2G},$$

lo cual es la carga central de Brown-Henneaux para la acción de EH [35]. Esto significa que la discrepancia entre las cargas puede ser rastreada hacia atrás al punto de la diferencia entre las teorías que se están considerando: los trabajos [47] y [95] tratan sobre teorías diferentes; mientras que [47] se ocupa de un cálculo del tipo Chern-Simons en la extensión de alto orden de la teoría EG [105], el trabajo [95] trata en cambio con un cálculo del tipo ADT<sup>5</sup> de las extensiones de alto orden de GR. Entonces, no debería sorprender que el cómputo de cargas no dé los mismos resultados.

Para entender un poco mejor el asunto puede recordarse cómo se da esto en el caso de la teoría no deformada  $\mu = \infty$ ,  $m = \infty$ . Mientras el lagrangiano de GR en términos de la 1-forma vielbein  $e^a = e^a_\mu dx^\mu$  y la 1-forma dada por la conexión de spin  $\omega^{ab} = \omega_c^{abc} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu$  resulta

$$L_{\text{GR}} = \epsilon_{abc}(R^{ab} \wedge e^c + e^a \wedge e^b \wedge e^c),$$

donde  $R^{ab}$  es la 2-forma de curvatura ( $\ell = 1$ ), el lagrangiano de EG resulta

$$L_{\text{EG}} = \epsilon_{abc}(\omega^{ab} \wedge d\omega^c + \frac{1}{3}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c) + e_a T^a,$$

donde  $T^a$  es la 2-forma de torsión (véase también [106]). Ambas teorías conducen a las mismas ecuaciones de movimiento (i.e. las ecuaciones de CEH) pero llevan a cargas diferentes. La interpretación de los autores es que lo mismo le ocurre aquí a las deformaciones masivas.

Entonces, la teoría (EMG) definida por las ecuaciones (2.8)-(2.9) en el punto quiral  $\mu = \mu_{\text{crit},2-}$  se puede pensar como el dual gravitatorio a una  $\text{CFT}_2$  con las cargas centrales [95]

$$c_- = 0, \quad c_+ = \frac{3\ell}{G} \left(1 - \frac{1}{m^2 \ell^2}\right).$$

En este punto, las soluciones de la teoría exhiben el comportamiento característico  $h \sim \log(r)$  de la gravedad logarítmica *Log-gravity* [34]. Esto sugiere que, en  $\mu = \mu_{\text{crit},2-}$ , y si además se consideran unas condiciones de contorno del tipo  $\text{AdS}_3$  pero suficientemente débiles, la teoría dual  $\text{CFT}_2$  resulta ser una  $\text{CFT}_2$  logarítmica [107]; esto es, una  $\text{CFT}_2$  no unitaria cuyos operadores de Virasoro  $L_0$  y  $\bar{L}_0$  no son diagonalizables sino que forman un bloque de Jordan. Esto significa que en la  $\text{CFT}_2$  existe una mezcla entre operadores primarios y otro tipo de operadores, llamados sus “socios logarítmicos”. En particular, el tensor de energía puede tener un socio logarítmico con el cual comparte una función de 2 puntos no nula. Esta mezcla de tensor de energía y su socio es controlada por una nueva anomalía,  $b$ , la cual aparece en el polo  $\sim 1/z^4$  de la expansión del operador en términos de

<sup>5</sup>En la Ref. [47], se afirma que la principal razón para el desacuerdo con [95] es que en este último el método ADT se aplica a la formulación métrica mientras el tensor de energía-momento no constituye el límite linealizado de ningún tensor de energía consistente con las ecuaciones de la teoría completa (EMG). De cualquier manera, dado que las ecuaciones linealizadas de EMG son de divergencia nula solamente on-shell, sus contracciones con un vector de Killing correspondiente a la métrica del fondo llevan a una corriente conservada del tipo ADT que se encuentra bien definida.

productos. En la Ref. [108] fue brindado un método sencillo para calcular esta anomalía para el caso de una  $\text{CFT}_2$  logarítmica con un dual gravitatorio masivo  $\text{AdS}_3$ . Aplicando este método al caso de EMG, se ha encontrado

$$b = -\frac{3\ell}{G} \left( 1 + \frac{1}{m^2\ell^2} \right). \quad (6.20)$$

Como comprobación de consistencia, se observa que en el límite  $m \rightarrow \infty$ ,  $\mu_{\text{crit},2-}$  tiende a  $-1/\ell$ , el cual es el punto quiral de TMG. En ese límite  $b$  tiende a  $-c_+ = -3\ell/G$ , lo cual está en perfecto acuerdo con el coeficiente de la anomalía de la gravedad logarítmica de TMG [34, 108].



## Capítulo 7

# Teoría gravitatoria modificada basada en la Q-curvatura

### 7.1 Motivación

Los efectos cuánticos inducen modificaciones a la acción gravitatoria que adoptan la forma de términos de alto orden en la curvatura. Esto se halla más o menos bien comprendido en el contexto de teoría de cuerdas, donde las correcciones ultravioletas a la acción de bajas energías pueden ser calculadas de una manera sistemática [109]. En líneas generales puede decirse que las correcciones de alto orden hacen que la teoría de gravedad sea renormalizable pero con el costo de introducir inestabilidades del tipo “fantasma” (*ghost*) y otras patologías [110–112]. Esto implica que, cualquiera sea la corrección a GR (a la acción de CEH) que se proponga, la misma debe satisfacer un juego muy especial de restricciones para que pueda ser una teoría físicamente aceptable [19]. Uno podría preguntarse si tales condiciones son suficientemente restrictivas para definir la teoría de un modo unívoco o, por el contrario, si existe más de una forma de modificar la relatividad general de una manera consistente. De hecho, se conocen acciones con términos de alto orden en la curvatura con propiedades interesantes las cuales, bajo ciertas condiciones, no presentan fantasmas.

Uno de tales ejemplos es el de la llamada Gravedad Crítica (CG, de *Critical Gravity*), véase la discusión en la Ref. [113] y en sus propias referencias, la cual se define suplementando a la acción de Einstein-Hilbert sobre el espacio AdS con una combinación lineal, que resulta invariante conforme, de términos del tipo  $R^2$  multiplicada por una constante de acoplamiento con un valor específico [114]. Ya en la Sección 2.2 se mencionó que la teoría de chiral gravity en  $n = 3$  dimensiones<sup>1</sup> se puede asociar genéricamente con una gravedad crítica. La forma que adopta la antedicha combinación lineal corresponde al cuadrado del tensor de Weyl, i.e. a

$$L^2 \int d^4x \sqrt{-g} C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu},$$

donde la constante de acoplamiento  $L^2$ , que tiene dimensiones de masa<sup>-2</sup>, se ajusta en términos de la constante cosmológica  $\Lambda$ . En dimensión  $n = 4$  la teoría incluye a GR como un subsector particular (lo cual quiere decir que cualquier solución de ella lo es también de CG), está libre del modo de spin-0 masivo que típicamente engendra una teoría cuadrática

---

<sup>1</sup>En este capítulo se prefiere utilizar  $n$  para la dimensionalidad del espaciotiempo en lugar de  $D$ , como venía siendo norma hasta el momento, en aras de la facilidad en la lectura de las ecuaciones (conveniencia notacional).

y adquiere un modo de spin-2 no masivo además del gravitón de GR. Es decir, que no hay partículas masivas. La existencia de un segundo modo no masivo de spin-2 produce modos con un decaimiento lento que basta para que las soluciones de agujero negro de la teoría presenten una energía gravitatoria nula.

Otras teorías de gravedad crítica pueden también definirse en dimensiones mayores  $n > 4$  [115]. Esto implica hacer una continuación dimensional sobre el invariante conforme  $4D$  reemplazando a la acción con  $L^2 \int d^n x \sqrt{-g} C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu}$  y eligiendo la constante de acoplamiento de tal forma que el vacío maximalmente simétrico de la teoría sea único. Al igual que en  $n = 4$  dimensiones, CG en  $n > 4$  dimensiones no tiene modos masivos. El modo conforme de spin-0 se desacopla y el modo extra de spin-2 se vuelve no masivo. De cualquier manera, en contraste a  $n = 4$ , en dimensiones mayores CG ya no admite genéricamente los espacios de Einstein como solución<sup>2</sup> debido a la presencia del escalar de Kretschmann  $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$  en la acción, el cual en  $n > 4$  contribuye de manera dinámica. Esto no sucede en  $n = 4$  en virtud del teorema de Chern-Weil-Gauss-Bonnet [15]. Este último hecho representa la diferencia de mayor relieve entre CG en  $n = 4$  y en  $n > 4$ .

Otra teoría de alto orden que exhibe características especiales es la teoría de Lovelock [16, 17], la cual se define extendiendo dimensionalmente invariantes topológicos a dimensiones mayores. La teoría resultante coincide con GR solamente en dimensión  $n \leq 4$ , mientras que para  $n > 5$  presenta correcciones de alto orden en la curvatura hasta orden  $R^k$ , con  $k < n/2$ . Pese al hecho de involucrar contracciones de más de un tensor de Riemann en el lagrangiano, la acción de Lovelock conduce a ecuaciones de segundo orden. De hecho, las ecuaciones de movimiento de la teoría de Lovelock constituyen el tensor más general de rango dos simétrico y covariantemente conservado en dimensión  $n$  que es de segundo orden en la métrica y con torsión nula. Para  $n = 4$  este último requerimiento se reduce al tensor de Einstein, mientras en  $n \geq 5$  existe una mayor libertad para producir otras estructuras tensoriales con esas características. No obstante, las ecuaciones de Lovelock contienen potencias de las derivadas segundas de la métrica, cosa que no ocurre en GR donde el grado de las ecuaciones (la potencia de la derivada de mayor orden) es uno. Esto hace que la estructura dinámica de la teoría exhiba características especiales que dan origen, a su vez, a fenómenos físicos peculiares [18].

En lo que sigue, se investigará una clase de teorías de alto orden que son diferentes de CG y de las teorías de Lovelock pero que, sin embargo, comparte algunas características con ambas. De hecho, la familia de teorías que se explorará puede pensarse como un híbrido entre los modelos de CG y Lovelock, en el sentido de que están definidas por la extensión de invariantes conformes en contraste a la extensión de invariantes topológicos. En dimensión 4 estas teorías incluyen gravedad conforme y CG como casos particulares. En dimensión mayor a 4, por contraste, ellas no coinciden con la generalización  $n$ -dimensional de la Ref. [115] y pueden por otro lado ser consideradas como una manera diferente de extender la CG de la Ref. [114] a dimensión  $n$  arbitraria. Estas incluyen otras teorías de mayores dimensiones recientemente consideradas en la literatura especializada. En particular, para  $n = 6$  incluyen las teorías cúbicas estudiadas en la Ref. [116].

La teoría que se propone estudiar a continuación presenta otras características que la diferencian de las dos mencionadas previamente. Modifica GR incluso para el caso  $n \leq 4$ ,

<sup>2</sup>El admitir espacios de Einstein como solución es una generalidad “saludable” para cualquier teoría; muchas situaciones gravitatorias que se espera ocurran en la naturaleza pueden modelarse al menos en primer orden por un espacio de Einstein, de manera que es esperable que una teoría gravitatoria los contenga como solución particular.

lo cual la separa de la teoría de Lovelock, y, además, admite genéricamente espacios de Einstein como solución, cosa contraria a los casos  $n > 4$  de CG en la Ref. [115]. El precio a pagar (y siempre hay una contrapartida, un daño colateral) es que las excitaciones masivas de spin-0 respecto de  $\text{AdS}_n$  no se desacoplan y, por ello, deben ser atacadas explícitamente mediante otros medios. De cualquier manera, existe una elección de la constante de acoplamiento que torna no masivo al modo extra de spin-2. Además de los espacios de Einstein, los cuales persisten como solución luego de la renormalización de la constante cosmológica, la teoría también admite como soluciones espacios que no son espacios de Einstein, como se verá oportunamente.

El bloque fundamental para construir la acción de la teoría será la llamada  $Q$ -curvatura, la cual es una noción importante de geometría conforme [117, 118]. Introducida originalmente por T.P. Branson en la Ref. [20], la  $Q$ -curvatura es una cantidad escalar local que cumple un rol destacado en campos tan diversos como geometría espectral, geometría conforme, topología diferencial y teoría de ecuaciones diferenciales de alto orden, entre otros. Recientemente, la  $Q$ -curvatura ha sido estudiada también en el contexto de la física teórica. En particular, para estudiar anomalías en QFT [119], teorías de campos con derivadas de alto orden [120] y otros problemas relacionados.

En la Sección 7.2 se hará una revisión de la definición y las propiedades más relevantes de la  $Q$ -curvatura junto con sus generalizaciones de mayores dimensiones y mayores órdenes en derivadas. En la Sección 7.3 se discutirá la conexión de la misma con los invariantes conformes en un número par de dimensiones. Esto nos proveerá de los ingredientes necesarios para construir, en la Sección 7.4, la acción gravitatoria de la teoría. En la Sección 7.5 serán exploradas las soluciones más sencillas de la nueva teoría; los vacíos maximalmente simétricos. Serán derivadas, asimismo, las condiciones para tener un único de tales vacíos y para que las excitaciones en torno al mismo resulten de masa nula. En las secciones 7.6 se presentan análisis sobre soluciones de agujero negro, con sus cargas asociadas y propiedades termodinámicas, soluciones de ondas gravitacionales y espacios no Einsteinianos, donde se proveerán además ejemplos explícitos en el caso de dimensión  $n = 5$ . Estos últimos ejemplos incluyen agujeros negros, que son producto de espacios esféricos y sus deformaciones squashed y soluciones  $\text{AdS}_2 \times M$ . Finalmente, en la Sección 7.7 se discutirá sobre otras acciones de alto orden asociadas a la  $Q$ -curvatura. Se establecerá la relación entre estas teorías y otros modelos como NMG, CG y los contratérminos que aparecen en el contexto de la renormalización holográfica.

## 7.2 $Q$ -curvatura

Para introducir la noción de la  $Q$ -curvatura y motivar su definición formal, empezaremos revisitando propiedades de los términos de alto orden en la curvatura ante transformaciones conformes. Dado el reescalo de Weyl de una métrica  $n$ -dimensional

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\varphi} g_{\mu\nu}$$

se considera un operador diferencial lineal  $P_{m,n}$  con  $m \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  que transforma covariantemente según

$$\tilde{P}_{m,n}(f) = e^{-\frac{n+m}{2}\varphi} P_{m,n}(e^{\frac{n-m}{2}\varphi} f),$$

con  $P_{0,n} := 1$ . Aquí,  $f$  representa una función diferenciable arbitraria. En otras palabras,  $\tilde{P}_{m,n}$  es un operador diferencial lineal de  $m$ -ésimo-orden y bi-grado conforme  $(\frac{n-m}{2}, \frac{n+m}{2})$ .

Este operador  $P_{m,n}$  tiene la forma

$$P_{m,n} = \Delta_{m,n} + \frac{n-m}{2}Q_{m,n}, \quad \Delta_{m,n} = \square^{\frac{m}{2}} + \dots \quad (7.1)$$

donde  $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$  es el operador de Laplace-Beltrami. La elipsis es para los términos que no tienen término constante, i.e.  $\Delta_{m,n}$  es un operador diferencial lineal que satisface  $\Delta_{m,n}1 = 0$ . A su vez,  $Q_{m,n}$  es una curvatura escalar que transforma de acuerdo con<sup>3</sup>

$$\tilde{Q}_{m,n} = e^{-\frac{n+m}{2}\varphi} \left( Q_{m,n} + \frac{2}{n-m}\Delta_{m,n} \right) e^{\frac{n-m}{2}\varphi}, \quad (7.2)$$

y es lo que se llama la  $Q$ -curvatura de orden  $m$ -ésimo  $n$ -dimensional, que satisface

$$(n-m)Q_{m,n} = 2P_{m,n}(1).$$

Las leyes de transformación anteriores definen unívocamente los operadores lineales  $P_{m,n}$  y los escalares  $Q_{m,n}$ . El ejemplo más sencillo de la jerarquía (7.1)-(7.2) (i.e.  $m = 2$ ) es

$$\begin{cases} Q_{2,n} = -\frac{1}{2(n-1)}R \\ P_{2,n} = \square + \frac{n-2}{2}Q_{2,n} \\ \Delta_{2,n} = \square \end{cases}$$

Es decir que  $Q_{2,n}$  corresponde a la curvatura gaussiana y  $P_{2,n}$  al operador de Yamabe

$$P_{2,n} = \square - \frac{n-2}{4(n-1)}R.$$

La  $Q$ -curvatura de Branson corresponde al caso  $m = 4$ , el cual toma la forma

$$Q_{4,n} = -\frac{1}{2(n-1)}\square R - \frac{2}{(n-2)^2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{n^2(n-4) + 16(n-1)}{8(n-1)^2(n-2)^2}R^2,$$

donde

$$P_{4,n} = \Delta_{4,n} + \frac{n-4}{2}Q_{4,n}$$

es el llamado operador de Paneitz; véase la (7.5) más abajo. Este operador  $P_{4,n}$  fue definido originalmente por Fradkin y Tseytlin en la Ref. [21] e independientemente por Riegert en Ref. [22].

Para grado  $m = 6$  se tiene

$$\begin{aligned} Q_{6,n} = & -\frac{1}{32(n-4)(n-2)^2(n-1)^3} \left( (n^5 - 8n^4 + 64n^3 - 240n^2 + 1008n - 960) R^3 + \right. \\ & 512(n-1)^3 R^{\mu\nu}\square R_{\mu\nu} - 4(n-1)(n^4 - 14n^3 + 100n^2 - 168n + 96) R\square R - \\ & \left. 64(n-1)^2(n^2 - 4n + 28) RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 1024(n-1)^3 R_{\alpha\beta}R_{\mu\nu}R^{\alpha\mu\beta\nu} \right). \quad (7.3) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>El caso  $n = m$  requiere una regla de transformación especial, véase capítulo 1 de [121].

En  $n = 6$  y a menos de términos de borde, (7.3) coincide con la combinación particular de invariantes conformes propuesta en [116], la cual tiene la propiedad de ser la única combinación con invarianza conforme en 6 dimensiones que admite espacios genéricos del tipo Einstein como solución. Esto nos provee con un criterio para seleccionar nuestra teoría y define el lagrangiano de orden  $m$ , en dimensión  $n$ : Consideraremos lagrangianos que consisten de invariantes conformes dimensionalmente extendidos y que preservan los espacios de Einstein como solución. La generalización del operador de Paneitz a  $n = 6$  ha sido discutida, por ejemplo, en la Ref. [122].

La jerarquía  $Q_{m,n}$  continúa *ad infinitum*, pero las expresiones de vuelven muy engorrosas para  $m > 6$ . El caso  $m = 8$ , por ejemplo, es un operador de dimensión 8 que involucra operadores cuárticos como  $R^4$ ,  $R^2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ,  $(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})^2$ ,  $RR_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} R^{\mu\nu}$ , ...  $R_{\mu\nu} \square^2 R^{\mu\nu}$ ,  $R \square^2 R$ , cuya forma explícita puede verse en [23]. Escrito en términos del tensor de Schouten

$$P_{\mu\nu} = \frac{1}{(n-2)m} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2n-2} R g_{\mu\nu} \right)$$

y del tensor de Weyl

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} + g_{\alpha\nu} P_{\mu\beta} - g_{\alpha\mu} P_{\nu\beta} + g_{\beta\mu} P_{\nu\alpha} - g_{\beta\nu} P_{\mu\alpha},$$

la expresión de  $Q_{8,n}$  se simplifica notablemente, pero el número de términos crece a más de cuarenta.

### 7.3 Invariantes conformes

Ahora se pasará a comentar sobre la conexión entre la  $Q$ -curvatura y los invariantes conformes. Comenzaremos por visitar ciertas propiedades bien conocidas en variedades 2-dimensionales. Consideremos para ello una superficie de Riemann cerrada con signatura euclídea  $(M_2, g)$ . De acuerdo con el teorema de Gauss-Bonnet, su característica de Euler,  $\chi(M_2)$ , se calcula mediante la integral

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{2\pi} \int_{M_2} d^2x \sqrt{g} Q_{2,2} = \frac{1}{4\pi} \int_{M_2} d^2x \sqrt{g} R = \chi(M_2) \quad (7.4)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica euclídea  $g_{\mu\nu}$ , y  $R$  es la curvatura escalar de Ricci (i.e. la curvatura gaussiana). Esto es un invariante topológico. En dimensión 2, todas las métricas son conformalmente localmente equivalentes y también se tiene la siguiente propiedad: si se reescala la métrica de acuerdo con  $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\varphi} g_{\mu\nu}$  el escalar de Ricci transforma como  $R \rightarrow e^{-2\varphi} (R - 2\Delta_{2,2}\varphi)$  mientras el operador de Laplace-Beltrami transforma simplemente como  $\Delta_{2,2} \rightarrow e^{-2\varphi} \Delta_{2,2}$ . Estas transformaciones son importantes para entender en qué sentido la  $Q$ -curvatura de Branson (para  $n = 4$  dimensiones) es la generalización natural de la curvatura de Gauss. Para motivar la definición de la  $Q$ -curvatura [20, 123], se puede comenzar escribiendo explícitamente el operador  $\Delta_{4,4}$  asociado al operador de Paneitz [124]. Este resulta

$$\Delta_{4,4} = (\square)^2 + 2G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu + \frac{1}{3} (\nabla^\mu R_{\mu\nu}) \nabla^\nu + \frac{1}{3} R \square, \quad (7.5)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein. Este es un operador diferencial lineal de cuarto orden y 4-dimensional que bajo el reescalo de la métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\varphi} g_{\mu\nu}$  transforma como  $\Delta_{4,4} \rightarrow$

$e^{-4\varphi}\Delta_{4,4}$ . De ello, la definición de la  $Q$ -curvatura es natural: Es el invariante de curvatura de cuarto orden, 4-dimensional que, poseyendo la misma dimensión de escalamiento que  $\Delta_{4,4}$ , transforma simplemente como  $Q_{4,4} \rightarrow e^{-4\varphi}(\Delta_{4,4}\varphi + Q_{4,4})$ . Esta tiene la forma

$$Q_{4,4} = -\frac{1}{6}\square R - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{6}R^2.$$

Para reforzar la analogía con lo que significa en la curvatura gaussiana  $R \propto Q_{2,2}$  en dimensión  $n = 2$ , mencionemos que de la misma forma a como  $Q_{2,2}$  brinda la característica de Euler en 2 dimensiones,  $Q_{4,4}$  brinda la característica de Euler  $\chi(M_4)$  de una variedad riemanniana 4-dimensional  $(M_4, g)$  dentro de una clase conforme particular. Más precisamente,

$$\mathcal{J} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} d^4x \sqrt{g} Q_{4,4} + \frac{1}{32\pi^2} \int_{M_4} d^4x \sqrt{g} C_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\mu\nu\alpha\beta} = \chi(M_4) \quad (7.6)$$

donde  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$  es el tensor de Weyl. Nótese que ambos términos en el miembro central son invariantes conformes. Entonces, la  $Q$ -curvatura calcula un invariante topológico dentro de una dada clase conforme<sup>4</sup>. En dimensión 2, por supuesto, existe solamente una única clase conforme y entonces (7.6) resulta ser una generalización natural de (7.4).

Branson también proveyó [20] una definición de la  $Q$ -curvatura en dimensión  $n > 3$  arbitraria. Para  $n \neq 4$ , su definición está dada en términos de sus reglas de transformación bajo reescalos de Weyl y no por su significado topológico. Como se mostró anteriormente, está dada por

$$Q_{4,n} = A_n \square R + B_n R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + C_n R^2, \quad (7.8)$$

con

$$A_n = -\frac{1}{2(n-1)}, \quad B_n = -\frac{2}{(n-2)^2}, \quad C_n = \frac{n^2(n-4) + 16(n-1)}{8(n-1)^2(n-2)^2}.$$

Esta es la  $Q$ -curvatura correspondiente al segundo orden de la jerarquía  $Q_{m,n}$  que se ha discutido en la sección previa. De destacarse que todas las integrales  $\int d^n x \sqrt{-g} Q_{n,n}$  son invariantes conformes. Los escalares  $Q_{m,n}$  constituirán la densidad lagrangiana de la teoría que nos proponemos explorar.

## 7.4 Acción de la teoría

La acción gravitatoria que consideraremos está definida por la suma de invariantes conformes dimensionalmente continuados. Es decir, por algo así como

$$\mathcal{J} = \int d^n x \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\infty} L^{2k-2} b_k P_{2k,n}(1) \quad (7.9)$$

donde

$$P_{2k,n}(1) = \binom{n}{2-k} Q_{2k,n}, \quad P_{0,n} = 1 = \binom{n}{2} Q_{0,n}, \quad (7.10)$$

<sup>4</sup>Juntando ambas integrales puede verse que

$$\mathcal{J} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{4} \mathcal{E}_4 - \frac{1}{6} \square R \right] = \chi(M_4) \quad (7.7)$$

donde  $\mathcal{E}_4$  es el invariante de Gauss-Bonnet. La  $Q$ -curvatura y la contracción del tensor de Weyl permiten entonces reescribir al invariante  $\mathcal{E}_4$ . En la Sección 7.7 se volverá a esta escritura.

con  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Ahora se considerará una variedad pseudo-Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M_n, g)$  con signatura Lorentziana y con la convención  $(- + \dots +)$ . La constante  $L$  tiene dimensión de masa<sup>-1</sup>. Esto determina la escala de longitud  $L$  a la cual las correcciones ultravioletas debidas a los términos de alto orden en la curvatura  $Q_{m>2,n}$  comienzan a contribuir de manera significativa. Las constantes de acoplamiento adimensionales  $b_k$  se normalizan usualmente de manera que  $b_0 = -\Lambda L^2/(8\pi G)$  y  $b_1 = -(n-1)/(4\pi G(n-2))$ , donde  $G$  es la constante de Newton  $n$ -dimensional. Se adopta la convención de que  $b_2 = -1/(4\pi G(n-4)^2)$ . De esta forma resulta

$$\mathcal{J} = \frac{1}{16\pi G} \int_{M_n} d^n x \sqrt{-g} \left[ R - 2\Lambda + \frac{4L^2}{(n-2)^2(n-4)} \left( R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{16(n-1)^2} R^2 \right) + \dots \right], \quad (7.11)$$

donde la elipsis refiere a términos de derivadas o curvatura de orden superior.

Por supuesto para  $b_{k>1} = 0$  la acción (7.9) se reduce a la acción de CEH. Otras elecciones particulares son también interesantes: el caso  $b_k = \delta_{2,k}$  para  $n = 4$  corresponde a conformal gravity en  $n = 4$  dimensiones. El caso especial  $b_0 = -\Lambda L^2/(8\pi G)$ ,  $b_1 = -3/(8\pi G)$ ,  $b_2 = -L^2/(4\pi G(n-4))$  con  $L^2 = 3/(2\Lambda)$  en el límite  $n \rightarrow 4$  se reduce a la teoría CG propuesta en [114]; véase también [125]. El caso  $b_k = \delta_{3,k}$  para  $n = 6$  corresponde a la teoría cúbica definida en [116], cuya acción está dada por la combinación lineal de invariantes conformes en 6 dimensiones que admite espacios de Einstein como solución. En general, la acción (7.9) con  $b_k = \delta_{n/2,k}$  define una teoría con invarianza conforme, clásicamente.

La teoría descrita por (7.9) con  $b_k = \delta_{2,k}$  en dimensión  $n$  arbitraria es también especial: Definida en una variedad cerrada  $n$ -dimensional euclidea  $(M_n, g)$ , se corresponde al problema variacional de minimizar la  $Q$ -curvatura de Branson sobre  $M_n$ . Para  $n > 4$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas de esa acción,

$$E_{\mu\nu} \equiv \frac{\delta \mathcal{J}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0,$$

tienen traza igual a  $Q_{4,n}$ . Entonces, considerando  $b_0 \neq 0$  esto conduce a ecuaciones de campo cuyas soluciones resuelven el problema de uniformización  $Q_{4,n} = \text{const}$  sobre  $M_n$ . Para  $b_k = \delta_{2,k}$  en dimensión  $n > 4$ , el tensor  $E_{\mu\nu}$  obedece las siguientes tres propiedades:

$$E := g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = Q_{4,n}, \quad E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}, \quad \text{y} \quad \nabla^\mu E_{\mu\nu} = 0.$$

Es decir que es un tensor simétrico de rango 2 conservado covariantemente, cuya traza es la  $Q$ -curvatura.

Estas propiedades son reminiscentes de las propiedades que Lin y Yuan requirieron para definir su tensor  $J$  en la Ref. [126], i.e. un tensor simétrico de rango 2 canónicamente asociado a la  $Q$ -curvatura. De cualquier manera, la divergencia del tensor  $J$  no es nula sino que resulta ser proporcional al gradiente de  $Q$ . Más precisamente, el tensor de Lin-Yuan  $J$  verifica:

$$J := g^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = Q_{4,n} \quad J_{\mu\nu} = J_{\nu\mu}$$

y

$$\nabla^\mu J_{\mu\nu} = (1/4) \nabla_\nu Q_{4,n}.$$

La motivación para definir tal tensor es la que sigue: Si uno persevera con la idea de que la  $Q$ -curvatura es el análogo de cuarto orden de la curvatura gaussiana  $R$ , entonces una pregunta natural que surge es cuál es el análogo del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y de sus nociones asociadas como son las de *Ricci-flatness*, espacios de Einstein, etc. Para responder este interrogante, pueden recordarse las propiedades básicas de  $R$  y  $R_{\mu\nu}$ , es decir:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R, \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}, \quad \text{y} \quad \nabla^\mu R_{\mu\nu} = (1/2)\nabla_\nu R.$$

Entonces la analogía se hace evidente. En la misma forma en la cual la  $Q$ -curvatura puede ser considerada como la generalización de cuarto orden de  $R$ , el tensor  $J_{\mu\nu}$  resulta ser la generalización del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Desde aquí, definiciones como son las de  $J$ -flatness,  $J$ -Einstein, etc. se desprenden naturalmente. Siguiendo las mismas líneas, nuestro tensor  $E_{\mu\nu}$  debería ser considerado como la generalización natural de cuarto orden del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , y entonces es natural considerarlo como la consumación de nuestras ecuaciones gravitatorias. La relación precisa entre nuestro tensor  $E_{\mu\nu}$  y el tensor  $J_{\mu\nu}$  de Lin-Yuan es

$$E_{\mu\nu} = \frac{4}{(4-n)} \left( J_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} J \right), \quad J_{\mu\nu} = \frac{(4-n)}{4} E_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} E$$

con  $J = E = Q_{4,n}$ . En suma, la acción (7.9) provee una definición del problema variacional de Einstein-Hilbert para el tensor de Lin-Yuan  $J$ , i.e. da una definición basada en una acción funcional para el tensor  $J_{\mu\nu}$  (para  $n > 4$ ).

La clasificación de acciones de alto orden conformalmente invariantes y conformalmente covariantes es un problema interesante al cual diferentes autores han aportado. Algunos resultados interesantes están dispersos en la literatura. Por ejemplo, lagrangianos de seis derivadas con propiedades conformes interesantes han sido estudiados en [127, 128]. En [129] ha sido presentado un método puramente algebraico para clasificar densidades escalares localmente invariantes Weyl en dimensión 8. Teorías de gravedad de alto orden con invarianza conforme han sido discutidas también en [130].

## 7.5 Vacíos de la teoría

Se volverá ahora a la interpretación de la acción (7.9) como definiendo una teoría de gravedad. Para ser concretos, nos enfocaremos en el caso que incluye términos de alto orden en la curvatura hasta el orden cuadrático  $Q_{m \leq 4, n}$ . O sea que se trunca la acción de la (7.11) de manera que ahora la misma está dada por

$$\mathcal{J} = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x \sqrt{-g} \left( R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) \quad (7.12)$$

con

$$\alpha = -L^2 \frac{(n^3 - 4n^2 + 16n - 16)}{4(n-1)^2(n-2)^2(n-4)}, \quad \beta = L^2 \frac{4}{(n-2)^2(n-4)}.$$

Esta teoría admite soluciones de curvatura constante,

$$R_{\mu\alpha\nu\beta} = -\frac{1}{\ell^2} (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu})$$

las cuales son espacios maximalmente simétricos que obedecen las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} = -\frac{(n-1)}{\ell^2} g_{\mu\nu} \quad (7.13)$$



con un radio de curvatura  $\ell$  dado por

$$\Lambda\ell^4 + \frac{(n-1)(n-2)\ell^2}{2} + \frac{(n+2)(n-2)L^2}{8} = 0. \quad (7.14)$$

Esta ecuación lleva, para  $n > 4$ , a dos valores para  $\ell^2$ . Genéricamente, las teorías con  $Q_{2k,n}$  contienen  $k$  vacíos maximalmente simétricos con diferentes radios de curvatura. Para elecciones especiales de las constantes de acoplamiento  $b_k$ , no obstante, algunos de esos vacíos degeneran. Por ejemplo, la condición para que (7.14) implique un vacío único resulta

$$L^2 = -2\ell^2 \frac{(n-1)}{(n+2)}.$$

En este caso, la teoría tiene una única solución maximalmente simétrica con una constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{\text{eff}} = -(n-2)(n-1)/(4\ell^2)$ . La condición para que este vacío único sea  $\text{AdS}_n$  es  $\ell^2 > 0$ , i.e.  $L^2 < 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ . Para un valor arbitrario  $\ell^2/L^2$ , los grados de libertad de las fluctuaciones en torno a  $\text{AdS}_n$  incluyen un modo no masivo de spin-2 y un modo masivo de spin-0. Estos modos típicamente son taquiónicos<sup>5</sup> (para las convenciones de la cota generalizada de Breitenlohner-Freedman para campos de spin- $s$  en un espacio  $\text{AdS}$   $n$ -dimensional véase por ejemplo la Ref. [131]). De hecho, pidiendo que la constante de Newton efectiva sea positiva se obtiene que uno de los dos campos de spin-2 tiene una masa

$$m_{s=2}^2 = -(n-2)^2 \frac{(n^2-4) + 2(\ell^2/L^2)(n-1)(n-4)}{8\ell^2(n-1)}$$

(a partir de aquí será  $16\pi G = 1$ , a menos de que explícitamente se declare lo contrario). Uno puede fácilmente elegir el valor de la constante de acoplamiento  $L^2$  tal que  $m_{s=2}^2 = 0$ . En ese caso, como se verá, también las soluciones de agujero negro de la teoría se hacen no masivas. El modo masivo de spin-0, por el contrario, tiene una masa

$$m_{s=0}^2 = (n-1) \frac{4m_{s=2}^2 - (2/L^2)(n-2)^2}{(n-2)^2}.$$

Se pueden en principio aceptar los valores  $m_s^2 < 0$  y comparar luego con la cota de Breitenlohner-Freedman (BF):

$$m_s^2 \geq m_{\text{BF}}^2 = -\frac{(n-1)^2 + 4s}{4\ell^2}.$$

Esto pone una cota para  $L^2$ , la cual es  $n$ -dependiente. El modo escalar conforme es, con frecuencia, el más problemático. Se discutirá en la Sección 7.7 una serie de teorías que permiten desacoplar este modo. Existen diferentes formas de tratarlo: una de las posibilidades es considerar valores de la constante de acoplamiento tales que la masa de este modo se vuelva infinita y eventualmente se desacople [132, 133, 133, 134]. Otra posibilidad es buscar condiciones de contorno que basten para eliminar este modo de una manera dinámicamente consistente, c.f. [114, 116, 135, 136]. Se podría también investigar algún tipo especial de materia que se acople con la teoría pero sin incluir el modo escalar y sus patologías. Otra posibilidad sería la de invocar efectos no-lineales que curen la teoría. Finalmente, se podrían buscar otros backgrounds en torno a los cuales los modos resulten bien definidos.

<sup>5</sup>Es decir que presentan velocidades de propagación superlumínicas.

## 7.6 Otras soluciones: agujeros negros, espacios no-Einstein y ondas gravitacionales

### 7.6.1 Agujeros negros

La teoría (7.9) admite como soluciones espacios de Einstein (7.13), siempre y cuando  $\ell$  satisfaga (7.14). En particular, también contiene agujeros negros. La métrica de un agujero negro AdS-Schwarzschild está dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0^{n-3}}{r^{n-3}} + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0^{n-3}}{r^{n-3}} + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \quad (7.15)$$

donde  $d\Omega_{n-2}^2$  es la métrica de la  $(n-2)$ -esfera unitaria y  $r_0$  es una constante de integración asociada con la masa. La masa de esta solución de agujero negro aparece en las Refs. [88, 137–140] y está dada por

$$M_{\text{BH}} = \frac{1}{8\pi G} \left(1 + \frac{L^2(n-2)(n+2)}{2\ell^2(n-1)(n-4)}\right) (n-2) \text{Vol}(\Omega_{n-2}) r_0^{n-3} \quad (7.16)$$

donde hemos reinsertado la normalización global  $(16\pi G)^{-1}$  en la acción. En la Ec. (7.16)  $\text{Vol}(\Omega_{n-2})$  refiere al volumen de la  $(n-2)$ -esfera, esto es  $\text{Vol}(\Omega_{n-2}) = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}/\Gamma(\frac{n-1}{2})$ .

La temperatura de Hawking asociada a la solución de agujero negro (7.15) es

$$T_{\text{H}} = \frac{(n-1)r_+^2 + (n-3)\ell^2}{4\pi\ell^2 r_+},$$

la cual es una cantidad geométrica y consecuentemente independiente de la presencia de términos de alto orden en la curvatura. En cambio, la entropía depende de la constante de acoplamiento  $L$ . Resulta

$$S_{\text{BH}} = \frac{\text{Vol}(\Omega_{n-2})r_+^{n-2}}{4G} \left(1 + \frac{L^2(n-2)(n+2)}{2\ell^2(n-1)(n-4)}\right) = \frac{\text{Area}}{4G} + \mathcal{O}(L^2/\ell^2)$$

donde el primer término da la contribución de Bekenstein-Hawking, que es  $\text{Area}/(4G)$ , mientras que el segundo son correcciones de alto orden. Note que la entropía  $S_{\text{BH}}$  y la masa  $M_{\text{BH}}$  satisfacen la primer ley de la termodinámica  $dM_{\text{BH}} = T_{\text{H}} dS_{\text{BH}}$ . Es también fácil de verificar que ambos  $S_{\text{BH}}$  y  $M_{\text{BH}}$  se anulan cuando la masa del modo fluctuante de spin-2,  $m_{s=2}^2$  es cero.

### 7.6.2 Ondas gravitacionales

Ahora se explorarán soluciones de ondas gravitacionales. Se considerará el *ansatz*

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} \left( -(1+2H) dt^2 + 2dt d\xi + dr^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right), \quad (7.17)$$

donde  $H$  es una función que no depende de la coordenada timelike  $\xi$ . Aquí,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker  $(n-3)$ -dimensional que define la métrica euclídea sobre  $\mathbb{R}^{n-3}$ . Consideraremos deformaciones del cubrimiento universal de  $\text{AdS}_n$ , de modo que las coordenadas tomarán los valores  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , and  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  $H = \text{const}$  corresponde al espacio  $\text{AdS}_n$  en coordenadas de Poincaré, con su borde situado en  $r = 0$ . Para la deformación consideraremos

el vector geodésico nulo  $k^\mu \partial_\mu = (r/l)\partial_\xi$ , el cual habilita a interpretar estos fondos como transformaciones de Kerr-Schild sobre  $\text{AdS}_n$ ; es decir

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{AdS}} - 2H k_\mu k_\nu. \quad (7.18)$$

donde  $g_{\mu\nu}^{\text{AdS}}$  es la métrica de  $\text{AdS}_n$ , recordando que  $k_\mu k^\mu = 0$ .

El tensor de Ricci para una métrica como (7.18) toma la forma

$$R_{\mu\nu} = -\frac{(n-1)}{\ell^2} g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu \square H, \quad (7.19)$$

y conduce a una curvatura escalar constante  $R = -n(n-1)/\ell^2$ , la cual resulta ser independiente de  $H$ . También conduce a los operadores de dimensión 6

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha} R_\nu^\alpha &= \frac{(n-1)^2}{\ell^4} g_{\mu\nu} - \frac{2(n-1)}{\ell^2} k_\mu k_\nu \square H, \\ R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} &= \frac{(n-1)^2}{\ell^4} g_{\mu\nu} - \frac{(n-2)}{\ell^2} k_\mu k_\nu \square H, \\ R_{\mu\gamma\alpha\beta} R_\nu^{\gamma\alpha\beta} &= \frac{2(n-1)}{\ell^4} g_{\mu\nu} - \frac{4}{\ell^2} k_\mu k_\nu \square H, \end{aligned}$$

y

$$\square R_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu \square \left( \square - \frac{2}{\ell^2} \right) H.$$

Utilizando la expresión para el tensor de Ricci y las propiedades de  $k^\mu$ , puede hallarse que la única contribución no trivial a las ecuaciones de campo es

$$k_\mu k_\nu (\square - M^2) \square H = 0. \quad (7.20)$$

con  $M^2$  hallándose dada por

$$M^2 = -\frac{(n-2)^2}{8\ell^2(n-1)} \left( (n^2-4) + 2\frac{\ell^2}{L^2}(n-1)(n-4) \right). \quad (7.21)$$

La condición para que (7.21) se anule es

$$\ell^2 = -L^2 \frac{(n-2)(n+2)}{2(n-1)(n-4)},$$

y puede observarse que cuando  $M^2 = 0$  la energía gravitatoria del agujero negro AdS-Schwarzschild también es nula. Esto es análogo a lo que sucede en CG en dimensiones arbitrarias [141]. Otro valor espacial para  $M^2$  es el que corresponde a que el vacío de  $\text{AdS}_n$  resulte único. Esto sucede cuando

$$M_0^2 = -\frac{(n-2)^2(n+2)}{4\ell^2(n-1)}.$$

### 7.6.3 Espacios no-Einstein

Más allá de los espacios de Einstein, la teoría (7.9) admite una gran clase de soluciones que no son einsteinianas. Entre ellas, hay soluciones con invarianza de escala anisótropa y también con y sin simetría galileana. Esto significa que la teoría admite métricas del tipo de Schrödinger [142] y Lifshitz [143] para valores específicos del exponente dinámico  $z$ . Existe otra clase de soluciones dadas por el producto directo de deformaciones squashed o stretched de espacios AdS y espacios de curvatura constante. Esta clase incluye el espacio WAdS<sub>3</sub>, agujeros negros WAdS<sub>3</sub> y espacios AdS<sub>2</sub> × S<sup>1</sup>. Para ser concretos nos enfocaremos ahora sobre el caso 5-dimensional para el cual la métrica adquiere la forma<sup>6</sup>

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\mu^2 + 3} \left( -\cosh^2(r)dt^2 + dr^2 + \frac{4\mu^2}{\mu^2 + 3}(dx + \sinh(r)dt)^2 + d\Sigma_{2,\pm}^2 \right) \quad (7.22)$$

donde  $d\Sigma_{2,\pm}^2$  es una métrica de un espacio 2-dimensional de curvatura constante  $\pm 1$ ; es decir

$$d\Sigma_{2,+}^2 = \tau^2(dy^2 + \sin^2(y)dz^2), \quad d\Sigma_{2,-}^2 = \tau^2(dy^2 + \cosh^2(y)dz^2),$$

donde  $\tau^2$  es una constante que controla el radio de la pieza interna 2-dimensional de la geometría,  $\Sigma_{2,\pm}$ . Pueden tomarse  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , y  $r \in \mathbb{R}$ . Estas coordenadas parametrizan la parte 3-dimensional de la geometría que describe una deformación squashed o stretched de AdS<sub>3</sub>: los espacios WAdS<sub>3</sub> vistos en la Sección 2.7. El parámetro que controla la deformación es  $\mu$ . El valor  $\mu = 1$  corresponde entonces al espacio no-deformado AdS<sub>3</sub> escrito como fibración de Hopf sobre AdS<sub>2</sub>. La curvatura escalar asociada a la geometría 5-dimensional (7.22) es

$$R = -\frac{2(3\tau^2 \mp \mu^2 \mp 3)}{\tau^2 \ell^2}$$

donde el parámetro  $\mu$  se relaciona con el radio  $\tau$  mediante

$$\mu^2 = \frac{3(1 \pm \tau^2)}{X_{\pm}(\tau)}, \quad \text{con} \quad X_{\pm}(\tau) = 2\tau^4 \pm 5\tau^2 - 1,$$

y donde las constantes de acoplamiento toman los valores

$$L^2 = 48\ell^2 \frac{X_{\pm}(\tau)}{Y_{\pm}(\tau)}, \quad \Lambda = -\frac{3}{2\ell^2} \frac{Z_{\pm}(\tau)}{X_{\pm}(\tau)Y_{\pm}(\tau)}$$

con

$$Y_{\pm}(\tau) = 78\tau^4 \mp 267\tau^2 - 145, \quad Z_{\pm}(\tau) = 156\tau^8 \mp 556\tau^6 - 2661\tau^4 \pm 666\tau^2 + 1015$$

Los espacios WAdS<sub>3</sub> admiten soluciones de agujero negro [30] que son asintóticamente WAdS<sub>3</sub> así como también localmente WAdS<sub>3</sub> [8] (como fuera comentado oportunamente en la Sección 2.7) y también admiten un límite en el cual la geometría se convierte en AdS<sub>2</sub> × S<sup>1</sup>. Ya se trabajó con algunas de las propiedades interesantes de estos espacios en el contexto 3D y bajo NMG en el Capítulo 4 de esta tesis.

<sup>6</sup>Compárese con la métrica de la Ec. (2.13).

## 7.7 Extensión dimensional alternativa

Existe aún otra manera de construir, por extensión dimensional, una teoría para  $n > 4$  dimensiones a partir de los escalares  $Q_{2k \leq 4,4}$ . Para ver esto, es necesario recordar que en 4 dimensiones se verifica

$$Q_{4,4} + \frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{4}\mathcal{E}_4 - \frac{1}{6}\square R, \quad (7.23)$$

donde el lado derecho es una derivada total, compuesta por  $\square R$  y el Pfaffian  $\mathcal{E}_4 = R_{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2$  (el invariante de Gauss-Bonnet). La integración de (7.23) para una variedad riemanniana 4-dimensional daba por resultado, ver Ec. (7.7), su característica de Euler.

Mientras la teoría de Lovelock corresponde a extender dimensionalmente el lado derecho de (7.23), la teoría discutida en las secciones precedentes corresponde a extender la  $Q$ -curvatura mediante el reemplazo  $Q_{4,4} \rightarrow Q_{4,n}$ <sup>7</sup>. Estos dos caminos no constituyen la única forma en la cual uno puede extender los entes en (7.23) a  $n > 4$  dimensiones dado que, alternativamente, se podría considerar la combinación  $\mathcal{E}_4 - C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta}$  y entonces extender hacia  $n$  dimensiones ambos, el término de Gauss-Bonnet  $\mathcal{E}_4$  y la contracción del tensor de Weyl  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Para ver que esto último difiere de la simple extensión  $Q_{4,4} \rightarrow Q_{4,n}$ , debemos notar que en  $n$  dimensiones se verifica la siguiente identidad

$$Q_{4,n} + \frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{4}\mathcal{E}_4 = -A_n\square R + \hat{\alpha}R^2 + \hat{\beta}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \quad (7.24)$$

donde

$$\hat{\alpha} = -\frac{(n-4)(2n^3 - 5n^2 + 6n - 4)}{8(n-1)^2(n-2)^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{(n-1)(n-4)}{(n-2)^2}. \quad (7.25)$$

y el término  $A_n$  es la constante definida en relación a la (7.8). Desde aquí puede verse que el lado derecho de la Ec. (7.24) es una derivada total solamente para  $n = 4$ . Entonces, en  $n > 4$  existen dos posibilidades para definir una teoría de alto orden en la curvatura basada en extensiones dimensionales de la identidad (7.23); es decir, que se puede considerar la acción  $\int d^n x \sqrt{-g} Q_{4,n}$ , que es la pieza cuadrática de la teoría de la sección precedente, o bien se puede considerar la acción  $\int d^n x \sqrt{-g} (\mathcal{E}_4 - C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta})$ . Exploremos ahora esta última posibilidad, i.e. considerar la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_2 = L^2 \left( \mathcal{E}_4 - C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} \right) = L^2 \left( \frac{n(n-3)}{(n-1)(n-2)} R^2 - \frac{4(n-3)}{(n-2)} R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right), \quad (7.26)$$

con una constante de acoplamiento  $L^2$ . Esta teoría exhibe propiedades interesantes. De hecho, puede alternativamente ser definida por requerimientos mínimos: la ausencia del modo conforme  $\square R$ , la persistencia de los espacios einsteinianos como solución y la unicidad del vacío maximalmente simétrico. Para verlo, se introducirá la notación

$$\mathcal{L}_2 = \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\eta}R^{\mu\nu\rho\eta} \quad (7.27)$$

con constantes de acoplamiento  $\alpha, \beta, \gamma$ . El requerimiento de que los espacios Einstein persistan como solución demanda que la constante de acoplamiento del escalar de Kretschmann,  $\gamma$ , sea nula. Luego, la condición de que el modo escalar se desacople conduce a la relación

$$\alpha = -\frac{n\beta}{4(n-1)}, \quad (7.28)$$

<sup>7</sup>La extensión dimensional de los términos  $Q_{2k \leq 2,4}$  es un mero cambio de coeficiente.

la cual hace que  $\square R$  desaparezca de la traza de las ecuaciones de campo. Este es exactamente el valor del coeficiente relativo que aparece en la expansión en contratérminos de la acción de borde en la renormalización holográfica [5, 144–146]. También, relacionado a ello, la Ec.(7.28) está de acuerdo con el coeficiente relativo de la acción que gobierna la gravedad inducida sobre una superficie de co-dimensión 1 en gravedad  $\text{AdS}_n$  [147]. La Ec. (7.28) tiene también relación con teorías en dimensiones más bajas; Para  $n = 2$ , se corresponde con  $\alpha/\beta = -1/2$ , por la cual los términos cuadráticos desaparecen de la acción. Para  $n = 3$ , resulta  $\alpha/\beta = -3/8$ , lo cual corresponde a NMG. Para  $n = 4$ , (7.28) conduce a  $\alpha/\beta = -1/3$ , y la pieza cuadrática de la acción es, a menos de una derivada total, la combinación invariante conforme  $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$ . La teoría CG de  $n > 4$  de la Ref. [115], corresponde no al conjunto de parámetros de (7.26) ni a (7.28), sino a los valores

$$\alpha = -\frac{\beta}{2(n-1)}, \quad \gamma = -\frac{(n-2)\beta}{4}, \quad \text{con} \quad \Lambda = -\frac{(n-1)}{2(n-3)\beta}. \quad (7.29)$$

Finalmente, la condición para que el vacío maximalmente simétrico de la teoría sea único conduce a la relación

$$\Lambda = \frac{(n-1)}{2(n-4)\beta}, \quad (7.30)$$

la cual es válida para  $n \neq 4$ . Esto implica que el radio efectivo de curvatura está dado por

$$\ell^2 = -\frac{(n-2)(n-4)}{2} \beta.$$

En  $n = 3$ , por ejemplo, esta condición define el punto especial  $\ell^2 = \beta/2$  en el cual NMG exhibe características especiales [36, 44].

En resumen, existe una teoría gravitatoria cuadrática alternativa para  $n > 4$  que es especial y está originalmente motivada por la extensión de la densidad lagrangiana 4-dimensional  $Q_{4,4}$  hacia dimensiones mayores. Esta se basa en la densidad  $\mathcal{L}_2$  dada por la Ec. (7.27), y los coeficientes

$$\alpha = -\frac{n\beta}{4(n-1)}, \quad \gamma = 0, \quad \Lambda = -\frac{(n-1)}{2(n-4)\beta}, \quad (7.31)$$

cf. (7.29). Esta teoría y en particular su relación con la renormalización holográfica presentan un interés que justifica subsiguientes análisis.

## Capítulo 8

# Conclusión

En un pasaje de un libro de divulgación dedicado a la vida y obra de Stephen Hawking [148] se menciona que él mismo argumentaba a favor de que el “final de la física teórica” podría estar muy cerca, quizás a fines del siglo XX<sup>1</sup>. Es decir, que parecía que una teoría unificada de todas las interacciones estaba a la vuelta de la esquina, a punto de ser descubierta. El tiempo llegó, y pasó, sin que se hubiera hallado ese caliz sagrado y quedó claro que el desafío era más complejo y difícil de lo que parecía en aquella época. No obstante los avances han sido numerosos; existen candidatos firmes como la teoría de cuerdas y se han abierto nuevas direcciones de estudio desde entonces. Sin duda la Correspondencia AdS/CFT ha propiciado ella misma una gran cantidad de esas vertientes.

Las diversas ramificaciones que se han generado en virtud de los múltiples ángulos de ataque seguidos para avanzar sobre la concreción de una teoría consistente de gravedad cuántica y la miríada de vínculos con otras teorías cuánticas que han aparecido a consecuencia de la correspondencia holográfica han implicado un necesario angostamiento en cuanto a los temas de investigación que pueden abarcarse razonablemente en algunos años de carrera. Adquirir un panorama más o menos completo de las principales teorías alternativas, los métodos y herramientas matemáticas que permiten atacar los problemas que las aquejan como para hacer un aporte valioso a la comunidad científica, es una tarea que puede llevar una buena parte de la vida de un investigador.

Los trabajos que se documentan en esta tesis cubren, entonces, un espectro limitado y específico. El análisis gravitatorio está mayormente orientado hacia los aspectos clásicos más que a los cuánticos, estando estos últimos presentes fundamentalmente a través de la holografía no-AdS. Conclusiones específicas respecto de cada uno de los cuatro trabajos enmarcados aquí se presentaron al final de cada uno de los cuatro capítulos respectivos, desde el 4 hasta el 7 de manera que aquí simplemente se sumarizan los mismos a vuelo de pájaro. Los trabajos relacionados con la determinación de cargas conservadas (masa y momento angular) en espacio-tiempos afectados de diversas patologías presentados en los Capítulos 4 y 5 constituyen un aporte en cuanto al entendimiento de la física gravitatoria dentro de los mismos. Los espaciotiempos  $WAdS_3$  y Lifshitz son ejemplos notables de holografía no-AdS. Los primeros poseen la condición patológica de la presencia de CTC de tal manera que globalmente no representan modelos físicamente atractivos en cuanto a su aplicabilidad, no siendo este motivo que impida que sectores de los mismos aproximen

---

<sup>1</sup>En 1980 Stephen Hawking pronunció la conferencia “¿Se vislumbra el fin de la física teórica?” como lección inaugural de la cátedra de *Lucasian Professor* que había obtenido en Cambridge. En 1990 aún seguía creyendo que para los primeros años 2000 la teoría unificada estaría lista.

sistemas físicos que sí pueden ocurrir en la naturaleza. Los segundos, en cambio, tienen aplicaciones prácticas en sistemas de materia condensada de manera que suman un interés especial en razón de la física del borde. Ambos análisis fueron realizados en el contexto de teorías gravitatorias 3D, las cuales representan, no obstante, *toy-models* de lo que se espera sea una teoría completa. En el Capítulo 6 se muestra un análisis específico, respecto de puntos críticos, de una teoría gravitatoria 3D masiva reciente. Estos puntos son especiales en cuanto al significado que adquieren ciertos observables del lado de la CFT, cuando se analizan sistemas en el marco de holografía. El trabajo presentado en el Capítulo 7 tiene, en cambio, una naturaleza diferente. Se presenta una teoría, esto es una acción gravitatoria, basada en una densidad lagrangiana con ciertas propiedades de simetría conforme. Esta teoría, en principio, no está restringida a 4 dimensiones sino que es  $D$ -dimensional lo que tal vez se convierta en una característica necesaria a sabiendas que la candidata más firme a una teoría de gravedad cuántica es una teoría de cuerdas que presupone una dimensionalidad del espacio diferente a las  $D = 4$  que percibimos.

El “fin de la física teórica” quizás no se halle tan cerca como pensaba Hawking. Lo que es indudable es que estamos avanzando.



# Apéndice A

## Consistencia por la tercera vía

El proceso de consistencia por tercera vía genera un ente tensorial de divergencia nula (covariantemente conservado) que será utilizado luego en una ecuación de movimiento de una teoría. En particular, la teoría EMG presentada en la Sección 2.4 está construida sumándole a TMG dos términos cuya consistencia es de esta naturaleza.

El proceso de generación parte de un tensor genérico  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  que posee divergencia nula, i.e. que verifica  $\nabla^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$ . Entonces las tres etapas corresponden a la construcción de un tensor  $\mathcal{S}$  que sirve para construir dos tensores  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{L}$  que resultarán consistentes *on-shell*.

- Construcción “tipo Schouten”: se define el ente

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{G},$$

donde el escalar es  $\mathcal{G} = g^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}$ . La contracción de la relación asumida resulta en  $\mathcal{S} = -\mathcal{G}/2$ . La divergencia de este tensor  $\mathcal{S}_{\mu\nu}$  será

$$\nabla^\mu \mathcal{S}_{\mu\nu} = \nabla^\nu \mathcal{S}.$$

de modo que  $\mathcal{S}_{\mu\nu} - \mathcal{S}g_{\mu\nu}$  es de divergencia nula.

- Construcción “tipo Cotton” para el tensor  $\mathcal{H}$ : se contrae la divergencia del tensor  $\mathcal{S}$  con la forma de volumen 3D para obtener

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu^{\rho\sigma} \nabla_\rho \mathcal{S}_{\sigma\nu}$$

- Construcción para el tensor  $\mathcal{L}$ : se multiplican dos contracciones de la forma de volumen con el tensor  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_\mu^{\rho\sigma} \varepsilon_\nu^{\alpha\beta} \mathcal{S}_{\rho\alpha} \mathcal{S}_{\sigma\beta}$$

Las unidades finales de estos entes  $\mathcal{H}_{\mu\nu}, \mathcal{L}_{\mu\nu}$  dependerán evidentemente de las que tuviera el tensor utilizado en la generación, el  $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ . En el caso particular de las ecuaciones (2.8) y (2.9) de la teoría EMG, el ente generador fue  $\mathcal{S}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}$  (el propio tensor de Cotton). Por ello las unidades de los componentes de  $T_{\mu\nu}$ , dado que el parámetro de masa  $m$  tiene unidades de  $L^{-1}$  (en unidades  $c = G = 1$ ), resultan ser de  $L^{-4}$  y  $L^{-6}$ .

## Apéndice B

# Linealización de ecuaciones de movimiento

La idea es considerar una solución del tipo

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

donde  $\bar{g}_{\mu\nu}$  es una solución de vacío de las ecuaciones de movimiento de una teoría gravitatoria y expandir todos los entes  $E$  (escalares o tensores) en la forma

$$E = \bar{E} + E^1 + E^{\text{nl}},$$

donde  $\bar{E} \equiv E(\bar{g})$  y donde  $E^1$  incluye  $h$  a la primer potencia. Los términos cuadráticos y sucesivos se agrupan en  $E^{\text{nl}}$ . Como se dijo en la Sección 3.7.4 la operación de linealizar un ente  $E$  se indicará mediante  $(E)^L$ . Esta operación retiene los términos hasta el primer orden de la perturbación. Es decir,

$$(E)^L = (\bar{E} + E^1 + E^{\text{nl}})^L = \bar{E} + E^1,$$

y la parte lineal del ente, el término con  $h$  a la primer potencia, será  $E^1 \equiv E^{(h)}$ .

La consistencia a orden lineal requiere que

$$(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu})^L = D = g^{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$$

para lo cual la métrica inversa tiene que cumplir

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

y además

$$\bar{g}_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \equiv h, \tag{B.1}$$

lo cual implica que la métrica background  $\bar{g}_{\mu\nu}$  sube y baja los índices de  $h_{\mu\nu}$ .

La linealización del escalar de curvatura, véase (3.24), resulta en

$$(R)^L = (g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})^L = \bar{R} + \bar{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(h)} - h^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu},$$

y esta expresión debe ser equivalente a

$$(R)^L = (g_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^L = \bar{R} + \bar{g}_{\mu\nu}R_{(h)}^{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\bar{R}^{\mu\nu}.$$

De la igualdad entre estas dos últimas y usando (B.1) se tiene la relación entre las diversas contracciones

$$\bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(h)} - h^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} R_{(h)}^{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \bar{R}^{\mu\nu}$$

Se puede construir una pequeña tabla de expresiones lineales de entes.

$$R^{(h)} = \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(h)} - h^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}$$

$$(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})^{(h)} = 2\bar{R}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(h)} - 2h^{\mu\nu} \bar{R}^{\alpha}_{\mu} \bar{R}_{\nu\alpha}$$

Las expresiones de estas contracciones en términos explícitos de  $h_{\alpha\beta}$  se obtienen considerando los términos lineales dentro de las expansiones de los tensores de Riemann, Ricci y el escalar de curvatura para una perturbación genérica  $h_{\alpha\beta}$ . Esos desarrollos son clásicos, consúltese por ejemplo [67], de manera que simplemente se transcriben a continuación las expresiones finales.

$$R_{\mu\nu}^{(h)} = \frac{1}{2} (\nabla^{\alpha} \nabla_{\mu} h_{\nu\alpha} + \nabla^{\alpha} \nabla_{\nu} h_{\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} h)$$

$$R^{(h)} = \nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} h_{\alpha\beta} - \square h - h^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta}$$

## Apéndice C

# Agujeros negros WAdS<sub>3</sub> y la métrica de Gödel

La métrica de agujeros negros stretched spacelike WAdS<sub>3</sub> ( $\nu^2 > 1$ ), un Warped black hole (WBH), en coordenadas de Schwarzschild, está dada [8] por

$$ds^2 = \ell^2 \left[ dt^2 + \frac{dr^2}{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)} + \left( 2\nu r - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right) dt d\theta + \frac{r}{4} \left( 3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right) d\theta^2 \right], \quad (\text{C.1})$$

donde las coordenadas  $t, r, \theta$  son tales que  $t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \varphi \in [0, 2\pi)$ . Los parámetros  $r_+, r_-$  son dos constantes de integración que para  $r_+ \geq r_- \geq 0$  representan la localización de los horizontes externo e interno, respectivamente, del agujero negro.

La relación entre las cargas obtenidas para el defecto dentro del espacio timelike WAdS<sub>3</sub> y la masa y momento angular para un Warped black hole no es tan simple como pudiera pensarse *a priori*. Como se describirá más abajo, estos agujeros negros pueden ser obtenidos a partir de la solución timelike a través de un cambio de coordenadas complejo. Considérese primeramente una rotación de Wick doble

$$t \rightarrow i\tau \quad \varphi \rightarrow -i\Theta \quad \omega \rightarrow -\omega \quad r \rightarrow -r \quad j \rightarrow -j, \quad (\text{C.2})$$

y, en segundo lugar, la transformación  $\tau = t' - \ell\sqrt{j}\Theta$ . Luego, en vistas a su comparación con las coordenadas utilizadas en la literatura, considérese un tiempo reescalado de acuerdo con  $t' \rightarrow LT$ .

El cambio de coordenadas anterior convierte la métrica timelike WAdS<sub>3</sub> de la Ec. (4.9), que transcribimos aquí,

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\varphi + \frac{dr^2}{[2r^2\omega^2 + \lambda_{\mu,j}(r)]} - [2r^2\omega^2 - \lambda_{\mu,j}(r)] d\varphi^2, \\ \lambda_{\mu,j}(r) = \frac{2r^2}{\ell^2} + 2(1 - \mu)r - j\ell^2,$$

en la solución WBH

$$ds^2 = L^2 dT^2 + \frac{L^2 dR^2}{(\nu^2 + 3)(R - r_+)(R - r_-)} + L^2(2\nu R - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)}) dT d\Theta \\ + \frac{RL^2}{4} \left[ 3(\nu^2 - 1)R + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right] d\Theta^2, \quad (\text{C.3})$$

mediante el reescalado  $R = -2r/L^2$  y con la identificación de parámetros siguiente

$$\begin{aligned} \nu &= \omega L & L^2 &= \frac{3}{\omega^2 + 2\ell^{-2}}; \\ r_{\pm} &= \frac{\ell^2}{L^2} \left[ \frac{-(1-\mu) \pm \sqrt{(1-\mu)^2 - 2(\omega^2\ell^2 + 1)j}}{(\omega^2\ell^2 + 1)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Nótese las relaciones útiles

$$r_+ + r_- = \frac{2\ell^2(\mu - 1)}{L^2(1 + \ell^2\omega^2)} \quad r_+ r_- = \frac{2j\ell^4}{L^4(1 + \ell^2\omega^2)}. \quad (\text{C.5})$$

Los vectores de Killing tipo spacelike y timelike entre métricas están relacionados del modo

$$\partial_t = \frac{i}{L} \partial_T \quad \partial_\varphi = \frac{\ell}{L} \sqrt{j} \partial_T + i \partial_\Theta. \quad (\text{C.6})$$

Este cambio de coordenadas dependiente de la carga hace que la relación entre las cargas para la métrica timelike y la métrica spacelike sea más complicada que una mera continuación analítica. La segunda relación indica que la isometría en la coordenada  $\varphi$  de la métrica timelike, cuya carga asociada será el momento angular, se transforma en la métrica spacelike en una combinación de isometrías de las coordenadas  $T$  y  $\Theta$  en la métrica spacelike. Esto implica que el momento angular timelike no se puede expresar únicamente en función del momento angular spacelike.

Cambiando en (C.3)  $LT \rightarrow t$ ,  $R \rightarrow r$  y  $L\Theta \rightarrow \varphi$ , se pueden asignar las dimensiones según  $[t] = l^1$ ,  $[r] = l^1$ ,  $[\varphi] = l^0$ ,  $[L] = l^1$ ,  $[\nu] = l^0$ ,  $[r_{\pm}] = l^1$  y la expresión de la masa del WBH entonces se transforma en<sup>1</sup>

$$\mathcal{M}_{\text{WBH}} = Q_{\partial_\tau} = \frac{\nu(\nu^2 + 3)}{GL(20\nu^2 - 3)} \left( (r_- + r_+) \nu - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right), \quad (\text{C.7})$$

mientras que la expresión para el momento angular es<sup>2</sup>

$$\mathcal{J}_{\text{WBH}} = Q_{\partial_\Theta} = \frac{\nu(\nu^2 + 3)}{4GL(20\nu^2 - 3)} \left( (5\nu^2 + 3)r_+ r_- - 2\nu \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} (r_+ + r_-) \right). \quad (\text{C.8})$$

Utilizando las relaciones (C.4) entre los parámetros spacelike y los timelike, puede observarse que ir desde la métrica timelike a la spacelike involucra un cambio de coordenadas dado por la regla de transformación  $\tau = t' - \ell\sqrt{j}\Theta$ , el cual depende de la carga y no está globalmente bien definido. Esto implica que las cargas spacelike y las timelike no coinciden. Solamente en el caso  $j = 0$ , puede verse que las masas están relacionadas<sup>3</sup> de acuerdo con  $\partial_t \sim L^{-1} \partial_T$ ,

$$\mathcal{M}_{\text{WBH}}|_{j=0} = L^{-1} \mathcal{M}. \quad (\text{C.9})$$

Es importante remarcar que, en el caso de defectos rotantes en timelike WAdS<sub>3</sub> y debido a la dependencia sobre  $j$  del cambio de coordenadas, las cantidades conservadas no pueden obtenerse simplemente a partir de la masa y el momento angular de las soluciones spacelike.

<sup>1</sup>Esta expresión viene de la Ec. (D.4) de la Ref. [68], la cual coincide con la Ec. (27) en [80] sin el factor extra 1/2 el cual debiera estar ausente. Note que esta expresión también ha sido obtenida independientemente con el formalismo covariante.

<sup>2</sup>Resultado que ha sido tomado desde la Ec. (30) en la Ref. [80], el cual fue comprobado con la Ref. [45]. Note que esta expresión ha sido obtenida independientemente en el formalismo covariante.

<sup>3</sup>A menos de un factor que no depende de  $\mu$ , el cual no es visto por la integración.

## Apéndice D

# Métrica de agujero negro Lifshitz en campo cercano

El elemento de línea de la métrica de agujero negro de Lifshitz, en coordenadas  $(t, r, x)$  es

$$ds^2 = -\frac{r^4}{\ell^4} \left( \frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left( \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} \right) dr^2 + r^2 dx^2. \quad (\text{D.1})$$

Se proponen los cambios de coordenadas  $(t, r) \rightarrow (v, \rho)$

$$v = t - \ell^4 \int \frac{dr}{r^2(r^2 - r_0^2)}, \quad \rho = \frac{r^3 - r_0^3}{3\ell^2}$$

que puede verse como una especie de cambio de coordenadas tipo Eddington-Finkelstein. Los diferenciales son

$$dv = dt - \frac{\ell^4 dr}{r^2(r^2 - r_0^2)}, \quad d\rho = \frac{r^2}{\ell^2} dr$$

de manera que para los diferenciales al cuadrado se tiene

$$dv^2 + \frac{\ell^8 dr^2}{r^4(r^2 - r_0^2)^2} + \frac{2\ell^4 dvdr}{r^2(r^2 - r_0^2)} = dt^2, \quad \frac{\ell^4}{r^4} (d\rho)^2 = dr^2. \quad (\text{D.2})$$

Reemplazando las expresiones de  $dt^2$  y  $dr^2$  de (D.2) en la métrica (D.1) resulta

$$ds^2 = -\frac{r^4(r^2 - r_0^2)}{\ell^6} dv^2 - 2dv d\rho + r^2 dx^2 \quad (\text{D.3})$$

Para expresar el primer término en función de  $\rho$  se pueden considerar expansiones de Taylor en  $r$  en torno a  $r_0$ ,

$$\rho = \frac{r_0^2}{\ell^2} (r - r_0) + \frac{r_0}{\ell^2} (r - r_0)^2 + \frac{1}{3\ell^2} (r - r_0)^3 \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{r^4(r^2 - r_0^2)}{\ell^6} = \frac{2r_0^5}{\ell^6} (r - r_0) + \frac{9r_0^4}{\ell^6} (r - r_0)^2 + \frac{16r_0^3}{\ell^6} (r - r_0)^3 + \mathcal{O}(r^4) \quad (\text{D.5})$$

donde la primera expresión es completa ya a orden tres. Luego, se puede invertir la expansión de  $\rho$  en la Ec. (D.4) considerando previamente su cuadrado

$$\rho^2 = \frac{r_0^4}{\ell^4} (r - r_0)^2 + \frac{2r_0^3}{\ell^4} (r - r_0)^3 + \mathcal{O}(r^4)$$

y reescribiendo (D.5) como

$$\frac{r^4(r^2 - r_0^2)}{\ell^6} = \frac{2r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{r_0^2}{\ell^2} \right) (r - r_0) + \frac{9r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{r_0}{\ell^2} \right) (r - r_0)^2 + \frac{48r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{1}{3\ell^2} \right) (r - r_0)^3 + \mathcal{O}(r^4),$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{r^4(r^2 - r_0^2)}{\ell^6} &= \frac{2r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{r_0^2}{\ell^2} \right) (r - r_0) + \frac{2r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{r_0}{\ell^2} \right) (r - r_0)^2 + \frac{2r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{1}{3\ell^2} \right) (r - r_0)^3 \\ &\quad + \frac{7r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{r_0}{\ell^2} \right) (r - r_0)^2 + \frac{46r_0^3}{\ell^4} \left( \frac{1}{3\ell^2} \right) (r - r_0)^3 + \mathcal{O}(r^4) \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{r^4(r^2 - r_0^2)}{\ell^6} &= \frac{2r_0^3}{\ell^4} [\rho]_{\mathcal{O}(3)} + \frac{7}{\ell^2} \left( \frac{r_0^4}{\ell^4} \right) (r - r_0)^2 + \frac{23}{3\ell^2} \left( \frac{2r_0^3}{\ell^4} \right) (r - r_0)^3 + \mathcal{O}(r^4) \\ \frac{r^4(r^2 - r_0^2)}{\ell^6} &= \frac{2r_0^3}{\ell^4} [\rho]_{\mathcal{O}(3)} + \frac{7}{\ell^2} [\rho^2]_{\mathcal{O}(3)} + \left( \frac{4r_0^3}{3\ell^6} \right) (r - r_0)^3 + \mathcal{O}(r^4) \end{aligned}$$

donde las expansiones de  $\rho$  y  $\rho^2$  son hasta  $\mathcal{O}(3)$  inclusive de modo que el remanente término proporcional a  $(r - r_0)^3$  constituiría el primer término de la expansión de  $\rho^3$ . Entonces, resulta

$$\frac{r^4(r^2 - r_0^2)}{\ell^6} = \frac{2r_0^3}{\ell^4} \rho + \frac{7}{\ell^2} \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$$

Para expresar el último factor en términos de  $\rho$  se debe expandir el propio  $r^2$  en torno a  $r_0$ . Se tiene, de manera exacta,

$$r^2 = r_0^2 + 2r_0(r - r_0) + (r - r_0)^2,$$

tras lo cual, construyendo explícitamente la forma de  $\rho$ , se puede escribir

$$r^2 = r_0^2 + \frac{2\ell^2}{r_0} [\rho]_{\mathcal{O}(2)} - (r - r_0)^2,$$

donde  $\rho$  está expandido ahora hasta orden dos de manera que el término sobrante es el primer término de la expansión de  $\rho^2$ .

Regresando a la métrica (D.3) y considerando expansiones del primer término hasta  $\rho^2$  y del tercero hasta  $\rho$  se tiene, para campo cercano

$$ds^2 = - \left( \frac{2r_0^3}{\ell^4} \rho + \frac{7}{\ell^2} \rho^2 \right) dv^2 - 2 dv d\rho + \left( r_0^2 + \frac{2\ell^2}{r_0} \rho \right) dx^2$$

La forma buscada para la métrica de campo cercano es

$$ds^2 = f dv^2 - 2k dv d\rho + 2hdv d\phi + R^2 d\phi^2$$

donde los factores asociados son

$$\begin{aligned} f &\equiv -2\kappa\rho + \mathbb{T}(\phi)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3) \\ k &\equiv 1 + \mathcal{O}(\rho^2) \\ h &\equiv \Theta(\phi)\rho + \sigma(\phi)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3) \\ R^2 &\equiv \gamma^2 + \lambda(\phi) + \mathcal{O}(\rho^2) \end{aligned}$$

lo cual permite identificar que en el caso del agujero negro de Lifshitz los parámetros relevantes de la expansión son

$$\gamma^2 = r_0^2, \quad \lambda = \frac{2\ell^2}{r_0}, \quad \varkappa = \frac{r_0^3}{\ell^4}, \quad \mathbb{T} = -\frac{7}{\ell^2}.$$



## Apéndice E

# Integración de carga en función de dos radios

Se tiene

$$\delta Q = \frac{1}{8G\ell^2}(r_+ - r_-)(\delta r_+ - \delta r_-).$$

Suponiendo que  $Q$  es función de dos variables,  $r_+$  y  $r_-$ , se escribe el diferencial total de  $Q$  como

$$dQ = \left. \frac{\partial Q}{\partial r_+} \right|_{r_-} dr_+ + \left. \frac{\partial Q}{\partial r_-} \right|_{r_+} dr_-$$

donde se ha enfatizado que las derivadas parciales se hacen manteniendo constante la otra variable. Luego, se puede calcular  $Q$  integrando

$$Q = \int \left. \frac{\partial Q}{\partial r_+} \right|_{r_-} dr_+ = Q^+ + f_1(r_-)$$

$$Q = \int \left. \frac{\partial Q}{\partial r_-} \right|_{r_+} dr_- = Q^- + f_2(r_+)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones de las variables indicadas y  $Q^\pm$  son las que resultan de integrar las derivadas parciales. Estas expresiones deben coincidir. Entonces

$$Q^+ - Q^- = f_2(r_+) - f_1(r_-)$$

En el caso presente serán

$$Q = \frac{1}{8G\ell^2} \left( \frac{r_+^2}{2} - (r_- r_+) \right) + f_1(r_-)$$

$$Q = \frac{1}{8G\ell^2} \left( \frac{r_-^2}{2} - (r_+ r_-) \right) + f_2(r_+)$$

de modo que

$$\frac{1}{8G\ell^2} \left( \frac{r_+^2}{2} - \frac{r_-^2}{2} \right) = f_2(r_+) - f_1(r_-)$$

en la que se puede tomar  $f_1 = -r_-^2/(16G\ell^2)$  y  $f_2 = r_+^2/(16G\ell^2)$  de forma que utilizando la primera expresión de  $Q$ , por ejemplo, resulta

$$Q = \frac{1}{8G\ell^2} \left( \frac{r_+^2}{2} - r_+r_- - \frac{r_-^2}{2} \right) = \frac{1}{16G\ell^2} (r_+ - r_-)^2$$

que es el valor correcto para la carga  $Q$ .

# Bibliografía

- [1] J. Maldacena. The large-N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.
- [2] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically massive gauge theories. *Annals of Physics*, 140(2):372–411, 1982.
- [3] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend. Massive gravity in three dimensions. *Physical Review Letters*, 102(20):201301, 2009.
- [4] J. D. Brown and J. W. York Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407, 1993.
- [5] V. Balasubramanian and P. Kraus. A stress tensor for anti-de Sitter gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 208(2):413–428, 1999.
- [6] D. T. Son. Toward an AdS/cold atoms correspondence: a geometric realization of the Schroedinger symmetry. *Physical Review D*, 78(4):046003, 2008.
- [7] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan. Gravity duals of Lifshitz-like fixed points. *Physical Review D*, 78(10):106005, 2008.
- [8] D. Anninos, W. Li, M. Padi, W. Song, and A. Strominger. Warped AdS(3) black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2009(03):130, 2009.
- [9] A. Strominger. The dS/CFT correspondence. *Journal of High Energy Physics*, 2001(10):034, 2001.
- [10] J. Bardeen and G. T. Horowitz. Extreme Kerr throat geometry: A vacuum analog of  $\text{AdS}_2 \times S^2$ . *Physical Review D*, 60(10):104030, 1999.
- [11] M. Guica, T. Hartman, W. Song, and A. Strominger. The Kerr/CFT correspondence. *Physical Review D*, 80(12):124008, 2009.
- [12] W. Song and A. Strominger. Warped AdS3/dipole-CFT duality. *Journal of High Energy Physics*, 2012(5):1–13, 2012.
- [13] S. Detournay, T. Hartman, and D. M. Hofman. Warped conformal field theory. *Physical Review D*, 86(12):124018, 2012.
- [14] D. M. Hofman and B. Rollier. Warped conformal field theory as lower spin gravity. *Nuclear Physics B*, 897:1–38, 2015.

- [15] C. Lanczos. A remarkable property of the riemann-christoffel tensor in four dimensions. *Annals of Mathematics*, pages 842–850, 1938.
- [16] D. Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971.
- [17] D. Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, 1972.
- [18] X. O. Camanho, J. D. Edelstein, G. Giribet, and A. Gomberoff. New type of phase transition in gravitational theories. *Physical Review D*, 86(12):124048, 2012.
- [19] B. Zwiebach. Curvature squared terms and string theories. *Physics Letters B*, 156(5-6):315–317, 1985.
- [20] T. P. Branson. Differential operators canonically associated to a conformal structure. *Mathematica scandinavica*, 57:293–345, 1985.
- [21] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin. Asymptotic freedom in extended conformal supergravities. *Physics Letters B*, 110(2):117–122, 1982.
- [22] R. J. Riegert. A non-local action for the trace anomaly. *Physics Letters B*, 134(1-2):56–60, 1984.
- [23] A. Gover and L. J. Peterson. Conformally invariant powers of the Laplacian,  $Q$ -curvature, and tractor calculus. *Communications in Mathematical Physics*, 235(2):339–378, 2003.
- [24] L. Donnay, J. J. Fernández-Melgarejo, G. Giribet, A. Goya, and E. Lavia. Conserved charges in timelike warped  $\text{AdS}_3$  spaces. *Phys. Rev. D*, 91:125006, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevD.91.125006.
- [25] G. Giribet and E. Lavia. The mass of a lifshitz black hole. *The European Physical Journal C*, 81(9):1–6, 2021.
- [26] G. Giribet, A. Goya, E. Lavia, and J. Oliva. Critical points of the exotic massive 3D gravity. *Physics Letters B*, 808:135618, 2020. ISSN 0370-2693. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135618>.
- [27] M. Chernicoff, G. Giribet, N. Grandi, E. Lavia, and J. Oliva.  $Q$  curvature and gravity. *Phys. Rev. D*, 98:104023, Nov 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.98.104023.
- [28] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Three-dimensional massive gauge theories. *Physical Review Letters*, 48(15):975, 1982.
- [29] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849, 1992.
- [30] K. A. Moussa, G. Clement, and C. Leygnac. The black holes of topologically massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 20(24):L277, 2003.
- [31] W. Li, W. Song, and A. Strominger. Chiral gravity in three dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2008(04):082, 2008.

- [32] D. Grumiller and N. Johansson. Consistent boundary conditions for cosmological topologically massive gravity at the chiral point. *International Journal of Modern Physics D*, 17(13n14):2367–2372, 2008.
- [33] A. Garbarz, G. Giribet, and Y. Vásquez. Asymptotically AdS 3 solutions to topologically massive gravity at special values of the coupling constants. *Physical Review D*, 79(4):044036, 2009.
- [34] A. Maloney, W. Song, and A. Strominger. Chiral gravity, log gravity, and extremal cft. *Physical Review D*, 81(6):064007, 2010.
- [35] J. D. Brown and M. Henneaux. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three dimensional gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 104(2):207–226, 1986.
- [36] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend. More on massive 3D gravity. *Physical Review D*, 79(12):124042, 2009.
- [37] E. Bergshoeff, O. Hohm, W. Merbis, A. J. Routh, and P. K. Townsend. Minimal massive 3d gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 31(14):145008, 2014.
- [38] M. Ozkan, Y. Pang, and P. K. Townsend. Exotic massive 3D gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2018(8):1–31, 2018.
- [39] E. Bergshoeff, W. Merbis, A. J. Routh, and P. K. Townsend. The third way to 3d gravity. *International Journal of Modern Physics D*, 24(12):1544015, 2015.
- [40] G. Giribet and M. Leston. Boundary stress tensor and counterterms for weakened AdS3 asymptotic in New Massive Gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2010(9):1–23, 2010.
- [41] E. Ayón-Beato, G. Giribet, and M. Hassaïne. Bending ads waves with new massive gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2009(05):029, 2009.
- [42] E. Ayón-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine. Lifshitz black hole in three dimensions. *Physical Review D*, 80(10):104029, 2009.
- [43] G. Clément. Black holes with a null killing vector in three-dimensional massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 26(16):165002, 2009.
- [44] J. Oliva, D. Tempo, and R. Troncoso. Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for bht massive gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2009(07):011, 2009.
- [45] G. Clément. Warped AdS3 black holes in new massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 26(10):105015, 2009.
- [46] K. Siampos and P. Spindel. Solutions of massive gravity theories in constant scalar invariant geometries. *Classical and Quantum Gravity*, 30(14):145014, 2013.
- [47] E. A. Bergshoeff, W. Merbis, and P. K. Townsend. On asymptotic charges in 3D gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 37(3):035003, 2020.

- [48] E. A. Bergshoeff, S. de Haan, O. Hohm, W. Merbis, and P. K. Townsend. Zwei-Dreibein gravity: a two-frame-field model of 3D massive gravity. *Physical Review Letters*, 111(11):111102, 2013.
- [49] H. Afshar, B. Cvetković, S. Ertl, D. Grumiller, and N. Johansson. Conformal Chern-Simons holography. *Physical Review D*, 85(6):064033, 2012.
- [50] J. W. York Jr. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Physical review letters*, 28(16):1082, 1972.
- [51] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Physical Review D*, 15(10):2752, 1977.
- [52] I. Bengtsson and P. Sandin. Anti-de Sitter space, squashed and stretched. *Classical and Quantum Gravity*, 23(3):971, 2006.
- [53] D. Israël. Quantization of heterotic strings in a Goedel/anti de Sitter spacetime and chronology protection. *Journal of High Energy Physics*, 2004(01):042, 2004.
- [54] S. Detournay, D. Orlando, P. M. Petropoulos, and P. Spindel. Three-dimensional black holes from deformed anti de Sitter. *Journal of High Energy Physics*, 2005(07):072, 2005.
- [55] D. Israel, C. Kounnas, D. Orlando, and P. Marios Petropoulos. Electric/magnetic deformations of S3 and AdS3, and geometric cosets. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, 53(1):73–104, 2005.
- [56] K. A. Moussa and G. Clément. Topologically massive gravito-electrodynamics: exact solutions. *Classical and Quantum Gravity*, 13(8):2319, 1996.
- [57] A. Bouchareb and G. Clément. Black hole mass and angular momentum in topologically massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 24(22):5581, 2007.
- [58] M. Bañados, G. Barnich, G. Compere, and A. Gomberoff. Three-dimensional origin of Gödel spacetimes and black holes. *Physical Review D*, 73(4):044006, 2006.
- [59] A. F. Goya. Anisotropic scale invariant spacetimes and black holes in Zwei-Dreibein Gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2014(9):1–16, 2014.
- [60] D. Anninos. Hopfing and puffing warped anti-de sitter space. *Journal of High Energy Physics*, 2009(09):075, 2009.
- [61] K. Balasubramanian and J. McGreevy. Gravity duals for nonrelativistic conformal field theories. *Physical Review Letters*, 101(6):061601, 2008.
- [62] G. Giribet and M. Tsoukalas. Warped-AdS 3 black holes with scalar halo. *Physical Review D*, 92(6):064027, 2015.
- [63] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics. Third Edition*. John Wiley & Sons, 1999.
- [64] H. Stephani. *General Relativity: An introduction to the theory of gravitational field*. Cambridge University Press, 1990.

- [65] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields. Revised Second Edition*. Pergamon Press, 1962.
- [66] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer. *Introduction to General Relativity*, 1975.
- [67] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.
- [68] S. Nam, J.-D. Park, and S.-H. Yi. Mass and angular momentum of black holes in a new massive gravity. *Physical Review D*, 82(12):124049, 2010.
- [69] G. Barnich and F. Brandt. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges. *Nuclear Physics B*, 633(1-2):3–82, 2002.
- [70] G. Barnich. Boundary charges in gauge theories: Using Stokes theorem in the bulk. *Classical and quantum gravity*, 20(16):3685, 2003.
- [71] L. Donnay, G. Giribet, H. A. González, and M. Pino. Supertranslations and Superrotations at the black hole horizon. *Physical review letters*, 116(9):091101, 2016.
- [72] R. M. Wald. Black hole entropy is the Noether charge. *Physical Review D*, 48(8):R3427, 1993.
- [73] V. Balasubramanian, J. De Boer, and D. Minic. Mass, entropy, and holography in asymptotically de Sitter spaces. *Physical Review D*, 65(12):123508, 2002.
- [74] G. Compere, L. Donnay, P.-H. Lambert, and W. Schulgin. Liouville theory beyond the cosmological horizon. *Journal of High Energy Physics*, 2015(3):1–20, 2015.
- [75] M. J. Reboucas and J. Tiomno. On the homogeneity of riemannian space-times of Gödel type 1983. *Phys. Rev. D*, 28:1251–1264.
- [76] M. Rooman and P. Spindel. Gödel metric as a squashed anti-de Sitter geometry. *Classical and quantum gravity*, 15(10):3241, 1998.
- [77] K. Gödel. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein’s field equations of gravitation. *Reviews of modern physics*, 21(3):447, 1949.
- [78] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press, 1973.
- [79] O. Hohm and E. Tonni. A boundary stress tensor for higher-derivative gravity in ads and lifshitz backgrounds. *Journal of High Energy Physics*, 2010(4):1–26, 2010.
- [80] G. Giribet and A. Goya. The Brown-York mass of black holes in Warped Anti-de Sitter space. *Journal of High Energy Physics*, 2013(3):1–17, 2013.
- [81] L. Donnay and G. Giribet. Holographic entropy of Warped-AdS3 black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2015(6):1–13, 2015.
- [82] E. Ayon-Beato, M. Bravo-Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M. M. Juárez-Aubry, and J. Oliva. First law and anisotropic cardy formula for three-dimensional lifshitz black holes. *Physical Review D*, 91(6):064006, 2015.

- [83] M. Chernicoff, G. Giribet, N. Grandi, and J. Oliva. Vacua of exotic massive 3d gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2018(8):1–10, 2018.
- [84] E. Ayón-Beato, M. Hassaine, and M. M. Juárez-Aubry. Towards the uniqueness of lifshitz black holes and solitons in new massive gravity. *Physical Review D*, 90(4):044026, 2014.
- [85] R.-G. Cai, Y. Liu, and Y.-W. Sun. A Lifshitz black hole in four dimensional  $R^2$  gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2009(10):080, 2009.
- [86] Y. S. Myung, Y.-W. Kim, and Y.-J. Park. Dilaton gravity approach to three-dimensional lifshitz black hole. *The European Physical Journal C*, 70(1):335–340, 2010.
- [87] D. O. Devecioğlu and Ö. Sarioğlu. Conserved killing charges of quadratic curvature gravity theories in arbitrary backgrounds. *Physical Review D*, 83(2):021503, 2011.
- [88] S. Deser and B. Tekin. Gravitational energy in quadratic-curvature gravities. *Physical review letters*, 89(10):101101, 2002.
- [89] H. A. Gonzalez, D. Tempo, and R. Troncoso. Field theories with anisotropic scaling in 2d, solitons and the microscopic entropy of asymptotically lifshitz black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2011(11):1–15, 2011.
- [90] Y. Gim, W. Kim, and S.-H. Yi. The first law of thermodynamics in lifshitz black holes revisited. *Journal of High Energy Physics*, 2014(7):1–15, 2014.
- [91] G. Giribet, J. Oliva, D. Tempo, and R. Troncoso. Microscopic entropy of the three-dimensional rotating black hole of bergshoeff-hohm-townsend massive gravity. *Physical Review D*, 80(12):124046, 2009.
- [92] L. Donnay, G. Giribet, and J. Oliva. Horizon symmetries and hairy black holes in AdS. *Journal of High Energy Physics*, 9(120):1–21, 2020.
- [93] L. Donnay, G. Giribet, H. A. González, and M. Pino. Extended symmetries at the black hole horizon. *Journal of High Energy Physics*, 2016(9):1–23, 2016.
- [94] Ö. Sarioğlu. Stationary lifshitz black hole of new massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 36(1):015015, 2018.
- [95] G. Giribet and J. Oliva. More on vacua of exotic massive 3d gravity. *Physical Review D*, 99(6):064021, 2019.
- [96] R. B. Mann, J. Oliva, and S. Sajadi. Energy of asymptotically ads black holes in exotic massive gravity and its log-extension. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5):1–13, 2019.
- [97] G. Alkaç, M. Tek, and B. Tekin. Bachian gravity in three dimensions. *Physical Review D*, 98(10):104021, 2018.
- [98] M. Ozkan, Y. Pang, and U. Zorba. Unitary extension of exotic massive 3D gravity from bigravity. *Physical Review Letters*, 123(3):031303, 2019.



- [99] E. Kilicarslan and B. Tekin. Exotic massive gravity: Causality and a birkhoff-like theorem. *Physical Review D*, 100(4):044035, 2019.
- [100] H. R. Afshar and N. S. Deger. Exotic massive 3d gravities from truncation. *Journal of High Energy Physics*, 2019(11):1–18, 2019.
- [101] A. Aliev and Y. Nutku. A theorem on topologically massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 13(3):L29, 1996.
- [102] M. Cavaglia. The Birkhoff Theorem for Topologically Massive Gravity. *Gravitation and Cosmology*, 5:101–103, 1999.
- [103] G. Compere, S. De Buyl, and S. Detournay. Non-einstein geometries in chiral gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2010(10):1–14, 2010.
- [104] E. A. Bergshoeff, A. F. Goya, W. Merbis, and J. Rosseel. Logarithmic AdS waves and zwei-dreibein gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2014(4):1–19, 2014.
- [105] P. K. Townsend and B. Zhang. Thermodynamics of “exotic” Banados-Teitelboim-Zanelli black holes. *Physical review letters*, 110(24):241302, 2013.
- [106] S. Carlip, J. Gegenberg, and R. Mann. Black holes in three-dimensional topological gravity. *Physical Review D*, 51(12):6854, 1995.
- [107] V. Gurarie. Logarithmic operators in conformal field theory. *Nuclear Physics B*, 410(3):535–549, 1993.
- [108] D. Grumiller, N. Johansson, and T. Zojer. Short-cut to new anomalies in gravity duals to logarithmic conformal field theories. *Journal of High Energy Physics*, 2011(1):1–31, 2011.
- [109] D. J. Gross and E. Witten. Superstring modifications of einstein’s equations. *Nuclear Physics B*, 277:1–10, 1986.
- [110] X. O. Camanho, J. D. Edelstein, J. Maldacena, and A. Zhiboedov. Causality constraints on corrections to the graviton three-point coupling. *Journal of High Energy Physics*, 2016(2):1–62, 2016.
- [111] A. Gruzinov and M. Kleban. A note on causality constraining higher curvature corrections to gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 24(13):3521–3524, 2007.
- [112] D. M. Hofman. Higher derivative gravity, causality and positivity of energy in a uv complete qft. *Nuclear physics B*, 823(1-2):174–194, 2009.
- [113] M. Porrati and M. M. Roberts. Ghosts of critical gravity. *Physical Review D*, 84(2):024013, 2011.
- [114] H. Lü, C. Pope, E. Sezgin, and L. Wulff. Critical and non-critical Einstein-Weyl supergravity. *Journal of High Energy Physics*, 2011(10):1–25, 2011.
- [115] S. Deser, H. Liu, H. Lü, C. Pope, T. Ç. Şişman, and B. Tekin. Critical points of d-dimensional extended gravities. *Physical Review D*, 83(6):061502, 2011.

- [116] H. Lü, Y. Pang, and C. Pope. Conformal gravity and extensions of critical gravity. *Physical Review D*, 84(6):064001, 2011.
- [117] C. R. Graham and A. Juhl. Holographic formula for q-curvature. *Advances in Mathematics*, 216(2):841–853, 2007.
- [118] A. Juhl. *Families of conformally covariant differential operators, Q-curvature and holography*, volume 275. Springer Science & Business Media, 2009.
- [119] Y. Nakayama. Canceling the weyl anomaly from a position-dependent coupling. *Physical Review D*, 97(4):045008, 2018.
- [120] T. Levy and Y. Oz. Liouville conformal field theories in higher dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2018(6):1–17, 2018.
- [121] F. Han, X. Xu, and W. Zhang. *Geometric Analysis Around Scalar Curvatures*, volume 31. World Scientific, 2016.
- [122] H. Osborn and A. Stergiou. Structures on the conformal manifold in six dimensional theories. *Journal of High Energy Physics*, 2015(4):1–31, 2015.
- [123] T. P. Branson and B. Ørsted. Explicit functional determinants in four dimensions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(3):669–682, 1991.
- [124] S. M. Paneitz et al. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-riemannian manifolds (summary). *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 4:036, 2008.
- [125] O. Miskovic, M. Tsoukalas, and R. Olea. Renormalized ads action and critical gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2014(8):1–13, 2014.
- [126] Y.-J. Lin and W. Yuan. A symmetric 2-tensor canonically associated to q-curvature and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 291(2):425–438, 2017.
- [127] J. Oliva and S. Ray. A new cubic theory of gravity in five dimensions: black hole, Birkhoff’s theorem and C-function. *Classical and Quantum Gravity*, 27(22):225002, 2010.
- [128] J. Oliva and S. Ray. Classification of six derivative Lagrangians of gravity and static spherically symmetric solutions. *Physical Review D*, 82(12):124030, 2010.
- [129] N. Boulanger and J. Erdmenger. A classification of local Weyl invariants in D=8. *Classical and Quantum Gravity*, 21(18):4305–4316, 2004.
- [130] M. R. Tanhayi, S. Dengiz, and B. Tekin. Weyl-invariant higher curvature gravity theories in n dimensions. *Physical Review D*, 85(6):064016, 2012.
- [131] H. Lü and K.-N. Shao. Solutions of free higher spins in AdS. *Physics Letters B*, 706(1):106–109, 2011.
- [132] P. Bueno and P. A. Cano. Einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*, 94(10):104005, 2016.

- [133] P. Bueno and P. A. Cano. Four-dimensional black holes in Einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*, 94(12):124051, 2016.
- [134] P. Bueno and P. A. Cano. Universal black hole stability in four dimensions. *Physical Review D*, 96(2):024034, 2017.
- [135] J. Maldacena. Einstein gravity from conformal gravity. *arXiv preprint arXiv:1105.5632*, 2011.
- [136] G. Anastasiou and R. Olea. From conformal to Einstein gravity. *Physical Review D*, 94(8):086008, 2016.
- [137] S. Deser and B. Tekin. New energy definition for higher-curvature gravities. *Physical Review D*, 75(8):084032, 2007.
- [138] S. Deser, I. Kanik, and B. Tekin. Conserved charges of higher D Kerr-AdS spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22:3383, 2005.
- [139] S. Deser and B. Tekin. Energy in generic higher curvature gravity theories. *Physical Review D*, 67(8):084009, 2003.
- [140] G. Giribet, O. Miskovic, R. Olea, and D. Rivera-Betancour. Energy in higher-derivative gravity via topological regularization. *Physical Review D*, 98(4):044046, 2018.
- [141] E. Ayón-Beato, G. Giribet, and M. Hassaine. Critical gravity waves. In *THE THIRTEENTH MARCEL GROSSMANN MEETING: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories*, pages 1074–1076. World Scientific, 2015.
- [142] E. Ayón-Beato, G. Giribet, and M. Hassaine. Deeper discussion of Schrödinger invariant and logarithmic sectors of higher-curvature gravity. *Physical Review D*, 83(10):104033, 2011.
- [143] E. Ayón-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine. Analytic Lifshitz black holes in higher dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2010(4):1–13, 2010.
- [144] S. de Haro, K. Skenderis, and S. N. Solodukhin. Holographic reconstruction of spacetime  $\mathfrak{J}$  and renormalization in the AdS/CFT correspondence. *Communications in Mathematical Physics*, 217(3):595–622, 2001.
- [145] M. Henningson and K. Skenderis. The holographic Weyl anomaly. *Journal of High Energy Physics*, 1998(07):023, 1998.
- [146] S. Hyun, W. T. Kim, and J. Lee. Statistical entropy and AdS-CFT correspondence in BTZ black holes. *Physical Review D*, 59(8):084020, 1999.
- [147] R. C. Myers, R. Pourhasan, and M. Smolkin. On spacetime entanglement. *Journal of High Energy Physics*, 2013(6):1–39, 2013.
- [148] K. Ferguson. *Stephen Hawking: su vida y su obra*. Crítica, Barcelona, 1992.