



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Métodos topológicos en ecuaciones funcionales

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de
Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Julián Epstein

Director: Dr. Pablo Amster

Consejero de estudios: Dr. Constanza S. de la Vega

Lugar de trabajo: IMAS, UBA, CONICET

Defendida en Buenos Aires, 1 de agosto de 2022

Resumen

La tesis que se presenta está enfocada en el estudio de ecuaciones diferenciales funcionales no lineales. Es decir ecuaciones de la forma

$$L(x) = N(x) \tag{1}$$

donde L es un operador diferencial y N es un operador no lineal que depende de toda la función x . Estos operadores están definidos en espacios de Banach, cuya elección depende del tipo de problemas que se quiera estudiar. Reformulando las ecuaciones como un problema de punto fijo, es posible obtener resultados de existencia utilizando el grado topológico de Leray-Schauder. Concretamente, los siguientes problemas fueron considerados en esta tesis:

1) Un sistema de ecuaciones diferencia/en diferencias. El sistema consta de dos ecuaciones, la primera es una ecuación diferencial con retardo y la segunda es una ecuación funcional no diferencial (no involucra derivadas de las funciones incógnitas) también con retardos temporales. Este sistema proviene del estudio de poblaciones celulares estructuradas por edades y tiene importantes aplicaciones en la hematopoyesis y el estudio general de la dinámica sanguínea. El sistema de ecuaciones es una versión no autónoma del estudiado en [6]. Se prueba existencia de soluciones periódicas utilizando el grado topológico. Se analiza la estabilidad de las soluciones mediante una comparación con el caso autónomo. Por último, se establece un teorema de continuación que muestra la relación que guardan las soluciones periódicas del caso no autónomo con los equilibrios (constantes) del caso autónomo.

2) Un sistema abstracto de ecuaciones en resonancia. Se establece un resultado de existencia de soluciones periódicas del cual pueden obtenerse, como casos particulares, el conocido resultado de Lazer y Leach [38], así como muchas de sus extensiones: sistemas con condiciones de tipo Nirenberg, ecuaciones con retardo, etc.

3) Una versión abstracta de un resultado de afinidad de Krasnoselskii [36]. Los resultados de afinidad conectan el grado topológico de distintos operadores asociados a la misma ecuación. Un resultado de esta índole es pre-

sentado y se muestran múltiples ejemplos de aplicación que incluyen EDOs, EDDs y EDPs.

4) Una versión abstracta del lema de Gronwall. Se presenta un resultado que recupera sobre espectros de operadores en latices de Banach, del cual se recupera el conocido le de Gronwall. Se deduce un resultado de unicidad para una amplia gama de ecuaciones emulando el clásico resultado de unicidad para ODE's.

Summary

Topological methods for functional equations

The thesis is focused on the study of nonlinear functional differential equations of the form $L(x) = N(x)$ where L is an unbounded linear operator and N is nonlinear. These operators are defined on appropriate subsets of Banach spaces, the choice of which depends on the type of equations and boundary conditions that are considered. Writing the equations as a fixed point problem, various existence results are obtained by means of the Leray-Schauder topological degree. Specifically, the following problems are considered:

1) A system of two scalar delayed equations, a differential equation of first order combined with a functional non-differential one. This system is a non-autonomous version of a problem arising on an age-structured population dynamics model for hematopoietic stem cells. The existence of periodic solutions is proven using topological degree methods. A stability result is also obtained by comparing the solutions with those of the autonomous case. Finally, a result is established relating the periodic solutions of the non-autonomous system with the equilibria of the autonomous case.

2) An abstract theorem for resonant equations is presented. As particular cases, the well known Lazer and Leach result is deduced, as well as delayed versions of it, systems with Nirenberg type conditions, etc.

3) An abstract version of a result by Krasnoselskii is established for a wide variety of functional equations. The result yields a connection between the topological degree of different fixed point operators associated to the same equation. Several applications are presented for equations including ODEs, DDEs and PDEs.

4) An abstract version of the Gronwall lemma is introduced, stated in terms of the spectral properties of operators in Banach Lattices. This allows to deduce a general uniqueness result, which is applicable to a wide range

6

of problems.

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Capítulo 2: Análisis Funcional	12
1.2. Capítulo 3: Análisis No Lineal	13
1.3. Capítulo 4: Soluciones periódicas en un modelo biológico	13
1.4. Capítulo 5: Krasnoselskii revisitado	14
1.5. Capítulo 6: Lazer-Leach revisitado	16
1.6. Capítulo 7: Gronwall revisitado	16
2. Análisis Funcional	19
2.1. Espacios de Banach	19
2.1.1. Funciones periódicas	20
2.2. Espacios de medidas	21
2.3. Distribuciones periódicas	22
2.3.1. Inmersiones	23
2.3.2. Transformada de Fourier de distribuciones	23
2.3.3. Convoluciones	24
2.3.4. Derivadas	25
2.3.5. Retardos como convoluciones	26

2.4. Operadores	27
2.4.1. Operadores compactos	27
2.4.2. Operadores de Fredholm	27
2.4.3. Espectro	28
2.4.4. Operadores lineales discontinuos	29
2.4.5. Operadores no acotados con inverso compacto	33
2.5. Látices de Banach	35
3. Análisis no lineal	37
3.1. Operadores no lineales	37
3.1.1. Operadores compactos	37
3.1.2. Diferenciabilidad de Frechet	37
3.2. Ecuaciones diferenciales	39
3.3. Descomposición de Lyapunov-Schmidt	40
3.4. Teoría de Grado	42
3.4.1. Un poco de historia	42
3.4.2. Grado de Brouwer	44
3.4.3. Propiedades del grado	45
3.4.4. Grado de Leray - Schauder	47
3.5. Lema de Mawhin	47
4. Soluciones periódicas en un modelo biológico	49
4.1. Introducción	49
4.1.1. Motivación Biológica	49
4.1.2. Modelo matemático autónomo para la dinámica de HSC	50

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	9
4.1.3. Modelo no autónomo de dinámica de HSC	54
4.1.4. Resultados principales	55
4.2. Existencia de soluciones T -periódicas	57
4.2.1. Bosquejo de la demostración	57
4.2.2. Reducción a ecuación escalar	57
4.2.3. Demostración del Teorema (4.1.3)	58
4.3. Pequeñas perturbaciones del sistema autónomo	60
4.3.1. Preliminares	60
4.4. Estabilidad local del equilibrio trivial	64
5. Generalización de un resultado de Krasnoselskii	69
5.1. Introducción	69
5.2. Un resultado de afinidad abstracto	75
5.3. El problema $L(x) = N(x)$	79
5.4. Aplicaciones	85
5.4.1. Soluciones periódicas de ODEs	85
5.4.2. Ecuaciones de segundo orden con condiciones de Dirichlet	92
5.4.3. Un problema elíptico con condiciones no locales	95
5.4.4. Ecuaciones diferenciales con retardo	98
5.5. Comentarios finales y preguntas abiertas	103
6. Lazer-Leach revisitado	107
6.1. Introducción	107
6.2. Ejemplos y extensiones	113
6.2.1. Retardos distribuidos	114

6.3. Marco general	115
6.3.1. Ecuación general	115
6.3.2. Término lineal	115
6.3.3. El término no lineal	117
6.3.4. Hipótesis del teorema principal	117
6.4. Teorema principal	119
6.5. Corolarios del Teorema	120
6.5.1. Landesman-Lazer	120
6.5.2. Condiciones de tipo Nirenberg	121
6.5.3. Límites en el infinito	123
6.6. Más ejemplos y discusión	124
6.6.1. Un sistema de tipo Gompertz	124
6.6.2. Un sistema débilmente acoplado	125
6.6.3. Delays Distribuidos	126
7. Gronwall revisitado	127
7.1. Introducción	127
7.2. Fórmula integral de la resolvente	129
7.3. Caso general	130
7.4. Principio del máximo fuerte para $-\Delta$	131
7.5. Teorema de unicidad	132

Capítulo 1

Introducción

La siguiente tesis está basada en los resultados obtenidos en varios trabajos realizados desde el 2016 a la fecha. Todos abordan problemas vinculados a las ecuaciones diferenciales funcionales, es decir a aquellas ecuaciones de tipo

$$L(x) = N(x) \tag{1.1}$$

donde L es un operador diferencial (por ejemplo $L(x)(t) = x'(t)$, $L(u) = \Delta u$, etc.) y N es un operador no lineal entre dos espacios de funciones (por ejemplo $N(x)(t) = g(t, x(t))$). En este marco podemos incluir una familia de ecuaciones de principal gran importancia: las ecuaciones diferenciales con retardo. Por ejemplo, tomando una parte no lineal $N(x)(t) = g(x(t), x(t - \tau))$.

Estos operadores estarán definidos en espacios de Banach. La elección de qué espacios utilizar está supeditada a las técnicas y el tipo de resultados que se buscan. El problema que estudiamos mayormente es el de existencia de cierto tipo de soluciones, especialmente soluciones periódicas. Para ello, utilizaremos como herramienta principal la teoría de grado topológico de Leray-Schauder. En resumidas cuentas, la idea es la siguiente: el problema (1.1) en muchos casos puede llevarse a una forma equivalente

$$x = K(x) \tag{1.2}$$

donde K es un operador compacto. Diremos que K es un *operador de punto fijo para la ecuación*. A su vez (1.2) es equivalente a hallar raíces

de un operador $I - K$. Este tipo de operadores, a los que nos referiremos como *perturbaciones compactas de la identidad* tienen ciertas propiedades similares a operadores no lineales en dimensión finita. En particular, se les puede calcular un *grado topológico* $\deg(I - K, \Omega)$ donde Ω es una región acotada del espacio de Banach en donde están definidos y tal que $\deg(I - K, \Omega)$ toma valores enteros. Su principal propiedad es la siguiente

$$\deg(I - K, \Omega) \neq 0 \implies I - K \text{ tiene al menos una raíz en } \Omega.$$

Recapitulando: dada una ecuación de la forma (1.1), la llevamos a la forma (1.2). Si logramos encontrar un abierto acotado Ω para el cual $\deg(I - K, \Omega) \neq 0$ entonces (1.2) tiene solución, y por ende también (1.1).

A continuación presentamos un resumen de los capítulos. Los capítulos 2 y 3 son preliminares. En ellos presentaremos aspectos del análisis lineal y no lineal en espacios de dimensión infinita. Los capítulos 4, 5 y 6 corresponden a tres artículos publicados ([1],[2] y [3] respectivamente). En el capítulo 4 estudiamos un sistema de dos ecuaciones funcionales con retardo que provienen de un modelo biológico. Estudiamos problemas de existencia de soluciones periódicas y algo de estabilidad. En el capítulo 6 formulamos un teorema de existencia de soluciones periódicas que generaliza resultados clásicos de Lazer, Leach y otros. Los capítulos 5 y 7 son de orden más abstracto. En el capítulo 5, estudiamos principios generales, que vinculan entre si distintos enfoques que se usan para hallar soluciones de ecuaciones. Dicho *grosso modo*, la reducción de (1.1) a (1.2) puede hacerse de más de una manera, tomando operadores de punto fijo K distintos, que incluso pueden estar definidos en espacios de Banach diferentes. Presentamos un setting abstracto que nos permite comparar estos enfoques y una serie de teoremas que nos garantizarán que

$$\deg(I - K_1, \Omega_1) = \deg(I - K_2, \Omega_2).$$

donde K_1 y K_2 son dos operadores de punto fijo. Finalmente, en el capítulo 7 daremos una versión más general del clásico Lema de Gronwall escrita en términos del espectro de un operador. Nuestro teorema incluye como casos particulares el Lema de Gronwall y el Principio del Máximo para el laplaciano, unificando así teoremas de unicidad de distintos tipos de ecuaciones diferenciales.

1.1. Capítulo 2: Análisis Funcional

En este capítulo repasamos las propiedades de algunos de los espacios de Banach que necesitaremos mas adelante en la tesis y algo de teoría de operadores en estos espacios. Algunos de los tópicos que abordaremos son:

- **Espacios de Banach.** Funciones periódicas continuas, de funciones periódicas integrables y de medidas complejas.
- **Distribuciones periódicas.** Definición, derivada, convolución. Inclusiones de otros espacios de Banach en espacios de las distribuciones.
- **Transformada de Fourier.** Definición para distribuciones periódicas y propiedades.
- **Operadores compactos y de Fredholm.** Definición y sus propiedades. Elementos de teoría espectral para operadores de Fredholm. Elementos de cálculo funcional: exponencial de operadores y transformada de Laplace.
- **Operadores lineales no acotados.** Operadores diferenciales. Operadores con inversa a derecha compacta. Descomposición de Lyapunov-Schmidt.
- **Látices de Banach.** Definición. Operadores positivos.

1.2. Capítulo 3: Análisis No Lineal

En este capítulo daremos elementos del análisis de operadores no lineales entre espacios de Banach. Algunos de los tópicos que abordaremos son:

- **Operadores totalmente acotados.** Aproximación por operadores de rango finito: Teorema de Schauder.
- **Diferenciabilidad Frechet.** Diferencial de operadores totalmente acotados. Teorema de la función implícita.
- **Operador de punto fijo.** Operadores asociados a la descomposición de Lyapunov-Schmidt para ecuaciones diferenciales.
- **Teoría de grado.** Definición del grado de Brouwer y propiedades. Definición del grado de Leray-Schauder y propiedades. Estrategia de Mawhin para los problemas de existencia.

1.3. Capítulo 4: Soluciones periódicas en un modelo biológico

En este capítulo estudiamos un sistema de ecuaciones que modelan la dinámica de poblaciones celulares. El sistema extiende de forma no autóno-

ma el sistema presentado en [6] cambiando las constantes que caracterizan al modelo por funciones periódicas. El sistema de ecuaciones resultantes tiene la forma

$$\begin{cases} Q'(t) = -(\delta(t) + \beta(Q(t))Q(t) + 2(1 - K(t))e^{-\rho(t)}u(t - \tau), & (1.3) \\ u(t) = \beta(Q(t))Q(t) + 2K(t)e^{-\rho(t)}u(t - \tau). & (1.4) \end{cases}$$

Observemos que las ecuaciones involucran retardos temporales. Además, la segunda ecuación no involucra derivadas. Esto presenta un problema para el uso de la teoría de grado. Presentamos tres resultados.

1. **Existencia de soluciones periódicas usando grado.** Mostramos que, bajo cierto régimen de los parámetros, la variable u puede despejarse en función de Q en (1.4). Esto permite reducir el sistema a una sola ecuación funcional $Q' = N(Q)$ y luego utilizamos la estrategia de Mawhin para probar que admite una solución periódica.
2. **Estabilidad.** Mostramos que bajo cierto régimen de los parámetros el equilibrio trivial $(u, Q) \equiv (0, 0)$, es localmente asintóticamente estable. La estrategia es acotar las soluciones del sistema no autónomo con soluciones del autónomo para el cual ya contamos con un resultado de estabilidad en [6].
3. **Existencia usando función implícita.** En [6] se prueba la existencia de equilibrio $(u, Q) = cte$ en cierto régimen de los parámetros. Mostramos que bajo ciertas condiciones, perturbaciones periódicas de los parámetros (es decir, cambiar los parámetros del autónomo por funciones periódicas de baja amplitud) transforman el equilibrio del autónomo en soluciones periódicas del no autónomo.

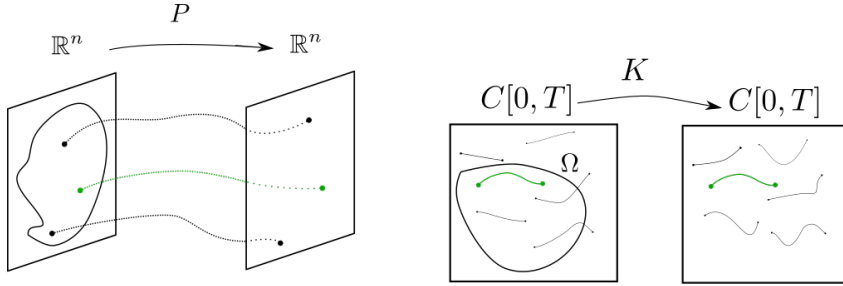
1.4. Capítulo 5: Krasnoselskii revisitado

En el libro [36], Krasnoselskii y Zabreiko presentan una serie de resultados que conectan distintos enfoques para resolver un mismo problema de existencia de soluciones de una ecuación diferencial. El ejemplo paradigmático es el de hallar soluciones periódicas de una ecuación escalar,

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.5)$$

$$x(0) = x(T) \quad (1.6)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave y T -periódica en su primera coordenada. Uno de los enfoques consiste en hallar puntos fijos del operador de Poincaré en \mathbb{R}^n mientras que el otro consiste en hallar puntos fijos de un operador integral en $C[0, T]$:



$$P(x_0) = \Phi(T, x_0) \quad K(x)(t) = x(T) + \int_0^t f(s, x(s)) ds$$

El **principio de afinidad** de Krasnoselskii dice que estos dos operadores tienen esencialmente el mismo grado sobre abiertos. Más concretamente, si las soluciones que podemos hallar en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ se corresponden con las soluciones que podemos hallar en $\Omega \subset C[0, T]$, entonces

$$\deg(I - P, U) = \deg(I - K, \Omega). \quad (1.7)$$

Cuando los abiertos U y Ω guardan esta relación, decimos que son abiertos con **corazón común** (en ingles **common core**). En este trabajo presentamos un marco abstracto muy general para comparar grado de operadores definidos en distintos espacios. Tenemos principalmente dos resultados.

Resultado 1: Mostramos que bajo ciertas condiciones vale un principio de afinidad entre operadores $K_1 = \mu \circ \pi$ y $K_2 = \pi \circ \mu$, es decir

$$\deg(I - K_1, U_1) = \deg(I - K_2, U_2) \quad (1.8)$$

donde U_1 y U_2 tienen **corazón común**. Este resultado está formulado en términos abstractos de operadores en espacios de Banach y no está restringido a ecuaciones diferenciales. Como aplicación, probamos un principio de afinidad para ecuaciones con retardo.

Resultado 2: Consideramos el problema

$$L(x) = N(x) \quad (1.9)$$

$$\delta(x) = 0 \quad (1.10)$$

que incluye (1.5)-(1.6) como caso particular. Presentamos una construcción de operadores de punto fijo para (1.9)-(1.10), K y K' definidos en dos espacios de Banach. Estos operadores son la versión generalizada de los operadores P y K del resultado original de Krasnoselskii. Probamos un teorema de afinidad para K y K' . Damos aplicaciones a un problema de segundo orden con condiciones de Dirichlet, y a un problema elíptico en derivadas parciales.

1.5. Capítulo 6: Lazer-Leach revisitado

Consideremos la ecuación escalar de segundo orden

$$x'' + m^2x + g(x) = p(t), \quad (1.11)$$

con p una función 2π -periódica. Un resultado clásico de Lazer y Leach [38] dice que si g admite límites en el infinito, y se cumple que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t)e^{-imt} dt \right| < \frac{1}{\pi} |g(+\infty) - g(-\infty)|, \quad (1.12)$$

entonces la ecuación admite soluciones 2π -periódicas. Es decir, si la proyección de p sobre el núcleo de $L(x) = x'' + m^2x$ guarda cierta relación con el comportamiento asintótico de g , entonces podemos probar existencia de solución periódica usando grado. Este resultado ha sido muy estudiado y extendido. En este trabajo presentamos una familia de ecuaciones muy amplia, que incluye sistemas de ecuaciones, ecuaciones con retardos, y otras variantes de ecuaciones funcionales, junto con versiones abstractas de las hipótesis sobre el comportamiento asintótico de la parte no lineal, y probamos un teorema de existencia de soluciones periódicas. Dicho teorema incluye como caso particular el teorema de Lazer-Leach y muchas de las extensiones del mismo presentes en la literatura.

1.6. Capítulo 7: Gronwall revisitado

El lema de Gronwall en una de sus versiones integrales, dice que si

$$x(t) \leq B \int_0^t x(s) ds$$

entonces $x(t) \leq 0$. Este lema es un elemento importante del Teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Ordinarias. En este capítulo presenta-

mos un resultado para operadores positivos en espacios de Banach con orden parcial:

Lema 1.6.1. *Sea A un operador positivo y $s > \max\{\operatorname{Re}(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$. Entonces $[A - sI]^{-1}$ es un operador negativo.*

De este lema podemos obtener el lema de Gronwall como caso particular. Más aun, para A un inverso a derecha del laplaciano Δ en un dominio Ω , obtenemos el Principio del Máximo Fuerte como caso particular.

Proposición 1.6.1. *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ para Ω un abierto acotado de frontera suave tal que*

$$-\Delta(x) \leq Bx \tag{1.13}$$

$$x|_{\partial\Omega} \leq 0 \tag{1.14}$$

con $B < \min \sigma(-\Delta|_Z)$. Entonces $u(x) \geq 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Dicho principio juega un papel similar al que juega el Lema de Gronwall, pero en la demostración de la unicidad para el problema de Poisson. Finalmente presentamos un resultado de unicidad general para ecuaciones $L(x) = N(x)$ basado en el lema (1.6.1)

Capítulo 2

Análisis Funcional

A lo largo de esta tesis vamos a trabajar con ecuaciones funcionales. Los espacios naturales para buscar soluciones de dichas ecuaciones son los espacios de Banach. A continuación daremos un repertorio de algunos de los espacios que serán utilizados y mencionaremos algunos aspectos de la teoría de Análisis Funcional. Omitiremos la mayoría de las demostraciones de proposiciones y teoremas ya que pueden hallarse en numerosos libros del área (por ejemplo [58], [40] o [59]) y solo se darán referencias en casos específicos.

2.1. Espacios de Banach

Los espacios de Banach en donde buscaremos soluciones a ecuaciones son espacios de Banach reales. Sin embargo, ciertas partes de la teoría son más naturales en espacios de Banach complejos.

Definición 2.1.1. Dado un espacio de Banach real X , le asociamos el espacio complejo $X^{\mathbb{C}} = X \times iX$. La estructura de espacio vectorial es la usual. La norma está dada por

$$\|x + iy\|_{X^{\mathbb{C}}} := (\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2)^{\frac{1}{2}}$$

Dado un operador $F : X \rightarrow X$ tenemos la siguiente extensión natural.

Definición 2.1.2. $F^{\mathbb{C}} : X^{\mathbb{C}} \rightarrow X^{\mathbb{C}}$ está dado por

$$F^{\mathbb{C}}(x + iy) := F(x) + iF(y).$$

Mayormente haremos el abuso de notación $F^{\mathbb{C}} = F$ y solo se hará la distinción si es necesario.

2.1.1. Funciones periódicas

Los espacios de funciones periódicas, pueden pensarse como espacios de funciones definidas en el espacio topológico $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. En particular, definimos el **toro** $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Definición 2.1.3. 1. Sea μ en la medida de Haar en \mathbb{T} , que cumple que $\mu(\mathbb{T}) = 1$. Dada $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{V}$ una función medible, la integral de f respecto de μ es

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds$$

2. $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$ es el espacio de Hilbert complejo con producto interno

$$\langle f; g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f(t); \overline{g(t)} \rangle_{\mathbb{C}^n} dt.$$

La norma asociada resulta ser

$$\|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(t)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$ es un espacio de Hilbert real con el producto interno de $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$. Usamos la notación abreviada $L^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

4. El operador $\text{Re} : L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ es el proyector dado por

$$\text{Re}(f)(t) = (\text{Re}(f_1(t)), \dots, \text{Re}(f_n(t))).$$

Observación 2.1.1. El conjunto $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Dados los subespacios $S_n = \text{gen}_{\mathbb{C}}\{e^{int}\}$, la proyección ortogonal

$$P : L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{gen}\{\Theta_n\}$$

está dada por

$$P(f) = \langle f; e^{int} \rangle_{L^2} e^{int}.$$

El conjunto $\{\sqrt{2} \cos(nt); \sqrt{2} \text{sen}(nt)\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{1\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$. Dados los subespacios $T_n = \text{gen}_{\mathbb{R}}\{\cos(nt); \text{sen}(nt)\}$, la proyección ortogonal $Q : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow T_n$ está dada por

$$Q(f) = \langle f; \sqrt{2} \cos(nt) \rangle \sqrt{2} \cos(nt) + \langle f; \sqrt{2} \text{sen}(nt) \rangle \sqrt{2} \text{sen}(nt).$$

Es inmediato verificar que $Q(f) = 2\text{Re}(P(f))$.

2.2. Espacios de medidas

Dado (A, τ) un espacio topológico localmente compacto, podemos generar en él la σ -álgebra \mathcal{B} de los Borelianos. Una *medida con valores en \mathbb{K}* sobre el espacio medible (A, \mathcal{B}) es una función $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(\bigcup_{i \in I} B_i) = \sum_{i \in I} \mu(B_i)$ para toda colección de conjuntos disjuntos con I a lo sumo numerable.

Nos interesan los casos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . En esos casos diremos que la medida es finita. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ hay que aclarar que la segunda condición solo vale si la colección $\{B_i\}$ no contiene elementos de medida infinita de distinto signo.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diremos que es una medida compleja. En ese caso es inmediato ver que $\operatorname{Re}(\mu)$ e $\operatorname{Im}(\mu)$ son medidas con signo finitas (reales) y que

$$\mu(B) = \operatorname{Re}(\mu)(B) + i\operatorname{Im}(\mu)(B)$$

para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definición 2.2.1. Para medidas finitas μ , definimos la *variación de μ* como

$$|\mu|(B) := \sup \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}} |\mu(C)|, \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \text{ partición finita de } B \right\}$$

Resulta ser que $|\mu|$ es una medida positiva.

Teorema 2.2.1. Descomposición de Hanh-Banach: Dada μ medida (real) en (A, \mathcal{B}) , existen μ_1 y μ_2 medidas positivas en (A, \mathcal{B}) tales que $\mu(B) = \mu_1(B) - \mu_2(B)$ y conjuntos $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$ tales que $A = E_1 \cup E_2$ y $\mu_1(E_2) = 0 = \mu_2(E_1)$. Los conjuntos E_i y las medidas μ_i son únicos salvo por conjuntos de μ -medida 0.

Corolario 2.2.1. 1. Si μ es medida real, entonces $|\mu| = \mu_1 + \mu_2$

2. Si μ es medida compleja, entonces $\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$. Además $|\mu|(B) \leq |\mu(B)|$ para todo $B \in \mathcal{B}$

3. Tanto para el caso real como el caso complejo vale que si $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ es integrable, entonces

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d|\mu|$$

Definición 2.2.2. Una medida positiva en (A, \mathcal{B}) se dice regular, si

1. $\mu(K) < \infty$ para todo $K \in \mathcal{B}$ compacto.
2. $\mu(B) = \sup\{\mu(K), K \subseteq B \text{ compacto}\}$
3. $\mu(B) = \inf\{\mu(U), U \supseteq B \text{ abierto}\}$

Dada μ medida (real o compleja), decimos que es μ es regular si $|\mu|$ lo es.

Llamemos $\mathcal{M}_+(A), \mathcal{M}(A), \mathcal{M}_{<\infty}(A), \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(A)$, a los espacios de medidas regulares positivas, regulares con signo, regulares con signo y finitas, regulares complejas y finitas, respectivamente. En los últimos dos de estos espacios, podemos definir

$$\|\mu\| := |\mu|(A)$$

y con estas normas, resultan espacios de Banach. Además, podemos pensar en $\mathcal{M}_{<\infty}(A)$ como subespacio cerrado de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(A)$. En el caso particular de A compacto, $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}_{<\infty}(A)$.

En particular nos interesan las medidas complejas en \mathbb{T} .

2.3. Distribuciones periódicas

Mas adelante en la tesis vamos a trabajar con la transformada de Fourier de funciones periódicas y de su dual, las medidas en \mathbb{T} . A fin de dar una presentación unificada vamos a considerar cierto espacio de distribuciones. Para empezar consideremos los espacios $C_n^\infty := C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$ de funciones infinitamente derivables de \mathbb{T} en \mathbb{C} . Su topología esta dada por una familia de seminormas que lo hacen un espacio localmente convexo. Es un hecho conocido que esta topología es metrizable. Llamamos $\mathcal{D}_{k \times n}$ los espacios de funciones lineales continuas de C_n^∞ en \mathbb{C}^k . En particular llamamos $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{1 \times n}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\infty$. El espacio \mathcal{D} es el que comúnmente se conoce como distribuciones en \mathbb{T} o distribuciones periódicas y es el dual de $C^\infty := C_1^\infty$. A su vez \mathcal{D}_n es el dual de C_n^∞ . No es difícil ver que \mathcal{D}_n es isomorfo a \mathcal{D}^n , es decir, vectores cuyas entradas son distribuciones. Mas aún, $\mathcal{D}_{k \times n}$, resulta isomorfo a $\mathcal{D}^{k \times n}$, es decir, matrices cuyas entradas son distribuciones.

2.3.1. Inmersiones

Dentro de estos espacios podemos considerar como subespacios vectoriales a muchos de los espacios de funciones y medidas que estarán presentes en esta tesis. Por ejemplo, los espacios $L^p(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$ pueden pensarse adentro de \mathcal{D}_n si consideramos la aplicación $f \mapsto \alpha_f$ dada por

$$\alpha_f(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{\mathbb{C}} d\mu(t)$$

donde $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$. Los espacios de funciones $C^k(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$, o $C^k(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ son subespacios vectoriales de $L^p(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$ y pueden pensarse como distribuciones de la misma manera. Las medidas regulares complejas de $\mathcal{M}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ también pueden incluirse en \mathcal{D} mediante la aplicación $\nu \mapsto \alpha_\nu$, tal que

$$\alpha_\nu(g) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) d\nu(t)$$

donde $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Las matrices de medidas regulares $\mathcal{M}(\mathbb{T}, \mathbb{C})^{n \times n}$ pueden incluirse en $\mathcal{D}_{n \times n}$ de manera natural, mediante a la aplicación natural $\nu \mapsto \alpha_\nu$

$$\alpha_\nu(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} d\nu(t) \cdot \varphi(t)$$

donde φ es un vector columna y \cdot es el producto matricial.

2.3.2. Transformada de Fourier de distribuciones

Vamos a considerar la transformada de Fourier de funciones periódicas de distinto tipo, y también de medidas. En líneas generales, nos interesa un operador en el espacio mas general de distribuciones $\mathcal{D}_{k \times n}$. Como dicho espacio es isomorfo a $\mathcal{D}^{k \times n}$, alcanza con definir la transformada en \mathcal{D} y extenderla coordenada a coordenada a $\mathcal{D}^{k \times n}$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, llamamos $\Theta_k \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ a la función $\Theta_k(t) = e^{ikt}$. Dado $\alpha \in \mathcal{D}$, definimos la sucesión $\{\hat{\alpha}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\hat{\alpha}(k) = \alpha(\Theta_{-k})$$

Dada $f \in L^p(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, definimos la transformada de f como la sucesión $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\hat{f}(k) := \hat{\alpha}_f(k) = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} d\mu(t).$$

Análogamente, para $\nu \in \mathcal{M}$, podemos definir

$$\hat{\nu}(k) := \hat{\alpha}_\nu(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikt} d\nu(t).$$

Es interesante caracterizar la imagen de \mathcal{D} bajo la transformada de Fourier.

Definición 2.3.1. Decimos que una sucesión $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ es de *crecimiento lento* si existe un $C > 0$ y un $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$|a_k| \leq C|k|^N$$

para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Llamamos $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, al espacio de tales sucesiones.

Podemos definir en $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ un producto: dadas $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $ab(k) := a(k)b(k)$. Es fácil verificar ab es un elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.3.1. *La transformada de Fourier es una biyección entre \mathcal{D} y $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.*

Teorema 2.3.2. *Sea $a \in L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ entonces*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$$

define una función $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ y la convergencia es absoluta y uniforme en \mathbb{T} . Más aun, dado $N \in \mathbb{N}$, si $\{k^N a_k\} \in L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ entonces $f \in C^N(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

La demostración a ambos teoremas esta en [33].

Llamemos $\mathcal{S}_n(\mathbb{Z})$ al conjunto de sucesiones de vectores $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de \mathbb{C}^n tales que $\{(a_k)_i\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ para $i = 1, \dots, n$. Análogamente llamemos $\mathcal{S}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ al conjunto de sucesiones de matrices $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}^{m \times n}$ tales que $\{(A_k)_{ij}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Observemos que, por como definimos la transformada en $\mathcal{D}_{m \times n}$, resulta que la transformada establece una biyección entre $\mathcal{D}_{m \times n}$ y $\mathcal{S}_{m \times n}(\mathbb{Z})$.

2.3.3. Convolutiones

Nos interesa poder definir la noción de convolución entre distribuciones. Una de las formas en que podemos hacerlo es valernos de la definición anterior.

Definición 2.3.2. Dadas $f, g \in \mathcal{D}$, definimos $f * g \in \mathcal{D}$ como la distribución cuya transformada es $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Más generalmente, dados $f \in \mathcal{D}_{k \times n}$ y $g \in \mathcal{D}_{n \times h}$ podemos definir $f * g \in \mathcal{D}_{k \times h}$ como el vector de distribuciones tal que $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$ donde el producto es producto de matrices para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Esta definición coincide con la definición usual en los casos en que las distribuciones puedan representarse como funciones. Un caso que será de

interés es la convolución entre una matriz de medidas en \mathbb{T} , $\lambda \in \mathcal{M}^{n \times n}$ y una función periódica $f \in C_n$. En ese caso, $\lambda * f \in \mathcal{D}_n$ es una distribución que puede representarse como una función dada por

$$\lambda * f(t) = \int_{\mathbb{T}} d\lambda(s) f(t-s)$$

Definición 2.3.3. Definimos el operador de convolución $*$: $L_n \times C_n \rightarrow C_n$ de la siguiente forma

$$(\Lambda * u)(t) := \int_{\mathbb{T}} d\lambda(s) \cdot u(t-s)$$

donde $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{T}, \mathbb{C})^{n \times n}$ es la matriz de medidas regulares que representa a Λ .

Para $\Lambda \in L_n$ fijo, llamamos $\tilde{\Lambda}$ al operador de C_n en si mismo tal que $\tilde{\Lambda}(u) = \Lambda * u$

Observemos que si pensamos en términos de distribuciones, es decir, a $u \in \mathcal{D}_n$ y $\lambda \in \mathcal{D}_{n \times n}$, esta definición coincide con la convolución de distribuciones.

2.3.4. Derivadas

Uno de los aspectos mas importantes de la teoría de distribuciones periódicas, es que toda distribución $f \in \mathcal{D}$ tiene una distribución derivada $f' \in \mathcal{D}$. Supongamos que f puede representarse por una función periódica derivable que llamaremos también f . Luego, dada $\varphi \in C^\infty$ tenemos que f' aplicada a φ puede calcularse mediante la integral, $\int_{\mathbb{T}} f'(t)\varphi(t)dt$. Pero aplicando integración por partes, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} f'(t)\varphi(t)d\mu(t) = - \int_{\mathbb{T}} f(t)\varphi'(t)d\mu(t)$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.3.4. Dada $f \in \mathcal{D}$, llamamos $f' \in \mathcal{D}$ a la distribución definida por $f'(\varphi) := -f(\varphi')$ para todo $\varphi \in C^\infty$. Mas generalmente, podemos definir la derivada de cualquier $f \in \mathcal{D}_{k \times n}$ de la misma manera, que a su vez coincide en derivar cada componente si pensamos a f como una matriz de distribuciones.

Proposición 2.3.1. Dada $f \in \mathcal{D}$, vale que $\hat{f}'(k) = -ik\hat{f}(k)$.

2.3.5. Retardos como convoluciones

Un tipo de ecuaciones funcionales que será importante para esta tesis es el de las ecuaciones con retardo. Por ejemplo, consideremos la siguiente ecuación diferencial escalar

$$u'(t) = au(t - \tau), \quad (2.1)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $0 < \tau < 2\pi$. Diremos que esta es una ecuación con retardo discreto τ . Otro tipo de ecuaciones de interés son aquellas donde $u'(t)$ depende de $u|_{[t-\tau, t]}$. Por ejemplo, la ecuación

$$u'(t) = \int_{-\tau}^0 u(t+s)\beta(s)ds \quad (2.2)$$

donde $\beta : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ es alguna función. Podemos pensar ambas ecuaciones en un marco común. Dada una medida $\nu \in \mathcal{M}([-\tau, 0])$, podemos escribir ambas ecuaciones como

$$u'(t) = \int_{-\tau}^0 u(t+s) d\nu(s) \quad (2.3)$$

eligiendo apropiadamente ν . Por ejemplo, para (2.1), tomamos $\nu = a\delta_{-\tau}$. Mas aún, podemos asociar con ν una medida $\tilde{\lambda} \in \mathcal{M}([0, \tau])$, tal que dado $A \subset [0, \tau]$ medible, $\tilde{\lambda}(A) = -\nu(-A)$. Además, podemos extender $\tilde{\lambda}$ a una medida $\lambda \in \mathcal{M}([0, 2\pi])$, de manera trivial mediante la relación $\lambda(A) = \tilde{\lambda}(A \cap [0, \tau])$ para todo $A \subset [0, 2\pi]$. Luego resulta que la expresión del lado derecho de (2.3) puede pensarse como una convolución:

$$\int_{-\tau}^0 u(t+s) d\nu(s) = \int_0^{\tau} -u(t-s)d\nu(-s) \quad (2.4)$$

$$= \int_0^{\tau} u(t-s) d\tilde{\lambda}(s) \quad (2.5)$$

$$= \int_0^{2\pi} u(t-s) d\lambda(s) \quad (2.6)$$

Si nuestro interés es estudiar soluciones periódicas de (2.3), podemos formularla como una ecuación funcional en $C(\mathbb{T})$, dada por

$$L(u) = \lambda * u. \quad (2.7)$$

donde $L(u) = u'$. Esta formulación incluye como casos particulares a ecuaciones que dependen de retardos (discretos o distribuidos) pero es mas general en tanto que λ puede ser cualquier medida en $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. Esta idea puede extenderse a ecuaciones más generales. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.3.1. Consideremos el sistema de ecuaciones con múltiples retardos $0 < \tau_{ij} < 2\pi$,

$$u_1'(t) = a_{11}u_1(t - \tau_{11}) + a_{12}u_2(t - \tau_{12}) \quad (2.8)$$

$$u_2'(t) = a_{21}u_1(t - \tau_{21}) + a_{22}u_2(t - \tau_{22}) \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

Si nos interesa hallar soluciones periódicas de (2.8), podemos considerar la ecuación funcional en $C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ dada por

$$L(u) = \lambda * u$$

donde $u = (u_1, u_2)$, $L(u) = u'$ y $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{T})^{2 \times 2}$ es una matriz de medidas dada por

$$\lambda = \begin{pmatrix} a_{11}\delta_{-\tau_{11}} & a_{12}\delta_{-\tau_{12}} \\ a_{21}\delta_{-\tau_{21}} & a_{22}\delta_{-\tau_{22}} \end{pmatrix}$$

2.4. Operadores

Vamos a estudiar ciertas propiedades de operadores entre espacios.

2.4.1. Operadores compactos

Definición 2.4.1. Decimos que el operador lineal $L : X \rightarrow Y$ es compacto si $f(B)$ es relativamente compacto (es decir $\text{cl } f(B)$ es compacto) donde B es la bola unitaria de X .

Proposición 2.4.1. *El espacio $\mathcal{K}(X, Y)$ de operadores compactos es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$. En el caso particular en que $X = Y$ tenemos que $\mathcal{L}(X)$ es un álgebra con la composición y $\mathcal{K}(X)$ es un ideal bilátero dentro de este álgebra.*

Proposición 2.4.2. *Dado X un Banach real y $K : X \rightarrow X$ un operador compacto, el operador $K^{\mathbb{C}} : X^{\mathbb{C}} \rightarrow X^{\mathbb{C}}$ también es compacto.*

2.4.2. Operadores de Fredholm

Decimos que un operador \mathcal{F} tiene conúcleo $\text{coker}(\mathcal{F})$ (cokernel en inglés), si su imagen es un subespacio cerrado y complementado con complemento $\text{coker}(\mathcal{F})$.

Definición 2.4.2. Un operador $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$ se dice de Fredholm si tiene conúcleo y $\dim(\ker(\mathcal{F}))$ y $\dim(\operatorname{coker}(\mathcal{F}))$ son finitas. Llamamos índice de Fredholm a $\operatorname{ind}(\mathcal{F}) := \dim(\ker(\mathcal{F})) - \dim(\operatorname{coker}(\mathcal{F}))$.

Nos interesa el siguiente resultado

Teorema 2.4.1. Dado $\mathcal{C} \in \mathcal{K}(X)$ un operador compacto, el operador $\mathcal{F} = I - \mathcal{C}$ es un operador de Fredholm de índice 0.

2.4.3. Espectro

Definición 2.4.3. Dado X un espacio de Banach sobre \mathbb{K} y $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ un operador continuo llamamos conjunto resolvente a $\rho(\mathcal{F}) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \mathcal{F} - \lambda I \text{ es inversible}\}$ y espectro a

$$\sigma(\mathcal{F}) = \mathbb{K} - \rho(\mathcal{F}) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \mathcal{F} - \lambda I \text{ no es inyectiva o no es sobreyectiva}\}$$

Proposición 2.4.3. Si $\mathcal{C} : X \rightarrow X$ es un operador lineal compacto, entonces $\sigma(\mathcal{C}) = \{0\} \cup \{\lambda_i\}_{i \in I}$ donde I es finito o numerable en cuyo caso $|\lambda_i| \rightarrow 0$. Además, para todo λ_i existe un $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $\ker((\mathcal{C} - \lambda_i)^{k_i}) = \ker((\mathcal{C} - \lambda_i)^{k_i+l})$ para todo $l \in \mathbb{N}$, y tal que $\dim(\ker((\mathcal{C} - \lambda_i)^{k_i})) = d_i < \infty$.

Definición 2.4.4. Llamamos a d_i la multiplicidad algebraica de λ_i : $d_i = m_a(\lambda_i)$

Corolario 2.4.1. Supongamos que $\mathcal{F} = I - \mathcal{C}$, entonces $\sigma(\mathcal{F}) = 1 - \sigma(\mathcal{C})$ y por lo tanto hay solo finitos elementos en el espectro de \mathcal{F} con $\lambda < 0$.

Esta ultima proposición puede servir para definir el índice de Leray-Schauder alrededor de 0 como

$$\operatorname{ind}_{LS}(\mathcal{F}) := \prod_{\lambda \in \sigma(\mathcal{F}) \cap (-\infty, 0)} (-1)^{m_a(\lambda)}.$$

En el caso de dimensión finita podemos pensar $\mathcal{F} \in L(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$, podemos asociar \mathcal{F} con una matriz. Si 0 no es autovalor de dicha matriz, el índice coincide con $\operatorname{sgn} \det \mathcal{F}$.

En algunas situaciones tenemos que, a pesar de que el operador K este definido en un Banach real X , nos interesa hablar del espectro complejo.

Definición 2.4.5. Llamamos *espectro complejo* de K a $\sigma_{\mathbb{C}}(K) := \sigma(K^{\mathbb{C}})$

2.4.4. Operadores lineales discontinuos

Es común encontrarse en el contexto de ecuaciones diferenciales con operadores lineales $L : \text{dom}(L) \subset X \rightarrow Y$ que son discontinuos.

Definición 2.4.6. Un operador $L : \text{dom}(L) \subset X \rightarrow Y$ se dice *cerrado*, si su gráfico es un subconjunto cerrado de $X \oplus Y$. Equivalentemente, si dada una sucesión $\{x_n\}$ en X y un $y \in Y$ tales que $(x_n, L(x_n)) \rightarrow (x, y)$, entonces, $x \in \text{dom}(L)$ y $L(x) = y$.

Lema 2.4.1. Si L es cerrado $\Rightarrow \ker(L)$ es un subespacio cerrado de X .

Demostración. Se deduce trivialmente de la definición. \square

Ejemplo 2.4.1. El ejemplo paradigmático es el operador de derivada $L : C^1([a, b]) \subset C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ dado por $Lx = x'$. En este caso, el operador L es cerrado y su dominio es denso en $C([a, b])$. Cabe aclarar que $C^1([a, b])$ no resulta un Banach con la norma que hereda como subespacio de $C([a, b])$.

Ejemplo 2.4.2. Dado Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , definimos

$$\Delta : C^2(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}), \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{ii}$$

Ejemplo 2.4.3. Dado Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , definimos

$$\Delta : H^2(\bar{\Omega}) \subset L^2(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\bar{\Omega}),$$

donde Δu es la única función en $L^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi \, d\mu = \int_{\Omega} u \Delta \varphi \, d\mu$$

Para todo $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$.

Los siguientes operadores serán de importancia más adelante en esta tesis:

Definición 2.4.7. Dadas matrices $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definimos el polinomio $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$P(x) = \sum_{k=1}^m A_k x^k$$

donde $(x_1, \dots, x_n)^k := (x_1^k, \dots, x_n^k)$. Si A_m es inversible, diremos que P es grado m con *matriz principal* A_m . Definimos el polinomio diferencial $P(\partial) : C^m(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ dado

$$P(\partial)(u) = \sum_{k=1}^m A_k u^{(k)}.$$

Ejemplo 2.4.4. Por ejemplo $L : C^2([a, b], \mathbb{R}^2) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^2)$ dado por

$$L(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}''$$

es un polinomio diferencial de grado 2 con matriz principal $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposición 2.4.4. Si $L : \text{dom}(L) \subset X \rightarrow Y$ es cerrado, podemos definir una norma en $\text{dom}(L)$, dada por

$$\|x\|_L := \|x\|_X + \|Lx\|_Y.$$

El espacio $(\text{dom}(L), \|\cdot\|_L)$ resulta un espacio de Banach. L está totalmente definida en dicho espacio y es continua.

Definición 2.4.8. Supongamos L como en la proposición anterior y $T : \text{dom}(T) \subset X \rightarrow Y$. Diremos que T es L -compacta, si $\text{dom}(T) \supset \text{dom}(L)$ y

$$T : (\text{dom}(L), \|\cdot\|_L) \rightarrow Y$$

es compacta.

Veremos a continuación una clase importante de operadores discontinuos:

Definición 2.4.9. Un operador lineal discontinuo $L : \text{dom}(L) \subset X \rightarrow Y$ se dice de Fredholm:

1. L es un operador cerrado.
2. $\text{dom}(L)$ es denso en X .
3. $\text{im}(L)$ es cerrado en Y
4. $\dim(\ker(L)) < \infty$ y $\text{codim}(\text{im}(L)) < \infty$.

El índice se define igual al caso continuo.

Llamaremos $\text{Fr}(X, Y)$ a la clase de tales operadores. Dados operadores $A \in \text{Fr}(X_1, X_2)$ y $B \in \text{Fr}(X_2, X_3)$, podemos definir su composición $BA : \text{dom}(BA) \subset X_1 \rightarrow X_3$ donde $\text{dom}(BA) = \{x \in \text{dom}(A), A(x) \in \text{dom}(B)\}$. Con estas definiciones tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.4.5. $BA \in \text{Fr}(X_1, X_3)$ y $\text{ind}(BA) = \text{ind}(A) + \text{ind}(B)$

Demostración. Ver [59] teorema (7.3) página 157. \square

Ejemplo 2.4.5. El caso paradigmático que será de interés para nosotros es

$$\partial : C^1(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T}), \quad \partial(u) = u'$$

Es fácil corroborar que $\ker(\partial)$ son las funciones constantes y $Z := \text{im}(\partial) = \{u \in C(\mathbb{T}), \int_0^{2\pi} u(t) dt = 0\}$. Tienen dimensión y codimensión 1 respectivamente. Es un resultado clásico del análisis funcional que ∂ es un operador cerrado y por tanto ∂ es Fredholm y $\text{ind}(\partial) = 0$. Consideremos la proyección al núcleo $\text{Pr}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt$. Podemos definir

$$K : Z \rightarrow C(\mathbb{T}), \quad K(u) = \int_0^t u(s) ds - \text{Pr} \left(\int_0^t u(s) ds \right).$$

Resulta que $\text{im}(K) = Z \cap C^1(\mathbb{T})$. El teorema de Arzela-Ascoli nos dice que K es un operador compacto. Además, tenemos que

$$(\partial \circ K)(z) = z, \quad \forall z \in Z \quad \text{y} \quad (K \circ \partial)(u) = u - \text{Pr}(u), \quad \forall u \in C^1(\mathbb{T})$$

Usando la proposición (2.4.5), vemos que dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\partial^m : C^m(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T}), \quad \partial^m(u) = u^{(m)}$$

también es Fredholm de índice 0. Además, tenemos que el operador $K^m : Z \rightarrow C(\mathbb{T})$ está bien definido, es compacto y

$$(\partial^m \circ K^m)(z) = z, \quad \forall z \in Z \quad \text{y} \quad (K^m \circ \partial^m)(u) = u - \text{Pr}(u), \quad \forall u \in C^m(\mathbb{T}).$$

Trabajando coordenada a coordenada, podemos extender ∂ y K a funciones que toman valores en \mathbb{R}^n y cumplen las mismas propiedades.

Proposición 2.4.6. Sea $F : \text{dom}(F) \subset X \rightarrow Y$ un operador Fredholm y T un operador F -compacto. Entonces

$$F + T : \text{dom}(F) \subset X \rightarrow Y$$

es Fredholm y $\text{ind}(F + T) = \text{ind}(F)$.

Demostración. Ver [59] teorema (7.10) página 162. \square

Ejemplo 2.4.6. Consideremos los espacios $C := C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ y $C^k := C^k(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$. Sea $L : C^m \subset C \rightarrow C$, dada por

$$L(u) = P(\partial)(u) + \Lambda * u$$

donde P es un polinomio de grado m , dado por

$$P(x) = \sum_{j=1}^m A_j x^j$$

y $\Lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{T})^{n \times n}$. Observemos que podemos suponer que no hay término de orden 0 en el polinomio diferencial, definiendo Λ apropiadamente. Resulta que $\text{dom}(L) = C^m$.

Lema 2.4.2. L es Fredholm de índice 0. Más aun, dado un subespacio Z tal que $Z \oplus \ker(L) = C$, podemos definir $K : \text{im}(L) \rightarrow Z \cap \text{dom}(L)$ inversa a derecha, que resulta compacta.

Demostración. Vamos a usar la proposición anterior con $F : C^m \subset C \rightarrow C$ dada por

$$F(u) = A_m u^{(m)}$$

y $T : C^{(m-1)} \subset C \rightarrow C$ dada por

$$T(u) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j u^{(j)} + \Psi * u.$$

Veamos que T es F -compacta:

Supongamos que $\{u_n\}$ es una secuencia acotada en $\|\cdot\|_F$. Es decir, existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|_\infty + \|A_m u_n^{(m)}\|_\infty < C$ para todo n . Queremos ver que $\{T(u_n)\}$ tiene una subsucesión convergente. Como A_m es inversible, tenemos que para algún $C' > 0$, $\|u_n^{(m)}\|_\infty < C'$. Con las definiciones de (2.4.5), tenemos que para $1 \leq j \leq m$, vale que

$$K^{m-j}(u_n^{(m)}) = u_n^{(j)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, tenemos que existe una constante $C'' > 0$ tal para $1 \leq j < m$,

$$\|u_n^{(j)}\|_\infty = \|K^{m-j}(u_n^{(m)})\|_\infty \leq C'', \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

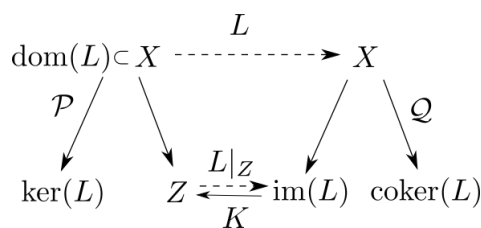
En particular $\{u_n^{(m-1)}\}$ es un conjunto acotado, y por Arzela-Ascoli, tenemos que existe una subsucesión $u_{n_k}^{(m-1)}$ convergente. Más aún, aplicando K iterativamente, tenemos que u'_{n_k} es convergente, digamos $u'_{n_k} \rightarrow w$, y que $u_{n_k}^{(j)} \rightarrow w^{(j-1)}$ para $1 \leq j \leq m-1$. Como $\{u_{n_k}\}$ es acotado, podemos suponer, pasando a otra subsucesión de ser necesario, que $u_{n_k} \rightarrow u \in C$, y como

∂ es cerrado, tenemos que $u' = w$. Es decir, u_{n_k} y sus derivadas hasta orden $m - 1$ convergen uniformemente. Finalmente, como la convolución con Ψ es un operador acotado, tenemos que $\{T(u_{n_k})\}$ es convergente. Es decir, T es F -compacta y por ende $L = T + F$ es Fredholm de índice 0.

Finalmente, dado Z un complemento de $\ker(L)$ en C , podemos volver $Z \cap \text{dom}(L)$ un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_L$. Como $L|_{Z \cap \text{dom}(L)}$ es inyectiva y continua con dicha norma, entonces es abierta. Por ende su inversa es acotada. El teorema de Arzela-Ascoli nos garantiza entonces que K resulta compacta. En efecto, dada una sucesión acotada, $\{y_n\}$ en $\text{im}(L)$, tenemos que $x_n = K(y_n)$ son tales que $\|x_n\|_L \leq C$ para alguna $C > 0$. Procediendo iterativamente como antes, vemos que $\|x'_n\| \leq C'$ para alguna $C' > 0$ y, por Arzela-Ascoli, $\{x_n\} = \{K(y_n)\}$ es precompacto. \square

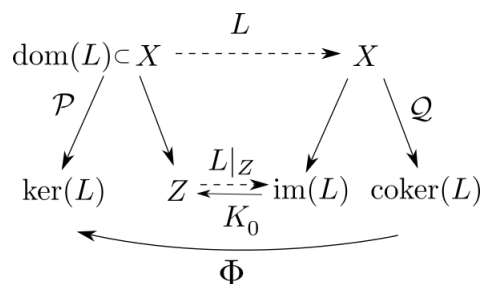
2.4.5. Operadores no acotados con inverso compacto

En el contexto de ecuaciones diferenciales nos vamos a encontrar muy a menudo con la siguiente situación. Supongamos un operador discontinuo Fredholm L . Supongamos que $\ker(L)$ tiene un complemento Z . Entonces $L|_Z : Z \cap \text{dom}(L) \rightarrow \text{im}(L)$ es una biyección. Supongamos además que tiene una inversa compacta $K : \text{im}(L) \rightarrow Z$. La situación puede describirse bien con un diagrama.

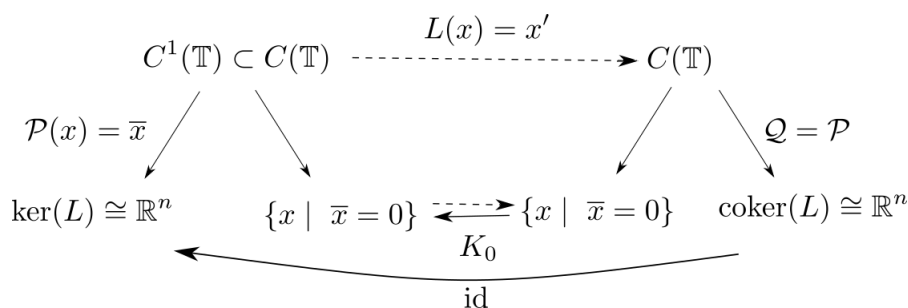


Observación 2.4.1. Usaremos líneas punteadas en los diagramas para operadores definidos en un subespacio denso.

Los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} son las proyecciones de X respecto de las descomposiciones $X = \ker(L) \oplus Z$ y $X = \text{im}(L) \oplus \text{coker}(L)$. Es decir, si $x = k + z$ con $k \in \ker(L)$ y $z \in Z$ entonces $\mathcal{P}(x) = k$ (análogamente para \mathcal{Q} en la otra descomposición). En los casos en que el índice de L es mayor o igual a 0, tenemos que $\dim(\ker(L)) \geq \dim(\text{coker}(L))$. Por lo tanto podemos agregar al diagrama un monomorfismo $\Phi : \text{coker}(L) \rightarrow \ker(L)$ que para el caso de índice 0 también resulta isomorfismo.



Ejemplo 2.4.7. Consideremos la situación del operador $L(x) = x'$ en el espacio de funciones periódicas. Tenemos el siguiente diagrama



Donde $\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) dt$ y

$$K_0(x) = \int_0^t x(s) ds - \overline{\int_0^t x(s) ds}.$$

Proposición 2.4.7. La composición $K_0 \circ L$ coincide con la proyección sobre Z dada por $I - \mathcal{P}$ en su dominio de definición. Es decir

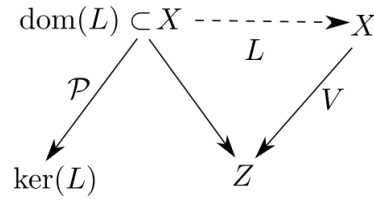
$$K_0 \circ L = (I - \mathcal{P})|_{\text{dom}(L)}$$

Demostración. Dado $x \in \text{dom}(L)$, tenemos que $x = k + z$ con $k \in \ker(L)$ y $z \in Z \cap \text{dom}(L)$. Aplicando $K_0 \circ L$ tenemos que $K_0 \circ L(x) = K_0 \circ L(z)$. Pero como $L|_{Z \cap \text{dom}(L)} = K_0^{-1}$, entonces $K_0 \circ L(z) = z$, y por ende

$$K_0 \circ L(x) = z = (I - \mathcal{P})(x)$$

□

En los casos en que $\dim(\text{coker}(L)) = 0$ el diagrama se puede simplificar de la siguiente manera.



2.5. Látices de Banach

Definición 2.5.1. Un espacio de Riesz es un par (X, \leq) , donde X es un Banach equipado con un orden parcial (\leq) y se cumplen las siguientes condiciones.

- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall x, y, z \in X$.
- $0 \leq \alpha, x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y, \forall x, y \in X$.
- Dados dos vectores $x, y \in X$ existe supremo (denotado $x \vee y$) en X con respecto al orden.

Denotamos el ínfimo $x \wedge y$. Es fácil ver que para todo $x, y \in X$ existe $x \wedge y$ y vale que $x \wedge y = -(-x \vee -y)$.

Definición 2.5.2. Definimos las siguientes tres funciones:

$$|x| := x \vee -x \quad x^+ := 0 \vee x \quad x^- := 0 \vee -x.$$

Proposición 2.5.1. Para todo $x \in X$ valen

1. $x \leq |x|$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $x = x^+ - x^-$
4. $|x| = x^+ + x^-$
5. $0 \leq |x|$.
6. Si $0 \leq x$, entonces $|x| = x$.
7. Si $|x| = 0$ entonces $x = 0$.

Demostración. Las afirmaciones (1) y (2) se deducen manera directa de la definición de módulo. Para (3), consideremos

$$x^+ - x^- = (0 \vee x) - (0 \vee -x) = (0 \vee x) + (0 \wedge x) = 0 + x = x$$

Para (4) observemos que

$$x^+ + x^- = x + 2x^- = x + (0 \vee -2x) = (x + 0) \vee (x - 2x) = x \vee -x = |x|$$

Las afirmaciones (5) y (6) se siguen inmediatamente de (4). Para (7), usamos que si $|x| = 0$ entonces $x \leq 0$ y $-x \leq 0$ y por ende $0 \leq x \leq 0$. La antisimetría de \leq implica $x = 0$. \square

Definición 2.5.3. Diremos que (X, \leq) es un *látice de Banach* si es un espacio de Riesz y además

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

Definición 2.5.4. Dado (X, \leq) un látice de Banach, diremos que un operador $A : X \rightarrow X$, es positivo si $0 \leq x \Rightarrow 0 \leq A(x)$. Si el operador además es lineal, resulta ser creciente: $x \leq y \Rightarrow A(x) \leq A(y)$.

Proposición 2.5.2. Si A es positivo, entonces $|A(x)| \leq A(|x|)$.

Demostración. Sabemos por (2.5.1) que $x \leq |x|$. Aplicando A lado a lado tenemos que $A(x) \leq A(|x|)$. Análogamente, tenemos que $-A(x) = A(-x) \leq A(|-x|) = A(|x|)$. Es decir, $A(|x|)$ es cota superior tanto de $A(x)$ como de $-A(x)$. Luego, como $|A(x)|$ es la menor cota superior para $A(x)$ y $-A(x)$, el resultado se sigue. \square

Observación 2.5.1. Vale la pena recordar que existe otra noción de operador positivo en el contexto de espacios de Hilbert: dado H un espacio de Hilbert y $K : H \rightarrow H$ un operador, decimos que es positivo si $\langle x; K(x) \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$. En los casos en que tanto la estructura de látice como la de espacio de Hilbert están presentes, puede haber una relación entre las dos nociones de positividad de un operador si se da cierta compatibilidad entre el cono de elementos positivos en el látice con el producto interno. Sin embargo ambas nociones son, en términos generales, independientes.

Capítulo 3

Análisis no lineal

En este capítulo repasamos algunos resultados y definiciones conocidos del análisis no lineal en dimensión infinita. Las demostraciones serán omitidas y pueden consultarse en libros clásicos del área como [18], [68] o [41].

3.1. Operadores no lineales

3.1.1. Operadores compactos

Definición 3.1.1. Decimos que un operador $C : X \rightarrow Y$ es compacto, si $C(A) \subset Y$ es precompacto en Y para todo $A \subset X$.

Proposición 3.1.1. Sea $\Omega \subset X$ un abierto acotado y sea $C : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Entonces, existen subespacios $Y_i \subset Y$ de dimensión finita, tales que $Y_i \subseteq Y_{i+1}$ y operadores $C_i : X \rightarrow Y_i$ tales que

$$\sup_{x \in \Omega} \|C_i(x) - C(x)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

3.1.2. Diferenciabilidad de Frechet

Definición 3.1.2. Dado un operador $F : X \rightarrow Y$ y un $x \in X$, definimos que F es diferenciable Frechet en x , si existe un operador lineal $D_x F \in L(X, Y)$ tal que

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\|F(x + \psi) - F(x) - D_x F(\psi)\|_Y}{\|\psi\|_X}.$$

Al operador $D_x F$ lo denominamos la derivada de Frechet en x .

Esta noción de diferenciabilidad claramente extiende a la diferenciabilidad en dimensión finita y comparte muchas de las propiedades.

Proposición 3.1.2. *Dada F diferenciable Frechet en x , y dada $B_M \subset X$ la bola de radio M , vale que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta_{\varepsilon, M} > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces*

$$\left\| \frac{F(x + h\varphi) - F(x) - hD_x F(\varphi)}{h} \right\| < \varepsilon$$

para todo $\varphi \in B_M$.

Proposición 3.1.3. Diferencial de un operador lineal: *Si $F \in L(X, Y)$ entonces es diferenciable Frechet en todo punto y $D_x F(\varphi) = F(\varphi)$*

Ejemplo 3.1.1. Sea $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ es operador definido por $F(x) = x(a)$. Observemos que el rango de este operador son las funciones constantes. Cumple que

$$D_x F(\varphi) = F(\varphi) = \varphi(a)$$

Proposición 3.1.4. Regla de la cadena: *Si tenemos $F : X \rightarrow Y$ diferenciable Frechet en x_0 y $\mathcal{K} : Y \rightarrow Z$ diferenciable Frechet en $y_0 = F(x_0)$, entonces $\mathcal{K} \circ F$ es diferenciable Frechet en x_0 y*

$$D_{x_0}(\mathcal{K} \circ F) = D_{y_0}\mathcal{K} \circ D_{x_0}F$$

Ejemplo 3.1.2. Dada $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Definimos $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ a partir de

$$F(x)(t) = \int_a^t g(x(s))ds.$$

Entonces F puede escribirse como la composición de $V \circ N$ donde

$$V(y)(t) := \int_a^t y(s)ds, \quad N(x)(t) := g(x(t))$$

Es claro que V es diferenciable Frechet en todo punto de $C[a, b]$ por ser lineal. Se puede ver también que N es diferenciable en todo $C[a, b]$ y cumple que

$$D_x N(\varphi)(t) = g'(x(t))\varphi(t)$$

Entonces, combinando los resultados anteriores, tenemos que

$$D_x F(\varphi)(t) = [D_{N(x)}V \circ D_x N](\varphi)(t) = V(D_x N(\varphi))(t) = \int_0^t g'(x(s))\varphi(s)ds.$$

Proposición 3.1.5. *Si $\mathcal{C} : X \rightarrow Y$ es un operador no lineal compacto y diferenciable Frechet en x_0 , entonces $D_x \mathcal{C}(x_0)$ es un operador lineal compacto.*

Definición 3.1.3. Sea $F : X \times Y \rightarrow Z$. Supongamos que F es diferenciable Frechet en un abierto $U \subset X \times Y$. Dado $(x_0, y_0) \in U$ definimos los operadores de derivada parcial $D_{(x_0, y_0)}^x F, D_{(x_0, y_0)}^y F : X \times Y \rightarrow Z$ de la manera usual. Decimos que F es de clase C^1 en U si la aplicación

$$U \rightarrow L(X \times Y, Z) \quad (3.1)$$

$$(x_0, y_0) \mapsto D_{(x_0, y_0)}^x F \quad (3.2)$$

es continua y también lo es la aplicación análoga para $D_{(x_0, y_0)}^y F$.

Enunciemos el **teorema de la función implícita** en el contexto de espacios de Banach.

Teorema 3.1.1. Sean X, Y y Z espacios de Banach y sea U un abierto de $X \times Y$. Sea $F \in C^1(U, Z)$. Si $(\underline{x}, \underline{y}) \in U$ es un punto tal que $F(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ y $D^x(\underline{x}, \underline{y})F$ es un isomorfismo lineal entre X y Z , entonces existen entornos abiertos G y H de \underline{y} y \underline{x} , respectivamente, y una única función $C^1, \varphi : G \rightarrow H$ tal que $\varphi(\underline{y}) = \underline{x}$ y $F(\varphi(\underline{y}), \underline{y}) = 0$, para todo $\underline{y} \in G$.

3.2. Ecuaciones diferenciales

Como mencionamos en la introducción vamos a ver a las ecuaciones diferenciales desde un punto de vista funcional. Es decir como ecuaciones funcionales en espacios de Banach. El primer ejemplo que tenemos de este enfoque es el problema periódico para EDOs

Ejemplo 3.2.1.

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (3.3)$$

$$x(0) = x(T) \quad (3.4)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es T -periódica en la primera coordenada. Este problema se puede formular, en términos funcionales, como

$$L(x) = N(x) \quad (3.5)$$

Donde

$$L : C^1(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T}), \quad L(x) = x'$$

y

$$N : C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T}), \quad N(x)(t) = f(t, x(t))$$

Decimos que N es el operador de Nemytskii asociado a la no linealidad $f(t, x)$.

Observación 3.2.1. El problema (3.2.1) puede formularse como una ecuación abstracta en otros espacios de Banach, y los operadores L y N deben ser modificados acorde a los espacios en que se trabaje.

Ejemplo 3.2.2. Ecuación de segundo orden con condición de tipo Neumann

$$x''(t) = g(x(t)) \quad (3.6)$$

$$x(0) = x(1) = 0 \quad (3.7)$$

En este caso, podemos pensar en $N(x) = g \circ x$ definida en $X := \{x \in C[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$ y $L(x) = x''$ definida en un subespacio denso de X .

3.3. Descomposición de Lyapunov-Schmidt

Supongamos que tenemos una ecuación de tipo

$$L(x) = N(x) \quad (3.8)$$

en un espacio de Banach X . Queremos formular una ecuación equivalente de la forma

$$x = K(x) \quad (3.9)$$

para $K : X \rightarrow X$ compacto. Esta formulación, que llamaremos **ecuación de punto fijo**, es conveniente para el uso de métodos topológicos como teoremas de punto fijo y teoría de grado. Diremos que K es un **operador de punto fijo** para (3.8). Presentaremos a continuación una manera estándar de hacer esta reformulación.

Definición 3.3.1. Llamamos *diagrama de Lyapunov-Schmidt* al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 \text{dom}(L) \subset X & \xrightarrow{\quad \text{-----} \quad} & X & & \\
 \mathcal{P} \swarrow & & \downarrow N & & \searrow \mathcal{Q} \\
 \ker(L) & & Z & \xrightarrow{\quad L|_Z \quad} & \text{im}(L) & \text{coker}(L) \\
 & & \leftarrow \text{-----} & & \\
 & & K_0 & & \\
 & \longleftarrow \text{-----} & & & \\
 & \Phi & & &
 \end{array}$$

donde

- L es discontinua Fredholm de índice mayor o igual a 0.
- N es un operador no lineal
- Φ es un monomorfismo (en el caso índice 0 es además isomorfismo).
- K_0 es un operador compacto tal que $L \circ K_0 = \text{id}_{\text{im}(L)}$
- \mathcal{P} y \mathcal{Q} son proyectores sobre $\ker(L)$ y $\text{coker}(L)$ respectivamente tales que $\ker(\mathcal{P}) = Z$ y $\ker(\mathcal{Q}) = \text{im}(L)$.

Proposición 3.3.1. *Supongamos que tenemos un diagrama de Lyapunov-Schmidt. Entonces, x es solución de (3.8) si y solo si se cumplen las siguientes ecuaciones:*

$$x - \mathcal{P}(x) = K_0(N(x)) \quad \wedge \quad \mathcal{Q}(N(x)) = 0.$$

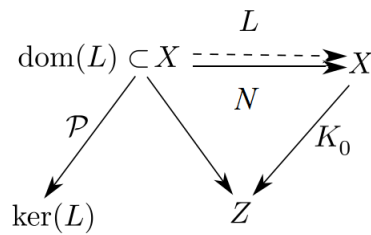
Más aún, el operador $K : X \rightarrow X$ dado por

$$K(x) = \mathcal{P}(x) + \Phi \circ \mathcal{Q}(N(x)) + K_0(N(x) - \mathcal{Q}(N(x)))$$

es un operador compacto y es de punto fijo para (3.8).

Llamaremos **operador de Lyapunov-Schmidt** (asociado al correspondiente diagrama) al operador K de la proposición anterior.

Corolario 3.3.1. *En el caso particular en que L sea sobreyectivo, tenemos que $\text{coker}(L) = \{0\}$. Por tanto \mathcal{Q} y Φ son triviales. El diagrama de Lyapunov-Schmidt puede simplificarse a*



El operador de punto fijo de Lyapunov-Schmidt resulta ser

$$K(x) = \mathcal{P} + K_0 \circ N.$$

Ejemplo 3.3.1. Volviendo sobre el ejemplo 3.2.1, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
C^1(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T}) & \xrightarrow{L(x) = x'} & C(\mathbb{T}) & & \\
\mathcal{P}(x) = \bar{x} \swarrow & & \searrow & & \mathcal{Q} = \mathcal{P} \\
\ker(L) \cong \mathbb{R}^n & & \{x \mid \bar{x} = 0\} & \xleftrightarrow{K_0} & \{x \mid \bar{x} = 0\} & \cong \text{coker}(L) \cong \mathbb{R}^n \\
& & \longleftarrow & & \longleftarrow & \\
& & \text{id} & & &
\end{array}$$

que extiende con N el presentado en el ejemplo 2.4.7.

El operador de Lyapunov-Schmidt asociado a este diagrama es

$$K(x) = \bar{x} + \overline{N(x)} + K_0(N(x) - \overline{N(x)})$$

3.4. Teoría de Grado

3.4.1. Un poco de historia

Para desarrollar un poco de intuición sobre la idea, empecemos por considerar algunos ejemplos motivadores.

Ejemplo 3.4.1. Teorema de Bolzano:

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $f(a) \neq 0 \neq f(b)$. Definimos el grado de f en (a, b) , de la siguiente manera

$$\deg(f, (a, b)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(a) < 0 < f(b) \\ -1 & \text{si } f(b) < 0 < f(a) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.10)$$

Entonces, el Teorema de Valores Intermedios, que es una generalización del teorema de Bolzano puede enunciarse en términos del grado:

Teorema 3.4.1. $\deg(f, [a, b]) \neq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ tiene solución en $[a, b]$.

Es decir, que cierta relación entre $f(\partial([a, b]))$ y 0 garantiza existencia de solución de $f(x) = 0$ en (a, b) .

El siguiente ejemplo es el Teorema de Cauchy

Ejemplo 3.4.2. Teorema de Cauchy:

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y simplemente conexo, tal que $\partial\Omega$ puede ser parametrizada como una curva regular. Sea $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa (es decir, que puede extenderse de manera holomorfa a un abierto que contenga $\overline{\Omega}$). Recordemos que el índice de una curva alrededor del origen, es un entero que mide cuantas vueltas (netas) da la curva alrededor del origen y con que sentido. Se calcula de la siguiente manera

$$\text{ind}(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$$

Supongamos que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Definimos el grado de f en Ω como

$$\text{deg}(f, \Omega) = \text{ind}(f(\partial\Omega)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Teorema 3.4.2. $\text{deg}(f, \Omega) \neq 0 \Rightarrow f(z) = 0$ tiene al menos una solución en Ω .

Nuevamente tenemos que el grado es un entero que nos informa sobre la relación entre $f(\partial\Omega)$ e y .

Observemos que en el caso bidimensional estamos pidiendo mas hipótesis sobre f (holomorfa en vez de continua). Con respecto al dominio, podemos pensar que un intervalo $[a, b]$ en \mathbb{R} es la clausura de un abierto acotado conexo. En términos topológicos, esto es pedir que el conjunto de homotopía Π_0 , que simplemente cuenta las componentes conexas, sea trivial. La versión que enunciamos del teorema de Cauchy pide que Ω sea un abierto acotado simplemente conexo, lo cual implica que el grupo de homotopía Π_1 sea trivial, además de cierta suavidad de la frontera.

Ejemplo 3.4.3. Integral de Kronecker: Inspirado en el teorema de Cauchy, Kronecker propuso una noción de grado, definido a partir de una integral, que sirve para dimensiones arbitrarias. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , y sea $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Supongamos que $\partial\Omega$ tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $n - 1$ y que $0 \notin f(\partial\Omega)$. La integral de Kronecker, en el lenguaje moderno de la formas diferenciales, puede ser escrita como

$$\text{deg}(f, \Omega) = \frac{1}{\mu_{n-1}} \int_{\partial\Omega} f^* \omega$$

donde ω es cierta forma diferencial particular y μ_{n-1} es la medida $n - 1$ dimensional de $\partial\Omega$. No vamos a dar los detalles de esta definición, pero vale la pena mencionarla ya que generaliza la integral de Cauchy. Análogamente a los casos anteriores, tenemos que

Teorema 3.4.3. $\text{deg}(f, \Omega) \neq 0 \Rightarrow f(z) = 0$ tiene al menos una solución en Ω .

3.4.2. Grado de Brouwer

Brouwer se propuso dar una teoría puramente topológica del grado. Es decir, definir $d(f, \Omega, y)$ para todo abierto acotado Ω y toda función continua f , de modo que coincida con los ejemplos que vimos recién en los casos en que f y $\partial\Omega$ sean suficientemente regulares. Para dar esta construcción, Brouwer se valió de la tecnología de la homología simplicial. Otros enfoques fueron propuestos. Todas las definiciones de grado coinciden, al menos en los ejemplos en que todas son calculables. Resulta ser que todas estas definiciones comparten propiedades, y que basta con dar un número de estas propiedades para caracterizar la función de grado completamente. Es decir, la teoría es axiomatizable. Daremos entonces una presentación axiomática. Empezamos con algunas definiciones.

Definición 3.4.1. Dada $f : \text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado tal que $\bar{U} \subset \text{dom}(f)$.

1. El par (f, U) es **admisibile** si cumple que $0 \notin f(\partial U)$. Llamamos \mathcal{M} a la clase de tales pares.
2. Una **homotopía** en \bar{U} es una función continua $h : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que es *admisibile* si $(h(t, \cdot), \bar{U})$ es un par admisibile para todo $t \in [0, 1]$. Es decir, si $\forall t \in [0, 1] \forall x \in \partial U, h(t, x) \neq 0$.
3. Dadas las funciones $f, g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamamos **homotopía admisibile entre f y g** a cualquier homotopía admisibile $h(t, x)$ en \bar{U} tal que $f(x) = h(0, x)$ y $g(x) = h(1, x)$ para todo $x \in \bar{U}$.

Definición 3.4.2. Diremos que una aplicación $d : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ es un **grado topológico** si satisface los siguientes axiomas:

1. **Normalización** Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $d(\text{id} - x_0, U) = \mathbb{I}_U(x_0)$, donde \mathbb{I}_U es la indicadora de U .
2. **Invarianza por homotopía** Si tenemos una función continua $H : [0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = g(x)$ y $H(t, x) \neq 0$ para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \partial U$, entonces

$$d(f, U) = d(g, U)$$

3. **Aditividad** Sean $U_1, U_2 \subset U$ abierto disjuntos tales que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U - \bigcup_i U_i$. Entonces

$$d(f, U) = d(f, U_1) + d(f, U_2)$$

El teorema fundamental que garantiza el enfoque axiomático de la teoría de grado es el siguiente.

Teorema 3.4.4. *Existe un único grado topológico en \mathbb{R}^n .*

3.4.3. Propiedades del grado

Proposición 3.4.1. *Una función de grado \deg satisface las siguientes propiedades:*

1. **Grado trivial:** $\deg(f, \emptyset) = 0$.
2. **Escisión:** Si $U_1 \subset U$ es tal que $f^{-1}(0) \cap U \subset U_1 \Rightarrow \deg(f, U_1) = \deg(f, U)$.
3. **Existencia:** $\deg(f, U) \neq 0 \Rightarrow$ Existe solución a $f(x) = 0$ en U .
4. **Continuidad:** Dada g continua en \bar{U} tal que

$$\|f|_{\partial U} - g|_{\partial U}\| < \text{dist}(0, f(\partial U)) \Rightarrow (g, U)$$

es un par admisible y $\deg(g, U) = \deg(f, U)$.

5. **Dependencia de la frontera:** Dada g continua en \bar{U} tal que $g|_{\partial U} = f|_{\partial U} \Rightarrow \deg(g, U) = \deg(f, U)$.

Proposición 3.4.2. Grado de aplicaciones lineales inversibles: Sea $A \in GL_n(\mathbb{R})$, y sea $f_A(x) = Ax$. Sea U un abierto acotado tal que $0 \in U$. Entonces $\deg(f_A, B_1(0)) = \text{sgn}(\det(A))$.

Proposición 3.4.3. Localización para funciones diferenciables: Sea (U, f) un par admisible con f de clase $C^1(\bar{U})$. Supongamos además que $f^{-1}(0) \cap \bar{U} = \{x_0\}$ y $\det(D_{x_0}(f)) \neq 0$. Entonces

$$d_B(f, U) = \text{sgn}(\det(D_{x_0}(f))).$$

Definición 3.4.3. Decimos que el par admisible (f, U) es **regular**, si f es de clase $C^1(\bar{U})$ y $D_x f$ es isomorfismo para todo $x \in f^{-1}(0) \cap U$.

Corolario 3.4.1. Cálculo del grado para pares regulares: Sea (f, U) un par regular. Entonces

$$d_B(f, U) = \sum_{x \in f^{-1}(0) \cap U} \text{sgn}(\det(D_x(f)))$$

Teorema 3.4.5. Existencia y unicidad del grado Dado un par admisible (f, U) , existe un $0 < \varepsilon < \text{dist}(0, f(\partial U))$ tal que

1. Existe un par regular (g, U) , con $\|f|_{\partial U} - g|_{\partial U}\| < \varepsilon$.
2. Dados dos pares regulares (g_1, U) y (g_2, U) tales que $\|f|_{\partial U} - g_i|_{\partial U}\| < \varepsilon$ entonces

$$\sum_{x \in g_1^{-1}(0) \cap U} \operatorname{sgn}(\det(D_x(g_1))) = \sum_{x \in g_2^{-1}(0) \cap U} \operatorname{sgn}(\det(D_x(g_2)))$$

El teorema anterior nos permite la siguiente definición

Definición 3.4.4. Dado un par admisible definimos

$$\deg(f, U) := \sum_{x \in g^{-1}(0) \cap U} \operatorname{sgn}(\det(D_x(g)))$$

para (g, U) cualquier aproximación regular. La función así definida satisface los tres axiomas del grado. Además, el ítem 1 del teorema anterior, el hecho de que $\varepsilon < \operatorname{dist}(0, f(\partial U))$, y la propiedad de continuidad de cualquier función que satisfaga los axiomas, nos garantizan que todos los grados coinciden.

Resulta conveniente trabajar con una aplicación de grado en ternas (f, U, y) donde $y \in \mathbb{R}^n$. Una terna se dirá admisible si $f(x) \neq y$ para todo $x \in \partial U$. Análogamente extendemos las definiciones de homotopías admisibles, ternas regulares, etc. Sea \mathcal{T} el conjunto de ternas admisibles.

Definición 3.4.5.

$$d_B(f, U, y) := d_B(f - y, U)$$

Proposición 3.4.4. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo. Entonces $d_B(f, U, y) = d_B(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(y))$.

La siguiente proposición nos permite definir un grado topológico en cualquier espacio vectorial de dimensión finita.

Proposición 3.4.5. Sea X un espacio vectorial de dimensión finita n . Sea $U \subset X$ abierto acotado, $f : \bar{U} \rightarrow X$ continua e $y \in X$ tal que $y \notin f(\partial U)$. Entonces

$$d_B(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(y)) = d_B(\psi \circ f \circ \psi^{-1}, \psi(U), \psi(y))$$

para todo par de homeomorfismos $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Proposición 3.4.6. Reducción. Sea $f : \bar{U} \rightarrow X$, tal que la terna $(\operatorname{id}_X - f, U, y)$ una terna admisible. Supongamos además que $f(\bar{U}) \subset X_1$, $y \in X_1$ donde X_1 es un subespacio de X . Sea $U_1 = U \cap X_1$. Entonces $(\operatorname{id}_{X_1} - f|_{X_1}, U_1, y)$ es una terna admisible y

$$d_B(\operatorname{id}_X - f, U, y) = d_B(\operatorname{id}_{X_1} - f|_{X_1}, U_1, y)$$

3.4.4. Grado de Leray - Schauder

Como ya vimos en el capítulo anterior, muchas ecuaciones diferenciales se pueden escribir en términos de ecuaciones funcionales. Nos gustaría tener una extensión del grado de Brouwer para tratar con ecuaciones de la forma $F(x) = y$ pero donde $F : \bar{\Omega} \rightarrow X$ es un operador continuo y $\Omega \subset X$ es un abierto acotado. Jean Leray y Juliusz Schauder propusieron una manera de realizar tal extensión. Sin embargo, no lo hicieron trabajando con análogos infinito dimensionales de los ingredientes que componen las distintas construcciones que mencionamos antes para el grado de Brouwer. Lo que hicieron fue reducir el cálculo del grado de operadores F en espacios de dimensión infinita al cálculo de ciertas aproximaciones de F en espacios de dimensión finita, donde el grado de Brouwer ya está establecido. Pero para poder realizar esto, tuvieron que restringirse a una clase particular de operadores F : las perturbaciones compactas de la identidad. La clave reside en la propiedad de aproximación por operadores de rango finito de estos operadores (3.1.1).

Proposición 3.4.7. *Sea $F = I + C : \bar{\Omega} \rightarrow X$ con $\Omega \subset X$ un abierto acotado. Sea $y \in X$ tal que $y \notin F(\partial\Omega)$ y consideremos una sucesión $F_n = I + C_n$ de operadores con rango finito X_n que aproximan a F . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y \in X_n$ para todo n y que $X_n \subset X_{n+1}$ para todo n . Sean \tilde{F}_n los operadores F_n restringidos y correstringidos a X_n . Luego existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$,*

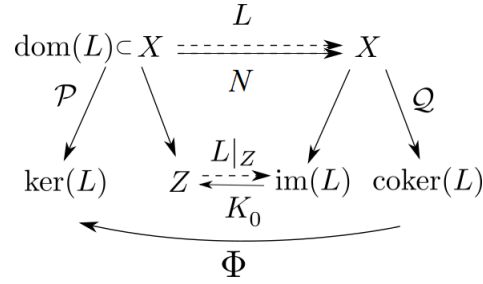
$$\deg(\tilde{F}_n, \Omega \cap X_n, y) = \deg(\tilde{F}_m, \Omega \cap X_m, y)$$

El grado de Leray-Schauder cumple las mismas propiedades que el grado de Brouwer. La única salvedad que cabe aclarar es que la propiedad de homotopía requiere que $H(\lambda, x)$ esté en el rango de definición del grado de Leray-Schauder.

3.5. Lema de Mawhin

En esta sección vamos a presentar un método estándar para mostrar existencia para ecuaciones $L(x) = N(x)$. Este método puede resumirse en un teorema, generalmente conocido como *Lema de Mawhin* ([12]).

Definición 3.5.1. Consideremos un diagrama de Lyapunov-Schmidt



como en la definición (3.3.1). Llamamos **homotopía de Lyapunov-Schmidt** a la función

$$\mathcal{H}_\lambda(x) = \mathcal{H}(\lambda, x) = x - \mathcal{P}(x) - \Phi \circ \mathcal{Q}(N(x)) - \lambda K_0(N(x) - \mathcal{Q}(N(x))).$$

Lema 3.5.1. *Dado $\lambda \in [0, 1]$ y $x \in X$ tal que $\mathcal{H}(\lambda, x) = 0$, tenemos que*

$$\Phi \circ \mathcal{Q} \circ N(x) = 0.$$

Supongamos que existe un abierto acotado $U \subset X$ tal que el par (\mathcal{H}_0, U) es admisible. Entonces

$$\deg(\mathcal{H}_0, U) = \deg(\Phi \circ \mathcal{Q} \circ N(x), U \cap \ker(L))$$

Teorema 3.5.1. *Sea U un abierto acotado de X tal que*

1. $L(x) \neq \lambda N(x)$ para todo $x \in \partial U$ y para todo $\lambda \in (0, 1]$
2. $\Phi \circ \mathcal{Q} \circ N(x) \neq 0$ para todo $x \in \ker(L) \cap \partial U$
3. $\deg(\Phi \circ \mathcal{Q} \circ N(x), U \cap \ker(L)) \neq 0$

Entonces existe un $x \in U \cap \text{dom}(L)$ tal que $L(x) = N(x)$.

Demostración. Consideremos la homotopía de Lyapunov-Schmidt \mathcal{H}_λ . Es inmediato ver que el operador $K = I - \mathcal{H}_1$ es un operador de punto fijo para la ecuación $L(x) = N(x)$. Las hipótesis (1) y (2) del teorema garantizan que la homotopía \mathcal{H}_λ es admisible en U . La hipótesis (3), garantiza que $\deg(\mathcal{H}_0, U) \neq 0$. Luego, por invarianza por homotopía del grado, $\deg(I - K, U) = \deg(\mathcal{H}_1, U) \neq 0$. Por lo tanto K tiene un punto fijo en $U \cap \text{dom}(L)$. \square

Capítulo 4

Soluciones periódicas en un modelo biológico

En este capítulo se presentan resultados que fueron publicados en [1].

4.1. Introducción

4.1.1. Motivación Biológica

El proceso que lleva a la producción y regulación de las células de la sangre (glóbulos rojos, glóbulos blancos y plaquetas) para mantener homeostasis (equilibrio metabólico) se denomina *hematopoyesis*. Las diferentes células tienen tiempo de vida corto de un día a un varias semanas. El proceso de hematopoyesis provee renovación diaria en grandes cantidades (aproximadamente 10^{11} - 10^{12} nuevas células son producidas a diario [39]). Consiste en mecanismos que activan la diferenciación y maduración de células madres hematopoyéticas (HSCs). Ubicadas en la médula osea, las HSCs son células no diferenciadas con capacidades únicas de diferenciación (la habilidad de producir células sanguíneas de cada tipo) y auto-renovación (la habilidad de producir células idénticas con las mismas propiedades.) [65]. Los biólogos celulares clasifican las HSCs, [13], como proliferativas (células que estén en el ciclo celular: fases G_1 - S - G_2 - M) y quiescentes (células que no estén en el ciclo celular y no se pueden dividir: fase G_0). Las células quiescentes son también llamadas células en reposo. La gran mayoría de las HSCs están en estado quiescente [13, 65] y en caso de que no mueran, eventualmente entran en la fase proliferativa. En dicha fase, las células recorren las distintas etapas del ciclo celular en un tiempo τ , durante el cual una cierta fracción

muere (proceso conocido como *apoptosis*) y el resto, al final del ciclo, se divide en dos células hijas. Estas a su vez pueden entrar directamente en estado quiescente (proliferación a largo plazo) o ingresar a la fase proliferativa (proliferación a corto plazo) para nuevamente dividirse [21, 62, 65].

El primer modelo matemático para la dinámica de HSCs fue formulado por Mackey en 1978 [43], quien propuso un sistema de ecuaciones diferenciales con delay para las dos subpoblaciones de HSCs (quiescentes y proliferativas). Muchas mejoras a este modelo fueron propuestas por distintos autores. En muchos de estos trabajos, se asume que después de la mitosis, todas las células hijas entran en estado quiescente. En un trabajo reciente de M. Adimy, A. Chekroun, and T.M. Touaoula [6], se propone un modelo que toma en consideración el hecho de que solo una fracción de las células hijas entran en estado quiescentes, mientras que el resto vuelve a estado proliferativo. Esta asunción lleva a una importante diferencia en el tratamiento matemático del modelo: deja de ser un sistema de ecuaciones diferenciales con delay. Las ecuaciones pasan a ser de una naturaleza distinta. Es necesario incluir una variable extra cuya dinámica está gobernada por una ecuación en diferencias que no involucra derivadas.

Vamos a considerar algunos de los aspectos claves de nuestro modelo y revisar brevemente los resultados presentados en [6]. En particular, vamos a concentrarnos en la existencia de equilibrios y su estabilidad. En este artículo, consideramos una generalización adicional, con el objetivo de incluir ciertos factores regulatorios periódicos externos a nivel del ciclo celular. Esto lo obtendremos permitiendo que algunas de las constantes, δ , K and γ , sean funciones T -periódica en el tiempo. Esto introduce una complejidad matemática extra, ya que ahora el sistema de ecuaciones es no autónomo. Algunos de los resultados de [6] pueden ser emulados de manera directa. Sin embargo, otras, como el equilibrio bajo distintos regímenes de los parámetros, se transforman en otro tipo de estructuras en el contexto no autónomo. Concretamente, los resultados de [6] garantizan la existencia de un equilibrio no trivial bajo condiciones apropiadas; usando técnicas topológicas, vamos a mostrar que la versión no autónoma de las condiciones son suficientes para demostrar la existencia de soluciones periódicas para nuestro modelo extendido.

4.1.2. Modelo matemático autónomo para la dinámica de HSC

Comencemos por presentar el modelo introducido en [6]. Denotamos $q(t, a)$ y $p(t, a)$ las densidades de población de células quiescentes y proliferativas respectivamente, a tiempo $t \geq 0$ y de edad $a \geq 0$. La edad representa

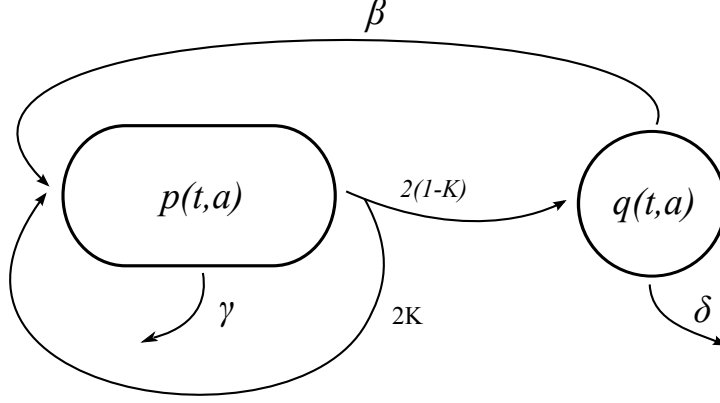


Figura 4.1: Dinámica de HSCs (ver, [6])

el tiempo que una célula lleva en su estado actual. Las células quiescentes pueden perderse aleatoriamente a una tasa $\delta \geq 0$, que toma en consideración muerte o diferenciación, o entrar en fase proliferativa a una tasa $\beta \geq 0$. Una celular puede permanecer toda su vida en estado quiescente y por ende consideramos que el rango de edades para ellas es $[0, +\infty]$. En estado proliferativo las células permanecen a lo sumo un tiempo $\tau \geq 0$, necesario para recorrer las etapas del ciclo celular (G_1 , S , G_2 y M), para luego hacer mitosis. Una parte de ellas muere por apoptosis (muerte celular programada) a una tasa $\gamma \geq 0$. Al final del ciclo, $a = \tau$, y cada célula se divide en dos. Una fracción $K \in (0, 1)$ de las células hijas vuelve inmediatamente a fase proliferativa mientras que otra fracción $(1 - K)$ entra directamente en fase quiescente. La Figura (4.1) representa gráficamente esta dinámica. Sean $Q(t) = \int_0^{+\infty} q(t, a) da$ y $P(t) = \int_0^\tau p(t, a) da$ las poblaciones totales a tiempo $t \geq 0$, y $u(t) := p(t, 0)$ el número de células ingresando en estado proliferativo a tiempo $t \geq 0$. La tasa β depende de $Q(t)$ de manera no lineal, a través de una función de Hill (ver [43]),

$$\beta(Q) := \frac{\beta_0}{1 + Q^r}, \quad \beta_0 > 0, \quad r > 1.$$

Las ecuaciones en derivadas parciales para este modelo estructurado por edades son, para $t \geq 0$,

$$\begin{cases} q_t + q_a = -(\delta + \beta(Q(t)))q, & a \in [0, +\infty), \\ p_t + p_a = -\gamma p, & a \in [0, \tau], \\ q(t, 0) = 2(1 - K)p(t, \tau), \\ p(t, 0) = \beta(Q(t))Q(t) + 2Kp(t, \tau), \end{cases} \quad (4.1)$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} q(0, a) = q_0(a), & a \in [0, +\infty), \\ p(0, a) = p_0(a), & a \in [0, \tau], \end{cases} \quad (4.2)$$

y la siguiente asunción natural

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} q(t, a) = 0.$$

Usando el método de características (ver [6]) obtenemos, para $t > \tau$

$$p(t, \tau) = e^{-\gamma\tau} p(t - \tau, 0).$$

Integrando el sistema (5.1) con respecto a a y tomando

$$u(t) = \varphi(t) := e^{-\gamma t} p_0(-t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

obtenemos que for $t > 0$,

$$\begin{cases} Q'(t) = -(\delta + \beta(Q(t)))Q(t) + 2(1 - K)e^{-\gamma\tau}u(t - \tau), & (4.3) \\ P'(t) = -\gamma P(t) + \beta(Q(t))Q(t) - (1 - 2K)e^{-\gamma\tau}u(t - \tau), & (4.4) \\ u(t) = \beta(Q(t))Q(t) + 2Ke^{-\gamma\tau}u(t - \tau), & (4.5) \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$Q(0) = Q_0 := \int_0^{+\infty} q_0(a)da, \quad P(0) = P_0 := \int_0^\tau p_0(a)da$$

y

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0].$$

Observemos que P puede ser recuperada a partir de u :

$$P(t) = \int_0^\tau e^{-\gamma a} u(t - a) da, \quad t \geq 0.$$

Por otro lado, las ecuaciones para Q y u son independientes de P . Por esta razón, alcanza con analizar el sistema reducido para Q y u . Observemos también, que la ecuación para u no es diferencial. Esto implica que el operador lineal asociado con el sistema no tiene inversa a derecha compacta, lo cual presenta una dificultad para poder usar métodos topológicos estándar. El sistema reducido es

$$\begin{cases} Q'(t) = -(\delta + \beta(Q(t)))Q(t) + 2(1 - K)e^{-\gamma\tau}u(t - \tau), & (4.6) \\ u(t) = \beta(Q(t))Q(t) + 2Ke^{-\gamma\tau}u(t - \tau). & (4.7) \end{cases}$$

A continuación presentamos un conjunto de hipótesis que pueden ser consideradas “naturales” en el contexto del modelo.

(h0) δ , K and γ are positive parameters, $0 < K < 1$ and $\beta(Q) := \frac{\beta_0}{1+Q^r}$, with $\beta_0 > 0$ and $r > 1$.

Para poder presentar nuestras condiciones para existencia de solución de un modo claro, vamos a introducir las siguientes cantidades:

$$h_1 := 2(1-K)e^{-\gamma\tau}, \quad h_2 := 2Ke^{-\gamma\tau}, \quad \alpha := \frac{h_1}{1-h_2} - 1.$$

A su vez, para $Q > 0$ definimos $j(Q) := \beta(Q)Q$, que alcanza máximo global en $B := \max_{Q>0} j(Q)$.

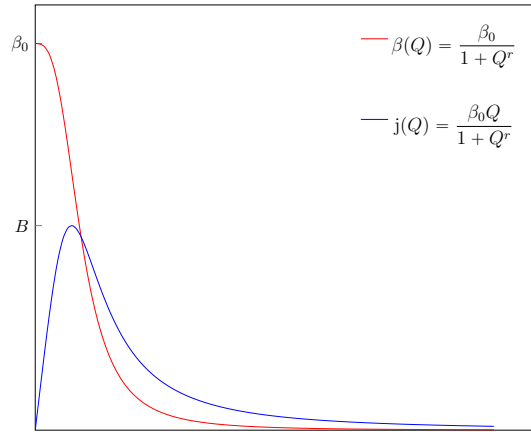


Figure 2. Gráficos de β y j .

A continuación presentamos unos resultado demostrados en [6].

Teorema 4.1.1. *El sistema (4.6)-(4.7) tiene un equilibrio no trivial $(\underline{Q}, \underline{u})$ si*

- (h1)** $h_2 < 1$ (de donde $\alpha < \infty$),
- (h2)** $\alpha > 0$,
- (h3)** $\delta < \alpha\beta_0$.

En ese caso, el equilibrio no trivial esta dado por

$$(\underline{Q}, \underline{u}) = \left(\beta^{-1} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right), \frac{\delta}{2e^{-\gamma\tau}} \beta^{-1} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right) \right).$$

Observemos que, como los parámetros δ y β_0 son positivos, la condición (h3) implica (h2). Mas aún, las condiciones (h1)-(h2) son equivalentes a

$$\max \left\{ \frac{1}{\gamma} \ln(2K), 0 \right\} < \tau < \frac{1}{\gamma} \ln(2)$$

y la condición (h3) es equivalente

$$\tau < \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{2(\beta_0 + \delta K)}{\beta_0 + \delta} \right).$$

Teorema 4.1.2. *Asumamos que valen (h1)-(h2) y la siguiente condición*

(h3') $\delta > \alpha\beta_0$.

Entonces, el equilibrio trivial es globalmente asintóticamente estable.

Observemos que (h3') es equivalente a

$$\tau > \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{2(\beta_0 + \delta K)}{\beta_0 + \delta} \right).$$

4.1.3. Modelo no autónomo de dinámica de HSC

En este trabajo vamos a considerar una modificación del modelo anterior, tomando K , γ y δ como funciones continuas T -periódicas. Es decir, para $t \in [0, +\infty)$,

$$\begin{cases} q_t + q_a = -(\delta(t) + \beta(Q(t)))q, & a \in [0, +\infty), \\ p_t + p_a = -\gamma(t)p, & a \in [0, \tau], \\ q(t, 0) = 2(1 - K(t))p(t, \tau), \\ p(t, 0) = \beta(Q(t))Q(t) + 2K(t)p(t, \tau). \end{cases} \quad (4.8)$$

Usando nuevamente el método de características, obtenemos

$$p(t, \tau) = \exp \left(- \int_{t-\tau}^t \gamma(s) ds \right) p(t - \tau, 0), \quad \text{for } t \geq \tau.$$

Por conveniencia, denominemos

$$\rho(t) = \int_{t-\tau}^t \gamma(s) ds, \quad t \geq \tau,$$

la cual también es una función T -periódica. Del mismo modo que hicimos con el sistema (5.1), el modelo estructurado por edades (4.8) se reduce a

$$\begin{cases} Q'(t) = -(\delta(t) + \beta(Q(t))Q(t) + 2(1 - K(t))e^{-\rho(t)}u(t - \tau)), & (4.9) \\ u(t) = \beta(Q(t))Q(t) + 2K(t)e^{-\rho(t)}u(t - \tau). & (4.10) \end{cases}$$

Por conveniencia, definimos como antes

$$h_1(t) := 2(1 - K(t))e^{-\rho(t)}$$

y

$$h_2(t) := 2K(t)e^{-\rho(t)},$$

que resultan también ser funciones T -periódicas. También definimos

$$\alpha := \frac{\min(h_1)}{1 - \min(h_2)} - 1.$$

Con estas definiciones, nuestra hipótesis principal es

(H0) δ , γ y K son funciones positivas T -periódicas, $\max(K) < 1$ y $\beta(Q) = \frac{\beta_0}{1 + Q^r}$ con $\beta_0 > 0$ y $r > 1$.

4.1.4. Resultados principales

En este trabajo presentaremos tres resultados. En primer lugar, vamos a demostrar la existencia de soluciones T -periódicas de (4.9)-(4.10) bajo condiciones apropiadas de las funciones δ , γ and K .

Teorema 4.1.3. *Supongamos que vale la condición (H0) y además*

(H1) $h_2(t) < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$,

(H2) $\alpha > 0$,

(H3) $\delta(t) < \alpha\beta_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Entonces, (4.9)-(4.10) tiene al menos una solución T -periódica positiva.

Para demostrar nuestro teorema, vamos a reescribir el sistema (4.9)-(4.10) como una sola ecuación para Q . Luego, vamos a definir un operador compacto sobre el espacio de Banach C_T , de modo tal que los ceros de dicho operador se correspondan con las soluciones periódicas de la ecuación para

Q. Observemos que, a diferencia de otros métodos (*i.e.* usar teorema de la contracción), el método de continuación por grado de Leray-Schauder no nos da información sobre la unicidad de tal solución ni sobre su amplitud.

En segundo lugar, estudiaremos pequeñas perturbaciones del sistema autónomo. Más precisamente, supondremos que las condiciones del teorema (4.1.1) son válidas y consideraremos pequeñas perturbaciones T -periódicas de los parámetros. Sería natural esperar que el equilibrio no trivial se transforme en una solución T -periódica del sistema de poca amplitud, cercana al equilibrio del sistema autónomo. Para poder formalizar esta intuición, consideremos el vector T -periódico de funciones $\Lambda = (\delta, K, \gamma) \in \mathbb{C}^3$, con $\mathbb{C}^3 := (C_T)^3$ el espacio de Banach de funciones continuas T -periódicas. Luego, (4.9)-(4.10) puede ser interpretado como un sistema con parámetros definidos en \mathbb{C}^3 . Por conveniencia, identificaremos al subconjunto de funciones constantes en \mathbb{C}^3 con \mathbb{R}^3 . Este setting incluye tanto al sistema autónomo como al no autónomo y nos permite formular nuestro siguiente resultado.

Teorema 4.1.4. *Supongamos que el vector de parámetros constante $\underline{\Lambda} \in \mathbb{R}^3$ y un delay τ satisfacen ciertas condiciones (a especificar). Entonces existen abiertos $U \subset \mathbb{C}^3$ con $\underline{\Lambda} \in U$ y $V \subset \mathbb{C}$, y un función continua $I : U \rightarrow V$ tal que $I(\Lambda)$ es solución T -periódica del sistema (4.9)-(4.10) con vector de parámetros (T -periódicos) Λ . Mas aún, $I(\Lambda)$ es única en V .*

El teorema anterior nos da una manera de obtener soluciones periódicas; en cierto sentido, provee una caracterización mejor de dichas soluciones. Sin embargo, las condiciones necesarias para existencia de solución son explícitas para el primero de nuestros resultados pero no para el segundo. Además requiere parámetros periódicos de baja amplitud y solo nos permite obtener soluciones de baja amplitud cercanas al equilibrio. De cualquier manera, las demostraciones de ambos resultados están basadas en distintas técnicas y por tanto consideramos que ambos resultados son interesantes en si mismos.

Para concluir, nuestro último resultado extiende el teorema 4,1,2 al caso no autónomo.

Teorema 4.1.5. *Supongamos que valen (h1)-(h2) y la siguiente condición*

(H3') $\delta(t) > \alpha(t)\beta_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Entonces, el equilibrio trivial es localmente asintóticamente estable.

Vale la pena observar que este último teorema es local y no descarta la posibilidad de que existan soluciones periódicas no triviales fuera de la cuenca de atracción del equilibrio trivial. En la demostración se dará un conjunto explícitamente, que está incluido en dicha cuenca de atracción.

4.2. Existencia de soluciones T -periódicas

4.2.1. Bosquejo de la demostración

Vamos a presentar un esquema de la demostración del Teorema 4.1.3 para conveniencia del lector. Los detalles serán presentados en las siguientes subsecciones.

Para obtener un operador compacto cuyos ceros sean las soluciones de nuestro sistema, vamos a reducir el problema a una ecuación escalar de la siguiente manera. Sea $\mathcal{C} \subset C_T$ el cono de funciones no negativas. Dada $Q \in \mathcal{C}$, vamos a probar la existencia de una única $\mathbf{u}(Q)$ of (4.10) y, más aún, que el mapa $\mathbf{u} : \mathcal{C} \mapsto C_T$ es continuo. Luego, hallar soluciones T -periódicas del sistema es equivalente a resolver el problema

$$Q' = N(Q) := \mathbf{N}(Q, \mathbf{u}(Q)), \quad (4.11)$$

en \mathcal{C} , donde $\mathbf{N}(Q, u)$ es el operador de Nemytskii asociado al lado izquierdo de la ecuación (4.9). Una vez obtenida una solución T -periódica Q de (4.11), el par $(Q, \mathbf{u}(Q))$ es una solución T -periódica para el sistema (4.9)-(4.10).

Para la ecuación escalar (4.11), vamos a aplicar el método de continuación sobre abiertos acotados de la forma $\Omega_{\epsilon, R} = \{Q \in C_T : \epsilon < Q(t) < R\}$, con $R > \epsilon > 0$ elegido de modo tal que $\Omega_{\epsilon, R}$ satisfaga las hipótesis del Lema de Mawhin (3.5.1).

4.2.2. Reducción a ecuación escalar

Recordemos que nuestro método consiste en reducir el sistema (4.9)-(4.10) a una ecuación escalar para Q , para la cual el lema (??) sea aplicable. Para lograrlo, debemos mostrar que, para un $Q \in C_T$ dado, existe una única $\mathbf{u}(Q)$ solución de (4.10). Esto nos permitirá definir una función $\mathbf{u} : C_T \mapsto C_T$. A continuación presentaremos un lema que prueba que esta función existe y es continua. Más aún, obtendremos estimaciones sobre el conjunto imagen de ciertos conjuntos de la forma

$$\Omega_{\epsilon, R} = \{Q \in C_T : \epsilon < Q(t) < R\},$$

bajo la función \mathbf{u} que usaremos luego.

Lema 4.2.1. *Supongamos que vale la hipótesis (h1) del Teorema (4.1.3). Luego, dado $Q \in C_T$, existe una única solución $\mathbf{u}(Q)$ de (4.10). La función $\mathbf{u} : C_T \mapsto$*

C_T es continua. Más aún, si $0 < \epsilon < R$ son tales que $j(\epsilon) < j(R)$, entonces

$$\mathbf{u}(\Omega_{\epsilon,R}) \subset \mathcal{U}_\epsilon := \left\{ u \in C_T : \frac{\beta(\epsilon)\epsilon}{1 - \min(h_2)} \leq u \leq \frac{B}{1 - \max(h_2)} \right\}.$$

Demostración. Vamos a considerar la ecuación (4.10) de dos maneras distintas. Por un lado, si definimos $S(u)(t) := u(t) - h_2(t)u(t - \tau)$, la ecuación (4.10) se lee como

$$S(u) = j \circ Q.$$

Podemos calcular la norma del operador $(Id - S)(u)(t) = h_2(t)u(t - \tau)$ en el espacio $\mathcal{L}(C_T)$ a partir de la desigualdad

$$|(Id - S)(u)(t)| = |h_2(t)u(t - \tau)| \leq \max(h_2) |u(t - \tau)| \leq \max(h_2) \|u\|_{C_T},$$

que implica

$$\|Id - S\| \leq \max(h_2) < 1.$$

Como consecuencia, S es inversible, con inversa continua y por ende, $\mathbf{u}(Q) = S^{-1}(j \circ Q)$ esta bien definido y es continuo.

Por otro lado, para cada $Q \in C_T$ fijo, definimos $S_Q(u)(t) = j(Q(t)) + h_2(t)u(t - \tau)$. Luego, la ecuación (4.10) para Q , es equivalente a hallar un punto fijo de S_Q . Observemos que, para cada $Q \in C_T$, el operador S_Q es contractivo. Luego, dada cualquier región invariante para S_Q , el Teorema de Punto Fijo de Banach nos permite concluir que S_Q tiene un único punto fijo en dicha región. En particular, como S_Q es invariante en todo C_T , tendrá un único punto fijo, que necesariamente debe coincidir con $\mathbf{u}(Q)$ y que estará contenido en cualquier otra región invariante. Sea $Q \in \Omega_{\epsilon,R}$. Vamos a buscar valores $a, b \in \mathbb{R}$ (en principio dependientes de ϵ y \mathbb{R}) tales que $\mathcal{U}_{a,b} := \{u \in C_T : a \leq u \leq b\}$ sea invariante. Podemos deducir a partir de las hipótesis que el mínimo de j en $[\epsilon, R]$ se alcanza en ϵ . Como $Q \in \Omega_{\epsilon,R}$, luego si $u \in \mathcal{U}_{a,b}$, tenemos que

$$j(\epsilon) + a \min(h_2) \leq j(Q(t)) + h_2(t)u(t - \tau) \leq B + b \max(h_2).$$

Por lo tanto, tomando $a = \frac{j(\epsilon)}{1 - \min(h_2)}$ y $b = \frac{B}{1 - \max(h_2)}$ deducimos que $S_Q(\mathcal{U}_{a,b}) \subseteq \mathcal{U}_{a,b}$. Es decir, para $Q \in \Omega_{\epsilon,R}$, vale que $\mathbf{u}(Q) \in \mathcal{U}_\epsilon$. Esto implica que $\mathbf{u}(\Omega_{\epsilon,R}) \subset \mathcal{U}_\epsilon$. \square

4.2.3. Demostración del Teorema (4.1.3)

Demostración. Vamos a mostrar que (h1), (h2) y (h3) (del Teorema (4.1.3)) permiten hallar ϵ y R tales que $\Omega_{\epsilon,R}$ satisface las hipótesis del lema de Mawhin 3.5.1.

Como $\beta(R) \rightarrow 0$ y $\frac{1}{R} \frac{B \max(h_1)}{1 - \max(h_2)} \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow +\infty$, podemos elegir R suficientemente grande para que $\min(\delta) > -\beta(R) + \frac{1}{R} \frac{B \max(h_1)}{1 - \max(h_2)}$. Una vez que R está elegido, usando (h3) y el hecho de que $j(\epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, podemos elegir ϵ suficientemente chico como para que $1 + \epsilon^r < \frac{\beta_0 \alpha}{\max(\delta)}$ y a la vez $j(\epsilon) < j(R)$. En resumen, nuestra elección de ϵ y R nos dan que:

$$(C0) \quad 0 < \epsilon < R \text{ y } j(\epsilon) < j(R),$$

$$(C1) \quad 1 + \epsilon^r < \frac{\beta_0 \alpha}{\max(\delta)},$$

$$(C2) \quad \min(\delta) > -\beta(R) + \frac{1}{R} \frac{B \max(h_1)}{1 - \max(h_2)}.$$

Veamos ahora que para tales ϵ y R , se satisface la primera hipótesis del lema de Mawhin 3.5.1.

Sea $\lambda \in (0, 1)$ y supongamos que existe $Q \in \partial\Omega_{\epsilon, R}$ tal que $Q' = \lambda N(Q)$. El hecho de que $Q \in \partial\Omega_{\epsilon, R}$ implica que existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $Q(t_0) = \epsilon$, o tal que $Q(t_0) = R$. Si $Q(t_0) = \epsilon$, entonces Q alcanza mínimo en t_0 y por ende $0 = Q'(t_0) = \lambda N(Q(t_0))$. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= -(\delta(t_0) + \beta(\epsilon))\epsilon + h_1(t_0)u_Q(t_0 - \tau), \\ \delta(t_0)\epsilon &= -\beta(\epsilon)\epsilon + h_1(t_0)\mathbf{u}(Q)(t_0 - \tau). \end{aligned}$$

Usando (C0) y el hecho de que $Q \in \Omega_{\epsilon, R}$, podemos aplicar lema 4.2.1 de modo de obtener

$$\delta(t_0)\epsilon \geq -\beta(\epsilon)\epsilon + \min(h_1) \frac{\beta(\epsilon)\epsilon}{1 - \min(h_2)}.$$

Luego, cancelamos ϵ y sacamos factor común $\beta(\epsilon) = \frac{\beta_0}{1 + \epsilon^r}$. Obtenemos

$$\delta(t_0) \geq \beta(\epsilon) \left\{ \frac{\min(h_1)}{1 - \min(h_2)} - 1 \right\} = \frac{\beta_0 \alpha}{1 + \epsilon^r}. \quad (4.12)$$

Esto contradice (C1).

Supongamos ahora que existe t_0 tal que $Q(t_0) = R$. Entonces, por (C0) y el Lema (4.2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(t_0)R &= -\beta(R)R + h_1(t_0)\mathbf{u}(Q)(t_0 - \tau), \\ &\leq -\beta(R)R + \frac{B \max(h_1)}{1 - \max(h_2)}. \end{aligned}$$

Esto contradice (C2) y la primera hipótesis del Lema de Mawhin (3.5.1) queda por ende probada.

A continuación verificaremos la segunda hipótesis del lema. En primer lugar, observemos que $\Omega_{\epsilon, R} \cap \mathbb{R} = [\epsilon, R]$. Ahora, supongamos que $f(q) = \overline{N(Q)} = 0$, para algún $Q \equiv q \in \partial\Omega_{\epsilon, R} \cap \mathbb{R} = \{\epsilon, R\}$. Luego, $Q \equiv \epsilon$ o $Q \equiv R$. En el primer caso, el hecho de que $\overline{N(\epsilon)} = 0$ implica

$$\begin{aligned} 0 &= -(\overline{\delta(t) + \beta(\epsilon)})\epsilon + \overline{h_1(t)\mathbf{u}(Q)(t - \tau)}, \\ \bar{\delta} &= -\beta(\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \overline{h_1(t)\mathbf{u}(Q)(t - \tau)} \geq \frac{\beta_0\alpha}{1 + \epsilon^r}. \end{aligned}$$

Pero, $\text{máx}(\delta) \geq \bar{\delta} \geq \frac{C\alpha}{1 + \epsilon^r}$ por lo tanto estaríamos contradiciendo (h1). Por otro lado, si $Q \equiv R$ luego $\overline{N(Q)} = 0$ implica

$$\bar{\delta} = -\beta(R) + \frac{1}{R} \overline{h_1(t)\mathbf{u}(Q)(t - \tau)} \leq -\beta(R) + \frac{1}{R} \frac{B \text{máx}(h_1)}{1 - \text{máx}(h_2)},$$

lo cual estaría en contradicción con (h2).

Solo nos resta mostrar que se satisface la última hipótesis del Lema de Mawhin (3.5.1). Las desigualdades

$$f(\epsilon) > -(\text{máx}(\delta))\epsilon + \beta(\epsilon)\epsilon\alpha = \epsilon \left(\frac{\beta_0\alpha}{1 + \epsilon^r} - \text{máx}(\delta) \right) > 0$$

y

$$f(R) < -\bar{\delta}R - \beta(R)R + R \frac{B \text{máx}(h_1)}{1 - \text{máx}(h_2)} < 0,$$

implican que $d_B(f, [\epsilon, R], 0) = -1$.

Finalmente, podemos usar el lema de Mawhin 3.5.1, y obtenemos que existe solución T -periódica para (4.11), que, a su vez, nos permite obtener una solución T -periódica del sistema (4.9)-(4.10).

□

4.3. Pequeñas perturbaciones del sistema autónomo

4.3.1. Preliminares

Consideremos el operador $F : C_T \times C_T^3 \rightarrow C_T$ dado por

$$F(Q, \Lambda) := \overline{Q} + \overline{N(Q, \Lambda)} + K_0(N(Q, \Lambda) - \overline{N(Q, \Lambda)}). \quad (4.13)$$

4.3. PEQUEÑAS PERTURBACIONES DEL SISTEMA AUTÓNOMO 61

En otras palabras, para cada $\Lambda \in \mathbb{C}^3$ fijo, el operador $F(\cdot, \Lambda)$ es el operador de Lyapunov-Schmidt para la ecuación (ver sección 3.3.1) .

Sabemos que para cualquier $\underline{\Lambda} = (\underline{\delta}, \underline{K}, \underline{\gamma})$ constante que satisfaga las hipótesis del Teorema (4.1.1), existe una (única) solución estacionaria \underline{Q} . Es decir, bajo la identificación de \mathbb{R} con el conjunto de funciones constantes, tenemos un par $(\underline{Q}, \underline{\Lambda})$ tal que $F(\underline{Q}, \underline{\Lambda}) = \underline{Q}$.

Con la ayuda del Teorema de la Función Implícita vamos a obtener una rama de soluciones $Q(\lambda)$ (localmente únicas) cuando λ esté cerca de $\underline{\lambda}$.

En términos más precisos, si la derivada de Fréchet de $I - F$ respecto de Q en el punto $(\underline{Q}, \underline{\Lambda})$ es un isomorfismo, entonces, para todo $\Lambda \in \mathbb{C}^3$ en un entorno de $\underline{\Lambda}$ (es decir, toda función periódica cerca a la función constante $\underline{\Lambda}$) existe una función T -periódica Q (localmente única) asociada. Más aún la asociación $\Lambda \mapsto Q$ es continua. Esto muestra que existe una continuidad entre el equilibrio obtenido en el Teorema (4.1.1) y las soluciones periódicas $(Q, \mathbf{u}(Q))$ asociadas a pequeñas perturbaciones de $\underline{\Lambda}$. En particular, dichas soluciones se contraen hasta un punto en el plano (Q, u) , a medida que la amplitud de las oscilaciones de Λ tienden a 0.

Teniendo en cuenta esto, recordemos que para cada operador lineal $\mathcal{T} : C_T \times \mathbb{C}^3 \rightarrow C_T$ tenemos que

$$(D_Q \mathcal{T})(Q, \Lambda)\psi = \mathcal{T}\psi, \quad \text{para todo } \psi.$$

Más aún, para un operador arbitrario H , podemos escribir $\overline{H} = P \circ H$. Por la regla de la cadena

$$D_Q(\overline{H}) = D_Q(P \circ H) = P \circ D_Q H = \overline{D_Q H}.$$

Calculemos $(D_Q \mathcal{F})(Q, \Lambda)$:

$$(D_Q \mathcal{F})(Q, \Lambda)\psi = \psi - \overline{\psi} + \overline{(D_Q N)(Q, \Lambda)\psi} + K((D_Q N)(Q, \Lambda)\psi - \overline{(D_Q N)(Q, \Lambda)\psi}). \quad (4.14)$$

Recordemos la proposición 3.1.5:

Proposición 4.3.1. *Si $\mathcal{C} : X \rightarrow Y$ es un operador no lineal compacto diferenciable en x_0 , entonces $D_x \mathcal{C}(x_0)$ es un operador lineal compacto.*

A partir del cálculo anterior y de la última proposición concluimos que $(D_Q(I - \mathcal{F}))(Q, \Lambda)$ es una perturbación compacta de la identidad (es decir, un operador de Fredholm de la forma $I + \mathcal{C}$). Luego, basta con probar su inyectividad para ver que es un isomorfismo. A este fin, observamos que si ψ está en el núcleo de, entonces

$$\psi' = (D_Q N)(\underline{Q}, \underline{\Lambda})\psi. \quad (4.15)$$

Recordemos que

$$N(Q, \Lambda) = -(\delta + \beta(Q))Q + h_2(\Lambda)R_\tau \mathbf{u}(Q, \Lambda), \quad (4.16)$$

con $R_\tau(\psi)(t) = \psi(t - \tau)$. Luego,

$$(D_Q N)(Q, \Lambda)\psi = -(\delta + j'(Q))\psi + h_2(\Lambda)R_\tau(D_Q \mathbf{u})(Q, \Lambda)\psi. \quad (4.17)$$

Para poder calcular el diferencial de \mathbf{u} , debemos en primer lugar clarificar su definición. Como se ha mostrado anteriormente, dada una función fija Λ que satisface (h1), es posible definir un operador inversible S . Extendemos esta definición de la siguiente manera. Dado $\Lambda \subset \mathbb{C}^3$ el subconjunto de los Λ que satisfacen (h1), entonces

$$S : C_T \times \mathbb{C}^3 \rightarrow C_T, \quad S(u, \Lambda) = u + h_2(\Lambda)R_\tau u. \quad (4.18)$$

Para cada Λ fijo, el operador $S_\Lambda(u) := S(u, \Lambda)$ es inversible y $\mathbf{u}(Q, \Lambda) = S_\Lambda^{-1}(j(Q))$ es continua en (Q, Λ) y diferenciable en Q , con

$$(D_Q \mathbf{u})(Q, \Lambda)\psi = S_\Lambda^{-1}(j'(Q)\psi) = j'(Q)S_\Lambda^{-1}(\psi). \quad (4.19)$$

La ecuación (4.15) para el núcleo del diferencial resulta

$$\begin{aligned} \psi' &= -\underline{\delta}\psi - j'(\underline{Q})\psi + h_1(\underline{\Lambda})j'(\underline{Q})R_\tau S_\Lambda^{-1}(\psi), \\ \psi' + (\underline{\delta} + j'(\underline{Q}))\psi &= h_1(\underline{\Lambda})j'(\underline{Q})R_\tau S_\Lambda^{-1}(\psi). \end{aligned}$$

Vamos a aplicar $S_\Lambda R_\tau^{-1}$ a ambos lados de la última igualdad. Como $(R_\tau^{-1}\psi)(t) = \psi(t + \tau)$, obtenemos

$$\begin{aligned} S_\Lambda R_\tau^{-1}(\psi' + (\underline{\delta} + j'(\underline{Q}))\psi) &= h_1(\underline{\Lambda})j'(\underline{Q})\psi, \\ S_\Lambda(\psi'(t + \tau) + (\underline{\delta} + j'(\underline{Q}))\psi(t + \tau)) &= h_1(\underline{\Lambda})j'(\underline{Q})\psi. \end{aligned}$$

Expandiendo las definiciones de S_Λ , obtenemos una expresión en términos de $\psi(t)$, $\psi'(t)$, $\psi(t + \tau)$ y $\psi'(t + \tau)$. La ecuación resultante es de la forma

$$A\psi'(t + \tau) + B\psi(t + \tau) = a\psi'(t) + b\psi(t), \quad (4.20)$$

con

$$\begin{aligned} A &= 1, & B &= \underline{\delta} + j'(\underline{Q}), \\ a &= h_2(\underline{\Lambda}), & b &= 2e^{-\gamma\tau}(\underline{K}\underline{\delta} + j'(\underline{Q})). \end{aligned} \quad (4.21)$$

De aquí en adelante, omitiremos los argumentos \underline{Q} y $\underline{\Lambda}$ para simplificar la notación. En resumen, el núcleo de $(D_Q \mathcal{F})(Q, \underline{\Lambda})$ es no-trivial si y solo si la ecuación (4.20) tiene solución no trivial en C_T . Sea $\psi \in C_T$ una solución genérica. Si la expandimos en serie de Fourier de frecuencia $\omega = \frac{1}{T}$ obtenemos

4.3. PEQUEÑAS PERTURBACIONES DEL SISTEMA AUTÓNOMO 63

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\omega t}, \quad \psi'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k ik\omega e^{ik\omega t}, \quad (4.22)$$

$$\psi(t - \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\omega\tau} e^{ik\omega t}, \quad \psi'(t - \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k ik\omega e^{ik\omega\tau} e^{ik\omega t}. \quad (4.23)$$

Reemplazando en (4.20) y comparando coeficientes, obtenemos

$$a_k (e^{ik\omega\tau} (Aik\omega + B) - (aik\omega + b)) = 0. \quad (4.24)$$

Para que exista solución no trivial, necesitamos que al menos para algún $k \in \mathbb{Z}$, la siguiente identidad se satisfaga:

$$e^{ik\omega\tau} = \frac{aik\omega + b}{Aik\omega + B}. \quad (4.25)$$

Llamamos a esta ecuación *ecuación característica*. Para valores fijos de $\underline{\Delta}$, τ y T , esta ecuación puede tener o no soluciones enteras k .

Lema 4.3.1. *Para $\underline{\Delta}$ y T fijos, existe un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tal que para $\tau \in \mathbb{R} \setminus E$ la ecuación característica (4.25) no tiene soluciones enteras. E es vacío para casi todos los valores de $\underline{\Delta}$ y T , y numerable para el resto.*

Demostración. Consideremos la homografía $\mathcal{H}(z) = \frac{aiz+b}{Aiz+B}$. La imagen de la recta real bajo \mathcal{H} o bien un círculo o una línea recta en \mathbb{C} . Para decidir cual de los dos es el caso, alcanza con calcular el valor de la función en tres puntos de la recta.

$$\mathcal{H}(0) = \frac{b}{B}, \quad \mathcal{H}(1) = \frac{ai + b}{Ai + B}, \quad \mathcal{H}(-1) = \frac{-ai + b}{-Ai + B} \quad \text{and} \quad \mathcal{H}(\infty) = \frac{a}{A}.$$

Luego, $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ es un círculo centrado en el eje real y tal que interseca a este eje en $\mathcal{H}(0)$ y $\mathcal{H}(\infty)$. O sea que $\mathcal{H}(\mathbb{R}_{>0})$ es un semicírculo y los escenarios posibles son:

1. Si $\mathcal{H}(\mathbb{R}_{>0}) \cap S^1 = \emptyset$, entonces la ecuación (4.25) no tiene soluciones para ningún $\tau \in \mathbb{R}$. O sea, $E_T = \emptyset$.
2. Si $\mathcal{H}(\mathbb{R}_{>0}) \cap S^1 \neq \emptyset$, entonces existen $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\eta \in \mathbb{R}$ tales que

$$e^{i\eta} = \mathcal{H}(r).$$

- a) Si T es tal que $r = k_0\omega$ para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$, entonces la ecuación (4.25) tiene solución para $\tau = \frac{\eta + 2l\pi}{k_0\omega}$, con $l \in \mathbb{Z}$. Es decir: $E_T = \{ \frac{\eta + 2l\pi}{k_0\omega} \mid l \in \mathbb{Z} \}$.

b) Si $r \neq k\omega$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces la ecuación (4.25) no tiene soluciones, independientemente del valor de τ . O sea, $E_T = \emptyset$.

□

Observación 4.3.1. Dado que $\mathcal{H}(\infty) = h_2 < 1$ (hipótesis (h1)), un análisis mas fino del valor de $\mathcal{H}(0)$ indica que la opción 1 no se puede dar bajo las hipótesis ((h0)-(h3)).

Teorema 4.3.1. *Supongamos que (h1) es valida para alguna constante $\underline{\Lambda}$. Luego, para cada período T (excepto a lo sumo un conjunto numerable), existen abiertos U, V con $\underline{\Lambda} \in U \subset \mathbb{C}^3$ y $V \subset \mathbb{C}$, y una función continua $I : U \rightarrow V$ tales que $I(\Lambda)$ es una solución T -periódica del sistema (4.9)-(4.10) con parámetros Λ . Más aún, $I(\Lambda)$ es única en V .*

4.4. Estabilidad local del equilibrio trivial

En esta sección, vamos a demostrar que si la hipótesis (h3) del Teorema (4.1.3) es reemplazada por la hipótesis

(H3') $\delta(t) > \beta_0\alpha(t)$, for all $t \in \mathbb{R}$,

entonces las soluciones del sistema no autónomo (4.9)-(4.10), con condiciones iniciales cercanas al origen (en el espacio de fases), son acotadas superiormente por las soluciones del sistema autónomo

$$\begin{cases} Q'(t) = -(\delta^* + \beta(Q(t))Q(t) + h_1^*u(t - \tau)), & (4.26) \\ u(t) = \beta(Q(t))Q(t) + h_2^*u(t - \tau), & (4.27) \end{cases}$$

con condiciones iniciales cercanas al origen, y

$$\delta^* = \min(\delta) - \epsilon, \quad h_i^* = \max(h_i) + \epsilon, \quad \text{for some } \epsilon \ll 1.$$

Esto a su vez, implica la estabilidad local del equilibrio trivial, porque, como veremos, el sistema (4.26)-(4.27) es globalmente asintóticamente estable en el origen. La prueba de estabilidad para el sistema autónomo (tomado de [6]), se basa en un argumento de funcionales de Lyapunov. Lograr adaptar este argumento al caso no autónomo resulta elusivo. Por esta razón, vamos a emplear un enfoque distinto, que consiste en usar las soluciones del problema autónomo como cotas para las soluciones del sistema no autónomo.

En principio, vamos a dar las siguientes definiciones

Definición 4.4.1. Consideremos un sistema descrito por un sistema de ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} Q'(t) = f(t, Q(t), u_t), & (4.28) \\ u(t) = g(t, Q(t), u_t) & (4.29) \end{cases}$$

donde $u_t \in C[-\tau, 0]$ está definido por $u_t(s) := u(t + s)$. La función g del subsistema (4.29) definido por g se dice que es *uniformemente estable input to state* si existe:

1. Una función $\xi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\xi(a, t)$ es continua, estrictamente creciente con respecto a a , estrictamente decreciente con respecto a t , $\xi(0, t) = 0$, y $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(a, t) = 0$.
2. Una función $\nu : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua, estrictamente creciente, con $\nu(0) = 0$,

tal que la función $u_t(t_0, \varphi, Q)$ corresponde con la condición inicial $u_{t_0} = \varphi$ y una función de input $Q(t)$ satisface

$$\|u_t(t_0, \varphi, Q)\| \leq \xi(\|\varphi\|, t - t_0) + \nu(\|Q|_{[t_0, t]}\|).$$

Teorema 4.4.1. *Supongamos que f y g , funciones de $\mathbb{R} \times (\text{bounded sets in } \mathbb{R}^m \times C[0, 1])$ en conjuntos acotados de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n respectivamente, y g es uniformemente estable input to state ; $v_1, v_2, w : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones continuas no decrecientes ,donde adicionalmente $v_i(s)$ son positivos para $s > 0$, y $v_i(0) = 0$. Si existe un funcional*

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$v_1(|Q|) \leq V(t, Q, \varphi) \leq v_2(\|(Q, \varphi)\|)$$

y

$$\dot{V}(s, Q(s), u_s) := \left. \frac{d}{dt} V(t, Q(t), u_t) \right|_{t=s} \leq -w(|Q(s)|),$$

entonces, la solución trivial del sistema de ecuaciones diferencial y en diferencias acopladas (4.28)-(4.29) es uniformemente asintóticamente estable. Si $w(s) > 0$ para $s > 0$, entonces es uniformemente asintóticamente estable. Si, además, $\lim_{s \rightarrow \infty} v_1(s) = \infty$, entonces es uniformemente globalmente asintóticamente estable.

Demostración. La demostración se puede hallar en [30]. □

Teorema 4.4.2. *Si las hipótesis (h_0) , (h_1) y (h_3') son válidas, entonces el equilibrio trivial del sistema autónomo (4.26)-(4.27) es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración. Para $t \in [0, \tau]$, tenemos que

$$u(t) \leq C \|Q|_{[0,t]}\| + h_2^* \varphi(t - \tau).$$

Si definimos $n(t) := \min\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{t}{\tau}\}$ entonces por inducción

$$u(t) \leq C \left(\frac{1 - (h_2^*)^{n(t)}}{1 - h_2^*} \right) \|Q|_{[0,t]}\| + (h_2^*)^{n(t)} \|\varphi\|.$$

En consecuencia,

$$u(t) \leq C \left(\frac{1}{1 - h_2^*} \right) \|Q|_{[0,t]}\| + (h_2^*)^{t/\tau} \|\varphi\|.$$

Esto implica que $\xi(a, t) = (h_2^*)^{t/\tau} a$ y $\nu(a) = C \left(\frac{1}{1 - h_2^*} \right) a$ satisfacen las hipótesis para estabilidad uniforme input to state.

A continuación, definimos

$$V(t, Q, \varphi) := |Q| + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)| d\theta.$$

Es inmediato verificar que

$$|Q| \leq V(t, Q, \varphi) \leq |Q| + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \tau \|\varphi\| \leq \left(1 + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \tau \right) \|(Q, \varphi)\| \quad (4.30)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, Q(t), u_t) &= Q'(t) + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} (u(t) - u(t - \tau)), \\ &= -\delta^* Q(t) - \beta(Q)Q + h_1^* u(t - \tau) + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} (\beta(Q)Q + h_2^* u(t - \tau) - u(t - \tau)), \\ &= -\delta^* Q(t) + \beta(Q)Q \left(\frac{h_1^*}{1 - h_2^*} - 1 \right) + u(t - \tau) \left(\frac{h_1^* h_2^*}{1 - h_2^*} + h_1^* - \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \right), \\ &= - \left(\delta^* - \beta(Q) \left(\frac{h_1^*}{1 - h_2^*} - 1 \right) \right) Q, \end{aligned}$$

sobre trayectorias de soluciones positivas. Esto implica que V es un funcional de Lyapunov para el sistema, con $v_1(s) = s$, $v_2(s) = \left(1 + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \tau \right) s$ y $w(s) = \delta^* - \beta(s) \left(\frac{h_1^*}{1 - h_2^*} - 1 \right) > 0$. Observemos que las cantidades δ^* y h_i^* fueron definidas de modo que la desigualdad sea estricta. \square

Lema 4.4.1. *Sea $\bar{r} > 0$ el valor para el cual j alcanza máximo. Si $\|(Q_0, \varphi)\|$ es suficientemente pequeña, entonces $Q(t) < \bar{r}$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Tomemos

$$\|(Q_0, \varphi)\| \leq \frac{\bar{r}}{1 + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \tau}.$$

Entonces, por (4.30), tenemos que

$$V(0, Q_0, \varphi) \leq \bar{r}.$$

Además, como (4.4),

$$\dot{V}(t, Q(t), u_t) \leq 0, \quad \text{for all } t \geq 0,$$

y, nuevamente, por (4.30), esto implica que $|Q(t)| \leq \bar{r}$, para todo $t \geq 0$. \square

Observemos que para la función de Hill $\beta(Q) := \frac{\beta_0}{1 + Q^r}$, $\beta_0 > 0$, $r > 1$, tenemos

$$\bar{r} = \left(\frac{1}{r - 1} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

A continuación presentaremos un resultado que da una comparación entre las soluciones del caso autónomo y el no autónomo (Q, u) y (\bar{Q}, \bar{u}) , para condiciones iniciales (Q_0, φ) .

Teorema 4.4.3. *Supongamos que las condiciones iniciales satisfacen que*

$$\|(Q_0, \varphi)\| \leq \frac{\bar{r}}{1 + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \tau}.$$

Entonces, $Q(t) \leq \bar{Q}(t)$ y $u(t) \leq \bar{u}(t)$, para todo $t \geq 0$.

Demostración. La demostración procederá por el método de pasos. Sea $t \in [0, \tau]$, entonces

$$\begin{aligned} (Q - \bar{Q})'(t) &\leq -\delta(t)Q(t) - j(Q(t)) + \delta^*\bar{Q}(t) + j(\bar{Q}(t)) + h_1(t)u(t - \tau) - h_1^*\bar{u}(t - \tau), \\ &< -\delta^*(Q - \bar{Q})(t) - (j(Q(t)) - j(\bar{Q}(t))) + h_1^*(u - \bar{u})(t - \tau). \end{aligned}$$

Ahora, como $u(t - \tau) = \bar{u}(t - \tau) = \varphi(t - \tau)$, obtenemos que

$$(Q - \bar{Q})'(t) < -\delta^*(Q - \bar{Q})(t) - (j(Q(t)) - j(\bar{Q}(t))).$$

Como $(Q - \bar{Q})(0) = 0$ y $(Q - \bar{Q})'(0) < 0$, entonces $(Q - \bar{Q})$ empieza con valores negativos. Supongamos que exista $t_0 \in [0, \tau]$ tal que $Q(t_0) = \bar{Q}(t_0) = 0$ y $Q(t_0) < \bar{Q}(t_0)$ para $0 \leq t < t_0$. Entonces, $(Q - \bar{Q})'(t_0) < 0$, lo cual es una contradicción. Entonces, $Q(t) < \bar{Q}(t)$ para todo $t \in [0, \tau]$. En particular, $Q(t) < \bar{r}$ para todo $t \in [0, \tau]$. Luego, dado que j es decreciente en $[0, \bar{r}]$, $j(Q) - j(\bar{Q}) < 0$. Para la segunda ecuación en $[0, \tau]$,

$$(u - \bar{u})(t) < j(Q) - j(\bar{Q}) < 0.$$

Ahora, para $t \in [\tau, 2\tau]$, $t - \tau \in [0, \tau]$. Luego, $(u - \bar{u})(t - \tau) < 0$ y por ende

$$\begin{aligned} (Q - \bar{Q})'(t) &< -\delta^*(Q - \bar{Q})(t) - (j(Q) - j(\bar{Q})) + h_1^*(u - \bar{u})(t - \tau), \\ &< -\delta^*(Q - \bar{Q})(t) - (j(Q) - j(\bar{Q})). \end{aligned}$$

Dado $(Q - \bar{Q})(\tau) < 0$ y $(Q - \bar{Q})'(\tau) < 0$, usando un argumento similar al reciente,

$$Q(t) < \bar{Q}(t) < \bar{r}, \quad \text{for all } t \in [\tau, 2\tau].$$

Análogamente, para la segunda ecuación,

$$(u - \bar{u})'(t) < j(Q(t)) - j(\bar{Q}(t)) + h_1^*(u - \bar{u})(t - \tau) < 0.$$

El resultado se obtiene por inducción □

Corolario 4.4.1. *Supongamos que*

$$\|(Q_0, \varphi)\| \leq \frac{\bar{r}}{1 + \frac{h_1^*}{1 - h_2^*} \tau}.$$

Entonces, las soluciones del sistema original tienden asintóticamente a cero. Es decir, la solución trivial es localmente asintóticamente estable.

Capítulo 5

Generalización de un resultado de Krasnoselskii

En este capítulo se presentan resultados que fueron publicados en [2].

5.1. Introducción

Consideremos el problema T -periódico para el sistema

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (5.1)$$

$$x(0) = x(T) \quad (5.2)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave y T -periódica en su primera coordenada. En la literatura están bien establecidos varios enfoques para buscar estas soluciones en términos de puntos fijos de operadores. En concreto hay dos enfoques destacados:

1. **En el espacio de fases.** Definimos el operador de Poincaré $P : \text{dom}(P) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $P(x_0) := \Phi(T, x_0)$, donde Φ denota el flujo asociado, es decir, $\Phi(t, x_0) := x(t)$, donde x es la solución única de (5.1) que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$. Gracias a la periodicidad de f , si x_0 es un punto fijo de P , entonces la correspondiente solución $x(t)$ está definida globalmente y es T -periódica. Recíprocamente, si $x(t)$ es una solución T -periódica de (5.1), entonces $x_0 := x(0) \in \text{dom}(P)$ y $P(x_0) = x_0$.
2. **En un espacio funcional.** Fijemos un espacio de Banach apropiado

X , por ejemplo

$$X = C[0, T] := C([0, T], \mathbb{R}^n)$$

o

$$X = C_T := \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : x(t + T) \equiv x(t)\}$$

y definamos un operador $K : X \rightarrow X$ de modo tal que los puntos fijos de K pueden ser identificados con las soluciones T -periódicas de (5.1). Un ejemplo típico de tales operadores es $K_1 : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ dado por

$$K_1(x)(t) := x(T) + \int_0^t f(s, x(s)) ds. \quad (5.3)$$

En ambas situaciones, se pueden encontrar soluciones usando diferentes teoremas de punto fijo o, de manera más general, usando teoría de grado. A este fin, para el primer caso, deberíamos encontrar un abierto acotado U tal que $\bar{U} \subset \text{dom}(P)$ y

$$\deg_B(I - P, U, 0) \neq 0,$$

donde \deg_B denota el grado de Brouwer. En el segundo caso, deberíamos encontrar un abierto acotado $U_1 \subset X$ tal que

$$\deg_{LS}(I - K, U_1, 0) \neq 0,$$

donde \deg_{LS} es el grado (infinito dimensional) de Leray-Schauder. En la literatura, los enteros $\deg_B(I - P, U, 0)$ y $\deg_{LS}(I - K, \Omega, 0)$ son a veces denominados **índices de punto fijo** de P y K y denotados $\text{ind}(P, U)$ y $\text{ind}(K, \Omega)$ respectivamente. La noción de índice de punto fijo es ubicua en contextos más generales que aquellos en los que el grado de Leray-Schauder está definido (ver [54] y [28], para un tratamiento comprehensivo). Si embargo, para los casos analizados en este capítulo, el grado de Leray-Schauder es suficiente.

Vale la pena citar el siguiente párrafo de [9]:

Every approach to the specific problem in question has its advantages and drawbacks, and therefore the picture we obtain when investigating a problem becomes more complete if we manage to find internal connections between different approaches and use the positive aspects of each of them.

Este es el objetivo de la llamada **teoría de afinidad**, cuyo origen puede ser hallado en el trabajo de M. A. Krasnoselskii de comienzo de los años '60 (ver [9, 35, 36] y las subsecuentes referencias). En el contexto anterior, un resultado destacable es el llamado **relatedness principle**, o también **principio de dualidad** (ver [46]) que dice en líneas generales que a pesar de la su naturaleza diferente los operadores $I - P$ e $I - K$ tienen el mismo

grado. En términos más precisos, requerimos que los conjuntos U y U_1 tengan **corazón común**, que significa que:

1. P y K no tienen puntos fijos en ∂U y ∂U_1 respectivamente.
2. Si $x_0 \in U$ es un punto fijo de P , entonces la correspondiente solución $x(t)$ satisface que $\alpha(x) \in U_1$. La definición de α depende de la elección de X : por ejemplo, si $X = C_T$ entonces $\alpha(x) = x$ y si $X = C[0, T]$ entonces $x|_{[0, T]} \in U_1$.
3. Si $x \in U_1$ es un punto fijo de K , entonces $x_0 := x(0) \in U$.

En otras palabras, cuando $X = C[0, T]$, las últimas dos condiciones dicen que si una solución T -periódica tiene condición inicial en U , entonces su restricción a $[0, T]$ pertenece a U_1 y viceversa.

Bajo estos supuestos, uno de los primeros resultados de Krasnoselskii dice que

Teorema 5.1.1.

$$\deg_B(I - P, U, 0) = \deg_{LS}(I - K, U_1, 0),$$

donde K es el operador definido por (5.3).

En este contexto, diremos que P y K son **afines**.

La demostración original del teorema (5.1.1) hace uso de la propiedad de invarianza bajo homotopía del grado; sin embargo, no es un uso inmediato, ya que K y P están definidos en espacios distintos. Para superar esta dificultad, la idea es relacionar P con otro operador $K_1 : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ y luego mostrar que K y K_1 son homotópicos. Haciendo una inspección más minuciosa, es fácil ver que P puede pensarse como una composición $\pi \circ \mu$ donde $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow C[0, T]$ está dado por $\mu(x_0)(t) = \Phi(t, x_0)$, y $\pi : C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dado por $\pi(x) = x(T)$. Es decir, μ es el **operador solución** que a una condición inicial le asigna la correspondiente solución única de la ecuación, y π es un proyector de $C[0, T]$ sobre \mathbb{R}^n . Si definimos $K_1 = \mu \circ \pi$, la afinidad de P y K_1 , es decir, el hecho de que

$$\deg_B(I - P, U, 0) = \deg_{LS}(I - K_1, \Omega, 0),$$

puede expresarse equivalentemente como $\text{ind}(\pi \circ \mu, U) = \text{ind}(\mu \circ \pi, \Omega)$. Es un resultado conocido que el índice de punto fijo cumple una propiedad conmutativa en un contexto muy amplio (ver [36, Thm 26.1]). Luego, la

demostración consiste en dos partes; la primera puede ser vista como la aplicación de la propiedad conmutativa del índice y la segunda consiste en encontrar una homotopía específica entre K_1 y el operador integral K . Diremos que el operador de Poincaré P y el operador K son **operadores de punto fijo** para este problema, para expresar el hecho de que los respectivos puntos fijos de ellos, en \mathbb{R}^n o $C[0, T]$, se corresponden (de manera única) con soluciones de la ecuación en C_T . Más adelante daremos una definición más precisa.

Una vez que la afinidad de P y K está establecida, es sencillo hallar homotopías que relacionen K con otros operadores de punto fijo para el mismo problema definidos en $C[0, T]$, por ejemplo,

$$\tilde{K}(x) = x(0) + \int_0^T f(s, x(s)) ds + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Este último operador, y algunos otros son considerados en [36, Sec. 28].

En [36, Section 30.5], el problema (5.1)-(5.2) es generalizado a una ecuación de la forma

$$L(x) = N(x) \tag{5.4}$$

$$\mathcal{P}(x) = \pi(x) \tag{5.5}$$

Esta formulación incluye un amplio espectro de ecuaciones semilineales y es frecuentemente utilizada en el contexto de la teoría de coincidencia de grado desarrollada en el artículo seminal [47] (ver también [27]). Los operadores L y N están definidos en ciertos subconjuntos del espacio de Banach X y toman valores en otro espacio de Banach Y , con L lineal, usualmente no acotado, y N no lineal. La aplicación \mathcal{P} puede ser vista como una proyección sobre otro espacio E en el que están formuladas las *condiciones de contorno*. En términos más precisos, dado $\varphi \in E$, existe una única solución x de (5.4) tal que $\mathcal{P}(x) = \varphi$. El operador π también toma valores en E y podría ser no lineal. Sea μ el operador solución, que asigna a condiciones iniciales $\varphi \in E$ la correspondiente solución $x \in X$ y que vamos a asumir, es compacto. Las ecuaciones (5.4)-(5.5) son equivalentes a la siguiente ecuación

$$x = \mu \circ \pi(x). \tag{5.6}$$

Consideremos ahora otra ecuación E :

$$e = \pi \circ \mu(e) \tag{5.7}$$

Las soluciones de (5.6), es decir, los puntos fijos de $\mu \circ \pi$, están en biyección con las soluciones de (5.7), es decir, los puntos fijos de $\pi \circ \mu$. La biyección está dada por μ . Para abiertos acotados $U_X \subset X$, $U_E \subset E$ tales que las

soluciones de (5.6) en U_X se corresponden exactamente con las soluciones de (5.7) en U_E , diremos como antes que los abiertos tienen corazón común. La propiedad conmutativa del índice de punto fijo nos da que

$$\text{ind}(\mu \circ \pi, U_X) = \text{ind}(\mu \circ \pi, U_E).$$

Esto generaliza el hecho que constituye la primera parte de la demostración de (5.1.1). El operador $\mu \circ \pi$ juega el rol del operador de Poincaré; sin embargo, no hallamos en [36] una generalización de la segunda parte de dicha demostración. Es decir, no hay una construcción de un operador que juegue el rol de K definido (5.3) en el contexto más general, ni una prueba de que tal operador sea afín con $\mu \circ \pi$.

En aplicaciones, es común definir operadores de punto fijo a partir de una inversa a derecha de L . El objetivo principal de este capítulo es definir una familia de operadores de puntos fijos para (5.4)-(5.5) y demostrar su afinidad (en el sentido previamente explicado) con $\pi \circ \mu$. En el caso particular de las ecuaciones (5.1)-(5.2), dicha familia incluirá a (5.3) así como a otros de los operadores de punto fijo considerados en [35, 36] para estas ecuaciones. En particular estudiaremos operadores similares a los establecidos usando la descomposición de Lyapunov-Schmidt de la ecuación. La idea clave para definir tal familia de operadores, es el hecho de que E puede ser a menudo identificado con $\ker(L)$. Demostraremos principios de afinidad entre cualquiera de los operadores de la familia de operadores que consideraremos y $\mu \circ \pi$. Múltiples ejemplos de este procedimiento serán dados para ODEs and PDEs, incluyendo algunos casos conocidos, así como algunos nuevos. En particular, para la ODE de segundo orden con condiciones de borde de tipo Dirichlet, hallamos una inesperada conexión entre uno de los operadores de nuestra familia de operadores y el conocido método de **shooting**. Por último, consideraremos el problema de hallar soluciones periódicas de una ecuación con retardo. Es decir, consideramos el problema

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad t \geq 0 \quad (5.8)$$

$$x_0 = x_T \quad (5.9)$$

donde f es T -periódica en t y $x_t(s) := x(t + s)$ para $s \in C[-\tau, 0]$, que es el espacio natural en el cual plantear las condiciones iniciales. En este caso particular, la identificación de $E = C[-\tau, 0]$ con $\ker(L)$ no es inmediata, así que lo abordaremos por separado. El operador de Poincaré P estará definido sobre $C[-\tau, 0]$ y demostraremos su afinidad con operadores de punto fijo para la misma ecuación en $C[0, T]$ y C_T .

La relevancia de las técnicas topológicas en problemas de contorno es ampliamente conocida; bajo ciertas condiciones, el cálculo del grado del operador asociado a la descomposición de Lyapunov-Schmidt puede reducirse al cálculo del grado (de Brouwer) del operador N restringido a $\ker(L)$.

En particular, en el caso autónomo, $x'(t) = f(x(t))$, N es el operador de Nemitskii estándar y el cómputo de su grado en $U_X \cap \ker(L)$ se reduce al cálculo del grado de f en un abierto acotado de \mathbb{R}^n (ver por ejemplo [14]). Una gran variedad de resultados de existencia y multiplicidad se obtienen con este procedimiento, al que a veces se lo refiere en la literatura como lema de Mawhin (ver por ejemplo [46, 48] y sus referencias). Con respecto a la ecuación con retardo (5.8), hay múltiples aplicaciones de la teoría de grado, algunas de las cuales se deben a Mawhin [49]. También cabe citar [25], donde se hallan ramas de soluciones periódicas para perturbaciones con retardos de una ODE autónoma sobre una variedad. Sin embargo, hasta donde llega nuestro conocimiento, no hay en la literatura teoremas de afinidad que relacionen el operador de Poincaré en $C[-\tau, 0]$ con operadores integrales en $C[0, T]$ o C_T . Tal resultado es presentado en la sección (5.4.4).

Las hipótesis de muchos de los resultados que se presentan en este capítulo involucran múltiples operadores y entre múltiples espacios de Banach. A fin de facilitar la lectura, presentamos diagramas visuales. Esperamos que, en vista de estos diagramas, algunas ideas ganen intuición geométrica; por ejemplo, la noción de **corazón común**. Presentamos también una demostración del hecho de que si U y V tienen corazón común, entonces $\deg(I - \mu \circ \pi, U) = \deg(I - \mu \circ \pi, V)$. Esto por supuesto, no es más que un caso particular de la conmutatividad del índice de punto fijo (ver [36, Thm 26.1]). Sin embargo nuestra demostración para el caso particular de los operadores μ y π que usaremos, es más elemental que la conmutatividad del índice en general, y como es suficiente para nuestro propósito, decidimos incluirla.

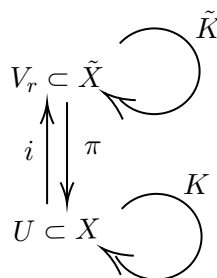
El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la próxima sección, presentaremos algunas definiciones acerca de qué significa tener un problema abstracto en un espacio de Banach y distintas formulaciones del mismo problema en otros espacios de Banach. Introduciremos una definición intuitiva de corazón común en este contexto, y estableceremos y demostraremos la versión reducida de la propiedad conmutativa del índice ya mencionada. La sección 5.3 está dedicada a ecuaciones de la forma $L(x) = N(x)$ bajo condiciones de contorno lineales dadas por $\delta(x) = 0$. Esto es la parte principal del capítulo, en la cual daremos una construcción general de operadores de punto fijo para los cuales demostraremos un teorema de afinidad. Daremos algunas aplicaciones en la sección 5.4. Como ya mencionamos anteriormente, el caso de ecuaciones con retardo será abordado de forma separada: el resultado de afinidad no se deriva de manera inmediata del obtenido para los problemas de la forma $L(x) = N(x)$, sino que se obtiene directamente del problema más abstracto formulado en la sección 5.2. Finalmente, en la sección 5.5 presentamos comentarios adicionales sobre los resultados y preguntas abiertas para ser tratadas en futuros trabajos.

A lo largo del capítulo usaremos la notación ‘deg’ tanto para el grado de Brouwer como el de Leray-Schauder y solo usaremos las notaciones deg_B y deg_{LS} para enfatizar la distinción entre trabajar en espacios de dimensión finita o infinita, cuando tal distinción sea pertinente. Además, dado que trabajaremos con diferentes espacios, en la segunda sección usaremos, la notación id_X para el operador identidad en un espacio X .

5.2. Un resultado de afinidad abstracto

En esta sección presentaremos un teorema abstracto que compara el grado de ciertos operadores en un contexto general. En primer lugar, presentamos un lema que va a ser de utilidad:

Lema 5.2.1. (*Lema de conjugación*) Sean X y \tilde{X} espacios de Banach, sea S un subconjunto de X y sea $U \subset X$ un abierto acotado, tal que $S \cap \partial U = \emptyset$. Consideremos el diagrama



donde:

- π y i son lineales y continuas, tales que $\pi \circ i = \text{id}_X$,
- K es compacta tal que $\text{fp}(K) = S$, donde fp es el conjunto de puntos fijos de K
- $\tilde{K} = i \circ K \circ \pi$
- $V_r = \pi^{-1}(U) \cap B(0, r)$.

Entonces $\text{fp}(\tilde{K}) = i(S)$. Más aún, existe $r_0 > 0$ tal que si $r > r_0$ entonces $\partial V_r \cap i(S) = \emptyset$ y

$$d_{LS}(\text{id}_X - K, U, 0) = d_{LS}(\text{id}_{\tilde{X}} - \tilde{K}, V_r, 0).$$

Demostración. Es inmediato ver que $i \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ es un proyector; luego, el subespacio $E := i(X) \subset \tilde{X}$ es cerrado y $(i \circ \pi)|_E = \text{id}_E$. Sean $\tilde{x} \in \text{fp}(\tilde{K})$ y $x := \pi(\tilde{x})$, luego

$$\tilde{x} = (i \circ K \circ \pi)(\tilde{x}).$$

Como $\tilde{x} \in E$, concluimos que $\tilde{x} = i(\pi(\tilde{x})) = i(x)$ y por ende

$$x = (\pi \circ i)(x) = \pi(\tilde{x}) = (K \circ \pi)(\tilde{x}) = K(x).$$

Entonces, $x \in S$ y, consecuentemente, $\tilde{x} \in i(S)$. Recíprocamente, suponemos que $\tilde{x} = i(x)$ para algún x tal que $x = K(x)$, entonces $\pi(\tilde{x}) = x$ y

$$\tilde{x} = i(x) = i(K(x)) = i(K(\pi(\tilde{x}))) = \tilde{K}(\tilde{x}).$$

Como U es acotado, podemos fijar un r_0 tal que $i(U) \subset B(r_0, 0)$ y tomar $r > r_0$.

Es claro que $\partial V_r \cap i(S) = \emptyset$, $V_r \cap i(S) = i(S \cap U)$ y $V_r \cap E = i(U)$.

Más aún, usando la propiedad de reducción del grado, y el hecho de que $i : X \rightarrow E$ y $\pi : E \rightarrow X$ son isomorfismos lineales con $\pi|_E = i^{-1}$, concluimos que:

$$\begin{aligned} d_{\text{LS}}(\text{id}_{\tilde{X}} - \tilde{K}, V_r, 0) &= d_{\text{LS}}((\text{id}_{\tilde{X}} - \tilde{K})|_E, V_r \cap E, 0) \\ &= d_{\text{LS}}(i \circ (\text{id}_X - K) \circ \pi, i(U), 0) \\ &= d_{\text{LS}}(\text{id}_X - K, U, 0). \end{aligned}$$

□

Como corolario, obtenemos lo siguiente:

Proposición 5.2.1. *En la situación del lema anterior, sea $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ abierto y acotado tal que $\partial \tilde{U} \cap i(S) = \emptyset$ y $\tilde{U} \cap i(S) = i(S \cap U)$. Entonces*

$$d_{\text{LS}}(\text{id}_{\tilde{X}} - \tilde{K}, \tilde{U}, 0) = d_{\text{LS}}(\text{id}_X - K, U, 0).$$

Demostración. Sea V_r como en el lema anterior, entonces para $r \gg 0$ sabemos que

$$d_{\text{LS}}(\text{id}_{\tilde{X}} - \tilde{K}, V_r, 0) = d_{\text{LS}}(\text{id}_X - K, U, 0).$$

Como los puntos fijos de \tilde{K} en \tilde{U} coinciden con los puntos fijos de K en V_r , la demostración se obtiene de la propiedad de escisión del grado. □

A continuación, vamos a considerar diagramas \mathcal{B} de la forma

$$\begin{array}{ccc}
& S \subset X_0 & \\
\alpha_1 \swarrow & & \searrow \alpha_2 \\
\alpha_1(S) \subset X_1 & \xrightleftharpoons[\mu]{\pi} & X_2 \supset \alpha_2(S)
\end{array}$$

donde

- X_0, X_1, X_2 son espacios de Banach.
- α_1, α_2 son lineales y continuos, μ es compacta, π es lineal, continua y sobreyectiva.
- Restringido a S , $\alpha_1(S)$ y $\alpha_2(S)$, el diagrama es conmutativo. Es decir:

$$\pi \circ \alpha_1(x) = \alpha_2(x), \quad \mu \circ \alpha_2(x) = \alpha_1(x)$$

para todo $x \in S$.

En las aplicaciones, S va a ser el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial con ciertas condiciones de borde, X_0 un espacio de funciones que satisfacen la condición de borde, X_1, X_2 espacios específicos en los que las soluciones pueden ser halladas como puntos fijos de operadores específicos. Nos referiremos a tales operadores como **operadores de punto fijo** (daremos una definición precisa en términos de α_1 y α_2). Emplearemos esta idea varias veces a lo largo del capítulo, y el rol de las funciones $\alpha_{1,2}$ será aclarado cuando sea conveniente. Por ejemplo, en el caso de una ODE periódica en \mathbb{R}^n , tendremos $X_0 := C_T$, $X_1 := C([0, T], \mathbb{R}^n)$ y $X_2 := \mathbb{R}^n$, es decir, el espacio de fases. En este contexto, los puntos fijos en X_1 o X_2 no pertenecen a X_0 , pero pueden ser extendidas a soluciones del problema en X_0 de manera única.

Definición 5.2.1. Sea $U_i \subset X_i$ un abierto acotado y consideremos los conjuntos $S_i := \alpha_i(S) \cap U_i$ con $i = 1, 2$. Vamos a decir que U_1 y U_2 tienen **corazón común** con respecto al diagrama \mathcal{B} si

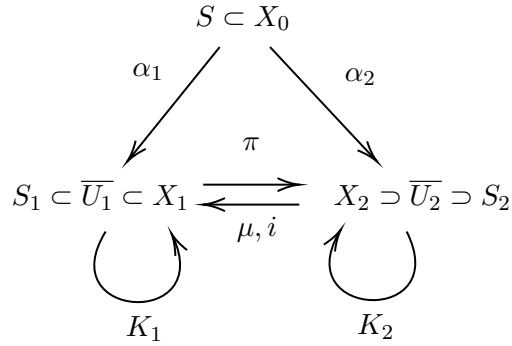
1. $\alpha_i(S) \cap \partial U_i = \emptyset$
2. Existe $S_0 \subset S$ tal que $\alpha_i(S_0) = S_i$.

Observación 5.2.1. Observemos que S_0 cumple el rol del “corazón común”. En particular, la última condición implica que

$$(\mu \circ \pi)|_{S_1} = \text{id}_{S_1}, \quad (\pi \circ \mu)|_{S_2} = \text{id}_{S_2}.$$

En el contexto anterior, también podemos considerar operadores de puntos fijo $K_i : X_i \rightarrow X_i$, es decir, tales que $\text{fp}(K_i) = \alpha_i(S)$. Diremos que el diagrama resultante \mathcal{B} es un **diagrama de Krasnoselskii** si:

1. U_i tienen corazón común con respecto a \mathcal{B} .
2. K_i son operadores de punto fijo.
3. π tiene una inversa a derecha continua $i \in L(X_2, X_1)$, es decir: $\pi \circ i = \text{id}_{X_2}$.



Observación 5.2.2. La noción de diagrama de Krasnoselskii es simplemente una forma conveniente de resumir las hipótesis en algunos de los resultados que siguen.

Como caso particular, tomando

$$K_1 := \mu \circ \pi, \quad K_2 := \pi \circ \mu$$

es inmediato verificar que $\alpha_i(S) \subset \text{fp}(K_i)$: en efecto, si $x = \alpha_1(\tilde{x})$, entonces

$$(\mu \circ \pi)(x) = (\mu \circ \pi \circ \alpha_1)(\tilde{x}) = (\mu \circ \alpha_2)(\tilde{x}) = \alpha_1(\tilde{x}) = x.$$

La inclusión $\alpha_2(S) \subset \text{fp}(K_2)$ es análoga.

Teorema 5.2.1. *En la situación anterior, supongamos que \mathcal{B} es un diagrama de Krasnoselskii para $K_1 = \mu \circ \pi$ y $K_2 = \pi \circ \mu$. Luego*

$$d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_1} - K_1, U_1, 0) = d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_2} - K_2, U_2, 0)$$

Demostración. Sea $\tilde{K} := i \circ K_2 \circ \pi$, luego, por el lema (5.2.1), existe r_0 tal que, para $r > r_0$ y $V_r = \pi^{-1}(U_2) \cap B(0, r)$,

$$d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_1} - \tilde{K}, V_r, 0) = d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_2} - K_2, U_2, 0).$$

Fijamos $r > r_0$ tal que $i(U_2)$ y U_1 están contenidos en $B(0, r)$ y consideremos la homotopía $H_\lambda := \lambda K_1 + (1 - \lambda)\tilde{K}$.

Afirmación: La homotopía es admisible, es decir: $\text{fp}(H_\lambda) \cap \partial V_r = \emptyset$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. En efecto, sea $\lambda \in [0, 1]$ y $x \in \overline{V_r}$ tales que

$$x = \lambda K_1(x) + (1 - \lambda)\tilde{K}(x). \quad (5.10)$$

Como $\pi(V_r) = U_2$, concluimos que $\pi(x) \in \overline{U_2}$. Luego, aplicamos π a ambos lados de (5.10) y obtenemos

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \lambda (\pi \circ K_1)(x) + (1 - \lambda) (\pi \circ \tilde{K})(x) \\ &= \lambda (\pi \circ \mu \circ \pi)(x) + (1 - \lambda) (\pi \circ i \circ \pi \circ \mu \circ \pi)(x) \\ &= \lambda K_2(\pi(x)) + (1 - \lambda) K_2(\pi(x)) \\ &= K_2(\pi(x)). \end{aligned}$$

Entonces, $\pi(x) \in \text{fp}(K_2|_{\overline{U_2}}) = S_2 \subset U_2$, donde $x \in \pi^{-1}(U_2)$. Más aún, a partir de (5.10) vemos que

$$\|x\| \leq \lambda \|K_1(x)\| + (1 - \lambda) \|\tilde{K}(x)\|.$$

Como U_1 y U_2 tienen corazón común, $\pi(x) = S_2 = \alpha_2(S_0)$, y luego

$$K_1(x) = \mu \circ \pi(x) \in \alpha_1(S_0) = S_1 \subset U_1 \subset B(0, r).$$

Por otro lado, como $\pi(x) \in \text{fp}(K_2)$ obtenemos:

$$\tilde{K}(x) = (i \circ K_2 \circ \pi)(x) = i(\pi(x)) \in i(U_2) \subset B(0, r).$$

Concluimos que $\|x\| < r$ lo cual prueba la afirmación.

Luego, usando la invarianza por homotopía del grado, concluimos que:

$$d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_1} - \tilde{K}, V_r, 0) = d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_1} - K_1, V_r, 0).$$

Finalmente, deducimos a partir del hecho de que $V_r \cap \alpha_1(S) = U_1 \cap \alpha_1(S)$ y la propiedad de escisión que

$$d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_1} - K_1, V_r, 0) = d_{\text{LS}}(\text{id}_{X_1} - K_1, U_1, 0)$$

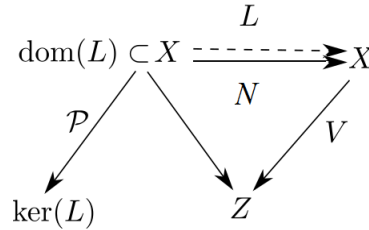
□

5.3. El problema $L(x) = N(x)$

Muchos problemas de ecuaciones diferenciales semilineales con condiciones de frontera, pueden ser expresados en la siguiente forma:

$$L(x) = N(x). \quad (5.11)$$

En muchos de los casos de interés, el operador L es sobreyectivo. Estamos en la situación del corolario 3.3.1.



En el contexto anterior, sea $K_0 := \mathcal{P} + V \circ N$, tenemos que K_0 es un operador de punto fijo de Lyapunov-Schmidt asociado al diagrama. Luego, las soluciones de (5.11) son exactamente los puntos fijo de K_0 . En otras palabras, (5.11) es equivalente a la ecuación

$$K_0(x) = x. \quad (5.12)$$

Observación 5.3.1. 1. El teorema de Hahn-Banach nos garantiza la existencia de un proyector continuo \mathcal{P} en el caso en que $\ker(L)$ es de dimensión finita. En algunos casos podría ocurrir que el operador V no sea compacto. Sin embargo, todos los resultados se mantienen si pedimos que $V \circ N$ sea compacto. Esto es análogo a lo que se conoce como la L -compacidad de N , en el contexto en la teoría de coincidencia de grado (ver [27]).

2. El operador N puede no estar definido sobre todo el espacio X sino solo un subconjunto, como sucede en el caso de que haya singularidad en la no-linealidad de la ecuación. En lo que sigue, si un resultado de afinidad está formulado para un abierto $U \subset X$, debe asumirse implícitamente que $U \subset \text{dom}(N)$.

Definición 5.3.1. Diremos que el diagrama anterior satisface la condición (J) si, para todo $\eta \in (0, 1]$,

$$x - y = \eta V(N(x) - N(y)) \implies x = y. \quad (J)$$

Observemos que (J) es equivalente a la unicidad del problema $x = \eta V(N(x)) + \alpha$ para $\eta \in (0, 1]$ y $\alpha \in X$ arbitrario. En el contexto de ODEs con condición de tipo Lipschitz en la no linealidad, se deduce típicamente de la desigualdad de Gronwall estándar. En el capítulo 7 exploraremos la

desigualdad de Gronwall que puede ser vista como un caso particular de una familia más amplia de desigualdades expresadas en términos de las propiedades espectrales de L y presentaremos un resultado de unicidad para una familia de ecuaciones que incluyen ODEs con condiciones de tipo Lipschitz.

Soluciones especiales

En esta sección, analizaremos el problema de hallar soluciones de (5.11) que satisfacen cierta condición lineal. En particular, podemos pensar en los problemas de hallar soluciones periódicas de una ODE, hallar soluciones de una PDE o ODE con condiciones de borde de tipo Dirichlet o Neumann, etc.

Consideremos el sistema

$$L(x) = N(x) \quad (5.13)$$

$$\delta(x) = 0 \quad (5.14)$$

donde $\delta : X \rightarrow X$ es un operador lineal acotado tal que $\text{Im}(\delta) \subset \ker(L)$. Por ejemplo, si consideramos el problema de Dirichlet

$$x''(t) = f(x(t), x'(t)) \quad (5.15)$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad (5.16)$$

con $X = C^1[0, 1]$, tenemos que $\ker(L) = \{b + ta : a, b \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^{2n}$. Por ende, si definimos $\mathcal{P}(x) := x(0) + tx'(0) \cong (x(0), x'(0))$ y $\delta(x) = x(0) + tx(1)$, entonces (5.15)-(5.16) se reduce a un sistema de la forma (5.13)-(5.14).

Proposición 5.3.1. *En la situación anterior, definamos $\pi := \mathcal{P} + \delta$ y $K := \pi + V \circ N$. Luego, el sistema anterior (5.13)-(5.14) es equivalente al problema de hallar los puntos fijos de $K(x) = x$.*

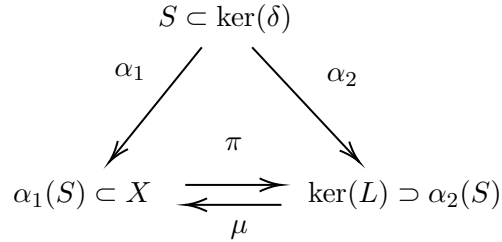
Demostración. Sea $x \in \text{fp}(K)$. Entonces $x = \pi(x) + (V \circ N)(x)$. Como $\text{Im}(\pi) \subset \ker(L)$, aplicamos L y obtenemos $L(x) = N(x)$. Por otro lado, si aplicamos \mathcal{P} , deducimos que $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x) + \delta(x)$ que a su vez implica $\delta(x) = 0$. Recíprocamente, si x es solución de (5.13)-(5.14), entonces $x = \mathcal{P}(x) + (V \circ N)(x)$. Como $\delta(x) = 0$, esto obviamente implica $x = \mathcal{P}(x) + \delta(x) + (V \circ N)(x) = K(x)$. \square

Lema 5.3.1. *Consideremos como antes el diagrama asociado a (5.13)-(5.14) que satisface (J) y supongamos que existe $\mu : \ker(L) \rightarrow X$ continua tal que*

1. $\mu(\ker(L)) = \{x \in X : x \text{ es solución de (5.13)}\}$.

2. $\mathcal{P} \circ \mu = \text{id}_{\ker(L)}$.

Sea \mathcal{B} el diagrama dado por



donde

- $S = \{x \in X : x \text{ es una solución de (5.13)-(5.14)}\}$.
- $\pi = \delta + \mathcal{P}$
- α_1 denota la inclusión de $\ker(\delta)$ en X
- $\alpha_2 = \mathcal{P}|_{\ker(\delta)}$.

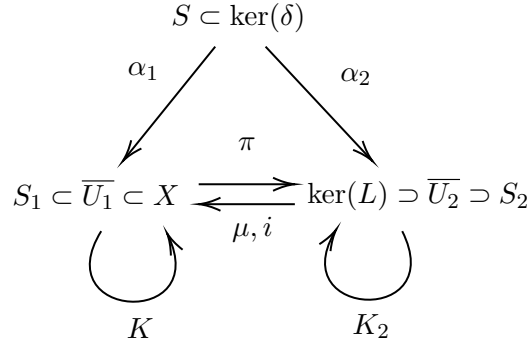
Entonces \mathcal{B} conmuta cuando nos restringimos a S , $\alpha_1(S)$ y $\alpha_2(S)$.

Demostración. Sea $x \in S$. Luego

$$(\pi \circ \alpha_1)(x) = \pi(x) = \delta(x) + \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x) = \alpha_2(x).$$

Por otro lado, definiendo $k := \mathcal{P}(x)$, vemos que $(\mu \circ \alpha_2)(x) = \mu(k)$. A partir de la definición concluimos que $L(\mu(k)) = N(\mu(k))$ y $\mathcal{P}(\mu(k)) = k = \mathcal{P}(x)$. Como $x \in S$, se sigue que $x - \mu(k) = V(N(x) - N(\mu(k)))$ y a partir de (J) deducimos que $x = \mu(k) = (\mu \circ \alpha_2)(x)$. □

Lema 5.3.2. *En la situación del Lema anterior, supongamos que la función $\pi = \delta + \mathcal{P}$ es sobreyectiva. Más aún, supongamos que $U_1 \subset C[0, T]$ y $U_2 \subset \ker(L)$ son abiertos acotados con corazón común respecto de \mathcal{B} . Consideremos el diagrama \mathcal{K} dado por*



con S , π , α_1 y α_2 como antes, y

- i inversa a derecha de π
- $K = \pi + V \circ N$.
- $K_2 = \pi \circ \mu$.

Entonces \mathcal{K} es un diagrama de Krasnoselskii.

Demostración. A partir del lema anterior, solo nos resta verificar que K y K_2 son operadores de punto fijo. Esto es claro para K , a partir de la Proposición (5.3.1) y el hecho de que α_1 es simplemente la inclusión. Como ya sabemos que $\alpha_2(S) \subset \text{fp}(K_2)$, resta probar que $\text{fp}(K_2) \subset \alpha_2(S)$. A este fin, consideremos $k \in \text{fp}(K_2)$, es decir, $k = (\pi \circ \mu)(k)$. Sea $x = \mu(k)$. Entonces x es una solución de (5.13) y satisface $\alpha_2(x) = \mathcal{P}(x) = k$. Más aún,

$$k = \pi(\mu(k)) = (\mathcal{P} + \delta)(\mu(k)) = k + \delta(\mu(k)) = k + \delta(x).$$

Deducimos que $\delta(x) = 0$, donde $x \in S$ y $k = \alpha_2(x) \in \alpha_2(S)$. □

Lema 5.3.3. *En la situación del lema anterior, consideremos el diagrama \mathcal{K}_1 que se obtiene a partir de \mathcal{K} reemplazando el operador K por $K_1 := \mu \circ \pi$. Entonces \mathcal{K}_1 es un diagrama de Krasnoselskii.*

Demostración. Sea $x \in \text{fp}(K_1)$, es decir $x = (\mu \circ \pi)(x) = \mu(\mathcal{P}(x) + \delta(x))$. Aplicando \mathcal{P} lado a lado, obtenemos $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x) + \delta(x)$ y consecuentemente $\delta(x) = 0$. Más aún, como $x = \mu(\pi(x))$, deducimos que x es una solución de (5.13) y por ende $x \in S = \alpha_1(S)$. Esto completa la demostración ya que sabíamos que $\alpha_1(S) \subset \text{fp}(K_1)$. □

Ahora estamos en condición de establecer el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.3.1. *En la situación de los lemas anteriores, supongamos que μ es compacto. Luego*

$$d_{\text{LS}}(I - K, U_1, 0) = d_{\text{LS}}(I - K_2, U_2, 0).$$

Demostración. A partir del lema anterior y del Teorema (5.2.1), sabemos que

$$d_{\text{LS}}(I - K_1, U_1, 0) = d_{\text{LS}}(I - K_2, U_2, 0).$$

Entonces, alcanza con verificar que

$$d_{\text{LS}}(I - K_1, U_1, 0) = d_{\text{LS}}(I - K, U_1, 0).$$

A este fin, definamos $H_\lambda := \lambda K + (1 - \lambda)K_1$ sobre el conjunto $\overline{U_1}$ y supongamos que $x \in \text{fp}(H_\lambda)$. Es decir

$$x = \lambda [\pi(x) + V \circ N(x)] + (1 - \lambda) (\mu \circ \pi)(x). \quad (5.17)$$

Por un lado, aplicando \mathcal{P} obtenemos:

$$\mathcal{P}(x) = \lambda \pi(x) + (1 - \lambda) \pi(x) = \pi(x) \implies \delta(x) = 0. \quad (5.18)$$

Por el otro lado, aplicando L , obtenemos:

$$L(x) = \lambda N(x) + (1 - \lambda)(L \circ \mu \circ \pi)(x) \quad (5.19)$$

Sea $y = (\mu \circ \pi)(x)$. Luego, se sigue de la definición de μ que $L(y) = N(y)$ y $\mathcal{P}(y) = \pi(x)$; más aún, como $\delta(x) = 0$, se sigue que $\mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(x)$. Entonces, escribiendo (5.19) de modo $L(x) = \lambda N(x) + (1 - \lambda)L(y)$, deducimos la igualdad

$$L(x) - L(y) = \lambda(N(x) - N(y)). \quad (5.20)$$

Es decir

$$x - y = \lambda V(N(x) - N(y)). \quad (5.21)$$

A partir de (J), concluimos que $x = y$ y $L(x) = N(x)$. Esto implica que $x \in S = \alpha_1(S)$ y por ende $x \notin \partial U_1$. Luego, la demostración se sigue de la invarianza por homotopía del grado de Leray-Schauder. \square

Observación 5.3.2. En [35, Section 30.3] la condición de borde considerada incluye la posibilidad de que δ sea no lineal. Por simplicidad nos restringiremos al caso en que δ es lineal, ya que haremos uso del teorema (5.2.1). El caso δ no lineal será abordado en futuros trabajos.

$$\begin{array}{ccc}
 & C[0, T] & \xrightarrow[N]{L} C[0, T] \\
 \mathcal{P}, \delta \swarrow & & \searrow \text{id} - \mathcal{P} \\
 \ker(L) \cong \mathbb{R}^n & & Z = \{x(0) = 0\} \\
 & & \swarrow V
 \end{array}$$

5.4. Aplicaciones

5.4.1. Soluciones periódicas de ODEs

Consideremos el problema

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (5.22)$$

$$x(0) = x(T) \quad (5.23)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y T -periódica en t . Por simplicidad, también vamos a suponer que f es globalmente Lipschitz en x con constante l . Un diagrama para esta ecuación es el siguiente

- $L : \text{dom}(L) \subset C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ está dado por $Lx = x'$ y $\text{dom}(L) = C^1[0, T]$.
- $N : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ es el operador de Nemitskii asociado a f , es decir $N(x)(t) := f(t, x(t))$.
- $\ker(L) = \{x(t) \equiv c : c \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n$.
- $Z = \{x \in C[0, T] \mid x(0) = 0\}$.
- $V(x)(t) := \int_0^t x(s) ds$.
- $\mathcal{P}(x) \equiv x(0)$.
- $\delta(x) := x(T) - x(0)$

Podemos considerar el flujo Φ asociado al sistema, es decir $\Phi(t, x_0) = x(t)$, donde x es la solución única de (5.22) que cumple que $x(0) = x_0$, y definir $\mu(x_0)(t) := \Phi(t, x_0)$. Dado que $\ker(L) \cong \mathbb{R}^n$, podemos suponer que $\mu : \ker(L) \rightarrow C[0, T]$. A partir del Teorema de Arzelà-Ascoli, es claro que μ es compacto.

Lema 5.4.1. *Se satisface la condición (J).*

Demostración. Supongamos que $x, y \in C[0, T]$ satisfacen que $(x - y)(t) = \eta \int_0^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds$ para algún $\eta \geq 0$. Entonces

$$|x(t) - y(t)| = \eta \left| \int_0^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right| \quad (5.24)$$

$$\leq \eta \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \quad (5.25)$$

$$\leq \eta l \int_0^t |x(s) - y(s)| ds. \quad (5.26)$$

A partir del Lema de Gronwall, concluimos que $|x(t) - y(t)| = 0$ para todo t . \square

Lema 5.4.2. $\pi = \mathcal{P} + \delta$ es sobreyectiva.

Demostración. Es trivial a partir de la definición, ya que $\pi(x) = x(T)$. \square

Luego, podemos considerar el diagrama \mathcal{B} como el los Lemas (5.3.1) y (5.3.2) y suponer que $U_1 \subset C[0, T]$ y $U_2 \subset \ker(L)$ tienen corazón común con respecto a \mathcal{B} . Obtenemos los operadores

$$K(x)(t) = \pi(x) + (V \circ N)(x)(t) = x(T) + \int_0^t f(r, x(r)) dr$$

y

$$K_2(x_0) = (\pi \circ \mu)(x_0) = \Phi(T, x_0).$$

Es claro que K_2 coincide, vía el isomorfismo $\ker(L) \cong \mathbb{R}^n$, con el operador de Poincaré. Luego, por el Teorema (5.3.1), recuperamos el resultado original de Krasnoselskii mencionado en la introducción:

$$d_{LSLS}(I - K, U_1, 0) = d_{LSB}(I - P, U_2, 0).$$

Más aún, observemos que

$$K_1(x)(t) = (\mu \circ \pi)(x)(t) = \Phi(t, x(T)),$$

lo cual nos da otra de las equivalencias presentadas en [35]:

$$d_{LSLS}(I - K_1, U_1, 0) = d_{BB}(I - P, U_2, 0).$$

Observación 5.4.1. La condición de Lipschitz puede ser relajada; Por ejemplo, alcanza con asumir que f es continua y satisface que, para cada conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\langle f(t, x) - f(t, y), x - y \rangle \leq L|x - y|^2, \quad x, y \in B$$

para constantes $L = L_B$. En efecto, tomando x e y como en la demostración anterior y $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que contenga los rangos de x and y , se sigue que $x(0) = y(0)$. más aún, $(x - y)'(t) = \eta[f(t, x) - f(t, y)]$. Luego,

$$\langle x'(t) - y'(t), x(t) - y(t) \rangle \leq \eta L|x(t) - y(t)|^2,$$

donde

$$|x(t) - y(t)|^2 \leq 2\eta L \int_0^t |x(s) - y(s)|^2 ds$$

y podemos aplicar el lema de Gronwall. Observemos que la condición (J) es equivalente a la unicidad de los problemas $x'(t) = \eta f(t, x(t))$ (con condición inicial arbitraria $x(0) = x_0$) y, mediante al reescalamiento $t \mapsto \frac{t}{\eta}$, al problema $x'(t) = f(\frac{t}{\eta}, x(t))$. Sin embargo, la unicidad para el problema de valores iniciales $x'(t) = f(t, x(t))$ es suficiente ya que, siguiendo la línea de razonamientos en [36, Thm. 28.5], el término no lineal puede ser aproximado por funciones suaves f_m ; luego, como el resultado de afinidad es válido para los operadores asociados a f_m , la invarianza local del grado implica que los resultados valen para f . Por supuesto, si solo pedimos la condición de unicidad, como en [36], es necesario pedir como hipótesis adicional que el operador de Poincaré esté bien definido, es decir, que las soluciones con condición inicial $x_0 \in \bar{U}_2$ estén definidas al menos hasta tiempo $t = T$.

Otros operadores de punto fijo

En el ejemplo anterior, podemos observar que el operador $\pi(x) = x(T)$ es un proyector sobre $\ker(L)$. Con esto en mente, podemos extender la definición de K a una familia más general de operadores de punto fijo:

Lema 5.4.3. *En la situación anterior, sea $\gamma : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ un proyector sobre $\ker(L)$ y definamos el operador (compacto)*

$$K_\gamma := \gamma + [(\pi - \gamma) + \text{id}_X] \circ V \circ N$$

Entonces K_γ es un operador de punto fijo respecto de \mathcal{B} and

$$d_{\text{LSLS}}(I - K_\gamma, U_1, 0) = d_{\text{BB}}(I - P, U_2, 0).$$

Demostración. Sea $x \in \text{fp}(K_\gamma)$, entonces

$$x = \gamma(x) + [(\pi - \gamma) \circ V \circ N](x) + (V \circ N)(x) \quad (5.27)$$

y aplicando L obtenemos $L(x) = N(x)$. Por el otro lado, aplicando γ obtenemos

$$\gamma(x) = \gamma(x) + ((\pi - \gamma) \circ V \circ N)(x) + (\gamma \circ V \circ N)(x)$$

y por ende

$$(\pi \circ V \circ N)(x) = 0.$$

Finalmente, aplicando \mathcal{P} , a partir de la igualdad anterior y usando el hecho de que $\mathcal{P} \circ V \equiv 0$, obtenemos

$$\mathcal{P}(x) = \gamma(x) - (\gamma \circ V \circ N)(x).$$

Del mismo modo, como π es un proyector, obtenemos de (5.27) que

$$\pi(x) = \gamma(x) - (\gamma \circ V \circ N)(x)$$

y consecuentemente $\delta(x) = \pi(x) - \mathcal{P}(x) = 0$. Es decir, $x \in \alpha_1(S)$.

Recíprocamente, sea $x \in \alpha_1(S)$ y escribamos $C[0, T] = \ker(\gamma) \oplus \text{Im}(\gamma) = \ker(\gamma) \oplus \ker(L)$. El operador $V_\gamma := V - \gamma \circ V$ es un inverso a derecha de L con rango en $Z_\gamma := \ker(\gamma)$. Luego la ecuación $L(x) = N(x)$ es equivalente a $x = \gamma(x) + (V_\gamma \circ N)(x)$. O sea

$$x = \gamma(x) + (V \circ N)(x) - (\gamma \circ V \circ N)(x). \quad (5.28)$$

Más aún, sabemos a partir de la Proposición (5.3.1) que

$$x = \pi(x) + (V \circ N)(x)$$

y aplicando π deducimos que $(\pi \circ V \circ N)(x) = 0$. Combinado con (5.28), esto implica que

$$x = \gamma(x) + [(\pi - \gamma) \circ V \circ N](x) + (V \circ N)(x)$$

y por ende $x \in \text{fp}(K_\gamma)$.

A continuación, consideremos la homotopía $H_\lambda = \lambda K + (1 - \lambda)K_\gamma$ con $\lambda \in [0, 1]$. Es claro que $H_\lambda = K_{\tilde{\gamma}}$ para $\tilde{\gamma} = \lambda\pi + (1 - \lambda)\gamma$, que es también un proyector. Luego, $\text{fp}(H_\lambda) = \alpha_1(S)$, que no se interseca con ∂U_1 ; entonces el grado está bien definido a lo largo de la homotopía y

$$d_{\text{LSLS}}(I - K_\gamma, U_1, 0) = d_{\text{LSLS}}(I - K, U_1, 0) = d_{\text{BB}}(I - P, U_2, 0).$$

□

Un operador diferente puede ser obtenido simplemente observando que, si $L(x) = N(x)$, entonces x satisface las condiciones de borde si y solo si $\overline{N(x)} = 0$, donde $\overline{\varphi}$ denota el promedio de una función continua φ , es decir $\overline{\varphi} := \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt$. Esto motiva la definición de

$$K_3(x) := \overline{x} + T\overline{N(x)} + V[N(x) - \overline{N(x)}] - \overline{V[N(x) - \overline{N(x)}]},$$

que claramente es compacto y es un operador de punto fijo.

Corolario 5.4.1. *En la situación anterior,*

$$d_{LSLS}(I - K_3, U_1, 0) = d_{BB}(I - P, U_2, 0).$$

Demostración. Sea $K_4(x) := \overline{x} + T\overline{N(x)} + V(N(x)) - \overline{V(N(x))}$, entonces $K_4 = K_\gamma$ para el proyector $\gamma(x) := \overline{x}$. Entonces K_4 es un operador de punto fijo y

$$d_{LSLS}(I - K_4, U_1, 0) = d_{BB}(I - P, U_2, 0).$$

A continuación, consideremos la homotopía

$$H_\lambda(x) = \overline{x} + T\overline{N(x)} + V\left(N(x) - \lambda\overline{N(x)}\right) - \overline{V\left(N(x) - \lambda\overline{N(x)}\right)},$$

que también es un operador de punto fijo para $\lambda \in [0, 1]$. Como antes, concluimos que H_λ es admisible y $H_0 = K_4$, donde

$$d_{LSLS}(I - K_3, U_1, 0) = d_{LSLS}(I - K_4, U_1, 0) = d_{BB}(I - P, U_2, 0).$$

□

Este último operador está estrechamente relacionado con la descomposición de Lyapunov-Schmidt estándar para el problema $x'(t) = f(t, x(t))$ in C_T , que puede ser expresado como

$$\overline{N_T x} = 0, \quad x - \overline{x} = \tilde{V}(N_T x - \overline{N_T x})$$

donde $N_T : C_T \rightarrow C_T$ está dado como antes por $N_T(x)(t) := f(t, x(t))$ y el operador lineal \tilde{V} está definido, para $\varphi \in C_T$ tal que $\overline{\varphi} = 0$, como la única solución $x \in C_T^1$ tal que $x' = \varphi$ y $\overline{x} = 0$. Es decir, el problema se puede escribir equivalentemente como

$$x = \overline{x} + T\overline{N_T(x)} + \tilde{V}(N_T x - \overline{N_T x}) := K_5(x).$$

Para poder probar el principio de afinidad para este operador, resulta ser conveniente observar que

$$K_5(x) = K_3(x|_{[0, T]})$$

extendido de manera T -periódica a \mathbb{R} . Más aún, podemos definir

$$\tilde{S} := \{x \in C_T : x \text{ is a solution of (5.13)}\} = \text{fp}(K_5)$$

recordando que S es el conjunto de soluciones de (5.13)-(5.14) en $X = C[0, T]$.

Proposición 5.4.1. Sean $\tilde{U} \subset C_T$ y $U \subset C[0, T]$ abierto acotados tales que

- $\partial\tilde{U} \cap \tilde{S} = \emptyset$ y $\partial U \cap S = \emptyset$.
- Para $x \in C_T$,

$$x \in \tilde{U} \cap \tilde{S} \iff x|_{[0, T]} \in U \cap S.$$

Entonces

$$d_{LSLS}(I - K_3, U, 0) = d_{LSLS}(I - K_5, \tilde{U}, 0).$$

Demostración. Sea $X_0 = \ker(\delta) = \{x \in C[0, T] : x(0) = x(T)\}$, luego $\text{Im}(K_3) \subset X_0$. A partir de las propiedades del grado, sabemos que

$$d_{LSLS}(I - K_3, U, 0) = d_{LSLS}((I - K_3)|_{X_0}, U \cap X_0, 0).$$

Luego, definamos $\tilde{\pi} : C_T \rightarrow X_0$ como la restricción y $\tilde{i} : X_0 \rightarrow C_T$ como la extensión T -periódica. Entonces el resultado es una consecuencia directa de la Proposición (5.2.1) y el hecho de que $K_5 = \tilde{i} \circ K_3 \circ \tilde{\pi}$. \square

Consideremos ahora el operador de punto fijo definido de la siguiente manera. Para un $\eta \neq 0$ arbitrario, sea $K^\eta : C_T \rightarrow C_T$ dado por $K^\eta(x) = y$, donde x es la solución T -periódica única del problema

$$y'(t) + \eta y(t) = f(t, x(t)) + \eta x(t).$$

Para poder analizar la afinidad con respecto a los operadores anteriores, consideremos para empezar el caso $\eta > 0$ y tomemos nuevamente la homotopía lineal

$$H_\lambda(x) := \lambda K^\eta(x) + (1 - \lambda)K_5(x).$$

Supongamos que $x = H_\lambda(x)$. Luego tomando promedio obtenemos

$$\bar{x} = \lambda \left[\bar{x} + \frac{\overline{N_T x}}{\eta} \right] + (1 - \lambda) [\bar{x} + T \overline{N_T x}]$$

es decir

$$0 = (1 - \lambda) T \overline{N_T(x)} + \lambda \frac{\overline{N_T(x)}}{\eta},$$

donde $\overline{N_T x} = 0$. Tomando $y = K^\eta(x)$, concluimos que

$$x' = N_T(x) + \lambda\eta(x - y)$$

y

$$y' = N_T(x) + \eta(x - y).$$

Entonces,

$$(x - y)' = (\lambda - 1)(x - y).$$

Cuando $\lambda < 1$, el hecho de que $x - y \in C_T$ implica $x = y$ y por ende $x' = N_T(x)$; por otro lado, el caso $\lambda = 1$ corresponde a un punto fijo de K^η , entonces deducimos también que $x' = N_T(x)$. En consecuencia, x es una solución y K^η es homotópico a K_5 , siempre que no haya soluciones en $\partial\tilde{U}$.

Supongamos ahora que $\eta < 0$, Podemos definir

$$\hat{K}_5(x) := \bar{x} - T\overline{N_T(x)} + \tilde{K}(N_T(x) - \overline{N_T(x)})$$

y se sigue exactamente como antes que K^η es homotópico a \hat{K}_5 . Más aún, si definimos \hat{K}_3 cambiando el signo del término $T\overline{N_T(x)}$ en K_3 y tomamos U y \tilde{U} como antes, entonces

$$\deg_{LS}(I - \hat{K}_5, \tilde{U}, 0) = \deg_{LS}(I - \hat{K}_3, U, 0).$$

Luego, observemos que se obtiene un análogo del Corolario (5.4.1) para \hat{K}_3 si tomamos, en el diagrama original,

$$\hat{\pi}_{\ker(L)}(x) = x(T), \quad \hat{\delta}(x) = x(0) - x(T),$$

$$\hat{V}(x)(t) = - \int_t^T x(s) ds, \quad \hat{\mu}(x_T)(t) = \hat{\Phi}(t, x_T),$$

donde $\hat{\Phi}(t, A)$ está definido como la solución única de la ecuación tal que $\hat{\Phi}(T, A) = A$. Entonces $\hat{\pi}(x) = x(0)$ y

$$\hat{K}(x)(t) = x(0) - \int_t^T f(s, x(s)) ds,$$

mientras que

$$\hat{K}_1(x)(t) = \hat{\Phi}(t, x(0)).$$

Luego, el resultado abstracto implica que, si se satisface la hipótesis de corazón común, entonces el grado de $I - \hat{K}_1$ coincide con el grado de $I - \hat{K}_2$, donde

$$\hat{K}_2(A) = (\hat{\mu} \circ \hat{\pi}) = \hat{\Phi}(0, A).$$

En otras palabras, K_2 puede ser identificado con la inversa \hat{P} del operador de Poincaré; entonces, el cálculo del grado se sigue del siguiente lema:

Lema 5.4.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado tal que P no tiene puntos fijos en $\partial\Omega$. Luego

$$\deg_B(I - \hat{P}, P(\Omega), 0) = (-1)^n \deg_B(I - P, \Omega, 0).$$

Demostración. Alcanza con observar que P y \hat{P} tienen los mismos puntos fijos y, por las propiedades del grado de Brouwer, podemos asumir que 0 es un valor regular de $I - P$. Como el grado sobre bolas pequeñas coincide con el grado de la linealización, solo necesitamos probar que

$$\deg_B(I - P_L, B_r(0), 0) = (-1)^n \deg_B(I - \hat{P}_L, P_L(B_r(0)), 0),$$

donde P_L es el operador de Poincaré asociado al sistema lineal $x'(t) = B(t)x(t)$, con B una matriz T -periódica tal que P_L no tiene puntos fijos no triviales. Sea $M(t)$ la matriz fundamental del sistema $x' = Bx$ tal que $M(0) = I$. Entonces $P_L(x_0) = M(T)x_0$, y podemos calcular el grado de $I - P_L$ simplemente como

$$\deg_B(I - P_L, B_r(0), 0) = \text{sgn}(\det(I - M(T))).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \deg_B(I - \hat{P}_L, P_L(B_r(0)), 0) &= \text{sgn}(\det(I - M(T)^{-1})) \\ &= (-1)^n \text{sgn} \det(M(T)^{-1}) \text{sgn}(\det(I - M(T))). \end{aligned}$$

Luego, el resultado se obtiene del hecho de que $M(t)$ es inversible para todo t y, por continuidad,

$$\text{sgn}(\det(M(T))) = \text{sgn}(\det(M(0))) = 1.$$

□

Resumiendo, hemos establecido:

Proposición 5.4.2. Sea U y \tilde{U} como antes, entonces

$$\deg_{LS}(I - K^\eta, \tilde{U}, 0) = \text{sgn}(\eta)^n \deg_{LS}(I - K_3, U, 0).$$

5.4.2. Ecuaciones de segundo orden con condiciones de Dirichlet

Consideremos el problema

$$x'' = f(t, x(t)) \tag{5.29}$$

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{5.30}$$

donde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y Lipschitz en x con constante l . Un diagrama para esta ecuación sería

$$\begin{array}{ccc}
C[0, T] & \xrightarrow[N]{L} & C[0, T] \\
\mathcal{P}, \delta \swarrow & & \searrow \text{id} - \mathcal{P} \\
\ker(L) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & & Z = \{x(0) = x'(0) = 0\} \\
& & \swarrow V
\end{array}$$

- $X = C^1[0, 1]$ y $Lx := x''$ está definido en $\text{dom}(L) = C^2[0, T]$.
- $N : X \rightarrow X$ es el operador de Nemitskii $N(x)(t) := f(t, x(t))$.
- $\ker(L) = \{x(t) = ta + b : a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- $Z = \{x \in C^1[0, 1] : x(0) = x'(0) = 0\}$.
- $Vx(t) = \int_0^t \int_0^r x(s) ds dr$.
- $\mathcal{P}(x) = tx'(0) + x(0) \cong (x'(0), x(0))$.
- $\delta(x) = tx(1) + x(0) \cong (x(1), x(0))$

En este contexto, podemos definir $\mu(ta + b)$ como la solución única de (5.29) con condición inicial $x(0) = b$, $x'(0) = a$. Está claro que μ está bien definido y es compacto.

El lema que presentamos a continuación es una consecuencia directa de la desigualdad de Gronwall:

Lema 5.4.5. *Supongamos que $u \in C[0, 1]$ satisface*

$$0 \leq u(t) \leq c^2 V(u)(t) \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (5.31)$$

Entonces $u \equiv 0$.

Demostración. Alcanza con observar que $V(u)(t) = \int_0^t (t-s)u(s)ds$ y aplicar el lema de Gronwall estándar. \square

Como consecuencia, obtenemos que el diagrama anterior satisface (J). En efecto, si para algún $\eta \geq 0$ tenemos que

$$x(t) - y(t) = \eta \int_0^t \int_0^r [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds dr,$$

entonces

$$|x(t) - y(t)| \leq \eta l \int_0^t \int_0^r |x(s) - y(s)| ds dr$$

y podemos aplicar el lema (5.4.5).

Lema 5.4.6. $\pi = \mathcal{P} + \delta$ es sobreyectiva.

Demostración. Por definición, $\pi(x) = t[x(1) + x'(0)] + 2x(0)$. Dado $y(t) = ta + b$, entonces $x(t) = t^2(a - \frac{b}{2}) + \frac{b}{2}$ satisface $\pi(x) = y$. \square

En el contexto anterior, consideremos el diagrama \mathcal{B} asociado a (5.29)-(5.30) supongamos que los abiertos acotados $U_1 \subset C[0, T]$ y $U_2 \subset \ker(L)$ tiene corazón común con respecto a \mathcal{B} . En la situación del Teorema (5.3.1), tenemos que

$$K(x)(t) = t[x(1) + x'(0)] + 2x(0) + \int_0^t \int_0^r f(s, x(s)) ds dr,$$

$$K_2(ta + b) = (\pi \circ \mu)(ta + b)$$

y se sigue que

$$d_{LSLS}(I - K, U_1, 0) = d_{LSB}(I - K_2, U_2, 0).$$

Observemos que la forma explícita de K_2 es

$$K_2(ta + b) = (\pi \circ \mu)(ta + b) = t[x(1) + x'(0)] + 2x(0) = t[x(1) + a] + 2b,$$

donde $x = \mu(ta + b)$ es la solución única de la ecuación tal que $x(0) = b$ y $x'(0) = a$. Más aún, observemos que si $ta + b \in \ker(L)$ es un punto fijo de K_2 entonces $b = 0$. Luego, podemos definir $W := \{ta : a \in \mathbb{R}^n\}$ y observar que $K_2(W) \subset W$. Por las propiedades del grado de Brouwer, podemos suponer que 0 es un valor regular de $I - K_2$, Entonces

$$\deg_B(I - K_2, U_2, 0) = \sum_{ta \in S_2} \text{sgn}(\det(I - DK_2(ta)))$$

donde $S_2 := \{ta \in U_2 : K_2(ta) = ta\}$. Un cálculo simple nos muestra que $DK_2(ta)$ puede ser identificado con la matriz en $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ dada por

$$\begin{pmatrix} D_a \Phi^1(1, 0, a) + I_n & D_b \Phi^1(1, 0, a) \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}$$

donde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota la matriz identidad y $\Phi^1(\cdot, b, a) := \mu(ta + b)$ es la primera coordenada asociada con el flujo, es decir, $\Phi(t, b, a) = (x(t), x'(t))$ es la solución con $x(0) = b$, $x'(0) = a$. Esto implica que

$$\text{sgn}(\det(I - DK_2(ta))) = \text{sgn}(\det(D_a \Phi^1(1, 0, a))).$$

A continuación, consideremos el operador de shooting $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $s(a) := \Phi^1(1, 0, a)$. Luego tomando el isomorfismo $\varphi : ta \mapsto a$ está claro

que los ceros de s en $\varphi(\overline{U}_2)$ coinciden con los elementos de $\varphi(S_2)$. Más aún, $Ds(a) = D_a\Phi^1(1, 0, a)$, y por tanto obtenemos:

$$\deg(s, \varphi(U_2), 0) = \sum_{a \in \varphi(S_2)} \operatorname{sgn}(\det(D_a\Phi^1(1, 0, a))).$$

En resumen, tenemos:

Proposición 5.4.3. *En la situación anterior,*

$$\deg_B(s, \varphi(U_2), 0) = \deg_B(I - K_2, U_2, 0).$$

Observación 5.4.2. A partir de las propiedades del grado podríamos dar una demostración alternativa de la siguiente manera. Tomemos, como antes, $W = \{at : a \in \mathbb{R}^n\}$ y consideremos la función $g : \ker(L) \rightarrow W$ dado por $g(ta + b) = t(a - \mathcal{S}(a))$. Entonces

$$\deg_B(I - g, U_2, 0) = \deg_B((I - g)|_W, U_2 \cap W, 0).$$

Como $(I - g)(ta) = t\mathcal{S}(a)$, es claro que el grado anterior coincide con $\deg_B(\mathcal{S}, \varphi(U_2), 0)$. Por otro lado, observemos que

$$(I - K_2)(ta + b) = -(t\Phi^1(1, b, a) + b)$$

y por ende

$$\deg_B(I - K_2, U_2, 0) = (-1)^{2n} \deg_B(F, U_2, 0) = \deg_B(F, U_2, 0),$$

donde $F(ta + b) := t\Phi^1(1, b, a) + b$. Entonces, alcanza con verificar que F y $I - g$ son homotópicos. A este fin, supongamos que

$$\lambda F(ta + b) + (1 - \lambda)(t\mathcal{S}(a) + b) = 0,$$

entonces

$$\lambda\Phi^1(1, a, b) + (1 - \lambda)\mathcal{S}(a) = 0 \quad \text{and} \quad b = 0.$$

Luego, recordemos que $\Phi^1(1, a, 0) = \mathcal{S}(a)$; entonces, concluimos que $\mathcal{S}(a) = 0$ y se sigue de las hipótesis que $ta \notin \partial U_2$.

En la sección 5.5 consideraremos más ejemplos de operadores de punto fijo afines para este problema.

5.4.3. Un problema elíptico con condiciones no locales

Consideremos el sistema elíptico dado por

$$\Delta u(x) = f(x, u(x)) \quad x \in \Omega \tag{5.32}$$

con condición no local

$$u|_{\partial\Omega} = \text{constant}, \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0. \quad (5.33)$$

Aquí, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio suave y acotado, $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave y tomamos

$$X := \{u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \text{constant}\}, \\ Y = C^\alpha(\bar{\Omega})$$

para algún $\alpha \in (0, 1)$;

$L : D \rightarrow Y$ dada por $Lu := \Delta u$, con $D := X \cap C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$;

$$N(u)(x) := f(x, u(x))$$

y $V : C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow D$ definida por $V\varphi := u$, la solución única del problema

$$\Delta u = \varphi, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Está claro que $\ker(L)$ es el conjunto de funciones constante, que identificaremos con \mathbb{R}^n , y también podemos considerar

$$\mathcal{P}(u) := u|_{\partial\Omega}$$

y

$$\delta(u) := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Para poder definir μ como antes, vamos a asumir la siguiente condición de monotonía

$$\langle f(x, v) - f(x, u), v - u \rangle \geq -\kappa|u - v|^2 \quad (5.34)$$

con $\kappa < \lambda_1^{(D)}$, el primer autovalor de $-\Delta$ para las condiciones de Dirichlet. Entonces $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow D$ está definido por $\mu(c) := u_c$, la solución única de (5.32) tal que $u|_{\partial\Omega} = c$. El hecho de que μ está bien definido es conocido, y puede ser visto como uno de los resultados que podemos englobar bajo la frase “unicidad implica existencia”. En efecto, si u y v son soluciones de (5.32) tales que $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces

$$\langle \Delta(u - v), u - v \rangle_x = \langle f(\cdot, u) - f(\cdot, v), u - v \rangle_x \geq -\kappa|u(x) - v(x)|^2;$$

y por ende,

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - v)(x)|^2 dx \leq \kappa \|u - v\|_{L^2}^2$$

y a partir de la desigualdad de Poincaré se sigue que $u \equiv v$. Más aún, escribiendo

$$\Delta u(x) = f(x, u(x)) - f(x, c) + f(x, c)$$

y multiplicando por $u(x) - c$ se ve que

$$\|\nabla(u - c)\|_{L^2}^2 \leq \kappa \|u - c\|_{L^2}^2 + k \|u - c\|_{L^2}$$

para alguna constante k . Esto nos da cotas *a priori* para las soluciones. La existencia de u_c se sigue de un argumento de truncamiento estándar. Observemos, más aún, que el mismo cálculo muestra que se satisface (J): si $u - v = \eta V(N(u) - N(v))$, entonces $u = v = 0$ en $\partial\Omega$ y

$$\Delta(u - v)(x) = \eta(f(x, u(x)) - f(x, v(x))).$$

Como antes, se deduce que $u \equiv v$.

En este contexto, tenemos que

$$\pi(u) = \mathcal{P}(u) + \delta(u) = u|_{\partial\Omega} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

que claramente es sobreyectivo, y

$$K(u) = \pi(u) + (V \circ N)(u) = v,$$

donde v es la solución única de (5.32) tal que

$$v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Está claro que K es un operador de punto fijo. Más aún, podemos también calcular $K_1 = \pi \circ \mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $K_2 = \mu \circ \pi : X \rightarrow X$ explícitamente como

$$K_1(c) = c + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_c}{\partial \nu} dS,$$

$$K_2(u) = u_{\pi(u)},$$

esto es, $K_2(u)$ es la solución única de (5.32) cuyo valor sobre la frontera de Ω es igual a $u|_{\partial\Omega} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$. A partir de los resultados anteriores, deducimos:

Proposición 5.4.4. *Dados $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset X$ son abiertos acotados con corazón común, entonces*

$$\deg_{LS}(I - K_2, U_2, 0) = \deg_{LS}(I - K, U_2, 0) = \deg_B(I - K_1, U_1, 0).$$

Al igual que en el ejemplo anterior, se pueden definir varios operadores de punto fijo distintos; en particular, el que surge de la reducción de Lyapunov-Schmidt. En primer lugar, observemos que π es un proyector, y entonces podemos definir el operador de punto fijo K_γ como antes. Luego, tomando $\gamma(u) = \bar{u}$ obtenemos el operador

$$\bar{u} + |\Omega| \overline{Nu} + V(N(u)) - \overline{V(N(u))}$$

que, a su vez, es homotópico a

$$K_3(u) = \bar{u} + |\Omega|\overline{Nu} + V(N(u) - \overline{Nu}) - \overline{V(N(u) - \overline{Nu})}.$$

Finalmente, observemos nuevamente que este último operador es conjugado con respecto al que define la fórmula, después de D por

$$\text{dom}(L) = C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \delta^{-1}(0),$$

que corresponde a la descomposición de Lyapunov-Schmidt y, al igual que en la sección 5.4.1, podemos llamar K_5 . En este caso, si consideramos los operadores $K^\eta : u \mapsto v$, definidos por

$$\Delta v(x) + \eta v(x) = f(x, u(x)) + \eta u(x)$$

donde η no es autovalor de $-\Delta$ para las condiciones (5.33), entonces K^η es linealmente homotópico a K_5 cuando $\eta > 0$. Es interesante que la interacción de η con el espectro de $-\Delta$ no es relevante en este caso. Veremos una explicación intuitiva de este hecho en la sección 5.5 .

5.4.4. Ecuaciones diferenciales con retardo

Consideremos el problema de hallar soluciones periódicas de una ecuación diferencial con delay

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad t \geq 0 \tag{5.35}$$

$$x_0 = x_T \tag{5.36}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y Lipschitz en las últimas dos variables y T -periódica en t , con $T \geq \tau$. Usaremos la notación usual, $x_t \in C[-\tau, 0]$ para la función definida como $x_t(s) := x(s + t)$; entonces, una solución de (5.35) que satisface (5.36) se extiende a una solución periódica de (5.35). En este caso, podemos considerar el diagrama \mathcal{B}_τ :

$$\begin{array}{ccc} & S \subset C_T & \\ \alpha_1 \swarrow & & \searrow \alpha_2 \\ \alpha_1(S) \subset C[0, T] & \xrightarrow{\pi} & C[-\tau, 0] \supset \alpha_2(S) \\ & \xleftarrow{\mu} & \end{array}$$

donde

- $C_T := \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : x(t+T) = x(t)\}$.
- $S \subset C_T$ es el subconjunto de soluciones T -periódicas de (5.35).
- α_1 denota la restricción al intervalo $[0, T]$.
- α_2 denota la restricción al intervalo $[-\tau, 0]$, es decir $\alpha_2(x) := x_0$.
- $\pi(x) := x_T$
- $\tilde{\mu}(y)$ es la solución de (5.35) con condición inicial $x_0 = y$, definida en $[-\tau, T]$ y $\mu(y) := \tilde{\mu}(y)|_{[0, T]}$

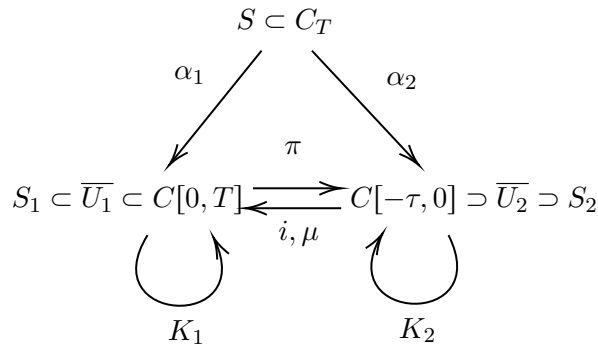
Es facil verificar que μ es compacta y π es lineal y continua. Más aún, observemos que es un inverso a derecha para $i : C[-\tau, 0] \rightarrow C[0, T]$ dado por

$$i(y)(t) = \mathbb{I}_{[T-\tau, T]}(t)y(t-T) + \mathbb{I}_{[0, T-\tau)}(t)y(-\tau)$$

donde \mathbb{I} es la función indicadora.

Afirmamos que el diagrama, restringido a S , $\alpha_1(S)$ y $\alpha_2(S)$, es conmutativo. En efecto, para $x \in S$ observamos que $(\pi \circ \alpha_1)(x) = x_T$. Como $x \in C_T$, se sigue que $x_T = x_0$ y por ende $(\pi \circ \alpha_1)(x) = \alpha_2(x)$. Por otro lado, $(\mu \circ \alpha_2)(x) = \mu(x_0)$, que define la solución única de (5.35) con condición inicial x_0 , restringido a $[0, T]$. En otras palabras, $(\mu \circ \alpha_2)(x) = x|_{[0, T]} = \alpha_1(x)$.

Luego, consideremos el diagrama \mathcal{B}_τ dado por



donde

- i está definido como antes.
- $K_1 = \mu \circ \pi$ y $K_2 = \mu \circ \pi$.

- U_i tienen corazón común con respecto a \mathcal{B}_τ .

Lema 5.4.7. \mathcal{K}_τ es un diagrama de Krasnoselskii.

Demostración. Ya sabemos que i es una inversa a derecha de π ; entonces, solo nos queda verificar que K_1 y K_2 son operadores de punto fijo. Sea $x \in S$. Entonces

$$K_1(\alpha_1(x)) = \mu(\pi \circ \alpha_1(x)) = \mu(x_T) = \mu(x_0) = x|_{[0,T]} = \alpha_1(x).$$

Recíprocamente, sea $\hat{x} \in \text{fp}(K_1)$, es decir, $\hat{x} = (\mu \circ \pi)(\hat{x}) = \mu(\hat{x}_T)$. Evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$\hat{x}(0) = \mu(\hat{x}_T)(0) = \hat{x}_T(0) = \hat{x}(T).$$

Consideremos ahora la función $x : [-\tau, T]$ definida por $x|_{[-\tau,0]} = \hat{x}_T$ y $x|_{(0,T]} = \hat{x}$. Como $\hat{x}(0) = \hat{x}(T)$, deducimos que x es continua. Más aún, sobre $[0, T]$ tenemos que $x = \hat{x} = \mu(\hat{x}_T)$, que es la restricción de la solución única y de (5.35) que satisface $y_0 = \hat{x}_T = x_0$. Concluimos que $x = y$ y, como $x_0 = x_T$, se sigue que x puede ser extendida periódicamente a una solución de (5.35), es decir, $x \in S$ y $\alpha_1(x) = \hat{x}$.

Respecto a K_2 , procedemos de una manera análoga. Sea $x \in S$, luego

$$K_2(\alpha_2(x)) = (\pi \circ \mu)(x_T) = \pi(\mu(x_0)) = \pi(x|_{[0,T]}) = x_T = x_0 = \alpha_2(x).$$

Recíprocamente, sea $y \in \text{fp}(K_2)$, es decir $y = (\pi \circ \mu)(y)$. Sea \tilde{y} la solución única de (5.35) tal que $\tilde{y}_0 = y$. Entonces $y = \pi(\mu(y)) = \tilde{y}_T$. Esto implica que \tilde{y} se extiende periódicamente a un elemento $\tilde{y} \in S$ y $y = \alpha_2(\tilde{y})$. \square

Como en la sección 5.4.1, obtendremos un principio de afinidad entre K_1 y K_2 . Observemos que K_2 corresponde nuevamente al operador de Poincaré P aunque, a diferencia del caso sin delay, ahora P está definido sobre un espacio de dimensión infinita $C[-\tau, 0]$.

Corolario 5.4.2.

$$d_{LSLS}(I - K_1, U_1, 0) = d_{LSLS}(I - P, U_2, 0)$$

A continuación, analizaremos el operador $K : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ dado por

$$K(x)(t) = x(T) + \int_0^t f(u, x(u), x(r(u)))du,$$

$$\text{donde } r(u) =: \begin{cases} u - \tau + T & \text{if } 0 \leq u < \tau \\ u - \tau & \text{if } \tau \leq u \leq T. \end{cases}$$

Observemos que K está bien definido, a pesar de que r no es continua.

Lema 5.4.8. K es un operador de punto fijo para \mathcal{B}_τ

Demostración. Sea $x \in S$, entonces $x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u, x(u), x(u - \tau)) du$$

y, como $x \in C_T$, se sigue que $x|_{[0, T]} = \alpha_1(x)$ es un punto fijo de K .

Recíprocamente, si $\hat{x} \in \text{fp}(K)$, entonces claramente $\hat{x}(T) = \hat{x}(0)$. Más aún, si

$$x(t) := \mathbb{I}_{[-\tau, 0]}(t)\hat{x}_T(t) + \mathbb{I}_{[0, T]}(t)\hat{x}(t),$$

entonces $x_0 = \hat{x}_T = x_T$ y $x(r(u)) = x(u - \tau)$ para $u \in [0, T]$. Como $\hat{x} = K(\hat{x})$, para $t \in [0, T]$ se sigue que

$$x(t) = \hat{x}(t) = \hat{x}(T) + \int_0^t f(u, \hat{x}(u), \hat{x}(r(u))) du = x(T) + \int_0^t f(u, x(u), x(u - \tau)) du.$$

Luego, x puede ser extendida a una solución T -periódica de (5.35) y por ende $\hat{x} \in \alpha_1(S)$. \square

Teorema 5.4.1.

$$d_{LSLS}(I - K, U_1, 0) = d_{LSLS}(I - K_2, U_2, 0)$$

Demostración. A partir del corolario anterior, alcanza con verificar que $d_{LSLS}(I - K, U_1, 0) = d_{LSLS}(I - K_1, U_1, 0)$. A este fin, consideremos nuevamente la homotopía lineal $H_\lambda = \lambda K + (1 - \lambda)K_1$ con $\lambda \in [0, 1]$. Supongamos que $\hat{x} \in \bar{U}_1$ es un punto fijo de H_λ . Entonces

$$\hat{x}(t) = \lambda \left(\hat{x}(T) + \int_0^t f(u, \hat{x}(u), \hat{x}(r(u))) du \right) + (1 - \lambda)(\mu \circ \pi)(\hat{x})(t).$$

Evaluando en $t = 0$ obtenemos $\hat{x}(0) = \hat{x}(T)$. Al igual que en teorema anterior, sea $x := \hat{x}_T \mathbb{I}_{[-\tau, 0)} + \hat{x} \mathbb{I}_{[0, T]} \in C[-\tau, T]$. Luego

$$x(t) = \lambda \left(x(T) + \int_0^t f(u, x(u), x(u - \tau)) du \right) + (1 - \lambda)\tilde{\mu}(x_T)(t) \quad (5.37)$$

para todo $t \in [0, T]$ y $x_0 = x_T$. Ahora, consideremos $y = \tilde{\mu}(x_T)$. Entonces

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.38)$$

$$y_0 = x_0 \quad (5.39)$$

Más aún, a partir de (5.37), obtenemos

$$x'(t) = \lambda f(t, x(t), x(t - \tau)) + (1 - \lambda)f(t, y(t), y(t - \tau)). \quad (5.40)$$

Como y es una solución de la última ecuación y $y_0 = x_0$, se sigue de la unicidad que $y = x$.

Observación 5.4.3. Como antes, usando el lema de Gronwall se sigue, de modo más general, que se satisface la condición (J).

Como conclusión, deducimos que x , extendida periódicamente a \mathbb{R} , pertenece a S y $\alpha_1(x) = \hat{x}$. Más aún, como $\alpha_1(S) \cap \partial(U_1) = \emptyset$ concluimos que $\hat{x} \in U_1$; luego, H_λ no tiene puntos fijos en ∂U_1 lo cual concluye el resultado. \square

Otros operadores de punto fijo en $C[0, T]$ y C_T

Por conveniencia notacional, definimos

$$V(x)(t) = \int_0^t x(s) ds$$

$$N_r(x)(t) := f(t, x(t), x(r(t)))$$

con r como antes, y observamos que, a pesar de que $N_r(x)$ no es una función continua, el operador $K_6 : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ dado por

$$K_6(x)(t) := \bar{x} + T\overline{N_r(x)} + V(N_r(x))(t) - \overline{V(N_r(x))}$$

está bien definido y es compacto. Del mismo modo, podemos definir los operadores $K_7 : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ y $K_8 : C_T \rightarrow C_T$ dados por

$$K_7(x)(t) := \bar{x} + T\overline{N_r(x)} + V(N_r(x) - \overline{N_r(x)})(t) - \overline{V(N_r(x) - \overline{N_r(x)})}$$

$$K_8(x)(t) := \bar{x} + T\overline{N(x)} + V(N(x) - \overline{N(x)})(t) - \overline{V(N(x) - \overline{N(x)})}.$$

Estos operadores son análogos, respectivamente, a los operadores K_4 , K_3 y K_5 de la sección 5.4.1. La demostración del siguiente resultado se deja para el lector.

Proposición 5.4.5. K_6 , K_7 y K_8 son operadores de punto fijo y

$$\deg_{LS}(I - K_6, U, 0) = \deg_{LS}(I - K_7, U, 0) = \deg_{LS}(I - K_8, \tilde{U}, 0)$$

siempre y cuando los abiertos acotados $U \subset C[0, T]$ y $\tilde{U} \subset C_T$ tengan corazón común.

5.5. Comentarios finales y preguntas abiertas

1. En la sección 5.4.1, podemos obtener una demostración alternativa de la proposición (5.4.2) para el caso $\eta < 0$. Observemos en primer lugar que podemos obtener un análogo del corolario (5.4.1) para \hat{K}_3 si tomamos, en el diagrama original,

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{\ker(L)}(x) &= x(T), & \hat{\delta}(x) &= x(0) - x(T), \\ \hat{V}(x)(t) &= - \int_t^T x(s) ds, & \hat{\mu}(x_T)(t) &= \hat{\Phi}(t, x_T),\end{aligned}$$

donde $\hat{\Phi}(t, A)$ está definido como la solución única de la ecuación tal que $\hat{\Phi}(T, A) = A$. Luego $\hat{\pi}(x) = x(0)$ y

$$\hat{K}(x)(t) = x(0) - \int_t^T f(s, x(s)) ds,$$

mientras que

$$\hat{K}_1(x)(t) = \hat{\Phi}(t, x(0)).$$

El resultado abstracto implica que, si asumimos abiertos con corazón común, el grado de $I - \hat{K}_1$ coincide con el grado de $I - \hat{K}_2$, donde

$$\hat{K}_2(A) = (\hat{\mu} \circ \hat{\pi})(A) = \hat{\Phi}(0, A).$$

En otras palabras, \hat{K}_2 puede identificarse con el inverso del operador de Poincaré; el cómputo del grado se sigue del siguiente lema:

Lema 5.5.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado tal que P no tiene puntos fijos en $\partial\Omega$. Entonces*

$$\deg_B(I - \hat{P}, P(\Omega), 0) = (-1)^n \deg_B(I - P, \Omega, 0).$$

Demostración. Gracias a las propiedades de escisión y producto del grado, se sigue que

$$\begin{aligned}\deg_B(I - \hat{P}, P(\Omega), 0) &= \deg_B(I - \hat{P}, P(\Omega) \cap \Omega, 0) \\ &= \deg_B(\hat{P}(P - I), P(\Omega) \cap \Omega, 0) = \deg_B(P - I, P(\Omega) \cap \Omega, 0) \\ &= (-1)^n \deg_B(I - P, P(\Omega) \cap \Omega, 0) = (-1)^n \deg_B(I - P, \Omega, 0).\end{aligned}$$

□

Vale la pena mencionar que en el contexto de la teoría de coincidencia de grado, es conocido que si vale

$$x' \neq \lambda N_T(x), \quad x \in \partial\tilde{U}, \lambda \in (0, 1], \quad (5.41)$$

entonces

$$\deg_{LS}(I - K_5, \tilde{U}, 0) = \deg_B(\phi, \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n, 0)$$

y

$$\deg_{LS}(I - \hat{K}_5, \tilde{U}, 0) = \deg_B(-\phi, \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n, 0)$$

donde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dado por

$$\phi(x) := -TN_T(x).$$

En otras palabras, cuando se satisface (5.41), tomando $U, \tilde{U} \subset C_T$ como en la proposición (5.4.2), podemos ver de manera directa que

$$\deg_{LS}(I - K_5, \tilde{U}, 0) = (-1)^n \deg_{LS}(I - \hat{K}_5, U, 0).$$

2. Con respecto al problema con condiciones de tipo Dirichlet de la Sección 5.4.2, cabe realizar varios comentarios. Por empezar, observe-mos que la forma explícita del operador K_2 es

$$K_2(ta + b) = (\pi \circ \mu)(ta + b) = t[x(1) + x'(0)] + 2x(0) = t[x(1) + a] + 2b,$$

donde $x = \mu(ta + b) = \Phi^1(\cdot, b, a)$. En particular, si $K_2(ta + b) = ta + b$, entonces $b = 0$: o sea, los puntos fijos de K_2 pertenecen al subespacio $W = \{ta : a \in \mathbb{R}^n\} \subset \ker(L)$. Más aún, $K_2(W) \subset W$. Esto nos permite un cálculo directo del grado. Las propiedades del grado de Brouwer y el teorema de Sard, nos permiten asumir que 0 es un valor regular de $I - K_2$. Luego

$$\deg_B(I - K_2, U_2, 0) = \sum_{ta \in S_2} \text{sgn}(\det(I - DK_2(ta)))$$

donde $S_2 := \{ta \in U_2 : K_2(ta) = ta\}$. Es inmediato ver que $DK_2(ta)$ puede identificarse con la matriz en $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ dada por

$$\begin{pmatrix} D_a \Phi^1(1, 0, a) + I_n & D_b \Phi^1(1, 0, a) \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}$$

donde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota la matriz identidad. Esto implica que

$$\text{sgn}(\det(I - DK_2(ta))) = \text{sgn}(\det(D_a \Phi^1(1, 0, a))).$$

Más aún, considerando el isomorfismo $\varphi|_W : ta \mapsto a$ es claro que los ceros de s en $\varphi(\bar{U}_2)$ coinciden con los elementos de $\varphi(S_2)$. Como $Ds(a) = D_a \Phi^1(1, 0, a)$, concluimos que

$$\deg(s, \varphi(U_2), 0) = \sum_{a \in \varphi(S_2)} \text{sgn}(\det(D_a \Phi^1(1, 0, a)))$$

de donde el resultado se sigue.

3. Con respecto también a la sección 5.4.2, podemos obtener más operadores de punto fijo de la siguiente manera. En primer lugar, inspirados en la proposición 5.2.1, podemos definir un operador \tilde{K} como el conjugado de la función g definido en la demostración de la proposición 5.4.3. Con esto en mente, definamos $\tilde{i} : W \rightarrow C^1[0, 1]$ dado por $\tilde{i}(ta) := \mu(ta) = \Phi^1(\cdot, 0, a)$ y $\tilde{\pi} : C^1[0, 1] \rightarrow W$ dado por $\tilde{\pi}(x) := tx'(0)$. Entonces $\tilde{\pi} \circ \tilde{i} = \text{id}_W$ y, de acuerdo a la definición $g(ta) := t(a - \mathcal{S}(a))$, podemos calcular $\tilde{K} = \tilde{i} \circ g \circ \tilde{\pi}$ para obtener:

$$\tilde{K}(x) = \Phi^1(\cdot, 0, x'(0) - \mathcal{S}(x'(0))).$$

Es interesante observar que \tilde{K} y $K := \pi + V \circ N$ satisfacen el principio de afinidad, a pesar de no ser linealmente homotópicos. Lo mismo sucede con el operador $K_1 = \mu \circ \pi$, dado por

$$K_1(x) = \mu[t(x(1) + x'(0)) + 2x(0)].$$

En efecto, la igualdad $x = \lambda K_1(x) + (1 - \lambda)\tilde{K}(x)$ implica que $x(0) = 2\lambda x(0)$, pero no necesariamente podemos concluir que $x(0) = 0$ cuando $\lambda = \frac{1}{2}$.

Más generalmente, una familia de operadores afines a todos los anteriores puede obtenerse si consideramos la aplicación $\delta_\theta := \theta \circ \delta$, donde $\theta : \ker(L) \rightarrow \ker(L)$ es un isomorfismo arbitrario que preserva orientación. Es sabido que θ y la identidad pertenecen a la misma componente conexa del grupo $GL(\ker(L))$. Luego, podemos definir $\pi_\lambda := \pi_{\ker(L)} + h(\lambda) \circ \delta$, donde $h : [0, 1] \rightarrow GL(\ker(L))$ es continua con $h(0) = I$ y $h(1) = \theta$. Observemos que π_λ no necesariamente es suryectivo. Sin embargo el correspondiente K_λ es un operador de punto fijo: si $x = K_\lambda(x)$, entonces $L(x) = N(x)$; más aún, aplicando $\pi_{\ker(L)}(x)$ se sigue que $h(\lambda)(\delta(x)) = 0$ y, en consecuencia, $\delta(x) = 0$. Si tomáramos un elemento $\theta \in GL(\ker(L))$ que no preserva orientación, entonces corresponde a la misma componente conexa que $\hat{\delta}(x) = -tx(1) + x(0)$ y por lo tanto $\deg(I - K_2(\theta), U_2, 0) = (-1)^n \deg(\mathcal{S}, \varphi(U_2), 0)$.

Es claro que podemos reemplazar el proyector $\pi_{\ker(L)}$ por otro, aunque la aplicación del lema de conjugación depende de la existencia de μ . Por otro lado, tenemos una familia de operadores de punto fijo de naturaleza distinta si consideramos $K^\eta : x \mapsto y$, donde y es la solución única de

$$y''(t) + \eta y(t) = f(t, x(t)) + \eta x(t), \quad y(0) = y(1) = 0$$

y η no es autovalor de $-L$ para las condiciones de tipo Dirichlet. En ese caso, el grado de $I - K^\eta$ dependerá de la posición relativa de η con respecto al espectro de $-L$; esta situación será abordada en futuros trabajos.

4. Análogamente, en la sección 5.4.3, definimos K^η asumiendo que $-\eta$ no pertenece al espectro de $-\Delta$ bajo las condiciones no locales (5.33). En este caso el grado de $I - K^\eta$ depende solo del signo de η : más precisamente, siguiendo las ideas de la sección 5.4.1 puede demostrarse que el grado de $I - K^\eta$ coincide con el de $I - K_5$, multiplicado por $\text{sgn}(\eta)^n$. Para $\eta > 0$, ya hemos observado que K^η es homotópico con K_5 ; cuando $\eta < 0$, podemos pensar en la siguiente explicación intuitiva. Asumamos por simplicidad que $d = 1$ (es decir, el caso ODE), que se corresponde con el problema de segundo orden 2π -periódico cuando $\Omega = (0, 2\pi)$. Con esto en mente, consideremos el problema lineal autónomo

$$u''(t) = Au(t)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y supongamos que no existen soluciones T -periódicas no triviales. Si definimos como antes la aplicación $u \mapsto v$ dada por resolver la ecuación

$$v'' + \eta v = Au + \eta u,$$

entonces $(I - K^\eta)(u) = u - v$ se calcula en términos de la expansión de Fourier u dada por

$$u = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} [\cos(nt)a_n + \sin(nt)b_n]$$

y resulta

$$(I - K^\eta)(u) = \left(I - \frac{A}{\eta}\right) a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\eta I - A}{\eta - n^2}\right) [\cos(nt)a_n + \sin(nt)b_n].$$

Por ende el subespacio $S_n := \text{span}\{\cos(nt), \sin(nt)\}$ es invariante y, más aún, la matriz asociada a $(I - K^\eta)|_{S_n}$ es

$$M_n = \begin{pmatrix} \frac{\eta I - A}{\eta - n^2} & 0 \\ 0 & \frac{\eta I - A}{\eta - n^2} \end{pmatrix}$$

y satisface $\text{sgn}(\det(M_n)) > 0$. Es decir, el cálculo del grado depende solamente del signo de $\det\left(I - \frac{A}{\eta}\right)$.

Capítulo 6

Lazer-Leach revisitado

En este capítulo se presentan resultados que fueron publicados en [3].

6.1. Introducción

El problema de hallar soluciones periódicas a ecuaciones diferenciales no lineales en resonancia ha sido ampliamente estudiado. El primer ejemplo que podemos considerar es el siguiente

Oscilador armónico Llamamos oscilador armónico a una función escalar $x(t)$ que satisface

$$x'' + m^2x = 0.$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. El conjunto de soluciones continuas de esta ecuación es $S = \text{gen}\{\cos(mt), \text{sen}(mt)\}$, que resulta ser un subespacio dentro de $C(\mathbb{T})$. Este tipo de ecuaciones aparece naturalmente en física para modelar comportamientos oscilatorios en sistemas autónomos. Una manera de modelar una fuerza externa influyendo en un sistema físico es agregarle un término $p(t)$ que modele dicha fuerza

$$x'' + m^2x = p(t). \quad (6.1)$$

Supongamos que p es 2π periódica. Quisiéramos saber si la ecuación admite soluciones 2π -periódicas. Sea $L = \text{dom}(L) \subset C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})$, dada por $L(x) = x'' + m^2x$. Hallar soluciones periódicas de (6.1) es equivalente a hallar $x \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$L(x) = p. \quad (6.2)$$

La ecuación (6.2) solución si y solo si $p \in \text{im}(L)$. Si consideramos $C(\mathbb{T})$ como un subespacio lineal de $L^2(\mathbb{T})$, podemos verificar que $\text{im}(L) = \text{ker}(L)^\perp \cap$

$C(\mathbb{T})$, donde " \perp " significa ortogonal respecto del producto interno de $L^2(\mathbb{T})$. Por lo tanto, el sistema tiene soluciones si y solo si $\text{Pr}(p) = 0$ donde Pr es la proyección ortogonal sobre $\ker(L)$.

En una serie de trabajos, [37] [38], Lazer y Leach estudiaron una perturbación no lineal de la ecuación anterior.

$$x'' + m^2x + g(x) = p(t). \quad (6.3)$$

Ecuaciones de este tipo también son conocidas como (6.3) *ecuaciones de Duffing en resonancia*. En [38], se prueba que ciertas hipótesis sobre las funciones g y p y garantizan la existencia de soluciones 2π -periódicas a (6.3). Específicamente, se piden la siguientes hipótesis:

[L-L] La función $g \in C(\mathbb{R})$ es no constante, existen los límites $g(+\infty)$ y $g(-\infty)$, y $p \in C(\mathbb{T})$ satisface la condición

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t)e^{-imt} dt \right| < \frac{1}{\pi} |g(+\infty) - g(-\infty)|. \quad (6.4)$$

Esta última desigualdad se conoce en la literatura como condición de *Lazer-Leach*. Observemos que el término izquierdo es $|\hat{p}(m)|$ donde $\hat{p}(m)$ es el coeficiente m -ésimo de la serie de Fourier compleja. Como $|\hat{p}(m)|$ es la norma L^2 de $\text{Pr}(p)$ y como $\ker(L) \oplus \text{im}(L)$ nos da una descomposición ortogonal de $C(\mathbb{T})$, podemos interpretar $|\hat{p}(m)|$ como la distancia L^2 de p a $\text{im}(L)$. Luego la condición (6.4) nos dice que la no linealidad de la ecuación permite ampliar el conjunto de funciones p para las cuales el sistema tiene solución periódica, a una franja (en sentido de la norma L^2) alrededor de la imagen de L .

Antes de presentar el marco mas general para nuestros resultados, vale la pena repasar la demostración del resultado de Lazer-Leach usando teoría de grado con la notación e ideas que usaremos en el teorema mas general.

Teorema 6.1.1. *Supongamos que se cumple [L-L]. Entonces la ecuación (6.3) admite solución 2π -periódica.*

Para facilitar la demostración, establezcamos primero notación y algunos lemas.

Sea $L : C^2(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})$ el operador lineal no acotado $L(u) = u'' + m^2u$. Su núcleo es $\ker(L) = \text{gen}\{\cos(mt), \text{sen}(mt)\}$. Sea $\mathcal{S} = \{u \in \ker(L), \|u\|_{L^2} = 1\}$. Usando identidades trigonométricas vemos que todo elemento de $u \in \mathcal{S}$ es de la forma:

$$u(t) = \sqrt{2} \cos(mt - \alpha).$$

Consideremos la inmersión de $C(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$ y sea $\text{Pr} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ker(L)$ la proyección ortogonal. Es fácil ver que $\text{im}(L) \subset \ker(L)^\perp$. Como L es Fredholm de índice 0, tenemos que $\text{im}(L)$ tiene que ser $\ker(L)^\perp \cap C(\mathbb{T})$.

Sea $\mathcal{G} : C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})$, $\mathcal{G}(u) = g \circ u$. La ecuación anterior puede llevarse a la forma

$$L(u) + \mathcal{G}(u) = p. \quad (6.5)$$

Diremos que g es la *no-linealidad en el espacio de fases* y que \mathcal{G} es su *operador de Nyemistki asociado*. Nos referiremos a p como el *término no homogéneo*.

Dado $s > 0$ definimos $\mathcal{G}^s(u)(t) := \mathcal{G}(su(t))$. Definimos el $\mathcal{G}^\infty(u)(t)$ como

$$\mathcal{G}^\infty(u)(t) := \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{G}^s(u)(t),$$

para los valores de $t \in \mathbb{T}$ para los cuales el límite existe.

Lema 6.1.1. *Supongamos que $g \in C(\mathbb{R})$ es acotada y con límites en el infinito. Para $u \in C(\mathbb{T})$ y $0 < s \leq \infty$ vale que $\mathcal{G}^s : C(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ y*

$$\mathcal{G}^\infty(u)(t) = g(+\infty)\mathbb{I}_{u>0}(t) + g(-\infty)\mathbb{I}_{u<0}(t) + g(0)\mathbb{I}_{u=0}(t).$$

La demostración de este lema es trivial. Para $0 < s \leq \infty$, definimos

$$\Gamma^s : C(\mathbb{T}) \rightarrow \ker(L) \quad \Gamma^s = \text{Pr} \circ \mathcal{G}^s.$$

Dado $w \in \mathcal{S}$, definimos $\mathcal{G}^s : C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{G}_w^s(u) := \langle \mathcal{G}^s(u); w \rangle_{L^2}.$$

Para $s = 1$ omitimos el superíndice.

Lema 6.1.2. *Consideremos una sucesión $y_n = \xi_n + v_n \in \ker(L) \oplus \text{im}(L)$, donde $\xi_n \in \mathcal{S}$ son tales que $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathcal{S}$, $\|v_n\|_\infty \rightarrow 0$. Sean $w_1 = \sqrt{2} \cos(mt)$ y $w_2 = \sqrt{2} \text{sen}(mt)$ y $s_n \in \mathbb{R}$ tales que $s_n \rightarrow +\infty$. Entonces*

$$\mathcal{G}_{w_i}^{s_n}(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{w_i}^\infty(\xi) \quad i = 1, 2$$

Demostración. Esta demostración involucra un cálculo preciso de los valores de las integrales que definen $\langle \mathcal{G}^s(u); w \rangle_{L^2}$. Para ver los detalles, consultar [38]. \square

Lema 6.1.3. *Sean $w_1 = \sqrt{2} \cos(mt)$ y $w_2 = \sqrt{2} \text{sen}(mt)$. Los siguientes límites son uniformes en \mathcal{S} :*

$$\mathcal{G}_{w_i}^s(u) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{w_i}^\infty(u) \quad (6.6)$$

$$\|\Gamma^s(u) - \Gamma^\infty(u)\|_{L^2} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad (6.7)$$

$$\|\Gamma^s(u) - \Gamma^\infty(u)\|_\infty \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad (6.8)$$

Demostración. Para (6.6), supongamos que el límite no es uniforme. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$, $s_n \in \mathbb{R}$ y $u_n \in \mathcal{S}$ tales que

$$|\mathcal{G}_{w_i}^{s_n}(u) - \mathcal{G}_{w_i}^\infty(u)| \geq \varepsilon_0.$$

Como \mathcal{S} es compacto, podemos tomar una subsucesión de u_n que renombramos ξ_n tal que $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathcal{S}$. El lema (6.1.2) nos da una contradicción. Es inmediato a partir de (6.6) que

$$\|\Gamma^s(u) - \Gamma^\infty(u)\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

uniformemente en \mathcal{S} , ya que

$$\|\Pr(\mathcal{G}^s(u))\|_{L^2} = \sqrt{(\mathcal{G}_{w_1}^s(u))^2 + (\mathcal{G}_{w_i}^s(u))^2}.$$

La continuidad del proyector \mathcal{P} en norma L^2 y la equivalencia de normas en el núcleo nos (6.8). \square

Lema 6.1.4. Sea $p \in L^2(\mathbb{T})$, entonces $\|\Pr(p)\|_{L^2} = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) e^{-imt} dt \right|$. En particular dado $u \in \ker(L) \setminus \{0\}$, $u = \sqrt{2} \cos(mt - \alpha)$, tenemos que

$$\|\Gamma^\infty(u)\|_{L^2} = \frac{1}{\pi} |g(+\infty) - g(-\infty)|.$$

Supongamos que valen las condiciones [L-L]. Entonces para R suficientemente grande,

$$\deg(\Gamma^\infty, B_R \cap \ker(L), p_0) \neq 0$$

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar el teorema.

Demostración. Sea \mathcal{K} un inverso a derecha compacto de L . Consideremos la homotopía de Lyapunov-Schmidt asociada al diagrama

$$\mathcal{H}(\lambda, u) = u - \Pr(u) + \Pr(p - \mathcal{G}(u)) + \lambda \mathcal{K}[p - \mathcal{G}(u) - \Pr(p - \mathcal{G}(u))]$$

Para $\lambda = 1$ obtenemos un operador de punto fijo para la ecuación (6.5). Para $\lambda = 0$, tenemos que $\mathcal{H}_0(u) := \mathcal{H}(0, u) = 0$ si y solo si $u \in \ker(L)$ y cumple

$$p_0 = \Pr(\mathcal{G}(u)) \quad (6.9)$$

En particular,

$$\|p_0\|_{L^2} = \|\Pr(\mathcal{G}(u))\|_{L^2}. \quad (6.10)$$

Observemos que el lema (6.1.1) nos da que $\|\Gamma^\infty(u)\|_{L^2}$ es constante en $\ker(L) \setminus \{0\}$. La condición [L-L] es equivalente a

$$\|p_0\|_{L^2} < \|\Gamma^\infty(u)\|_{L^2}, \quad \forall u \in \ker(L) \setminus \{0\}.$$

Consideremos $\varepsilon = \|\Gamma^\infty(u)\|_{L^2} - \|p_0\|_{L^2}$. Usando (6.7) del lema (6.1.3) tenemos que existe un $R_0 > 0$ tal que $\forall R > R_0 \forall u \in \mathcal{S}_R$,

$$\|\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}^\infty(u)\|_{L^2} = \|\mathcal{G}^R(u/R) - \mathcal{G}^\infty(u/R)\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Sea $\mathcal{S}_R := \{u \in \ker(L), \|u\|_{L^2} = R\}$. Luego

$$\|\Gamma^\infty(u)\|_{L^2} - \varepsilon < \|\Pr(\mathcal{G}(u))\|_{L^2}$$

para todo $u \in \mathcal{S}_R$. En particular

$$\|p_0\|_{L^2} < \|\Pr(\mathcal{G}(u))\|_{L^2},$$

para todo $u \in \mathcal{S}_R$ y por lo tanto, no hay soluciones de (6.9) en \mathcal{S}_R . Para R suficientemente grande, razonando como recién, usando el (6.8) tenemos que para $u \in \ker(L)$ tal que $\|u\|_\infty = R$,

$$\|\Gamma(u) - \mathcal{G}^\infty(u)\|_\infty < \varepsilon.$$

El lema (3.5.1) nos dice que

$$\deg(\mathcal{H}_0, B_R) = \deg(\mathcal{H}_0|_{\ker(L)}, B_R \cap \ker(L)) = d_B(\Gamma, B_R \cap \ker(L), p_0).$$

Eligiendo ε de modo de poder usar la continuidad del grado, y usando el lema (6.1.4), tenemos que

$$\deg(\mathcal{H}_0, B_R) = \deg(\Gamma, B_R \cap \ker(L), p_0) = \deg(\Gamma^\infty, B_R \cap \ker(L), p_0) \neq 0.$$

Con respecto a la admisibilidad de la homotopía, observemos que dado un par $(\lambda, u) \in (0, 1] \times C$ tal que $\mathcal{H}(\lambda, u) = 0$ tenemos que la componente de u en $\ker(L)^\perp$ está acotada :

$$\begin{aligned} \|u - \Pr u\|_\infty &= \lambda \|\mathcal{K}(p - \mathcal{G}(u) - \Pr(p - \mathcal{G}(u)))\|_\infty \\ &\leq c\lambda \|p - \mathcal{G}(u) - \Pr(p - \mathcal{G}(u))\|_\infty \\ &\leq c\lambda (\|p - \Pr(p)\|_\infty + \|\mathcal{G}(u) - \Pr(\mathcal{G}(u))\|_\infty) \\ &\leq \eta (\|g\|_\infty + \|p\|_\infty) \end{aligned}$$

para cierto η . Supongamos que existe una familia (λ_n, u_n) de ceros de la homotopía tales que $\|u_n\| \rightarrow \infty$. En particular

$$\Pr(p) = \Pr(\mathcal{G}(u_n)). \quad (6.11)$$

Sea $z_n = \text{Pr}(u_n)$ y $\tilde{v}_n = u_n - \text{Pr}(u_n)$. Como el conjunto $\{\tilde{v}_n\}$ es acotado, entonces $\|\tilde{v}_n\|_\infty \rightarrow \infty$. Como $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_{L^2}$ son equivalentes en $\ker(L)$, entonces, $s_n := \|\tilde{v}_n\|_{L^2} \rightarrow \infty$. Sean,

$$\xi_n = \frac{z_n}{\|z_n\|_{L^2}}, \quad v_n = \frac{\tilde{v}_n}{\|z_n\|_{L^2}} \quad \text{y} \quad y_n = \xi_n + v_n.$$

Como \mathcal{S} es compacto, podemos suponer (pasando a una subsucesión si es necesario) que $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathcal{S}$. Usando el lema (6.1.2), tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$.

$$\|\Gamma(u_n) - \Gamma^\infty(\xi)\|_{L^2} = \|\Gamma^{s_n}(y_n) - \Gamma^\infty(\xi)\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Usando el lema (6.1.4) concluimos que para n suficientemente grande, $\|\Gamma(u_n)\|_{L^2}$ es aproximadamente $\frac{1}{\pi}|g(+\infty) - g(-\infty)|$. La condición [L-L] se contradice con (6.11) y por lo tanto los ceros de la homotopía son acotados. Si tomamos un R suficientemente grande, tenemos que la homotopía es admisible en B_R y el grado $\deg(\mathcal{H}_0, B_R) \neq 0$. Luego $\deg(\mathcal{H}_1, B_R) \neq 0$, por lo que hay un cero de \mathcal{H}_1 en B_R y por ende existe solución de (6.3) en $C(\mathbb{T})$. \square

El teorema de Lazer y Leach fue extendido ampliamente a varias situaciones. Por ejemplo, a sistemas, ecuaciones con retardos, etc. Todos estos casos pueden ser englobados bajo el abanico de las ecuaciones funcionales. Muchas de estas extensiones tienen versiones análogas o más débiles de las hipótesis del resultado original. Por ejemplo, al pasar a sistemas, el espacio de fases pasa a ser \mathbb{R}^k y la no-linealidad g va de \mathbb{R}^k en sí mismo. Podemos generalizar la existencia de límites asintóticos en el caso escalar a la existencia de límites radiales. Sin embargo esto puede resultar muy restrictivo, y otras opciones son consideradas en la literatura, como por ejemplo, trabajar con límites en ciertas direcciones, reemplazar los límites por límites superiores, etc. Otra particularidad del resultado de Lazer y Leach, es que las hipótesis sobre la función g (que actúa en el espacio de fases de la ecuación), se trasladan bien a condiciones sobre el operador de Nyemistki \mathcal{G} asociado. Muchas extensiones de L-L son factibles si se piden hipótesis directamente sobre el comportamiento de \mathcal{G} . Luego, para aplicarlo a una ecuación en particular, habría que ver si la no linealidad en el espacio de fases g , implica dichas hipótesis para \mathcal{G} .

El objetivo de este trabajo es presentar un marco muy amplio que unifica todas estas extensiones en un teorema abstracto, inspirado en los métodos e ideas presentados en [5]. Esto requiere de caracterizar la clase de ecuaciones funcionales para la cual nuestro resultado se aplica, y dar versiones generales de las hipótesis para esta clase de ecuaciones. Nuestras hipótesis estarán dadas sobre el operador de \mathcal{G} , pero presentaremos algunas condiciones sobre

g que las implican como discutimos en el párrafo anterior. También extendemos la no linealidad de la ecuación, agregando términos que dependen de u de forma funcional.

6.2. Ejemplos y extensiones

Antes de presentar el marco abstracto, daremos una serie de ejemplos motivadores.

Ejemplo 6.2.1. En [5], se encuentran soluciones 2π -periódicas $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, para sistemas de segundo orden de tamaño N de la forma

$$u''(t) + m^2u(t) + g(u) = p(t), \quad (6.12)$$

Las condiciones que garantizan la existencia de solución nuevamente tienen que ver con el comportamiento asintótico de g . A su vez, se necesita que la proyección de $g(u) - p$ sobre el núcleo del operador lineal $u \mapsto u'' + m^2u$ cumpla cierta propiedad topológica.

Ejemplo 6.2.2. Otra generalización posible es introducir retardos temporales. Por ejemplo, tenemos en (6.13) se hallan soluciones a la ecuación

$$u''(t) + m^2u(t) + g(u(t - \tau)) = p(t) \quad (6.13)$$

donde $\tau \in [0, 2\pi)$, asumiendo una condición similar a (6.4). Observemos que el término retardado en (6.13), se halla en la parte no lineal de la ecuación.

Ejemplo 6.2.3. Otro ejemplo, es la ecuación de Gompertz con retardo

$$N'(t) = -\alpha N(t) \log(K/N(t - \tau)) \quad (6.14)$$

donde $N(t)$ es la densidad de una población celular autolimitante, α es una constante positiva y $K > 0$ es una constante conocida como la capacidad de carga del ambiente. El cambio de variables $u = \log N$ nos da la ecuación lineal

$$u'(t) = \alpha u(t - \tau) + p \quad (6.15)$$

con $p = -\alpha \log K$. Observemos ahora que el término retardado puede incluirse en la parte lineal de la ecuación, i.e., $Lu = u' - \alpha u(t - \tau)$.

En [26], se estudia esta ecuación agregando no linealidades no acotadas.

Podemos extender la ecuación de Gompertz (6.15), a un sistema de primer orden, de la forma

$$\begin{cases} u_1'(t) + a_1u_1(t) + b_1u_1(t - \tau_1) + g_1(u_1(t - \tau_1), u_2(t - \tau_2)) = p(t) \\ u_2'(t) + a_2u_2(t) + b_2u_2(t - \tau_2) + g_2(t, u_{1t}, u_{2t}) = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

con p periódica. En este sistema tenemos retardos temporales tanto en la parte lineal de la ecuación, i.e.,

$$L \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1'(t) + a_1 u_1(t) + b_1 u_1(t - \tau_1) \\ u_2'(t) + a_2 u_2(t) + b_2 u_2(t - \tau_2) \end{pmatrix}$$

como en la no lineal,

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(u_1(t - \tau_1), u_2(t - \tau_2)) \\ g_2(t, u_{1t}, u_{2t}) \end{pmatrix}$$

En [4] hallan soluciones periódicas a este sistema, asumiendo (6.4) y las condiciones de resonancia: $|a_1| < |b_1|$ y $b_1 e^{im\tau_1} = -a_1 - im$ donde $m := \sqrt{b_1^2 - a_1^2} \in \mathbb{N}$. Usamos la notación u_t para referirnos al segmento de la función dado por $u_t(\theta) = u(t + \theta)$. La función g_2 es continua definida $g_2 : \mathbb{R} \times C[-\tau_1, 0] \times C[-\tau_2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$.

6.2.1. Retardos distribuidos

Todos los ejemplos anteriores pueden ser llevados a sistemas de primer orden con el método usual. Luego, podemos dar la siguiente formulación que incluye a los ejemplos anteriores y a retardos distribuidos:

$$u'(t) + \int_{-\tau}^0 d\lambda(s)u(s+t) + g \left(\int_{-\tau}^0 d\psi(s)u(s+t) \right) + h(t, u_t) = p(t). \quad (6.17)$$

donde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y λ y ψ son matrices de $N \times N$ de medidas regulares con signo en el intervalo $[-\tau, 0]$, es decir $\lambda, \psi \in \mathcal{M}([-\tau, 0])^{N \times N}$. A modo de ejemplo, para la ecuación (6.15), tomando $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ tenemos que

$$\lambda = \begin{pmatrix} a_1 \delta_0 + b_1 \delta_{\tau_1} & 0 \\ 0 & a_2 \delta_0 + b_2 \delta_{\tau_2} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

donde, como siempre, δ_s es la medida unitaria puntual concentrada en s (delta de Dirac). La matriz ψ puede tomarse de varias maneras, por ejemplo,

$$\psi = \begin{pmatrix} \delta_{\tau_1} & 0 \\ 0 & \delta_{\tau_2} \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Para ψ así definida, tenemos que $g(x, y) = (g_1(x, y), 0)$. Finalmente, el resto de la no linealidad queda capturado por la h , es decir, $h(t, u_t) = (0, g_2(t, u_{1t}, u_{2t}))$, y el término no homogéneo es $(p, 0)$.

6.3. Marco general

En esta sección presentaremos la clase de ecuaciones mas general para la cual formularemos nuestro teorema.

6.3.1. Ecuación general

Sean $C := C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ y $C^k := C^k(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$. La clase de ecuaciones con la que vamos a trabajar es de la forma

$$P(\partial)(u) + \Lambda * u + g \circ (\Psi * u) + h(t, u) = p(t), \quad (6.20)$$

donde $p \in C$, $\Lambda, \Psi \in L(C, \mathbb{R}^N)$ y $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $h \in C(\mathbb{T} \times C, \mathbb{R}^N)$ acotadas. El operador $P(\partial) : C^m \rightarrow C$ es un polinomio diferencial, dado por

$$P(\partial)(u) = \sum_{k=0}^m A_k u^{(k)}$$

donde $A_j \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con A_m inversible y $u^{(k)} = \frac{d^k u}{(dt)^k}$.

Observemos que h depende funcionalmente de la u . Incluye como caso particular funciones que para cada $t \in \mathbb{T}$ dependen de $u|_{[t-\tau, t]}$ para algún retardo τ . Enfatizamos la distinción entre la parte lineal y la no lineal de (6.20), escribiendo (6.20) de la forma

$$L(u) + \mathcal{N}(u) = p. \quad (6.21)$$

El operador $L : C^k \rightarrow C$ de la parte lineal, dado por

$$L(u) = P(\partial)(u) + \Lambda * u,$$

es no acotado. El operador no lineal $\mathcal{N} : C \rightarrow C$ está dado por

$$\mathcal{N}(u)(t) = g((\Psi * u)(t)) + h(t, u). \quad (6.22)$$

Llamemos \mathcal{G} y \mathcal{H} a los operadores asociados a los dos sumandos de (6.22), es decir $\mathcal{N} = \mathcal{G} + \mathcal{H}$. Nos referiremos a p como el *término no homogéneo* de la ecuación.

6.3.2. Término lineal

Nos interesa hacer un diagrama de Liapunov-Schmidt asociado a la ecuación. Como ya vimos en el lema (2.4.2), L es un operador de Fredholm de

índice 0 con inversa a derecha compacta. Observemos que dada la base canónica $\{e_j\}$ de \mathbb{C}^N , podemos definir una base ortogonal de $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^N)$ dada por las funciones $\Theta_{k,j}$ tales que $\Theta_{k,j}(t) = e^{ikt}e_j$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq j \leq N$. Los espacios $e^{ikt}\mathbb{C}^N$ están en suma directa. Además, dado $v \in \mathbb{C}^N$, tenemos que

$$L(e^{ikt}v) = P(\partial)(e^{ikt}v) + \Lambda * e^{ikt}v.$$

Es inmediato verificar que ambos sumandos del lado derecho se mantienen en $e^{ikt}\mathbb{C}^N$. Luego, L es invariante en los subespacios $e^{ikt}\mathbb{C}^N$. Podemos representar L cada uno de estos subespacios por las matrices $L_k \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tales que

$$L(e^{ikt}v) = e^{ikt}L_kv.$$

En particular tenemos que dada $u \in C^m$, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{L(u)}(k) = L_k\hat{u}(k)$$

Mas específicamente, las matrices L_k están dadas por $L_k = \widehat{P(\partial)}(k) + \widehat{\Lambda}(k)$ donde

$$\widehat{P(\partial)}(k) = P(-ik) = \sum_{j=0}^m (-ik)^j A_k$$

y las matrices $\widehat{\Lambda}(k)$ resultan iguales a $\hat{\Lambda}(k)$ y son acotadas.

Tenemos el siguiente lema:

Lema 6.3.1. *El conjunto $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{Z} / \ker(L_k) \neq \{0\}\}$ es finito. Más aún, dados los subespacios $V_k = \ker(L_k)$, tenemos que $u \in \ker(L)$ si y solo si*

$$u = \sum_{k \in \mathcal{K}} e^{itk}v_k, \quad (6.23)$$

donde $v_k \in V_k$.

Demostración. Supongamos que existen x_k tales que $L_k x_k = 0$ y $\|x\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Es decir que

$$[P(-ik) + \Lambda(k)]x_k = 0, \quad (6.24)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Recordemos que la matriz A_m es inversible. Luego, existe una constante $C > 0$ tal que $\|A_m x\| \geq C\|x\|$. En particular

$$\|P(-ik)x_k\| \geq k^m \left[C - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{k^{m-j}} \|A_j\| \right],$$

con lo cual $\|P(-ik)x_k\| \rightarrow \infty$. Las matrices $\hat{\Lambda}(k)$ tienen norma acotada uniformemente en k , y por lo tanto $\|\hat{\Lambda}(k)x_k\|$ es acotado. Llegamos a un absurdo.

Luego, solo puede haber finitos k para los cuales (6.24) tiene solución. Para la segunda afirmación basta con considerar la extensión de L al espacio de distribuciones:

$$\bar{L} : \mathcal{D}_N \rightarrow \mathcal{D}_N.$$

Una distribución $\varphi \in \ker(\bar{L})$ si y solo si $L_k \hat{\varphi}(k) = 0$ en \mathbb{C}^N para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego, los elementos del núcleo de \bar{L} pueden representarse como en (6.23), y como \mathcal{K} es finito, esos elementos resultan estar en el dominio de L . Por lo tanto los elementos del núcleo de L son exactamente los de la forma (6.23). \square

6.3.3. El término no lineal

Recordemos que $\mathcal{G}(u) = g \circ (\psi * u)$. Dado $s > 0$, definimos, como en el caso de Lazer-Leach,

$$\mathcal{G}^s : C \rightarrow C, \quad \mathcal{G}^s(u)(t) = \mathcal{G}(su(t)) \quad (6.25)$$

para $s > 0$. En algunos casos, se puede definir la versión asintótica del operador de \mathcal{G} dada por $\mathcal{G}^\infty : C \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{G}^\infty(u)(t) := \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{G}^s(u)(t). \quad (6.26)$$

donde el límite es para todo $t \in \mathbb{T}$ salvo aquellos donde $\psi * u(t) = 0$. En esos casos es posible definir $\Gamma^\infty : \ker(L) \rightarrow \ker(L)$ dado por $\Gamma^\infty = \text{Pr} \circ \mathcal{G}^\infty$. Por ejemplo, en el contexto del teorema (6.1.1). Sin embargo, esta condición puede resultar muy restrictiva. Sea \mathcal{S} la esfera unitaria de $\ker(L)$ para la norma L^2 , i.e. $\mathcal{S} = \{u \in \ker(L), \|u\|_{L^2} = 1\}$. Dado $w \in \mathcal{S}$, $u \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N)$ y $s > 0$, definimos

$$\mathcal{G}_w^s(u) := \langle \mathcal{G}^s(u); w \rangle_{L^2} \in \mathbb{R}.$$

Por tratarse de valores escalares, siempre podemos tomar límite inferior respecto de s y toma valores finitos, ya que g es acotada. Esto nos permite definir $\mathcal{G}_w^\infty : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\mathcal{G}_w^\infty(u) = \liminf_{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}_w^s(u).$$

6.3.4. Hipótesis del teorema principal

Con respecto al término lineal, vamos a pedir la siguiente condición:

$$[(L1)] \quad \ker(L_k^*) = \ker(L_k) \text{ para todo } k \in \mathcal{K}.$$

Esta condición es suficiente para garantizar que $\text{im}(L) \subset \ker(L)^\perp$ en sentido de $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N)$. Como ya vimos que L es Fredholm de índice 0, concluimos que

$$\ker(L) \oplus \text{im}(L) = C. \quad (6.27)$$

Nuestras hipótesis sobre \mathcal{N} , inspirada en [5], son las siguientes:

[(N1)] **Límites asintóticos por regiones:** Hay una familia $\{(G_j, w_j)\}$ con $j = 1, \dots, M$ tal que $\{G_j\}$ cubren \mathcal{S} y $w_j \in \mathcal{S}$. Sean $\mathcal{G}_j^s(u) := \mathcal{G}_{w_j}^s(u)$, $0 < s \leq \infty$. Sean $y_n = \xi_n + v_n$ donde $\xi_n \in \mathcal{S}$ tales que $\xi_n \rightarrow \xi$ y $v_n \in C$ tales que $\|v_n\|_\infty \rightarrow 0$. Supongamos que $\xi \in G_{j_0}$. Sean $s_n \in \mathbb{R}$ tales que $s_n \rightarrow \infty$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_{j_0}^{s_n}(y_n) \leq \mathcal{G}_{j_0}^\infty(\xi). \quad (6.28)$$

[(N2)] **Cota por regiones:** Para cada $\xi \in \mathcal{S}$, existe $j \in \{1, \dots, M\}$ tal que

$$\langle p; w_j \rangle_{L^2} > \mathcal{G}_j^\infty(\xi) + |h|_\infty.$$

[(N3)] **Condición de grado:** Consideremos $p_0 = \text{Pr}(p)$ la proyección sobre el núcleo de L del término no homogéneo p , y sea

$$\Gamma : \ker(L) \rightarrow \ker(L), \quad \Gamma = \text{Pr} \circ \mathcal{N}.$$

Existe $R_0 > 0$ tal que $d_B(\Gamma, B_R, p_0) \neq 0$ para todo $R \geq R_0$.

Observación 6.3.1. 1. La condición [(N1)] garantiza que para $\xi \in U_j$ existe el límite $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_j^s(\xi)$. En efecto, si consideramos una sucesión $s_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_j^s(\xi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_j^{s_n}(\xi),$$

alcanza con aplicar [(N1)] a la sucesión $\xi_n = \xi$ para concluir que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_j^{s_n}(\xi) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_j^{s_n}(\xi).$$

2. Para $h \neq 0$, obtener una caracterización de Γ puede ser difícil, pero, como veremos mas adelante, para algunos sistemas con $h \neq 0$ ese calculo es innecesario si h no interactúa con $\ker L$, de un modo que precisaremos en Section (6.6.1).

Las condiciones (N1)–(N3) se ven engorrosas pero a la vez son muy generales. En algunos casos, son fáciles de verificar como veremos más adelante.

6.4. Teorema principal

Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 6.4.1. *Sean L y \mathcal{N} como en (6.21) y $p \in C$. Supongamos que las hipótesis (L1) y (N1)–(N3) se cumplen. Entonces la ecuación $L(u) + \mathcal{N}(u) = p$ tiene una solución.*

Demostración. Consideremos la homotopía de Lyapunov-Schmidt asociada a esta ecuación

$$\mathcal{H}(\lambda, u) = u - \text{Pr}(u) + \text{Pr}(p - \mathcal{N}(u)) + \lambda K[p - \mathcal{N}(u) - \text{Pr}(p - \mathcal{N}(u))]$$

Veamos que la homotopía es admisible en una bola lo suficientemente grande. En primer lugar, observemos que si (λ, u) es un cero de la homotopía,

$$\|u - \text{Pr}(u)\|_\infty \leq \| \text{Pr}(p - \mathcal{N}(u)) \|_\infty + \lambda \| K[p - \mathcal{N}(u) - \text{Pr}(p - \mathcal{N}(u))] \|_\infty$$

La continuidad de Pr y K y el hecho de que \mathcal{N} es acotado nos garantiza que $\|u - \text{Pr}(u)\|_\infty$ está necesariamente acotado. Supongamos ahora que existen que $(\lambda_n, u_n) \in [0, 1] \times C$ ceros de la homotopía tales que $\|u_n\|_\infty \rightarrow +\infty$. Sea $u_n := z_n + \tilde{v}_n \in \ker(L) \oplus \text{im}(L)$. La observación anterior nos garantiza que los términos \tilde{v}_n están acotados. Razonando como en la demostración del teorema (6.1.1), tenemos que $s_n = \|z_n\|_{L^2} \rightarrow +\infty$ y definimos

$$\xi_n := \frac{z_n}{\|z_n\|_{L^2}}, \quad v_n := \frac{\tilde{v}_n}{\|z_n\|_{L^2}}.$$

Observemos que $\xi_n \in \mathcal{S}$ y como los \tilde{v}_n son acotados, entonces $\|v_n\|_\infty \rightarrow 0$. Pasando a una subsucesión de ser necesario, podemos suponer que $\xi_n \rightarrow \xi$, donde $\xi \in G_{j_0}$ para cierto j_0 . Sean

$$y_n := \xi_n + v_n.$$

Como $u_n = s_n y_n$, tenemos que $\mathcal{G}_{j_0}(u_n) = \mathcal{G}_{j_0}(s_n y_n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_{j_0}^{s_n}(y_n)$. Usando (N1) tenemos que,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_{j_0}(u_n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_{j_0}^{s_n}(y_n) \leq \mathcal{G}_{j_0}^\infty(\xi)$$

Por (L1) tenemos que $\ker L = \ker L^*$, con lo cual $L^*(\omega_j) = 0$ para todo j . Luego, tenemos las siguientes identidades

$$0 = \langle u_n; L^*(w_j) \rangle_{L^2} = \langle L(u_n); w_j \rangle_{L^2} = \langle p - \mathcal{N}(u_n); w_j \rangle_{L^2}. \quad (6.29)$$

y por ende $\langle p; w_j \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{N}(u_n); w_j \rangle_{L^2}$ para todo $j = 1, \dots, M$ y $n \in \mathbb{N}$. En particular

$$\langle p; w_{j_0} \rangle_{L^2} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{N}(u_n); w_{j_0} \rangle_{L^2} \quad (6.30)$$

La ecuación (6.29) implica que

$$\begin{aligned} \langle p; w_{j_0} \rangle_{L^2} &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\langle \mathcal{G}(u_n); w_{j_0} \rangle_{L^2} + \langle \mathcal{H}(u_n); w_{j_0} \rangle_{L^2}) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{j_0}^{s_n}(y_n) + |h|_\infty \\ &\leq \mathcal{G}_{j_0}^\infty(\xi) + |h|_\infty \end{aligned} \quad (6.31)$$

lo cual contradice (N2). En conclusión, para $R \gg 0$, tal que la bola $B_R(0)$ de C contenga en su interior a los ceros de la homotopía, tenemos que $\mathcal{H}(\lambda, u)$ es admisible en $B_R(0)$. En particular, si tomamos el operador $\mathcal{H}_0(u) = \mathcal{H}(0, u)$, tenemos que el par (\mathcal{H}_0, B_R) es admisible. Además, como ya vimos en (3.5.1),

$$\deg(\mathcal{H}_0, B_R) = \deg(\mathcal{H}_0|_{\ker(L)}, B_R \cap \ker(L)) = \deg(\Gamma, B_R \cap \ker(L), p_0).$$

Si tomamos R suficientemente grande para que se cumpla (N3), tenemos que $\deg(\mathcal{H}_0, B_R) \neq 0$ y (3.5.1) nos da el resultado. \square

6.5. Corolarios del Teorema

A continuación veamos algunos ejemplos en los que nuestro teorema principal se aplica

6.5.1. Landesman-Lazer

Consideremos un caso particular de la ecuación (6.20):

$$u' + g \circ u = p \quad (6.32)$$

con $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, y $p \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N)$. Como $L(u) = u'$, tenemos que $\ker(L)$ puede identificarse con \mathbb{R}^N , y por lo tanto $\mathcal{S} = \mathbb{S}^{N-1}$. La proyección ortogonal sobre $\ker(L)$ es el promedio $\text{Pr}(u) = \bar{u}$. Además, observemos que L cumple con la condición [(L1)].

Supongamos que valen las siguientes condiciones.

[(R1)] Existe $g^\infty \in C(\mathbb{S}^{N-1}, \mathbb{R}^n)$ dada por

$$g^\infty(v) = \lim_{s \rightarrow +\infty} g(sv).$$

donde el límite es uniforme en \mathbb{S}^{N-1} .

[(R2)] $\bar{p} \notin g^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$.

[(R3)] $\deg(g^\infty, \mathbb{S}^{N-1}, \bar{p}) \neq 0$

Proposición 6.5.1. *Las condiciones [(R1)], [(R2)] y [(R3)] implican [(N1)], [(N2)] y [(N3)].*

Demostración. Veamos que (R1) implica (N1). Observemos que si $\xi \in \ker(L)$,

$$\mathcal{G}^\infty(\xi) = \liminf_{s \rightarrow \infty} g(s\xi) = g^\infty(\xi).$$

Consideremos $y_n = \xi_n + v_n$ y s_n como en (N1), con $\xi_n \rightarrow \xi$. Como $\|y_n - \xi\|_\infty \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n y_n(t)) = g^\infty(\xi)$$

uniformemente en \mathbb{T} . En particular, dado cualquier $w \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^N$, vale que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_w^{s_n}(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g(s_n y_n(t)); w \rangle_{L^2} = \langle g^\infty(\xi); w \rangle_{L^2} = \mathcal{G}_w^\infty(\xi).$$

Dada $\{w_i\}_{i=1}^n$ una base de \mathbb{R}^N , consideremos los conjuntos

$$U_i = \{u \in \mathcal{S} \mid \langle g^\infty(u) - \bar{p}; w_i \rangle_{\mathbb{R}^N} > 0\} \quad V_i = \{u \in \mathcal{S} \mid \langle g^\infty(u) - \bar{p}; w_i \rangle_{\mathbb{R}^N} < 0\}.$$

La continuidad de g^∞ y la condición [(R2)] implican que es un cubrimiento por abiertos de \mathcal{S} . Tomando los pares $(U_i, -w_i)$ y (V_i, w_i) se verifica la condición [(N2)]. Es fácil verificar que [(R3)] implica [(N3)]. \square

6.5.2. Condiciones de tipo Nirenberg

Consideremos la ecuación (6.20), con $h \equiv 0$. Supongamos que se cumplen (L1), (R1) y las siguientes condiciones:

[(L2)] $\hat{\Psi}(k)$ es invariante e inversible en $\ker(L_k)$ para todo $k \in \mathcal{K}$.

Extendamos g^∞ a \mathbb{R}^N usando la misma expresión para $v \neq 0$ y $g^\infty(0) = g(0)$. Observemos que $g^s \rightarrow g^\infty$ uniformemente sobre cualquier compacto $B \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Definimos \mathcal{G}^s para $0 < s \leq \infty$ como en (6.25) y (6.26). Tenemos que

$$\mathcal{G}^\infty : C \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N), \quad \mathcal{G}^\infty(u) = g^\infty \circ (\Psi * u).$$

y podemos definir $\Gamma^s = \text{Pr} \circ \mathcal{G}^s$, $0 < s \leq \infty$. Recordemos además que llamamos $p_0 = \text{Pr}(p)$. Sea B

[(R2')] Dado $B = \{w \in \ker(L), \|w\| \leq 1\}$, la terna $(\Gamma^\infty(w), B, p_0)$ es admisible y

$$\deg(\Gamma^\infty, B, p_0) \neq 0.$$

Teorema 6.5.1. *Las condiciones (L1),(L2),(R1) y (R2') implican (N1)–(N3).*

Recordemos que $\ker(L)$ está dado por funciones vectoriales cuyas coordenadas son polinomios trigonométricos. Vamos a enunciar un corolario del Lema de Nazarov-Turan de la teoría de aproximación. Para la versión original ver [51].

Lema 6.5.1. *Sea $A \subset \ker(L) \setminus \{0\}$ un conjunto compacto. Dado $w \in A$ y $\delta > 0$, consideremos $\Omega_{\delta,w} = \{t \in \mathbb{T}, \|w(t)\|_{\mathbb{R}^N} < \delta\}$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\mu(\Omega_{\delta,w}) < \varepsilon$ para todo $w \in A$.*

Demostración. Veamos primero la condición (N1). Consideremos $y_n = \xi_n + v_n$, y $s_n \rightarrow +\infty$ como en (N1). Observemos que como $\tilde{\Psi}$ es continua en C , tenemos que $\|\Psi * y_n - \Psi * \xi\|_{\infty} \rightarrow 0$. Como pedimos (L3), $\tilde{\Psi}$ es invariante en $\ker(L)$ e inversible. Luego tenemos que $A := \tilde{\Psi}(\mathcal{S}) \subset \ker(L) \setminus \{0\}$ es un compacto. El lema (6.5.1) nos dice que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\mu(\Omega_{\delta_0,w}) < \varepsilon$ donde la cota es uniforme para $w \in A$. Sean $w_n := \Psi * y_n$ y $w := \Psi * \xi \in A$, y $\Omega_{\delta,n} = \{t \in \mathbb{T}, \|w_n(t)\| < \delta\}$. Como $\|w_n - w\|_{\infty} \rightarrow 0$ podemos elegir $\delta_1 > 0$ y $n_1 \in \mathbb{N}$, tales que

$$\Omega := \Omega_{\delta_1,w} \cup \bigcup_{n > n_1} \Omega_{\delta_1,n} \subset \Omega_{\delta_0,w}$$

En particular $\mu(\Omega) < \varepsilon$. Además tenemos que $t \in \mathbb{T} \setminus \Omega$ si y solo si $\|w_n(t)\| \geq \delta_1$ para todo $n > n_1$ y $\|w(t)\| \geq \delta_1$. Sea $B \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ un compacto que contenga a $w_n(t)$ y $w(t)$ para todo $t \in \mathbb{T} \setminus \Omega$. Por la convergencia uniforme $g^s \rightarrow g^{\infty}$ en B , tenemos que existe $s_0 > 0$ tal que para $s > s_0$, $\|g^s(v) - g^{\infty}(v)\| < \varepsilon$ para todo $v \in B$. En particular

$$\|g(sw_n(t)) - g^{\infty}(w(t))\| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{T} \setminus \Omega$$

Sea $J_n(t) := \|g(s_n w_n(t)) - g^{\infty}(w(t))\|$. Sea $n_2 > n_1$ tal que $s_n > s_0$ para $n > n_2$. Tenemos la siguiente acotación para todo $n > n_2$:

$$\|\mathcal{G}^{s_n}(y_n) - \mathcal{G}^{\infty}(\xi)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Omega} J_n(t)^2 dt + \int_{\mathbb{T} \setminus \Omega} J_n(t)^2 dt \right] \quad (6.33)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} [\mu(\Omega) \|g\|_{\infty} + 2\pi \varepsilon^2] \quad (6.34)$$

$$\leq \frac{\varepsilon \|g\|_{\infty}}{2\pi} + \varepsilon^2, \quad (6.35)$$

que es arbitrariamente chico. En particular para cualquier cubrimiento $\{U_j\}_{j=1}^M$ de \mathcal{S} , y $u_j \in \mathcal{S}$, vale que

$$\mathcal{G}_j^{s_n}(y_n) \rightarrow \mathcal{G}_j^{\infty}(\xi)$$

que en particular nos da (N1). Para ver que (R2') implica (N2) procedemos igual que lo hicimos para ver que (R2) implica (N2) en Landesman-Lazer. Una cuenta análoga a (6.33)-(6.35) muestra que $\mathcal{G}^\infty|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N)$ es continua. Es decir

$$\|\xi_n \rightarrow \xi\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|\mathcal{G}^\infty(\xi_n) - \mathcal{G}^\infty(\xi)\|_{L^2} \rightarrow 0. \quad (6.36)$$

Veamos ahora que $\|\mathcal{G}^s(\xi) - \mathcal{G}^\infty(\xi)\|_{L^2} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$ uniformemente en \mathcal{S} . En efecto, si el límite no fuera uniforme, habría un $\varepsilon_0 > 0$, $\xi_n \in \mathcal{S}$, y $s_n \rightarrow +\infty$ tales que

$$\|\mathcal{G}^{s_n}(\xi_n) - \mathcal{G}^\infty(\xi_n)\|_{L^2} \geq \varepsilon_0$$

Pasando a una subsucesión de ser necesario, podemos suponer que $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathcal{S}$. Luego, llegamos a una contradicción con (N1) y (6.36). Como $\text{Pr} : L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N) \rightarrow \ker(L)$ es continua en norma L^2 , tenemos que

$$\|\Gamma^s(\xi) - \Gamma^\infty(\xi)\|_{L^2} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$$

uniformemente en \mathcal{S} . Dado $R > 0$ consideremos $\mathcal{S}_R = R \cdot \mathcal{S}$. Como las normas son equivalentes en $\ker(L)$ y Γ^∞ es invariante radialmente, tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que para $R > R_0$,

$$\|\Gamma(u) - \Gamma^\infty(u)\|_\infty = \left\| \Gamma^R \left(\frac{u}{\|u\|_{L^2}} \right) - \Gamma^\infty \left(\frac{u}{\|u\|_{L^2}} \right) \right\|_\infty < \varepsilon$$

Luego, eligiendo ε apropiadamente, tenemos que para $R > R_0$, la terna $(\Gamma, B_R \cap \ker(L), p_0)$ es admisible y que

$$\deg(\Gamma, B_R \cap \ker(L), p_0) = \deg(\Gamma^\infty, B_R \cap \ker(L), p_0) = \deg(\Gamma^\infty, B, p_0) \neq 0.$$

Esto implica (N3) y completa la demostración. \square

6.5.3. Límites en el infinito

Denotemos por Σ el conjunto de todas las N -uplas de signos $\sigma = (\pm, \dots, \pm)$ y, para $\sigma \in \Sigma$ y $x \in \mathbb{R}^N$, escribimos $\sigma x = (\sigma_1 x_1, \dots, \sigma_N x_N)$ donde σ_j es $+$ o $-$. Similarmente a la condición (R1), formulamos la siguiente condición para los 2^N límites diferentes en el infinito:

(R1') $\langle w(t); e_j \rangle \neq 0$ para cada $w \in \mathcal{S}$, $j \in \{1, \dots, N\}$ y además, para cada $\sigma \in \Sigma$, los límites

$$\lim_{\substack{\sigma_j x_j \rightarrow \infty \\ j=1, \dots, N}} g(\sigma x) = g(\sigma) \quad (6.37)$$

existen.

Suponiendo (R1'), cada componente de $w \in \mathcal{S}$, dada por $\langle w(t); e_j \rangle$, es un polinomio trigonométrico no trivial de promedio cero. Luego, el conjunto

$$S_w := \bigcup_{j=1}^N S_{w,j} := \bigcup_{j=1}^N \{t \in \mathbb{T} : w_j(t) = 0\} \quad (6.38)$$

es un conjunto de medida 0 (de hecho, S_w es finito). Para $\sigma \in \Sigma$, definamos el conjunto $w^{(\sigma)} := \{t \in \mathbb{T} : \sigma_j w_j(t) > 0, j = 1, \dots, N\}$.

Es fácil demostrar que, para $w \in \mathcal{S}$ arbitrario, la aplicación $\mathcal{G}^\infty(w)$ está dada por $\mathcal{G}^\infty(w) = \sum_{\sigma} g(\sigma) \mathbf{1}_{w^{(\sigma)}}$. Mas aún, un cálculo sencillo muestra que $\mathcal{G}(w)(t)$ es continua respecto de w para $t \in \mathbb{T} \setminus S_w$. Para poder corroborar que en este contexto, (R1'), (R2) y (R3) implican (N1)–(N3), alcanza con seguir la misma línea de argumentos dados en Sección 6.5.2.

6.6. Más ejemplos y discusión

En esta sección, presentamos ejemplo de ecuaciones y sistemas para los cuales el Teorema 6.4.1 y sus corolarios se aplican. Para núcleos de mayor dimensión $\dim \ker L > 2$, dar un cálculo explícito de g_w y γ puede ser difícil y costoso. En pos de la claridad, solo daremos ejemplos con $\dim \ker L = 2$.

6.6.1. Un sistema de tipo Gompertz

Vale la pena observar, que podría suceder que, para cierto $h \neq 0$, que $\langle h(t, u_t); \Theta_{k,j} \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$, $u \in C$, $k \in \mathbb{K}$ y $j \in \{1, \dots, \nu_k\}$. En ese caso, la función h no influye en el cálculo del grado de Γ^∞ o γ . Un ejemplo de tal situación es el siguiente.

Fijamos $\tau_1, \tau_2 \in [0, 2\pi)$. En [4], se hallan soluciones periódicas del sistema

$$\begin{cases} u_1'(t) + a_1 u_1(t) + b_1 u(t - \tau_1) + \tilde{g}(u_1(t - \tau_1), u_2(t - \tau_2)) = p(t) \\ u_2'(t) + a_2 u_2(t) + b_2 u(t - \tau_2) + h(t, u_t, v_t) = 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

asumiendo que

(i) \tilde{g} es continua y acotada, y que los límites

$$\tilde{g}_{\inf}(\pm\infty) := \liminf_{u \rightarrow \pm\infty} \tilde{g}(u, v), \quad \tilde{g}_{\sup}(\pm\infty) := \limsup_{u \rightarrow \pm\infty} \tilde{g}(u, v)$$

existen y son uniformes respecto de v .

- (ii) $h : \mathbb{T} \times C \times C \rightarrow C$ es continua y acotada.
- (iii) a_1, b_1 y τ_1 satisfacen la condición necesaria y suficiente para la resonancia de la primera ecuación en (6.39). Es decir, $|a_1| < |b_1|$, $m := \sqrt{b_1^2 - a_1^2} \in \mathbb{N}$ y $b_1 e^{im\tau_1} = -a_1 - im$.
- (iv) a_2, b_2 y τ_2 son tales que $a_2 + b_2 \neq 0$ y no satisfacen la condición anterior de resonancia para la segunda ecuación en (6.39)
- (v) $|\hat{p}(m)| < \frac{1}{\pi} \max\{\tilde{g}_{\text{inf}}(+\infty) - \tilde{g}_{\text{sup}}(-\infty), \tilde{g}_{\text{inf}}(-\infty) - \tilde{g}_{\text{sup}}(+\infty)\}$.

Aquí, estamos asumiendo que $\tilde{g}_{\text{sup}} = \tilde{g}_{\text{inf}}$ tanto en $+\infty$ como en $-\infty$ y que [L-L] vale para \tilde{g} . Luego, es posible estudiar sistemas como (6.39) término lineal y argumentos retardados mas generales. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} u_1'(t) + \Lambda * u + g(\Psi * u, \Phi * v) = p(t) \\ u_2'(t) + \Phi * v + h(t, u_t, v_t) = 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

con $\Lambda, \Psi, \Phi \in C^*$. Supongamos que hay un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $im + \hat{\lambda}(m) = 0$ y $im + \hat{\phi}(-k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Aquí $\hat{\lambda}(k)$, $\hat{\phi}(k)$ y $\hat{\psi}(k)$ denotan la transformada de Fourier en $k \in \mathbb{Z}$ de las medidas con signo asociadas a Λ, Φ y Ψ respectivamente. También necesitamos suponer que $|\hat{\psi}(-m)| \neq 0$. Luego, el término lineal en (6.40) satisface (L1)–(L4) y $\mathcal{S} = \{(\sqrt{2}\cos(mt - \varphi), 0)\}$. Si tomamos $g(u, v) = (\tilde{g}(u), 0)$ entonces está claro que, para $w \in \mathcal{S}$, $\mathcal{G}^\infty(w)(t)$ es continua para casi todo $t \in \mathbb{T}$ y $\widehat{\mathcal{G}^\infty(w)}(m) = (\frac{1}{\pi} e^{i(\varphi + \theta_\Psi)} |\tilde{g}(+) - \tilde{g}(-)|, 0)$. Concluimos que el sistema (6.40) tiene solución.

6.6.2. Un sistema débilmente acoplado

Sea $g(u) = (\tilde{g}_1(u_1), \dots, \tilde{g}_N(u_N)) + h(u)$ con cada $g_i(\pm\infty) \in \mathbb{R}$ y $|h(u)| \rightarrow 0$ uniformemente a medida que $|u| \rightarrow \infty$. Luego g no satisface (R1) pero satisface (N1). En [5], se obtienen soluciones del sistema

$$u_j''(t) + m^2 u_j + \tilde{g}_j(u_j) + h_j(u) = p_j(t) \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.41)$$

bajo la hipótesis

$$|\hat{p}(m)| < \frac{1}{\pi} |\tilde{g}_j(+\infty) - \tilde{g}_j(-\infty)| \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.42)$$

Consideremos ahora un sistema mas general

$$u_j''(t) + \Lambda * u_j(t) + \tilde{g}_j(\Psi * u_j(t)) + h_j(u) = p_j(t) \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.43)$$

donde Λ y Ψ son como en la Sección 6.6.1. Si asumimos que (6.42), entonces, el sistema (6.43) tiene solución. Esto puede ser demostrado si observamos que para $R \gg 1$ existe una homotopía admisible entre Γ y $T(w) = \hat{p}(m) - \frac{1}{\pi} e^{-i(\varphi + \theta_\Psi)} [\tilde{g}_j(+\infty) - \tilde{g}_j(-\infty)] \prod_{j=1}^N$ usando la representación $w(t) = \sqrt{2} \cos(mt - \varphi - \theta_\Psi)$.

6.6.3. Delays Distribuidos

Como ejemplo de una ecuación con núcleo no trivial y retardo distribuido, consideremos el problema

$$u'(t) + \alpha \int_{-\tau}^0 \beta(\theta) u(\theta + t) d\theta + g \left(\int_{-\tau}^0 \beta(\theta) u(\theta + t) d\theta \right) = p(t). \quad (6.44)$$

con $\tau = \pi/m$ para algún índice m . Si tomamos $\alpha = m/2$ y $\beta(s)$ como la distribución uniforme $\beta(s) = \mathbb{I}_{[-\pi/m, 0]}$ o si tomamos $\alpha = 4m/\pi$ y $\beta(s)$ como la función de densidad dada por $\frac{-m}{2} \sin(mx) \mathbb{I}_{[-\pi/m, 0]}$, obtenemos núcleos no triviales, las condiciones de (R1) a (R3) también se cumplen y por lo tanto existe solución periódica a (6.44)

Capítulo 7

Gronwall revisitado

7.1. Introducción

Una de las versiones del lema de Gronwall clásico, dice lo siguiente:

Lema 7.1.1. *Sea $x \in C[a, b]$ tal que:*

$$x(t) \leq A + B \int_a^t x(s) ds, \quad \forall x \in I,$$

con A y $B \geq 0$ constantes.

Entonces:

$$x(t) \leq Ae^{B(t-a)}, \quad \forall t \in [a; b].$$

Este lema es fundamental para demostrar unicidad de solución para el problema de valores iniciales

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{7.1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{7.2}$$

Este problema se enmarca en un tipo mas general de problemas de la forma

$$L(x) = N(x) \tag{7.3}$$

$$\mathcal{P}(x) = x_0. \tag{7.4}$$

Sin embargo, su demostración usa la fórmula de partes, que es muy particular del operador $Lx = x'$. A continuación presentamos una demostración en el contexto de espacios de Banach con orden parcial que solo se basa en las propiedades espectrales de un inverso a derecha de L . Concretamente, el resultado es el siguiente.

Teorema 7.1.1. *Sea X un látice de Banach real y K un operador compacto positivo y sea $\rho_K := \max\{\operatorname{Re}(\lambda), \lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(K)\}$. Entonces, dado $s > \rho_K$ vale que $[sI - K]^{-1}$ es un operador positivo.*

La constante ρ_K es conocida como *cota espectral*. Antes de dar la demostración veamos como el teorema 7.1.1 implica el lema 7.1.1. Una aplicación directa del teorema 7.1.1 nos da el siguiente corolario.

Corolario 7.1.1. *Sea $x \in C([a, b])$, y $B > 0$ tal que*

$$x(t) \leq B \int_a^t x(s) ds \quad (7.5)$$

para todo $t \in [a, b]$. Entonces $x(t) \leq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Demostración. Sea $X = C[a, b]$ que es un látice de Banach. Sea y $K : X \rightarrow X$ dado por $K(x) = \int_a^t x$. K es positivo y su espectro es $\sigma(K) = \{0\}$. Por lo tanto $L_K = 0$. Si llamamos $s = \frac{1}{B}$, podemos reformular la inecuación (7.5) como

$$sx - K(x) \leq 0,$$

es decir

$$[sI - K]x \leq 0. \quad (7.6)$$

Como $s > \rho_K = 0$, el teorema 7.1.1 nos garantiza que $[sI - K]^{-1}$ es un operador positivo. Aplicándolo lado a lado de (7.6) tenemos que $x \leq 0$. \square

A partir de este corolario, podemos obtener una demostración del lema 7.1.1.

Demostración. Consideramos $y(t) = Ae^{B(t-a)}$. Esta función cumple que $y(t) = A + B \int_a^t y(s) ds$. Entonces $z = x - y$ cumple la siguiente desigualdad

$$z(t) \leq B \int_0^t z(s) ds$$

y por lo tanto $z(t) \leq 0$. O sea $x(t) \leq y(t)$. \square

7.2. Fórmula integral de la resolvente

A continuación damos las definiciones básicas de integración para el contexto de funciones de \mathbb{R} en espacios de Banach X .

Definición 7.2.1. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow X$, decimos que es integrable si existe el límite

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i^\pi)(t_{i+1} - t_i)$$

donde $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es una partición de malla $|\pi|$ y $c_i^\pi \in [t_i, t_{i+1}]$ son arbitrarios.

De la definición es inmediato observar que si X es un látice de Banach, y $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Definición 7.2.2. Dado un látice de Banach X , decimos que $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ es un C_0 -semigrupo si

1. $T(0) = \text{id}_X$.
2. $T(s + t) = T(s)T(t)$ para todo par $t, s \geq 0$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$ para todo $x \in X$.

Decimos además que T es positivo, si $T(t)$ es un operador positivo para todo $t \geq 0$.

Dado un operador acotado $A : X \rightarrow X$ es inmediato ver que

$$T_A(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

es un C_0 -semigrupo. Más aún, si A es positivo, entonces T_A es positivo, aunque el recíproco de esta afirmación es falso. A continuación presentamos el siguiente resultado cuya demostración se puede hallar en [52].

Proposición 7.2.1. Sea $A : X \rightarrow X$ un operador acotado positivo, T_A el C_0 -semigrupo generado por A y ρ_A la cota espectral de A . Entonces, para todo λ tal que $\text{Re}(\lambda) > \rho_A$ vale que

$$[\lambda I - A]^{-1}(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-\lambda t} T_A(t)(x) dt$$

donde la convergencia es en norma de X .

La demostración del teorema 7.1.1 es un corolario inmediato de la proposición anterior.

Demostración. Como K es compacto, en particular es acotado. Luego $T_K(t) = e^{tK}$ es un C_0 -semigrupo. Como K es positivo, tenemos que $T_K(t)$ es positivo, y por lo tanto, dado $x \in X$, $x \geq 0$, tenemos que para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $s > \rho_K$,

$$e^{-st}T_K(t)(x) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

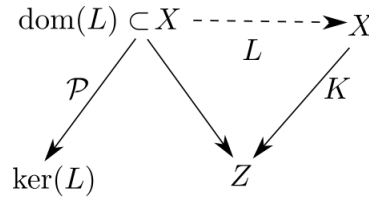
Luego,

$$[sI - K]^{-1}(x) = \int_0^{\infty} e^{-st}T_K(t)(x)dt \geq 0.$$

□

7.3. Caso general

Llamamos hipótesis H_0 a situación descrita por el siguiente diagrama.



donde $L : \text{dom}(L) \subset X \rightarrow X$ un operador sobreyectivo tal que tiene una inversa a derecha compacta $K : X \rightarrow X$ positiva, con cota espectral $\rho_K < \infty$. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7.3.1. *Supongamos que vale H_0 y sea $x \in X$ tal que*

$$L(x) \leq Bx \tag{7.7}$$

$$\mathcal{P}(x) \leq 0 \tag{7.8}$$

donde $B\rho_K < 1$. Entonces $x \leq 0$.

Demostración. Como K es positivo, podemos aplicarlo lado a lado de la inecuación (7.8) y obtenemos

$$K(L(x)) \leq BK(x)$$

El lema 2.4.7 nos dice que $K(L(x)) = x - \mathcal{P}(x)$. O sea que

$$x \leq \mathcal{P}(x) + BK(x) \leq BK(x)$$

Dividiendo por B y reordenando términos, tenemos

$$[B^{-1}I - K](x) \leq 0 \quad (7.9)$$

Usando el (7.1.1) concluimos que $x \leq 0$. \square

Observemos que el operador L no requiere ser Fredholm. En el siguiente ejemplo, veremos una aplicación del teorema donde L tiene nucleo de dimensión infinita.

7.4. Principio del máximo fuerte para $-\Delta$

Sea Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera suave. Sea $X = C(\overline{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y consideremos el operador

$$\Delta : \text{dom}(\Delta) \subset X \rightarrow X$$

Dentro de ese espacio vamos a considerar como dominio del operador Δ al subespacio

$$\text{dom}(\Delta) = \{x \in X \mid x|_\Omega \in C^2(\Omega) \text{ y } \Delta x \text{ se extiende de manera continua a } \partial\Omega\}$$

De esta manera, podemos trabajar con un problema enteramente definido en X . El núcleo de Δ son aquellas funciones armónicas en Ω que se extienden de manera continua a $\partial\Omega$. Consideremos el subespacio cerrado $Z = \{x \in C(\overline{\Omega}) \mid x|_{\partial\Omega} = 0\}$. A continuación listamos algunos resultados clásicos vinculados al operador Δ .

Lema 7.4.1. *Sea $x \in \ker(\Delta)$. Entonces*

$$\min_{u \in \partial\Omega} x(u) \leq x(v) \leq \max_{u \in \partial\Omega} x(u)$$

para todo $v \in \Omega$.

Corolario 7.4.1. $x|_{\partial\Omega} = 0$ implica que $x = 0$.

Lema 7.4.2. *Sea $L = -\Delta|_Z$. Existe un operador $K : X \rightarrow X$ tal que:*

1. *Es compacto.*

2. Es un inverso a derecha de L . Es decir, tal que si $z = K(x) \in Z$, entonces $-\Delta z = x$.
3. Es positivo. Es decir $x \geq 0 \Rightarrow K(x) \geq 0$.
4. $\sigma(L)$ es un conjunto discreto incluido en $(0, +\infty)$ y $\sigma(K) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(-\Delta)\} \cup \{0\}$ es un conjunto compacto acotado superiormente.

El operador K puede suele representarse como un operador integral cuyo núcleo se conoce en la literatura como función de Green.

Estos dos resultados nos permiten concluir lo siguiente.

Proposición 7.4.1. Sea $x \in \text{dom}(\Delta)$ tal que

$$-\Delta(x) \leq Bx \quad (7.10)$$

$$x|_{\partial\Omega} \leq 0 \quad (7.11)$$

con $B < \min \sigma(-\Delta|_Z)$. Entonces $x \leq 0$.

Demostración. El lema 7.4.2 nos garantiza que se cumple H_0 donde $\rho_K = (\min \sigma(-\Delta))^{-1}$. Por otro lado, tenemos que $\mathcal{P}(x) \in \ker(\Delta)$ satisface que $\mathcal{P}(x)|_{\partial\Omega} = x|_{\partial\Omega}$. El lema 7.4.1 y (7.11) nos garantizan que entonces $\mathcal{P}(x) \leq 0$. Luego, estamos en condiciones de aplicar el teorema 7.3.1 y eso concluye la demostración. \square

7.5. Teorema de unicidad

Definición 7.5.1. Un operador no lineal $N : X \rightarrow X$ es Lipschitz en el sentido del látice, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|N(x) - N(y)| \leq C|x - y|$$

para todo $x, y \in X$ donde el módulo, es el módulo del látice

Teorema 7.5.1. Consideremos la ecuación

$$L(x) = N(x) \quad (7.12)$$

$$\mathcal{P}(x) = \varphi \quad (7.13)$$

donde L y \mathcal{P} son como en (H_0) , N es Lipschitz en el sentido del látice con constante $C^{-1} > \rho_K$ y $\varphi \in \ker(L)$. Entonces si existe solución a (7.12), dicha solución es única.

Demostración. Supongamos que tenemos x_1 y x_2 soluciones de (7.12). Entonces

$$x_i = \varphi + K \circ N(x_i)$$

para $i = 1, 2$. Luego tenemos que

$$x_1 - x_2 = K(N(x_1) - N(x_2))$$

Tomando módulo lado a lado, y usando la proposición 2.5.2 tenemos que

$$|x_1 - x_2| \leq K(|N(x_1) - N(x_2)|)$$

usando que N es Lipschitz en el sentido del látice, tenemos que

$$|x_1 - x_2| \leq CK(|x_1 - x_2|).$$

Llamando $z = x_1 - x_2$ y reordenando los términos, tenemos que

$$[C^{-1}I - K](z) \leq 0$$

y se sigue de (7.1.1) que $z \leq 0$. Pero entonces $0 \leq |x_1 - x_2| \leq 0$ y por ende $x_1 = x_2$. \square

Bibliografía

- [1] M. Adimy, P. Amster, J. Epstein. Periodic solutions for a nonautonomous mathematical model of hematopoietic stem cell dynamics. *Journal of Nonlinear Analysis*, Vol. 211(1) (2021), 112397.
- [2] P. Amster, J. Epstein. On an affinity principle by Krasnoselskii. *Journal of Differential Equations*, Vol. 326, (2022), 95-128.
- [3] P. Amster, J. Epstein, A. Sanjuán. Periodic Solutions for systems of functional-differential semilinear equations at resonance. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 58(2) (2020) 591-607.
- [4] P. Amster, A. Déboli and M. P. Kuna, Lazer-Leach conditions for coupled Gompertz-like de-layed systems, *Applied Mathematical Letters* **83** (2018), 53–58.
- [5] P. Amster and P. De Nápoli, On a generalization of Lazer-Leach conditions for a system of second order ODE's, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **33** No. 1 (2009), 31–39.
- [6] M. Adimy, A. Chekroun and T.M. Touaoula, Age-structured and delay differential-difference model of hematopoietic stem cell dynamics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 20 (2015), 2765-2791.
- [7] M. Adimy, F. Crauste and S. Ruan, A mathematical study of the hematopoiesis process with applications to chronic myelogenous leukemia. *SIAM J. Appl. Math.*, 65 (2005), 1328–1352.
- [8] R. Apostu and M.C. Mackey, Understanding cyclical thrombocytopenia: a mathematical modeling approach. *J. Theor. Biol.*, 251 (2008), 297–316.

- [9] N. Bobylev and M. A. Krasnoselskii, Principles of affinity in nonlinear problems. *Journal of Mathematical Sciences* 83 No. 4 (1997), 485–521.
- [10] S. Bernard and H. Herzel, Why do cells cycle with a 24 hour period. *Genome Informatics. International Conference on Genome Informatics*, 17(1) (2006), 72-79.
- [11] G. A. Bjarnason, R. C. K. Jordan and R. B. Sothorn, Circadian variation in the expression of cell-cycle proteins in human oral epithelium. *The American journal of pathology*. 154 (2) (1999), 613-622.
- [12] R. F. Brown, *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Springer (1993).
- [13] F. J. Burns and I. F. Tannock, On the existence of a G_0 -phase in the cell cycle, *Cell Proliferation*, 3 (1970), 321–334.
- [14] A. Capietto, J. Mawhin and F. Zanolin, Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 329 (1992), 41–72.
- [15] J. Clairambault, P. Michel and B. Perthame, Circadian rhythm and tumour growth. *Comptes Rendus Mathematique* 342 (1) (2006), 17-22.
- [16] C. Colijn and M.C. Mackey, A mathematical model of hematopoiesis – I. Periodic chronic myelogenous leukemia. *J. Theor. Biol.*, 237 (2005), 117–132.
- [17] C. Colijn and M.C. Mackey, A mathematical model of hematopoiesis – II. Cyclical neutropenia. *J. Theor. Biol.*, 237 (2005), 133–146.
- [18] K. Deimling: *Nonlinear functional analysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1985).
- [19] T. Diagana and H. Zhou, Existence of positive almost periodic solutions to the hematopoiesis model. *Appl. Math. Comput.* 274 (2016) 644–648.
- [20] H. S. Ding, Q. L. Liu and J. J. Nieto, Existence of positive almost periodic solutions to a class of hematopoiesis model. *Appl. Math. Model.* 40 (2016) 3289–3297.
- [21] F. Ficara, M. J. Murphy, M. Lin and M. L. Cleary, Pbx1 regulates self-renewal of long-term hematopoietic stem cells

- by maintaining their quiescence, *Cell Stem Cell*, 2 (2008), 484–496.
- [22] C. Foley and M.C. Mackey, Dynamic hematological disease: a review. *J. Math. Biol.*, 58 (2009), 285–322.
- [23] P. Fortin and M.C. Mackey, Periodic chronic myelogenous leukaemia: spectral analysis of blood cell counts and a etiological implications. *Br. J. Haematol.*, 104 (1999), 336–345.
- [24] L. Fu, H. Pelicano, J. Liu, P. Huang and C. C. Lee, The Circadian Gene *Period2* Plays an Important Role in Tumor Suppression and DNA Damage Response In Vivo. *Cell* 111 (2002), 41–50.
- [25] M. Furi, M. Spadini, Periodic perturbations with delay of autonomous differential equations on manifolds, *Adv. Nonlinear Stud.* 9 (2009), no. 2, 263–276.
- [26] X. Fu and S. Zhang, Periodic solutions for differential equations at resonance with unbounded nonlinearities, *Nonlinear Anal.* 52 No. 3 (2003), 755–767.
- [27] R. Gaines and J. Mawhin, *Coincidence degree and nonlinear differential equations*. Springer, 1977.
- [28] A. Granas, The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs, *Bull. Soc. Math. France* 100 (1972), 209–228.
- [29] S. Gery, N. Komatsu, L. Baldjyan, A. Yu, D. Koo and H. P. Koeffler, The circadian gene *per1* plays an important role in cell growth and DNA damage control in human cancer cells. *Molecular Cell*. 22(3) (2006), 375–382.
- [30] K. Gu and Y. Liu, Lyapunov-Krasovskii functional for uniform stability of coupled differential-functional equations, *Automatica*, 45 (2009), 798–804.
- [31] C. Haurie, D.C. Dale and M.C. Mackey, Cyclical neutropenia and other periodic hematological disorders: A review of mechanisms and mathematical models. *Blood*, 92 (1998), 2629–2640.
- [32] C. Haurie, R. Person, D.C. Dale and M.C. Mackey, Hematopoietic dynamics in grey collies. *Exp. Hematol.*, 27 (1999), 1139–1148.

- [33] R. Iorio, V. de Magalhães, *Fourier analysis and partial differential equations*. Cambridge University Press, 2001.
- [34] P. Kapula and M. Khuddush, Existence and Global Exponential Stability of Positive Almost Periodic Solutions for a Time-Scales Model of Hematopoiesis with Multiple Time-Varying Variable Delays. *International Journal of Difference Equations*. 14(2) (2019), 149–167.
- [35] M. A. Krasnoselskii, *The operator of translation along the trajectories of differential equations*, American Mathematical Society, Providence RI, 1968.
- [36] M. A. Krasnoselskii and P. P. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [37] A.C. LAZER, On Schauder's fixed point theorem and forced second-order nonlinear oscillations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **21** No. 2 (1968), 421–425.
- [38] A. C. Lazer and D. E. Leach, Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance. *Ann. Mat. Pura Appl.* **82** No. 4 (1969), 49–68.
- [39] J. Lei and M. C. Mackey, Multistability in an age-structured model of hematopoiesis: Cyclical neutropenia, *Journal of Theoretical Biology*, 270 (2011), 143–153.
- [40] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces II: Function Spaces*. Springer Science and Business Media, (2013)
- [41] N. Lloyd: *Degree theory*. Cambridge University Press, Cambridge (1978).
- [42] S. Ma, Z. Wang, and J. Yu, An abstract existence theorem at resonance and its applications, *J. Differential Equations*, **145** No. 2 (1998), 274–294.
- [43] M. C. Mackey, Unified hypothesis for the origin of aplastic anemia and periodic hematopoiesis. *Blood*, 51 (1978), 941–956.
- [44] M.C. Mackey, Periodic auto-immune hemolytic anemia: an induced dynamical disease. *Bull. Math. Biol.*, 41 (1979), 829–834.
- [45] T. Matsuo, S. Yamaguchi, S. Mitsui, A. Emi, F. Shimoda and H. Okamura, Control mechanism of the circadian clock for timing of cell division in vivo, *Science* 302 (2003) 255–259.

- [46] J. Mawhin, Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. CMBS Conf. Math. No. 40, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.
- [47] J. Mawhin, Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces, *J. Differential Equations* **12** (1972) 610–636.
- [48] J. Mawhin, Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations. Topological methods for ordinary differential equations (Montecatini Terme, 1991), *Lecture Notes in Math* 1537, Springer, Berlin, 1993, 74–142.
- [49] J. Mawhin, Periodic solutions of nonlinear functional differential equations, *J. Differential Equations* 10 (1971), 240–261.
- [50] J.G. Milton and M.C. Mackey, Periodic haematological diseases: mystical entities of dynamical disorders? *J.R. Coll. Phys.*, **23** (1989), 236–241.
- [51] F. L. Nazarov, Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type, *Algebra i Analiz*, **5** No. 4 (1993) 3–66.
- [52] R. Nagel, (ed.), One-parameter semigroups of positive operators, *Lecture Notes in Math.* 1184, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1986).
- [53] L. Nirenberg, Generalized degree and nonlinear problems, In *Contributions to nonlinear functional analysis* (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971), pages 1–9. Academic Press, New York, 1971
- [54] R. D. Nussbaum, The fixed point index and fixed points theorems, *Topological Methods for Ordinary Differential Equations* (Montecatini Terme, 1991), 143–205, *Lecture Notes in Math.*, 1537, Springer, Berlin, 1993.
- [55] C. S. Potten, D. Booth, N. J. Cragg, G. L. Tudor, J. J. O’Shea, D. Appleton, D. Barthel, T. G. Gerike, F. A. Meineke, M. J. Loeffler and C. Booth, Cell kinetic studies in the murine ventral tongue epithelium: thymidine metabolism studies and circadian rhythm determination. *Cell Proliferation*. **35** (1) (2002), 1-15.

- [56] L. Pujo-Menjouet, S. Bernard and M.C. Mackey, Long period oscillations in a G0 model of hematopoietic stem cells. *SIAM J. Appl. Dyn. Systems*, 4 (2005), No. 2, 312–332.
- [57] L. Pujo-Menjouet and M.C. Mackey, Contribution to the study of periodic chronic myelogenous leukemia. *Comptes Rendus Biologies*, 327 (2004), 235–244.
- [58] W. Rudin, *Functional Analysis*. New York, McGraw-Hill, (1991)
- [59] M. Schechter. *Principles of functional analysis*. Graduate studies in mathematics, v. 36 (2001)
- [60] R. Smaaland, O. D. Laerum, K. Lote, O. Sletvold, R. Sothorn and R. Bjerknes, DNA synthesis in human bone marrow is circadian stage dependent. *Blood*, 77 (1991), 2603–2611.
- [61] M. Santillan, J. Bélair, J.M. Mahaffy and M.C. Mackey, Regulation of platelet production: The normal response to perturbation and cyclical platelet disease. *J. Theor. Biol.*, 206 (2000), 585–603.
- [62] P. Vegh, J. Winckler and F. Melchers, Long-term "in vitro" proliferating mouse hematopoietic progenitor cell lines, *Immunology Letters*, 130 (2010), 32–35.
- [63] K. Wang and S. Lu, On the existence of periodic solutions for a kind of high-order neutral functional differential equations. *J. Math. Anal. Appl* **326** No. 2 (2007), 1161–1173.
- [64] P. X. Weng, Global attractivity of periodic solution in a model of hematopoiesis. *Comput. Math. Appl.* 44 (2002) 1019–1030.
- [65] A. Wilson, E. Laurenti, G. Oser, R. C. van der Wath, W. Blanco-Bose, M. Jaworski, S. Offner, C. F. Dunant, L. Eshkind, E. Bockamp, P. Lió, H. R. MacDonald and A. Trumpp, Hematopoietic stem cells reversibly switch from dormancy to self-renewal during homeostasis and repair, *Cell*, 135 (2008), 1118–1129.
- [66] W. Xu and J. Li, Global attractivity of the model for the survival of red blood cells with several delays. *Ann. Differential Equations* 14 (1998) 357–363.
- [67] Z. Yao, Uniqueness and global exponential stability of almost periodic solution for Hematopoiesis model on time scales. *J. Nonlinear. Sci. Appl.* 8 (2015) 142–152.

- [68] E. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Part 1: Fixed-Point Theorems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1985).
- [69] H. Zhang, M. Q. Yang and L. J. Wang, Existence and exponential convergence of the positive almost periodic solution for a model of hematopoiesis. *Appl. Math. Lett.* 26 (2013) 38–42.
- [70] H. Zhou, W. Wang and Z. F. Zhou, Positive almost periodic solution for a model of hematopoiesis with infinite time delays and a nonlinear harvesting term. *Abstr. Appl. Anal.* (2013) ID 146729, 6 p.
- [71] H. Zhou, L. Yang, A new result on the existence of positive almost periodic solution for generalized hematopoiesis model. *J. Math. Anal. Appl.* 462 (2018) 370– 379.

