

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física



# Dualidades en Teoría de Cuerdas

Tesis presentada para optar por el título de Doctor de la  
Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

**Yago Javier Cagnacci**

Director de tesis: Dr. Sergio Manuel Iguri

Directora asistente: Dr. Carmen Alicia Nuñez

Consejero de estudios: Dr. Gustavo Otero y Garzón

Lugar de Trabajo: IAFE (CONICET/UBA)

Buenos Aires, 2022

# Resumen

Esta tesis está basada, principalmente, en las publicaciones [75–77] y se abordan distintos aspectos de dualidades en Teoría de Cuerdas. La consistencia de Teoría de Cuerdas requiere un espacio-tiempo de  $D=10$  dimensiones por lo que la conexión con la física observada implica abordar la compactificación de las  $d$  dimensiones extra ( $4=D-d$ ). Cuando hay dimensiones compactas, las cuerdas tienen momento discreto en esas direcciones, como las partículas puntuales. Pero a diferencia de éstas, también pueden enrollarse alrededor de los ciclos no contraíbles de la variedad y adquieren así un número de enrollamiento. La “Teoría Doble de Campos” (DFT, por sus siglas en inglés) logra incorporar la simetría de T-dualidad en la Teoría de Campos introduciendo, además de coordenadas duales al momento, otro conjunto de coordenadas duales al enrollamiento. Los campos dependen así de un conjunto doble de coordenadas que se mezclan por la acción de  $O(D, D, \mathbb{R})$ , que contiene al grupo completo de T-dualidad  $O(d, d, \mathbb{Z})$ . En esta tesis se introduce la Teoría Doble de Campos, siguiendo lo expuesto en [1, 2, 80]. Otras referencias de interés son [3], con una introducción al tema, y [81]. Se estudia la incorporación a DFT de estados no masivos que no provengan del sector descrito por  $G_{ij}$ ,  $B_{ij}$  y  $\phi$  basándose en los trabajos [76, 82]. Para una compactificación genérica con campos de fondo, la cuerda adquiere nuevos números cuánticos dados por el momento en las direcciones compactas y, dado que se trata de un objeto extendido unidimensional, por el enrollamiento alrededor de estas direcciones. En una compactificación toroidal general, el sector no masivo está dado por las excitaciones correspondientes a  $G_{ij}$ ,  $B_{ij}$  y  $\phi$  en las direcciones internas con momento y enrollamiento nulos. Sin embargo, para ciertos valores especiales de los campos de fondo, nuevos estados con momento y enrollamiento no nulos se incorporan al espectro no masivo, dando lugar a nuevas simetrías de gauge (simetría de gauge “agrandada”). Se trata la incorporación de estos nuevos estados, la ruptura de simetría de gauge mediante un mecanismo de Higgs y se discute una posible descripción única que incorpore a todos los grupos de gauge que surgen en una compactificación en un toro de dimensión arbitraria.

A partir de la relación de DFT con las álgebras  $L_\infty$  [35–38] y de la similitud entre DFT y EFT, en esta tesis también se explorará la relación de EFT  $E_{7(7)}$  con estas álgebras [77] aportando nuevos resultados al camino emprendido en [39–42]. Las álgebras  $L_\infty$ , cuyos axiomas e identidades fueron dados en [43, 44], aparecieron por primera vez en Física en el contexto de la Teorías de Campos para la cuerda cerrada (CSFT, por sus siglas en inglés) determinando la

estructura del producto que define las interacciones de la teoría. Luego se encontró que esta estructura se extendía a un gran conjunto de teorías de campos [45], incluyendo truncaciones consistentes de CSFT [46], teorías de espín alto [47] y teorías de gauge [48–51]. En este contexto, recientemente se sugirió en [38] que las álgebras  $L_\infty$  proveen una clasificación de teorías clásicas de campos. Esta expectativa fue reforzada en ese trabajo por un número considerable de ejemplos de teorías de campos (teorías de Chern-Simons, gravedad de Einstein, etc.) para las que se mostró la existencia de esta estructura en las transformaciones de gauge y ecuaciones de movimiento. En el trabajo [77] se muestra que el sector de gauge de EFT con  $E_{7(7)}$  presenta una estructura  $L_\infty$ . Además, se extienden los resultados de [109], dando condiciones suficientes para tener una estructura  $L_\infty$  que involucre a campos y parámetros de gauge.

La dualidad AdS/CFT (o de gauge/gravedad o conjetura de Maldacena) se ha convertido en un área de investigación independiente que no sólo permite analizar aspectos de la Teoría de Cuerdas y de gravedad sino que también es importante en el área de materia condensada y en el estudio de correlaciones en sistemas cuánticos por poner algunos ejemplos. De particular interés resulta el modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW, una teoría conforme que describe la hoja de mundo de la cuerda propagándose en un campo de fondo  $AdS_3$  con una 2-forma de NSNS  $B_{ij}$ . Tiene numerosas aplicaciones físicas en Teoría de Cuerdas [52–61] y en materia condensada [62–64] y su importancia radica en que resulta uno de los pocos modelos en los que la conjetura de Maldacena puede ser explorada más allá de la aproximación de supergravedad con completo control sobre la teoría en la hoja de mundo. En esta tesis se trata el modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW y se estudia la función de correlación de cuatro puntos para estados con flujo espectral no trivial [75].

# Agradecimientos

Quisiera agradecer a todos los que contribuyeron a la realización de esta tesis.

En primer lugar, a mi familia por el apoyo a lo largo de todos estos años.

A Sergio.

A Carmen.

A Diego.

A Mariana.

A Eric.

A la UBA.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Teoría de Cuerdas</b>	<b>8</b>
2.1	La acción y sus simetrías . . . . .	8
2.2	Cuantización . . . . .	11
2.3	Acción efectiva de bajas energías . . . . .	14
<b>3</b>	<b>T-Dualidad</b>	<b>17</b>
3.1	Caso unidimensional . . . . .	17
3.2	Compactificación toroidal . . . . .	20
3.3	Espectro no masivo . . . . .	26
3.4	Construcción de Frenkel-Kac-Segal . . . . .	29
3.5	Los casos de $S^1$ y $T^2$ . . . . .	32
3.5.1	$S^1$ . . . . .	32
3.5.2	$T^2$ . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Teoría doble de campos</b>	<b>36</b>
4.1	Primeras formulaciones de la teoría . . . . .	36
4.2	Formulación Métrica . . . . .	39
4.3	Derivada de Lie generalizada . . . . .	42
4.4	Tétradas . . . . .	45
4.5	Reducción dimensional . . . . .	47
4.6	Contacto con supergravedad . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Teoría Doble de Campos y agrandamiento de la simetría de gauge</b>	<b>51</b>
5.1	Compactificación toroidal . . . . .	51

5.2	Agrandamiento de la simetría de gauge . . . . .	53
5.3	Descripción efectiva con agrandamiento de la simetría de gauge . . . . .	57
5.4	Relación con Teoría de Cuerdas . . . . .	60
5.5	Ejemplo: $T^2$ y $SU(3)_L \times SU(3)_R$ . . . . .	62
5.6	Descripción efectiva para todos los puntos de agrandamiento de la simetría de gauge . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Estructura de gauge en las Supergravidades gaugeadas</b>	<b>68</b>
6.1	Tensor de Embedding . . . . .	69
6.2	Transformaciones de gauge . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Simetría de U-dualidad y geometría extendida</b>	<b>76</b>
7.1	Transformaciones de gauge . . . . .	77
7.2	La acción y su relación con supergravedad . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Álgebras <math>L_\infty</math> y teorías de campos</b>	<b>87</b>
8.1	Definiciones . . . . .	87
8.2	Teorías de campos con estructura $L_\infty$ . . . . .	90
8.3	Relación con teorías de campos generales I . . . . .	93
8.4	Relación con teorías de campos generales II . . . . .	96
<b>9</b>	<b>La estructura <math>L_\infty</math> en supergravedad y en Teoría de Campos Excepcional <math>E_{7(7)}</math></b>	<b>100</b>
9.1	Supergravedad gaugeada y $L_\infty$ . . . . .	101
9.2	$L_\infty$ y la jerarquía de tensores proyectada con $E_{7(7)}$ . . . . .	102
9.3	$L_\infty$ y la jerarquía de tensores desproyectada con $E_{7(7)}$ . . . . .	106
<b>10</b>	<b>La cuerda en <math>AdS_3</math></b>	<b>110</b>
10.1	El espacio tiempo $AdS_3$ y modelos de WZW . . . . .	110
10.2	Modelo $H_3^+$ -WZW . . . . .	112
10.3	Modelo $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW . . . . .	119
10.4	Funciones de correlación en base $m$ . . . . .	125
10.5	Bloques conformes en $AdS_3$ sin flujo espectral . . . . .	127
10.6	Función de cuatro puntos con flujo espectral . . . . .	133
10.7	Función de cuatro puntos con flujo espectral en base $x$ . . . . .	137
<b>11</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Álgebras de Lie</b>	<b>146</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los principales desafíos de la Física actual es obtener una teoría cuántica de la gravedad y la Teoría de Cuerdas es una de las candidatas a dar respuesta a este problema. Comenzó su desarrollo en la década de 1960 con un objetivo totalmente distinto: dar una explicación para las interacciones nucleares. Sin embargo, luego de la formulación de la cromodinámica cuántica, que logró dar una descripción satisfactoria para varios aspectos de las interacciones nucleares, la Teoría de Cuerdas se propuso como una teoría cuántica de la gravedad y no sólo eso, sino como una teoría unificadora capaz de describir bajo el mismo marco a la gravedad y a las interacciones del Modelo Estándar. El origen de esta resignificación se basa en la presencia en el espectro de una partícula no masiva de espín 2, que se identifica con el *gravitón*, partícula mediadora de la fuerza de gravedad.

El Modelo Estándar es una teoría cuántica de campos basada en el concepto de partícula puntual y describe exitosamente la física a la escala de Fermi ( $10^{-16}cm.$ ). Las interacciones fuerte y electrodébil están modeladas en términos de grupos de gauge dados por el producto directo  $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$  y ha sido testeada con un gran nivel de exactitud y a una energía de 14 TeV en colisiones de protones en el *Large Hadron Collider*. Sin embargo, esta teoría presenta ciertos inconvenientes. Uno de ellos es el *problema de las jerarquías*, esto es, la gran discrepancia entre ciertos parámetros del modelo, por ejemplo, el amplio rango de masas de las partículas fundamentales. Dentro del problema de las jerarquías también se encuentra la discrepancia en intensidad entre los efectos gravitatorios y el de las interacciones electrodébiles, de alrededor de 24 órdenes de magnitud. El principal problema es, sin embargo, la no inclusión de la gravedad.

Usando argumentos dimensionales, puede mostrarse que las correcciones cuánticas de la gravedad resultan irrelevantes, es decir que son menos importantes cuanto menor es la energía. Es por esto que, desde el punto de vista experimental, su exclusión del Modelo Estándar no resulta un inconveniente al contrastar con los resultados experimentales obtenidos a bajas energías comparadas con la masa de Planck, la escala de la gravedad cuántica. De todos

modos, sería deseable una teoría capaz de describir por completo las interacciones conocidas a día de hoy. Aun descartando este deseo de unificar a todas las interacciones, en la actualidad se carece de una teoría cuántica de la gravedad.

Es en este contexto que la Teoría de Cuerdas resulta de interés. Su entendimiento ha evolucionado enormemente desde su primera formulación, con dos grandes revoluciones en su historia. La primera, en la década de 1980, con el descubrimiento del mecanismo de Green-Schwarz para la cancelación de anomalías, que permitió la incorporación de los grupos de gauge  $SO(32)$  y  $E_8 \times E_8$ , y la formulación de la Teoría de Cuerdas heterótica con los mismos grupos de gauge. La segunda, en la década de 1990, con el descubrimiento de dualidades no perturbativas entre las distintas Teoría de Cuerdas y la correspondencia entre teorías de gauge y teorías de cuerdas en un espacio tiempo de Anti de Sitter, conocida como dualidad AdS/CFT.

Dentro del primer grupo de dualidades se tiene, por ejemplo, la dualidad S, que relaciona límites de acoplamiento fuerte y débil, y la dualidad T, que establece la equivalencia física entre Teorías de Cuerdas formuladas sobre campos de fondo que describen geometrías diferentes. En su versión más sencilla, relaciona la física a una escala muy pequeña con la física a escala grande: una cuerda no “distingue” si se está propagando en un espacio tiempo con una dimensión circular de radio  $R$  o  $1/R$ . Otro ejemplo de dualidad es la U-dualidad, que combina a la dualidad T y a la S. Todas estas dualidades son decisivas para comprender aspectos no-perturbativos de la Teoría de Cuerdas. En particular, permiten relacionar distintas Teoría de Cuerdas, que inicialmente fueron propuestas como teorías diferentes y hoy se entienden como desarrollos perturbativos, conectados entre sí por simetrías de una misma teoría subyacente: la Teoría M. En los últimos años se ha progresado mucho en la construcción de Teorías de Campos invariantes de dualidad que contienen una descripción efectiva de los estados no-masivos de la cuerda, incluyendo sus interacciones y propiedades. La naturaleza cuerdista de las dualidades altera las nociones usuales de geometría, de manera que las teorías efectivas requieren ciertas estructuras que parecerían no poder obtenerse en una variedad convencional y que no admiten una descripción geométrica. Este hecho abre una serie de nuevas posibilidades para describir la física observable y también conduce a preguntas físico-matemáticas sobre la interpretación de estas variedades no geométricas.

En particular, la Teoría Doble de Campos (DFT, por sus siglas en inglés) [1–7] y la Geometría Generalizada [8, 9] incorporan los efectos de T-dualidad en el límite de Teoría de Campos duplicando el espacio de coordenadas (DFT) o unificando vectores y uno-formas en un único objeto.

La consistencia de Teoría de Cuerdas requiere un espacio-tiempo de  $D=10$  dimensiones y, entonces, la conexión con la física observada implica abordar la compactificación de las  $d$  dimensiones extra ( $4=D-d$ ). Cuando hay dimensiones compactas, las cuerdas tienen momento discreto en esas direcciones, como las partículas puntuales. Pero a diferencia de éstas, también pueden enrollarse alrededor de los ciclos no contraíbles de la variedad y adquieren así un número



de enrollamiento. DFT logra incorporar la simetría de T-dualidad en la Teoría de Campos introduciendo, además de coordenadas duales al momento, otro conjunto de coordenadas duales al enrollamiento. Los campos dependen así de un conjunto doble de coordenadas que se mezclan por la acción de  $O(D, D, \mathbb{R})$ , que contiene al grupo completo de T-dualidad  $O(d, d, \mathbb{Z})$ .

La menor representación de  $O(D, D)$ <sup>1</sup> tiene dimensión 2D, entonces las D coordenadas del espacio-tiempo deben suplementarse con otras D coordenadas duales para completar la representación fundamental. Los campos dependen de este conjunto doble de coordenadas, denotadas como  $Y^M = (\tilde{y}_i, y_i)$ . El número de grados de libertad de la teoría se duplica y es necesario entonces eliminar el excedente. La formulación original de DFT viene equipada con un vínculo, llamado vínculo fuerte, que elimina localmente la dependencia en la mitad de las coordenadas. Cuando se elimina la dependencia en las coordenadas duales  $\tilde{y}_i$ , la teoría se reduce a la supergravedad: se dice que DFT está en el marco de supergravedad. Sin embargo, del punto de vista fenomenológico, la situación más interesante se obtiene para campos que dependen del conjunto doble de coordenadas, pues en ese caso es posible estabilizar los módulos de la compactificación y obtener vacíos de de Sitter con interés cosmológico. Recientemente se ha mostrado que una solución de los vínculos de consistencia de DFT es la llamada compactificación de Scherk-Schwarz [10–12], que efectivamente admite campos con dependencia en las coordenadas dobles. DFT tiene una simetría de gauge parametrizada por un vector  $O(D, D)$   $\xi^M = (\zeta^i, \zeta_i)$  que combina el parámetro de difeomorfismos  $\zeta^i$  y el parámetro de gauge del campo  $B$ ,  $\zeta_i$ . Esta simetría se llama difeomorfismo generalizado. La ley de transformación de la métrica generalizada permite definir una derivada de Lie generalizada. Un tensor  $O(D, D)$  que transforma bajo difeomorfismos generalizados con una derivada de Lie generalizada se llama tensor generalizado. La acción de DFT se puede escribir como

$$S = \int dy d\tilde{y} e^{-2d} \mathcal{R}(\mathcal{H}_{MN}, d) \quad (1.0.1)$$

siendo  $\mathcal{R}$  un escalar generalizado, invariante ante  $O(D, D)$ , que depende de un dilatón generalizado  $d$  (función del dilatón  $\phi$ ) y de una métrica generalizada  $\mathcal{H}_{MN}$ , función a su vez del tensor de Kalb-Ramond  $B_{ij}$  y la métrica, campos de supergravedad del sector de NS. La función  $\mathcal{R}$  se puede pensar como un escalar de curvatura generalizado: se reduce al escalar de curvatura usual cuando  $B_{ij} = \phi = 0$  al aplicar el vínculo fuerte en el marco de supergravedad. La variación de (1.0.1) con respecto a  $H_{MN}$  produce un tensor  $O(D, D)$  generalizado:  $R_{MN}(H_{PQ}, d)$  que se puede pensar como un tensor de Ricci generalizado; nuevamente, sus componentes no nulas se reducen al tensor de Ricci cuando  $B_{ij} = \phi = 0$  al aplicar el vínculo fuerte en el marco de supergravedad. Esta similitud con los tensores correspondientes de la geometría Riemanniana lleva a preguntarse si es posible construir estas curvaturas de modo sistemático empezando con conexiones tipo Christoffel y una versión generalizada del tensor de Riemann. En efecto, sería útil tener una generalización covariante de T-dualidad del tensor de Riemann completo para

---

<sup>1</sup>De aquí en más,  $O(D, D)$  hará referencia a  $O(D, D, \mathbb{R})$  a menos que se indique lo contrario.

avanzar en el análisis y comprensión de la geometría doble. Esto también permitiría escribir correcciones a la acción efectiva de la TCD con más derivadas.

Este marco covariante de T-dualidad provee una herramienta importante para explorar propiedades de Teoría de Cuerdas más allá del límite de supergravedad [13–21]. Algunas de sus aplicaciones incluyen:

- **Flujos no-geométricos:** Compactificaciones de cuerdas con espectros cercanos al del Modelo Estándar producen además campos escalares no masivos (asociados a parámetros geométricos del espacio interno) que no son compatibles con la física observada. Compactificaciones con flujos proveen un potencial escalar que puede estabilizar los módulos y un mecanismo de ruptura de supersimetría. Al compactificar las teorías efectivas de cuerdas con flujos se obtienen supergravedades deformadas donde las deformaciones corresponden a flujos. Algunos flujos tienen interpretación en términos de campos tensoriales de la teoría, pero otros son requeridos por las simetrías de dualidad y su origen geométrico no es evidente [22, 23]. Estos flujos no-geométricos, fenomenológicamente más interesantes pues permiten estabilizar los módulos y encontrar vacíos de Sitter de interés cosmológico [24–26], pudieron obtenerse compactificando DFT [10–12].
- **Estructuras no-conmutativas/no-asociativas en cuerdas cerradas:** Los flujos no-geométricos tuercen la estructura de Poisson del espacio de fases de cuerdas cerradas y las coordenadas adquieren relaciones de no-conmutatividad y no-asociatividad. Al incorporar todos los fondos T-duales en un esquema covariante, DFT provee un marco natural para entender este comportamiento [28, 29].

Otra simetría no perturbativa es la de U-dualidad, dada por los grupos  $E_{n(n)}$ , que surgen al realizar compactificaciones de supergravedad en  $D = 11$  así como las de teoría M en un toro  $n$ -dimensional [30–32]. De manera similar al caso de DFT, en [33, 34] se introdujo la idea de extender el espacio-tiempo y/o el espacio tangente de manera tal de obtener esta simetría explícitamente al nivel del espacio tiempo. En este caso, las coordenadas no se duplican, sino que la teoría está basada en un espacio tiempo generalizado de  $4 + p$  dimensiones, donde  $p$  son las dimensiones de la representación fundamental de  $E_{n(n)}$ . La acción de esta teoría no puede obtenerse de manera compacta como en el caso de DFT, pero sí comparte con esta teoría la necesidad de una reformulación de ciertos conceptos geométricos tal como la derivada de Lie, la introducción de un nuevo corchete, denominado E-corchete, bajo el cual las nuevas transformaciones de gauge cierran y, a su vez, requiere la presencia de vínculos ad-hoc para hacer contacto con Teoría de Cuerdas.

A partir de la relación de DFT con las álgebras  $L_\infty$  [35–38] y de la similitud entre DFT y EFT, en esta tesis también se explorará la relación de EFT  $E_{7(7)}$  con estas álgebras aportando nuevos resultados al camino emprendido en [39–42]. Las álgebras  $L_\infty$ , cuyos axiomas e identidades fueron dados en [43, 44], aparecieron por primera vez en Física en el contexto de la

Teorías de Campos para la cuerda cerrada (CSFT, por sus siglas en inglés) determinando la estructura del producto que define las interacciones de la teoría. Luego se encontró que esta estructura se extendía a un gran conjunto de teorías de campos [45], incluyendo truncaciones consistentes de CSFT [46], teorías de espín alto [47] y teorías de gauge [48–51]. En este contexto, recientemente se sugirió en [38] que las álgebras  $L_\infty$  proveen una clasificación de teorías clásicas de campos. Esta expectativa fue reforzada en ese trabajo por un número considerable de ejemplos de teorías de campos (teorías de Chern-Simons, gravedad de Einstein, etc.) para las que se mostró la existencia de esta estructura en las transformaciones de gauge y ecuaciones de movimiento.

Por otra parte, la dualidad AdS/CFT (o de gauge/gravedad o conjetura de Maldacena) se ha convertido en un área de investigación independiente que no sólo permite analizar aspectos de la Teoría de Cuerdas y de gravedad sino que también es importante en el área de materia condensada y en el estudio de correlaciones en sistemas cuánticos por poner algunos ejemplos. De particular interés resulta el modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW, una teoría conforme que describe la hoja de mundo de la cuerda propagándose en un campo de fondo  $AdS_3$  con una 2-forma de NSNS  $B_{ij}$ . Tiene numerosas aplicaciones físicas en Teoría de Cuerdas [52–61] y en materia condensada [62–64] y su importancia radica en que resulta uno de los pocos modelos en los que la conjetura de Maldacena puede ser explorada más allá de la aproximación de supergravedad con completo control sobre la teoría en la hoja de mundo.

La determinación de la estructura del espacio de estados del modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW fue llevada a cabo en [65,66] aprovechando el rol del automorfismo de flujo espectral (o enrollamiento) para la generación de representaciones inequivalentes del tipo Friedan-Martinec-Shenker [67]. Se demostró que en virtud de obtener una teoría unitaria, i.e., libre de fantasmas, es necesario considerar no sólo las representaciones de peso más alto del álgebra afín asociada a  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW correspondientes a las series continua y discretas sino también sus imágenes frente a la acción del flujo espectral. En [66] se demostró la consistencia del espectro establecido con la existencia de una función de partición a un lazo invariante modular.

En [68] se inició el estudio sistemático de las funciones de correlación asociadas al modelo, proponiendo que las mismas se obtienen mediante prolongación analítica del modelo euclídeo, o sea, del modelo en  $H_3^+ \equiv SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$  desarrollado por Teshner [69]. Los autores fueron capaces de calcular funciones de correlación de dos estados en sectores de flujo espectral arbitrario y funciones de tres puntos con flujo espectral total 1. Asimismo, lograron determinar los correladores de cuatro puntos de operadores en el sector con flujo espectral nulo en la hoja de mundo como esfera. Todos los resultados consignados fueron empleados para caracterizar la dinámica de la cuerda en  $AdS_3$  y reinterpretados en términos de la conjetura  $AdS/CFT$ .

La relación entre el modelo euclídeo  $H_3^+$  y el lorentziano  $SL(2, \mathbb{R})$  presenta varias diferencias, y muchas de ellas no han sido completamente resueltas todavía. En particular, el OPE que permitió obtener la función de cuatro puntos de estados primarios en el modelo  $H_3^+$ , aplicando el

método del “bootstrap”, no está completamente determinado en ninguno de los dos modelos. Si bien en general no es necesario tener en cuenta la contribución de los operadores descendientes para determinar el OPE en una CFT, en el caso de  $AdS_3$ , la simetría de flujo espectral mapea primarios en descendientes y viceversa, y entonces parece necesario conocer la contribución de los operadores descendientes para poder determinar las funciones de cuatro puntos para poder usar ese método. El método de campos libres desarrollado en [70, 71] permite eludir este problema y fue aplicado a este modelo en los trabajos [72–74]. Este método utiliza la base  $m$ , donde los generadores  $J_0^3, \bar{J}_0^3$  de la isometría  $SL(2, \mathbb{C})$  están diagonalizados, y es en esta base donde se puede aplicar la operación de flujo espectral.

## 1.1 Estructura de la tesis

Esta tesis está basada, principalmente, en las publicaciones [75–77, 131]. En el segundo capítulo se presenta un breve resumen de los conceptos básicos de Teoría de Cuerdas que se usarán a lo largo de la tesis, basado principalmente en [78] y, en el tercero, la simetría de T-dualidad desde la perspectiva de la hoja de mundo siguiendo las líneas de [79]. En el cuarto capítulo se introduce la Teoría Doble de Campos, siguiendo lo expuesto en [1, 2, 80]. Otras referencias de interés son [3], con una introducción al tema, y [81]. En el quinto capítulo se estudia la incorporación a DFT de estados no masivos que no provengan del sector descrito por  $G_{ij}, B_{ij}$  y  $\phi$  basándose en los trabajos [76, 82]. Para una compactificación genérica con campos de fondo, la cuerda adquiere nuevos números cuánticos dados por el momento en las direcciones compactas y, dado que se trata de un objeto extendido unidimensional, por el enrollamiento alrededor de estas direcciones. En una compactificación toroidal general, el sector no masivo está dado por las excitaciones correspondientes a  $G_{ij}, B_{ij}$  y  $\phi$  en las direcciones internas con momento y enrollamiento nulos. Sin embargo, para ciertos valores especiales de los campos de fondo, nuevos estados con momento y enrollamiento no nulos se incorporan al espectro no masivo, dando lugar a nuevas simetrías de gauge (simetría de gauge “agrandada”). En este capítulo se trata la incorporación de estos nuevos estados, la ruptura de simetría de gauge mediante un mecanismo de Higgs y se discute una posible descripción única que incorpore a todos los grupos de gauge que surgen en una compactificación en un toro de dimensión arbitraria.

En el sexto capítulo se analiza brevemente la estructura de gauge de las supergravidades gaugeadas, considerando el formalismo del *tensor de embedding* y en el séptimo, se trata la Teoría de Campos Excepcional (EFT, por sus siglas en inglés) con grupo de gauge  $E_{7(7)}$ . El objetivo de estos capítulos es presentar una breve introducción a estos temas para poder relacionarlos con las álgebras  $L_\infty$  y las teorías de campos con esta estructura, que se introducen en el octavo capítulo. En el noveno capítulo se analiza la relación entre las álgebras  $L_\infty$  EFT con  $E_{7(7)}$  y las supergravidades gaugeadas siguiendo [77]. En este trabajo se muestra que el sector de gauge de EFT con  $E_{7(7)}$  presenta una estructura  $L_\infty$ . Además, se extienden los resultados

de [109], dando condiciones suficientes para tener una estructura  $L_\infty$  que involucre a campos y parámetros de gauge.

Finalmente, en el décimo, basado en [75, 131], se trata el modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW y se estudiará la función de correlación de cuatro puntos para estados con flujo espectral no trivial.

En el Apéndice A se presentan elementos básicos de las álgebras de Lie y las convenciones utilizadas para el quinto capítulo.

# Capítulo 2

## Teoría de Cuerdas

En este capítulo se presentarán algunos resultados básicos de teoría de cuerdas relevantes para el resto de la tesis. No pretende ser una introducción a teoría de cuerdas dado que se omitirán muchos aspectos, sino un compendio de los resultados principales que servirá así mismo para fijar la notación. Se seguirá principalmente a [78].

### 2.1 La acción y sus simetrías

En teoría de cuerdas el concepto de partícula puntual se generaliza al de cuerda: un objeto unidimensional extendido en las direcciones espaciales. En un espacio tiempo de  $D$  dimensiones con coordenadas  $x^\mu$  y  $\mu = 0, \dots, D - 1$ , la trayectoria de una partícula puntual forma una “línea de mundo” (esto es, una curva). La curva que describe esta trayectoria define, pues, un mapa  $X^\mu : \tau \rightarrow X^\mu$  con  $\tau \in \mathbb{R}$  (ver figura 2.1).

En el caso de las cuerdas, la trayectoria describe una “hoja de mundo” parametrizada en términos de dos coordenadas  $(\tau, \sigma)$  (también se utilizará la notación  $(\sigma^0, \sigma^1)$  para describir a estas coordenadas). Las cuerdas pueden ser abiertas o cerradas y en la figura 2.1 se muestran las hojas de mundo respectivas.

La acción de la que se deriva la dinámica de una cuerda puede describirse en términos del área de la hoja de mundo. Para un espacio tiempo de Minkowski con métrica  $\eta_{\mu\nu}$  con signatura  $(- + + \dots)$ , la acción toma la forma

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu} \right)}, \quad (2.1.1)$$

donde la cantidad entre paréntesis es el pullback de la métrica de Minkowski sobre la hoja de mundo y  $T$  es la tensión de la cuerda. A la tensión se le suele reescribir en términos de otra constante  $\alpha'$  con unidades de longitud al cuadrado,  $T = 1/(4\pi\alpha')$ .

La acción (2.1.1) se conoce bajo el nombre de acción de Nambu-Goto. La presencia de la

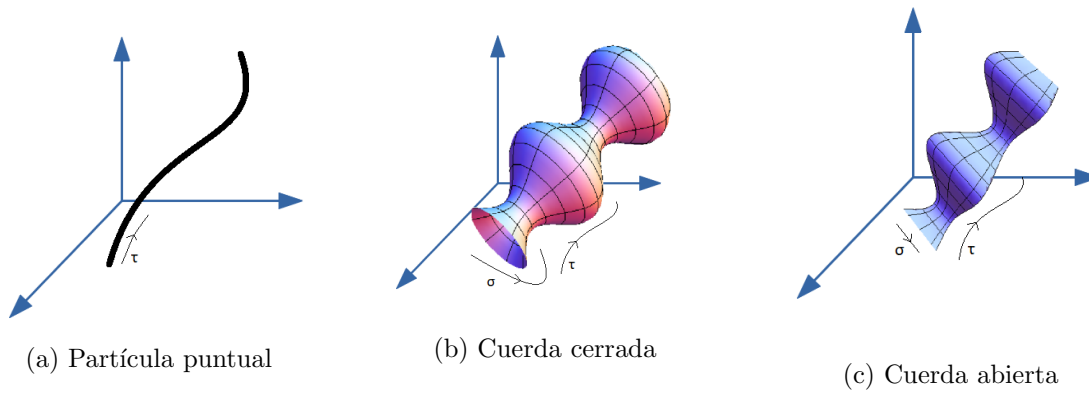


Figura 2.1: Línea y hojas de mundo.

raíz cuadrada hace complicada la tarea de obtener una teoría cuántica a partir del formalismo de integral de caminos, por lo que para describir la teoría cuántica suele utilizarse una acción clásicamente equivalente, conocida como acción de Polyakov, que elimina la raíz cuadrada al precio de introducir un nuevo campo  $g^{\alpha\beta}$ :

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (2.1.2)$$

con  $g \equiv \det g$  y donde se ha introducido la notación  $\partial_\alpha X^\mu \equiv \partial X^\mu / \partial \sigma^\alpha$ . El nuevo campo es una métrica dinámica en la hoja de mundo con signatura lorentziana  $(-, +)$ .

Esta acción posee las siguientes simetrías:

- invariancia de Poincaré: es una simetría global en la hoja de mundo dada por

$$X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + c^\mu, \quad (2.1.3)$$

con  $\Lambda^\mu{}_\nu$  una matriz del grupo de Lorentz y  $c^\mu$  un cuadrivector.

- invariancia de reparametrizaciones (difeomorfismos en la hoja de mundo). Dada una reparametrización de las coordenadas  $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$  los campos  $X^\mu$  transforman como escalares en la hoja de mundo y  $g_{\alpha\beta}$  transforma como una métrica:

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma) &\rightarrow \tilde{X}^\mu(\tilde{\sigma}) = X^\mu(\sigma), \\ g_{\alpha\beta}(\sigma) &\rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \tilde{\sigma}^\alpha} \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \tilde{\sigma}^\beta} g_{\gamma\delta}(\sigma). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

- Invariancia de Weyl: bajo esta simetría  $X^\mu(\sigma) \rightarrow X^\mu(\sigma)$ , mientras que la métrica cambia por un factor de escala  $\Omega^2(\sigma)$ :

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma). \quad (2.1.5)$$

Estas simetrías son suficientes para fijar todas las componentes de la métrica mediante una elección de gauge. Una elección posible es tomar una métrica plana sobre la hoja de mundo,

con la forma

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1). \quad (2.1.6)$$

Esta condición puede ser reemplazada directamente en la acción (2.1.2) dando lugar a una formulación más sencilla, pero previamente conviene obtener las ecuaciones de movimiento antes de hacer el fijado de gauge. Variando la acción con respecto a los campos  $X^\mu$  se tiene la ecuación de movimiento

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0, \quad (2.1.7)$$

que debe ser suplementada con condiciones de contorno apropiadas necesarias para cancelar el término de superficie

$$\int d\tau \sqrt{-g} X'^\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0}^{\sigma=2\pi} = 0, \quad (2.1.8)$$

donde se ha introducido la notación  $(X^\mu)' = \partial X^\mu / \partial \sigma$ . En el caso de cuerdas cerradas, se tiene la condición,

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau), \quad (2.1.9)$$

mientras que para cuerdas abiertas se pueden elegir distintos tipos de condiciones de contorno. Para condiciones de contorno de tipo Neumann

$$(X^\mu)'|_{\sigma=0} = (X^\mu)'|_{\sigma=2\pi} = 0, \quad (2.1.10)$$

la interpretación es que los extremos de la cuerda se mueven libremente mientras que para las de tipo Dirichlet, dadas por

$$X^\mu|_{\sigma=0} = X_0^\mu, \quad X^\mu|_{\sigma=2\pi} = X_{2\pi}^\mu, \quad (2.1.11)$$

los extremos de la cuerda se encuentran sobre la posición de un hipervolumen dinámico llamado D-brana; ambas condiciones de contorno pueden combinarse.

Variando ahora la acción con respecto a la métrica  $g_{\alpha\beta}$  se tiene la condición sobre el tensor de energía-momento

$$T_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.1.12)$$

donde el tensor de energía-momento está definido como

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}}. \quad (2.1.13)$$

A continuación se reemplazará la elección de gauge (2.1.6) en la acción y se procederá a la cuantización de la teoría. La acción toma la forma

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X, \quad (2.1.14)$$

y las ecuaciones de movimiento para  $X^\mu$  se reducen a la de la ecuación de ondas libre

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0. \quad (2.1.15)$$



La métrica sobre la hoja de mundo ya no está presente como campo dinámico, y las condiciones sobre el tensor de energía momento deben introducirse como vínculos de la teoría, que pueden ser escritos como

$$\left(\dot{X}^\mu \pm X'^\mu\right)^2 = 0, \quad (2.1.16)$$

donde se ha definido  $\dot{X}^\mu \equiv \partial X^\mu / \partial \tau$ .

## 2.2 Cuantización

Para resolver las ecuaciones de movimiento conviene introducir coordenadas de cono de luz  $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$  en términos de las cuales las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \quad (2.2.1)$$

Dado que  $X^\mu$  satisface la ecuación de ondas libre, admite una descomposición en términos de coordenadas derechas (*right*, en inglés,  $X_R$ ) e izquierdas (*left*, en inglés,  $X_L$ ) y la solución más general viene dada por

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-) \quad (2.2.2)$$

para funciones arbitrarias  $X_L^\mu$  y  $X_R^\mu$ . Las soluciones deben satisfacer, además, las condiciones de contorno y los vínculos (2.1.16).

A continuación se analizará únicamente el caso de la cuerda cerrada, siendo el de la cuerda abierta similar (ver [83] para un análisis pormenorizado). La solución más general en el caso de la cuerda cerrada viene dada por

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Debido a que  $X^\mu$  es una coordenada real, los modos de Fourier deben satisfacer

$$\alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^* \quad , \quad \tilde{\alpha}_n^\mu = (\tilde{\alpha}_{-n}^\mu)^* . \quad (2.2.4)$$

La llamada cuantización covariante consiste en cuantizar el sistema y luego imponer los vínculos que surgen como consecuencia del fijado de gauge como operadores actuando sobre los estados físicos del sistema. En QED, este método no es otra cosa que el método de Gupta-Bleuler utilizado en el gauge de Lorentz. La manera de proceder es promover a los campos  $X^\mu$  y a sus momentos canónicamente conjugados  $\Pi^\mu$ , dados por  $\Pi_\mu = (1/2\pi\alpha')\dot{X}_\mu$ , a operadores de campo que obedecen las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\begin{aligned} [X^\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)] &= i\delta(\sigma - \sigma') \delta^\mu_\nu, \\ [X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] &= [\Pi_\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Utilizando la expansión en modos (2.2.3) se tienen las relaciones de conmutación para los modos

$$[x^\mu, p_\nu] = i\delta^\mu_\nu \quad \text{y} \quad [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} . \quad (2.2.6)$$

Redefiniendo a los modos de la siguiente manera (y obviando por un momento los índices espacio tiempo)

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \quad , \quad a_n^\dagger = \frac{\alpha_{-n}}{\sqrt{n}} \quad n > 0 \quad (2.2.7)$$

(y equivalentemente para los osciladores  $\tilde{\alpha}_n$ ) se llega a las relaciones de conmutación de un conjunto de osciladores armónicos:  $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{mn}$ . Así, se llega a dos conjuntos (modos derechos  $\alpha_n$  e izquierdos  $\tilde{\alpha}_n$ ) de operadores de creación y destrucción, con  $\alpha_n$  tomando el papel de un operador de destrucción para  $n > 0$  y de creación para  $n < 0$ .

Ahora resulta inmediato construir un espacio de Fock actuando libremente con los operadores de creación sobre un vacío con momento  $p^\mu$  definido a partir de

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu |0; p^\mu\rangle &= \tilde{\alpha}_n^\mu |0; p^\mu\rangle = 0 \quad , \quad \text{para } n > 0, \\ \hat{p}^\mu |0; p\rangle &= p^\mu |0; p\rangle . \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Un estado genérico del espacio de Fock se obtiene actuando con cualquier número de los operadores de creación sobre el vacío

$$(\alpha_{-1}^{\mu_1})^{n_{\mu_1}} (\alpha_{-2}^{\mu_2})^{n_{\mu_2}} \dots (\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu_1})^{n_{\nu_1}} (\tilde{\alpha}_{-2}^{\nu_2})^{n_{\nu_2}} \dots |0; p\rangle . \quad (2.2.9)$$

Un problema que surge en este espacio de Fock es que presenta estados con norma negativa. Estos fantasmas pueden removerse del espectro imponiendo los vínculos (2.1.16), para lo cual conviene obtener la expansión en modos del tensor de energía-momento. Como es una cantidad conservada, se pueden obtener sus modos a tiempo cero, que vienen dados por

$$L_n = \frac{T}{2} \int d\sigma e^{-im\sigma} T_{--} = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m , \quad (2.2.10)$$

y similarmente para  $\tilde{L}_n$ . Clásicamente,  $L_n = \tilde{L}_n = 0$ . A nivel cuántico uno exige que los operadores  $L_n, \tilde{L}_n$  se anulen para valores medios de estados físicos, es decir

$$\langle \text{físico} | L_n | \text{físico} \rangle = \langle \text{físico} | \tilde{L}_n | \text{físico} \rangle = 0 . \quad (2.2.11)$$

Dado que  $L_n^\dagger = L_{-n}$ , es suficiente exigir

$$L_n | \text{físico} \rangle = \tilde{L}_n | \text{físico} \rangle = 0 \quad \text{para } n > 0 . \quad (2.2.12)$$

Para los operadores  $L_0, \tilde{L}_0$  surge una ambigüedad al imponer el orden normal entre los osciladores. Estos operadores se definen como

$$L_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m + \frac{1}{2} \alpha_0^2 \quad , \quad \tilde{L}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_0^2 \quad (2.2.13)$$

con  $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu$  y los vínculos toman la forma

$$(L_0 - a)|\text{físico}\rangle = (\tilde{L}_0 - a)|\text{físico}\rangle = 0 \quad (2.2.14)$$

para alguna constante  $a$  que da cuenta de la ambigüedad. En el caso de la cuerda bosónica,  $a = 1$  y  $D = 26$ . Estos valores pueden obtenerse a partir de las identidades de Ward de la teoría, o alternativamente, mediante el proceso de “cuantización de cono de luz”. En este procedimiento, en lugar de imponer las condiciones de Virasoro como ecuaciones de operadores sobre los estados físicos, los vínculos de la teoría se imponen a nivel clásico restringiendo el espacio de soluciones y luego se procede con la cuantización de estas soluciones. En la cuantización de cono de luz, se hace uso de una simetría residual que persiste luego de haber utilizado las simetrías de la acción de Polyakov para fijar el valor de la métrica sobre la hoja de mundo: una reparametrización de las coordenadas  $(\tau, \sigma)$  modifica a la métrica  $g_{\alpha\beta}$ , cambio que puede ser compensado con una transformación de Weyl apropiada para devolver la métrica a su forma diagonal (2.1.6). En este procedimiento, se eligen dos direcciones del espacio tiempo con las que se forman “coordenadas de cono de luz”. Al seleccionar arbitrariamente dos de las coordenadas, se pierde invariancia explícita de Lorentz y puede verse que el álgebra de Poincaré construída a partir de las corrientes conservadas sólo se recupera al fijar los valores  $a = 1$  y  $D = 26$ .

Los modos  $L_m$  (y  $\tilde{L}_m$ ) dan lugar a un álgebra que a nivel cuántico se denomina álgebra de Virasoro y toma la forma

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0} , \quad (2.2.15)$$

con  $c$  la carga central. Este álgebra no es otra cosa que el álgebra asociada a las simetrías residuales de la acción, la simetría *conforme*. Una Teoría de Campos Conforme es una teoría de campos que es invariante ante transformaciones conformes, dadas por cambios de coordenadas  $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$  que modifican a la métrica como  $g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma)g_{\alpha\beta}(\sigma)$ . Esto significa que la física de la teoría es igual para todas las escalas de longitud.

Los vínculos (2.2.14) juegan un papel importante al momento de determinar el espectro, dado que incluyen un término cuadrático en el momento ( $\alpha_0^2$  y  $\tilde{\alpha}_0^2$ ). A partir de ellos, uno encuentra que el espectro de la cuerda bosónica cerrada viene dado por

$$\alpha' M^2 = 4(N - a) = 4(\tilde{N} - a) = 2(N + \tilde{N} - 2a) \quad (2.2.16)$$

con los operadores número dados por  $N = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m$  (y equivalentemente para  $\tilde{N}$ ).

Tomando la diferencia entre los vínculos en (2.2.14) la constante “ $a$ ” de orden normal desaparece y uno obtiene la “condición de igualdad de niveles” (*level matching condition*, LMC, en inglés), que jugará un papel importante en la Teoría Doble de Campos,

$$(L_0 - \tilde{L}_0)|\text{físico}\rangle = 0. \quad (2.2.17)$$

En términos de los operadores número, esta condición se lee

$$(N - \tilde{N}) |\text{físico}\rangle = 0, \quad (2.2.18)$$

lo que indica que el número de modos izquierdos debe ser igual al de modos derechos.

A partir de la fórmula de masa (2.2.16) puede verse que el espectro de bajas energías está dado por un taquión, dado por  $N = \tilde{N} = 0$ , de masa al cuadrado negativa, partícula que no estará presente en el espectro de la supercuerda, y en el siguiente nivel, partículas de masa nula, dadas por

$$\tilde{\alpha}_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} |0; p\rangle. \quad (2.2.19)$$

Con el valor  $a = 1$ , puede verse que los vínculos de Virasoro restringen el espectro a los modos transversos a la dirección del momento y la condición de masa nula reduce el número de grados de libertad de polarización, teniendo en total  $D - 2 = 24$  grados de libertad. Los estados (2.2.19) se descomponen en tres representaciones irreducibles de  $SO(24)$ :

$$\text{simétrica sin traza} \oplus \text{antisimétrica} \oplus \text{singlete (=traza)}, \quad (2.2.20)$$

que estarán asociadas a los campos no masivos

$$G_{\mu\nu}(X) \quad , \quad B_{\mu\nu}(X) \quad , \quad \Phi(X), \quad (2.2.21)$$

el gravitón, el tensor antisimétrico de Kalb-Ramond y el dilatón, respectivamente. Estos tres campos no masivos son comunes a todas las Teorías de Cuerdas y Supergravidades<sup>1</sup> y se los conoce como el sector bosónico de Neveu-Schwarz (sector NS).

## 2.3 Acción efectiva de bajas energías

Hasta aquí se ha descrito a la cuerda bosónica en un espacio tiempo plano de Minkowski. Una primera generalización a espacio tiempos curvos surge de reemplazar la métrica de Minkowski por una métrica general  $G_{\mu\nu}(X)$  en la acción de Polyakov

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} G_{\mu\nu}(X). \quad (2.3.1)$$

Puede verse que esta acción esta relacionada con la de Polyakov a partir de la introducción de operadores de vértice asociados al gravitón en la integral de caminos que da la acción de Polyakov con métrica de Minkowski (ver [83]). Siguiendo este mismo razonamiento e introduciendo los operadores de vértice asociados al tensor de Kalb-Ramond y al dilatón se obtiene la generalización de la acción de Polyakov para una cuerda propagándose en un espacio tiempo con campos de fondo no masivos y viene dada por

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left( G_{\mu\nu}(X) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} g^{\alpha\beta} + i B_{\mu\nu}(X) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \epsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \Phi(X) R^{(2)} \right) \quad (2.3.2)$$

---

<sup>1</sup>A excepción de las teorías orientadas.

donde  $R^{(2)}$  es el escalar de Ricci 2-dimensional asociado a la hoja de mundo. Clásicamente, el último término rompe la simetría de Weyl de la acción de Polyakov y la teoría pierde su simetría conforme. A nivel cuántico, la simetría conforme está asociada a la traza del tensor de energía momento que viene dada por

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{1}{2\alpha'}\beta_{\mu\nu}(G)g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{i}{2\alpha'}\beta_{\mu\nu}(B)\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2}\beta(\Phi)R^{(2)}, \quad (2.3.3)$$

con las funciones  $\beta$

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}(G) &= \alpha'\mathcal{R}_{\mu\nu} + 2\alpha'\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - \frac{\alpha'}{4}H_{\mu\lambda\kappa}H_\nu{}^{\lambda\kappa}, \\ \beta_{\mu\nu}(B) &= -\frac{\alpha'}{2}\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \alpha'\nabla^\lambda\Phi H_{\lambda\mu\nu}, \\ \beta(\Phi) &= -\frac{\alpha'}{2}\nabla^2\Phi + \alpha'\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi - \frac{\alpha'}{24}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Aquí,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci del espacio tiempo,  $\nabla$  es la derivada covariante con conexión de Levi-Civita y  $H_{\lambda\mu\nu}$  es la fuerza del campo de Kalb-Ramond, dada por  $H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$ .

Para preservar la simetría conforme es necesario que la traza del tensor de energía momento se anule, lo que lleva a  $\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0$ .

Estas ecuaciones pueden ser vistas como ecuaciones de movimiento para los campos de fondo bajo los cuales la cuerda se propaga y pueden ser derivadas de la siguiente acción efectiva de bajas energías

$$S = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{26}X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left( \mathcal{R} - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi \right) \quad (2.3.5)$$

La constante  $\kappa_0$  no está fijada por las ecuaciones de movimiento pero puede determinarse acoplando las ecuaciones con fuentes. Por consideraciones dimensionales, escala como  $\kappa_0^2 \sim l_s^4$  donde  $\alpha' = l_s^2$ .

La acción efectiva de bajas energías (2.3.5) es común a las Teorías de Cuerdas Heterótica  $SO(32)$ , Heterótica  $E_8 \times E_8$ , Tipo IIA y Tipo IIB, teorías formuladas en  $D = 10^2$ . Estas acciones son conocidas como Supergravidades y contienen la misma cantidad de grados de libertad fermiónicos y bosónicos relacionados por supersimetría. Las teorías de tipo II son invariantes ante supersimetría  $\mathcal{N} = 2$  (32 supercargas, los generadores de la simetría) mientras que las heteróticas poseen supersimetría con  $\mathcal{N} = 1$ .

Todas estas contienen a los campos  $G_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  y  $\Phi$  de la cuerda bosónica, además de otros campos no masivos. La acción efectiva de bajas energías que describe la dinámica de estos campos en  $D = 10$  puede dividirse en tres partes

$$S_{\text{supergravidad}} = S_1 + S_2 + S_{\text{fermi}}. \quad (2.3.6)$$

---

<sup>2</sup>En las teorías Heteróticas, los grupos de gauge pueden obtenerse mediante una formulación que considera 16 coordenadas quirales adicionales compactificadas.

Aquí,  $S_{\text{fermi}}$  describe las interacciones de los fermiones, que no serán tratados en este breve resumen.  $S_1$  es la acción encontrada en (2.3.5), con la diferencia de que la 3-forma  $H_{\mu\nu\rho}$  no es la misma que la de la cuerda bosónica para el caso de la Heterótica.

La segunda parte de la acción,  $S_2$ , describe la dinámica de los campos no masivos adicionales y que son específicos para cada teoría:

- **Tipo IIA:** Los campos bosónicos adicionales son los campos de Ramond-Ramond dados por una 1-forma  $C_1$  y una 3-forma  $C_3$ . La acción toma la forma

$$S_2 = -\frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^{10}X \left[ \sqrt{-G} \left( |F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right) + B_2 \wedge F_4 \wedge F_4 \right], \quad (2.3.7)$$

donde se ha denotado a las formas con un subíndice indicando su grado y  $F_{i+1} = dC_i$  y  $\tilde{F}_4 = F_4 - C_1 \wedge H_3$ .

- **Tipo IIB:** Los campos adicionales son un escalar  $C_0$ , una 2-forma  $C_2$  y una 4-forma  $C_4$  con

$$S_2 = -\frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^{10}X \left[ \sqrt{-G} \left( |F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2 \right) + C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \right], \quad (2.3.8)$$

y  $\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3$  y  $\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3$ . Para esta teoría hay un requerimiento adicional y es que  $\tilde{F}_5$  debe ser autodual

$$\tilde{F}_5 = * \tilde{F}_5. \quad (2.3.9)$$

- **Heterótica:** Para las dos teorías Heteróticas, el campo adicional es un campo de gauge del grupo  $SO(32)$  o  $E_8 \times E_8$  con fuerza de campo  $F_2$  y la acción es la de Yang-Mills

$$S_2 = \frac{\alpha'}{8\kappa_0^2} \int d^{10}X \sqrt{-G} \text{Tr} |F_2|^2. \quad (2.3.10)$$

En este caso la 3-forma  $\tilde{H}_3$  presente en  $S_1$  se modifica y se corrige con la forma de Chern-Simons:  $\tilde{H}_3 = dB_2 - \alpha' \omega_3/4$  con

$$\omega_3 = \text{Tr} \left( A_1 \wedge dA_1 + \frac{2}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right). \quad (2.3.11)$$

En este capítulo se ha presentado la acción de Polyakov y se procedió a su cuantización covariante y determinación del espectro bosónico de bajas energías. Finalmente se describieron las acciones de bajas energías en el sector bosónico.

# Capítulo 3

## T-Dualidad

En este capítulo se tratará la compactificación de la cuerda en el caso toroidal y se analizará la simetría de T-dualidad que surge como consecuencia de la compactificación. Esta simetría aparece realizada mediante el grupo  $O(d, d, \mathbb{Z})$  cuyas propiedades fundamentales serán tratadas aquí. También se analizará el espacio de módulos de la compactificación, prestándole particular atención a configuraciones que dan lugar a una simetría de gauge agrandada. Al final del capítulo se analizarán en detalle los casos de una compactificación en un círculo y en un  $T^2$ . Se tratará únicamente el sector compacto, esto es, no se hará referencia a las direcciones no compactificadas y las expresiones utilizadas (acción, momentos, Hamiltoniano, operadores de Virasoro, etc) solamente incluirán las contribuciones del sector compacto.

### 3.1 Caso unidimensional

El ejemplo más sencillo de la simetría de T-dualidad viene de considerar a la cuerda bosónica compactificada en un círculo de radio  $R$ . Considerando que el espacio total en  $D = 26$  dimensiones toma la forma  $M_{26} = M_{25} \times S^1$ , y tomando condiciones periódicas de contorno en la coordenada compacta  $X^{25} \equiv X$ , se tiene

$$X(\sigma + 2\pi, \tau) = X(\sigma, \tau) + 2\pi R\omega, \quad (3.1.1)$$

donde  $\omega \in \mathbb{Z}$  es el número de enrollamiento (*winding number*, en inglés), que indica la cantidad de veces que la cuerda se enrolla en la dirección periódica y el signo da cuenta de la orientación (ver figura 3.1). La expansión en modos para la cuerda no cambia en las direcciones extendidas  $X^\mu$ , con  $\mu = 0, \dots, 24$ , y es la misma que en el caso plano de Minkowski discutido en el capítulo 2, pero sí cambia para la dirección compacta. Al igual que en el caso sin compactificar, la solución para la coordenada compacta puede expresarse como

$$X(\sigma, \tau) = X_L(\sigma + \tau) + X_R(\sigma - \tau). \quad (3.1.2)$$

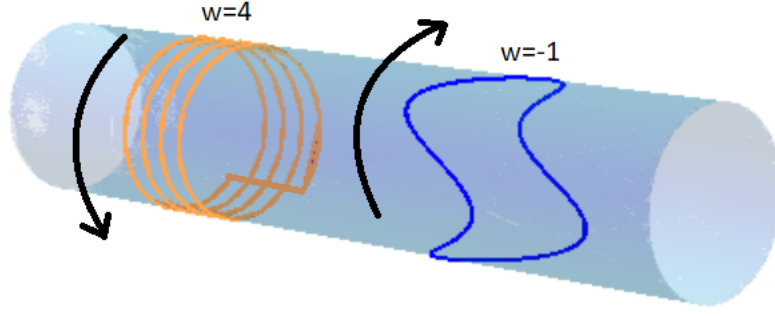


Figura 3.1: Cuerdas enrolladas en una dirección compacta.

La expansión en modos para esta descomposición es

$$\begin{aligned}
 X_R(\sigma - \tau) &= x_R - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_R(\sigma - \tau) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \alpha_l e^{il(\sigma - \tau)}, \\
 X_L(\sigma + \tau) &= x_L - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_L(\sigma + \tau) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \tilde{\alpha}_l e^{-il(\sigma + \tau)},
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

donde  $x = x_L + x_R$  es el centro de masa y  $p_L$  y  $p_R$  son los momentos izquierdo y derecho.

El momento canónicamente conjugado de  $X(\sigma)$  es

$$P(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \left( p + \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \alpha_l e^{il(\sigma - \tau)} + \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \tilde{\alpha}_l e^{-il(\sigma + \tau)} \right), \tag{3.1.4}$$

y el momento total viene dado por

$$p = \int_0^{2\pi} P(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} (p_L + p_R). \tag{3.1.5}$$

Debido a que la dirección  $X$  es compacta, el momento a lo largo de esa dirección está cuantizado. Esto es porque la función de onda, que debe ser univaluada, contiene un factor  $\exp(ipx)$ . Al dar una vuelta alrededor de la dirección compacta, es decir  $x \rightarrow x + 2\pi R$ , la función de onda debe retornar a su valor original. Esto implica que el momento es de la forma

$$p = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.6}$$

donde el entero  $n$  se lo denomina *número de excitación de Kaluza-Klein*. Los momentos adimensionales  $p_R$  y  $p_L$  vienen dados, entonces, por

$$\begin{aligned}
 p_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n - \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \omega \right), \\
 p_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n + \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \omega \right).
 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$



Los operadores de Virasoro de orden cero en el sector compacto tienen la forma

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}p_R^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{-l}\alpha_l, \\ \tilde{L}_0 &= \frac{1}{2}p_L^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-l}\tilde{\alpha}_l, \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

y el Hamiltoniano es

$$H = L_0 + \tilde{L}_0. \tag{3.1.9}$$

Los operadores de Virasoro (3.1.8) (y, en consecuencia, el Hamiltoniano) son invariantes ante las transformaciones

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} &\leftrightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R}, \\ n &\leftrightarrow \omega. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Esta transformación aplicada sobre los momentos produce

$$\begin{aligned} p_L &\rightarrow p_L, & (\tilde{\alpha}_0 &\rightarrow \tilde{\alpha}_0), \\ p_R &\rightarrow -p_R, & (\alpha_0 &\rightarrow -\alpha_0), \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

y transforma, también, a todos los osciladores en la dirección compacta

$$\begin{aligned} \alpha_l &\rightarrow -\alpha_l, \\ \tilde{\alpha}_l &\rightarrow \tilde{\alpha}_l. \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Esta es la simetría de T-dualidad. Esta simetría establece que las teorías que surgen a partir de compactificaciones en un círculo de radio  $R$  o de radio  $\tilde{R} \equiv \alpha'/R$  son equivalentes. El intercambio  $n \leftrightarrow \omega$  significa que las excitaciones de Kaluza-Klein en una descripción corresponden a excitaciones de enrollamiento en la otra, y viceversa.

Para ver que efectivamente se trata de una simetría de la teoría, la función de partición debería ser invariante ante T-dualidad [79]. A nivel de un lazo, esta observación es inmediata dado que la función de partición es

$$Z = \int_{\Gamma} d^2\tau \hat{Z}(\tau, \bar{\tau}) \sum_{p_L, p_R} \text{Tr} e^{i\pi\tau L_0 - i\pi\bar{\tau} \tilde{L}_0}, \tag{3.1.13}$$

con  $\tau$  el parámetro modular describiendo toros conformemente inequivalentes,  $\Gamma$  la región fundamental de  $SL(2, \mathbb{Z})$  en el plano complejo,  $\hat{Z}(\tau, \bar{\tau})$  la contribución a la función de partición de las coordenadas no compactas y la traza tomada sobre el espacio de Hilbert construido a partir de los osciladores  $\alpha_l, \tilde{\alpha}_l$ . La invariancia de (3.1.13) ante T-dualidad se sigue de observar que los enteros  $n$  y  $\omega$  son variables mudas.

La invariancia a todo lazo es más complicada dado que involucra una suma sobre hojas de mundo de distinto género y una prueba pedagógica puede encontrarse en [79].

Antes de pasar al caso toroidal, resulta conveniente transformar a  $X$  en una coordenada angular, vía el reescaleo  $X \rightarrow RX$ , de forma tal que la periodicidad viene dada por  $X \approx X + 2\pi\omega$ . La acción para la coordenada compacta toma la forma

$$\frac{1}{4\pi} \int \int d\sigma d\tau G \partial_\alpha X \partial^\alpha X, \quad (3.1.14)$$

con la métrica adimensional  $G = \hat{R}^2$  y el radio adimensional  $\hat{R} \equiv R/\sqrt{\alpha'}$ . En adelante se tratará a las coordenadas  $X$  como coordenadas angulares.

## 3.2 Compactificación toroidal

Consideremos ahora una compactificación toroidal, es decir, el espacio toma la forma  $M_D = M_{D-d} \times T^d$ . Las coordenadas compactas  $X^i$ ,  $i = 1, \dots, d$  son adimensionales y obedecen las condiciones de periodicidad siguientes

$$X^i \approx X^i + 2\pi\omega^i. \quad (3.2.1)$$

El toro  $T^d$  puede describirse en términos de una red de compactificación  $\Lambda^d$  definida a partir de una base de vectores  $e_m$ :

$$T^d = \mathbb{R}/\pi\Lambda^d. \quad (3.2.2)$$

Los vectores  $e_m$  satisfacen

$$G_{mn} = e^a{}_m \delta_{ab} e^b{}_n, \quad (G = e^t e), \quad (3.2.3)$$

con  $G_{mn}$  la métrica (adimensional) sobre el toro. Resulta conveniente introducir los vectores duales  $\hat{e}_a$ , que satisfacen

$$\hat{e}_a{}^m e^a{}_n = \delta^m{}_n, \quad \hat{e}_a{}^m \delta^{ab} \hat{e}_b{}^n = (G^{-1})^{mn}, \quad (\hat{e}^t \hat{e} = G^{-1}). \quad (3.2.4)$$

La acción de hoja de mundo propagándose en una geometría toroidal viene dada por

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int d\tau \left[ \sqrt{g} g^{\alpha\beta} G_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j + \epsilon^{\alpha\beta} B_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j - \frac{1}{2} \sqrt{g} \Phi R^{(2)} \right], \quad (3.2.5)$$

con  $B_{ij}$  el tensor antisimétrico de Kalb-Ramond (adimensional) interno,  $\Phi$  el dilatón y  $R^{(2)}$  el escalar de curvatura de la hoja de mundo. Es de utilidad agrupar en un único objeto a la información sobre los campos de fondo  $G$  y  $B$ , por lo que se define  $E \equiv G + B$ . En lo que sigue, se considerarán soluciones con dilatón nulo, por lo que no será tenido en cuenta.

El espectro puede obtenerse llevando a cabo la cuantización canónica sobre la hoja de mundo. Considerando que no hay anomalía de Weyl (es decir, con carga central  $c = 26$  para la

cuerda bosónica), pueden usarse las simetrías de la hoja de mundo para fijar  $g_{\alpha\beta}(\sigma, \tau) = \eta_{\alpha\beta}$  como en el capítulo 2. Clásicamente, el momento canónico  $P_i$  asociado a  $X^i$  está dado por

$$2\pi P_i = G_{ij}\dot{X}^j + B_{ij}X^{j'} \quad (3.2.6)$$

donde  $X^{j'} \equiv \partial_\sigma X^j$ .

La expansión en modos para las coordenadas y sus variables conjugadas es

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + \omega^i \sigma + \tau G^{ij}(p_j - B_{jk}\omega^k) + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} [\alpha_n^i(E) e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^i(E) e^{-in(\tau+\sigma)}],$$

$$2\pi P_i(\sigma, \tau) = p_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} [E_{ij}^t \alpha_n^j(E) e^{-in(\tau-\sigma)} + E_{ij} \tilde{\alpha}_n^j(E) e^{-in(\tau+\sigma)}].$$

Debido a la periodicidad de las coordenadas  $X^i$  los momentos  $p_i$  están cuantizados para obtener una función de onda univaluada

$$p_i = n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.7)$$

Las relaciones de conmutación de los osciladores  $\alpha_n^i(E)$ ,  $\tilde{\alpha}_n^i(E)$  se obtienen a partir de introducir las expansiones (3.2.7) en la relación

$$[X^i(\sigma, 0), P_j(\sigma', 0)] = i\delta_j^i \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.2.8)$$

Los conmutadores que se deducen son

$$[x^i, p_j] = i\delta_j^i, \quad (3.2.9)$$

$$[\alpha_n^i(E), \alpha_m^j(E)] = [\tilde{\alpha}_n^i(E), \tilde{\alpha}_m^j(E)] = mG^{ij} \delta_{m+n,0}.$$

Los osciladores y las relaciones de conmutación dependen, en este caso, de los campos de fondo, porque la periodicidad de las coordenadas está fijada en  $2\pi$ .

La contribución interna a los operadores de Virasoro viene dada por

$$L_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma P_R^2, \quad \tilde{L}_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma P_L^2, \quad (3.2.10)$$

con

$$P_{La} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_a^i [2\pi P_i + (G - B)_{ij} X^{j'}], \quad (3.2.11)$$

$$P_{Ra} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_a^i [2\pi P_i - (G + B)_{ij} X^{j'}].$$

El Hamiltoniano se obtiene de estos operadores simplemente como  $H = L_0 + \tilde{L}_0$ . Insertando las expansiones en modos para  $X^i$  y  $P_i$  y ordenando normalmente se tiene

$$H = \frac{p_L^2 + p_R^2}{2} + N + \tilde{N}, \quad (3.2.12)$$

donde

$$p_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}[n^t + \omega^t(B - G)], \quad p_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}[n^t + \omega^t(B + G)]. \quad (3.2.13)$$

y los operadores número  $N$  y  $\tilde{N}$  vienen dados por

$$N = \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i(E) G_{ij} \alpha_n^j(E), \quad \tilde{N} = \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i(E) G_{ij} \tilde{\alpha}_n^j(E). \quad (3.2.14)$$

En la cuantización de la cuerda bosónica, también debe imponerse la LMC (2.2.17).

Para estudiar las simetrías de esta teoría es conveniente analizar en primer lugar la contribución de los modos cero,  $p_L, p_R$  que dan lugar al Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{p_L^2 + p_R^2}{2}, \quad (3.2.15)$$

y la LMC en el sector interno puede escribirse como

$$p_L^2 - p_R^2 = 2\omega^i n_i \in 2\mathbb{Z}, \quad (3.2.16)$$

Es importante notar que los vectores  $p_L$  y  $p_R$  contienen información sobre los campos de fondo  $G$  y  $B$ . Dado este Hamiltoniano, el siguiente paso es identificar al grupo que genera el espacio de módulos del conjunto completo de Lagrangianos admisibles, es decir, determinar los valores posibles de los campos  $G$  y  $B$ . Para esto, conviene definir un reticulado  $\Gamma^{(d,d)}$  con métrica lorentziana  $(d, d)$  dado por los vectores compuestos  $q \equiv (p_L, p_R)$ . Este reticulado queda unívocamente definido por los valores de los campos de fondo  $G$  y  $B$  y la norma de los vectores  $q$  viene dada por la expresión (3.2.16), de donde obtenemos que el reticulado es par, es decir, la norma de sus vectores es un número par. Imponiendo, además, invariancia modular sobre la función de partición, se obtiene la condición de autodualidad. La importancia de estas observaciones radica en que todos los reticulados pares autoduales con signatura lorentziana  $(d, d)$  están relacionados por transformaciones del grupo  $O(d, d, \mathbb{R})$ . Es decir que mediante transformaciones del grupo  $O(d, d, \mathbb{R})$  obtenemos nuevos  $\Gamma'^{(d,d)}$  que codifican nuevos campos de fondo  $G'$  y  $B'$ . Sin embargo, este grupo no es una simetría de la teoría dado que la norma euclídea  $p_L^2 + p_R^2$  (que da lugar al Hamiltoniano (3.2.15)) no permanece invariante, por lo que las transformaciones de  $O(d, d, \mathbb{R})$  dan lugar a teorías con espectros distintos y que siguen respetando la LMC.

Como los vectores  $q = (p_L, p_R)$  transforman en la representación vectorial de  $O(d, d, \mathbb{R})$ , el hamiltoniano (3.2.15) es invariante ante transformaciones del máximo subgrupo compacto  $O(d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})$  que, en consecuencia, no cambian el espectro de los modos ceros de la teoría. De esta manera, el grupo que genera todos los posibles Lagrangianos viene dado por  $O(d, d, \mathbb{R})$  y el espacio de módulos es localmente isomorfo a la variedad del coset

$$O(d, d, \mathbb{R}) / (O(d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})). \quad (3.2.17)$$

Para identificar al grupo de simetría de esta teoría conviene reescribir al hamiltoniano  $H_0$  (3.2.15) como

$$H_0 = \frac{p_L^2 + p_R^2}{2} = \frac{1}{2} Z^t \mathcal{H} Z, \quad Z = (\omega^i, n_i). \quad (3.2.18)$$

con

$$\mathcal{H}(E) = \begin{pmatrix} G - BG^{-1}B & BG^{-1} \\ -G^{-1}B & G^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.2.19)$$

Fijada la matriz de campos de fondo  $E$ , el vector de enteros  $Z$  contiene toda la información para reconstruir a los vectores  $p_L$  y  $p_R$ .

También será de utilidad obtener una expresión para el Hamiltoniano para pequeñas perturbaciones alrededor de una configuración de campos de fondo específica. Tomando  $G = G_0 + \delta G$ ,  $B = B_0 + \delta B$ ,  $E = E_0 + \delta E$  y usando la definición para los momentos  $p_L$  y  $p_R$  (3.2.13) se tiene

$$H_0 = \frac{1}{2} (p_{aL}(E_0), p_{aR}(E_0)) \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}MM^t & M \\ M^t & 1 + \frac{1}{2}M^tM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{aL}(E_0) \\ p_{aR}(E_0) \end{pmatrix}, \quad (3.2.20)$$

con  $M$  dada por

$$M = -\hat{e}(\delta G - \delta B)\hat{e}^t. \quad (3.2.21)$$

Antes de identificar al grupo  $\mathcal{G}_d$  que da la simetría de la teoría, describiremos al grupo  $O(d, d, \mathbb{R})$ . Los elementos  $g \in O(d, d, \mathbb{R})$  preservan a la forma  $\eta$

$$g^t \eta g = \eta \quad (3.2.22)$$

con

$$\eta = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, \quad (3.2.23)$$

donde  $I$  es una identidad de  $d \times d$ . Los elementos  $g$  pueden representarse como

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (3.2.24)$$

con  $a, b, c, d$  matrices reales de  $d \times d$ . De la condición (3.2.22) se desprende

$$g^t \eta g = \eta \Rightarrow a^t c + c^t a = 0, \quad b^t d + d^t b = 0, \quad a^t d + c^t b = I. \quad (3.2.25)$$

Una propiedad de este grupo es que si  $g \in O(d, d, \mathbb{R})$ , también  $g^t \in O(d, d, \mathbb{R})$ :

$$g^t \eta g = \eta \Rightarrow (g^t \eta g)^{-1} = (\eta)^{-1} \Rightarrow g^{-1} \eta (g^t)^{-1} = \eta \Rightarrow \eta = g \eta g^t, \quad (3.2.26)$$

donde se usó que  $\eta^{-1} = \eta$ .

Para estudiar las transformaciones que  $O(d, d, \mathbb{R})$  produce sobre la matriz  $E$  resulta conveniente embeber a la matriz de módulos  $E \in O(d, d, \mathbb{R}) / (O(d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R}))$  en  $O(d, d, \mathbb{R})$ . Una parametrización posible es

$$g_E = \begin{pmatrix} e & B(e^t)^{-1} \\ 0 & (e^t)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.2.27)$$

La acción de  $O(d, d, \mathbb{R})$  sobre una matriz  $F$  de  $d \times d$  se define a partir de la transformación fraccional lineal, dada por

$$g(F) \equiv (aF + b)(cF + d)^{-1}. \quad (3.2.28)$$

De esta definición, se sigue inmediatamente que

$$g_E(I) = E = G + B, \quad (3.2.29)$$

y

$$\mathcal{H}(E) = g_E g_E^t. \quad (3.2.30)$$

La transformación de esta matriz se sigue de la transformación de los vectores  $p_L$  y  $p_R$  y la ecuación (3.2.18) y viene dada por

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}(E') \equiv \mathcal{H}_g = g \mathcal{H} g^t = g g_E g_E^t g^t = g_{E'} g_{E'}^t, \quad (3.2.31)$$

de donde se deduce que

$$g_{E'} = g g_E. \quad (3.2.32)$$

De las ecuaciones (3.2.29) y (3.2.32), se tiene también que

$$E' = g_{E'}(I) = g g_E(I) = g(E), \quad (3.2.33)$$

de donde uno puede obtener finalmente cómo transforma la matriz de campos de fondo utilizando la transformación lineal fraccional (3.2.28)

$$E' \equiv g(E) = (aE + b)(cE + d)^{-1}. \quad (3.2.34)$$

Hasta aquí se ha identificado la acción de  $O(d, d, \mathbb{R})$  sobre el espacio de módulos de los campos toroidales de fondo. La simetría de T-dualidad viene descrita por el grupo de transformaciones  $\mathcal{G}_d$  que deja invariante a la teoría. Para esto, es necesario que el espectro quede invariante, es decir, el grupo de simetría debe actuar como un automorfismo del espacio de estados. El grupo de T-dualidad para una compactificación toroidal resulta ser  $\mathcal{G}_d = O(d, d, \mathbb{Z}) \subset O(d, d, \mathbb{R})$  y esto puede determinarse identificando tres tipos de transformación que dejan al espectro invariante y que constituyen, justamente, los generadores de  $O(d, d, \mathbb{Z})$ . Estas transformaciones son:

- Transformaciones  $\Theta$ : están parametrizadas por una matriz antisimétrica de  $d \times d$   $\Theta_{ij} \in \mathbb{Z}$  y pueden interpretarse como un corrimiento en el campo de Kalb-Ramond  $B_{ij}$ , también antisimétrico. Se pueden representar en términos de las matrices  $g$  descritas en (3.2.24) y su forma es

$$g_\Theta = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.2.35)$$

Utilizando la expresión para transformar los campos de fondo (3.2.34) se ve fácilmente que el cambio que produce es

$$B_{ij} \rightarrow B_{ij} + \Theta_{ij}. \quad (3.2.36)$$

Dado que el término con  $B_{ij}$  constante es una derivada total en la acción (3.2.5), este cambio sólo aporta una contribución topológica. Como la matriz  $\Theta_{ij} \in \mathbb{Z}$ , la acción cambia en un múltiplo de  $2\pi$  y la integral de caminos queda invariante, de donde se deduce que esta transformación es una simetría.

- Cambios de base: Los cambios de base del reticulado de compactificaciones  $\Lambda$  son una simetría del espectro, en donde el cambio sobre la matriz  $E$  es

$$E \rightarrow A E A^t, \quad (3.2.37)$$

con  $A \in GL(d, \mathbb{Z})$  la matriz de cambio de base. La parametrización en términos de (3.2.24) viene dada por

$$g_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.2.38)$$

Para ver que es una simetría del espectro se puede escribir el Hamiltoniano (3.2.18) en la forma

$$2H_0 = Z^t \mathcal{H} Z = n^t G^{-1} n - \omega^t (G - B G^{-1} B) \omega - 2n^t G^{-1} B \omega \quad (3.2.39)$$

y aplicar la transformación, de donde

$$\begin{aligned} 2H_0 \rightarrow Z^t \mathcal{H}' Z = & n^t (A^{-1})^t G^{-1} A^{-1} n - \omega^t A (G - B G^{-1} B) A^t \omega \\ & - 2n^t (A^{-1})^t (G^{-1} B) A^t \omega. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

La forma original se recupera redefiniendo a los enteros  $n_i$  y  $\omega^i$  de acuerdo a

$$n \rightarrow A n, \quad \omega \rightarrow (A^t)^{-1} \omega. \quad (3.2.41)$$

Es importante aquí el hecho de que los elementos de  $A$  sean enteros, de otra manera no hubiese sido posible redefinir a los enteros que caracterizan a las excitaciones de Kaluza-Klein y al enrollamiento.

- Dualidades factorizadas  $D_i$ : Son generalizaciones para el caso toroidal de la dualidad  $R/\sqrt{\alpha'} \rightarrow \sqrt{\alpha'}/R$  del caso del círculo discutido en la sección anterior. Vienen parametrizadas por la matriz

$$g_{D_i} = \begin{pmatrix} I - e_i & e_i \\ e_i & I - e_i \end{pmatrix}, \quad (3.2.42)$$

donde  $e_i$  es una matriz nula de  $d \times d$  a excepción de la componente “ii”, que es 1.

Estas simetrías, que generan al grupo  $O(d, d, \mathbb{Z})$ , no son las únicas que tiene esta teoría. Además se tiene la simetría de *paridad en la hoja de mundo*:

$$\sigma \rightarrow -\sigma, \quad B \rightarrow -B, \quad (3.2.43)$$

que no pertenece a  $O(d, d, \mathbb{Z})$  dado que intercambia  $p_L$  y  $p_R$  y, por lo tanto, cambia el signo de la norma lorentziana (3.2.16).

Hasta aquí se han discutido los modos cero de la cuerda. La transformación de los osciladores se sigue de exigir que la simetría de dualidad actúe como una transformación canónica. En otras palabras, las relaciones de conmutación (3.2.9) se deben preservar ante la dualidad. Transformando a ambos lados de (3.2.9), y teniendo en cuenta que la matriz de campos de fondo transforma de acuerdo a (3.2.34), se sigue que los osciladores deben transformar de acuerdo a

$$\begin{aligned}\alpha_n(E) &\rightarrow (d - cE^t)^{-1}\alpha_n(E'), \\ \tilde{\alpha}_n(E) &\rightarrow (d + cE)^{-1}\tilde{\alpha}_n(E').\end{aligned}\tag{3.2.44}$$

Ante estas transformaciones, los operadores número definidos en (3.2.14) son invariantes y por lo tanto el Hamiltoniano completo lo es.

Además, la simetría de paridad en la hoja de mundo también es una simetría de la teoría completa: los osciladores se intercambian entre sí

$$\alpha_n \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n,\tag{3.2.45}$$

intercambiando a los operadores número pero dejando invariante al Hamiltoniano.

La invariancia del espectro es una condición necesaria para mostrar que la teoría tiene una simetría. Sin embargo, no es suficiente. Para tener una simetría, todas las funciones de correlación de una teoría deben ser mapeadas a la teoría transformada. Este aspecto fue determinado en [79], en donde se demostró que la simetría de dualidad puede ser expresada en términos de una simetría de gauge.

### 3.3 Espectro no masivo

Resulta de interés analizar el límite de bajas energías de esta teoría, en donde los estados no masivos son los únicos relevantes. Estos estados serán fundamentales cuando se trate la Teoría Doble de Campos en el siguiente capítulo.

La fórmula de masa para la teoría compactificada se obtiene de los vínculos de Virasoro

$$(L_0 - 1)|\psi\rangle = 0, \quad (\tilde{L}_0 - 1)|\psi\rangle = 0.\tag{3.3.1}$$

Sumando estas expresiones y usando (3.2.12) se tiene

$$\frac{1}{2}\mathcal{M}^2 = \frac{p_L^2 + p_R^2}{2} + (N + \tilde{N} - 2).\tag{3.3.2}$$

Debemos tener en cuenta, a su vez, la LMC

$$N - \tilde{N} = \omega^i n_i,\tag{3.3.3}$$

El espectro no masivo de la teoría de cuerdas bosónica compactificada en un toro viene dado por dos tipos de estado. En primer lugar, para número de Kaluza-Klein y de enrollamiento



nulos ( $n_i = \omega^i = 0$ ),  $p_L = p_R = 0$  se tienen estados no masivos si  $N = \tilde{N} = 1$ , los mismos que se obtienen de una teoría de cuerdas bosónica sin compactificar. Los correspondientes operadores de vértice son

$$\alpha_0^{\hat{\mu}} \tilde{\alpha}_0^{\hat{\nu}} e^{ipX} |0\rangle = -\frac{2}{\alpha'} \int d^2z \partial X^{\hat{\mu}} \bar{\partial} X^{\hat{\nu}} e^{ipX} |0\rangle, \quad (3.3.4)$$

donde se ha denotado con  $\hat{\mu}$  al índice de espacio tiempo no compactificado en 26 dimensiones, es decir:  $\hat{\mu} = 0, \dots, 26$ . Al compactificar, este índice toma la forma  $\hat{\mu} = (\mu, j)$  con  $\mu = 0, \dots, 26-d$  denotando a las dimensiones no compactas y  $j = 1, \dots, d$  denotando a las dimensiones compactificadas. Desde el punto de vista del espacio extendido, este estado da lugar a tensores de rango dos para  $\hat{\mu} = \mu$ ,  $\hat{\nu} = \nu$ , a vectores para  $\hat{\mu} = \mu$ ,  $\hat{\nu} = j$  y a escalares para  $\hat{\mu} = j$ ,  $\hat{\nu} = k$ . En el caso de los vectores, éstos corresponden a los generadores de una simetría de gauge  $U(1)_L^d \times U(1)_R^d$ , condición que puede verse a partir del cálculo de los OPE's.

Además de estos estados, existen otros estados no masivos para ciertos valores específicos de los campos de fondo. Por ejemplo, en el caso  $d=1$ ,  $p_L$  y  $p_R$  vienen dados por (3.1.7)

$$p_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n - \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \omega \right),$$

$$p_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n + \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \omega \right).$$

Si se toma una compactificación con un radio  $R^2 = \alpha'$ , estas expresiones se simplifican y se tiene

$$p_R = \frac{n - \omega}{\sqrt{2}}, \quad p_L = \frac{n + \omega}{\sqrt{2}}. \quad (3.3.5)$$

Para  $n = \omega = 1$  y  $n = -\omega = 1$  se obtiene

$$(p_L, p_R) = (\sqrt{2}, 0), \quad n = \omega = 1,$$

$$(p_L, p_R) = (0, \sqrt{2}), \quad n = -\omega = 1, \quad (3.3.6)$$

Se ve que para estos valores de  $(p_L, p_R)$  se tienen estados no masivos (que satisfacen la LMC) tomando  $n = \omega = 1$  junto con  $N = 0$ ,  $\tilde{N} = 1$  y  $n = -\omega = 1$  junto con  $N = 1$ ,  $\tilde{N} = 0$ . Es decir que existen valores específicos para los campos de fondo en los que aparecen nuevos estados no masivos. Estos nuevos estados, agrandan la simetría de gauge  $U(1)_L^d \times U(1)_R^d$  encontrada anteriormente a nuevos grupos de gauge. Esto puede verse a partir de la construcción de Frenkel-Kac-Segal, descrita en la siguiente sección. Para el ejemplo de compactificación en un círculo, el grupo de gauge resultante es  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ .

En el caso del círculo, esta nueva simetría de gauge surge a partir de considerar un valor para el radio de compactificación de forma tal que quede invariante ante el efecto de la T-dualidad, que viene dado por<sup>1</sup>

$$R \rightarrow \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}. \quad (3.3.7)$$

<sup>1</sup>Se restituyen momentáneamente las unidades al considerar  $\alpha'$ .

Tomando  $R = \sqrt{\alpha'}$  se tiene que el valor del radio escogido es un punto fijo ante esta transformación.

Este fenómeno también aparece en compactificaciones toroidales de  $d$  dimensiones. En el caso  $d$  dimensional, se buscan puntos fijos ante la inversión de la matriz  $E$  de campos de fondo. Ante  $E \rightarrow E' = E^{-1}$ ,  $G$  y  $B$  transforman como

$$G \rightarrow G' = (G - BG^{-1}B)^{-1}, \quad B \rightarrow B' = (B - GB^{-1}G)^{-1}. \quad (3.3.8)$$

Esta inversión tiene un único punto fijo dado por  $G = I$  y  $B = 0$ . El grupo de gauge resultante para estos valores para los campos de fondo es  $(SU(2))^{2d}$ . Sin embargo, existen grupos de gauge distintos para el caso general. Estos surgen de considerar puntos fijos ante inversión de la matriz  $E$  a menos del grupo de simetría discreto del toro  $T^d SL(d, \mathbb{Z})$  y transformaciones  $\Theta$ :

$$E^{-1} = M^t(E + \Theta)M, \quad M \in SL(d, \mathbb{Z}), \quad \Theta \in \Theta(\mathbb{Z}). \quad (3.3.9)$$

En [84] se mostró que los valores de  $E$  tales que la simetría de gauge está “agrandada” maximalmente caen en esta categoría. Por simetría de gauge maximal se hace referencia a grupos de gauge semisimples y simply-laced de rango  $d$ . En estos casos, la matriz  $E$  obedece

$$E_{ij} = C_{ij}, \quad i > j, \quad E_{ii} = \frac{1}{2}C_{ii}, \quad E_{ij} = 0, \quad i < j, \quad (3.3.10)$$

donde  $C_{ij}$  es la matriz de Cartan del álgebra correspondiente a un grupo de gauge  $G$ . El grupo de gauge que se obtiene para esta compactificación específica es  $G \times G$ . Si  $G$  tiene  $q$  raíces, habrá  $q$  vectores  $p_L$  y  $q$  vectores  $p_R$  de norma euclídea 2 dando lugar a los vectores no masivos cargados frente al grupo de gauge. Los estados no masivos adicionales satisfacen

$$(p_L^{(i)})^2 = 2, \quad p_R^{(i)} = \vec{0}, \quad \tilde{N} = 1, \quad N = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (3.3.11)$$

$$(p_R^{(i)})^2 = 2, \quad p_L^{(i)} = \vec{0}, \quad \tilde{N} = 0, \quad N = 1, \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.3.12)$$

Los operadores de vértice correspondientes a los estados (3.3.11) son

$$i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int d^2z C(p_a) \bar{\partial} X^{\hat{\mu}} e^{ip^\mu X_\mu(z, \bar{z})} e^{ip_{aL} X^a(z)}, \quad (3.3.13)$$

y para (3.3.12) se tiene

$$i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int d^2z C(p_a) \partial X^{\hat{\mu}} e^{ip^\mu X_\mu(z, \bar{z})} e^{ip_{aR} X^a(\bar{z})}, \quad (3.3.14)$$

con  $C(p_a)$  siendo un cociclo, necesario para obtener las relaciones de conmutación correctas entre los operadores de vértice (ver siguiente sección). Se ha denotado como  $X^a(z)$  ( $X^a(\bar{z})$ ) a la parte (anti)holomorfa del operador de campo  $X^a(z, \bar{z})$ , donde el índice latino  $a$  hace referencia a las coordenadas compactas:  $a = 1, \dots, d$ . Según el índice  $\hat{\mu}$  tome valores en las coordenadas extendidas o internas, las expresiones anteriores darán lugar a estados que son escalares o vectores.

Los estados en (3.3.13) y (3.3.14) dan lugar a los estados cargados del grupo de gauge, mientras que los descritos en (3.3.4) dan lugar a los estados asociados al subálgebra de Cartan.

Además del grupo de gauge maximal, también pueden surgir en una compactificación toroidal grupos de gauge no maximales, es decir, con rango menor a  $d$ . Estos grupos emergen a partir de puntos fijos del espacio de módulos ante algún subconjunto de las dualidades factorizadas  $D_i$ .

### 3.4 Construcción de Frenkel-Kac-Segal

A continuación se describirá la construcción en base a operadores de vértice para un álgebra de Kac-Moody de nivel uno, en base a bosones quirales libres propagándose en un toro de dimensión  $d$ .

El álgebra de Kac-Moody de nivel uno en la base de Cartan-Weyl para un grupo simply-laced  $G$  es <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} [H_m^I, H_n^J] &= m\delta^{IJ}\delta_{m+n}, \\ [H_m^I, E_n^\alpha] &= \alpha^I E_{m+n}^\alpha, \\ [E_m^\alpha, E_n^\beta] &= \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta)E_{m+n}^{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha \cdot \beta = -1, \\ \alpha \cdot H_{m+n} + m\delta_{m+n} & \text{si } \alpha \cdot \beta = -2, \\ 0 & \text{si } \alpha \cdot \beta \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

con las propiedades de hermiticidad siguientes

$$(H_n^I)^\dagger = H_{-n}^I, \quad (E_n^\alpha)^\dagger = E_{-n}^{-\alpha}. \quad (3.4.2)$$

Es importante notar que  $\alpha \cdot \beta = -1$  implica que  $\alpha + \beta$  también es una raíz, de ahí que el resultado del conmutador entre dos operadores de subida/bajada  $\alpha$  y  $\beta$  sea proporcional al correspondiente operador de subida/bajada  $\alpha + \beta$ . Además, de  $\alpha \cdot \beta = -2$  se deduce que  $\alpha + \beta = 0$ . Una representación posible para los generadores se obtiene a partir de considerar bosones quirales libres  $X^I(z)$ , con  $I = 1, \dots, \text{rango}(G)$  cuya expansión en modos es

$$X^I(z) = q^I - ip^I \ln(z) + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I z^{-n}, \quad (3.4.3)$$

La función de dos puntos es de la forma

$$\langle X^I(z) X^I(w) \rangle = \delta^{IJ} \ln(z - w). \quad (3.4.4)$$

y el tensor de energía momento es

$$T(z) = -\frac{1}{2} \sum_I : \partial X^I(z) \partial X^I(z) : . \quad (3.4.5)$$

---

<sup>2</sup>Ver el Apéndice A para un breve resumen sobre Álgebras de Lie.

Se definen dos campos quirales  $H^I(z)$  y  $E^\alpha(z)$  cuyos modos serán los generadores de Kac-Moody  $H_m^I$  y  $E_m^\alpha$ :

$$\begin{aligned} H_m^I &= \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} z^m H^I(z), \\ E_m^\alpha &= \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} z^m E^\alpha(z), \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

con  $C_0$  un contorno cerrado alrededor del origen.

En primer lugar, el operador  $H^I(z)$  se define a partir de

$$H^I(z) = i\partial X^I(z). \tag{3.4.7}$$

Este operador tiene dimensión conforme  $h = 1$  como puede verse de calcular el OPE con el tensor de energía momento. Utilizando la expresión para el conmutador a partir de integrales de contorno se tiene

$$\begin{aligned} [H_m^I, H_n^J] &= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^m w^n i\partial X^I(z) i\partial X^J(w) \\ &= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^m w^n \frac{\delta^{IJ}}{(z-w)^2} = m\delta^{IJ}\delta_{m+n}, \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

dando lugar a la primera relación de conmutación en (3.4.1).

A continuación, definimos el campo  $\tilde{E}^\alpha(z)$  como

$$\tilde{E}^\alpha(z) =: e^{i\alpha \cdot X(z)} :, \tag{3.4.9}$$

con  $\alpha$  la raíz del álgebra correspondiente al grupo  $G$ , con norma  $\alpha^2 = 2$ . Esto implica que  $\tilde{E}^\alpha(z)$  tiene dimensión conforme  $h = 1$  como puede verse al calcular el OPE con el tensor de energía momento. El operador  $\tilde{E}^\alpha(z)$  no tiene las propiedades de conmutación deseadas, como surge de calcular el OPE

$$\tilde{E}^\alpha(z)\tilde{E}^\beta(w) = (z-w)^{\alpha\cdot\beta}\tilde{E}^{\alpha+\beta}(w) + (z-w)^{\alpha\cdot\beta+1}\alpha \cdot i\partial X(w)\tilde{E}^{\alpha+\beta}(w) + \dots \tag{3.4.10}$$

Dado que se trata de operadores bosónicos, uno esperaría obtener el mismo OPE para  $\tilde{E}^\beta(w)\tilde{E}^\alpha(z)$ , sin embargo, dado que  $\alpha \cdot \beta$  es un entero, uno encuentra

$$\tilde{E}^\alpha(z)\tilde{E}^\beta(w) = (-1)^{\alpha\cdot\beta}\tilde{E}^\beta(w)\tilde{E}^\alpha(z). \tag{3.4.11}$$

Esto implica

$$\begin{aligned}
& \tilde{E}^\alpha(z)\tilde{E}^\beta(w) - (-1)^{\alpha\cdot\beta}\tilde{E}^\beta(w) = \\
& = \left[ \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C'_0:|z|>|w|} \frac{dw}{2\pi i} - \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C''_0:|z|<|w|} \frac{dw}{2\pi i} \right] z^m \tilde{E}^\alpha(z) w^n \tilde{E}^\beta(w) \\
& = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^{\alpha\cdot\beta} z^m w^n \tilde{E}^{\alpha+\beta}(w) [1 + i(z-w)\alpha \cdot \partial X(w) + \dots] \quad (3.4.12) \\
& = \begin{cases} \tilde{E}_{m+n}^{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha \cdot \beta = -1, \\ \alpha \cdot H_{m+n} + m\delta_{m+n} & \text{si } \alpha \cdot \beta = -2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Encontramos un resultado similar al esperado, a excepción del factor  $(-1)^{\alpha\cdot\beta}$  y las constantes de estructura  $\epsilon(\alpha, \beta)$ . Estos factores se corrigen con la introducción de cociclos. Definimos, finalmente, al operador  $E^\alpha(z)$  a partir de

$$E^\alpha(z) = \tilde{E}^\alpha(z)c_\alpha, \quad (3.4.13)$$

donde  $c_\alpha$  es el operador de cociclo. Hay varias construcciones posibles para este operador, siendo una de ellas en términos de los modos cero  $p^I$ :  $c_\alpha = c_\alpha(p)$ . Para tener los signos correctos en el OPE y poder formar un conmutador en el lado izquierdo de (3.4.12) se requiere

$$c_\alpha(p)c_\beta(p-\alpha) = (-1)^{\alpha\cdot\beta}c_\beta(p)c_\alpha(p-\beta). \quad (3.4.14)$$

Y para tener un álgebra cerrada es necesaria la siguiente propiedad

$$c_\alpha(p)c_\beta(p-\alpha) = \epsilon(\alpha, \beta)c_{\alpha+\beta}(p), \quad (3.4.15)$$

Una realización explícita de estas condiciones viene dada por el operador

$$c_\alpha(p) = (-1)^{p*\alpha}, \quad (3.4.16)$$

donde el producto  $*$  entre dos elementos del reticulado de raíces está dado por

$$p * \alpha = \sum_{i>j} n_i m_j \alpha_{(s)i} \cdot \alpha_{(s)j}. \quad (3.4.17)$$

Aquí,  $\alpha_{(s)i}$  hace referencia a las raíces simples del álgebra, que pueden tomarse como base del espacio vectorial dado por el reticulado:

$$p = \sum n_i \alpha_{(s)i}, \quad \alpha = \sum m_i \alpha_{(s)i}, \quad n_i, m_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.4.18)$$

Finalmente, queda por demostrar que el conmutador  $[H_m^I, E_n^\alpha]$  da el resultado correcto, lo que se deduce inmediatamente a partir del OPE entre  $H(z)$  y  $E^\alpha(z)$ .

## 3.5 Los casos de $S^1$ y $T^2$

En esta sección se presentan construcciones explícitas para los casos  $S^1$  y  $T^2$ , que serán de utilidad en esta tesis.

### 3.5.1 $S^1$

En el caso unidimensional hay un único módulo, el valor del radio o de la única componente de la métrica  $G = R^2$ . El grupo  $O(1, 1, \mathbb{Z})$  consta de dos elementos

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5.1)$$

con  $g_D$  correspondiendo a una dualidad factorizada, que invierte el valor del radio. Debido a esta simetría, el espacio de módulos está dado por

$$O(1, 1, \mathbb{R})/O(1, 1, \mathbb{Z}), \quad (3.5.2)$$

y puede representarse por una semirrecta  $[1, \infty)$ , donde el inicio de la semirrecta representa el valor del radio autodual, donde se tiene una simetría de gauge  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ .

### 3.5.2 $T^2$

El grupo de simetrías en el caso de  $T^2$  viene dado por  $O(2, 2, \mathbb{Z})$  y la simetría de paridad en la hoja de mundo:  $B \rightarrow -B$ . Este grupo es isomorfo a  $SL(2, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z}) \otimes_S [\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$  [85, 86], lo que puede verse al combinar los módulos reales  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{22}$ ,  $B_{12}$  en dos variables complejas  $\rho$  y  $\tau$

$$\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2 = \frac{G_{12}}{G_{22}} + \frac{i\sqrt{G}}{G_{22}} \quad (3.5.3)$$

$$\rho \equiv \rho_1 + i\rho_2 = B_{12} + i\sqrt{G},$$

con  $G$  siendo el determinante de la métrica  $G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2$ . Estas variables pueden ser entendidas como la estructura compleja ( $\tau$ ) y la estructura de Kähler ( $\rho$ ) de un toro dos dimensional. Invirtiendo esta relación, la matriz  $E$  puede obtenerse como

$$E = \frac{\rho_2}{\tau_2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & \tau_1 \\ \tau_1 & 1 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5.4)$$

Cada  $SL(2, \mathbb{Z})$  viene de las transformaciones modulares sobre  $\tau$  y  $\rho$ , donde los generadores  $S$  y  $T$  para estas transformaciones vienen dados por

$$\begin{aligned} S : (\rho, \tau) &\rightarrow \left( \rho, -\frac{1}{\tau} \right), & T : (\rho, \tau) &\rightarrow (\rho, \tau + 1), \\ S' : (\rho, \tau) &\rightarrow \left( -\frac{1}{\rho}, \tau \right), & T' : (\rho, \tau) &\rightarrow (\rho + 1, \tau). \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Las primeras dos transformaciones están asociadas al hecho de que el toro no se modifica ante transformaciones modulares de la estructura compleja. La tercera transformación es un fenómeno asociado a teoría de cuerdas: tomando  $B = 0$ , invierte el elemento de volumen del espacio de compactificación. La cuarta transformación corresponde a una transformación  $\Theta$ .

Más simetrías se manifiestan al reescribir a  $p_L^2$  y  $p_R^2$  en términos de  $\tau$  y  $\rho$ :

$$p_L^2 = \frac{1}{2\rho_2\tau_2} |(n_1 - \tau n_2) - \rho(m_2 + \tau m_1)|^2$$

$$p_R^2 = \frac{1}{2\rho_2\tau_2} |(n_1 - \tau n_2) - \bar{\rho}(m_2 + \tau m_1)|^2$$

Una de ellas es

$$R : (\tau, \rho) \rightarrow (-\bar{\tau}, -\bar{\rho}). \quad (3.5.6)$$

Esta simetría corresponde a la reflexión de la coordenada  $X^1 \rightarrow -X^1$  junto con los cambios de signo en los campos de fondo  $G_{12}$  y  $B_{12}$ , dejando a  $G_{11}$  y  $G_{22}$  invariantes. Finalmente se tiene la simetría correspondiente a paridad en la hoja de mundo, que intercambia  $p_L$  y  $p_R$  y, como ya se mencionó, no forma parte de  $O(2, 2, \mathbb{R})$  dado que cambia el signo de la norma lorentziana:

$$W : (\tau, \rho) \rightarrow (\tau, -\bar{\rho}). \quad (3.5.7)$$

Dentro de  $O(2, 2, \mathbb{Z})$  se encuentran las dualidades factorizadas, que jugarán un papel importante a la hora de encontrar los puntos del espacio de módulos con agrandamiento de la simetría de gauge:

$$g_{D_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{D_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.8)$$

Cuando el toro es un producto directo de dos  $S^1$ ,  $D_1$  y  $D_2$  corresponden a  $R_1 \rightarrow 1/R_1$  con  $R_2$  fijo, y a  $R_2 \rightarrow 1/R_2$  con  $R_1$  fijo, respectivamente. En términos de  $\tau$  y  $\rho$  vienen dadas por

$$D_1 : (\tau, \rho) \rightarrow \left( \frac{-1}{\tau}, \frac{-1}{\rho} \right), \quad D_2 : (\tau, \rho) \rightarrow (\rho, \tau). \quad (3.5.9)$$

El conjunto de generadores presentado hasta aquí no constituye el mínimo indispensable para generar todas las simetrías. El conjunto mínimo viene dado por  $S$ ,  $T$ ,  $D_2$  y  $W$  y el resto puede obtenerse como combinación de éstos:  $S' = D_2 S D_2$ ,  $T' = D_2 T D_2$ ,  $R = D_2 W D_2 W$ ,  $D_1 = S' S D_2$ .

El espacio de módulos puede representarse como dos copias del plano complejo cocientadas por el grupo de simetrías. Para ver cómo obtenerlo, conviene concentrarse primero en una de las variables complejas,  $\tau$  por ejemplo. La transformación  $T : \tau \rightarrow \tau + 1$  restringe el plano complejo a la región  $-1/2 < \text{Re}(\tau) < 1/2$  (o a cualquier otra donde  $\text{Re}(\tau)$  tenga extensión igual a uno). La transformación  $S : \tau \rightarrow -1/\tau$  mapea los puntos dentro de un círculo de radio uno a los puntos

fuera del mismo, por lo que la región de puntos físicamente inequivalentes viene dada por la que se muestra en 3.2a. Finalmente, se debe considerar la simetría de reflexión  $R : \tau \rightarrow -\bar{\tau}$ , que limita la región a aquella con  $Re(\tau) < 0$ , obteniéndose, finalmente la región mostrada en la figura 3.2b. Cualquier punto dentro de esta región representa un valor físicamente inequivalente para los campos de fondo en  $E$ .

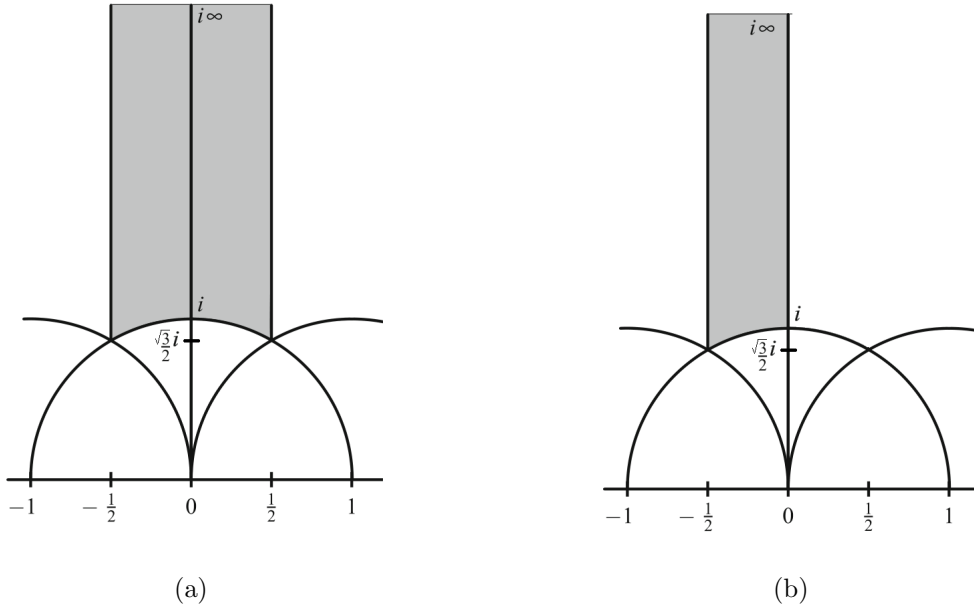


Figura 3.2: Regiones fundamentales para el módulo  $\tau$ .

Como ya se ha descrito, hay puntos del espacio de módulos en donde se tiene un agrandamiento del grupo de gauge. En el caso del  $T^2$  hay dos puntos que dan lugar a grupos de gauge maximales. El primero de ellos es  $(\tau, \rho) = (i, i)$ , con grupo de gauge  $(SU(2) \times SU(2))_L \times (SU(2) \times SU(2))_R$ . Esto puede verse inmediatamente al construir la matriz  $E$  y ver que verifica las condiciones (3.3.10) con  $E = I$ . Esta matriz implica que el campo  $B$  es nulo y que la métrica está dada por la identidad, lo que puede ser entendido como un toro dado por el producto directo de dos círculos con radio autodual.

Otro punto que da lugar a agrandamiento de la simetría de gauge es

$$(\tau, \rho) = \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \quad (3.5.10)$$

cuya matriz de campos de fondo es

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.11)$$

En este caso, el grupo de gauge es  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ .

Además de estos grupos de gauge, también hay agrandamientos a grupos no maximales, que pueden encontrarse como puntos fijos ante alguna transformación de dualidad factorizada.



En los bordes de la región fundamental, es decir para  $\rho = \tau = -1/2 + i\tau_2$ ,  $\rho = \tau = i\tau_2$  y  $|\rho| = |\tau| = 1$  se tiene agrandamiento de la simetría  $(SU(2) \times U(1))_L \times (SU(2) \times U(1))_R$ . En el interior de la región, con  $\tau = \rho$ , se tiene  $U(1)_L^2 \times (SU(2) \times U(1))_R$ . Finalmente, tomando  $\tau = -\bar{\rho}$  se obtiene  $(SU(2) \times U(1))_L \times U(1)_R^2$ .

# Capítulo 4

## Teoría doble de campos

La T-dualidad es una simetría que pone de manifiesto el carácter extendido de los objetos fundamentales en teoría de cuerdas. Las cuerdas cerradas pueden enrollarse alrededor de ciclos no contraíbles en el espacio tiempo, dando lugar a estados que no tienen un análogo en el caso de las teorías de partículas puntuales. Como se ha señalado en el capítulo 3, para una compactificación toroidal, los estados estarán caracterizados por enteros  $n_i$ , asociados al momento en las direcciones compactas, y  $\omega^i$ , asociados al enrollamiento. La T-dualidad puede entenderse como una simetría que intercambia estas cantidades para los estados de cuerdas.

Es en este contexto que surge la Teoría Doble de Campos (*Double Field Theory* (DFT), en inglés), en donde se pretende tener una teoría que tenga a la T-dualidad como una simetría manifiesta al nivel del espacio tiempo. En este capítulo se presentará un breve resumen de los resultados principales.

### 4.1 Primeras formulaciones de la teoría

DFT fue construída en [1] inspirándose en Teoría de Campos de Cuerdas, que posee simetría de T-dualidad. Esta teoría trata de manera simétrica al momento y al enrollamiento y los modos de los campos físicos dependen de estas cantidades. Haciendo una transformada de Fourier de los campos se obtienen representaciones que dependen de las coordenadas espaciotemporales del espacio compacto  $y^i$  (“coordenadas internas”), conjugadas al momento, y de nuevas coordenadas periódicas conjugadas al enrollamiento,  $\tilde{y}_i$ . Es decir, si se toma un espacio-tiempo que es un producto directo de un espacio de Minkowski  $M$  (con coordenadas  $x^\mu$ ) y un toro d-dimensional  $T^d$  (con coordenadas  $y^i$ ), los campos ahora dependerán de las coordenadas en  $M \times T^{2d}$ , donde el toro doble  $T^{2d}$  contiene al toro del espacio tiempo original y a un nuevo toro  $T^d$ , parametrizado por las coordenadas duales al enrollamiento  $\tilde{y}_i$ . Esquemáticamente, los campos de la teoría  $\phi$  son de la forma  $\phi(x^\mu, y^i, \tilde{y}_i)$ .

Todos los estados deben satisfacer la LMC

$$L_0 - \tilde{L}_0 = N - \tilde{N} - n_i \omega^i = 0. \quad (4.1.1)$$

Además, los campos considerados son los no masivos de la teoría sin compactificar, por lo que obedecen

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) = 0. \quad (4.1.2)$$

Los campos que satisfacen estas condiciones cumplen  $N = \tilde{N} = 1$  y son el gravitón, el tensor antisimétrico de Kalb-Ramond y el dilatón. Es importante destacar que no se están considerando los campos no masivos desde el punto de vista de la teoría compactificada, donde la masa ( $\mathcal{M}$ ) también incluye las contribuciones de los modos de Kaluza-Klein y del enrollamiento:

$$\mathcal{M}^2 = p_L^2 + p_R^2 + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2), \quad (4.1.3)$$

con  $p_{L(R)} = p_{L(R)}(n_i, \omega^i, G_{ij}, B_{ij})$  dados en (3.2.13).

La condición LMC puede reescribirse como

$$(N - \tilde{N}) |\phi\rangle = n_i \omega^i |\phi\rangle, \quad (4.1.4)$$

que a nivel de la dependencia espacial se traduce en

$$(N - \tilde{N}) \phi(x^\mu, x^i, \tilde{x}_i) = -\partial_i \tilde{\partial}^i \phi(x^\mu, x^i, \tilde{x}_i) = 0, \quad (4.1.5)$$

donde en la última igualdad se usó que los campos de esta teoría satisfacen  $N = \tilde{N} = 1$  y se definió

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \tilde{\partial}^i \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}. \quad (4.1.6)$$

La ecuación (4.1.5) representa un vínculo que deben satisfacer los campos de esta teoría y es conocido como el vínculo débil. A partir de la acción de Teorías de Campos para la cuerda cerrada (*Closed String Field Theory*, CSFT) en [1], construyeron una acción cúbica en fluctuaciones alrededor de campos de fondo para  $G$ ,  $B$  y  $\phi$ , en donde cada término contiene dos derivadas, como en Relatividad General. La acción es de la forma

$$S(E, \Psi) = \int dx d\tilde{x} \mathcal{L}(D, \bar{D}, e_{ij}, d) \quad (4.1.7)$$

donde  $e_{ij} = g_{ij} + b_{ij}$  representan las fluctuaciones a orden lineal alrededor de campos de fondo constantes  $E_{ij} = \bar{G}_{ij} + \bar{B}_{ij}$  y donde  $D, \bar{D}$  son derivadas que dependen de los campos

$$D_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} (\partial_i - E_{ik} \tilde{\partial}^k), \quad \bar{D}_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} (\partial_i + E_{ik} \tilde{\partial}^k). \quad (4.1.8)$$

Esta acción depende, en principio, de los campos de fondo que aparecen a partir de las derivadas  $D_i$  y  $\bar{D}_i$ . Posee una simetría  $\mathbb{Z}_2$  dada por

$$e_{ij} \rightarrow e_{ji}, \quad D_i \leftrightarrow \bar{D}_i \quad (4.1.9)$$

relacionada a la simetría de paridad en la hoja de mundo de la cuerda bosónica. El aspecto más sobresaliente es que puede mostrarse que también es invariante de T-dualidad, con transformaciones pertenecientes al grupo  $O(d, d, \mathbb{Z})$ .

La acción posee una invariancia de gauge adicional si se aplica el vínculo débil sobre los campos y los parámetros de gauge.

Este vínculo, heredado de CSFT, es en realidad más restrictivo. El producto de dos campos que satisfacen este vínculo no satisface, en general, el mismo vínculo. En CSFT, el producto entre estados contiene un proyector que mapea el producto de estados al subespacio que cumple  $L_0 - \tilde{L}_0 = 0$ . Este proyector es responsable de que no se satisfaga la identidad de Jacobi para el productos de estados, dando lugar a un álgebra  $L_\infty$  o *álgebra de Lie homotópica*, situación que será discutida cuando se estudien más en detalle las transformaciones de gauge de DFT, así como en el Capítulo 8. Las transformaciones de gauge de la teoría incluyen términos cuadráticos en campos y parámetros de gauge, por lo que una buena definición requeriría la implementación de este proyector. Sin embargo, a orden cúbico en fluctuaciones de los campos, esta proyección no es necesaria y se puede tener una teoría consistente [1]. Este proyector es conocido en DFT bajo el nombre de vínculo fuerte y establece que productos arbitrarios de campos son aniquilados por  $L_0 - \tilde{L}_0$ . Es decir, se tiene

$$\partial_i \tilde{\partial}^i (\dots) = 0, \quad (4.1.10)$$

donde los puntos suspensivos representan un número arbitrario de campos y/o parámetros de gauge.

En trabajos posteriores [36, 80] se estudió la estructura de gauge de la teoría, se demostró la independencia de la acción (4.1.7) respecto de los campos de fondo  $E_{ij}$  y se construyó una teoría independiente de los campos de fondo, invariante de T-dualidad y con álgebra de gauge gobernada por el “C-Corchete” [4, 36] que se reduce al Corchete de Courant de geometría generalizada [8, 9] cuando los campos y los parámetros de gauge son independientes de las coordenadas duales  $\tilde{x}^i$ . La acción es la suma de la acción proveniente del sector no masivo de cuerda bosónica con derivadas ordinarias  $\partial_i$  (donde los campos son el gravitón, el tensor antisimétrico de Kalb-Ramond y el dilatón), una acción similar para los mismos campos pero con derivadas duales  $\tilde{\partial}^i$ , y un término mixto necesario para invariancia de gauge. La acción toma la forma

$$S = \int dx d\tilde{x} e^{-2d} \left[ -\frac{1}{4} G^{ik} g^{jl} \mathcal{D}^p \mathcal{E}_{kl} \mathcal{D}_p \mathcal{E}_{ij} + \frac{1}{4} G^{kl} (\mathcal{D}^j \mathcal{E}_{ik} \mathcal{D}^i \mathcal{E}_{jl} + \bar{\mathcal{D}}^j \mathcal{E}_{ki} \bar{\mathcal{D}}^i \mathcal{E}_{lj}) \right. \\ \left. + (\mathcal{D}^i d \bar{\mathcal{D}}^j \mathcal{E}_{ij} + \bar{\mathcal{D}}^i d \mathcal{D}^j \mathcal{E}_{ji}) + 4\mathcal{D}^i d \mathcal{D}_i d \right]. \quad (4.1.11)$$

donde  $\mathcal{E}_{ij} = G_{ij} + B_{ij}$  representa a los campos completos, es decir, al valor de fondo del campo y sus fluctuaciones,  $d$  es el dilatón y las derivadas están definidas de manera similar a (4.1.8), reemplazando los campos de fondo  $E_{ij}$  por  $\mathcal{E}_{ij}$ . Todos los índices se suben y bajan con la métrica  $G_{ij} = \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}_{ji}$ .

Esta acción presenta simetría  $O(D, D, \mathbb{R})$ , grupo que incluye a la T-dualidad. Las transformaciones  $O(D, D, \mathbb{R})$  actúan sobre la matriz  $\mathcal{E}$  de manera fraccionaria como en (3.2.28) y dejan al dilatón invariante

$$\mathcal{E}'(X') = (a\mathcal{E}(X) + b)(c\mathcal{E}(X) + d)^{-1}, \quad d'(X') = d(X), \quad X' = hX, \quad (4.1.12)$$

donde

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(D, D, \mathbb{R}), \quad (4.1.13)$$

y, además, posee una simetría  $\mathbb{Z}_2$  dada por

$$\mathcal{E}_{ij} \rightarrow \mathcal{E}_{ji}, \quad D_i \leftrightarrow \bar{D}_i. \quad (4.1.14)$$

Las transformaciones de gauge con parámetros  $\tilde{\xi}_i$  y  $\xi^i$  toman la forma

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_{ij} &= \mathcal{D}_i\tilde{\xi}_j - \bar{\mathcal{D}}_j\tilde{\xi}_i + \left(\xi^i\partial_i + \tilde{\xi}_i\tilde{\partial}^i\right)\mathcal{E}_{ij} + \mathcal{D}_i\xi^k\mathcal{E}_{kj} + \bar{\mathcal{D}}_j\xi^k\mathcal{E}_{ik}, \\ \delta d &= -\frac{1}{2}\left(\partial_i\xi^i + \tilde{\partial}^i\tilde{\xi}_i\right) + \left(\xi^i\partial_i + \tilde{\xi}_i\tilde{\partial}^i\right)d. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Para mostrar la invariancia de gauge de esta acción se deben emplear los vínculos débil y fuerte: todos los campos, parámetros de gauge y sus posibles productos con cualquier número de campos y/o parámetros de gauge son aniquilados por (4.1.10).

Si se toma que los campos son independientes de las coordenadas  $\tilde{x}$  (una de las posibles soluciones del vínculo fuerte), la acción se reduce, con redefiniciones de campos apropiadas, al sector bosónico de supergravedad (cf. (2.3.5) en el capítulo 2)

$$S_* = \int dx \sqrt{-G} e^{-2\phi} \left[ R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}H^2 \right]. \quad (4.1.16)$$

En particular, el dilatón usual de teoría de cuerdas  $\phi$  se relaciona al campo  $d$  mediante  $\sqrt{-G}e^{-2\phi} = e^{-2d}$ , de forma tal que  $e^{-2d}$  es una densidad escalar.

## 4.2 Formulación Métrica

La acción (4.1.11) no posee ni invariancia de gauge ni invariancia ante T-dualidad manifiesta. En [2] se construyó la acción de DFT, así como sus transformaciones de gauge, en un formalismo tal que estas simetrías son manifiestas. Esta construcción está basada en la “métrica generalizada”  $\mathcal{H}_{MN}$ , un tensor de  $O(D, D, \mathbb{R})$  y en el dilatón generalizado  $d$ , un escalar de  $O(D, D, \mathbb{R})$ .

El espacio tiempo para esta teoría tiene dimensión  $2D$ , con  $D$  coordenadas denominadas  $x^i$ ,  $i = 0, \dots, D-1$  y otras  $D$  coordenadas denominadas  $\tilde{x}^i$ ,  $i = 0, \dots, D-1$ <sup>1</sup> y, en principio, no hay direcciones compactas. Las coordenadas usuales  $x^i$  de teoría de cuerdas están duplicadas

---

<sup>1</sup>Notar el cambio de notación con respecto a la sección anterior. Ahora, todas las coordenadas tienen índice “i”.

desde el inicio. Las coordenadas y las derivadas pueden ser escritas en términos de vectores de  $O(D, D, \mathbb{R})$  como

$$X^M = \begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ x^i \end{pmatrix}, \quad \partial_M = \begin{pmatrix} \tilde{\partial}^i \\ \partial_i \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Los índices de  $O(D, D, \mathbb{R})$  se suben y bajan con la métrica invariante

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

que obedece  $h^t \eta h = \eta$  con  $h$  siendo un elemento del grupo  $O(D, D, \mathbb{R})$ .

Los vectores  $X^M$  transforman como  $X'^M = h^M_N X^N$ . La métrica generalizada  $\mathcal{H}_{MN}$  es una matriz simétrica de  $2D \times 2D$  construída a partir de la métrica y del tensor antisimétrico de Kalb-Ramond:

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} G^{ij} & -G^{ik} B_{kj} \\ B_{ik} g^{kj} & G_{ij} - B_{ik} G^{kl} B_{lj} \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Esta forma de la métrica generalizada es la misma que en (3.2.19) al considerar compactificaciones toroidales. Sin embargo, en este caso, los campos  $G_{ij}$  y  $B_{ij}$  no son constantes. La transformación fraccionaria definida sobre la matriz de campos de fondo  $\mathcal{E}_{ij}$  lleva a una transformación sencilla para esta métrica, que transforma como un tensor de  $O(D, D, \mathbb{R})$ :

$$h^P_M h^Q_N \mathcal{H}'_{PQ}(X') = \mathcal{H}_{MN}(X). \quad (4.2.4)$$

Es importante notar que el espacio doble tiene dos métricas. Por un lado, la métrica  $\eta_{MN}$  invariante de  $O(D, D, \mathbb{R})$  con signatura  $(D, D)$  y con la que se suben y bajan índices. Notablemente, subiendo los índices en  $\eta_{MN}$  se obtiene  $\eta^{MN}$  que toma la misma forma. Por otro lado, se tiene la métrica  $\mathcal{H}_{MN}$  que incorpora a los campos dinámicos y que es positiva definida si  $g_{ij}$  lo es. Esta métrica tiene la propiedad de que es una matriz simétrica y que su inversa se halla simplemente subiendo los índices con la métrica invariante, es decir, satisface

$$\mathcal{H}^{MN} = \eta^{MP} \mathcal{H}_{PQ} \eta^{QP}, \quad \mathcal{H}_{MP} \mathcal{H}^{PN} = \delta_M^N. \quad (4.2.5)$$

Por otro lado, si se sube un único índice, se tiene un elemento de  $O(D, D, \mathbb{R})$

$$\mathcal{H}^M_N \eta^{NP} \mathcal{H}^Q_P = \eta^{MQ}, \quad \mathcal{H}^M_N = \eta^{MP} \mathcal{H}_{PN}. \quad (4.2.6)$$

El dilatón generalizado es el otro campo de interés en esta teoría. Se obtiene a partir del determinante de la métrica  $G_{ij}$  y el dilatón  $\phi$  de teoría de cuerdas como

$$e^{-2d} = \sqrt{G} e^{-2\phi}. \quad (4.2.7)$$

La acción toma la forma

$$S = \int dX e^{-2d} \mathcal{R}, \quad (4.2.8)$$

donde  $dX = dx d\tilde{x}$  y  $\mathcal{R}$ , el escalar de Ricci generalizado, está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \equiv & 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\partial_N d \\ & + \frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_N\mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_K\mathcal{H}_{NL}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

A menos de una derivada total, la acción (4.2.8) se reduce a (4.1.11). Es una acción que es manifiestamente  $O(D, D, \mathbb{R})$  invariante globalmente dado que todos los índices de  $O(D, D, \mathbb{R})$  están contraídos apropiadamente.

Unificando a los parámetros de gauge en el vector de  $O(D, D, \mathbb{R})$

$$\xi^M = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^i \\ \xi^i \end{pmatrix}, \quad (4.2.10)$$

las transformaciones de gauge de los campos pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{H}^{MN} &= \xi^P \partial_P \mathcal{H}^{MN} + (\partial^M \xi_P - \partial_P \xi^M) \mathcal{H}^{PN} + (\partial^N \xi_P - \partial_P \xi^N) \mathcal{H}^{MP}, \\ \delta_\xi d &= -\frac{1}{2} \partial_M \xi^M + \xi^M \partial_M d, \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

que toman la forma (4.1.15) expresando a la métrica generalizada en términos de  $\mathcal{E}_{ij}$ . Resulta conveniente reescribir a la segunda transformación de gauge como

$$\delta_\xi (e^{-2d}) = \partial_M (\xi^M e^{-2d}) \quad (4.2.12)$$

Para demostrar la invariancia de gauge de esta acción resulta es necesario imponer vínculos sobre las coordenadas. En [2], la invariancia se demostró mediante la utilización del vínculo fuerte.

Estas transformaciones de gauge pueden interpretarse en términos de un nuevo tipo de derivada de Lie, conocida como “Derivada de Lie generalizada”, que determinará la forma de los difeomorfismos generalizados. En la siguiente sección se introducirá este nuevo objeto y se estudiará el álgebra de gauge de DFT.

Antes de pasar a esto, conviene revisitar aquí el vínculo fuerte. Utilizando la notación de  $O(D, D, \mathbb{R})$  introducida en (4.2.1), el vínculo fuerte puede reescribirse, en el espacio de momentos como  $P_\alpha \eta P_\beta = 0, \forall P_\alpha, P_\beta$ , lo que indica que todos los momentos  $P_\alpha$  caen en un subespacio de  $\mathbb{R}^{2D}$  que es isotrópico (cualquier par de vectores del subespacio son nulos y ortogonales respecto de la métrica de  $O(D, D, \mathbb{R})$ ). La dimensión máxima de dicho subespacio es  $D$  y cualquier subespacio maximal está relacionado a otro mediante una transformación de  $O(D, D, \mathbb{R})$ , en particular uno en que  $\tilde{p} = 0$ . Como resultado, cualquier subsector de DFT que satisfaga el vínculo fuerte está relacionado por una transformación de  $O(D, D, \mathbb{R})$  al “subsector canónico” en donde los campos no tienen dependencia en las coordenadas duales  $\tilde{x}$ .

### 4.3 Derivada de Lie generalizada

Dado que los grados de libertad gravitacionales y tensoriales se mezclan ante T-dualidad, también lo harán sus transformaciones de gauge y el concepto de difeomorfismos debe ser generalizado para dar una descripción unificada. Para llevar a cabo esta generalización, resulta conveniente reconsiderar a la derivada de Lie usual que, actuando sobre un vector, viene dada por (4.3.1)

$$L_\zeta V^i = \zeta^j \partial_j V^i - (\partial_j \zeta^i) V^j, \quad (4.3.1)$$

El primer término corresponde a un término de transporte, y el segundo es una transformación de  $\mathfrak{gl}(n)$  con la matriz  $(\partial_j \zeta^i)$  tomando valores en la representación fundamental del álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(n)$ . La transformación de un tensor genérico se obtendrá reemplazando la acción del álgebra de Lie con la representación correspondiente.

En el contexto de T-dualidad, el papel de  $\mathfrak{gl}(n)$  estará dado por el álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(D, D)$ , junto a un reescalo por un número real. Los tensores transformarán ahora bajo  $O(D, D, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  los difeomorfismos generalizados serán de la forma

$$\delta_U V^M = \mathcal{L}_U V^M = U^N \partial_N V^M - \alpha P_{(adj)}^M{}_{N^P}{}^Q \partial_P U^Q V^N + \beta \partial_N U^N V^M \quad (4.3.2)$$

con  $P_{(adj)}$  siendo el proyector a la representación adjunta del grupo de T-dualidad,  $\alpha$  una constante que dependerá de la dimensión y  $\beta$  el peso para las densidades tensoriales. Los índices  $M, N, \dots$  en la posición superior denotan a objetos en la representación vectorial del grupo de dualidad,  $R_1$ , que será el espacio de las coordenadas que tendrá, en consecuencia, dimensión  $\dim(R_1)$ .

La ecuación (4.3.2) puede ser reescrita como

$$\mathcal{L}_\xi V^M = L_\xi V^M + Y^M{}_{N^P}{}^Q \partial_P \xi^Q V^N, \quad (4.3.3)$$

con  $Y$  el tensor invariante de dualidad dado por

$$Y^M{}_{N^P}{}^Q = \delta_Q^M \delta_N^P - \alpha P_{(adj)}^M{}_{N^P}{}^Q + \beta \delta_N^M \delta_Q^P. \quad (4.3.4)$$

Nótese que este tensor es general y esta expresión es válida para cualquier grupo de dualidad.

En el caso de DFT, el proyector  $P_{(adj)}$  toma la forma

$$O(D, D) : \quad P_{(adj)}^M{}_{N^P}{}^Q = \frac{1}{2} (\delta_Q^M \delta_N^P - \eta^{MP} \eta_{NQ}), \quad (4.3.5)$$

Actuando sobre un vector de  $O(D, D, \mathbb{R})$  del tipo  $A^M$  con peso  $\omega(A)$  la derivada de Lie generalizada se define como

$$\mathcal{L}_\xi A^M = \xi^P \partial_P A^M + (\partial^M \xi_P - \partial_P \xi^M) A^P + \omega(A) \partial_P \xi^P A^M. \quad (4.3.6)$$



Respecto de la derivada de Lie usual (4.3.1) puede apreciarse que, más allá del término asociado al peso, el segundo término en (4.3.6) es novedoso. La derivada de Lie generalizada sobre un vector del tipo  $A_M$  con peso  $\omega(A)$  se define como

$$\mathcal{L}_\xi A_M = \xi^P \partial_P A_M + (\partial_M \xi^P - \partial^P \xi_M) A_P + \omega(A) \partial_P \xi^P A_M, \quad (4.3.7)$$

y para vectores con índices mixtos se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A_M^N &= \xi^P \partial_P A_M^N + (\partial_M \xi^P - \partial^P \xi_M) A_P^N + (\partial^N \xi_P - \partial_P \xi^N) A_M^P \\ &+ \omega(A) \partial_P \xi^P A_M. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Una propiedad importante es que la derivada de Lie generalizada se anula actuando sobre la métrica de  $O(D, D, \mathbb{R})$   $\eta_{MN}$  (definida con peso  $\omega(\eta) = 0$ ) y sobre el tensor de Kronecker  $\delta_M^N$ , también con peso nulo:

$$\mathcal{L}_\xi \eta_{MN} = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \eta^{MN} = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \delta_M^N = 0. \quad (4.3.9)$$

Con esta propiedad, resulta inmediato mostrar que (4.3.6) y (4.3.7) están relacionadas de manera sencilla

$$\mathcal{L}_\xi A^M = \eta^{MN} \mathcal{L}_\xi A_M. \quad (4.3.10)$$

Además, satisface la regla de Leibniz

$$\mathcal{L}_\xi \left( A_{N_1 \dots}^{M_1 \dots} B_{P_1 \dots}^{Q_1 \dots} \right) = (\mathcal{L}_\xi A_{N_1 \dots}^{M_1 \dots}) B_{P_1 \dots}^{Q_1 \dots} + A_{N_1 \dots}^{M_1 \dots} (\mathcal{L}_\xi B_{P_1 \dots}^{Q_1 \dots}), \quad (4.3.11)$$

Con estas definiciones, las transformaciones de gauge para la métrica generalizada y el dilatón generalizado toman la forma

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{H}^{MN} &= \mathcal{L}_\xi \mathcal{H}^{MN}, \\ \delta_\xi \left( e^{-2d} \right) &= \mathcal{L}_\xi \left( e^{-2d} \right), \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

con pesos  $\omega(\mathcal{H}) = 0$  y  $\omega(e^{-2d}) = 1$ .

Una consecuencia importante de  $\mathcal{L}_\xi \eta = \mathcal{L}_\xi \eta^{-1} = 0$  es que la condición  $\mathcal{H}_N^M \in O(D, D, \mathbb{R})$  es compatible con la simetría de gauge. Tomando la derivada de Lie generalizada de la condición

$$\mathcal{H} \eta \mathcal{H} = \eta^{-1} \quad (4.3.13)$$

se llega a

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{H}) \eta \mathcal{H} + \mathcal{H} \eta (\mathcal{L}_\xi \mathcal{H}) = 0. \quad (4.3.14)$$

Esto implica que

$$(\delta_\xi \mathcal{H}) \eta \mathcal{H} + \mathcal{H} \eta (\delta_\xi \mathcal{H}) = 0, \quad (4.3.15)$$

por lo que se preserva la condición  $\mathcal{H} \eta \mathcal{H} = \eta^{-1}$  ante transformaciones de gauge.

El álgebra de estas transformaciones de gauge es cerrada respecto del C-Corchete

$$[\xi_1, \xi_2]_C^M \equiv 2\xi_{[1}^N \partial_N \xi_2^M] - \xi_{[1}^P \partial^M \xi_2]_P, \quad (4.3.16)$$

con  $A_{[i}B_{j]} = (A_i B_j - A_j B_i)/2$ , resultado que se obtiene al conmutar las derivadas generalizadas. Este corchete fue introducido por Siegel en [4], y en [36] se mostró que es la extensión  $O(D, D, \mathbb{R})$  covariante del corchete de Courant. El conmutador se calcula fácilmente actuando sobre un vector  $A_M$ . Un cálculo directo lleva a

$$[\mathcal{L}_{\xi_1}, \mathcal{L}_{\xi_2}] A_M = -\mathcal{L}_{[\xi_1, \xi_2]_C} A_M + F_M(\xi_1, \xi_2, A), \quad (4.3.17)$$

con  $F_M$  dado por

$$F_M(\xi_1, \xi_2, A) = -\xi_{[1N} \partial^Q \xi_2^N] \partial_Q A_M + 2\partial^Q \xi_{[1M} \partial_Q \xi_2^P] A_P, \quad (4.3.18)$$

que se anula si se emplea el vínculo fuerte. Dado que este vínculo estará siempre en esta teoría, se tiene que sobre un vector  $A_M$  el conmutador cumple

$$[\mathcal{L}_{\xi_1}, \mathcal{L}_{\xi_2}] = -\mathcal{L}_{[\xi_1, \xi_2]_C}. \quad (4.3.19)$$

Este conmutador puede extenderse a cualquier tipo de tensores. Por ejemplo, si se considera la acción en el producto de dos vectores se tiene

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{\xi_1}, \mathcal{L}_{\xi_2}](A_M B_N) &= ([\mathcal{L}_{\xi_1}, \mathcal{L}_{\xi_2}] A_M) B_N + A_M [\mathcal{L}_{\xi_1}, \mathcal{L}_{\xi_2}] B_N \\ &= -\mathcal{L}_{[\xi_1, \xi_2]_C}(A_M B_N). \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Repetiendo estos cálculos se sigue que la propiedad (4.3.19) vale para cualquier tipo de tensor con índices en la posición inferior. Una prueba similar muestra que también vale para tensores con número arbitrario de índices en cualquier posición.

La derivada de Lie usual actuando sobre vectores tiene asociado un corchete definido como

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y \quad (4.3.21)$$

Esto sugiere definir un corchete de Lie generalizado a partir de la derivada de Lie generalizada, llamado D-Corchete

$$[A, B]_D \equiv \mathcal{L}_A B. \quad (4.3.22)$$

Este corchete no es antisimétrico, como puede verse de la definición de la derivada de Lie generalizada. Está relacionado con el C-Corchete de la siguiente manera

$$[A, B]_D^M = [A, B]_C^M + \frac{1}{2} \partial^M (B^N A_N). \quad (4.3.23)$$

La diferencia es una derivada total, que es un parámetro que genera una transformación de gauge trivial, como puede verse empleando el vínculo fuerte. Es decir, para un parámetro  $\zeta = \partial^M \chi$ , con  $\chi$  cualquier función se tiene

$$\mathcal{L}_{\partial^M \chi}(\dots) = 0. \quad (4.3.24)$$

Así como el C-Corchete está relacionado al corchete de Courant, el D-Corchete está relacionado al corchete de Dorfman si se elimina la dependencia en las coordenadas  $\tilde{x}^i$  [87]. El D-Corchete satisface la identidad de Jacobi

$$[A, [B, C]_{\text{D}}]_{\text{D}} = [[A, B]_{\text{D}}, C]_{\text{D}} + [B, [A, C]_{\text{D}}]_{\text{D}}. \quad (4.3.25)$$

En cambio, el C-corchete, que sí es antisimétrico, no cumple la identidad de Jacobi, y la falla es de la forma de un parámetro trivial

$$[[\zeta_1, \zeta_2]_{\text{C}}, \zeta_3]_{\text{C}} + [[\zeta_2, \zeta_3]_{\text{C}}, \zeta_1]_{\text{C}} + [[\zeta_3, \zeta_1]_{\text{C}}, \zeta_2]_{\text{C}} = \partial^M N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (4.3.26)$$

donde  $N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  es el escalar de Nijenhuis definido como

$$N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{1}{2} [\zeta_{[1}, \zeta_2]_{\text{C}}^M \zeta_3]_{\text{C}}^M. \quad (4.3.27)$$

## 4.4 Tétradas

Para estudiar compactificaciones de esta teoría resulta conveniente introducir tétradas<sup>2</sup>. La métrica generalizada puede ser escrita en términos de las tétradas como

$$\mathcal{H}_{MN} = E^{\bar{A}}_{\text{M}} S_{\bar{A}\bar{B}} E^{\bar{B}}_{\text{N}}, \quad (4.4.1)$$

donde  $S_{\bar{A}\bar{B}}$  es la métrica de Minkowski doble dada por

$$S_{\bar{A}\bar{B}} = \begin{pmatrix} s^{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & s_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad (4.4.2)$$

con  $s_{\bar{a}\bar{b}} = \text{diag}(- + \cdots +)$  la métrica de Minkowski  $D$ -dimensional. Dado que la métrica de Minkowski  $s_{\bar{a}\bar{b}}$  es invariante ante transformaciones de Lorentz  $O(1, D-1, \mathbb{R})$ , la métrica  $S_{\bar{A}\bar{B}}$  es invariante ante transformaciones dobles de Lorentz

$$H = O(1, D-1, \mathbb{R}) \times O(1, D-1, \mathbb{R}), \quad (4.4.3)$$

que corresponde al máximo subgrupo pseudo-compacto de  $G = O(D, D, \mathbb{R})$ . De esta forma, la métrica generalizada es invariante ante transformaciones dobles y locales de Lorentz, y parametriza al coset  $G/H$ .

La tétrada  $E^{\bar{A}}_{\text{M}}$  puede elegirse como un elemento de  $O(D, D, \mathbb{R})$

$$\eta_{MN} = E^{\bar{A}}_{\text{M}} \eta_{\bar{A}\bar{B}} E^{\bar{B}}_{\text{N}}, \quad (4.4.4)$$

donde ahora  $\eta_{\bar{A}\bar{B}}$  se usará para subir y bajar los índices “planos” y toma la misma forma que  $\eta_{MN}$ . La tétrada transforma como un vector ante difeomorfismos generalizados y puede ser

---

<sup>2</sup>Si bien el prefijo “tetra” indica una cantidad “cuatro-dimensional” en esta tesis se utilizará en un sentido amplio para objetos  $n$ -dimensionales.

parametrizada en términos de la tétrada para la métrica D-dimensional  $G_{ij} = e^{\bar{a}}_i s_{\bar{a}\bar{b}} e^{\bar{b}}_j$  y el tensor antisimétrico como

$$E^{\bar{A}}_M = \begin{pmatrix} e^{\bar{a}i} & e^{\bar{a}j} B_{ji} \\ 0 & e^{\bar{a}}_i \end{pmatrix}. \quad (4.4.5)$$

Esta parametrización triangular pierde su forma ante transformaciones  $O(D, D, \mathbb{R})$  pero puede ser recuperada a partir de una transformación con el grupo  $H$ .

La importancia de definir la tétrada radica en que a partir de ella y del dilatón  $d$  uno puede construir “flujos generalizados” dados por

$$\mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = E_{\bar{C}M} \mathcal{L}_{E_{\bar{A}}} E_B^M = 3\Omega_{[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]}, \quad (4.4.6)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{A}} = -e^{2d} \mathcal{L}_{E_{\bar{A}}} e^{-2d} = \Omega^{\bar{B}}_{\bar{B}\bar{A}} + 2E_{\bar{A}}^M \partial_M d, \quad (4.4.7)$$

con la conexión de Weitzenböck generalizada  $\Omega_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$  dada por

$$\Omega_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = E_{\bar{A}}^M \partial_M E_{\bar{B}}^N E_{\bar{C}N} = -\Omega_{\bar{A}\bar{C}\bar{B}}. \quad (4.4.8)$$

Estos flujos dependen de los campos y son, por tanto, dinámicos. Serán de importancia cuando se analicen las compactificaciones de esta teoría. La acción de DFT admite una reescritura en términos de estas cantidades dada por

$$S = \int dX e^{-2d} \tilde{\mathcal{R}}, \quad (4.4.9)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}} = & \mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} \mathcal{F}_{\bar{D}\bar{E}\bar{F}} \left[ \frac{1}{4} S^{\bar{A}\bar{D}} \eta^{\bar{B}\bar{E}} \eta^{\bar{C}\bar{F}} - \frac{1}{12} S^{\bar{A}\bar{D}} S^{\bar{B}\bar{E}} S^{\bar{C}\bar{F}} - \frac{1}{6} \eta^{\bar{A}\bar{D}} \eta^{\bar{B}\bar{E}} \eta^{\bar{C}\bar{F}} \right] \\ & + \mathcal{F}_{\bar{A}} \mathcal{F}_{\bar{B}} \left[ \eta^{\bar{A}\bar{B}} - S^{\bar{A}\bar{B}} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Esta es la llamada “formulación de flujos de DFT” y es una extensión de la formulación métrica, dado que incorpora términos que se anulan cuando se aplica el vínculo fuerte. Las tétradas son especialmente útiles para considerar compactificaciones de Scherk-Schwarz, que se tratarán a continuación.

La acción puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} S = & \int dX e^{-2d} \left( 4\mathcal{H}^{MN} \partial_M \partial_N d - \partial_M \partial_N \mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN} \partial_M d \partial_N d + 4\partial_M \mathcal{H}^{MN} \partial_N d \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \mathcal{H}^{MN} \partial_M \mathcal{H}^{KL} \partial_N \mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{2} \mathcal{H}^{MN} \partial_M \mathcal{H}^{KL} \partial_K \mathcal{H}_{NL} + \Delta_{(\text{SC})} \tilde{\mathcal{R}} \right), \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

a menos de derivadas totales. El último término de esta acción contiene a los términos que se anulan al aplicar el vínculo fuerte.

## 4.5 Reducción dimensional

DFT es una teoría formulada en  $2D$  dimensiones. Si bien la motivación original es construir una teoría manifiestamente invariante de T-dualidad ante compactificaciones toroidales, el espacio-tiempo de DFT es no compacto: la teoría exhibe explícitamente la simetría de T-dualidad antes de llevar adelante una compactificación.

En esta sección se estudiarán las compactificaciones de DFT, en particular el método de Scherk-Schwarz (SS) que dará lugar a una teoría con simetrías de gauge (Gauged DFT, *GDFT*). La acción efectiva obtenida, una vez suprimida la dependencia en las coordenadas  $\tilde{x}$  corresponderá al sector eléctrico bosónico de supergravidades gaugeadas semimaximalmente. Las coordenadas dobles del espacio tiempo  $X^M = (\tilde{x}_i, x^i)$  se separan entre coordenadas internas y externas:  $\tilde{x}_i = (\tilde{x}_\mu, \tilde{y}_m)$  y  $x^i = (x^\mu, y^m)$ . Los índices con  $m = 1, \dots, n$  denotan a las direcciones internas y  $\mu = 1, \dots, d$  a las extendidas. De esta forma, tanto el espacio extendido y el interno están duplicados y llamaremos a las coordenadas  $\mathbb{Y}^A = (\tilde{y}_m, y^m)$  y  $\mathbb{X} = (\tilde{x}_\mu, x^\mu)$ .

Las compactificaciones de SS se basan en el siguiente ansatz para la tétrada y el dilatón, los campos de la teoría,

$$E_{\bar{A}}^M(X) = \hat{E}_{\bar{A}}^I(\mathbb{X}) U_I^M(\mathbb{Y}), \quad d(X) = \hat{d}(\mathbb{X}) + \lambda(\mathbb{Y}), \quad (4.5.1)$$

y para los parámetros de gauge

$$\xi^M(X) = \hat{\xi}^I(\mathbb{X}) U_I^M(\mathbb{Y}). \quad (4.5.2)$$

Los índices  $M, N = 1, \dots, 2D$  corresponden a índices curvos en la teoría sin compactificar,  $I, J = 1, \dots, 2D$  son índices curvos en la teoría reducida. Aquí, los objetos denotados con el símbolo  $\hat{\cdot}$  dependen de las coordenadas  $\mathbb{X}$ , mientras que la dependencia en las coordenadas internas  $\mathbb{Y}$  está codificada en las matrices de twists  $U_I^M \in O(n, n)$  y en  $\lambda$ .

Insertando estas expresiones en los flujos generalizados (4.4.6) y (4.4.7) se obtiene

$$\mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = \hat{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + f_{IJK} \hat{E}_{\bar{A}}^I \hat{E}_{\bar{B}}^J \hat{E}_{\bar{C}}^K, \quad (4.5.3)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{A}} = \hat{F}_{\bar{A}} + f_I \hat{E}_{\bar{A}}^I, \quad (4.5.4)$$

donde las cantidades con índices  $A, B, C, \dots$  dependen de las coordenadas extendidas  $\mathbb{X}$

$$\hat{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = 3\hat{\Omega}_{[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]}, \quad \hat{\Omega}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = \hat{E}_{\bar{A}}^I \partial_I \hat{E}_{\bar{B}}^J \hat{E}_{\bar{C}}^K, \quad (4.5.5)$$

$$\hat{F}_{\bar{A}} = \hat{\Omega}_{\bar{B}\bar{A}}^{\bar{B}} + 2\hat{E}_{\bar{A}}^I \partial_I \hat{d}, \quad (4.5.6)$$

mientras que las denotadas con  $I, J, K, \dots$  dependen de las coordenadas internas  $\mathbb{Y}$

$$f_{IJK} = 3\tilde{\Omega}_{[IJK]}, \quad \tilde{\Omega}_{IJK} = U_I^M \partial_M U_J^N U_{KN}, \quad (4.5.7)$$

$$f_I = \tilde{\Omega}_{JI}^J + 2U_I^M \partial_M \lambda. \quad (4.5.8)$$

Esta separación es posible siempre y cuando se impongan los vínculos siguientes sobre la matriz de twists  $U_I^M$

$$U_I^M \partial_M \widehat{G} = \partial_I \widehat{G}, \quad \partial^M U_I^N \partial_M \widehat{G} = 0 \quad (4.5.9)$$

Esta restricción en la matriz de twists implica que debe ser trivial en las direcciones extendidas  $\mathbb{X}$ . Este vínculo puede ser reescrito como

$$f_{IJ}{}^K \partial_K \widehat{G} = 0, \quad f^I \partial_I \widehat{G} = 0. \quad (4.5.10)$$

El efecto es preservar la invariancia de Lorentz en la teoría reducida. La cantidad  $\partial_I \widehat{G}$  es no nula en las direcciones extendidas y si los flujos fuesen no nulos en estas direcciones, romperían la invariancia de Lorentz, por lo que  $f_{IJK}$  y  $f_I$  pueden ser no nulos únicamente sobre el toro doble.

Insertando los flujos generalizados (4.5.3) y (4.5.4) en la acción (4.4.9) se obtiene la acción para la teoría reducida

$$\begin{aligned} S_{GDFT} = v \int d\mathbb{X} e^{-2\widehat{d}} & \left[ -\frac{1}{4} \left( \widehat{F}_{IK}{}^L + f_{IK}{}^L \right) \left( \widehat{F}_{JL}{}^K + f_{JL}{}^K \right) \widehat{\mathcal{H}}^{IJ} \right. \\ & - \frac{1}{12} \left( \widehat{F}_{IJ}{}^K + f_{IJ}{}^K \right) \left( \widehat{F}_{LH}{}^G + f_{LH}{}^G \right) \widehat{\mathcal{H}}^{IL} \widehat{\mathcal{H}}^{JH} \widehat{\mathcal{H}}_{KG} \\ & \left. - \frac{1}{6} \left( \widehat{F}_{IJK} + f_{IJK} \right) \left( \widehat{F}^{IJK} + f^{IJK} \right) + \left( \widehat{\mathcal{H}}^{IJ} - \eta^{IJ} \right) \widehat{F}_I \widehat{F}_J \right]. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

La dependencia en las coordenadas internas se factoriza, dando como resultado el prefactor delante de la acción

$$v = \int d\mathbb{Y} e^{-2\lambda}. \quad (4.5.12)$$

Si los flujos se anularan, uno recuperaría la acción usual de DFT en dimensiones menores. Esta acción corresponde a la versión con flujos de DFT y es conocida como gauged DFT.

Las simetrías de GFDT se heredan de la DFT sin compactificar. La derivada de Lie generalizada induce las transformaciones de gauge en la teoría compactificada según

$$\mathcal{L}_\xi V^M = U_I^M \widehat{\mathcal{L}}_\xi \widehat{V}^I, \quad (4.5.13)$$

con

$$\widehat{\mathcal{L}}_\xi \widehat{V}^I = \mathcal{L}_\xi \widehat{V}^I - f^I{}_{JK} \xi^J \widehat{V}^K. \quad (4.5.14)$$

El primer término de esta transformación es la derivada de Lie generalizada usual, mientras que el segundo corresponde a deformaciones dadas por los llamados gaugings  $f^I{}_{JK}$ . Estas transformaciones de gauge dan lugar a un álgebra cuando se imponen vínculos cuadráticos sobre los gaugings

$$f_{H[IJ} f_{KL]}{}^H = 0, \quad (4.5.15)$$

y cuando el vínculo fuerte se impone en el espacio extendido para cualquier campo o parámetro de gauge:

$$\partial_I \widehat{V} \partial^I \widehat{W} = 0 \quad (4.5.16)$$

## 4.6 Contacto con supergravedad

De GDFT uno puede obtener el sector bosónico eléctrico de supergravedad gaugeada semi-maximal imponiendo el vínculo fuerte “efectivo” (4.5.16) sobre las coordenadas extendidas. Para hacer contacto con supergravedad, se pide que los campos efectivos y los parámetros de gauge dependan únicamente de las coordenadas físicas  $x^\mu$  y no de las  $\tilde{x}^\mu$ , es decir, elegimos una solución  $\partial_I \widehat{V} \partial^I \widehat{W} = 0 \rightarrow \tilde{\partial}^\mu \widehat{V} = 0$ . El grupo  $O(D, D, \mathbb{R})$  se rompe a  $O(d, d, \mathbb{R}) \times O(n, n, \mathbb{R})$ , por lo que resulta conveniente tomar a la métrica invariante de  $O(D, D, \mathbb{R})$  en la forma

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\mu{}_\nu & 0 \\ \delta_\mu{}^\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{AB} \end{pmatrix}, \quad (4.6.1)$$

con  $\eta_{AB}$

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6.2)$$

La tétrada generalizada puede tomarse como

$$\widehat{E}^{\bar{A}}{}_I = \begin{pmatrix} \widehat{e}_a{}^\mu & -\widehat{e}_a{}^\rho \widehat{c}_{\rho\mu} & -\widehat{e}_a{}^\rho \widehat{A}_{A\rho} \\ 0 & \widehat{e}^{\bar{a}}{}_\mu & 0 \\ 0 & \widehat{\Phi}^{\bar{A}}{}_B \widehat{A}^B{}_\mu & \widehat{\Phi}^{\bar{A}}{}_A \end{pmatrix}, \quad (4.6.3)$$

dando lugar a la métrica generalizada

$$\widehat{\mathcal{H}}_{IJ} = \begin{pmatrix} \widehat{G}^{\mu\nu} & -\widehat{G}^{\mu\rho} \widehat{c}_{\rho\nu} & -\widehat{G}^{\mu\rho} \widehat{A}_{A\rho} \\ -\widehat{G}^{\nu\rho} \widehat{c}_{\rho\mu} & \widehat{G}_{\mu\nu} + \widehat{A}^C{}_\mu \widehat{\mathcal{M}}_{CD} \widehat{A}^D{}_\nu + \widehat{c}_{\rho\mu} \widehat{G}^{\rho\sigma} \widehat{c}_{\sigma\nu} & \widehat{\mathcal{M}}_{AC} \widehat{A}^C{}_\mu + \widehat{A}_{A\rho} \widehat{G}^{\rho\sigma} \widehat{c}_{\sigma\mu} \\ -\widehat{G}^{\nu\rho} \widehat{A}_{B\rho} & \widehat{\mathcal{M}}_{BC} \widehat{A}^C{}_\nu + \widehat{A}_{B\rho} \widehat{G}^{\rho\sigma} \widehat{c}_{\sigma\nu} & \widehat{\mathcal{M}}_{AB} + \widehat{A}_{A\rho} \widehat{G}^{\rho\sigma} \widehat{A}_{B\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.6.4)$$

con  $\widehat{c}_{\mu\nu} = \widehat{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \widehat{A}^B{}_\mu \widehat{A}_{B\nu}$ . Además,  $\widehat{A}^A{}_\mu$  representa a los vectores

$$\widehat{A}^A{}_\mu = (\widehat{V}_{a\mu}, \widehat{A}^a{}_\mu) \quad (4.6.5)$$

y  $\widehat{\Phi}^{\bar{A}}{}_A$  es la “tétrada” escalar para la métrica de escalares  $\widehat{\mathcal{M}}_{AB}$  dada por

$$\widehat{\mathcal{M}}_{AB} = \begin{pmatrix} \widehat{G}^{ab} & -\widehat{G}^{ac} \widehat{B}_{cb} \\ \widehat{B}_{ac} \widehat{G}^{cb} & \widehat{G}_{ab} - \widehat{B}_{ac} \widehat{G}^{cd} \widehat{B}_{db} \end{pmatrix}. \quad (4.6.6)$$

Es importante notar que se está denotando con la misma letra  $\bar{A}$  tanto al índice plano completo (direcciones externas e internas) como a los que son puramente internos, aunque la distinción queda clara según el contexto. Con este ansatz, los flujos son no nulos sólo en las componentes internas

$$f_{IJK} = \begin{cases} f_{ABC} & (I, J, K) = (A, B, C) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}. \quad (4.6.7)$$

Insertando (4.6.3) y (4.6.7) en (4.5.5) se obtienen los flujos de la teoría e insertando (4.6.3) y (4.6.7) en la acción de GFDT (4.5.11), uno recupera el sector eléctrico de la acción efectiva de la supergravedad semimaximal con flujos

$$S = \int dx \sqrt{\widehat{G}} e^{-2\widehat{\phi}} \left( \mathbf{R} + 4 \partial^\mu \widehat{\phi} \partial_\mu \widehat{\phi} - \frac{1}{4} \widehat{\mathcal{M}}_{AB} \mathcal{F}^{A\mu\nu} \mathcal{F}^B{}_{\mu\nu} - \frac{1}{12} \mathcal{G}_{\mu\nu\rho} \mathcal{G}^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{8} D_\mu \widehat{\mathcal{M}}_{AB} D^\mu \widehat{\mathcal{M}}^{AB} + V \right). \quad (4.6.8)$$

con  $\mathbf{R}$  el escalar de Ricci  $d$ -dimensional, las intensidad de campo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \widehat{A}^A{}_\nu - \partial_\nu \widehat{A}^A{}_\mu - f_{BC}{}^A \widehat{A}^B{}_\mu \widehat{A}^C{}_\nu, \\ \mathcal{G}_{\mu\rho\lambda} &= 3\partial_{[\mu} \widehat{B}_{\rho\lambda]} - f_{ABC} \widehat{A}^A{}_\mu \widehat{A}^B{}_\rho \widehat{A}^C{}_\lambda + 3\partial_{[\mu} \widehat{A}^A{}_\rho \widehat{A}^A{}_{\lambda]} \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

y las derivadas covariantes para los escalares

$$D_\mu \widehat{\mathcal{M}}_{AB} = \partial_\mu \widehat{\mathcal{M}}_{AB} - f_{AD}{}^C \widehat{A}^D{}_\mu \widehat{\mathcal{M}}_{CB} - f_{BD}{}^C \widehat{A}^D{}_\mu \widehat{\mathcal{M}}_{AC}. \quad (4.6.10)$$

Además, debido a los flujos, también hay un potencial para los escalares de la forma

$$V = -\frac{1}{4} f_{DA}{}^C f_{CB}{}^D \widehat{\mathcal{M}}^{AB} - \frac{1}{12} f_{AC}{}^E f_{BD}{}^F \widehat{\mathcal{M}}^{AB} \widehat{\mathcal{M}}^{CD} \widehat{\mathcal{M}}_{EF} - \frac{1}{6} f_{ABC} f^{ABC}. \quad (4.6.11)$$



## Capítulo 5

# Teoría Doble de Campos y agrandamiento de la simetría de gauge

En este capítulo se mostrará cómo incorporar nuevos grados de libertad en la acción de DFT para obtener, en el límite apropiado, la teoría de la cuerda bosónica compactificada en un toro en la vecindad de un punto del espacio de módulos donde hay simetría de gauge agrandada. Se procederá en dos pasos. En el primero, se realizará una reducción dimensional en un toro doble sin twists de dimensión  $2d$ , y se identificarán a los vectores y escalares no masivos de la teoría reducida con los correspondientes estados de cuerdas. En este primer paso no se incorporarán los nuevos grados de libertad. En el segundo paso, se mostrará cómo incorporar estos nuevos estados en el marco de DFT. La exposición está basada en [76].

### 5.1 Compactificación toroidal

A continuación se considerará la reducción de Scherk-Schwarz en un toro doble de dimensión  $2d$ , sin tener en cuenta el agrandamiento de simetría. Los flujos serán cero dado que la matriz de twists será constante, y de esta manera se obtiene una acción sin grupos de gauge no abelianos, con  $2d$  vectores abelianos  $A_\mu^A$  y  $d^2$  escalares codificados en la métrica interna generalizada  $\mathcal{H}_{AB}$ .

Los  $2d$  vectores abelianos son los grados de libertad asociados a los operadores de vértices de cuerdas dados en (3.3.4) correspondientes al grupo de gauge  $U(1)_L^d \times U(1)_R^d$  típico de una compactificación toroidal. Los  $d^2$  escalares están asociados a la métrica y al campo  $B$  en el toro. Para encontrar la relación exacta, se puede considerar una expansión de los campos alrededor de un punto particular del espacio de módulos correspondiente a una métrica constante  $g$  y a un campo  $B$  en el toro. Será conveniente trabajar en una base diagonalizada, donde la métrica

invariante es diagonal:

$$\eta_{LR} = (R\eta R^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1.1)$$

La intención ahora es obtener a la parte interna de la tétrada expresada en la forma de SS (cf. (4.5.1) y (4.6.3))

$$\mathcal{E}_A^M(x, y, \tilde{y}) = \Phi_A^B(x) U_B^M(y, \tilde{y}), \quad (5.1.2)$$

lo que luego permitirá obtener un ansatz para la reducción dimensional en el caso de agrandamiento de la simetría. La diferencia entre esta expresión y (4.5.1) radica en que aquí solo se está parametrizando las componentes internas, es decir, aquellas que luego serán compactificadas. Los índices  $A$  y  $M$  en este caso toman valores sobre el toro doble  $A, M : 1\dots 2d$ . Esta tétrada interna forma la “métrica interna generalizada”, definida como <sup>1</sup>

$$\mathcal{H}^{MN} = \delta^{AB} \mathcal{E}_A^M \mathcal{E}_B^N = \mathcal{H}^{AB} U_A^M U_B^N, \quad (5.1.3)$$

con

$$\mathcal{H}^{AB} = \delta^{CD} \Phi_C^A \Phi_D^B. \quad (5.1.4)$$

La matriz  $\Phi_A^B(x)$  puede obtenerse a partir de expresar a la tétrada en la base diagonal y haciendo una expansión a primer orden en apartamientos respecto de cierta elección para los campos de fondo. Sin considerar fluctuaciones alrededor de los campos de fondo, la parte interna de la tétrada en la base diagonalizada puede tomarse como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{aL} \\ \mathcal{E}_{aR} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e - \hat{e}B & \hat{e} \\ -e - \hat{e}B & \hat{e} \end{pmatrix}, \quad (5.1.5)$$

con  $e$  siendo una tétrada para  $G$ . Efectivamente, reemplazando (5.1.5) en (4.4.1) se recupera la métrica generalizada en (4.2.3) en el sector interno. Considerando ahora fluctuaciones a primer orden, se tiene

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{aL} \\ \mathcal{E}_{aR} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e - \hat{e}B & \hat{e} \\ -e - \hat{e}B & \hat{e} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta \begin{pmatrix} e - \hat{e}B & \hat{e} \\ -e - \hat{e}B & \hat{e} \end{pmatrix}, \quad (5.1.6)$$

y esta expresión puede ser llevada a la forma (5.1.2) con

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\delta \hat{e} e^t + \delta e \hat{e}^t - \hat{e} \delta B \hat{e}^t) & -\frac{1}{2} \hat{e} (\delta G - \delta B) \hat{e}^t \\ -\frac{1}{2} \hat{e} (\delta G + \delta B) \hat{e}^t & 1 + \frac{1}{2}(\delta e \hat{e}^t + \delta \hat{e} e^t + \hat{e} \delta B \hat{e}^t) \end{pmatrix}$$

y

$$U(y, \tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e - \hat{e}B & \hat{e} \\ -e - \hat{e}B & \hat{e} \end{pmatrix}, \quad (5.1.7)$$

con  $U$  constante en este caso (independiente de  $y, \tilde{y}$ ). La matriz  $\Phi$  es un elemento de  $SO^+(d, d, \mathbb{R})$ , la componente de  $O(d, d, \mathbb{R})$  conectada con la identidad.

<sup>1</sup>En el caso en que  $E_A^M$  es compleja, la expresión toma la forma  $\mathcal{H}^{MN} = \mathcal{H}^{AB} (E_A^M)^* E_B^N$ .

Insertando (5.1.2) en (4.6.8) y calculando los flujos ( $f_{AB}{}^C = 0$ ) se tiene, luego de aplicar el vínculo fuerte,

$$S = \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{-G} e^{-2\varphi} \left[ \mathcal{R} + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4} \partial_\mu M_{ab} \partial^\mu M^{ab} - \frac{1}{8} F^{a\mu\nu} F_{a\mu\nu} - \frac{1}{8} \bar{F}^{a\mu\nu} \bar{F}_{a\mu\nu} - \frac{1}{4} M_{ab} F^{a\mu\nu} \bar{F}^b{}_{\mu\nu} \right], \quad (5.1.8)$$

con  $F^a$  y  $\bar{F}^a$  las intensidades de campos para los campos abelianos dando lugar a la simetría de gauge  $U(1)_L^d$  y  $U(1)_R^d$ , respectivamente y con  $M$  como en (3.2.21)

$$M = -\hat{e} (\delta G - \delta B) \hat{e}^t. \quad (5.1.9)$$

Esta es, precisamente, la acción efectiva derivada para compactificaciones toroidales de la cuerda bosónica [83].

## 5.2 Agrandamiento de la simetría de gauge

En esta sección se discute cómo incorporar la simetría de agrandamiento de la cuerda bosónica en DFT. El caso de la compactificación en un círculo en el radio autodual, donde la simetría de gauge  $U(1)_L \times U(1)_R$  se agranda a  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , fue tratado en [82] y la generalización para un toro genérico  $T^d$  fueron discutida en [76] y [88] y extensiones al caso de la cuerda heterótica fueron tratadas en [89].

Se discutirá entonces, el caso de la cuerda bosónica en un toro  $T^d$  donde el grupo de gauge se agranda a  $G \times G$  con dimensión  $n + n$  y rango  $d + d$ . El índice  $a = 1, \dots, n$  toma valores que etiquetan la dimensión de la representación adjunta de  $G$ , mientras que  $A, B = 1, \dots, 2n$  y  $M, N, = 1, \dots, 2n$  serán utilizados para hacer referencia a la adjunta de  $G \times G$ . Se aumentarán las dimensiones del espacio tiempo para incorporar a los grados de libertad vectoriales y escalares que surgen en teoría de cuerdas en un punto de agrandamiento de la simetría. A partir de una reducción de SS se obtendrá una acción con flujos que se corresponden con las constantes de estructura del grupo  $G$ . El toro de compactificación será identificado con el toro maximal de  $G$ , es decir, aquel asociado al sector del subálgebra de Cartan del grupo. En adelante, se usará alternativamente la expresión “direcciones de Cartan” para referirse a las direcciones físicas de la compactificación. La covariancia  $O(d, d, \mathbb{R})$  de la reducción en  $T^d$  será promovida a  $O(n, n, \mathbb{R})$ , con  $n$  siendo la dimensión de  $G$ . Esta extensión tiene las dimensiones adecuadas para acomodar en la métrica generalizada los  $2n$  vectores no masivos  $A_\mu^a, \bar{A}_\mu^a$  y los  $n^2$  escalares  $M^{ab}$  extras que surgen por agrandamiento de la simetría de gauge. Bajo estas consideraciones, la acción de DFT reducida mediante Scherk-Schwarz toma la forma (4.6.8). A menos del término de constante cosmológica  $\Lambda \sim f_{ABC} f^{ABC}$ , esta es la acción efectiva obtenida mediante el cálculo de funciones de tres puntos en teoría de cuerdas [82, 90, 91]. La invariancia conforme del modelo sigma (2.3.2) determina la anulación de la constante cosmológica y, como se argumenta

en [82, 92, 93], es necesario agregar a la acción un término que es  $O(D, D)$  covariante de la forma  $-e^{-2d}\Lambda$  para reproducir el resultado de teoría de cuerdas.

En [11] se mostró que el resultado de una reducción de Scherk-Schwarz de DFT es equivalente a elegir los flujos de la teoría y a escribir una acción en términos de los grados de libertad de la teoría en menores dimensiones. En este sentido, uno podría simplemente elegir a las constantes de estructura del grupo de gauge de interés como los flujos. Sin embargo, la pregunta de si es posible obtener una realización explícita de la matriz de twists  $U_I^M$  que de lugar al grupo de gauge en el caso de agrandamiento de la simetría no tiene una respuesta trivial. En esta sección se discutirá esta posibilidad y se dará una expresión para la matriz de twists que da los flujos apropiados en el caso de agrandamiento de la simetría de gauge. Se tratará el caso general para compactificaciones toroidales, y luego se especializará en ejemplos particulares.

Se tomará como punto de partida la matriz de twists (5.1.7)

$$U_I^M \partial_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e - \hat{e}B & \hat{e} \\ -e - \hat{e}B & \hat{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_m} \\ \frac{\partial}{\partial y^m} \end{pmatrix}, \quad (5.2.1)$$

Se ha escrito explícitamente al vector  $\partial_M$  para facilitar el pasaje a una “base izquierda-derecha” donde las coordenadas vienen dadas por

$$\begin{aligned} y_L^m &= \frac{1}{2} G^{mn} [(G - B)_{np} y^p + \tilde{y}_n], \\ y_R^m &= \frac{1}{2} G^{mn} [(G + B)_{np} y^p - \tilde{y}_n]. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Reescribiendo en esta base se tiene

$$U = \sqrt{2} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_L^m} \\ \frac{\partial}{\partial y_R^m} \end{pmatrix}, \quad (5.2.3)$$

A continuación, se extenderá esta matriz de  $2d \times 2d$  para tener un elemento de  $O(n, n)$  donde  $2n$  es la dimensión de  $G \times G$ . Se propone en este caso una extensión incorporando las corrientes de los vértices de cuerdas asociados al agrandamiento de la simetría (3.3.13), (3.3.14), de forma

$$U(y_L, y_R) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\mathcal{J}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2e \end{pmatrix}, \quad (5.2.4)$$

donde  $\mathcal{J}, \bar{\mathcal{J}}$  son bloques diagonales  $(n-d) \times (n-d)$  con  $n-d$  siendo el número de raíces de las álgebras de Lie del sector derecho e izquierdo, con elementos (no hay suma sobre el índice “i”)

$$\mathcal{J}_a^i = \delta_a^i \tilde{\mathcal{J}}^{\alpha_i}(y_L), \quad \bar{\mathcal{J}}_a^i = \delta_a^i \bar{\tilde{\mathcal{J}}}^{\alpha_i}(y_R), \quad (5.2.5)$$

y  $\tilde{\mathcal{J}}^{\alpha_i}(y_L^1, \dots, y_L^d) = e^{i\alpha_i \cdot y_L}$ ,  $\bar{\tilde{\mathcal{J}}}^{\alpha_i}(y_R^1, \dots, y_R^d) = e^{i\alpha_i \cdot y_R}$  son las corrientes asociadas a la raíz  $\alpha_i$ , a menos de los factores de cociclos (ver (3.3.13), (3.3.14)). Es importante notar que la tétrada

(5.2.4) depende únicamente de las coordenadas físicas del toro de compactificación  $y_{L,R}$  y no de nuevas coordenadas. Ahora, con esta tétrada, se pueden calcular las constantes de estructura a partir de las expresiones en (4.5.7), en particular

$$f_{ABC} = 3E_{[A}^M \partial_M E_B^N E_C]^P \eta_{NP}.$$

Dado que las corrientes en el sector izquierdo satisfacen  $\partial_{y_L^m} \tilde{J}^{\alpha_i} = i\alpha_i^m \tilde{J}^{\alpha_i}$  (y similarmente para el sector derecho), se puede ver que las constantes de estructura que involucran al menos un generador de Cartan se obtienen correctamente.

Como se ha descrito en el Capítulo 3, el toro  $T^d$  tiene, estrictamente, un único punto fijo ante inversión de la matriz de campos de fondo  $(G+B) \rightarrow (G+B)^{-1}$  dado por  $G=I$  y  $B=0$  y para estos valores de la métrica y del tensor antisimétrico, la simetría de gauge resulta ser  $SU(2)_L^d \times SU(2)_R^d$ . Para este grupo, todas las constantes de estructura tienen al menos un índice en una dirección de Cartan, por lo que la matriz de twists (5.2.4) da los flujos correspondientes a  $(SU(2)_L)^d \times (SU(2)_R)^d$  cuando las corrientes se reemplazan por aquellas de  $SU(2)_L^d \times SU(2)_R^d$ . Es importante notar que para realizar los cálculos, a efectos prácticos, la derivada en el espacio extendido tiene componentes no triviales sólo en las direcciones originales del toro, dado que ninguna cantidad depende de las nuevas direcciones agregadas (asociadas a las raíces del álgebra de agrandamiento de la simetría). En la base izquierda-derecha, se tiene

$$\partial_P = (0, 0, \dots, 0, 0, \partial_{y_L^1}, \dots, \partial_{y_L^d}, 0, 0, \dots, 0, 0, \partial_{y_R^1}, \dots, \partial_{y_R^d}), \quad (5.2.6)$$

y los índices se suben y se bajan con la métrica

$$\eta^{PQ} = \begin{pmatrix} \kappa^{pq} & 0 \\ 0 & -\kappa^{pq} \end{pmatrix}, \quad (5.2.7)$$

donde  $\kappa^{pq}$  es la métrica de Killing de  $SU(2)^d$ .

Resulta llamativo el hecho de que los flujos que dan cuenta del conmutador no trivial entre los operadores de subida y de bajada se obtengan a partir del segundo término de la derivada de Lie generalizada (4.3.6), que es, precisamente, el término que “generaliza” a la derivada de Lie usual.

Para otros puntos del espacio de módulos, dando lugar a otros grupos de gauge, el ansatz (5.2.4) no es suficiente y requiere una atención especial. En particular, las constantes de estructura que no involucran un generador de Cartan no se obtienen a partir de este ansatz. Una manera de obtenerlas es introducir una deformación en la derivada de Lie generalizada:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}_{E_A} E_B)^M &= (\mathcal{L}_{E_A} E_B)^M + \Omega_{AB}^C E_C^M \\ &= E_A^N \partial_N E_B^M - E_B^N \partial_N E_A^M + \partial^M E_A^P E_B^Q \eta_{PQ} + \Omega_{AB}^C E_C^M, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

donde  $\Omega_{ABC}$  se anula si uno o más índices corresponden a las direcciones de Cartan y si  $A, B, C$

son índices de las direcciones extras asociadas a las raíces,  $\alpha, \beta, \gamma$  por ej., se tiene

$$\Omega_{ABC} = \begin{cases} (-1)^{\alpha*\beta} \delta_{\alpha+\beta+\gamma} & \text{si dos raíces son positivas,} \\ -(-1)^{\alpha*\beta} \delta_{\alpha+\beta+\gamma} & \text{si dos raíces son negativas.} \end{cases}$$

con el producto  $*$  dado en la expresión (3.4.17). Esta deformación tiene su origen en los cociclos incluídos en los operadores de vértice. Gracias a ella, todas las constantes de estructura de  $G$  pueden obtenerse a partir de (5.2.8) usando la expresión (5.2.4) para la matriz de twists.

Tanto en la versión inicial de DFT [1] como en [94] se conjeturó que los factores asociados a los cociclos deberían aparecer en las transformaciones de gauge de DFT. El tensor  $\Omega_{ABC}$  dando cuenta de estos cociclos, satisface los vínculos de consistencia de GDFT [11, 95] tratada en el Capítulo 4, es decir, cumplen

$$\Omega_{ABC} = \Omega_{[ABC]}, \quad \Omega_{[AB}{}^D \Omega_{C]D}{}^E = 0, \quad \Omega_{ABC} \partial^C \dots = 0, \quad (5.2.9)$$

Esta deformación rompe la covariancia  $O(n, n)$  global a  $O(d, d)$ .

El ejemplo más sencillo donde se hace necesaria esta construcción es en el caso del  $T^2$ , cuando se pretende hacer una descripción alrededor del punto en el espacio de módulos dando origen al grupo de gauge  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  (ver Capítulo 3). Las constantes de estructura en la base de Cartan-Weyl vienen dadas por (ver Apéndice A)

$$f_{1\bar{1}\bar{1}} = f_{1\bar{3}\bar{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad f_{2\bar{1}\bar{1}} = -f_{2\bar{3}\bar{3}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_{2\bar{2}\bar{2}} = \sqrt{2}, \quad f_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = -f_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 1.$$

y pueden obtenerse a partir de (5.2.8) utilizando una matriz de twists  $\in O(8, 8)$  de la forma (5.2.4) con

$$J^{\bar{1}} = J^{1*} = e^{-i(2y_L^1 - y_L^2)}, \quad J^{\bar{2}} = J^{2*} = e^{-i(y_L^1 - 2y_L^2)}, \quad J^{\bar{3}} = J^{3*} = e^{-i(y_L^1 + y_L^2)} \quad (5.2.10)$$

y similarmente para el sector derecho, con  $y_L^1, y_L^2, y_R^1, y_R^2$  siendo las coordenadas asociadas las direcciones del toro original. Las únicas componentes no nulas del tensor  $\Omega_{ABC}$  son

$$\Omega_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 1, \quad \Omega_{1\bar{2}\bar{3}} = -1. \quad (5.2.11)$$

Interesantemente, la matriz de twists presentada aquí no satisface el vínculo fuerte, pero las componentes de esta matriz son autofunciones del operador que da origen al vínculo fuerte

$$\partial_M \partial^M = -\frac{1}{4} (\partial_{y_L^m}^2 - \partial_{y_R^m}^2). \quad (5.2.12)$$

La relación es

$$\partial_M \partial^M U_I^M = (N - \bar{N}) U_I^M, \quad (5.2.13)$$

con el autovalor  $(N - \bar{N})$  tomando valores

$$N - \bar{N} = \begin{cases} 1 & \text{sector izquierdo,} \\ 0 & \text{direcciones del toro,} \\ -1 & \text{sector derecho.} \end{cases} \quad (5.2.14)$$

Aquí puede apreciarse que la matriz de twists no satisface el vínculo débil, sino que cumple una versión modificada de este vínculo que no es otra cosa que la relación proveniente de la LMC para los estados de cuerdas.

Se ve, entonces, que incrementando las dimensiones del espacio tiempo y tomando un ansatz particular en una reducción de Scherk-Schwarz, es posible obtener grupos de gauge que coinciden con los obtenidos en una compactificación toroidal de teoría de cuerdas. La dimensionalidad del espacio tiempo dependerá de cuál sea el grupo de gauge y en la siguiente sección se mostrará que se obtiene una correcta descripción en la vecindad de un punto del espacio de módulos con agrandamiento de la simetría.

### 5.3 Descripción efectiva con agrandamiento de la simetría de gauge

En esta sección se mostrará que la acción efectiva (5.1.8) reproduce los resultados de teoría de cuerdas en la vecindad de un punto del espacio de módulos con agrandamiento de la simetría de gauge maximal, es decir, con un grupo de gauge  $G \times G$ , con  $G$  siendo un grupo de Lie semisimple y simply-laced de dimensión  $n$  y rango  $d$ . En particular, se verificará que, mediante un mecanismo de Higgs, se obtienen las masas correctas de los campos escalares y vectoriales cuando uno se aparta del punto elegido para el espacio de módulos. Esto se hará para un toro  $T^d$  con grupo de gauge  $G \times G$  y luego se tratará en particular el caso del  $T^2$ , que es el caso más sencillo que contiene los aspectos no triviales del caso general. Todas las definiciones y convenciones necesarias sobre álgebras de Lie se encuentran en el Apéndice A.

Se usará la siguiente notación. Los índices  $a, b = 1, \dots, n$  se usarán para la representación adjunta y, en particular,  $p, q = 1, \dots, d$  para el subálgebra de Cartan. Se trabajará en la base de Chevalley definida en (A.0.12), donde el triplete  $e^{\bar{p}}, h^{\bar{p}}, f^{\bar{p}}$  correspondiente a los operadores de subida, Cartan y bajada satisfacen las reglas de conmutación usuales de  $\mathfrak{su}(2)$ . Además, se utilizará un índice  $\bar{u} = 1, \dots, \frac{1}{2}(n - 3d)$  para denotar a los generadores de bajada asociados a raíces no simples. El índice  $\bar{i} = 1, \dots, \frac{1}{2}(n - d)$  etiqueta a todas las raíces negativas, por lo que  $\bar{i} = \{\bar{p}, \bar{u}\}$ .

Los  $2n$  vectores que dan cuenta de la simetría de gauge se pueden dividir en dos tipos

- (a)  $2d$  vectores reales  $A^{\bar{p}}, \bar{A}^{\bar{p}}$  asociados a las  $d$  direcciones de Cartan.
- (b)  $2 \times \frac{1}{2}(n - d)$  vectores complejos  $A^{\bar{i}}, \bar{A}^{\bar{i}}$  asociados a los operadores de subida y bajada ( $A^{\bar{i}} = (A^{\bar{i}})^{\dagger}$ ) que, a su vez, pueden dividirse entre los que están asociados a raíces simples y los que no  $A^{\bar{i}} = \{A^{\bar{p}}, A^{\bar{u}}\}$  y  $\bar{A}^{\bar{i}} = \{\bar{A}^{\bar{p}}, \bar{A}^{\bar{u}}\}$ .

Los  $n^2$  escalares se dividen en tres tipos:

- (c)  $d^2$  escalares reales de la forma  $M^{pp'}$  con ambos índices en una dirección de Cartan.
- (d)  $d(n-d)$  escalares complejos de la forma  $M^{p\bar{i}}$  con un índice en una dirección de Cartan.
- (e)  $(n-d)^2$  escalares complejos de la forma  $M^{\bar{i}\bar{j}}$  sin índices en las direcciones de Cartan.

Los vectores en (a) son no masivos para cualquier punto del espacio de módulos y parametrizan a  $g_{\mu p}$ ,  $B_{\mu p}$ . Los vectores en (b) adquieren masa cuando uno se aparta levemente de los puntos especiales del espacio de módulos, como se discutirá en detalle. Los escalares en (c) son los únicos que permanecen no masivos para todos los puntos del espacio de módulos y son los que parametrizan a las desviaciones de métrica y del campo  $B$  en el toro  $T^d$ .

En la vecindad de un punto de agrandamiento de la simetría, los escalares en (c) adquieren un valor de expectación en vacío (VEV). Esto puede ser entendido a partir de las soluciones clásicas de la acción efectiva. Ignorando el hecho de que al tener un potencial cúbico, el potencial no está acotado por debajo y las soluciones son inestables frente a pequeñas variaciones, las ecuaciones de movimiento para el gravitón exigen que el potencial se anule y las ecuaciones para los escalares imponen que el potencial sea estacionario

$$V(M) = \frac{\partial V(M)}{\partial M_{ij}} = 0. \quad (5.3.1)$$

Esta ecuación tiene solución para valores arbitrarios de los escalares con ambos índices en las direcciones de Cartan.

Conviene redefinir a estos escalares como perturbaciones alrededor del VEV de la forma

$$M^{pp'} \rightarrow 4v^{pp'} + M^{pp'}, \quad (5.3.2)$$

con  $v^{pp'}$  constante y de manera tal que  $\langle M^{aa'} \rangle = 0$  para todo  $a, a'$ . Estos VEVs serán los responsables de las masas de los vectores y de los escalares, como en un mecanismo de Higgs. La derivada covariante de los escalares toma la forma

$$D_\mu M_{aa'} = \partial_\mu M_{aa'} + \frac{1}{2} f^c{}_{da} A_\mu{}^d M_{ca'} + \frac{1}{2} \bar{f}^{c'}{}_{d'b'} \bar{A}_\mu{}^{d'} M_{ac'}. \quad (5.3.3)$$

y el cuadrado de esta expresión da las masas para los vectores  $A^{\bar{p}}$ :

$$m_{A^{\bar{p}}}^2 = v^{(2)pp}, \quad m_{A^{\bar{u}}}^2 = (n^t v^{(2)} n)^{uu}, \quad (5.3.4a)$$

$$m_{A^{\bar{p}'}}^2 = (v^{(2)t})^{p'p'}, \quad m_{A^{\bar{u}'}}^2 = (n^t v^{(2)t} n)^{u'u'}, \quad (5.3.4b)$$

donde se definió

$$v^{(2)} = v A^{-1} v^t, \quad (5.3.5)$$

con  $A$  la matriz de Cartan (ver Apéndice A) y se llamó  $v$  a la matriz de VEVs de  $d \times d$ ,  $v^{pp'}$  en la base de Chevalley, mientras que  $n$  es la matriz de coeficientes  $n_p{}^u$  que expresa a la raíz  $\alpha_u$  en términos de raíces simples:

$$\alpha_u = n_p{}^u \alpha_p. \quad (5.3.6)$$



Por otro lado, los escalares adquieren masas a partir del potencial en la acción efectiva,

$$\begin{aligned}
V_{f\bar{f}MMM} = & -\frac{1}{2} \left\{ v^{pp'} \left[ (|M_{\bar{p}\bar{p}'}|^2 - |M_{\bar{p}\underline{p}'}|^2) + n_{p'}{}^{u'} (|M_{\bar{p}\bar{u}'}|^2 - |M_{\bar{p}\underline{u}'}|^2) \right. \right. \\
& + n_p{}^u (|M_{\bar{u}\bar{p}'}|^2 - |M_{\bar{u}\underline{p}'}|^2) + n_p{}^u n_{p'}{}^{u'} (|M_{\bar{u}\bar{u}'}|^2 - |M_{\bar{u}\underline{u}'}|^2) \left. \left. \right] \right\} \\
& + f_{abc} f_{a'b'c'} M^{aa'} M^{bb'} M^{cc'} , \tag{5.3.7}
\end{aligned}$$

donde se han usado las constantes de estructura en (A.0.21), (A.0.23).

De aquí puede observarse que sólo los escalares en (e) (sin índices en las direcciones de Cartan) adquieren masas, cuyo cuadrado es proporcional a los VEVs. Al tratarse del sector bosónico, no es de extrañar que algunos escalares adquieran masas cuyo cuadrado es negativo. Los escalares de la forma (d) son no masivos, se trata de los bosones de Goldstone presentes en la ruptura espontánea de simetría.

Se discutirá a continuación en mayor detalle el proceso de ruptura espontánea de simetría y las distintas posibilidades. Dando VEVs arbitrarios a todos los escalares en el subsector de Cartan, todos los vectores de gauge adquieren masa y la simetría de gauge se rompe espontáneamente a  $U(1)_L^d \times U(1)_R^d$ .

Si la matriz  $v$  contiene una fila de ceros (es decir, sin VEVs), por ej. la fila  $p$ , entonces los vectores correspondientes  $A^p$  permanecen no masivos, y hay un subgrupo  $SU(2)$  en  $G_L$  que se preserva como simetría de gauge. Equivalentemente, si la matriz  $v$  tiene una columna de ceros, sucede lo mismo pero para  $G_R$ . Dado que la matriz de Cartan es no degenerada, la vuelta también vale: la única manera de que el vector  $A^p$  permanezca no masivo es si  $v^{pp'} = 0$  para todo  $p'$ :

$$\begin{aligned}
v^{pp'} = 0 \quad \forall p' & \Leftrightarrow m_{A^p}^2 = 0, \\
v^{pp'} = 0 \quad \forall p & \Leftrightarrow m_{\bar{A}^{p'}}^2 = 0. \tag{5.3.8}
\end{aligned}$$

Para vectores asociados a raíces no simples la situación es análoga, pero el análisis requiere un cuidado adicional. Los vectores  $A^u$  son no masivos si  $v^{pp'} = 0$  para todo  $p$  tal que los coeficientes  $n_p{}^u$  que expresan a la raíz no simple en términos de las simples cumplen  $n_p{}^u \neq 0$ .

Con respecto a los escalares, dando valores de VEVs arbitrarios para los escalares de tipo (c) se obtienen masas para los escalares en (e), sin índices en las direcciones de Cartan y las masas al cuadrado son lineales en los VEVs. Los escalares de tipo (d), con un único índice de Cartan, permanecen no masivos para VEVs “pequeños”. Sin embargo, puede verse que adquieren masas del mismo orden a la de los vectores, es decir, de segundo orden en VEVs, que vienen de expandir  $\mathcal{H}^{AB}$  en (5.1.8) a segundo orden en  $M$ , lo que da

$$\mathcal{H}^{AB} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} M M^t & M \\ M^t & 1 + \frac{1}{2} M^t M \end{pmatrix}. \tag{5.3.9}$$

Del término  $ff\mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}$  en la acción (5.1.8) se obtiene una contribución que es cuártica en  $M$ . Esto da masas a los escalares que son, precisamente, aquellas de los vectores

$$\begin{aligned} m_{M^{\underline{p}\underline{p}'}}^2 &= -2v^{pp'} + m_{A^{\underline{p}}}^2 + m_{\bar{A}^{\underline{p}'}}^2, \\ m_{M^{\underline{p}\underline{u}'}}^2 &= -2v^{pp'}n_{p'}{}^{u'} + m_{A^{\underline{p}}}^2 + m_{\bar{A}^{\underline{u}'}}^2, \\ m_{M^{\underline{u}\underline{u}'}}^2 &= -2n_p{}^u v^{pp'}n_{p'}{}^{u'} + m_{A^{\underline{u}}}^2 + m_{\bar{A}^{\underline{u}'}}^2, \\ m_{M^{\underline{p}\underline{i}'}}^2 &= m_{\bar{A}^{\underline{i}'}}^2. \end{aligned}$$

En resumen, se tiene que para VEVs arbitrarios, todos los escalares y los vectores adquieren masas, a excepción de aquellos con todos sus índices en las direcciones de Cartan, y la simetría se rompe a  $U(1)_L^d \times U(1)_R^d$ .

## 5.4 Relación con Teoría de Cuerdas

Las masas halladas en la sección anterior son, precisamente, las que uno obtiene de teoría de cuerdas, dadas por (3.3.2). Para ver esto, tomamos a la métrica generalizada  $\mathcal{H}$  como en (5.1.3) donde  $E_A{}^M$  es la tétrada generalizada en el punto de agrandamiento de la simetría de gauge, que se denotará como  $E$ , y  $\mathcal{H}_{AB}$  representará a las fluctuaciones alrededor de este punto, parametrizadas en términos de la matriz  $M$  (3.2.21). Insertando esta expresión en la fórmula de masa (3.3.2) y haciendo uso de la expansión (3.2.20) se tiene

$$\mathcal{M}^2 = 2(N + \bar{N} - 2) + (p_{aL}, p_{aR}) \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}MM^t & M \\ M^t & 1 + \frac{1}{2}M^tM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{aL} \\ p_{aR} \end{pmatrix}. \quad (5.4.1)$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &= 2(N + \bar{N} - 2) + \\ & p_L^t(1 + \frac{1}{2}MM^t)p_L + p_R^t(1 + \frac{1}{2}M^tM)p_R + p_L^tMp_R + p_R^tM^tp_L. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Como se describió anteriormente, los vectores izquierdos pueden ser de dos tipos

- $\bar{N} = N = 1$  y  $p_L = p_R = 0$ , que da lugar al sector de Cartan del grupo de gauge,
- $\bar{N} = 1$ ,  $N = 0$  y  $p_R = 0$ ,  $p_{aL} = \alpha^a$ , con  $\alpha$  una raíz del álgebra de gauge, con norma  $p_L^t p_L = 2$ , a los estados cargados del grupo de gauge.

Los vectores del primer conjunto son no masivos para cualquier valor de  $M$ , mientras que los del segundo tienen masas

$$m_{A^\alpha}^2 = \frac{1}{2}\alpha^t MM^t \alpha. \quad (5.4.3)$$

De manera análoga, para los vectores en el sector derecho se tiene

$$m_{\bar{A}^\alpha}^2 = \frac{1}{2}\alpha^t M^t M \alpha. \quad (5.4.4)$$

Insertando la expresión (3.2.21) para la matriz  $M$  en términos de  $\delta g - \delta B \equiv v$  se tiene

$$m_{A\alpha}^2 = \alpha^a v_{ab}^{(2)} \alpha^b, \quad (5.4.5)$$

donde se ha utilizado la definición de  $v^{(2)}$  dada en (5.3.5). Esta es la misma masa hallada desde el punto de vista de DFT (5.3.4), donde para una raíz simple, la contracción de  $v^{(2)}$  con una raíz  $\alpha_p$ , da a la matriz  $(v^{(2)})^{pp}$  en la base de Chevalley (5.3.4). Para una raíz no simple  $\alpha_u$  hay que considerar, además, a los enteros  $n$  que expresan a esta raíz en términos de las raíces simples. Un cálculo directo lleva a que las masas son las mismas halladas en (5.3.4).

Con respecto a los escalares, estos se dividen en tres tipos:

- $N = \bar{N} = 1, p_L = p_R = 0$ : Sus dos índices toman valores en las direcciones físicas del toro y son no masivos para cualquier valor de  $M$ .
- $N = 1, \bar{N} = 0$  y  $p_L = 0, p_R = \alpha$  (y aquellos que intercambian los valores izquierdos y derechos). Tienen un índice en las direcciones físicas del toro y sus masas son exactamente las mismas que la de los vectores asociados a la misma raíz, es decir

$$m_{M_{p_i'}}^2 = m_{A^{i'}}^2, \quad m_{M_{ip}}^2 = m_{A^i}^2, \quad (5.4.6)$$

en concordancia con lo hallado en el caso de DFT.

- $N = \bar{N} = 0, p_L = \alpha, p_R = \beta$ . No tienen índices en las direcciones físicas del toro y sus masas vienen dadas por

$$m_{M_{\alpha\beta}}^2 = \alpha^t M \beta + \beta^t M^t \alpha + \frac{1}{2} \alpha^t M M^t \alpha + \frac{1}{2} \beta^t M^t M \beta. \quad (5.4.7)$$

Utilizando (3.2.21) para expresar a estas masas en función de  $v$  se tiene

$$\begin{aligned} m_{M_{\alpha\beta}}^2 &= -2 \alpha^a v_{ab} \beta^b + \alpha^a v_{ab}^{(2)} \alpha^b + \beta^a v_{ab}^{(2)t} \beta^b \\ &= -2 \alpha^a v_{ab} \beta^b + m_{A^\alpha}^2 + m_{A^\beta}^2, \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

que, nuevamente, coincide con las masas halladas desde DFT (5.3.10), tomando  $\alpha = \alpha_p, \beta = \alpha_{p'} \alpha^a V_{ab} \beta^b = v^{pp'}$ .

Se ve, entonces, que las masas obtenidas a partir de DFT reproducen las masas de teoría de cuerdas a segundo orden en VEVs para los escalares con índices en las direcciones físicas del toro. A continuación se estudiará en detalle el caso del  $T^2$  con grupo de gauge  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ : se analizará la ruptura de simetría que da el mecanismo de Higgs, se calcularán las masas y se obtendrán los grupos de gauge que persisten luego de la ruptura de simetría.

## 5.5 Ejemplo: $T^2$ y $SU(3)_L \times SU(3)_R$

En el siguiente ejemplo se podrá ver explícitamente lo discutido en la sección anterior. Para este análisis serán necesarias expresiones que involucran al álgebra  $\mathfrak{su}(3)$  y que se dan en el apéndice A. Aquí,  $a = 1, \dots, 8$ ,  $i = 1, 2$  y el índice  $u$  de la sección anterior toma un único valor, que se denotará como “3”.

Las masas de los vectores izquierdos (5.3.4a) vienen dadas por

$$\begin{aligned}
m_{A\bar{1}}^2 &= \frac{2}{3}((v^{11})^2 + v^{11}v^{12} + (v^{12})^2), \\
m_{A\bar{2}}^2 &= \frac{2}{3}((v^{21})^2 + v^{21}v^{22} + (v^{22})^2), \\
m_{A\bar{3}}^2 &= \frac{2}{3}((v^{11})^2 + v^{11}v^{12} + (v^{12})^2 + (v^{21})^2 + v^{21}v^{22} + (v^{22})^2 + \\
&\quad 2v^{11}v^{21} + v^{11}v^{22} + v^{12}v^{21} + 2v^{12}v^{22}),
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

donde los VEVs están expresados en la base de Chevalley. Para el sector derecho se tiene

$$\begin{aligned}
m_{A\bar{1}}^2 &= \frac{2}{3}((v^{11})^2 + v^{11}v^{21} + (v^{21})^2), \\
m_{A\bar{2}}^2 &= \frac{2}{3}((v^{12})^2 + v^{12}v^{22} + (v^{22})^2), \\
m_{A\bar{3}}^2 &= \frac{2}{3}((v^{11})^2 + v^{11}v^{21} + (v^{21})^2 + (v^{12})^2 + v^{12}v^{22} + (v^{22})^2 + \\
&\quad 2v^{11}v^{12} + v^{11}v^{22} + v^{21}v^{12} + 2v^{21}v^{22}).
\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

El potencial escalar (5.3.7) adquiere la forma

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{1}{2} \left[ v^{11}(|M_{\underline{11}}|^2 - |M_{\underline{1\bar{1}}}|^2) + v^{12}(|M_{\underline{12}}|^2 - |M_{\underline{1\bar{2}}}|^2) + \right. \\
&\quad v^{21}(|M_{\underline{21}}|^2 - |M_{\underline{2\bar{1}}}|^2) + v^{22}(|M_{\underline{22}}|^2 - |M_{\underline{2\bar{2}}}|^2) + \\
&\quad (v^{11} + v^{12})(|M_{\underline{13}}|^2 - |M_{\underline{1\bar{3}}}|^2) + (v^{11} + v^{21})(|M_{\underline{31}}|^2 - |M_{\underline{3\bar{1}}}|^2) + \\
&\quad (v^{12} + v^{22})(|M_{\underline{32}}|^2 - |M_{\underline{3\bar{2}}}|^2) + (v^{21} + v^{22})(|M_{\underline{23}}|^2 - |M_{\underline{2\bar{3}}}|^2) + \\
&\quad \left. (v^{11} + v^{12} + v^{21} + v^{22})(|M_{\underline{33}}|^2 - |M_{\underline{3\bar{3}}}|^2) \right] + f_{abc} \bar{f}^{a'b'c'} M^{aa'} M^{bb'} M^{cc'}.
\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Dando VEVs a todos los  $v^{pp'}$ , el grupo de gauge  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  se rompe a  $U(1)_L^2 \times U(1)_R^2$ . Si  $v^{11} = v^{12} = 0$  y los demás  $v^{ij}$  son no nulos, la ruptura da como resultado un grupo de gauge  $(SU(2) \times U(1))_L \times (U(1)^2)_R$ , donde el  $SU(2)_L$  preservado corresponde a la raíz 1. Los escalares  $M_{\underline{1i}}$  permanecen no masivos a orden lineal en los VEVs, mientras que el resto de los escalares sin índices en las direcciones de Cartan adquieren masa. Como se discutió en la sección anterior, los escalares  $M_{2i}$  adquieren masa a segundo orden en los VEVs, al igual que los vectores  $\bar{A}^i$ . Estos escalares son los bosones de Goldstone para la ruptura de simetría en el sector derecho. Los escalares  $M_{\underline{1i}}$  también se vuelven masivos a segundo orden, y sus masas están dadas por la de los vectores  $\bar{A}^i$ . De manera similar, para  $v^{21} = v^{22} = 0$  y los restantes  $v^{ij} \neq 0$ , el

grupo de gauge preservado es el mismo, pero el  $SU(2)_L$  corresponde a la segunda raíz. Esta misma situación se da en el sector derecho: para  $v^{11} = v^{21} = 0$  el grupo de gauge resultante es  $(U(1)^2)_L \times (SU(2) \times U(1))_R$ , con  $SU(2)_R$  asociado a la primera raíz, y los escalares no masivos son  $M_{i\bar{1}}$ . Para romper el grupo de simetría a  $(SU(2) \times U(1))_L \times (SU(2) \times U(1))_R$  se necesitan tres VEVs iguales a cero, y el único escalar que toma VEV es aquel con índices en las direcciones de Cartan de los vectores masivos resultantes. Por ejemplo, si  $v^{22} \neq 0$ ,  $SU(2)_L$  está asociado a la raíz 1, al igual que  $SU(2)_R$ .

También puede verse que no se puede tener  $SU(2)_L^2 \times SU(2)_R^2$ , necesariamente debe haber al menos un  $U(1)$  al romper simetría. Esto puede entenderse viendo que  $SU(2)_L^2 \times SU(2)_R^2$  no es un subgrupo de  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ .

Desde el punto de vista de cuerdas, los cuatro VEVs dados por  $v^{pp'}$  corresponden a las fluctuaciones de  $g$  y  $B$  alrededor del punto del espacio de módulos elegido que pueden ser parametrizadas como  $\delta\tau$  y  $\delta\rho$  con  $\delta\tau = \tau - (-\frac{1}{2} + i\sqrt{3})$ ,  $\delta\rho = \rho - (-\frac{1}{2} + i\sqrt{3})$ .

De la figura 3.2 puede apreciarse que para que el grupo de gauge sea  $(SU(2) \times U(1))_L \times (SU(2) \times U(1))_R$ ,  $\tau$  y  $\rho$  deben tomar valores en la curva  $|\tau| = |\rho| = 1$ , o en la recta  $\tau_1 = \rho_1 = -\frac{1}{2}$ . Ambas curvas necesitan un único parámetro para ser descritas, lo que es consistente con el único VEV necesario para obtener estos grupos de simetría. De manera similar, para puntos que satisfacen  $\tau = \rho$ , pero que no se encuentran sobre las curvas anteriores, se precisan dos parámetros o dos VEVs, y en estos casos el grupo de gauge es  $U(1)_L^2 \times (SU(2) \times U(1))_R$ .

## 5.6 Descripción efectiva para todos los puntos de agrandamiento de la simetría de gauge

Hasta aquí se han podido incorporar en DFT grados de libertad adicionales que reproducen la acción de bajas energías de la cuerda bosónica alrededor de un punto del espacio de módulos con agrandamiento de la simetría de gauge. Para puntos en el espacio de módulos sin agrandamiento de la simetría, la formulación de DFT usual da la descripción apropiada y para tratar el agrandamiento de la simetría de gauge, una estrategia posible, como se vio, consiste en incrementar la dimensión de  $D + d \rightarrow D + n$  para incorporar los nuevos grados de libertad no masivos. Resulta natural preguntarse si es posible describir conjuntamente, con una única formulación, la física alrededor de todos los puntos de agrandamiento de la simetría que aparecen para una compactificación toroidal.

Para el caso de la compactificación en un círculo, la respuesta a esta pregunta es positiva. Efectivamente, en este caso hay un único punto de agrandamiento de la simetría y a partir de la acción de DFT es posible obtener la acción de teoría de cuerdas bosónica para cualquier punto del espacio de módulos mediante el mecanismo de Higgs.

Sin embargo, para compactificaciones en toros de dimensión más alta, no es posible, en

principio, una descripción unificada. Esto puede observarse en el caso del  $T^2$ , en donde los puntos de agrandamiento maximal dan lugar a grupos de gauge  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  y  $SU(2)_L^2 \times SU(2)_R^2$ , los cuales tienen dimensionalidad distinta. Y dado que  $SU(2)^2$  no puede obtenerse como subgrupo regular de  $SU(3)$ , no es posible obtener el caso  $SU(2)_L^2 \times SU(2)_R^2$  como ruptura espontánea de simetría a partir de  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ .

Para incorporar todos los puntos de agrandamiento de simetría maximal en una única descripción, una estrategia posible es volver a aumentar las dimensiones del espacio de compactificación.

Considérese en primer lugar el caso del  $T^2$ . Los vectores izquierdos<sup>2</sup> en un punto de agrandamiento de la simetría se vuelven una mezcla entre izquierdos y derechos fuera de ese punto, sin embargo, nunca se vuelven puramente derechos. Por eso, se tratará por separado a los vectores derechos e izquierdos en lo que sigue.

Como ya se vio,  $SU(2)^2$  no es un subgrupo regular de  $SU(3)$ , pero ambos pueden ser embebidos en el grupo  $SU(2) \times SU(3)$ , de rango de 3, y este grupo de gauge aparece naturalmente en una compactificación en un toro  $T^3$ . Una manera de unificar la descripción de todos los puntos de agrandamiento de la simetría en  $T^2$  es, pues, considerar una compactificación en  $T^3$  con grupo de gauge  $(SU(2) \times SU(3))_L \times (SU(2) \times SU(3))_R$  y obtener los resultados del  $T^2$  como un límite de decompactificación, en donde ciertos vectores de gauge adquirirán masa mediante el mecanismo de Higgs.

La acción para el caso del  $T^3$  en DFT con agrandamiento de la simetría de gauge puede ser formulada en términos de una simetría  $O(d' + 11, d' + 11)$  de T-dualidad, con  $d'$  siendo las dimensiones del espacio extendido y 11 las dimensiones de  $SU(2) \times SU(3)$ . La acción que se obtiene en este caso es (5.1.8) con  $a, b, \dots, a', b', \dots$  corriendo en la representación adjunta de  $SU(2) \times SU(3)$ .

Dada esta formulación, si se toma  $v^{11} \neq 0$  y el resto de los  $v^{ij} = 0$ ,  $SU(2) \times SU(3)$  se rompe espontáneamente a  $U(1) \times SU(3)$ : dado que  $v^{2p'} = v^{3p'} = 0$  para cualquier  $p'$ , de (5.3.8) se sigue que  $A^2$  y  $A^3$  permanecen no masivos luego de dar VEV a  $v^{11}$ , y lo mismo sucede con  $\bar{A}^2, \bar{A}^3$  dado que  $v^{p2} = v^{p3} = 0$  para todo  $p$ . El vector  $A^4$  también es no masivo dado que  $n_p^4 \neq 0$  para  $p = 2, 3$ . Por otro lado, los vectores con un índice en una dirección de Cartan nunca adquieren masa. De esta forma, solo los vectores con un índice de una raíz de  $SU(2)$  adquieren masa:  $A^1, A^{\bar{1}}, \bar{A}^1$  y  $\bar{A}^{\bar{1}}$ .

Los escalares siguen el mismo patrón: los que tienen al menos un índice coincidente con las raíces de  $SU(2)$  adquieren masa. Truncando los modos masivos, la acción (5.1.8) se reduce a una con un grupo de gauge  $(U(1) \times SU(3))_L \times (U(1) \times SU(3))_R$ .

Si en lugar de  $v^{11}$  el único VEV no nulo es  $v^{33}$  (alternativamente,  $v^{22}$ ),  $SU(2) \times SU(3)$  se rompe a  $U(1) \times SU(2)^2$ . Dado que  $v^{1p'} = v^{2p'} = 0$  para todo  $p'$ , se sigue que  $A^1$  y  $A^2$  permanecen no masivos, y lo mismo sucede al intercambiar los sectores izquierdos y derechos.

---

<sup>2</sup>El argumento es igual para los derechos.

Los vectores con un índice en una dirección asociada a una raíz simple de  $SU(3)$ , es decir  $A^3$ ,  $A^{\bar{3}}$ ,  $\bar{A}^3$  y  $\bar{A}^{\bar{3}}$ , adquieren masa a través de (5.3.3). Además,  $A^4$ ,  $A^{\bar{4}}$ ,  $\bar{A}^4$  y  $\bar{A}^{\bar{4}}$  también adquieren masa, dado que los enteros  $n_3^4$  son no nulos. Con respecto a los escalares, aquellos con un índice en las direcciones “3” y “4” también adquieren masa debido al potencial (5.3.7). Los campos no masivos se corresponden a un grupo de gauge dado por  $(U(1) \times SU(2)^2)_L \times (U(1) \times SU(2)^2)_R$ .

De esta forma, se han podido embeber los dos puntos con agrandamiento de la simetría maximal del  $T^2$ , en una descripción unificada con un único grupo de gauge asociado a una compactificación en el toro  $T^3$ . El incremento en las dimensiones del toro no responde a la necesidad de incluir nuevos estados no masivos sino a obtener una descripción unificada, y la dirección extra está asociada a los factores de  $U(1)$  obtenidos tras la ruptura espontánea de simetría. Esto sugiere una manera de remover la dirección extra “no física”: descompactificándola. Al hacer esto, todos los escalares y vectores con un índice en la dirección del  $U(1)$  se acomodan como nuevas componentes de la métrica y del campo B en un espacio tiempo extendido de mayor dimensionalidad. Heurísticamente, se tomaría “prestada” una dirección del espacio tiempo extendido en  $d$  dimensiones, se compactificaría para obtener un toro 3-dimensional y así obtener un grupo de gauge  $(SU(2) \times SU(3))_L \times (SU(2) \times SU(3))_R$ , y luego se descompactificaría una dirección (dándole  $VEV \rightarrow \infty$  a algún escalar) “devolviéndola” al espacio extendido para obtener mediante un mecanismo de Higgs los grupos de gauge asociados al  $T^2$ .

La discusión para el caso 2-dimensional puede ser generalizada para dimensiones mayores. El problema de describir en forma unificada el espacio de módulos completo asociado a una compactificación en un toro de  $d$  dimensiones puede resolverse considerando una compactificación en un toro de dimensión mayor  $d + p$  siguiendo la misma idea que en el caso 2-dimensional.

Ingenuamente, siempre puede considerarse una compactificación en un toro  $d+p$  lo suficientemente grande para incluir en su espacio de módulos un punto con un agrandamiento de la simetría cuyo grupo de gauge venga dado por el producto directo de todos los grupos maximales en el toro  $d$ . Sin embargo, esta opción no es la más “económica”, se pueden elegir toros más pequeños. Para determinar el toro más pequeño conviene tener en cuenta la receta de Dynkin para obtener subálgebras regulares maximales a partir de una determinada álgebra [96]. Dada  $\mathfrak{g}$ , un álgebra de Lie semisimple, sus subálgebras regulares maximales se construyen de dos maneras:

- Álgebras semisimples: removiendo un nodo (cuya marca sea un número primo) del diagrama de Dynkin extendido.
- Álgebras no semisimples: removiendo dos nodos con marca 1 y la adición de un factor  $\mathfrak{u}(1)$ .

Como se vio, las subálgebras obtenidas mediante un mecanismo de Higgs involucran al menos un factor  $U(1)$  después de la ruptura, dando lugar a álgebras no semisimples, caso que se discutirá

en adelante.

Para el caso simply-laced el procedimiento se simplifica. De hecho, las subálgebras regulares maximales no semisimples de  $\mathfrak{su}(N)$  se obtienen removiendo un único nodo del diagrama y para  $\mathfrak{so}(2N)$  se obtienen luego de remover un nodo de los extremos del diagrama. Para las álgebras excepcionales  $\mathfrak{E}_6$  y  $\mathfrak{E}_7$ , las subálgebras regulares maximales no semisimples se determinan removiendo un nodo del extremo de la “pata” más larga del diagrama de Dynkin. Por otro lado,  $\mathfrak{E}_8$  no tiene subálgebras regulares maximales no semisimples y una ruptura espontánea de la simetría de gauge precisa de una proyección que da como resultado una de éstas.

Teniendo todo esto en mente, es inmediato visualizar el procedimiento para determinar el grupo más pequeño de agrandamiento de la simetría que contenga a los grupos deseados.

Para el caso de  $T^2$ , el grupo de agrandamiento maximal corresponde a los grupos  $SU(2)^2$  y  $SU(3)$ <sup>3</sup> cuyos diagramas de Dynkin se dan en la tabla 5.6.1. El grupo más pequeño incluyendo estos dos debe tener rango menor o igual a cuatro, dado que el toro  $T^4$  tiene, entre sus grupos de gauge por agrandamiento de simetría, a  $SU(2) \times SU(2) \times SU(3)$ . Considerando al  $T^3$  se ve que hay dos opciones que funcionan:  $SU(3) \times SU(2)$ , cuyo diagrama es  $\bullet \bullet \bullet$ , y  $SU(4)$ , con diagrama  $\bullet \bullet \bullet$ . Removiendo un nodo de cualquiera de estos diagramas se obtienen los subgrupos  $SU(2)^2$  y  $SU(3)$ .

Grupos de gauge			Grupo que unifica		
Rango	Grupo	Dynkin	Rango	Grupo	Dynkin
2	$SU(2)^2$ $SU(3)$	$\bullet \bullet$ $\bullet \bullet$	3	$SU(2) \times SU(3)$	$\bullet \bullet \bullet$

Tabla 5.6.1: El caso  $T^2$

Para  $T^3$  los grupos de gauge de agrandamiento de la simetría se presentan en la tabla 5.6.2. Nuevamente, hay dos posibilidades:  $SU(4) \times SU(2)$  y  $SU(5)$  contienen como subgrupos a  $SU(2)^3$ ,  $SU(3) \times SU(2)$  y  $SU(4)$ . El primer caso es el de menor dimensionalidad.

Grupos de gauge			Grupo que unifica		
Rango	Grupo	Dynkin	Rango	Grupo	Dynkin
3	$SU(2)^3$ $SU(3) \times SU(2)$ $SU(4)$	$\bullet \bullet \bullet$ $\bullet \bullet \bullet$ $\bullet \bullet \bullet$	4	$SU(4) \times SU(2)$	$\bullet \bullet \bullet \bullet$

Tabla 5.6.2: El caso  $T^3$

El caso del  $T^4$  involucra nuevos aspectos. Los diagramas a unificar son aquellos presentados en la tabla 5.6.3.

<sup>3</sup>En adelante se discutirá únicamente un factor del grupo  $G \times G$ .



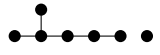

Grupos de gauge			Grupo que unifica		
Rango	Grupo	Dynkin	Rango	Grupo	Dynkin
4	$SU(2)^4$	$\bullet \bullet \bullet \bullet$	7	$SO(12) \times SU(2)$	
	$SU(3) \times SU(2)^2$	$\bullet \bullet \bullet \bullet$			
	$SU(4) \times SU(2)$	$\bullet \bullet \bullet \bullet$			
	$SU(3)^2$	$\bullet \bullet \bullet \bullet$			
	$SU(5)$	$\bullet \bullet \bullet \bullet$			
	$SO(8)$				

Tabla 5.6.3: El caso  $T^4$

El nuevo aspecto viene por el hecho de que uno de los grupos de gauge,  $SU(2)^4$ , es un subgrupo regular de otro de los grupos de gauge presentes en  $T^4$ :  $SO(8)$ . Sin embargo, como ya se mencionó, al ser  $SU(2)^4$  un subgrupo regular maximal semisimple de  $SO(8)$ , no es posible obtenerlo a partir de éste mediante una ruptura espontánea de simetría. Ambos diagramas deben ser considerados separadamente al momento de unificarlos. El mínimo diagrama que incluye a todos los de la lista en la tabla 5.6.3 es  $SO(12) \times SU(2)$ , un punto de agrandamiento de simetría del toro  $T^7$ . Este procedimiento puede extenderse para el caso de toros de mayor dimensionalidad.

## Capítulo 6

# Estructura de gauge en las Supergravidades gaugeadas

Las supergravidades son teorías supersimétricas de gravedad, con las supercargas actuando como generadores de esta simetría. La supersimetría surgió en la década de 1960, como respuesta a la pregunta sobre extensiones posibles del álgebra de Poincaré. El teorema de Coleman-Mandula demuestra la imposibilidad de la extensión del álgebra de Poincaré con nuevos generadores que involucren conmutadores adicionales, pero no impide la presencia de nuevos generadores (las supercargas) que obedezcan reglas de anticonmutación. Las supergravidades se construyen en términos de multipletes de esta simetría extendida.

A bajas energías comparadas con la energía de la cuerda (masa de Planck), las teorías de cuerdas se convierten en supergravidades, por lo que estas teorías también son interesantes como teorías efectivas de teoría de cuerdas.

En este capítulo se presentará la estructura de gauge de las supergravidades gaugeadas en cuatro dimensiones, esto es deformaciones de teorías de supergravedad mediante la introducción de constantes de acoplamiento para campos de gauge no abelianos. Las constantes de acoplamiento, o *gaugings*, son las únicas deformaciones supersimétricas conocidas a día de hoy.

Las supergravidades gaugeadas fueron construidas por primera vez en [97] y luego generalizadas en [98–100]. En años más recientes, estas teorías reaparecieron en el contexto de compactificaciones con flujos ([101,102] son reviews interesantes), en donde flujos para los campos de fondo dados por las p-formas, así como flujos geométricos deformando la geometría de la compactificación interna actúan como parámetros de deformación en la teoría efectiva en cuatro dimensiones.

La *jerarquía de tensores* [103,104] organiza naturalmente a las p-formas de la teoría. Las supergravidades exhiben simetrías de dualidad y, para obtener una formulación que haga explícitas estas simetrías, se introducen derivadas de Lie Generalizadas con sus correspondientes corchetes. Dada una 1-forma que transforma en la representación vectorial del grupo de

dualidad ( $R_1$ ) y la fuerza de campo correspondiente construída de acuerdo al corchete generalizado, uno encuentra que ésta no transforma covariantemente frente al grupo de dualidad, debiendo introducir una 2-forma en alguna representación  $R_2$  para obtener una fuerza de campo covariante. Este procedimiento luego se hace extensivo a la 2-forma y su fuerza de campo, siendo necesaria una 3-forma, y luego una 4-forma, etc, hasta que la dimensionalidad del espacio tiempo pone fin a esta organización de las p-formas en la jerarquía de tensores.

A diferencia de las supergravidades no gaugeadas, estas teorías contienen un potencial para los escalares que podría dar lugar a una constante cosmológica efectiva, dar masa a ciertos campos de la teoría (estabilización de módulos), describir escenarios de ruptura espontánea de supersimetría, etc, todas propiedades deseables en los límites de bajas energías de cuerdas.

## 6.1 Tensor de Embedding

Las supergravidades gaugeadas pueden construirse mediante deformaciones de las supergravidades sin gaugear. Dado un grupo de simetría global  $G_0$ , uno selecciona un subgrupo  $G \in G_0$  y lo promueve a un grupo local de gauge acoplándolo a vectores de la teoría. Una manera conveniente de llevar a cabo esto es mediante el formalismo del “tensor de embedding” (en adelante ET), que mantiene la covariancia con  $G_0$  tratando al ET como un objeto que transforma ante  $G_0$  de acuerdo a la estructura de sus índices. En este procedimiento, los generadores del álgebra  $X_M$  del subgrupo local se parametrizan como una proyección de los generadores  $t_\alpha$  de  $\mathfrak{g}_0$ :

$$X_M \equiv \Theta_M^\alpha t_\alpha, \quad (6.1.1)$$

con  $\Theta_M^\alpha$  el ET, que vive en una representación

$$\Theta_M^\alpha : \quad \mathcal{R}_{v^*} \otimes \mathcal{R}_{\text{adj}} = \mathcal{R}_{v^*} \oplus \dots, \quad (6.1.2)$$

donde  $\mathcal{R}_{v^*}$  (indexada con  $M, N, \dots$ ) denota a la representación dual a la representación vectorial  $\mathcal{R}_v$  y  $\mathcal{R}_{\text{adj}}$  (indexada con  $\alpha, \beta, \dots$ ) denota a la representación adjunta de  $G_0$ .

Este ET debe satisfacer vínculos lineales y cuadráticos. Los primeros tienen su origen en supersimetría y pueden ser escritos como proyecciones que seleccionan alguna representación irreducible del producto en (6.1.2). El segundo se precisa para garantizar la clausura del álgebra de gauge y puede obtenerse exigiendo invariancia de gauge sobre ET

$$0 \stackrel{!}{=} \delta_P \Theta_M^\alpha \equiv \Theta_P^\beta \delta_\beta \Theta_M^\alpha = \Theta_P^\beta (t_\beta)_M^N \Theta_N^\alpha + \Theta_P^\beta f_{\beta\gamma}^\alpha \Theta_M^\gamma, \quad (6.1.3)$$

donde se usó que los generadores en la representación adjunta vienen dados en términos de las constantes de estructura  $(t_\alpha)_\beta^\gamma = -f_{\alpha\beta}^\gamma$ . Contrayendo esta relación con un generador  $t_\alpha$  se obtiene

$$[X_M, X_N] = -X_{MN}^P X_P, \quad \text{con} \quad X_{MN}^P = \Theta_M^\alpha (t_\alpha)_N^P. \quad (6.1.4)$$

donde se ve explícitamente que la invariancia de gauge del ET implica la clausura del álgebra. Sin embargo, el vínculo (6.1.3) es más fuerte que exigir clausura: da lugar a un vínculo para la parte simétrica en  $(MN)$ , que tendrá importantes consecuencias en cuanto a la construcción de la teoría.

Escribiendo

$$X_{MN}{}^P \equiv \Theta_M{}^\alpha (t_\alpha)_N{}^P \equiv X_{[MN]}{}^P + Z^P{}_{MN} , \quad (6.1.5)$$

con  $Z^P{}_{MN} \equiv X_{(MN)}{}^P$ , se ve que, dado que el lado izquierdo de (6.1.4) es antisimétrico en  $MN$ , se tiene que se  $Z^P{}_{MN}$  se anula al contraerse con un generador

$$Z^P{}_{MN} X_P = 0 . \quad (6.1.6)$$

La parte simétrica en  $MN$   $Z^P{}_{MN}$  es, en general, no nula y es responsable de que la parte antisimétrica de las constantes de estructura  $X_{MN}{}^P$  no satisfagan la identidad de Jacobi:

$$X_{[MN]}{}^P X_{[QP]}{}^R + X_{[QM]}{}^P X_{[NP]}{}^R + X_{[NQ]}{}^P X_{[MP]}{}^R = -Z^R{}_{P[Q} X_{MN]}{}^P . \quad (6.1.7)$$

## 6.2 Transformaciones de gauge

Las transformaciones de gauge actúan de la siguiente manera sobre los vectores

$$\delta_\Lambda T^M = -X_{NP}{}^M \Lambda^N T^P \quad (6.2.1)$$

$$\delta_\Lambda T_M = X_{NM}{}^P \Lambda^N T_P ,$$

con  $\Lambda^M(x)$  un parámetro de gauge local.

Para preservar invariancia de gauge, las derivadas  $\partial_\mu$  deben ser reemplazadas por derivadas covariantes  $\mathcal{D}_\mu$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - A_\mu{}^M X_M , \quad (6.2.2)$$

con  $A_\mu{}^M$  los vectores de gauge. La covariancia de la derivada implica que

$$\delta A_\mu{}^M = \mathcal{D}_\mu \Lambda^M + \dots , \quad (6.2.3)$$

donde los puntos suspensivos representan términos que se anulan cuando son contraídos con el ET. La fuerza de campo de este vector de gauge se define como

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M X_M = - (2\partial_{[\mu} A_{\nu]}{}^M + X_{NP}{}^M A_{[\mu}{}^N A_{\nu]}{}^P + \dots) X_M , \quad (6.2.4)$$

donde, nuevamente, está definida a menos de proyecciones con  $Z^P{}_{MN}$ . La definición naive

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}{}^M + X_{NP}{}^M A_{[\mu}{}^N A_{\nu]}{}^P , \quad (6.2.5)$$

es decir, tomando a cero los términos contraídos con  $Z^P{}_{MN}$  trae aparejado un problema: el tensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M$  definido de esta manera no transforma covariantemente lo que dificulta la construcción de un término cinético para los vectores de gauge.

Exigiendo que la fuerza de campo transforme covariantemente uno debe introducir nuevos grados de libertad  $B_{\mu\nu I}$  que cancelen la “falla” ante covariancia, dando lugar a la definición

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^M + X_{NP}{}^M A_{[\mu}{}^N A_{\nu]}{}^P + Z^{MI} B_{\mu\nu I} , \quad (6.2.6)$$

con

$$Z^{PI} = X_{(MN)}{}^P \quad (6.2.7)$$

el llamado tensor de *intertwining*. Notar que el índice “ $I$ ” en el lado izquierdo denota genéricamente a alguna representación dada por la simetrización de los índices “ $MN$ ” en el lado derecho.

Este objeto puede, entonces, utilizarse para completar los puntos suspensivos en la variación de los campos vectoriales

$$\delta A_\mu{}^M = \mathcal{D}_\mu \Lambda^M - Z^{MI} \widehat{\Xi}_{\mu I} . \quad (6.2.8)$$

La transformación de gauge de la 2-forma se define de manera tal de compensar la falla de los primeros dos términos en (6.2.6) en transformar covariantemente, y nuevamente está definida a menos de términos que se anulan cuando se proyectan, en este caso, con el tensor de *intertwining*. De esta manera, la covariancia de  $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M$  solo determina la transformación de una proyección con el tensor de *intertwining* de la 2-forma con respecto a una proyección con el tensor de *intertwining* del parámetro de gauge dado por una 1-forma

$$\widetilde{B}_{\mu\nu}{}^M = Z^{MI} B_{\mu\nu I} , \quad \widetilde{\Xi}_{\mu}{}^M = Z^{MI} \widehat{\Xi}_{\mu I} , \quad (6.2.9)$$

dando lugar a

$$\delta A_\mu{}^M = \mathcal{D}_\mu \Lambda^M - \widetilde{\Xi}_{\mu}{}^M \quad (6.2.10)$$

$$\delta \widetilde{B}_{\mu\nu}{}^M = 2\mathcal{D}_{[\mu} \widetilde{\Xi}_{\nu]}{}^M - 2X_{(NP)}{}^M (\Lambda^N \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^P - A_{[\mu}{}^N \delta A_{\nu]}{}^P) . \quad (6.2.11)$$

Estas transformaciones de gauge cierran con respecto al siguiente álgebra

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_{\Lambda_{12}{}^M} + \delta_{\widetilde{\Xi}_{12\mu}{}^M} , \quad (6.2.12)$$

con

$$\Lambda_{12}{}^M = -X_{NP}{}^M \Lambda_{[1}{}^N \Lambda_{2]}{}^P \quad (6.2.13)$$

$$\widetilde{\Xi}_{12\mu}{}^M = 2X_{(NP)}{}^M \mathcal{D}_\mu \Lambda_{[1}{}^N \Lambda_{2]}{}^P . \quad (6.2.14)$$

Notar que se ha utilizado la siguiente notación: los tensores denotados con una tilde “ $\sim$ ” corresponden a tensores proyectados con el tensor de *intertwining*. La 1-forma denotada con

sombbrero  $\widetilde{\Xi}_\mu$  corresponde a un parámetro de gauge que permite escribir a las transformaciones de gauge de manera covariante. Este parámetro da lugar a corchetes que dependen de los campos debido a la presencia de la derivada covariante en (6.2.14).

Haciendo la redefinición

$$\widetilde{\Xi}_\mu^M = \tilde{\Xi}_\mu^M + 2X_{(NP)}^M A_\mu^N \Lambda^P, \quad (6.2.15)$$

el segundo corchete, correspondiente a la 1-forma, se vuelve independiente de los campos (el primero ya lo era)

$$\widetilde{\Xi}_{12\mu}^M = 2X_{(NP)}^M \left( \Lambda_{[1}^N \partial_\mu \Lambda_{2]}^P - 2Z^{NI} \Lambda_{[1}^P \Xi_{2]\mu I} \right). \quad (6.2.16)$$

Esta misma construcción puede llevarse más allá de la 2-forma, moviéndose un paso más en la jerarquía de tensores. La 2-forma obtenida hasta ahora participa en la fuerza de campo  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^M$  de manera proyectada, es decir, contraída con el tensor de intertwining (6.2.7) y lo mismo pasa con sus transformaciones de gauge. Para desproyectar la 2-forma, se precisa la introducción de una 3-forma  $C_{\mu\nu\rho}^A$  (que estará, a su vez, proyectada con otro tensor de intertwining). Esta tres forma se requiere para que la fuerza de campo correspondiente a la dos forma,  $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho I}$ , transforme de manera covariante.

Uno podría continuar con este procedimiento hasta que la dimensionalidad del espacio tiempo ponga un límite superior a la jerarquía. En la tabla 6.2.1 se presentan los parámetros de gauge, campos y curvaturas en cuatro dimensiones.

Parámetro de gauge	Campo	Curvatura
$\Lambda^M$	$A_\mu^M$	$\mathcal{F}_{\mu\nu}^M$
$\widehat{\Xi}_{\mu I}$	$B_{\mu\nu I}$	$\mathcal{H}_{\mu\nu\rho I}$
$\widehat{\Sigma}_{\mu\nu}^A$	$C_{\mu\nu\rho}^A$	$\mathcal{G}_{\mu\nu\rho\sigma}^A$
$\widehat{\Theta}_{\mu\nu\rho X}$	$D_{\mu\nu\rho\sigma X}$	0
$\widehat{\Phi}_{\mu\nu\rho\sigma X}$	0	0

Tabla 6.2.1: Parámetros de gauge, campos y curvaturas en cuatro dimensiones.

Las transformaciones de gauge son

$$\delta A_\mu^M = \mathcal{D}_\mu \Lambda^M - Z^{MI} \widehat{\Xi}_{\mu I} \quad (6.2.17)$$

$$\delta B_{\mu\nu I} = 2\mathcal{D}_{[\mu} \widehat{\Xi}_{\nu] I} - 2d_{IMN} (\Lambda^M \mathcal{F}_{\mu\nu}^N - A_{[\mu}^M \delta A_{\nu]}^N) - Y_{IA} \widehat{\Sigma}_{\mu\nu}^A \quad (6.2.18)$$

$$\delta C_{\mu\nu\rho}^A = 3\mathcal{D}_{[\mu} \widehat{\Sigma}_{\nu\rho]}^A + g_M^{AI} \left( 3\mathcal{F}_{[\mu\nu}^M \widehat{\Xi}_{\rho] I} + \Lambda^M \mathcal{H}_{\mu\nu\rho I} + 3B_{[\mu\nu I} \delta A_{\rho]}^M \right) \quad (6.2.19)$$

$$+ 2d_{IMN} A_{[\mu}^M A_{\nu}^N \delta A_{\rho]}^P) - W^{AX} \widehat{\Theta}_{\mu\nu\rho X} \quad (6.2.20)$$

$$\delta D_{\mu\nu\rho\sigma X} = 4\mathcal{D}_{[\mu} \widehat{\Theta}_{\nu\rho\sigma] X} - h_{XBM} \left( 6\mathcal{F}_{[\mu\nu}^M \widehat{\Sigma}_{\rho\sigma]}^B + \Lambda^M \mathcal{G}_{\mu\nu\rho\sigma}^B - 4C_{[\mu\nu\rho}^B \delta A_{\sigma]}^M \right) \quad (6.2.21)$$

$$+ 2g_N^{BI} d_{IPQ} A_{[\mu}^M A_{\nu}^N A_{\rho}^P \delta A_{\sigma]}^Q) - \widehat{\Phi}_{\mu\nu\rho\sigma X} . \quad (6.2.22)$$

Las identidades de Bianchi generalizadas son

$$2\mathcal{D}_{[\mu} \mathcal{D}_{\nu]} + \mathcal{F}_{\mu\nu}^M X_M = 0 \quad (6.2.23)$$

$$3\mathcal{D}_{[\mu} \mathcal{F}_{\nu\rho]}^M - Z^{MI} \mathcal{H}_{\mu\nu\rho I} = 0 \quad (6.2.24)$$

$$4\mathcal{D}_{[\mu} \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma] I} - 6d_{IMN} \mathcal{F}_{[\mu\nu}^M \mathcal{F}_{\rho\sigma]}^N - Y_{IA} \mathcal{G}_{\mu\nu\rho\sigma}^A = 0 . \quad (6.2.25)$$

y definen a las fuerzas de campo dadas por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^M = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^M + X_{NO}^M A_{[\mu}^N A_{\nu]}^O + Z^{MI} B_{\mu\nu I} \quad (6.2.26)$$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\rho I} = 3\mathcal{D}_{[\mu} B_{\nu\rho] I} + 6d_{IMN} A_{[\mu}^M \left( \partial_{\nu} A_{\rho]}^N + \frac{1}{3} X_{OP}^N A_{\nu}^O A_{\rho]}^P \right) + Y_{IA} C_{\mu\nu\rho}^A \quad (6.2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu\rho\sigma}^A &= 4\mathcal{D}_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]}^A - g_M^{AI} \left( 6B_{[\mu\nu I} \mathcal{F}_{\rho\sigma]}^M - 3Z^{MJ} B_{[\mu\nu I} B_{\rho\sigma] J} + 8d_{INP} A_{[\mu}^M A_{\nu}^N \partial_{\rho} A_{\sigma]}^P \right. \\ &\quad \left. + 2d_{IPN} X_{QR}^P A_{[\mu}^M A_{\nu}^N A_{\rho}^Q A_{\sigma]}^R \right) + W^{AX} D_{\mu\nu\rho\sigma X} . \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Los tensores  $d_{IMN}$ ,  $g_M^{AI}$  y  $h_{XBM}$  no dependen de los gaugings y representan invariantes de  $G_0$ . Por ejemplo, en supergravedad maximal en  $n = 4$ , con grupo de dualidad  $E_{7(7)}$ , estarán relacionados con los generadores de  $E_{7(7)}$ ,  $(t_\alpha)^{MN}$ , y con la métrica simpléctica  $\Omega_{MN}$ . Por otro lado, los tensores de intertwining  $Z^{MI}$ ,  $Y_{IA}$ ,  $W^{AX}$  sí dependen de los gaugings. Además, se ha definido el tensor  $V^{AIJ} \equiv 2g_M^{AI} Z^J{}^M$ .

Para que la teoría sea covariante frente a transformaciones de gauge, se deben imponer los

vínculos

$$Z^{MI}d_{INP} = X_{(NP)}^M \quad (6.2.29)$$

$$Z^{MI}X_M = 0 \quad (6.2.30)$$

$$d_{I[MN]} = 0 \quad (6.2.31)$$

$$Y_{IAGM}{}^{AJ} = X_{MI}{}^J + 2Z^{NJ}d_{IMN} \quad (6.2.32)$$

$$Y_{IA}Z^{MI} = 0 \quad (6.2.33)$$

$$d_{I(MN)GP}{}^{AI} = 0 \quad (6.2.34)$$

$$W^{AX}h_{XBM} = X_{MB}{}^A + g_M{}^{AI}Y_{IB} \quad (6.2.35)$$

$$W^{AX}Y_{IA} = 0 \quad (6.2.36)$$

$$h_{XB(M)GN}{}^{BI} = 0 \quad (6.2.37)$$

$$W^{AX}\widehat{\Phi}_{\mu\nu\rho\sigma X} = 0 \quad (6.2.38)$$

Las transformaciones de gauge forman un álgebra cerrada con respecto a los corchetes

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_{\Lambda_{12}^M} + \delta_{\widehat{\Xi}_{12\mu I}} + \delta_{\widehat{\Sigma}_{12\mu\nu}^A} + \delta_{\widehat{\Theta}_{12\mu\nu\rho X}} + \delta_{\widehat{\Phi}_{12\mu\nu\rho\sigma X}}, \quad (6.2.39)$$

con

$$\Lambda_{12}^M = -X_{NP}{}^M\Lambda_{[1}^N\Lambda_{2]}^P \quad (6.2.40)$$

$$\widehat{\Xi}_{12\mu I} = 2d_{IMN}\mathcal{D}_\mu\Lambda_{[1}^M\Lambda_{2]}^N \quad (6.2.41)$$

$$\widehat{\Sigma}_{12\mu\nu}^A = -2g_M{}^{AI}\left(d_{INP}\Lambda_{[1}^M\Lambda_{2]}^N\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^P + 2\widehat{\Xi}_{I[\mu[1}\mathcal{D}_{\nu]}\Lambda_{2]}^M - Z^{MJ}\widehat{\Xi}_{I[\mu[1}\widehat{\Xi}_{\nu]2]}J\right) \quad (6.2.42)$$

$$\widehat{\Theta}_{12\mu\nu\rho X} = -h_{XBM}\left(g_N{}^{BI}\Lambda_{[1}^M\Lambda_{2]}^N\mathcal{H}_{\mu\nu\rho I} + 6\widehat{\Sigma}_{[\mu\nu}{}^B\mathcal{D}_{\rho]}\Lambda_{2]}^M\right) \quad (6.2.43)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{12\mu\nu\rho\sigma X} = & -\left(X_{MX}{}^Y + W^{AY}h_{XAM}\right)\left(h_{YBN}\Lambda_{[1}^M\Lambda_{2]}^N\mathcal{G}_{\mu\nu\rho\sigma}{}^B + 8\widehat{\Theta}_{Y[\mu\nu\rho[1}\mathcal{D}_{\sigma]}\Lambda_{2]}^M\right) \\ & + 4h_{XBM}Z^{MI}\left[2W^{BY}\widehat{\Theta}_{Y[\mu\nu\rho[1}\widehat{\Xi}_{2]\sigma]I} - 6\widehat{\Xi}_{J[\mu[1}\mathcal{D}_{\nu]}\widehat{\Sigma}_{\rho\sigma]2]}^B + 2g_N{}^{BJ}\mathcal{H}_{J[\mu\nu\rho}\widehat{\Xi}_{\sigma]I[1}\Lambda_{2]}^N\right. \\ & \left.+ 3\mathcal{F}_{[\mu\nu}{}^N\left(2d_{INP}\Lambda_{[1}^P\widehat{\Sigma}_{2]\rho\sigma]}^B - g_N{}^{BJ}\widehat{\Xi}_{J\rho[1}\widehat{\Xi}_{2]\sigma]I}\right)\right], \quad (6.2.44) \end{aligned}$$

y, además, admiten los siguientes parámetros triviales, es decir, que no generan transformación



alguna

$$\Lambda_{trivial}^M = Z^{MJ} \chi_J \quad (6.2.45)$$

$$\widehat{\Xi}_{\mu I \text{ trivial}} = \mathcal{D}_\mu \chi_I + Y_{IA} \chi_\mu^A \quad (6.2.46)$$

$$\widehat{\Sigma}_{\mu\nu}^A \text{ trivial} = 2\mathcal{D}_{[\mu} \chi_{\nu]}^A - g_M^{AJ} \mathcal{F}_{\mu\nu}^M \chi_J + W^{AX} \chi_{\mu\nu X} \quad (6.2.47)$$

$$\widehat{\Theta}_{\mu\nu\rho X \text{ trivial}} = 3\mathcal{D}_{[\mu} \chi_{\nu\rho]X} + 3h_{XMB} \mathcal{F}_{[\mu\nu}^M \chi_{\rho]}^B + \chi_{\mu\nu\rho X} \quad (6.2.48)$$

$$\widehat{\Phi}_{\mu\nu\rho\sigma X \text{ trivial}} = 4\mathcal{D}_{[\mu} \chi_{\nu\rho\sigma]X} - 6(X_{MX}^Y + W^{AY} h_{XAM}) \mathcal{F}_{[\mu\nu}^M \chi_{\rho\sigma]Y} \quad (6.2.49)$$

$$+ h_{XMB} Z^{MI} (4\mathcal{H}_{[\mu\nu\rho I} \chi_{\sigma]}^B - \mathcal{G}_{\mu\nu\rho\sigma}^B \chi_I) . \quad (6.2.50)$$

La existencia de estos parámetros triviales serán fundamentales al momento de conectar esta teoría con las álgebras  $L_\infty$  (ver capítulo 8).

## Capítulo 7

# Simetría de U-dualidad y geometría extendida

En el capítulo 3 se ha mostrado que la compactificación del sector bosónico de supergravedad IIA y IIB en un toro tiene simetría de T-dualidad y esta simetría se manifiesta de forma explícita a partir de la construcción de DFT, donde las simetrías de difeomorfismos de la métrica y la de gauge del tensor antisimétrico son unificadas en “simetrías de gauge” dadas por la derivada de Lie generalizada, una modificación de la derivada de Lie usual que es compatible con la simetría  $O(D, D, \mathbb{R})$  de T-dualidad.

Las compactificaciones de supergravedad en  $D = 11$  así como las de teoría M en un toro  $n$ -dimensional gozan de simetría de U-dualidad dada por el grupo  $E_{n(n)}$  [30–32]. Esta simetría es combinación de la T-dualidad y de la S-dualidad (*Strong-weak duality*, en inglés), que relaciona teorías con constante de acoplamiento  $g_s$  y teorías con acoplamiento  $g_s^{-1}$ . De manera similar a lo expuesto en el caso de DFT, en [33, 34] se introdujo la idea de extender el espacio-tiempo y/o el espacio tangente de manera tal de acomodar esta simetría y, más recientemente, fue considerado en [13, 16, 18].

En este capítulo se tratarán estos enfoques para reemplazar la simetría de T-dualidad por la de U-dualidad con el objetivo de incorporar todos los campos de estas teorías, como los campos de Ramond-Ramond en supergravedades de Tipo II o la tres forma de teoría M.

En el caso de la dualidad excepcional, no existe hasta el momento una construcción de la teoría basada en un grupo de dualidad mayor que contenga a  $E_{n(n)}$  una vez hecha la reducción dimensional (es decir, se desconoce el análogo de  $O(10, 10)$  para DFT). La teoría EFT con  $E_{7(7)}$  está basada en un espacio tiempo generalizado de  $4 + 56$  dimensiones, con cuatro coordenadas “externas”  $x^\mu$  y 56 coordenadas internas  $Y^M$  en la representación **56** de  $E_{7(7)}$  y derivadas duales  $\partial_M$  [105]. La teoría se construye pidiendo que los difeomorfismos internos generalizados se comporten como simetrías de gauge en cuatro dimensiones. El contenido de campos viene dado por una tétrada externa  $e_\mu^a$  y una métrica interna generalizada  $\mathcal{M}_{MN}$ , parametrizando

el espacio coset  $E_{7(7)}/SU(8)$ . La teoría requiere también la presencia de campos de gauge  $A_\mu^M$  que aparecen como conexiones de las simetrías internas de dualidad y un conjunto de 2-formas  $\{B_{\mu\nu\alpha}, B_{\mu\nu M}\}$ , que aparecen para describir consistentemente los grados de libertad de supergravedad en  $D = 11$ . Las 2-formas  $B_{\mu\nu\alpha}$  en la representación adjunta de  $E_{7(7)}$  son los duales on-shell de los campos escalares en cuatro dimensiones que surgen al considerar la teoría reducida dimensionalmente. Las 2-formas  $B_{\mu\nu M}$  en la representación fundamental son necesarias para tener invariancia de gauge y para reproducir la dinámica correcta de supergravedad en  $D = 11$ . La parte bosónica de la acción posee las simetrías siguientes:

- Simetría global continua  $E_{7(7)}$ .
- Simetría local  $SO(1, 3|\mathbb{R}) \times SU(8|\mathbb{R})$ .
- Difeomorfismos externos generalizados, parametrizados por  $\xi^\mu$ .
- Difeomorfismos internos generalizados, parametrizados por  $\Lambda^M$ .
- Transformaciones de gauge de las 2-formas, parametrizadas por  $\Xi_{\mu\alpha}$  y  $\Xi_{\mu M}$ .

Con respecto a los parámetros de gauge, hay un conjunto de parámetros que permiten escribir las transformaciones de manera covariante pero que da corchetes para la clausura del álgebra de gauge que depende de los campos, y existe un segundo conjunto que da lugar a corchetes que no dependen de los campos pero en este caso las transformaciones no pueden ser escritas de manera covariante. Se denotará al primer grupo con “sombreros”  $\widehat{\Lambda}^M, \widehat{\Xi}_{\mu\alpha}, \widehat{\Xi}_{\mu M}$ , y al segundo conjunto sin sombreros.

## 7.1 Transformaciones de gauge

Al igual que en el caso de T-dualidad, los grados de libertad gravitacionales y tensoriales se mezclan ante U-dualidad y también lo harán sus transformaciones de gauge. Siguiendo las ideas de DFT, se definirá una derivada de Lie generalizada para la U-dualidad. La derivada de Lie usual (4.3.1) se generaliza y la matriz  $(\partial_j \zeta^i)$  de  $\mathfrak{gl}(n)$  será reemplazada por una matriz del álgebra de Lie  $\mathfrak{e}_{n(n)}$ , junto a un reescalo real. Los tensores transformaran ahora bajo  $E_{n(n)} \times \mathbb{R}$  y los difeomorfismos generalizados serán de la forma (4.3.3)

$$\mathcal{L}_\xi V^M = L_\xi V^M + Y^M{}_N{}^P{}_Q \partial_P \xi^Q V^N, \quad (7.1.1)$$

con  $Y$  el tensor invariante de dualidad definido en (4.3.4). En la tabla 7.1.1 se presentan las expresiones para el tensor  $Y$  para varios grupos de dualidad.

Al igual que en el caso de DFT, al conmutar dos derivadas de Lie Generalizadas, uno encuentra la siguiente condición suficiente para tener un álgebra cerrada

$$Y^M{}_N{}^P{}_Q \partial_M \dots \partial_N \dots = 0, \quad (7.1.2)$$

	$Y^M_Q{}^N_P$	$\alpha$	$\beta$
$O(n, n)$	$\eta^{MN}\eta_{PQ}$	2	0
$E_{4(4)} = SL(5)$	$\epsilon^{iMN}\epsilon_{iPQ}$	3	$\frac{1}{5}$
$E_{5(5)} = SO(5, 5)$	$\frac{1}{2}(\gamma^i)^{MN}(\gamma_i)_{PQ}$	4	$\frac{1}{4}$
$E_{6(6)}$	$10d^{MNR}\bar{d}_{PQR}$	6	$\frac{1}{3}$
$E_{7(7)}$	$12K^{MN}{}_{PQ} + \delta_P^{(M}\delta_Q^{N)} + \frac{1}{2}\epsilon^{MN}\epsilon_{PQ}$	12	$\frac{1}{2}$

Tabla 7.1.1: Tensor invariante  $Y$  y constantes de proporcionalidad para diferentes dimensiones.  $\eta_{MN}$  es la métrica  $O(n, n)$  invariante,  $\epsilon_{iMN}$  es el tensor alternante de  $SL(5)$ ,  $(\gamma^i)^{MN}$  es la representación  $16 \times 16$  MW del álgebra de Clifford  $SO(5, 5)$ ,  $d^{MNR}$  y  $K^{MNPQ}$  son los tensores simétricos invariantes de  $E_{6(6)}$  y  $E_{7(7)}$  respectivamente y  $\epsilon^{MN}$  es el invariante simpléctico en  $E_{7(7)}$  [106].

donde los puntos suspensivos indican que las derivadas actúan sobre diferentes campos. Esta condición es la análoga del vínculo fuerte en (4.1.10).

A continuación, se describirá en detalle el caso de  $E_{7(7)}$  para luego establecer su relación con las álgebras  $L_\infty$  (ver capítulo 8).

El grupo  $E_{7(7)}$  está dado por un álgebra de Lie de dimensión 133, con generadores  $t_\alpha$  con el índice en la adjunta  $\alpha = 1, \dots, 133$ . La representación fundamental tiene dimensión 56 y se utilizarán los índices  $M, N = 1, \dots, 56$  para indexarla. Este grupo posee un tensor antisimétrico invariante  $\Omega^{MN}$  que se utilizará para subir y bajar los índices de la representación fundamental, utilizando la convención “Norte-Oeste Sur-Este”:

$$V^M = \Omega^{MN}V_N, \quad V_M = V^N\Omega_{NM}, \quad \text{con} \quad \Omega^{MK}\Omega_{NK} = \delta_N^M. \quad (7.1.3)$$

Los índices de la representación adjunta se suben y bajan con la métrica de Cartan-Killing dada por

$$\kappa_{\alpha\beta} \equiv (t_\alpha)_M{}^N(t_\beta)_N{}^M \quad (7.1.4)$$

El proyector a la representación adjunta, presente en la derivada de Lie generalizada (4.3.3) toma la forma

$$\begin{aligned} P_{(adj)}{}^K{}_M{}^L{}_N &\equiv (t_\alpha)_M{}^K(t^\alpha)_N{}^L \\ &= \frac{1}{24}\delta_M^K\delta_N^L + \frac{1}{12}\delta_M^L\delta_N^K + (t_\alpha)_{MN}(t^\alpha)^{KL} - \frac{1}{24}\Omega_{MN}\Omega^{KL}, \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

y satisface

$$P_{(adj)}{}^M{}_N{}^N{}_M = 133. \quad (7.1.6)$$

Reemplazando (7.1.5) en (4.3.3), la derivada de Lie Generalizada toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Lambda V^M &= \Lambda^K \partial_K V^M - \partial_N \Lambda^M V^N + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \partial_P \Lambda^P V^M \\ &\quad - 12 (t_\alpha)^{MN} (t^\alpha)_{KL} \partial_N \Lambda^K V^L - \frac{1}{2} \Omega^{MN} \Omega_{KL} \partial_N \Lambda^K V^L, \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

expresión a partir de la cual puede verificarse que los tensores  $\Omega^{MN}$  y  $(t_\alpha)^{MN}$  son tensores invariantes de peso nulo.

El vínculo fuerte (7.1.2) toma la forma

$$(t_\alpha)^{MN} \partial_M \partial_N A = 0, \quad (t_\alpha)^{MN} \partial_M A \partial_N B = 0, \quad \Omega^{MN} \partial_M A \partial_N B = 0, \quad (7.1.8)$$

para cualquier par de campos o parámetros de gauge  $A, B$ . Además de este vínculo fuerte, en el caso de EFT con grupo  $E_{7(7)}$ , también hay campos “covariantemente vinculados”  $\chi_N$ , que obedecen los mismos vínculos que (7.1.8) reemplazando el papel de las derivadas, es decir, cumplen

$$\begin{aligned} (t_\alpha)^{MN} \chi_M \partial_N A &= 0, & \Omega^{MN} \chi_M \partial_N B &= 0, \\ (t_\alpha)^{MN} \chi_M \tilde{\chi}_N &= 0, & \Omega^{MN} \chi_M \tilde{\chi}_N &= 0. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

La derivada de Lie Generalizada forma un álgebra cerrada, bajo la acción del E-Corchete: [14, 106],

$$[\mathcal{L}_{\Lambda_1}, \mathcal{L}_{\Lambda_2}] = \mathcal{L}_{[\Lambda_2, \Lambda_1]_E}, \quad (7.1.10)$$

con el E-corchete dado por

$$[\Lambda_2, \Lambda_1]_E^M = 2\Lambda_{[2}^K \partial_K \Lambda_1^M] + 12 (t_\alpha)^{MN} (t^\alpha)_{KL} \Lambda_{[2}^K \partial_N \Lambda_1^L] - \frac{1}{4} \Omega^{MK} \Omega_{NL} \partial_K (\Lambda_2^N \Lambda_1^L). \quad (7.1.11)$$

Debido a los vínculos (7.1.8) y (7.1.9), existen dos tipos de parámetros de gauge triviales, es decir, que no generan ningún tipo de transformación y vienen dados por

$$\Lambda_{trivial}^M = (t^\alpha)^{MN} \partial_N T_\alpha, \quad \Lambda_{trivial}^M = \Omega^{MN} T_N, \quad (7.1.12)$$

con  $T_M$  un vector covariantemente vinculado en el sentido de (7.1.9).

La derivada de Lie generalizada puede reescribirse en términos del E-Corchete tomando su parte simétrica y antisimétrica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Lambda_1} \Lambda_2 &= \frac{\mathcal{L}_{\Lambda_1} \Lambda_2 - \mathcal{L}_{\Lambda_2} \Lambda_1}{2} + \frac{\mathcal{L}_{\Lambda_1} \Lambda_2 + \mathcal{L}_{\Lambda_2} \Lambda_1}{2} \\ &\equiv [\Lambda_1, \Lambda_2]_E^M + \{\Lambda_1, \Lambda_2\}^M, \\ &= [\Lambda_1, \Lambda_2]_E^M + 12 (t^\alpha)^{MN} \partial_N \gamma_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} \gamma_N, \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

donde se ha definido la parte simétrica como  $\{\cdot, \cdot\}$  y

$$\gamma_\alpha = -\frac{1}{2} (t_\alpha)_{KL} \Lambda_1^K \Lambda_2^L, \quad \gamma_M = \Omega_{KL} \Lambda_{(1}^K \partial_M \Lambda_{2)}^L. \quad (7.1.14)$$

Es interesante notar aquí que, al igual que en el caso de DFT, la parte simétrica no genera transformaciones de gauge debido a los vínculos fuertes (7.1.8) por lo que resulta equivalente tener

$$\mathcal{L}_{[V,W]_E} = \mathcal{L}_{(\mathcal{L}_V W)} . \quad (7.1.15)$$

La parte simétrica de la derivada de Lie da lugar, entonces, a parámetros de gauge triviales, que serán importantes en lo que sigue.

Además de tener las transformaciones de gauge definidas sobre elementos de la representación fundamental, será de utilidad tener explícitamente las expresiones para objetos  $W_\alpha$  en la representación adjunta:

$$\delta W_\alpha = \Lambda^K \partial_K W_\alpha + 12 f_{\alpha\beta}{}^\gamma (t^\beta)_L{}^K \partial_K \Lambda^L W_\gamma + \lambda' \partial_K \Lambda^K W_\alpha , \quad (7.1.16)$$

con  $f_{\alpha\beta}{}^\gamma$  las constantes de estructura de  $E_{7(7)}$ .

Conviene aquí notar que dados los tensores  $\eta[\Lambda, T]_\alpha$  y  $\eta[\Lambda, T]_M$ , uno en la adjunta y otro covariantemente vinculado,

$$\begin{aligned} \eta[\Lambda, T]_\alpha &= \delta_\Lambda T_\alpha + (t_\alpha)_{KL} \tilde{T}^K \Lambda^L , \\ \eta[\Lambda, T]_M &= \delta_\Lambda T_M + \Omega_{KL} \left( \partial_M \tilde{T}^K \Lambda^L - \tilde{T}^K \partial_M \Lambda^L \right) , \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

donde  $\Lambda^M$  es un vector,  $T_\alpha$  es un tensor en la adjunta de peso  $\lambda'(T) = 1$  y  $T_M$  es un tensor covariantemente vinculado, el siguiente parámetro trivial se anula

$$\tilde{\eta}^M = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N \eta_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} \eta_N = 0 , \quad (7.1.18)$$

como puede verse sencillamente de

$$\tilde{\eta} = \hat{\mathcal{L}}_\Lambda \tilde{T} - 2 \left\{ \tilde{T}, \Lambda \right\} = -\hat{\mathcal{L}}_{\tilde{T}} \Lambda = 0 . \quad (7.1.19)$$

Calculemos ahora el jacobiano de la derivada de Lie, que viene dado por la expresión

$$J(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = 3 \left[ [\Lambda_{[1}, \Lambda_2]_{(E)}, \Lambda_3]_{(E)} \right] = \tilde{N} , \quad (7.1.20)$$

con  $\tilde{N}$  el tensor de “Nijenhuis” dado por

$$\tilde{N} = \left\{ \Lambda_{[1}, [\Lambda_2, \Lambda_3]_{(E)} \right\} , \quad (7.1.21)$$

de donde ya se aprecia que se trata de un parámetro de gauge trivial, debido a que es la suma de términos dados por la parte simétrica de la derivada de Lie. Explícitamente, se tiene

$$J^M(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N N_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} N_N , \quad (7.1.22)$$

y

$$\begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{1}{2} (t_\alpha)_{KL} \Lambda_{[1}^K [\Lambda_2, \Lambda_3]_{(E)}^L \\ N_M &= \frac{1}{2} \Omega_{KL} \left( \Lambda_{[1}^K \partial_M [\Lambda_2, \Lambda_3]_{(E)}^L - \partial_M \Lambda_{[1}^K [\Lambda_2, \Lambda_3]_{(E)}^L \right) . \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

Es importante que el Jacobiator sea un parámetro trivial, dado que se tiene

$$3\delta_{[\Lambda_1}\delta_{\Lambda_2}\delta_{\Lambda_3]} = \delta_{J(\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3)} \quad (7.1.24)$$

y el lado izquierdo se anula como puede verse de expandir esa expresión. Para que esta igualdad sea consistente, la transformación de gauge actuando sobre un elemento cualquiera “.” dada por el jacobiator debe anularse.

Obviamente, debido a la observación que se deriva de (7.1.17), en principio hay una aparente ambigüedad en la definición de  $N_\alpha$  y  $N_M$  dado que siempre podría sumarséles  $\eta[\Lambda, T]_\alpha$  y  $\eta[\Lambda, T]_M$  como en (7.1.17) dejando a  $\tilde{N}$  invariante. Sin embargo, la expresión (7.1.17) depende de tres objetos: un vector  $\Lambda$ , un tensor en la adjunta  $T_\alpha$  y un tensor covariantemente vinculado  $T_M$ . Para poder modificar las componentes de (7.1.23) dejando a  $\tilde{N}$  en (7.1.21) invariante, debería ser posible encontrar expresiones para  $\Lambda^M$ ,  $T_\alpha$  and  $T_M$  dependiendo únicamente de  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  and  $\Lambda_3$ . La única posibilidad que preserva la forma en que los tensores transforman es

$$\Lambda^M = \Lambda_i^M, \quad T_\alpha = -\frac{1}{2}(t_\alpha)_{KL}\Lambda_j^K\Lambda_k^L, \quad T_M = \Omega_{KL}\Lambda_j^K\partial_M\Lambda_k^L, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (7.1.25)$$

pero la antisimetría en [123] elimina esta posibilidad, dejando a (7.1.23) como única elección posible.

También conviene notar que para un vector trivial  $\tilde{T}$  se tiene

$$\hat{\mathcal{L}}_{\tilde{T}}\Lambda = 0 = \left\{ \tilde{T}, \Lambda \right\} + [\tilde{T}, \Lambda]_{(E)}, \quad (7.1.26)$$

por lo que el E-Corchete entre un parámetro trivial y un vector genérico es, nuevamente, un parámetro trivial. Es decir, los parámetros triviales forman un ideal respecto del E-Corchete, y esta observación será útil en lo que sigue.

El siguiente paso en la construcción de EFT consiste en introducir derivadas covariantes con respecto a las transformaciones de gauge dadas por la derivada de Lie Generalizada:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu}, \quad (7.1.27)$$

con  $A_\mu^M$  la conexión de gauge. Para un vector de peso  $\lambda$ , se tiene

$$\mathcal{D}_\mu V^M \equiv D_\mu V^M - \lambda \partial_K A_\mu^K V^M. \quad (7.1.28)$$

La transformación del campo  $A_\mu^M$  se obtiene de exigir que la derivada covariante transforme covariantemente, de donde se obtiene

$$\delta A_\mu^M = \mathcal{D}_\mu \hat{\Lambda}^M. \quad (7.1.29)$$

A partir de esta conexión, uno construye la fuerza de campo de la manera usual, antisimetrizando dos derivadas covariantes, de donde

$$F_{\mu\nu}^M \equiv 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^M - [A_\mu, A_\nu]_E^M. \quad (7.1.30)$$

Sin embargo, esta cantidad no transforma covariantemente con respecto a la derivada de Lie Generalizada, debido a que la identidad de Jacobi para el E-corchete no se satisface. La transformación viene dada por

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}{}^M &= 2D_{[\mu}\delta A_{\nu]}{}^M - \partial_K A_{[\mu}{}^K \delta A_{\nu]}{}^M - 12(t^\alpha)^{MK}(t^\alpha)_{NL} \partial_K (A_{[\mu}{}^N \delta A_{\nu]}{}^L) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Omega^{MK} \Omega_{LN} (A_{[\mu}{}^N \partial_K \delta A_{\nu]}{}^L - \partial_K A_{[\mu}{}^N \delta A_{\nu]}{}^L) , \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

donde los dos últimos términos dan el apartamiento de una transformación covariante. En el espíritu de la jerarquía de tensores [103, 104] se redefine  $F_{\mu\nu}{}^M$  introduciendo dos nuevos campos que absorben los términos que estropean la covariancia de  $F_{\mu\nu}{}^M$  ante transformaciones de gauge: una 2-forma  $B_{\mu\nu\alpha}$  que toma valores en la adjunta de  $E_{7(7)}$  y una 2-forma  $B_{\mu\nu K}$ , un campo covariantemente vinculado en el sentido de (7.1.9). La expresión “jerarquía de tensores” viene del hecho de que la fuerza de campo asociada a la 1-forma  $A_\mu{}^M$ , requiere la introducción de 2-formas.

De esta manera, la nueva fuerza de campo es

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M \equiv F_{\mu\nu}{}^M - 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N B_{\mu\nu\alpha} - \frac{1}{2} \Omega^{MK} B_{\mu\nu K} , \quad (7.1.32)$$

Con estas modificaciones,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M$  transforma covariantemente:

$$\delta \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M = 2\mathcal{D}_{[\mu}\delta A_{\nu]}{}^M - 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N \Delta B_{\mu\nu\alpha} - \frac{1}{2} \Omega^{MK} \Delta B_{\mu\nu K} , \quad (7.1.33)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta B_{\mu\nu\alpha} &\equiv \delta B_{\mu\nu\alpha} + (t^\alpha)_{KL} A_{[\mu}{}^K \delta A_{\nu]}{}^L , \\ \Delta B_{\mu\nu K} &\equiv \delta B_{\mu\nu K} + \Omega_{LN} (A_{[\mu}{}^N \partial_K \delta A_{\nu]}{}^L - \partial_K A_{[\mu}{}^N \delta A_{\nu]}{}^L) . \end{aligned} \quad (7.1.34)$$

Pidiendo covariancia de la fuerza de campo uno puede obtener la transformación de gauge de las 2-formas a partir de la del vector de gauge. Sin embargo, hay una sutileza. Las transformaciones de la 2-forma participan en la variación de la fuerza de campo (7.1.34) de la misma manera que en (7.1.18). Allí, se observó que la combinación  $(t^\alpha)^{MN} \partial_M B_{\mu\nu\alpha}$  no es completamente independiente de  $\Omega^{MN} B_{\mu\nu N}$ . No es posible a priori aislar las transformaciones dadas por  $\Delta B_{\mu\nu\alpha}$  de aquellas dadas por  $\Delta B_{\mu\nu M}$ . En este punto, uno debe considerar una única 2-forma que surge de la combinación de las 2-formas  $B_{\mu\nu\alpha}$  y  $B_{\mu\nu M}$

$$\tilde{B}_{\mu\nu M} = 12(t^\alpha)_{M^N} \partial_N B_{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} B_{\mu\nu M} , \quad (7.1.35)$$

que elimina a la ambigüedad, con parámetro de gauge

$$\tilde{\Xi}_{\mu M} = 12(t^\alpha)_{M^N} \partial_N \hat{\Xi}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \hat{\Xi}_{\mu M} . \quad (7.1.36)$$

Pidiendo ahora que  $\delta \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M = \hat{\mathcal{L}}_\Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M$  las transformaciones de gauge son

$$\begin{aligned} \delta A_\mu{}^M &= \mathcal{D}_\mu \Lambda^M + \Omega^{MN} \tilde{\Xi}_{\mu N} , \\ \Delta \tilde{B}_{\mu\nu M} &= 2\mathcal{D}_{[\mu} \tilde{\Xi}_{\nu]M} + 12(t^\alpha)_{M^N} \partial_N [(t^\alpha)_{KL} \Lambda^K \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^L] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\Omega_{KL} (\Lambda^L \partial_M \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^K - \partial_M \Lambda^L \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^K)] , \end{aligned} \quad (7.1.37)$$



donde se definió  $\Delta\tilde{B}_{\mu\nu M} = \delta\tilde{B}_{\mu\nu M} - 2\{A_{[\mu}, \delta A_{\nu]}\}_M$ . Las expresiones entre corchetes no pueden ser directamente asignadas a las transformaciones  $\Lambda$  de las componentes de  $\tilde{B}_{\mu\nu M}$ , deben siempre considerarse en esta combinación. Una separación ingenua, como

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{\Lambda}}B_{\mu\nu\alpha} &= 2\mathcal{D}_{[\mu}\hat{\Xi}_{\nu]\alpha} + (t_\alpha)_{KL}\Lambda^K\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^L, \\ \Delta_{\hat{\Lambda}}B_{\mu\nu M} &= 2\mathcal{D}_{[\mu}\hat{\Xi}_{\nu]M} - \Omega_{KL}\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^K\partial_M\hat{\Lambda}^L - \hat{\Lambda}^L\partial_M\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^K\right),\end{aligned}\tag{7.1.38}$$

llevaría a un álgebra de gauge inconsistente, con transformaciones que no cierran. Más adelante se discutirá de qué manera aislar las componentes y sus transformaciones.

Las identidades de Bianchi

$$3\mathcal{D}_{[\mu}\mathcal{F}_{\nu\rho]}{}^M + \tilde{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho M} = 0,\tag{7.1.39}$$

$$\mathcal{D}_{[\mu}\tilde{\mathcal{H}}_{\nu\rho\sigma]M} - \frac{3}{2}\{\mathcal{F}_{[\mu\nu}, \mathcal{F}_{\rho\sigma]}\}_M = 0,\tag{7.1.40}$$

definen a la 3-forma que da la fuerza de campo para la 2-forma

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho M} = 3\left(\mathcal{D}_{[\mu}\tilde{B}_{\nu\rho]M} + 2\left\{A_{[\mu}, \partial_\nu A_{\rho]} - \frac{1}{3}[A_\nu, A_\rho]_{(E)}\right\}_M\right),\tag{7.1.41}$$

que también está covariantemente vinculada y transforma como un vector bajo difeomorfismos generalizados, como puede verse fácilmente de

$$\delta\tilde{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho M} = 3\mathcal{D}_{[\mu}\Delta\tilde{B}_{\nu\rho]M} + 6\{\delta A_{[\mu}, \mathcal{F}_{\nu\rho]}\}_M.\tag{7.1.42}$$

Las transformaciones (7.1.37) admiten los siguientes parámetros triviales

$$\hat{\Lambda}^M = 12(t^\alpha)^{MN}\partial_N\chi_\alpha + \frac{1}{2}\Omega^{MN}\chi_N \equiv \Omega^{MN}\tilde{\chi}_N\tag{7.1.43}$$

$$\tilde{\Xi}_{\mu M} = -\mathcal{D}_\mu\tilde{\chi}_M,\tag{7.1.44}$$

con  $\chi_\alpha$  una función genérica en la adjunta de  $E_{7(7)}$ ,  $\chi_M$  una función covariantemente vinculada tal que  $\tilde{\chi}_M$  tiene peso  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Estos parámetros están expresados en la base en que las transformaciones de gauge pueden escribirse de forma covariante, dando origen a parámetros triviales que dependen de los campos. Para este conjunto de parámetros, los corchetes que cierran el álgebra dependen de los campos, por lo que resultará conveniente redefinir los parámetros y obtener un conjunto  $(\Lambda^M, \tilde{\Xi}_{\mu M})$  tal que los corchetes sean independientes de los campos. Estos parámetros vienen dados por

$$\hat{\Lambda}^M = \Lambda^M, \quad \tilde{\Xi}_{\mu M} = \tilde{\Xi}_{\mu M} + 2\{\Lambda, A_\mu\}_M,\tag{7.1.45}$$

y ahora los parámetros triviales no dependen de los campos

$$\begin{aligned}\Lambda^M &= \Omega^{MN}\tilde{\chi}_N, \\ \tilde{\Xi}_{\mu M} &= -\partial_\mu\tilde{\chi}_M.\end{aligned}\tag{7.1.46}$$

Las transformaciones de gauge en esta base son

$$\begin{aligned}\delta A_\mu{}^M &= \partial_\mu \Lambda^M + \widehat{\mathcal{L}}_\Lambda A_\mu{}^M + \Omega^{MN} \widetilde{\Xi}_{\mu N} , \\ \delta \widetilde{B}_{\mu\nu M} &= 2\partial_{[\mu} \widetilde{\Xi}_{\nu]M} + \widehat{\mathcal{L}}_\Lambda \widetilde{B}_{\mu\nu M} + 2\{\Sigma_{[\mu}, A_{\nu]}\}_M ,\end{aligned}\tag{7.1.47}$$

donde se definió

$$\Sigma_\mu{}^M = \Omega^{MN} \widetilde{\Xi}_{\mu N} + \partial_\mu \Lambda^M .\tag{7.1.48}$$

Estas transformaciones cierran

$$[\delta_1, \delta_2] = -\delta_{\Lambda_{12}} - \delta_{\widetilde{\Xi}_{12}} ,\tag{7.1.49}$$

con respecto a los corchetes (independientes de los campos)

$$\begin{aligned}\Lambda_{12}^M &= [\Lambda_1, \Lambda_2]_{(E)}^M , \\ \widetilde{\Xi}_{12\mu M} &= 2\widehat{\mathcal{L}}_{\Lambda_{[1}} \widetilde{\Xi}_{2]\mu M} - 2\{\partial_\mu \Lambda_{[1}, \Lambda_2]\} .\end{aligned}\tag{7.1.50}$$

Por conveniencia, se agruparán los parámetros de forma

$$\zeta = \left( \Lambda^M, \widetilde{\Xi}_{\mu M} \right),\tag{7.1.51}$$

y se definirá el corchete de la transformación como

$$[\zeta_1, \zeta_2] = \left( \Lambda_{12}^M, \widetilde{\Xi}_{12\mu M} \right) .\tag{7.1.52}$$

El Jacobiator viene dado por

$$J = 3 [[\zeta_1, \zeta_2], \zeta_3] = \left( \widetilde{N}^M, -\partial_\mu \widetilde{N}^M \right) ,\tag{7.1.53}$$

con el mismo  $\widetilde{N}$  definido en (7.1.21).

## 7.2 La acción y su relación con supergravedad

Hasta aquí se han descrito las transformaciones de gauge. La dinámica de la teoría viene dada por la acción

$$\begin{aligned}S_{\text{EFT}} &= \int d^4x d^{56}Y e \left( \widehat{R} + \frac{1}{48} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \mathcal{M}^{MN} \mathcal{D}_\nu \mathcal{M}_{MN} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \mathcal{M}_{MN} \mathcal{F}^{\mu\nu M} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^N + e^{-1} \mathcal{L}_{\text{top}} - V(\mathcal{M}_{MN}, g_{\mu\nu}) \right),\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

con el escalar de curvatura dado por

$$e_a{}^\mu e_b{}^\nu \widehat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} ,\tag{7.2.2}$$

construido a partir del tensor de Riemann

$$\widehat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \equiv R_{\mu\nu}{}^{ab}[\omega] + \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M e^{a\rho} \partial_M e_\rho{}^b ,\tag{7.2.3}$$

donde el tensor de curvatura de la conexión de spin  $R_{\mu\nu}{}^{ab}[\omega]$  se construye a partir de las derivadas covariantes

$$\mathcal{D}_\mu e_\nu{}^a \equiv \partial_\mu e_\nu{}^a - A_\mu{}^M \partial_M e_\nu{}^a - \frac{1}{2} \partial_M A_\mu{}^M e_\nu{}^a . \quad (7.2.4)$$

El término topológico viene dado por

$$\mathcal{L}_{\text{top}} = -\frac{1}{24} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M \mathcal{D}_\rho \mathcal{F}_{\sigma\tau M} , \quad (7.2.5)$$

y el potencial toma la forma

$$\begin{aligned} V = & -\frac{1}{48} \mathcal{M}^{MN} \partial_M \mathcal{M}^{KL} \partial_N \mathcal{M}_{KL} + \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} \partial_M \mathcal{M}^{KL} \partial_L \mathcal{M}_{NK} \\ & - \frac{1}{2} g^{-1} \partial_M g \partial_N \mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4} \mathcal{M}^{MN} g^{-1} \partial_M g g^{-1} \partial_N g - \frac{1}{4} \mathcal{M}^{MN} \partial_M g^{\mu\nu} \partial_N g_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Además, los 56 campos de gauge  $A_\mu{}^M$  están sujetos a las ecuaciones de autodualidad siguientes

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M = -\frac{1}{2} e \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Omega^{MN} \mathcal{M}_{NK} \mathcal{F}^{\rho\sigma K} . \quad (7.2.7)$$

Cada término en la acción (7.2.1) se determina por invariancia ante difeomorfismos internos generalizados parametrizados por  $\Lambda^M$ . En contraste, los coeficientes relativos entre los términos se determinan exigiendo invariancia de la acción bajo el resto de las simetrías de gauge dadas por la versión covariantizada de los difeomorfismos externos con parámetros  $\xi^\mu(x, Y)$ . Estas variaciones de gauge vienen dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\xi e_\mu{}^a &= \xi^\nu \mathcal{D}_\nu e_\mu{}^a + \mathcal{D}_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a , \\ \delta_\xi \mathcal{M}_{MN} &= \xi^\mu \mathcal{D}_\mu \mathcal{M}_{MN} , \\ \delta_\xi A_\mu{}^M &= \xi^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}{}^M + \mathcal{M}^{MN} g_{\mu\nu} \partial_N \xi^\nu \\ \Delta_\xi B_{\mu\nu\alpha} &= \xi^\rho \mathcal{H}_{\mu\nu\rho\alpha} , \\ \Delta_\xi B_{\mu\nu M} &= \xi^\rho \mathcal{H}_{\mu\nu\rho M} + 2e \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} g^{\sigma\tau} \mathcal{D}^\rho \left( g_{\tau\lambda} \partial_M \xi^\lambda \right) . \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Obteniendo las ecuaciones de movimiento a partir de (7.2.1) y (7.2.7) y eligiendo soluciones apropiadas del vínculo fuerte (7.1.2), uno puede recuperar la dinámica completa de supergravedad en  $D = 11$  después de redefinir los campos 11-dimensionales de acuerdo a una separación de Kaluza-Klein  $4 + 7$  de las coordenadas, pero reteniendo la dependencia en las 11 coordenadas. La solución del vínculo fuerte apropiada para relacionar supergravedad en  $D = 11$  con EFT se obtiene de descomponer la representación fundamental de  $E_{7(7)}$  bajo su subgrupo maximal  $GL(7)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{56} &\longrightarrow 7_{+3} + 21'_{+1} + 21_{-1} + 7'_{-3} , \\ \{Y^M\} &\longrightarrow \{y^m, y_{mn}, y^{mn}, y_m\} . \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

donde el subíndice hace referencia al peso bajo  $GL(1)$ , los índices  $m, n, \dots$  etiquetan a la representación vectorial de  $GL(7)$  y las coordenadas  $y^{mn} = y^{[mn]}$ ,  $y_{mn} = y_{[mn]}$  son antisimétricas

en sus índices. Para hacer contacto con supergravedad en  $D = 11$ , se debe elegir una solución del vínculo fuerte truncando la dependencia de todos los campos y parámetros de gauge en todas las coordenadas salvo las  $y^m$  en  $7_{+3}$ :

$$\Phi(x^\mu, Y^M) \longrightarrow \Phi(x^\mu, y^m), \quad \text{i.e. } \partial^{mn} \rightarrow 0, \quad \partial_{mn} \rightarrow 0, \quad \partial^m \rightarrow 0. \quad (7.2.10)$$

Además, las 2-formas en la fundamental también se ven afectadas por esta elección:

$$B_{\mu\nu}{}^{mn} \rightarrow 0, \quad B_{\mu\nu mn} \rightarrow 0, \quad B_{\mu\nu}{}^m \rightarrow 0. \quad (7.2.11)$$

A partir de redefiniciones de campos y de identificaciones con los duales de los campos físicos de supergravedad en  $D = 11$  se obtiene la teoría deseada.

También existe una elección distinta para soluciones del vínculo fuerte que relaciona EFT con supergravedad de tipo IIB. Esta situación no sólo se manifiesta en esta teoría sino que también fue observada para el caso de EFT con  $E_{6(6)}$  [107,108]. En el caso de  $E_{7(7)}$  el subgrupo maximal que debe elegirse es  $GL(6) \times SL(2)$ , bajo el cual la representación fundamental se descompone de acuerdo a

$$\mathbf{56} \rightarrow (6, 1)_{+2} + (6', 2)_{+1} + (20, 1)_0 + (6, 2)_{-1} + (6', 1)_{-2}. \quad (7.2.12)$$

La solución que relaciona EFT con supergravedad de tipo IIB se logra restringiendo la dependencia de todos los campos a las seis coordenadas  $y^m$  con carga 2 frente a  $GL(1)$  y tomando todas las componentes de  $B_{\mu\nu M}$  iguales a cero a menos de las asociadas a estas seis coordenadas

$$\begin{aligned} \partial^{ma} \rightarrow 0, \quad \partial^{kmn} \rightarrow 0, \quad \partial_{ma} \rightarrow 0, \quad \partial^m \rightarrow 0, \\ B^{ma} \rightarrow 0, \quad B^{kmn} \rightarrow 0, \quad B_{ma} \rightarrow 0, \quad B^m \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

## Capítulo 8

# Álgebras $L_\infty$ y teorías de campos

Las álgebras  $L_\infty$  pueden entenderse como generalizaciones de las álgebras de Lie, en donde el producto bilineal dado por el corchete de Lie se generaliza a una serie de nuevos productos con distinto número de argumentos. A partir de la sugerencia en [38] que las álgebras  $L_\infty$  están relacionadas con teorías clásicas de campos, resulta de interés estudiar sus propiedades y extender estos resultados para nuevas teorías de campos. La relación explícita entre los elementos de un álgebra  $L_\infty$  y aquellos de una teoría de campos se sistematizaron en [38]. Los campos, transformaciones de gauge, y las ecuaciones de movimiento pertenecen a distintos subespacios gradados en el álgebra. Algunos productos pueden “leerse” de las transformaciones de gauge de los campos, de las ecuaciones de movimiento, las identidades de clausura, etc. En este capítulo se darán las definiciones básicas de las álgebras  $L_\infty$  y su relación con las teorías de campos y en el siguiente se tratarán ejemplos concretos.

### 8.1 Definiciones

Para tener un álgebra  $L_\infty$  se define un espacio vectorial gradado  $X$ , que es la suma directa de subespacios vectoriales de grado  $n$   $X_n$ , con  $n \in \mathbb{Z}$

$$X = \bigoplus_n X_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.1.1)$$

Se denotará como  $x$  a un elemento de  $X$  con grado definido, es decir,  $x \in X_p$  para un  $p$  fijo.

En un álgebra  $L_\infty$  hay productos multilineales  $\ell_k$

$$\ell_k : X^{\otimes k} \rightarrow X, \quad (8.1.2)$$

con grado intrínseco  $k - 2$ . Actuando sobre elementos  $x_i$  los productos tienen grado

$$\deg(\ell_k(x_1, x_2, \dots, x_k)) = k - 2 + \sum_{i=1}^k \deg(x_i), \quad (8.1.3)$$

donde el primer término del lado derecho corresponde al grado intrínseco del producto  $\ell_k$ . Estos productos son conmutativos gradados, es decir que al intercambiar sus argumentos, pueden diferir en un signo. Para una permutación  $\sigma$  se tiene

$$\ell_k(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma \epsilon(\sigma; x) \ell_k(x_1, \dots, x_k) . \quad (8.1.4)$$

El factor  $(-1)^\sigma$  da un signo positivo o negativo dependiendo de si la permutación es par o impar, respectivamente. El factor  $\epsilon(\sigma; x)$  es el signo de Koszul: dada un un álgebra gradada conmutativa  $\Lambda(x_1, x_2, \dots)$  con producto

$$x_i \wedge x_j = (-1)^{\deg(x_i)\deg(x_j)} x_j \wedge x_i, \quad \forall i, j , \quad (8.1.5)$$

el signo de Koszul se define para una permutación como

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \epsilon(\sigma; x) x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(k)} . \quad (8.1.6)$$

Por ejemplo, para  $\ell_2$  se tiene

$$\ell_2(x_1, x_2) = (-1)^{1+x_1x_2} \ell_2(x_2, x_1) , \quad (8.1.7)$$

donde se ha introducido la notación

$$(-1)^{\deg(x_i)\deg(x_j)} \equiv (-1)^{x_i x_j} , \quad (8.1.8)$$

o sea que cuando aparezcan en los exponentes, los factores  $x_i$  harán referencia al grado de  $x_i$ .

Los productos obedecen las identidades de  $L_\infty$ , un análogo a la identidad de Jacobi. Estas identidades están etiquetadas por  $n \in \mathbb{N}$  que indica el número de argumentos, y toman la forma

$$\sum_{i+j=n+1} (-1)^{i(j-1)} \sum_{\sigma_{\text{unshuffles}}} (-1)^\sigma \epsilon(\sigma; x) \ell_j(\ell_i(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = 0 . \quad (8.1.9)$$

La suma sobre  $\sigma$  ( $\sigma_{\text{unshuffles}}$ ) no es una suma sobre todas las permutaciones, sino que incluye sólo los términos que satisfacen

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(i), \quad \sigma(i+1) < \dots < \sigma(n) . \quad (8.1.10)$$

No considera los términos que resultan de permutar los argumentos del producto  $\ell_i$  entre sí y/o los que están fuera de  $\ell_i$  entre sí. Es decir, si la suma fuese sobre todas las permutaciones, para  $n = 3$  se tendría

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \ell_2(\ell_2(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}) &= [\ell_2(\ell_2(x_1, x_2), x_3) + \ell_2(\ell_2(x_2, x_1), x_3)] \\ &+ [\ell_2(\ell_2(x_1, x_3), x_2) + \ell_2(\ell_2(x_3, x_1), x_2)] \\ &+ [\ell_2(\ell_2(x_2, x_3), x_1) + \ell_2(\ell_2(x_3, x_2), x_1)] . \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

En cambio, la suma sobre  $\sigma_{\text{unshuffles}}$  considera solamente al primero de los dos términos encerrados en cada corchete en el lado derecho:

$$\sum_{\sigma_{\text{unshuffles}}} \ell_2(\ell_2(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}) = \ell_2(\ell_2(x_1, x_2), x_3) + \ell_2(\ell_2(x_1, x_3), x_2) + \ell_2(\ell_2(x_2, x_3), x_1). \quad (8.1.12)$$

Las relaciones (8.1.9) suelen escribirse de manera compacta como

$$\sum_{i+j=n+1} (-1)^{i(j-1)} \ell_j \ell_i = 0, \quad (8.1.13)$$

de manera tal que las primeras identidades son

$$n = 1 \quad 0 = \ell_1 \ell_1 \quad (8.1.14)$$

$$n = 2 \quad 0 = \ell_1 \ell_2 - \ell_2 \ell_1 \quad (8.1.15)$$

$$n = 3 \quad 0 = \ell_1 \ell_3 + \ell_2 \ell_2 + \ell_3 \ell_1 \quad (8.1.16)$$

$$n = 4 \quad 0 = \ell_1 \ell_4 - \ell_2 \ell_3 + \ell_3 \ell_2 - \ell_4 \ell_1, \dots \quad (8.1.17)$$

Escribiendo explícitamente los argumentos de las identidades, algunos de los productos pueden interpretarse en términos de operadores conocidos. Por ejemplo, para  $n = 1$  se tiene

$$\ell_1(\ell_1(x)) = 0. \quad (8.1.18)$$

Esto significa que  $\ell_1$  es un operador nilpotente, también llamado  $Q$  como el operador de BRST. Para  $n = 2$ , la identidad es

$$\ell_1(\ell_2(x_1, x_2)) = \ell_2(\ell_1(x_1), x_2) + (-1)^{x_1} \ell_2(x_1, \ell_1(x_2)), \quad (8.1.19)$$

de donde se ve que  $\ell_1$  puede ser interpretado como un operador diferencial sobre los argumentos de  $\ell_2$ , que satisface la regla (gradada) de Leibniz. Para  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned} 0 = & \ell_2(\ell_2(x_1, x_2), x_3) + (-1)^{(x_1+x_2)x_3} \ell_2(\ell_2(x_3, x_1), x_2) + (-1)^{(x_2+x_3)x_1} \ell_2(\ell_2(x_2, x_3), x_1) \\ & + \ell_1(\ell_3(x_1, x_2, x_3)) + \ell_3(\ell_1(x_1), x_2, x_3) + (-1)^{x_1} \ell_3(x_1, \ell_1(x_2), x_3) + (-1)^{x_1+x_2} \ell_3(x_1, x_2, \ell_1(x_3)). \end{aligned} \quad (8.1.20)$$

La primera línea de esta relación es la identidad (gradada) de Jacobi y la segunda línea caracteriza una deformación de un álgebra de Lie. Los términos dados por  $(\ell_1 \ell_3 + \ell_3 \ell_1)$  son BRST exactos y en el lenguaje de álgebras homológicas  $\ell_3$  es una cadena homotópica, por lo que también se conocen a las álgebras  $L_\infty$  como álgebras de Lie homotópicas [44] y en ocasiones se utiliza la expresión “ $\ell_2$  satisface la identidad de Jacobi a menos de homotopías”.

Dado que se necesitará luego, se escribirá la relación para  $n = 4$ , que toma la forma

$$\begin{aligned}
0 = & \ell_1(\ell_4(x_1, x_2, x_3, x_4)) \\
& - \ell_2(\ell_3(x_1, x_2, x_3), x_4) + (-1)^{x_3 x_4} \ell_2(\ell_3(x_1, x_2, x_4), x_3) \\
& + (-1)^{(1+x_1)x_2} \ell_2(x_2, \ell_3(x_1, x_3, x_4)) - (-1)^{x_1} \ell_2(x_1, \ell_3(x_2, x_3, x_4)) \\
& + \ell_3(\ell_2(x_1, x_2), x_3, x_4) + (-1)^{1+x_2 x_3} \ell_3(\ell_2(x_1, x_3), x_2, x_4) \\
& + (-1)^{x_4(x_2+x_3)} \ell_3(\ell_2(x_1, x_4), x_2, x_3) - \ell_3(x_1, \ell_2(x_2, x_3), x_4) \\
& + (-1)^{x_3 x_4} \ell_3(x_1, \ell_2(x_2, x_4), x_3) + \ell_3(x_1, x_2, \ell_2(x_3, x_4)) \\
& - \ell_4(\ell_1(x_1), x_2, x_3, x_4) - (-1)^{x_1} \ell_4(x_1, \ell_1(x_2), x_3, x_4) \\
& - (-1)^{x_1+x_2} \ell_4(x_1, x_2, \ell_1(x_3), x_4) - (-1)^{x_1+x_2+x_4} \ell_4(x_1, x_2, x_3, \ell_1(x_4)) .
\end{aligned} \tag{8.1.21}$$

## 8.2 Teorías de campos con estructura $L_\infty$

A continuación se describirá la relación del álgebra  $L_\infty$  con teorías de campos. En primer lugar, hay que asignar subespacios vectoriales a los objetos de la teoría de campos como parámetros de gauge, campos y ecuaciones de movimiento (EOM, por sus siglas en inglés). Siguiendo la construcción hecha en [38] se tomará a los parámetros de gauge  $\zeta$  como vectores de grado  $p = 0$ , los campos dinámicos  $\Psi$  serán vectores de grado  $p = -1$  y las EOM  $\mathcal{F}$  tendrán grado  $p = -2$ . Tanto los parámetros de gauge como los campos saturan los espacios  $X_0$  y  $X_{-1}$ , es decir que cualquier elemento en  $X_0$  es un parámetro de gauge válido. Sin embargo, las EOMs forman un subconjunto del subespacio  $X_{-2}$  como quedará claro a la brevedad y se denotará a un elemento genérico de este espacio como “ $E$ ”. Si la teoría de campos admite redundancias para las simetrías de gauge, este conjunto de subespacios está incompleto y se requiere un subespacio extra  $X_1$  con elementos parametrizando estas ambigüedades, y posiblemente subsiguientes espacios  $X_2, X_3$ , etc.

Dados los campos  $\Psi$ , las ecuaciones de movimiento se definen como

$$\mathcal{F}(\Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \ell_n(\Psi^n) = \ell_1(\Psi) - \frac{1}{2} \ell_2(\Psi^2) - \frac{1}{3!} \ell_3(\Psi^3) + \frac{1}{4!} \ell_4(\Psi^4) + \dots \tag{8.2.1}$$

donde se ha introducido la notación de potenciación por comodidad

$$\ell_k(\Psi^k) = \ell_k(\underbrace{\Psi, \dots, \Psi}_{k \text{ veces}}) . \tag{8.2.2}$$

De la definición (8.2.1) se ve inmediatamente que  $\mathcal{F} \in X_{-2}$ : cada término contiene un producto  $\ell_n$  de grado  $n - 2$  y  $n$  campos de grado  $-1$ . También puede verse que  $\mathcal{F}$  no es un elemento



genérico de  $X_{-2}$ . La combinación siguiente también pertenece a  $X_{-2}$  pero no tiene la forma de una EOM:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ell_n(\Psi^n) \quad (8.2.3)$$

con  $a_n$  constantes arbitrarias.

También se puede definir una acción a partir de la cual se obtienen las EOMs si existe un producto interno  $\langle x_1, x_2 \rangle$  con las propiedades

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2 \rangle &= (-1)^{x_1 x_2} \langle x_2, x_1 \rangle, \\ \langle x, \ell_n(x_1, \dots, x_n) \rangle &= (-1)^{x x_1 + 1} \langle x_1, \ell_n(x, x_2, \dots, x_n) \rangle. \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

La primera propiedad indica que el producto es simétrico gradado y la segunda, que esa expresión es una función multilineal gradada de todos sus argumentos. Con este producto interno, la acción es

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n+1)!} \langle \Psi, \ell_n(\Psi^n) \rangle, \quad (8.2.5)$$

y las EOMs se obtienen variando  $\Psi$  y usando

$$\delta (\ell_n(\Psi_1, \Psi_2, \dots)) = \ell_n(\delta \Psi_1, \Psi_2, \dots) + \ell_n(\Psi_1, \delta \Psi_2, \dots) + \dots \quad (8.2.6)$$

Las transformaciones de gauge vienen dadas por

$$\delta_\zeta \Psi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+1}(\zeta, \Psi^n) = \ell_1(\zeta) + \ell_2(\zeta, \Psi) - \frac{1}{2} \ell_3(\zeta, \Psi^2) - \dots, \quad (8.2.7)$$

Las ecuaciones de movimiento deben ser covariantes ante transformaciones de gauge, lo que implica que la transformación de gauge de  $\mathcal{F}$  se anula cuando  $\mathcal{F} = 0$ . Utilizando las identidades (8.1.9) junto con (8.2.6) puede verse que

$$\delta_\zeta \mathcal{F} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+2}(\zeta_1, \mathcal{F}, \Psi) = \ell_2(\zeta, \mathcal{F}) + \ell_3(\zeta, \mathcal{F}, \Psi) - \frac{1}{2} \ell_4(\zeta, \mathcal{F}, \Psi^2) + \dots \quad (8.2.8)$$

que se anula si  $\mathcal{F} = 0$ , tal como es requerido. Obviamente, la acción resulta invariante ante esta transformación, lo que puede verse, nuevamente, utilizando las identidades (8.1.9).

La acción también resulta invariante ante transformaciones denominadas “simetrías de ecuaciones de movimiento”. Se trata de transformaciones que se anulan al evaluar las EOMs. Por ejemplo, tomando  $\delta \Psi = \ell_2(\chi, \mathcal{F})$  con  $\chi$  con grado impar, se tiene

$$\delta S = \langle \delta \Psi, \mathcal{F} \rangle = \langle \mathcal{F}, \ell_2(\chi, \mathcal{F}) \rangle = \langle \chi, \ell_2(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \rangle = 0, \quad (8.2.9)$$

donde en la tercera igualdad se ha utilizado la segunda propiedad del producto interno y en la última, el hecho de que  $\ell_2(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$  debido a las propiedades de simetría de los productos  $\ell_k$  ante permutaciones de sus argumentos (cf. (8.1.7)).

Tomando el conmutador de dos transformaciones de gauge (8.2.7) uno encuentra

$$[\delta_{\zeta_1}, \delta_{\zeta_2}] \Psi = \delta_{-\mathbf{C}(\zeta_1, \zeta_2, \Psi)} \Psi + \delta_{\zeta_1, \zeta_2}^T \Psi, \quad (8.2.10)$$

con

$$\mathbf{C}(\zeta_1, \zeta_2, \Psi) \equiv \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+2}(\zeta_1, \zeta_2, \Psi^n), \quad (8.2.11)$$

y

$$\delta_{\zeta_1, \zeta_2}^T \Psi \equiv \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \ell_{n+3}(\zeta_1, \zeta_2, \mathcal{F}, \Psi^n). \quad (8.2.12)$$

El índice ‘‘T’’ en  $\delta_{\zeta_1, \zeta_2}^T$  es por trivial, dado que el término  $\delta_{\zeta_1, \zeta_2}^T \Psi$  se anula si se utilizan las ecuaciones de movimiento. Si el álgebra de gauge cierra off-shell, entonces  $\delta_{\zeta_1, \zeta_2}^T \Psi = 0$  y se obtiene un álgebra cerrada bajo el corchete dado por  $\mathbf{C}(\zeta_1, \zeta_2, \Psi)$ , que depende de los campos. Si, además,  $\mathbf{C}(\zeta_1, \zeta_2, \Psi)$  no depende de los campos, entonces se tiene

$$[\delta_{\zeta_1}, \delta_{\zeta_2}] \Psi = \delta_{-\ell_2(\zeta_1, \zeta_2)} \Psi, \quad \ell_{n+2}(\zeta_1, \zeta_2, \Psi^n) = 0, \quad (8.2.13)$$

y el corchete de clausura viene dado simplemente por  $\ell_2$ .

Además del conmutador, uno puede considerar el *gauge Jacobiator*  $\mathcal{J}$ , dado por

$$\mathcal{J}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \equiv \sum_{\text{cyc}} [\delta_{\zeta_3}, [\delta_{\zeta_2}, \delta_{\zeta_1}]] = 0. \quad (8.2.14)$$

Esto se anula por definición, como puede verse al expandir los términos y actuando sobre un campo de prueba, *i.e.*  $\delta_{\zeta_1} \delta_{\zeta_2} \delta_{\zeta_3} \Psi = \delta_{\zeta_1} (\delta_{\zeta_2} (\delta_{\zeta_3} \Psi))$ . Usando las identidades  $L_\infty$  sobre (8.2.14) uno encuentra

$$\sum_{\text{cyc}} [\delta_{\zeta_3}, [\delta_{\zeta_2}, \delta_{\zeta_1}]] \Psi = -\delta_{Q'\chi} \Psi - \delta_\chi^T \Psi, \quad (8.2.15)$$

con  $\chi \in X_1$  dado por

$$\chi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \ell_{n+3}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \Psi^n), \quad (8.2.16)$$

y

$$Q'\chi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \ell_{n+1}(\chi, \Psi^n) \quad (8.2.17)$$

$$\delta_\chi^T \Psi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+2}(\mathcal{F}, \chi, \Psi^n). \quad (8.2.18)$$

Aquí se pone de manifiesto la necesidad de introducir el espacio  $X_1$  mencionado anteriormente. Puede mostrarse que el lado derecho de (8.2.15) se anula idénticamente cuando se utilizan las relaciones  $L_\infty$ , como debe suceder por consistencia.

Este espacio  $X_1$  contiene a las transformaciones de gauge triviales, es decir a aquellas transformaciones de gauge que están en la misma clase que  $\zeta = 0$ . Por ejemplo, para el campo electromagnético  $A(x) = A_\mu(x) dx^\mu$  las transformaciones de gauge vienen dadas por

$A(x) \rightarrow A(x) + d\alpha(x)$ , con  $\alpha(x)$  una función diferenciable. Los parámetros de gauge dados por un diferencial exacto,  $\alpha(x) = d\beta(x)$ , dan lugar a transformaciones de gauge triviales. En el lenguaje de  $L_\infty$ , esto implica la posibilidad de extender la cantidad de subespacios gradados para incluir a  $X_1$ , que contendrá a las funciones  $\beta(x)$ .

### 8.3 Relación con teorías de campos generales I

Hasta aquí se han descrito las álgebras  $L_\infty$  y cómo construir una teoría de campos con esta estructura. La intención ahora es analizar teorías de campos conocidas para ver si gozan de esta estructura, en el espíritu de lo hecho en [38, 42, 109]. La estrategia consistirá en “leer” ciertos productos a partir de las definiciones dadas en la sección anterior y luego verificar todas las identidades (8.1.9), definiendo nuevos productos cuando sea necesario.

La ecuación para las EOMs (8.2.1)

$$\mathcal{F}(\Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \ell_n(\Psi^n),$$

se utilizará como definición de los productos del tipo  $\ell_n(\Psi^n)$  y las transformaciones de gauge (8.2.7)

$$\delta_\zeta \Psi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+1}(\zeta, \Psi^n)$$

definirán a los productos  $\ell_{n+1}(\zeta, \Psi^n)$ . Es importante notar que estas expresiones permiten identificar solamente la parte diagonal de  $\ell_n$ , es decir, para el caso de las EOMs se tiene  $\ell_n(\Psi^n)$  y no  $\ell_n(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ . Sin embargo, la parte no diagonal puede obtenerse a partir de las identidades de polarización, que relacionan la parte no diagonal con la parte diagonal. Por ejemplo, para el caso más sencillo de  $\ell_2$

$$2\ell_2(\Psi_1, \Psi_2) = \ell_2(\Psi_1 + \Psi_2, \Psi_1 + \Psi_2) - \ell_2(\Psi_1, \Psi_1) - \ell_2(\Psi_2, \Psi_2). \quad (8.3.1)$$

Esta expresión puede generalizarse para cualquier  $\ell_n$  como se mostró en [38].

En principio, los productos obtenidos a partir de (8.2.1), (8.2.7) y las identidades (8.1.9) son suficientes para determinar si una dada teoría posee esta estructura. Sin embargo, también serán de utilidad otras ecuaciones dadas en la sección anterior como la covariancia de las ecuaciones de movimiento (8.2.8), el conmutador de dos transformaciones de gauge (8.2.10) y el gauge jacobiator (8.2.16). Estas son una consecuencia de las transformaciones de gauge y de las ecuaciones de movimiento combinadas con las identidades (8.1.9). De todas formas, al final del día, todas las identidades  $L_\infty$  deben ser verificadas explícitamente. En la tabla 8.3.1 se presentan los productos que pueden ser leídos directamente de las expresiones de una teoría de campos.

Producto	desde	Ecuación
$\ell_n(\Psi^n)$	EOMs	(8.2.1)
$\ell_{n+1}(\zeta, \Psi)$	transformaciones de gauge	(8.2.7)
$\ell_{n+2}(\zeta^2, \Psi)$	conmutador de transformaciones de gauge	(8.2.10)
$\ell_{n+3}(\zeta^2, \mathcal{F}, \Psi^n)$	conmutador de transformaciones de gauge	(8.2.10)
$\ell_{n+3}(\zeta^3, \Psi)$	Jacobiator	(8.2.16)
$\ell_{n+2}(\zeta, \mathcal{F}, \Psi^n)$	covariancia de las EOMs	(8.2.8)

Tabla 8.3.1: Productos que pueden leerse de las ecuaciones cinéticas y dinámicas de una teoría de campos.

Para ilustrar esto puede tomarse el ejemplo de DFT. El álgebra de gauge cierra bajo el C-corchete, que no depende de los campos

$$[\delta_{\zeta_1}, \delta_{\zeta_2}] \Psi = \delta_{-[\zeta_1, \zeta_2]_{(C)}} \Psi . \quad (8.3.2)$$

Comparando esta expresión con (8.2.13) se puede identificar

$$\ell_2(\zeta_1, \zeta_2) = [\zeta_1, \zeta_2]_{(C)} . \quad (8.3.3)$$

A continuación, podría evaluarse la identidad para tres parámetros de gauge (8.1.20). La última línea en (8.1.20) da el Jacobiator, que en DFT está dado por

$$J(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \equiv 3 [ [\zeta_1, \zeta_2], \zeta_3 ] = \partial^M N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) , \quad (8.3.4)$$

con el escalar de Nijenhuis definido como

$$N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \equiv \frac{1}{2} [\zeta_1, \zeta_2]_{(C)} \cdot \zeta_3 . \quad (8.3.5)$$

Definiendo  $\ell_3(\ell_1(\zeta_i), \zeta_j, \zeta_k) \equiv 0$  se pueden identificar

$$\begin{aligned} \ell_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) &= -N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) , \\ \ell_1(N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) &= \partial^M N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) . \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Estas dos últimas identificaciones hechas a partir de una identidad de  $L_\infty$  podrían haber sido obtenidas también comparando el gauge Jacobiator de DFT con (8.2.15)

$$\sum_{\text{cyc}} [\delta_{\Lambda_3}, [\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}]] \Psi = \delta_{\partial^M N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} \Psi , \quad (8.3.7)$$

que, por consistencia, es nulo cuando se evalúa la transformación de gauge sobre un campo de prueba y se hace uso del vínculo fuerte.

Volviendo al caso general, después de identificados los productos uno debe verificar las relaciones  $L_\infty$ . Sin embargo, hay un gran conjunto de identidades que se cumplen automáticamente

debido a la construcción general de una teoría  $L_\infty$  y no es necesario hacer una verificación explícita. Como se mostró en [38], las identidades actuando sobre una  $n$ -upla de campos  $(\Psi_1, \dots, \Psi_n)$  se satisfacen si se hacen las definiciones

$$\ell_{n+1}(E, \Psi_1, \dots, \Psi_n) = 0, \quad n \geq 0, \quad E \in X_2. \quad (8.3.8)$$

Por otra parte las identidades actuando sobre  $(\zeta_1, \zeta_2, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$ , y  $(\zeta, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$  con  $n \geq 1$  también se satisfacen. Estas relaciones vienen de la clausura del álgebra de gauge actuando sobre campos y de las transformaciones de gauge de las EOMs.

En un trabajo posterior [109] se establecieron, además, condiciones suficientes que garantizan que el álgebra de gauge (aunque no necesariamente la teoría de campos completa) posee una estructura  $L_\infty$ . Si se tiene un álgebra  $(V, [\cdot, \cdot])$  con un corchete bilineal y antisimétrico y un espacio vectorial  $U$  con un mapa lineal  $\mathcal{D} : U \rightarrow V$  que cumple

$$\forall v_1, v_2, v_3 \in V : \text{Jac}(v_1, v_2, v_3) \in \text{Im}(\mathcal{D}), \quad (8.3.9)$$

$$[\text{Im}(\mathcal{D}), V] \subset \text{Im}(\mathcal{D}), \quad (8.3.10)$$

y donde  $\text{Im}(\mathcal{D})$  denota a la imagen de  $\mathcal{D}$ , entonces existe una estructura  $L_\infty$  con  $\ell_2(v, w) = [v, w]$  y subespacios gradados

$$X_2 \xrightarrow{\ell_1=\iota} X_1 \xrightarrow{\ell_1=\mathcal{D}} X_0, \quad (8.3.11)$$

donde  $X_0 = V$ ,  $X_1 = U$ ,  $X_2 = \text{Ker}(\mathcal{D})$ ,  $\text{Ker}(\mathcal{D})$  denota al núcleo de  $\mathcal{D}$  y  $\iota$  denota a la inclusión de  $\text{Ker}(\mathcal{D})$  en  $U$  y donde el producto de máximo orden posible es  $\ell_4$ .

Dicho en otras palabras, se tendrá una estructura  $L_\infty$  con los subespacios descritos anteriormente si

- El Jacobiator calculado a partir del corchete del álgebra es un parámetro trivial del álgebra (condición (8.3.9))
- El corchete entre un parámetro trivial de gauge y un parámetros genérico da un parámetro trivial (condición (8.3.10))

La lista entera de productos no triviales es

$$\begin{aligned}
c \in X_2 &: \ell_1(c) \\
\alpha \in X_1 &: \ell_1(\alpha) \\
v, w \in X_0 &: \ell_2(v, w) \\
\alpha \in X_1, v \in X_0 &: \ell_2(\alpha, v) \\
c \in X_2, v \in X_0 &: \ell_2(c, v) \\
\alpha, \beta \in X_1 &: \ell_2(\alpha, \beta) \\
v_1, v_2, v_3 \in X_0 &: \ell_3(v_1, v_2, v_3) \\
\alpha \in X_1, v_1, v_2 \in X_0 &: \ell_3(\alpha, v_1, v_2) \\
v_1, \dots, v_4 \in X_0 &: \ell_4(v_1, \dots, v_4)
\end{aligned} \tag{8.3.12}$$

## 8.4 Relación con teorías de campos generales II

Estos resultados fueron extendidos en [77] para incluir, además, a los campos y obtener  $L_\infty^{\text{gauge}+\text{campos}}$ , en el sentido de [38]. No se considerará, por el momento, a las EOMs, por lo que todos los productos en (8.2.1), es decir  $\ell_n(\Psi^n)$ , son tomados como nulos y no hay necesidad de incluir un subespacio gradado  $X_{-2}$ . Los campos serán incluidos en el subespacio  $X_{-1}$ . La única hipótesis adicional consiste en exigir que sus transformaciones de gauge sean de la forma

$$\delta_\zeta \Psi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f_{n+1}(\zeta, \Psi^n) \tag{8.4.1}$$

para funciones  $f_n$  cualesquiera, entonces, a partir de comparar con (8.2.7), se ve que uno puede hacer las identificaciones

$$f_{n+1}(\zeta, \Psi^n) = \ell_{n+1}(\zeta, \Psi^n). \tag{8.4.2}$$

Estos son los únicos productos adicionales con respecto a los obtenidos en [109] para el caso  $L_\infty^{\text{gauge}}$ .

Para ver que no se precisan nuevos productos se deben considerar todas las identidades  $L_\infty$  que involucren a los campos  $\Psi \in X_{-1}$  y a los elementos de los otros subespacios. Si las identidades no contienen argumentos  $\Psi \in X_{-1}$  serán satisfechas por los resultados hallados en [109]. Resulta conveniente considerar las relaciones  $L_\infty$  actuando sobre las siguientes listas

- Dos parámetros de gauge  $\zeta's \in X_0$  y cualquier número  $n \geq 0$  de campos  $\Psi's \in X_{-1}$ :  $(\zeta_1, \zeta_2, \Psi_1, \Psi_2, \dots)$ .
- Un parámetros de gauge  $\zeta \in X_0$  y cualquier número  $n > 0$  de  $\Psi's \in X_{-1}$ :  $(\zeta, \Psi_1, \Psi_2, \dots)$ .
- Un único parámetro de gauge  $\zeta \in X_0$ .

- Al menos un elemento  $c \in X_2$  (y cualquier otro vector, incluyendo al menos un campo  $\Psi \in X_{-1}$ ):  $(c, \dots)$ .
- Al menos un elemento  $\chi \in X_1$  (y cualquier otro vector, incluyendo al menos un campo  $\Psi \in X_{-1}$ ):  $(\chi, \dots)$ .
- Tres o más  $\zeta'$ s  $\in X_0$  y cualquier número  $n > 0$  de  $\Psi'$ s  $\in X_{-1}$ :  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n, \Psi_1, \Psi_2, \dots)$ .

Como se mostró en [38], los productos del primer caso satisfacen las relaciones  $L_\infty$  como consecuencia de la clausura del álgebra de gauge. El segundo punto se cumple trivialmente si uno hace la elección  $\ell_1(x) = 0, \forall x \in X_{-1}$ . La tercera lista da lugar a la identidad  $\ell_1(\ell_1(\zeta)) = \ell_1(x) = 0$ , donde en la primera igualdad se utilizó que  $\ell_1(\zeta) = x \in X_{-1}$  y en la segunda la definición anterior:  $\ell_1(x) = 0, \forall x \in X_{-1}$ .

Para los otros casos, se construirán todos los posibles términos de las identidades, que son de la forma  $\ell_i(\dots\ell_j(\dots))$ , y se mostrará que se anulan o que se compensan entre sí. Para ello, serán necesarios los productos en (8.3.12).

**Al menos un elemento  $c \in X_2$  (y cualquier otro vector, incluyendo al menos un campo  $\Psi \in X_{-1}$ ):  $(c, \dots)$ .** De (8.3.12) se ve que hay solo dos productos no triviales que involucran a  $c \in X_2$ :  $\ell_1(c), \ell_2(c, \zeta)$ . Consideremos en primer lugar que se tiene al menos dos  $c$ 's. En ese caso, tendríamos los productos anidados de la forma

$$\ell_i(c_1, \Psi, \dots \underbrace{\ell_2(c_2, \zeta)}_{\equiv \tilde{c} \in X_2}) \Rightarrow \ell_i(c_1, \Psi, \dots \tilde{c}) = 0, \quad (8.4.3)$$

$$\ell_i(c_1, \Psi, \dots \underbrace{\ell_1(c_2)}_{\equiv \chi \in X_1}) \Rightarrow \ell_i(c_1, \Psi, \dots \chi) = 0, \quad (8.4.4)$$

$$\ell_i(c_1, c_2 \dots \ell_j(\dots)) = 0. \quad (8.4.5)$$

Para un único  $c$  se tiene

$$\ell_i(\Psi, \dots \underbrace{\ell_1(c)}_{\equiv \chi \in X_1}) \Rightarrow \ell_i(\Psi, \dots \chi) = 0, \quad (8.4.6)$$

$$\ell_i(\Psi, \dots \underbrace{\ell_2(c, \zeta)}_{\equiv \tilde{c} \in X_2}) \Rightarrow \ell_i(\Psi, \dots \tilde{c}) = 0, \quad (8.4.7)$$

$$\ell_i(c, \underbrace{\ell_j(\Psi \dots)}_{\text{debe pertenecer a } X_0}), \quad (8.4.8)$$

pero no es posible formar un producto no trivial  $\ell_j(\Psi \dots) \in X_0$ , por lo que último producto también es cero.

**Al menos un  $\chi \in X_1$  (y cualquier otro vector en la lista, incluyendo al menos un  $\Psi \in X_{-1}$ ).** Hay solo cuatro productos no triviales que tienen a  $\chi$  como argumento:  $\ell_1(\chi)$ ,

$l_2(\chi, \zeta)$ ,  $l_2(\chi_1, \chi_2)$ ,  $l_3(\chi, \zeta_1, \zeta_2)$  . Esto significa que como mucho pueden tenerse dos  $\chi$ 's. De hecho, si hubiese más de dos  $\chi$ 's al menos uno debería agruparse con  $\Psi$  dentro de un producto (dado que no se puede tener más de dos  $\chi$ 's juntos en el mismo producto), lo que da cero como resultado. Por ejemplo, para tres  $\chi$ 's:

$$l_i(\chi_1, \chi_2, \dots \underbrace{l_j(\chi_3, \Psi \dots)}_{=0}) \quad \text{or} \quad l_i(\chi_1, \dots \underbrace{l_j(\chi_2, \chi_3, \Psi \dots)}_{=0}) . \quad (8.4.9)$$

Ahora consideremos la lista  $(\chi_1, \chi_2, \dots)$ . Las posibilidades son:

$$l_i(\chi_1 \dots \underbrace{l_j(\chi_2, \Psi \dots)}_{=0}) = 0 \quad (8.4.10)$$

$$\underbrace{l_i(\chi_1, \Psi \dots l_j(\chi_2, \dots))}_{=0} = 0 \quad (8.4.11)$$

$$l_i(\Psi \dots \underbrace{l_2(\chi_1, \chi_2)}_{\equiv c \in X_2}) = l_i(\Psi, \dots c) = 0 , \quad (8.4.12)$$

donde en la última línea se usó que no hay productos mezclando a  $c \in X_2$  y a  $\Psi \in X_{-1}$ .

Ahora tomemos la lista con un único  $\chi$  como argumento del segundo producto. Dado que no se pueden tomar juntos a  $\Psi \in X_{-1}$  y a  $\chi \in X_1$  en el mismo producto, las posibilidades son

$$l_i(\Psi \dots \underbrace{l_3(\chi, \zeta_1, \zeta_2)}_{\equiv c \in X_2}) = l_i(\Psi \dots c) = 0 \quad (8.4.13)$$

$$l_i(\Psi \dots \underbrace{l_2(\chi, \zeta)}_{\equiv \tilde{\chi} \in X_1}) = l_i(\Psi \dots \tilde{\chi}) = 0 \quad (8.4.14)$$

$$l_i(\Psi \dots \underbrace{l_1(\chi)}_{\equiv \zeta_{triv.} \in X_0}) \Rightarrow l_{n+1}(\Psi^n, \zeta_{triv.}) = 0 . \quad (8.4.15)$$

La última línea da cero como resultado dado que estos productos vienen de transformaciones de gauge de los campos con un parámetro trivial.

Considerando ahora que  $\chi$  es un argumento del producto  $l_i$  y viendo la lista de productos no triviales, se tiene

$$l_i(\chi, l_j(\Psi \dots)) \Rightarrow \begin{cases} l_j(\Psi \dots) \in X_0, & \text{no es posible,} \\ l_j(\Psi \dots) \in X_1, & \text{no es posible .} \end{cases} \quad (8.4.16)$$

$$l_i(\chi, \zeta, l_j(\Psi \dots)) \Rightarrow l_j(\Psi \dots) \in X_0, \quad \text{no es posible .} \quad (8.4.17)$$

**Tres o más parámetros de gauge  $\zeta$ 's  $\in X_0$  y cualquier número  $n > 0$  de  $\Psi$ 's  $\in X_{-1}$ .**

En primer lugar se analizará el caso de tres parámetros de gauge. Se puede advertir que no se pueden utilizar los productos  $l_{n+1}(\zeta, \Psi^n)$ , que dan un elemento  $\tilde{\Psi} \in X_{-1}$ . Si estuvieran en el segundo producto  $l_j$  se tendría

$$l_i(\zeta_1, \zeta_2, l_{n+1}(\zeta, \Psi^n)) = l_3(\zeta_1, \zeta_2, \tilde{\Psi}) = 0 . \quad (8.4.18)$$



Tampoco funciona si se incluyen en el primer producto. Para  $\ell_1(\zeta)$  se necesitaría que el segundo producto diera como resultado un elemento de  $X_0$ :

$$\ell_1(\underbrace{\ell_{n+3}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \Psi^n)}_{\notin X_0}) . \quad (8.4.19)$$

Para  $\ell_2(\zeta, \Psi)$  se necesitaría que el resultado del segundo producto fuera un elemento de  $X_0$  o  $X_{-1}$ :

$$\ell_2(\underbrace{\ell_{n+2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \Psi^{n-1})}_{\notin X_0}, \Psi), \quad \ell_2(\zeta_1, \underbrace{\ell_{n+2}(\zeta_2, \zeta_3, \Psi^n)}_{\notin X_{-1}}) . \quad (8.4.20)$$

Para  $\ell_3(\zeta, \Psi, \Psi)$ , el segundo producto debería ser un elemento de  $X_0$  o  $X_{-1}$ :

$$\ell_3(\underbrace{\ell_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \Psi^{n-2})}_{\notin X_0}, \Psi, \Psi), \quad \ell_3(\zeta_1, \underbrace{\ell_{n+1}(\zeta_2, \zeta_3, \Psi^{n-1})}_{\notin X_{-1}}), \Psi) . \quad (8.4.21)$$

De esta manera, uno de los productos debe ser  $\ell_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \equiv \chi \in X_1$ . Si estuviera en el segundo producto  $\ell_j$  se tendría

$$\ell_i(\dots \ell_j(\dots)) = \ell_{n+1}(\Psi^n, \ell_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \ell_{n+1}(\Psi^n, \chi) = 0 . \quad (8.4.22)$$

Si estuviera en el primer producto, el segundo debería dar como resultado un elemento de  $X_0$  para no tener un término trivial, pero no es posible:

$$\ell_3(\zeta_1, \zeta_2, \underbrace{\ell_{n+1}(\zeta_3, \Psi^n)}_{\notin X_0}) . \quad (8.4.23)$$

Considerando ahora un mayor número de parámetros de gauge y repitiendo los mismos argumentos uno también encuentra que las identidades de  $L_\infty$  se cumplen trivialmente.

## Capítulo 9

# La estructura $L_\infty$ en supergravedad y en Teoría de Campos Excepcional

## $E_{7(7)}$

La intención de este capítulo es discutir la relación entre el álgebra de la jerarquía de tensores [104] y las álgebras  $L_\infty$  en líneas similares a lo discutido en [39], [40], [41], [42]. Se estudiarán varios casos para cuatro dimensiones del espacio tiempo, como la jerarquía de tensores que surge al considerar la formulación de Kaluza-Klein de DFT [110], el caso de la Teoría de Campos Excepcional  $E_{7(7)}$  y las jerarquías que aparecen en supergravedades gaugeadas [111].

Se discutirá solamente el sector de la jerarquía de tensores, esto es, los campos dados por las  $p$ -formas y sus transformaciones de gauge, y se ignorarán otros campos como el gravitón y los escalares. La razón para esto es que en general, los campos deben ser expandidos en potencias alrededor de un valor de fondo y así obtener una expansión perturbativa que permita hacer contacto con la estructura  $L_\infty$ . Los campos que obedecen algún tipo de vínculo, como la métrica generalizada en DFT por ejemplo, son problemáticos debido a que la potencia a la que aparece el campo puede ser alterada mediante la utilización de los vínculos. Por otro lado, los campos que aparecen con su inversa (la métrica en Relatividad General, por ejemplo), llevan a una expansión infinita, dando lugar a infinitos productos  $\ell_n$ . Se considerará, entonces, únicamente al sector de la jerarquía de tensores, que da lugar a una expansión finita en potencias de los campos y se fijarán el resto de los campos a sus valores de fondo.

Se analizarán principalmente los sectores  $L_\infty^{\text{gauge}}$  o  $L_\infty^{\text{gauge+campos}}$ , subálgebras de la estructura  $L_\infty$  de la teoría completa, que incluye también a las ecuaciones de movimiento.

Se empezará estudiando el caso de las supergravedad gaugeada para la cual se mostrará que posee una estructura  $L_\infty$  subyacente. Motivado por este resultado y dado que compactificaciones de EFT dan lugar a supergravedades gaugeadas resulta natural plantearse la posibilidad de que

esta estructura también este presente en el caso de EFT, que se analizará a continuación, para el caso particular de EFT  $E_{7(7)}$ . Este capítulo está basado, esencialmente, en [77].

## 9.1 Supergravedad gaugeada y $L_\infty$

En esta sección se analizará la relación entre el sector de gauge de la jerarquía de tensores para las supergravedades gaugeadas y las álgebras  $L_\infty$ . Se trabajará hasta el nivel de la 3-forma proyectada, con los campos  $\{A_\mu^M, \tilde{B}_{\mu\nu I}, C_{\mu\nu\rho}^A\}$  y sus respectivos parámetros de gauge  $\{\Lambda^M, \hat{\Xi}_{\mu I}, \hat{\Sigma}_{\mu\nu}^A\}$  (cf. Tabla 6.2.1). Las transformaciones de gauge vienen dadas por (6.2.17), (6.2.18) y (6.2.19) y forman un álgebra con respecto a los corchetes dados por

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_{\Lambda_{12}^M} + \delta_{\hat{\Xi}_{12\mu I}} + \delta_{\hat{\Sigma}_{12\mu\nu}^A}, \quad (9.1.1)$$

con

$$\begin{aligned} \Lambda_{12}^M &= -X_{NP}{}^M \Lambda_{[1}^N \Lambda_2^P \\ \hat{\Xi}_{12\mu I} &= 2 d_{IMN} \mathcal{D}_\mu \Lambda_{[1}^M \Lambda_2^N \\ \hat{\Sigma}_{12\mu\nu I} &= -2 Y_{IA} g_M{}^{AJ} \left( d_{JNP} \Lambda_{[1}^M \Lambda_2^N \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^P + 2 \hat{\Xi}_{[1[\mu J} \mathcal{D}_{\nu]} \Lambda_2^M - Z^{MK} \hat{\Xi}_{[1[\mu J} \hat{\Xi}_{2]\nu]K} \right). \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Para relacionar esta estructura con un álgebra  $L_\infty$ , como primer paso, se deben obtener corchetes independientes de los campos, lo que permitirá utilizar los resultados del capítulo 8. Una forma de lograr esto es mediante la siguiente redefinición de parámetros de gauge

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_{\mu I} &= \Xi_{\mu I} + 2 d_{IMN} A_\mu^M \Lambda^N \\ \hat{\Sigma}_{\mu\nu I} &= \tilde{\Sigma}_{\mu\nu I} - Y_{IA} g_M{}^{AJ} \left( 2 A_{[\mu}^M \Xi_{\nu]J} + B_{\mu\nu J} \Lambda^M + 2 A_{[\mu}^M A_{\nu]}^N d_{JNP} \Lambda^P \right), \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

que da lugar a los corchetes

$$\begin{aligned} \Lambda_{12}^M &= -X_{NP}{}^M \Lambda_{[1}^N \Lambda_2^P \\ \Xi_{12\mu I} &= 2 d_{IMN} \left( \Lambda_{[1}^M \partial_\mu \Lambda_2^N + 2 Z^{MJ} \Xi_{[1\mu J} \Lambda_2^N \right) \\ \tilde{\Sigma}_{12\mu\nu I} &= -2 Y_{IA} g_M{}^{AJ} \left( 2 \Lambda_{[1}^M \partial_{[\mu} \Xi_{\nu]J} + Z^{MK} \Xi_{[1[\mu J} \Xi_{2]\nu]K} + \tilde{\Sigma}_{[1\mu\nu J} \Lambda_2^M \right). \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

Definiendo a un parámetro compuesto de gauge y a su correspondiente corchete de la siguiente forma

$$\zeta = \left( \Lambda^M, \Xi_{\mu I}, \tilde{\Sigma}_{\mu\nu I} \right), \quad [\zeta_1, \zeta_2] = \left( \Lambda_{12}^M, \Xi_{12\mu I}, \tilde{\Sigma}_{12\mu\nu I} \right), \quad (9.1.5)$$

el Jacobiator  $J(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 3 [[\zeta_1, \zeta_2], \zeta_3]$  es un vector que viene dado por las componentes

$$\begin{aligned} J^M &= Z^{MI} N_I \\ J_{\mu I} &= \partial_\mu N_I + \tilde{N}_{\mu I} \\ \tilde{J}_{\mu\nu I} &= 2 \partial_{[\mu} \tilde{N}_{\nu]I}, \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

donde se definieron los tensores de Nijenhuis

$$N_I = d_{IMN} X_{OP}^M \Lambda_{[1}^O \Lambda_2^P \Lambda_3]^N \quad (9.1.7)$$

$$\tilde{N}_{\mu I} = 2 Y_{IA} g_M^{AJ} d_{JNP} \Lambda_{[1}^M \left( 2 \Lambda_2^N \partial_\mu \Lambda_3^P + 3 Z^{NK} \Xi_{2\mu K} \Lambda_3^P \right) . \quad (9.1.8)$$

El Jacobiator, como corresponde, da lugar a un parámetro de gauge trivial. De manera general, éste toma la forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{trivial}^M &= Z^{MI} \chi_I \\ \Xi_{\mu I \text{ trivial}} &= \partial_\mu \chi_I + \tilde{\chi}_{\mu I} \\ \tilde{\Sigma}_{\mu\nu I \text{ trivial}} &= 2 \partial_{[\mu} \tilde{\chi}_{\nu] I} , \end{aligned} \quad (9.1.9)$$

con  $\chi_I$  una función arbitraria y  $\tilde{\chi}_{\mu I}$  obligado a satisfacer el vínculo  $Z^{MI} \tilde{\chi}_{\mu I} = 0$  (cf. (6.2.40), (6.2.41) y (6.2.42), donde los parámetros triviales sí dependen de los campos).

Un cálculo inmediato muestra que el corchete entre un parámetro de gauge trivial y uno arbitrario da lugar a otro parámetro trivial

$$[\zeta_{trivial}, \zeta] = \zeta'_{trivial} , \quad (9.1.10)$$

con  $\zeta'_{trivial}$  de la forma (9.1.9) y

$$\zeta'_{trivial} = \left( Z^{MI} \chi'_I, \partial_\mu \chi'_I + \tilde{\chi}'_{\mu I}, 2 \partial_{[\mu} \tilde{\chi}'_{\nu] I} \right) , \quad (9.1.11)$$

con

$$\chi'_I = Z^{MJ} d_{IMN} \Lambda^N \chi_J \quad (9.1.12)$$

$$\tilde{\chi}'_{\mu I} = -Y_{IA} g_M^{AJ} Z^{MK} \Xi_{\mu J} \chi_K . \quad (9.1.13)$$

Se ve entonces, que hay un conjunto de parámetros y campos que satisfacen las hipótesis del teorema de las secciones 8.3 y 8.4, lo que indica que la jerarquía de tensores de las supergravedades gaugeadas poseen una estructura  $L_\infty^{\text{gauge+campos}}$ .

Motivado por este resultado, en la siguiente sección se analizará el caso de EFT  $E_{7(7)}$ , en donde se hará una construcción explícita.

## 9.2 $L_\infty$ y la jerarquía de tensores proyectada con $E_{7(7)}$

En esta sección se discutirá el sector interno de las transformaciones de gauge. Esto es, el álgebra de gauge dictada por el E-Corchete, sin tener en cuenta las transformaciones de gauge espaciotemporales. Estas se sumarán en un segundo paso, y se verá que no es necesario reformular los productos obtenidos aquí.

Se mostrará que alcanza con definir dos únicos subespacios gradados, que son

$$\begin{aligned} X_1 &: \text{ funciones: } \chi = \chi_\alpha + \chi_N , \\ X_0 &: \text{ parámetros de gauge: } \Lambda^M . \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

Un elemento genérico  $\chi \in X_1$  se escribe como la suma directa de  $\chi_\alpha$ , que pertenece a la representación adjunta **133** de  $E_{7(7)}$ , y una función  $\chi_N$  que obedece los vínculos (7.1.9). Los productos no nulos son

$$\begin{array}{ll} \ell_2(\Lambda_1, \Lambda_2) = [\Lambda_1, \Lambda_2]_{(E)} , & \in X_0 \\ \ell_3(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -N_\alpha - N_M , & \in X_1 \\ \ell_1(\chi) = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N \chi_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} \chi_N , & \in X_0 \\ \ell_2(\Lambda, \chi) = \frac{1}{2} \delta_\Lambda \chi_\alpha + \frac{1}{2} \delta_\Lambda \chi_N & \in X_1 \end{array} \tag{9.2.2}$$

donde se definió al tensor de “Nijenhuis” para este caso en (7.1.23).

Estos productos se obtienen de la siguiente construcción. Inicialmente, se define un subespacio  $X_0$  como el espacio de parámetros de gauge en este caso dado por los parámetros  $\Lambda^M$ . A continuación, se identifica al producto  $\ell_2$  actuando sobre parámetros de gauge como

$$\ell_2(\Lambda_1, \Lambda_2) = [\Lambda_1, \Lambda_2]_{(E)} , \tag{9.2.3}$$

y se define  $\ell_1(\Lambda) = 0$ , de forma tal que las identidades  $\ell_1^2 = 0$  and  $\ell_1 \ell_2 - \ell_2 \ell_1 = 0$  actuando sobre parámetros de gauge se satisfagan trivialmente. La primera identidad no trivial que se debe verificar es

$$\begin{aligned} -\ell_1(\ell_3(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)) &= \ell_2(\ell_2(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) + \ell_2(\ell_2(\Lambda_3, \Lambda_1), \Lambda_2) + \ell_2(\ell_2(\Lambda_2, \Lambda_3), \Lambda_1) \\ &+ \ell_3(\ell_1(\Lambda_1), \Lambda_2, \Lambda_3) + \ell_3(\Lambda_1, \ell_1(\Lambda_2), \Lambda_3) + \ell_3(\Lambda_1, \Lambda_2, \ell_1(\Lambda_3)) . \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

La primera línea del lado derecho corresponde al Jacobiator del E-Corchete, que viene dado por (7.1.21)

$$J^M(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \equiv 3 [[\Lambda_{[1}, \Lambda_2], \Lambda_3]]^M = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N N_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} N_M . \tag{9.2.5}$$

Comparando las expresiones (9.2.5) y (9.2.4) se tienen las identificaciones

$$\begin{aligned} \ell_3(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) &= -N_\alpha - N_M , \\ \ell_1(\chi) &= 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N \chi_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} \chi_N \equiv \tilde{\chi}^M , \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

donde la tilde sobre un tensor indica que el mismo toma la forma de un parámetro trivial. Estas definiciones implican la inclusión de un nuevo espacio  $X_1$ , dado que el producto  $\ell_3(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$  es un elemento de  $X_1$ , como puede observarse de contar los grados del producto y de los argumentos. Los elementos en este subespacio serán denotados como  $\chi$ .

Ahora debe reconsiderarse la identidad  $\ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1 = 0$  actuando sobre elementos de este nuevo subespacio

$$\ell_1(\ell_2(\Lambda, \chi)) = \ell_2(\ell_1(\Lambda), \chi) + \ell_2(\Lambda, \ell_1(\chi)) . \quad (9.2.7)$$

El primer término del lado derecho se anula, dado que contiene a un elemento  $\ell_1(\Lambda) \in X_{-1}$  que se toma igual a cero cuando se ignora, como en este caso, el espacio de campos  $X_{-1}$ . El segundo término toma la forma de un parámetro trivial debido a (7.1.26). Esto determina  $\ell_2(\Lambda, \chi) \in X_1$ , aunque no unívocamente debido a términos de la forma (7.1.17), que pertenecen al núcleo del operador  $\ell_1$

$$\begin{aligned} \ell_2(\Lambda, \chi)_\alpha &= \frac{1}{2}\delta_\Lambda\chi_\alpha + \dots \\ \ell_2(\Lambda, \chi)_M &= \frac{1}{2}\delta_\Lambda\chi_M + \dots , \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

donde los puntos suspensivos representan la ambigüedad discutida en (7.1.17). Esta ambigüedad será de importancia cuando se analice la identidad para  $n = 4$ . Por el momento, se tomará (9.2.8) como la definición apropiada, sin considerar los puntos suspensivos.

Los productos definidos hasta el momento son los únicos necesarios para garantizar la estructura  $L_\infty^{\text{gauge}}$  del álgebra de gauge dictada por el E-Corchete. Para ver esto, se analizará el resto de las relaciones  $L_\infty$ .

Para  $n = 2$  tomamos  $\ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1 = 0$ , pero esta vez sobre argumentos  $\chi_1, \chi_2 \in X_1$ :

$$\ell_1(\ell_2(\chi_1, \chi_2)) = \ell_2(\ell_1(\chi_1), \chi_2) + \ell_2(\ell_1(\chi_2), \chi_1) . \quad (9.2.9)$$

El lado derecho es cero dado que  $\ell_1(\chi)$  es un parámetro de gauge trivial que entra como argumento del producto  $\ell_2(\Lambda, \chi)$ , que se ha elegido como una transformación dictada por un difeomorfismo generalizado (9.2.8). De esta manera, se puede tomar

$$\ell_2(\chi_1, \chi_2) = 0 . \quad (9.2.10)$$

A continuación, se debe constatar la identidad  $n = 4$   $\ell_1\ell_4 - \ell_2\ell_3 + \ell_3\ell_2 - \ell_4\ell_1 = 0$  para el caso de cuatro parámetros de gauge (para argumentos en  $X_1$  esta identidad se satisface trivialmente). En primer lugar, de (8.2.17) y del hecho de que el Jacobiator es independiente de los campos, se tiene  $\ell_4\ell_1 = 0$ . Luego, puede verse que los términos que surgen a partir de  $\ell_3\ell_2 - \ell_2\ell_3$  se anulan entre sí

$$\ell_3\ell_2 - \ell_2\ell_3 = 6\ell_3([\Lambda_{[1}, \Lambda_2], \Lambda_3, \Lambda_4]) - 4\ell_2(\ell_3(\Lambda_{[1}, \Lambda_2, \Lambda_3), \Lambda_4]) = 0 , \quad (9.2.11)$$

De esta manera, no hay necesidad de definir un producto  $\ell_4(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)$  no trivial, que puede tomarse igual a cero. Sin embargo, si se hubiese hecho una elección diferente en (9.2.8) con términos adicionales  $\eta_\alpha$  y  $\eta_M$  en el núcleo de  $\ell_1$  (ver (7.1.17))

$$\ell_2(\Lambda, \chi)_\alpha = \frac{1}{2}\delta_\Lambda\chi_\alpha + \alpha\eta_\alpha \quad (9.2.12)$$

$$\ell_2(\Lambda, \chi)_M = \frac{1}{2}\delta_\Lambda\chi_M + \alpha\eta_M , \quad (9.2.13)$$

con

$$\eta[\Lambda, \chi]_\alpha = \delta_\Lambda \chi_\alpha + (t_\alpha)_{KL} \tilde{\chi}^K \Lambda^L, \quad (9.2.14)$$

$$\eta[\Lambda, \chi]_M = \delta_\Lambda \chi_M + \Omega_{KL} (\partial_M \tilde{\chi}^K \Lambda^L - \tilde{\chi}^K \partial_M \Lambda^L),$$

la identidad se leería

$$\begin{aligned} \ell_1 \ell_4 &= 6 \ell_3([\Lambda_{[1}, \Lambda_2], \Lambda_3, \Lambda_4]) - 4 \ell_2(\ell_3(\Lambda_{[1}, \Lambda_2, \Lambda_3), \Lambda_4]) \\ &= 4\alpha \eta[\Lambda_{[1}, N(\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)]_\alpha + 4\alpha \eta[\Lambda_{[1}, N(\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)]_N. \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Queda de manifiesto que para que la identidad se cumpla, el término  $\ell_1 \ell_4$  debe absorber la ambigüedad en los productos de (9.2.8). En consecuencia, uno debería definir un nuevo subespacio gradado  $X_2$  y tomar  $\ell_4(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4) = 4\alpha \eta_\alpha + 4\alpha \eta_N \in X_2$ . Con esta definición,  $\ell_4(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)$  tomaría valores en el núcleo de  $\tilde{\eta}(\eta_\alpha, \eta_N) = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N \eta_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} \eta_N$ . El subespacio  $X_2$  vendría dado por el subespacio de funciones que viven en el núcleo  $\tilde{\eta}$ , lo cual es necesario para satisfacer la identidad con  $n = 1$ :  $\ell_1(\ell_1(c))$  dado  $c \in X_2$ . También habría que definir la acción de  $\ell_1$  sobre elementos de  $X_2$ : siguiendo a [38], este mapa puede tomarse simplemente como la inclusión en el subespacio  $X_1$ . Resumiendo, la elección hecha en  $\ell_2(\Lambda, \chi)$  en (9.2.8) (sin considerar los puntos suspensivos) es la más simple en el sentido de que requiere la menor cantidad de productos no triviales y de subespacios gradados.

A continuación, pueden incluirse también los campos de la jerarquía de tensores. La tarea es sencilla, y consiste en repetir los pasos de la construcción anterior, a partir de lo que uno encuentra los siguientes subespacios gradados

$$X_1 : \text{ funciones: } \chi = \chi_\alpha + \chi_N,$$

$$X_0 : \text{ parámetros de gauge: } \zeta = \Lambda^M + \tilde{\Xi}_{\mu M}. \quad (9.2.16)$$

$$X_{-1} : \text{ campos: } \Psi = A_\mu^M + \tilde{B}_{\mu\nu}.$$

El nuevo espacio  $X_{-1}$  da cuenta de los campos de la teoría. Los productos no triviales vienen dados por

$\ell_2(\zeta_1, \zeta_2) = [\zeta_1, \zeta_2],$	$\in X_0$
$\ell_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = -N_\alpha - N_M,$	$\in X_1$
$\ell_1(\chi) = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N \chi_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} \chi_N - 12(t^\alpha)_M{}^N \partial_N \partial_\mu \chi_\alpha - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi_M,$	$\in X_0$
$\ell_2(\zeta, \chi) = \frac{1}{2} \delta_\Lambda \chi_\alpha + \frac{1}{2} \delta_\Lambda \chi_N,$	$\in X_1$
$\ell_1(\zeta) = \partial_\mu \Lambda^M + \Omega^{MN} \tilde{\Xi}_{\mu N} + 2\partial_{[\mu} \tilde{\Xi}_{\nu]M},$	$\in X_{-1}$
$\ell_2(\zeta, \Psi) = \hat{\mathcal{L}}_\Lambda A_\mu^M + \delta_\Lambda \tilde{B}_{\mu\nu} - 12(t^\alpha)_M{}^N \partial_N \left( (t_\alpha)_{LK} \left( \Omega^{KP} \tilde{\Xi}_{[\mu P} + \partial_{[\mu} \Lambda^K \right) A_{\nu]}^L \right) \\ + \frac{1}{2} \Omega_{LK} \left( \partial_M A_{[\mu}^L \left( \Omega^{KP} \tilde{\Xi}_{\nu]P} + \partial_{\nu]} \Lambda^K \right) - A_{[\mu}^L \partial_M \left( \Omega^{KP} \tilde{\Xi}_{\nu]P} + \partial_{\nu]} \Lambda^K \right) \right)$	$\in X_{-1}$

(9.2.17)

Esto completa el análisis sobre cómo la estructura de gauge de la jerarquía de tensores para  $E_{7(7)}$  entra dentro del contexto de  $L_\infty^{\text{gauge}+\text{campos}}$ . Es importante señalar que no se está considerando la teoría completa, sino que los campos dinámicos considerados aquí provienen solo de la jerarquía de tensores.

### 9.3 $L_\infty$ y la jerarquía de tensores desproyectada con $E_{7(7)}$

Hasta aquí se ha considerado una única 2-forma formada por la combinación de dos contribuciones diferentes: una 2-forma en la adjunta de  $E_{7(7)}$  y una 2-forma covariantemente vinculada. La intención en esta sección es tratar estos objetos independientemente. Para una discusión general, se considerará un tensor proyectado de la forma

$$\tilde{T}^M = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N T_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} T_N . \quad (9.3.1)$$

con  $T_\alpha$  un tensor genérico en la adjunta y  $T_M$  un tensor covariantemente vinculado.

Cuando las 2-forma  $\tilde{B}_M$  y su parámetro de gauge  $\tilde{\Xi}_\mu$  se agrupan de esta manera, el álgebra de transformaciones de gauge es cerrada. Esta proyección particular es la que entra en la acción de EFT  $E_{7(7)}$ , por lo que no hay necesidad de tratar a estos campos en una combinación diferente. Sin embargo, formalmente uno podría desproyectar esta combinación e intentar analizar el álgebra de gauge para estos grados de libertad de manera independiente. Desproyectar apunta hacia nuevos grados de libertad provenientes posiblemente de teoría M y no presentes en el límite de supergravedad. Una jerarquía de tensores contiene, en principio, una torre de  $p$ -formas en representaciones diferentes  $A \in R_1$ ,  $B \in R_2$ ,  $C \in R_3$ , etc. Aquí,  $R_1$  es la **56** de  $E_{7(7)}$ .

El *operador de intertwining* es un mapa nilpotente  $\tilde{\cdot} : R_{p+1} \rightarrow R_p$ . Para el caso  $R_2 \rightarrow R_1$ , viene dado explícitamente por  $\tilde{\mathcal{T}}$

$$\tilde{\mathcal{T}}^M(T_\alpha, T_N) = 12(t^\alpha)^{MN} \partial_N T_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} T_N . \quad (9.3.2)$$

Hasta aquí se ha considerado  $\tilde{B} \in R_1$ , y ahora se pretende  $B \in R_2$  y  $\tilde{C} \in R_2$ . Uno en principio podría continuar la jerarquía hasta que las  $p$ -formas saturen la dimensionalidad del espacio tiempo.

El operador de intertwining tiene núcleo no nulo, por lo que no es invertible. Se llamará  $(\tilde{\tilde{T}}_\alpha, \tilde{\tilde{T}}_M)$  a los elementos en el núcleo de  $\tilde{\mathcal{T}}^M$ , es decir

$$12(t^\alpha)^{MN} \partial_N \tilde{\tilde{T}}_\alpha + \frac{1}{2} \Omega^{MN} \tilde{\tilde{T}}_N = 0 . \quad (9.3.3)$$

En la sección anterior se identificó a dos tensores en el núcleo del operador de intertwining

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{T}}[\Lambda, V]_\alpha &= \delta_\Lambda V_\alpha + (t_\alpha)_{KL} \tilde{V}^K \Lambda^L , \\ \tilde{\tilde{T}}[\Lambda, V]_M &= \delta_\Lambda V_M + \Omega_{KL} \left( \partial_M \tilde{V}^K \Lambda^L - \tilde{V}^K \partial_M \Lambda^L \right) . \end{aligned} \quad (9.3.4)$$



Sin embargo, hay una manera más general de parametrizar al núcleo, y está dada en términos de tensores en diferentes representaciones de  $E_{7(7)}$ <sup>1</sup>. Por un lado, un tensor en **912**  $T_\alpha^M$

$$T_\alpha^M = P_\alpha^{(912)M\beta} T_\beta^N, \quad P_\alpha^{(912)M\beta} = \frac{1}{7} \left( \delta_\alpha^\beta \delta_N^M - 12 (t_\alpha t^\beta)_N^M + 4 (t^\beta t_\alpha)_N^M \right), \quad (9.3.5)$$

y un tensor covariantemente vinculado  $T_M^N$  (sin restricciones al momento de contraer con el índice superior)

$$\Omega^{NM} \partial_N \otimes T_M^K = \Omega^{MN} T_M^K T_N^L = (t^\alpha)^{NM} \partial_N \otimes T_M^K = (t^\alpha)^{MN} T_M^K T_N^L = 0. \quad (9.3.6)$$

Teniendo en cuenta que por los vínculos (7.1.8) se tiene

$$(t^\alpha)_M^K P_\alpha^{(912)L\beta} \partial_{(K} \otimes \partial_{L)} = 0, \quad (9.3.7)$$

el núcleo de  $\tilde{\mathcal{T}}^M$  viene dado por [105]

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\alpha &= 2 \partial_M T_\alpha^M + (t_\alpha)_N^M T_M^N \\ \tilde{T}_M &= -2 \partial_N T_M^N - \partial_M T_N^N, \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

para cualquier  $T_\alpha^M$  y  $T_M^N$ . Esta ecuación es la análoga de (9.3.2) para el siguiente nivel en la jerarquía. El caso en (9.3.4) se recupera para las elecciones

$$\begin{aligned} T_\alpha^M &= \frac{7}{2} P_\alpha^{(912)M\beta} \Lambda^N V_\beta \\ T_M^N &= (t^\alpha)_K^N (8 \partial_M \Lambda^K V_\beta - 4 \Lambda^K \partial_M V_\beta) - \frac{1}{2} \Lambda^N V_M. \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

Dado que el tensor de intertwining es no invertible, sólo es posible extraer  $T_\alpha$  y  $T_M$  de un dado  $\tilde{T}^M$  a menos de términos dados por los objetos en el núcleo (9.3.8), ambigüedad que se utilizará para poder obtener correctamente las transformaciones de gauge de  $B_{\mu\nu\alpha}$  y  $B_{\mu\nu M}$ . Removiendo la proyección de la fuerza de campo para la 3-forma dada por (7.1.41) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu\nu\rho\alpha} &= 3\mathcal{D}_{[\mu} B_{\nu\rho]\alpha} - 3(t_\alpha)_{KL} A_{[\mu}^K \Gamma_{\nu\rho]}^L - \tilde{\mathcal{C}}_{\mu\nu\rho\alpha} \\ \mathcal{H}_{\mu\nu\rho M} &= 3\mathcal{D}_{[\mu} B_{\nu\rho]M} + 3\Omega_{KL} (A_{[\mu}^K \partial_M \Gamma_{\nu\rho]}^L + \Gamma_{[\nu\rho}^K \partial_M A_{\mu]}^L) - \tilde{\mathcal{C}}_{\mu\nu\rho M}, \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

donde se definió la combinación

$$\Gamma_{\mu\nu}^M = \partial_{[\mu} A_{\nu]}^M - \frac{1}{3} [A_\mu, A_\nu]_{(E)}^M. \quad (9.3.11)$$

y se introdujeron las 3-formas  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu\nu\rho\alpha}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu\nu\rho M}$  que pertenecen al núcleo del operador de intertwining. Las transformaciones de las componentes de la 3-forma son

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{\mu\nu\rho\alpha} &= 3\mathcal{D}_{[\mu} \Delta B_{\nu\rho]\alpha} - 3(t_\alpha) \delta A_{[\mu}^K \mathcal{F}_{\nu\rho]}^L - \Delta \tilde{\mathcal{C}}_{\mu\nu\rho\alpha} \\ \delta \mathcal{H}_{\mu\nu\rho M} &= 3\mathcal{D}_{[\mu} \Delta B_{\nu\rho]M} + 3\Omega_{KL} (\delta A_{[\mu}^K \partial_M \mathcal{F}_{\nu\rho]}^L + \mathcal{F}_{[\nu\rho}^K \partial_M A_{\mu]}^L) - \Delta \tilde{\mathcal{C}}_{\mu\nu\rho M}, \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

<sup>1</sup>Para un análisis más profundo de tensores y representaciones ver [111], [113]

con

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho\alpha} &= \delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho\alpha} + 3\tilde{T}_\alpha[\delta A_{[\mu}, B_{\nu\rho]}] + 2\tilde{T}_\alpha[A_\mu, \{A_\nu, \delta A_\rho\}] \\ \Delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho M} &= \delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho M} + 3\tilde{T}_M[\delta A_{[\mu}, B_{\nu\rho]}] + 2\tilde{T}_M[A_\mu, \{A_\nu, \delta A_\rho\}].\end{aligned}\tag{9.3.13}$$

Para que (9.3.12) transforme covariantemente, las 3-formas deben transformar  $\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho\alpha}$  y  $\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho M}$  como

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho\alpha} &= 3\mathcal{D}_{[\mu}\tilde{\tilde{\Sigma}}_{\nu\rho]\alpha} - \tilde{T}_\alpha[\Lambda, \mathcal{H}_{\mu\nu\rho}] - 3\tilde{T}_\alpha[\mathcal{F}_{[\mu\nu}, \hat{\Xi}_\rho]] \\ \Delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho M} &= 3\mathcal{D}_{[\mu}\tilde{\tilde{\Sigma}}_{\nu\rho]M} - \tilde{T}_M[\Lambda, \mathcal{H}_{\mu\nu\rho}] - 3\tilde{T}_M[\mathcal{F}_{[\mu\nu}, \hat{\Xi}_\rho]],\end{aligned}\tag{9.3.14}$$

donde  $\tilde{T}$  se definió en (9.3.4).

Las nuevas 3-formas y sus parámetros de gauge deben tomar la forma (9.3.8)

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho\alpha} &= 2\partial_M C_{\mu\nu\rho\alpha}{}^M + (t_\alpha)_N{}^M C_{\mu\nu\rho M}{}^N \\ \tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho M} &= -2\partial_N C_{\mu\nu\rho M}{}^N - \partial_M C_{\mu\nu\rho N}{}^N,\end{aligned}\tag{9.3.15}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\Sigma}}_{\mu\nu\alpha} &= 2\partial_M \hat{\Sigma}_{\mu\nu\alpha}{}^M + (t_\alpha)_N{}^M \hat{\Sigma}_{\mu\nu M}{}^N \\ \tilde{\tilde{\Sigma}}_{\mu\nu M} &= -2\partial_N \hat{\Sigma}_{\mu\nu M}{}^N - \partial_M \hat{\Sigma}_{\mu\nu N}{}^N.\end{aligned}\tag{9.3.16}$$

Estas son las proyecciones requeridas para poder truncar la jerarquía a este nivel, es decir, son necesarias para tener un álgebra cerrada. Estos nuevos operadores de intertwining tienen sus propios núcleos y las proyecciones solo podrán ser removidas cuando se consideren nuevos tensores en la jerarquía.

La jerarquía hasta este nivel contiene ahora a los campos  $A_\mu{}^M, B_{\mu\nu\alpha}, B_{\mu\nu M}, \tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho\alpha}$  y  $\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho M}$ , con los últimos tres covariantemente vinculados. Sus parámetros de gauge son  $\Lambda^M, \hat{\Xi}_{\mu\alpha}, \hat{\Xi}_{\mu M}, \tilde{\tilde{\Sigma}}_{\mu\nu\alpha}$  and  $\tilde{\tilde{\Sigma}}_{\mu\nu M}$  y las transformaciones de gauge son

$$\begin{aligned}\delta A_\mu{}^M &= \mathcal{D}_\mu \Lambda^M + \Omega^{MN} \tilde{\tilde{\Xi}}_{\mu N} \\ \Delta B_{\mu\nu\alpha} &= 2\mathcal{D}_{[\mu} \hat{\Xi}_{\nu]\alpha} + (t_\alpha)_{KL} \Lambda^K \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^L + \tilde{\tilde{\Sigma}}_{\mu\nu\alpha} \\ \Delta B_{\mu\nu M} &= 2\mathcal{D}_{[\mu} \hat{\Xi}_{\nu]M} - \Omega_{KL} (\Lambda^K \partial_M \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^L + \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^K \partial_M \Lambda^L) + \tilde{\tilde{\Sigma}}_{\mu\nu M} \\ \Delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho\alpha} &= 3\mathcal{D}_{[\mu} \tilde{\tilde{\Sigma}}_{\nu\rho]\alpha} - \tilde{T}_\alpha[\Lambda, \mathcal{H}_{\mu\nu\rho}] - 3\tilde{T}_\alpha[\mathcal{F}_{[\mu\nu}, \hat{\Xi}_\rho]] \\ \Delta\tilde{\tilde{C}}_{\mu\nu\rho M} &= 3\mathcal{D}_{[\mu} \tilde{\tilde{\Sigma}}_{\nu\rho]M} - \tilde{T}_M[\Lambda, \mathcal{H}_{\mu\nu\rho}] - 3\tilde{T}_M[\mathcal{F}_{[\mu\nu}, \hat{\Xi}_\rho]].\end{aligned}$$

Estas admiten parámetros triviales (que dependen de los campos). Las transformaciones cierran con respecto a corchetes dependientes de los campos y para eliminar la dependencia de los campos en los corchetes se precisan redefiniciones de los parámetros de gauge lo que da como resultado la existencia de parámetros de gauge triviales que no dependen de los campos. Además, el corchete entre estos parámetros triviales y un parámetro genérico da como resultado un nuevo parámetro trivial, y el jacobiator de los corchetes del álgebra de gauge también da

como resultado un parámetro trivial, lo que permite asegurar que las transformaciones de gauge hasta este nivel de la jerarquía de tensores poseen una estructura  $L_{\infty}^{\text{gauge+campos}}$ .

# Capítulo 10

## La cuerda en $AdS_3$

En este capítulo se estudiará a la cuerda bosónica en  $AdS_3$ , utilizando el modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW. Se presentará el modelo  $H_3^+$ -WZW, a partir del cual se obtienen parte de los resultados de  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW como continuación analítica. En este último modelo, el espectro debe completarse con representaciones obtenidas mediante la operación de *flujo espectral*. En particular, se estudiará la función de correlación de cuatro puntos para estados con flujo espectral no trivial, basándose en [75].

### 10.1 El espacio tiempo $AdS_3$ y modelos de WZW

La acción para una cuerda bosónica con campos de fondo correspondientes a los modos no masivos de la teoría de cuerdas cerradas fue presentada en (2.3.2) y toma la forma

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left( G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + iB_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \Phi(X) R^{(2)} \right). \quad (10.1.1)$$

En este capítulo se estudiará el caso de una métrica  $G_{\mu\nu}(X)$  del tipo de Anti de Sitter,  $AdS$ , en particular,  $AdS_3$ . El espacio  $AdS_3$  es una variedad lorentziana con simetría maximal y curvatura constante negativa. Se puede obtener introduciendo un hiperboloide en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con elemento de arco

$$ds_4^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2. \quad (10.1.2)$$

El espacio de anti de-Sitter toma la forma del hiperboloide que viene dado por

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 = -\alpha. \quad (10.1.3)$$

donde  $\alpha$  es una constante positiva. Para obtener la métrica de esta variedad se introducen

coordenadas  $\{t, \rho, \theta, \phi\}$  sobre el hiperboloide y se define

$$u = \alpha \sin t \cosh \rho, \quad v = \alpha \cos t \cosh \rho, \quad (10.1.4)$$

$$x = \alpha \sinh \rho \cos \phi, \quad y = \alpha \sinh \rho \sin \phi, \quad (10.1.5)$$

lo que lleva a

$$ds^2 = \alpha^2 [-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2]. \quad (10.1.6)$$

Las coordenadas introducidas en (10.1.5) tienen la particularidad de que  $t$  es periódica:  $t$  y  $t+2\pi$  representan el mismo punto sobre el hiperboloide, lo que lleva a la existencia de geodésicas tipo tiempo cerradas. Sin embargo, esta periodicidad no es algo intrínseco de este espacio-tiempo, sino una consecuencia de la elección particular de coordenadas empleadas para derivar la métrica de  $AdS_3$ . Es por eso que se considera el cubrimiento de esta variedad en donde se amplía el rango a  $-\infty < t < \infty$ .

La descripción de la cuerda bosónica en  $AdS_3$  puede describirse alternativamente en términos del modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) con el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . La acción de WZNW es

$$S = \frac{k}{8\pi\alpha'} \int d^2\sigma \text{Tr} (g^{-1} \partial g g^{-1} \partial g) + k\Gamma_{WZ}, \quad (10.1.7)$$

donde  $g(\sigma)$  son campos matriciales bosónicos que viven en una variedad asociada al grupo de Lie  $SL(2, \mathbb{R})$  y  $\Gamma_{WZ}$  es el término de Wess-Zumino dado por

$$\Gamma_{WZ} = \frac{1}{12\alpha' i\pi} \int_B d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} (\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}). \quad (10.1.8)$$

Esta integral se define sobre una variedad  $B$  de tres dimensiones, cuyo borde es la compactificación del espacio original de dos dimensiones. Se ha denotado por  $\tilde{g}$  a la extensión del campo  $g$  a la variedad  $B$  y  $k \in \mathbb{Z}$  para tener una integral funcional bien definida.

Se puede ver que escribiendo explícitamente al elemento de grupo  $g$  la acción se reduce a la de una cuerda propagándose en un espacio-tiempo curvo,  $AdS_3$ , con un campo de fondo antisimétrico de tipo NS-NS y sin dilatón.

El grupo especial lineal  $SL(2, \mathbb{R})$  es el grupo de Lie simple definido por todas las matrices reales de  $2 \times 2$  con determinante unidad, es decir

$$SL(2, \mathbb{R}) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}. \quad (10.1.9)$$

Este grupo es isomorfo al de las transformaciones proyectivas dadas por

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{con } ad - bc = 1. \quad (10.1.10)$$

Los elementos de  $SL(2, \mathbb{R})$  se pueden parametrizar como

$$\begin{aligned} g &= e^{i(t+\phi)/2} \sigma_2 e^{\rho\sigma_3} e^{i(t-\phi)/2} \sigma_2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \cosh \rho + \cos \phi \sinh \rho & \sin t \cosh \rho - \sin \phi \sinh \rho \\ -\sin t \cosh \rho - \sin \phi \sinh \rho & \cos t \cosh \rho - \cos \phi \sinh \rho \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

donde  $\sigma^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (10.1.12)$$

Otra parametrización posible es

$$g = \begin{pmatrix} X_{-1} + X_1 & X_0 - X_2 \\ -X_0 - X_2 & X_{-1} - X_1 \end{pmatrix}, \quad (10.1.13)$$

con

$$X_{-1}^2 + X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = 1, \quad (10.1.14)$$

mediante la cual se pone de manifiesto que la variedad de  $SL(2, \mathbb{R})$  es un hiperboloide en tres dimensiones. La métrica en  $AdS_3$ ,

$$ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2,$$

toma la forma, en las coordenadas globales  $(t, \phi, \rho)$ ,

$$ds^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2, \quad (10.1.15)$$

en coincidencia con (10.1.6).

## 10.2 Modelo $H_3^+$ -WZW

El modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW está relacionado con  $H_3^+$ -WZW mediante una continuación analítica. Éste es una teoría de campos conformes formulada sobre el coset  $H_3^+ \equiv SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ , espacio que está determinado por todas las matrices hermíticas de  $2 \times 2$  con determinante unidad. Un elemento  $h$  puede parametrizarse empleando las coordenadas de Poincaré  $(\phi, \gamma, \bar{\gamma})$  de la siguiente manera:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\phi} & 0 \\ 0 & e^{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2.1)$$

En términos de esta parametrización el lagrangiano del modelo está dado por

$$L = k \left( \partial\phi\bar{\partial}\phi + e^{2\phi}\bar{\partial}\gamma\partial\bar{\gamma} \right), \quad (10.2.2)$$

donde  $\partial \equiv \partial/\partial z$  y  $\bar{\partial} \equiv \partial/\partial \bar{z}$ , siendo  $z$  y  $\bar{z}$  las coordenadas complejas de la hoja de mundo. El espacio target está dado por la variedad asociada al grupo.

El modelo  $H_3^+ - WZNW$  tiene una serie de corrientes que se conservan independientemente,  $J^a$  y  $\bar{J}^a$  con  $a = 3, \pm$ , dadas por

$$J^a = k \text{Tr} (T^a \partial h h^{-1}), \quad \bar{J}^a = k \text{Tr} (T^{a\dagger} h^{-1} \bar{\partial} h), \quad (10.2.3)$$

donde  $\{T^a : a = 3, \pm\}$  es una base del álgebra de Lie asociada.

La conservación de estas corrientes se desprende de las ecuaciones clásicas de movimiento, que son

$$\bar{\partial}J^a(z, \bar{z}) = 0, \quad \partial\bar{J}^a(z, \bar{z}) = 0. \quad (10.2.4)$$

Debido a las ecuaciones de movimiento (10.2.4), las corrientes dependen únicamente de  $z$  o de  $\bar{z}$ , o sea que  $J^a(z, \bar{z}) = J^a(z)$  y  $\bar{J}^a(z, \bar{z}) = \bar{J}^a(\bar{z})$ . Por este motivo, se las suele denominar corrientes holomorfa y antiholomorfa, o right y left, respectivamente. Estas corrientes generan un álgebra afín sobre  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ . En efecto, introduciendo los modos  $J_n^a$  para estas corrientes mediante

$$J^a = \sum_n z^{-n-1} J_n^a, \quad \bar{J}^a = \sum_n \bar{z}^{-n-1} \bar{J}_n^a, \quad (10.2.5)$$

se obtienen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [J_n^3, J_m^3] &= -\frac{k}{2}n\delta_{n+m,0}, & [\bar{J}_n^3, \bar{J}_m^3] &= -\frac{k}{2}n\delta_{n+m,0}, \\ [J_n^3, J_m^\pm] &= \pm J_{n+m}^\pm, & [\bar{J}_n^3, \bar{J}_m^\pm] &= \pm \bar{J}_{n+m}^\pm, \\ [J_n^-, J_m^+] &= 2J_{n+m}^3 + kn\delta_{n+m,0}, & [\bar{J}_n^-, \bar{J}_m^+] &= 2\bar{J}_{n+m}^3 + kn\delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

con

$$[J_n^a, \bar{J}_m^b] = 0. \quad (10.2.7)$$

Es decir que se obtienen dos álgebras que conmutan entre sí. Los modos cero de estas corrientes generan un álgebra  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ .

Asociadas al álgebra de corrientes uno tiene, además, dos álgebras de Virasoro que conmutan entre sí. Sus generadores  $L_n$  y  $\bar{L}_n$  se obtienen a partir de la construcción de Sugawara:

$$L_m = \frac{1}{2(k-2)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} : -2J_{-l}^0 J_{m+l}^3 + J_{-l}^+ J_{l+m}^- + J_{-l}^- J_{l+m}^+ :, \quad (10.2.8)$$

con

$$: J_m^a J_n^b := \begin{cases} J_m^a J_n^b & \text{si } m < n \\ \frac{1}{2}(J_n^a J_m^b + J_m^b J_n^a) & \text{si } m = n \\ J_n^b J_m^a & \text{si } m > n \end{cases} \quad (10.2.9)$$

y similarmente para  $\bar{L}_n$ .

La descomposición del espacio de estados  $\mathcal{V}$  en representaciones irreducibles puede escribirse como

$$\mathcal{V} \simeq \int_{\mathcal{C}^+}^{\oplus} dj \mathcal{R}_j, \quad (10.2.10)$$

donde  $\mathcal{C}^+ = -1/2 + i\mathbb{R}_+$  y las representaciones  $\mathcal{R}_j$  se definen empleando el siguiente procedimiento. Se considera una representación  $P_j$  para el álgebra generada por los modos cero  $J_0^a, \bar{J}_0^a$ , con  $a = \pm, 3$ , que corresponde a una representación principal de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Ésta puede realizarse,

por ejemplo, en el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(H_3^+)$  de funciones en  $\mathbb{C}$ , denso de  $L^2(H_3^+)$ , por medio de los operadores diferenciales  $D_j^a$  dados por

$$D_j^+ = -x^2\partial + 2jx, \quad D_j^3 = -x\partial + j, \quad D_j^- = -\partial, \quad (10.2.11)$$

junto con los operadores complejos  $\bar{D}_j^a$  definidos de la misma manera.

Esta representación del álgebra de los modos cero luego se extiende a una representación del álgebra completa de corrientes  $\hat{\mathfrak{sl}}_2 \oplus \hat{\mathfrak{sl}}_2$  requiriendo  $J_n^a P_j = 0 = \bar{J}_n^a P_j$  con  $n > 0$  y construyendo el módulo  $\mathcal{R}_j$  actuando libremente sobre  $P_j$  con los generadores  $J_n^a, \bar{J}_n^a, n < 0$ . Es decir que cualquier estado puede construirse a partir del estado primario  $v \in P_j$  como

$$J_{-n_1}^{a_1} \dots J_{-n_l}^{a_l} v, \quad (10.2.12)$$

donde los números naturales  $n_1, \dots, n_l$  están dispuestos en orden decreciente.

En cualquier teoría conforme, uno está interesado en identificar a los campos primarios, a partir de los cuales es posible obtener todos los estados del sistema. Se denotará a éstos por  $\Phi[f|z]$ , donde  $f$  son funciones infinitamente diferenciables en  $H_3^+$  con decaimiento a cero en infinito más rápido que cualquier polinomio. Una base de “ondas planas” para  $L^2(H_3^+)$ , denominada base  $x$ , viene dada por las funciones [114]

$$\Psi(j; x|h) = \frac{2j+1}{\pi} \left( (1, x) \cdot h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x} \end{pmatrix} \right)^{2j} \quad (10.2.13)$$

Los campos primarios asociados a esta base se denotan por  $\Phi_j(x|z)$ ,  $x, z \in \mathbb{C}$ , donde se sobreentiende una dependencia en las variables  $\bar{x}, \bar{z} \in \mathbb{C}$ . Con ello se tiene que, semiclásicamente, y en términos de las coordenadas de Poincaré empleadas, estos campos pueden identificarse con las siguientes funciones

$$\Phi_j(x|z) = \frac{2j+1}{\pi} \left( (\gamma - x)(\bar{\gamma} - \bar{x})e^\phi + e^{-\phi} \right)^{2j}, \quad (10.2.14)$$

Estos campos primarios están etiquetados por el espín  $j$  de una representación continua de  $SL(2, \mathbb{C})$ , que cumple  $j = -1/2 + i\mathbb{R}_+$ . La acción de las corrientes sobre  $\Phi_j(x|z)$  está dada por

$$J^a(z)\Phi_j(x|w) = \frac{1}{z-w} D_j^a \Phi_j(x|w), \quad \bar{J}^a(\bar{z})\Phi_j(x|w) = \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \bar{D}_j^a \Phi_j(x|w), \quad (10.2.15)$$

donde  $D_j^a$  vienen dados por (10.2.11). Además, estos campos son primarios con respecto al álgebra de Sugawara-Virasoro, con dimensión conforme

$$\Delta_j = -\frac{j(j+1)}{k-2}. \quad (10.2.16)$$

En el caso cuántico, el orden normal no permitirá que los campos tengan una forma tan simplificada como en (10.2.14). Sin embargo, para  $\phi \rightarrow \infty$  la interacción desaparece y el campo toma la forma

$$\Phi_j(x|z) \sim: e^{2(-1-j)\phi(z)} : \delta^2(\gamma(z) - x) + B(j) : e^{2j\phi(z)} : |\gamma(z) - x|^{4j}, \quad (10.2.17)$$



Esto permite fijar la normalización y determinar la relación entre  $\Phi_j(x|z)$  y  $\Phi_{-1-j}(x|z)$ :

$$\Phi_j(x|z) = B(j) \int_{\mathbb{C}} d^2x' |x - x'|^{4j} \Phi_{-1-j}(x'|z), \quad (10.2.18)$$

donde el coeficiente  $B(j)$  está dado por

$$B(j) = \frac{k-2}{\pi} \frac{\nu^{1+2j}}{\gamma\left(-\frac{1+2j}{k-2}\right)}, \quad \nu = \pi \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k-2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k-2}\right)}, \quad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \quad (10.2.19)$$

Las funciones de correlación de la teoría serán denotadas como  $\Phi_N(J|X|Z)$ :

$$\Phi_N(J|X|Z) = \left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_{j_i}(x_i|z_i) \right\rangle, \quad (10.2.20)$$

donde se introdujo  $J = (j_1, \dots, j_N)$ ,  $X = (x_1, \dots, x_N)$  y  $Z = (z_1, \dots, z_N)$ . Los pesos conformes también serán denotados colectivamente como  $\Delta = (\Delta_{j_1}, \dots, \Delta_{j_N})$ .

Como en toda teoría conforme, la simetría impone fuertes restricciones sobre las funciones de correlación. La invariancia de los correladores frente a la acción de los generadores de Virasoro,  $L_n, \bar{L}_n$  con  $n = -1, 0, 1$  da lugar a las siguientes identidades de Ward:

$$\begin{aligned} \sum_i \partial_{z_i} \Phi_N(J|X|Z) &= 0, \\ \sum_i (z_i \partial_{z_i} + \Delta_i) \Phi_N(J|X|Z) &= 0, \\ \sum_i (z_i^2 \partial_{z_i} + 2w_i \Delta_i) \Phi_N(J|X|Z) &= 0. \end{aligned} \quad (10.2.21)$$

En el caso de los correladores de dos y tres puntos, estas ecuaciones determinan la forma funcional en las variables en la hoja de mundo a menos de ciertas constantes.

Además, se supone la invariancia de estos correladores bajo la simetría generadas por los modos cero de las corrientes  $J_0^a, \bar{J}_0^a$  con  $a = 3, \pm$ , lo que lleva a las siguientes ecuaciones de Ward:

$$\begin{aligned} \sum_i \partial_{x_i} \Phi_N(J|X|Z) &= 0, \\ \sum_i (x_i \partial_{x_i} + j_i) \Phi_N(J|X|Z) &= 0, \\ \sum_i (x_i^2 \partial_{x_i} + 2x_i j_i) \Phi_N(J|X|Z) &= 0. \end{aligned} \quad (10.2.22)$$

Estas ecuaciones son formalmente idénticas a (10.2.21) pero para las variables en el espacio target. En lugar del peso conforme frente a Virasoro se encuentra el peso afín  $j$ . La función de dos puntos toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi_2(J|X|Z) &= [N(j_1) \delta(j_1 + j_2 + 1) \delta^2(x_2 - x_1) + \\ &A(j_1) \delta(j_1 - j_2) |x_{12}|^{4j_1}] |z_{12}|^{-4\Delta_{j_1}}, \end{aligned} \quad (10.2.23)$$

donde  $x_{ij} \equiv x_i - x_j$  y  $z_{ij} \equiv z_i - z_j$ , para  $i, j = 1, 2$ . Por tratarse de una teoría conforme, uno esperaría un único término en (10.2.23), el correspondiente a  $\delta(j_1 - j_2)$  (cf. [96], capítulo 4), que en adelante llamaremos término regular. Sin embargo, dada la equivalencia de las representaciones con espín  $j$  y  $-1 - j$ , también se debe considerar el término proporcional a  $\delta(j_1 + j_2 + 1)$ . A este término, que contiene una  $\delta^2(x_{21})$  se lo denomina término de contacto. La función de dos puntos fija la normalización entre los campos. Si suponemos como en [115] que los operadores están normalizados de forma tal que

$$N(j_1) \equiv 1, \quad (10.2.24)$$

de donde resulta

$$A(j_1) = B(j_1). \quad (10.2.25)$$

La función de dos puntos queda, finalmente

$$\Phi_2(J|X|Z) = |z_{12}|^{-4\Delta_{j_1}} [\delta^2(x_{12})\delta(1 + j_1 + j_2) + |x_{12}|^{4j_2} B(j_1)\delta(j_2 - j_1)]. \quad (10.2.26)$$

La función de tres puntos también está determinada a menos de una constante por (10.2.21) y (10.2.22). En efecto, se tiene que

$$\Phi_3(J|X|Z) = |C(\Delta|Z)|^{-2} |C(J|X)|^2 D(J), \quad (10.2.27)$$

donde la “constante de estructura”  $D(J)$  y el coeficiente  $C(J|X)$  vienen dados explícitamente por

$$D(J) = \frac{G(1 + j_1 + j_2 + j_3)}{\nu^{-1 - j_1 - j_2 - j_3} G_0} \prod_{\sigma} \frac{G(j_{\sigma})}{G(1 + 2j_{\sigma_1})}, \quad (10.2.28)$$

y

$$C(J|X) = \prod_{\sigma} x_{\sigma_1 \sigma_2}^{j_{\sigma}}. \quad (10.2.29)$$

En (10.2.28) y (10.2.29) los productos corren sobre todas las permutaciones cíclicas de las etiquetas y  $j_{\sigma} = j_{\sigma_1} + j_{\sigma_2} - j_{\sigma_3}$ . En principio, la constante  $D(J)$  no viene determinada por las simetrías conforme o afín, se precisa información adicional. Fue en [116] que se determinó esta constante empleando resultados análogos en el modelo de Liouville y la función  $G(j)$  en (10.2.28) se define en términos de la función de Barnes doble  $\Gamma_2$  como

$$G(j) = b^{-bj(b+b^{-1}+bj)} \Gamma_2(-bj|b, b^{-1}) \Gamma_2(b + b^{-1} + bj|b, b^{-1}), \quad (10.2.30)$$

y

$$G_0 = -2\pi^2 \gamma(1 + b^2) G(-1). \quad (10.2.31)$$

La función  $C(\Delta|Z)$  viene dada por

$$C(\Delta|Z) = \prod_{\sigma} z_{\sigma_1 \sigma_2}^{\Delta_{\sigma}}, \quad (10.2.32)$$

donde  $\Delta_\sigma = \Delta_{j_{\sigma_1}} + \Delta_{j_{\sigma_2}} - \Delta_{j_{\sigma_3}}$ . La función Gamma doble de Barnes viene dada por

$$\log(\Gamma_2(s|w_1, w_2)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (s + n_1 w_1 + n_2 w_2)^{-\epsilon}. \quad (10.2.33)$$

Las sumas sobre  $n_1, n_2$  están definidas para  $\text{Re}(\epsilon) > 2$ , donde son convergentes y el límite para  $\epsilon \rightarrow 0$  se toma después de realizar una continuación analítica sobre el semiplano  $\text{Re}(\epsilon) \leq 2$ .

Las ecuaciones (10.2.21) y (10.2.22) ya no determinan completamente la dependencia funcional de los correladores con más de tres puntos. Los cocientes anarmónicos

$$\eta = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \quad \text{y} \quad r = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \quad (10.2.34)$$

son invariantes ante transformaciones conformes globales y transformaciones afines globales, respectivamente, de modo que, una función que dependa de  $\eta, \bar{\eta}, r$  y  $\bar{r}$  será también invariante. Por ejemplo, usando las identidades de Ward (10.2.21) y (10.2.22), para la función de cuatro puntos se tiene

$$\Phi_4(J|X|Z) = f(\eta, \bar{\eta}, r, \bar{r}) \prod_{i<l}^4 |z_{il}|^{2(\Delta/3 - \Delta_i - \Delta_l)} \prod_{i<l}^4 |x_{il}|^{2(j/3 - j_i - j_l)}, \quad (10.2.35)$$

donde  $\Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$  y  $j = \sum_{i=1}^4 j_i$ , siendo  $f(\eta, \bar{\eta}, r, \bar{r})$  una función arbitraria de los cocientes anarmónicos. Se suele escribir a estas funciones en términos de los *bloques conformes*.

Una función de cuatro puntos donde los pesos conformes de cada campo vienen dados por  $h_i$  toma la forma<sup>1</sup>

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle \quad (10.2.36)$$

se puede realizar una transformación conforme global de manera que  $z_4, \bar{z}_4 = 0$ ,  $z_1, \bar{z}_1 = \infty$ ,  $z_2, \bar{z}_2 = 1$ . Luego  $z_3 = x$ ,  $\bar{z}_3 = \bar{x}$  y la función de correlación puede relacionarse con un elemento de matriz entre dos estados asintóticos

$$\lim_{z_1, \bar{z}_1 \rightarrow \infty} z_1^{2h_1} \bar{z}_1^{2\bar{h}_1} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(1, 1) \phi_3(x, \bar{x}) \phi_4(0, 0) \rangle = G_{34}^{21}(x, \bar{x}), \quad (10.2.37)$$

donde se definió la función

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \phi_3(x, \bar{x}) | h_4, \bar{h}_4 \rangle, \quad (10.2.38)$$

La idea ahora es reducir los productos dentro de la función de cuatro puntos con la ayuda del OPE

$$\phi_3(x, \bar{x}) \phi_4(0, 0) = \sum_p C_{34}^p x^{h_p - h_3 - h_4} \bar{x}^{\bar{h}_p - \bar{h}_3 - \bar{h}_4} \Psi_p(x, \bar{x} | 0, 0), \quad (10.2.39)$$

donde se definió

$$\Psi_p(x, \bar{x} | 0, 0) = \sum_{\{k, \bar{k}\}} \beta_{34}^{p\{k\}} \bar{\beta}_{34}^{p\{\bar{k}\}} x^K \bar{x}^{\bar{K}} \phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(0, 0), \quad (10.2.40)$$

<sup>1</sup>Se considerarán campos sin espín a efectos ilustrativos.

con  $K = \sum_i k_i$  y  $\{k\}$  da cuenta de una colección de índices naturales  $k_i$  de manera que

$$\phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(z, \bar{z}) = L_{-k_1} L_{-k_2} \dots L_{-k_n} \phi_p(z, \bar{z}), \quad (10.2.41)$$

representa un descendiente. Los coeficientes  $C_{34}^p$ ,  $\beta_{34}^{\{k\}}$ ,  $\bar{\beta}_{34}^{\{\bar{k}\}}$  forman parte de los coeficientes del OPE y dependerán de la teoría específica que se considere.

La función  $G_{34}^{21}(x, \bar{x})$  puede ser escrita como

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{34}^p C_{12}^p A_{34}^{21}(p|x, \bar{x}), \quad (10.2.42)$$

donde se definió la función

$$A_{34}^{21}(p|x, \bar{x}) = (C_{12}^p)^{-1} x^{h_p - h_3 - h_4} \bar{x}^{\bar{h}_p - \bar{h}_3 - \bar{h}_4} \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \Psi_p(x, \bar{x} | 0, 0) | 0 \rangle. \quad (10.2.43)$$

A estas funciones se las denomina *ondas parciales* y se factorizan en una parte holomorfa y una antiholomorfa

$$A_{34}^{21}(p|x, \bar{x}) = \mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{34}^{21}(p|\bar{x}), \quad (10.2.44)$$

donde

$$\mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) = x^{h_p - h_3 - h_4} \sum_{\{k\}} \beta_{34}^{\{k\}} x^K \frac{\langle h_1 | \phi_2(1) L_{-k_1} \dots L_{-k_N} | h_p \rangle}{\langle h_1 | \phi_2(1) | h_p \rangle}. \quad (10.2.45)$$

A estas funciones se las conoce como *bloques conformes* y pueden calcularse a partir de las dimensiones conformes y de la carga central, conmutando los generadores de Virasoro con  $\phi_2(1)$  sucesivamente. Los bloques conformes son los elementos en la función de cuatro puntos que pueden determinarse por invariancia conforme; dependen de los cocientes anarmónicos a través de una expansión en serie. Sin embargo, en general, no se conoce una expresión explícita para los mismos dado que la determinación a partir de (10.2.45) se torna rápidamente inmanejable.

Los correladores con más de tres puntos pueden determinarse completamente si se conoce la expansión del producto de operadores (OPE), la cual permite reducir el número de campos en las funciones de correlación. En [115] se postuló un OPE para campos primarios de la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{j_2}(x_2|z_2) \Phi_{j_1}(x_1|z_1) &= \int_{\mathcal{C}^+} dj_3 D(J) |z_2 - z_1|^{-\Delta_{12}} \int_{\mathbb{C}} d^2 x_3 |x_1 - x_2|^{2j_{12}} \times \\ &|x_1 - x_3|^{2j_{13}} |x_2 - x_3|^{2j_{23}} \Phi_{-1-j_3}(x_3|z_1) + \text{descendientes}. \end{aligned} \quad (10.2.46)$$

La curva de integración en la variable  $j_3$  corresponde a  $\mathcal{C}^+ = 1/2 + i\mathbb{R}_+$  y la constante de estructura  $D(J)$  es la misma que en (10.2.28). La expresión anterior es válida para configuraciones de  $j_1$  y  $j_2$  tales que

$$|\text{Re}(j_{21}^\pm)| < \frac{1}{2} \quad (10.2.47)$$

donde  $j_{21}^+ = j_2 + j_1 + 1$  y  $j_{21}^- = j_2 - j_1$ .

Dentro de este dominio uno se asegura que ninguno de los polos del integrando en el OPE atraviese el contorno de integración sobre  $j_3$ . Sin embargo, mientras las partes imaginarias de

$j_{21}^{\pm}$  no se anulen, en [69] se mostró que (10.2.46) admite una continuación analítica para valores arbitrarios de  $j_1$  y  $j_2$ , deformando el contorno de integración  $\mathcal{C}^+$ . El nuevo contorno deformado está dado por el original más un número finito de círculos alrededor de los polos del integrando, lo que lleva a una suma finita de residuos que contribuyen al OPE. Cuando  $j_{21}^{\pm} \in \mathbb{R}$ , uno puede darles una parte imaginaria pequeña y luego tomar el límite de esta parte tendiendo a cero.

### 10.3 Modelo $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW

La acción del modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW está formalmente relacionada con la acción del modelo  $H_3^+$ -WZW por una rotación de Wick. Sin embargo, el contacto entre ambos resulta ser no trivial por las propiedades muy diversas que exhiben. Un ejemplo de esto viene dado por el espectro. Mientras que el espacio de estados en  $H_3^+$ -WZW solo involucra a las series continuas en el espacio de representaciones de la simetría del álgebra, la contraparte Lorentziana es bastante más complicada, ya que incorpora también series discretas y sus imágenes ante los automorfismos de “flujo espectral”.

Los primeros intentos para definir un espectro consistente para la teoría de cuerdas en la hoja de mundo en  $AdS_3$  [117–120] se basaron en buscar representaciones con autovalor de  $L_0$  acotado por debajo; se las denomina representaciones de *energía positiva*. Se encontró que había que considerar, para los modos cero, productos de las representaciones continuas y discretas de peso más alto y más bajo. Todas las representaciones están parametrizadas por el espín  $j$ , que está relacionado al autovalor  $c_2$  del segundo Casimir

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{2}(J_0^+ J_0^- + J_0^- J_0^+) - (J_0^3)^2, \quad (10.3.1)$$

a través de  $c_2 = -j(j+1)$ . Las representaciones mencionadas se definen de la siguiente manera en base  $m$ , que es la base en la que los generadores de la parte diagonal de los modos cero de las corrientes conservadas,  $J_0^3$  y  $\bar{J}_0^3$ , están diagonalizados:

#### (1) Representaciones discretas de peso más bajo :

$$\mathcal{D}_j^+ = \{|j; m\rangle : m = -j, -j+1, -j+2, \dots\},$$

donde  $|j; -j\rangle$  es aniquilado por  $J_0^-$  y  $|j; m\rangle$  es un autoestado de  $J_0^3$  con autovalor  $m$ . La representación es unitaria si  $j$  es real y  $j < -1$ . Para representaciones del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ ,  $j$  debe ser un semientero. Sin embargo, para el cubrimiento universal de  $SL(2, \mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{R}_{<-1}$ .

#### (2) Representaciones discretas de peso más alto:

$$\mathcal{D}_j^+ = \{|j; m\rangle : m = j, j-1, j-2, \dots\},$$

donde  $|j; j\rangle$  es aniquilado por  $J_0^+$  y  $|j; m\rangle$  es un autoestado de  $J_0^3$  con autovalor  $m$ . La representación es unitaria si  $j$  es real y  $j < -1$ . De la misma manera que para las representaciones de peso más bajo, en el cubrimiento universal de  $SL(2, \mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{R}_{<-1}$ .

### (3) Representaciones continuas:

$$\mathcal{C}_j^\alpha = \{|j, \alpha; m\rangle : m = \alpha, \alpha \pm 1, \alpha \pm 2, \dots\},$$

donde  $|j, \alpha; m\rangle$  es un autoestado de  $J_0^3$  con autovalor  $m$ . Sin pérdida de generalidad puede tomarse  $0 \leq \alpha < 1$ . Esta representación es unitaria si  $j = -1/2 + is$  y  $s$  es real.

El espectro se completa con los descendientes afines de los modos cero *i.e.*  $\hat{\mathcal{C}}_j^\alpha \times \hat{\mathcal{C}}_j^\alpha$  y  $\hat{\mathcal{D}}_j^\pm \times \hat{\mathcal{D}}_j^\pm$ . En [118] se probó la ausencia de fantasmas para  $-\frac{k}{2} < j < 0$ , garantizando que el espectro es unitario cuando la teoría se suplementa con una CFT unitaria tal que la carga central total sea  $c = 26$  y se impongan los vínculos de Virasoro.

El espectro así considerado presenta aún tres problemas. En primer lugar, la función de partición que se construye a partir de los estados no es invariante modular. En segundo lugar, las restricciones en el espín  $j$  llevan a un límite superior para el espectro de masa de las cuerdas, lo cual difiere de la torre infinita de estados característica de la teoría de cuerdas. Finalmente, el espectro no contempla la existencia de estados asimilables a las “cuerdas largas”, estados que uno espera que existan a partir de los resultados en [121, 122].

Todos estos problemas se resuelven ampliando el espectro, considerando representaciones con autovalores de  $L_0$  no acotados por debajo. Las nuevas representaciones fueron propuestas en [123] y se obtienen a partir de las representaciones ya enumeradas mediante la acción del flujo espectral. El flujo espectral se define como un automorfismo sobre el álgebra de las corrientes

$$J_n^{3,\pm} \rightarrow \tilde{J}_n^{3,\pm}. \quad (10.3.2)$$

Dado un entero  $w$ , el automorfismo está dado, explícitamente, por

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n^3 &= J_n^3 - \frac{k}{2} w \delta_{n,0}, \\ \tilde{J}_n^+ &= J_{n+w}^+, \\ \tilde{J}_n^- &= J_{n-w}^-, \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

y de manera similar para  $\tilde{J}_n^{\pm,3}$ . Es inmediato ver que esta transformación preserva las relaciones de conmutación (10.2.6) y (10.2.7).

Dado que los generadores de Virasoro se obtienen mediante la construcción de Sugawara a partir de los modos de las corrientes, también cambiará su forma. Se tiene:

$$\tilde{L}_n = L_n + w J_n^3 - \frac{k}{4} w^2 \delta_{n,0}, \quad (10.3.4)$$

y, nuevamente, es sencillo ver que se preservan las relaciones de conmutación (2.2.15).

En particular, las transformaciones (10.3.3) y (10.3.4) muestran que todos los estados de las bases (1), (2) o (3) cuando adquieren flujo espectral resultan ser autoestados de  $J_0^3$  con autovalor  $m$

$$m = \tilde{m} + \frac{k}{2}w, \quad (10.3.5)$$

y autoestados de  $L_0$  con autovalor

$$\Delta_j = \tilde{\Delta}_j - wm + \frac{k}{4}w^2, \quad \tilde{\Delta}_j = -\frac{j(j+1)}{k-2}, \quad (10.3.6)$$

o, si se emplea (10.3.5),

$$\Delta_j = \tilde{\Delta}_j - w\tilde{m} - \frac{k}{4}w^2. \quad (10.3.7)$$

Se denotará a los campos afines primarios sin flujo espectral como  $\Phi_j(m|z)$  y, a las imágenes ante flujo espectral como  $\Phi_j^w(m|z)$ . En el caso en que  $w = \mp 1$  se utilizará la notación  $\hat{\Phi}_j(m|z)$ . Los OPEs de estos estados con las corrientes vienen dados por

$$J^3(z)\Phi_j^w(m|w) = \frac{m + kw/2}{z - w}\Phi_j^w(m|w), \quad (10.3.8)$$

$$J^\pm(z)\Phi_j^w(m|w) = \frac{\mp j + m}{(z - w)^{1 \pm w}}\Phi_j^w(m \pm 1|w), \quad (10.3.9)$$

Para ver con mayor claridad la acción del flujo espectral sobre el espacio de estados es conveniente graficar los estados correspondientes en una dada representación. Los estados están identificados por los autovalores frente a la acción de los operadores  $\tilde{J}_0^3$  (o  $J_0^3$ ) y  $\tilde{L}_0$  (o  $L_0$ ). Por ejemplo, los estados de la representación  $\hat{\mathcal{D}}_j^+$ , generada a partir de  $\tilde{J}_0^3$ , pueden ser representados en un diagrama como el de la figura (10.1). Introduciendo el flujo espectral

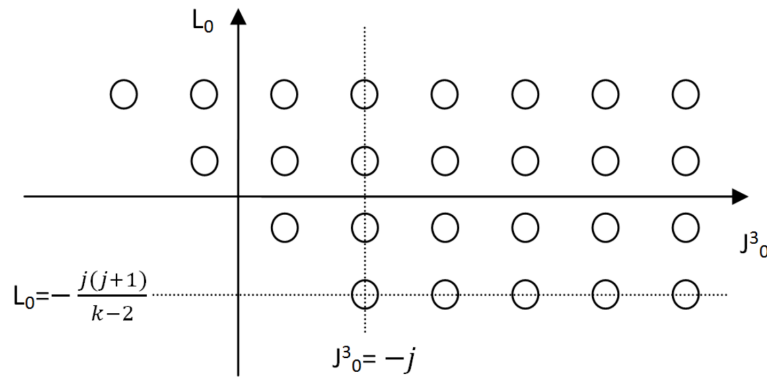


Figura 10.1: Diagrama de pesos para la representación  $\hat{\mathcal{D}}_j^+$ . La fila inferior está conformada por campos primarios en base  $m$ , modos del vértice en base  $x$   $\Phi_{-1-j}(x|z)$ .

(10.3.3), las líneas horizontales en (10.1) (con autovalor  $\beta$  ante  $\tilde{L}_0$ ) serán rectas de pendiente

$-w$  en un sistema cartesiano cuyos ejes son  $(J_0^3, L_0)$ <sup>2</sup>. Esto se ve a partir de la relación (10.3.4) que lleva directamente a<sup>3</sup>

$$L_0 = \left( \tilde{L}_0 + \frac{k}{4}w^2 \right) - wJ_n^3. \quad (10.3.10)$$

Por otro lado, las rectas verticales en la figura (10.1) dadas por autovalores  $\beta'$  frente a  $\tilde{J}_0^3$  permanecerán verticales en el nuevo diagrama, pero desplazadas paralelamente. Para  $w = 1$ , el nuevo diagrama de pesos, partiendo de la serie discreta  $\hat{D}_j^+$ , adquiere la forma del diagrama en la figura (10.2). El flujo espectral genera, así, una nueva representación. En el caso de un

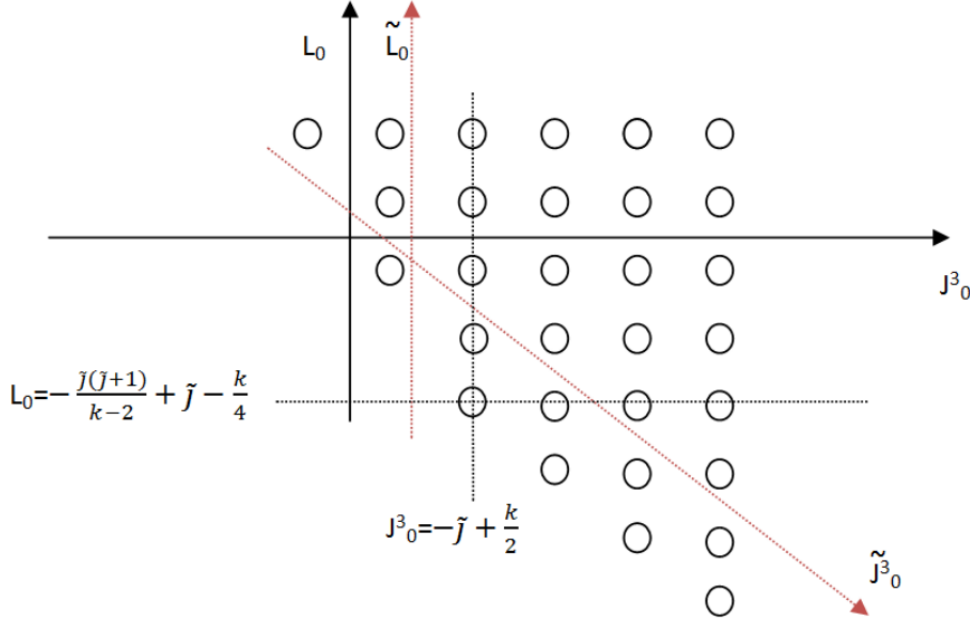


Figura 10.2: Diagrama de pesos para la representación  $\hat{D}_j^{+,w=1}$ .

grupo compacto como  $SU(2)$  el flujo espectral mapea una representación de energía positiva del álgebra de corrientes en otra representación de energía positiva. En este caso, el flujo espectral suele generar nuevas representaciones en donde el autovalor de  $L_0$  no está más acotado por debajo, como sucede en el caso de la  $\hat{D}_j^+$ . La aparición de estos estados de *energía negativa* no es del todo extraña dado que el término cinético del modelo  $SL(2, \mathbb{R})$  no es definido positivo. En general, la operación de flujo espectral sobre  $\hat{D}_j^+$  con  $w \geq 1$  o  $w \leq -2$  da una nueva representación en donde el autovalor de  $L_0$  no está acotado por debajo. Similarmente, el flujo espectral de  $\hat{C}_{j=-1/2+is}^\alpha$  con  $w \neq 0$  también da una representación en donde el autovalor de  $L_0$  no está acotado por debajo. Se denotan a las representaciones con flujo espectral como  $\hat{D}_j^{\pm,w}$  y  $\hat{C}_j^{\alpha,w}$ , donde  $\tilde{j}$  da cuenta del espín antes de la acción de flujo espectral.

Estas representaciones contienen en general estados de norma negativa, sin embargo, en [123] se demostró que los vínculos de Virasoro remueven estos estados en  $\hat{D}_j^{\pm,w}$  con  $\tilde{j} > -k/2$  y en

<sup>2</sup>Estos ejes representan el valor de los autovalores

<sup>3</sup>Aquí  $\beta$  debe entenderse como



$\hat{C}_{\tilde{j}=1/2+is}^{\alpha,w}$ , para un entero cualquiera  $w$ .

El único caso donde se obtiene una representación con  $L_0$  acotado por debajo es cuando se aplica flujo espectral sobre  $\hat{D}_j^\pm$  con  $w = \mp 1$ , en cuyo caso se obtiene  $\hat{D}_j^{\pm,w=\mp 1} = \hat{D}_{-k/2-\tilde{j}}^\mp$  (ver figura (10.3)).

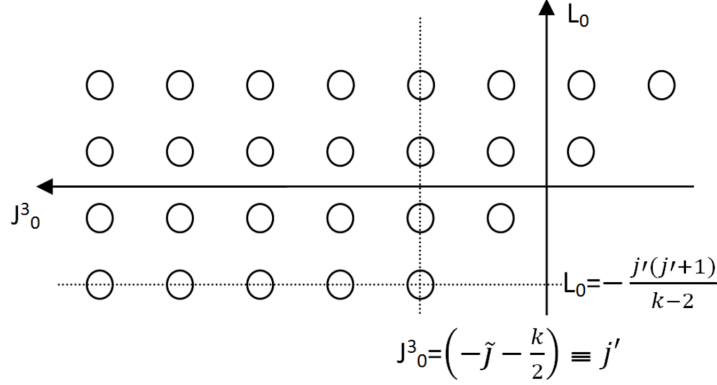


Figura 10.3: a) Diagrama de pesos para la representación  $\hat{D}_j^{+,w=-1}$ . Este nuevo diagrama es equivalente a uno que corresponde a  $\hat{D}_{-j-k/2}^{-,w=0}$ .

La identificación entre series discretas con una unidad de flujo espectral y sin flujo espectral también se extiende a casos de dos series con flujo espectral que difieran en una unidad, *i.e.* se tiene una identificación del tipo  $\hat{D}_j^{+,w} \equiv \hat{D}_{-\frac{k}{2}-j}^{-,w+1}$ .

En lo que sigue se considerará como parte del espectro a las representaciones continuas, a las discretas de peso más alto y más bajo (con las restricciones en el espín ya discutidas) y las imágenes de las tres anteriores generadas a partir de la acción de flujo espectral.

Resulta interesante observar qué consecuencias trae realizar la operación de flujo espectral específicamente sobre campos primarios. Se parte de algún campo primario  $|\psi\rangle$  (estados de energía mínima) en alguna representación sin flujo espectral, que satisface

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n^{\pm,3}|\psi\rangle &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \tilde{J}_0^3|\psi\rangle &= \tilde{m}|\psi\rangle, \\ \tilde{L}_0|\psi\rangle &= -\frac{j(j+1)}{k-2}|\psi\rangle. \end{aligned} \tag{10.3.11}$$

Si  $m = \pm(j+n)$  para algún entero  $n$  distinto de cero, el estado  $|\psi\rangle$  pertenece a una representación discreta  $D_j^\pm$  generada por  $\tilde{J}_0^a$ . Si no es el caso, el estado está en la representación continua  $C_{j,\alpha}$ , donde  $m = \alpha + n$  para algún entero  $n$  distinto de cero. Notar que no se está haciendo referencia a representaciones del espacio con estados generados por el álgebra afín  $\hat{D}_j^\pm$  o  $\hat{C}_{j,\alpha}$ , sino sólo al espacio de estados generado por los modos cero de la corriente.

Si se aplica la operación de flujo espectral con  $w > 0$ , el estado  $|\psi^w\rangle$  obedece

$$J_0^-|\psi^w\rangle = 0, \quad J_0^3|\psi^w\rangle = \left(\tilde{m} + \frac{k}{2}w\right)|\psi^w\rangle. \tag{10.3.12}$$

Es decir que con respecto al álgebra dada por las corrientes  $J_0^a$  el estado  $|\psi^w\rangle$  es un peso más bajo para alguna representación  $D_J^+$  independientemente de la representación a la que pertenecía originalmente  $|\psi\rangle$ . El valor de  $J$  se determina a partir de la condición de peso extremo, dado que al ser un estado de peso más bajo,

$$-J = m = \tilde{m} + \frac{k}{2}w. \quad (10.3.13)$$

De la misma manera, la operación de flujo espectral con  $w < 0$  convierte al estado  $|\psi\rangle$  en un estado  $|\psi^w\rangle$  que es un peso más alto de una representación  $D_J^-$

$$J = m = \tilde{m} + \frac{k}{2}w = \tilde{m} - \frac{k}{2}|w|. \quad (10.3.14)$$

A modo de ejemplo, considérese el diagrama de pesos de la serie discreta  $\widehat{\mathcal{D}}_j^+$  de la figura (10.4 a).

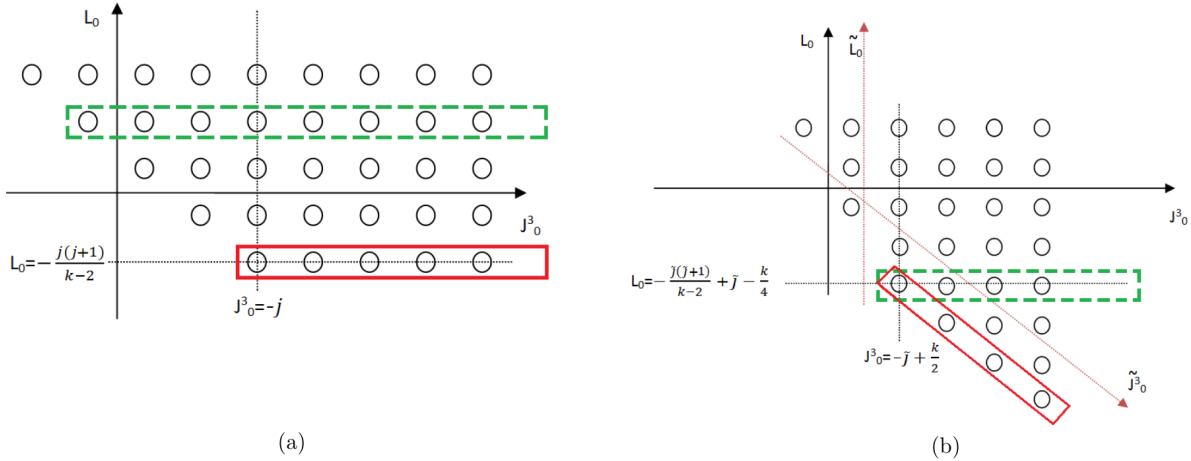


Figura 10.4: a) Diagrama de pesos para la representación  $\widehat{\mathcal{D}}_j^+$ . La fila inferior está conformada por campos primarios en base  $m$ , modos del vértice en base  $x$ :  $\Phi_{-1-j}(x|z)$ .  
b) Diagrama de pesos para la representación  $\widehat{\mathcal{D}}_j^{+,w=1}$ .

La fila inferior corresponde a campos primarios con respecto al álgebra de Virasoro (con peso conforme dado por  $-j(j+1)/(k-2)$ ).

Se mostró que, al agregar flujo espectral, el diagrama de pesos se deforma y adquiere la forma de la figura (10.4 b) (por comodidad, se toma  $w = 1$ ). Si se toma ahora el estado primario antes de la operación de flujo espectral, se ve que se corresponde con un peso más bajo de la fila recuadrada en línea punteada. Lo mismo vale para otros primarios: se corresponden con pesos más bajos de “filas paralelas” a la recuadrada en línea punteada. Dado que el estado escogido es aniquilado por  $J_0^-$  y el resto de la fila se genera mediante la acción de  $J_0^+$  se dice que es el peso más bajo de la representación  $D_J^+$ .

## 10.4 Funciones de correlación en base $m$

Siguiendo a [60, 68, 124] se supondrá que las funciones de correlación para campos primarios sin flujo espectral en el modelo de  $AdS_3$ -WZW se obtienen por continuación analítica de las de  $H_3^+$ . Es decir que son las mismas que las de  $H_3^+$ , pero ahora  $j, m$  y  $\bar{m}$  toman valores en las representaciones de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Las funciones de correlación para  $H_3^+$  fueron obtenidas en la base  $x$ . En  $AdS_3$ , además de la base  $x$ , uno dispone de la base  $m$ , y resulta útil tener expresadas a las funciones de correlación en ambas bases.

La relación entre base  $m$  y base  $x$  es una transformada de Mellin. Considérese un estado  $\Phi_{J, \bar{J}}(x|z)$  en base  $x$ . En la variedad de interés,  $AdS_3$ , no hay razón para suponer vértices etiquetados con un único peso  $J$  para los sectores right y left, como si ocurre en  $H_3^+$  cuando se determinó el espectro. Sin embargo, para que las funciones de correlación estén univaluadas en el espacio dado por  $x$  y  $\bar{x}$  la diferencia  $(J - \bar{J})$  debe ser un entero, por lo que en adelante se considerará este caso únicamente. La relación viene dada explícitamente por

$$\Phi_{J, \bar{J}}(M|z) = \int d^2x x^{J+M} \bar{x}^{\bar{J}+\bar{M}} \Phi_{-1-J, -1-\bar{J}}(x|z) \quad (10.4.1)$$

donde  $M$  y  $\bar{M}$  (omitido en la notación del campo primario) son los autovalores del estado generado por el campo frente a la acción de  $J_0^3$  y  $\bar{J}_0^3$ . Dado que  $(J - \bar{J})$  es un entero, la integral se anula a menos que  $(M - \bar{M})$  sea un entero también. Por ejemplo, si pensamos en una extensión analítica de los campos en  $H_3^+$ , donde los estados no tienen flujo espectral, y  $J = \bar{J} \equiv j$ , se tiene

$$\Phi_j(m|z) = \int_{\mathbb{C}} d^2x x^{j+m} \bar{x}^{j+\bar{m}} \Phi_{-1-j}(x|z), \quad (10.4.2)$$

donde  $m$  y  $\bar{m}$  son los autovalores del estado generado por el campo frente a la acción de  $\tilde{J}_0^3$  y  $\tilde{\bar{J}}_0^3$ , o sea, corrientes antes del flujo espectral.

La función de  $N$  puntos con estados con flujo espectral se denotará por

$$\Phi_N(J|w|M|Z) = \left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_{j_i}^{w_i}(m_i|z_i) \right\rangle, \quad (10.4.3)$$

con  $J$  y  $Z$  igual que en el caso sin flujo espectral y  $M = (m_1, \dots, m_N)$  y  $w = (w_1, \dots, w_N)$ . Una propiedad importante de estos correladores, con la única excepción de la función de dos puntos, es que pueden exhibir una violación a la conservación del flujo espectral, es decir, podría suceder que para  $N \geq 3$  el flujo total,  $w = \sum_{i=1}^N w_i$ , no se anule. Esta no conservación está regulada por la siguiente regla de selección

$$-N + \delta \leq w \leq N_c - \delta, \quad (10.4.4)$$

donde  $N_c$  es el número de operadores de vértice asociados a estados en representaciones continuas,  $\delta = 1$  cuando  $N_c = 0$  y  $\delta = 2$  en otro caso. A partir de (10.4.4) puede verse, usando la identificación de series, que la máxima violación puede ser  $N - 2$  unidades de flujo espectral.

Otro aspecto relevante del modelo es que dos amplitudes con el mismo valor de  $w$  solo difieren en un factor que ajusta la dependencia en la hoja de mundo. En [125] se mostró que  $F_N(w|M|Z)\Phi_N(J|w|M|Z)$ , con

$$F_N(w|M|Z) = \left| \prod_{i<j}^N (z_i - z_j)^{m_i w_j + m_j w_i + w_i w_j k/2} \right|^2, \quad (10.4.5)$$

se mantiene invariante para cualquier asignación de flujo espectral sobre los vértices, mientras la suma total sea  $w$ . Explotando este hecho para el estudio de la función de  $N$  puntos, no hay pérdida de generalidad si se supone que únicamente el primer vértice tiene flujo espectral  $w$  con  $0 \leq w \leq N - 2$ .

Los correladores con una unidad de flujo espectral total, tanto positiva como negativa, *i.e.*  $w = (\mp 1, 0, \dots, 0)$ , se denotarán como  $\widehat{\Phi}_N(J|M|Z)$  y la variable colectiva para el peso conforme será  $\widehat{\Delta} = (\widehat{\Delta}_{j_1 m_1}, \Delta_{j_2}, \dots, \Delta_{j_N})$ . Sólo se considerarán funciones de correlación con hasta una unidad de flujo espectral.

Un correlador sin flujo espectral  $\Phi_N(J|M|Z)$  en el modelo  $SL(2, \mathbb{R})$  puede obtenerse de los de  $H_3^+$  a partir de la aplicación de la transformada (10.4.2) para cada inserción en el correspondiente correlador Euclídeo  $\Phi_N(J|X|Z)$ . Sin embargo, en  $H_3^+$ ,  $m + \bar{m}$  es un número puramente imaginario, mientras que en  $AdS_3$ -WZW,  $m + \bar{m}$  es real por lo que también habrá que hacer una rotación de Wick sobre  $m_i + \bar{m}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Además, el espín, que en  $H_3^+$  está restringido a la curva  $\mathcal{C}^+$ , debe ser tomado como real para obtener los estados en el espectro discreto de  $AdS_3$ .

La función de dos puntos, calculada a partir de (10.2.26) usando (10.4.2), da como resultado

$$\Phi_2(J|M|Z) = |z_{12}|^{-4\Delta_{j_1}} \delta[M] \left[ \delta(1 + j_1 + j_2) + c_{-1-j_1, m_1} B(-1 - j_1) \delta(j_2 - j_1) \right], \quad (10.4.6)$$

con

$$c_{jm} = \frac{\pi}{\gamma(-2j)} \frac{\gamma(-j + m)}{\gamma(1 + j + m)}, \quad (10.4.7)$$

y donde  $\delta[M]$  es notación para denominar a  $\delta^2(m_1 + m_2)$ , con

$$\delta^2(m) = \int_{\mathbb{C}} d^2 x x^{m-1} \bar{x}^{\bar{m}-1} = 4\pi^2 \delta(m + \bar{m}) \delta_{m-\bar{m}, 0}. \quad (10.4.8)$$

La función de tres puntos sin flujo espectral es

$$\Phi_3(J|M|Z) = |C(\Delta|Z)|^{-2} \delta[M] W(J|M) D(-1 - J), \quad (10.4.9)$$

con  $W(J|M)$  definido como

$$W(J|M) = \int_{\mathbb{C}} d^2 x_1 d^2 x_2 \prod_{\sigma} x_{\sigma_1}^{j_{\sigma_1} + m_{\sigma_1}} \bar{x}_{\sigma_1}^{j_{\sigma_1} + \bar{m}_{\sigma_1}} |x_{\sigma_1 \sigma_2}|^{-2-2j_{\sigma}}, \quad (10.4.10)$$

donde  $x_3, \bar{x}_3 = 1$ . Esta integral fue explícitamente calculada en términos de funciones hipergeométricas generalizadas en [126, 127] y también usando el formalismo de campos libres en [72, 127, 128].

Al momento de considerar el flujo espectral, el cálculo se vuelve más complicado. El procedimiento para incorporar violación de flujo espectral exige la inserción de un vértice adicional, llamado operador de flujo espectral, por cada unidad de flujo espectral total. Este método, desarrollado en [125], fue explotado en [68] para obtener la siguiente expresión para la función de tres puntos

$$\widehat{\Phi}_3(J|M|Z) = |C(\widehat{\Delta}|Z)|^{-2} \delta[M \pm k/2] \widehat{W}(J|M) \widehat{D}(-1 - J), \quad (10.4.11)$$

con

$$\widehat{D}(J) = B(j_1) \gamma(1 - j'_1 + j_2 + j_3) D(J'), \quad (10.4.12)$$

donde  $j'_1 = -k/2 - j_1$  y  $J' = (j'_1, j_2, j_3)$  y

$$\widehat{W}(J|M) = (-1)^{m_3 - \bar{m}_3} \prod_{i=1}^3 \gamma(1 + j_i \pm m_i). \quad (10.4.13)$$

## 10.5 Bloques conformes en $AdS_3$ sin flujo espectral

En [69] se introdujo una expresión integral para la función de cuatro puntos, y toma la forma

$$\Phi_4(J|X|Z) = |\Xi(\Delta|Z)|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj \mathcal{D}_j(J) \mathcal{G}_j(J|X|z). \quad (10.5.1)$$

La función  $\Xi(\Delta|Z)$  está dada por

$$\Xi(\Delta|Z) = z_{43}^{-\Delta_{j_1} - \Delta_{j_2} + \Delta_{j_3} + \Delta_{j_4}} z_{42}^{2\Delta_{j_2}} z_{41}^{\Delta_{j_1} - \Delta_{j_2} - \Delta_{j_3} + \Delta_{j_4}} z_{31}^{\Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} + \Delta_{j_3} - \Delta_{j_4}}. \quad (10.5.2)$$

El factor  $\mathcal{D}_j(J)$  es el producto de dos funciones de tres puntos con el propagador del estado intermedio, es decir

$$\mathcal{D}_j(J) = D_{12}(j) B(j)^{-1} D_{34}(j), \quad (10.5.3)$$

donde  $D_{12}(j)$  es notación por  $D(j_1, j_2, j)$ . El bloque conforme  $\mathcal{G}_j(J|X|z)$  se descompone como

$$\mathcal{G}_j(J|X|z) = |z|^{2(\Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2})} \mathcal{K}_j(J|X|z) G_j(J|X), \quad (10.5.4)$$

donde  $z$  es el cociente anarmónico sobre la hoja de mundo *i.e.*,  $z = z_{12}z_{34}/z_{13}z_{24}$ ,  $G_j(J|X)$  viene dado por

$$G_j(J|X) = \frac{(1 + 2j)^2}{\pi^2} \int_{\mathcal{C}} d^2x d^2x' C_{12}(j|x) |x - x'|^{-4-4j} C_{34}(j|x'), \quad (10.5.5)$$

con  $C_{12}(j|x) = C(j_1, j_2, j|x_1, x_2, x)$ , y el operador  $\mathcal{K}_j(J|X|z)$  tiene la siguiente forma factorizada

$$\mathcal{K}_j(J|X|z) = \mathcal{O}_j(J|X|z) \overline{\mathcal{O}_j(J|X|z)}, \quad (10.5.6)$$

donde  $\mathcal{O}_j(J|X|z)$  está dado formalmente por la serie de potencias en  $z$ :

$$\mathcal{O}_j(J|X|z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \delta_j^{(n)}(J|X). \quad (10.5.7)$$

En esta última expresión,  $\delta_j^{(n)}(J|X)$  denota a operadores diferenciales que contienen derivadas de orden finito en  $x_1, \dots, x_4$ . A pesar de que no se conocen fórmulas explícitas para estos operadores, pueden ser determinados recursivamente usando las ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov una vez que se fija  $\delta_j^{(0)}(J|X)$ . En este caso  $\delta_j^{(0)}(J|X) = 1$ .

Utilizando la invariancia  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre la hoja de mundo, la integral (10.5.5) puede simplificarse:

$$G_j(J|X) = |\Xi(J|X)|^2 G_j(J|x), \quad (10.5.8)$$

donde

$$\Xi(J|X) = x_{43}^{-j_1-j_2+j_3+j_4} x_{42}^{2j_2} x_{41}^{j_1-j_2-j_3+j_4} x_{31}^{j_1+j_2+j_3-j_4}, \quad (10.5.9)$$

y  $G_j(J|x)$  es igual (10.5.5) con  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = x = x_{12}x_{34}/x_{13}x_{24}$ ,  $x_3 = 1$  y  $x_4 = \infty$ . El resultado de esta integral viene dado por

$$G_j(J|x) = |F_j(J|x)|^2 + \lambda_j(J) |F_{-1-j}(J|x)|^2, \quad (10.5.10)$$

donde

$$\lambda_j(J) = \frac{\gamma(1+j+j_3-j_4)\gamma(1+j-j_3+j_4)}{\gamma(1+2j)\gamma(-j+j_1-j_2)\gamma(-j-j_1+j_2)}, \quad (10.5.11)$$

y  $F_j(J|x)$  es

$$F_j(J|x) = x^{-j+j_1+j_2} F(-j+j_1-j_2, -j-j_3+j_4; -2j|x). \quad (10.5.12)$$

Ambos términos en el lado derecho de (10.5.24) están relacionados por una reflexión en  $j$ , *i.e.*,  $j \leftrightarrow -1-j$ . Este hecho permite extender la integración en (10.5.1) a toda la recta  $\mathcal{C} = \{-1/2 + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$$\Phi_4(J|X|Z) = |\Xi(\Delta|Z)|^{-2} \int_{\mathcal{C}} dj \mathcal{D}_j(J) |\mathcal{F}_j(J|X|z)|^2, \quad (10.5.13)$$

donde los bloques quirales  $\mathcal{F}_j(J|X|z)$  vienen dados por

$$\mathcal{F}_j(J|X|z) = z^{\Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2}} \mathcal{O}_j(J|X|z) \Xi(J|X) F_j(J|x). \quad (10.5.14)$$

La invariancia ante  $SL(2, \mathbb{C})$  también implica que el operador definido como

$$\mathcal{O}_j(J|x|z) = \Xi(J|X)^{-1} \mathcal{O}_j(J|X|z) \Xi(J|X), \quad (10.5.15)$$

depende del cociente anarmónico  $x, y$ , de este hecho, después de introducir

$$\mathcal{F}_j(J|x|z) = z^{\Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2}} \mathcal{O}_j(J|x|z) F_j(J|x), \quad (10.5.16)$$

se puede escribir

$$\Phi_4(J|X|Z) = |\Xi(\Delta|Z)|^{-2} |\Xi(J|X)|^2 \int_{\mathcal{C}} dj \mathcal{D}_j(J) |\mathcal{F}_j(J|x|z)|^2. \quad (10.5.17)$$

Usando la expansión (10.5.7) se tiene

$$\mathcal{F}_j(J|x|z) = z^{\Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2}} x^{-j+j_1+j_2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n F_j^{(n)}(J|x). \quad (10.5.18)$$

donde se ha introducido

$$F_j^{(n)}(J|x) = \delta_j^{(n)}(J|x) F_j(J|x), \quad (10.5.19)$$

con

$$\delta_j^{(n)}(J|x) = x^{j-j_1-j_2} \Xi(J|X)^{-1} \delta_j^{(n)}(J|X) \Xi(J|X). \quad (10.5.20)$$

Tanto la ecuación (10.5.17) como la expansión (10.5.18) fueron utilizadas en [68] para estudiar la función de cuatro puntos en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. De hecho, dado que  $\delta_j^{(0)}(J|X) = 1$ , se sigue que  $\delta_j^{(0)}(J|x) = x^{j-j_1-j_2}$  y de allí  $F_j^{(0)}(J|x)$  no es otra cosa que la función hipergeométrica en (10.5.12), en concordancia con [68].

Al haber cerrado el contorno de integración en (10.5.13), esta fórmula permite definir una continuación meromorfa de la función de cuatro puntos para valores complejos arbitrarios de  $j_1, \dots, j_4$  explotando la estructura de polos del integrando. Para aquellos valores de  $j_1, \dots, j_4$  comprendidos en la máxima región en la cual los espines externos pueden ser continuamente variados de forma tal que ninguno de los polos del integrando (provenientes del OPE de los dos primeros campos o de los segundos) dando (10.5.13) crucen el contorno de integración  $\mathcal{C}$ , la expresión integral para el correlador de cuatro puntos se retiene. Este dominio viene dado por

$$|\operatorname{Re}(j_{21}^{\pm})| < 1/2, \quad j_{21}^+ = 1 + j_1 + j_2, \quad j_{21}^- = j_1 - j_2, \quad (10.5.21)$$

$$|\operatorname{Re}(j_{43}^{\pm})| < 1/2, \quad j_{43}^+ = 1 + j_3 + j_4, \quad j_{43}^- = j_3 - j_4. \quad (10.5.22)$$

Más allá de esta región, términos adicionales viniendo de los residuos de estos polos deben tenerse en cuenta. Estos términos están asociados a las contribuciones de estados intermedios pertenecientes a las series discretas [68, 69].

Por simplicidad, en este capítulo se restringirán los parámetros de forma tal que pertenezcan al dominio (10.5.21)-(10.5.22). Así, las fórmulas (10.5.1) y (10.5.13) pueden ser interpretadas como las funciones de correlación sin flujo espectral en el modelo  $AdS_3$ -WZW.

Como ya se señaló, para incorporar el flujo espectral en el cálculo es necesario transformar la expresión (10.5.1) a la base  $m$  usando (10.4.2). Se obtiene

$$\Phi_4(J|M|Z) = |\Xi(\Delta|Z)|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj |z|^{2(\Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2})} \mathcal{D}_j(-1 - J) \mathcal{K}_j(J|M|z) G_j(J|M). \quad (10.5.23)$$

En esta última ecuación  $\mathcal{K}_j(J|M|z)$  es el operador transformado a base  $m$  de  $\mathcal{K}_j(J|X|z)$ , mientras que  $G_j(J|M)$  es la transformada de  $G_j(J|X)$ , es decir

$$G_j(J|M) = \int_{\mathbb{C}^4} \prod_{i=1}^4 \left[ d^2 x_i x_i^{j_i+m_i} \bar{x}_i^{j_i+\bar{m}_i} \right] G_j(-1-J|X). \quad (10.5.24)$$

La ecuación (10.5.23) es válida mientras la integración sobre  $\mathcal{C}$  en (10.5.1) y aquellas sobre  $\mathbb{C}^4$  viniendo de (10.4.2) puedan ser intercambiadas. Este hecho, lejos de ser una sutileza, involucra la rotación de Wick de los  $m_i + \bar{m}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  necesaria para obtener los correladores lorentzianos a partir de los de  $H_3^+$ . De hecho, para poder intercambiar libremente las integrales algunos vínculos adicionales deben imponerse sobre  $m = m_1 + m_2$  y  $\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$ :  $\max\{\text{Re}(m), \text{Re}(\bar{m})\} > 1/2$  y/o  $\min\{\text{Re}(m), \text{Re}(\bar{m})\} < -1/2$ , dependiendo de las series a las que pertenezcan los estados. Estas condiciones garantizan que las singularidades del integrando del OPE que dependen de  $m$  y  $\bar{m}$  están bien localizadas en el plano complejo dado por  $j$ . Si se relajan estas condiciones, uno debería obtener la continuación analítica correcta que de cuenta de los residuos provenientes de los polos que atraviesan el contorno de integración. Un análisis exhaustivo de estas contribuciones puede encontrarse en [129] y [130]. Existen, sin embargo, ciertas configuraciones que permiten descartar términos adicionales a la expresión integral (10.5.23) para la función de cuatro puntos sin la necesidad de vínculos adicionales sobre  $m$  y  $\bar{m}$ . En este capítulo se supondrá esta situación, que viene dada cuando dos campos pertenecen a las series discretas del espectro.

El cálculo de  $G_j(J|M)$  fue realizado explícitamente en [74] usando el método de campos libres y fue llevado a cabo, de manera independiente, en [129] considerando el OPE de campos primarios. A partir de (10.5.24) puede obtenerse la siguiente expresión para el correlador de cuatro puntos

$$\Phi_4(J|M|Z) = |\Xi(\Delta|Z)|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj \mathcal{D}_j(J|M) \mathcal{G}_j(J|M|z), \quad (10.5.25)$$

con

$$\mathcal{D}_j(J|M) = \mathcal{D}_j(-1-J)G_j(J|M) = \Phi_{12}(j|m)\Phi_2(j|m)^{-1}\Phi_{34}(j|m), \quad (10.5.26)$$

donde  $\Phi_{12}(j|m) = \Phi_3(j_1, j_2, j|m_1, m_2, m|0, 1, \infty)$ ,  $\Phi_2(j|m) = \Phi_2(j, j|m, -m|0, \infty)$  y los bloques conformes vienen dados por

$$\mathcal{G}_j(J|M|z) = |z|^{2(\Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2})} G_j(J|M)^{-1} \mathcal{K}_j(J|M|z) G_j(J|M). \quad (10.5.27)$$

Para obtener la función de cuatro puntos con flujo espectral será conveniente, en primer lugar, calcular la función de cuatro puntos con un estado de peso extremo perteneciente a la series discretas. La condición de peso extremo puede relajarse mediante un procedimiento similar al utilizado en [73, 126, 128] para las funciones de tres puntos, que se describirá a continuación.



A partir de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\alpha J_0^\pm} \Phi_j(m|z) e^{-\alpha J_0^\pm} = e^{\alpha [J_0^\pm, \cdot]} \Phi_j(m|z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\alpha^\lambda}{\lambda!} [J_0^\pm, \Phi_j(m|z)]_\lambda, \quad (10.5.28)$$

donde se definió inductivamente

$$[J_0^\pm, \Phi_j(m|z)]_0 = \Phi_j(m|z), \quad (10.5.29)$$

$$[J_0^\pm, \Phi_j(m|z)]_\lambda = [J_0^\pm, [J_0^\pm, \Phi_j(m|z)]_{\lambda-1}], \quad (10.5.30)$$

y de las acción de las corrientes sobre los campos con flujo espectral (10.3.8)-(10.3.9) es inmediato ver que

$$e^{\pm\alpha J_0^\pm} \Phi_j(m|z) e^{\mp\alpha J_0^\pm} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\alpha^\lambda}{\lambda!} \frac{\Gamma(-j \pm m + \lambda)}{\Gamma(-j \pm m)} \Phi_j(m \pm \lambda|z), \quad (10.5.31)$$

para cualquier valor complejo de  $\alpha$ . Esta fórmula puede usarse para relacionar distintos correladores aprovechando la invariancia de la traza ante permutaciones cíclicas de los argumentos. En efecto, se tiene

$$\left\langle e^{\pm\alpha J_0^\pm} \Phi_{j_1}(m_1|z_1) e^{\mp\alpha J_0^\pm} \prod_{i=2}^N \Phi_{j_i}(m_i|z_i) \right\rangle = \left\langle \Phi_{j_1}(m_1|z_1) \prod_{i=2}^N e^{\mp\alpha J_0^\pm} \Phi_{j_i}(m_i|z_i) e^{\pm\alpha J_0^\pm} \right\rangle, \quad (10.5.32)$$

y después de reemplazar (10.5.31) se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\lambda_1}}{\lambda_1!} \frac{\Gamma(-j_1 \pm m_1 + \lambda_1)}{\Gamma(-j_1 \pm m_1)} \left\langle \Phi_{j_1}(m_1 \pm \lambda_1|z_1) \prod_{i=2}^N \Phi_{j_i}(m_i|z_i) \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} (-\alpha)^{\lambda_1} \sum_{\lambda} \left( \prod_{i=2}^N \frac{\Gamma(-j_i \pm m_i + \lambda_i)}{\lambda_i! \Gamma(-j_i \pm m_i)} \right) \left\langle \Phi_{j_1}(m_1|z_1) \prod_{i=2}^N \Phi_{j_i}(m_i \pm \lambda_i|z_i) \right\rangle \end{aligned} \quad (10.5.33)$$

La segunda suma en el lado derecho de (10.5.33) corre sobre todas las  $(N-1)$ -tuplas con entradas enteras no negativas  $\lambda = (\lambda_2, \dots, \lambda_N)$  que sumen  $\lambda_1$ . Identificando a cada potencia de  $\alpha$ , renombrado  $m_1 \rightarrow m_1 \mp \lambda_1$  y haciendo explícita la dependencia antiholomorfa se tiene

$$\Phi_N(J|M|Z) = \mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|M|\lambda) \Phi_N(J|M \pm \Lambda|Z), \quad (10.5.34)$$

donde  $\Lambda = (-\lambda_1, \lambda)$  y donde se ha introducido

$$\mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|M|\lambda) = \left| \frac{(-1)^{\lambda_1} \lambda_1! \Gamma(-j_1 \pm m_1 - \lambda_1)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(-j_i \pm m_i)} \prod_{i=2}^N \frac{1}{\lambda_i!} \Gamma(-j_i \pm m_i + \lambda_i) \right|^2. \quad (10.5.35)$$

En (10.5.34),  $\lambda$  aparece como un índice múltiple y se sobreentiende la convención de suma de Einstein.

De (10.5.34) y (10.5.35) se desprende una identidad que será de utilidad. En (10.5.34) la contracción de  $\lambda$  puede llevarse a cabo como la suma sobre  $\lambda_2$  tomando valores desde 0

a  $\lambda_1$ , seguida de una suma sobre todas las  $(N-2)$ -tuplas con entradas enteras no negativas  $\tilde{\lambda} = (\lambda_3, \dots, \lambda_N)$  cuya suma total sea  $\lambda_1 - \lambda_2$ . Usando (10.5.35) se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|M|\lambda) &= \frac{(-1)^{\lambda_2} \lambda_1! \Gamma(-j_1 \pm m_1 - \lambda_1) \Gamma(-j \pm m)}{\Gamma(j_1 \pm m_1) \Gamma(j_2 \pm m_2)} \times \\ &\sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_1} \frac{\Gamma(-j_2 \pm m_2 + \lambda_2)}{\lambda_2! (\lambda_1 - \lambda_2)! \Gamma(-j \pm m - \lambda_1 + \lambda_2)} \mathcal{Q}_{N-1}^{\lambda_1 - \lambda_2}(j, j_3, \dots, j_N | m, m_3, \dots, m_N | \tilde{\lambda}), \end{aligned} \quad (10.5.36)$$

donde se han introducido dos nuevas variables auxiliares  $j$  y  $m$ , y hay una suma implícita en el lado derecho de (10.5.36) sobre  $\tilde{\lambda}$ . Usando la fórmula de Euler de la función Gamma, la ecuación precedente puede escribirse como

$$\mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|M|\lambda) = \mathcal{Q}_3^{\lambda_1}(j_1, j_2, -1 - j | m_1, m_2, -m | \lambda_2, \lambda') \mathcal{Q}_{N-1}^{\lambda'}(j, j_3, \dots, j_N | m, m_3, \dots, m_N | \tilde{\lambda}). \quad (10.5.37)$$

Si se toma  $\lambda_1 = j_1 \pm m_1$ , los cálculos que involucren estas expresiones se simplifican de manera considerable, dado que para estos valores de  $\lambda_1$  todas las funciones de correlación que aparecen en el lado derecho de (10.5.34) tienen un estado de peso más bajo o más alto en la primera inserción, respectivamente. Cuando se elija este valor, se omitirá la referencia explícita a  $\lambda_1$  y se usará  $M^\pm = (m_2, \dots, m_N)$  en vez de  $M$  en los correladores, es decir, se escribirá

$$\Phi_N(J|M|Z) = \mathcal{Q}_N(J|M^\pm|\lambda) \Phi_N(J|M^\pm \pm \lambda|Z). \quad (10.5.38)$$

En general, se utilizará el supraíndice “ $\pm$ ” para indicar que los números cuánticos son consistentes con un estado de peso más bajo o más alto en la primera inserción.

Si se aplica (10.5.38) para el cálculo de la función de cuatro puntos reemplazando esta expresión en (10.5.25) con un estado de peso extremo se llega a

$$\Phi_4(J|M|Z) = |\Xi(\Delta|Z)|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj \mathcal{Q}_4(J|M^\pm|\lambda) \mathcal{D}_j(J|M^\pm \pm \lambda) \mathcal{G}_j(J|M^\pm \pm \lambda|z). \quad (10.5.39)$$

Dos verificaciones pueden hacerse sobre esta expresión. Para que dé cuenta de la forma factorizada de la función de cuatro puntos, la dependencia del integrando para el término preponderante cuando  $z \rightarrow 0$  debe ir como  $|z|^{2(\Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2})}$ , con lo que  $\mathcal{Q}_4(J|M^\pm|\lambda)$  debe actuar trivialmente cuando se lo contrae con este factor, y el coeficiente sobrante debe ser  $\mathcal{D}_j(J|M)$ . Mientras que la primera comprobación se sigue directamente de (10.5.27), la segunda no es tan evidente. Para probarla, se precisa calcular  $\mathcal{Q}_4(J|M^\pm|\lambda) \mathcal{D}_j(J|M^\pm \pm \lambda)$  reemplazando (10.5.26) y (10.5.35). Eligiendo  $m \rightarrow m' = m \mp \lambda_1 \pm \lambda_2$  en (10.5.26) y usando (10.5.37) con  $N=4$  al escribir  $\mathcal{Q}_4(J|M^\pm|\lambda)$ , se sigue fácilmente que el operador  $\mathcal{Q}_3^{\lambda'}(j, j_3, j_4 | m, m_3, m_4 | \lambda_3, \lambda_4)$  que aparece en esta descomposición actúa de forma no trivial solamente en la última función de tres puntos en (10.5.26)  $\Phi_3(j, j_3, j_4 | m', m_3 \pm \lambda_3, m_4 \pm \lambda_4 | 0, 1, \infty)$ , dando como resultado  $\Phi_{34}(j|m)$

al usar (10.5.34). Dado que esta función no depende de  $\lambda_2$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_4(J|M^\pm|\lambda)\mathcal{D}_j(J|M^\pm \pm \lambda) &= \Phi_{34}(j|m) \times \\ &(\mathcal{Q}_3(j_1, j_2, -1 - j|m_2, -m|\lambda_2, \lambda')\Phi_3(j_1, j_2, -1 - j|m_2 \pm \lambda_2, -m'|0, 1, \infty)), \end{aligned} \quad (10.5.40)$$

donde se ha usado que  $\Phi_{12}(j|m)\Phi_2(j - m)^{-1} = \Phi_{12}(-1 - j|m)$  para cualquier valor de  $j$  y  $m$ , una identidad probada en [69]. El paréntesis en (10.5.40) se reduce a  $\Phi_3(j_1, j_2, -1 - j|m_1, m_2, -m|0, 1, \infty)$ , y de esta manera se llega al resultado deseado

$$\mathcal{Q}_4(J|M^\pm|\lambda)\mathcal{D}_j(J|M^\pm \pm \lambda) = \mathcal{D}_j(J|M). \quad (10.5.41)$$

Con respecto a los bloques conformes, se tiene

$$\mathcal{G}_j(J|M|z) = G_j(J|M)^{-1}\mathcal{Q}_4(J|M^\pm|\lambda)G_j(J|M^\pm \pm \lambda)\mathcal{G}_j(J|M^\pm \pm \lambda|z). \quad (10.5.42)$$

## 10.6 Función de cuatro puntos con flujo espectral

El método estándar para calcular funciones de correlación con flujo espectral fue discutido exhaustivamente en [68, 125] y fue en [73, 131] para calcular funciones de tres puntos con una unidad de flujo espectral. Requiere la introducción de al menos un operador de flujo espectral por cada unidad de flujo, seguido de un procedimiento *ad hoc* para remover la dependencia de la expresión resultante en los puntos no físicos en los que estos operadores se insertan. A pesar de que este método es claro desde un punto de vista teórico, lidiar con un gran número de inserciones lo hace poco útil al momento de calcular correladores de  $N$  puntos con  $N > 3$ .

En esta sección se analizará la función de cuatro puntos con una unidad de flujo espectral, es decir, se estudiará  $\widehat{\Phi}_4(J|M|Z)$ . Se evitarán las complicaciones que surgen al incorporar los operadores de flujo espectral utilizando la identificación de series. Como ya se mencionó, la identificación de series es un isomorfismo entre la imagen bajo flujo espectral de una representación de peso más bajo de espín  $j$  y la imagen de una representación de peso más alto con espín  $j' = -k/2 - j$  con una unidad adicional de flujo espectral. Si la normalización de los estados con flujo espectral coincide con la de los estados sin flujo, en otras palabras, si la función de dos puntos con dos estados con flujo es igual al propagador (10.4.6), se tiene

$$\Phi_j^{w-1}(-j|z) = \frac{\pi^2}{B(j)}\Phi_{j'}^w(j'|z). \quad (10.6.1)$$

La consistencia de esta igualdad puede verificarse fácilmente para funciones de dos y tres puntos. Se sigue de (10.6.1) que

$$\Phi_j^{w+1}(j|z) = \frac{B(j')}{\pi^2}\Phi_{j'}^w(-j'|z), \quad (10.6.2)$$

por lo que, eligiendo  $w = \mp 1$ , se puede escribir

$$\widehat{\Phi}_j(\mp j|z) \propto \Phi_{j'}(\pm j'|z), \quad (10.6.3)$$

con la constante de proporcionalidad como en (10.6.1) o (10.6.2), respectivamente.

Bajo esta identificación se tiene

$$\widehat{\Phi}_4(J|M^\pm|Z) \propto \Phi_4(J'|M^\mp|Z), \quad (10.6.4)$$

y, entonces,

$$\widehat{\Phi}_4(J|M^\pm|Z) \propto |\Xi(\Delta'|Z)|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj \mathcal{D}_j(J'|M^\mp) \mathcal{G}_j(J'|M^\mp|Z), \quad (10.6.5)$$

donde, como antes, la “prima” indica que el espín de la primera inserción es  $j'_1 = -k/2 - j_1$ . Recuerdese que la fórmula (10.6.5) es válida siempre que

$$|\operatorname{Re}(j_{21}^\pm) - 1 + k/2| < \frac{1}{2}, \quad j_{21}^+ = 1 + j_1 + j_2, \quad j_{21}^- = j_1 - j_2, \quad (10.6.6)$$

$$|\operatorname{Re}(j_{43}^\pm)| < \frac{1}{2}, \quad j_{43}^+ = 1 + j_3 + j_4, \quad j_{43}^- = j_3 - j_4. \quad (10.6.7)$$

Se tiene  $\Delta_{j'} = \widehat{\Delta}_{j,\mp j}$ , de forma tal que  $\Delta' = \widehat{\Delta}^\pm$  y  $\Xi(\Delta'|Z) = \Xi(\widehat{\Delta}^\pm|Z)$ . Por otro lado, dado que  $\widehat{\Phi}_3(J|M^\pm|Z) \propto \Phi_3(J'|M^\mp|Z)$  con la misma constante de proporcionalidad como en (10.6.4), uno llega a  $\mathcal{D}_j(J'|M^\mp) = \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M^\pm)$  donde se definió

$$\widehat{\mathcal{D}}_j(J|M) = \widehat{\Phi}_{12}(j|m) \Phi_2(j|m)^{-1} \Phi_{34}(j|m). \quad (10.6.8)$$

con  $\widehat{\Phi}_{12}(j|m) = \widehat{\Phi}_3(j_1, j_2, j|m_1, m_2, m|0, 1, \infty)$ .

Se sigue que (10.6.5) puede reescribirse como

$$\widehat{\Phi}_4(J|M^\pm|Z) = |\Xi(\widehat{\Delta}^\pm|Z)|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M^\pm) \widehat{\mathcal{G}}_j(J|M^\pm|z), \quad (10.6.9)$$

donde los bloques conformes, como antes, toman la forma

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{G}}_j(J|M^\pm|z) &= |z|^{2(\Delta_j - \Delta_{j'_1} - \Delta_{j_2})} \mathcal{D}_j(J'|M^\mp)^{-1} \mathcal{K}_j(J'|M^\mp|z) \mathcal{D}_j(J'|M^\mp) \\ &= |z^{\Delta_j - \widehat{\Delta}_{j_1, \mp j_1} - \Delta_{j_2}}|^2 \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M^\pm)^{-1} \widehat{\mathcal{K}}_j(J|M^\pm|z) \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M^\pm), \end{aligned} \quad (10.6.10)$$

y se ha introducido

$$\widehat{\mathcal{K}}_j(J|M^\pm|z) = \mathcal{K}_j(J'|M^\mp|z). \quad (10.6.11)$$

Se ha encontrado así un dominio de integración (10.6.6)-(10.6.7) en el cual se tiene una forma factorizada de la función de cuatro puntos con un único estado con flujo espectral de peso extremo, con los bloques conformes generados a partir de los estados sin flujo con el espín modificado. La siguiente tarea radica en relajar la condición de peso extremo en (10.6.9) como se hizo en el caso sin flujo espectral.

Como puede adivinarse de (10.6.10), el método empleado en la sección previa debe modificarse cuando hay estados con flujo. En efecto, la dependencia total en  $z$  en (10.6.10) debe ajustarse cuando se cambia el valor de  $m_1$  y, de allí, el operador que relaja la condición de peso extremo

en el bloque conforme dependerá de las variables en la hoja de mundo, a diferencia del caso sin flujo espectral. A continuación se calculará este operador.

El punto clave para obtener la forma explícita del operador radica en el hecho de que la inserción de nuevos vértices de peso extremo en (10.5.32) no tiene efecto en (10.5.34) dado que  $e^{\mp\alpha J_0^\pm} \Phi_j(\pm j|\xi) e^{\pm\alpha J_0^\pm} = \Phi_j(\pm j|\xi)$ . Se sigue que, para cualquier entero no negativo  $W$ ,

$$\left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_{j_i}(m_i|z_i) \prod_{a=1}^W \Theta^\mp(\xi_a) \right\rangle = \mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|M^\pm|\lambda) \left\langle \Phi_{j_1}(m_1 \mp \lambda_1|z_1) \prod_{i=2}^N \Phi_{j_i}(m_i \pm \lambda_i|z_i) \prod_{a=1}^W \Theta^\mp(\xi_a) \right\rangle. \quad (10.6.12)$$

donde  $\Theta^\mp(\xi) = \Phi_{-k/2}(\mp k/2|\xi)$ .

De acuerdo a lo expuesto en [125], el factor  $\Theta^\mp(\xi_a)$  actúa como un operador de flujo espectral con una unidad positiva o negativa de flujo respectivamente. De ahí que los correladores que aparecen en esta última ecuación pueden ser identificados, a menos de una dependencia en la hoja de mundo, con las funciones de correlación que involucran estados con flujo. En efecto, el correlador en el lado izquierdo, si se divide por

$$F_N(J|w|M|Z) \left| \prod_{i=1}^N \prod_{a=1}^W (z_i - \xi_a)^{\pm m_i} \right|^2 \prod_{a<b}^W |\xi_a - \xi_b|^{-k}, \quad (10.6.13)$$

puede identificarse con  $\Phi_N(J|w|M|Z)$ , con  $w = \mp W$ , mientras que el correlador en el lado derecho de (10.6.12) puede ser identificado con  $\Phi_N(J|w|M \pm \Lambda|Z)$  una vez que se lo divide por

$$F_N(J|w|M \pm \Lambda|Z) \left| \left( \prod_{a=1}^w (z_1 - \xi_a)^{\pm m_1 - \lambda_1} \right) \left( \prod_{i=2}^N \prod_{a=1}^w (z_i - \xi_a)^{\pm m_i + \lambda_i} \right) \right|^2 \prod_{a<b}^w |\xi_a - \xi_b|^{-k}. \quad (10.6.14)$$

Se tiene, entonces,

$$\Phi_N(J|w|M|Z) = \mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|w|M|Z|\lambda) \Phi_N(J|w|M \pm \Lambda|Z), \quad (10.6.15)$$

donde  $\lambda$  es, nuevamente, un índice múltiple para el cual se asume la convención de suma de Einstein y el operador  $\mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|w|M|Z|\lambda)$  viene dado por la composición

$$\mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|w|M|Z|\lambda) = F_N(J|w|M|Z)^{-1} \left| \prod_{a=1}^w (z_1 - \xi_a)^{-\lambda_1} \right|^2 \times \mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|M|\lambda) \left| \prod_{i=2}^N \prod_{a=1}^w (z_i - \xi_a)^{\lambda_i} \right|^2 F_N(J|w|M \pm \Lambda|Z). \quad (10.6.16)$$

Esta expresión puede simplificarse si se explota el hecho de que la dependencia en las inserciones no físicas debe anularse, como se expuso en [125], eligiendo  $\xi_a, \bar{\xi}_a \rightarrow \infty$ . Dado que  $\sum_{i=2}^N \lambda_i = \lambda_1$ , se llega a

$$\mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|w|M|Z|\lambda) = F_N(J|w|M|Z)^{-1} \mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|M|\lambda) F_N(J|w|M \pm \Lambda|Z). \quad (10.6.17)$$

Este operador, tal como se anticipó en la sección anterior, depende de las coordenadas en la hoja de mundo a través de  $F_N(J|w|M|Z)$  y  $F_N(J|w|M \pm \Lambda|Z)$ , factores que previenen a uno de obtener una forma factorizada para  $\mathcal{Q}_N^{\lambda_1}(J|w|M|Z|\lambda)$ , análoga a (10.5.37).

Para poder aplicar (10.6.17) y (10.6.9), tómesese  $w = (\mp 1, 0, \dots, 0)$ . En este caso,  $F_N(J|w|M|Z)$  se simplifica bastante

$$\widehat{F}_N(J|M|Z) = \left| \prod_{i=2}^N (z_1 - z_i)^{\mp m_i} \right|^2, \quad (10.6.18)$$

de forma tal que

$$\widehat{F}_N(J|M|Z)^{-1} \widehat{F}_N(J|M \pm \Lambda|Z) = \left| \prod_{i=2}^N (z_1 - z_i)^{-\lambda_i} \right|^2. \quad (10.6.19)$$

Para  $\lambda_1 = j_1 \pm m_1$  se obtiene

$$\widehat{\Phi}_N(J|M|Z) = \widehat{\mathcal{Q}}_N(J|M^\pm|Z|\lambda) \widehat{\Phi}_N(J|M^\pm \pm \lambda|Z), \quad (10.6.20)$$

con  $\widehat{\mathcal{Q}}_N(J|M^\pm|Z|\lambda)$  dado por

$$\widehat{\mathcal{Q}}_N(J|M^\pm|Z|\lambda) = \left| \frac{(-1)^{\lambda_1} \lambda_1! \Gamma(-2j_1)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(-j_i \pm m_i)} \prod_{i=2}^N \frac{\Gamma(-j_i \pm m_i + \lambda_i)}{\lambda_i! (z_1 - z_i)^{\lambda_i}} \right|^2. \quad (10.6.21)$$

Una última simplificación puede llevarse a cabo si se apela a la invariancia conforme de  $\widehat{\Phi}_4(J|M|Z)$ .

Luego de reemplazar (10.6.9), se tiene que (10.6.20) se reduce a

$$\widehat{\Phi}_4(J|M|Z) = \left| \Xi(\widehat{\Delta}|Z) \right|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj \widehat{\mathcal{Q}}_4(J|M^\pm|z|\lambda) \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M^\pm \pm \lambda) \widehat{\mathcal{G}}_j(J|M^\pm \pm \lambda|z), \quad (10.6.22)$$

donde  $\widehat{\mathcal{Q}}_4(J|M^\pm|z|\lambda)$  es igual a  $\widehat{\mathcal{Q}}_4(J|M^\pm|Z|\lambda)$  con  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = z = z_{12}z_{34}/z_{13}z_{24}$ ,  $z_3 = 1$  y  $z_4 \rightarrow \infty$ . Un punto crucial en este límite es que la suma en (10.6.20) queda restringida a las 3-tuplas con un valor nulo en la última entrada, *i.e.*, con  $\lambda_4 = 0$ , lo que cancela toda la dependencia de  $\widehat{\mathcal{Q}}_4(J|M^\pm|z|\lambda)$  en la cuarta inserción. De hecho, se tiene que la acción de  $\widehat{\mathcal{Q}}_4(J|M^\pm|z|\lambda)$  es igual a la de  $\widehat{\mathcal{Q}}_3(j_1, j_2, j_3|m_2, m_3|0, z, 1|\lambda_2, \lambda_3)$ , es decir,

$$\widehat{\mathcal{Q}}_4(J|M^\pm|z|\lambda) = \left| \frac{(-1)^{\lambda_1} \lambda_1! \Gamma(-2j_1)}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(-j_i \pm m_i)} z^{-\lambda_2} \prod_{i=2}^3 \frac{1}{\lambda_i!} \Gamma(-j_i \pm m_i + \lambda_i) \right|^2. \quad (10.6.23)$$

Al igual que antes, si (10.6.22) da el resultado correcto para la función factorizada de cuatro puntos con estados con flujo, debería ser posible verificar que la dependencia del integrando para el término más relevante cuando  $z \rightarrow 0$  es el esperado y que los coeficientes den lugar a  $\widehat{\mathcal{D}}_j(J|M)$ . A diferencia del caso anterior sin flujo, donde el operador correspondiente no tenía efecto en los cocientes anarmónicos de los bloques conformes, ahora sí es el caso y no todos los términos en (10.6.23) contribuyen al orden más relevante en (10.6.22). De hecho, solo el término con  $\lambda_2 = \lambda_1$  debe tenerse en cuenta. Recordando de (10.6.10) que  $\widehat{\mathcal{G}}_j(J|M^\pm \pm \lambda|z) \sim |z|^{2(\Delta_j - \widehat{\Delta}_{j_1, \mp j_1} - \Delta_{j_2})}$  cuando  $z \rightarrow 0$ , se sigue que el término dominante del integrando en (10.6.22) es

$$\left| z^{\Delta_j - \widehat{\Delta}_{j_1, \mp j_1} - \Delta_{j_2} - \lambda_1} \frac{(-1)^{\lambda_1} \Gamma(-2j_1) \Gamma(-j_2 \pm m_2 + \lambda_1)}{\Gamma(-j_1 \pm m_1) \Gamma(-j_2 \pm m_2)} \right|^2 \widehat{\mathcal{D}}_j(J|m_2 \pm \lambda_1, m_3, m_4). \quad (10.6.24)$$

Nótese que la dependencia en  $z$  es la esperada, dado que

$$\widehat{\Delta}_{j_1, \mp j_1} + \lambda_1 = \Delta_{j_1} - j_1 - \frac{k}{4} + \lambda_1 = \Delta_{j_1} \pm m_1 - \frac{k}{4} = \widehat{\Delta}_{j_1 m_1}. \quad (10.6.25)$$

Por otro lado, a partir de (10.6.21) se obtiene

$$\left| \frac{(-1)^{\lambda_1} \Gamma(-2j_1) \Gamma(-j_2 \pm m_2 + \lambda_1)}{\Gamma(-j_1 \pm m_1) \Gamma(-j_2 \pm m_2)} \right|^2 = \widehat{\mathcal{Q}}_2(j_1, j_2 | m_2 | 0, 1 | \lambda_1), \quad (10.6.26)$$

lo cual es igual a  $\widehat{\mathcal{Q}}_3(j_1, j_2, j | m_2, -m | 0, 1, \infty | \lambda_1, 0)$  para cualquier valor de  $j$  y  $m$ , y así

$$\left| \frac{(-1)^{\lambda_1} \Gamma(-2j_1) \Gamma(-j_2 \pm m_2 + \lambda_1)}{\Gamma(-j_1 \pm m_1) \Gamma(-j_2 \pm m_2)} \right|^2 \widehat{\Phi}_3(j_1, j_2, j | m_2 \pm \lambda_1, -m | 0, 1, \infty) = \widehat{\Phi}_{12}(j | -m), \quad (10.6.27)$$

mostrando que el coeficiente en (10.6.24) es  $\widehat{\mathcal{D}}_j(J|M)$ , como se pretendía mostrar.

Se sigue de (10.6.22) que, mientras los espines externos estén comprendidos en la región (10.6.6)-(10.6.7), la función de cuatro puntos con flujo  $\widehat{\Phi}_4(J|M|Z)$  puede factorizarse como

$$\widehat{\Phi}_4(J|M|Z) = \left| \Xi(\widehat{\Delta}|Z) \right|^{-2} \int_{\mathcal{C}^+} dj \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M) \widehat{\mathcal{G}}_j(J|M|z), \quad (10.6.28)$$

donde, gracias a (10.6.10),

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{G}}_j(J|M|z) &= \left| z^{\Delta_j - \widehat{\Delta}_{j_1, \mp j_1} - \Delta_{j_2}} \right|^2 \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M)^{-1} \times \\ &\quad \widehat{\mathcal{Q}}_4(J|M^\pm | z | \lambda) \widehat{\mathcal{K}}_j(J|M^\pm \pm \lambda | z) \widehat{\mathcal{D}}_j(J|M^\pm \pm \lambda). \end{aligned} \quad (10.6.29)$$

## 10.7 Función de cuatro puntos con flujo espectral en base $x$

Hasta este punto, se ha obtenido un dominio en el cual es válida la expresión factorizada (10.6.28) para la función de cuatro puntos del modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW con una unidad de flujo espectral. Esta fórmula se obtuvo en la base  $m$  bajo la suposición de que uno de los campos correspondía a la imagen bajo flujo espectral de un estado en la parte discreta del espectro.

La base  $m$  resulta más conveniente para introducir flujo espectral, sin embargo, la base  $x$  es la más apropiada para usar los resultados en el contexto de la conjetura AdS/CFT, dado que los operadores de vértice en esta base codifican estados creados por fuentes en el borde del espacio target. Por ejemplo, si  $\Phi_j(x|z)$  es un campo asociado con un estado sin flujo y  $\Theta(z)$  es el vértice sin espín en una CFT interna, dado que la suma de sus dimensiones de escala es uno, el operador

$$V_j(x) \sim \int_{\mathbb{C}} d^2 z \Phi_j(x|z) \Theta(z), \quad (10.7.1)$$

puede interpretarse como un estado de cuerda creado por una fuente puntual localizada en  $x$  en el borde de  $AdS_3$  y, por medio de la correspondencia AdS/CFT, puede identificarse con un operador en la CFT en el mismo punto.

Un estado de energía mínima puede ser visto como un estado de peso más bajo de una representación que se obtiene de realizar la operación de flujo espectral con  $w > 0$ . El espín  $J$  de este estado viene dado por  $J = -m - kw/2$ . De manera análoga, si  $w < 0$ , el automorfismo de flujo espectral mapea el mismo estado a uno de peso más alto con espín  $K = m + kw/2$ . Dado que ambos contribuyen al mismo operador, los estados con flujo están etiquetados por el valor absoluto del flujo espectral.

Se denotará al vértice con flujo espectral en la base  $x$  como  $\Phi_K^{jw}(x|z)$ , donde  $w$  es la cantidad de flujo espectral (positiva) y el supraíndice  $j$  fue introducido para recordar el espín del estado original a partir del cual se construye. Dado que tanto los estados de peso más bajo y los de peso más alto contribuyen al mismo operador en base  $x$ , los campos con flujo están etiquetados con el valor absoluto del valor del flujo espectral. El correlador correspondiente viene dada por

$$\Phi_N^J(K|w|X|Z) = \left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_{K_i}^{j_i w_i}(x_i|z_i) \right\rangle, \quad (10.7.2)$$

con  $J$ ,  $X$ ,  $w$  y  $Z$  como antes y  $K = (K_1, \dots, K_N)$ . Como en las secciones anteriores, cuando  $w = 1$  se escribirá  $\widehat{\Phi}_K^j(x|z)$  y, consecuentemente, la función de  $N$  puntos con  $w = (1, 0, \dots, 0)$  será denotada como  $\widehat{\Phi}_N^J(K|X|Z)$ . Nótese que en este caso  $K$  difiere de  $J$  solo en la primera entrada, *i.e.*,  $K = (K_1, j_2, \dots, j_N)$ .

La transformación entre las bases se lleva a cabo en analogía con (10.4.2)

$$\Phi_K^{jw}(N|z) = \int_{\mathbb{C}} d^2x x^{K+N} \bar{x}^{\bar{K}+\bar{N}} \Phi_{-1-K}^{-1-j,w}(x|z), \quad (10.7.3)$$

donde  $N$  es el autovalor ante  $J_0^3$  y, a partir de este mapa, se tiene

$$\Phi_K^{jw}(\pm K|z) = \Phi_j^{\mp w}(\pm K \pm kw/2|z). \quad (10.7.4)$$

Basado en el conocimiento de la dependencia de las amplitudes en las coordenadas del borde, en [68] se notó que esta última identidad es suficiente para determinar la constante que queda sin fijar después de utilizar la invariancia de los correladores bajo la simetría global  $SL(2, \mathbb{C})$ . Esta idea fue implementada exitosamente para obtener el propagador para un estado con flujo espectral arbitrario y para la función de tres puntos con un único estado con flujo  $w = 1$ . Explícitamente, se probó que

$$\Phi_2^J(K|w|X|Z) = \left| z_{12}^{2\Delta_{K_1}^{j_1 w_1}} \right|^{-2} \left| x_{12}^{2K_1} \right|^2 V_{\text{conf}} \frac{|1 + 2K_1|^2}{\pi^2} \delta_{w_1 w_2} \times \left[ \delta(1 + j_1 + j_2) + B(j_1) \Lambda_{K_1}^{j_1 w_1} \delta(j_1 - j_2) \right], \quad (10.7.5)$$

donde  $K_1 = K_2$ ,

$$\Lambda_K^{jw} = c_{j, -1-K+kw/2} = \frac{\pi}{\gamma(-2j)} \frac{\gamma_w(-1-j-K)}{\gamma_w(j-K)}, \quad (10.7.6)$$

con

$$\gamma_w(x) = \gamma(x + kw/2), \quad (10.7.7)$$



y

$$\Delta_{K_1}^{j_1 w_1} = \Delta_{j_1} - w_1 K_1 - w_1 + k w_1^2 / 4. \quad (10.7.8)$$

Nótese que

$$\lim_{K \rightarrow j} \Lambda_K^{j, w=0} = \frac{\pi^2}{V_{\text{conf}}(1+2j)^2}, \quad (10.7.9)$$

por lo que el término regular de la función de dos puntos por estados sin flujo se obtiene en el mismo límite, tomando

$$\Phi_{j_i}(x_i|z_i) = \lim_{K_i \rightarrow j_i} \Phi_{K_i}^{j_i, w_i=0}(x_i|z_i), \quad (10.7.10)$$

para  $i = 1, 2$ . No se espera obtener el término de contacto a partir de (10.7.5) dado que los espines para las dos inserciones coinciden.

Con respecto a la función de tres puntos, viene dada por

$$\widehat{\Phi}_3^J(K|X|Z) = |C(\widehat{\Delta}|Z)|^{-2} |C(K|X)|^2 \widehat{D}(J|K) \quad (10.7.11)$$

con  $\widehat{\Delta} = (\widehat{\Delta}_{K_1}^{j_1}, \Delta_{j_2}, \Delta_{j_3})$  con  $\widehat{\Delta}_{K_1}^{j_1} = \Delta_{K_1}^{j_1, w_1=1}$  y

$$\widehat{D}(J|K) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\widehat{D}(J)\gamma(1-j_1+K_1-k/2)\gamma(2+2K_1)}{\gamma(2+K_1+j_2+j_3)\gamma(1+K_{31})\gamma(1+K_{12})}. \quad (10.7.12)$$

A continuación se generalizará estas expresiones para la función de cuatro puntos con un estados con flujo  $w = 1$ ,  $\widehat{\Phi}_4^J(K|X|Z)$ . No se obtendrá una expresión integral para este correlador fuera del dominio (10.6.6)-(10.6.7), dado que más allá de esta región no es lícito igualar la transformada a base  $m$  con (10.6.28) utilizando (10.7.4).

Gracias a (10.6.28), se espera una dependencia de  $\widehat{\Phi}_4^J(K|X|Z)$  en  $Z$  de la forma  $|\Xi(\widehat{\Delta}|Z)|^{-2}$  con  $\widehat{\Delta} = (\widehat{\Delta}_{K_1}^{j_1}, \Delta_{j_2}, \Delta_{j_3}, \Delta_{j_4})$ , con la dependencia restante en la hoja de mundo dada por el cociente anarmónico.

En el límite de factorización, el bloque conforme debería corresponder a una función que reduzca  $\widehat{\Phi}_4^J(K|X|Z)$  a (10.6.28) luego de transformar a la base  $m$  y usando (10.7.4). Una elección apropiada viene dada por

$$\widehat{\mathcal{G}}_j^J(K|X|z) \sim |z|^{2(\Delta_j - \widehat{\Delta}_{K_1}^{j_1} - \Delta_{j_2})} G_j(K|X), \quad (10.7.13)$$

con  $G_j(K|X)$  definida como en (10.5.8)-(10.5.12). En efecto, de (10.7.12) puede probarse que

$$\widehat{D}(-1-J|-1-K) = \frac{\widehat{D}(-1-J)\widehat{W}(J|M)}{W(K|\pm K_1, m_2, m_3)}, \quad (10.7.14)$$

con  $m_1 = \pm K_1 \pm k/2$  (ver [131]) por lo que la transformada a base  $m$  de  $G_j(K|X)$  da como resultado  $\widehat{\mathcal{D}}_j(J|M)$  cuando se la evalúa en un estado de peso extremo y se la combina con (10.6.8), de acuerdo con (10.6.28).

En resumen, se tiene

$$\widehat{\Phi}_4^J(K|X|Z) = |\Xi(\widehat{\Delta}|Z)|^{-2} \int_{C^+} dj \widehat{\mathcal{D}}_j(J|K) \widehat{\mathcal{G}}_j^J(K|X|z), \quad (10.7.15)$$

expresión que será válida mientras que  $J$  satisfaga (10.6.6)-(10.6.7).

Pueden hacerse dos verificaciones de consistencia sobre (10.7.15). La primera es a través de (10.7.10). Dado que  $\widehat{D}(J|K)$  equivale a  $D(J)$  en este límite, (10.7.11) se reduce a (10.2.27) y (10.7.15) se reduce a (10.5.1), como se espera. Es importante notar aquí que la región (10.6.6)-(10.6.7) se encuentra desplazada a (10.5.21)-(10.5.22) cuando se toma  $w_1 = 0$ .

La segunda verificación se sigue de elegir  $j_2 = -k/2$ . En este caso,  $\widehat{D}_{12}(j) \propto \delta(j - j'_1)$ , con la constante de proporcionalidad dependiendo únicamente de  $k$  y, de esta forma la integral en (10.7.15) puede ser calculada. La expresión que se obtiene está de acuerdo con la forma de la función de cuatro puntos calculada en [132].

# Capítulo 11

## Conclusiones

Esta tesis se ha focalizado en el estudio de dualidades en Teoría de Cuerdas. En la primera parte se ha tratado la teoría doble de campos (DFT: “Double Field Theory”, en inglés) una teoría de campos que hace del grupo de T-dualidad de Teoría de Cuerdas una simetría manifiesta.

En los primeros capítulos se ha introducido la teoría de cuerdas y la simetría de T-dualidad que surge al compactificarla en un variedad toroidal. Para ciertos puntos del espacio de módulos de la compactificación, se ha observado que el espectro de bajas energías usual (dado por un gravitón  $G$ , el tensor antisimétrico de Kalb-Ramond  $B$  y el dilatón) se ve complementado por nuevos estados que dan lugar a una simetría de gauge no necesariamente abeliana. En estos casos, los campos de fondo  $G$  y  $B$  agrupados como  $E = G + B$  obedecen

$$E_{ij} = C_{ij}, \quad i > j, \quad E_{ii} = \frac{1}{2}C_{ii}, \quad E_{ij} = 0, \quad i < j,$$

donde  $C_{ij}$  es la matriz de Cartan del álgebra correspondiente al grupo de gauge  $\tilde{G}$ . En la sección 3.5 se trataron explícitamente los casos del  $S^1$  y  $T^2$ .

En el capítulo 4 se han descrito las características principales de DFT. Las simetrías de gauge abelianas de una compactificación de Kaluza-Klein en Teoría de Campos corresponden a las isometrías de las direcciones compactas. En Teoría de Cuerdas, el enrollamiento, como un número cuántico adicional a los modos de Kaluza-Klein, admite la posibilidad de considerar isometrías que provengan de compactificaciones en un espacio con el doble de coordenadas. De ahí que DFT se defina en un espacio doble, parametrizado por coordenadas  $X^M = (\tilde{x}_i, x^i)$ , donde  $x$  son las coordenadas usuales del espacio tiempo y  $\tilde{x}$  son las coordenadas conjugadas al enrollamiento de la cuerda. La teoría posee simetría  $O(D, D, \mathbb{R})$  de manera manifiesta, que incluye as la simetría de T-dualidad  $O(D, D, \mathbb{Z})$ . Se han introducido las distintas formulaciones de la teoría: partiendo desde su formulación inicial en términos de los campos de supergravedad como el dilatón, el tensor antisimétrico y la métrica, sin simetría  $O(D, D, \mathbb{R})$  manifiesta pasando luego a versiones invariantes ante el grupo  $O(D, D, \mathbb{R})$  como la formulación en términos de la métrica generalizada (un tensor de rango 2) y, finalmente, en término de los flujos. También se

han tratado las modificaciones a nociones geométricas heredadas de Teoría de Cuerdas como la derivada de Lie Generalizada: una derivada de Lie compatible con la simetría  $O(D, D\mathbb{R})$ .

Sin embargo, las simetrías de gauge no abelianas requieren estructuras adicionales. En el capítulo 5 se aborda el problema de cómo incorporar los nuevos grados de libertad que surgen de considerar una compactificación toroidal que da lugar a un agrandamiento de la simetría de gauge. Como se mostró en [82], en el caso de una compactificación en un círculo de radio autodual, la simetría  $O(d+1, d+1)$  debe promoverse a  $O(d+3, d+3)$ . En [76] se han incorporado los grupos de gauge no abelianos que surgen como grupos de agrandamiento en toros  $T^k$  construyendo una teoría  $O(d+n, d+n)$  covariante, donde  $n$  es la dimensión de los grupos de agrandamiento izquierdos y derechos. La acción efectiva de una compactificación toroidal de la Cuerda Bosónica fue reproducida mediante una reducción de Scherk-Schwarz de la acción de DFT. Esta acción reducida da lugar a las masas correctas de los vectores y escalares de Teoría de Cuerdas (en la vecindad de un punto de agrandamiento de la simetría) a partir de un mecanismo de Higgs. Es interesante notar, además, que el conjunto completo de estados que se vuelven no masivos en cualquier lugar del espacio de módulos de la compactificación en  $T^k$ , pueden obtenerse considerando una compactificación de un toro  $T^{k'}$  con  $k' > k$ .

En la construcción de la matriz de twists que da lugar al álgebra del grupo de gauge, los campos vectoriales con momento compacto o número de enrollamiento no nulos surgen a partir de una compactificación de Kaluza-Klein de una “métrica” y de un “campo de Kalb-Ramond” en una variedad  $2n$ -dimensional, con  $n$  la dimensión de los grupos de agrandamiento izquierdos y derechos, y la matriz de twists dada por el vielbein generalizado. Este vielbein depende de las coordenadas de un toro doble  $k$ -dimensional asociado a los generadores de Cartan del álgebra. Las constantes de estructura pueden obtenerse del vielbein mediante la utilización de la derivada de Lie deformada (5.2.8), consistente con las simetrías locales y la covariancia  $O(k, k)$  de la teoría. La deformación es necesaria para dar cuenta de los factores de cociclo que son necesarios para recuperar el álgebra correspondiente, y rompe la simetría  $O(d+n, d+n)$  a  $O(d+k, d+k)$ . El “tensor de cociclos” (5.2.9) cumple los vínculos de consistencia necesarios de GFDT (5.2.9).

Una propiedad interesante del vielbein generalizado es que es un autovector de  $\partial^M \partial_M$ . De hecho, satisface una versión modificada del vínculo débil, que no es otra cosa que la forma del operador para la “condición de igualdad de niveles” (LMC).

Esta construcción del vielbein es alternativa a la formulación de DFT en variedades de grupo [93, 133]. En este marco, para los puntos de agrandamiento de la simetría, el vielbein dependería de las  $n$  coordenadas de la variedad del grupo, sin embargo no está clara la relación con las coordenadas físicas del toro de compactificación.

DFT pone de manifiesto la simetría de T-dualidad de Teoría de Cuerdas incluso antes de realizar una compactificación y proporciona un marco útil para estudiar esta simetría. Desde su

primera formulación, se ha conseguido un gran progreso en el que propiedades y características de Teoría de cuerdas fueron reproducidas. Para nombrar algunos ejemplos, fue posible ir más allá de supergravedad al incorporar correcciones  $\alpha'$  [134–137] e incorporar estados masivos [91].

En una segunda parte de la tesis, se trata la estructura  $L_\infty$  en Supergravedad y en Teoría de Campos Excepcional  $E_7(7)$ , basándose principalmente en el trabajo [77]. Los capítulos 6, 7 y 8 forman una breve introducción al tema.

Las álgebras  $L_\infty$  surgieron en el campo de la Física en CSFT [43] y luego en un gran número de Teoría de Campos [46, 47, 47]. Recientemente se sugirió en [38] que las álgebras  $L_\infty$  están presentes en Teorías Clásicas de Campos y es en este marco que resulta de interés explorar la relación entre esta estructura y Supergravedad y en Teoría de Campos Excepcional  $E_7(7)$ .

En el capítulo 6 se presenta la estructura de gauge de las supergravedades gaugeadas en cuatro dimensiones, en donde los grupos de gauge dados por  $p$ -formas se organizan en la *jerarquía de tensores*. Las supergravedades poseen simetrías de dualidad y, similarmente a lo que ocurre en el caso de DFT, para obtener formulaciones que expliciten esta simetría se introducen derivadas de Lie Generalizadas (distintas a las de DFT) con sus correspondientes corchetes. Estas construcciones se basan en el *tensor de embedding* que también se presenta en este capítulo.

En el capítulo 7 se continúan con las ideas del capítulo anterior y se presenta el caso de las teorías que gozan de U-dualidad, en donde el grupo de simetría viene dado por  $E_{n(n)}$  [30–32]. Para obtener una teoría con esta simetría manifiesta, en [33, 34] se introdujo la idea de extender el espacio-tiempo y/o el espacio tangente y modificar la derivada de Lie de forma de captar esta simetría de manera similar a lo hecho en DFT.

En el capítulo 8 se introduce brevemente el álgebra  $L_\infty$ . Se trata de una generalización de las álgebras de Lie, definida sobre un espacio gradado, en donde el producto bilineal dado por el corchete de Lie se generaliza a una serie de nuevos productos, denotados como  $\ell_k$ , con  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\ell_k : X^{\otimes k} \rightarrow X$ . Estos productos obedecen identidades dadas por la ecuación (8.1.9), una generalización de la identidad de Jacobi para las álgebras de Lie. Por ejemplo, para  $\ell_1$  se tiene  $\ell_1(\ell_1(x)) = 0$ , con  $x$  un elemento del álgebra, lo que establece que el producto debe ser nilpotente. Para  $\ell_1$  y  $\ell_2$  se tiene  $\ell_1(\ell_2(x_1, x_2)) = \ell_2(\ell_1(x_1), x_2) + (-1)^{|x_1|} \ell_2(x_1, \ell_1(x_2))$ , donde  $|x_1|$  hace referencia al grado del elemento  $x_1$ . A partir de esta expresión,  $\ell_1$  puede ser interpretado como un operador diferencial sobre los argumentos de  $\ell_2$ , que satisface la regla de Leibniz. Además, en este capítulo se trata también la relación de las álgebras  $L_\infty$  con Teoría de campos a partir de la sugerencia en [38], en donde se establece que los campos, transformaciones de gauge, y las ecuaciones de movimiento son elementos de los distintos subespacios gradados en el álgebra.

En el capítulo 9 se estudia la relación entre el álgebra de la jerarquía de tensores y las álgebras  $L_\infty$ . Se discuten varios casos para cuatro dimensiones del espacio tiempo, como la

jerarquía de tensores que surge al considerar la formulación de Kaluza-Klein de DFT [110], el caso de Teoría de Campos Excepcional  $E_7(7)$  y las jerarquías que aparecen en supergravidades gaugeadas [111]. Se trata solamente el sector de las  $p$ -formas perteneciente a la jerarquía de tensores y sus transformaciones de gauge, dejando de lado el gravitón y los escalares. El motivo de esta exclusión es que los campos deben ser expandidos en potencias alrededor de un valor de fondo y así obtener una expansión perturbativa que permita hacer contacto con la estructura  $L_\infty$  y los campos que obedecen algún tipo de vínculo, como la métrica generalizada en DFT, son problemáticos debido a que la potencia a la que aparece el campo puede ser alterada mediante la utilización de los vínculos. Por otro lado, los campos que aparecen con su inversa (la métrica en Relatividad General, por ejemplo), llevan a una expansión infinita, dando lugar a infinitos productos  $\ell_n$ . Es por esto que se discute únicamente el sector de la jerarquía de tensores, que da lugar a una expansión finita en potencias de los campos, fijando el resto de los campos a sus valores de fondo. Además, se analizan principalmente los sectores  $L_\infty^{\text{gauge}}$  o  $L_\infty^{\text{gauge+campos}}$ , subálgebras de la estructura  $L_\infty$  de la teoría completa (que incluye también a las ecuaciones de movimiento).

En todos los casos fue posible establecer contacto entre las teorías y las álgebras  $L_\infty$ , se explicitaron todos los productos  $\ell_k$  necesarios y se verificaron las identidades (8.1.9). Este trabajo aporta un nuevo ejemplo en donde se pone de manifiesto la presencia de la estructura  $L_\infty$  subyacente en una Teoría de Campos. Resultaría interesante continuar en esta línea para determinar si, como se sugiere en [38], esta estructura está presente en toda Teoría de Campos Clásica que sea consistente, y si sirve como guía a la hora de establecer una Teoría de Campos, o para encontrar deformaciones.

Finalmente, en una tercera parte se trata el caso de la cuerda bosónica en  $AdS_3$ , utilizando el modelo  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW. En el capítulo 10 se presenta el modelo  $H_3^+$ -WZW, a partir del cual se obtienen parte de los resultados de  $SL(2, \mathbb{R})$ -WZW como continuación analítica. En este último modelo, el espectro debe completarse con representaciones obtenidas mediante la operación de *flujo espectral*. El objetivo de esta sección es estudiar la función de correlación de cuatro puntos para estados con flujo espectral no trivial. Empezando desde la expresión en base  $m$  para la función de cuatro puntos sin flujo espectral con al menos un estado en el espectro discreto, se mostró que los bloques conformes pueden escribirse en términos de estados de pesos extremos también pertenecientes a una serie discreta. Para esto se utilizaron los mismos métodos que en [73, 126, 128] para relajar la condición de peso extremo en los estados. Un procedimiento similar se implementó para estudiar la función de cuatro puntos con una unidad de flujo espectral. En primera instancia, se obtuvo una expresión integral factorizada para un correlador con un estado dado por la imagen ante flujo espectral de un estado de peso extremo. Esta expresión luego fue transformada a la representación de espacio-tiempo, que es más conveniente a la hora de una interpretación de los resultados. La transformación a la base  $x$  se obtuvo siguiendo las ideas en [68]. Se determinó la dependencia de la función de cuatro

puntos con una unidad de flujo espectral tanto en la hoja de mundo como en las coordenadas de espacio tiempo. La expresión integral en el espacio tiempo fue obtenida bajo la suposición que los espines externos pertenecen a un determinado dominio. Una continuación natural de este trabajo consistiría en obtener un correlador que de cuenta de todos los espines posibles, haciendo una continuación analítica de esta expresión como fue hecho para la función de cuatro puntos sin flujo espectral en [68], teniendo en cuenta contribuciones de estados en representaciones discretas provenientes de los polos que cruzan el contorno de integración mientras se varían continuamente los valores de los espines fueran del dominio dado por (10.6.6)-(10.6.7).

# Apéndice A

## Álgebras de Lie

En este apéndice se reúnen todas las definiciones y notación usada en la tesis con respecto a las álgebras de Lie simply-laced de dimensión  $n$ . Se seguirá principalmente la exposición en [96]. Se dará en primer lugar una discusión general y luego se especializará en ejemplos usados en otros capítulos de esta tesis.

Un álgebra de Lie puede especificarse por un conjunto de generadores  $X^a$ ,  $a = 1, \dots, n$  y sus relaciones de conmutación

$$[X^a, X^b] = f^{ab}{}_c X^c, \quad (\text{A.0.1})$$

donde las constantes  $f^{ab}{}_c$  son las constantes de estructura y  $[\cdot, \cdot]$  es un operador bilineal que satisface la identidad de Jacobi

$$\left[[X^a, X^b], X^c\right] + \left[[X^b, X^c], X^a\right] + \left[[X^c, X^a], X^b\right] = 0. \quad (\text{A.0.2})$$

En la base estándar de Cartan-Weyl, los generadores se definen de la siguiente manera. En primer lugar, se fija un conjunto de generadores  $H^m$  ( $m = 1, \dots, k$ ) (llamados generadores de Cartan) que expanden una subálgebra conmutativa (subálgebra de Cartan). Aquí,  $k$  es la dimensión del subálgebra de Cartan y determina el rango del álgebra completa. El resto de los generadores se eligen de forma de ser autovectores de todos los  $H^m$  bajo la acción adjunta, es decir,

$$[H^m, J^\alpha] = \alpha^m J^\alpha. \quad (\text{A.0.3})$$

El vector  $k$ -dimensional  $\alpha$  es una raíz del álgebra de Lie, y su generador asociado,  $J^\alpha$ , se denomina operador *escalera* o *de subida (bajada)*.

La identidad de Jacobi muestra que el conmutador de dos generadores escalera asociados a raíces opuestas conmuta con todos los generadores de Cartan, por lo que debe ser un elemento del subálgebra de Cartan. La elección de este elemento fija la normalización de los generadores



escalera. Usualmente, se fija como <sup>1</sup>

$$[J^\alpha, J^{-\alpha}] = \alpha \cdot H, \quad (\text{A.0.4})$$

donde  $\alpha \cdot H = \alpha^m \delta_{mn} H^n$ . Por otro lado, el conmutador de dos operadores escalera  $J^\alpha$  y  $J^\beta$  debe anularse si  $\alpha + \beta$  no es una raíz y debe ser proporcional a  $J^{\alpha+\beta}$  si lo es, explícitamente:

$$[J^\alpha, J^\beta] = \mathcal{N}_{\alpha,\beta} J^{\alpha+\beta} \quad \text{si } \alpha + \beta \text{ es una raíz.} \quad (\text{A.0.5})$$

La forma de Killing se define como

$$K(X, Y) = \frac{1}{2g} \text{Tr}(\text{Ad}X \text{Ad}Y), \quad (\text{A.0.6})$$

donde  $g$  es el número de Coxeter dual del álgebra de Lie. En la base de Cartan-Weyl se tiene

$$K(H^m, H^n) = \delta^{mn}, \quad K(J^\alpha, J^{-\alpha}) = 1, \quad (\text{A.0.7})$$

para cualquier raíz  $\alpha$ .

Cualquiera de estas raíces  $\alpha$  puede escribirse como

$$\alpha = n_m \beta_m, \quad (\text{A.0.8})$$

donde  $\{\beta_m\}$  es una base para el espacio de raíces de  $k$  dimensiones. La raíz  $\alpha$  se dice positiva si el primer número no nulo en la secuencia  $(n_1, n_2, \dots)$  es positivo y se le asociará un operador de subida. Se usará la siguiente notación: tomando el conjunto  $\{\alpha_i\}$  de raíces positivas,  $i = 1, \dots, \frac{1}{2}(n - k)$ , se denotarán a los operadores de subida y de bajada como

$$\begin{aligned} J^{\underline{i}} &= J^{\alpha_i} && \text{para operadores de subida,} \\ J^{\bar{i}} &= J^{-\alpha_i} && \text{para operadores de bajada.} \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

Las constantes de estructura tendrán el mismo tipo de índices, por ejemplo (sin suma sobre  $\underline{i}$ ):

$$[H^m, J^{\underline{i}}] = f^{m\underline{i}} J^{\underline{i}}, \quad \text{con } f^{m\underline{i}} = \alpha_i^m, \quad (\text{A.0.10})$$

donde  $\alpha_i^m = (\alpha_i)^m$  es la componente  $m$ -ésima del vector  $\alpha_i$ .

Las raíces simples son aquellas que no pueden escribirse como combinación de dos raíces positivas y proveen una base para el espacio dual del subálgebra de Cartan. Se denotará con  $\alpha_p$ ,  $p = 1, \dots, k$ , a las raíces simples. Toda la información de un álgebra de Lie puede extraerse de la matriz de Cartan, construída a partir de las raíces simples como

$$A^{pq} = \alpha_p \cdot \alpha_q = \alpha_p^m \delta_{mn} \alpha_q^n. \quad (\text{A.0.11})$$

---

<sup>1</sup> Algunas de las ecuaciones están escritas usando el hecho de que para álgebras simply-laced  $|\alpha|^2 = \alpha^m \delta_{mn} \alpha^n = 2$ .

Esta matriz resulta particularmente útil en la base de Chevalley, que se explicará a continuación.

En la base de Chevalley, se asocian dos generadores  $e^p$  y  $f^p$  a cada raíz simple  $\alpha_p$ . Estos generadores son los generadores de subida  $J^p$  y de bajada  $J^{\bar{p}}$ . Los generadores de Cartan se definen como

$$h^p = \alpha_p \cdot H. \quad (\text{A.0.12})$$

Las relaciones de conmutación en esta base son

$$\begin{aligned} [h^p, h^q] &= 0, \\ [h^p, e^q] &= A^{qp} e^q, \\ [h^p, f^q] &= -A^{qp} f^q, \\ [e^p, f^q] &= \delta^{pq} h^q, \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

donde no hay suma sobre  $p$  o  $q$ .

Los generadores restantes se obtienen mediante conmutadores de los anteriores, sujetos a las relaciones de Serre:

$$(\text{Ad}(e^p))^{1-A^{qp}} e^q = \underbrace{[e^p, [e^p, \dots, [e^p, e^q]]]}_{(1-A^{qp}) \text{ veces}} = 0, \quad (\text{A.0.14})$$

y de manera similar para  $f$ .

Las raíces no simples son una combinación lineal de las simples

$$\alpha_u = n_p^u \alpha_p, \quad (\text{A.0.15})$$

con  $u = 1, \dots, \frac{1}{2}(n-3k)$  etiquetando a las raíces no simples. Si todas las  $\alpha_p$  son raíces positivas, y todos los  $n_p$  son positivos para una dada raíz  $u$ , entonces  $\alpha_u$  es una raíz positiva. Las relaciones de conmutación para los generadores asociados a estas raíces son (sin suma sobre  $u$ ):

$$\begin{aligned} [h^p, e^u] &= c^{pu} e^u, \\ [h^p, f^u] &= -c^{pu} f^u, \end{aligned} \quad (\text{A.0.16})$$

con

$$c^{pu} = \alpha_p \cdot \alpha_u = A^{pq} n_q^u. \quad (\text{A.0.17})$$

Se tiene entonces

$$[e^u, f^u] = n_p^u h^p. \quad (\text{A.0.18})$$

La forma de Killing en la base de Chevalley es

$$K(e^i, f^j) = \delta^{ij}, \quad K(h^p, h^q) = A^{pq}. \quad (\text{A.0.19})$$

Será útil escribir expresiones explícitas para algunas constantes de estructura  $f_{abc}$  (con todos sus índices en la posición inferior) dada que habrá muchas contracciones que involucren constantes de estructura con índices en esta posición. La  $p$ -ésima fila de la matriz de Cartan da las constantes de estructura en la base de Chevalley para la  $p$ -ésima raíz simple, *i.e.*:

$$A^{pq} = f^{qp}_{\underline{p}} , \quad (\text{A.0.20})$$

y bajando todos los índices con  $K^{-1}$  se tiene

$$f_{q\bar{p}\underline{p}} = \delta_{pq} . \quad (\text{A.0.21})$$

Para raíces no simples se tiene (sin suma sobre  $\underline{u}$ )

$$f^{pu}_{\underline{u}} = c^{pu} , \quad (\text{A.0.22})$$

y entonces

$$f_{p\bar{u}\underline{u}} = n_p^u . \quad (\text{A.0.23})$$

A continuación se darán dos ejemplos de interés para esta tesis. Para  $SU(2)^2$  las raíces simples pueden tomarse como

$$\alpha_1 = \sqrt{2}(1, 0) , \quad \alpha_2 = \sqrt{2}(0, 1) . \quad (\text{A.0.24})$$

La matriz de Cartan es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.0.25})$$

Las relaciones de conmutación no triviales son

$$\begin{aligned} [h^1, e^1] &= 2e^1, & [e^1, f^1] &= h^1, & [h^1, f^1] &= -2f^1, \\ [h^2, e^2] &= 2e^2, & [e^2, f^2] &= h^2, & [h^2, f^2] &= -2f^2, \end{aligned} \quad (\text{A.0.26})$$

y las constantes de estructura (antisimétricas) no nulas están dadas por

$$f_{1\bar{1}\underline{1}} = f_{2\bar{2}\underline{2}} = 1. \quad (\text{A.0.27})$$

Para  $SU(3)$  las raíces simples pueden tomarse como

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) , \quad \alpha_2 = \sqrt{2}(0, 1) , \quad (\text{A.0.28})$$

y la matriz de Cartan es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.0.29})$$

Las relaciones de conmutación no nulas son

$$\begin{aligned}
[h^1, e^1] &= 2e^1, & [e^1, f^1] &= h^1, & [h^1, f^1] &= -2f^1, \\
[h^2, e^2] &= 2e^2, & [e^2, f^2] &= h^2, & [h^2, f^2] &= -2f^2, \\
[h^1, e^2] &= -e^2, & [h^1, f^2] &= f^2, \\
[h^2, e^1] &= -e^1, & [h^2, f^1] &= f^1.
\end{aligned} \tag{A.0.30}$$

Después de introducir los generadores

$$\begin{aligned}
e^3 &= [e^1, e^2], \\
f^3 &= -[f^1, f^2],
\end{aligned} \tag{A.0.31}$$

las relaciones de Serre se reducen a

$$\begin{aligned}
[e^1, e^3] &= [e^2, e^3] = 0, \\
[f^1, f^3] &= [f^2, f^3] = 0.
\end{aligned} \tag{A.0.32}$$

Una vez usadas estas relaciones, se obtienen los restantes conmutadores no triviales

$$\begin{aligned}
[h^1, e^3] &= e^3, & [h^1, f^3] &= -f^3, \\
[h^2, e^3] &= e^3, & [h^2, f^3] &= -f^3, \\
[e^3, f^1] &= -e^2, & [e^1, f^3] &= -f^2, \\
[e^3, f^2] &= e^1, & [e^2, f^3] &= f^1, \\
[e^3, f^3] &= h^1 + h^2,
\end{aligned} \tag{A.0.33}$$

y la matriz de  $2 \times 1$   $c^{pu}$  definida en (A.0.17) es  $c^{13} = c^{23} = 1$ .

Las constantes de estructura (antisimétricas) no nulas son

$$\begin{aligned}
f_{1\bar{1}1} &= f_{1\bar{3}3} = f_{2\bar{2}2} = f_{2\bar{3}3} = 1, \\
f_{\bar{1}23} &= -f_{\bar{1}2\bar{3}} = 1.
\end{aligned} \tag{A.0.34}$$

# Bibliografía

- [1] C. Hull and B. Zwiebach, *Double Field Theory*, *JHEP* **09** (2009) 099 [0904.4664].
- [2] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, *Generalized metric formulation of double field theory*, *JHEP* **08** (2010) 008 [1006.4823].
- [3] G. Aldazabal, D. Marques and C. Nunez, *Double Field Theory: A Pedagogical Review*, *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 163001 [1305.1907].
- [4] W. Siegel, *Superspace duality in low-energy superstrings*, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 2826 [hep-th/9305073].
- [5] W. Siegel, *Two vierbein formalism for string inspired axionic gravity*, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 5453 [hep-th/9302036].
- [6] A. A. Tseytlin, *Duality symmetric closed string theory and interacting chiral scalars*, *Nucl. Phys.* **B350** (1991) 395.
- [7] A. A. Tseytlin, *Duality Symmetric Formulation of String World Sheet Dynamics*, *Phys. Lett.* **B242** (1990) 163.
- [8] M. Gualtieri, *Generalized complex geometry*, Ph.D. thesis, Oxford U., 2003. [math/0401221](#).
- [9] N. Hitchin, *Generalized Calabi-Yau manifolds*, *Quart. J. Math.* **54** (2003) 281 [math/0209099].
- [10] G. Aldazabal, W. Baron, D. Marques and C. Nunez, *The effective action of Double Field Theory*, *JHEP* **11** (2011) 052 [1109.0290].
- [11] M. Grana and D. Marques, *Gauged Double Field Theory*, *JHEP* **04** (2012) 020 [1201.2924].
- [12] D. Geissbuhler, D. Marques, C. Nunez and V. Penas, *Exploring Double Field Theory*, *JHEP* **06** (2013) 101 [1304.1472].
- [13] A. Coimbra, C. Strickland-Constable and D. Waldram, *Supergravity as Generalised Geometry II:  $E_{d(d)} \times \mathbb{R}^+$  and M theory*, *JHEP* **03** (2014) 019 [1212.1586].

- [14] A. Coimbra, C. Strickland-Constable and D. Waldram,  $E_{d(d)} \times \mathbb{R}^+$  generalised geometry, connections and M theory, *JHEP* **02** (2014) 054 [[1112.3989](#)].
- [15] P. West, *Generalised geometry, eleven dimensions and E11*, *JHEP* **02** (2012) 018 [[1111.1642](#)].
- [16] D. S. Berman, H. Godazgar, M. J. Perry and P. West, *Duality Invariant Actions and Generalised Geometry*, *JHEP* **02** (2012) 108 [[1111.0459](#)].
- [17] D. S. Berman, H. Godazgar, M. Godazgar and M. J. Perry, *The Local symmetries of M-theory and their formulation in generalised geometry*, *JHEP* **01** (2012) 012 [[1110.3930](#)].
- [18] D. S. Berman and M. J. Perry, *Generalized Geometry and M theory*, *JHEP* **06** (2011) 074 [[1008.1763](#)].
- [19] D. C. Thompson, *Duality Invariance: From M-theory to Double Field Theory*, *JHEP* **08** (2011) 125 [[1106.4036](#)].
- [20] J. Schon and M. Weidner, *Gauged N=4 supergravities*, *JHEP* **05** (2006) 034 [[hep-th/0602024](#)].
- [21] H. Samtleben, *Lectures on Gauged Supergravity and Flux Compactifications*, *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 214002 [[0808.4076](#)].
- [22] G. Aldazabal, P. G. Camara, A. Font and L. E. Ibanez, *More dual fluxes and moduli fixing*, *JHEP* **05** (2006) 070 [[hep-th/0602089](#)].
- [23] G. Aldazabal, E. Andres, P. G. Camara and M. Grana, *U-dual fluxes and Generalized Geometry*, *JHEP* **11** (2010) 083 [[1007.5509](#)].
- [24] J. Blaback, U. Danielsson and G. Dibitetto, *Fully stable dS vacua from generalised fluxes*, *JHEP* **08** (2013) 054 [[1301.7073](#)].
- [25] C. Damian, L. R. Diaz-Barron, O. Loaiza-Brito and M. Sabido, *Slow-Roll Inflation in Non-geometric Flux Compactification*, *JHEP* **06** (2013) 109 [[1302.0529](#)].
- [26] B. de Carlos, A. Guarino and J. M. Moreno, *Flux moduli stabilisation, Supergravity algebras and no-go theorems*, *JHEP* **01** (2010) 012 [[0907.5580](#)].
- [27] N. B. Copland, *A Double Sigma Model for Double Field Theory*, *JHEP* **04** (2012) 044 [[1111.1828](#)].
- [28] D. Andriot, M. Larfors, D. Lust and P. Patalong, *(Non-)commutative closed string on T-dual toroidal backgrounds*, *JHEP* **06** (2013) 021 [[1211.6437](#)].

- [29] D. Lust, *Twisted Poisson Structures and Non-commutative/non-associative Closed String Geometry*, *PoS CORFU2011* (2011) 086 [[1205.0100](#)].
- [30] C. M. Hull and P. K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109 [[hep-th/9410167](#)].
- [31] E. Cremmer, B. Julia, H. Lu and C. N. Pope, *Dualization of dualities. 1.*, *Nucl. Phys.* **B523** (1998) 73 [[hep-th/9710119](#)].
- [32] N. A. Obers and B. Pioline, *U duality and M theory*, *Phys. Rept.* **318** (1999) 113 [[hep-th/9809039](#)].
- [33] C. M. Hull, *Generalised Geometry for M-Theory*, *JHEP* **07** (2007) 079 [[hep-th/0701203](#)].
- [34] P. Pires Pacheco and D. Waldram, *M-theory, exceptional generalised geometry and superpotentials*, *JHEP* **09** (2008) 123 [[0804.1362](#)].
- [35] D. Roytenberg and A. Weinstein, *Courant Algebroids and Strongly Homotopy Lie Algebras*, [math/9802118](#).
- [36] C. Hull and B. Zwiebach, *The Gauge algebra of double field theory and Courant brackets*, *JHEP* **09** (2009) 090 [[0908.1792](#)].
- [37] A. Deser and C. Sämann, *Extended Riemannian Geometry I: Local Double Field Theory*, [1611.02772](#).
- [38] O. Hohm and B. Zwiebach,  *$L_\infty$  Algebras and Field Theory*, *Fortsch. Phys.* **65** (2017) 1700014 [[1701.08824](#)].
- [39] D. Baraglia, *Leibniz algebroids, twistings and exceptional generalized geometry*, *J. Geom. Phys.* **62** (2012) 903 [[1101.0856](#)].
- [40] M. Cederwall and J. Palmkvist,  *$L_\infty$  algebras for extended geometry from Borchers superalgebras*, [1804.04377](#).
- [41] A. S. Arvanitakis, *Brane Wess-Zumino terms from AKSZ and exceptional generalised geometry as an  $L_\infty$ -algebroid*, [1804.07303](#).
- [42] O. Hohm and H. Samtleben, *Leibniz-Chern-Simons Theory and Phases of Exceptional Field Theory*, [1805.03220](#).
- [43] B. Zwiebach, *Closed string field theory: Quantum action and the B-V master equation*, *Nucl. Phys.* **B390** (1993) 33 [[hep-th/9206084](#)].
- [44] T. Lada and J. Stasheff, *Introduction to SH Lie algebras for physicists*, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 1087 [[hep-th/9209099](#)].

- [45] G. Barnich, R. Fulp, T. Lada and J. Stasheff, *The sh Lie structure of Poisson brackets in field theory*, *Commun. Math. Phys.* **191** (1998) 585 [[hep-th/9702176](#)].
- [46] A. Sen, *Wilsonian Effective Action of Superstring Theory*, *JHEP* **01** (2017) 108 [[1609.00459](#)].
- [47] F. A. Berends, G. J. H. Burgers and H. van Dam, *On the Theoretical Problems in Constructing Interactions Involving Higher Spin Massless Particles*, *Nucl. Phys.* **B260** (1985) 295.
- [48] R. Fulp, T. Lada and J. Stasheff, *sh-Lie algebras induced by gauge transformations*, *Commun. Math. Phys.* **231** (2002) 25.
- [49] A. M. Zeitlin, *Homotopy Lie Superalgebra in Yang-Mills Theory*, *JHEP* **09** (2007) 068 [[0708.1773](#)].
- [50] A. M. Zeitlin, *String field theory-inspired algebraic structures in gauge theories*, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 063501 [[0711.3843](#)].
- [51] A. M. Zeitlin, *Conformal Field Theory and Algebraic Structure of Gauge Theory*, *JHEP* **03** (2010) 056 [[0812.1840](#)].
- [52] N. Seiberg, *Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102** (1990) 319.
- [53] E. Witten, *(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*, *Nucl. Phys.* **B311** (1988) 46.
- [54] E. Witten, *On string theory and black holes*, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 314.
- [55] C. G. Callan, Jr., J. A. Harvey and A. Strominger, *Supersymmetric string solitons*, [hep-th/9112030](#).
- [56] S. Mukhi and C. Vafa, *Two-dimensional black hole as a topological coset model of  $c = 1$  string theory*, *Nucl. Phys.* **B407** (1993) 667 [[hep-th/9301083](#)].
- [57] D. Ghoshal and C. Vafa,  *$C = 1$  string as the topological theory of the conifold*, *Nucl. Phys.* **B453** (1995) 121 [[hep-th/9506122](#)].
- [58] H. Ooguri and C. Vafa, *Two-dimensional black hole and singularities of CY manifolds*, *Nucl. Phys.* **B463** (1996) 55 [[hep-th/9511164](#)].
- [59] A. Giveon and D. Kutasov, *Little string theory in a double scaling limit*, *JHEP* **10** (1999) 034 [[hep-th/9909110](#)].
- [60] A. Giveon and D. Kutasov, *Comments on double scaled little string theory*, *JHEP* **01** (2000) 023 [[hep-th/9911039](#)].



- [61] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The Black hole in three-dimensional space-time*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [[hep-th/9204099](#)].
- [62] M. R. Zirnbauer, *Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory*, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4986 [[math-ph/9808012](#)].
- [63] M. R. Zirnbauer, *Conformal field theory of the integer quantum Hall plateau transition*, [hep-th/9905054](#).
- [64] M. J. Bhaseen, I. I. Kogan, O. A. Solovev, N. Taniguchi and A. M. Tsvelik, *Towards a field theory of the plateau transitions in the integer quantum Hall effect*, *Nucl. Phys.* **B580** (2000) 688 [[cond-mat/9912060](#)].
- [65] J. M. Maldacena, *The Large  $N$  limit of superconformal field theories and supergravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113 [[hep-th/9711200](#)].
- [66] J. M. Maldacena, H. Ooguri and J. Son, *Strings in  $AdS(3)$  and the  $SL(2,R)$  WZW model. Part 2. Euclidean black hole*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2961 [[hep-th/0005183](#)].
- [67] D. Friedan, E. J. Martinec and S. H. Shenker, *Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*, *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 93.
- [68] J. M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in  $AdS(3)$  and the  $SL(2,R)$  WZW model. Part 3. Correlation functions*, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 106006 [[hep-th/0111180](#)].
- [69] J. Teschner, *Operator product expansion and factorization in the  $H+(3)$  WZNW model*, *Nucl. Phys.* **B571** (2000) 555 [[hep-th/9906215](#)].
- [70] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Four Point Correlation Functions and the Operator Algebra in the Two-Dimensional Conformal Invariant Theories with the Central Charge  $C < 1$* , *Nucl. Phys.* **B251** (1985) 691.
- [71] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Operator Algebra of Two-Dimensional Conformal Theories with Central Charge  $C \geq 1$* , *Phys. Lett.* **154B** (1985) 291.
- [72] G. Giribet and C. A. Nunez, *Correlators in  $AdS(3)$  string theory*, *JHEP* **06** (2001) 010 [[hep-th/0105200](#)].
- [73] S. Iguri and C. A. Nunez, *Coulomb integrals for the  $SL(2,R)$  WZW model*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 066015 [[0705.4461](#)].
- [74] S. M. Iguri and C. A. Nunez, *Coulomb integrals and conformal blocks in the  $AdS(3)$  - WZNW model*, *JHEP* **11** (2009) 090 [[0908.3460](#)].
- [75] Y. Cagnacci and S. M. Iguri, *Spectral flow and conformal blocks in  $AdS_3$* , *JHEP* **09** (2015) 036 [[1504.07492](#)].

- [76] Y. Cagnacci, M. Graña, S. Iguri and C. Núñez, *The bosonic string on string-size tori from double field theory*, *JHEP* **06** (2017) 005 [[1704.04242](#)].
- [77] Y. Cagnacci, T. Codina and D. Marques,  *$L_\infty$  algebras and Tensor Hierarchies in Exceptional Field Theory and Gauged Supergravity*, *JHEP* **01** (2019) 117 [[1807.06028](#)].
- [78] D. Tong, *String Theory*, [0908.0333](#).
- [79] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, *Target space duality in string theory*, *Phys. Rept.* **244** (1994) 77 [[hep-th/9401139](#)].
- [80] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, *Background independent action for double field theory*, *JHEP* **07** (2010) 016 [[1003.5027](#)].
- [81] V. A. Penas, *Properties of double field theory*, Ph.D. thesis, Groningen U., 2016.
- [82] G. Aldazabal, M. Graña, S. Iguri, M. Mayo, C. Nuñez and J. A. Rosabal, *Enhanced gauge symmetry and winding modes in Double Field Theory*, *JHEP* **03** (2016) 093 [[1510.07644](#)].
- [83] J. G. Polchinski, *String theory*. Cambridge university press, 2003.
- [84] A. Giveon, E. Rabinovici and G. Veneziano, *Duality in String Background Space*, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 167.
- [85] A. D. Shapere and F. Wilczek, *Selfdual Models with Theta Terms*, *Nucl. Phys.* **B320** (1989) 669.
- [86] A. Giveon, N. Malkin and E. Rabinovici, *On Discrete Symmetries and Fundamental Domains of Target Space*, *Phys. Lett.* **B238** (1990) 57.
- [87] M. Grana, R. Minasian, M. Petrini and D. Waldram, *T-duality, Generalized Geometry and Non-Geometric Backgrounds*, *JHEP* **04** (2009) 075 [[0807.4527](#)].
- [88] G. Aldazabal, E. Andres, M. Mayo and J. Rosabal, *Gauge symmetry enhancing-breaking from a double field theory perspective*, *Journal of High Energy Physics* **2017** (2017) 1.
- [89] B. Fraiman, M. Graña and C. A. Núñez, *A new twist on heterotic string compactifications*, *JHEP* **09** (2018) 078 [[1805.11128](#)].
- [90] J. Maharana and J. H. Schwarz, *Noncompact symmetries in string theory*, *Nucl. Phys.* **B390** (1993) 3 [[hep-th/9207016](#)].
- [91] G. Aldazabal, M. Mayo and C. Nuñez, *Probing the String Winding Sector*, *JHEP* **03** (2017) 096 [[1611.04927](#)].

- [92] R. Blumenhagen, P. du Bosque, F. Hassler and D. Lust, *Generalized Metric Formulation of Double Field Theory on Group Manifolds*, *JHEP* **08** (2015) 056 [[1502.02428](#)].
- [93] O. Hohm and D. Marques, *Perturbative Double Field Theory on General Backgrounds*, *Phys. Rev.* **D93** (2016) 025032 [[1512.02658](#)].
- [94] A. Coimbra, C. Strickland-Constable and D. Waldram, *Supergravity as Generalised Geometry I: Type II Theories*, *JHEP* **11** (2011) 091 [[1107.1733](#)].
- [95] O. Hohm and S. K. Kwak, *Double Field Theory Formulation of Heterotic Strings*, *JHEP* **06** (2011) 096 [[1103.2136](#)].
- [96] D. S. P. Di Francesco, P. Mathieu, *Conformal Field Theory*. Springer, 1997.
- [97] B. de Wit and H. Nicolai,  *$N=8$  Supergravity*, *Nucl. Phys.* **B208** (1982) 323.
- [98] C. M. Hull, *Noncompact Gaugings of  $N = 8$  Supergravity*, *Phys. Lett.* **B142** (1984) 39.
- [99] M. Gunaydin, L. J. Romans and N. P. Warner, *Compact and Noncompact Gauged Supergravity Theories in Five-Dimensions*, *Nucl. Phys.* **B272** (1986) 598.
- [100] M. Pernici, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, *Gauged Maximally Extended Supergravity in Seven-dimensions*, *Phys. Lett.* **143B** (1984) 103.
- [101] M. Grana, *Flux compactifications in string theory: A Comprehensive review*, *Phys. Rept.* **423** (2006) 91 [[hep-th/0509003](#)].
- [102] R. Blumenhagen, B. Kors, D. Lust and S. Stieberger, *Four-dimensional String Compactifications with D-Branes, Orientifolds and Fluxes*, *Phys. Rept.* **445** (2007) 1 [[hep-th/0610327](#)].
- [103] B. de Wit and H. Samtleben, *Gauged maximal supergravities and hierarchies of nonAbelian vector-tensor systems*, *Fortsch. Phys.* **53** (2005) 442 [[hep-th/0501243](#)].
- [104] B. de Wit, H. Nicolai and H. Samtleben, *Gauged Supergravities, Tensor Hierarchies, and M-Theory*, *JHEP* **02** (2008) 044 [[0801.1294](#)].
- [105] O. Hohm and H. Samtleben, *Exceptional field theory. II.  $E_{7(7)}$* , *Phys. Rev.* **D89** (2014) 066017 [[1312.4542](#)].
- [106] D. S. Berman, M. Cederwall, A. Kleinschmidt and D. C. Thompson, *The gauge structure of generalised diffeomorphisms*, *JHEP* **01** (2013) 064 [[1208.5884](#)].
- [107] O. Hohm and H. Samtleben, *Exceptional Form of  $D=11$  Supergravity*, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 231601 [[1308.1673](#)].

- [108] O. Hohm and H. Samtleben, *Exceptional Field Theory I:  $E_{6(6)}$  covariant Form of M-Theory and Type IIB*, *Phys. Rev.* **D89** (2014) 066016 [[1312.0614](#)].
- [109] O. Hohm, V. Kupriyanov, D. Lust and M. Traube, *Constructions of  $L_\infty$  algebras and their field theory realizations*, *Adv. Math. Phys.* **2018** (2018) 9282905 [[1709.10004](#)].
- [110] O. Hohm and H. Samtleben, *Gauge theory of Kaluza-Klein and winding modes*, *Phys. Rev.* **D88** (2013) 085005 [[1307.0039](#)].
- [111] B. de Wit, H. Samtleben and M. Trigiante, *On Lagrangians and gaugings of maximal supergravities*, *Nucl. Phys.* **B655** (2003) 93 [[hep-th/0212239](#)].
- [112] E. A. Bergshoeff, J. Hartong, O. Hohm, M. Huebscher and T. Ortin, *Gauge Theories, Duality Relations and the Tensor Hierarchy*, *JHEP* **04** (2009) 123 [[0901.2054](#)].
- [113] F. Riccioni and P. C. West, *The  $E(11)$  origin of all maximal supergravities*, *JHEP* **07** (2007) 063 [[0705.0752](#)].
- [114] J. Teschner, *The Minisuperspace limit of the  $sl(2, C) / SU(2)$  WZNW model*, *Nucl. Phys.* **B546** (1999) 369 [[hep-th/9712258](#)].
- [115] J. Teschner, *On structure constants and fusion rules in the  $SL(2, C) / SU(2)$  WZNW model*, *Nucl. Phys.* **B546** (1999) 390 [[hep-th/9712256](#)].
- [116] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 577 [[hep-th/9506136](#)].
- [117] J. Balog, L. O’Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, *Consistency of String Propagation on Curved Space-Times: An  $SU(1,1)$  Based Counterexample*, *Nucl. Phys.* **B325** (1989) 225.
- [118] J. M. Evans, M. R. Gaberdiel and M. J. Perry, *The no ghost theorem for  $AdS(3)$  and the stringy exclusion principle*, *Nucl. Phys.* **B535** (1998) 152 [[hep-th/9806024](#)].
- [119] N. Mohammadi, *On the Unitarity of String Propagation on  $SU(1,1)$* , *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 3201.
- [120] P. M. S. Petropoulos, *COMMENTS ON  $SU(1,1)$  STRING THEORY*, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 151.
- [121] J. M. Maldacena, J. Michelson and A. Strominger, *Anti-de Sitter fragmentation*, *JHEP* **02** (1999) 011 [[hep-th/9812073](#)].
- [122] N. Seiberg and E. Witten, *The  $D1 / D5$  system and singular CFT*, *JHEP* **04** (1999) 017 [[hep-th/9903224](#)].

- [123] J. M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS(3) and SL(2,R) WZW model 1.: The Spectrum*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929 [[hep-th/0001053](#)].
- [124] K. Hosomichi and Y. Satoh, *Operator product expansion in SL(2) conformal field theory*, *Mod. Phys. Lett.* **A17** (2002) 683 [[hep-th/0105283](#)].
- [125] A. Z. V. Fateev and A. Zamolodchikov, *unpublished notes*, .
- [126] Y. Satoh, *Three point functions and operator product expansion in the SL(2) conformal field theory*, *Nucl. Phys.* **B629** (2002) 188 [[hep-th/0109059](#)].
- [127] K. Hosomichi, K. Okuyama and Y. Satoh, *Free field approach to string theory on AdS(3)*, *Nucl. Phys.* **B598** (2001) 451 [[hep-th/0009107](#)].
- [128] K. Becker and M. Becker, *Interactions in the SL(2,IR) / U(1) black hole background*, *Nucl. Phys.* **B418** (1994) 206 [[hep-th/9310046](#)].
- [129] W. H. Baron and C. A. Nunez, *Fusion rules and four-point functions in the SL(2,R) WZNW model*, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 086004 [[0810.2768](#)].
- [130] S. Ribault, *Minisuperspace limit of the AdS<sub>3</sub> WZNW model*, *JHEP* **04** (2010) 096 [[0912.4481](#)].
- [131] Y. Cagnacci and S. M. Iguri, *More AdS<sub>3</sub> correlators*, *Phys. Rev.* **D89** (2014) 066006 [[1312.3353](#)].
- [132] P. Mincses, C. A. Nunez and E. Herscovich, *Winding strings in AdS(3)*, *JHEP* **06** (2006) 047 [[hep-th/0512196](#)].
- [133] R. Blumenhagen, F. Hassler and D. Lüst, *Double field theory on group manifolds*, *Journal of High Energy Physics* **2015** (2015) 1.
- [134] O. Hohm and B. Zwiebach, *Double field theory at order  $\alpha'$* , *Journal of High Energy Physics* **2014** (2014) 75.
- [135] A. Coimbra, R. Minasian, H. Triendl and D. Waldram, *Generalised geometry for string corrections*, *Journal of High Energy Physics* **2014** (2014) 160.
- [136] D. Marqués and C. A. Nunez, *T-duality and  $\alpha'$ -corrections*, *Journal of High Energy Physics* **2015** (2015) 84.
- [137] W. H. Baron, J. J. Fernández-Melgarejo, D. Marqués and C. A. Nuñez, *The odd story of  $\alpha'$ -corrections*, *Journal of High Energy Physics* **2017** (2017) 78.