UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Espacios de series de Dirichlet y operadores

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Fernández Vidal, Tomás Ariel

Director: Dr. Pablo Sevilla Peris
Director Adjunto: Dr. Daniel E. Galicer
Consejero de estudios: Dr. Daniel Carando

Buenos Aires, 2023

Espacios de series de Dirichlet y operadores

Resumen

Esta tesis tiene como objeto contribuir al estudio de la teoría de series de Dirichlet y su conexión tanto con el análisis complejo como con el análisis armónico, así como en la teoría de operadores definidos en estos espacios.

Extendemos la definición del espacio H_+^∞, formado por las series de Dirichlet uniformemente convergentes en cada semiplano complejo de parte real positiva, a los espacios de Hardy H_p definidos por Bayart. Para este nuevo espacio, al que notamos por H_+, analizamos algunas de sus propiedades topológicas, tales como la completitud, nuclearidad y la existencia de bases incondicionales entre otras. Por otra parte, presentamos una conexión entre estos espacios y espacios de funciones holomorfas en infinitas variables.

Siguiendo la teoría de operadores de composición clásica en los espacios de series de Dirichlet, estudiamos estos operadores en el espacios H_+. Caracterizamos aquellos operadores continuos así como los operadores acotados. Por otra parte, estudiamos también los operadores de superposición y diferenciación en H_+.

Analizamos los operadores de multiplicación definidos en espacios de Hardy de series de Dirichlet H_p. Estudiamos su rango, espectro y norma esencial. A partir de la conexión con diferentes áreas del análisis, obtenemos resultados análogos para los operadores de multiplicación en espacios de Hardy de funciones holomorfas en infinitas variables así como en los espacios de Hardy de funciones definidas en el politoro infinito dimensional.

Extendemos la definición de los espacios de series de Dirichlet H_+^∞ y H_+ a las series de Dirichlet generales dependiendo de ciertas frecuencias λ. Nos concentramos en las mismas propiedades topológicas que nos interesaban y obtenemos diversos resultados dependiendo del tipo de frecuencia que defina a la serie.

Estudiamos teoremas de tipo Montel. Nos concentramos tanto en los espacios de funciones holomorfas en infinitas variables como en espacios de funciones uniformemente casi periódicas en el semiplano complejo de parte real mayor o igual a cero. A partir de esto obtenemos resultados similares para los espacios de Hardy de series de Dirichlet generales. Como consecuencia de estos resultados, probamos que tanto el espacio de series de Dirichlet H_+ como los análogos definidos para series generales son espacios de Schwartz.

Palabras claves: Series de Dirichlet, espacios de Hardy, espacios de Fréchet, operadores de composición, operadores de multiplicación, Montel.

Spaces of Dirichlet series and operators

Abstract

This thesis aims to contribute to the study of the theory of Dirichlet series and its connection with complex and harmonic analysis, as well as the theory of operators defined on these spaces.

We extend the definition of the space H_+^∞, formed by the uniformly convergent Dirichlet series in each complex half-plane with positive real part, to the Hardy spaces H_p defined by Bayart. For this new space, which we denote by H_+, we analyze some of its topological properties, such as completeness, nuclearity and the existence of unconditional bases among others. On the other hand, we present a connection between these spaces and spaces of holomorphic functions of infinitely many variables.

Following the classical theory of composition operators on spaces of Dirichlet series, we study these operators on the space H_+. We characterize those continuous operators as well as the bounded operators. On the other hand, we also study superposition and differentiation operators on H_+.

We analyze multiplication operators defined on Hardy spaces of Dirichlet series H_p. We study its range, essential norm and spectrum. From the connection with different areas of analysis, we obtain analogous results for multiplication operators on Hardy spaces of holomorphic functions of infinitely many variables, as well as on the Hardy spaces of functions defined on the infinite dimensional polytorus.

We extend the definition of spaces of Dirichlet series H_+^∞ and H_+ to general Dirichlet series depending on certain frequencies λ. We focus on the same topological properties that interested us above, and we obtain different results depending on the type of frequency that defines the series.

We study Montel-type theorems. We focus both on spaces of holomorphic functions of infinitely many variables and on spaces of almost uniformly periodic functions on complex half-plane with real part greater than or equal to zero. From this we get similar results for Hardy spaces of general Dirichlet series. As a consequence of these results, we prove that the space of Dirichlet series H_+ as well as the analogous spaces defined for general series are Schwartz spaces.

Keywords: Dirichlet series, Hardy spaces, Fréchet spaces, composition operators, multiplication operators, Montel.

Agradecimientos

Quiero comenzar por agradecer a las dos personas que me guiaron y formaron en estos años de doctorado:

A Pablo por haber aceptado ser mi director. Por la paciencia, tolerancia y todo lo que me enseñaste en este tiempo. También por haberme hecho sentir en Valencia como si estuviera en mi casa.

A Dany por todos estos años en los que estamos trabajando juntos. Por tu impulso, optimismo y por siempre exigirme un poco más.

A los dos, por haberme ayudado a mejorar, con sus consejos y correcciones, la manera de escribir, pensar y comunicar la matemática. Porque en estos años siempre pude contar con ustedes, incluido el tiempo de pandemia con el esfuerzo y las complicaciones que sé que les llevaba. Sobre todo, por ser muy buenas personas.

Agradecer también a los jurados Jorge Antezana, Manuel Contreras y Úrsula Molter por el tiempo dedicado a leer la tesis y los comentarios y sugerencias que nos ayudan a seguir profundizando nuestro trabajo.

Al grupo de funcional, formado por muy buenos matemáticos y mejores personas, siempre dispuestos a ayudarte y aconsejar.

A la UBA, el CONICET, el IMAS y la educación pública. A la Universitat de València y a la Universitat Politècnica de València.

A Manuel Maestre y Domingo García por toda su ayuda.

A mis compañeros del hotel de Hilbert y ahora de pasillo, son los que hacen disfrutar el día a día.

A mis amigos Nahuel, Violeta, Pablo, Emiliano, Lautaro.

Finalmente a mi familia que los amo. Gracias por estar siempre en los momentos malos para sostener y en los momentos buenos para alegrarse como uno.

A mi mamá Graciela y mi papá Guillermo. A mis hermanas y hermanos Pichu, Maru, Nino, Juancho, Mecha, Juli y Cami. A mis sobrinos Demian y Bastian y mi sobrina Paloma, los más buenos y hermosos que hay.

A mis tíos Tuti y Coca, y mis primos Pablo y Julian.

A mis abuelos Tita, Lolo, Locolin y Luislo, los quiero y los extraño.

Introducción

A mediados del siglo XVIII comienzan a utilizarse las series de Dirichlet en el estudio de la distribución de los números primos. Son grandes matemáticos como Euler, Dirichlet, Riemann y Jensen quienes en el transcurso de 150 años convierten a estas series en una de las principales herramientas de la Teoría de números (ver por ejemplo [Eul48], [Dir37], [Rie59], [Jen84] y [Jen88]).

Antes de continuar, recordemos la definición de estas series. Una serie de Dirichlet es una expresión formal del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, donde $(a_n)_n$ es una sucesión de números complejos y s una variable compleja. A diferencia de las series de potencias, series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, las regiones naturales de convergencia de estas series (es decir, la región más grande en la que una serie de Dirichlet converge) son semiplanos del plano complejo $\mathbb{C}$. Esto es, regiones del tipo

$$\{s \quad \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(s) > \sigma_0\}$$

para algún $\sigma_0 > 0$. Por ejemplo, si consideramos la zeta de Riemann, la más famosa de las series de Dirichlet, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, su semiplano de convergencia es el semiplano

$$\{s \quad \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}.$$

A partir del año 1900 las series de Dirichlet gozan de una gran popularidad. Muestra de esto es el interés que atrajo de matemáticos como Bohr, Hardy, Landau, Littlewood, Riesz, entre otros, y que produjo importantes resultados en un corto período. Uno de los temas que llamó la atención en estos años fue el referido a la convergencia de estas series. Discriminar en qué semiplanos una serie de Dirichlet converge puntual, uniforme o absolutamente condujo al llamado problema de Bohr, el cual consistió en determinar el ancho máximo de una región donde una serie de Dirichlet puede converger uniformemente pero no absolutamente. Este problema, que estuvo abierto durante 18 años, contó como una de sus herramientas principales a la ahora conocida como "transformada de Bohr", que relaciona las series de Dirichlet con series formales de potencias en infinitas variables. Es decir, con series del tipo $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$, donde $z = (z_1, z_2, \dots)$ es una tira de infinitas variables, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, 0, \dots)$ es una sucesión eventualmente nula de números enteros no negativos y z^α es el producto finito definido por $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_N^{\alpha_N}$. De esta forma, considerando la sucesión de números primos $\mathfrak{p} = (2, 3, 5, \dots)$ y utilizando la descomposición en números primos de los naturales, para cada $n \quad \mathbb{N}$ existe una única sucesión eventualmente nula α tal que $n = \mathfrak{p}^\alpha$. Así Bohr estableció una biyección entre las series de Dirichlet y las series de potencias definida por

$$\sum a_n n^{-s} \longleftrightarrow \sum c_\alpha z^\alpha,$$

siendo $a_n = c_\alpha$ si y sólo si $n = \mathfrak{p}^\alpha$. Como mencionábamos, esta idea de Bohr generó un puente entre el las series de Dirichlet y las series de potencias. Sin embargo, producto de diversos motivos, a finales de la década del treinta el interés en las series de Dirichlet, vista desde el enfoque analítico de Bohr, comenzó a diluirse.

A mediados de la década del noventa este interés volvió a desarrollarse con fuerza. Nuevamente, una de las claves de este resurgimiento se da en la conexión que se establece entre los espacios de series de Dirichlet y espacios de funciones, representables como series de potencias, tanto desde un punto de vista del análisis complejo como armónico. Como punto inicial podemos mencionar el espacio de las series de Dirichlet que convergen a funciones acotadas en el semiplano $\mathbb{C}_0$, definido por Queffélec en [Que95] y notado por $\mathcal{H}_\infty$. En [HLS97] Hedenmalm, Lindqvist y Seip prueban, mediante la transformada de Bohr, que este es isométricamente isomorfo al espacio $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Por otro lado, Cole y Gamelin habían probado en [CG86] que este espacio es isométricamente isomorfo a $H_\infty(B_{c_0})$, el espacio formado por las funciones holomorfas y acotadas en la bola unitaria abierta de c_0 (sucesiones convergentes a cero).

A partir de estos años comienzan a publicarse una gran cantidad de estudios y resultados muy relevantes, de los cuales mencionaremos solamente unos pocos relacionados a la tesis.

En [HLS97], la motivación para Hedenmalm, Lindqvist y Seip era el estudio de la existencia de bases de Riesz en $L_2(0,1)$. Concretamente, los problemas que plantean son para qué funciones φ se tiene que el sistema $\{\varphi(nx)\}_n$ es una base de Riesz de $L_2(0,1)$ y para cuáles es una sucesión completa (siendo este último un problema establecido por Beurling en 1945). Como indican los autores, una de las ideas de Beurling es asociar a la función $\varphi(x) = \sum a_n \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ la serie $D_\varphi(s) = \sum a_n n^{-s}$ para de esta forma intentar expresar las propiedades de la base de Riesz y la completitud en términos de las propiedades analíticas de estas últimas. Esta idea los lleva a definir el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_2$ de series de Dirichlet, dado por las series $\sum a_n n^{-s}$ tales que

$$\sum |a_n|^2 < \infty,$$

espacio que prueban es isométricamente isomorfo a $H_2(\mathbb{T}^\infty)$, y a estudiar los multiplicadores del mismo, es decir, aquellas series de Dirichlet D tales que $DE \in \mathcal{H}_2$ para toda $E \in \mathcal{H}_2$, demostrando que estas son justamente las pertenecientes al espacio $\mathcal{H}_\infty$. Luego de un profundo estudio del espacio $\mathcal{H}_2$, prueban que las funciones que definen una base de Riesz en $L_2(0,1)$ son aquellas que pueden expresarse como series de Dirichlet y para las que D y D^{-1} son multiplicadores.

En [Bay02] Bayart exiende la definición de los espacios de Hardy de series de Dirichlet $\mathcal{H}_p$ para $1 \le p < \infty$ tomando como modelo los espacios de funciones $H_p(\mathbb{T}^\infty)$. Posteriormente, en 2017 Bayart, Defant, Frerick, Maestre y Sevilla Peris prueban la isometría entre el espacio de funciones holomorfas $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$ y el de series de Dirichlet $\mathcal{H}_p$ para $1 \le p < \infty$ (ver [BDF$^+$17]).

Las definiciones de los espacios de Hardy y su conexión con las distintas áreas del análisis ha sido extendida por Defant y Schoolmann al ámbito de las series de Dirichlet generales. Esto es, para una sucesión positiva y creciente $\lambda = (\lambda_n)_n$, tal que $\lambda_n \to +\infty$, la λ-serie de Dirichlet se define como $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ (notar que si $\lambda_n = \log n$ entonces son las series de Dirichlet "ordinarias"). En una serie de artículos muy completos, definen diversos espacios de este tipo de espacios de λ-series de Dirichlet (ver por ejemplo [DS19a], [DS20a], [DS20b], [Sch20a], [DS19b] y [Sch20b]). Usando técnicas e ideas profundas obtienen una gran cantidad de resultados para estos espacios de series de Dirichlet, que resultan depender fuertemente de la sucesión λ que define a la serie.

En 2018, en [Bon18] Bonet define el espacio de Fréchet $\mathcal{H}_+^\infty$. Este está conformado por las series de Dirichlet convergentes en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$ y que definen funciones acotadas en cada semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \varepsilon\}$ para cada $\varepsilon > 0$. Estudia la estructura de este espacio.

Además de, como se puede ver, esta diversidad de profundos y variados resultados, el interés en este tema a llevado a la escritura de algunos libros muy completos sobre las series de Dirichlet y su vinculación tanto con la teoría de números como con el análisis complejo y armónico. Ejemplo de esto es el de Queffélec y Queffélec [QQ20] y el de Defant, García, Maestre y Sevilla Peris [DGMSP19].

Esta tesis tiene como objetivo realizar una contribución al desarrollo de estos temas. En una primera parte, buscamos definir análogos del espacio $\mathcal{H}_+^\infty$ y estudiar su estructura. En primer lugar, partiendo de los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p$. Comenzamos definiendo un espacio de Fréchet $\mathcal{H}_+^p$ para cada $1 \le p < \infty$, pero luego vemos que estos espacios son en realidad un mismo espacio que notamos por $\mathcal{H}_+$. De esta forma, para cada $1 \le p < \infty$ obtenemos una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{p,k}\}_k$, inducidas a partir de la norma de $\mathcal{H}_p$, que definen la misma topología y obtenemos una equivalencia entre dichas familias de seminormas. Esto nos permite probar que el espacio H_+ es un álgebra, algo que difiere de los espacios H_p. Probamos además que el espacio es un espacio de Schwartz, obtenemos bases absolutas y probamos que es no nuclear. Además damos un espacio de Fréchet de funciones holomorfas isométrico.

Generalizamos este estudio a espacios de series de Dirichlet generales. Realizamos este estudio para los espacios previamente definidos por Defant y Schoolmann, $\mathsf{H}_p(\lambda)$ y $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$, pero damos una versión más general para espacios λ-admisibles de series de Dirichlet. Nuevamente el foco está puesto en las propiedades estructurales de estos espacios. Buscamos determinar la completitud, nuclearidad y encontrar bases y si estos resultados son o no independientes de la frecuencia λ.

Un resultado importante para la estructura de estos espacios es el Teorema de Montel para los espacios de Hardy $\mathsf{H}_p(\lambda)$. En este sentido, probamos un Teorema de Montel para los espacios de Hardy de funciones holomorfas en infinitas variables y a partir de la conexión dada por la transformada de Bohr damos una versión del Teorema para los espacios de Hardy de series ordinarias (este resultado ya había sido obtenido por Defant y Schoolmann en un marco más general, usando técnicas diferentes). Para las series generales probamos un Teorema de Montel para las funciones uniformemente casi periódicas y nuevamente esto nos permite probar un Teorema de Montel para los espacios de Hardy de series generales, mostrando que este no depende de la frecuencia λ (extendiendo en este sentido el teorema antes mencionado).

En una segunda parte de nuestro trabajo nos enfocamos en operadores definidos en espacios de series de Dirichlet.

Tratamos en primer lugar con los operadores de multiplicación. Para definir estos operadores, que tienen su origen en el Teorema espectral en la década del treinta, consideremos el espacio de Hilbert $L_2(\mathsf{T},\mu)$ con la medida lebesgue normalizada. Decimos que una función g, medible en T, define un operador de multiplicación si $gf \quad L_2(\mathsf{T},\mu)$ para toda función $f \quad L_2(\mathsf{T},\mu)$. El estudio de estos operadores fue evolucionando en diversas direcciones, una de las cuales es el estudio de los llamados operadores de Toeplitz. Si consideramos el subespacio de Hilbert $H_2(\mathsf{T})$ de $L_2(\mathsf{T},\mu)$ dado por todas las funciones f para las que su n-ésimo coeficiente de Fourier

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathsf{T}} f(w) w^{-nit} \mathrm{d}\mu$$

es nulo si $n < 0$, entonces decimos que una función g, medible en T, define un operador de Toeplitz si el operador $T_g(f) = P(gf)$ es continuo de $L_2(\mathsf{T},\mu)$ en $H_2(\mathsf{T})$, siendo P la proyección de $L_2(\mathsf{T},\mu)$ en $H_2(\mathsf{T})$. Por otro lado, el operador de Toeplitz analítico se define como aquellas funciones g tal que multiplicar por $T_g(f) = gf$ define un operador continuo de $H_2(\mathsf{T})$ en $H_2(\mathsf{T})$, es decir sin la necesidad de proyectar. Estos operadores fueron ampliamente estudiados en distintos espacios de funciones, entre los que destacamos en particular los espacios de Hardy en el disco, definido como el de las funciones holomorfas en D tales que

$$\lim_{0<r<1} \int_{\mathsf{T}} |f(rw)|^2 \mathrm{d}w < \infty$$

y que notamos por $H_2(\mathsf{D})$ (ver [Dou12, Capítulo 7] y [Vuk03]).

Como hemos visto, el primer vínculo que podemos mencionar entre estos operadores y las series de Dirichlet se encuentra en el estudio de las bases de Riesz de $L_2(0,1)$, en [HLS97], por parte de Hedenmalm, Lindqvist y Seip. Unos años más tarde, Bayart en [Bay02] extiende el estudio de los multiplicadores para los restantes espacios de Hardy H_p.

Como uno de nuestros objetivos nos planteamos caracterizar las funciones φ que definen operadores de multiplicación $M_\varphi : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_q$ para cada $1 \leq p, q \leq \infty$, para esto utilizamos fuertemente la relación con los espacios de funciones. Probamos que una función φ es un multiplicador para series de Dirichlet si y sólo si su imagen por la transformada de Bohr es un multiplicador para los espacios de funciones, podemos desplazarnos de un espacio a otro y utilizar las herramientas más convenientes. De esta manera estudiamos propiedades de los operadores de multiplicación, por ejemplo, damos estimaciones de la norma esencial en términos del multiplicador, damos condiciones para que el rango sea cerrado y estudiamos el espectro en términos de la imagen del operador.

Otros de los operadores que estudiamos son los operadores de composición. El estudio de estos operadores comienza ha mediados de los 60 con el trabajo de Nordgren [Nor68]. En este, Nordgren estudia para ciertas funciones φ, definidas en T de modo tal que $|\varphi(w)| = 1$ para casi todo w, el operador $C_\varphi : L_2(\mathsf{T}, \mu) \to L_2(\mathsf{T}, \mu)$ dado por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. Al igual que los operadores de multiplicación, el estudio de los operadores de composición evolucionó a estudiar este tipo de operadores en distintos espacios de funciones, siendo tal vez los más importantes los definidos en los espacios de Hardy $H_p(\mathsf{D})$ (ver por ejemplo [Sha12] y [CJM95]). Los principales resultados, tanto en una como en varias variables, relacionan la continuidad, compacidad y otras características del operador C_φ con el comportamiento geométrico y analítico de la función φ.

En 1999 Gordon y Hedenmalm estudian las funciones φ que definen operadores de composición pero ahora en el espacio de series de Dirichlet $\mathcal{H}_2$ (ver [GH99]). A partir de esta caracterización, en [Bay02] Bayart estudia las funciones que definen operadores de composición en los restantes $\mathcal{H}_p$ y algunas de sus características. Posteriormente, en [Bon18], Bonet extiende este estudio al espacio $\mathcal{H}_+^\infty$ caracterizando además las condiciones bajo las cuales el operador es continuo y aquellas para las que es acotado.

Continuando con esta línea, realizamos un estudio de los operadores de composición al espacio $\mathcal{H}_+$. Caracterizamos las funciones φ que definen operadores de composición en $\mathcal{H}_+$ y damos condiciones necesarias y suficientes, en términos de la imagen de la función φ, para que el operador sea continuo o acotado.

Inspirados en lo realizado en [BCMG$^+$21], estudiamos las funciones que definen operadores de superposición en $\mathcal{H}_+^\infty$ y en $\mathcal{H}_+$. Utilizamos las equivalencias de las seminormas y herramientas de la teoría de números para probar, a partir del decaimiento de los coeficientes de Taylor, que existen funciones enteras que definen operadores de superposición, pero que no toda función entera lo define. La necesidad de un decaimiento muy rápido de los coeficientes excluye a funciones como las trigonométricas e incluso a la exponencial de aquellas funciones que definen operadores de superposición.

Siguiendo lo realizado por Bonet en [Bon20], también estudiamos los operadores de diferenciación e integración en $\mathcal{H}_+$.

La tesis está organizada en los siguientes cinco capítulos.

El Capítulo 1 contiene las principales definiciones y propiedades de series de Dirichlet ordinarias que vamos a necesitar en los capítulos siguientes. De igual forma, damos las definiciones y propiedades de los espacios de funciones y su conexión con los espacios de Hardy mediante la transformada de Bohr.

En el Capítulo 2 definimos para cada espacio de Hardy $\mathcal{H}_p$ el espacio de series de Dirichlet $\mathcal{H}_+^p$, que se corresponde a $\mathcal{H}_+^\infty$. Vemos que para $1 \leq p < \infty$ estos en realidad son un único espacio de Fréchet $\mathcal{H}_+$. Estudiamos la estructura de este espacio y su conexión con los espacios de funciones holomorfas. Al final del capítulo, vemos un Teorema de Montel para los espacios $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$, que además nos permite obtener una demostración del Teorema de Montel para los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p$, diferente a la realizada por Defant y Schoolmann en [DS19b].

En el Capítulo 3 comenzamos con una primer sección de introducción a las series de Dirichlet generales. Generalizamos los resultados del Capítulo 2 para este tipo de series y para espacios de funciones uniformemente casi periódicas. Probamos que el resultado del Teorema de Montel para los espacios de Hardy no depende de la frecuencia, esto lo hacemos a partir de probar un Teorema de Montel para espacios de funciones uniformemente casi periódicas.

A partir del Capítulo 4 estudiamos operadores en los espacios de series de Dirichlet. Comenzamos caracterizando las funciones φ que definen operadores de multiplicación de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$ para cada $1 \leq p, q \leq \infty$. Estudiamos las propiedades de dichos operadores de multiplicación como su rango y norma esencial en general y los distintos espectro para los operadores de multiplicación que actúan en un mismo espacio $\mathcal{H}_p$.

En el Capítulo 5 analizamos los operadores de composición en el espacio definido en el Capítulo 2. Estudiamos la continuidad y la acotación de este espacio. Analizamos la buena definición de los operadores de superposición (considerados por primera vez para series de Dirichlet en [BCMG+21]) tanto para H_+ como para H_+^∞. Analizando el decaimiento de los coeficientes de Bohr probamos que hay funciones holomorfas que definen operadores de superposición y otras que no como trigonométricas o la exponencial. Finalmente estudiamos los operadores de integración y diferenciación en H_+.

Por último la tesis cuenta con un Apéndice A. En este damos una síntesis de algunas definiciones y resultados topóligos generales que utilizamos. A pesar de ser resultados conocidos entendemos conveniente que estén incluidos para facilitar la lectura de la misma.

Los resultados de este trabajo forman parte de los siguientes artículos [FVGMSP21], [DFVSSP21], [FVGSP22a] y [FVGSP22b].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Series de Dirichlet ordinarias

Las series de Dirichlet ordinarias, o series de Dirichlet a secas, son unas de las herramientas principales de la teoría analítica de números. En pos de dar una idea del rol importante que juegan en esta área de las matemáticas vamos a realizar un breve recorrido histórico, el cual puede estudiarse con mayor completitud por ejemplo en [AM14] o [HR13], mientras vamos mencionando las propiedades que usaremos a lo largo de la tesis.

El comienzo de las series de Dirichlet bien prodría fijarse en 1737. En este año, Euler da una prueba de la existencia de infinitos números primos, Teorema de Euclides, a partir de métodos analíticos (puede verse por ejemplo en [Eul48]). Para esto demuestra, la hoy conocida como Fórmula del producto de Euler, que para todo número real s mayor a 1 se tiene

$$\prod_{p \quad \mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{1.1}$$

siendo $\mathfrak{p}$ la sucesión de números primos. De este modo, si la cantidad de números primos fuese finita, tendríamos que el lado izquierdo de la igualdad tiende a $\prod_{p \quad \mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$ cuando s tiende a 1. Mientras que el lado derecho converge a la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. A su vez, también probó que si s es mayor a 1 entonces

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{p \quad \mathfrak{p}} \frac{1}{p^s} + O(1). \tag{1.2}$$

Es decir, que existe una constante $C > 0$, que no depende de s, tal que $\left|\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) - \sum_{p \quad \mathfrak{p}} \frac{1}{p^s}\right| \leq C$. En particular, esto nos dice que $\sum_{p \quad \mathfrak{p}} \frac{1}{p} = \infty$ y por lo tanto se puede deducir que la distribución de los números primos en los naturales es más densa que, por ejemplo, la sucesión n^2.

Cien años más tarde, ya en 1837, Dirichlet profundiza el estudio de la distribución de los números primos, probando que si a y d son coprimos positivos entonces se pueden encontrar infinitos números primos en el conjunto $\{a + dn : n \quad \mathbb{N}\}$. O dicho de otra forma, que existen infinitos números primos congruentes a a módulo d, siempre que a y d sean coprimos. Para llegar a esto, e inspirado por la demostración realizada por Euler (ver [Dir37]), Dirichlet muestra que la serie $\sum_{p \equiv a(d)} \frac{1}{p}$ es divergente. En busca de obtener una igualdad del tipo (1.1), se puede definir la función

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv a(d) \\ 0 \text{ si no,} \end{cases}$$

de modo que el lado izquierdo de la ecuación puede expresarse como $\prod_{p \in \mathfrak{p}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$. Sin embargo, al desarrollar el producto en (1.1) puede verse que una condición necesaria para llegar a una expresión de este tipo es que las función f sea multiplicativa. Este obstáculo es salteado por Dirichlet definiendo los ahora conocidos como caracteres de Dirichlet módulo d. Estos son las funciones $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que verifican que $\chi(n \cdot m) = \chi(n) \cdot \chi(m)$, $\chi(n + d) = \chi(n)$ y siendo $\chi(n) = 0$ si y sólo si el máximo común divisor entre n y d es distinto a 1. Además, para cada caracter χ definió la función a valores reales $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$, notación recién introducida por Landau en 1909 (ver [Lan09]). La Fórmula del producto de Euler para estos casos resulta ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(n)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Llevando esta expresión a una del tipo (1.2), la prueba consiste en probar que $L(s, \chi)$ converge, cuando $s \to 1^+$, a un número distinto de cero. Este es el paso esencial de la prueba y el comienzo de la teoría analítca de números.

En 1859, Riemann retoma la función definida por Euler $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. A diferencia de Euler y Dirichlet, Riemann comienza a estudiarla como una función a variable compleja, definida en el semiplano de los complejos de parte real mayor a 1. En [Rie59], prueba que esta función, conocida como zeta de Riemann, se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y estudia la relación existente entre los ceros de ζ y la distribución de los números primos. A su vez, prueba que $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y formula su famosa conjetura: *Todos los ceros no triviales de ζ tienen parte real* $1/2$.

Las series del tipo $\sum a_n n^{-s}$, que comenzaron a denominarse como series de Dirichlet, se establecieron como una de las principales herramientas en el estudio de la distribución de los números primos en particular y en la teoría de números en general. Al conjunto de todas las series de Dirichlet lo vamos a notar por $\mathbb{D}$. Este conjunto es cerrado bajo la suma, definida por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) n^{-s}$, y el producto por escalares $\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n n^{-s}$.

El estudio de las series de Dirichlet progresó de un análisis como funciones reales a funciones a variable compleja, pero siempre considerando a sus coeficientes a_n como números reales. En los años 1884 y 1888 (ver [Jen84] y [Jen88]), Jensen extiende el estudio de las series de Dirichlet pero considerando ahora tanto coeficientes como variable compleja. Prueba que si una serie $D = \sum a_n n^{-s}$ converge en un complejo $s_0 = \sigma_0 + it_0$ entonces también converge en todo complejo s de parte real mayor a σ_0. Es decir, que converge en el semiplano $\mathbb{C}_{\sigma_0} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$ y más aún, en dicho semiplano define una función holomorfa.

Durante los años $1910 - 1913$, Harald Bohr profundiza el estudió sobre la convergencia de las series de Dirichlet (ver [Boh10], [Boh13a], [Boh13b] y [Boh13c]). Para una serie de Dirichlet D fija, considera el ínfimo sobre todos los números reales σ para los cuales la serie D converge en el semiplano $\mathbb{C}_\sigma$. A este ínfimo lo denomina la abscisa de convergencia de D y formalmente se define como

$$\sigma_c(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge en el semiplano } \mathbb{C}_\sigma\} \in [-\infty, \infty].$$

A partir de esta definición, el resultado de Jensen antes mencionado (que puede verse en [DGMSP19, Teorema 1.1]) afirma lo siguiente

Teorema 1.1.1. *Sea $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet (no divergente en todo punto). Entonces, esta converge en todo el semiplano $\mathbb{C}_{\sigma_c(D)}$. Más aún, la siguiente función límite f de D es holomorfa:*

$$f : \mathbb{C}_{\sigma_c(D)} \to \mathbb{C} \text{ dada por } f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Al igual que la abscisa de convergencia, Bohr también define las abscisas de convergencia uniforme y convergencia absoluta de una serie de Dirichlet D como

$$\sigma_u(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge uniformemente en el semiplano } \mathbb{C}_\sigma\} \in [-\infty, \infty],$$

$$\sigma_a(D) = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty\right\} \in [-\infty, \infty].$$

Las abscisas de una serie de Dirichlet D verifican que $\sigma_c(D) \le \sigma_u(D) \le \sigma_a(D)$. Más aún, se satisfacen las siguientes igualdades

$$\sup_{D \in \mathfrak{D}} \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = \sup_{D \in \mathfrak{D}} \sigma_a(D) - \sigma_c(D) = 1.$$

La prueba es relativamente sencilla. Más complicado resulta determinar el valor exacto de

$$S = \sup_{D \in \mathfrak{D}} \sigma_a(D) - \sigma_u(D).$$

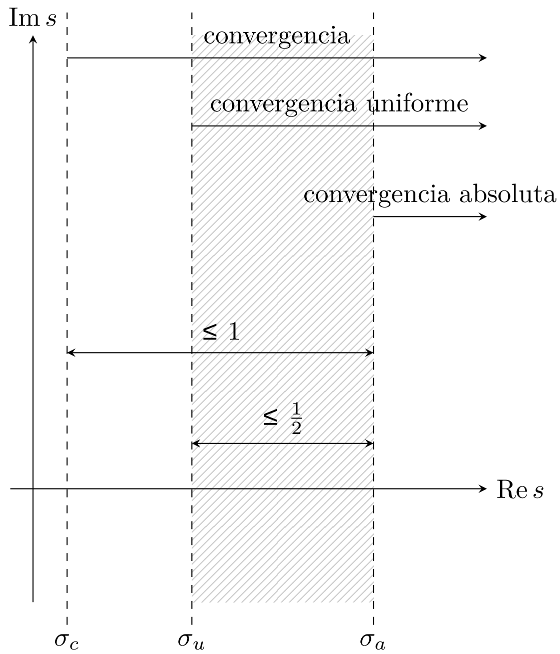
Este problema fue planteado por Bohr en 1913 y es conocido a veces como "el problema de Bohr". Una de las herramientas fundamentales para abordarlo es la abscisa de acotación, que notaremos por $\sigma_b(D)$, y que se define como

$$\sigma_b(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \text{ la función límite de } D \text{ está acotada en } \mathbb{C}_\sigma\} \in [-\infty, \infty].$$

Un resultado trascendental para resolver el problema de Bohr, pero también en el estudio general de las series de Dirichlet, es el Teorema de Bohr. Este afirma que para toda serie de Dirichlet, las abscisas de convergencia uniforme y acotación coinciden.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Bohr)**.** *Sea $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet (no divergente en todo punto). Supongamos que su función límite se extiende a una función f acotada y holomorfa en $\mathbb{C}_0$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge uniformemente en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, esto es, $\sigma_u(D) \le 0$. En particular $\sigma_u(D) = \sigma_b(D)$.*

A partir de esto, Bohr prueba que $0 \le S \le 1/2$ y son Bohnenblust y Hille en 1931 los que prueban finalmente que $S = 1/2$, en un importante resultado conocido como el Teorema de Bohr-Bohnenblust-Hille (ver por ejemplo [DGMSP19, Teorema 4.1]).



A partir de todas estas abscisas de convergencia para las series de Dirichlet, podemos definir una nueva operación (formal y como funciones) en el espacio D, como es el producto.

Observación 1.1.3. Dadas dos series de Dirichlet D y E, con $\sigma_a(D) < \infty$ y $\sigma_a(E) < \infty$, entonces el producto como función entre $D \cdot E$ resulta una serie de Dirichlet.

Para ver esto, simplemente consideremos C_σ un semiplano donde ambas series convergen absolutamente. Luego, por la convergencia absoluta, podemos reordenar los coeficientes por lo que

$$D \cdot E(s) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s}) \cdot (\sum_{j=1}^{\infty} a_j j^{-s}) = \sum_{k,j=1}^{\infty} a_k b_j k^{-s} j^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k \cdot j = n} a_k \cdot b_j) n^{-s}.$$

Siendo entonces $c_n = \sum\limits_{k \cdot j = n} a_k \cdot b_j$ el $n-$ésimo coeficiente de $D \cdot E$.

A finales del siglo XX se comenzó a estudiar las series de Dirichlet desde el punto de vista del análisis funcional, y se consideraron diferentes espacios de series de Dirichlet, que van a ser uno de los objetos centrales en esta tesis. Pasamos ahora a definirlos y recordar algunas propiedades básicas.

1.1.1. Espacios de Hardy de series de Dirichlet

Comencemos con el espacio de Hardy H_∞, definido por Queffélec en [Que95], el cual consistirá en las series de Dirichlet que convergen en el semiplano C_0 y cuya función límite en dicho semiplano está acotada. Junto con la norma $D \ {}_{\mathsf{H}_\infty} = \sup\limits_{s \ \mathsf{C}_0} |D(s)|$ resulta un espacio de Banach (ver [QQ20, Teorema 6.2.1]). Más aún, con el producto definido resulta un álgebra de Banach, es decir que $D \cdot E \quad \mathsf{H}_\infty$ para todas series de Dirichlet $D, E \quad \mathsf{H}_\infty$ y $D \cdot E \ {}_{\mathsf{H}_\infty} \leq \ D \ {}_{\mathsf{H}_\infty} \ E \ {}_{\mathsf{H}_\infty}$. Las series de Dirichlet inversibles en este espacio quedan determinadas por el siguiente resultado (ver [QQ20, Teorema 6.2.1]).

Teorema 1.1.4. *Una serie $D \quad \mathsf{H}_\infty$ es inversible si y solo si existe $\delta > 0$ tal que $|D(s)| \geq \delta$ para todo $s \quad \mathsf{C}_0$*

En [HLS97], Hedenmalm, Lindqvist y Seip definen el espacio de Hardy $\mathcal{H}_2$, como el de todas aquellas series de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Este resulta un espacio vectorial con la suma y producto por escalares, más aún, con el producto interno definido por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ resulta un espacio de Hilbert. Al igual que en el caso de $\mathcal{H}_\infty$, se puede dar una definición del espacio de Hardy $\mathcal{H}_2$ en términos de la funciones límite definidas por la series. Para esto, vamos a considerar los polinomios de Dirichlet, es decir series de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ pero donde la sucesión $(a_n)_n$ es eventualmente nula. Por la definición misma, los polinomios de Dirichlet pertenecen a $\mathcal{H}_2$ y convergen en todo el plano complejo. Luego, dado un polinomio de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ podemos calcular la norma dos sobre el segmento del eje imaginario $[-Ri; Ri]$ con la medida Lebesgue normalizada para cada valor $R > 0$. Calculando esta integral vemos que

$$\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{it}}|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{it}}) \cdot \overline{(\sum_{m=1}^{N} a_m \frac{1}{m^{it}})} \mathrm{d}t = \sum_{n,m=1}^{N} \frac{a_n \overline{a_m}}{2R} \int_{-R}^{R} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + \sum_{n=m} \frac{a_n \cdot \overline{a_m} \sin\left((\log(m) - \log(n))R\right)}{(\log(m) - \log(n))R}.$$

Es decir, para los polinomios de Dirichlet se tiene

$$\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \quad _{\mathcal{H}_2} = \lim_{R \to \infty} \left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{it}}|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

Más aún, como puede verse en [Bay02], si consideramos como norma del espacio de los polinomios de Dirichlet el lado derecho de la igualdad, es decir el límite de la integral, entonces la completación resultante es el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_2$. A partir de esta expresión puede probarse que el espacio de Hardy $\mathcal{H}_\infty$ está incluido en forma continua en $\mathcal{H}_2$ (ver [DGMSP19, Proposición 1.19]).

En [Bay02], Bayart define los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p$ para el resto de los valores $1 \leq p < \infty$. Para dar la definición de estos espacios nuevamente a partir del valor de las funciones límite definidas por las series de Dirichlet, vamos a considerar en primer lugar la norma p para polinomios de Dirichlet. Dado $D = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ un polinomio de Dirichlet, la norma p se define nuevamente como

$$\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \quad _{\mathcal{H}_p} = \lim_{R \to \infty} \left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{it}}|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

Bayart prueba que al considerar la completación del espacio de los polinomios de Dirichlet bajo esta norma $\cdot \ _{\mathcal{H}_p}$, el espacio de funciones que se obtiene resulta ser un espacio de Banach de series de Dirichlet, al que notaremos por $\mathcal{H}_p$. Por la propia definición tenemos la siguiente observación, la cual aislaremos dado que la vamos a utilizar más adelante.

Observación 1.1.5. Para $1 \leq p < \infty$, los polinomios de Dirichlet son densos en $\mathcal{H}_p$.

A su vez, dada la definición de la norma, obtenida a partir de la norma p sobre un conjunto de medida finita, se tienen las inclusiones continuas $\mathcal{H}_q \quad \mathcal{H}_p$ siempre que $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Por la propia definición del espacio tenemos que toda serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_\infty$ converge en $\mathbb{C}_0$, y que este es el mayor semiplano en el que todas las series de Dirichlet en $\mathcal{H}_\infty$ convergen. La situación en $\mathcal{H}_p$ con $1 \leq p < \infty$ es muy diferente. En este caso se tiene que toda serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_p$ converge en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y este es el mayor semiplano en el que todas las series de Dirichlet en el espacio convergen.

Como veremos en la Sección 1.1.5, existe una conexión importante entre las series de Dirichlet y las series de potencias dada por la transformada de Bohr. Esta conexión, a su vez, vincula los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p$ con ciertos espacios de funciones. Para ver esto, vamos a comenzar por definir los espacios de Hardy de funciones holomorfas en el polidisco.

1.1.2. Funciones holomorfas en el polidisco

Vamos a notar por $\mathbb{D}^N = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \dots$ al producto cartesiano de N copias del disco unitario abierto $\mathbb{D}$, con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, y por $\mathbb{D}_p^\infty$ al dominio en ℓ_p definido como $\ell_p \cap \mathbb{D}^\infty$ (Para mantener una coherencia en la notación, algunas veces notaremos por $\mathbb{D}_p^N$ a $\mathbb{D}^N$, incluso en el caso en que $N \in \mathbb{N}$). Dada una suceción eventualmente nula de números no negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, \dots)$ y una tira de variables $z = (z_1, \dots, z_n, \dots)$ se define z^α como el producto finito $z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdots z_N^{\alpha_N}$, y al factorial de α como $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!$. Al conjunto de las sucesiones eventualmente nulas de números no negativos las vamos a notar por $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, siendo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Cuando utilicemos la notación $\mathbb{N}_0^N$ nos vamos a estar refiriendo a $\mathbb{N}_0^N$ si $N \in \mathbb{N}$ o a $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ si $N = \infty$. Por último, B_{c_0} será la bola unitaria, con la norma infinito, del espacio c_0 formado por las sucesiones convergentes a cero.

Una función $f : \mathbb{D}_2^\infty \to \mathbb{C}$ es holomorfa si es diferenciable Fréchet en cada $z \in \mathbb{D}_2^\infty$, esto es, si existe un funcional lineal continuo x^* sobre ℓ_2 tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - x^*(h)}{\|h\|} = 0.$$

El espacio de Hardy $H_\infty(B_{c_0})$ será el espacio de todas las funciones holomorfas y acotadas $f : B_{c_0} \to \mathbb{C}$ (siendo la definición de funciones holomorfas en B_{c_0} la misma que en $\mathbb{D}_2^\infty$). Señalamos que, de acuerdo con [DGMSP19, Teorema 11.2], este espacio es isometricamente isomorfo a $H_\infty(\mathbb{D}_2^\infty)$, el espacio de las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}_2^\infty$.

Para $1 \leq p < \infty$, vamos a considerar los espacios de Hardy de funciones holomorfas en el dominio $\mathbb{D}_2^\infty$ definidos por

$$H_p(\mathbb{D}_2^\infty) := \{ f : \mathbb{D}_2^\infty \to \mathbb{C} : \ f \text{ es holomorfa y}$$

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{D}_2^\infty)} := \sup_{M \in \mathbb{N}} \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^M} |f(r\omega, 0)|^p \mathrm{d}\omega \right)^{1/p} < \infty \}.$$

Las definiciones de $H_\infty(\mathbb{D}^N)$ y $H_p(\mathbb{D}^N)$ para $N \in \mathbb{N}$ son análogas. En el primer caso se toman las funciones holomorfas y acotadas sobre $\mathbb{D}^N$ con la norma infinito. Mientras que en el segundo las funciones holomorfas en el mismo dominio, pero donde

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} := \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^N} |f(r\omega)|^p \mathrm{d}\omega \right)^{1/p} < \infty.$$

Dado $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, cada función $f \in H_p(\mathbb{D}_2^N)$ define una única familia de coeficientes $c_\alpha(f) = \frac{(\partial^\alpha f)(0)}{\alpha!}$ (los coeficientes de Cauchy) con $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, teniendo siempre solo finitas coordenadas no nulas. Dada f en algún espacio de Hardy y $z \in \mathbb{D}_2^N$, la evaluación de f en z viene dada por la siguiente expresión (ver [DGMSP19, Teorema 13.2] para el caso $p < \infty$ y [DGMSP19, Teorema 10.1] para el caso $p = \infty$

observando que si $z \quad \mathsf{D}_2^{\infty}$, entonces cumple las condiciones en el teorema)

$$f(z) = \sum_{\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} c_\alpha(f) \cdot z^\alpha.$$

Notemos que para cada $N \quad \mathsf{N}$ fijo y $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que $H_p(\mathsf{D}^N) \hookrightarrow H_p(\mathsf{D}_2^{\infty})$ considerando $f \quad [z = (z_n)_n \quad \mathsf{D}_2^{\infty} \quad f(z_1, \ldots z_N)]$. Inversamente, si $f \quad H_p(\mathsf{D}_2^{\infty})$ y $N \quad \mathsf{N}$, podemos definir $f_N(z_1, \ldots, z_N) = f(z_1, \ldots, z_N, 0, 0, \ldots)$, para cada $(z_1, \ldots, z_N) \quad \mathsf{D}^N$, cumpliendo esta función que $f_N \quad H_p(\mathsf{D}^N)$.

Una propiedad importante para nuestro propósito es la llamada desigualdad de Cole-Gamelin (ver por ejemplo [DGMSP19, Observación 13.14 y Teorema 13.15]), la cual establece que para toda función $f \quad H_p(\mathsf{D}_2^N)$ y $z \quad \mathsf{D}_2^N$, con $N \quad \mathsf{N} \quad \{\infty\}$, se tiene

$$|f(z)| \leq \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1 - |z_j|^2} \right)^{1/p} \quad f \quad _{H_p(\mathsf{D}_2^N)}. \tag{1.3}$$

Para funciones de finitas variables, esta desigualdad es óptima, en el sentido de que si $N \quad \mathsf{N}$ y $z \quad \mathsf{D}^N$, entonces la función $f_z \quad H_p(\mathsf{D}_2^N)$ dada por

$$f_z(u) = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1 - |z_j|^2}{(1 - \overline{z}_j u_j)^2} \right)^{1/p}, \tag{1.4}$$

satisface que $\quad f_z \quad _{H_p(\mathsf{D}_2^N)} = 1$ y $|f_z(z)| = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1 - |z_j|^2} \right)^{1/p}$.

1.1.3. Funciones en el politoro

Otros de los espacios que serán de nuestro interés, por su relación con las series de Dirichlet, son los espacios de Hardy de funciones definidas en el politoro $\mathsf{T}^{\infty} = \{\omega = (\omega_n)_n : |\omega_n| = 1, \text{ para todo } n\}$. Sobre este grupo, vamos a considerar el producto de las medidas de Lebesgue normalizada en el toro unidimensional T (observemos que esto es la medida de Haar en el grupo compacto abeliano T^{∞}). Sea $\mathsf{Z}^{(\mathsf{N})}$ el conjunto de sucesiones eventualmente nulas con coordenadas enteras. Dada $F \quad L_1(\mathsf{T}^{\infty})$ y $\alpha \quad \mathsf{Z}^{(\mathsf{N})}$, el coeficiente de Fourier $\alpha-$ésimo de F se define como

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathsf{T}^N} f(\omega) \cdot \overline{\omega}^\alpha \mathrm{d}\omega$$

donde nuevamente $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_M^{\alpha_M}$ si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M, 0, 0, 0, \ldots)$. El espacio de Hardy en el politoro $H_p(\mathsf{T}^{\infty})$, es el subespacio de $L_p(\mathsf{T}^{\infty})$ dado por todas las funciones F tales que $\hat{F}(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \quad \mathsf{Z}^{(\mathsf{N})} \setminus \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$. Si $N \quad \mathsf{N}$, la definición de $H_p(\mathsf{T}^N)$ como subespacio de $L_p(\mathsf{T}^N)$ es análoga (estos resultan ser los espacios de Hardy clásicos, ver por ejemplo [Rud62]). Dados estos espacios, se tiene la inclusión canónica $H_p(\mathsf{T}^N) \hookrightarrow H_p(\mathsf{T}^{\infty})$ considerando $F \quad [\omega = (\omega_n)_n \quad \mathsf{T}^{\infty} \quad F(\omega_1, \ldots \omega_N)]$.

En el caso de las funciones en el polidisco, pasar de un espacio de Hardy de dimensión N a otro de dimensión más chica M se conseguía a partir de considerar solo las primeras M variables y completar el resto con cero. En el caso del politoro esto resulta un poco más complejo. Para realizar esto, fijados $1 \leq N_1 < N_2 \leq \infty$ y una función $F \quad H_p(\mathsf{T}^{N_2})$ vamos a considerar la función F_{N_1}, definida por $F_{N_1}(\omega) = \int_{\mathsf{T}^{N_2 - N_1}} F(\omega, u) \mathrm{d}u$ para todo $\omega \quad \mathsf{T}^{N_1}$, la cual pertenece a $H_p(\mathsf{T}^{N_1})$. Más aún, los coeficientes de Fourier de ambas funciones coinciden: es decir, dados $\alpha \quad \mathsf{N}_0^{N_1}$ entonces

$$\hat{F}_{N_1}(\alpha) = \hat{F}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N_1}, 0, 0, \ldots).$$

Además, se verifica

$$F \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^{N_2})} \geq \quad F_{N_1} \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^{N_1})}.$$

Estas funciones F_N resultan convergentes a la función original F, como expresamos en la siguiente observación

Observación 1.1.6. Sea $F \quad H_p(\mathsf{T}^\infty)$. Si $1 \leq p < \infty$, Entonces $F_N \to F$ in $H_p(\mathsf{T}^\infty)$ (ver por ejemplo [DGMSP19, Observación 5.8]). Si $p = \infty$, la convergencia está dada en la topología débil $w(L_\infty, L_1)$. En particular, para cualquier $1 \leq p \leq \infty$, existe una subsucesión $\lim_k F_{N_k}(\omega) = F(\omega)$ para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$ (notar que el caso $p = \infty$ se sigue directamente de la inclusión $H_\infty(\mathsf{T}^\infty) \quad H_2(\mathsf{T}^\infty)$).

Además de poder aproximar a una función F a partir de su “restricción” a finitas variables, nos va a ser útil la aproximación por polinomios. Los siguientes dos resultados hacen referencia a esto. El primero en los espacios de Hardy $H_p(\mathsf{T}^\infty)$ (ver por ejemplo [DGMSP19, Teorema 5.18])

Teorema 1.1.7. *Para toda $f \quad H_p(\mathsf{T}^\infty)$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$f \quad \overline{\{\sum_{\alpha \quad F} \hat{f}(\alpha) r^\alpha \omega^\alpha : F \quad \mathsf{N}_0^N \text{ finito}, N \quad \mathsf{N}, r \quad (0,1)^N\}}^{H_p(\mathsf{T}^\infty)}.$$

Para $p = \infty$ el resultado sigue siendo cierto, tomando la clausura en la topología débil $w(L_\infty, L_p)$.

En particular, los polinomios son densos en $H_p(\mathsf{T}^\infty)$ para $1 \leq p < \infty$ y $w(L_\infty, L_p)$−densos en $H_\infty(\mathsf{T}^\infty)$.

El segundo será en los espacios $L_p(\mathsf{T}^N)$, la aproximación será no ya con polinomios, sino con polinomios trigonométricos. Es decir, polinomios del tipo $P = \sum_{\alpha \quad E} a_\alpha z^\alpha$, siendo $E \quad \mathsf{Z}^{(\mathsf{N})}$ un conjunto finito (ver nuevamente [DGMSP19, Teorema 5.17]).

Teorema 1.1.8. *Para toda $f \quad L_p(\mathsf{T}^\infty)$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$f \quad \overline{\{\sum_{\alpha \quad F} \hat{f}(\alpha) r^{|\alpha|} \omega^\alpha : F \quad \mathsf{Z}^N \text{ finito}, N \quad \mathsf{N}, r \quad (0,1)^N\}}^{L_p(\mathsf{T}^\infty)}.$$

Para $p = \infty$ el resultado sigue siendo cierto, tomando la clausura en la topología débil $\omega(L_\infty, L_p)$.

En particular, para toda $f \quad L_1(\mathsf{T}^\infty)$ los coeficientes de Fourier $\hat{f}(\alpha)$ determinan la función unívocamente.

1.1.4. Conexión entre los espacios $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$ y $H_p(\mathsf{T}^\infty)$

Los espacios de Hardy de funciones que hemos presentado están fuertemente conectados. Dado $N \quad \mathsf{N} \quad \{\infty\}$, existe un isomorfismo isométrico entre los espacios $H_p(\mathsf{D}_2^N)$ y $H_p(\mathsf{T}^N)$. Más precisamente, dada una función $f \quad H_p(\mathsf{D}_2^N)$ existe una única función $F \quad H_p(\mathsf{T}^N)$ tal que $c_\alpha(f) = \hat{F}(\alpha)$ para todo α indexada en el conjunto correspondiente y $\quad f \quad {}_{H_p(\mathsf{D}_2^N)} = \quad F \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^N)}$. Si este es el caso, decimos que las funciones f y F están asociadas. En particular, por la unicidad de los coeficientes, f_M y F_M están asociadas para todo $1 \leq M \leq N$. Más aún, la función F resulta ser el límite radial de f en casi todo punto. Para entender esto, vamos a separar en dos casos. Si $N \quad \mathsf{N}$, entonces

$$F(\omega) = \lim_{r \to 1^-} f(r\omega),$$

para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^N$. Si $N = \infty$, no podemos considerar $r\omega$ dado que no pertenece a D_2^∞. Sin embargo, Aleman, Olsen y Saksman en [AOS19, Teorema 1], dan una versión para el caso infinito dimensional

Teorema 1.1.9. *Sean* $f \in H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$, $F \in H_1(\mathsf{T}^\infty)$ *su función asociada y* $f_r(\omega)$ *la función definida en* T^∞ *por*

$$f_r(\omega) = f(r\omega_1, r^2\omega_2, \ldots, r^n\omega_n, \ldots).$$

Entonces $F(\omega) = \lim\limits_{r \to 1} f_r(\omega)$ *para casi todo* $\omega \in \mathsf{T}^\infty$.

Como mencionamos anteriormente, nuestro principal interés en estos espacios radica en su conexión con los espacios de Hardy de series de Dirichlet. Nos concentramos entonces en esta conexión, la cual nuevamente está definida por la transformada de Bohr.

1.1.5. Transformada de Bohr

Cerramos este primer recorrido de las series de Dirichlet dando una de las principales ideas de Bohr, consistente en vincular a las series de Dirichlet con las series de potencias en infinitas variables. Dado que el cardinal de los conjuntos N y $\mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$ es el mismo, existe una biyección entre las series de Dirichlet y las series de potencias en infinitas variables $\sum\limits_{\alpha \in \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} a_\alpha z^\alpha$. Bohr establece una conexión a partir de la descomposición de los números primos que, como veremos, es de una enorme importancia y utilidad en la teoría de las series de Dirichlet. Para definir esta biyección vamos a considerar nuevamente a $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n, \ldots)$ la sucesión de números primos. Si $m \in \mathsf{N}$ y $\mathfrak{p}_N$ es el número primo más grande que divide a m entonces existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathsf{N}_0$ tales que $m = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{p}_N^{\alpha_N}$, es decir, existe un único $\alpha \in \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$ tal que $m = \mathfrak{p}^\alpha$. La biyección, llamada transformada de Bohr y que notaremos por B, está definida por

$$\mathsf{B}\left(\sum_{\alpha \in \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} a_\alpha z^\alpha\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \text{ siendo } a_n = a_\alpha \text{ si y sólo si } n = \mathfrak{p}^\alpha.$$

Como vimos, la conexión entre los espacios de Hardy de funciones en el polidisco o en el politoro viene dada a partir de sus coeficientes de Cauchy, en el primer caso, y de Fourier en el segundo. A su vez, al definir las funciones en estos espacios series de potencias, indexadas en sucesiones eventualmente nulas de números no negativos, tenemos la conexión con las series de Dirichlet. Con esto, dado $1 \leq p \leq \infty$, la transformada de Bohr $\mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^\infty}$ sobre $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$ se define de la siguiente forma:

$$\mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^\infty}(f) = \sum_n a_n n^{-s},$$

donde $a_n = c_\alpha(f)$ si y solo si $n = \mathfrak{p}^\alpha$. Esta restricción de la transformada de Bohr a los espacios de Hardy, resulta ser un isomorfismo isometrico entre los espacios $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$ y $\mathcal{H}_p$ (ver [DGMSP19, Teorema 13.2]).

Teorema 1.1.10. *Dado* $1 \leq p < \infty$, *por medio de la transformada de Bohr, la igualdad*

$$H_p(\mathsf{D}_2^\infty) = \mathcal{H}_p$$

vale isométricamente. Más aún, si $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n n^{-s} = \mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^\infty}(f) \in \mathcal{H}_p$, *entonces para todo* $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$,

$$f\left(\frac{1}{\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{1}{n^s}$$

y

$$\left|\sum_{n=1}^\infty a_n \frac{1}{n^s}\right| \leq \zeta(2\,\mathrm{Re}(s))^{\frac{1}{p}} \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_p}.$$

Podemos notar que este resultado, en particular, nos da la continuidad de la evaluación en el semiplano $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ en los espacios de Hardy H_p.

La inversa de la transformada de Bohr, que va del espacio H_p al espacio $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$, la vamos a notar por $\mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^\infty}$.

Con la misma idea se define la transformada de Bohr $\mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty}$, restricción de B a los espacios de funciones en el politoro $H_p(\mathsf{T}^\infty)$; es decir,

$$\mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty}(F) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde $a_n = \hat{F}(\alpha)$ si y solo si $n = \mathfrak{p}^\alpha$. Nuevamente, esta resulta un isomorfismo isométrico entre los espacios $H_p(\mathsf{T}^\infty)$ y H_p. Notaremos a su inversa por $\mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty}$.

Con el objetivo de mantener la notación lo más clara posible, a lo largo de esta tesis vamos a utilizar letras mayúscula (por ejemplo, F, G, o H) para denotar a las funciones definidas en el politoro T^∞. En cambio, las letras minúsculas (por ejemplo, f, g o h) las utilizaremos para representar a las funciones definidas en el polidisco D_2^∞. Si f y F están asociadas una a la otra, en el sentido de que $c_\alpha(f) = \hat{F}(\alpha)$ para todo α, vamos a escribir $f \quad F$. Con la misma idea, si una función f o F está asociada a partir de la transformada de Bohr a una serie de Dirichlet D, vamos a escribir $f \quad D$ o $F \quad D$.

Criterio de Hilbert

Cerramos esta sección con el criterio de Hilbert para los espacios de Hardy. Este criterio se basa en la biyección que genera la transformada de Bohr, entre las series de Dirichlet y las series de potencias, a partir de la de descomposición en factores primos de los números naturales. Si para un número $n \quad \mathsf{N}$ notamos por $\mathrm{gpd}(n) = \mathfrak{p}_N$ al número primo más grande que lo divide, entonces la pre-imagen por la transformada de Bohr del monomio n^{-s} resulta ser un monomio que depende de las primeras N variables. Por ejemplo, si $n = 15$ entonces $\mathrm{gpd}(15) = 5 = \mathfrak{p}_3$ y $15^{-s} = \mathsf{B}(z_2 \cdot z_3)$, dependiendo solamente de las primeras tres variables. De la misma forma, si $D = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ es una serie de Dirichlet donde sus coeficientes a_n son cero siempre que exista un primo $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_N$ tal que divida a n (es decir, los coeficientes no nulos son solamente los indexados a aquellos naturales que se factorizan por los primeros N números primos), entonces la pre-imagen por la transformada de Bohr de D es una serie de potencias que depende solamente de las primeras N variables.

Esto nos lleva a considerar el espacio de las series de Dirichlet $\mathsf{D}^{(N)}$, las cuales serán aquellas series que tienen indexados sus coeficientes en los primos menores o iguales a $\mathfrak{p}_N$, es decir, $D = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ pertenece a $\mathsf{D}^{(N)}$ si $a_n = 0$ siempre que $\mathfrak{p}_N < \mathrm{gpd}(n)$. De la misma forma, el espacio de Hardy $\mathsf{H}_p^{(N)}$ serán las series de Dirichlet que se encuentran en la intersección $\mathsf{H}_p \cap \mathsf{D}^{(N)}$. Notemos que la imagen de $H_p(\mathsf{D}^N)$ (vista como subespacio de $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$ con la identificación natural antes mencionada) por medio de la transformada de Bohr $\mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^\infty}$ es exactamente el espacio de series de Dirichlet $\mathsf{H}_p^{(N)}$.

Con estas notaciones, para una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_p$ vamos a indicar con $D|_N$ a la serie de Dirchlet definida por $D|_N = \sum\limits_{\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} a_n n^{-s}$. Es decir, será la serie de Dirichlet cuyo coeficiente $n-$ésimo coincide con el de D siempre que $\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N$ y cero en caso contrario. El criterio de Hilbert para los espacios de Hardy H_p determina la pertenencia de una serie de Dirichlet a H_p a partir de la pertenencia de sus "proyecciones" $D|_N$ a cada espacio $\mathsf{H}_p^{(N)}$ (ver [DGMSP19, Corolario 13.9] para una demostración).

Proposición 1.1.11. *Sea $D = \sum a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $D \quad \mathsf{H}_p$ si y solo si $D|_N \quad \mathsf{H}_p^{(N)}$ para todo N y $\sup\limits_N \quad D|_N \quad _{\mathsf{H}_p^{(N)}} < \infty$. Más aún, este supremo es la norma $\quad D \quad _{\mathsf{H}_p}$.*

Capítulo 2

Espacio de Hardy de series de Dirichlet trasladadas

Como hemos mencionado, el espacio de Banach de series de Dirichlet $\mathcal{H}_\infty$ está formado por aquellas series de Dirichlet que definen funciones holomorfas y acotadas en el semiplano de los reales positivos. Es decir, aquellas series $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ tales que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{s \in \mathbb{C}_0} |D(s)| < \infty.$$

En particular, toda serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_\infty$ verifica que su abscisa de acotación, y por ende su abscisa de convergencia uniforme, es menor o igual a cero. Esta condición resulta necesaria pero no suficiente, como puede verse con la serie $(1-2^{-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n^{-s}$ (ver por ejemplo [QQ20, Página 140]). El hecho de que $D \notin \mathcal{H}_\infty$ es una consecuencia de la desigualdad de Bohr, en donde se prueba que si $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ pertenece a $\mathcal{H}_\infty$ entonces $\sum_{p \in \mathbb{P}} |a_p| \leq \|D\|_{\mathcal{H}_\infty}$ (ver nuevamente [QQ20, Teorema 6.2.4]). En el caso de $(1-2^{-s})\zeta(s)$ se tiene que $\sum_{p \in \mathbb{P}} |a_p| = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$, mientras que $\sigma_b((1-2^{-s})\zeta(s)) \leq 0$ dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} < \infty$ si y sólo si $\sigma > 0$ y por lo tanto $\sigma_a((1-2^{-s})\zeta(s)) = 0$. Esta situación lleva a Bonet, en [Bon18], a definir un nuevo espacio de series de Dirichlet, al cual nota por $\mathcal{H}_+^\infty$, y que está conformado por todas aquellas series de Dirichlet D para las cuales $\sigma_b(D) \leq 0$. Es decir, por todas las series de Dirichlet que convergen en el semiplano de los complejos de parte real positiva y verifican

$$\sup_{s \in \mathbb{C}_\varepsilon} |D(s)| < \infty \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Por lo mencionado anteriormente este espacio contiene a $\mathcal{H}_\infty$ y, más aún, esta contención resulta continua si dotamos a $\mathcal{H}_+^\infty$ con su topología natural, es decir, la definida por las seminormas

$$\rho_\varepsilon(D) = \sup_{s \in \mathbb{C}_\varepsilon} |D(s)|.$$

Un resultado fundamental en la teoría es la versión Bayart del Teorema de Montel para series de Dirichlet [Bay02, Lema 18]: si $(D_n)_n$ es una sucesión acotada en $\mathcal{H}_\infty$, entonces tiene una subsucesión que converge a una serie $D \in \mathcal{H}_\infty$ uniformemente en cada semiplano $\mathbb{C}_\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Observemos que esto puede reformularse como que la subsucesión converge en $\mathcal{H}_+^\infty$ (y, de hecho, ésta fue una de las motivaciones de Bonet para considerar el espacio). En [Bon18, Teorema 2.2], Bonet prueba que $\mathcal{H}_+^\infty$ es un espacio de Fréchet-Schwartz, no nuclear y para el cual los monomios n^{-s} forman una base de Schauder (ver el Apéndice A para todas estas definiciones). Nuestro objetivo en este capítulo es definir un espacio análogo a partir de los restantes espacios de Hardy H_p para $1 \leq p < \infty$.

2.1. Espacio H_+

Con el objetivo de definir los correspondientes espacios H_+^p, vamos a realizar un cambio de enfoque en la abscisa de acotación, relacionándola con traslaciones de las series de Dirichlet y el espacio H_∞. Observemos que si $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ y $\sigma \in \mathsf{R}$ se tiene que

$$\sup_{s \in \mathsf{C}_\sigma} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right| = \sup_{s \in \mathsf{C}_0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(s+\sigma)} \right| = \sup_{s \in \mathsf{C}_0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s} \right|. \tag{2.1}$$

Luego, si definimos la serie de Dirichlet trasladada en σ por $D_\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s}$, se tiene que si D_{σ_0} pertenece a H_∞ entonces $D_\sigma \in \mathsf{H}_\infty$ para todo $\sigma > \sigma_0$, lo que induce a la definición de la abscisa $\sigma_{\mathsf{H}_\infty}$ dada por

$$\sigma_{\mathsf{H}_\infty}(D) = \inf\{\sigma \in \mathsf{R} : D_\sigma \in \mathsf{H}_\infty\} \in [-\infty, \infty].$$

Claramente esta abscisa coincide con σ_b. Entonces podemos reformular el espacio de la siguiente manera:

$$\mathsf{H}_\infty = \{D \in \mathsf{D} : \sigma_{\mathsf{H}_\infty(D)} \leq 0 \text{ y } \|D\|_{\mathsf{H}_\infty} = \sup_{\varepsilon > 0} \|D_\varepsilon\|_{\mathsf{H}_\infty} < \infty\},$$

y del mismo modo

$$\mathsf{H}_+^\infty = \{D \in \mathsf{D} : \sigma_{\mathsf{H}_\infty}(D) \leq 0\}.$$

Esta construcción casi trivial de H_∞ a partir de su propia abscisa se puede repetir, ya de una forma menos obvia, con los espacios de Hardy H_p para cada $1 \leq p < \infty$. Como puede verse en [CDSP14] y [Bay02], dada una serie $D \in \mathsf{D}$, si $D_{\sigma_0} \in \mathsf{H}_p$ entonces $D_\sigma \in \mathsf{H}_p$ para todo $\sigma > \sigma_0$. Con esto nuevamente queda definida la abscisa σ_{H_p} como

$$\sigma_{\mathsf{H}_p}(D) = \inf\{\sigma \in \mathsf{R} : D_\sigma \in \mathsf{H}_p\} \in [-\infty, \infty].$$

Más aún, por [DGMSP19, Teorema 11.21] se tiene que H_p puede describirse como

$$\mathsf{H}_p = \{D \in \mathsf{D} : \sigma_{\mathsf{H}_p(D)} \leq 0 \text{ y } \|D\|_{\mathsf{H}_p} = \sup_{\varepsilon > 0} \|D_\varepsilon\|_{\mathsf{H}_p} < \infty\}.$$

Resulta entonces natural definir, para cada $1 \leq p < \infty$, el espacio H_+^p de la forma

$$\mathsf{H}_+^p := \left\{D \in \mathsf{D} : \sigma_{\mathsf{H}_p}(D) \leq 0\right\}.$$

Cada uno de estos espacios vectoriales contiene al H_p correspondiente y la inclusión es continua si los dotamos respectivamente con las topologías dadas por las seminormas

$$\rho_{p,\sigma}(D) = \|D_\sigma\|_{\mathsf{H}_p}.$$

Estos espacios topológicos, que en principio podríamos suponer diferentes entre sí siendo que están definidos a partir de distintos espacios de Hardy, resultan ser el mismo. Para ver esto, vamos a comenzar por probar que $(\mathsf{H}_+^p, \{\rho_{p,\sigma}\}_{\sigma>0})$ resulta un espacio de Fréchet para cada $1 \leq p < \infty$. Que es un espacio pre-Fréchet, es decir que podemos extraer una familia numerable de seminormas que generen la misma topología, es consecuencia de [DGMSP19, Proposición 11.20]. Esta afirma que si $D \in \mathsf{H}_p$ y tenemos dos números positivos $0 < \tilde{\sigma} < \sigma$ entonces $\|D_\sigma\|_{\mathcal{H}_p} \leq \|D_{\tilde{\sigma}}\|_{\mathcal{H}_p} \leq \|D\|_{\mathcal{H}_p}$. Luego, si $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_+^p$ y $0 < \tilde{\sigma} < \sigma$, tomando $\varepsilon = \sigma - \tilde{\sigma} > 0$ obtenemos que

$$\rho(D)_{p,\sigma} = \|D_\sigma\|_{\mathcal{H}_p} = \|D_{\varepsilon+\tilde{\sigma}}\|_{\mathcal{H}_p} = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\tilde{\sigma}}} \frac{1}{n^{\varepsilon}} n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p} = \|(D_{\tilde{\sigma}})_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_p} \leq \|D_{\tilde{\sigma}}\|_{\mathcal{H}_p} = \rho_{p,\tilde{\sigma}}(D),$$

donde en la última desigualdad estamos usando el resultado antes mencionado y que $D_{\tilde{\sigma}} \in \mathcal{H}_p$ por definición. Como consecuencia, al ser una familia creciente de seminormas, podemos reemplazar $\{\rho_{p,\sigma}\}_{\sigma>0}$ por la sucesión de seminormas $\{\rho_{p,\sigma_k}\}_k$, siendo $\sigma_k = \frac{1}{k}$. Por comodidad vamos a notar por $\|\cdot\|_{p,k} = \rho_{p,1/k}$ y para simplificar la notación, para $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ vamos a indicar por D_k a la serie trasladada en $1/k$. Es decir, en el caso puntual en que $k \in \mathbb{N}$ utilizaremos D_k para notar a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s}$, mientras que en el caso general de $\sigma > 0$ indicaremos por D_σ a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma}} n^{-s}$.

Proposición 2.1.1. *Para cada* $1 \leq p < \infty$ *el espacio* $\mathcal{H}_+^p$ *es de Fréchet.*

Demostración. Debemos ver que $\mathcal{H}_+^p$ es completo para cada $1 \leq p < \infty$. Para esto, observemos que de la isometría existente entre los espacios $\mathcal{H}_p$ y $H_p(\mathbb{T}^\infty)$ dada por la transformada de Bohr $\mathcal{B}_{\mathbb{T}^\infty}$, comentada en el Capítulo 1, y de la identificación de los coeficientes, se tiene que si $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p$ entonces

$$|a_n| \leq \|D\|_{\mathcal{H}_p} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular, si $(D^N)_N \subseteq \mathcal{H}_p$ es una sucesión que converge a $D \in \mathcal{H}_p$ entonces $a_n(D^N) \to a_n(D)$ para todo n, siendo $a_n(D^N)$ y $a_n(D)$ el coeficiente n-ésimo de D^N y D respectivamente. Sea $1 \leq p < \infty$ y consideremos $(D^N)_N$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_+^p$, luego $(D^N)_N$ es de Cauchy en cada seminorma $\|\cdot\|_{p,k}$ y por lo tanto $(D_k^N)_k$ es de Cauchy en $\mathcal{H}_p$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $(b_n(k))_n$ tal que $\frac{a_n(D^N)}{n^{1/k}} \to b_n(k)$ cuando $N \to \infty$, luego $a_n(D^N) \to b_n(k)n^{1/k}$ y por ende $b_n(k)n^{1/k} = b_n(j)n^{1/j}$ para todo $k, j \in \mathbb{N}$. Definimos los coeficientes $b_n = b_n(k)n^{1/k}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la serie de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$. Veamos para acabar que D pertenece a $\mathcal{H}_+^p$ y es el límite de $(D^N)_N$. Sea $k \in \mathbb{N}$, la serie D_k resulta ser

$$D_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1/k}} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(k) n^{-s} = \lim_{N \to \infty} D_k^N \text{ en } \mathcal{H}_p,$$

por lo tanto $D_k \in \mathcal{H}_p$ y como esto vale para todo natural k entonces $D \in \mathcal{H}_+^p$, deduciéndose de lo mismo que $\|D - D^N\|_{p,k} \to 0$ para todo k. De donde concluimos que $\mathcal{H}_+^p$ es completo y por lo tanto Fréchet. $\square$

Notemos que si $1 \leq p \leq q < \infty$, la inclusión $\mathcal{H}_q \subseteq \mathcal{H}_p$ nos da que $\sigma_{\mathcal{H}_p} \leq \sigma_{\mathcal{H}_q}$. Por otro lado, [DGMSP19, Teorema 12.9] nos da la desigualdad contraria. Así pues, tenemos

$$\sigma_{\mathcal{H}_p} = \sigma_{\mathcal{H}_q}$$

para toda serie de Dirichlet. Como consecuencia inmediata $\mathcal{H}_+^p = \mathcal{H}_+^q$ (como conjuntos) para $1 \leq p \leq q < \infty$. Ahora bien, como la inclusión $\mathcal{H}_q \hookrightarrow \mathcal{H}_p$ es continua, la inclusión $\mathcal{H}_+^q \hookrightarrow \mathcal{H}_+^p$ (entre espacios de Fréchet) también lo es. Una aplicación directa del Teorema de la Función Abierta nos da que de hecho los espacios son isomorfos (como espacios de Fréchet). Es decir:

$$\mathcal{H}_+^p = \mathcal{H}_+^q$$

para $1 \leq p \leq q < \infty$. Estamos, pues, tratando con un único espacio que denotaremos

$$\mathcal{H}_+$$

y cuya topología puede definirse por las diferentes familias de seminormas $\{\|\cdot\|_{p,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. En la siguiente proposición mostramos como se relacionan estas seminormas una con otra.

Proposición 2.1.2. *Para todo* $1 \leq p \leq q < \infty$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $C_{k,p,q} > 1$ *tal que*

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big\|_{p,k} \leq \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big\|_{q,k} \leq C_{k,p,q}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big\|_{p,2k}, \tag{2.2}$$

para toda serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_+$.

Para demostrar este resultado vamos a utilizar la conexión existente entre los espacios de Hardy de series de Dirichlet y los espacios $H_p(\mathbb{T}^\infty)$. Comencemos por observar que dado $0 < r < 1$ y un polinomio en una variable $P = \sum_{n=0}^{N} b_n \omega^n$, entonces

$$\sup_{\omega \in \mathbb{T}} \Big|\sum_{n=0}^{N} b_n (r\omega)^n\Big| \leq \sum_{n=0}^{N} |b_n| r^n \leq \frac{1}{1-r}\|P\|_{H_p(\mathbb{T})}, \tag{2.3}$$

usando que $|b_n| \leq \|P\|_{H_p(\mathbb{T})}$. A partir de la densidad de los polinomios, podemos extender (2.3) a $H_p(\mathbb{T})$ y así obtener, para cada $0 < r < 1$ y $1 \leq p, q < \infty$, un operador acotado

$$T_r : H_p(\mathbb{T}) \to H_\infty(\mathbb{T}) \hookrightarrow H_q(\mathbb{T}).$$

Como puede verse en [DGMSP19, Proposición 8.11], su norma es menor o igual a 1 si $r \leq \sqrt{\frac{p}{q}}$ y menor o igual a $\frac{1}{1-r}$ en caso contrario, además $T_r(\sum_{n=0}^{N} b_n \omega^n) = \sum_{n=0}^{N} b_n (r\omega)^n$ para todo polinomio. Tenemos lo siguiente (ver [DGMSP19, Proposición 12.10] y [Bay02]))

Proposición 2.1.3. *Sean* $1 \leq p < q < \infty$ *y* $r = (r_n)$ *una sucesión en el intervalo* $(0,1)$ *tal que los operadores* $T_{r_n} : H_p(\mathbb{T}) \to H_q(\mathbb{T})$ *definidos anteriormente satisfacen que* $\sup_n \prod_{k=1}^{n} \|T_{r_k}\| < \infty$. *Entonces existe un único operador* $T_r : H_p(\mathbb{T}^\infty) \to H_q(\mathbb{T}^\infty)$ *tal que* $\|T_r\| \leq \sup_n \prod_{k=1}^{n} \|T_{r_k}\|$ *y que* $T_r(\sum_\alpha a_\alpha \omega^\alpha) = \sum_\alpha a_\alpha (r\omega)^\alpha$ *para todo polinomio.*

Con esto podemos ya demostrar la Proposición 2.1.2

Demostración. La primer desigualdad de (2.2) es obvia, por lo tanto solo es necesario probar la segunda desigualdad. La prueba se basa en gran medida en [Bay02, Sección 3] y [DPSP19, Proposición 2.4 y Teorema 2.5] (ver también [DGMSP19, Teorema 12.9]). Antes que nada, fijamos $1 \leq p \leq q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ y tomamos $j_0 = j_0(p,q,k) \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{2k}} < \sqrt{\frac{p}{q}}$ para todo $j > j_0$. Observemos que la sucesión $r = (r_j)$ con $r_j = \mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{2k}}$ cumple las hipótesis de la Proposición 2.1.3; entonces existe un único operador

$$T \colon H_p(\mathbb{T}^\infty) \to H_q(\mathbb{T}^\infty)$$

satisfaciendo $T\big(\sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha z^\alpha\big) = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha \big(\mathfrak{p}^{-1/(2k)} z\big)^\alpha$ para todo $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ finito y $\|T\| \leq \prod_{j=1}^{j_0} \frac{1}{1-\mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{2k}}}$. Siguiendo [DPSP19, Teorema 2.5], vamos a considerar $\lambda = (\lambda_n)_n$ con $\lambda_n = \mathfrak{p}^\alpha$ siempre que $n = \mathfrak{p}^\alpha$ y el operador

$M = \mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty} \circ T \circ \mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty} : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$. Por ser $\mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty}$ y $\mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty}$ isometrías, se tiene que M es acotado y $M = T$. Más aún, si $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ es un polinomio de Dirichlet, entonces

$$M\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}\Big) = \mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty} \circ T \circ \mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}\Big) = \mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty} \circ T\Big(\sum_{1 \leq \mathfrak{p}^\alpha \leq N} a_{\mathfrak{p}^\alpha} \omega^\alpha\Big)$$

$$= \mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty}\Big(\sum_{1 \leq \mathfrak{p}^\alpha \leq N} a_{\mathfrak{p}^\alpha} (r\omega)^\alpha\Big) = \mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty}\Big(\sum_{1 \leq \mathfrak{p}^\alpha \leq N} a_{\mathfrak{p}^\alpha} (\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{-1}{2k}} \omega^\alpha\Big) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2k}}} n^{-s}$$

Sea ahora $D = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_p$ y $D^N = \sum a_n^N n^{-s}$ una sucesión de polinomios de Dirichlet que converge a D. Por un lado tenemos que $a_n^N \to a_n$ para todo $n \quad \mathbb{N}$ y por el otro

$$M(D) = \lim_N M(D^N) = \lim_N \sum \frac{a_n^N}{n^{\frac{1}{2k}}} n^{-s},$$

por lo que $a_n(M(D)) = \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2k}}}$, es decir $M\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2k}}} n^{-s}$. Luego

$$D \quad _{q,k} = \Big\| \sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{k}}} n^{-s} \quad _{\mathcal{H}_q} = \quad M(D_{2k}) \quad _{\mathcal{H}_q} \leq \quad M \quad D_{2k} \quad _{\mathcal{H}_p} \leq \Big(\prod_{j=1}^{j_0} \frac{1}{1 - \mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{2k}}}\Big) \quad D \quad _{p,2k}.$$

esto nos da (2.2) lo que completa la prueba. □

Las contenciones entre los diferentes espacios de Hardy de series de Dirichlet queda entonces de la siguiente forma

$$\mathcal{H}_\infty \quad \mathcal{H}_p \quad \mathcal{H}_1 \quad \mathcal{H}_+$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ y

$$\mathcal{H}_\infty \quad \mathcal{H}_+^\infty \quad \mathcal{H}_+ .$$

Una pregunta natural en este punto es si existe alguna relación entre los espacios $\mathcal{H}_p$ y $\mathcal{H}_+^\infty$. Veamos que no es así. Por un lado tomamos la serie $D = \sum a_n n^{-s}$ definida por $a_n = 1$ si $n = 2^j$ para algún $j \quad \mathbb{N}$ y $a_n = 0$ en caso contrario. Notemos que $\sigma_u(D) \leq \sigma_a(D) = 0$, por lo que $\sum a_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_+^\infty$, pero claramente $(a_n)_n \quad \ell_2$ y por lo tanto $\sum a_n n^{-s}$ no pertenece a $\mathcal{H}_2$ (ni a ningún $\mathcal{H}_p$ para $2 \leq p < \infty$). De hecho, $(a_n)_n$ no pertenece a ℓ_r para ningún $1 \leq r < \infty$; luego una aplicación directa de las desigualdades de Haussdorff-Young, que afirma que si $1 \leq p \leq 2$ entonces

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p},$$

siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ (ver por ejemplo [CMSP21, Ecuación (2)]), muestra que $\sum a_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_p$ para ningún $1 < p \leq 2$. El mismo argumento muestra que la serie $\sum b_n n^{-s}$ dada por $b_n = j$ si $n = 2^j$ para $j = 0, 1, 2, \ldots$ y 0 en otro caso, pertenece a $\mathcal{H}_+^\infty$ pero no a $\mathcal{H}_1$. Sumando todo esto,

$$\mathcal{H}_+^\infty \quad \mathcal{H}_p$$

para ningún $1 \leq p < \infty$.

Por otro lado, para un $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ fijo la serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} n^{-s}$ tiene abscisa de convergencia $\sigma_c > \frac{1}{2} - \varepsilon > 0$ y luego no puede pertenecer a $\mathcal{H}_+^\infty$. Sin embargo, es claro que pertenece a $\mathcal{H}_2$ y, dado que se puede ver como la traslación en $\frac{\varepsilon}{2}$ de la serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}} n^{-s}$ (que nuevamente pertenece a $\mathcal{H}_2$), esta pertenece a $\mathcal{H}_p$ para todo $1 \leq p < \infty$. Por lo tanto

$$\mathcal{H}_p \quad \mathcal{H}_+^\infty$$

para ningún $1 \leq p < \infty$.

Observación 2.1.4. Notar que si $D \quad \mathcal{D}$ es una serie de Dirichlet entonces $\sigma_a(D) = \sigma_a(D_\varepsilon) + \varepsilon$; y esto mismo se tiene para cada una de las abscisas que hemos visto. Por lo tanto, el problema de Bohr que comentamos en el Capítulo 1 puede reformularse como calcular $\sup_{D \quad \mathcal{H}_\infty} \sigma_a(D)$. Veamos que ocurre en nuestro caso.

Observemos que si $D \quad \mathcal{H}_+$, entonces $D_\varepsilon \quad \mathcal{H}_2$ para todo $\varepsilon > 0$ y, por [DGMSP19, Observación 1.8 y Teorema 12.11] $\sigma_a(D) = \sigma_a(D_\varepsilon) + \varepsilon \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$. Esto nos dice que $\sigma_a(D) \leq \frac{1}{2}$. Ahora, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} n^{-s}$ está en $\mathcal{H}_+$ y satisface $\sigma_a(D) = \frac{1}{2}$. Luego

$$\sup_{D \quad \mathcal{H}_+} \sigma_a(D) = \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Nuestro objetivo ahora será probar el siguiente resultado, paralelo a [Bon18, Teorema 2.2].

Teorema 2.1.5. *El espacio $\mathcal{H}_+$ es Fréchet-Schwartz, no nuclear, es un álgebra y los monomios de Dirichlet $e_n(s) = n^{-s}$ forman una base de Schauder incondicional, pero no absoluta.*

Recordemos de nuevo que todas las definiciones pueden encontrarse en el Apéndice A.

Antes de continuar, notemos que para $1 \leq p < \infty$ fijo y $k \quad \mathbb{N}$ podemos considerar los siguientes espacios de series de Dirichlet

$$\mathcal{H}_k^p := \left\{ \sum a_n n^{-s} : \sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{k}}} n^{-s} \quad \mathcal{H}^p \right\},$$

que, con la norma $\cdot\ _{p,k}$, es un espacio de Banach. Notemos que $\mathcal{H}_{k+1}^p \quad \mathcal{H}_k^p$, y la inclusión es continua. Luego $\mathcal{H}_+$ es el límite proyectivo de los espacios $\mathcal{H}_k^p$. Notemos que para todo p obtenemos el mismo límite proyectivo, por lo tanto tenemos que

$$\mathcal{H}_+ := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k^2,$$

dotado con la topología del límite proyectivo.

Ya hemos visto que el espacio es de Fréchet. Veamos el resto de las propiedades en una sucesión de lemas.

Lema 2.1.6. *$\mathcal{H}_+$ es un espacio de Schwartz.*

Demostración. El espacio $\mathcal{H}_+$ es Schwartz si las inclusiones

$$\mathrm{id}_k \colon \mathcal{H}_{k+1}^2 \longrightarrow \mathcal{H}_k^2 \tag{2.5}$$

(que, como mencionamos, son continuas) son todas compactas. Esto en el caso de $\mathcal{H}_+^\infty$ se prueba en [Bon18] usando el antes mencionado Teorema de Montel dado por Bayart. En nuestro caso, dada la estructura particular de $\mathcal{H}_+$, es particularmente fácil. Notemos que para cada k, los operadores $\mathcal{H}_{k+1}^2 \to \mathcal{H}_2$ dado por $\sum a_n n^{-s} \to \sum \frac{a_n}{n^{1/(k+1)}} n^{-s}$ y $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_k^2$ dado por $\sum a_n n^{-s} \to \sum a_n n^{1/k} n^{-s}$ son continuos. A su vez, el operador $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ definido por $\sum a_n n^{-s} \to \sum a_n \frac{n^{1/(k+1)}}{n^{1/k}} n^{-s}$ es compacto (todo operador diagonal de ℓ_2 en ℓ_2 con la sucesión que lo define tendiendo a 0 es compacto [DJT95, Página 412]). La inclusión $\mathcal{H}_{k+1}^2 \hookrightarrow \mathcal{H}_k^2$ es la composición de estos tres operadores y es, por lo tanto, compacta. $\square$

Esto nos da la primer afirmación del Teorema 2.1.5, es decir que $\mathcal{H}_+$ es un espacio de Fréchet-Schwartz (luego Montel y reflexivo, ver por ejemplo [MV97, Observación 24.24]).

Recordemos que una sucesión $\{e_n\}_n$ en un espacio localmente convexo E es una base de Schauder si para todo $x \in E$ existe una única sucesión $(x_n)_n$ de escalares tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Vamos a realizar ahora la prueba de que los monomios $\{n^{-s}\}$ forman una base de Schauder de $\mathcal{H}_+$. Esto ya es sabido para los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p$ para $1 < p < \infty$ [AOS14] y para $\mathcal{H}_+^{\infty}$ [Bon18]. En este caso tenemos incluso que la base es incondicional (esto es, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} e_{\pi(n)}$ converge para toda permutación π de los números naturales.

Lema 2.1.7. *Los monomios de Dirichlet $\{n^{-s}\}$ forman una base de Schauder incondicional de $\mathcal{H}_+$.*

Demostración. Tomemos $\sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_+$ y fijemos $k \in \mathbb{N}$. Dados $N \in \mathbb{N}$ y una permutación π, notemos por F al conjunto $\{\pi(1), \ldots, \pi(N)\}$. Luego

$$\Big\| \sum a_n n^{-s} - \sum_{n=1}^{N} a_{\pi(n)} \pi(n)^{-s} \Big\|_{2,k} = \Big\| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus F} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{k}}} n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2} = \Big(\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus F} \frac{|a_n|^2}{n^{2/k}} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Pero la sucesión $\left(\frac{|a_n|^2}{n^{2/k}}\right)_n$ es absolutamente sumable (ya que $\sum \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s} \in \mathcal{H}_2$), entonces converge incondicionalmente. □

Recordemos que un espacio localmente convexo E es nuclear si para toda seminorma p existe una seminorma q tal que el operador identidad $I : (E, q) \to (E, p)$ es nuclear (ver el Apéndice A). Todo espacio nuclear es Schwartz y admite un sistema fundamental de seminormas de Hilbert (ver [MV97, Corolario 28.5 y Lema 28.1]). El espacio $\mathcal{H}_+$ tiene estas dos propiedades (notar que $\left(\|\cdot\|_{2,k}\right)_k$ es un sistema fundamental de seminormas de Hilbert). Esto lleva naturalmente a preguntarse si el espacio es o no nuclear.

Lema 2.1.8. *El espacio $\mathcal{H}_+$ no es nuclear.*

Demostración. Sabiendo que los monomios de Dirichlet $e_n = s^{-s}$ forman una base de Schauder, el resultado se obtiene de una aplicación directa del criterio de Grothendieck-Pietsch (ver el Teorema A.0.5), dado que ser nuclear equivaldría a que para cada k exista un $m \geq k$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|j^{-s}\|_{2,k} \|j^{-s}\|_{2,m}^{-1} < \infty$. Sin embargo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|j^{-s}\|_{2,k} \|j^{-s}\|_{2,m}^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \|j^{\frac{-1}{k}} j^{-s}\|_{\mathcal{H}_2} \|j^{\frac{-1}{m}} j^{-s}\|_{\mathcal{H}_2}^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{\frac{1}{m} - \frac{1}{k}} = \infty,$$

para cualquier $m \geq k$. □

Observación 2.1.9. Si consideramos $b_{nk} = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$, entonces la matriz $B = (b_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ es una matriz de Köthe (ver el Apéndice A). Además, el espacio

$$\ell_2((b_{n,k})_{n=1}^{\infty}) = \Big\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|x\|_k = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |b_{nk} x_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \Big\},$$

es isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}_k^2$ para cada $k \in \mathbb{N}$, considerando simplemente $\sum a_n n^{-s} \to (a_n)_n$. Luego $\mathcal{H}_+$ es isometricamente isomorfo al límite proyectivo de los espacios $(\ell_2((b_{n,k})_{n=1}^{\infty}))_n$, esto es al espacio de Köthe escalonado $\ell_2(B)$. Es decir que

$$\mathcal{H}_+ = \ell_2(B),$$

como espacios de Fréchet.

Esta observación nos va a permitir probar que los monomios $\{n^{-s}\}$, que como vimos forman una base de Schauder incondicional de $\mathcal{H}_+$, no pueden ser una base absoluta. Comencemos por recordar que una base de Schauder $\{e_n\}_n$ de un espacio localmente convexo E es absoluta si para toda seminorma continua p sobre E existe otra seminorma continua q en E y $C > 0$ tal que

$$\sum_n |x_n| p(e_n) \leq C q(x)$$

para todo $x \in E$.

El [MV97, Lema 27.25] nos dice que, por ser $\mathcal{H}_+$ un espacio de Fréchet y $\{\|\cdot\|_{2,k}\}$ un sistema fundamental de seminormas, si $\{n^{-s}\}$ fuese una base de Schauder absoluta entonces $A = (\|n^{-s}\|_{2,k})_{nk=1}^{\infty}$ debería ser una matriz de Köthe y ser $\mathcal{H}_+$ isomomorfo a $\ell_1(A)$. Pero $\|n^{-s}\|_{2,k} = \frac{1}{n^{1/k}}$ para cada n y cada k, es decir que A es la misma matriz de Köthe B definida en la Observación 2.1.9. Esto nos daría que $\ell_1(A) = \ell_2(A)$. Sin embargo, la [MV97, Proposición 28.16] nos dice que esto es posible sí y solo si $\ell_2(A)$ (o lo que es lo mismo $\mathcal{H}_+$) es un espacio nuclear. Luego los monomios no pueden ser una base de Schauder absoluta.

Observación 2.1.10. Recordemos que $\mathcal{H}_+^\infty \subset \mathcal{H}_+$ (como conjuntos) y, por la definición de las seminormas, la inclusión es continua. Más aún, siendo $\mathcal{H}_+^\infty$ un espacio de Fréchet-Schwartz se tiene que es Montel, por lo que la inclusión $\mathcal{H}_+^\infty \hookrightarrow \mathcal{H}_+$ es Montel. Además, dado que en [Bon18, Proposición 2.3] Bonet prueba que $\mathcal{H}_+^\infty$ no es isomorfo a $\ell_2(B)$, contrariamente a lo que ocurre con $\mathcal{H}_+$, se tiene entonces que ambos espacios no son isomorfos.

Finalizamos esta sección probando que, a diferencia de lo que ocurre con los espacios $\mathcal{H}_p$, el espacio $\mathcal{H}_+$ es un álgebra. Antes veamos que convergencia en $\mathcal{H}_+$ implica convergencia en el semiplano $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$.

Observación 2.1.11. Supongamos que $(D^N)_N$ es una sucesión de series de Dirichlet (digamos $D^N = \sum a_n^{(N)} n^{-s}$) en $\mathcal{H}_+$ tal que converge a cierta $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_+$. Dado $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ existe $s_0 \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $s = s_0 + \frac{1}{k}$ luego tenemos que

$$\begin{aligned} |D^N(s) - D(s)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(N)} - a_n| \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n^{(N)} - a_n|}{n^{\frac{1}{2k}}} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s_0) + \frac{1}{2k}}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n^{(N)} - a_n|^2}{n^{\frac{1}{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\operatorname{Re}(s_0) + \frac{1}{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \|D^N - D\|_{2,2k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\operatorname{Re}(s_0) + \frac{1}{k}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

por lo que $D^N(s) \to D(s)$ cuando $N \to \infty$.

Proposición 2.1.12. *El espacio $\mathcal{H}_+$ es un álgebra Fréchet.*

Demostración. Fijemos m y tomemos dos polinomios de Dirichlet P y Q. Entonces PQ es nuevamente un polinomio de Dirichlet y (recordar (2.2))

$$\begin{aligned} \|PQ\|_{2,m} &\leq C_m \|PQ\|_{1,2m} = C_m \|(PQ)_{2m}\|_{\mathcal{H}_1} = C_m \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |P_{2m}(it) Q_{2m}(it)| \mathrm{d}t \\ &\leq C_m \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-T} |P_{2m}(it)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-T}^{T} |Q_{2m}(it)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_m \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |P_{2m}(it)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{R \to \infty} \left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} |Q_{2m}(ir)|^2 \mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_m \|P_{2m}\|_{\mathcal{H}_2} \|Q_{2m}\|_{\mathcal{H}_2} = C_m \|P\|_{2,2m} \|Q\|_{2,2m}. \end{aligned}$$

Tomemos ahora dos series de Dirichlet $D_1, D_2 \in \mathcal{H}_+$ y sean $(P_j)_j$ y $(Q_j)_j$ dos sucesiones de polinomios de Dirichlet que convergen a D_1 y D_2, respectivamente. Nuestro primer paso consiste en probar que $(P_jQ_j)_j$ es una sucesión de Cauchy. Notemos que para cada k podemos encontrar $M_k > 0$ tal que $\|P_j\|_{2,k} \leq M_k$ y $\|Q_j\|_{2,k} \leq M_k$. Con esto a mano inmediatamente tenemos que para cada m

$$\begin{aligned} \|P_jQ_j - P_iQ_i\|_{2,m} &\leq C_m(\|P_j\|_{2,2m}\|Q_j - Q_i\|_{2,2m} + \|P_i - P_j\|_{2,2m}\|Q_i\|_{2,2m}) \\ &\leq C_m M_{2m}(\|Q_j - Q_i\|_{2,2m} + \|P_i - P_j\|_{2,2m}) . \end{aligned}$$

Luego $(P_jQ_j)_j$ es una sucesión de Cauchy y converge a cierto $D \in \mathcal{H}_+$. Dado $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ tenemos que

$$D(s) = \lim_j (P_jQ_j)(s) = \lim_j P_j(s) \lim_j Q_j(s) = D_1(s)D_2(s) ,$$

y esto nos dice que $D_1D_2 \in \mathcal{H}_+$, y un argumento estándar muestra que

$$\|D_1D_2\|_{2,m} \leq C_m M_{2m} \|D_1\|_{2,2m} \|D_2\|_{2,2m} .$$

□

2.2. Conexión con los espacios de funciones holomorfas

Al introducir los espacios de Hardy de series de Dirichlet hemos dedicado parte de dicha introducción a la importante relación existente entre las series de Dirichlet, en particular los espacios de Hardy, y los espacios de Banach de funciones holomorfas en infinitas variables. Nuestro objetivo en esta sección es ver hasta qué punto podemos conectar los nuevos espacios con espacios de funciones holomorfas.

Comencemos por recordar que una función $f : U \to \mathbb{C}$ (donde U es un subconjunto abierto de cierto espacio normado X) se dice holomorfa si es diferenciable Fréchet en cada punto de U (ver preliminares para la definición). Decimos que X es un espacio de sucesiones de Banach si es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^I$ (donde I es un conjunto finito o bien $\mathbb{N}$) dotado con una norma completa y satisfaciendo que, si $x, y \in \mathbb{C}^I$ son tales que $x \in X$ y $|y_i| \leq |x_i|$ para todo i, entonces $y \in X$ y $\|y\| \leq \|x\|$. Un subconjunto abierto $R \subseteq X$ es un dominio de Reinhardt completo si para siempre que $x \in R$ e $y \in \mathbb{C}^I$ verifiquen que $|y_i| \leq |x_i|$ para todo i, se tiene entonces que $y \in R$. Si R es un dominio de Reinhardt completo, entonces toda función holomorfa $f : R \to \mathbb{C}$ define una única familia de coeficientes $\big(c_\alpha(f)\big)_\alpha$ (siendo α perteneciente a $\mathbb{N}_0^I$ si I es finito y a $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ si $I = \mathbb{N}$). En el caso de que I sea finito se tiene entonces que $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha(f) z^\alpha$ para todo $z \in R$, mientras que esto puede no ocurrir si $I = \mathbb{N}$. Se puede encontrar una descripción detallada de estos temas en [DGMSP19, Capítulo 15].

Para N y k escribimos

$$\mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N = \mathfrak{p}_1^{-1/k}\mathbb{D} \times \cdots \times \mathfrak{p}_N^{-1/k}\mathbb{D} = \big\{ z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < \mathfrak{p}_j^{-1/k},\, j = 1, \ldots, N \big\}$$

y definimos $H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N)$ como el espacio de las funciones holomorfas $g : \mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|g\|_{p,k} := \sup_{\substack{0 < r_j < \mathfrak{p}_j^{-1/k} \\ j = 1, \ldots, N}} \left(\int_{\mathbb{T}^N} |g(r_1z_1, \ldots, r_Nz_N)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Como vimos anteriormente, las funciones de N variables se corresponden con las series de Dirichlet que dependen solamente de los primeros N primos. Teniendo esto en cuenta, para cada $N \in \mathbb{N}$ vamos a considerar el subespacio de $\mathcal{H}_k^p$ conformado por aquellas series que dependen solamente de los primeros N primos. Es decir el espacio

$$\mathcal{H}_k^{p,(N)} = \big\{ \textstyle\sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_k^p : a_n = 0 \ \forall\, \mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N \big\} .$$

Proposición 2.2.1. *Para todo* $k, N \quad \mathbb{N}$ *y* $1 \leq p < \infty$ *se tiene que* $\mathcal{H}_k^{p,(N)} = H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N)$ *y, si* $\sum a_n n^{-s}$ *y* g *están relacionadas una con otra, entonces* $a_n = c_\alpha(g)$ *siempre que* $n = \mathfrak{p}^\alpha$*.*

Demostración. Sea $\sum a_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_k^{p,(N)}$, entonces $\sum \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s} \quad \mathcal{H}_p$ y depende solamente de los primeros N primos. Luego existe $f \quad H_p(\mathbb{D}^N)$ tal que $c_\alpha(f) = \frac{a_n}{n^{1/k}}$ siempre que $n = \mathfrak{p}^\alpha$ y

$$f \quad {}_{H_p(\mathbb{D}^N)} = \left\| \sum \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_p} = \left\| \sum a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_k^p}.$$

Definamos ahora la función $g : \mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f\big(\mathfrak{p}_1^{1/k} z_1, \ldots, \mathfrak{p}_N^{1/k} z_N\big)$. Claramente es holomorfa y

$$\sup_{\substack{0<r_j<\mathfrak{p}_j^{-1/k} \\ j=1,\ldots,N}} \left(\int_{\mathbb{T}^N} |g(r_1 z_1, \ldots, r_N z_N)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{0<s_j<1 \\ j=1,\ldots,N}} \left(\int_{\mathbb{T}^N} |f(s_1 z_1, \ldots, s_N z_N)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} = \quad f \quad {}_{H_p(\mathbb{D}^N)}.$$

Luego $g \quad H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N)$ y, más aún,

$$g(z) = f\big(\mathfrak{p}_1^{1/k} z_1, \ldots, \mathfrak{p}_N^{1/k} z_N\big) = \sum_{\alpha \quad \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f)\big(\mathfrak{p}^{1/k} z\big)^\alpha = \sum_{\alpha \quad \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f)\big(\mathfrak{p}^{1/k}\big)^\alpha z^\alpha$$

para todo $z \quad \mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N$. Por la unicidad de los coeficientes,

$$c_\alpha(g) = c_\alpha(f)\big(\mathfrak{p}^{1/k}\big)^\alpha = \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{1/k} = a_n$$

si $n = \mathfrak{p}^\alpha$, y $\mathcal{H}_k^{p,(N)} \hookrightarrow H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N)$.
Por otro lado, dada $g \quad H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathbb{D}^N)$ definimos $a_n = c_\alpha(g)$ para $n = \mathfrak{p}^\alpha$ y consideremos la serie de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$ (notar que $a_n = 0$ si $\mathrm{gpd}(n) > \mathfrak{p}_N$). Esencialmente la misma cuenta que antes nos muestra que la función $f : \mathbb{D}^N \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = g\big(\mathfrak{p}_1^{-1/k} z_1, \ldots, \mathfrak{p}_N^{-1/k} z_N\big)$ pertenece a $H_p(\mathbb{D}^N)$ y $c_\alpha(f) = \frac{c_\alpha(g)}{(\mathfrak{p}^{1/k})^\alpha}$. Luego podemos encontrar una serie $\sum b_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_p$ tal que $b_n = c_\alpha(f) = \frac{c_\alpha(g)}{(\mathfrak{p}^{1/k})^\alpha} = \frac{a_n}{n^{1/k}}$. Esto no dice que $\sum a_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_k^{p,(N)}$ completando la prueba. $\square$

En $H(\mathbb{D}^N)$, el espacio de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{D}^N$ definimos, para cada k y p,

$$\varrho_{k,p}(f) = \left(\int_{\mathbb{T}^N} \left| f\big(\mathfrak{p}_1^{-1/k} z_1, \ldots, \mathfrak{p}_N^{-1/k} z_N\big) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 2.2.2.

$$\mathcal{H}_+^{(N)} := \left\{ \sum a_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_+ : a_n = 0 \quad \mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N \right\} = H(\mathbb{D}^N)$$

y, si f *y* $\sum a_n n^{-s}$ *están asociadas,*

$$\left\| \sum a_n n^{-s} \right\|_{p,k} = \varrho_{k,p}(f)$$

para todo k *y* $1 \leq p < \infty$*.*

Demostración. Fijemos $1 \leq p < \infty$ y sea $\sum a_n n^{-s} \in \mathsf{H}_+^{(N)}$. Entonces, para cada k, la serie de Dirichlet pertenece a $\mathsf{H}_k^{p,(N)}$ y, por la Proposición 2.2.1 podemos encontrar una función $g_k \in H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N)$ tal que $c_\alpha(g_k) = a_n$ para todo $n = \mathfrak{p}^\alpha$. Por la unicidad de los coeficientes fácilmente obtenemos que $g_k\big|_{\mathfrak{p}^{-1/j}\mathsf{D}^N} = g_j$ para $k \geq j$ y, por lo tanto, podemos definir una función holomorfa $f : \mathsf{D}^N \to \mathsf{C}$ de modo tal que $c_\alpha(f) = a_n$. Más aún $\varrho_{k,p}(f) = \|g_k\|_{H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N)} = \left\| \sum a_n n^{-s} \right\|_{p,k}$.
Por otro lado, la restricción de cada función holomorfa $f : \mathsf{D}^N \to \mathsf{C}$ claramente pertenece a $H_p(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N)$ (y su norma es igual a $\varrho_{k,p}(f)$). La Proposición 2.2.1 nos dice que $\sum a_n n^{-s}$ (donde $a_n = c_\alpha(f)$) pertenece a $\mathsf{H}_k^{p,(N)}$ para todo k y, luego a $\mathsf{H}_+^{(N)}$. □

Para obtener el resultado correspondiente a infinitas variables, o bien a las series de Dirichlet sin condiciones en los coeficientes, vamos a necesitar una versión del criterio de Hilbert para el espacio H_+. Enunciamos este criterio para este espacio y para H_+^∞, el cual se deduce de manera simple a partir del criterio para los espacios de Hardy H_2 y H_∞.

Proposición 2.2.3. *Sea E el espacio H_+^∞ o bien H_+ y $\|\cdot\|_k$ denota en cada caso $\|\cdot\|_{\infty,k}$ o $\|\cdot\|_{2,k}$. Entonces $\sum a_n n^{-s} \in E$ si y solo si $\sum_{\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} a_n n^{-s} \in E$ para todo N y $\sup_N \left\| \sum_{\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} a_n n^{-s} \right\|_k < \infty$ para todo k.*

Para cada $1 \leq p < \infty$ definimos el espacio $H_+^p(\mathsf{D}_2^\infty)$ formado por todas aquellas funciones holomorfas $f : \mathsf{D}_2^\infty \to \mathsf{C}$ que satisfacen

$$\sup_N \left(\int_{\mathsf{T}^N} \left| f\left(\mathfrak{p}_1^{-1/k} z_1, \dots, \mathfrak{p}_N^{-1/k} z_N, 0, 0, \dots\right) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.6}$$

para todo k.

Dada $f \in H_+^p(\mathsf{D}_2^\infty)$ podemos considerar los coeficientes $a_n = c_\alpha(f)$ (con $n = \mathfrak{p}^\alpha$) y la serie de Dirichlet $\iota(f) = \sum a_n n^{-s}$. Notemos que la restricción f_N de f a D^N resulta obviamente holomorfa y $\left(\varrho_{k,p}(f_N)\right)_N$ es acotada por el supremo en (2.6). Luego, las Proposiciones 2.2.2 y 2.2.3 nos dicen que $\sum a_n n^{-s} \in \mathsf{H}_+$, y por lo tanto el operador

$$\iota : H_+^p(\mathsf{D}_2^\infty) \to \mathsf{H}_+ \tag{2.7}$$

es una inclusión para todo $1 \leq p < \infty$.

Resulta natural preguntarse si la identificación anterior es de hecho un isomorfismo de espacios de Fréchet. El siguiente ejemplo muestra que este operador no es sobreyectivo.

Ejemplo 2.2.4. La serie de Dirichlet $D = \sum \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}_n}} \mathfrak{p}_n^{-s}$ está en H_+ pero $D \notin \iota(H_+^p(\mathsf{D}_2^\infty))$. Para ver esto, supongamos que existe una función $f \in H_+^p(\mathsf{D}_2^\infty)$ tal que $\iota(f) = D$. Luego, $c_\alpha(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}_n}}$ si $\alpha = e_n$ y $c_\alpha(f) = 0$ en caso contrario.
Definamos ahora la sucesión $z = (z_n)$ como $z_1 = 1/2$, $z_2 = 1/2$ y $z_n = 1/(\sqrt{n\log(n)}\log\log(n))$ para $n \geq 3$. Es fácil ver que z pertenece al conjunto D_2^∞. Para cada $N \in \mathsf{N}$ tenemos que

$$f(z_1, \dots, z_N, 0, 0, \dots) = \sum_{\alpha \in \mathsf{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}_n}} z_n \,.$$

Por otro lado, los truncados $\left((z_1, \dots, z_N, 0, 0, \dots)\right)_N$ claramente convergen (en ℓ_2) a z. Luego, la continuidad y el Teorema de los números primos (es decir que $\lim_{N \to \infty} \frac{\mathfrak{p}_N}{N\log(N)} = 1$) nos dicen que

$$f(z) = \lim_{N \to \infty} f(z_1, \dots, z_N, 0, 0, \dots) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}_n}} z_n \geq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=3}^N \frac{C}{n\log(n)\log\log(n)} = +\infty \,.$$

Esto resulta una contradicción, probando lo afirmado.

La caracterización de H_+ en términos de funciones holomorfas la damos en el Corolario 2.2.6. Pero para llegar a esto necesitamos considerar primero los siguientes espacios de sucesiones ℓ_∞ y ℓ_2 con pesos

$$\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k}) = \left\{ z \quad \mathsf{C}^{\mathsf{N}} \colon \ \ z \ \ _{\infty,\mathfrak{p}^{1/k}} := \sup_n |z_n \mathfrak{p}_n^{1/k}| < \infty \right\}$$

y

$$\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) = \left\{ z \quad \mathsf{C}^{\mathsf{N}} \colon \ \ z \ \ _{2,\mathfrak{p}^{1/k}} := \Big(\sum_n |z_n \mathfrak{p}_n^{1/k}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Ambos son espacios de sucesiones de Banach, y el conjunto $\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})}$ es un dominio de Reinhardt abierto y completo en $\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k})$, y notemos que $\big(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})}\big) \cap \mathsf{C}^N = \mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N$ para todo N. Para cada $1 \leq p < \infty$ definimos $H_p(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})})$ como el espacio de las funciones holomorfas sobre $\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})}$ tales que

$$f \ \ := \sup_N \sup_{\substack{0<r_j<\mathfrak{p}_j^{-1/k} \\ j=1,\dots,N}} \left(\int_{\mathsf{T}^N} \big| f\big(r_1 z_1, \dots, r_N z_N, 0, 0, \dots\big)\big|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Proposición 2.2.5. *Sea* $k \quad \mathsf{N}$*, entonces*

$$\mathsf{H}_k^2 = H_2(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})})$$

como espacios de Banach.

Demostración. Comencemos por tomar una función $f \quad H_2(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})})$, definiendo como siempre $a_n = c_\alpha(f)$ para $n = \mathfrak{p}^\alpha$ y considerando la serie de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$. Fijemos N y definamos f_N como la restricción de f a $\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N$, esta función es holomorfa y satisface que

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{0<r_j<\mathfrak{p}_j^{-1/k} \\ j=1,\dots,N}} \left(\int_{\mathsf{T}^N} \big| f_N\big(r_1 z_1, \dots, r_N z_N\big)\big|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad = \sup_{\substack{0<r_j<\mathfrak{p}_j^{-1/k} \\ j=1,\dots,N}} \left(\int_{\mathsf{T}^N} \big| f\big(r_1 z_1, \dots, r_N z_N, 0, 0, \dots\big)\big|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \ \ f \ \ _{H_2(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})})} < \infty . \end{aligned}$$

Luego $f_N \quad H_2(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N)$ y, por la Proposición 2.2.1, si $b_n = c_\alpha(f_N)$ para todo $n = \mathfrak{p}^\alpha$ con $\alpha \quad \mathsf{N}_0^N$, entonces la serie de Dirichlet $\sum b_n n^{-s}$ pertenece a $\mathsf{H}_k^{2,(N)}$. Pero, dado que $c_\alpha(f_N) = c_\alpha(f)$ para todo α N_0^N, tenemos que $\sum\limits_{\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} a_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_k^{2,(N)}$ para todo N o, en otras palabras, $\sum\limits_{\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s} \quad \mathsf{H}_2^{(N)}$ para todo N. Más aún,

$$\Big\| \sum_{\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_2} = \Big\| \sum_{\mathrm{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_k^2} = \ \ f_N \ \ _{H_2(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N)} \leq \ \ f \ \ _{H_2(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})})} .$$

Con esto, el criterio de Hilbert (ver Proposición 1.1.11) nos dice que $\sum \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s} \quad \mathsf{H}_2$. Luego $\sum a_n n^{-s}$ H_k^2 y además $\ \ \sum a_n n^{-s} \ \ _{2,k} \leq \ \ f \ \ _{H_2(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})})}$.

Tomemos ahora $\sum a_n n^{-s}$ una serie en H_k^2 y definamos $c_\alpha = a_{\mathfrak{p}^\alpha}$ para cada $\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$. Dado z una sucesión en $\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})}$ tenemos que

$$\sum_{\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} |c_\alpha z^\alpha| = \sum_{\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} \frac{|c_\alpha|}{(\mathfrak{p}^{1/k})^\alpha} \big|(\mathfrak{p}^{1/k})^\alpha z^\alpha\big| \leq \Big(\sum_{\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} \frac{|c_\alpha|^2}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{2/k}} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} \big|\mathfrak{p}^{2/k} z^2\big|^\alpha \Big)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.8}$$

Observemos que $\left(\mathfrak{p}_n^{2/k} z_n^2\right)_n \in \mathsf{D}_1^{\infty}$ y por lo tanto la última suma en (2.8) converge (ver por ejemplo [DGMSP19, Observación 2.18]). Por otro lado, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2/k}} < \infty$ (ya que la serie de Dirichlet pertenece a H_k^2) y luego $\sum_{\alpha \in \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} \frac{|c_\alpha|^2}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{2/k}}$ también converge. Todo esto muestra que la serie en (2.8) converge (absolutamente) y por lo tanto $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}} c_\alpha z^\alpha$ define una función holomorfa sobre $\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})}$ (para esto ver por ejemplo [DGMSP19, Teorema 15.57], donde prueba que toda función analítica sobre un abierto de un espacio de sucesiones de Banach es holomorfa).
Consideremos para cada N la restricción de f a $\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N$ denotándola nuevamente por f_N. Esta función pertenece a $H_2(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N)$ (ver Proposición 2.2.1) y

$$\|f_N\|_{H_2(\mathfrak{p}^{-1/k}\mathsf{D}^N)} = \Big\| \sum_{\operatorname{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N} \frac{a_n}{n^{-1/k}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_2} \leq \Big\| \sum \frac{a_n}{n^{-1/k}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_2}.$$

Esto inmediatamente nos dice que $f \in H_2(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})})$ con $\|f\| \leq \left\| \sum a_n n^{-s} \right\|_{2,k}$ completando la prueba. □

Corolario 2.2.6.

$$\mathsf{H}_+ = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_2(\ell_2(\mathfrak{p}^{1/k}) \cap B_{\ell_\infty(\mathfrak{p}^{1/k})}),$$

Donde en la intersección estamos considerando la topología del límite proyectivo.

2.3. Teorema de Montel

Para probar que H_+ es un espacio de Schwartz mostramos que las inclusiones

$$\mathrm{id}_k \colon \mathsf{H}_{k+1}^2 \hookrightarrow \mathsf{H}_k^2$$

son compactas, a partir escribirlas como la composición entre dos operadores continuos y un operador diagonal compacto. Como mencionamos, Bonet presenta este mismo resultado en [Bon18], cambiando H_k^2 por $\mathsf{H}_k^{\infty} = \{D \in \mathsf{D} : \sup_{s \in \mathsf{C}_{\frac{1}{k}}} |D(s)| < \infty\}$, como una consecuencia del Teorema de Montel para series de Dirichlet dado por Bayart. El argumento es simple, con un razonamiento análogo al realizado en (2.1), si $(D^N)_N$ es una sucesión acotada en $\mathsf{H}_{k+1}^{\infty}$ entonces D_{k+1}^N es acotada en H_∞. Por el Teorema de Montel existen una subsucesión $(D_{k+1}^{N_j})_j$ y $D \in \mathsf{H}_\infty$ tal que

$$\sup_{s \in \mathsf{C}_\varepsilon} |D_{k+1}^{N_j}(s) - D(s)| \to 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

En particular, tomando $\varepsilon = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0$ y observando que si $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathsf{H}_\infty$ entonces $\tilde{D} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\frac{1}{k+1}} n^{-s} \in \mathsf{H}_k^{\infty}$ y $\tilde{D}_{k+1} = D$ lo anterior se puede reescribir como

$$\sup_{s \in \mathsf{C}_{\frac{1}{k}}} |D^{N_j}(s) - \tilde{D}(s)| = \sup_{s \in \mathsf{C}_\varepsilon} |D_{k+1}^{N_j}(s) - \tilde{D}_{k+1}(s)| = \sup_{s \in \mathsf{C}_\varepsilon} |D_{k+1}^{N_j}(s) - D(s)| \to 0,$$

obteniendo entonces la compacidad del operador id_k. Como se puede ver, el argumento principal de esta prueba es la existencia de una subsucesión D^{N_j} cuyas traslaciones converjan a toda traslación de D en la norma del espacio. A partir de un razonamiento análogo, un resultado similar en los espacios H_p implicaría que las inclusiones de $\mathsf{H}_{k+1}^p \hookrightarrow \mathsf{H}_k^p$ son compactas (hecho que ya sabemos para el caso $p = 2$). En conclusión, lo que buscamos es un Teorema de Montel para los espacios H_p, es decir, un resultado que nos garantice que *si* $(D^N)_N$ *es una sucesión acotada en* $\mathcal{H}_p$ *entonces existen una subsucesión* D^{N_j} *y una serie* D *tal que* $\|D_\varepsilon^{N_j} - D_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_p} \to 0$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

En [DS19b, Teorema 4.20], Defant y Schoolmann obtienen un resultado de Montel de este tipo para series de Dirichlet generales, usando técnicas de análisis armónico sobre grupos compactos abelianos. Más adelante, como veremos en el próximo capítulo, junto con Defant, Schoolmann y Sevilla Peris probamos un resultado más general a partir de las funciones casi periódicas. En lo que queda de este capítulo, y de esta sección en particular, vamos a ver una prueba en términos más elementales del Teorema de Montel para los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p$, basada en la relación con las funciones holomorfas. Para esto, vamos a probar, en primer lugar, el siguiente Teorema de Montel para los espacios de funciones holomorfas $H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$.

Teorema 2.3.1. *Sea* $(f_n) \subset H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ *una sucesión acotada. Entonces existen* $f \in H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ *y una subsucesión* (f_{n_k}) *que converge a* f *uniformemente sobre los conjuntos compactos de* $\mathbb{D}_2^\infty$*.*

La demostración de este resultado está dividida en varios pasos. Primero usamos un argumento diagonal para encontrar una subsucesión que converja puntualmente en cierto subconjunto denso de $\mathbb{D}_2^\infty$. En un segundo paso veremos que esta sucesión es uniformemente de Cauchy sobre los conjuntos compactos de $\mathbb{D}_2^\infty$ y por lo tanto converge. Finalmente, mostraremos que la función límite pertenece al espacio de Hardy $H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$. Antes de comenzar, veamos dos resultados que nos serán de utilidad. El primero es [DGMSP19, Lema 2.16], el cual provee una condición localmente Lipschitz sobre los subconjuntos compactos.

Lema 2.3.2. *Sea* X *un espacio de Banach,* $U \subset X$ *un conjunto abierto, y* $K \subset U$ *un conjunto compacto. Si* $f : U \to \mathbb{C}$ *es holomorfa y acotada, entonces para todos* $0 < s < r = \operatorname{dist}(X \setminus U, K)$*, todo* $x \in K$ *e* $y \in \overline{B(x,s)}$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{r-s}\|x-y\| \sup_{z \in U}|f(z)|.$$

El segundo lema que necesitamos es el resultado que comentamos en los preliminares (ver (1.3)), cuya prueba puede encontrarse en [DGMSP19, Corolario 13.20 y (13.25)]. Lo presentamos de una forma que nos permite acotar $|f(z)|$ para $z \in \mathbb{D}_2^\infty$ en términos de $\|z\|_2 = (\sum_{j=1}^\infty |z_j|^2)^{1/2}$ y $\|z\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} |z_j|$.

Lema 2.3.3. *Si* $1 \leq p < \infty$*, entonces*

$$|f(z)| \leq e^{\frac{\|z\|_2^2}{1-\|z\|_\infty^2}} \|f\|_{H_p(\mathbb{D}_2^\infty)}.$$

para toda $f \in H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ *y* $z \in \mathbb{D}_2^\infty$*.*

Pasamos ahora sí a la prueba del Teorema 2.3.1.

Demostración del Teorema 2.3.1. Comencemos por encontrar una subsucesión (f_{n_k}) de f_n que converja puntualmente en un conjunto denso de $\mathbb{D}_2^\infty$. Fijemos un conjunto $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ denso en $\mathbb{D}_2^\infty$. Por el Lema 2.3.3, $(f_n(x_1))_n$ es acotada en $\mathbb{C}$ y podemos encontrar una subsucesión $f_{n(k,1)}$ y $c_1 \in \mathbb{C}$, tal que

$$c_1 = \lim_{k \to 1} f_{n(k,1)}(x_1) \text{ y } |f_{n(k,1)}(x_1) - c_1| < \frac{1}{k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que encontramos subsucesiones $\big(n(k,1)\big)_{k=1}^\infty, \ldots, \big(n(k,m)\big)_{k=1}^\infty$ de manera que, para cada $1 \leq j \leq m$, $\big(n(k,j)\big)_{k=1}^\infty$ es una subsucesión de $\big(n(k,j-1)\big)_{k=1}^\infty$ y

$$c_j = \lim_{k \to \infty} f_{n(k,j)}(x_j) \text{ y } |f_{n(k,j)}(x_j) - c_j| < \frac{1}{k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Nuevamente, $f_{n(k,m)}(x_{m+1})$ es acotada en $\mathbb{C}$ y luego existe una subsucesión $f_{n(k,m+1)}$ que converge a cierto $c_{m+1} \in \mathbb{C}$, con $|f_{n(k,m+1)}(x_{m+1}) - c_{m+1}| < \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De este manera definimos $(c_j)_j \subset \mathbb{C}$ y $(n(k,j))_{k,j} \subset \mathbb{N}$ de forma tal que $\big(n(k,j)\big)_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\big(n(k,j-1)\big)_{k=1}^{\infty}$ y (2.9) vale para todo j. Definimos ahora $n_k = n(k,k)$ y observemos que para cada m fijo, si $k \geq m$ entonces

$$|f_{n_k}(x_m) - c_m| = |f_{n(k,k)}(x_m) - c_m| < \frac{1}{k}\,. \tag{2.10}$$

Luego $\big(f_{n_k}(x_m)\big)_{k=1}^{\infty}$ converge a c_m para todo $m \in \mathbb{N}$, y por lo tanto tenemos la subsucesión que estábamos buscando.

El segundo paso de la prueba es ver que $(f_{n_k})_k$ converge a cierta $f \in H_p(\mathbb{D}_2^{\infty})$ uniformemente sobre los conjuntos compactos. Para esto, tomemos $K \subset \mathbb{D}_2^{\infty}$ un conjunto compacto y fijemos $r = \operatorname{dist}\big(\ell_2 \setminus \mathbb{D}_2^{\infty}, K\big)$, dado que $\mathbb{D}_2^{\infty}$ es un conjunto abierto en ℓ_2 entonces $r > 0$. Fijemos ahora $0 \neq z \in K$ y j tal que $z_j \neq 0$. Definamos $y_i = z_i$ si $i \neq j$ y $y_j = \frac{z_j}{|z_j|}$; entonces claramente $y = (y_i)_i \in \ell_2 \setminus \mathbb{D}_2^{\infty}$ y, por lo tanto,

$$r \leq \|y - z\|_2 = \left|z_j - \frac{z_j}{|z_j|}\right| = \left|\frac{z_j|z_j| - z_j}{|z_j|}\right| = \big||z_j| - 1\big| = 1 - |z_j| < 1\,.$$

Esto muestra que $\|z\|_{\infty} \leq 1 - r$ para todo $z \in K$ (ya que obviamente la desigualdad también vale para $z = 0$). Consideremos ahora $B = \bigcup_{z \in K} B(z, \frac{r}{2})$. Dado $x \in B$ podemos encontrar $z \in K$ tal que $\|x - z\|_{\infty} \leq \|x - z\|_2 < \frac{r}{2}$ y, luego,

$$\|x\|_{\infty} < \|z\|_{\infty} + \frac{r}{2} \leq 1 - \frac{r}{2} < 1\,.$$

Con esto, podemos encontrar una constante $\lambda_B > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq \lambda_B$ para todo $x \in B$ y, denotando $M = \sup_n \|f_n\|_{H_p(\mathbb{D}_2^{\infty})}$, esto y el Lema 2.3.3 nos dan

$$|f_{n_k}(x)| \leq e^{\frac{\|x\|_2^2}{1 - \|x\|_{\infty}^2}} \|f_{n_k}\|_{H^p(\mathbb{D}_2^{\infty})} \leq e^{\frac{\lambda_B^2}{r - \frac{r^2}{4}}} M$$

para todo $x \in B$. Esto muestra que cada f_{n_k} es acotada sobre B. Pero B es abierto y contiene a K por lo tanto, si tomamos $r_B = \operatorname{dist}(\ell_2 \setminus B, K) > 0$ y fijamos $0 < \varepsilon < \frac{r_B}{2}$, del Lema 2.3.2 sabemos que

$$|f_{n_k}(z) - f_{n_k}(y)| \leq \frac{1}{r_B - \varepsilon}\|z - y\| \sup_{x \in B} |f_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{r_B - \varepsilon}\|z - y\| e^{\frac{\lambda_B^2}{r - \frac{r^2}{4}}} M$$

para todo $z \in K$ y todo $y \in \overline{B(z,\varepsilon)}$. Dado que $\{B(z,\varepsilon) : z \in K\}$ es un cubrimiento por abiertos de K, existen $z_1, \dots, z_N$ en K tales que

$$K \subset B(z_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(z_N,\varepsilon)$$

y, por la densidad de $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$, para cada $i = 1, \dots, N$ podemos encontrar $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_{m_i} \in B(z_i,\varepsilon)$. De este manera, para todo $z \in K$ existen z_j y x_{m_j}, tales que $z, x_{m_j} \in \overline{B(z_j,\varepsilon)}$ y, entonces,

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}(z) - f_{n_k}(x_{m_j})| &\leq |f_{n_k}(z) - f_{n_k}(z_j)| + |f_{n_k}(z_j) - f_{n_k}(x_{m_j})| \\
&\leq \frac{M e^{\frac{\lambda_B^2}{r - \frac{r^2}{4}}}}{r_B - \varepsilon}\big(\|z - z_j\| + \|x_{m_j} - z_j\|\big) \leq \frac{4e^{\frac{\lambda_B^2}{r - \frac{r^2}{4}}} M}{r_B}\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Ahora, si $k \geq l \geq \max\{m_1, \dots, m_N, \frac{1}{\varepsilon}\}$, usando (3.3.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
&|f_{n_k}(z) - f_{n_l}(z)| \\
&\quad \leq |f_{n_k}(z) - f_{n_k}(x_{m_j})| + |f_{n_k}(x_{m_j}) - c_{m_j}| + |f_{n_l}(x_{m_j}) - c_{m_j}| + |f_{n_l}(z) - f_{n_l}(x_{m_j})| \\
&\quad < \frac{2}{l} + \frac{4e^{\frac{\lambda_B^2}{r - \frac{r^2}{4}}} M}{r_B}\varepsilon
\end{aligned}$$

Esto muestra que la sucesión f_{n_k} es uniformemente de Cauchy sobre K y, dado que K era arbitrario, la sucesión es uniformemente de Cauchy sobre los conjuntos compactos de D_2^∞. De donde, por ser completo el espacio de funciones holomorfas con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos (ver por ejemplos [DGMSP19, Teorema 15.48]), esta converge a cierta función holomorfa $f : \mathsf{D}_2^\infty \to \mathsf{C}$. Para completar la prueba solamente falta chequear que $f \in H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$. Sea

$$M = \sup_n \|f_n\|_{H_p(\mathsf{D}_2^\infty)} > 0$$

y fijemos $n \in \mathsf{N}$ y $0 < r < 1$. Dado que $r\mathsf{T}^n \times \{0\} \subset \mathsf{D}_2^\infty$ es compacto, existe $k = k(n, r) \in \mathsf{N}$ tal que $|f(z) - f_{n_k}(z)| \leq \frac{1}{2}$ para todo $z \in r\mathsf{T}^n \times \{0\}$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathsf{T}^n} |f(rw_1, \ldots, rw_n, 0, \ldots)|^p \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_n\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathsf{T}^n} |f(rw_1, \ldots, rw_n, 0, \ldots) - f_{n_k}(rw_1, \ldots, rw_n, 0, \ldots)|^p \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_n\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{\mathsf{T}^n} |f_{n_k}(rw_1, \ldots, rw_n, 0, \ldots)|^p \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_n\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathsf{T}^n} \frac{1}{2^p} \mathrm{d}w\right)^{\frac{1}{p}} + \|f_{n_k}\|_{H_p} \leq \frac{1}{2} + M.
\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\sup_{n \in \mathsf{N}} \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathsf{T}^n} |f(rw_1, \ldots, rw_n, 0, \ldots)|^p \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_n\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2} + M,$$

lo que muestra que $f \in H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$. □

Este Teorema de Montel vale de hecho para conjunto más generales. Dado X un espacio de sucesiones de Banach y consideremos el conjunto abierto

$$X \cap \mathsf{D}^\infty = \{z = (z_n)_n \in X : |z_n| < 1 \text{ para todo } n\}.$$

Para cada $1 \leq p < \infty$, denotamos por $H_p(X \cap \mathsf{D}^\infty)$ al espacio de Hardy conformado por todas las funciones holomorfas $f : X \cap \mathsf{D}^\infty \to \mathsf{C}$ para las cuales

$$\|f\|_{H_p(X\cap\mathsf{D}^\infty)} = \sup_{n \in \mathsf{N}} \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathsf{T}^n} |f(rw_1, \ldots, rw_n, 0, \ldots)|^p \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_n\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

(considerando en el toro n-dimensional T^n nuevamente la medida Lebesgue normalizada). Si $X \hookrightarrow \ell_2$ entonces [DGMSP19, Observación 13.22] muestra que $H_p(X \cap \mathsf{D}^\infty) = H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$ para todo $1 \leq p < \infty$, y todo conjunto compacto de $X \cap \mathsf{D}^\infty$ es también un compacto de D_2^∞. Como consecuencia inmediata del Teorema 2.3.1 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.4. *Sea X un espacio de sucesiones de Banach $X \hookrightarrow \ell_2$ (con inclusión continua) y $1 \leq p < \infty$. Si $(f_n) \subset H_p(X \cap \mathsf{D}^\infty)$ es una sucesión acotada, entonces existen $f \in H_p(X \cap \mathsf{D}^\infty)$ y una subsucesión (f_{n_k}) que converge a f uniformemente sobre los conjuntos compactos de $X \cap \mathsf{D}^\infty$.*

Teniendo el Teorema 2.3.1 podemos probar el siguiente Teorema de Montel para los espacios $\mathcal{H}_p$.

Teorema 2.3.5. *Sea $\{D^N = \sum a_n^{(N)} n^{-s}\}_N$ una sucesión acotada en $\mathcal{H}_p$. Entonces existen $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p$, y una subsucesión $\{D^{N_k} = \sum a_n^{(N_k)} n^{-s}\}_k$ tal que $\{\sum \frac{a_n^{(N_k)}}{n^\varepsilon} n^{-s}\}_k$ converge a $\sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s}$ en $\mathcal{H}_p$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Hagamos antes dos pequeños comentarios que utilizaremos en la prueba. En primer lugar, el [DGMSP19, Teorema 12.5] nos dice que existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $1 \leq p < \infty$, todo $x \geq 2$ y $\sum a_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_p$,

$$\Big\| \sum_{n \leq x} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \leq C \log x \Big\| \sum a_n n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p}. \tag{2.11}$$

En segundo lugar, si fijamos $\varepsilon > 0$ y $p < q < \infty$, por estar $D_\varepsilon \quad \mathsf{H}_q$ y ser los monomios $\{n^{-s}\}$ una base de Schauder en H_q, sumado a la monotonicidad de las normas $\ \cdot\ _{\mathsf{H}_p}$ se tiene que

$$\lim_{l \to \infty} \Big\| \sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} - \sum_{n=1}^{l} \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} = 0. \tag{2.12}$$

Demostración. Por 1.1.10, tenemos una sucesión acotada $(f_N)_N$ en $H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ y, por el Teorema 2.3.1, una subsucesión $(f_{N_k})_k$ que converge uniformemente sobre conjuntos compactos a cierta $f \quad H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$. Más aún, si $\sum a_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_p$ es la serie de Dirichlet asociada a f por medio de la transformada de Bohr, entonces por la definición de los coeficientes de Cauchy (y la convergencia uniforme sobre compactos) tenemos que $a_n^{(N_k)} = c_\alpha(f_{N_k}) \to c_\alpha(f) = a_n$ cuando $k \to \infty$.

Fijemos $\varepsilon > 0$, por (2.12) tenemos que las sumas parciales de $\sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s}$ y $\sum \frac{a_n^{(N_k)}}{n^\varepsilon} n^{-s}$ convergen a las correspondientes series. Nuestro primer objetivo será mostrar que podemos controlar la convergencia de todas estas sumas parciales uniformemente. Para ser más precisos, queremos mostrar que para todo $\eta > 0$ existe cierto $l_0 > 0$ tal que

$$\Big\| \sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} - \sum_{n=1}^{l} \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} < \eta \quad \text{y} \quad \Big\| \sum \frac{a_n^{(N_k)}}{n^\varepsilon} n^{-s} - \sum_{n=1}^{l} \frac{a_n^{(N_k)}}{n^\varepsilon} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} < \eta \tag{2.13}$$

para todo $l \geq l_0$. Comencemos fijando $l \geq 2$, luego (2.12) nos dice que

$$\Big\| \sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} - \sum_{n=1}^{l} \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} = \lim_{j \to \infty} \Big\| \sum_{n=l+1}^{j} \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p}.$$

Si $M = \max \big\{ \big\| \sum a_n n^{-s} \big\|_{\mathsf{H}_p}, \sup_N \big\| \sum a_n^{(N)} n^{-s} \big\|_{\mathsf{H}_p} \big\}$, para cada $j \geq l+1$ la suma de Abel, que recordemos nos permite descomponer una suma como

$$\sum_{n=l+1}^{j} b_n c_n = \left(\sum_{n=l+1}^{j} b_n \right) c_j + \sum_{n=l+1}^{j-1} \left(\sum_{m=l+1}^{n} b_m \right) (c_n - c_{n+1}),$$

y (2.11) nos dan

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \Big(\sum_{n=l+1}^{j} a_n n^{-s} \Big) \frac{1}{j^{\varepsilon}} + \sum_{n=l+1}^{j-1} \Big(\sum_{m=l+1}^{n} a_m m^{-s} \Big) \Big(\frac{1}{n^{\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{\varepsilon}} \Big) \Big\|_{\mathsf{H}_p} \\
&\qquad \leq \Big\| \sum_{n=l+1}^{j} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \frac{1}{j^{\varepsilon}} + \sum_{n=l+1}^{j-1} \Big\| \sum_{m=l+1}^{n} a_m m^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \Big(\frac{1}{n^{\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{\varepsilon}} \Big) \\
&\qquad \leq \Big(\Big\| \sum_{n=1}^{j} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} + \Big\| \sum_{n=1}^{l} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \Big) \frac{1}{j^{\varepsilon}} \\
&\qquad\quad + \sum_{n=l+1}^{j-1} \Big(\Big\| \sum_{m=1}^{n} a_m m^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} + \Big\| \sum_{m=1}^{l} a_m m^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \Big) \Big(\frac{1}{n^{\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{\varepsilon}} \Big) \\
&\qquad \leq \big(C \log(j) M + C \log(l) M \big) \frac{1}{j^{\varepsilon}} \\
&\qquad\quad + \sum_{n=l+1}^{j-1} \big(C \log(n) M + C \log(l) M \big) \Big(\frac{1}{n^{\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{\varepsilon}} \Big) \\
&\qquad \leq 2C \log(j) M \frac{1}{j^{\varepsilon}} + \sum_{n=l+1}^{j-1} 2C \log(n) M \frac{\varepsilon}{n^{\varepsilon+1}} \,.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\Big\| \sum \frac{a_n}{n^{\varepsilon}} n^{-s} - \sum_{n=1}^{l} \frac{a_n}{n^{\varepsilon}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \leq \varepsilon C M \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^{\varepsilon+1}} \,.
$$

Para cada k fijo, exactamente la misma cuenta da la misma desigualdad para $\sum a_n^{(N_k)} n^{-s}$. Dado que el término de la derecha tiende a 0 cuando $l \to \infty$, podemos encontrar l_0 satisfaciendo (2.13).
Sea $k_0 \quad \mathsf{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $|a_n^{(N_k)} - a_n| < \frac{\eta}{l_0}$ para todo $1 \leq n \leq l_0$. Si $k \geq k_0$

$$
\begin{aligned}
\Big\| \sum \frac{a_n^{(N_k)}}{n^{\varepsilon}} n^{-s} - \sum \frac{a_n}{n^{\varepsilon}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} &\leq \Big\| \sum \frac{a_n^{(N_k)}}{n^{\varepsilon}} n^{-s} - \sum_{n=1}^{l_0} \frac{a_n^{(N_k)}}{n^{\varepsilon}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \\
&\quad + \Big\| \sum \frac{a_n}{n^{\varepsilon}} n^{-s} - \sum_{n=1}^{l_0} \frac{a_n}{n^{\varepsilon}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} + \Big\| \sum_{n=1}^{l_0} \frac{a_n^{(N_k)} - a_n}{n^{\varepsilon}} n^{-s} \Big\|_{\mathsf{H}_p} \\
&\leq 2\eta + \sum_{n=1}^{l_0} \frac{|a_n^{(N_k)} - a_n|}{n^{\varepsilon}} \|n^{-s}\|_{\mathsf{H}_p} \\
&\leq 2\eta + \sum_{n=1}^{l_0} |a_n^{(N_k)} - a_n| < 3\eta \,.
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 3

Traslación de series de Dirichlet generales

Hemos comentado en el Capítulo 2 la idea que lleva a Bonet a definir en [Bon18] el espacio H_+^∞. Inspirados en esta definición, a lo largo del capítulo anterior definimos los espacios análogos para los distintos espacios de Hardy H_p, los cuales resultaron ser un mismo espacio de Fréchet que notamos por H_+. En este capítulo vamos a realizar un proceso similar pero considerando en este caso espacios de series de Dirichlet generales. El estudio de estas series se inició a finales del siglo XIX y principios del siglo XX por matemáticos como Bohr, Hardy, Landau o Riesz, entre otros. Antes de comenzar a definir estos espacios, vamos a dedicar una primer sección a algunas cuestiones básicas relativas a estas series. Pero, en pos de no extendernos innecesariamente, daremos solo las definiciones y propiedades específicas que utilizaremos. Una vez finalizada esta primer sección, que no contendrá ningún resultado original, extenderemos el estudio realizado en el Capítulo 2 a esta nueva situación, definiendo los espacios correspondientes y estudiando distintas propiedades.

3.1. Series de Dirchlet generales

Definición y Teorema de Bohr

Vamos a decir que $\lambda = (\lambda_n)$ es una frecuencia si es una sucesión de números reales no negativos, estrictamente creciente y de modo tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Dada una frecuencia λ, una λ-serie de Dirichlet es una serie (formal) del tipo $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$, donde s es una variable compleja y $a_n \in \mathsf{C}$ sus coeficientes de Dirichlet. Al espacio de las λ-series de Dirichlet las vamos a notar por $\mathsf{D}(\lambda)$. El ejemplo más importante de una frecuencia es el dado por $\lambda = (\log n)$, la cual conduce a las series de Dirichlet ordinarias $\sum a_n n^{-s}$. Otro caso relevante aparece considerando la frecuencia $\lambda = (n) = (0, 1, 2, \ldots)$, estas λ-series de Dirichlet, mediante la sustitución $z = e^{-s}$, nos llevan a las series de potencias formales $\sum a_n z^n$.

Al igual que ocurre con las series de Dirichlet ordinarias, las series de Dirichlet generales convergen en semiplanos C_σ, definiendo en estos funciones holomorfas (ver por ejemplo [HR13, Teorema 2] o [QQ20, Lema 4.1.1]). Así, del mismo modo que para las series de Dirichlet ordinarias, se definen las abscisas de una λ-serie de Dirichlet D:

$$\begin{aligned}
\sigma_c(D) &= \inf\{\sigma \in \mathsf{R} \colon D \text{ converge en } \mathsf{C}_\sigma\},\\
\sigma_a(D) &= \inf\{\sigma \in \mathsf{R} \colon D \text{ converge absolutamente en } \mathsf{C}_\sigma\},\\
\sigma_u(D) &= \inf\{\sigma \in \mathsf{R} \colon D \text{ converge uniformemente en } \mathsf{C}_\sigma\},\\
\sigma_b(D) &= \inf\{\sigma \in \mathsf{R} \colon D \text{ converge y define una función acotada en } \mathsf{C}_\sigma\}.
\end{aligned}$$

Por definición $\sigma_c(D) \leq \sigma_b(D) \leq \sigma_u(D) \leq \sigma_a(D)$, y en general todas estas abscisas difieren.

Otro valor importante asociado a una frecuencia λ es el ancho máximo de la franja de convergencia y no convergencia absoluta, esto es

$$L(\lambda) := \sup_{D \in \mathcal{D}(\lambda)} \sigma_a(D) - \sigma_c(D),$$

el cual, como prueba Bohr en [Boh14, §3, Lemas 2 y 3], puede calcularse como

$$L(\lambda) = \sigma_c\left(\sum e^{-\lambda_n s}\right) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log(n)}{\lambda_n}.$$

Una de las claves en la teoría de las series de Dirichlet ordinarias es el Teorema de Bohr (ver el Teorema 1.1.2), el cual en particular implica que para estas series de Dirichlet las abscisas de convergencia uniforme y acotación coinciden. En la Teoría de las series de Dirichlet generales este resultado también reviste de gran importancia. Veamos brevemente algunos hechos que se conocen respecto a esto.

Vamos a denotar por $\mathcal{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda)$ al espacio de las λ-series de Dirichlet que convergen en algún lugar, y cuya función límite puede extenderse a una función holomorfa y acotada sobre el semiplano $\mathbb{C}_0$. Consideraremos además el subespacio $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$, dado por las series $D \in \mathcal{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda)$ convergentes en el semiplano $\mathbb{C}_0$. Junto con el supremo $\|D\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_0} |f(s)|$, siendo f la única extensión de D, los espacios $\mathcal{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda)$ y $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ resultan ser espacios normados donde la contención $\mathcal{D}_\infty(\lambda) \subset \mathcal{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda)$ en general es estricta (ver [Sch20a, Corolario 3.8 y Teorema 5.2]).

Diremos que una frecuencia λ satisface el "Teorema de Bohr" (o que el Teorema de Bohr vale para λ) si $\sigma_u(D) \leq 0$ para toda $D \in \mathcal{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda)$. Esta condición resulta equivalente a la completitud del espacio $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ e implica la igualdad $\mathcal{D}_\infty(\lambda) = \mathcal{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda)$ (Ver por ejemplo [DS20b, Teorema 5.1]). La cuestión entonces es encontrar condiciones sobre λ de modo que esta propiedad se satisfaga. El primero en abordar este problema fue Bohr (lo que explica el nombre), quien en [Boh13b] aisló una condición suficiente concreta que, en términos generales, impide a los valores λ_n acercarse demasiado rápidamente. Más precisamente, mostró que si λ cumple:

$$\exists\, l = l(\lambda) > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq C e^{-(l+\delta)\lambda_n}, \tag{BC}$$

esta ahora se conoce como "condición de Bohr", entonces satisface el Teorema de Bohr (notar que $\lambda = (\log n)$ satisface (BC) tomando $l = 1$).

Más tarde Landau en [Lan21] mejoró el resultado de Bohr mostrando que la condición más débil

$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq C e^{-e^{\delta \lambda_n}}. \tag{LC}$$

(que llamaremos "condición de Landau") también es suficiente para que λ satisfaga el Teorema de Bohr. Observemos que (BC) implica (LC), y que la frecuencia $\lambda = ((\log n)^\alpha)$ satisface (LC) para todo $\alpha > 0$ pero por ejemplo $\lambda = (\sqrt{\log n})$ (es decir $\alpha = 1/2$) no satisface (BC).
Recientemente Defant y Schoolmann han realizado un estudio sistemático de estas propiedades. Como resultado de ello sabemos que, además de las condiciones clásicas que acabamos de ver, las siguientes condiciones "comprobables" para λ son suficientes para que satisfaga el Teorema de Bohr (ver por ejemplo [Sch20a, Observación 4.8]):

- λ es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente,
- $L(\lambda) := \limsup_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0$,
- λ verifica (LC) (y en particular, si verifica (BC)).

Luego, el Teorema de Bohr se verifica para frecuencias importantes como $\lambda = (\log \mathfrak{p}_n)$ (por ser $\mathbb{Q}$-l.i.), $\lambda = (n)$ (para la cual $L(\lambda) = 0$) y $\lambda = ((\log n)^\alpha)$ para $\alpha > 0$. Recientemente Bayart encontró algunas otras condiciones suficientes Bayart en [Bay22, Sección 4.2].

Espacios de Hardy

El espacio $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ es quizás el espacio más importante en la teoría de las series de Dirichlet generales; pero naturalmente no es el único. También existen los espacios de Hardy $\mathsf{H}_p(\lambda)$ de series de Dirichlet, introducidos en [DS19a] por Defant y Schoolmann.
Dada una frecuencia, un λ-polinomio de Dirichlet es nuevamente una λ-serie de Dirichlet donde la suma es finita $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}$. Para todo polinomio y $1 \leq p < \infty$

$$\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n it}\Big|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

existe, y de esta forma podemos definir una norma sobre el espacio de todos los λ-polinomios de Dirichlet. El espacio de Hardy $\mathsf{H}_p(\lambda)$, al igual que en el caso de las series de Dirichlet ordinarias que vimos en los preliminares, se puede definir como la completación de este espacio (ver [DS19b, Teorema 3.26]).
Esta definición hace que el espacio sea difícil de manejar. Existe, sin embargo, un enfoque diferente que relaciona estos espacios con el análisis de Fourier en grupos (ver [DS19b, Sección 3]). Esto requerirá un poco más de preparación (tener siempre en cuenta lo que hemos comentado en el Capítulo 1, en este caso en particular la relación con las funciones definidas en el politoro).
Siguiendo la notación estándar, dado un grupo topológico G, vamos a denotar por $\hat{G}$ a su grupo dual formado por todos los caracteres (esto es, todos los los homomorfismos continuos $\gamma : G \to \mathsf{T}$). Si $\beta : G \to H$ es un homomorfismo continuo entre dos grupos topológicos, entonces el dual $\hat{\beta} : \hat{H} \to \hat{G}$ está dado por $\hat{\beta} = \gamma \circ \beta$. Por ejemplo, si G es el grupo $\mathsf{R} = (\mathsf{R}, +, \tau)$ dotado con su topología canónica τ, entonces todos los caracteres son de la forma $t \to e^{-ixt}$, donde $x \quad \mathsf{R}$.

Tomemos ahora un grupo abeliano compacto G y un homomorfismo continuo con rango denso $\beta : \mathsf{R} \to G$. Entonces para todo caracter $\gamma \quad \hat{G}$ existe un único (por densidad) $x \quad \mathsf{R}$ tal que $\gamma \circ \beta(t) = e^{-itx}$. Por simplicidad vamos a escribir $\gamma = h_x$, y obtenemos

$$\hat{G} = \{h_x : x \quad \hat{\beta}(\hat{G})\}.$$

En otras palabras, esto identifica a $\hat{G}$ y $\hat{\beta}(\hat{G})$, y los caracteres $\gamma = h_x$ en $\hat{G}$ tienen un único índice real $x \quad \hat{\beta}(\hat{G})$.

Con esto, el par (G, β) se dice que es un λ-grupo de Dirichlet si para todo $n \quad \mathsf{N}$ existe un (único) caracter $\gamma \quad \hat{G}$ tal que $\gamma = h_{\lambda_n}$. Se puede encontrar un desarrollo más detallado de este tema en [DS19a, DS19b].

Para toda frecuencia un objeto tal existe. La compactificación de Bohr $\overline{\mathsf{R}} := (\mathsf{R}, +, d)$ de R con d la topología discreta junto con la inclusión $\beta_{\overline{\mathsf{R}}} : \mathsf{R} \hookrightarrow \overline{\mathsf{R}}$ dado por $x \to \left[t \to e^{-ixt}\right]$, forma un grupo de Dirichlet, el cual sirve para cada frecuencia arbitraria λ como un λ-grupo de Dirichlet. Sin embargo, para determinadas frecuencias λ existen ciertos λ-grupos de Dirichlet que se ajustan mejor a la estructura concreta de la frecuencia, tal como veremos más adelante.

Dado un λ-grupo de Dirichlet (G, β) y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Hardy $H_p^\lambda(G)$ se define como el subespacio cerrado de $L_p(G) = L_p(G, \mu)$ (donde μ es la medida de Haar sobre el grupo G) que consiste en aquellas funciones F cuyos coeficientes de Fourier

$$\widehat{F}(h_x) = \int_G F(t)\overline{h_x(t)}d\mu(t)$$

son 0 siempre que $x \quad \{\lambda_n : n \quad \mathsf{N}\}$. Con esto se puede probar (ver nuevamente [DS19b, Teorema 3.26]) que el espacio $\mathsf{H}_p(\lambda)$ que definimos anteriormente coincide con el espacio

$$\mathsf{H}_p(\lambda) = \Big\{ \sum a_n e^{-\lambda_n s} : \text{ existe una (única) } F \quad H_p^\lambda(G), \text{ con } a_n = \widehat{F}(h_{\lambda_n}) \text{ para todo } n \quad \mathsf{N} \Big\},$$

(que no depende de la elección del λ-grupo de Dirichlet [DS19a, Teorema 3.24]). Además, la identificación es isométrica, en el sentido de que si $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ y F están asociadas entonces

$$\Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{H}_p(\lambda)} = \quad F \quad {}_{L_p(G)}.$$

Más aún, notemos que de esta manera también estamos definiendo el espacio $\mathsf{H}_\infty(\lambda)$ (a diferencia de lo que ocurría con (3.1) donde $1 \leq p < \infty$), que en principio resulta un espacio diferente a los mencionados $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ y $\mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)$.

Terminamos esta subsección describiendo los λ-grupos de Dirichlet "naturales" para las frecuencias $\lambda = (\log(n))$ y $\lambda = (n)$. En el primer caso, es decir la frecuencia que nos da las series de Dirichlet ordinarias, este λ-grupo de Dirichlet no es otro que el politoro infinito dimensional T^∞ (con su estructura de grupo natural) junto con la conocida función de Kronecker

$$\beta_{\mathsf{T}^\infty} : \mathsf{R} \to \mathsf{T}^\infty \text{ definida por } t \to \mathfrak{p}^{-it} = (2^{-it}, 3^{-it}, 5^{-it}, \ldots),$$

nos da un $(\log n)$-grupo de Dirichlet. Entonces $F \quad H_p^{(\log n)}(\mathsf{T}^\infty)$ si y sólo si $F \quad L_p(\mathsf{T}^\infty)$ y el coeficiente de Fourier $\hat{f}(\alpha) = 0$ para toda sucesión de enteros $\alpha = (\alpha_k)$ con $\alpha_k < 0$ para algún k. En otras palabras,

$$H_p(\mathsf{T}^\infty) := H_p^{(\log n)}(\mathsf{T}^\infty) = \mathsf{H}_p((\log n))$$

vale isométricamente, y $h_{\log n} = z^\alpha$ siempre que $n = \mathfrak{p}^\alpha$. Es decir que esta definición del espacio $\mathsf{H}_p(\lambda)$ coincide con lo que vimos en el Capítulo 1.
En el caso de la frecuencia $\lambda = (n) = (0, 1, 2, \ldots)$ vamos a considerar el grupo $G := \mathsf{T}$ junto con $\beta_{\mathsf{T}}(t) := e^{-it}$. Este es un (n)-grupo de Dirichlet, y $\mathsf{H}_p((n))$ es igual al espacio de Hardy clásico $H_p(\mathsf{T}) := H_p^{(n)}(\mathsf{T})$.

Funciones casi periódicas

Decimos que una función continua $g : \mathsf{R} \to \mathsf{C}$ es uniformemente casi periódica si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\ell > 0$ tal que para todo intervalo $I \quad \mathsf{R}$ de longitud ℓ existe $\tau \quad I$ tal que

$$\sup_{x \quad \mathsf{R}} |g(x) - g(x+\tau)| < \varepsilon\,.$$

Equivalentemente, una función continua $g \colon \mathsf{R} \to \mathsf{C}$ es uniformemente casi periódica si y sólo si es el límite uniforme de polinomios trigonométricos, es decir, polinomios de la forma $\sum_{n=1}^N a_{x_n} e^{-itx_n}$, donde $x_n \quad \mathsf{R}$ (ver [Bes55, Capítulo 1, §5, 2° Teorema, p. 29]). Observemos que toda función periódica es trivialmente uniformemente casi periódica.
De este modo, decimos que una función continua $f : \mathsf{C}_{\sigma_0} \to \mathsf{C}$ es uniformemente casi periódica si para todo $\sigma > \sigma_0$ la función $\mathsf{R} \to \mathsf{C}$ definida como $t \to f(\sigma+it)$ (que algunas veces denotaremos también como $f_\sigma = f(\sigma+i\bullet)$) es uniformemente casi periódica. Dada $f : \mathsf{C}_{\sigma_0} \to \mathsf{C}$, acotada, holomorfa y uniformemente casi periódica, para cada $x \quad \mathsf{R}$ el coeficiente de Bohr correspondiente se define por

$$a_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\sigma+it) e^{(\sigma+it)x} dt\,, \tag{3.2}$$

donde la integral es convergente para todo $\sigma > \sigma_0$ e independiente de cada σ (ver [Bes55, página 147]). Estos coeficientes son 0 excepto para a lo sumo una familia numerable de valores x, y $f = 0$ si y sólo si $a_x(f) = 0$ para todo x (ver [Bes55, páginas 148 y 18]). Se pueden encontrar más detalles de las funciones casi periódicas en [Bes55].

Con todo esto, para una frecuencia dada λ, el espacio $H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0)$ se define en [DS20a, Definición 2.15] como el espacio formado por todas las funciones $f : \mathsf{C}_0 \to \mathsf{C}$ acotadas, holomorfas y uniformemente casi periódicas tales que $a_x(f) = 0$ si $x = \lambda_n$ para todo n.

El siguiente resultado [DS20a, Teorema 2.16] caracteriza la función límite de las series de Dirichlet en $\mathsf{H}_\infty(\lambda)$ en términos de la casi periodicidad.

Teorema 3.1.1. *Para toda frecuencia λ la identificación $f \to \sum a_{\lambda_n}(f) e^{-\lambda_n s}$ define una biyección isométrica*

$$H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0) = \mathsf{H}_\infty(\lambda)$$

que conserva los coeficientes de Bohr y de Dirichlet.

Series con valores vectoriales

Dado un espacio de Banach X, el conjunto $\mathcal{D}(\lambda, X)$ va a denotar a todas las series del tipo $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, donde ahora $(a_n)_n$ es una sucesión en X. Como puede verse en [CDMS21], donde realizan una descripción completa de la teoría, el resto de las definiciones son una traslación directa del caso escalar (sea los espacios $\mathcal{D}_\infty(\lambda, X)$, $\mathcal{H}_p(\lambda, X)$). Veamos algunos resultados importantes que nos serán de utilidad más adelante.

En el [DS19b, Lema 4.9] se prueba que, para cualquier frecuencia λ, el operador $\mathcal{H}_1(\lambda) \hookrightarrow \mathcal{D}_\infty(\lambda, \mathcal{H}_1(\lambda))$ definido por

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \to \sum (a_n e^{-\lambda_n s}) e^{-\lambda_n z} \tag{3.3}$$

es una isometría. Un segundo resultado, probado en [CDMS21, demostración del Teorema 4.12]), es el hecho de que si λ satisface el Teorema de Bohr y X es un espacio de Banach, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n(\varepsilon + it)} \Big\|_X \leq C \Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathcal{D}_\infty(\lambda, X)} \tag{3.4}$$

para toda serie de Dirichlet perteneciente a $\mathcal{D}_\infty(\lambda, X)$. Por otro lado, en [Sch20a, comentario después de la Proposición 2.4] se prueba a partir del principio de módulo máximo que si $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ entonces

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Big| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n(\varepsilon + it)} \Big| = \sup_{\operatorname{Re} s > \varepsilon} \Big| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \Big|$$

Luego a partir del Teorema de Hahn-Banach obtenemos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n(\varepsilon + it)} \Big\|_X = \sup_{\operatorname{Re} s > \varepsilon} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_X \tag{3.5}$$

para toda polinomio de Dirichlet a valores en X.

Finalmente, dado un espacio de Banach X, el espacio $H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0, X)$ consiste en las funciones a valores en X casi periódicas sobre $\mathbb{R}$, que como en el caso escalar son aproximadas uniformemente por polinomios casi periódicos a valores en X (ver [AP71, página 15]). En el caso particular donde X es el espacio de Hardy $\mathcal{H}_p(\lambda)$, con $1 \leq p < \infty$, Defant y Schoolmann prueban en [DS19b, Lema 4.9] que existe una inclusión isométrica

$$\Psi\colon \mathcal{H}_p(\lambda) \hookrightarrow H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0, \mathcal{H}_p(\lambda)) \tag{3.6}$$

tal que, si $f = \Psi\big(\sum a_n e^{-\lambda_n s}\big)$, entonces $a_{\lambda_n}(f) = a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{H}_p(\lambda)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Bases y matrices de Bohr

Cerramos esta primer sección dando algunas nociones acerca de las bases asociadas a una frecuencia (ver [DS19b]). Una matriz infinita de números racionales $R = (r_k^n)_{n,k \in \mathbb{N}}$ se llama "matriz de Bohr" si cada fila $R_n = (r_k^n)_k$ es finita, es decir si $r_k^n = 0$ solo para finitos valores k. Dada una sucesión $\lambda = (\lambda_n)$ de números reales, decimos que una sucesión (finita o infinita) $B = (b_k)$ en $\mathbb{R}$ es una base para λ si es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente y para cada n existe una sucesión finita de coeficientes racionales $(r_k^n)_k$ tal que $\lambda_n = \sum_k r_k^n b_k$. En este caso, decimos que la matriz $R = (r_j^n)_{n,j}$ es una "matriz de Bohr" de λ con respecto a la base B. Si λ es una frecuencia, una base de este tipo siempre existe (de hecho puede tomarse como una subsucesión de λ), y si R es la matriz de Bohr asociada, escribimos $\lambda = \lambda = (R, B)$ y decimos que es una descomposición de la frecuencua λ. Observemos que ni B ni R son únicas pero la longitud de la base B siempre es la misma (ver [Boh25, Ejemplo 1, página 121].

Para clarificar veamos algunos ejemplos. Si $\lambda = (n)$ entonces basta con tomar como base $B = (1)$ y como matriz de Bohr R de una sola columna y con $r_1^n = n$. Para $\lambda = (\log(\mathfrak{p}_n))$ podemos tomar como base la misma frecuencia (notar que son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes dado que $0 = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \log(\mathfrak{p}_k) = \log(\prod_{k=1}^{N} \mathfrak{p}_k^{\alpha_k})$ si y sólo si $\prod_{k=1}^{N} \mathfrak{p}_k^{\alpha_k} = 1$, es decir que $\alpha_k = 0$) y como matriz de Bohr a R con $r_k^n = \delta_{(n,k)}$. Por último, si $\lambda = (\log(n))$ nuevamente podemos tomar como base $B = (\log(\mathfrak{p}_1), \log(\mathfrak{p}_2), \ldots)$ y como R a la matriz cuya fila n-ésima es la única sucesión $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ tal que $n = \mathfrak{p}^{\alpha}$.

Definición 3.1.2. Decimos que una frecuencia λ es de tipo entero (respectivamente natural) si existe una descomposición (R, B) tal que R consiste solo de números enteros (respect. naturales).

La restricción N-ésima (para $N \in \mathbb{N}$) de una λ-serie de Dirichlet $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ es la serie

$$D|_N = \sum_{\lambda_n \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{b_1, \ldots, b_N\}} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Para ilustrar esto, en los términos ya mencionados, notemos que para el caso de las series de Dirichlet ordinarias (nuevamente, esto es el caso $\lambda = (\log n)$), la sección N-ésima de una serie de Dirichlet es justamente considerar los a_n para los cuales n depende solo de los primeros N números primos.

3.2. Teoremas de Montel

Hemos definido en la Sección 3.1 algunos espacios de series de Dirichlet generales como $\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)$, $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ y $\mathcal{H}_\infty(\lambda)$, siendo este isométricamente isomorfo al espacio de funciones casi periódicas $H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$. Observemos que en el caso de $\lambda = (\log(n))$ todos estos espacios son el mismo, que denotamos por $\mathcal{H}_\infty$ (es decir, en términos de series generales $\mathcal{D}_\infty(\log(n)) = \mathcal{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\log(n)) = \mathcal{H}_\infty(\log(n))$). La cuestión de si una igualdad análoga vale para frecuencias arbitrarias fue objeto de estudio en los últimos años. Este problema está relacionado fuertemente con una versión del Teorema de Montel de Bayart: toda sucesión acotada $\left(\sum a_n^N e^{-\lambda_n s}\right)_N$ de series de Dirichlet en $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ admite una subsucesión (N_k) y $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{D}_\infty(\lambda)$ tal que $\left(\sum a_n^{N_k} e^{-\lambda_n s}\right)_k$ converge a $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ uniformemente en $\mathbb{C}_\sigma$ para todo $\sigma > 0$ cuando $k \to \infty$. En [DS20b, Teorema 5.1], Defant y Schoolmann prueban las siguientes equivalencias

Teorema 3.2.1. *Para toda frecuencia λ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) El Teorema de Bohr vale para λ,

(II) $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ es un espacio de Banach,

(III) $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ satisface el Teorema de Montel para series de Dirichlet,

(IV) $\mathcal{D}_\infty(\lambda) = \mathcal{H}_\infty(\lambda)$, isométricamente y los coeficientes se preservan,

(V) $\mathcal{D}_\infty(\lambda) = H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$, isométricamente y los coeficientes se preservan.

Para el enunciado (V) observamos que, de hecho, $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ está contenido isométricamente en $H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$ para cualquier frecuencia λ. Esto se ve considerando, para cada $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{D}_\infty(\lambda)$ la función límite $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$. De esta forma, como se puede ver en [Sch20a, Corolario 3.9] se tiene que

$$a_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\sigma + it) e^{(\sigma+it)\lambda_n} dt = a_{\lambda_n}(f),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma > 0$, lo que implica

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \left\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_\infty. \tag{3.7}$$

El Teorema de Montel para los espacios de Hardy de series de Dirichlet es una de las principales herramientas que vamos a utilizar, pero como se puede ver es un tema de interés independiente para la teoría de la estructura de estos espacios. Tal como comentamos en el Capítulo 2, Bayart es el primero en dar un resultado de este tipo para series de Dirichlet. Defant y Schoolmann extienden este resultado para las series de Dirichlet generales, más específicamente para el espacio $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$, como vimos en el Teorema 3.2.1. Para extender estos resultados a los espacios $\mathsf{H}_p(\lambda)$, a partir de lo argumentado en el Capítulo 2, vamos a tener que reformularlo en términos de las series trasladadas. Siguiendo las definiciones dadas en el Capítulo 2, dada una λ-serie de Dirichlet $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ y $\sigma \in \mathsf{R}$, vamos a notar por D_σ a la serie de coeficientes $a_n e^{-\lambda_n \sigma}$, es decir $D_\sigma = \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}$ (notar que nuevamente, si D converge en $s \in \mathsf{C}$ entonces $D(s+\sigma) = D_\sigma(s)$). En cambio si $k \in \mathsf{N}$, entonces usaremos la notación D_k para notar a la serie D_σ con $\sigma = \frac{1}{k}$. La cuestión nuevamente consiste en determinar bajo qué condiciones de λ se verifica el Teorema de Montel para los espacios de Hardy $\mathsf{H}_p(\lambda)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Más concretamente, bajo que condiciones de λ podemos garantizar que toda sucesión acotada $\big(\sum a_n^N e^{-\lambda_n s}\big)_N$ de series de Dirichlet en $\mathsf{H}_p(\lambda)$ admite una subsucesión (N_k) y $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathsf{H}_p(\lambda)$ tal que $\big(\sum a_n^{N_k} e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}\big)_k$ converge a $\sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}$ en $\mathsf{H}_p(\lambda)$ para todo $\sigma > 0$ cuando $k \to \infty$. En [DS20b, Teorema 5.8], Defant y Schoolmann prueban que esto ocurre si la frecuencia satisface el Teorema de Bohr. Mostramos ahora que esta suposición en realidad no es necesaria, y que el Teorema de Montel en los espacios de Hardy vale para cualquier frecuencia.

Teorema 3.2.2. *Sea $\lambda = (\lambda_n)$ una frecuencia y $1 \leq p \leq \infty$. Para toda sucesión acotada $\big(\sum a_n^{(N)} e^{-\lambda_n s}\big)_N$ en $\mathsf{H}_p(\lambda)$, existe una subsucesión $(N_k)_k$ y una λ-serie de Dirichlet $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathsf{H}_p(\lambda)$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \sum a_n^{(N_k)} e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} = \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}$$

en $\mathsf{H}_p(\lambda)$ para todo $\sigma > 0$.

De hecho, demostramos un resultado más general para funciones uniformemente casi periódicas (Teorema 3.2.4), del cual se sigue este resultado. Necesitamos un poco de trabajo previo. Vamos a comenzar por fijar algunas notaciones y recordar propiedades básicas de las herramientas principales con las que vamos a trabajar. Todas ellas son bastante estándar y se pueden encontrar en varias monografías, como por ejemplo [PW12, Rud90]. Antes que nada, la transformada de Fourier de una función $f \in L_1(\mathsf{R})$ se denota por $\mathsf{F}(f)$ o $\widehat{f}$ y se define como

$$\mathsf{F}(f)(t) = \widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dx\,,$$

para $t \in \mathsf{R}$. El núcleo de Féjer está definido, para $x > 0$, como

$$K_x(t) = \frac{1}{2\pi x}\Big(\frac{\sin(xt/2)}{t/2}\Big)^2$$

para $t \in \mathsf{R}$. Estos pertenecen a $L_1(\mathsf{R})$ y $\|K_x\|_1 = 1$ para todo x. La familia $\{K_x\}_{x>0}$ es un núcleo de sumabilidad (esto es $K_x * f \to f$ en $L_1(\mathsf{R})$ cuando $x \to \infty$ para todo $f \in L_1(\mathsf{R})$). Tampoco es difícil chequear que

$$\widehat{K}_x(t) = \Big(1 - \frac{|t|}{x}\Big)\chi_{[-x,x]}(t)\,, \tag{3.8}$$

donde χ_A es la función característica del conjunto A.

El núcleo de Poisson está definido para $\sigma > 0$ como

$$P_\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{t^2+\sigma^2}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Nuevamente, este pertenece a $L_1(\mathbb{R})$ con $\|P_\sigma\|_1 = 1$, y para todos σ, t

$$\widehat{P}_\sigma(t) = e^{-|t|\sigma}\,. \tag{3.9}$$

Finalmente, dada una frecuencia λ y $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{D}(\lambda)$, para cada $x > 0$ la correspondiente media de Riesz de D de orden 1 (ver [DS20a]) está dada por

$$R_x^\lambda(D) = \sum_{\lambda_n < x} a_n \Big(1 - \frac{\lambda_n}{x}\Big) e^{-\lambda_n s}\,.$$

Con esto, dado que toda $f \in H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$ formalmente define una serie de Dirichlet $D = \sum a_{\lambda_n}(f) e^{-\lambda_n s}$, la media de Riesz de f de longitud x y orden 1 está dada por la función entera

$$R_x^\lambda(f)(s) = \sum_{\lambda_n < x} a_{\lambda_n}(f) \Big(1 - \frac{\lambda_n}{x}\Big) e^{-\lambda_n s}\,.$$

Notemos que, para una λ-serie de Dirichlet dada, $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$, por [Sch20a, Lema 3.8] sabemos que

$$\begin{aligned} &\operatorname{ínf}\Big\{\sigma \in \mathbb{R} \colon (R_x^\lambda(D))_x \text{ converge uniformemente en } \mathbb{C}_\sigma\Big\} \\ &\leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\log\big(\sup_{\operatorname{Re} s > 0} \big|R_x^\lambda(D)(s)\big|\big)}{x}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observemos que, en particular, si $\sup_{\operatorname{Re} s > 0} \big|R_x^\lambda(D)(s)\big|$ está acotado en x, entonces $(R_x^\lambda(D))_x$ converge uniformemente en cada semiplano $\mathbb{C}_\sigma$ con $\sigma > 0$.

Con esto, tenemos a mano todo lo que necesitamos para poder avanzar. Comenzamos aislando algunas observaciones.

Lema 3.2.3. *Sea $\lambda = (\lambda_n)$ una frecuencia arbitraria, y $f \in H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$.*

(I) Para todo $\sigma, \varepsilon, x > 0$ y $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$R_x^\lambda(f)(\sigma + \varepsilon + it) = (f_\varepsilon * P_\sigma * K_x)(t)\,. \tag{3.11}$$

(II) $\|R_x^\lambda(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ para todo $x > 0$. En particular, $(R_x^\lambda(f))_x$ converge uniformemente a f en cada semiplano $\mathbb{C}_\sigma$, con $\sigma > 0$.

(III) $\big(\sup_{\operatorname{Re} s = \sigma} |f(s)|\big)_{\sigma > 0}$ es decreciente en $\sigma > 0$, y $\|f\|_\infty = \lim_{\sigma \to 0} \sup_{\operatorname{Re} s = \sigma} |f(s)|$.

(IV) Para todo $\sigma > 0$ tenemos que

$$\sup_{\operatorname{Re} s \geq \sigma} |f(s)| = \sup_{\operatorname{Re} s = \sigma} |f(s)|\,.$$

Demostración. (I) Tomemos en primer lugar un λ-polinomio $Q(t) = \sum_{n \in F} c_n e^{-\lambda_n it}$, donde $F \subset \mathbb{N}$ es finito. Entonces, para $\sigma > 0$ fijo y $t \in \mathbb{R}$ tenemos, usando (3.8) y (3.9)

$$\begin{aligned} (Q * P_\sigma * K_x)(t) &= \sum_{n \in F} c_n e^{-\lambda_n it} \mathcal{F}(P_\sigma * K_x)(\lambda_n) = \sum_{n \in F} c_n e^{-\lambda_n it} \widehat{P}_\sigma(\lambda_n) \widehat{K}_x(\lambda_n) \\ &= \sum_{n \in F} c_n e^{-\lambda_n it} e^{-\lambda_n \sigma} \Big(1 - \frac{\lambda_n}{x}\Big) \chi_{[-x,x]}(\lambda_n) \\ &= \sum_{\substack{n \in F \\ \lambda_n < x}} c_n e^{-\lambda_n(\sigma + it)} \Big(1 - \frac{\lambda_n}{x}\Big)\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Fijemos ahora $\varepsilon > 0$. Dado que f_ε es uniformemente casi periódica, existe una sucesión $(Q_N^\varepsilon)_N$ de λ-polinomios que converge a f_ε uniformemente en $\mathbb{C}_0$. Más aún,

$$\lim_{N\to\infty} a_{\lambda_n}(Q_N^\varepsilon) = a_{\lambda_n}(f_\varepsilon) = a_{\lambda_n}(f)e^{-\varepsilon\lambda_n}$$

para todo n. Luego, aplicando (3.12) para los Q_N^ε, y haciendo $N \to \infty$, del lado izquierdo de la igualdad obtenemos $(f_\varepsilon * P_\sigma * K_x)(t)$ (por la convergencia uniforme) mientras que del lado derecho nos queda $R_x^\lambda(f_\varepsilon)(\sigma+it) = R_x^\lambda(f)(\sigma+\varepsilon+it)$ tal como afirmamos en (3.11).
Para probar (II), notemos que (3.11) inmediatamente implica

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |R_x^\lambda(f)(\sigma+\varepsilon+it)| \leq \|f_\varepsilon\|_\infty \|P_\sigma\|_1 \|K_x\|_1 \leq \|f\|_\infty .$$

Haciendo tender $\varepsilon, \sigma \to 0$ obtenemos lo que queríamos. La convergencia uniforme sobre los semiplanos se sigue inmediatamente de (3.10), mientras que el hecho de que el límite es f se obtiene a partir de que los coeficientes de Bohr de R_x^λ convergen a los de f y del hecho de que estos coeficientes determinan de forma única a una función casi periódica (ver [Bes55, Capítulo 1, §4, 7° Teorema, p. 27]).
Dado que las medias de Riesz son sumas finitas tenemos (ver [Sch20a, Sección 2] o [DGMSP19, Lema 1.7], del cual el argumento se puede seguir de forma idéntica)

$$\sup_{\operatorname{Re} s=\sigma} \left|R_x^\lambda(f)(s)\right| = \sup_{\operatorname{Re} s\geq\sigma} \left|R_x^\lambda(f)(s)\right| .$$

Esto nos da

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|R_x^\lambda(f)(\mu+it)\right| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|R_x^\lambda(f)(\sigma+it)\right| ,$$

para $0 < \sigma < \mu$, y dado que (II) garantiza la convergencia uniforme de $R_x^\lambda(f)$ a f sobre las abscisas $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ para $\sigma > 0$, se sigue entonces (III). Una vez tenemos esto, (IV) se obtiene del hecho de que $f(\sigma + \bullet)$ es uniformemente casi periódica, que $\sup_{\operatorname{Re} s=\rho} |f(s)|$ crece cuando $\rho \to \sigma^+$ y que $\sup_{\operatorname{Re} s=\sigma} |f(s)| < \infty$. □

Pasamos ahora al Teorema de Montel para $\mathcal{H}_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$ que mencionamos anteriormente.

Teorema 3.2.4. *Sea λ una frecuencia arbitraria. Para toda sucesión acotada $(f_N)_N$ en $\mathcal{H}_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$, existen una subsucesión $(f_{N_k})_k$ y $f \in \mathcal{H}_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$ tal que $f_{N_k}(\sigma+\bullet) \to f(\sigma+\bullet)$ en $\mathcal{H}_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$ para todo $\sigma > 0$.*

Demostración. Dado que $|a_{\lambda_n}(f_N)| \leq \|f_N\|_\infty \leq \sup_N \|f_N\|_\infty < \infty$ para todo n y N, para $n = 1$ existe una subsucesión $\left(N_k^{(1)}\right)_k$ tal que $\left(a_{\lambda_1}\left(f_{N_k^{(1)}}\right)\right)_k$ es convergente. Dado que $a_{\lambda_2}\left(f_{N_k^{(1)}}\right)$ es acotada, existe una subsucesión $\left(N_k^{(2)}\right)_k$ de $\left(N_k^{(1)}\right)_k$ tal que $\left(a_{\lambda_2}\left(f_{N_k^{(2)}}\right)\right)_k$ es convergente. Teniendo $\left(N_k^{(1)}\right)_k, \ldots, \left(N_k^{(j)}\right)_k$ de modo tal que $\left(a_{\lambda_i}\left(f_{N_k^{(i)}}\right)\right)_k$ es convergente y con $\left(N_k^{(i+1)}\right)_k$ subsucesión de $\left(N_k^{(i)}\right)_k$ si $1 \leq i < j$, dado que $\left(a_{\lambda_{j+1}}\left(f_{N_k^{(1)}}\right)\right)_k$ es acotada, existe una subsucesión $\left(N_k^{(j+1)}\right)_k$ de $\left(N_k^{(j)}\right)_k$ tal que $\left(a_{\lambda_{j+1}}\left(f_{N_k^{(j+1)}}\right)\right)_k$ es convergente. Realizado este procedimiento para cada $j \in \mathbb{N}$, consideramos la sucesión $(N_k)_k$ definida por $N_k = N_k^{(k)}$, entonces $(N_k)_k$ es una subsucesión de $\left(N_k^{(j)}\right)_k$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, mediante este argumento diagonal estándar, obtenemos que las sucesiones $\left(a_{\lambda_n}(f_{N_k})\right)_k$ convergen (en $\mathbb{C}$) para todo n cuando $k \to \infty$. Definamos, para cada n,

$$a_{\lambda_n} := \lim_{k\to\infty} a_{\lambda_n}(f_{N_k}).$$

Usando el Lema 3.2.3–(II) concluimos que

$$\Big|\sum_{\lambda_n<x} a_{\lambda_n} e^{-\lambda_n\sigma}\big(1-\frac{\lambda_n}{x}\big)e^{-i\lambda_n t}\Big| = \lim_{k\to\infty} |R_x^\lambda(f_{N_k})(\sigma+it)| \leq \sup_N \|f_N\|_\infty ,$$

para todo $x > 0$, $t \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Luego (3.10) nos da

$$s \to \sum_{\lambda_n < x} a_{\lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right) e^{-\lambda_n s}$$

converge uniformemente en cada semiplano $\mathbb{C}_\sigma$ con $\sigma > 0$ cuando $x \to \infty$, y vamos a denotar por f a dicha función límite. La convergencia uniforme sobre los semiplanos nos dice que $f \in H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$ y sus coeficientes de Bohr resultan $a_{\lambda_n}(f) = a_{\lambda_n}$. Solo queda ver que $\lim_{k\to\infty} f_{N_k}(\sigma + \bullet) = f(\sigma + \bullet)$ en $H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$ para todo $\sigma > 0$. Fijemos $\sigma > 0$ y observemos que, por el Lema 3.2.3–(IV) es suficiente comprobar que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_{N_k}(\sigma + it) - f(\sigma + it)| = 0\,.$$

Notemos primero que por el Lema 3.2.3–(II) haciendo tender $x \to \infty$ in (3.11) tenemos $g_{\sigma/2} * P_{\sigma/2} = g(\sigma + i\bullet)$ para toda $g \in H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0)$. Esto, junto con el Lema 3.2.3–(I) nos da,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} |R_x^\lambda(g)(\sigma + it) - g(\sigma + it)| &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |g_{\sigma/2} * P_{\sigma/2} * K_x(t) - g_{\sigma/2} * P_{\sigma/2}(t)| \\ &\leq \|g\|_\infty \|P_{\sigma/2} - P_{\sigma/2} * K_x\|_{L_1(\mathbb{R})}\,. \end{aligned}$$

para todo g y $x > 0$. Como $(K_x)_x$ es un núcleo de sumabilidad, el último término tiende a 0 cuando $x \to \infty$. Entonces, por ser $(f_N)_N$ una sucesión acotada, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar x_0 tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(\sigma + it) - R_x^\lambda(f)(\sigma + it)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_N(\sigma + it) - R_x^\lambda(f_N)(\sigma + it)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

para todo $x > x_0$. Por otro lado, dado que $\lim_{k\to\infty} a_{\lambda_n}(f_{N_k}) = a_{\lambda_n}$ para cada n, fijando $x = 2x_0$ podemos encontrar un k_0 tal que

$$\sum_{\lambda_n < x} |a_{\lambda_n} - a_{\lambda_n}(f_{N_k})| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

para todo $k \geq k_0$. Juntando todo esto, dados $k \geq k_0$ y $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned} &|f(\sigma + it) - f_{N_k}(\sigma + it)| \\ &\leq |f(\sigma + it) - R_x^\lambda(f)(\sigma + it)| + |R_x^\lambda(f)(\sigma + it) - R_x^\lambda(f_{N_k})(\sigma + it)| + |f(\sigma + it) - R_x^\lambda(f_{N_k})(\sigma + it)|\,, \end{aligned}$$

y las tres estimaciones previas completan la prueba. □

Siguiendo paso a paso la prueba del Teorema 3.2.4, pero reemplazando los módulos por normas, obtenemos el siguiente resultado para los espacios de funciones uniformemente casi periódicas a valores vectoriales.

Teorema 3.2.5. *Sea λ una frecuencia arbitraria y X un espacio de Banach. Supongamos que $(f_N)_N$ es acotada en $H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0, X)$, y que existe una subsucesión (N_k) para la cual $\big(a_{\lambda_n}(f_{N_k})\big)_k$ es convergente para todo n. Entonces existe $f \in H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0, X)$ tal que $\lim_{k\to\infty} f_{N_k}(\sigma + \bullet) = f(\sigma + \bullet)$ en $H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0, X)$ para todo $\sigma > 0$.*

Los Teoremas 3.2.4 y 3.2.5, junto con (3.6), nos permiten pasar a demostrar el Teorema 3.2.2.

Demostración del Teorema 3.2.2. El caso $p = \infty$ se sigue inmediatamente del Teorema 3.2.4, del hecho de que $H_\infty^\lambda(\mathbb{C}_0) = \mathcal{H}_\infty(\lambda)$ (recordar el Teorema 3.1.1) y de que $a_n(D_\sigma) = a_n e^{-\lambda_n \sigma} = a_{\lambda_n}(f(\sigma + \bullet))$. Los casos

$1 \leq p < \infty$ se van a seguir del Teorema 3.2.5, combinado con la inclusión $\Psi \colon \mathsf{H}_p(\lambda) \hookrightarrow H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0, \mathsf{H}_p(\lambda))$ dada en (3.6). Para comenzar, vamos a usar que

$$|a_n^{(N)}| \leq \sup_{M \in \mathsf{N}} \Big\| \sum a_m^{(M)} e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{H}_p(\lambda)} =: C$$

para todo n y M (simple de ver desde el lado del análisis de Fourier y la identificación de los coeficientes). Nuevamente un argumento diagonal muestra que podemos encontrar una subsucesión $(N_k)_k$ tal que $\big(a_n^{N_k}\big)_k$ converge para todo n. Definamos

$$a_n := \lim_{k \to \infty} a_n^{(N_k)},$$

y consideremos la λ-serie de Dirichlet $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, en principio formal. Nuestro objetivo será ahora comprobar que esta serie pertenece a $\mathsf{H}_p(\lambda)$, y que es el límite de la subsucesión de las λ-series de Dirichlet. Para cada N tomemos la función $f_N = \Psi\big(\sum a_n^{(N)} e^{-\lambda_n s}\big)$ y notemos que

$$\lim_k a_{\lambda_n}(f_{N_k}) = \lim_k a_n^{(N_k)} e^{-\lambda_n z} = a_n e^{-\lambda_n z}$$

existe (en $\mathsf{H}_p(\lambda)$) para todo n. Ahora podemos usar el Teorema 3.2.5 para encontrar una función $f \in H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0, \mathsf{H}_p(\lambda))$ tal que $\lim_{k\to\infty} f_{N_k}(\sigma + \bullet) = f(\sigma + \bullet)$ en $H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0, \mathsf{H}_p(\lambda))$ para todo $\sigma > 0$.
Dado que Ψ es una isometría y $\Psi(\sum a_n^{N_k} e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}) = f_{N_k}(\sigma + \bullet)$, la sucesión $\sum a_n^{N_k} e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}$ es de Cauchy en $\mathsf{H}_p(\lambda)$ y por lo tanto converge con límite $\sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}$. Luego

$$\sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} \in \mathsf{H}_p(\lambda) \text{ para todo } \sigma > 0 \text{ con } \Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} \Big\|_p \leq C.$$

Por [DS19b, Teorema 4.7] sabemos que una serie pertenece a $\mathsf{H}_p(\lambda)$ si y sólo si todas sus traslaciones lo hacen y además están uniformemente acotadas. Esto implica que $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathsf{H}_p(\lambda)$. Más aún, nuevamente el hecho de que la inclusión Ψ es una isometría nos dice que

$$\Big\| \sum a_n^{(N_k)} e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} - \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{H}_p(\lambda)} = \| f(\sigma + i\bullet) - f^{N_k}(\sigma + i\bullet) \|_\infty,$$

para todo $\sigma > 0$, completando entonces la prueba. □

Si consideramos, para $\sigma > 0$, el operador de traslación $\tau_\sigma : \mathsf{H}_p(\lambda) \to \mathsf{H}_p(\lambda)$ dado por

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \mapsto \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}, \tag{3.13}$$

está bien definido y es continuo (ver [DS19b, Teorema 4.7]). El Teorema 3.2.2 nos permite decir un poco más.

Corolario 3.2.6. *Para todo $\sigma > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$ el operador traslación $\tau_\sigma \colon \mathsf{H}_p(\lambda) \to \mathsf{H}_p(\lambda)$ es compacto.*

Para concluir esta sección vamos a comentar un criterio similar al criterio de Hilbert pero ahora para los espacios de Hardy $\mathsf{H}_p(\lambda)$. Mencionamos en la Sección 3.1 que $\lambda = (R, B)$, para una matriz infinita de números racionales $R = (r_k^n)_{n,k \in \mathsf{N}}$ y una sucesión $B = (b_k)$ en R, si las filas de R tiene solo finitos elementos no nulos, B es Q-linealmente independiente y para cada n se tiene que $\lambda_n = \sum_k r_k^n b_k$. Además comentamos que restricción N-ésima de una λ-serie de Dirichlet $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ es la serie

$$D|_N = \sum_{\lambda_n \in \operatorname{span}_{\mathsf{Q}}\{b_1,\dots,b_N\}} a_n e^{-\lambda_n s},$$

coincidiendo esto con lo visto para las restricciones de las series de Dirichlet ordinarias. De esta forma, la pregunta natural es si una λ-serie de Dirichlet pertenece a $\mathsf{H}_p(\lambda)$ si y sólo si sus restricciones $D|_N$ pertenecen a $\mathsf{H}_p(\lambda)$ y sus normas están acotadas. En [DS19b, Observación 4.21], Defant y Schoolmann prueban la necesidad para cualquier tipo de frecuencia a partir de la conexión con el análisis de Fourier en grupos. Más tarde, en [DS20b, Teeorema 5.9] prueban la suficiencia para el caso en que la frecuencia λ satisface el Teorema de Bohr, siendo una consecuencia inmediata del Teorema de Montel que demostraban. Ahora que dejamos de lado esta hipótesis en el Teorema 3.2.2, podemos obtener la siguiente versión para frecuencias arbitrarias.

Corolario 3.2.7. *Sea λ una frecuencia con descomposición (B, R), y $1 \leq p \leq \infty$. Una λ-serie de Dirichlet D pertenece a $\mathsf{H}_p(\lambda)$ si y sólo si $D|_N \quad \mathsf{H}_p(\lambda)$ para todo N y $\sup_N \; D|_N \; {}_{\mathsf{H}_p(\lambda)} < \infty$. Más aún, en este caso, $\; D \; {}_{\mathsf{H}_p(\lambda)} = \sup_N \; D|_N \; {}_{\mathsf{H}_p(\lambda)}$.*

Demostración. La necesidad está demostrada en [DS19b, Observación 4.21]. Para la suficiencia vamos a seguir la demostración de [DS20b, Teeorema 5.9]. Supongamos que $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ es una λ-serie de Dirichlet tal que $D|_N \quad \mathsf{H}_p(\lambda)$ para todo N y $\sup_N \; D|_N \; {}_{\mathsf{H}_p(\lambda)} < \infty$. Por el Teorema 3.2.2, existe una subsucesión (N_k) y una λ-serie de Dirichlet E en $\mathsf{H}_p(\lambda)$ tales que $D_\sigma|_{N_k} \to E_\sigma$ en $\mathsf{H}_p(\lambda)$ para todo $\sigma > 0$. En particular, tomando por ejemplo $\sigma = 1$ y comparando los coeficientes nos queda que

$$a_n e^{-\lambda_n} = \lim_{N \to \infty} a_n(D_1|_{N_k}) = a_n(E_1) = a_n(E) e^{-\lambda_n}.$$

Tenemos entonces que $a_n = a_n(E)$ y luego $D \quad \mathsf{H}_p(\lambda)$. $\square$

3.3. Espacios pre-Fréchet generados por abscisas

Para introducir los espacios de λ-series de Dirichlet trasladadas, vamos a comenzar por un enfoque abstracto para definir ciertos espacios (pre-)Fréchet de λ-series de Dirichlet derivados de algunos espacios normados preexistentes (idea inspirada por lo realizado en [DPSP19] por Defant, Pérez y Sevilla Peris). En un primer paso, dado un espacio normado $\mathfrak{X}(\lambda)$ de λ-series de Dirichlet (satisfaciendo ciertas condiciones que explicitaremos luego), vamos a definir

- la abscisa $\sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D)$ asociada a $\mathfrak{X}(\lambda)$ para cada λ-serie de Dirichlet D,

y luego en un segundo paro vamos a generar el

- espacio $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ de todas las λ-series de Dirichlet para las cuales $\sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D) \leq 0$ (espacio que resultará, como veremos, pre-Fréchet) .

Más tarde aplicaremos esta definición general para estudiar los espacios $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ y $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ para $1 \leq p \leq \infty$, generados por los correspondientes $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ y $\mathsf{H}_p(\lambda)$. También usaremos un procedimiento análogo para definir el espacio $H^\lambda_{\infty,+}(\mathsf{C}_0)$ (formado por funciones uniformemente casi periódicas) a partir de $H^\lambda_\infty(\mathsf{C}_0)$.

3.3.1. Abscisas

Dada una frecuencia λ, vamos a considerar los espacios normados $\mathfrak{X}(\lambda)$ de λ-series de Dirichlet que satisfacen los siguientes tres requerimientos:

(AS1) Todos los monomios $e^{-\lambda_n s}$ perteneces a $\mathfrak{X}(\lambda)$ y tienen norma 1. En particular, todos los λ-polinomios de Dirichlet $\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s}$ pertenecen a $\mathfrak{X}(\lambda)$, y

$$\Big\| \sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} \leq \sum_{n=1}^N |a_n| .$$

(AS2) Los funcionales coeficientes $\mathfrak{X}(\lambda) \to \mathbb{C}$ dados por $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \to a_n$, están uniformemente acotados. En particular, existe una constante positiva C tal que para todo λ-polinomio de Dirichlet $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}$ se tiene que

$$\max_{1\le n\le N} |a_n| \le C \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} .$$

(AS3) Para todo $\sigma > 0$ el operador traslación

$$\tau_\sigma : \mathfrak{X}(\lambda) \to \mathfrak{X}(\lambda) ,$$

definido como en (3.13) está bien definido y es acotado.

En el caso de que un espacio $\mathfrak{X}(\lambda)$ cumpla estas tres condiciones vamos a decir que es λ-admisible. También vamos a definir el subespacio

$$\mathfrak{X}^0(\lambda) = \Big\{ \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \mathfrak{X}(\lambda) \colon \ \ \sigma > 0, \Big(\sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} \Big)_x \text{ converge en } \mathfrak{X}(\lambda) \Big\} .$$

Este espacio nuevamente resulta λ-admisible. Notemos que, si la sucesión de monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forma una base de $\mathfrak{X}(\lambda)$, entonces $\mathfrak{X}(\lambda) = \mathfrak{X}^0(\lambda)$. Veamos ahora algunos ejemplos de espacios admisibles.

Ejemplo 3.3.1. Sea λ una frecuencia cualquiera.

(a) Fijemos un espacio de Banach de sucesiones complejas X que satisface las siguientes dos propiedades: (1) los e_k forman una base normalizada de X y (2) si $(a_n) \quad X$, entonces $(e^{-\lambda_n \sigma} a_n) \quad X$. Notemos que la primer condición nos dice que si $(a_n) \quad X$, entonces $a = \sum a_n e_n$, por lo que $(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n e_n)_N$ es de Cauchy en X, de donde se tiene que $|a_n| = \ \ a_n e_n \ \ _X \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por otro lado, si $a \quad \ell_1$ entonces $(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n e_n)_N$ es de Cauchy en X y luego $a \quad X$. Es decir que tenemos las inclusiones $\ell_1 \quad X \quad c_0$.

Algunos ejemplos de estos espacios X son los espacios ℓ_p para $1 \le p < \infty$ y c_0. Otro espacio de Banach relevante para nuestro propósito es el espacio Σ, definido como el espacio lineal de todas las sucesiones complejas (a_n) tales que $\sum a_n$ converge, considerado con la norma $\ (a_n) \ _\Sigma = \sup_N |\sum_{n=1}^{N} a_n|$. La propiedad (1) es directa, mientras que la (2) puede probarse directamente u observando que, para una sucesión $(a_n) \quad \Sigma$ dada, la serie de Dirichlet $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ converge en $s = 0$, y luego también en $\mathbb{C}_0$. Observemos que Σ es isomorfo (aunque no isométrico) a c_0,con la identificación dada por $(a_n) \to \big(\sum_{n=N}^{\infty} a_n\big)_N$.

Definimos $\mathsf{D}_X(\lambda)$ como el espacio lineal de todas las λ-series de Dirichlet $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ tales que $(a_n) \quad X$. Junto con la norma $\big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \big\|_{\mathsf{D}_X(\lambda)} = \ \ (a_n) \ \ _X$ es fácil ver que $\mathsf{D}_X(\lambda)$ es un espacio de Banach λ-admisible. Dado que (por definición) los espacios $\mathsf{D}_X(\lambda)$ y X están identificados como espacios de Banach, los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forman una base de $\mathsf{D}_X(\lambda)$ y, en particular, $\mathsf{D}_X(\lambda) = \mathsf{D}_X^0(\lambda)$. Para ver esto último observemos en primer lugar que si $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \mathsf{D}_X(\lambda)$, entonces para $\sigma > 0$ se tiene que $(e^{-\lambda_n \sigma} a_n) \quad X$, es decir que $D_\sigma \quad \mathsf{D}_X(\lambda)$. Ahora bien, como los monomios son una base, tenemos que $D_\sigma = \lim_N \sum\limits_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}$; es decir que las sumas parciales convergen en X y por lo tanto $D \quad \mathsf{D}_X^0(\lambda)$.

Serán especialmente importante para nosotros los espacios de Banach λ-admisibles $\mathsf{D}_{\ell_p}(\lambda)$, $\mathsf{D}_\Sigma(\lambda)$ y $\mathsf{D}_{c_0}(\lambda)$. Es más, para cualquiera de los espacios X mencionados, claramente se tiene que

$$\mathsf{D}_{\ell_1}(\lambda) \quad \mathsf{D}_X(\lambda) \quad \mathsf{D}_{c_0}(\lambda) .$$

(b) Para cada $1 \leq p \leq \infty$ el espacio $\mathsf{H}_p(\lambda)$ es λ-admisible. Además, $\mathsf{H}_p(\lambda) = \mathsf{H}_p^0(\lambda)$ para $1 < p < \infty$, dado que en este caso la sucesión $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forma una base (ver [DS19a, Teorema 4.16]). Notemos que $\mathsf{D}_{\ell_2}(\lambda) = \mathsf{H}_2(\lambda)$ como espacios de Banach (identificando $(a_n)_n$ con $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$).

(c) El espacio $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ es claramente un espacio normado λ-admisible, y si λ satisface el Teorema de Bohr este coincide con $\mathsf{D}_\infty^0(\lambda)$ (dado que pertenecer a $\mathsf{D}_\infty^0(\lambda)$ es que las sumas converjan uniformemente en cada semiplano C_σ). Por otro lado, del Teorema 3.2.1 tenemos que $\mathsf{D}_\infty(\lambda) = \mathsf{H}_\infty(\lambda)$ si y sólo si λ satisface el Teorema de Bohr.

Dado un espacio λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$ se define la $\mathfrak{X}(\lambda)$-abscisa de una λ-serie de Dirichlet arbitraria $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ como

$$\sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D) = \inf\left\{\sigma \quad \mathsf{R} \colon \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma}\, e^{-\lambda_n s} \quad \mathfrak{X}(\lambda)\right\} \quad [-\infty, \infty]. \tag{3.14}$$

A su vez, la $\mathfrak{X}^0(\lambda)$-abscisa (recordar que este espacio también es λ-admisible) de $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ es el ínfimo de todos los reales σ tal que las sumas parciales $\left(\sum_1^N a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}\right)_N$ convergen en $\mathfrak{X}(\lambda)$.

Ejemplo 3.3.2. Como en [DPSP19], las abscisas clásicas de convergencia se pueden reformular en términos de las abscisas de ciertos espacios admisibles. Sea λ una frecuencia, y una λ-serie de Dirichlet $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$. Entonces

(a) $\sigma_c(D) = \sigma_{\mathsf{D}_\Sigma(\lambda)}(D)$, dado que si $D_\sigma \quad \mathsf{D}_\Sigma(\lambda)$ entonces por definición $\sum a_n e^{-\lambda_n \sigma}$ converge y por lo tanto D converge en C_σ, coincidiendo luego las abscisas al considerar el ínfimo.

(b) $\sigma_a(D) = \sigma_{\mathsf{D}_{\ell_1}(\lambda)}(D)$, nuevamente si $D_\sigma \quad \mathsf{D}_{\ell_1}(\lambda)$ entonces $\sum |a_n e^{-\lambda_n \sigma}| < \infty$ y por lo tanto D converge absolutamente en C_σ, considerando el ínfimo tenemos la igualdad.

(c) $\sigma_b(D) = \sigma_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)}(D)$, dado que la pertenencia de D_σ a $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ es justamente la convergencia y acotación de D en el semiplano C_σ.

(d) $\sigma_u(D) = \sigma_{\mathfrak{X}^0(\lambda)}(D)$, donde $\mathfrak{X}(\lambda) = \mathsf{D}_\infty(\lambda)$ o $\mathsf{H}_\infty(\lambda)$. Dado que el hecho de que las sumas parciales de D_σ converjan en $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ equivalen a que D converge uniformemente en el semiplano C_σ. Por otro lado, por el Teorema 3.1.1, las sumas parciales de D_σ convergen en $\mathsf{H}_\infty(\lambda)$ si y sólo si las sumas parciales de D convergen uniformemente en el semiplano C_σ.

Una herramienta útil para la comprensión de estas abscisas son las conocidas como fómulas de Bohr-Cahen para $\sigma_i(D)$ con $i = c, u, a$. Un análisis cuidadoso de las pruebas usuales muestra que estas fórmulas pueden extenderse a nuestros entornos abstractos (ver por ejemplo [DGMSP19, QQ20] o [DPSP19, Proposición 2.2]), siempre que $\mathfrak{X}(\lambda)$ sea un espacio de Banach.

Proposición 3.3.3. *Sea $\mathfrak{X}(\lambda)$ un espacio de Banach λ-admisible de λ-series de Dirichlet. Entonces para toda $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \mathsf{D}(\lambda)$ tenemos*

$$\sigma_{\mathfrak{X}^0(\lambda)}(D) \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\log \left\| \sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathfrak{X}(\lambda)}}{x},$$

donde la igualdad vale siempre que la abscisa es no negativa.

Demostración. Tomemos $L = \limsup_{x \to \infty} \frac{\log \left\| \sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathfrak{X}(\lambda)}}{x}$ y supongamos que $L < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$, por definición existe $N_0 \quad \mathsf{N}$ tal que para todo $N \geq N_0$ se tiene que

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} \leq e^{\lambda_N (L + \varepsilon/2)}. \tag{3.15}$$

Sean $M > N > N_0$, por la fórmula de sumación de Abel tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{n=N+1}^{M} a_n e^{-\lambda_n(L+\varepsilon+s)} \Big\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} \leq{}& \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} e^{-\lambda_N (L+\varepsilon)} + \Big\| \sum_{n=1}^{M} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} e^{-\lambda_M (L+\varepsilon)} \\ &+ \sum_{n=N}^{M-1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} (e^{-\lambda_n(L+\varepsilon)} - e^{-\lambda_{n+1}(L+\varepsilon)}).\end{aligned}$$

Por (3.15), los primeros dos términos los podemos acotar por $e^{-\lambda_N \frac{\varepsilon}{2}}$ y $e^{-\lambda_M \frac{\varepsilon}{2}}$ respectivamente, los cuales tienden a cero cuando $N, M \to \infty$. Para el tercer término vamos a comenzar por reescribir

$$e^{-\lambda_n(L+\varepsilon)} - e^{-\lambda_{n+1}(L+\varepsilon)} = |L+\varepsilon| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-x(L+\varepsilon)} \mathrm{d}x,$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{M-1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} (e^{-\lambda_n(L+\varepsilon)} - e^{-\lambda_{n+1}(L+\varepsilon)}) &\leq \sum_{n=N}^{M-1} e^{\lambda_n (L+\frac{\varepsilon}{2})} |L+\varepsilon| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-x(L+\varepsilon)} \mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{n=N}^{M-1} |L+\varepsilon| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-x\frac{\varepsilon}{2}} \mathrm{d}x \\ &= |L+\varepsilon| \int_{\lambda_N}^{\lambda_M} e^{-x\frac{\varepsilon}{2}} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

integral que tiende a cero cuando $N, M \to \infty$. Por ser $\mathfrak{X}(\lambda)$ un espacio de Banach podemos concluir entonces que $(\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda(L+\varepsilon)} e^{-\lambda_n s})_N$ converge en $\mathfrak{X}(\lambda)$, mientras que por la continuidad de los coeficientes lo hace a $\sum a_n e^{-\lambda(L+\varepsilon)} e^{-\lambda_n s}$. Dado que esto vale para todo $\varepsilon > 0$ tenemos entonces la desigualdad $\sigma_{\mathfrak{X}}(\lambda)(D) \leq L$.

Supongamos ahora que $\sigma_{\mathfrak{X}}(\lambda) \geq 0$, veamos que $\sigma_{\mathfrak{X}}(\lambda) = L$. Sea $\varepsilon > 0$, si $\sigma_0 = \sigma_{\mathfrak{X}}(\lambda) + \varepsilon$ se tiene que $(\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n \sigma_0} e^{-\lambda_n s})_N$ converge en $\mathfrak{X}(\lambda)$ y por lo tanto es una sucesión acotada en norma por una constante positiva C. Utilizando nuevamente la fórmula de Abel, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} &= \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n(\sigma_0+s)} e^{\lambda_n \sigma_0} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n \sigma_0} e^{-\lambda_n s} \right) e^{\lambda_N \sigma_0} + \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k \sigma_0} e^{-\lambda_k s} \right) (e^{\lambda_n \sigma_0} - e^{\lambda_{n+1}\sigma_0}).\end{aligned}$$

De donde se tiene que $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}{}_{\mathfrak{X}(\lambda)} \leq 2Ce^{-\lambda_N \sigma_0}$, es decir que $L \leq \sigma_0 = \sigma_{\mathfrak{X}}(\lambda) + \varepsilon$ y siendo que esto vale para todo $\varepsilon > 0$ tenemos la desigualdad que queríamos. □

3.3.2. Espacios (pre-)Fréchet

Dado un espacio normado λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$, definimos el espacio vectorial

$$\mathfrak{X}_+(\lambda) = \left\{ D \quad \mathsf{D}(\lambda) \colon \sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D) \leq 0 \right\}. \tag{3.16}$$

Observemos que éste consiste de todas las λ-series de Dirichlet tales que toda traslación en $\sigma > 0$ pertenece a $\mathfrak{X}(\lambda)$. Al igual que en el caso de las series ordinarias (ver el Capítulo 2), nuestra primer tarea es dotar a este espacio de alguna estructura. Para comenzar, para cada $k \in \mathbb{N}$ la expresión

$$\|D\|_{\mathfrak{X}(\lambda),k} = \|D_k\|_{\mathfrak{X}(\lambda)} \tag{3.17}$$

define una norma, por lo que la sucesión $\left(\|\bullet\|_{\mathfrak{X}(\lambda),k}\right)_k$ dota a $\mathfrak{X}(\lambda)$ con una topología pre-Fréchet. Nuestro segundo paso es dar una representación como un límite proyectivo de un espectro proyectivo numerable de espacios normados (ver observación A.0.7 y las definiciones anteriores). De hecho, hacemos esto de dos formas diferentes.

Por un lado, para cada k consideramos el espacio

$$\mathfrak{X}_k(\lambda) = \left\{D \in \mathcal{D}(\lambda) \colon D_k \in \mathfrak{X}(\lambda)\right\}, \tag{3.18}$$

sobre el cual $\|\bullet\|_{\mathfrak{X}(\lambda),k}$ define una norma. Si $i_k : \mathfrak{X}_{k+1}(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{X}_k(\lambda)$ es la inyección canónica, entonces el par

$$\left(\mathfrak{X}_k(\lambda), i_k\right)_{k \in \mathbb{N}} \tag{3.19}$$

forma un espectro proyectivo numerable de espacios normados.

Otra opción es, para cada k definir el operador $\tau_k : \mathfrak{X}(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{X}(\lambda)$ por $D \to D_{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}$. Nuevamente, el par

$$\left(\mathfrak{X}(\lambda), \tau_k\right)_{k \in \mathbb{N}}, \tag{3.20}$$

define un espectro proyectivo numerable de espacios normados.

Observemos que

$$\varphi_k : \mathfrak{X}_k(\lambda) \to \mathfrak{X}(\lambda) \text{ dada por } \sum a_n e^{-\lambda_n s} \to \sum a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} e^{-\lambda_n s} \tag{3.21}$$

es una biyección isométrica, donde la inversa viene dada por $\varphi_k^{-1}(\sum a_n e^{-\lambda_n s}) = \sum a_n e^{\frac{\lambda_n}{k}} e^{-\lambda_n s}$. Con esto, resulta que los espectros definidos en (3.19) y (3.20) son equivalentes, en el sentido de que

$$\tau_k \circ \varphi_{k+1} = \varphi_k \circ i_k \tag{3.22}$$

para todo k (recordar nuevamente la observación A.0.7). Esto nos lleva a las dos representaciones del espacio pre-Fréchet $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ como el límite proyectivo de un espectro numerable de espacios normados que mencionábamos más arriba.

Proposición 3.3.4. *Sea λ una frecuencia y $\mathfrak{X}(\lambda)$ un espacio normado λ-admisible. Entonces $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ es un espacio pre-Fréchet, que además es un espacio de Fréchet siempre que $\mathfrak{X}(\lambda)$ sea un espacio de Banach. A su vez, los operadores*

$$\mathfrak{X}_+(\lambda) = \operatorname{proj}(\mathfrak{X}_k(\lambda), i_k) \textit{ dado por } D \to (D)_{k=1}^{\infty}$$

y

$$\mathfrak{X}_+(\lambda) = \operatorname{proj}(\mathfrak{X}(\lambda), \tau_k) \textit{ dado por } D \to (D_{1/k})_{k=1}^{\infty}$$

son isomorfismos de espacios pre-Fréchet.

Demostración. Por (3.22) (ver observación A.0.7) es suficiente chequear esto solo para la primer representación. Notemos al operador por Φ, el cual claramente resulta lineal e inyectivo. Por la definición del espectro, si $(D^k) \in \operatorname{proj}(\mathfrak{X}_k(\lambda), i_k)$, entonces existe una $D \in \mathcal{D}(\lambda)$ tal que $D^{(k)} = D$ para todo k. Notemos que esto implica que $\sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D) \leq 1/k$ para todo k, luego $D \in \mathfrak{X}_+(\lambda)$ y claramente $\Phi(D) = (D^{(k)})$, por lo que Φ es sobreyectivo. Finalmente, si $\pi_k : \operatorname{proj}(\mathfrak{X}_k(\lambda), i_k) \to \mathfrak{X}_k(\lambda)$ es la proyección canónica, se tiene que tanto $\pi_k \circ \Phi$ como $\Phi^{-1} \circ \pi_k^{-1}$ son continuos para todo k; luego Φ y Φ^{-1} son continuos. Esto completa el argumento. Si $\mathfrak{X}(\lambda)$ es completo, entonces la descripción como límite proyectivo implica la completitud de $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ (ver el Apéndice A). $\square$

Al igual que en el caso $\lambda = (\log(n))$, podemos expresar estos espacios como espacios de Köthe

Observación 3.3.5. Dada una frecuencia λ, definimos la matriz de Köthe

$$A(\lambda) = (e^{-\frac{\lambda_n}{k}})_{n,k=1}^{\infty} . \tag{3.23}$$

Como consecuencia de la Proposición 3.3.4 y la observación A.0.7 tenemos que

$$\mathsf{D}_{\ell_p,+}(\lambda) = \ell_p(A(\lambda)) \text{ y } \mathsf{D}_{c_0,+}(\lambda) = c_0(A(\lambda)) \ , \tag{3.24}$$

donde en ambos casos $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ se identifica con la sucesión $(a_n)_n$. Notar el caso particular $\mathsf{H}_{2,+}(\lambda) = \ell_2(A)$. Todos estos espacios son Fréchet-Schwartz, dado que los operadores diagonales sobre ℓ_p o c_0 son compactos siempre que la diagonal es una sucesión que tiende a cero (ver nuevamente la observación A.0.8). Veamos ahora, en un contexto más general, que

$$\mathsf{D}_{\Sigma,+}(\lambda) \hookrightarrow \mathsf{D}_{c_0,+}(\lambda) = c_0(A(\lambda)) . \tag{3.25}$$

(como espacio de sucesiones), pero que a diferencia de (3.24) esta inclusión en general es estricta.

Si $\mathfrak{X}(\lambda)$ es un espacio normado admisible, entonces por (AS2), podemos encontrar una $C \geq 1$ tal que

$$|a_n e^{-\lambda_n/k}| \leq C \Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \ \ {}_{\mathfrak{X}(\lambda),k}$$

para toda $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ y todo k. Entonces, dado k podemos tomar cualquier $k < m$ y tenemos que

$$|a_n e^{-\lambda_n/k}| \leq C \Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \ \ {}_{\mathfrak{X}(\lambda),m} |e^{-\lambda_n(1/k-1/m)}|$$

Esto muestra que $(a_n)_n$ $c_0(A(\lambda))$ y la inclusión

$$\mathfrak{X}_+(\lambda) \hookrightarrow c_0(A(\lambda))$$

es continua. Tomando $\mathfrak{X}_+(\lambda) = \mathsf{D}_{\Sigma,+}(\lambda)$ esto nos da la inclusión en (3.25). Notemos que, para $\lambda = (\log n)$, la serie $\zeta = \sum n^{-s}$ / $\mathsf{D}_{\Sigma,+}(\lambda)$ (porque $\sigma_{\mathsf{D}_\Sigma(\lambda)}(\zeta) = \sigma_c(\zeta) = 1$, recordar el Ejemplo 3.3.2), pero la sucesión de coeficientes pertenece a $c_0(A(\log n))$. Esto muestra entonces que la inclusión en general es estricta.
Por otro lado, si $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ $\mathsf{D}_{\ell_1,+}(\lambda)$,entonces por (AS1), la sucesión $(\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n/k} e^{-\lambda_n s})_N$ es de Cauchy para todo k. Si $\mathfrak{X}(\lambda)$ es completo, entonces la sucesión converge y, por (AS2), lo hace a $\sum a_n e^{-\lambda_n/k} e^{-\lambda_n s}$, que por lo tanto pertenece a $\mathfrak{X}(\lambda)$. Esto muestra que $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ $\mathfrak{X}_+^0(\lambda)$ o, para ponerlo en otros términos

$$\mathsf{D}_{\ell_1,+}(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{X}_+^0(\lambda) \tag{3.26}$$

(con inclusión continua) para todo espacio de Banach λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$. En particular tenemos, para todo espacio de Banach λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$, las inclusiones continuas canónicas

$$\ell_1(A(\lambda)) = \mathsf{D}_{\ell_1,+}(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{X}_+^0(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{X}_+(\lambda) \hookrightarrow \mathsf{D}_{c_0,+}(\lambda) = c_0(A(\lambda)) . \tag{3.27}$$

Esto implica que, en este caso, $\sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D) \leq \sigma_a(D)$ para todo D $\mathsf{D}(\lambda)$. Por lo tanto, dado que para toda D $\mathsf{D}(\lambda)$ tenemos las desigualdades $\sigma_c(D) \leq \sigma_b(D) \leq \sigma_u(D) \leq \sigma_a(D)$, uno puede preguntarse si $\sigma_c(D) \leq \sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D)$ para todo espacio de Banach λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$ y D $\mathsf{D}(\lambda)$. Pero esto es falso – basta tomar, por ejemplo, $D = \sum \frac{1}{n^{1/2}} n^{-s}$, entonces $\sigma_c(D) = 1/2$, pero $\sigma_{\mathsf{H}_+^2}(D) = 0$.

Pasamos a describir condiciones bajo las cuales los monomios forman una base para el espacio (pre)-Fréchet $\mathfrak{X}_+(\lambda)$

Proposición 3.3.6. *Sea $\mathfrak{X}(\lambda)$ un espacio λ-admisible. Entonces son equivalentes:*

(I) *La sucesión de monomios $e^{-\lambda_n s}$ forma una base de $\mathfrak{X}_+(\lambda)$,*

(II) $\mathfrak{X}(\lambda) = \mathfrak{X}^0(\lambda)$*,*

(III) $\sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D) = \sigma_{\mathfrak{X}^0(\lambda)}(D)$ *para toda* $D \in \mathsf{D}(\lambda)$*.*

En particular, si los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ son una base de $\mathfrak{X}(\lambda)$, entonces también son una base de $\mathfrak{X}_+(\lambda)$.

Demostración. Supongamos que (I) vale y tomemos $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathfrak{X}(\lambda) \subseteq \mathfrak{X}_+(\lambda)$. Dado que los monomios forman una base del último, las sumas parciales convergen a la serie para toda seminorma $\|\bullet\|_{\mathfrak{X}(\lambda),k}$. Es decir que las sumas parciales de $\sum a_n e^{-\lambda_n/k} e^{-\lambda_n s}$ convergen (en $\mathfrak{X}(\lambda)$) a la serie. Esto muestra (II). Claramente (II) implica (III). Para finalizar la prueba supongamos ahora que (III) vale, y veamos que entonces también vale (I). Tomemos $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathfrak{X}_+(\lambda)$. Por hipótesis $\sigma_{\mathfrak{X}^0(\lambda)}(D) = \sigma_{\mathfrak{X}(\lambda)}(D) \leq 0$ y por lo tanto, dado $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, tenemos que

$$\sum a_n e^{-\lambda_n/k} e^{-\lambda_n s} \in \mathfrak{X}(\lambda)\,,$$

y $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n/k+\sigma} e^{-\lambda_n s}\right)_N$ converge para todo $\sigma > 0$ (y, por (AS2) tiene que hacerlo a la misma serie). Dado que esto vale para todo k inmediatamente tenemos, tomando $\sigma = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, que

$$\lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n/k} e^{-\lambda_n s} = \sum a_n e^{-\lambda_n/k} e^{-\lambda_n s}$$

en $\mathfrak{X}(\lambda)$, por lo que por (3.21), si aplicamos φ_k^{-1}, implica

$$\lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

en $\mathfrak{X}_k(\lambda)$ para todo k. Esto da la conclusión. □

Terminamos esta sección estudiando cuándo estos espacios son nucleares (recordar la definición en el Apéndice A). Al igual que en el Capítulo 2, el Teorema de Grothendieck-Pietsch (ver el Teorema A.0.5) es ahora nuestra herramienta principal. Para los monomios (AS1) tenemos que $\left\|e^{-\lambda_n s}\right\|_{\mathfrak{X}(\lambda),k} = e^{-\frac{\lambda_n}{k}}$, y luego podemos reformular (A.2) de forma conveniente.

Lema 3.3.7. *Sea λ una frecuencia cualquiera. Entonces $L(\lambda) = 0$ si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $m > k$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right)} < \infty\,. \tag{3.28}$$

Demostración. Supongamos primero que $L(\lambda) = 0$. Dado $k \in \mathbb{N}$ tomemos $m > k$ y definamos $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right)$. Dado que $L(\lambda) = 0$ podemos encontrar n_ε tal que $\frac{\log n}{\lambda_n} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_\varepsilon$. Luego

$$\sum_{n \geq n_\varepsilon} e^{-\lambda_n\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right)} = \sum_{n \geq n_\varepsilon} e^{-2\lambda_n \varepsilon} \leq \sum_{n \geq n_\varepsilon} \frac{1}{n^2}\,,$$

lo cual claramente implica (3.28). Para probar la implicación contraria, dado k tomemos $m > k$ tal que se cumpla (3.28). Luego

$$L(\lambda) = \sigma_c\Big(\sum e^{-\lambda_n s}\Big) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{m} < \frac{1}{k}\,.$$

Dado que k era arbitrario, entonces tenemos que $L(\lambda) = 0$ lo que completa la prueba. □

Con esto ahora podemos decir un poco más sobre cuándo estos espacios son nucleares.

Proposición 3.3.8. *Sea λ una frecuencia cualquiera. Entonces son equivalentes:*

(I) $L(\lambda) = 0$

(II) Existe un espacio normado λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$ tal que $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ es un espacio de Fréchet nuclear y los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ son una base.

(III) Para todo espacio de Banach λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$ se tiene que $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ es un espacio de Fréchet nuclear y los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ son una base.

Más aún, en este caso todos los espacios de Fréchet $\mathfrak{X}_+(\lambda)$ para todo espacio de Banach λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$ coinciden, y en particular $\mathfrak{X}_+(\lambda) = \ell_p(A(\lambda)) = c_0(A(\lambda))$ para todo $1 \leq p < \infty$, donde $A(\lambda)$ es la matriz de Köthe definida en (3.23)*.*

Demostración. Como consecuencia directa del Teorema de Grothedieck-Pietsch (A.2) y el Lema 3.3.7 tenemos que (II) implica (I). Supongamos ahora que $L(\lambda) = 0$ y tomemos un espacio de Banach λ-admisible $\mathfrak{X}(\lambda)$. De (3.27) tenemos que

$$\ell_1(A(\lambda)) = \mathcal{D}_{\ell_1,+}(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{X}^0_+(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{X}_+(\lambda) \hookrightarrow c_0(A(\lambda)).$$

Luego el Lema 3.3.7 y la Proposición A.0.6 implican que $\ell_1(A(\lambda)) = c_0(A(\lambda))$, los vectores canónicos $e_n = (\delta_{n,j})_j$ son una base y los espacios son nucleares. Pero entonces,

$$\ell_1(A(\lambda)) = \mathfrak{X}_+(\lambda) = c_0(A(\lambda)),$$

de donde se sigue la conclusión. Dado que la implicación restante es obvia, esto completa la prueba. □

Vamos a concentrarnos ahora en los espacios de λ-series de Dirichlet trasladadas generados por algunos espacios específicos.

3.4. Espacios $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$

Comencemos por considerar $\mathfrak{X}(\lambda) = \mathcal{D}_\infty(\lambda)$. Con la construcción desarrollada en la Sección 3.3.2, el espacio $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ consistirá en las λ-series de Dirichlet $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ que convergen en $\mathbb{C}_0$ a una función (necesariamente holomorfa) acotada en cada semiplano más chico $\mathbb{C}_\sigma$. Observemos que para el caso $\lambda = (\log(n))$ recuperamos el espacio $\mathcal{H}^\infty_+$ definido por Bonet.

Obviamente $\mathcal{D}_\infty(\lambda)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$. Estos espacios en general son diferentes como vimos en el Capítulo 2 para las series ordinarias Tomando como ejemplo a $\sum(-1)^n n^{-s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s)$.
Notemos primero que por (3.7) para todo k tenemos que $\sup_n |a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}}| \leq \left\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_k$. Lo que muestra en particular que los funcionales $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \to a_N$ son equicontinuos sobre $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$. Observemos también que en este caso el espacio definido en (3.18) es exactamente

$$\mathcal{D}_{\infty,k}(\lambda) := \Big\{ \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \mathcal{D}(\lambda) \colon \sum a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} e^{-\lambda_n s} \quad \mathcal{D}_\infty(\lambda) \Big\},$$

dotado con la norma

$$\left\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{D}_\infty(\lambda),k} := \left\| \sum a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{D}_\infty(\lambda)}.$$

Como ya hemos visto, el estudio de las series generales resulta más complejo que el de las series ordinarias y varía dependiendo de las propiedades de la frecuencia λ. Para ilustrar esto, consideremos nuevamente la frecuencia $\lambda = (n)$. Como comentamos anteriormente, con la sustitución $s \quad \mathbb{C}_0 \ ! \ z = e^{-s} \quad \mathbb{D}$, cada serie de Dirichlet $\sum a_n e^{-ns}$ pasa a ser una serie de potencias $\sum a_n z^n$. Resulta entonces, que

$\mathsf{D}_{\infty,+}((n))$ es el espacio $H(\mathsf{D})$ de funciones holomorfas en D, con la topología de convergencia uniforme en compactos. Este espacio es de Fréchet y nuclear. En particular, $\mathsf{D}_{\infty,+}((n))$ es isomorfo a un límite proyectivo numerable de espacios de Banach, todos isométricamente isomorfos al espacio de Hardy $H_\infty(\mathsf{T})$, lo que relaciona su estudio con el análisis de Fourier en grupos abelianos compactos.
En cambio para la frecuencia $\lambda = (\log \mathfrak{p}_n)$, veremos que $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio de Fréchet que, por un resultado de Bohr, puede identificarse con un espacio de Köthe escalonado que, pese a ser un espacio de Schwartz, falla nuevamente en ser nuclear (al igual que H_+^∞).

La proposición 3.3.4 nos da dos formas diferentes de representar al espacio $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ como límite proyectivo (recordar las definiciones en (3.19) y (3.20)).

Proposición 3.4.1. *Sea λ una frecuencia. Entonces $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio pre-Fréchet-Schwartz que admite las siguientes representaciones como límite proyectivo*

$$\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda) = \operatorname{proj}(\mathsf{D}_{\infty,k}(\lambda), i_k) = \operatorname{proj}(\mathsf{D}_\infty(\lambda), \tau_k)\,.$$

Demostración. Las descripciones como límite proyectivo son inmediatas de la Proposición 3.3.4. Para ver que $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es Schwartz notemos que, por el Corolario 3.2.6, los operadores $\tau_k : \mathsf{H}_\infty(\lambda) \to \mathsf{H}_\infty(\lambda)$ son compactos para todo k. Luego por el Teorema 3.1.1 y [Sch20a, Corolario 3.9] (que como ya hemos comentado prueba la inclusión isométrica de $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ en $H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0)$), sabemos que $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ es un subespacio isométrico de $\mathsf{H}_\infty(\lambda)$. Se deduce entonces, que los operadores $\tau_k : \mathsf{D}_\infty(\lambda) \to \mathsf{D}_\infty(\lambda)$ son pre-compactos y, por lo tanto, $\operatorname{proj}(\mathsf{D}_\infty(\lambda), \tau_k)$ es Schwartz. □

Clarifiquemos esto con un ejemplo interesante. Sea λ una frecuencia Q-linealmente independiente, y consideremos la matriz de Köthe $A(\lambda)$ definida en (3.23). El [Sch20a, Teorema 4.7] afirma que si λ es Q-linealmente independiente entonces

$$\mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda) = \mathsf{D}_\infty(\lambda) = \ell_1.$$

Luego, sabemos que

$$\mathsf{D}_{\infty,k}(\lambda) \to \ell_1\big((e^{-\frac{\lambda_n}{k}})_n\big) \text{ dada por } \sum a_n n^{-s} \to (a_n)$$

es un isomorfismo isométrico para todo k. Esto nos dice que (ver (A.4)) por medio de la identificación $\sum a_n n^{-s} \to (a_n)$ tenemos

$$\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda) = \ell_1(A(\lambda))$$

como espacios de Fréchet.

Nuestro objetivo a partir de ahora será estudiar la estructura de $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$, lo que al final nos da un resultado análogo al Teorema 3.2.1 para los espacios de Fréchet de series de Dirichlet generales.

La prueba del Teorema 3.2.1 (ver [DS20b, Lema 5.2]) requiere aplicar el Principio de Acotación Uniforme. Los espacio tonelados es la clase más grande de espacios en los que este principio vale. Por lo que, cuando trabajamos con espacios localmente convexos, estudiar si el espacio es tonelado aparece como una cuestión natural. El siguiente resultado caracteriza cuándo estos espacios son tonelados, y esto nos da una nueva equivalencia del Teorema de Bohr para una frecuencia λ. Notemos que esta propiedad en cierto sentido queda oculta en el caso de los espacios de Banach, dado que un espacio normado es tonelado si y sólo si es completo.

Teorema 3.4.2. *Para toda frecuencia λ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(I) *El Teorema de Bohr vale para λ.*

(II) *$\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio de Fréchet.*

(III) *$\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es tonelado.*

Observación 3.4.3. Antes de comenzar con la prueba del teorema, observemos (siguiendo el argumento en [CDMS21, Teeorema 4.12]) que si para cada $\sigma > 0$ existe una constante $C = C(\sigma)$ tal que para toda elección de finitos $a_1, \dots, a_M \quad \mathsf{C}$, tenemos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\sigma\lambda_n} e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)} \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{M} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)}, \tag{3.29}$$

para todo $N \leq M$, entonces el Teorema de Bohr vale para λ. En efecto, si (3.29) vale, dada $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)$ y fijado N tenemos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n \Big(1 - \frac{\lambda_n}{x}\Big) e^{-\sigma\lambda_n} e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)} \leq C \quad R_x^\lambda(D) \quad {}_{\mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)}$$

para todo $x > N$. Por otro lado, en [Sch20a, Proposición 3.4], Schoolmann prueba que si $D \quad \mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)$ entonces $\sup_{x>0} \quad R_x^\lambda(D) \quad {}_{\mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)} \leq \widetilde{C} \quad \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad {}_{\mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)}$. Juntando esto se tiene

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n \Big(1 - \frac{\lambda_n}{x}\Big) e^{-\sigma\lambda_n} e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)} \leq C(\sigma) \quad \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad {}_{\mathsf{D}_\infty^{\mathrm{ext}}(\lambda)},$$

y haciendo tender $x \to \infty$ obtenemos

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\sigma\lambda_n} e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)} \leq C_1(\sigma) \Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)},$$

lo que implica que $\sigma_u(D) \leq 0$ (usando Proposición 3.3.3 con por ejemplo $\mathfrak{X}(\lambda) = \mathsf{D}_\infty(\lambda)$, ver también el Ejemplo 3.3.2–(d)); es decir que el Teorema de Bohr vale para λ.

Demostración del Teorema 3.4.2.
(I) (II) Por la Proposición 3.4.1 sabemos que $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda) = \mathrm{proj}(\mathsf{D}_\infty(\lambda), \tau_k)$ como espacios pre-Fréchet. Del Teorema 3.2.1 tenemos además que $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ es completo, por lo que el último límite proyectivo es completo. De esto se sigue inmediatamente la conclusión.

(II) (III) Es consecuencia del hecho general de que todo espacio de Fréchet es tonelado.

(III) (I) En vista de lo comentado en la Observación 3.4.3, es suficiente chequear que (3.29) se cumple. Para esto, consideremos, para cada k fijo, la familia de operadores $T_N : \mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda) \to \mathsf{C}$ dados por

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \to \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}}$$

para $N \quad \mathsf{N}$. Dado que los funcionales coeficientes están uniformemente acotados en $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ se tiene que

$$\Big| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{\frac{\lambda_n}{k}} \Big| \leq \sum_{n=1}^{N} C \Big\| \sum a_n e^{\frac{\lambda_n}{k}} e^{\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)} \leq C(N) \quad D \quad {}_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)}.$$

Es decir que los operadores son continuos y además, dado que cada D en $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ converge en $s = 1/k$, entonces $\{T_N\}_N$ es puntualmente acotado, por lo que es equicontinuo (por ser el espacio tonelado y, por consiguiente, satisfacer el Principio de Acotación Uniforme). En otras palabras, existe una constante $C = C(k) > 0$ y $\ell > k$ tal que para todo $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ tenemos que

$$\sup_N \Big| \sum_{k=1}^{N} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} \Big| \leq C \Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda),\ell}.$$

Finalmente, dado $a_1, \dots, a_M \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re} z > 0$, aplicamos esto a la serie $\sum_{n=1}^{M} a_n e^{-\lambda_n z} e^{-\lambda_n s}$, para obtener

$$\sup_{\operatorname{Re} z>0} \sup_{N \leq M} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n z} e^{-\frac{\lambda_n}{k}} \right| \leq C \sup_{\operatorname{Re} z>0} \left| \sum_{n=1}^{M} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{\ell}} e^{-\lambda_n z} \right| .$$

Luego si $\sigma > 0$ y $\frac{1}{k} < \sigma$ entonces

$$\begin{aligned} \sup_{N \leq M} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{D}_\infty(\lambda)} &\leq \sup_{\operatorname{Re} z>0} \sup_{N \leq M} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n z} e^{-\frac{\lambda_n}{k}} \right| \\ &\leq \sup_{\operatorname{Re}(s)>1/l} \left| \sum_{n=1}^{M} a_n e^{-\lambda_n s} \right| \\ &\leq C \left\| \sum_{n=1}^{M} a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{D}_\infty(\lambda)} , \end{aligned}$$

lo que nos da (3.29) como queríamos. □

El siguiente resultado nos da la equivalencia entre la validez del Teorema de Bohr para una frecuencia λ y el hecho de que el espacio $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ sea Montel.

Teorema 3.4.4. *Para toda frecuencia λ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(I) El Teorema de Bohr vale para λ.

(II) $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio Montel.

Demostración. Si (I) vale, entonces por la Proposición 3.4.1 y el Teorema 3.4.2 $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio de Fréchet-Schwartz, y por lo tanto un espacio Montel. Si ahora suponemos que es un espacio Montel, entonces es tonelado y nuevamente el Teorema 3.4.2 prueba que (II) implica (I). □

Sabemos que los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forman una base de $\mathcal{H}_+^\infty = \mathcal{D}_{\infty,+}((\log n))$ (ver [Bon18, Teorema 2.2]). En el caso de la frecuencia $\lambda = (n)$, recordemos que mediante la sustitución $s \in \mathbb{C}_0 \mapsto z = e^{-s} \in \mathbb{D}$ se tiene la igualdad $\mathcal{D}_{\infty,+}((n)) = H(\mathbb{D})$ y, por la misma sustitución, los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ resultan ser $\{z^n\}_n$, formando también una base. Veamos ahora si esto es cierto para otras frecuencias.

Teorema 3.4.5. *Para toda frecuencia λ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) El Teorema de Bohr vale para λ.

(II) Para todo k existen $\ell > k$ y $C > 0$ tal que para cada $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ se tiene

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{D}_\infty(\lambda),k} \leq C \left\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{D}_\infty(\lambda),\ell} .$$

Más aún, en este caso los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forman una base de $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$.

Si λ cumple el Teorema de Bohr, sabemos que $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio de Fréchet (ver Teorema 3.4.2). Entonces, la afirmación (II) es una consecuencia inmediata de ser un espacio de Fréchet con la topología generada por estas seminormas (ver (A.1) en el Apéndice A), siempre que $\{e^{-\lambda_n s}\}$ forme una base (comparar también con [Jar81, Teorema 14.3.6] o [MV97, Lema 28.10]). Sin embargo, en general tener una base para un espacio pre-Fréchet no implica necesariamente la correspondiente desigualdad (A.1), por lo que sería interesante encontrar una frecuencia concreta λ que no satisfaga el Teorema de Bohr para la cual la sucesión de monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}$ forme una base para $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ (recordemos que, por la Proposición 3.3.6 esto ocurre si y sólo si $\mathcal{D}_\infty(\lambda) = \mathcal{D}_\infty^0(\lambda)$).

Demostración. Supongamos que el Teorema de Bohr vale para λ y, para cada N consideremos el operador $T_N \colon \mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda) \to \mathsf{D}_{\infty,k}(\lambda)$ dado por

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \to \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Dada $D \quad \mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} e^{-\lambda_n s} \right| &\leq \sum_{n=1}^{N} \left| a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} C \left\| \sum a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)} \\ &= C(N) \left\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda),k}. \end{aligned}$$

Es decir que cada uno de estos es acotado, y, dado que el Teorema de Bohr vale, el límite puntual existe. Ahora, $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es tonelado (recordar el Teorema 3.4.2) y esto nos dice que la familia $(T_N)_N$ es equicontinua (ver el Teorema A.0.2). Luego tenemos (II).
Para la vuelta, si (II) vale, esto implica (3.29) que, como hemos visto, nos da que el Teorema de Bohr vale para λ.
Finalmente notemos que si λ satisface el Teorema de Bohr, entonces $\mathsf{D}^0_\infty(\lambda) = \mathsf{D}_\infty(\lambda)$, y por la Proposición 3.3.6 los monomios forman una base de $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$. □

Algunos ejemplos de frecuencias para los cuales los monomios son una base de $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ son $\lambda_n = (\log n)^\alpha$ con $\alpha > 0$, las cuales satisfacen la condición de Landau (LC), y por lo tanto el Teorema de Bohr. Hay frecuencias para las que hasta ahora no sabemos que ocurre, por ejemplo la frecuencia $\lambda_n = \log\log n$ (que no satisface la condición de Landau).

Pasamos ahora a la última de las propiedades que nos interesaba estudiar como es la nuclearidad. Recordemos una vez más que el espacio $\mathsf{D}_\infty((\log n))$ no es nuclear, mientras que $\mathsf{D}_\infty((n))$ que es igual a $H(\mathsf{D})$, sí lo es (ver por ejemplo [Jar81, Corolario 8, página 499]). Por lo tanto la pregunta aparece naturalmente: ¿Para qué frecuencias nuestros espacios son nucleares? La Proposición 3.3.8 nos da la respuesta.

Teorema 3.4.6. *Sea λ una frecuencia cualquiera. Entonces $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio de Fréchet nuclear si y sólo si $L(\lambda) = 0$.*

Demostración. Si $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es un espacio de Fréchet, entonces por los Teoremas 3.4.2 y 3.4.5 los monomios forman una base. Luego, si el espacio es nuclear, la Proposición 3.3.8 nos dice que $L(\lambda) = 0$. Por otro lado, si $L(\lambda) = 0$, entonces el Teorema de Bohr vale para λ y $\mathsf{D}_\infty(\lambda)$ es un espacio de Banach λ-admisible por el Teorema 3.2.1. Nuevamente la Proposición 3.3.8 completa la prueba. □

Ejemplo 3.4.7. (a) $\mathsf{D}_{\infty,+}((n)) = H(\mathsf{D})$ es nuclear, ya que $L((n)) = 0$

(b) $\mathsf{D}_{\infty,+}((\log n))$ y $\mathsf{D}_{\infty,+}((\log p_n))$ son no nucleares, dado que en ambos casos $L(\lambda) = 1$.

(c) $\mathsf{D}_{\infty,+}((\log n)^\alpha)$ es nuclear para $\alpha > 1$ (dado que $L(\lambda) = 0$) y no nuclear para $0 < \alpha < 1$ (ya que $L(\lambda) = \infty$).

3.5. Espacios $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$

Aplicamos ahora el enfoque abstracto a la escala de espacios de Hardy de series de Dirichlet generales $\mathsf{H}_p(\lambda)$ para $1 \leq p \leq \infty$, generalizando el estudio que hicimos en el Capítulo 2. Observemos brevemente que en este caso la abscisa definida en (3.14) ahora se lee como

$$\sigma_{\mathsf{H}_p(\lambda)}(D) = \text{ínf}\left\{\sigma \quad \mathsf{R}\colon \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s} \quad \mathsf{H}_p(\lambda)\right\}. \tag{3.30}$$

Con esto, siguiendo (3.16), consideramos el espacio pre-Fréchet

$$\mathcal{H}_{p,+}(\lambda) = \left\{D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \colon \sigma_{\mathcal{H}_p(\lambda)}(D) \leq 0\right\},$$

dotado con la topología metrizable localmente convexa generada por la sucesión de seminormas

$$\left\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{H}_p(\lambda),k} := \left\| \sum a_n e^{-\lambda_n \frac{1}{k}} e^{-\lambda_n s} \right\|_{\mathcal{H}_p(\lambda)},$$

para $k \in \mathbb{N}$. Como en (3.17), para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos el espacio normado canónicamente definido por

$$\mathcal{H}_{p,k}(\lambda) = \left\{ \sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{D}(\lambda) \colon \sum a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}} e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{H}_p(\lambda) \right\},$$

que nos llevan a los espectros poyectivos numerables (recordar (3.19) y (3.20))

$$\operatorname{proj}(\mathcal{H}_{p,k}(\lambda), i_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \operatorname{proj}(\mathcal{H}_p(\lambda), \tau_k)_{k \in \mathbb{N}}. \tag{3.31}$$

Pasamos ahora a estudiar la estructura de los espacios $\mathcal{H}_{p,+}(\lambda)$.

Proposición 3.5.1. *Sea λ una frecuencia y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $\mathcal{H}_{p,+}(\lambda)$ es un espacio de Fréchet Schwartz que admite las siguientes representaciones como límite proyectivo*

$$\mathcal{H}_{p,+}(\lambda) = \operatorname{proj}(\mathcal{H}_{p,k}(\lambda), i_k) = \operatorname{proj}(\mathcal{H}_p(\lambda), \tau_k).$$

Demostración. La Proposición 3.3.4 y (3.31) nos dan las dos representaciones de los espacios pre-Fréchet $\mathcal{H}_{p,+}(\lambda)$ como límites proyectivos. Dado que cada $\mathcal{H}_p(\lambda)$ es completo, entonces el espectro proyectivo en (3.31) consiste de espacios de Banach, y luego, $\mathcal{H}_{p,+}(\lambda)$ es Fréchet. Por el Teorema 3.2.2 todos los operadores traslación τ_k son operadores compactos; por lo que la observación A.0.8 nos dice que los espacios también resultan espacios de Schwartz. □

Ejemplo 3.5.2. Supongamos que λ es una frecuencia $\mathbb{Q}$-linealmente independiente. En [DS19a, Corolario 3.36], Defant y Schoolmann prueban que para este tipo de frecuencias se tiene la igualdad $\mathcal{H}_p(\lambda) = \mathcal{H}_2(\lambda) = \ell_2$ para todo $1 \leq p < \infty$ (donde cada λ-serie de Dirichlet se identifica con la sucesión de sus coeficientes). Como consecuencia $\mathcal{H}_{p,+}(\lambda) = \ell_2(A(\lambda))$ para cada $1 \leq p < \infty$.

Dado que $\mathcal{D}_\infty(\lambda) \subset \mathcal{H}_\infty(\lambda)$, $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda) = \operatorname{proj} \mathcal{D}_{\infty,k}(\lambda)$ y $\mathcal{H}_{\infty,+}(\lambda) = \operatorname{proj} \mathcal{H}_{\infty,k}(\lambda)$, de la observación A.0.7 obtenemos que existe una inclusión continua

$$\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda) \hookrightarrow \mathcal{H}_{\infty,+}(\lambda),$$

que conserva los coeficientes de Dirichlet y de Fourier.

Teorema 3.5.3. $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda) = \mathcal{H}_{\infty,+}(\lambda)$ *si y sólo si el Teorema de Bohr vale para λ.*

Demostración. Si el Teorema de Bohr vale para λ, entonces sabelos por el Teorema 3.2.1 que $\mathcal{D}_{\infty,k}(\lambda) = \mathcal{H}_{\infty,k}(\lambda)$ para todo k. Luego la afirmación se sigue de la observación A.0.7. Por otro lado, si $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda) = \mathcal{H}_{\infty,+}(\lambda)$, entonces $\mathcal{D}_{\infty,+}(\lambda)$ es completo, y del Teorema 3.4.2 deducimos que el Teorema de Bohr vale para λ. □

Nuevamente nos movemos al estudio de las bases de estos espacios de Fréchet

Proposición 3.5.4. *Sea $\lambda = (\lambda_n)$ una frecuencia y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forman una base*

(i) de $\mathcal{H}_{p,+}(\lambda)$, para $1 < p < \infty$.

(II) de $\mathsf{H}_{1,+}(\lambda)$*, si* λ *satisface el Teorema de Bohr.*

(III) de $\mathsf{H}_{\infty,+}(\lambda)$ *si y sólo si* λ *satisface el Teorema de Bohr.*

La demostración se basa en el siguiente lema. Para la prueba del mismo vamos a necesitar trabajar con las series de Dirichlet generales a valores vectoriales.

Lema 3.5.5. *Para toda frecuencia* λ *y* $1 < p < \infty$ *tenemos que* $\mathsf{H}_p(\lambda) = \mathsf{H}_p^0(\lambda)$*, y para* $p = 1$ *esto vale si* λ *satisface el Teorema de Bohr.*

Demostración. Como ya hemos mencionado, por [DS19a, Teorema 4.16] los monomios forman una base en $\mathsf{H}_p(\lambda)$. Esto prueba el caso $1 < p < \infty$. Para el caso $p = 1$, recordemos que, por definición, $\mathsf{H}_1^0(\lambda) \quad \mathsf{H}_1(\lambda)$. Tenemos que ver que la inclusión contraria vale si λ satisface el Teorema de Bohr. Para ver esto, como hemos mencionado, vamos a pasar por un momento a la teoría de series de Dirichlet generales a valores vectoriales. Tomando en (3.4) y (3.5) a X como $\mathsf{H}_1(\lambda)$ y juntando estos dos resultados con (4.3), se tiene que dada $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \mathsf{H}_1(\lambda)$ y $\varepsilon > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\varepsilon\lambda_n} e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{H}_1(\lambda)} &= \Big\| \sum_{n=1}^{N} \big(a_n e^{-\varepsilon\lambda_n} e^{-\lambda_n s}\big) e^{-\lambda_n z} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda, \mathsf{H}_1(\lambda))} \\
= \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \big(a_n e^{-\lambda_n s}\big) e^{-\varepsilon\lambda_n} e^{-\lambda_n z} \Big\|_{\mathsf{H}_1(\lambda)} &\leq C \Big\| \sum \big(a_n e^{-\lambda_n s}\big) e^{-\lambda_n z} \Big\|_{\mathsf{D}_\infty(\lambda, \mathsf{H}_1(\lambda))} \\
= C \Big\| \sum a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_{\mathsf{H}_1(\lambda)} .
\end{aligned}$$

Con esto, la Proposición 3.3.3 nos da $\sigma_{\mathsf{H}_1^0(\lambda)}(D) \leq 0$ y esto implica que $\big(\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}\big)_N$ es convergente para todo $\sigma > 0$. Dado que la serie pertenece a $\mathsf{H}_1(\lambda)$, finalmente obtenemos que $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ $\mathsf{H}_1^0(\lambda)$. □

Demostración de la Proposición 3.5.4. Las afirmaciones (I) y (II) son consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.6 y el Lema 3.5.5. Por otro lado, si los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}$ forman una base de $\mathsf{H}_{\infty,+}(\lambda)$, entonces forman una base de su subespacio $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$, y luego la afirmación se sigue de los Teoremas 3.1.1 y 3.5.3. □

Observación 3.5.6. Como vimos, el ítem (II) de la Proposición 3.5.4 nos garantiza que los monomios forman una base de $\mathsf{H}_{1,+}(\lambda)$ siempre que λ satisface el Teorema de Bohr. Queda abierto el hecho de si es o no una equivalencia. Es decir, no sabemos si es cierto que dada una frecuencia λ tal que los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forman una base de $\mathsf{H}_{1,+}(\lambda)$ entonces λ satisface el Teorema de Bohr, así como tampoco tenemos una frecuencia como contraejemplo.

Antes de pasar a estudiar la nuclearidad realizamos un pequeño comentario sobre las abscisas definidas en (3.30). Para las series de Dirichlet ordinarias (recordemos que es el caso $\lambda = (\log n)$) se sabe por el [DGMSP19, Teorema 12.4] que las abscisas pueden reformularse para cualquier $1 \leq p \leq \infty$ como

$$\sigma_{\mathsf{H}_p}(D) = \operatorname{ínf} \left\{ \sigma > 0 \colon \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s} \right)_N \text{ converge en } \mathsf{H}_p((\log n)) \right\}.$$

Con la notación que usamos esto quiere decir que $1 \leq p \leq \infty$ y cualquier serie de Dirichlet ordinaria D tenemos

$$\sigma_{\mathsf{H}_p((\log n))}(D) = \sigma_{\mathsf{H}_p^0((\log n))}(D) .$$

Luego el Lema 3.5.5 muestra que esto vale para $1 < p < \infty$ y toda frecuencia λ, y para $p = 1$ y toda frecuencia λ que satisfaga el Teorema de Bohr. Finalmente, notemos que si el Teorema de Bohr vale para λ por la definición del espacio $\mathsf{D}^0_\infty(\lambda)$ y el Teorema 3.2.1 también tenemos que

$$\sigma_{\mathsf{H}_\infty(\lambda)}(D) = \sigma_{\mathsf{D}_\infty(\lambda)}(D) = \sigma_{\mathsf{D}^0_\infty(\lambda)}(D) = \sigma_{\mathsf{H}^0_\infty(\lambda)}(D)\,.$$

Pasamos ahora a estudiar cuándo los espacios de Fréchet $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ son nucleares. Al igual que en el caso $\mathsf{D}_{\infty,+}(\lambda)$, la respuesta se obtiene de la Proposición 3.3.8.

Proposición 3.5.7. *Sea λ una frecuencia. Entonces*

(I) para $1 < p < \infty$ el espacio de Fréchet $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ es nuclear si y sólo si $L(\lambda) = 0$.

(II) para $p = 1$ y $p = \infty$ el espacio de Fréchet $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ es nuclear y λ satisface el Teorema de Bohr si y sólo si $L(\lambda) = 0$.

Demostración. Tomemos una frecuencia λ. Notemos primero que $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ es completo (luego Fréchet) para todo $1 \leq p \leq \infty$. Veamos primero que vale (I). Para $1 < p < \infty$, por la Proposición 3.5.4 los monomios forman una base de $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$. Esto y la Proposición 3.3.8 nos dan las equivalencias de la nuclearidad y $L(\lambda) = 0$.
(II) En el caso de $p = 1$ ó $p = \infty$, supongamos primero que $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ es nuclear y λ satisface el Teorema de Bohr. Entonces la Proposición 3.5.4 nos dice que los monomios forman una base para $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$, y la Proposición 3.3.8 implica que $L(\lambda) = 0$. Por el contrario, asumamos que $L(\lambda) = 0$. Esto implica que λ satisface el Teorema de Bohr y nuevamente la Proposición 3.3.8 nos dice que $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ es nuclear. □

Como ya hemos mencionado al final de la sección 3.3, si $L(\lambda) = 0$ entonces todos los $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ coinciden para $1 < p < \infty$.

Un hecho importante que estudiamos en la teoría de los espacios de Hardy de las series de Dirichlet ordinarias en el Capítulo 2 es que el operador τ_σ, definido para cada $\sigma > 0$ como

$$\tau_\sigma\big(\sum a_n n^{-s}\big) = \sum \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s}\,,$$

es acotado como operador de $\mathsf{H}_p = \mathsf{H}_p((\log n))$ en $\mathsf{H}_q = \mathsf{H}_q((\log n))$ para todo $1 \leq p < q < \infty$. Como consecuencia inmediata de esto $\sigma_{\mathsf{H}_p}(D) = \sigma_{\mathsf{H}_q}(D)$ para $1 \leq p, q < \infty$ y toda $D \in \mathsf{D}((\log n))$, de esta manera vimos que $\mathsf{H}^p_+ = \mathsf{H}^q_+$ para todo $1 \leq p, q, < \infty$. Es decir que había un único espacio H_+, que podíamos tomarlo como H^2_+.

Buscamos abordar ahora una pregunta análoga para las series generales. Para $\sigma \in \mathsf{R}$ definimos el operador traslación como

$$\tau_\sigma\big(\sum a_n e^{-\lambda_n s}\big) = \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}\,.$$

Entonces decimos que una frecuencia λ es hipercontractiva (para el operador traslación) si, para cada $\sigma > 0$, el operador $\tau_\sigma : \mathsf{H}_p(\lambda) \to \mathsf{H}_q(\lambda)$ es acotado para todo $1 \leq p \leq q < \infty$.

Observación 3.5.8. Dada una frecuencia λ es claro que las siguientes afirmaciones resultan equivalentes:

- λ es hipercontractiva,
- $\sigma_{\mathsf{H}_p(\lambda)}(D) = \sigma_{\mathsf{H}_q(\lambda)}(D)$ para toda $D \in \mathsf{D}(\lambda)$ y cualquier elección de $1 \leq p, q < \infty$,
- $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda) = \mathsf{H}_{q,+}(\lambda)$ para cualquier elección de $1 \leq p, q < \infty$.

En [Bay22, Teorema 5.2] Bayart muestra que existen frecuencias (incluso satisfaciendo el Teorema de Bohr) no hipercontractivas. Más explícitamente, existe una frecuencia λ que satisface la condición de Bohr tal que $\tau_\sigma : \mathsf{H}_1(\lambda) \to \mathsf{H}_2(\lambda)$ no es acotado para ningún $\sigma > 0$. En particular, $\mathsf{H}_{2,+}(\lambda) \subsetneq \mathsf{H}_{1,+}(\lambda)$.

Nuestro objetivo ahora es encontrar condiciones que impliquen la hipercontractividad de la frecuencia λ para el operador traslación.

Observación 3.5.9. Si $L(\lambda) = 0$ o λ es Q-linealmente indedependiente, entonces λ es hipercontractiva. De hecho, en ambos casos sabemos, por la Proposición 3.3.8 y el Ejemplo 3.5.2 que todos los espacios de Fréchet $\mathsf{H}_{p,+}(\lambda)$ coinciden (como espacios de sucesiones).

Una herramienta que nos será de utilidad es la Proposición 2.1.3. Recordemos brevemente que para cada $0 < \eta < 1$ y $1 \leq p \leq q < \infty$ existe un operador tal que

$$T_\eta\Big(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\Big) = \sum_{k=0}^{n} c_k (\eta z)^k$$

siendo acotado de $H_p(\mathsf{T})$ en $H_q(\mathsf{T})$. Más aún, $\|T_\eta\| \leq 1$ para todo $\eta < \sqrt{p/q}$. Por otro lado, si $N \in \mathsf{N} \cup \{\infty\}$ y $\eta = (\eta_k)_{1 \leq k \leq N} \in (0,1)$ es tal que $\sup_n \prod_{k=1}^{n} \|T_{\eta_k}\| < \infty$ (notemos que se satisface trivialmente si N es finito), entonces existe un operador

$$T_\eta : H_p(\mathsf{T}^N) \to H_q(\mathsf{T}^N) \tag{3.32}$$

tal que

$$T_\eta\Big(\sum_{\substack{\alpha \in F\\ F \text{finito}}} c_\alpha z^\alpha\Big) = \sum_{\substack{\alpha \in F\\ F \text{finito}}} c_\alpha (\eta z)^\alpha\,, \tag{3.33}$$

y $\|T_\eta\| \leq \sup_n \prod_{k=1}^{n} \|T_{\eta_k}\|$. Si $\Lambda \subset \mathsf{N}_0^N$ (si $N = \infty$ esto debe entenderse como $\mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$) consideramos

$$H_p^\Lambda(\mathsf{T}^N) = \{f \in H_p(\mathsf{T}^N) \colon \widehat{f}(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Lambda\}\,,$$

que, por ser un subespacio cerrado de $H_p(\mathsf{T}^N)$, es nuevamente un espacio de Banach. Tomemos ahora $f \in H_p^\Lambda(T^N)$ y $P_M = \sum_{\substack{\alpha \in F_M\\ F_M \text{finito}}} c_\alpha z^\alpha$ una sucesión de polinomios trigonométricos indexada en Λ, esto es $F_M \subset \Lambda$, tal que $(P_M)_M$ converge a f (sabemos que existe por [DS19b, Teorema 3.14], donde se prueba la densidad en $H_p^\Lambda(\mathsf{T}^N)$ de los polinomios trigonométricos con coeficientes indexados en Λ). Luego, por (3.33),

$$T_\eta(f) = \lim_M T_\eta(P_M) = \sum_{\substack{\alpha \in F_M\\ F_M \text{finito}}} c_\alpha (\eta z)^\alpha,$$

y por la continuidad de los coeficientes se tiene que si $\alpha \notin \Lambda$ entonces $\widehat{T_\eta(f)}(\alpha) = \lim_M \widehat{T_\eta(P_M)}(\alpha) = 0$. De donde conluimos que

$$T_\eta\big(H_p^\Lambda(\mathsf{T}^N)\big) \subset H_q^\Lambda(\mathsf{T}^N) \tag{3.34}$$

y

$$\|T_\eta : H_p^\Lambda(\mathsf{T}^N) \to H_q^\Lambda(\mathsf{T}^N)\| \leq \|T_\eta : H_p(\mathsf{T}^N) \to H_q(\mathsf{T}^N)\|\,.$$

Dada una frecuencia λ de tipo natural con descomposición $\lambda = (R, B)$ y $B = (b_j)_{1 \leq j \leq N}$ (para $N \in \mathsf{N}$ ó $N = \infty$), la transformada de Bohr $\mathfrak{B}$ define un isomorfismo isométrico entre $\mathsf{H}_p(\lambda)$ y $H_p^R(\mathsf{T}^N)$. Más precisamente, existe una única isometría sobreyectiva

$$\mathfrak{B} : \mathsf{H}_p(\lambda) \to H_p^R(\mathsf{T}^N)$$

tal que para cada $\alpha \in R$ y $n \in \mathsf{N}$ con $\lambda_n = \sum \alpha_j b_j$ tenemos que $\widehat{f}(\alpha) = a_n$ para toda $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathsf{H}_p(\lambda)$ y $f \in H_p^R(\mathsf{T}^N)$ con $f = \mathfrak{B}(D)$ (ver [DS19b, Teorema 3.31]).

Teorema 3.5.10. *Sea λ una frecuencia de tipo natural con descomposición (B, R) tal que $b_j > 0$ para todo j y (si B es infinita) $\lim_j b_j = \infty$. Entonces, λ es hipercontractiva.*

Demostración. Fijemos $1 \leq p \leq q < \infty$ y $\sigma > 0$ y definamos $\eta_j = e^{-b_j \sigma}$ para cada $1 \leq j \leq N$. Dado que los b_j son positivos, tenemos que $0 < \eta_j < 1$ para todo j. Si B es finito y tiene longitud N, entonces por (3.32) y (3.34) tenemos un operador continuo

$$T_\eta : H_p^R(\mathsf{T}^N) \to H_q^R(\mathsf{T}^N).$$

Si B es infinita, el hecho de que $\lim_j b_j = \infty$ implica que podemos encontrar j_0 tal que $\eta_j < \sqrt{p/q}$ para todo $j \geq j_0$. Entonces $\sup_n \prod_{j=1}^{n} T_{\eta_j} \leq \prod_{j=1}^{j_0} T_{\eta_j}$ y tenemos un operador acotado $T_\eta : H_p(\mathsf{T}^\infty) \to H_q(\mathsf{T}^\infty)$. Esto y (3.34) nuevamente nos dicen que

$$T_\eta : H_p^R(\mathsf{T}^\infty) \to H_q^R(\mathsf{T}^\infty).$$

Consideramos ahora el operador acotado $\tau_\sigma = \mathfrak{B}^{-1} \circ T_\eta \circ \mathfrak{B} : \mathcal{H}_p(\lambda) \to \mathcal{H}_q(\lambda)$. Veamos que este es exactamente el operador traslación que estamos buscando. Para esto, miremos primero los polinomios de Dirichlet. Dada $\sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n s}$ escribimos $c_\alpha = a_n$ si $\sum_j \alpha_j b_j = \lambda_n$ y tenemos

$$\mathfrak{B}\Big(\sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n s}\Big) = \sum_{\substack{\alpha \quad R \\ \lambda_1 \leq \sum_j \alpha_j b_j \leq \lambda_k}} c_\alpha z^\alpha .$$

La última es una suma finita, y de (3.33) obtenemos

$$\mathfrak{B}^{-1} \circ T_\eta\Big(\sum_{\substack{\alpha \quad R \\ \lambda_1 \leq \sum_j \alpha_j b_j \leq \lambda_k}} c_\alpha z^\alpha\Big) = \mathfrak{B}^{-1}\Big(\sum_{\substack{\alpha \quad R \\ \lambda_1 \leq \sum_j \alpha_j b_j \leq \lambda_k}} c_\alpha (\eta z)^\alpha\Big)$$

$$= \mathfrak{B}^{-1}\Big(\sum_{\substack{\alpha \quad R \\ \lambda_1 \leq \sum_j \alpha_j b_j \leq \lambda_k}} c_\alpha e^{-\sum_j b_j \alpha_j \sigma} z^\alpha\Big) = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}.$$

Por lo tanto probamos nuestra afirmación para los polinomios de Dirichlet. Sea $D = \sum a_n(D) e^{-\lambda_n s}$ $\mathcal{H}_p(\lambda)$, por la densidad de los λ-polinomios de Dirichlet en $\mathcal{H}_p(\lambda)$ (ver [DS19b, Teorema 3.26]), existe una sucesión $D_M = \sum a_n(D_M) e^{-\lambda_n s}$ de polinomios de Dirichlet que converge a D. Por continuidad, sabemos que $\tau_\sigma(D_M) \to \tau_\sigma(D)$ en $\mathcal{H}_q(\lambda)$. Dado que la convergencia en $\mathcal{H}_p(\lambda)$ implica la convergencia (en C) de los coeficientes, tenemos que $a_n(D) = \lim_M a_n(D_M)$ y

$$a_n(\tau_\sigma(D)) = \lim_M a_n(\tau_\sigma(D_M)) = \lim_M a_n(D_M) e^{-\lambda_n \sigma} = a_n(D) e^{-\lambda_n \sigma},$$

de donde obtenemos que τ_σ es el operador de traslación. □

Observación 3.5.11. Las frecuencias $(\log n)$ y (n) satisfacen trivialmente las condiciones del Teorema 3.5.10. A su vez, si la frecuencia λ es Q-linealmente independiente (como, por ejemplo $(\log \mathfrak{p}_n)$), entonces uno puede tomar simplemente $B = \lambda$ y R dada por $r_j^n = \delta_{j,n}$ para ver que satisface las condiciones del Teorema 3.5.10. Como consecuencia directa (ver la observación 3.5.8), para cada una de estas frecuencias los espacios $\mathcal{H}_{p,+}(\lambda)$ (con $1 \leq p < \infty$) son todos isomorfos como espacios de Fréchet.

3.6. Espacios $H_{\infty,+}^{\lambda}(\mathsf{C}_0)$

Como hemos mencionado, las series de Dirichlet generales y las funciones uniformemente casi periódicas están estrechamente relacionadas. Más precisamente, recordemos que por el Teorema 3.1.1 (ver también [DS20a, Teorema 2.16]) se tiene que existe un isomorfismo que conserva los coeficientes de Bohr y de Dirichlet tal que $H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0) = \mathcal{H}_{\infty}(\lambda)$. Nuestro objetivo ahora es encontrar una descripción análoga para $\mathcal{H}_{\infty,+}(\lambda)$. El primer paso es encontrar un espacio adecuado de las funciones casi periódicas, y dotarlo con una topología localmente convexa conveniente. Denotamos por

$$H_{\infty,+}^{\lambda}(\mathbb{C}_0)$$

al espacio de todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}$ que son uniformemente casi periódicas en cada abscisa $\{\mathrm{Re}(s) = \sigma\}$ y tales que el coeficiente de Bohr x-ésimo de f (recordar (3.2)) se anula si $x \notin \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Cada una de estas funciones es por lo tanto acotada en cada semiplano $\mathbb{C}_\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ (ver [Bes55, Capítulo III, § 3]), y podemos dotar a $H_{\infty,+}^{\lambda}(\mathbb{C}_0)$ con la topología Fréchet dada por la familia de seminormas

$$\|f\|_{\infty,k} = \sup_{\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{k}} |f(s)|\,. \tag{3.35}$$

Nuevamente es conveniente encontrar descripciones proyectivas propias de $H_{\infty,+}^{\lambda}(\mathbb{C}_0)$. Consideremos primero para cada k el espacio de Banach

$$H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}\right) = \left\{ f : [\mathrm{Re} > 1/k] \to \mathbb{C} \text{ holomorfa} : f(\bullet + \tfrac{1}{k}) \in H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0) \right\}$$

dotado con la norma definida en (3.35). Entonces obtenemos el espectro proyectivo

$$\left(H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}\right), i_k\right)_{k \in \mathbb{N}},$$

donde los operadores de enlace son las restricciones

$$i_k : H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k+1}}\right) \hookrightarrow H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}\right) \text{ dada por } f \to f|_{[\mathrm{Re}>1/k]}\,.$$

Dada $f \in H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}\right)$ los coeficientes de Bohr de f (recordar nuevamente (3.2)) son

$$a_{\lambda_n}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\sigma+it)e^{(\sigma+it)\lambda_n}\,dt\,,$$

donde $\sigma > 1/k$ es arbitraria (y la definición es independiente de la elección del σ). Observemos que con esta definición los coeficientes de Bohr de $f \in H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k+1}}\right)$ y de $i_k(f) \in H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}\right)$ coinciden.

Tenemos un segundo espectro proyectivo posible que nos resulta de utilidad. Notemos primero que para cada k, el operador

$$\varphi_k : H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}\right) \to H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0) \text{ defindo por } f \to f\big(\bullet + 1/k\big)$$

es una biyección isométrica, donde la inversa está dada por $\varphi_k^{-1}(f) = f\big(\bullet - 1/k\big)$. Luego podemos considerar el espectro proyectivo

$$\left(H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0), \tau_k\right)_{k \in \mathbb{N}},$$

donde $\tau_k : H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0) \to H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0)$ está definido por

$$f \to f\big(\bullet + 1/k - 1/(k+1)\big)\,.$$

Proposición 3.6.1. *Sea λ una frecuencia. Entonces $H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0)$ es un espacio de Fréchet-Schwartz. También, los operadores*

$$H_{\infty,+}^{\lambda}(\mathbb{C}_0) = \mathrm{proj}\left(H_{\infty}^{\lambda}\left(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}\right), i_k\right) \text{ dado por } f \to \left(f|_{[\mathrm{Re}>1/k]}\right)_{k=1}^{\infty}$$

y

$$H_{\infty,+}^{\lambda}(\mathbb{C}_0) = \mathrm{proj}\left(H_{\infty}^{\lambda}(\mathbb{C}_0), \tau_k\right) \text{ dado por } f \to \big(f(\bullet + 1/k)\big)_{k=1}^{\infty}$$

son isomorfismos de espacios de Fréchet.

Demostración. Ambas descripciones proyectivas se siguen exactamente como en la prueba de la Proposición 3.3.4. En particular, mirando la segunda y teniendo en cuenta que todos los espacios $H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0)$ son espacio de Banach, deducimos del Teorema 3.2.5 que τ_k es compacto para cada k y por lo tanto $H_{\infty,+}^\lambda(\mathsf{C}_0)$ es un espacio de Fréchet-Schwartz. □

Estamos listos para mostrar que tal como en el Teorema 3.1.1 existe un isomorfismo entre los espacios$H_{\infty,+}^\lambda(\mathsf{C}_0)$ y $\mathsf{H}_{\infty,+}(\lambda)$ que identifica los coeficientes.

Teorema 3.6.2. *La identificación*

$$H_{\infty,+}^\lambda(\mathsf{C}_0) = \mathsf{H}_{\infty,+}(\lambda) \ \textit{dado por} \ f \to \sum a_{\lambda_n}(f)e^{-\lambda_n s},$$

es un isomorfismo de espacios de Fréchet que conserva coeficientes.

Demostración. Comencemos por ver que para cada k el operador

$$S_k : H_\infty^\lambda\left(\mathsf{C}_{\frac{1}{k}}\right) \to \mathsf{H}_{\infty,k}(\lambda)$$

definido por

$$f \to \sum a_{\lambda_n}(f)e^{-\lambda_n s}$$

es una biyección isométrica. Tomemos $f \in H_\infty^\lambda\left(\mathsf{C}_{\frac{1}{k}}\right)$ y observemos que la función $g := f(\bullet + 1/k)$ pertenece a $H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0)$ y tiene coeficientes de Bohr

$$a_{\lambda_n}(g) = a_{\lambda_n}(f)e^{-\frac{\lambda_n}{k}},$$

para $n \in \mathsf{N}$. Luego por el Teorema 3.1.1 la serie de Dirichlet $\sum a_{\lambda_n}(f)e^{-\frac{\lambda_n}{k}}e^{-\lambda_n s} = \sum a_{\lambda_n}(g)e^{-\lambda_n s}$ pertenece a $\mathsf{H}_\infty(\lambda)$, y por lo tanto $\sum a_{\lambda_n}(f)e^{-\lambda_n s} \in \mathsf{H}_{\infty,k}(\lambda)$ con

$$\left\| \sum a_{\lambda_n}(f)e^{-\lambda_n s}\right\|_{\mathsf{H}_\infty(\lambda),k} = \left\|a_{\lambda_n}(f)e^{-\frac{\lambda_n}{k}}e^{-\lambda_n s}\right\|_{\mathsf{H}_\infty(\lambda)} = \|g\|_\infty = \|f\|_{\infty,k}.$$

Esto muestra que S_k está bien definido y es una isometría. Por otro lado, si $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathsf{H}_{\infty,k}(\lambda)$, entonces por definición y nuevamente por el Teorema 3.1.1 podemos encontrar una $g \in H_\infty^\lambda(\mathsf{C}_0)$ tal que $a_{\lambda_n}(g) = a_n e^{-\frac{\lambda_n}{k}}$ para todo n. Ahora la función $f := g(\bullet - 1/k)$ pertenece a $H_\infty^\lambda\left(\mathsf{C}_{\frac{1}{k}}\right)$ y tiene coeficientes de Bohr

$$a_{\lambda_n}(f) = e^{\frac{\lambda_n}{k}}a_{\lambda_n}(g) = a_n,$$

para $n \in \mathsf{N}$. Esto muestra que S_k es sobreyectiva y, por lo tanto, una biyección isométrica. Ahora, la observación A.0.7 implica que el operador

$$S : \operatorname{proj}\left(H_\infty^\lambda\left(\mathsf{C}_{\frac{1}{k}}\right), i_k\right) \to \operatorname{proj}\left(\mathsf{H}_{\infty,k}(\lambda), i_k\right) \ \text{dado por} \ (f_k) \to (S_k(f_k))$$

es un isomorfismo de espacios de Fréchet. Más aún, si ρ_m y π_m son las proyecciones canónicas de los respectivos espectros proyectivos entre $H_\infty^\lambda\left(\mathsf{C}_{\frac{1}{m}}\right)$ y $\mathsf{H}_{\infty,m}(\lambda)$, tenemos que

$$\pi_m \circ S = S_m \circ \rho_m.$$

Usando las descripciones proyectivas de los espacios dadas en la Proposición 3.4.1 y 3.6.1, inmediatamente tenemos que para cada $f \in H_{\infty,+}^\lambda(\mathsf{C}_0)$, el n-ésimo coeficiente de Dirichlet de $S(f)$ es iguala $a_{\lambda_n}(f)$. □

De las Proposiciones 3.5.4 y 3.5.7 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.6.3.

(I) Los monomios $\{e^{-\lambda_n s}\}_n$ forman una base en $H_{\infty,+}^\lambda(\mathsf{C}_0)$ si y sólo si λ satisface el Teorema de Bohr.

(II) $H_{\infty,+}^\lambda(\mathsf{C}_0)$ es nuclear y λ satisface el Teorema de Bohr si y sólo si $L(\lambda) = 0$.

Capítulo 4

Operadores de Multiplicación

Dada una función holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, decimos que esta define un operador de Toeplitz analítico en el espacio de Hardy $H_p(\mathbb{D})$, si $T_f(g) = fg \in H_p(\mathbb{D})$ para toda $g \in H_p(\mathbb{D})$. En [Vuk03], Vukotić demuestra que f define un operador de Toeplitz analítico si y sólo si es acotada en el disco, es decir si pertenece a $H_\infty(\mathbb{D})$. A partir de esta caracterización, y mediante herramientas de análisis complejo y funcional, estudia distintas propiedades del operador T_f. Así, por ejemplo, determina aquellos operadores de Toeplitz analíticos que tienen rango cerrado. La caracterización viene dada a partir de la imagen de f en el borde del disco, entendiendo esto como la función dada por el límite radial $F(\omega) = \lim\limits_{r \to 1} f(r\omega)$ para casi todo $\omega \in \mathbb{T}$:

Teorema 4.0.1. *Sea $1 \leq p < \infty$, $f \in H_\infty(\mathbb{D})$ y $F \in H_\infty(\mathbb{T})$ definida por $F(\omega) = \lim\limits_{r \to 1} f(r\omega)$. Entonces $T_f : H_p(\mathbb{D}) \to H_p(\mathbb{D})$ tiene rango cerrado si y solo si existe una constante $m > 0$ tal que $|F(\omega)| \geq m$ para casi todo $\omega \in \mathbb{T}$. Más aún,*

$$\inf\{\|T_f(g)\|_{H_p(\mathbb{D})} : g \in H_p(\mathbb{D}),\ \|g\|_{H_p(\mathbb{D})} = 1\} = \operatorname{essinf}\{|F(\omega)| : \omega \in \mathbb{T}\}.$$

Además estudia propiedades espectrales del operador T_f, en particular describe el espectro, el espectro continuo y el espectro aproximado. Recordemos que para un operador $T : X \to X$ (X espacio de Banach) se define:

- el espectro $\sigma(T)$ como los λ tal que $T - \lambda I : X \to X$ no es inversible,
- el espectro puntual $\sigma_p(T)$ como los λ tal que $T - \lambda I$ no es inyectivo,
- el espectro continuo $\sigma_c(T)$ como los λ tal que $T - \lambda I$ es inyectivo y tiene rango denso (pero no cerrado) en X,
- el espectro radial $\sigma_r(T)$ como los λ tal que $T - \lambda I$ es inyectivo y su rango tiene codimensión mayor o igual a 1.

Observemos que

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{4.1}$$

A su vez, el espectro aproximado $\sigma_{ap}(T)$ se define como los $\lambda \in \sigma(T)$ tales que $T - \lambda I$ no está acotado inferiormente. Es decir, que existe una sucesión $(x_n) \subset X$ de norma 1 de modo que la sucesión $(T - \lambda I)(x_n)$ tiende a cero en X. En [Vuk03], Vukotić describe el espectro de $T - f$ en términos de la imagen de f. El espectro continuo queda determinado por aquellos valores λ para los cuales $f - \lambda$ es una función *outer* en $H_\infty(\mathbb{D})$. Es decir, aquellos valores λ para los cuales

$$\log|f(0) - \lambda| = \int_{\mathbb{T}} \log|F(\omega) - \lambda| \mathrm{d}\omega,$$

siendo F la función dada por el límite radial de f. Por último, el espectro aproximado puede expresarse a partir de la imagen esencial de la función F.

Teorema 4.0.2. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $f \in H_\infty(\mathbb{D})$, entonces*

- $\sigma(T_f) = \overline{f(\mathbb{D})}$.
- $\sigma_c(T_f) \subseteq \overline{f(\mathbb{D})} - f(\mathbb{D})$. *Más aún, $\lambda \in \sigma_c(T_f)$ si y solo si $f - \lambda$ es outer en $H_\infty(\mathbb{D})$.*
- $\sigma_{ap}(T_f) = \mathrm{essran}\{F(\omega);\ \omega \in \mathbb{T}\}$.

Finalmente, también estudia la norma esencial del operador T_f. Dado un operador $T : X \to Y$ (con X e Y espacios de Banach), la norma esencial se define como

$$\|T\|_{\mathrm{ess}} = \{\|T - K\|_{X\to Y} : K : X \to Y \text{ compacto}\}.$$

En el caso de T_f, Vukotić demuestra que esta coincide con la norma de f. Es decir, que la distancia que hay entre el operador T_f y los operadores compactos de $H_p(\mathbb{D})$ en $H_p(\mathbb{D})$ es $\|f\|_{H_\infty(\mathbb{D})}$.

Teorema 4.0.3. *Sea $1 < p < \infty$, $f \in H_p(\mathbb{D})$ y $T_f : H_p(\mathbb{D}) \to H_p(\mathbb{D})$ el operador de Toeplitz definido por f. Entonces*

$$\|T_f\|_{\mathrm{ess}} = \|T_f\|_{H_p(\mathbb{D})\to H_p(\mathbb{D})} = \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D})}.$$

Una pregunta que surge naturalmente, es si estos resultados se mantienen al considerar espacios de Hardy de varias o infinitas variables. Es decir, operadores del tipo

$$\begin{aligned} T_f : H_p(\mathbb{D}_2^N) &\to H_q(\mathbb{D}_2^N), \\ g &\to fg \end{aligned}$$

siendo $N \in \mathbb{N}$ ó $N = \infty$. Más aún, teniendo en cuenta la relación existente entre estos espacios y los espacios de Hardy de series de Dirichlet, el interés se extiende a los espacios $\mathcal{H}_p$. Es este último caso en el cual nos vamos a enfocar, aunque planteando un ida y vuelta tanto con los espacios $H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ como con $H_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Un primer paso necesario es determinar, fijados $1 \leq p, q \leq \infty$, aquellas funciones holomorfas φ que definen un operador de multiplicación, o Toeplitz, de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$. Es decir, qué funciones holomorfas φ satisfacen que $\varphi E \in \mathcal{H}_q$ para toda serie de Dirichlet $E \in \mathcal{H}_p$, considerando siempre el producto como funciones en el dominio en el que se encuentran definidas. Por lo tanto, el dominio natural de φ ya no será el disco, sino que deberá ser el semiplano $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ en caso de que $q < \infty$ o bien $\mathbb{C}_0$ si $q = \infty$ (dado que estamos buscando que φE sea una serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_q$). A estas funciones las llamaremos multiplicadores de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$, formalmente

$$\mathfrak{M}(p,q) := \{\varphi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C} \text{ holomorfa } : \varphi \cdot E \in \mathcal{H}_q, \text{ para toda } E \in \mathcal{H}_p\},$$

considerando, nuevamente, como dominio a $\mathbb{C}_0$ si $q = \infty$. Notemos que un multiplicador no puede ser cualquier función holomorfa. De hecho, dado que $1 \in \mathcal{H}_p$, se tiene que todo multiplicador φ debe ser una serie de Dirichlet, más aún debe pertenecer a $\mathcal{H}_q$. Luego, para ser consistentes con la notación que venimos utilizando, vamos a notar como D a los multiplicadores entre espacios de series de Dirichlet. A los espacios $\mathfrak{M}(p,q)$ podemos dotarlos con una norma, respetando la idea del multiplicador. Para esto, consideremos un multiplicador $D \in \mathfrak{M}(p,q)$. Como consecuencia del Teorema de Gráfico Cerrado y la continuidad de la evaluación puntual en el semiplano $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ (Teorema 1.1.10), el operador de multiplicación $M_D : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$, inducido por D, resulta continuo. Luego podemos considerar la norma en $\mathfrak{M}(p,q)$ dada por la norma del operador de multiplicación. Es decir,

$$\|D\|_{\mathfrak{M}(p,q)} = \|M_D\|_{\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_q} = \sup\left\{ \|DE\|_{\mathcal{H}_q} : \|E\|_{\mathcal{H}_p} \leq 1 \right\}.$$

Este espacio topológico fue definido en [HLS97] por Hedenmalm, Lindqvist y Seip para el caso $p = q = 2$, y luego generalizado por Bayart en [Bay02] a los casos $p = q$ con $1 \leq p < \infty$. El resultado obtenido, nos dice que el espacio de los multiplicadores $\mathfrak{M}(p,p)$ no es otro que el espacio de series de Dirichlet $\mathcal{H}_\infty$, una caracterización similar a los operadores de Toeplitz antes mencionados.

Teorema 4.0.4. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $\mathfrak{M}(p,p) = \mathcal{H}_\infty$ isométricamente.*

Nuestro primer objetivo será entonces caracterizar a los multiplicadores de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$, para luego poder estudiar a los operadores de multiplicación entre dichos espacios.

4.1. Multiplicadores de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$

Como hemos mencionado, para $1 \leq p, q \leq \infty$, se tiene que el espacio $\mathfrak{M}(p,q)$ está contenido en $\mathcal{H}_q$, dado que la serie de Dirichlet constante 1 pertenece a $\mathcal{H}_p$. Además, con la topología definida en $\mathfrak{M}(p,q)$, esta inclusión resulta continua ya que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_q} = \|M_D(1)\|_{\mathcal{H}_q} \leq \|M_D\|_{\mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q} \|1\|_{\mathcal{H}_q} = \|D\|_{\mathfrak{M}(p,q)} . \tag{4.2}$$

Asimismo, siguiendo la contención de los espacios de Hardy, esto es $\mathcal{H}_q \subset \mathcal{H}_p$ si $p \leq q$, se tienen las contenciones continuas

$$\mathfrak{M}(p_1, q) \subset \mathfrak{M}(p_2, q) \text{ y } \mathfrak{M}(p, q_2) \subset \mathfrak{M}(p, q_1) , \tag{4.3}$$

siempre que $p_1 \leq p_2$ o $q_1 \leq q_2$.

En lo que sigue de esta sección vamos a ver que, al igual que en el caso $p = q$, el espacio de multiplicadores $\mathfrak{M}(p,q)$ resulta ser también un espacio de Hardy $\mathcal{H}_t$, para cierto $t = t(p,q)$. Sin embargo, antes de ver este resultado, comencemos probando un criterio del tipo Hilbert para los espacios de multiplicadores. Recordemos que, en el caso de los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p$, el criterio de Hilbert nos permite determinar si una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ pertenece a ese espacio a partir de la "restricción" de la serie a finitos primos (ver Proposición 1.1.11). Resulta necesario, antes de enunciar el criterio, determinar qué espacios que ocupan el rol de $\mathcal{H}_p^{(N)}$. Siguiendo con la idea de los multiplicadores y su relación con los espacios de Hardy, estos no serán más que considerar los espacios de multiplicadores de $\mathcal{H}_p^{(N)}$ en $\mathcal{H}_q^{(N)}$. Es decir,

$$\mathfrak{M}^{(N)}(p,q) := \{D \in \mathcal{H}_q^{(N)} : DE \in \mathcal{H}_q^{(N)} \text{ para toda } E \in \mathcal{H}_p^{(N)}\}.$$

El criterio de Hilbert para el espacio de los multiplicadores es el siguiente

Proposición 4.1.1. *Sea $D = \sum a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet y $1 \leq p, q \leq \infty$. Entonces $D \in \mathfrak{M}(p,q)$ si y solo si $D|_N \in \mathfrak{M}^{(N)}(p,q)$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\sup_N \|D|_N\|_{\mathfrak{M}^{(N)}(p,q)} < \infty$.*

Demostración. Comencemos notando que, si $n = jk$, entonces $\operatorname{gpd}(n) \leq \mathfrak{p}_N$ si y solo si $\operatorname{gpd}(j) \leq \mathfrak{p}_N$ y $\operatorname{gpd}(k) \leq \mathfrak{p}_N$. De esto, podemos deducir entonces, de la Observación 1.1.3, que dadas dos series de Dirichlet D y E, tenemos $(DE)|_N = D|_N E|_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Tomemos D una serie de Dirichlet y supongamos que $D \in \mathfrak{M}(p,q)$. Entonces, dada $E \in \mathcal{H}_p^{(N)}$ por definición $DE \in \mathcal{H}_q$, y $(DE)|_N \in \mathcal{H}_q^{(N)}$. Pero $(DE)|_N = D|_N E|_N = D|_N E$ y luego, dado que E era arbitraria, $D|_N \in \mathfrak{M}^{(N)}(p,q)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Por otro lado, por el criterio de Hilbert para los espacios de Hardy, si $E \in \mathcal{H}_q$ entonces $E|_N \in \mathcal{H}_q^{(N)}$ y $\|E|_N\|_{\mathcal{H}_q} \leq \|E\|_{\mathcal{H}_q}$ (ver Proposición 1.1.11). Esto nos dice que $\|D|_N\|_{\mathfrak{M}^{(N)}(p,q)} \leq \|D\|_{\mathfrak{M}(p,q)}$ para todo N.

Supongamos ahora que D verifica que

$$D|_N \in \mathfrak{M}^{(N)}(p,q) \text{ para todo } N \in \mathbb{N} \text{ y } C = \sup_N \|D|_N\|_{\mathfrak{M}^{(N)}(p,q)} < \infty .$$

Entonces, para cada $E \quad \mathsf{H}_p$ tenemos,de nuevo por la Proposición 1.1.11,

$$(DE)|_N \quad _{\mathsf{H}_p} = \quad D|_N E|_N \quad _{\mathsf{H}_p} \leq \quad D|_N \quad _{\mathfrak{M}^{(N)}(p,q)} \quad E|_N \quad _{\mathsf{H}_p} \leq C \quad E \quad _{\mathsf{H}_p}.$$

Dado que eso vale para todo N, esto nos dice (nuevamente por el criterio de Hilbert para H_p) que $DE \quad \mathsf{H}_p$ lo que completa la prueba. □

Al comienzo de este capítulo, comentamos el interés en estudiar los operadores de multiplicación en los distintos espacios de Hardy, tanto en los espacios $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$ como en $H_p(\mathsf{T}^\infty)$. Siguiendo un razonamiento análogo al realizado, podemos definir $\mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q)$ como los multiplicadores de $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$ en $H_q(\mathsf{D}_2^\infty)$, siendo $\mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^N}(p,q)$ los multiplicadores para funciones en finitas variables. De igual forma, $\mathsf{M}_{\mathsf{T}^\infty}(p,q)$ serán los multiplicadores de $H_p(\mathsf{T}^\infty)$ en $H_q(\mathsf{T}^\infty)$, y $\mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)$ los multiplicadores en el politoro N dimensional. Cada uno de los argumentos que hemos mencionado anteriormente se repiten en estos casos. Es decir, cada espacio de multiplicadores está contenido en el espacio de Hardy H_q correspondiente, y la inclusión es continua si consideramos como norma la del operador de multiplicación definido por el operador.

Como hemos mencionado, hay una conexión muy importante entre estos espacios y los espacios de Hardy de series de Dirichlet, dada por las transformadas de Bohr. Recordemos que la transformada de Bohr $\mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^\infty} : H_p(\mathsf{D}_2^\infty) \to \mathsf{H}_p$, definida por $\mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^\infty}(f) = \sum a_n n^{-s}$, con $a_n = c_\alpha(f)$ si $n = \mathfrak{p}^\alpha$, es una isometría entre ambos espacios de Hardy. Del mismo modo, $\mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty} : H_p(\mathsf{T}^\infty) \to \mathsf{H}_p$, dada por $\mathsf{B}_{\mathsf{T}^\infty}(F) = \sum a_n n^{-s}$, con $a_n = \hat{F}(\alpha)$ si $n = \mathfrak{p}^\alpha$ resulta una isometría. Resulta natural preguntarse si el hecho de que $D \quad \mathfrak{M}(p,q)$ implica que $\mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^\infty}(D)$ y $\mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty}(D)$ sean multiplicadores de H_p en H_q es sus espacios correspondientes, o viceversa. Efectivamente esto es cierto. Pero vale algo más fuerte aún, dadas dos series de Dirichlet cualesquiera $D, E \quad \mathsf{H}_1$, se tiene que el producto entre las series está en H_1 si y solo si los productos de sus transformadas están en el espacio H_1 correspondiente.

Teorema 4.1.2. *Sean* $D, E \quad \mathsf{H}_1$, $f, g \quad H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$ *y* $F, G \quad H_1(\mathsf{T}^\infty)$ *tales que* $f \quad F \quad D$ *y* $g \quad G \quad E$. *Entonces son equivalentes*

1. $DE \quad \mathsf{H}_1$
2. $fg \quad H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$
3. $FG \quad H_1(\mathsf{T}^\infty)$

y, en este caso $DE \quad fg \quad FG$.

Este resultado nos va a permitir, al momento de caracterizar los multiplicadores, movernos entre los espacios de series de Dirichlet y los espacios de funciones. De esta manera, vamos a poder utilizar las herramientas más convenientes para facilitar las demostraciones. Como paso previo a demostrar este resultado, vamos a ver la equivalencia entre 2 y 3 para el caso finito dimensional.

Proposición 4.1.3. *Fijemos* $N \quad \mathsf{N}$ *y sean* $f, g \quad H_1(\mathsf{D}^N)$ *y* $F, G \quad H_1(\mathsf{T}^N)$ *tales que* $f \quad F$ *y* $g \quad G$. *Entonces, son equivalentes*

1. $fg \quad H_1(\mathsf{D}^N)$
2. $FG \quad H_1(\mathsf{T}^N)$

y, en este caso, $fg \quad FG$.

Para demostrar este resultado vamos a utilizar la clase Nevanlinna de funciones en el polidisco y algunas de sus propiedades. Esta clase de funciones aparece estudiada en profundidad por Rudin en [Rud69, Sección 3.3]. Fijado $N \quad \mathsf{N}$, la clase de Nevanlinna $\mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$ consiste en todas las funciones holomorfas sobre D^N que satisfacen

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathsf{T}^N} \log^+ |f(r\omega)| \mathrm{d}\omega < \infty,$$

donde $\log^+(x) = \log(x)$ si $x \geq 1$ y 0 en caso contrario. Dada esta definición y la de los espacios de Hardy, comentados en la Sección 1.1.2, no es difícil ver que la clase de Nevanlinna contiene a los espacios de Hardy $H_p(\mathsf{D}^N)$.

La clase $\mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$ resulta ser un espacio vectorial. Se puede ver que es cerrada bajo la suma a partir de que

$$\log^+|f+g| \leq \log^+(2\,\text{máx}\{|f|,|g|\}) \leq \log(2) + \log^+|f| + \log^+|g|,$$

y bajo el producto por escalares. Sin embargo, no es un espacio vectorial topológico, dado que el producto por escalares no es continuo. A pesar de esto, tienen una propiedad que los espacios de Hardy no satisfacen en general, y es que esta clase es cerrada bajo el producto. Es decir, si $f, g \in \mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$ entonces $fg \in \mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$. Nuevamente basta con ver que

$$\log^+|fg| \leq \log^+|f| + \log^+|g|.$$

De forma similar a lo que ocurre en los espacios de Hardy, el límite radial de una función en la clase de Nevanlinna determina una función integrable en el toro finito dimensional. Aunque en este caso será la función dada por el logaritmo del límite radial, como puede verse en [Rud69, Teorema 3.3.5].

Teorema 4.1.4. *Si* $f \in \mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$*, con* $f \equiv 0$ *entonces*

$$\lim_{r\to 1} f(r\omega) = f\ (\omega)$$

existe en casi todo $\omega \in \mathsf{T}^N$ *y* $\log|f\ | \in L^1(\mathsf{T}^N)$*.*

Pasamos ahora sí a demostrar la Proposicón 4.1.3

Demostración de la Proposición 4.1.3. Supongamos primero que $fg \in H_1(\mathsf{D}^N)$ y denotemos por $H \in H_1(\mathsf{T}^N)$ la función asociada. Entonces, dado que

$$F(\omega) = \lim_{r\to 1^-} f(r\omega), \text{ y } G(\omega) = \lim_{r\to 1^-} g(r\omega)$$

para casi todo $\omega \in \mathsf{T}^N$, tenemos

$$H(\omega) = \lim_{r\to 1^-} (fg)(r\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

para casi todo $\omega \in \mathsf{T}^N$. Por lo tanto $FG = H \in H_1(\mathsf{T}^N)$, y esto nos da 2.
Asumamos ahora que $FG \in H_1(\mathsf{T}^N)$, y tomemos la función asociada $h \in H_1(\mathsf{D}^N)$. El producto $fg : \mathsf{D}^N \to \mathsf{C}$ es una función holomorfa, dado que $f, g \in \mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$, entonces $fg \in \mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$ y por lo tanto $fg - h$ pertenece a la clase de Nevanlinna $\mathsf{N}(\mathsf{D}^N)$, esto es

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathsf{T}^N} \log^+|f(r\omega)g(r\omega) - h(r\omega)|\mathrm{d}\omega < \infty.$$

Consideremos $H(\omega)$ definida para casi todo $\omega \in \mathsf{T}^N$ como el límite radial de $fg - h$. Entonces por el Teorema 4.1.4 hay dos posibilidades: o bien $\log|H| \in L_1(\mathsf{T}^N)$ o $fg - h = 0$ sobre D^N. Pero, al igual que antes, tenemos que

$$\lim_{r\to 1^-} f(r\omega)g(r\omega) = F(\omega)G(\omega) = \lim_{r\to 1^-} h(r\omega)$$

para casi todo $\omega \in \mathsf{T}^N$, y por lo tanto necesariamente $H = 0$. Luego $fg = h$ sobre D^N, y $fg \in H_1(\mathsf{D}^N)$. Esto muestra que 2 implica 1 y completa la prueba. □

Teniendo este resultado en el caso finito dimensional, podemos pasar a la prueba del Teorema 4.1.2. Veremos que 2 implica 3 a partir de la restricción a finitas variables. Por otro lado, para deducir 2 a partir de 3 utilizaremos un argumento análogo usando las Clase Nevanlinna en infinitas variables. Se trata de una extensión a infinitas variables, realizada por Guo y Ni [GN22, Sección 2]. Para el caso infinito dimensional la definición de la clase de Nevanlinna y las propiedades que nos interesan son esencialmente las mismas. Notaremos a la clase por $\mathsf{N}(\mathsf{D}_1^\infty)$ (recordemos que $\mathsf{D}_1^\infty = \ell_1 \cap \mathsf{D}^\infty$) y consistirá en aquellas funciones holomorfas $f : \mathsf{D}_1^\infty \to \mathsf{C}$ tales que

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathsf{T}^\infty} \log^+ |f_{[r]}(\omega)| \mathrm{d}\omega < \infty,$$

siendo $f_{[r]} : \mathsf{T}^\infty \to \mathsf{C}$ definida por

$$f_{[r]}(\omega) = (r\omega_1, r^2\omega_2, r^3\omega_3, \ldots).$$

Nuevamente esta clase resulta un espacio vectorial, que falla en ser un espacio topológico, y es cerrado bajo el producto. A continuación, aislamos dos resultados análogos a los comentados pero que utilizaremos más adelante. El primero, que puede verse en [GN22, Proposiciones 2.14 y demostración de 2.16], nos dice que los espacios de Hardy están contenidos en la clase de Nevanlinna. Notemos que en este caso, dado que están definidas en un dominio diferente, en principio ya no es evidente que esto deba verificarse.

Proposición 4.1.5. *Para todo* $1 \leq p < \infty$, $H_p(\mathsf{D}_2^\infty) \quad \mathsf{N}(\mathsf{D}_1^\infty)$.

El segundo, ver nuevamente [GN22, Teorema 2.4], nos permite pasar del dominio D_1^∞ al politoro infinito dimensional a partir del límite radial.

Teorema 4.1.6. *Sea* $f \quad \mathsf{N}(\mathsf{D}_1^\infty)$*, con* $f \equiv 0$*. Entonces, para casi todo* $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$*, el límite*

$$f \ (\omega) = \lim_{r\to 1} f(r\omega)$$

existe, y $\log |f \ | \quad L^1(\mathsf{T}^\infty)$.

Demostración del Teorema 4.1.2. Veamos primero que 1 implica 2. Supongamos que las series de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ y $E = \sum b_n n^{-s}$ pertenecen a H_1 y cumplen que

$$\left(\sum a_n n^{-s}\right)\left(\sum b_n n^{-s}\right) = \sum c_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_1.$$

Sea $h \quad H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$ la función holomorfa asociada al producto. Recordemos que, si $\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$ y $n = \mathfrak{p}^\alpha \quad \mathsf{N}$, entonces

$$c_\alpha(f) = a_n,\ c_\alpha(g) = b_n \text{ y } c_\alpha(h) = c_n = \sum_{jk=n} a_j b_k\,. \tag{4.4}$$

Por otro lado, la función $fg : \mathsf{D}_2^\infty \to \mathsf{C}$ es holomorfa y si fijamos $N \quad \mathsf{N}$ entonces para todo $z \quad \mathsf{D}^N$ tenemos

$$\sum_{\alpha \quad \mathsf{N}_0^N} c_\alpha(fg) z^\alpha = fg(z,0) = \left(\sum_{\beta \quad \mathsf{N}_0^N} c_\beta(g) z^\beta\right)\left(\sum_{\gamma \quad \mathsf{N}_0^N} c_\gamma(f) z^\gamma\right) = \sum_{\alpha \quad \mathsf{N}_0^N}\left(\sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_\beta(f) c_\gamma(g)\right) z^\alpha.$$

Dado que esto vale para todo N entonces

$$c_\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_\beta(f) c_\gamma(g)\,. \tag{4.5}$$

para todo $\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$. Ahora, si $jk = n = \mathfrak{p}^{\alpha}$ para algún $\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$, entonces existen $\beta, \gamma \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$ tales que $j = \mathfrak{p}^{\beta}$, $k = \mathfrak{p}^{\gamma}$ y $\beta + \gamma = \alpha$. Esto, junto con (4.4) y (4.5) muestra que $c_\alpha(h) = c_\alpha(fg)$ para todo α y, por lo tanto $fg = h \quad H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$. esto prueba nuestra afirmación.
Supongamos ahora que $fg \quad H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$ y tomemos las series de Dirihclet correspondientes $\sum a_n n^{-s}$, $\sum b_n n^{-s}$, $\sum c_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_1$ (asociadas a f, g y fg respectivamente). El mismo argumento de antes muestra que

$$c_n = c_\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_\beta(f)c_\gamma(g) = \sum_{jk=n} a_j b_k \,,$$

entonces $\left(\sum a_n n^{-s}\right)\left(\sum b_n n^{-s}\right) = \sum c_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_1$, lo que prueba que 2 implica 1.
Vamos a suponer ahora que $fg \quad H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$ y veamos que 3 vale. Sea $H \quad H_1(\mathsf{T}^\infty)$ la función asociada a fg. Notemos primero que $f_N \quad F_N$, $g_N \quad G_N$ y $(fg)_N \quad H_N$ para todo N. Evaluando en $z \quad \mathsf{D}^N$ tenemos que

$$(fg)_N(z) = (fg)(z,0) = f(z,0)g(z,0) = f_N(z)g_N(z),$$

luego este producto está en $H_1(\mathsf{D}^N)$. Por lo tanto la Proposición 4.1.3 dice que $f_N g_N \quad F_N G_N$, y tenemos

$$\hat{H}_N(\alpha) = (\widehat{F_N G_N})(\alpha)$$

para todo $\alpha \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})}$ y, entonces, $H_N = F_N G_N$ para todo $N \quad \mathsf{N}$. Podemos encontrar una subsucesión de forma tal que

$$\lim_k F_{N_k}(\omega) = F(\omega),\ \lim_k G_{N_k}(\omega) = G(\omega),\ \text{ y } \lim_k H_{N_k}(\omega) = H(\omega)$$

para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$ (recordar la Observación 1.1.6). Todo esto nos dice que $F(\omega)G(\omega) = H(\omega)$ para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$. Luego $FG = H \quad H_1(\mathsf{T}^\infty)$, y entonces queda probada nuestra afirmación.
Finalmente, si $FG \quad H_1(\mathsf{T}^\infty)$, denotemos por h a su función asociada en $H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$. Por las Proposición 4.1.5 sabemos que $H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$ está contenido en la clase de Nevanlinna $\mathsf{N}(\mathsf{D}_1^\infty)$, por lo tanto $f, g, h \quad \mathsf{N}(\mathsf{D}_1^\infty)$ y, por definición, $fg - h \quad \mathsf{N}(\mathsf{D}_1^\infty)$. Por otra parte, del Teorema 4.1.6 tenemos que si $u \quad \mathsf{N}(\mathsf{D}_1^\infty)$, entonces el límite radial $u\ (\omega) = \lim_{r \to 1^-} u_{[r]}(\omega)$ existe para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$. Más aún, $u = 0$ si y solo is u es 0 en algún subconjunto con medida positiva de T^∞. El límite radial de f, g y h coinciden en casi todo punto con F, G y FG respectivamente (ver el Teorema 1.1.9). Dado que

$$(fg - h)\ (\omega) = \lim_{r \to 1^-} f_{[r]}(\omega) g_{[r]}(\omega) - h_{[r]}(\omega) = 0,$$

para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$, entonces $fg = h$ en D_1^∞. Finalmente, como el conjunto D_1^∞ es denso en D_2^∞, por la continuidad de las funciones tenemos que $fg \quad H_1(\mathsf{D}_2^\infty)$. □

Dado que este resultado nos permite pasar de un producto de series de Dirichlet a uno en funciones, automáticamente tenemos la siguiente igualdad entre los espacios de multiplicadores.

Proposición 4.1.7. *Para todos* $1 \leq p, q \leq \infty$ *se tiene*

$$\mathfrak{M}(p,q) = \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q) = \mathsf{M}_{\mathsf{T}^\infty}(p,q)\,,$$

y

$$\mathfrak{M}^{(N)}(p,q) = \mathsf{M}_{\mathsf{D}^N}(p,q) = \mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)\,,$$

para todo $N \quad \mathsf{N}$*, por medio de la transformada de Bohr.*

A su vez, el criterio de Hilbert que probamos anteriormente tiene su análogo en los multiplicadores de funciones.

Proposición 4.1.8.

1. *$f \quad \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q)$ si y solo si $f_N \quad \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^N}(p,q)$ para todo $N \quad \mathsf{N}$ y $\sup_N \quad M_{f_N} \quad < \infty$.*
2. *$F \quad \mathsf{M}_{\mathsf{T}^\infty}(p,q)$ si y solo si $F_N \quad \mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)$ para todo $N \quad \mathsf{N}$ y $\sup_N \quad M_{F_N} \quad < \infty$.*

Estamos ahora en condiciones de probar el resultado principal de esta sección, la descripción de los espacios de multiplicadores de H_p en H_q.

Teorema 4.1.9. *Las siguientes afirmaciones son ciertas*

1. *$\mathfrak{M}(\infty, q) = \mathsf{H}_q$ isométricamente.*
2. *Si $1 \leq q < p < \infty$ entonces $\mathfrak{M}(p,q) = \mathsf{H}_{pq/(p-q)}$ isométricamente.*
3. *Si $1 \leq p \leq \infty$ entonces $\mathfrak{M}(p,p) = \mathsf{H}_\infty$ isométricamente.*
4. *Si $1 \leq p < q \leq \infty$ entonces $\mathfrak{M}(p,q) = \{0\}$.*

Las mismas igualdades valen si reemplazamos en cada caso $\mathfrak{M}$ y H por $\mathfrak{M}^{(N)}$ y $\mathsf{H}^{(N)}$ (con $N \quad \mathsf{N}$) respectivamente.

Como mencionamos anteriormente, el Teorema 4.1.2 nos permite trabajar indistintamente con los espacios $\mathfrak{M}(p,q)$, $\mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q)$ y $\mathsf{M}_{\mathsf{T}^\infty}(p,q)$. Es decir que, por ejemplo, demostrar que $\mathfrak{M}(p,q) = \mathsf{H}_t$, para algún $t = t(p,q)$, es equivalente a ver que $\mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q) = H_t(\mathsf{D}_2^\infty)$. Por este motivo, en la demostración vamos a trabajar con series de Dirichlet o funciones (tanto en D_2^∞ como en T^∞) según nos resulte más conveniente.

Demostración. 1 Ya hemos notado que $\mathsf{M}_{\mathsf{T}^\infty}(\infty, q) \quad H_q(\mathsf{T}^\infty)$, donde la inclusión es continua (recordar (4.2)). Por otro lado, si $D \quad \mathsf{H}_q$ y $E \quad \mathsf{H}_\infty$ entonces DE es una serie de Dirichlet en H_q. Más aún,

$$M_D(E) \quad _{\mathsf{H}_q} \leq \quad D \quad _{\mathsf{H}_q} \quad E \quad _{\mathsf{H}_\infty}.$$

Esto prueba que $\quad M_D \quad _{\mathfrak{M}(\infty,q)} \leq \quad D \quad _{\mathsf{H}_q}$, dando la identificación isométrica.

2 Supongamos que $1 \leq q < p < \infty$ y tomemos $f \quad H_{pq/(p-q)}(\mathsf{D}_2^\infty)$ y $g \quad H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$, entonces fg es holomorfa en D_2^∞. Sea $t = \frac{p}{p-q}$, notemos que $\frac{q}{p} + \frac{1}{t} = 1$. Por lo tanto, dada $M \quad \mathsf{N}$ y $0 < r < 1$, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathsf{T}^M} |fg(r\omega,0)|^q \mathrm{d}\omega\right)^{1/q} &\leq \left(\int_{\mathsf{T}^M} |f(r\omega,0)|^{qt} \mathrm{d}\omega\right)^{1/qt} \left(\int_{\mathsf{T}^M} |g(r\omega,0)|^{qp/q} \mathrm{d}\omega\right)^{q/qp} \\ &= \left(\int_{\mathsf{T}^M} |f(r\omega,0)|^{qp/(p-q)} \mathrm{d}\omega\right)^{(p-q)/qp} \left(\int_{\mathsf{T}^M} |g(r\omega,0)|^{p} \mathrm{d}\omega\right)^{1/p} \\ &\leq \quad f \quad _{H_{pq/(p-q)}(\mathsf{D}_2^\infty)} \quad g \quad _{H_p(\mathsf{D}_2^\infty)}.\end{aligned}$$

Dado que esto vale para todo $M \quad \mathsf{N}$ y $0 < r < 1$, entonces $f \quad \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q)$ y más aún $\quad M_f \quad _{\mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q)} \leq \quad f \quad _{H_{pq/(p-q)}(\mathsf{D}_2^\infty)}$,. Luego $H_{pq/(p-q)}(\mathsf{D}_2^\infty) \quad \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q)$. El caso para funciones en finitas variables (es decir con dominio D^N y $N \quad \mathsf{N}$) se sigue con la misma idea.

Para chequear que la inclusión inversa vale, tomemos $F \quad \mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)$ (con $N \quad \mathsf{N} \quad \{\infty\}$) y consideremos el operador de multiplicación asociado $M_F : H_p(\mathsf{T}^N) \to H_q(\mathsf{T}^N)$ que, como sabemos, es continuo. Veamos que puede extenderse a un operador continuo en $L_q(\mathsf{T}^N)$. Para esto, sea Q un polinomio trigonométrico, recordemos que esto es una suma finita de la forma

$$Q(z) = \sum_{|\alpha_i| \leq k} a_\alpha z^\alpha,$$

notemos que

$$Q = \left(\prod_{j=1}^{M} z_j^{-k}\right) P, \tag{4.6}$$

donde P es el polinomio definido como $P := \sum_{0 \leq \beta_i \leq 2k} b_\beta z^\beta$ y $b_\beta = a_\alpha$ cuando $\beta = \alpha + (k, \dots, k, 0)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathsf{T}^N} |FQ(\omega)|^q \mathrm{d}\omega\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathsf{T}^N} |FP(\omega)|^q \prod_{j=1}^{M} |\omega_j|^{-kq} \mathrm{d}\omega\right)^{1/q} = \left(\int_{\mathsf{T}^N} |FP(\omega)|^q \mathrm{d}\omega\right)^{1/q} \\
&\leq C \quad P \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^N)} = C \left(\int_{\mathsf{T}^N} |P(\omega)|^p \prod_{j=1}^{M} |\omega_j|^{-kp} \mathrm{d}\omega\right)^{1/p} \\
&= C \quad Q \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^N)}.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora $H \quad L_p(\mathsf{T}^N)$ arbitraria y, usando el Teorema 1.1.8, sabemos que existe una sucesión de polinomios trigonométricos $(Q_n)_n$ tal que $Q_n \to H$ en L_p y en casi todo punto en T^N (tomando una subsucesión en caso de ser necesario). Luego tenemos que

$$FQ_n - FQ_m \quad {}_{H_q(\mathsf{T}^N)} = \quad F(Q_n - Q_m) \quad {}_{H_q(\mathsf{T}^N)} \leq C \quad Q_n - Q_m \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^N)} \to 0$$

lo que prueba que $(FQ_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $L_q(\mathsf{T}^N)$. Dado que $FQ_n \to FH$ casi todo punto en T^N, entonces esto prueba que $FH \quad L_q(\mathsf{T}^N)$ y $FQ_n \to FH$ en $L_q(\mathsf{T}^N)$. Más aún,

$$FH \quad {}_{H_q(\mathsf{T}^N)} = \lim_n \quad FQ_n \quad {}_{H_q(\mathsf{T}^N)} \leq C \lim_n \quad Q_n \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^N)} = C \quad H \quad {}_{H_p(\mathsf{T}^N)},$$

y por lo tanto el operador $M_F : L_p(\mathsf{T}^N) \to L_q(\mathsf{T}^N)$ está bien definido y es continuo. En particular, $|F|^q|H|^q \quad L_1(\mathsf{T}^N)$ para toda $H \quad L_p(\mathsf{T}^N)$.

Consideremos ahora, $H \quad L_{p/q}(\mathsf{T}^N)$ entonces $|H|^{1/q} \quad L_p(\mathsf{T}^N)$ y $|F|^q|H| \quad L_1(\mathsf{T}^N)$ o, equivalentemente, $|F|^q H \quad L_1(\mathsf{T}^N)$. Entonces

$$|F|^q \quad L_{p/q}(\mathsf{T}^N) \quad = L_{p/(p-q)}(\mathsf{T}^N),$$

y $F \quad L_{pq/(p-q)}(\mathsf{T}^N)$. Para terminar el argumento, dado que $\hat{F}(\alpha) = 0$ siempre que $\alpha \quad \mathsf{Z}^N \setminus \mathsf{N}_0^N$ entonces $F \quad H_{pq/(p-q)}(\mathsf{T}^N)$. Podemos concluir que

$$H_{pq/(p-q)}(\mathsf{T}^N) \quad \mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q).$$

Para ver la isometría, dada $F \quad H_{pq/(p-q)}(\mathsf{T}^N)$ tomamos $G = |F|^r \quad L_p(\mathsf{T}^N)$ con $r = q/(p-q)$ de modo que $FG \quad L_q(\mathsf{T}^N)$. Sea, nuevamente, Q_n una sucesión de polinomios trigonométricos tal que $Q_n \to G$ en $L_p(\mathsf{T}^N)$, dado que $M_F : L_p(\mathsf{T}^N) \to L_q(\mathsf{T}^N)$ es continua $FQ_n = M_F(Q_n) \to FG$. Por otra parte, escribiendo Q_n como en (4.6) tenemos para cada $n \quad \mathsf{N}$ un polinomio P_n tal que $\quad FQ_n \quad {}_{L_q(\mathsf{T}^N)} = \quad FP_n \quad {}_{L_q(\mathsf{T}^N)}$ y $\quad Q_n \quad {}_{L_p(\mathsf{T}^N)} = \quad P_n \quad {}_{L_p(\mathsf{T}^N)}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
FG \quad {}_{L_q(\mathsf{T}^N)} = \lim_n \quad FQ_n \quad {}_{L_q(\mathsf{T}^N)} = \lim_n \quad FP_n \quad {}_{L_q(\mathsf{T}^N)} &\leq \lim_n \quad M_F \quad {}_{\mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)} \quad P_n \quad {}_{L_p(\mathsf{T}^N)} \\
&= \lim_n \quad M_F \quad {}_{\mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)} \quad Q_n \quad {}_{L_p(\mathsf{T}^N)} = \quad M_F \quad {}_{\mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)} \quad G \quad {}_{L_p(\mathsf{T}^N)}.
\end{aligned}$$

Ahora, ya que

$$F \quad {}^{p/(p-q)}_{L_{pq/(p-q)}(\mathsf{T}^N)} = \quad F^{r+1} \quad {}_{L_q(\mathsf{T}^N)} = \quad FG \quad {}_{L_q(\mathsf{T}^N)}$$

y

$$\|F\|^{q/(p-q)}_{L_{pq/(p-q)}(\mathsf{T}^N)} = \|F^r\|_{L_p(\mathsf{T}^N)} = \|G\|_{L_p(\mathsf{T}^N)}$$

entonces

$$\|M_F\|_{\mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q)} \geq \|F\|_{L_{pq/(p-q)}} = \|F\|_{H_{pq/(p-q)}(\mathsf{T}^N)},$$

tal como queríamos probar.

3 Basta con realizar el mismo razonamiento que en el ítem anterior, reemplazando $\frac{pq}{p-q}$ por ∞.

Terminamos la demostración viendo que 4 vale. Por un lado, el caso previo y (4.3) nos dan inmediatamente la inclusión

$$\{0\} \subseteq \mathsf{M}_{\mathsf{T}^N}(p,q) \subseteq H_\infty(\mathsf{T}^N).$$

Veamos ahora que $\mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^N}(p,q) = \{0\}$ para cualquier $N \in \mathsf{N} \cup \{\infty\}$. Consideremos en primer lugar el caso $N \in \mathsf{N}$. Para $1 \leq p < q < \infty$, fijemos $f \in \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^N}(p,q)$ y $M_f : H_p(\mathsf{D}^N) \to H_q(\mathsf{D}^N)$ el operador de multiplicación . Ahora, dado que $g \in H_p(\mathsf{D}^N)$, por (1.3) tenemos

$$|fg(z)| \leq \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-|z_j|^2}\right)^{1/q} \|fg\|_{H_q(\mathsf{D}^N)} \leq \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-|z_j|^2}\right)^{1/q} C\|g\|_{H_p(\mathsf{D}^N)}. \tag{4.7}$$

Puesto que $f \in H_\infty(\mathsf{D}^N)$ y

$$\|f\|_{H_\infty(\mathsf{D}^N)} = \lim_{r\to 1} \sup_{z \in r\mathsf{D}^N} |f(z)| = \lim_{r\to 1} \sup_{z \in r\mathsf{T}^N} |f(z)|,$$

entonces existe una sucesión $(u_n)_n \subseteq \mathsf{D}^N$ tal que $\|u_n\|_\infty \to 1$ y

$$|f(u_n)| \to \|f\|_{H_\infty(\mathsf{D}^N)}. \tag{4.8}$$

Para cada u_n existe una función $g_n \in H_p(\mathsf{D}^N)$, con $g_n \not\equiv 0$ (recordar (1.4)) tal que

$$|g_n(u_n)| = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-|u_n^j|^2}\right)^{1/p} \|g_n\|_{H_p(\mathsf{D}^N)}.$$

De esto y (4.7) se tiene

$$|f(u_n)| \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-|u_n^j|^2}\right)^{1/p} \|g_n\|_{H_p(\mathsf{D}^N)} \leq \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-|u_n^j|^2}\right)^{1/q} C\|g_n\|_{H_p(\mathsf{D}^N)}.$$

Luego,

$$|f(u_n)| \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-|u_n^j|^2}\right)^{1/p-1/q} \leq C.$$

Dado que $1/p - 1/q > 0$ se tiene entonces que $\left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-|u_n^j|^2}\right)^{1/p-1/q} \to \infty$, y, por la desigualdad previa, $|f(u_n)| \to 0$. Usando (4.8), esto muestra que $\|f\|_{H_\infty(\mathsf{D}^N)} = 0$ obteniendo la afirmación para el caso $q < \infty$. Mientras que si $q = \infty$, notando que $H_\infty(\mathsf{D}^N)$ está contenido en $H_t(\mathsf{D}^N)$ para todo $1 \leq p < t < \infty$ el resultado se sigue del caso anterior. Esto concluye la prueba en el caso $N \in \mathsf{N}$.

Para probar que $\mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q) = \{0\}$, fijemos nuevamente $f \in \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^\infty}(p,q)$. Por la Proposición 4.1.8, para todo $N \in \mathsf{N}$ la función truncada $f_N \in \mathsf{M}_{\mathsf{D}_2^N}(p,q)$ y por lo tanto, por lo que hemos mostrado antes, es la función nula. Ahora la prueba se sigue usando que $(f_N)_N$ converge puntualmente a f. $\square$

4.2. Operadores de multiplicación

Teniendo caracterizados los multiplicadores de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$, podemos concentrarnos ahora en el objetivo principal de este capítulo, esto es, estudiar los operadores de multiplicación

$$\begin{aligned} M_D \colon \mathcal{H}_p &\to \mathcal{H}_q. \\ E &\to DE \end{aligned}$$

Como mencionamos anteriormente, en [Vuk03], Vukotić realiza un estudio completo de los operadores de Toeplitz de $H_p(\mathbb{D})$ en $H_p(\mathbb{D})$. Allí estudia, entre otras características, el rango, la norma esencial y el espectro.

Nuestro objetivo será realizar un estudio similar para el caso de los operadores de multiplicación en series de Dirichlet, con sus respectivas consecuencias en los espacios de funciones en infinitas o varias variables. Para esto, vamos a dividir esta sección en dos partes. En la primera consideraremos el caso $p = q$, donde por lo visto en el Teorema 4.1.9, solamente resultará interesante considerar el caso en que $p > q$. En esta primer subsección, estimaremos la norma esencial de estos operadores en términos del multiplicador y veremos que en ningún caso tiene rango cerrado. La segunda parte la dedicaremos al caso $p = q$, donde además de la norma esencial dedicaremos especial atención al estudio de su espectro.

Antes de comenzar con estos casos, vamos a probar un resultado que caracteriza aquellos operadores acotados $T : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$ que son operadores de multiplicación. En el caso de funciones de una variable, un operador $T : H_p(\mathbb{D}) \to H_p(\mathbb{D})$ es un operador de Toeplitz analítico si conmuta con el operador $T_z(g) = zg$, es decir si $T \circ T_z(g) = T_z \circ T(g)$ para toda $g \in H_p(\mathbb{D})$ (ver [Vuk03, Teorema 4]). En el caso de funciones en varias variables, uno esperaría que la caracterización se de a partir de conmutar con cada una de las variables. Mientras que para series de Dirichlet, esta viene a partir de conmutar con cada uno de los operadores $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}}$. Cabe aclarar que estamos haciendo un abuso de notación al escribir $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}}$, donde puede referirse a $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}} : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p$ o bien $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}} : \mathcal{H}_q \to \mathcal{H}_q$ según corresponda (bien definido en cualquier caso por el Teorema 4.1.9).

Teorema 4.2.1. *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$. Un operador acotado $T : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$ es un operador de multiplicación si y solo si T conmuta con los operadores de multiplicación $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Lo mismo vale si reemplazamos en cada caso $\mathcal{H}$ por $\mathcal{H}^{(N)}$ (con $N \in \mathbb{N}$), y considerando $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}}$ con $1 \leq i \leq N$.

Demostración. Supongamos primero que $T : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$ es un operador de multiplicación (esto es, $T = M_D$ para cierta serie de Dirichlet D) y para $i \in \mathbb{N}$, sea $\mathfrak{p}_i^{-s}$ un monomio, entonces

$$T \circ M_{\mathfrak{p}_i^{-s}}(E) = D\mathfrak{p}_i^{-s}E = \mathfrak{p}_i^{-s}DE = M_{\mathfrak{p}_i^{-s}} \circ T(E).$$

Es decir que T conmuta con $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}}$.

Para la vuelta, supongamos ahora que $T : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$ es un operador acotado que conmuta con los operadores de multiplicación $M_{\mathfrak{p}_i^{-s}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Veamos que $T = M_D$ con $D = T(1)$. De hecho, para cada $\mathfrak{p}_i^{-s}$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$T((\mathfrak{p}_i^k)^{-s}) = T((\mathfrak{p}_i^{-s})^k) = T(M^k_{\mathfrak{p}_i^{-s}}(1)) = M^k_{\mathfrak{p}_i^{-s}}(T(1)) = (\mathfrak{p}_i^{-s})^k D = (\mathfrak{p}_i^k)^{-s} D.$$

Ahora dados $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ con $n = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \dots \mathfrak{p}_k^{\alpha_k}$ tenemos

$$T(n^{-s}) = T(\prod_{j=1}^{k} (\mathfrak{p}_i^{\alpha_i})^{-s}) = T(M^{\alpha_1}_{\mathfrak{p}_1^{-s}} \circ \cdots \circ M^{\alpha_k}_{\mathfrak{p}_k^{-s}}(1)) = M^{\alpha_1}_{\mathfrak{p}_1^{-s}} \circ \cdots \circ M^{\alpha_k}_{\mathfrak{p}_k^{-s}}(T(1)) = (n^{-s})D.$$

Esto implica que $T(P) = PD$ para todo polinomio de Dirichlet P. Tomemos ahora $E \in \mathcal{H}_p$ y una sucesión de polinomios P_n que converge en norma a E si $1 \leq p < \infty$ o débilmente si $p = \infty$ (ver Teorema 1.1.7 y observación 1.1.5). En cualquier caso, si $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$, la continuidad de la evaluación en s (ver nuevamente el Teorema 1.1.10) implica que $P_n(s) \to E(s)$.

Dado que T es continuo, tenemos que

$$T(E) = \lim_n T(P_n) = \lim_n P_n D$$

(donde el límite es en la topología débil si $p = \infty$).

Entonces para cada $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ tenemos que

$$T(E)(s) = \lim_n P_n D(s) = E(s)D(s).$$

Por lo tanto, $T(E) = DE$ para toda serie de Dirichlet E. En otras palabras, T es igual a M_D, lo que concluye la prueba. □

4.2.1. Operadores de multiplicación con $p = q$

Vamos a enfocarnos en esta subsección, en los operadores de multiplicación $M_D : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$ para el caso en el que $p = q$. Comenzaremos estudiando la norma esencial de estos operadores. Recordemos que esta norma es la distancia entre el operador M_D y el espacio $\mathcal{K}(\mathcal{H}_p, \mathcal{H}_q)$, definido por los operadores compactos de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$. Realizando argumentos similares a los dados por Demazeux en [Dem11, Proposiciones 4.3 y 5.5] (donde estudia los operadores de composición con pesos para funciones holomorfas en una variable), obtenemos las siguientes estimaciones de la norma esencial en términos del multiplicador.

Teorema 4.2.2.

1. *Sean* $1 \leq q < p < \infty$, $D \in \mathcal{H}_{pq/(p-q)}$ *y* $M_D : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$ *el operador de multiplicación. Entonces*

$$\|D\|_{\mathcal{H}_q} \leq \|M_D\|_{\text{ess}} \leq \|M_D\| = \|D\|_{\mathcal{H}_{pq/(p-q)}}.$$

2. *Sea* $1 \leq q < \infty$, $D \in \mathcal{H}_q$ *y* $M_D : \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_q$ *el operador de multiplicación. Entonces*

$$\frac{1}{2}\|D\|_{\mathcal{H}_q} \leq \|M_D\|_{\text{ess}} \leq \|M_D\| = \|D\|_{\mathcal{H}_q}.$$

En particular, M_D *es compacto si y solo si* $D = 0$. *Las mismas estimaciones son válidas si se reemplaza* $\mathcal{H}$ *por* $\mathcal{H}^{(N)}$ *(con* $N \in \mathbb{N}$*).*

Naturalmente, la estimación superior de la norma esencial por la norma del operador siempre es válida, dado que 0 es un operador compacto de $\mathcal{H}_p$ en $\mathcal{H}_q$. Para dar una cota inferior, necesitamos poder acotar por debajo a $\|M_D - K\|_{\mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q}$ para todo operador $K : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$ compacto. Observemos que, fijada una serie de Dirichlet E de norma 1 en $\mathcal{H}_p$, se tiene la desigualdad

$$\|M_D - K\|_{\mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q} \geq \|M_D(E) - K(E)\|_{\mathcal{H}_q} \geq \|DE\|_{\mathcal{H}_q} - \|K(E)\|_{\mathcal{H}_q},$$

para todo operador $K : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q$. Los métodos utilizados para acotar esta expresión variarán dependiendo de si p es finito o no. Por ejemplo, en el caso de $p = \infty$, la demostración consistirá en considerar, para cada operador compacto K, una sucesión de series de Dirichlet acotada $(E_n)_n$ adecuada, de manera tal que $K(E_n)$ tienda a cero en $\mathcal{H}_q$. Mientras que para acotar el primer término del lado derecho de la desigualdad, es decir $\|DE_n\|_{\mathcal{H}_q}$, utilizaremos en forma conveniente el resultado [DGMSP19, Proposition 11.20].

En el ítem 1, en cambio, vamos a aprovechar el hecho de que si $1 < p < \infty$ entonces $\mathcal{H}_p$ es un espacio reflexivo. Siendo, en particular, iguales la convergencia débil y la convergencia débil (w^*). Con esto, el objetivo será definir una sucesión $(E_n)_n$ de norma 1, de manera tal que $\|DE_n\|_{\mathcal{H}_q} \geq \|D\|_{\mathcal{H}_q}$. Pero donde, además, E_n que converja w^* a cero, y por lo tanto $K(E_n) \to 0$ en $\mathcal{H}_q$ para todo operador K. Para poder definir dicha sucesión, nuestro primer objetivo será caracterizar la convergencia en la topología w^* en los espacios $\mathcal{H}_p$. La caracterización la haremos, por completitud, para $1 \leq p < \infty$. Veremos la relación que existe entre la convergencia w^*, la convergencia puntual en el semiplano $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y la convergencia uniforme pero en semiplanos más chicos que $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$. En la prueba, que resulta algo técnica, necesitaremos utilizar que los $\mathcal{H}_p$ son el espacio dual de un Banach. Esto es claro si $p > 1$, por ser reflexivos. El caso $p = 1$ puede encontrarse en [DP18, Teorema 7.3]. En dicho artículo, Defant y Pérez demuestran, para espacios de Hardy de series de Dirichlet con coeficientes vectoriales en X, que $\mathcal{H}_1(X)$ es un espacio dual si y solo si X tiene la propiedad Analítica de Radon-Nikodym (ARNP) (ver por ejemplo [DGMSP19, Sección 11.4] para una definición de esta propiedad). Dado que $\mathbb{C}$ tiene la ARNP, esto prueba lo que queremos. Sin embargo, incluimos aquí una prueba alternativa, dada en términos más elementales.

Proposición 4.2.3. *El espacio $\mathcal{H}_1$ es un espacio dual.*

Demostración. Denotemos por (B_{H_1}, τ_0) la bola unitaria cerrada de $H_1(\mathbb{D}_2^\infty)$, considerada con la topología τ_0 dada por la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. Vamos a probar que (B_{H_1}, τ_0) es un conjunto compacto. Notemos primero que, dado un compacto $K \subset \ell_2$ y $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{j \geq j_0}^{\infty} |z_j|^2 < \varepsilon$ para todo $z \in K$ [Die84, Página 6]. Entonces, la desigualdad de Cole-Gamelin (1.3), implica que el conjunto

$$\{f(K) : f \in B_{H_1}\} \subset \mathbb{C}$$

es acotado. Por el Teorema de Montel (ver por ejemplo [DGMSP19, Teorema 15.50]), (B_{H_1}, τ_0) es relativamente compacto. Veamos ahora que (B_{H_1}, τ_0) es cerrado. Supongamos que $(f_\alpha) \subset B_{H_1}$ es una red que converge a f uniformemente sobre compactos, luego tenemos que

$$\int\limits_{\mathbb{T}^N} |f(r\omega, 0, 0, \dots)| \mathrm{d}\omega \leq \int\limits_{\mathbb{T}^N} |f(r\omega, 0, 0, \dots) - f_\alpha(r\omega, 0, 0, \dots)| \mathrm{d}\omega + \int\limits_{\mathbb{T}^N} |f_\alpha(r\omega, 0, 0, \dots)| \mathrm{d}\omega.$$

Dado que el primer término tiende a 0 y el segundo es menor o igual a 1 para todos $N \in \mathbb{N}$ y $0 < r < 1$, entonces la función límite f pertenece a B_{H_1}. Por lo tanto, (B_{H_1}, τ_0) es compacto.
Consideremos ahora el conjunto de funcionales

$$E = \{\mathrm{ev}_z : H_1(\mathbb{D}_2^\infty) \to \mathbb{C} : z \in \mathbb{D}_2^\infty\}.$$

Notemos que la topología débil $w(H_1, E)$ es exactamente la topología dada por la convergencia puntual. Luego, dado que τ_0 es claramente más fuerte que $w(H_1, E)$ se tiene que $(B_{H_1}, w(H_1, E))$ también es compacto. Finalmente, como E separa puntos, por el Teorema A.0.9 (ver el Apéndice A), $H_1(\mathbb{D}_2^\infty)$ es un espacio dual y, usando la transformada de Bohr, $\mathcal{H}_1$ también es un espacio dual. □

Pasamos ahora a describir las sucesiones que convergen w^* en $\mathcal{H}_p$, para $1 \leq p < \infty$. Este lema está basado en [BS84, Proposición 2] donde describen la convergencia w^* para espacios de Hardy de funciones holomorfas en una variable.

Lema 4.2.4. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $(D_n) \subset \mathcal{H}_p$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$D_n \to 0$ en la topología w^*.*
2. *$D_n(s) \to 0$ para cada $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y $\|D_n\|_{\mathcal{H}_p} \leq C$ para algún $C > 0$.*
3. *$D_n \to 0$ uniformemente en cada semiplano $\mathbb{C}_\sigma$ con $\sigma > 1/2$ y $\|D_n\|_{\mathcal{H}_p} \leq C$ para algún $C > 0$.*

Demostración. Que 1 implica 2 se cumple por la continuidad de las evaluaciones en la topología w^*, y porque la convergencia en esta topología implica que la sucesión es acotada.

Supongamos ahora que 2 se cumple pero 3 no. Entonces existen $\varepsilon > 0$, una subsucesión $(D_{n_j})_j$ y un semiplano $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\sigma}$, con $\sigma > 0$, tal que $\sup\limits_{\operatorname{Re} s > 1/2+\sigma} |D_{n_j}(s)| \geq \varepsilon$. Puesto que $D_{n_j} = \sum\limits_m a_m^{n_j} m^{-s}$ es acotada en H_p, por el Teorema de Montel para H_p (recordar por ejemplo el Teorema 2.3.5), existe $D = \sum\limits_m a_m m^{-s} \quad \mathsf{H}_p$ y una subsucesión de $(D_{n_j})_j$ (por comodidad en la notación asumimos que es la misma sucesión) tal que

$$\sum_m \frac{a_m^{n_j}}{m^\delta} m^{-s} \to \sum_m \frac{a_m}{m^\delta} m^{-s} \text{ en } \mathsf{H}_p$$

para todo $\delta > 0$. Dado $s \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$, escribimos $s = s_0 + \delta$ con $\delta > 0$ y $s_0 \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$, con lo que tenemos

$$D_{n_j}(s) = \sum_m a_m^{n_j} m^{-(s_0+\delta)} = \sum_m \frac{a_m^{n_j}}{m^\delta} m^{-s_0} \to \sum_m \frac{a_m}{m^\delta} m^{-s_0} = D(s_0 + \delta) = D(s).$$

Concluimos entonces que $D = 0$ y por el Teorema 1.1.10, se tiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \sup_{\operatorname{Re} s > 1/2+\sigma} |D_{n_j}(s)| = \sup_{\operatorname{Re} s > 1/2+\sigma/2} |D_{n_j}(s + \sigma/2)| \\
&= \sup_{\operatorname{Re} s > 1/2+\sigma/2} \left| \sum_m \frac{a_m^{n_j}}{m^{\sigma/2}} m^{-s} \right| \leq \zeta(2 \operatorname{Re} s)^{1/p} \left\| \sum_m \frac{a_m^{n_j}}{m^{\sigma/2}} m^{-s} \right\|_{\mathsf{H}_p} \\
&\leq \zeta(1+\sigma)^{1/p} \left\| \sum_m \frac{a_m^{n_j}}{m^{\sigma/2}} m^{-s} \right\|_{\mathsf{H}_p},
\end{aligned}$$

para todo n_j, lo cual es una contradicción.

Para ver que 3 implica 1, notemos por $\overline{B_{\mathsf{H}_p}}$ a la bola unidad cerrada de H_p. Sabemos que, para cada $1 \leq p < \infty$ el espacio H_p es un espacio dual y por el Teorema de Banach-Alaouglu, $(\overline{B_{\mathsf{H}_p}}, w \ )$ es compacto. Por otra parte $(\overline{B_{\mathsf{H}_p}}, \tau_0)$ (es decir, acotado con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos) es un espacio de Hausdorff. Si mostramos que la identidad $Id : (\overline{B_{\mathsf{H}_p}}, w \ ) \to (\overline{B_{\mathsf{H}_p}}, \tau_0)$ es continua, entonces es un homeomorfismo y la prueba estará terminada. Para ver esto, notemos primero que H_p es separable (ya que el conjunto de polinomios de Dirichlet con coeficientes racionales es denso en H_p) y luego $(\overline{B_{\mathsf{H}_p}}, w \ )$ es metrizable (ver [Con90, Teorema 5.1]). Luego es suficiente trabajar con sucesiones. Si una sucesión $(D_n)_n$ converge en w a cierta D, entonces $(D_n - D)_n$ converge w a 0 y, por lo recién comentado, converge uniformemente sobre conjuntos compactos. Esto muestra que Id es continua, como queríamos. $\square$

Con todo esto, ahora podemos probar las estimaciones para la norma esencial del Teorema 4.2.2.

Demostración del Teorema 4.2.2. 1 Por definición $M_D \ _{\text{ess}} \leq \ M_D \ = \ D \ _{\mathsf{H}_{pq/(p-q)}}$. Para ver la cota inferior, para cada $n \quad \mathsf{N}$ consideremos el monomio $E_n = (2^n)^{-s} \quad \mathsf{H}_p$. Claramente $E_n \ _{\mathsf{H}_p} = 1$ para todo n, y $E_n(s) \to 0$ para cada $s \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$. Luego, por el Lema 4.2.4, $E_n \to 0$ en la topología w .

Sea ahora $K : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_q$ un operador compacto, notemos que $K(E_n) \to 0$, por ser H_p reflexivo. Por otro lado, tenemos que $DE_n \ _{\mathsf{H}_q} = \ D \ _{\mathsf{H}_q}$ dado que $M_{E_n} : \mathsf{H}_q \to \mathsf{H}_q$ es continuo y por la densidad de los polinomios existe una sucesión $P_j = \sum a_k^j k^{-s}$ tal que $P_j \to D$ en H_q. Luego

$$\begin{aligned}
DE_n \ _{\mathsf{H}_q} &= \lim_j \ P_j E_n \ _{\mathsf{H}_q} = \lim_j \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \Big|\sum_k a_k^j \frac{1}{k^{it}}\Big|^q |2^{-nit}|^q \mathrm{d}t \right)^{1/q} \\
&= \lim_j \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \Big|\sum_k a_k^j \frac{1}{k^{it}}\Big|^q \mathrm{d}t \right)^{1/q} \\
&= \lim_j \ P_j \ _{\mathsf{H}_q} = \ D \ _{\mathsf{H}_q}.
\end{aligned}$$

Juntando todo esto obtenemos

$$\begin{aligned} \|M_D - K\| &\geq \limsup_{n\to\infty} \|M_D(E_n) - K(E_n)\|_{\mathcal{H}_q} \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \|DE_n\|_{\mathcal{H}_q} - \|K(E_n)\|_{\mathcal{H}_q} = \|D\|_{\mathcal{H}_q}. \end{aligned}$$

2 Sea $K : \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_q$ un operador compacto, y tomemos nuevamente $E_n = (2^n)^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\|E_n\|_{\mathcal{H}_\infty} = 1$ entonces existe una subsucesión $(E_{n_j})_j$ tal que $(K(E_{n_j}))_j$ converge en $\mathcal{H}_q$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $j, l \geq m$ entonces

$$\|K(E_{n_j}) - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_q} < \varepsilon.$$

Por otro lado, si $D = \sum a_k k^{-s}$ entonces $DE_{n_l} = \sum a_k (k2^{n_l})^{-s}$ y por [DGMSP19, Proposition 11.20] la norma en $\mathcal{H}_q$ de

$$(DE_{n_l})_\delta = \sum \frac{a_k}{(k2^{n_l})^\delta}(k2^{n_l})^{-s}$$

tiende en forma creciente a $\|DE_{n_l}\|_{\mathcal{H}_q} = \|D\|_{\mathcal{H}_q}$ cuando $\delta \to 0^+$. Fijado $j \geq m$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(DE_{n_j})_\delta\|_{\mathcal{H}_q} \geq \|D\|_{\mathcal{H}_q} - \varepsilon.$$

Como $\left\|\frac{E_{n_j} - E_{n_l}}{2}\right\|_{\mathcal{H}_\infty} = 1$ para todo $j = l$, entonces

$$\begin{aligned} \|M_D - K\| &\geq \left\|(M_D - K)\frac{E_{n_j} - E_{n_l}}{2}\right\|_{\mathcal{H}_q} \\ &\geq \frac{1}{2}\|(DE_{n_j} - DE_{n_l})_\delta\|_{\mathcal{H}_q} - \frac{1}{2}\|K(E_{n_j}) - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_q} \\ &> \frac{1}{2}(\|(DE_{n_j})_\delta\|_{\mathcal{H}_q} - \|(DE_{n_l})_\delta\|_{\mathcal{H}_q}) - \varepsilon/2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|D\|_{\mathcal{H}_q} - \frac{1}{2}\|(DE_{n_l})_\delta\|_{\mathcal{H}_q} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\|(DE_{n_l})_\delta\|_{\mathcal{H}_q} \leq \|D_\delta\|_{\mathcal{H}_q}\|(E_{n_l})_\delta\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \|D_\delta\|_{\mathcal{H}_q}\left\|\frac{(2^{n_l})^{-s}}{2^{n_l\delta}}\right\|_{\mathcal{H}_\infty} = \|D_\delta\|_{\mathcal{H}_q}\frac{1}{2^{n_l\delta}},$$

y el éste último término tiende a 0 cuando $l \to \infty$, tenemos entonces que $\|M_D - K\| \geq \frac{1}{2}\|D\|_{\mathcal{H}_q}$. □

Del Teorema 4.2.2 se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 4.2.5. *Para $U = \mathbb{D}_2^\infty$ o $U = \mathbb{T}^\infty$ las siguientes afirmaciones son ciertas*

1. *Sean $1 \leq q < p < \infty$, $f \in H_{pq/(p-q)}(U)$ y $M_f : H_p(U) \to H_q(U)$ el operador de multiplicación. Entonces*
$$\|f\|_{H_q(U)} \leq \|M_f\|_{\text{ess}} \leq \|M_f\| = \|f\|_{H_{pq/(p-q)}(U)}.$$
2. *Sea $1 \leq q < \infty$, $f \in H_q(U)$ y $M_f : H_\infty(U) \to H_q(U)$ el operador de multiplicación. Entonces*
$$\frac{1}{2}\|f\|_{H_q(U)} \leq \|M_f\|_{\text{ess}} \leq \|M_f\| = \|f\|_{H_q(U)}.$$

En particular, M_f es compacto si y sólo si $f = 0$. Las mismas estimaciones son válidas si se reemplaza U por $\mathbb{D}^N$ o $\mathbb{T}^N$ (con $N \in \mathbb{N}$).

Demostración. Veamos 1. Dado que para todo $1 \leq p \leq \infty$, la transformada de Bohr $\mathsf{B}_U : H_p(U) \to \mathsf{H}_p$ y su inversa $\mathsf{L}_U : \mathsf{H}_p \to H_p(U)$ son isometrías, un operador $K : H_p(U) \to H_q(U)$ es compacto si y sólo si $K_d = \mathsf{B}_U \circ K \circ \mathsf{L}_U : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_q$ es un operador compacto. Sea $D = \mathsf{B}_U(f)$, luego $M_D = \mathsf{B}_U \circ M_f \circ \mathsf{L}_U$ y por lo tanto

$$\|M_f - K\| = \|\mathsf{L}_U \circ (M_D - K_d) \circ \mathsf{B}_U\| = \|M_D - K_d\| \geq \|D\|_{\mathsf{H}_q} = \|f\|_{H_q(U)}.$$

Exactamente el mismo argumento da la prueba de 2 □

Concluimos esta sección estudiando el rango de los operadores de multiplicación. Específicamente, vamos a ver que el rango de estos operadores, dado por

$$\operatorname{rg}(M_D) = \{DE : E \in \mathsf{H}_p\} \subset \mathsf{H}_q,$$

no es un subespacio cerrado en H_q.

Proposición 4.2.6. *Sean $1 \leq q < p \leq \infty$ y $t = pq/(p-q)$ si $p < \infty$ y $t = q$ si $p = \infty$. Dada $D \in \mathsf{H}_t$, el operador $M_D : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_q$ no tiene rango cerrado. La misma afirmación es cierta si reemplazamos H por $\mathsf{H}^{(N)}$ (con $N \in \mathbb{N}$).*

Demostración. Dado que $M_D : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_q$ es inyectivo, el rango de M_D es cerrado si y solo si existe $C > 0$ tal que $C\|E\|_{\mathsf{H}_p} \leq \|DE\|_{\mathsf{H}_q}$ para todo $E \in \mathsf{H}_p$. Supongamos que este es el caso y tomemos un polinomio de Dirichlet $P \in \mathsf{H}_t$ tal que $\|D - P\|_{\mathsf{H}_t} < \frac{C}{2}$. Dada $E \in \mathsf{H}_p$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|PE\|_{\mathsf{H}_q} = \|DE - (D-P)E\|_{\mathsf{H}_q} &\geq \|DE\|_{\mathsf{H}_q} - \|(D-P)E\|_{\mathsf{H}_q} \\ &\geq C\|E\|_{\mathsf{H}_p} - \|D-P\|_{\mathsf{H}_t}\|E\|_{\mathsf{H}_p} \geq \frac{C}{2}\|E\|_{\mathsf{H}_p}.\end{aligned}$$

Luego $M_P : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_q$ tiene rango cerrado. Sea ahora, $(Q_n)_n$ una sucesión de polinomios que convergen en H_q pero no en H_p, luego

$$\frac{C}{2}\|Q_n - Q_m\|_{\mathsf{H}_p} \leq \|P(Q_n - Q_m)\|_{\mathsf{H}_q} \leq \|P\|_{\mathsf{H}_\infty}\|Q_n - Q_m\|_{\mathsf{H}_q},$$

lo cual es una contradicción. □

4.2.2. Operadores de multiplicación con $p = q$

Concentramos ahora nuestro interés en el caso $p = q$, donde el espacio de multiplicadores correspondiente es $\mathfrak{M}(p,q) = \mathsf{H}_\infty$. Recordando los Teoremas 4.0.1, 4.0.2 y 4.0.3, veremos que se obtienen resultados equivalentes, con demostraciones similares, aunque adaptando adecuadamente las herramientas.

Comenzamos estudiando la norma esencial del operador M_D. Al igual que en el Teorema 4.0.3, veremos que cuando $p > 1$ esta coincide con la norma del multiplicador.

Teorema 4.2.7. *Sea $D \in \mathsf{H}_\infty$ y $M_D : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_p$ el operador de multiplicación asociado.*

1. *Si $1 < p \leq \infty$, entonces*
$$\|M_D\|_{\mathrm{ess}} = \|M_D\| = \|D\|_{\mathsf{H}_\infty}.$$

2. *Si $p = 1$, entonces*
$$\max\{\tfrac{1}{2}\|D\|_{\mathsf{H}_\infty}, \|D\|_{\mathsf{H}_1}\} \leq \|M_D\|_{\mathrm{ess}} \leq \|M_D\| = \|D\|_{\mathsf{H}_\infty}.$$

En particular, M_D es compacto si y solo si $D = 0$. Las mismas igualdades son ciertas si se reemplaza H por $\mathsf{H}^{(N)}$, con $N \in \mathbb{N}$.

La prueba para el caso $p = \infty$ fue realizada por Lefevre en [Lef09, Corolario 2.4]. Vamos a presentar la misma por completitud.

Caso $p = \infty$. Sea $(s_j) \in \mathbb{C}_0$ tal que $\mathrm{Re}(s_j) \to 0$ y $|D(s_j)| \to \|D\|_{\mathcal{H}_\infty}$. Asumamos que 2^{-s_j} converge a cierto $a = 2^{-i\alpha}$ y consideremos para $n \geq 2$ la sucesión

$$E_n(s) = \frac{n\overline{a}2^{-s} - (n-1)}{n - (n-1)\overline{a}2^{-s}}.$$

Esta sucesión pertenece a la bola unitaria de $\mathcal{H}_\infty$ y más aún cada E_n es continua en $\overline{\mathbb{C}_0}$. De hecho, E_n es la imagen por la transformada de Bohr de la función

$$g_n(z) = \frac{n\overline{a}z_1 - (n-1)}{n - (n-1)\overline{a}z_1}.$$

Esta sucesión satisface además que $E_n(s) \to -1$ para todo $s \in \overline{\mathbb{C}_0} \setminus \{i\alpha\}$ y $E_n(i\alpha) = 1$.

Sea $K : \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$ un operador compacto. Dado que E_n es acotada, entonces existe una subsucesión E_{n_l} y una serie de Dirichlet $E \in \mathcal{H}_\infty$ tal que $K(E_{n_l}) \to E$ en $\mathcal{H}_\infty$. Si existe $s_0 \in \mathbb{C}_0$ tal que $|D(s_0) + E(s_0)| \geq \|D\|_{\mathcal{H}_\infty}$ entonces

$$\begin{aligned}
\|M_D - K\|_{\mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty} &\geq \limsup \|DE_{n_l} - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_\infty} \\
&\geq \limsup \|DE_{n_l} - E\|_{\mathcal{H}_\infty} - \|E - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_\infty} \\
&\geq \limsup |D(s_0)E_{n_l}(s_0) - E(s_0)| = |D(s_0) - E(s_0)| \geq \|D\|_{\mathcal{H}_\infty},
\end{aligned}$$

como queríamos probar. Si, en cambio, no existe dicho s_0, entonces $\|D + E\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \|D\|_{\mathcal{H}_\infty}$ y por lo tanto $|E(s) - D(s)| \geq 2|D(s)| - \|D\|_{\mathcal{H}_\infty}$ para todo $s \in \mathbb{C}_0$. Pero entonces para todo $n \geq 2$ y todo j se tiene que

$$\begin{aligned}
\|M_D - K\|_{\mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty} &\geq \limsup \|DE_{n_l} - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_\infty} \\
&\geq \|DE_{n_l} - E\|_{\mathcal{H}_\infty} - \|E - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_\infty} \\
&\geq |D(s_0)E_{n_l}(s_0) - E(s_0)| - \|E - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_\infty} \\
&\geq 2|D(s_j)| - \|D\|_{\mathcal{H}_\infty} - |D(s_j)||E_{n_l}(s_j) - 1| - \|E - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_\infty}
\end{aligned}$$

Haciendo tender j a infinito obtenemos que $\|M_D - K\|_{\mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty} \geq \|D\|_{\mathcal{H}_\infty} - \|E - K(E_{n_l})\|_{\mathcal{H}_\infty}$. Finalmente, si $l \to \infty$ obtenemos que $\|M_D - K\|_{\mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty} \geq \|D\|_{\mathcal{H}_\infty}$, como queríamos. □

Para demostrar los casos $1 \leq p < \infty$, vamos a plantear el problema desde el punto de vista de las funciones holomorfas. Nuevamente, realizar este cambio nos permitirá utilizar herramientas propias de estos espacios, como el Núcleo de Féjer, tal como veremos más adelante. La versión para el caso de funciones holomorfas es la siguiente proposición.

Proposición 4.2.8. *Sea* $f \in H_\infty(B_{c_0})$ *y* $M_f : H_p(\mathbb{D}_2^\infty) \to H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ *el operador de multiplicación.*

1. *Si* $1 < p \leq \infty$, *entonces*
$$\|M_f\|_{\mathrm{ess}} = \|M_f\| = \|f\|_{H_\infty(B_{c_0})}.$$

2. *Si* $p = 1$, *entonces*
$$\max\{\frac{1}{2}\|f\|_{H_\infty(B_{c_0})}, \|f\|_{H_1(\mathbb{D}_2^\infty)}\} \leq \|M_f\|_{\mathrm{ess}} \leq \|M_f\| = \|f\|_{H_\infty(B_{c_0})}.$$

En particular $M_f : H_p(\mathbb{D}_2^\infty) \to H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ *es compacto si y solo si* $f = 0$. *Las mismas igualdades son válidas si reemplazamos* B_{c_0} *y* $\mathbb{D}_2^\infty$ *por* $\mathbb{D}^N$, *con* $N \in \mathbb{N}$.

Notemos que el caso $p = \infty$ se tiene de lo ya probado para series de Dirichlet y del mismo argumento utilizado en la Proposición 4.2.5. Para el resto de los casos del ítem 1, y al igual que en el Teorema 4.2.2, nos será de utilidad poder describir las sucesiones que convergen a cero en la topología w . Nuevamente planteamos el siguiente lema, una versión del Lema 4.2.4 y sigue la idea de [BS84, Proposición 2], que relaciona la convergencia en w con la convergencia puntual en $\mathbb{D}_2^\infty$.

Lema 4.2.9. *Sean* $1 \leq p < \infty$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *y* $(f_n) \subset H_p(\mathbb{D}_2^N)$ *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $f_n \to 0$ *en la topología* w ,
2. $f_n(z) \to 0$ *para cada* $z \in \mathbb{D}_2^N$ *y* $\|f_n\|_{H_p(\mathbb{D}_2^N)} \leq C$
3. $f_n \to 0$ *uniformemente sobre conjuntos compactos de* $\mathbb{D}_2^N$ *y* $\|f_n\|_{H_p(\mathbb{D}_2^N)} \leq C$,

Demostración. $1 \Rightarrow 2$ y $3 \Rightarrow 1$ se prueban con los mismos argumentos usados en el Lema 4.2.4. Veamos que $2 \Rightarrow 3$. Supongamos que no, entonces existe $\varepsilon > 0$, una subsucesión f_{n_j} y un conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}_2^N$ tales que $\|f_{n_j}\|_{H_\infty(K)} \geq \varepsilon$. Dado que f_{n_j} es acotada, por el Teorema de Montel para $H_p(\mathbb{D}_2^N)$ (ver el Teorema 2.3.1), podemos tomar una subsucesión $f_{n_{j_l}}$ y $f \in H_p(\mathbb{D}_2^N)$ tal que $f_{n_{j_l}} \to f$ uniformemente sobre compactos. Pero como tiende puntualmente a cero, entonces $f = 0$ lo cual es una contradicción. □

Teniendo este lema podemos probar la Proposición 4.2.8. En esta, siguiendo algunas ideas de Demazeux en [Dem11, Teorema 2.2], juega un rol importante el Núcleo de Féjer N-dimensional. Éste está definido por

$$K_n^N(u) = \sum_{|\alpha_1|,\dots|\alpha_N| \leq N} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{|\alpha_j|}{n+1}\right) u^\alpha ,$$

para $u \in \mathbb{D}_2^N$. Con esto, el n-ésimo polinomio de Féjer con N variables de una función $g \in H_p(\mathbb{D}_2^N)$ se obtiene convolucionando g con el Núcleo de Féjer $N-$dimensional, en otras palabras

$$\sigma_n^N g(u) = \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{l_1,\dots,l_N=1}^{n} \sum_{|\alpha_j| \leq l_j} \hat{g}(\alpha) u^\alpha. \tag{4.9}$$

Como se puede ver en [DGMSP19, Lemas 5.21 y 5.23], $\sigma_n^N : H_1(\mathbb{D}_2^N) \to H_1(\mathbb{D}_2^N)$ es una contracción y $\sigma_n^N g \to g$ en $H_1(\mathbb{D}_2^N)$ cuando $n \to \infty$ para toda $g \in H_1(\mathbb{D}_2^N)$. Pasemos ahora a la demostración de la Proposición 4.2.8.

Demostración. La desigualdad $\|M_f\|_{\mathrm{ess}} \leq \|M_f\| = \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)}$ vale para todo $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (considerando B_{c_0} si $N = \infty$). Luego, solo queda ver que

$$\|M_f\| \leq \|M_f\|_{\mathrm{ess}}. \tag{4.10}$$

Comenzamos por el caso $N \in \mathbb{N}$. Asumamos en primer lugar que $p > 1$, y tomemos una sucesión $(z^{(n)})_n \subset \mathbb{D}^N$, con $\|z^{(n)}\|_\infty \to 1$, tal que $|f(z^{(n)})| \to \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)}$. Consideremos ahora la función dada por

$$h_{z^{(n)}}(u) = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1 - |z_j^{(n)}|^2}{(1 - \overline{z_j^{(n)}} u_j)^2} \right)^{1/p},$$

para $u \in \mathbb{D}^N$. Por la desigualdad de Cole-Gamelin (1.3) tenemos

$$|f(z^{(n)})| = |f(z^{(n)}) h_{z^{(n)}}(z^{(n)})| \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1 - |z_j^{(n)}|^2} \right)^{-1/p} \leq \|f h_{z^{(n)}}\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} \leq \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)},$$

de donde se deduce $\|fh_{z^{(n)}}\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} \to \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)}$.
Observemos que $\|h_{z^{(n)}}\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} = 1$ y además $h_{z^{(n)}}(u) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $u \in \mathbb{D}^N$. Luego, por el Lema 4.2.9, $h_{z^{(n)}}$ tiende a cero en la topología w^* y, por ser $H_p(\mathbb{D}^N)$ reflexivo (recordar que $1 < p < \infty$), también en la topología débil. Por lo tanto, si K es un operador compacto sobre $H_p(\mathbb{D}^N)$ entonces $K(h_{z^{(n)}}) \to 0$ y luego

$$\begin{aligned}\|M_f - K\| &\geq \limsup_{n\to\infty} \|fh_{z^{(n)}} - K(h_{z^{(n)}})\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \|fh_{z^{(n)}}\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} - \|K(h_{z^{(n)}})\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} = \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)}.\end{aligned}$$

Se tiene entonces que $\|M_f - K\| \geq \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)}$ para cada operador compacto K, es decir que, como queríamos ver, $\|M_f\|_{\mathrm{ess}} \geq \|M_f\|$.
Para el caso $p = 1$, veamos que $R_n^N = I - \sigma_n^N$ nos da una primer cota inferior para la norma esencial. Para esto, sea $K : H_1(\mathbb{D}^N) \to H_1(\mathbb{D}^N)$ un operador compacto, dado que $\|\sigma_n^N\| \leq 1$ entonces $\|R_n^N\| \leq 2$ y luego

$$\|M_f - K\| \geq \frac{1}{2}\|R_n^N \circ (M_f - K)\| \geq \frac{1}{2}\|R_n^N \circ M_f\| - \frac{1}{2}\|R_n^N \circ K\|.$$

Por otro lado, dado que $R_n^N \to 0$ puntualmente, R_n^N tiende a cero uniformemente sobre conjuntos compactos de $H_1(\mathbb{D}^N)$. En particular, sobre el conjunto compacto, $\overline{K(B_{H_1(\mathbb{D}^N)})}$, y por lo tanto $\|R_n^N \circ K\| \to 0$. Concluimos entonces que $\|M_f\|_{\mathrm{ess}} \geq \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\|R_n^N \circ M_f\|$.
Nuestro objetivo ahora es obtener una cota inferior para el lado derecho de la desigualdad. Para esto, vamos a ver que

$$\|\sigma_n^N \circ M_f(h_z)\|_{H_1(\mathbb{D}^N)} \to 0 \text{ cuando } \|z\|_\infty \to 1, \tag{4.11}$$

donde h_z está definida nuevamente, para cada $z \in \mathbb{D}^N$ fijo, por

$$h_z(u) = \prod_{j=1}^{N} \frac{1 - |z_j|^2}{(1 - \overline{z}_j u_j)^2}.$$

Para ver esto, consideremos primero, para cada $z \in \mathbb{D}^N$, la función $g_z(u) = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(1-\bar{z}_j u_j)^2}$. Esta es claramente holomorfa y por consiguiente, tiene un desarrollo como serie de Taylor

$$g_z(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(g_z) u^\alpha$$

para $u \in \mathbb{D}^N$. El siguiente paso es ver que los coeficientes de Taylor, hasta un determinado grado, están uniformemente acotados en z. Recordemos que $c_\alpha(g_z) = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha g(0)}{\partial u^\alpha}$ y, ya que

$$\frac{\partial^\alpha g_z(u)}{\partial u^\alpha} = \prod_{j=1}^{N} \frac{(\alpha_j + 1)!}{(1 - \overline{z_j} u_j)^{2+\alpha_j}} (\overline{z_j})^{\alpha_j},$$

se tiene

$$c_\alpha(g_z) = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha g_z(0)}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{\alpha!}\prod_{j=1}^{N}(\alpha_j + 1)!(\overline{z_j})^{\alpha_j} = \left(\prod_{j=1}^{N}(\alpha_j + 1)\right)\overline{z}^\alpha.$$

Luego $|c_\alpha(g_z)| \leq (M + 1)^N$ siempre que $|\alpha| \leq M$.
Por otro lado, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ (notar que $h_z(u) = g_z(u)\prod_{j=1}^{N}(1 - |z_j|)$ para todo u) tenemos que

$$c_\alpha(f \cdot h_z) = \left(\prod_{j=1}^{N}(1 - |z_j|^2)\right) \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \hat{f}(\beta)\hat{g}_z(\gamma).$$

Teniendo todo esto encuenta, finalmente tenemos que (recordar (4.9))

$$
\begin{aligned}
&\|\sigma_n^N \circ M_f(h_z)\|_{H_1(\mathbb{D}^N)} \\
&\le \left(\prod_{j=1}^{N} 1-|z_j|^2\right) \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{l_1,\dots,l_N=1}^{N} \left\| \sum_{|\alpha_j|\le l_j} \Big|\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \hat{f}(\beta)\hat{g}_z(\gamma)\Big| u^\alpha \right\|_{H_1(\mathbb{D}^N)} \\
&\le \left(\prod_{j=1}^{N} 1-|z_j|^2\right) \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{l_1,\dots,l_N=1}^{N} \sum_{|\alpha_j|\le l_j} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)} (N+1)^N,
\end{aligned}
$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo. Esto inmediatamente implica (4.11). Una vez que tenemos esto, podemos concluir fácilmente el argumento. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|R_n^N \circ M_f\| = \|M_f - \sigma_n^N \circ M_f\| &\ge \|M_f(h_z) - \sigma_n^N \circ M_f(h_z)\|_{H_1(\mathbb{D}^N)} \\
&\ge \|M_f(h_z)\|_{H_1(\mathbb{D}^N)} - \|\sigma_n^N \circ M_f(h_z)\|_{H_1(\mathbb{D}^N)},
\end{aligned}
$$

y dado que el último término tiende a cero si $\|z\|_\infty \to 1$, entonces

$$
\|R_n^N \circ M_f\| \ge \limsup_{\|z\| \to 1} \|M_f(h_z)\|_{H_1(\mathbb{D}^N)} \ge \|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)},
$$

lo que finalmente da

$$
\|M_f\|_{\mathrm{ess}} \ge \frac{1}{2}\|f\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)} = \frac{1}{2}\|M_f\|,
$$

como queríamos.

Para completar la pruebam vamos a considerar el caso $N=\infty$. Veamos primero que

$$
\|M_f\| \ge \|M_f\|_{\mathrm{ess}} \ge C\|M_f\|, \tag{4.12}
$$

donde $C=1$ si $p>1$ y $C=1/2$ si $p=1$. Sea $K : H_p(\mathbb{D}_2^\infty) \to H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ un operador compacto, y consideremos para cada $N \in \mathbb{N}$ el operador continuo $\mathsf{I}_N : H_p(\mathbb{D}^N) \to H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ dado por la inclusión y $\mathsf{J}_N : H_p(\mathbb{D}_2^\infty) \to H_p(\mathbb{D}^N)$ definido por $\mathsf{J}(g)(u) = g(u_1,\dots,u_N,0) = g_N(u)$ entonces $K_N = \mathsf{J}_N \circ K \circ \mathsf{I}_N : H_p(\mathbb{D}^N) \to H_p(\mathbb{D}^N)$ es compacto. Por otro lado, tenemos que $\mathsf{J}_N \circ M_f \circ \mathsf{I}_N(g) = f_n \cdot g = M_{f_N}(g)$ para todo g. Más aún, dado cualquier operador $T : H_p(\mathbb{D}_2^\infty) \to H_p(\mathbb{D}_2^\infty)$ y definiendo T_N como antes tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|T\| = \sup_{\|g\|_{H_p(\mathbb{D}_2^\infty)}\le 1} \|T(g)\|_{H_p(\mathbb{D}_2^\infty)} &\ge \sup_{\|g\|_{H_p(\mathbb{D}^N)}\le 1} \|T(g)\|_{H_p(\mathbb{D}_2^\infty)} \\
&\ge \sup_{\|g\|_{H_p(\mathbb{D}^N)}\le 1} \|T_N(g)\|_{H_p(\mathbb{D}^N)} = \|T_N\|,
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\|M_f - K\| \ge \|M_{f_N} - K_N\| \ge \|M_{f_N}\|_{\mathrm{ess}} \ge C\|f_N\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)}.
$$

Puesto que $\|f_N\|_{H_\infty(\mathbb{D}^N)} \to \|f\|_{H_\infty(B_{c_0})}$ cuando $N \to \infty$ tenemos (4.12). Veamos ahora el caso $p=1$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Tomemos $1<q<\infty$ y consideremos la restricción $M_f^q : H_q(\mathbb{D}_2^N) \to H_1(\mathbb{D}_2^N)$. Si $K : H_1(\mathbb{D}_2^N) \to H_1(\mathbb{D}_2^N)$ es compacto, entonces su restricción $K^q : H_q(\mathbb{D}_2^N) \to H_1(\mathbb{D}_2^N)$ también es compacta y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\|M_f - K\|_{H_1(\mathbb{D}_2^N)\to H_1(\mathbb{D}_2^N)} &= \sup_{\|g\|_{H_1(\mathbb{D}_2^N)}\le 1} \|M_f(g) - K(g)\|_{H_1(\mathbb{D}_2^N)} \\
&\ge \sup_{\|g\|_{H_q(\mathbb{D}_2^N)}\le 1} \|M_f(g) - K(g)\|_{H_1(\mathbb{D}_2^N)} \\
&= \|M_f^q - K^q\|_{H_q(\mathbb{D}_2^N)\to H_1(\mathbb{D}^N)} \ge \|M_f^q\|_{\mathrm{ess}} \ge \|f\|_{H_1(\mathbb{D}_2^N)},
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad estamos usando el Teorema 4.2.5 1. □

Ahora que ya tenemos las estimaciones para la norma esencial del operador M_f, y a partir de un argumento análogo al utilizado en la prueba de la Proposición 4.2.5, podemos demostrar el Teorema 4.2.7.

Demostración del Teorema 4.2.7. Dado que para todo $1 \leq p < \infty$, la transformada de Bohr $\mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^N} : H_p(\mathsf{D}_2^N) \to \mathsf{H}_p^{(N)}$ y su inversa $\mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^N} : \mathsf{H}_p^{(N)} \to H_p(\mathsf{D}_2^N)$ son isometrías, un operador $K : \mathsf{H}_p^{(N)} \to \mathsf{H}_p^{(N)}$ es compacto si y solo si $K_h = \mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^N} \circ K \circ \mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^N} : H_p(\mathsf{D}_2^N) \to H_p(\mathsf{D}_2^N)$ es un operador compacto. Puesto que $f = \mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^N}(D)$ luego $M_f = \mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^N} \circ M_D \circ \mathsf{B}_{\mathsf{D}_2^N}$ y por lo tanto

$$M_D - K \;=\; \mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^N}^{-1} \circ (M_f - K_h) \circ \mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^N} \;=\; M_f - K_h$$

Luego, la Proposición 4.2.8 y la isometrís de la transformada de Bohr completan la prueba. □

Por completitud damos el resultado análogo para el caso del politoro, que se prueba, nuevamente, a partir de la isometría de la transformada de Bohr.

Corolario 4.2.10. *Sea $F \quad H_\infty(\mathsf{T}^\infty)$ y $M_F : H_p(\mathsf{T}^\infty) \to H_p(\mathsf{T}^\infty)$ el operador de multiplicación.*

1. *i $1 < p \leq \infty$, entonces*
$$M_F \;_{\text{ess}} = \; M_F \; = \; F \;_{H_\infty(\mathsf{T}^\infty)}.$$
2. *Si $p = 1$, entonces*
$$\text{máx}\{\frac{1}{2} \; F \;_{H_\infty(\mathsf{T}^\infty)}, \; F \;_{H_1(\mathsf{T}^\infty)}\} \leq \; M_F \;_{\text{ess}} \leq \; M_F \; = \; F \;_{H_\infty(\mathsf{T}^\infty)}.$$

En particular $M_F : H_p(\mathsf{T}^\infty) \to H_p(\mathsf{T}^\infty)$ es compacto si y solo si $F = 0$. Las mismas igualdades son válidas si reemplazamos T^∞ por T^N, con $N \quad \mathsf{N}$.

Al igual que las estimaciones de la norma esencial, el espectro de estos operadores puede describirse de forma similar al de funciones holomorfas en una variable (ver el Teorema 4.0.2). Vamos a comenzar determinando aquellos valores que pertenecen al espectro, para luego profundizar en el espectro puntual, radial y continuo. En este último caso, en el Teorema 4.0.2, se puede ver que juegan un rol importante las funciones *outer* en $H_\infty(\mathsf{D})$. Estas funciones también aparecen en los espacios de varias o infinitas variables (como bien puede verse en [Rud69, sección 4.4.3 Página 72] y [GN22, Página 17] respectivamente). La definición es la misma que en el caso unidimensional. Dado $N \quad \mathsf{N} \quad \{\infty\}$, una función $f \quad H_p(\mathsf{D}_2^N)$ es *outer* si satisface

$$\log|f(0)| = \int_{\mathsf{T}^N} \log|F(\omega)| \mathrm{d}\omega,$$

con $f \quad F$.

Teorema 4.2.11. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, una serie de Dirichlet no nula $D \quad \mathsf{H}_\infty$ y $M_D : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_p$ el operador de multiplicación asociado. Entonces*

1. *M_D es sobreyectivo si y sólo si existe algún $c > 0$ tal que $|D(s)| \geq c$ para todo $s \quad \mathsf{C}_0$.*
2. *$\sigma(M_D) = \overline{D(\mathsf{C}_0)}$.*
3. *Si $1 \leq p < \infty$, entonces*
$$\sigma_c(M_D) \quad \overline{D(\mathsf{C}_0)} \setminus D(\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}). \tag{4.13}$$
Más aún, si $\lambda \quad \sigma_c(M_D)$ entonces $f - \lambda = \mathsf{L}_{\mathsf{D}_2^\infty}(D) - \lambda$ es una función outer en $H_\infty(B_{c_0})$. En particular, si D no es constante, entonces $D(\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}) \quad \sigma_r(M_D)$.
4. *Si $p = \infty$, entonces $\sigma_c(M_D) = \;$. En particular, si D no es constante, entonces $\sigma_r(M_D) = \overline{D(\mathsf{C}_0)}$.*

Lo mismo vale si en cada caso se reemplaza H *por* $\mathsf{H}^{(N)}$ *(con* $N \quad \mathsf{N}$*).*

Vemos que podemos dar una descripción completa del espectro. Sin embargo, para el espectro continuo la descripción es mucho más incompleta. Veamos brevemente por qué. Consideremos primero los espacios invariantes de $H_p(\mathsf{D}_2^N)$. Decimos que un subespacio cerrado S de $H_p(\mathsf{D}_2^N)$ es invariante, si para toda función $g \quad S$ se verifica que $z_i g \quad S$ para todo monomio z_i. Por otra parte, a la función f se le dice cíclica si el subespacio invariante generado por f es exactamente $H_p(\mathsf{D}_2^N)$. En el caso de una variable, el Teorema de Beurling generalizado afirma que f es cíclica si y solo si es una función *outer* (ver [Rud69, Página 70]). Este resultado lleva a probar que $f - \lambda$ es *outer* si y solo si la imagen de multiplicar por $f - \lambda$ es densa en $H_p(\mathsf{D})$ (o lo que es lo mismo, λ pertenece al espectro continuo del operador T_f). Resumiendo, λ está en el espectro continuo si y sólo si $f - \lambda$ es *outer*. Sin embargo, en varias variables el resultado de Beurling generalizado no es cierto. Sigue cumpliéndose que si f es cíclica entonces necesariamente es *outer* (ver por ejemplo [Rud69, Teorema 4.4.6] para finitas o [GN22, Corollary 5.5] para infinitas variables), pero existen funciones *outer* que no son cíclicas. Un ejemplo de esto, como puede verse en [Rud69, Teorema 4.4.8], es la función

$$f(z_1, z_2) = e^{\frac{z_1+z_2+2}{z_1+z_2-2}}.$$

Veamos ahora sí la demostración del Teorema 4.2.11.

Demostración. 1 Dada la inyectividad del operador M_D, como consecuencia del Teorema del Gráfico Cerrado se tiene que el operador M_D es sobreyectivo si y solo si M_D es inversible y esto ocurre si y solo si $M_{D^{-1}}$ está bien definido y es continuo. Si esto ocurre, entonces $D^{-1} \quad \mathsf{H}_\infty$ y el Teorema 1.1.4 da la conclusión.

2 Notemos que $M_D - \lambda I = M_{D-\lambda}$; esto y el resultado previo dan que $\lambda \quad \sigma(M_D)$ si y solo si $|D(s) - \lambda| > \delta$ para cierto $\delta > 0$ y todo $s \quad \mathsf{C}_0$, y esto ocurre si y solo si $\lambda \quad \overline{D(\mathsf{C}_0)}$.

3 Supongamos que $\lambda \quad D(\mathsf{C}_{\frac{1}{2}})$ y sea $s_0 \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ tal que $D(s_0) = \lambda$. Dada $E \quad \mathsf{H}_p$, tenemos que

$$(M_D - \lambda I)(E)(s_0) = M_{D-\lambda}(E)(s_0) = (D(s_0) - \lambda)E(s_0) = 0.$$

Luego el rango del operador $M_D - \lambda I$ está contenido en el subespacio $\mathrm{ev}_{s_0}^{-1}(0)$ (la preimagen del funcional evaluar en s_0). Dado que este es cerrado, por ser ev_{s_0} continua (ver Teorema 1.1.10), y propio porque 1 no pertenece, concluimos que el rango no es denso. Es decir que $\lambda \quad \sigma_c(M_D)$ y tenemos (4.13). El hecho de que $f - \lambda$ es *outer* es, como ya mencionamos antes, una consecuencia inmediata de [Rud69] y [GN22]. Para ver esto notemos que, a partir de la transformada de Bohr y de la igualdad $M_D - \lambda I = M_{D-\lambda}$, se deduce que $\sigma_c(M_D) = \sigma_c(M_f)$. Por lo tanto, si $\lambda \quad \sigma_c(M_D)$ entonces $\mathrm{rg}(M_{f-\lambda})$ es denso en $H_p(\mathsf{D}_2^\infty)$. Lo que implica que $f - \lambda$ es cíclico y por lo tanto *outer*.

Veamos ahora que la última afirmación es cierta. Si D no es constante entonces $M_D - \lambda I$ es inyectivo, es decir que $\sigma_p(M_D) = \quad$. Por (4.1) tenemos que $\sigma_c(M_D) \quad \sigma_r(M_D) = \sigma(M_D) = \overline{D(\mathsf{C}_0)}$. Esto y (4.13) dan la conclusión.

4 Para ver que $\sigma_c(M_D) = \quad$, tomemos $\lambda \quad \sigma(M_D) = \overline{D(\mathsf{C}_0)}$. Sea $(s_n)_n \quad \mathsf{C}_0$ tal que $s_n \to \lambda$ y sea $E \quad \mathsf{H}_\infty$. Dado que $(E(s_n))_n$ es acotada, tenemos entonces que

$$1 - (M_D - \lambda I)(E) \ {}_{\mathsf{H}_\infty} \geq \limsup_{n\to\infty} |1 - (D(s_n) - \lambda)E(s_n)| = 1.$$

Luego el rango de $M_D - \lambda$ no es denso y por lo tanto $\lambda \quad \sigma_c(M_D)$. Nuevamente, si D no es constante entonces $\sigma_p(M_D) = \quad$ y por ende $\sigma_r(M_D) = \overline{D(\mathsf{C}_0)}$. □

Otra de las subdivisiónes del espectro que nos interesó estudiar es el espectro aproximado. Recordemos que un complejo $\lambda \quad \sigma(M_D)$ pertenece al espectro aproximado, al cual notaremos por $\sigma_{ap}(M_D)$, si existe una sucesión unitaria $(E_n)_n \quad \mathsf{H}_p$ tal que $M_D(E_n) - \lambda E_n \ {}_{\mathsf{H}_p} \to 0$ (en particular $\sigma_p(M_D) \quad \sigma_{ap}(M_D)$). Dada esta definición, notemos que un valor λ pertenece al espectro aproximado de un operador de multiplicación M_D si y solo si $M_D - \lambda I = M_{D-\lambda}$ no está acotado por abajo. Por la inyectividad de $M_{D-\lambda}$

(en caso de que $D = \lambda$), ser acotado por abajo es equivalente a tener rango cerrado. Esto nos lleva a interesarnos nuevamente en entender cuándo estos operadores tienen rango cerrado.

El comportamiento del rango es muy distinto a lo visto en la sección anterior. Recientemente, en [ACS22, Teorema 4.4], Antezana, Carando y Scotti establecieron una serie de equivalencias para ciertos sistemas de Riesz en $L_2(0,1)$. Dentro de la prueba de este resultado, también caracterizaron aquellas series de Dirichlet $D \in \mathcal{H}_\infty$, para las cuales sus operadores de multiplicación asociados $M_D : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ tienen rango cerrado. La demostración también funciona para $\mathcal{H}_p$. En el objetivo de hacer esta tesis lo más completa y clara posible, desarrollaremos debajo los argumentos dando todas las definiciones necesarias.

Recordemos que, en el Capítulo 3, definimos a los caracteres de un grupo topológico G como los homomorfismos continuos $\gamma : G \to \mathbb{T}$ y comentamos su conexión con los espacios de series de Dirichlet, en particular con las series ordinarias. En este capítulo nos va a interesar trabajar con el dual del grupo multiplicativo $\mathbb{Q}_+$, es decir los racionales positivos. El grupo de sus caracteres, que notaremos por Ξ, está conformado por todas las funciones $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{T}$ tales que $\gamma(nm) = \gamma(n)\gamma(m)$. Este grupo es abeliano compacto y, en [HLS97], se muestra como puede identificarse el grupo Ξ con $\mathbb{T}^\infty$ a partir de considerar $\omega = (\gamma(\mathfrak{p}_1), \gamma(\mathfrak{p}_2), \ldots)$ para cada $\gamma \in \Xi$. Bajo esta identificación la medida de Haar de Ξ coincide con la medida producto Lebesgue normalizada.

Si $D = \sum a_n n^{-s}$ es una serie de Dirichlet, podemos definir para cada caracter $\gamma \in \Xi$ una nueva serie de Dirichlet

$$D^\gamma(s) = \sum a_n \gamma(n) n^{-s}. \tag{4.14}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que cada caracter $\gamma \in \Xi$ se identifica con un elemento $\omega \in \mathbb{T}^\infty$, podemos reescribir (4.14) como

$$D^\omega(s) = \sum a_n \omega(n)^{\alpha(n)} n^{-s},$$

siendo $\alpha(n)$ tal que $n = \mathfrak{p}^{\alpha(n)}$.

Notemos que si $\mathcal{L}_{\mathbb{T}^\infty}(D)(u) = F(u) \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$, entonces comparando los coeficientes tenemos que $\mathcal{L}_{\mathbb{T}^\infty}(D^\omega)(u) = F(\omega \cdot u) \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Por [DGMSP19, Lema 11.22], para todo $\omega \in \mathbb{T}^\infty$ el límite

$$\lim_{\sigma \to 0} D^\omega(\sigma + it), \text{ existe para casi todo } t \in \mathbb{R}.$$

En [SS09, Teorema 2], Saksman y Seip prueban lo siguiente

Teorema 4.2.12. *Sea f una función en $H_\infty(B_{c_0})$. Entonces se puede elegir un representante $\widetilde{F}$ de las funciones $F \sim f$ en $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$, de manera tal que $\widetilde{F}(\omega) = \lim_{\theta \to 0^+} f(\mathfrak{p}_1^{-\theta}\omega_1, \mathfrak{p}_2^{-\theta}\omega_2, \ldots, \mathfrak{p}_n^{-\theta}\omega_n, \ldots)$, para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^\infty$.*

Así pues, podemos elegir un representante $\tilde{F} \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$ de F que satisface

$$\tilde{F}(\omega) = \begin{cases} \lim_{\sigma \to 0^+} D^\omega(\sigma) & \text{si el límite existe;} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Para ver esto, consideremos

$$A := \{\omega \in \mathbb{T}^\infty : \lim_{\sigma \to 0^+} D^\omega(\sigma) \text{ existe.}\},$$

y veamos que $|A| = 1$, siendo $|\cdot|$ la medida de Lebesgue normalizada.

Como primer paso, consideremos $T_t : \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}^\infty$ la función de Kronecker definida por $T_t(\omega) = (\mathfrak{p}^{-it}\omega)$, notemos que $T_t(\omega) \in A$ si y solo si $\lim_{\sigma \to 0^+} D^{T_t(\omega)}(\sigma)$ existe. Dado que

$$D^{T_t(\omega)}(\sigma) = \sum a_n (\mathfrak{p}^{-it}\omega)^{\alpha(n)} n^{-\sigma} = \sum a_n \omega^{\alpha(n)} n^{-(\sigma+it)} = D^\omega(\sigma + it),$$

entonces para todo $\omega \in \mathbb{T}^\infty$ tenemos que $T_t(\omega) \in A$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$.

Como segundo paso, y para completar el argumento, vamos a usar que el sistema $\{T_t\}_t$ es ergódico (ver [CFS12, Capítulo 3, §1, Teorema 1]) y como $\chi_A \quad L^1(\mathsf{T}^\infty)$, entonces el Teorema de Birkhoff-Kinchin (ver por ejemplo [Bir31], [SSS$^+$76, Páginas 9 y 47]) nos dice que para casi todo $\omega_0 \quad \mathsf{T}^\infty$ se tiene la igualdad

$$\int_{\mathsf{T}^\infty} \chi_A(\omega)\mathrm{d}\omega = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \chi_A(T_t(\omega_0))\mathrm{d}t.$$

Juntando todo obtenemos que $|A| = 1$.

Por lo tanto $\tilde{F} \quad H_\infty(\mathsf{T}^\infty)$, y para ver que $\tilde{F}$ es un representante de F es suficiente comparar los coeficientes de Fourier (ver nuevamente [SS09, Teorema 2]). Desde ahora hasta el final de esta sección F será siempre $\tilde{F}$.

Fijando la notación

$$D^\omega(it_0) = \lim_{\sigma\to 0^+} D^\omega(\sigma + it),$$

entonces tomando $t_0 = 0$, tenemos que

$$F(\omega) = D^\omega(0)$$

para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$. Más aún, dado $t_0 \quad \mathsf{R}$ se tiene

$$D^\omega(it_0) = \lim_{\sigma\to 0^+} D^\omega(\sigma + it_0) = \lim_{\sigma\to 0^+} D^{T_{t_0}(\omega)}(\sigma) = F(T_{t_0}(\omega)). \tag{4.15}$$

A partir de esta identidad se tiene lo siguiente.

Proposición 4.2.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *Existe $\tilde{t}_0$ tal que $|D^\omega(i\tilde{t}_0)| \geq \varepsilon$ para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$.*
2. *Para todo t_0 existe $B_{t_0} \quad \mathsf{T}^\infty$ con medida 1 tal que $|D^\omega(it_0)| \geq \varepsilon$ para todo $\omega \quad B_{t_0}$.*

Demostración. Si 1 vale, definamos $B_{\tilde{t}_0}$ como el conjunto de medida total dado por

$$B_{\tilde{t}_0} = \{\omega \quad \mathsf{T}^\infty : |D^\omega(i\tilde{t}_0)| \geq \varepsilon\}.$$

Tomemos t_0 y consideremos

$$B_{t_0} = \{\mathfrak{p}^{-i(-t_0+\tilde{t}_0)}\omega :\ \omega \quad B_{\tilde{t}_0}\},$$

el cual es claramente un conjunto de medida total. Tomemos ahora $\omega \quad B_{t_0}$ y $\omega \quad B_{\tilde{t}_0}$ tal que $\omega = \mathfrak{p}^{-i(-t_0+\tilde{t}_0)}\omega$, entonces por (4.15) tenemos que

$$|D^\omega\ (it_0)| = |F(T_{\tilde{t}_0}(\omega))| \geq \varepsilon\,,$$

y esto nos da 2. La implicación contraria vale trivialmente. □

Damos ahora una versión para H_p del resultado antes mencionado de Antezana, Carando y Scotti [ACS22, Teorema 4.4].

Teorema 4.2.14. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $D \quad \mathsf{H}_\infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Existe $m > 0$ tal que $|F(\omega)| \geq M$ para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$;*
2. *El operador $M_D : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_p$ tiene rango cerrado;*
3. *Existe $m > 0$ tal que para casi todo $(\gamma, t) \quad \Xi \times \mathsf{R}$ se tiene que*

$$|D^\gamma(it)| \geq m.$$

Más aún, en este caso,

$$\inf\left\{\ M_D(E)\ \ _{\mathcal{H}_p} : E \quad \mathcal{H}_p,\ \ E\ \ _{\mathcal{H}_p} = 1\right\}$$
$$= \operatorname{essinf}\{|F(\omega)| : \omega \quad \mathbb{T}^\infty\} = \operatorname{essinf}\{|D^\gamma(it)| : (\gamma, t) \quad \Xi \times \mathbb{R}\}.$$

Demostración. 1 2 M_D tiene rango cerrado si y solo si el rango de M_F es cerrado. Por la inyectividad de M_F se tiene, por el Teorema de la Función Abierta, que M_F tiene rango cerrado si y solo si existe una constante positiva $m > 0$ tal que

$$M_F(G)\ \ _{H_p(\mathbb{T}^\infty)} \geq m\ \ G\ \ _{H_p(\mathbb{T}^\infty)},$$

para toda $G \quad H_p(\mathbb{T}^\infty)$. Si $|F(\omega)| \geq m$ en casi todo $\omega \quad \mathbb{T}^\infty$, entonces para $G \quad H_p(\mathbb{T}^\infty)$ tenemos que

$$M_F(G)\ \ _{H_p(\mathbb{T}^\infty)} = \ \ F\cdot G\ \ _{H_p(\mathbb{T}^\infty)} = \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} |FG(\omega)|^p \mathrm{d}\omega\right)^{1/p} \geq m\ \ G\ \ _{H_p(\mathbb{T}^\infty)}.$$

2 1 Sea $m > 0$ tal que $M_F(G)\ \ _{H_p(\mathbb{T}^\infty)} \geq m\ \ G\ \ _{H_p(\mathbb{T}^\infty)}$ para toda $G \quad H_p(\mathbb{T}^\infty)$. Consideremos

$$A = \{\omega \quad \mathbb{T}^\infty : |F(\omega)| < m\}.$$

Dado que $\chi_A \quad L^p(\mathbb{T}^\infty)$, por la densidad de los polinomios trigonométricos en $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ (ver Teorema 1.1.8) existe una sucesión $(P_k)_k$ de grado n_k en N_k variables (en z y $\overline{z}$) tal que

$$\lim_k P_k = \chi_A \text{ en } L^p(\mathbb{T}^\infty).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
m^p|A| &= m^p\ \ \chi_A\ \ ^p_{L^p(\mathbb{T}^\infty)} = m^p \lim_k\ \ P_k\ \ ^p_{L^p(\mathbb{T}^\infty)} \\
&= m^p \lim_k\ \ z_1^{n_k}\dots z_{N_k}^{n_k} P_k\ \ ^p_{L_p(\mathbb{T}^\infty)} \\
&\leq \liminf_k\ \ M_F(z_1^{n_k}\dots z_{N_k}^{n_k} P_k)\ \ ^p_{L_p(\mathbb{T}^\infty)} \\
&= \ \ F\cdot\chi_A\ \ ^p_{L^p(\mathbb{T}^\infty)} = \int_A |F(\omega)|^p \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Dado que $|F(\omega)| < m$ para todo $\omega \quad A$, esto implica que $|A| = 0$.

2 3 Por la definición de F tenemos que $m \leq |F(\omega)| = \lim_{\sigma\to 0^+} |D^\omega(\sigma)|$ para casi todo $\omega \quad \mathbb{T}^\infty$. Combinando esto con la observación 4.2.13 obtenemos que las secciones t del conjunto

$$C = \{(\omega, t) \quad \mathbb{T}^\infty \times \mathbb{R} :\ |D^\omega(it)| < \varepsilon\},$$

tienen medida nula. Como corolario del Teorema de Fubini, se deduce que C tiene medida nula. La implicación 3 2 también se sigue del Teorema de Fubini. La última igualdad se sigue de las equivalencias probadas. □

En el caso de los polinomios la condición del Teorema 4.2.14 queda restringida a la imagen sobre la recta de los complejos con parte real nula. Como consecuencia, uno puede extender esta caracterización a las series de Dirichlet que pertenecen al espacio $\mathcal{A}(\mathbb{C}_0)$, definido como el subespacio cerrado de $\mathcal{H}_\infty$ dado por las series de Dirichlet que son uniformemente continuas en el semiplano $\mathbb{C}_0$ (ver [ABG$^+$17, Definición 2.1]). En [ABG$^+$17, Teorema 2.3], se prueba que en este espacio, a diferencia de lo que ocurre en $\mathcal{H}_\infty$, los polinomios son densos.

Teorema 4.2.15. *Sea $\varphi : \mathsf{C}_0 \to \mathsf{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *φ es el límite uniforme en C_0 de una sucesión de polinomios de Dirichlet.*
2. *φ está representada por una serie de Dirichlet que converge puntualmente en C_0 y φ es uniformemente continua en C_0.*

Veamos ahora el resultado mencionado en los casos puntuales de los polinomios de Dirichlet y las series en el espacio $\mathsf{A}(\mathsf{C}_0)$.

Corolario 4.2.16. *Sea $1 \leq p < \infty$ entonces*

1. *Sea $P \quad \mathsf{H}_\infty$ un polinomio de Dirichlet. Entonces $M_P : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_p$ tiene rango cerrado si y solo si existe una constante $m > 0$ tal que $|P(it)| \geq m$ para toda $t \quad \mathsf{R}$.*
2. *Sea $D \quad \mathsf{A}(\mathsf{C}_0)$, entonces $M_D : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_p$ tiene rango cerrado si y solo si existe una constante $m > 0$ tal que $|D(it)| \geq m$ para toda $t \quad \mathsf{R}$.*

Más aún, en cada caso

$$\operatorname{ínf}\{ \ M_D(E) \ _{\mathsf{H}_p} : E \quad \mathsf{H}_p, \quad E \ _{\mathsf{H}_p} = 1\} = \operatorname{ínf}\{|D(it)| : t \quad \mathsf{R}\}.$$

En ambos casos, la prueba se basa en el Teorema de Kronecker, el cual garantiza la densidad de $(\mathfrak{p}_1^{-it}, \mathfrak{p}_2^{-it}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{-it}, \ldots)_{t \ \mathsf{R}}$ en T^∞ (ver [DGMSP19, Teorema 3.4] para una demostración).

Demostración del Corolario 4.2.16. 1 Sea $F = \mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty}(P)$ entonces, por el Teorema 4.2.14, M_P tiene rango cerrado si y solo si existe una constante $m > 0$ tal que $|F(\omega)| \geq m$ para casi todo $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$. Dado que $F(\omega) = \sum a_\alpha \omega^\alpha$ es continua y por el Teorema de Kronecker

$$\{(\mathfrak{p}_1^{-it}, \ldots, \mathfrak{p}_N^{-it}, \omega) \ : \ t \quad \mathsf{R}, \ \omega \quad \mathsf{T}^\infty\}$$

es denso en T^∞, entonces M_P tiene rango cerrado si y solo si $|F(\mathfrak{p}_1^{-it}, \ldots, \mathfrak{p}_N^{-it}, \omega)| \geq m$ para toda $t \quad \mathsf{R}$ y $\omega \quad \mathsf{T}^\infty$. El resultado se concluye del hecho de que

$$F(\mathfrak{p}_1^{-it}, \ldots, \mathfrak{p}_N^{-it}, \omega) = \sum a_\alpha \mathfrak{p}_1^{-it\alpha_1} \ldots \mathfrak{p}_N^{-it\alpha_N} = \sum a_n n^{-it} = P(it).$$

2 Dado que D es uniformemente continua sobre C_0 entonces D admite una extensión uniformemente continua al semiplano $\{s \quad \mathsf{C} : \operatorname{Re} s \geq 0\}$. Por el Teorema 4.2.15, D es el límite uniforme en C_0 de una sucesión de polinomios de Dirichlet P_n. Sea $\mathsf{A}(\mathsf{T}^\infty)$ el subespacio cerrado de $H_\infty(\mathsf{T}^\infty)$ dado por la transformada de Bohr de $\mathsf{A}(\mathsf{C}_0)$. Si $\mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty}(D) = F \quad \mathsf{A}(\mathsf{T}^\infty)$, por ser límite uniforme de polinomios, entonces F es continua. Luego, dada $t \quad \mathsf{R}$ tenemos que

$$|F(\mathfrak{p}^{-it})| = \lim_n |\,\mathsf{L}_{\mathsf{T}^\infty}(P_n)(\mathfrak{p}^{-it})| = \lim_n |P_n(it)| = |D(it)|. \tag{4.16}$$

Podemos concluir que el rango de M_D es cerrado si y sólo si existe una constante $m > 0$ tal que $|F(\mathfrak{p}^{-it})| \geq m$ para todo $t \quad \mathsf{R}$ (usando el Teorema 4.2.14, el Teorema de Kronecker y la continuidad de F). Es decir, por (4.16), que el rango es cerrado si y sólo si $|D(it)| \geq m$ para todo $t \quad \mathsf{R}$. $\square$

Por lo que hemos dicho anteriormente, en el caso no trivial, un valor λ pertenece al espectro aproximado de M_D si y solo si el rango de $M_{D-\lambda}$ no es cerrado. Luego, el Teorema 4.2.14 y la proposición 4.2.16 nos dan una caracterización del espectro aproximado. Para esto, primero necesitamos la definición del rango esencial de la función $[(\gamma, t) \quad D^\gamma(it)]$. Esto es,

$$\Big\{\lambda \quad \mathsf{C} : \text{ para todo } \varepsilon > 0, \ \mu\big\{(\gamma, t) : |D^\gamma(it) - \lambda| < \varepsilon\big\} > 0\Big\},$$

donde μ es la medida de Haar en $\Xi \times \mathsf{R}$.

Teorema 4.2.17. *Sea* $1 \leq p < \infty$

1. *Si* $D \in \mathcal{H}_\infty$*, entonces* $\sigma_{ap}(M_D) = \operatorname{essran}[(\gamma, t) \mapsto D^\gamma(it)]$.
2. *Si* $D \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_0)$*, entonces* $\sigma_{ap}(M_D) = \overline{\{D(it) : t \in \mathbb{R}\}}$.

Demostración. 1 Un valor λ pertenece a $\sigma_{ap}(M_D)$ si y solo si el rango de $M_{D-\lambda}$ no es cerrado; y por el Teorema 4.2.14, si y solo si

$$\operatorname{essinf}\{|D^\gamma(it) - \lambda| : (\gamma, t) \in \Xi \times \mathbb{R}\} = \operatorname{essinf}\{|(D - \lambda)^\gamma(it)| : (\gamma, t) \in \Xi \times \mathbb{R}\} = 0,$$

pero esto es equivalente a decir que la medida de $\{|D^\gamma(it) - \lambda| < \varepsilon : (\gamma, t) \in \Xi \times \mathbb{R}\}$ es mayor a cero para todo $\varepsilon > 0$. En otras palabras, λ pertenece al rango esencial de $[(\gamma, t) \mapsto D^\gamma(it)]$.

2 Siguiendo los mismos argumentos utilizados en 1 y usando el Corolario 4.2.16 tenemos que $\lambda \in \sigma_{ap}(M_D)$ si y solo si $\inf\{|D(it) - \lambda| : t \in \mathbb{R}\} = 0$, si y solo si $\lambda \in \overline{\{D(it) : t \in \mathbb{R}\}}$. □

4.3. Multiplicadores en series generales

En esta sección nos proponemos comenzar con el estudio de los multiplicadores para los espacios de series de Dirichlet generales. Como hemos visto en el Capítulo 3, trabajar con λ-series de Dirichlet representa una mayor dificultad. Los resultados, aunque no siempre, suelen depender fuertemente de la frecuencia. En el caso de los multiplicadores, trabajar con series generales representa una complicación incluso al momento de la definición de los mismos. Dadas dos frecuencias $\lambda = (\lambda_n)_n$ y $\beta = (\beta_n)_n$, considerando el conjunto $\{\widetilde{\gamma}_{n,m} = \lambda_n + \beta_m\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ y reordenando los términos en forma creciente $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ es claro que $\gamma = (\gamma_n)_n$ resulta una nueva frecuencia. De esta forma, si consideramos $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{D}(\lambda)$ y $E = \sum b_n e^{-\beta_n s} \in \mathcal{D}(\beta)$ dos series convergentes en algún semiplano $\mathbb{C}_\sigma$, el producto DE converge en el mismo semiplano y, reordenando los coeficientes en el semiplano de convergencia absoluta, obtenemos una nueva serie de Dirichlet. Esta serie resulta ser una γ-serie de Dirichlet y su n-ésimo coeficiente viene dado por $\sum\limits_{\lambda_j + \beta_k = \gamma_n} a_j b_k$, siendo la suma finita por ser λ y β frecuencias, en particular

$$DE(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_j + \beta_k = \gamma_n} a_j b_k \right) e^{-\gamma_n s}.$$

Esto da lugar a distintos planteos en términos de los multiplicadores. Por ejemplo, si fijamos dos frecuencias λ y γ y dos espacios $\mathcal{X}(\lambda)$ e $\mathcal{Y}(\gamma)$ de λ y γ-series de Dirichlet respectivamente, se plantea la siguiente pregunta ¿Quiénes son las funciones φ tales que $\varphi D \in \mathcal{Y}(\gamma)$ para toda $D \in \mathcal{X}(\lambda)$? Además, ¿Forma el conjunto de multiplicadores un espacio de series de Dirichlet para alguna frecuencia β a determinar?

Otro planteo que podríamos realizar, observando los resultados para las series de Dirichlet ordinarias, es determinar para dos frecuencias λ y β fijas y dos espacios $\mathcal{X}(\lambda)$ e $\mathcal{Y}(\beta)$ de λ y β-series de Dirichlet respectivamente, el conjunto

$$\{DE : D \in \mathcal{X}(\lambda) \text{ y } E \in \mathcal{Y}(\beta)\}$$

como un espacio de γ-series de Dirichlet para alguna frecuencia γ.

En esta breve sección nos planteamos y resolvemos un problema, en principio, un poco más sencillo que los mencionados. Dada una frecuencia λ y $1 \leq p < \infty$, queremos determinar los multiplicadores de $\mathcal{H}_p(\lambda)$, es decir las funciones φ tales que $\varphi D \in \mathcal{H}_p(\lambda)$ para toda $D \in \mathcal{H}_p(\lambda)$. Siguiendo la notación que utilizamos en las secciones anteriores, vamos a notar a estos conjuntos de multiplicadores por $\mathfrak{M}_\lambda(p, p)$.

Observemos que si $\varphi \in \mathfrak{M}_\lambda(p, p)$ entonces $\varphi e^{-\lambda_1 s} = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ y por lo tanto

$$\varphi = \sum a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)s}.$$

Es decir, que φ es una serie de Dirichlet general, con frecuencia $\beta = (\beta_n)_n$ siendo $\beta_n = \lambda_n - \lambda_1$. Sin embargo, esta frecuencia puede diferir de la frecuencia λ original. Por ejemplo, si $\lambda_1 = 0$ entonces $\varphi = 1 \in \mathsf{M}_\lambda(p,p)$ y no es una λ-serie de Dirichlet.

Vamos a decir que λ es aditiva si para cada $i, j \in \mathsf{N}$ existe $n \in \mathsf{N}$ tal que $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_n$. Tomemos λ una frecuencia aditiva tal que $\lambda_1 = 0$. Entonces, el espacio $\mathsf{H}_p(\lambda)$ resulta un espacio de Banach que contiene a las constantes (luego, tenemos que los multiplicadores $\mathsf{M}_\lambda(p,p)$ resultan un subconjunto de $\mathsf{H}_p(\lambda)$, puesto que $\varphi 1 \in \mathsf{H}_p(\lambda)$, y por lo tanto de λ-series de Dirichlet) y el producto de λ-series de Dirichlet resulta nuevamente una λ-serie de Dirichlet. Bajo estas condiciones podemos determinar los multiplicadores $\mathsf{M}_\lambda(p,p)$.

Teorema 4.3.1. *Sean $\lambda = (\lambda_n)_n$ una frecuencia aditiva, con $\lambda_1 = 0$, y $1 \leq p < \infty$. Entonces $\mathsf{M}_\lambda(p,p) = \mathsf{H}_\infty(\lambda)$.*

Para la prueba vamos a considerar la compactificación de Bohr $\overline{\mathsf{R}} := (\mathsf{R}, +, d)$ de R con d la topología discreta, que junto con la inclusión $\beta_{\overline{\mathsf{R}}} \colon \mathsf{R} \hookrightarrow \overline{\mathsf{R}}$ dado por $x \to \left[t \to e^{-ixt}\right]$, resulta un λ-grupo de Dirichlet (recordar la Sección 3.1). Tomando

$$H_p^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right) = \{F \in L_p(\overline{\mathsf{R}}) : \widehat{F}(x) = \int_{\overline{\mathsf{R}}} F(t)\overline{e^{-itx}}d\mu(t) = 0 \text{ si } x = \lambda_n \text{ para todo } n \in \mathsf{N}\},$$

este resulta un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $\mathsf{H}_p(\lambda)$, siendo que la identificación isométrica se da por medio de los coeficientes de Bohr y de Fourier. Es decir que $D \in \mathsf{H}_p(\lambda)$ y $F \in H_p^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$ están identificadas si y sólo si $a_n = \widehat{F}(\lambda_n)$ para todo $n \in \mathsf{N}$.

Demostración. Dado que $\lambda_1 = 0$ se tiene que $\mathsf{M}_\lambda(p,p) \subset \mathsf{H}_p(\lambda)$. Sea $D \in \mathsf{M}_\lambda(p,p)$, veamos que el operador

$$\begin{aligned} M_D \colon \mathsf{H}_p(\lambda) &\to \mathsf{H}_p(\lambda), \\ E &\to DE \end{aligned}$$

es continuo. Sean $E, \widetilde{E} \in \mathsf{H}_p(\lambda)$ y $(E_n)_n \subset \mathsf{H}_p(\lambda)$ una sucesión de λ-series de Dirichlet que convergen a E y tal que DE_n converge a $\widetilde{E}$, veamos que $DE = \widetilde{E}$ y luego, por ser $\mathsf{H}_p(\lambda)$ un espacio de Banach, el Teorema del gráfico cerrado nos da la continuidad de M_D. Por la continuidad de los funcionales coeficientes se verifican los límites $a_m(E_n) \to a_m(E)$ y $a_m(DE_n) \to a_m(\widetilde{E})$ cuando $n \to \infty$ para cada $m \in \mathsf{N}$. Luego, dado $m \in \mathsf{N}$, sabemos que

$$a_m(\widetilde{E}) = \lim_{n \to \infty} a_m(DE_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\lambda_j + \lambda_k = \lambda_m} a_j(D)a_k(E_n) = \sum_{\lambda_j + \lambda_k = \lambda_m} a_j(D)a_k(E) = a_m(DE),$$

de donde concluimos que $DE = \widetilde{E}$.

Consideremos $F \in H_p^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$ tal que F y D están identificadas ($F \sim D$), y veamos que, de hecho, $F \in H_\infty^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$. Sea $n \in \mathsf{N}$, veamos que $Fe^{-\lambda_n it} \in H_p^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$. Como $e^{-\lambda_n it}$ es acotado, entonces $Fe^{-\lambda_n it}$ pertenece a $L_p\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$. Sea $x \in \mathsf{R}$, el correspondiente coeficiente de Fourier resulta

$$\widehat{Fe^{-\lambda_n it}}(x) = \int_{\overline{\mathsf{R}}} F(t)e^{it(\lambda_n - x)}d\mu(t) = \widehat{F}(x - \lambda_n),$$

por lo que es 0 si $x - \lambda_n = \lambda_j$ para todo $j \in \mathsf{N}$ o lo que es lo mismo, por ser λ aditiva, si $x = \lambda_n$ para todo $n \in \mathsf{N}$. De aquí deducimos inmediatamente que $FP \in H_p^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$ para todo polinomio $P = \sum a_n(P)e^{-\lambda_n it}$ y más aún, a partir de los coeficientes, tenemos que $FP \sim DE$, con $E = \sum a_n(P)e^{-\lambda_n s}$. Sean $G \in H_p^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$ y $(P_n)_n \subset H_p^\lambda\left(\overline{\mathsf{R}}\right)$ una sucesión de polinomios que convergen a G. Consideremos las series de Dirichlet asociadas, $G \sim E \in \mathsf{H}_p(\lambda)$ y $P_n \sim E_n \in \mathsf{H}_p(\lambda)$, entonces $E_n \to E$ en $\mathsf{H}_p(\lambda)$ y por la continuidad de M_D

tenemos que $DE_n \to DE$. Luego por ser $\mathcal{H}_p(\lambda)$ y $H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ isométricamente isomorfos y como $FP_n \sim DE_n$ concluimos que $(FP_n)_n$ es de Cauchy. Sea $\widetilde{G}$ el límite de $(FP_n)_n$, entonces $FP_n(x) \to \widetilde{G}(x)$ para casi todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ y $P_n(x) \to G(x)$ para casi todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, de donde se tiene que $FG = \widetilde{G}$ en $H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$. Esto nos dice en particular que F es un multiplicador de $H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ en $H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ y por lo tanto $F^n \in H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, por todo lo hecho hasta acá se tiene que $M_F : H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}}) \to H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ es continuo y más aún $\|F^n\|_{L_p(\overline{\mathbb{R}})} \leq \|M_F\|^n$. Luego,

$$\left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} |F(t)|^{pn} d\mu(t)\right)^{\frac{1}{pn}} = \|F^n\|_{L_p(\overline{\mathbb{R}})}^{\frac{1}{n}} \leq \|M_F\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ende $F \in H_\infty^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$. Tenemos entonces que $D \in \mathcal{H}_\infty(\lambda)$ de lo que se concluye que $\mathfrak{M}_\lambda(p,p) \subseteq \mathcal{H}_\infty(\lambda)$.

Veamos ahora la inclusión contraria, es decir que $\mathcal{H}_\infty(\lambda) \subseteq \mathfrak{M}_\lambda(p,p)$. Sean $D \in \mathcal{H}_\infty(\lambda)$ y $D \sim F \in H_\infty^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$, veamos que el operador

$$\begin{aligned} M_F \colon H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}}) &\to H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}}), \\ G &\to FG \end{aligned}$$

está bien definido y es continuo. Sea $G \in H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$, es claro que $FG \in L_p(\overline{\mathbb{R}})$, luego tenemos que ver que $\widehat{FG}(x) = 0$ si $x = \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el cálculo realizado en el paso anterior sabemos que $FP \in H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ para todo polinomio $P \in H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$. Sea nuevamente $(P_n)_n \subseteq H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ una sucesión de polinomios que convergen a G (en $H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ y por consiguiente $P_n(x) \to G(x)$ para casi todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$). Dado que

$$\|FP_n - FP_m\|_{L_p(\overline{\mathbb{R}})} \leq \|F\|_{L_\infty(\overline{\mathbb{R}})} \|P_n - P_m\|_{L_p(\overline{\mathbb{R}})} = \|F\|_{H_\infty^\lambda(\overline{\mathbb{R}})} \|P_n - P_m\|_{H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})},$$

entonces $(FP_n)_n \subseteq H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ es de Cauchy y por lo tanto converge a una cierta $\widetilde{G}$ (en $H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ y luego $FP_n(x) \to \widetilde{G}(x)$ para casi todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$). Tenemos entonces que

$$\widetilde{G}(x) = \lim_{n \to \infty} FP_n(x) = FG(x),$$

para casi todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, por lo que $FG \in H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$. Sabiendo que M_F está bien definido y es continuo (a partir del mismo argumento que ya hemos realizado) podemos utilizar la isometría para ver que $D \in \mathfrak{M}_\lambda(p,p)$.

Sean $E \in \mathcal{H}_p(\lambda)$ y $(E_n)_n$ una sucesión de λ-polinomios de Dirichlet que convergen a E, sean $E \sim G \in H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$ y $E_n \sim P_n \in H_p^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$. Se tiene que $P_n \to G$ y, por la continuidad de M_F, a su vez $FP_n \to FG$. Luego, dado que $DE_n \sim FP_n$, podemos ver que DE_n es de Cauchy y por lo tanto converge a una λ-serie de Dirichlet $\widetilde{E} \in \mathcal{H}_p(\lambda)$. Nuevamente

$$a_m(\widetilde{E}) = \lim_{n \to \infty} a_m(DE_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\lambda_j + \lambda_k = \lambda_m} a_j(D) a_k(E_n) = \sum_{\lambda_j + \lambda_k = \lambda_m} a_j(D) a_k(E) = a_m(DE),$$

y por ende $DE = \widetilde{E} \in \mathcal{H}_\infty(\lambda)$. Es decir que $\mathcal{H}_\infty(\lambda) \subseteq \mathfrak{M}_\lambda(p,p)$. □

Claramente a partir del Teorema 3.2.1 y como consecuencia del Teorema 4.3.1 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3.2. *Sea λ una frecuencia aditiva, tal que $\lambda_1 = 0$. Entonces son equivalentes*

(I) *El Teorema de Bohr vale para λ,*

(II) $\mathfrak{M}_\lambda(p,p) = \mathcal{D}_\infty(\lambda)$ *para algún* $1 \leq p < \infty$,

(III) $\mathfrak{M}_\lambda(p,p) = \mathcal{D}_\infty(\lambda)$ *para todo* $1 \leq p < \infty$.

Ahora si λ es una frecuencia arbitraria podemos generar a partir de esta una frecuencia aditiva. Para esto, consideremos el conjunto

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n : (a_n)_n \quad \mathsf{N}_0^{(\mathsf{N})} \right\}$$

y λ^a la sucesión que se obtiene de reordenar en forma creciente los elementos del conjunto. Luego, λ^a resulta una frecuencia aditiva con $\lambda_1 = 0$. Por otro lado, dado que λ es una subsucesión de λ^a entonces si esta última satisface el Teorema de Bohr se tiene que λ satisface el Teorema de Bohr (ya que toda serie D en $\mathsf{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda)$ es en particular una serie en $\mathsf{D}_\infty^{\text{ext}}(\lambda^a)$, considerando como cero los coeficientes que no perteneces a λ). Se deduce entonces lo siguiente.

Corolario 4.3.3. *Sea λ una frecuencia cualquiera y λ^a una frecuencia aditiva que contiene a λ, con $\lambda_1^a = 0$. Si $\mathsf{M}_{\lambda^a}(p,p) = \mathsf{D}_\infty(\lambda^a)$ para algún $1 \leq p < \infty$ entonces λ satisface el Teorema de Bohr.*

Capítulo 5

Operadores sobre $\mathcal{H}_+$

Siguiendo con el estudio de operadores en espacios de series de Dirichlet, en este capítulo nos concentraremos en ciertos operadores definidos esencialmente sobre el espacio $\mathcal{H}_+$. Los primeros operadores que analizaremos serán los operadores de composición. Dados dos abiertos Ω_1, Ω_2 $\mathbb{C}$ y una función holomorfa $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ se tiene que $f \circ \phi$ es holomorfa para toda función holomorfa f sobre Ω_2. Esto define de forma natural un operador C_ϕ, llamado operador de composición asociado al símbolo ϕ, dado por $C_\phi(f) = f \circ \phi$. Estos operadores son objetos de estudio clásicos en diversos espacios de funciones y en general se busca estudiar las propiedades de operador C_ϕ (continuidad, compacidad, etc.) a partir de las características de la función ϕ.

Los siguientes operadores que analizaremos serán los operadores de superposición. Estos están definidos de una forma similar a las de los operadores de composición, pero desde un punto de vista diferente. Dada φ, el operador S_φ se define por $f \to \varphi \circ f$. El objetivo es el mismo que el mencionado anteriormente, esto es, analizar las propiedades de S_φ a partir de las características de la función φ asociada. Por último, nos enfocaremos en otros operadores clásicos definidos en espacios de funciones diferenciables, como son los operadores de diferenciación $f \to f$.

5.1. Operadores de composición sobre $\mathcal{H}_+$

Los operadores de composición que queremos estudiar son operadores de composición en espacios de series de Dirichlet. Esto restringe la clase de símbolos ϕ que podemos considerar. Veamos por qué. Si $\phi : \mathbb{C}_{\sigma_1} \to \mathbb{C}_{\sigma_2}$ es una función holomorfa y $D = \sum a_n n^{-s}$ $\mathcal{D}$ es una serie de Dirichlet convergente en el semiplano $\mathbb{C}_{\sigma_2}$, entonces es claro que la función definida por $f(s) = D \circ \phi(s) = \sum a_n n^{-\phi(s)}$ resulta holomorfa en el semiplano $\mathbb{C}_{\sigma_1}$. Sin embargo, la función podría no estar representada como una serie de Dirichlet en este semiplano. Luego, como condición inicial para estudiar los operadores de composición en espacios de series de Dirichlet, hay que determinar bajo qué circunstancias puede representarse $D \circ \phi$ como una serie de Dirihclet en el semiplano $\mathbb{C}_{\sigma_1}$. Para ponerlo en otros términos, si $\mathcal{F}$ es un espacio de series de Dirichlet convergentes es $\mathbb{C}_{\sigma_2}$, queremos encontrar condiciones sobre ϕ tal que C_ϕ defina un operador actuando sobre $\mathcal{F}$ y dando valores en algún otro espacio de series de Dirichlet. Los primeros en abordar este problema fueron Gordon y Hedenmalm en [GH99], quienes caracterizaron aquellas funciones ϕ para las cuales C_ϕ es un operador bien definido y continuo sobre $\mathcal{H}_2$, tomando valores en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{H}_2$, y estudiaron algunas de sus propiedades. Este estudio fue extendido por Bayart en [Bay02] para $\mathcal{H}_p$, con $p = 2$, y Bonet para $\mathcal{H}_+^\infty$ en [Bon18]. Siguiendo estos trabajos, vamos a comenzar por analizar aquellas funciones $\phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ cuyos operadores de composición asociados son acotados o continuos. Notemos que el codominio $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ es el semiplano más grande que podemos tomar. Por un lado la Observación 2.1.4 nos dice que toda serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_+$ converge en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y por lo tanto la composición resulta estar bien definida. Por otra parte, dado que $D = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} n^{-s}$ $\mathcal{H}_+$ y $\sigma_c(D) = 1/2$ no podemos tomar un semiplano más grande. Para el estudio de los operadores de composición y sus propiedades en $\mathcal{H}_+$ vamos a utilizar reiterativamente dos resultados de Gordon y Hedenmalm. En el primero, [GH99, Teorema A], describen los símbolos ϕ que definen operadores de composición en $\mathcal{H}_2$. Mientras que en el segundo, [GH99, Teorema B], los símbolos ϕ tales que el operador de composición $C_\phi : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ es acotado. Por comodidad vamos a presentarlos como un único teorema.

Teorema 5.1.1. *Sea $\phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ una función holomorfa. Entonces*

(A) $C_\phi : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{D}$ *es un operador de composición si y sólo si es una función holomorfa en cierto semiplano $\mathbb{C}_\mu$ y allí tiene la forma*

$$\phi(s) = c_0 s + \varphi(s), \text{ donde } c_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } \varphi \in \mathcal{D}.$$

(B) Si $C_\phi : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{D}$ está bien definido, entonces $C_\phi : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ es acotado si y sólo si ϕ tiene una extensión holomorfa a $\mathbb{C}_0$, tal que

I) $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_0$ *si* $c_0 \in \mathbb{N}$,

II) $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *si* $c_0 = 0$.

La descripción de los símbolos ϕ que definen operadores de composición en $\mathcal{H}_+$ resulta análoga al Teorema 5.1.1 (A)

Teorema 5.1.2. *Una función $\phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ define un operador de composición $C_\phi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{D}$ si y sólo si es una función holomorfa en cierto semiplano $\mathbb{C}_\mu$ y allí tiene la forma*

$$\phi(s) = c_0 s + \varphi(s), \text{ donde } c_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } \varphi \in \mathcal{D}. \tag{5.1}$$

Antes de pasar a la prueba del teorema, vamos a comentar un resultado que usaremos constantemente en esta sección y que nos permite tener un cierto control en la imagen de funciones del tipo (5.1).

Observación 5.1.3. Si ϕ está definida como en (5.1), entonces [GH99, Proposición 4.2] nos da un buen control del comportamiento de φ en semiplanos. Más precisamente, si $\phi(\mathbb{C}_\theta) \subset \mathbb{C}_\eta$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\varphi(\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}) \subset \mathbb{C}_{\eta+\delta-c_0\theta}$.

Demostración del Teorema 5.1.2. Si C_ϕ es un operador de composición, entonces $2^{-\phi(s)}$ y $3^{-\phi(s)}$ son holomorfas y no se anulan en algún semiplano $\mathbb{C}_\mu$ con $\mu \geq \theta$, luego con la misma prueba realizada en [BCMG+21, Lema 2.1] tenemos que ϕ es una función holomorfa sobre $\mathbb{C}_\mu$. Por otro lado, el hecho de que $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_+$ y el Teorema 5.1.1 (A) nos dan inmediatamente que $\phi : \mathbb{C}_\mu \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ tiene que ser como en (5.1). Supongamos ahora que $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ con $c_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\varphi \in \mathcal{D}$. Entonces ϕ genera un operador de composición sobre $\mathcal{H}_2$. Para cada $\varepsilon > 0$ fijo definimos $\phi_\varepsilon(s) = c_0 s + \varphi(s) - \varepsilon$, función que, por el Teorema 5.1.1 (A), también define un operador de composición sobre $\mathcal{H}_2$. Dada una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ en $\mathcal{H}_+$ tenemos que

$$D \circ \phi(s) = \sum a_n n^{-\phi(s)} = \sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-(\phi(s)-\varepsilon)} = D_\varepsilon \circ \phi_\varepsilon(s).$$

Dado que D_ε pertenece a $\mathcal{H}_2$, entonces $D \circ \phi(s) \in \mathcal{D}$ como queríamos. □

Recordemos que en espacios de Fréchet no normados las nociones de continuidad y acotación para operadores no son equivalentes. Por ello tenemos que hacer un estudio diferenciado para cada una. Comenzamos caracterizando la continuidad de los operadores de composición:

Teorema 5.1.4. *Sea ϕ como en (5.1). Entonces $C_\phi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ define un operador de composición continuo si y sólo si ϕ tiene una extensión holomorfa a $\mathbb{C}_0$, tal que*

1. $\phi(\mathbb{C}_0)\quad \mathbb{C}_0$ *si* $c_0 \quad \mathbb{N}$,
2. $\phi(\mathbb{C}_0)\quad \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *si* $c_0 = 0$.

Antes de ver la demostración vamos a realizar un pequeño comentario. Supongamos que $\phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa como en (5.1) que define un operador de composición $C_\phi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{D}$. Dado $k \quad \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ definimos una función $\phi_{k,\delta} : \mathbb{C}_{-\frac{1}{k}} \to \mathbb{C}$ por

$$\phi_{k,\delta}(s) = \phi\big(s + \tfrac{1}{k}\big) - \delta\,. \tag{5.2}$$

Esta función es claramente holomorfa, pero más aún

$$\phi_{k,\delta}(s) = c_0\big(s + \tfrac{1}{k}\big) + \varphi\big(s + \tfrac{1}{k}\big) - \delta = c_0 s + \varphi_{k,\delta}(s)\,, \tag{5.3}$$

donde

$$\varphi_{k,\delta}(s) = \frac{c_0}{k} - \delta + \varphi_k(s) = \frac{c_0}{k} - \delta + c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1/k}} n^{-s}$$

es una serie de Dirichlet que converge al menos en el mismo semiplano que φ (y, al igual que φ, admite una extensión holomorfa a $\mathbb{C}_0$). Luego, por el Teorema 5.1.2, $\phi_{k,\delta}$ define un operador de composición $C_{\phi_{k,\delta}} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{D}$. Notemos que, si $D = \sum a_n n^{-s} \quad \mathcal{H}_+$, entonces $D \circ \phi \quad \mathcal{D}$ y, siempre que esta converge, para $k \quad \mathbb{N}$ tenemos que

$$\big(D \circ \phi\big)_k(s) = D \circ \phi\big(s + \tfrac{1}{k}\big) = \sum a_n n^{-\phi(s+1/k)} = \sum \frac{a_n}{n^\delta} n^{-\phi(s+1/k)+\delta} = D_\delta \circ \phi_{k,\delta}(s)\,,$$

esto es (notemos que D_δ nuevamente pertenece a $\mathcal{H}_+$)

$$\big(D \circ \phi\big)_k = C_{\phi_{k,\delta}}(D_\delta)\,. \tag{5.4}$$

Demostración del Teorema 5.1.4. Tomemos ϕ tal que $C_\phi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ es continuo. Para cada k fijo consideramos $\phi_{k,0}$ como en (5.2) y observemos que define un operador de composición continuo $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ y (como en (5.4)) $C_{\phi_{k,0}}(D) = \big(D \circ \phi\big)_k$ para toda $D \quad \mathcal{H}_2$. Supongamos que $c_0 = 0$; entonces, por el Teorema 5.1.1 (B), $\phi_k(\mathbb{C}_0) \quad \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ lo que nos da $\phi(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}) \quad \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$. Dado que esto vale para todo k se sigue entonces lo que queríamos probar. El mismo argumento nos da también la conclusión para $c_0 = 0$. Esto completa la parte de necesidad de la prueba.

Vamos a probar la suficiencia. Supongamos que ϕ es tal que para todo k existe un $\delta > 0$ de modo que la función en (5.2) define un operador continuo $C_{\phi_{k,\delta}} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$. En este caso, entonces eligiendo $m \quad \mathbb{N}$ con $0 < \frac{1}{m} < \delta$ y teniendo en cuenta (5.4), obtenemos

$$C_\phi(D) \quad {}_{2,k} = \quad (D \circ \phi)_k \quad {}_{\mathcal{H}_2} \leq \quad C_{\phi_{k,\delta}} \quad D_\delta \quad {}_{\mathcal{H}_2} \leq \quad C_{\phi_{k,\delta}} \quad D \quad {}_{2,m}$$

para todo $D \quad \mathcal{H}_+$; lo que nos muestra que $C_\phi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ es continuo. Luego, basta con demostrar que si ϕ satisface alguna de las condiciones del Teorema 5.1.4, entonces para cada k podemos encontrar $\delta > 0$ tal que el operador $C_{\phi_{k,\delta}} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ es continuo. Vamos a considerar distintos casos.

El primer caso que vamos a considerar es el caso $c_0 = 0$, luego $\phi = \varphi$ y, por hipótesis $\varphi(\mathbb{C}_0) = \phi(\mathbb{C}_0) \quad \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$. Dado $k \quad \mathbb{N}$, por lo observado en 5.1.3, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\varphi(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}) \quad \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\delta}$. Para este δ fijo, definimos $\phi_{k,\delta}$ como en (5.2). Observemos que si $s \quad \mathbb{C}_0$ entonces

$$\mathrm{Re}(\phi_{k,\delta}(s)) = \mathrm{Re}(\phi(s + \frac{1}{k}) - \delta) = \mathrm{Re}(\phi(s + \frac{1}{k})) - \delta > \frac{1}{2}.$$

Es decir que $\phi_{k,\delta}(\mathbb{C}_0) \quad \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y el Teorema 5.1.1 (B) nos da que $C_{\phi_{k,\delta}} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ es continuo. Esto completa la prueba del primer caso.

Supongamos ahora que $c_0 = 0$ y $\varphi = 0$. En este caso $\phi(\mathbb{C}_0) \quad \mathbb{C}_0$ y, por la Obervación 5.1.3, dado $k \quad \mathbb{N}$

podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\varphi(\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}) \subset \mathbb{C}_\delta$. Con un razonamiento análogo al caso anterior tenemos que $\phi_{k,\delta}(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_0$ y nuevamente el Teorema 5.1.1 (B) nos da que $C_{\phi_{k,\delta}} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ es continuo, dando el resultado.
El caso restante ($c_0 = 0$ y $\varphi = 0$) se sigue de una cuenta directa. Notemos que en este caso $\phi(s) = c_0 s$ y, para cada k fijo, tenemos que

$$\|C_\phi(D)\|_{2,k} = \left\| \sum a_n n^{-c_0 s} \right\|_{2,k} = \left\| \sum \tfrac{a_n}{n^{c_0/k}} \left(n^{c_0}\right)^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2c_0/k}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2/k}} = \|D\|_{2,k}$$

para todo $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_+$. □

Recordemos que un operador $T : E \to F$ entre dos espacios localmente convexos es acotado si existe un entorno U del cero en E para el cual $T(U)$ es acotado (en F). Todo operador acotado entre espacios localmente convexos es continuo. Vamos a ver que el operador de composición es acotado exactamente cuando la imagen del semiplanos $\mathbb{C}_0$ por la función ϕ esté incluida en algún semiplano más chico que el dado por el Teorema 5.1.4.

Teorema 5.1.5. *Sea* ϕ*, definida como en* (5.1)*, de forma tal que el operador de composición* $C_\phi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ *es continuo. Entonces* C_ϕ *es un operador de composición acotado en* $\mathcal{H}_+$ *si y sólo si existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que*

1. $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$ *si* $c_0 \in \mathbb{N}$,
2. $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ *si* $c_0 = 0$.

Demostración. Comencemos por asumir que $c_0 \in \mathbb{N}$ y $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Tomemos $0 < \frac{1}{m} < \varepsilon$ y consideremos el siguiente entorno del 0 en $\mathcal{H}_+$,

$$U_m = \{D \in \mathcal{H}_+ : \|D_m\|_{\mathcal{H}_2} < 1\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos la función $\phi_{k,1/m}$ definida en (5.2) y notemos que, si $\operatorname{Re} s > 0$ tenemos

$$\operatorname{Re} \phi_{k,1/m}(s) = \operatorname{Re} \phi\left(s + \tfrac{1}{k}\right) - \frac{1}{m} > \varepsilon - \frac{1}{m} > 0\,.$$

En otras palabras, $\phi_{k,1/m}(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_0$ y, por el Teorema 5.1.1 (B), el operador de composición $C_{\phi_{k,1/m}}$ es continuo de $\mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H}_2$. Teniendo esto, si $D \in U_m$ (notemos que $D_m \in \mathcal{H}_2$ y recordemos (5.4)), entonces

$$\|C_\phi(D)\|_{2,k} = \|C_{\phi_{k,1/m}}(D_m)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|C_{\phi_{k,1/m}}\| \|D_m\|_{\mathcal{H}_2} = \|C_{\phi_{k,1/m}}\| \|D\|_{2,m} \leq \|C_{\phi_{k,1/m}}\|\,,$$

y C_ϕ es acotado. El caso $c_0 = 0$ y $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ sigue de la misma forma.
Supongamos ahora que ϕ genera un operador acotado. En ese caso existe $N \in \mathbb{N}$ (que podemos asumir $N \geq 2$, dado que la sucesión de seminormas $\|\cdot\|_{2,k}$ es creciente) tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $M_k > 0$ de modo que $\|C_\phi(D)\|_{2,k} \leq M_k \|D\|_{2,N}$ para todo $D \in \mathcal{H}_+$. Fijemos ahora $k \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $\phi_{k,1/N}$ definida en (5.2). Por el Teorema 5.1.2 (chequear (5.3)) define un operador de composición $\mathcal{H}_+ \to \mathcal{D}$, y ahora nuestro objetivo es mostrar que de hecho $C_{\phi_{k,1/N}} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ es continuo.
Si $P = \sum_{n=1}^{M} a_n n^{-s}$ es un polinomio de Dirichlet, podemos considerar $P_{-N} = \sum_{n=1}^{M} a_n n^{\frac{1}{N}} n^{-s}$. Nuevamente es un polinomio de Dirichlet, y como en (5.4) tenemos que $C_{\phi_{k,1/N}}(P) = (P_{-N} \circ \phi)_k$. Luego

$$\|C_{\phi_{k,1/N}}(P)\|_{\mathcal{H}_2} = \|P_{-N} \circ \phi\|_{2,k} \leq M_k \|P_{-N}\|_{2,N} = M_k \|P\|_{\mathcal{H}_2}\,.$$

Esto muestra que $C_{\phi_{k,1/N}}$ define un operador continuo sobre los polinomios de Dirichlet tomando valores en $\mathcal{H}_2$. Este operador se extiende por densidad a un operador continuo $G_{k,N} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$. Tenemos que ver ahora que este operador coincide con $C_{\phi_{k,1/N}}$. Tomemos $D \in \mathcal{H}_2$ y una sucesión de polinomios de

Dirichlet $(P_M)_M$ que convergen en H_2 a D. Luego $G_{k,N}(P_M) \to G_{k,N}(D)$. Dado que C_ϕ es continuo sabemos por el Teorema 5.1.4 que $\phi(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_0$. Luego, por la observación 5.1.3, $\varphi(\mathsf{C}_{1/k}) \quad \mathsf{C}_\sigma$. Veamos ahora que, si $\operatorname{Re} s > 1$, entonces

$$\operatorname{Re}\Big(\phi_{k,1/N}(s)\Big) = c_0 \operatorname{Re} s + \frac{c_0}{k} - \frac{1}{N} + \operatorname{Re}\Big(\varphi\big(s + \tfrac{1}{k}\big)\Big) > \frac{1}{2}\,. \tag{5.5}$$

El caso $c_0 = 0$ es claro. Por otro lado, si $c_0 = 0$ entonces $\varphi(\mathsf{C}_1) \quad \mathsf{C}_{1/2+\varepsilon}$ para cierto $\varepsilon > 0$ y por lo tanto tomando N suficientemente grande, tenemos la desigualdad.
Una vez que establecimos (5.5), la observación 2.1.11 implica que $P_M\big(\phi_{k,1/N}(s)\big) \to D\big(\phi_{k,1/N}(s)\big)$. Luego $G_{k,N}(D)$ y $D \circ \phi_{k,1/N}$ coinciden sobre C_1, y por ende tienen que ser iguales en todo el semiplano donde están definidas. Tenemos entonces que $G_{k,N} = C_{\phi_{k,1/N}}$, y el operador de composición es continuo de H_2 en H_2. Por lo tanto, por el Teorema 5.1.1 (B), $\phi_{k,1/N}(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_\sigma$, donde $\sigma = 0$ si $c_0 = 0$ y $\sigma = \frac{1}{2}$ si $c_0 = 0$. Esto nos da $\phi(\mathsf{C}_{\frac{1}{k}}) \quad \mathsf{C}_{\sigma+\frac{1}{N}}$ y, dado que k era arbitrario, esto prueba la afirmación. □

Vamos a pasar a estudiar ahora algunos casos en los que la imagen del operador es un espacio más chico que H_+, en el espíritu de [Bay02, Teoremas 12 y 13], donde se dan condiciones para asegurar que el espacio H_p es enviado a H_q para $1 \leq q \leq \infty$.

Nuestro primer resultado nos da condiciones suficientes para que el operador de composición, definido sobre H_+ de valores en H_p. La prueba sigue las mismas líneas que [Bay02, Teorema 12]

Teorema 5.1.6. *Sea* $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$*, con* $c_0 \geq 1$ *y* $\varphi \quad \mathsf{D}$ *de modo tal que* $\phi(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_\varepsilon$ *para algún* $\varepsilon > 0$*. Entonces* $C_\phi(\mathsf{H}_+) \quad \mathsf{H}_p$ *para todo* $1 \leq p < \infty$*.*

Demostración. Consideremos la función

$$\gamma(s) = \phi(s) - \varepsilon = c_0 s + \varphi(s) - \varepsilon = c_0 s + \psi(s)\,,$$

y notemos que $\psi = (c_1 - \varepsilon) + \sum_{n\geq 2} c_n n^{-s} \quad \mathsf{D}$. Por un lado tenemos que $\phi(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_\varepsilon$. Esto, por la observación 5.1.3, nos dice que $\varphi(\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}) \quad \mathsf{C}_{\varepsilon+\delta}$, lo cual junto con el hecho de que $c_0 \geq 1$, nos da $\phi(\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}) \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Entonces $\gamma(\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}) \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ y $\gamma(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_0$. Por [Bay02, Teorema 11], $C_\gamma : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_p$ es un operador de composición bien definido para todo $2 \leq p < \infty$. Fijemos algún $2 \leq p < \infty$. Dada $D = \sum a_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_+$ tenemos que $D_\varepsilon \quad \mathsf{H}_p$ y

$$C_\phi(D) = \sum a_n n^{-\phi(s)} = \sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-\phi(s)+\varepsilon} = \sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-\gamma(s)} = C_\gamma(D_\varepsilon) \quad \mathsf{H}_p\,.$$

Esto y el hecho de que $\mathsf{H}_2 \quad \mathsf{H}_p \quad \mathsf{H}_1$ para todo $1 \leq p \leq 2$ completa la prueba. □

Teorema 5.1.7. *Sea* $\phi : \mathsf{C}_0 \to \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ *como en* (5.1)*. Entonces*

1. $C_\phi(\mathsf{H}_+) \quad \mathsf{H}_\infty$ *si y sólo si* $\phi(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ *para algún* $\varepsilon > 0$*,*
2. $C_\phi(\mathsf{H}_+) \quad \mathsf{H}_+^\infty$ *si y sólo si* $\phi(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$*.*

Demostración. Antes que nada, si $C_\phi(\mathsf{H}_+) \quad \mathsf{H}_\infty$ entonces, en particular (recordar las inclusiones de los espacios de Hardy vistas en la Sección 2.1), $C_\phi(\mathsf{H}_p) \quad \mathsf{H}_\infty$ y [Bay02, Teorema 13] nos dice que $\phi(\mathsf{C}_0) \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$.
Supongamos ahora que existe $\varepsilon > 0$ de modo tal que $\operatorname{Re}(\phi(s)) > \frac{1}{2} + \varepsilon$ para todo $s \quad \mathsf{C}_0$. Tomemos una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ en H_+ y $s \quad \mathsf{C}_0$, entonces

$$|C_\phi(D)(s)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\phi(s)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

El último término es finito dado que $D \in \mathsf{H}_+$ (y obviamente no depende de s). Luego $C_\phi(D) \in \mathsf{H}_\infty$ completando la prueba de la primera afirmación.
Para la segunda afirmación asumamos que $\phi(\mathsf{C}_0) \subset \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$, y fijemos $\varepsilon > 0$. De la observación 5.1.3, sabemos que podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\phi(\mathsf{C}_\varepsilon) \subset \mathsf{C}_{\frac{1}{2}+\delta}$. Definamos la función

$$\Psi(s) = \phi(s+\varepsilon) = c_0 s + c_0\varepsilon + \varphi_\varepsilon(s)$$

y observemos que $\psi = c_0\varepsilon + \varphi_\varepsilon \in \mathsf{D}$. Claramente $\Psi(\mathsf{C}_0) = \phi(\mathsf{C}_\varepsilon) \subset \mathsf{C}_{\frac{1}{2}+\delta}$ y, por lo tanto el operador de composición C_Ψ manda H_+ en H_∞. Para $D \in \mathsf{H}_+$ tenemos que

$$\sup_{s \in \mathsf{C}_\varepsilon} |C_\phi(D)(s)| = \sup_{s \in \mathsf{C}_\varepsilon} |D(\phi(s))| = \sup_{s \in \mathsf{C}_0} |D(\phi(s+\varepsilon))| = \sup_{s \in \mathsf{C}_0} |C_\Psi(D)|.$$

Siendo esto último finito (ya que $C_\Psi(D) \in \mathsf{H}_\infty$) y dado que $\varepsilon > 0$ era arbitrario tenemos que $C_\phi(D) \in \mathsf{H}_+^\infty$.
La condición necesaria se sigue de la hipótesis. $\square$

Vamos a finalizar esta sección estudiando los límites verticales, un tema que resulta interesante en si mismo y que nos aporta una prueba alternativa (aunque más extensa) de la parte de necesidad del Teorema 5.1.4.

Comencemos por definir los límites verticales de las series de Dirichlet (ver [HLS97, Sección 2.3]). Consideremos para $\tau \in \mathsf{R}$ el operador unitario de traslaciones verticales $T_\tau : \mathsf{H}_2 \to \mathsf{H}_2$ dado por

$$T_\tau(D)(s) = D(s+i\tau).$$

Fijemos ahora $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathsf{H}_2$, para cada sucesión $(\tau_n)_n$ existe una subsucesión $(\tau_{n_k})_k$ tal que $T_{\tau_{n_k}}(D)$ converge uniformemente sobre compactos del semiplano $\mathsf{C}_{1/2}$ a una función $\widetilde{D}(s)$ (que depende de la sucesión). A cada una de estas funciones límites se las denomina límite vertical de D.

Por otra parte, recordemos que dado un caracter $\gamma : \mathsf{N} \to \mathsf{T}$ (función que satisface $\gamma(nm) = \gamma(n)\gamma(m)$ para todo n, m) y una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ notamos por D^γ a la serie de Dirichlet

$$D^\gamma = \sum a_n \gamma(n) n^{-s}.$$

Fijada una serie de Dirichlet D, la relación entre sus límites verticales y las series D^γ, para $\gamma \in \Xi$, viene dada a partir de [HLS97, Lema 2.4]. En este lema se prueba que estas últimas se corresponden exactamente con los límites verticales de D.

En nuestro caso nos vamos a interesar por los límites verticales de series de Dirichlet en H_+. Claramente, si D pertenece a D (o a H_+), entonces también lo hace D^γ. Ahora, si ϕ está definida como en (5.1), entonces vamos a escribir

$$\phi^\gamma(s) = c_0 s + \varphi^\gamma,$$

lo cual ya no se puede ver como un límite vertical. Nuestro primer paso es ver, siguiendo [GH99, Proposición 4.3] como se relaciona esta acción de los caracteres con la composición. En la [GH99, ecuación (4.2)] se prueba que si ϕ se representa como en (5.1), entonces

$$\left(n^{-\phi}\right)^\gamma(s) = \gamma(n)^{c_0} n^{-\phi^\gamma(s)} \tag{5.6}$$

Para $s \in \mathsf{C}_{\sigma_u(\varphi)}$.

Proposición 5.1.8. *Supongamos que* $\phi : \mathsf{C}_\theta \to \mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ *es una función holomorfa como en* (5.1)*, entonces para* $D \in \mathsf{H}_+$ *y* $\gamma \in \Xi$*, se tiene:*

$$(D \circ \phi)^\gamma(s) = D^{\gamma^{c_0}} \circ \phi^\gamma(s) \tag{5.7}$$

para todo $s \in \mathsf{C}_\theta$*.*

Demostración. Observando el lado derecho de (5.7), por [GH99, Proposición 4.1], tenemos que ϕ^γ manda el semiplano C_θ en $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$. Por otro lado, como $c_0 \quad \mathsf{N}_0$ entonces $\gamma^{c_0} \quad \Xi$. Esto y el hecho de que $D \quad \mathsf{H}_+$ nos dan que $D^{\gamma^{c_0}} \quad \mathsf{H}_+$ y, por consiguiente (ver (2.4)), converge absolutamente en $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$, y $D^{\gamma^{c_0}} \circ \phi^\gamma$ define una función holomorfa en C_θ.
Si miramos el lado izquierdo de la igualdad en (5.7), dado que $D = \sum a_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_+$, esta serie de Dirichlet converge absolutamente en $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ (ver nuevamente (2.4)). Luego

$$D \circ \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\phi(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-c_0 s - c_1} \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-c_k \log(n))^j}{j!} k^{-js} \right)$$

se puede reordenar como una serie de Dirichlet en cierto semiplano C_ν para ν suficientemente grande. Tenemos, pues, dos funciones $(D \circ \phi)^\gamma$ y $D^{\gamma^{c_0}} \circ \phi^\gamma(s)$, definidas en un cierto semiplano. La idea ahora es ver que estas dos funciones coinciden. Vamos a distinguir entre varios casos.
El primero es si φ es constante, en este caso $\phi = \phi_\gamma = c_0 s + c_1$, y

$$(D \circ \phi)^\gamma(s) = \left(\sum \big(a_n n^{-c_1}\big)(n^{c_0})^{-s} \right)^\gamma$$
$$= \sum \big(a_n n^{-c_1}\big)\gamma\big(n^{c_0}\big)(n^{c_0})^{-s} = \sum \gamma(n)^{c_0} a_n n^{-\phi^\gamma(s)} = D^{\gamma^{c_0}} \circ \phi^\gamma(s)$$

para todo $s \quad \mathsf{C}_\theta$, lo que prueba lo que queríamos.
Supongamos ahora que φ no es constante y fijemos $\theta \ > \sigma_u(\varphi) \geq \theta$. Por la Observación 5.1.3, podemos encontrar un $\varepsilon = \varepsilon(\theta\ ) > 0$ tal que $\varphi\big(\mathsf{C}_{\theta}\ \big) \quad \mathsf{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon-c_0\theta}$ y

$$\mathrm{Re}(\phi(s)) = c_0 \,\mathrm{Re}(s) + \mathrm{Re}(\varphi(s)) \geq c_0\theta + \frac{1}{2} + \varepsilon - c_0\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

para todo $s \quad \mathsf{C}_\theta$. Luego

$$n^{-\phi} \ _{\mathsf{C}_\theta} := \sup_{s \quad \mathsf{C}_\theta} |n^{-\phi(s)}| \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Para cada N sea $D^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n n^{-s}$ la N-ésima suma parcial de D. Fijemos k con $0 < \frac{1}{k} < \varepsilon$, entonces

$$\sum |a_n| \quad n^{-\phi} \ _{\mathsf{C}_\theta} \leq \sum |a_n| n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} = \sum \frac{|a_n|}{n^{\frac{1}{k}}} n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon+\frac{1}{k}} \leq \Big(\sum \frac{|a_n|^2}{n^{\frac{2}{k}}} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum \frac{1}{n^{1+2\varepsilon-\frac{2}{k}}} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

y estas dos series de Dirichlet son convergentes. Esto implica que $D^{(N)} \circ \phi = \sum_{n=1}^N a_n n^{-\phi}$ converge uniformemente en C_θ a $D \circ \phi$. Usando nuevamente (5.6) tenemos que

$$(D^{(N)} \circ \phi)^\gamma(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n \gamma(n)^{c_0} n^{-\phi^\gamma(s)} = \Big((D^{(N)})^{\gamma^{c_0}} \circ \phi^\gamma \Big)(s)$$

en C_θ . Dado que, por definición, tomar límites verticales es continuo respecto a la convergencia uniforme, esto nos da

$$(D \circ \phi)^\gamma = D^{\gamma^{c_0}} \circ \phi^\gamma$$

en C_θ . Por lo tanto, estas son dos funciones holomorfas en C_θ que coinciden en un semiplano más chico. Finalmente el principio de identidad nos da la conclusión. □

Antes de ver la prueba alternativa al Teorema 5.1.4, necesitamos un par de resultados más. Un resultado de mucha importancia en la teoría (ver [HLS97, Teorema 4.1]) es que si $D \quad \mathsf{H}_2$ entonces para casi todo caracter $\gamma \quad \Xi$ la serie de Dirichlet D^γ se extiende de forma holomorfa al semiplano C_0 (recordar que el semiplano de convergencia natural para las series en H_2 es $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$). Necesitamos un resultado análogo para el espacio H_+.

Proposición 5.1.9. *Sea $D \in \mathbb{H}_+$, entonces D^γ se extiende a una función holomorfa en $\mathbb{C}_0$ para casi todo $\gamma \in \Xi$*

Demostración. Tomemos $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathbb{H}_+$ y observemos que, para cada k fijo, dado que $D_k \in \mathbb{H}_2$, el [HLS97, Teorema 4.1] implica que $(D_k)^\gamma$ tiene una extensión holomorfa (la cual notaremos por $f_{k,\gamma}$) a $\mathbb{C}_0$. Definamos el conjunto

$$A_k := \left\{\gamma \in \Xi \colon (D_k)^\gamma \text{ se extiende de forma holomorfa a } \mathbb{C}_0\right\}$$

y $A = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$ (notemos que $\Xi \setminus A$ tiene medida nula en Ξ). Fijemos ahora $\gamma \in A$ y $k \in \mathbb{N}$ y observemos que, para $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{k}}$ tenemos que

$$D^\gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma(n) \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{k}}} \gamma(n) \frac{1}{n^{s-\frac{1}{k}}} = (D_k)^\gamma\big(s - \tfrac{1}{k}\big) = f_{k,\gamma}\big(s - \tfrac{1}{k}\big)\,.$$

Definamos ahora $g_{k,\gamma} : \mathbb{C}_{\frac{1}{k}} \to \mathbb{C}$ por $g_{k,\gamma}(s) = f_{k,\gamma}\big(s - \frac{1}{k}\big)$, esta función es claramente holomorfa y satisface que $g_{k,\gamma}(s) = D^\gamma(s)$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{k}}$. Notemos ahora que, si $k < l$ entonces $g_{k,\gamma}$ y $g_{l,\gamma}$ coinciden sobre $\mathbb{C}_{\frac{1}{k}}$, y luego podemos definir $g_\gamma : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}$ por $g_\gamma(s) = g_{k,\gamma}(s)$ si $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{k}}$. Esta es en definitiva una función holomorfa que extiende a D^γ al semiplano $\mathbb{C}_0$. □

Observación 5.1.10. El semiplano $\mathbb{C}_0$ es el semiplano más grande para el cual los límites verticales de las series de Dirichlet en $\mathbb{H}_+$ convergen. En [GH99, Página 325], Gordon y Hedenmalm prueban que la serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ dada por $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ si n es primo y 0 en otro caso, que claramente pertenece a $\mathbb{H}_+$, satisface que su semiplano de convergencia más grande es $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y que para casi todo caracter $\gamma \in \Xi$ el semiplano de convergencia más grande de D^γ es $\mathbb{C}_0$.

Aunque la demostración de la siguiente proposición se sigue palabra por palabra de [GH99, Proposición 5.1], la hacemos por completitud

Proposición 5.1.11. *Sea $\phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ una función holomorfa para la cual el operador de composición $C_\phi : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_+$ está bien definido y es continuo. Entonces casi toda (con respecto a γ) función ϕ^γ tiene una extensión holomorfa a $\mathbb{C}_0$.*

Demostración. Si $C_\phi : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_+$ es continuo, por el Teorema 5.1.2, sabemos que $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ con $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in \mathcal{D}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n^{-s} \in \mathbb{H}_+$ y por lo tanto $n^{-\phi(s)} \in \mathbb{H}_+$. De donde tenemos que $(n^{-\phi})^\gamma(s)$ es holomorfa en $\mathbb{C}_0$ para casi todo $\gamma \in \Xi$. Por (5.6) se tiene

$$n^{-\phi^\gamma(s)} = \gamma(n)^{-c_0}(n^{-\phi})^\gamma(s) \tag{5.8}$$

en el semiplano de convegencia uniforme de la serie de Dirichlet φ. Por lo tanto, el lado derecho de (5.8) nos da una extensión holomorfa de la función $n^{-\phi^\gamma(s)}$ al semiplano $\mathbb{C}_0$ para casi todo caracter γ. Luego, dado que la unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula, para casi todo $\gamma \in \Xi$ las funciones $n^{-\phi^\gamma(s)}$ son holomorfas en $\mathbb{C}_0$ simultáneamente para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos un caracter γ con esta propiedad y veamos que la función ϕ^γ es holomorfa en $\mathbb{C}_0$. Para esto, notemos que las únicas singularidades no evitables posibles de ϕ^γ en $\mathbb{C}_0$ tienen que ser ceros de la función $n^{-\phi^\gamma(s)} = \gamma(n)^{-c_0}(n^{-\phi})^\gamma(s)$. Sea $s_0 \in \mathbb{C}_0$ y notemos por $m_n(s_0, \gamma)$ a la multiplicidad de s_0 como cero de la extensión holomorfa de $n^{-\phi^\gamma}$ a $\mathbb{C}_0$. Derivando en el semiplano de convergencia absoluta de φ se tiene que

$$\frac{\big(n^{-\phi^\gamma(s)}\big)}{n^{-\phi^\gamma(s)}} = -(\phi^\gamma)\,(s)\log(n). \tag{5.9}$$

El lado izquierdo de (5.9) es una función meromorfa en C_0 con a lo sumo polos simples, por lo que la igualdad (5.9) nos da una extensión meromorfa de (ϕ^γ) a C_0. Calculemos el residuo de (ϕ^γ) en s_0, esto es el límite $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)(\phi^\gamma)\,(s)$, que por comodidad notaremos $\varrho(s_0,\gamma)$. Observemos primero que

$$\lim_{s\to s_0}(s-s_0)\frac{\left(n^{-\phi^\gamma(s)}\right)}{n^{-\phi^\gamma(s)}}=m_n(s_0,\gamma),$$

es decir un entero para cada n N, y por (5.9) obtenemos que $\varrho(s_0,\gamma)\log(n)$ es un entero para todo n N. Por lo tanto tenemos que $\varrho(s_0,\gamma)=0$, siendo entonces $m_n(s_0,\gamma)=0$. Concluimos entonces que la función $n^{-\phi^\gamma(s)}$ no tiene ceros en C_0 y en particular la función ϕ^γ no tiene singularidades en C_0 como queríamos demostrar. □

Ahora sí podemos ver la prueba alternativa de la parte de la necesidad del Teorema 5.1.4.

Prueba alternativa de la parte de la necesidad del Teorema 5.1.4. La prueba sigue esencialmente las mismas líneas que en la parte de necesidad del Teorema 5.1.1 (B). Asumamos que $\phi:\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}\to\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ genera un operador de composición continuo $C_\phi:\mathsf{H}_+\to\mathsf{H}_+$. Entonces, por la Proposición 5.1.8, para todo D H_+ y γ Ξ tenemos que

$$(D\circ\phi)^\gamma=D^{\gamma^{c_0}}\circ\phi^\gamma \tag{5.10}$$

en $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$. Si podemos encontrar un γ Ξ para el cual ϕ^γ se extienda de forma holomorfa a C_0 satisfaciendo

$$\phi^\gamma(\mathsf{C}_0)\quad\mathsf{C}_0\ \text{ si }\ c_0\quad\mathsf{N}\ \text{ ó }\ \phi^\gamma(\mathsf{C}_0)\quad\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}\ \text{ si }c_0=0\,, \tag{5.11}$$

entonces [GH99, Proposición 4.1] prueba que cada límite vertical de ϕ^γ tiene la misma propiedad, en particular $\phi=\left(\phi^\gamma\right)^{\gamma^{-1}}$, probando nuestra afirmación.
Por hipótesis $D\circ\phi$ H_+ y, por la Proposición 5.1.9, $(D\circ\phi)^\gamma$ se extiende a una función holomorfa en C_0 para casi todo γ. Por otro lado, por la Proposición 5.1.11, ϕ^γ se extiende a una función holomorfa sobre C_0 para casi todo γ.
Supongamos que $c_0=1,2,\ldots$. Dado que $\gamma\to\gamma^{c_0}$ preserva la medida, la función $D^{\gamma^{c_0}}$ se extiende de forma holomorfa a C_0 para casi todo γ Ξ. Luego, existe un conjunto de medida total en Ξ para el cual D^γ, $(D\circ\phi)^\gamma$ y ϕ^γ pueden extenderse de forma holomorfa a C_0 y por consiguiente (5.10) vale sobre C_0. Fijemos un tal γ. Dado que ϕ^γ es holomorfa y no constante en C_0, entonces $\phi^\gamma(\mathsf{C}_0)$ es un abierto conexo de C. Consideremos Ω el subconjunto de todos los s C_0 tales que $\phi(s)$ C_0, es decir

$$\Omega=\left(\phi^\gamma\right)^{-1}(\mathsf{C}_0)\cap\mathsf{C}_0,$$

el cual resulta abierto y localmente conexo. Además, dado que [GH99, Proposición 4.1] garantiza que $\phi^\gamma(\mathsf{C}_{\frac{1}{2}})$ $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$, se tiene la inclusión $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ Ω. Definamos Ω_0 a la componente conexa de Ω que contiene a $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$. Dado que en la igualdad (5.10) ambas funciones son holomorfas y coinciden en $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$, entonces la misma igualdad se extiende a Ω_0 (notar que Ω_0 es abierta). Si $\Omega=\mathsf{C}_0$, en particular $\Omega_0=\mathsf{C}_0$ y luego podemos tomar un s_0 $\partial\Omega_0$ (en particular en $\partial\Omega$) tal que s_0 C_0. Observemos que $\phi^\gamma(s_0)$ $\partial\mathsf{C}_0$, dado que por continuidad $\phi^\gamma(s_0)$ $\overline{\mathsf{C}_0}$ pero como s_0 Ω entonces $\phi^\gamma(s_0)$ C_0. Además, desplazando ligeramente el punto s_0 tenemos que $(\phi^\gamma)\,(s_0)=0$, y por lo tanto existe $r>0$ tal que $\phi^\gamma:B(s_0,r)\to\mathsf{C}$ es inyectiva y $(\phi^\gamma)^{-1}:\phi^\gamma(B(s_0,r))\to B(s_0,r)$ holomorfa. Aplicando en (5.10) $(\phi^\gamma)^{-1}$, obtenemos que $D^{\gamma^{c_0}}=(D\circ\phi)^\gamma\circ(\phi^\gamma)^{-1}$, con lo cual la serie de Dirichlet $D^{\gamma^{c_0}}$ converge en algunos puntos de parte real negativa (notar que $\phi^\gamma(B(s_0,r))$ es un abierto de C con $\phi^\gamma(s_0)$ en su interior). Concluimos entonces que si ϕ^γ no manda C_0 en C_0 para γ entonces $D^{\gamma^{c_0}}$ converge en un semiplano mayor a C_0. Tenemos que probar entonces que existe una serie D H_+ tal que para casi todo γ Ξ la serie D^γ no converge en un semiplano mayor a C_0 (o equivalentemente $D^{\gamma^{C_0}}$). La observación 5.1.10 concluye la prueba.

Si $c_0 = 0$ entonces solo podemos asegurar que $D^{\gamma^{c_0}} = D$ define una función holomorfa sobre $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ y (5.10) se reduce a

$$(D \circ \phi)^{\gamma} = D \circ \phi^{\gamma}. \tag{5.12}$$

Seguimos el mismo argumento que en el caso anterior. Sea $\gamma \quad \Xi$ es tal que $(D \circ \phi)^{\gamma}$ y ϕ^{γ} se extienden de forma holomorfa a C_0, queremos ver que ϕ^{γ} manda C_0 en $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ para aplicar [GH99, Proposición 4.1] y de esta forma probar el resultado. Considerando

$$\Omega = (\phi^{\gamma})^{-1} (\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}) \cap \mathsf{C}_0,$$

nuevamente este conjunto contiene al semiplano $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ y definimos Ω_0 como la componente conexa de Ω que contiene a $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$. Por continuidad, la igualdad (5.12) se extiende a Ω_0. Si Ω no es todo C_0 tampoco lo es Ω_0 y por lo tanto podemos encontrar un $s_0 \quad \partial\Omega_0 \cap \mathsf{C}_0$. Este s_0 verifica que $\phi^{\gamma}(s_0) \quad \partial\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ y $(\phi^{\gamma})\ (s_0) = 0$. Por lo tanto, existe $r > 0$ tal que $\phi^{\gamma} : B(s_0, r) \to \mathsf{C}$ es inyectiva y $(\phi^{\gamma})^{-1} : \phi^{\gamma}(B(s_0, r)) \to B(s_0, r)$ holomorfa. Aplicando en (5.12) $(\phi^{\gamma})^{-1}$, obtenemos que $D = (D \circ \phi)^{\gamma} \circ (\phi^{\gamma})^{-1}$, con lo cual la serie de Dirichlet D converge en algunos puntos de parte real menor a $1/2$. Concluimos entonces que si ϕ^{γ} no manda C_0 en $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$ para γ entonces D converge en un semiplano mayor a $\mathsf{C}_{\frac{1}{2}}$. Tenemos que probar entonces que existe una serie $D \quad \mathsf{H}_+$ tal que no converge en un semiplano mayor a C_0. Nuevamente la observación 5.1.10 termina la demostración.

□

5.2. Operadores de superposición sobre H_+

Como hemos mencionado, los siguientes operadores que nos proponemos estudiar son los operadores de superposición. La definición de estos es similar a los operadores de composición pero desde un punto de vista diferente. Como idea general, si $\varphi : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ es una función f pertenece a cierto espacio de funciones (digamos E) definida en un subconjunto de C con valores complejos, podemos considerar $S_{\varphi}(f) = \varphi \circ f$. De esta forma podemos definir un operador S_{φ} (llamado operador de superposición) sobre E. Nuestro interés es determinar condiciones sobre la función φ para que el operador de superposición esté bien definido entre espacios de series de Dirichlet. Esto fue estudiado por primera vez en [BCMG$^+$21], donde prueban que una función φ define un operador de superposición $S_{\varphi} : \mathsf{H}_{\infty} \to \mathsf{H}_{\infty}$ si y sólo si φ es entera, y $S_{\varphi} : \mathsf{H}_p \to \mathsf{H}_q$ está bien definida si y sólo si φ es un polinomio de grado menor o igual que $\frac{p}{q}$. Nosotros vamos a considerar operadores de superposición definidos sobre H_+^{∞} o H_+. Para poder caracterizar las funciones que definen estos operadores de superposición vamos a necesitar primero el siguiente lema.

Lema 5.2.1. *Sea* $\varphi : \mathsf{C} \setminus \{0\} \to \mathsf{C}$ *tal que* $f_R(s) = \varphi\left(\frac{R}{2^s}\right) \quad \mathsf{D}$ *para todo* $R > 0$ *y* $\sup_R \sigma_c(f_R) = \sigma < \infty$. *Entonces* φ *se extiende a una función entera.*

Demostración. Fijemos $R > 0$, entonces la función $s \to \varphi\left(\frac{R}{2^s}\right)$ define una función holomorfa sobre C_{σ}. Luego, tomando dos ramas diferentes del logaritmo complejo tenemos que φ es holomorfa sobre $B(0, R/2^{\sigma}) \setminus \{0\}$. Dado que $R > 0$ era arbitrario, tenemos que φ es holomorfa sobre $\mathsf{C} \setminus \{0\}$. Ahora, la serie de Dirichlet definida sobre C_{σ} como $s \to \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right)$ es acotada en algún semiplano C_{θ} y, luego,

$$\sup_{|z| \leq \frac{1}{2^{\theta}}} |\varphi(z)| = \sup_{s \quad \mathsf{C}_{\theta}} \left|\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right)\right| < \infty .$$

Por lo tanto 0 es una singularidad aislada de una función acotada en $B(0, \frac{1}{2^{\theta}})$. Así φ puede extenderse de forma holomorfa a 0 completando entonces la prueba. □

Este lema nos permite probar que las funciones que generan operadores de superposición en H_+^{∞} son exactamente las funciones enteras. En el caso de H_+ tenemos como condición necesaria el hecho de ser entera, pero como veremos más adelante no toda función entera genera un operador de superposición en este espacio.

Proposición 5.2.2. *Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función. Entonces,*

1. *$S_\varphi : \mathcal{H}_+^\infty \to \mathcal{H}_+^\infty$ está bien definido si y sólo si φ es entera,*
2. *si $S_\varphi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ está bien definido, entonces φ es entera.*

Demostración. Primero notemos que, en ambos casos, si S_φ está bien definido entonces φ es holomorfa en el origen. De hecho, si $D(s) := -1 + 2^{-s}$ entonces $\varphi \circ D$ es holomorfa en $\mathbb{C}_{1/2}$ y luego $\varphi(s) = \varphi \circ D \circ D^{-1}$ es holomorfa en $s = 0$. El hecho de que φ es entera se sigue entonces del Lema 5.2.1.
Solo falta mostrar que si φ es entera, entonces $S_\varphi : \mathcal{H}_+^\infty \to \mathcal{H}_+^\infty$ está bien definido. Tomemos $D \in \mathcal{H}_+^\infty$ y fijemos $k \in \mathbb{N}$. Luego

$$\sup_{\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{k}} |\varphi \circ D(s)| = \sup_{\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{k}} |\varphi(D)(s)| = \sup_{\mathrm{Re}(s) > 0} \left|\varphi\Big(D\big(s + \tfrac{1}{k}\big)\Big)\right| = \sup_{\mathrm{Re}(s) > 0} |\varphi(D_k(s))|,$$

y este supremos es finito porque $D_k \in \mathcal{H}_\infty$ y por lo tanto el operador de superposición está bien definido de $\mathcal{H}_\infty$ a $\mathcal{H}_\infty$ (ya que φ es entera). Dado que esto vale para cada k concluimos que $\varphi \circ D \in \mathcal{H}_+^\infty$. □

Vemos entonces que el comportamiento de los operadores de superposición en los espacios $\mathcal{H}_\infty$ y $\mathcal{H}_+^\infty$ es esencialmente el mismo. Sin embargo, este no es el caso cuando miramos los operadores de superposición definidos sobre $\mathcal{H}_+$ (cuando lo comparamos con el comportamiento en $\mathcal{H}_p$). En este caso, todo polinomio (de cualquier grado) define un operador de superposición. Esto es una simple consecuencia, a diferencia de los espacios $\mathcal{H}_p$ con $1 \le p < \infty$, de que el espacio $\mathcal{H}_+$ es un álgebra, resultado que vimos en la Proposición 2.1.12.

Corolario 5.2.3. *Si $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un polinomio, entonces el operador de superposición $S_\varphi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ está bien definido.*

Sabiendo que los polinomios generan operadores de superposición, nos vamos a enfocar ahora en determinar si son o no estas las únicas funciones enteras que generan operadores de superposición sobre $\mathcal{H}_+$.

Teorema 5.2.4. *Hay funciones enteras que no son polinomios y que definen operadores de superposición sobre $\mathcal{H}_+$, pero no toda función entera lo hace.*

Hay entonces dos preguntas a responder y vamos a trabajar con cada una en forma separada. El punto clave de la primer pregunta (es decir sobre la existencia de funciones enteras que definan operadores de superposición pero que no sean polinomios) es tener un buen control de las seminormas de las potencias de una serie de Dirichlet dada. Para ello, recordemos que si consideramos la función $\pi(x) = \sum_{\mathfrak{p} \le x} 1$ entonces, por el Teorema de los Números Primos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} = 1\,. \tag{5.13}$$

Lema 5.2.5. *Dado $m \in \mathbb{N}$ existen $C_m, b_m > 1$ tales que*

$$\|D^k\|_{2,m} \le C_m e^{b_m k^{2m+1}} \|D\|_{2,4m}^k$$

para cada $D \in \mathcal{H}_+$ y todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $m, k \in \mathbb{N}$ y elijamos $j_{k,m}$ el menor número natural tal que $\left(\frac{k}{2}\right)^{2m} \le \mathfrak{p}_{j_{k,m}}$ (recordemos que $\mathfrak{p}_{j_{k,m}}$ es el $j_{k,m}$-ésimo número primo). Observemos que $\mathfrak{p}_{j_{k,m}}^{\frac{-1}{4m}} \le \sqrt{\frac{2}{k}}$. Entonces, para todo polinomio de Dirichlet P tenemos que (recordar la prueba de la Proposición 2.1.2)

$$\begin{aligned}\|P^k\|_{2,m} &\leq C_m \|P^k\|_{1,2m} = C_m \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |P_{2m}(it)|^k \mathrm{d}t \\ &= C_m\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2T}}\left(\int_{-T}^{T} |P_{2m}(it)|^k \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{k}}\right)^k = C_m \|P_{2m}\|_k^k = C_m \|P\|_{k,2m}^k \\ &\leq C_m \left(\prod_{j=1}^{j_{k,m}} \frac{1}{1-\mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{4m}}}\right)^k \|P\|_{2,4m}^k .\end{aligned}$$

Tomemos ahora $D \in \mathcal{H}_+$ y elijamos una sucesión de polinomios de Dirichlet $(P_i)_i$ convergente a D. Luego, para cada k fijo, la sucesión $(P_i^k)_i$ converge a D^k (ver de nuevo la prueba de la Proposición 2.1.12) y, por lo tanto,

$$\|D^k\|_{2,m} = \lim_i \|P_i^k\|_{2,m} \leq \lim_i C_m \left(\prod_{j=1}^{j_{k,m}} \frac{1}{1-\mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{4m}}}\right)^k \|P_i\|_{2,4m}^k = C_m \left(\prod_{j=1}^{j_{k,m}} \frac{1}{1-\mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{4m}}}\right)^k \|D\|_{2,4m}^k$$

para todo m. Como una consecuencia directa de (5.13) podemos encontrar $A_m > 1$ tal que $\pi\left(\left(\frac{k}{2}\right)^{2m}\right) \leq A_m k^{2m}$ para todo k. Tomando $c_m = -\log(2^{\frac{1}{4m}} - 1) + \frac{1}{4m}\log(2)$, tenemos que $\frac{1}{1-x} \leq e^{x+c_m}$ para todo $x \in \left[0, \frac{1}{2^{\frac{1}{4m}}}\right]$. Luego, definiendo $b_m = c_m + A_m$ nos queda

$$\prod_{j=1}^{j_{k,m}} \frac{1}{1-\mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{4m}}} \leq \prod_{j=1}^{j_{k,m}} e^{\mathfrak{p}_j^{\frac{-1}{4m}}+c_m} = e^{c_m j_{k,m}} e^{\sum_{j=1}^{j_{k,m}} \frac{1}{\mathfrak{p}_j^{\frac{1}{4m}}}} \leq e^{c_m j_{k,m}} e^{A_m \frac{j_{k,m}^{1-\frac{1}{4m}}}{\log(j_{k,m})}} \leq e^{b_m k^{2m}} e^{A_m k^{2m}} = e^{k^{2m} b_m}. \quad \square$$

Ahora ya podemos responder la primera pregunta del Teorema 5.2.4, dando un ejemplo de una función entera que no es un polinomio y que genera un operador de superposición bien definido sobre $\mathcal{H}_+$.

Ejemplo 5.2.6. La función entera dada por $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k^k}} z^k$ define un operador de superposición sobre $\mathcal{H}_+$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $D \in \mathcal{H}_+$. Entonces tenemos que

$$\Big\| \sum_{k=N}^{M} \frac{1}{e^{k^k}} D^k \Big\|_{2,m} \leq \sum_{k=N}^{M} \frac{1}{e^{k^k}} \|D^k\|_{2,m} \leq C_m \sum_{k=N}^{M} \frac{\left(e^{b_m k^{2m}} \|D\|_{2,4m}\right)^k}{e^{k^k}} = C_m \sum_{k=N}^{M} \left(\frac{e^{b_m k^{2m}} \|D\|_{2,4m}}{e^{k^{k-1}}}\right)^k$$

para todo $M > N$. Dado que $\frac{e^{b_m k^{2m}} \|D\|_{2,4m}}{e^{k^{k-1}}} < 1$ para k suficientemente grande, el último término tiende a 0 cuando M y N tienden a ∞. Luego $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{e^{k^k}} D^k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_+$ y por lo tanto converge a cierta $\widetilde{D} \in \mathcal{H}_+$. En particular esto implica que $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{e^{k^k}} D^k(s) \to \widetilde{D}(s)$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$. Por otro lado, si $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$, entonces $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{e^{k^k}} D^k(s) \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k^k}} D^k(s) = \varphi(D)(s)$. Esto nos muestra que $\varphi(D) \in \mathcal{H}_+$ y S_φ es un operador de superposición bien definido sobre $\mathcal{H}_+$.

Para responder a la segunda parte del problema (esto es, si toda función entera φ define un operador de superposición $S_\varphi : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$) vamos a cambiar un poco la perspectiva. Sea $H(\mathbb{C})$ el espacio de las

funciones enteras con la topología dada por la convergencia uniforme sobre compactos. Dada una serie de Dirichlet $D \in \mathcal{H}_+$, decimos que D es de composición en $\mathcal{H}_+$ si $\varphi \circ D$ pertenece a $\mathcal{H}_+$, para toda función entera φ (en otras palabras, el operador $C_D : H(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_+$ dado por $\varphi \to \varphi \circ D$ está bien definido). Es claro que toda función entera define un operador de superposición si y sólo si toda serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_+$ es de composición. Por lo tanto, nuestro objetivo para responder (por la negativa) la segunda pregunta en el Teorema 5.2.4 es encontrar una serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_+$ que no sea de composición.
Supongamos que D es tal que el operador C_D está bien definido y veamos que además también es continuo. Tomemos $(\varphi_m) \subset H(\mathbb{C})$ una sucesión convergente a cierta $\varphi \in H(\mathbb{C})$ y asumamos que $C_D(\varphi_m) = \varphi_m \circ D$ converge (en $\mathcal{H}_+$) a $\widetilde{D}$. Por un lado, dado que $\varphi_m \to \varphi$ en $H(\mathbb{C})$ entonces $\varphi_m(D(s)) \to \varphi(D(s))$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$. Por otro lado $\varphi_m \circ D \to \widetilde{D}$ en $\mathcal{H}_+$ y en particular

$$\varphi_m \circ D(s) \to \widetilde{D}(s) \text{ para todo } s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}.$$

Luego $\varphi \circ D$ coincide con $\widetilde{D}$ en el semiplano $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$, con lo cual tiene que ser la misma serie de Dirichlet. El Teorema del gráfico cerrado nos dice que no solo C_D está bien definido, sino que además es continuo.

Vamos a dar ahora una condición que resulta necesaria y suficiente para que una serie de Dirichlet sea de composición, lo que nos ayudará a encontrar una que no lo sea.

Proposición 5.2.7. *Sea $D \in \mathcal{H}_+$, entonces D es de composición en $\mathcal{H}_+$ si y sólo si para todo $m \in \mathbb{N}$ existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|D^k\|_{2,m}^{\frac{1}{k}} \leq C\,, \tag{5.14}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que D es de composición en $\mathcal{H}_+$ entonces el operador $C_D : H(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_+$ es continuo. Dado $m \in \mathbb{N}$, existen $A > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ tales que $\|C_D(\varphi)\|_{2,m} \leq A \sup_{|z|\leq j} |\varphi(z)|$. Tomando $\varphi(z) = z^k$ tenemos que

$$\|D^k\|_{2,m} \leq A \sup_{|z|\leq j} |z|^k \leq Aj^k \leq C^k\,.$$

para $C > 0$ suficientemente grande. Esto nos da una de las implicaciones.
Para la otra implicación, tomemos $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ y notemos que si se cumple (5.14) entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, \|D^k\|_{2,m} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| C^k < \infty$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. De esto se deduce que la serie converge y el operador dado por $C_D(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ está bien definido. $\square$

Con esto podemos dar un ejemplo de una serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_+$ que no es de composición, respondiendo la segunda pregunta del Teorema 5.2.4. Para el ejemplo vamos a utilizar la primer función de Chebishev definida por $\vartheta(x) = \sum\limits_{\mathfrak{p} \leq x} \log(\mathfrak{p})$ y que satisface

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1\,. \tag{5.15}$$

Esto es equivalente al Teorema de los números primos, y una estimación precisa se puede encontrar en [RS62, Teorema 4].

Ejemplo 5.2.8. Consideremos $D = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{-s}$, la cual obviamente pertenece a $\mathcal{H}_+$, y veamos que no es una serie de Dirichlet de composición. Observemos primero que $D(s) = \zeta(s + \frac{1}{2})$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ (con ζ la función zeta de Riemann) y que, entonces,

$$D^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{\sqrt{n}} n^{-s},$$

donde los $d_k(n)$ son los coeficientes de ζ^k, es decir $d_k(n) = \sum_{n_1 \dots n_k = n} 1$.
Fijemos $m \in \mathbb{N}$, definamos $\sigma = \frac{1}{2m}$ y consideremos $0 < \delta < 1$ tal que $\omega = \frac{2(1-\delta)}{1+\delta} - (1+\sigma)(1+\delta) > 0$ (notemos que δ existe porque la expresión anterior es positiva para $\delta = 0$).
Por (5.13) y (5.15) podemos elegir x_0 tal que

$$(1-\delta)\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq (1+\delta)\frac{x}{\log x} \;\text{ y }\; (1-\delta)x \leq \vartheta(x) \leq (1+\delta)x \tag{5.16}$$

para todo $x \geq x_0$. Tomemos ahora $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq x_0$ y, para cada $k \geq k_0$ definamos $x_k = k^{1+\delta}$ y $n_k = \prod_{\mathfrak{p} \leq x_k} \mathfrak{p} = e^{\vartheta(x_k)}$. Observemos que en este caso $d_k(n_k) = k^{\pi(x_k)}$. Luego, teniendo en cuenta (5.16)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d_k^2(n_k)}{n_k^{1+\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{k^{2\pi(x_k)}}{e^{\vartheta(x_k)(1+\frac{1}{2m})}}\right)^{\frac{1}{k}} &= \exp\left(\tfrac{1}{k}\Big(2\pi(x_k)\log(k) - (1+\sigma)\vartheta(x_k)\Big)\right) \\ &> \exp\left(\tfrac{k^{1+\delta}}{k}\Big(\tfrac{2(1-\delta)}{1+\delta} - (1+\sigma)(1+\delta)\Big)\right) = e^{k^\delta \omega}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|D^k\|_{2,4m}^{\frac{1}{k}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{1+\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{1}{2k}} \geq \left(\frac{d_k^2(n_k)}{n_k^{1+\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{1}{2k}} > e^{k^\delta \frac{\omega}{2}}.$$

La Proposición 5.2.7 nos dice entonces que D no puede ser una serie de Dirichlet de composición en $\mathcal{H}_+$.

El último resultado que vamos a ver para los operadores de superposición nos muestra que, en cierto sentido, si queremos que una función φ defina un operador de superposición, entonces sus coeficientes tienen que tender muy rápido a 0 (recordemos también el ejemplo 5.2.6).
Notemos que si S_φ es un operador de superposición, entonces $S_\varphi(\zeta(s+\frac{1}{2})) \in \mathcal{H}_+$, y en particular $\varphi\left(\zeta(s+\frac{1}{2}+\varepsilon)\right) \in \mathcal{H}_2$ para todo $\varepsilon > 0$. Reordenando los términos, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k(n)\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} n^{-s} \in \mathcal{H}_2.$$

Lo que vamos a hacer ahora es mostrar que hay funciones para las cuales esto no se verifica.

Proposición 5.2.9. *Para todo* $0 < C < 2$ *existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k(n)}{e^{k^C}}\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} n^{-s}$$

no pertenece a $\mathcal{H}_2$*. En particular la función* $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k^C}} z^k$ *no define un operador de superposición.*

Demostración. Considerando como antes $n := \prod_{\mathfrak{p} \leq x} \mathfrak{p}$ con x suficientemente grande obtenemos

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k(n)}{e^{k^C}}\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \geq \frac{d_k(n)}{e^{k^C}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = \exp\left(\log(k)\pi(x) - k^C - \vartheta(x)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right). \tag{5.17}$$

Para un $\delta > 0$ dado, este último exponente está acotado por abajo por

$$x\frac{\log k}{\log x}(1-\delta) - k^C - x\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(1+\delta)$$

siempre que (5.16) valga.

Tomemos C' tal que $C < C' < 2$, $x_k := k^{C'}$ y $\delta, \varepsilon > 0$ lo suficientemente chico de forma tal que

$$\omega := \frac{1-\delta}{C'} - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(1+\delta) > 0.$$

Entonces (5.17) se convierte en

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k(n)}{e^{k^C}}\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \geq \exp\left(\omega k^{C'} - k^C\right) \tag{5.18}$$

que tiende a $+\infty$ cuando $k \to \infty$. □

El mismo argumento nos muestra que si $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ es tal que existe un $m > 0$ con $a_k e^{k^C} > m$ para k suficientemente grande y $1 < C < 2$, entonces no puede definir un operador de superposición. En particular, la función exponencial $\exp(z) = \sum z^k/k!$ no define un operador de superposición, dado que $\log(k!) = k\log k + O(k)$.

5.3. Operadores de diferenciación e integración sobre $\mathcal{H}_+$

Vamos a concluir este capítulo estudiando el operador clásico de diferenciación (el cual dada una función holomorfa devuelve su derivada) y su inversa, es decir el operador de integración. Bonet estudia estos dos operadores, definidos en $\mathcal{H}_+^{\infty}$, en [Bon20] sobre por Bonet. La situación en el espacio $\mathcal{H}_+$ es muy cercana y los argumentos similares, por lo cual haremos un bosquejo de estos, marcando solamente los pasos en los que difieren.

Dada una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ esta converge y define una función holomorfa en el semiplano $\mathbb{C}_{\sigma_c(D)}$. Entonces su derivada es una función holomorfa en el mismo semiplano y nuevamente resulta una serie de Dirichlet, que se obtiene simplemente derivando término a término, es decir

$$D'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} a_n \log(n) n^{-s}.$$

Además esta serie tiene la misma abscisa de convergencia que D (ver por ejemplo el [Apo76, Teorema 11.12]). Luego podemos considerar el operador de diferenciación $\mathbf{D} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ definido como $\mathbf{D}(D) = D'$.

Proposición 5.3.1. *El operador de diferenciación* $\mathbf{D} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ *es continuo y satisface*

$$\mathbf{D}(\mathcal{H}_+) = \mathcal{H}_{+,0} := \left\{\sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_+ : a_1 = 0\right\}.$$

Demostración. Sea $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_+$, fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea $C = \sup_n \frac{\log n}{n^{1/(2k)}}$. Entonces

$$\|D'\|_{2,k} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{1/k}}\frac{\log(n)^2}{n^{1/k}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{1/k}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2/(2k)}}\right)^{\frac{1}{2}} = C\|D\|_{2,2k},$$

y $\mathbf{D}$ está bien definido y es continuo.

Claramente $\mathbf{D}(\mathcal{H}_+) \subset \mathcal{H}_{+,0}$. Por otro lado, si $D = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_{+,0}$, entonces es claro que $\widetilde{D} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-a_n}{\log(n)} n^{-s} \in \mathcal{H}_+$ y $\mathbf{D}(\widetilde{D}) = D$, luego $\mathbf{D}(\mathcal{H}_+) = \mathcal{H}_{+,0}$. □

Un cálculo simple muestra que, para cada N fijo, el operador asociado al $N-$ésimo coeficiente $\sum a_n n^{-s} \to a_N$ es continuo en H_+. Luego el espacio $\mathsf{H}_{+,0}$ resulta ser un espacio cerrado.

Como mencionamos, también estamos interesados en el operador de integración, al cual notamos por $\mathbf{J}$. Este operador está definido en las series de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$ para las cuales $a_1 = 0$, de la forma siguiente

$$\mathbf{J}\Big(\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-s}\Big) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log(n)} n^{-s}.$$

Considerándolo como un operador de $\mathsf{H}_{+,0}$ en $\mathsf{H}_{+,0}$, claramente está bien definido y es continuo, ya que

$$\|\mathbf{J}(D)\|_{2,k} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2/k}\log(n)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2/k}}\right)^{\frac{1}{2}} = \|D\|_{2,k}$$

para toda $D = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathsf{H}_{+,0}$. Un cálculo directo muestra que $\mathbf{DJ}(D) = D = \mathbf{JD}(D)$ para todo $D \in \mathsf{H}_{+,0}$. Tenemos entonces que $\mathbf{D}$ y $\mathbf{J}$ son isomorfismos de $\mathsf{H}_{+,0}$ en $\mathsf{H}_{+,0}$. Esto en particular nos dice que ninguno de los dos operadores es compacto, puesto que si lo fueran entonces $\mathsf{H}_{+,0}$ tendría un entorno del cero acotado, siendo entonces normable. Pero esto no puede ocurrir, dado que, por un lado, $\mathsf{H}_{+,0}$ es Montel (por ser subespacio de H_+) y por lo tanto el entorno sería compacto, y por el otro $\mathsf{H}_{+,0}$ tiene dimensión infinita.

Supongamos que D y E son dos series de Dirichlet con $\sigma_a(D), \sigma_a(E) < \infty$. Por [Apo76, Teoremas 11.12 y 11.10] D' también tiene abscisa de convergencia absoluta finita y el producto $D' \cdot E = \sum c_n n^{-s}$ nuevamente converge absolutamente en algún semiplano. Notemos también que $c_1 = 0$, y por consiguiente podemos considerar $\mathbf{J}(D' \cdot E)$. De esta forma, fijando D definimos el operador de Volterra $\mathbf{V}_D : \mathsf{D} \to \mathsf{D}$ dado por $\mathbf{V}_D(E) = \mathbf{J}(D' \cdot E)$. La acción de este operador sobre los espacios de Hardy fueron estudiados en profundidad en [BPS19], donde además obtuvieron resultados profundos. Luego, en [Bon20, Corolario 2.4], Bonet muestra que la situación en H_+^∞ es más fácil de manejar. Repetimos los argumentos dados por Bonet para el caso H_+.

Proposición 5.3.2. *Sea $D = \sum a_n n^{-s}$, entonces $\mathbf{V}_D : \mathsf{H}_+ \to \mathsf{H}_+$ está bien definido (y es continuo) si y sólo si $D \in \mathsf{H}_+$.*

Demostración. Si $\mathbf{V}_D$ está bien definido, entonces $D - a_1 = \mathbf{J}(D' \cdot 1) = \mathbf{V}_D(1) \in \mathsf{H}_+$, y por lo tanto $D \in \mathsf{H}_+$.
Supongamos ahora que $D \in \mathsf{H}_+$, entonces $D' \in \mathsf{H}_{+,0}$. Sea $E \in \mathsf{H}_+$, por la Proposición 2.1.12 se tiene que $D' \cdot E \in \mathsf{H}_+$, más aún, dado que su primer coeficiente es 0 entonces $D' \cdot E \in \mathsf{H}_{+,0}$ y por lo tanto $\mathbf{V}_D(E) = \mathbf{J}(D' \cdot E) \in \mathsf{H}_{+,0}$. ☐

Veamos entonces para finalizar el espectro del operador de diferenciación y del de integración, en el mismo espíritu que en el [Bon20, Teorema 2.6]. Para evitar confusiones, vamos a notar al espectro por $\sigma(T, X)$, indicando por T el operador y X el espacio, y por $\rho(T, X)$ al resolvente, es decir, $\rho(T, X) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T, X)$.

Proposición 5.3.3. *Tenemos la siguiente caracterización de los espectros:*

1. $\sigma(\mathbf{D}, \mathsf{H}_{+,0}) = \{-\log n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.
2. $\sigma(\mathbf{D}, \mathsf{H}_+) = \{0\} \cup \{-\log n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.
3. $\sigma(\mathbf{J}, \mathsf{H}_{+,0}) = \{-\frac{1}{\log n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.

Demostración. Es claro que $0 \quad \sigma(\mathbf{D}, \mathsf{H}_{+,0})$ por ser $\mathbf{D}$ inversible. Por otro lado, dado que $\mathbf{D}(n^{-s}) = -\log(n)n^{-s}$, entonces $-\log(n) \quad \sigma_p(\mathbf{D}, \mathsf{H}_{+,0}) \quad \sigma(\mathbf{D}, \mathsf{H}_{+,0})$ para todo $n \geq 2$. Tomemos ahora $0 = \lambda \quad \mathsf{C}$ tal que $\lambda = -\log n$ para todo número natural $n \geq 2$ y veamos que $\lambda \quad \rho(\mathbf{D}, \mathsf{H}_{+,0})$. notemos primero que, para $\sum_{n\geq 2} a_n n^{-s} \quad \mathsf{H}_{+,0}$ tenemos que

$$(\lambda I - \mathbf{D})\Big(\textstyle\sum_{n\geq 2} a_n n^{-s}\Big) = \displaystyle\sum_{n\geq 2}(\lambda + \log n)a_n n^{-s}\,.$$

Eligiendo $\mu > 0$ de forma tal que $|\lambda| > \mu$ y $|\log n + \lambda| > \mu$ para todo natural $n \geq 2$ tenemos que

$$\Big\| \textstyle\sum_{n\geq 2} \frac{a_n}{\lambda+\log n} n^{-s}\Big\|_{2,k} = \Big(\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{|\log n + \lambda|^2}\frac{1}{n^{2/k}}\Big)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\mu}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2/k}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu}\Big\|\textstyle\sum_{n\geq 2} a_n n^{-s}\Big\|_{2,k} \qquad (5.19)$$

para todo k. Esto nos muestra que $\sum_{n\geq 2}\frac{a_n}{\lambda+\log n}n^{-s} \quad \mathsf{H}_{+,0}$ y, luego $(\lambda I - \mathbf{D}) : \mathsf{H}_{+,0} \to \mathsf{H}_{+,0}$ es sobreyectiva. A su vez (5.19) muestra que la inversa $(\lambda I - \mathbf{D})^{-1}$ es continua, probando 1.

Para ver 2, observemos que $0 \quad \sigma(\mathbf{D}, \mathsf{H}_+)$ puesto que $\mathbf{D}(1) = 0$, y evaluando nuevamente en los monomios obtenemos que $-\log(n) \quad \sigma(\mathbf{D}, \mathsf{H}_+)$ para todo $n \geq 2$. El hecho de que si $\lambda = -\log(n)$ para todo natural n entonces $\lambda I - \mathbf{D}$ es inversible se obtiene con el mismo argumento que en 1

Finalmente, observemos que $0 \quad \sigma(\mathbf{J}, \mathsf{H}_{+,0})$ por ser $\mathbf{J}$ inversible en $\mathsf{H}_{+,0}$. La prueba de 3 se concluye a partir de 1 y de que $\lambda \quad \rho(\mathbf{D}, \mathsf{H}_{+,0}) \setminus \{0\}$ si y sólo si $\lambda^{-1} \quad \rho(\mathbf{J}, \mathsf{H}_{+,0}) \setminus \{0\}$. De hecho, si $\lambda \quad \rho(\mathbf{D}, \mathsf{H}_{+,0}) \setminus \{0\}$ entonces $\lambda^{-1}I - \mathbf{J}$ tiene como inversa a $-\lambda\mathbf{D}(\lambda I - \mathbf{D})^{-1}$ (notar que la contención contraria se obtiene reemplazando $\mathbf{D}$ por $\mathbf{J}$ por ser $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{D}$). □

Apéndice A

Definiciones y resultados topológicos

La intención de este apéndice es recordar algunas definiciones y resultados de espacios topológicos que usamos en la tesis. Como referencia de estos mencionamos a [MV97], [Sch71], [Jar81], [Bou18], y [Gro54]. Comenzamos entonces con algunas definiciones.

Un par (X, Ω) es un espacio topológico si X es un conjunto y Ω una familia de subconjuntos de X que satisface lo siguiente:

- $\emptyset, X$ están en Ω,
- si A, B pertenecen a Ω entonces $A \cap B \in \Omega$,
- si $(A_i)_i \subseteq \Omega$ entonces $\bigcup_i A_i \in \Omega$.

Todo elemento de Ω se dice abierto, mientras que A se dice cerrado si $A^c \in \Omega$. Dado un elemento $x \in X$, un conjunto U es un entorno de x si existe un $A \in \Omega$ tal que $x \in A \subseteq U$. A su vez, decimos que una familia $(U_i)_{i \in I}$ es una base de entornos de x, si cada U_i es un entorno de x y satisface que para cualquier otro V, entorno de x, existe un $i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \subseteq V$.

Sean (X, Ω_1) e (Y, Ω_2) dos espacios topológicos y una función $f : X \to Y$. Dado $x \in X$, $(U_i)_{i \in I}$ y $(V_j)_{j \in J}$ bases de entornos de x y $f(x)$ respectivamente. Decimos que f es continua en x si para cada $j_0 \in J$ existe un $i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \subseteq f^{-1}(V_{j_0})$. La función f es continua en X si esta condición se satisface para todo $x \in X$.

Dado un $\mathsf{C}-$espacio vectorial E, un subconjunto U es convexo si para todos $x, y \in U$, y todo $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in U$. Con todo esto tenemos las siguientes definiciones.

Definición A.0.1. Un $\mathsf{C}-$espacio vectorial E dotado con una topología es

- un espacio vectorial topológico, si la suma y el producto por escalares son continuos,
- un espacio localmente convexo, si es un espacio vectorial topológico, para el cual todo punto $x \in E$ admite una base de entornos convexos.

Dado un espacio vectorial E, una función $p : E \to \mathsf{R}$ es una seminorma si satisface que

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in E$,
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $x \in E$ y $\lambda \in \mathsf{C}$.

En particular, toda seminorma cumple que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Dado un espacio vectorial E y una familia de seminormas P en E. Supongamos que P satisface que para cada $x \in E$ existe una seminorma $p \in \mathsf{P}$ tal que $p(x) = 0$, y que dadas $p_1, p_2 \in \mathsf{P}$ existen $p \in \mathsf{P}$ y una constante positiva c tal que $\text{máx}(p_1(x), p_2(x)) \leq c p(x)$ para todo $x \in E$. Entonces el par (E, P) define un espacio Hausdorff localmente convexo, donde $A \subset E$ es abierto si, para cada $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathsf{P}$ tal que $\{y \in E : p(x - y) < \varepsilon\} \subset A$.

Un conjunto I se dice dirigido si es un conjunto parcialmente ordenado por cierta relación $\leq$, tal que para todos $i, j \in I$ existe $k \in I$ con $i \leq k$ y $j \leq k$. Decimos que $(x_i)_{i \in I} \subset (E, \mathsf{P})$ es una red si I es un conjunto dirigido. La red $(x_i)_{i \in I}$ es de Cauchy si para cada $p \in \mathsf{P}$ y $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in I$ tal que si $i_1, i_2 \geq i_0$ entonces $p(x_{i_1} - x_{i_2}) < \varepsilon$. A su vez, decimos que la red converge a $x \in E$ si para cada $p \in \mathsf{P}$ y $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in I$ tal que $p(x - x_i) < \varepsilon$ siempre que $i \geq i_0$. El espacio (E, P) se dice completo si toda red de Cauchy es convergente.

Decimos que el espacio (E, P) es pre-Fréchet si $\mathsf{P} = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ es numerable. En este caso, además, se puede suponer que la familia de seminormas es creciente. Si además resulta que el espacio es completo, entonces decimos que (E, P) es un espacio de Fréchet. Mientras que si P se reduce a una única norma entonces E es un espacio de Banach. Dado un espacio vectorial topológico Hausdorff E, existe un único (salvo homeomorfismos) espacio vectorial topológico completo, Hausdorff $\widehat{E}$, y un homeomorfismo lineal e inyectivo $\iota : E \to \widehat{E}$ tal que $\iota(E)$ es denso en $\widehat{E}$. El espacio $\widehat{E}$ es la completación de E (en caso de ser E normado, entonces $\widehat{E}$ resulta un espacio de Banach).

Un conjunto $B \subset E$ es

- Equilibrado si cumple que $x \in B$ si y solo si $\lambda x \in B$ para todo complejo λ de módulo uno.
- Absolutamente convexo si es convexo y equilibrado.
- Absorbente si para todo $x \in E$ existe un real positivo α para el cual $\alpha x \in B$.
- Tonel si es absolutamente convexo, cerrado y absorbente.

El espacio (E, P) se dice tonelado si todo conjunto tonel es un entorno del cero. Todo espacio de Fréchet es tonelado. Decimos que (E, P) satisface el Principio de Acotación Uniforme, si todo conjunto de operadores $\{T_i : T_i : E \to F\}$, de E en un espacio localmente convexo F, puntualmente acotado es también equicontinuo.

Teorema A.0.2. *Un espacio localmente convexo (E, P) es tonelado si y solo si satisface el Principio de Acotación Uniforme.*

Un espacio localmente convexo Hausdorff es semi-Montel si todo conjunto acotado es relativamente compacto. Si además es tonelado, entonces es un espacio de Montel.

Los espacios de Schwartz fueron introducidos por Grothendieck en [Gro54]. Como afirma Bourles en [Bou18, Página 148], el concepto está motivado por el hecho de que todo espacio de funciones utilizado por Schwartz para construir su teoría de distribuciones resulta a su vez un espacio de Schwartz. Si (E, P) es un espacio localmente convexo Hausdorff, para cada $p \in \mathsf{P}$ consideramos el espacio normado $(E_p, \|\cdot\|_p)$ dado por

$$E_p := E/\ker(p) \text{ y } \|x + \ker(p)\|_p := p(x).$$

Para cada par de seminormas $p, q \in \mathsf{P}$ tales que existe una constante positiva $c > 0$, con $q \leq cp$, podemos definir el operador asociado

$$\pi_{p,q} : E_p \to E_q \text{ por } x + \ker(p) \to x + \ker(q),$$

que es lineal y con norma menor o igual a c. De esta forma, E es un espacio de Schwartz si para toda $q \in \mathsf{P}$ existen $p \in \mathsf{P}$ y $c > 0$, con $q \leq cp$, tal que $\pi_{p,q}$ es pre-compacto. Esto es, si la imagen de la bola unitaria de E_p por $\pi_{p,q}$ es pre-compacta en E_q.

Proposición A.0.3. *Todo espacio de Fréchet-Schwarz es un espacio de Montel*

Grothendieck, motivado nuevamente por el estudio de los espacios de distribuciones y más precisamente, en este caso, por el Teorema del núcleo de Schwartz, define en [Gro55] los espacios nucleares. Como afirma Jarchow en [Jar81, Página 478], "en un sentido específico, los espacios nucleares son incluso más cercanos a los espacios finito dimensionales que los espacios de Banach". Algunos de los aspectos que comparten con los espacios finito dimensionales son la propiedad de Heine-Borel (todo conjunto acotado es pre-compacto) y el hecho de que la sumabilidad incondicional de sucesiones es equivalente a la sumabilidad absoluta. Originalmente estos espacios se definen a partir del producto tensorial proyectivo, en línea con el interés de Grothendieck antes mencionado. Daremos una definición en los términos en los que venimos trabajando. Si $T : X \to Y$ es un operador acotado entre dos espacios normados, vamos a decir que T es nuclear si existen sucesiones (x_n) en X' e (y_n) en Y, tales que $\sum_n \|x_n\|_{X'} \|y_n\|_Y < \infty$ y $T(x) = \sum_n x_n(x) y_n$ para todo $x \in X$. A partir de esta definición, el espacio $(E, \mathcal{P})$ es nuclear si, para cada $q \in \mathcal{P}$ existen $p \in \mathcal{P}$ y una constante positiva c, con $q \leq cp$, tal que $\pi_{p,q} : E_p \to E_q$ es un operador nuclear.

Una sucesión $(e_n)_n$ en un espacio localmente convexo E es una base de Schauder si para todo $x \in E$ existe una sucesión de escalares (α_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. En este caso, las funciones e'_n definidas por $e'_n(x) = \alpha_n$ son continuas. Si E es un espacio tonelado y (e_n) es una base de Schauder, entonces para cada $p \in \mathcal{P}$ existen $q \in \mathcal{P}$ y $c > 0$ tales que para todo $M > N$ y toda sucesión de números complejos (α_n), se tiene

$$p\Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n\Big) \leq C\, q\Big(\sum_{n=1}^{M} \alpha_n e_n\Big). \tag{A.1}$$

Proposición A.0.4. *Todo espacio de Fréchet nuclear es un espacio de Schwartz.*

Decimos que una base de Schauder $(e_n)_n$ es incondicional si $\sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x) e_n$ converge incondicionalmente, es decir si $\sum_{n=1}^{\infty} e'_{\sigma(n)}(x) e_{\sigma(n)}$ converge para toda permutación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Por último, diremos que una base $(e_n)_n$ es absoluta en $(E, \mathcal{P})$ si para toda $p \in \mathcal{P}$ existe $q \in \mathcal{P}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(x)| p(e_n) \leq q(x).$$

El Teorema de Grothendieck-Pietsch [MV97, Teorema 28.15] nos da un método para poder determinar la nuclearidad de un espacio de Fréchet con base de Schauder.

Teorema A.0.5 (Grothendieck-Pietsch)**.** *Sea $(E, \mathcal{P})$ un espacio de Fréchet, con $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder de E. Entonces son equivalentes*

1. *E es un espacio nuclear.*
2. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq k$, tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_k(e_j) p_m(e_j)^{-1} < \infty. \tag{A.2}$$

Dada una familia numerable de espacios normados $(X_k)_k$, consideremos, para cada k, un operador lineal acotado $i_k : X_{k+1} \to X_k$. El par

$$\big(X_k, i_k\big)_{k \in \mathbb{N}}$$

se denomina espectro proyectivo numerable. El límite proyectivo $\operatorname{proj} X_k$ está definido como el subespacio topológico de $\prod_k X_k$, que consiste en aquellos (x_k) tales que $i_k(x_{k+1}) = x_k$ para todo k. Si notamos por π_n a la proyección canónica de $\operatorname{proj} X_k$ en X_n, entonces

$$p_n(x) = \max_{1 \leq m \leq n} \quad \pi_m(x) \quad _{X_m} \tag{A.3}$$

define una seminorma en $\operatorname{proj} X_k$. Esta colección de seminormas genera una topología en $\operatorname{proj} X_k$, con la cual es localmente convexo y que coincide con la inducida por $\prod X_k$. Por lo tanto, el límite proyectivo de numerables espacios normados siempre es un espacio pre-Fréchet. Además. si cada X_k es una espacio de Banach, entonces $\prod_k X_k$ es completo y luego también lo es su subespacio cerrado $\operatorname{proj} X_k$, siendo entonces un espacio de Fréchet.

Un ejemplo de estos espacios son los espacios de Köthe escalonados. Para definirlos, tomemos primero una matriz $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ de coeficientes reales. Vamos a decir que A es una matriz de Köthe (positiva), si $0 < a_{jk} < a_{j(k+1)}$ para todos k, j. Si A es una matriz de Köthe, cada uno de los espacios ℓ_p con pesos, para $1 \leq p < \infty$, definidos por

$$\ell_p((a_{j,k})_{j=1}^{\infty}) = \Big\{x \quad \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \ x \ _k = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk} x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\},$$

para cada $k \quad \mathbb{N}$, es isométricamente isomorfo a ℓ_p. Junto con las inclusiones canónicas, estos forman un espectro numerable proyectivo, el cual define el espacio de Fréchet de Köthe

$$\ell_p(A) = \operatorname{proj} \ell_p((a_{j,k})_{j=1}^{\infty}) = \ \Big\{x \quad \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \ x \ _k = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk} x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{para } k \quad \mathbb{N}\Big\}. \tag{A.4}$$

El espacio $c_0(A)$ queda definido reemplazando ℓ_p por el espacio c_0, de las sucesiones convergentes a cero, y procediendo de la misma forma.

Como una consecuencia del Teorema de Grothendieck-Pietsch, en [MV97, Theorem 28.16] se tiene una caracterización de la nuclearidad par los espacios de Köthe. Más precisamente

Proposición A.0.6. *Sea $A = (a_{j,k})_{j,k \ \mathbb{N}}$ una matriz de Köthe. Son equivalentes*

- *para cada $k \quad \mathbb{N}$ existe un $m \geq k$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k} a_{j,m}^{-1} < \infty$,*
- *$c_0(A)$ es nuclear*
- *$\ell_p(A)$ es nuclear para todo $1 \leq p \leq \infty$*
- *$\ell_p(A) = c_0(A)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

La siguiente observavción nos da una forma de identificar si dos límites proyectivos son isomorfos.

Observación A.0.7. Supongamos que $(X_k, i_k)_{k \ \mathbb{N}}$ e $(Y_k, j_k)_{k \ \mathbb{N}}$ son dos espectros proyectivos de espacios normados, y notemos por π_m y ρ_m (para cada m) las correspondientes proyecciones en X_m e Y_m. Si tenemos una familia de operadores acotados $\{S_k : X_k \to Y_k\}_k$ que satisfacen que $S_k \circ i_k = j_k \circ S_{k+1}$ para cada k, entonces el operador

$$S : \operatorname{proj} X_k \to \operatorname{proj} Y_k \ \text{ dado por } \ (x_k) \to (S_k x_k)$$

está bien definido. Este operador también es continuo, dado que para cada m se tiene que

$$\rho_m \circ S = S_m \circ \pi_m.$$

Luego, si todos los S_k son biyecciones continuas con inversa continua, entonces S es un isomorfismo de espacios pre-Fréchet.

Para poder determinar si el límite proyectivo es un espacio de Schwartz o un espacio nuclear contamos con la siguiente herramienta.

Observación A.0.8. Si en un límite proyectivo $X = \operatorname{proj} X_k$ consideramos las seminormas canónicas definidas en (A.3), entonces $X_{p_n} = \bigoplus_{k=1}^{n} X_k$ isométricamente. Tomar el producto cartesiano de finitos operadores pre-compactos (respectivamente nucleares) en un espacio de Banach nos da nuevamente un operador pre-compacto (respectivamente nuclear). Como consecuencia, X es un espacio de Schwartz (respectivamente nuclear) siempre que para cada k exista un $m > k$ tal que el mapa canónico de X_m en X_k dado por $i_{m,k} = i_{m-1} \circ \cdots \circ i_k$ sea pre-compacto (respectivamente nuclear).

Finalmente, vamos a decir que un espacio E es un espacio dual si es el dual de cierto espacio V, es decir si $E = \{\varphi : V \to K : \varphi \text{ es lineal y continua}\}$. En [Kai77, Teorema 1], Kaijser prueba una condición suficiente para poder garantizar que un espacio E es un espacio dual.

Teorema A.0.9. *Sea E un espacio de Banach y F un conjunto de funciones lineales en E tal que*

- *F separa puntos de E,*
- *la bola unidad cerrada U de E es compacta para la topología débil dada por el conjunto F.*

Entonces E es un espacio dual.

Índice alfabético

Índice de símbolos

Bibliografía

[ABG+17] Richard M. Aron, Frédéric Bayart, Paul M. Gauthier, Manuel Maestre, and Vassili Nestoridis. Dirichlet approximation and universal Dirichlet series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(10):4449–4464, 2017.

[ACS22] Jorge Antezana, Daniel Carando, and Melisa Scotti. Splitting the Riesz basis condition for systems of dilated functions through Dirichlet series. *J. Math. Anal. Appl.*, 507(1):Paper No. 125733, 20, 2022.

[AM14] Jeremy Avigad and Rebecca Morris. The concept of "character" in dirichlet's theorem on primes in an arithmetic progression. *Archive for History of Exact Sciences*, 68(3):265–326, 2014.

[AOS14] Alexandru Aleman, Jan-Fredrik Olsen, and Eero Saksman. Fourier multipliers for Hardy spaces of Dirichlet series. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16):4368–4378, 2014.

[AOS19] Alexandru Aleman, Jan-Fredrik Olsen, and Eero Saksman. Fatou and brothers Riesz theorems in the infinite-dimensional polydisc. *J. Anal. Math.*, 137(1):429–447, 2019.

[AP71] Luigi Amerio and Giovanni Prouse. *Almost-periodic functions and functional equations*. Van Nostrand Reinhold Co., New York-Toronto, Ont.-Melbourne, 1971.

[Apo76] Tom M. Apostol. *Introduction to analytic number theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Undergraduate Texts in Mathematics.

[Bay02] Frédéric Bayart. Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators. *Monatshefte für Mathematik*, 136(3):203–236, 2002.

[Bay22] Frédéric Bayart. Convergence and almost sure properties in Hardy spaces of Dirichlet series. *Mathematische Annalen*, 382(3-4):1485–1515, 2022.

[BCMG+21] Frédéric Bayart, Jaime Castillo-Medina, Domingo García, Manuel Maestre, and Pablo Sevilla-Peris. Composition operators on spaces of double Dirichlet series. *Revista Matemática Complutense*, 34:215–237, 2021.

[BDF+17] Frédéric Bayart, Andreas Defant, Leonhard Frerick, Manuel Maestre, and Pablo Sevilla-Peris. Multipliers of dirichlet series and monomial series expansions of holomorphic functions in infinitely many variables. *Mathematische Annalen*, 368:837–876, 2017.

[Bes55] A. S. Besicovitch. *Almost periodic functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[Bir31] G. D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 17:656–660, 1931.

[Boh10] Harald August Bohr. *Bidrag til de Dirichlet'ske raekkers theori*, volume 9. I kommission hos GEC Gad, 1910.

[Boh13a] Harald Bohr. Lösung des absoluten konvergenzproblems einer allgemeinen klasse dirichletscher reihen. *Acta mathematica*, 36(1):197–240, 1913.

[Boh13b] Harald Bohr. Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen. *J. Reine Angew. Math.*, 143:203–211, 1913.

[Boh13c] Harald Bohr. Ueber die bedeutung der potenzreihen unendlich vieler variablen in der theorie der dirichletschen reihe.... *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:441–488, 1913.

[Boh14] Harald Bohr. Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletscher Reihen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 37:1–16, 1914.

[Boh25] Harald Bohr. Zur theorie der fastperiodischen funktionen. *Acta Mathematica*, 46(1):101–214, 1925.

[Bon18] José Bonet. The Fréchet Schwartz algebra of uniformly convergent Dirichlet series. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 61(4):933–942, 2018.

[Bon20] José Bonet. The differentiation operator in the space of uniformly convergent Dirichlet series. *Math. Nachr.*, 293(8):1452–1458, 2020.

[Bou18] Henri Bourles. *Fundamentals of Advanced Mathematics V2: Field extensions, topology and topological vector spaces, functional spaces, and sheaves*, volume 2. Elsevier, 2018.

[BPS19] Ole Fredrik Brevig, Karl-Mikael Perfekt, and Kristian Seip. Volterra operators on Hardy spaces of Dirichlet series. *J. Reine Angew. Math.*, 754:179–223, 2019.

[BS84] Leon Brown and Allen L. Shields. Cyclic vectors in the Dirichlet space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 285(1):269–303, 1984.

[CDMS21] Daniel Carando, Andreas Defant, Felipe Marceca, and Ingo Schoolmann. Vector-valued general dirichlet series. *Studia Mathematica*, 258:269–316, 2021.

[CDSP14] Daniel Carando, Andreas Defant, and Pablo Sevilla-Peris. Bohr's absolute convergence problem for H_p-dirichlet series in banach spaces. *Analysis & PDE*, 7(2):513–527, 2014.

[CFS12] Isaac P Cornfeld, Sergei Vasilevich Fomin, and Yakov Grigor'evǐc Sinai. *Ergodic theory*, volume 245. Springer Science & Business Media, 2012.

[CG86] Brian J Cole and TW Gamelin. Representing measures and hardy spaces for the infinite polydisk algebra. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):112–142, 1986.

[CJM95] Carl C Cowen Jr and Barbara I MacCluer. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, volume 20. CRC Press, 1995.

[CMSP21] Daniel Carando, Felipe Marceca, and Pablo Sevilla-Peris. Hausdorff-Young type inequalities for vector-valued Dirichlet series. *Trans. AMS*, to appear, 2021.

[Con90] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[Dem11] R. Demazeux. Essential norms of weighted composition operators between Hardy spaces H^p and H^q for $1 \leq p, q \leq \infty$. *Studia Math.*, 206(3):191–209, 2011.

[DFVSSP21] Andreas Defant, Tomás Fernández Vidal, Ingo Schoolmann, and Pablo Sevilla-Peris. Fréchet spaces of general dirichlet series. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 115(3):138, 2021.

[DGMSP19] Andreas Defant, Domingo García, Manuel Maestre, and Pablo Sevilla-Peris. *Dirichlet Series and Holomorphic Functions in High Dimensions*, volume 37 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2019.

[Die84] Joseph Diestel. *Sequences and series in Banach spaces*, volume 92 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[Dir37] PG Lejeune Dirichlet. Beweis des satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische progression, deren erstes glied und differenz ganze zahlen ohne gemeinschaftlichen factor sind, unendlich viele primzahlen enthält. *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 45:81, 1837.

[DJT95] Joe Diestel, Hans Jarchow, and Andrew Tonge. *Absolutely summing operators*. Number 43. Cambridge university press, 1995.

[Dou12] Ronald G Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*, volume 179. Springer Science & Business Media, 2012.

[DP18] Andreas Defant and Antonio Pérez. Hardy spaces of vector-valued Dirichlet series. *Studia Math.*, 243(1):53–78, 2018.

[DPSP19] Andreas Defant, Antonio Pérez, and Pablo Sevilla-Peris. A note on abscissas of Dirichlet series. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 113(3):2639–2653, 2019.

[DS19a] Andreas Defant and Ingo Schoolmann. Hardy spaces of general Dirichlet series — a survey. In *Function spaces XII. Selected papers based on the presentations at the 12th conference, Krakow, Poland, July 9–14, 2018*, pages 123–149. Warsaw: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, 2019.

[DS19b] Andreas Defant and Ingo Schoolmann. H_p-theory of general Dirichlet series. *J. Fourier Anal. Appl.*, 25(6):3220–3258, 2019.

[DS20a] Andreas Defant and Ingo Schoolmann. Riesz means in Hardy spaces on Dirichlet groups. *Math. Ann.*, 378(1-2):57–96, 2020.

[DS20b] Andreas Defant and Ingo Schoolmann. Variants of a theorem of Helson on general Dirichlet series. *J. Funct. Anal.*, 279(5):108569, 37, 2020.

[Eul48] Leonhard Euler. *Introductio in analysin infinitorum: Tomus primus-[secundus].*, volume 1. MM Bousquet, 1748.

[FVGMSP21] Tomás Fernández Vidal, Daniel Galicer, Martin Mereb, and Pablo Sevilla-Peris. Hardy space of translated Dirichlet series. *Mathematische Zeitschrift*, pages 1–27, 2021.

[FVGSP22a] Tomás Fernández Vidal, Daniel Galicer, and Pablo Sevilla-Peris. A Montel-type theorem for Hardy spaces of holomorphic functions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19(5):209, 2022.

[FVGSP22b] Tomás Fernández Vidal, Daniel Galicer, and Pablo Sevilla-Peris. Multipliers for Hardy spaces of Dirichlet series. *arXiv preprint arXiv:2205.07961*, 2022.

[GH99] Julia Gordon and Håkan Hedenmalm. The composition operators on the space of Dirichlet series with square summable coefficients. *Michigan Math. J.*, 46(2):313–329, 1999.

[GN22] Kunyu Guo and Jiaqi Ni. Dirichlet series and the Nevanlinna class in infinitely many variables. *arXiv preprint arXiv:2201.01993*, 2022.

[Gro54] Alexandre Grothendieck. *Sur les espaces (F) et (DF)*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, 1954.

[Gro55] Alexandre Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, volume 16. American Mathematical Society Providence, 1955.

[HLS97] Håkan Hedenmalm, Peter Lindqvist, and Kristian Seip. A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$. *Duke Math. J.*, 86(1):1–37, 1997.

[HR13] Godfrey Harold Hardy and Marcel Riesz. *The general theory of Dirichlet's series*. Courier Corporation, 2013.

[Jar81] Hans Jarchow. *Locally convex spaces*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1981. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks].

[Jen84] Johan. L. W. V. Jensen. Om Räkkers Konvergens. *Zeuthen T. (5)*, 2:63–72, 1884.

[Jen88] Johan. L. W. V. Jensen. Sur une généralisation d'un théorème de Cauchy. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 106:833–836, 1888.

[Kai77] Sten Kaijser. A note on dual Banach spaces. *Math. Scand.*, 41(2):325–330, 1977.

[Lan09] Edmund Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, volume 1. BG Teubner, 1909.

[Lan21] Edmund Landau. Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen. *Math. Z.*, 11(3-4):317–318, 1921.

[Lef09] Pascal Lefèvre. Essential norms of weighted composition operators on the space H^∞ of Dirichlet series. *Studia Math.*, 191(1):57–66, 2009.

[MV97] Reinhold Meise and Dietmar Vogt. *Introduction to functional analysis*, volume 2 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997. Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors.

[Nor68] Eric A Nordgren. Composition operators. *Canadian Journal of Mathematics*, 20:442–449, 1968.

[PW12] María Cristina Pereyra and Lesley A. Ward. *Harmonic analysis*, volume 63 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2012. From Fourier to wavelets, IAS/Park City Mathematical Subseries.

[QQ20] Hervé Queffélec and Martine Queffélec. *Diophantine approximation and Dirichlet series*, volume 80 of *Texts and Readings in Mathematics*. Hindustan Book Agency, New Delhi; Springer, Singapore, 2020. Second edition.

[Que95] H. Queffélec. H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series; old and new results. *J. Anal.*, 3:43–60, 1995.

[Rie59] Bernhard Riemann. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse. *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß*, 2(145-155):2, 1859.

[RS62] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, 6:64–94, 1962.

[Rud62] Walter Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London, 1962.

[Rud69] Walter Rudin. *Function theory in polydiscs*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Rud90] Walter Rudin. *Fourier analysis on groups*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Sch71] H Schaefer. Topological vector spaces [russian translation]. *Mir, Miseow*, 1971.

[Sch20a] I. Schoolmann. On Bohr's theorem for general Dirichlet series. *Math. Nachr.*, 293(8):1591–1612, 2020.

[Sch20b] Ingo Schoolmann. *Hardy spaces of general Dirichlet series and their maximal inequalities*. PhD thesis, Carl von Ossietzky University of Oldenburg, 2020.

[Sha12] Joel H Shapiro. *Composition operators: and classical function theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

[SS09] Eero Saksman and Kristian Seip. Integral means and boundary limits of Dirichlet series. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(3):411–422, 2009.

[SSS+76] Iakov Grigorevich Sinai, Jakov G Sinaj, Ya G Sinai, et al. *Introduction to ergodic theory*, volume 18. Princeton University Press, 1976.

[Vuk03] Dragan Vukotić. Analytic Toeplitz operators on the Hardy space H^p: a survey. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 10(1):101–113, 2003.