UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Series aleatorias de funciones

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas

Melisa Carla Scotti

Director de tesis: Daniel Carando
Director adjunto de tesis: Jorge Antezana
Consejero de estudios: Pablo Groisman

Buenos Aires, 2023

Series aleatorias de funciones

Melisa Carla Scotti

Resumen

El propósito de esta tesis es contribuir al estudio de algunos problemas del análisis armónico y de la convergencia de series aleatorias de funciones usando como herramienta espacios de series de Dirichlet.

Inspirados en el trabajo de Hedenmalm, Lindqvist y Seip, estudiamos diferentes propiedades del sistema de dilataciones periódicas de una función $\varphi \in L^2(0,1)$. Más precisamente, nos preguntamos cuándo el sistema $\{\varphi(nx)\}_n$ es una sucesión Bessel, una sucesión de Riesz, o satisface la desigualdad inferior o superior de la definición de marco. Caracterizamos todas estas propiedades en términos del espacio de multiplicadores del espacio de Hardy $\mathcal{H}_2$ de series de Dirichlet, así como también en términos de los espacios de Hardy tradicional del politoro $\mathbb{T}^\infty$. Además, trasladamos estas preguntas al caso multivariado. A su vez proporcionamos distintos ejemplos de funciones que satisfacen estas propiedades. En particular, mostramos que existen sucesiones ortonormales de $L^2(0,1)$ que no son subsucesión de $\{\sqrt{2}\sin(nx)\}_n$.

Por otro lado, estudiamos la incondicionalidad aleatoria de series de Dirichlet en los espacios de Hardy vectoriales $\mathcal{H}_p(X)$. Trabajamos principalmente con series Rademacher y series Gaussianas y estudiamos la relación de la convergencia aleatoria con la geometría del espacio de Banach subyacente X. Más concretamente, probamos que un espacio de Banach X tiene tipo 2 (respectivamente, cotipo 2) si y solo si $(x_n)_n \subset X$ se tiene que $(x_n n^{-s})_n$ es aleatoria incondicionalmente convergente (respectivamente, divergente) en $\mathcal{H}_2(X)$. Abordamos también esta pregunta en espacios $\mathcal{H}_p(X)$ con $p \neq 2$. Además, construimos ejemplos explícitos que muestran las diferencias entre la incondicionalidad aleatoria de $(x_n n^{-s})_n$ en $\mathcal{H}_p(X)$ y la de $(x_n z^n)_n$ en $H_p(X)$. Esto muestra que las series de Dirichlet y las series de potencias se comportan diferente en términos de convergencia aleatoria.

Palabras clave: Series de Dirichlet, Series Rademacher, espacios de Hardy vectoriales, tipo y cotipo de espacios de Banach.

Random series of functions

Melisa Carla Scotti

Abstract

The purpose of this thesis is to contribute to the study of some problems in harmonic analysis and also to the convergence of random series of functions using Dirichlet series spaces as our main tool.

Inspired by the work of Hedenmalm, Lindqvist and Seip, we consider different properties of dilations systems of a fixed function $\varphi \in L^2(0,1)$. More precisely, we study when the system $\{\varphi(nx)\}_n$ is a Bessel sequence, a Riesz sequence, or satisfies the lower and upper frame bound. We are able to characterize these properties in terms of multipliers of the Hardy space $\mathcal{H}^2$ of Dirichtet series and, also, in terms of Hardy spaces on the infinite polytorus. We also address the multivariate case. Furthermore, we present different examples in which our results are applied. We show dilation systems satisfying just one of the frame bounds. We also give nontrival examples of dilation systems that are orthonormal sequences. Indeed, we show that there exist orthonormal sequences of $L^2(0,1)$ that are not subsequences of $\{\sqrt{2}\sin(nx)\}_n$.

On the other hand, we study random unconditionality of Dirichlet series in vector-valued Hardy spaces $\mathcal{H}_p(X)$. We work primarily with Rademacher series and Gaussian series and study the relationship between random convergence and the geometry of the underlying Banach space X. Specifically, it is shown that a Banach space X has type 2 (respectively, cotype 2) if and only if for every choice $(x_n)_n \subset X$ it follows that $(x_n n^{-s})_n$ is Random unconditionally convergent (respectively, divergent) in $\mathcal{H}_2(X)$. The analogous question on $\mathcal{H}_p(X)$ spaces for $p \neq 2$ is also explored. We also provide explicit examples exhibiting the differences between the unconditionality of $(x_n n^{-s})_n$ in $\mathcal{H}_p(X)$ and that of $(x_n z^n)_n$ in $H_p(X)$. This shows that Dirichlet series and power series behave differently in terms of random convergence.

Key words: Dirichlet series, Rademacher Series, Hardy spaces, type and cotype of Banach spaces.

Agradecimientos

A mis directores por acompañarme, enseñarme y, sobre todo, tenerme mucha paciencia a lo largo de todos estos años. Por ser brillantes matemáticos y aún mejores personas. Porque ya no sé cuál es el bueno y cuál el malo.

Al jurado por su tiempo y dedicación.

A la educación pública y al CONICET. A la UBA por ser mi casa. A la UNSAM por recibirme con los brazos abiertos.

A UdeSA, Marcela y Vero por el impulso.

A Diana por sentarse conmigo a escribir, a dibujar, a pintar, a tomar café. Por formar parte de mis *sponsors*.

A Dani Kohen y Bibi por todo, todo, todo.

A Virchu la más graciosa de todas.

A Nacho Perito el *twittero* más famoso de exactas.

A Felipe mi hermanito doctoral por explicarme todo con lujo de detalles, por los viajes y comidas compartidas.

A Bruno y Nati porque escribir esta tesis sin ustedes fue muy difícil. Porque no veo la hora de que sea junio y estén acá con nosotros.

En resumen, a todos los que me abandonaron para irse a otro país.

A Joa Singer por dejar que le queme el coco todos los días, por las tardes compartidas y por ser un gran amigo. Por todas las series que me recomendó y aún no vi. Por el chisme.

A Joel por su dulzura y sensibilidad.

A Coti, Vicky, Ezequiel, Julián y Gabriel por ser increíbles compañeros y profesores, de grande quiero ser como ustedes. Por escucharme, aconsejarme y cuidarme.

A les jóvenes que son lo más.

A Manu y Rochi Nores los gemelos fantásticos.

A Jesi por ser única en su tipo.

A los amigos que me dio la facu. Pau, Martu, Caro, Julia, Cami, Mili, Carlinho, Ivi (mi marido) y Pablito.

A Cire, Oko y San porque *el tiempo es todo el tiempo*. Por todo el amor y cuidado.

A León por la ayuda infinita. *Porque es un buen compañero y nadie lo puede negar*.

A Leo, Solchu y Agos mis amigas del alma.

A Adri y Marce mis mamás postizas. A Emilio mi hermanito menor.

A mi familia. A mi Abuela Kate, la tía Daniela, Pablito y las Cecis. Por quererme bien.

A Denu porque si te hubiese visto aquella vez en la primaria, te habría saludado. Por ser mi hermana y la mejor familia que alguien podría desear.

A mi familia chilena por el amor más grande.

A Mateo Longo y Santi Halçartegaray mis chiquitos.

A Lau porque nunca quiero que se vaya de casa. Porque siempre está para y con nosotras.

A Gustavo por su ternura y su teatro. A Juana por su música.

A Vir por alentarme -obligarme-, cada palabra en esta tesis es en gran parte tuya. Por ser mi familia y compartirme la tuya. Porque no sabía que existía un amor así.

A Messi.

Introducción

"...obwohl sie ja in Wirklichkeit Funktionen nur des einen Parameters s sind, sich in mancher Beziehung fast ganz benehmen, als wären sie von einander unabhängige Variable."[...aunque en realidad son funciones de un solo parámetro s, en muchos aspectos se comportan, casi en su totalidad, como si fueran variables independientes.]
(Harald Bohr, 1913).

Una serie de Dirichlet es una expresión, en principio formal, de la forma

$$\sum_n a_n n^{-s},$$

donde $\{a_n\}_n \in \mathbb{C}$ y s una variable compleja. Es una propiedad básica que sus dominios naturales de convergencia son semiplanos, conjuntos de la forma $\{\mathrm{Re}(s) > \sigma\}$. Dada una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$, existen tres abscisas de convergencia fundamentales que definen los mayores semiplanos donde la serie converge, converge uniformemente y converge absoultamente. A diferencia de los discos de convergencia de las series de potencias, estas abscisas no coinciden necesariamente.

En los comienzos del siglo XX surge un problema fundamental sobre la convergencia de series de Dirichlet: determinar el ancho máximo de la banda en la que una serie de Dirichlet puede converger uniforme pero no absolutamente. En esta dirección, el primer avance significativo lo hace Bohr [12] mostrando que el ancho de esta banda es menor o igual a $1/2$. Finalmente, veinte años después, Bohnenblust y Hille [10] prueban que es esta cantidad coincide con $1/2$. Años más tarde, Hartmann [31] presentó otra prueba de este hecho basada en métodos probabilísticos usando series aleatroias de Fourier y funciones cuasi-periódicas.

La brillante idea de Bohr fue relacionar el conjunto de series de Dirichlet formales $\mathfrak{D}$ con las series de potencia formales en infinitas variables $\mathfrak{P}$. En el corazón de esta idea se encuentra el teorema fundamental de la aritmética que permite definir la siguiente asignación. Si llamamos $\mathfrak{p} := \{p_n\}_n$ a la sucesión de números primos ordenada crecientemente, todo $n \in \mathbb{N}$ tiene una única representación de la forma

$$n = \mathfrak{p}^\alpha := p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Por lo tanto, podemos definir $\alpha(n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, \dots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ como el multiíndice que cumple que $\mathfrak{p}^{\alpha(n)} = n$. Se conoce como transformada de Bohr a la biyección dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : \mathfrak{P} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha &\xrightarrow{a_n = a_{\mathfrak{p}^\alpha} = c_\alpha} \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}. \end{aligned}$$

Recientemente, la idea Bohr ha encontrado aplicaciones en varios campos, lo que ha despertado un gran interés en el tema (ver por ejemplo la monografía [21] y sus referencias). El trabajo de Bohr pensado desde una perspectiva moderna permitió extender la teoría de espacios de Hardy clásica a series de Dirichlet, tanto escalares como con valores en un espacio de Banach X. Esto es posible gracias a la transformada de Bohr que enlaza las series de Dirichlet, las funciones holomorfas en infinitas variables y el análisis de Fourier.

El estudio de las series de Dirichlet (vectoriales) desde el análisis funcional continua creciendo hasta el día de hoy (ver [25, 14, 20, 22], y [17] donde la teoría de series de Dirichlet vectoriales se usa para estudiar las series de Dirichlet múltiples). El espacio de Hardy vectorial $\mathcal{H}_p(X)$ de series de Dirichlet está compuesto por aquellas series de Dirichlet vectoriales que, vía la transformada de Bohr, tienen norma de Hardy p finita (ver Sección 1.1.2 para la definición formal).

Durante esta tesis usamos la teoría de series de Dirichlet (espacios de Hardy de series de Dirichlet escalares y vectoriales) para contribuir en las dos direcciones que se describen a continuación.

Sistemas de funciones dilatadas

En la primera parte de esta tesis, correspondiente al Capítulo 2, tomamos como referente el artículo [32]. Este artículo es sumamente importante ya que marca un nuevo punto de partida, logrando avances fundamentales en diferentes ramas, como lo son la teoría de series de Dirichlet, la teoría de funciones holomorfas en infinitas variables, el análisis funcional y de Fourier, muchos de los cuales están documentados en las recientes monografías [21] y [49].

En [32] se analizan distintas propiedades de los sistemas dados por dilataciones de una función fija de $L_2(0,1)$. Más concretamente, dada una función φ de $L_2(0,1)$, extendida a toda la recta real de forma impar y con período 2, se estudian diversas propiedades del sistema de dilataciones $\{\varphi_n\}_n$ dado por

$$\varphi_n(x) := \varphi(nx) \quad con\ n \in \mathbb{N}.$$

Es sabido que las únicas bases ortogonales de esta forma son las que provienen de elegir como función inicial a $\varphi(x) = C\sin(\pi x)$ con $C \neq 0$. Por ello, Hedenmalm, Lindqvist y Seip relajan esta condición y se preguntan cuándo el sistema $\{\varphi_n\}_n$ es una base de Riesz. Basándose en la idea de Bohr y Beurling [5, 11, 12], relacionan esta pregunta con el espacio de series de Dirichlet $\mathcal{H}_2$ (aquellas series de Dirichlet con coeficientes de cuadrado sumable) y el espacio de Hardy $H_2(\mathbb{T}^\infty)$. Así describen dicha condición en términos del conjunto de multiplicadores de $\mathcal{H}_2$ (ver Teorema 2.1.3). Además, caracterizan estos multiplicadores como el espacio de series de Dirichlet que definen una función holomorfa y acotada en el semiplano

$$\mathbb{C}_0 := \{s \in \mathrm{Re}(s) > 0\},$$

espacio al que llamamos $\mathcal{H}_\infty$ (ver Teorema 2.1.4).

En este contexto, se puede ver que base de Riesz y marco son nociones equivalentes. Recordemos que un sistema $\{\varphi_n\}_n$ cumple la condición de **marco** (o **frame**) si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \tag{1}$$

para toda $f \in L^2(0,1)$, y es una **sucesión de Bessel** si cumple la desigualdad superior de (1).

En esta tesis, nos preguntamos qué sucede si en vez de tomar la definición completa de frame (con la cadena de desigualdades), consideramos por separado la desigualdad inferior y la superior (sucesión de Bessel).

Para poder presentar los resultados obtenidos sobre sistemas de dlataciones de una función $\varphi \in L_2(0,1)$ debemos primero establecer algunas definiciones.

Sea $\{e_n\}_n$ la base ortonormal de $L^2(0,1)$ dada por $e_n(x) = \sin(\pi n x)$. Siguiendo la idea de Beurling [5] de trasladarse al espacio de series de Dirichlet, los autores de [32] definen el operador S que a una función $f = \sum_n c_n e_n(x)$ de $L^2(0,1)$ le asigna la serie de Dirichlet

$$Sf(s) = \sum_n c_n n^{-s} \in \mathcal{H}^2.$$

En otras palabras, S es la isometría que manda la base ortonormal $\{e_n\}_n$ de $L_2(0,1)$ en la base ortonormal $\{n^{-s}\}_n$ de $\mathcal{H}_2$. Luego, prueban que el sistema $\{\varphi_n\}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$ si y solo si $S\varphi$ y $1/S\varphi$ pertenecen al espacio $\mathcal{M}$ de multiplicadores de $\mathcal{H}_2$. Nuestro avance consiste en desdoblar el teorema anterior y obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.2.5 (Antezana, Carando, S.). Sean $\varphi \in L^2(0,1)$, $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$ y $\mathcal{M}$ el espacio de multiplicadores de $\mathcal{H}^2$.

1) El sistema $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión Bessel si y solo si $S\varphi \in \mathcal{M}$.

2) El sistema $\{\varphi_n\}_n$ cumple la cota inferior de frame si y solo si $1/S\varphi \in \mathcal{M}$.

La principal dificultad con la que nos encontramos a la hora de probar 2) es que los operadores involucrados en la demostración no son necesariamente acotados, por lo que adaptamos estos resultados para operadores no acotados.

La siguiente pregunta es, naturalmente, qué sucede cuando el sistema $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión de Riesz. Recordemos que un sistema $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión de Riesz si satisface las condición (2.6) pero no necesariamente es un sistema completo, es decir, no genera todo el espacio $L^2(0,1)$. Más concretamente, nos preguntamos si existe alguna condición sobre la serie de Dirichlet $S\varphi$ que garantice que el sistema $\{\varphi_n\}_n$ sea una sucesión de Riesz. En el Teorema 2.3.5 logramos responder esta pregunta dando una una condición sobre la serie de Dirichlet $S\varphi$ en términos de sus límites horizontales. Para lograr esto la herramienta fundamental, desarrollada en la Sección 2.3.1, es un teorema de Fatou clásico sobre espacios de Hardy que se extiende a series de Dirichlet (para más información ver [21, 53]). A través de la transformada de Bohr, se obtiene otra equivalencia a que el sistema $\{\varphi_n\}_n$ sea una sucesión de Riesz que involucra condiciones sobre la función $f := \mathfrak{B}^{-1}(S\varphi)$ y el espacio de Hardy de funciones holomorfas acotadas.

Además, en la Sección 2.4 presentamos diferentes ejemplos en los cuales se aplican los resultados obtenidos. Mostramos funciones φ para las cuales el sistema asociado $\{\varphi_n\}$ satisface solo una de las desigualdades de la definición de marco y ejemplos de sucesiones ortonormales interesantes que no sean simplemente subsucesiones de $\{C\sin(n\pi x)\}_n$.

Por último, en la Sección 2.5 extendemos nuestros resultados a sistemas de dilataciones en varias variables, mediante identificación natural entre funciones de $(0,1)^k$ y las series de Dirichlet múltiples. Para esto es necesaria la teoría sobre series de Dirichlet múltiples desarrollada en [17] y [16]. Vale la pena destacar que esta teoría está íntimamente ligada con los espacios de Hardy vectoriales, conceptos con los que trabajamos en la segunda parte de esta tesis.

Los resultados desarrollados en este capítulo están recopilados en el artículo:

- Jorge Antezana, Daniel Carando, Melisa Scotti. *Splitting the Riesz basis con-*

dition for systems of dilated functions through Dirichlet series, Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Convergencia aleatoria incondicional de series de Dirichlet

El estudio y búsqueda de bases (y sistemas de coordenadas más generales) en un espacio de Banach X es de gran interés ya que tiene aplicaciones en diversas áreas (análisis armónico, procesamiento de señales, etc). El análisis de estos objetos es importante porque provee mejores formas de aproximar elementos de un espacio de Banach. Recordemos que un sistema $\{x_n\}_n$ es una base de Schauder de X si para todo vector x de X, existe una única expansión de la forma

$$x = \sum_n a_n x_n.$$

Entre las bases, las incondicionales tienen un rol central y un particular interés ya que le dan una estructura extra al espacio. Una base $\{x_n\}_n$ es incondicional si para todo $x \in X$ su expansión $x = \sum_n a_n x_n$ converge incondicionalmente, esto es si

$$\sum_n \varepsilon_n a_n x_n$$

converge para toda elección de signos $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Un ejemplo de base incondicional son las bases de Riesz, concepto que estudiamos en el Capítulo 2.

La noción de incondicionalidad también se puede estudiar en sistemas más generales, es decir, sistemas que no necesariamente sean una base de todo el espacio. En esta línea, se dice que un sistema $\{x_n\}_n$ es una **sucesión básica incondicional** si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^N$, y cualesquiera signos $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}^N$ se cumple que

$$\frac{1}{C}\Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\Big\| \leq \mathbb{E}_\varepsilon \Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n\Big\| \leq C\Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\Big\|. \tag{2}$$

Ha sido de gran interés hallar sucesiones básicas incondicionales en espacios de Banach. En esta dirección, fueron Gowers y Maurey quienes probaron en [28] que no todo espacio de Banach posee una sucesión básica incondicional, dando respuesta a un problema muy complicado. Esto llevó a considerar algunas versiones más débiles de esta definición que desarrollamos a continuación.

Una vez más, en lo que corresponde a la segunda parte de este trabajo (Capítulo 3), decidimos analizar las desigualdades de (2) por separado, obteniendo las siguientes dos nociones evidentemente más débiles que la incondicionalidad. Más precisamente, se dice que un sistema es RUC si satisface la desigualdad superior, mientras que se lo llame RUD si satisface la desigualdad inferior de la propiedad (2). Una observación importante y evidente de esta manera de definir RUC y RUD, es que una sucesión que cumple simultáneamente ambas propiedades es inmediatamente incondicional.

Los primeros en introducir la noción de convergencia aleatoria incondicional (RUC) son Billard, Kwapień, Pelczynski y Samuel en el artículo [6] (ver también [41]). Los autores dan la definición en términos de la convergencia aleatoria de series. Más concretamente, una serie $\sum_n x_n$ de un espacio de Banach es aleatoria incondicionalmente convergente (para nosotros casi incodincionalmente convergente, Definición 3.2.1) si $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge para casi toda elección de signos $\{\varepsilon_n\}_n \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ respecto a la medida de Haar normalizada. Luego, un sistema $\{x_n\}_n$ es RUC en X si la expansión de todo elemento es aleatoria incondicionalmente convergente. En la Proposición 3.2.3 probamos que efectivamente esta definición es equivalente a que se cumpla la desigualdad superior de (2).

En la segunda parte de esta tesis estudiamos sistemas RUC y RUD de series de Dirichlet vectoriales. En otras palabras, analizamos la convergencia aleatoria incondicional de series de Dirichlet vectoriales en espacios de Hardy. Convirtiendose en nuestro principal objeto de estudio las series aleatorias de la forma

$$D = \sum \varepsilon_n a_n n^{-s}, \tag{3}$$

donde $\{\varepsilon_n\}_n$ es una sucesión de variables aleatorias Rademacher independientes que toman los valores 1 y -1 con probabilidad $1/2$.

Si analizamos el caso escalar $X = \mathbb{C}$, se deduce de [14, Proposición 4] que la base canónica $\{n^{-s}\}_n \subset \mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ es RUC si y solo si $p \geq 2$, y RUD si y solo si $p \leq 2$. De esta manera, se recupera un resultado conocido que afirma que $\{n^{-s}\}_n$ es incondicional en $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ si y solo si $p = 2$. Esto nos lleva a considerar la que será nuestra principal pregunta respecto al caso vectorial: ¿Cuándo el sistema $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC en $\mathcal{H}_p(X)$ (respectivamente RUD), para cualquier elección de vectores $\{x_n\}_n \subset X$? ¿Tiene esto relación con alguna condición sobre el espacios subyacente X?

La primer pregunta tiene la siguiente reformulación equivalente. Supongamos que la serie de Dirichlet

$$D = \sum_n x_n n^{-s}$$

pertenece a $\mathcal{H}_p(X)$; ¿implica esto que $\sum_n \varepsilon_n x_n n^{-s}$ también pertenece a $\mathcal{H}_p(X)$ para casi toda elección de signos $\{\varepsilon_n\}_n \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$? Recíprocamente, ¿si $\sum_n \varepsilon_n x_n n^{-s}$ pertenece a $\mathcal{H}_p(X)$ para casi toda elección de signos $(\varepsilon_n)_n \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$, entonces $\sum_n x_n n^{-s}$ pertenece a $\mathcal{H}_p(X)$?

Retomando las ideas de Bohr y Hartmann, mediante técnicas probabilísticas en el reciente artículo [14] se describe la región donde una serie de Dirichlet aleatoria converge casi seguramente en la norma del espacio de Hardy vectorial de series de Dirichlet $\mathcal{H}_p(X)$ pero no absolutamente. Los espacios de Hardy aleatorios $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$ se definen como las series de Dirichlet aleatorias de la forma (3) que pertenecen a $\mathcal{H}_p(E)$ para casi toda elección de signos. Como consecuencia de las desigualdades de Khintchine, en [14] se muestra que en el caso escalar, los espacios de Hardy aleatorios $\mathcal{H}_p^{rad}$ son mutuamente isomorfos para $1 \leq p < \infty$. En la Proposición 3.3.5 probamos que pasa lo mismo en el caso vectorial.

Nuestra pregunta principal puede reescribirse entonces en términos de inclusiones entre los espacios $\mathcal{H}_p(X)$ y $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$. Uno de los resultados fundamentales en esta dirección es la siguiente caracterización (ver Teorema 3.5.1).

Teorema Sea X un espacio de Banach y $p \geq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\{x_n n^{-s}\}_n$ es *RUC* en $\mathcal{H}_p(X)$ para toda sucesión $\{x_n\}_n \subset X$.

2) Vale la inclusión
$$\mathcal{H}_p(X) \subseteq \mathcal{H}_p^{rad}(X).$$

3) Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n=1}^N \subset X$ se tiene
$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \Big\| \leq C \Big(\int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=1}^N x_n z^n \Big\|^p dz \Big)^{1/p}. \tag{4}$$

Además, en el caso $p = 2$ pudimos responder la pregunta que teníamos pendiente, caracterizar esta propiedad en términos de tipo y cotipo del espacio X (ver Teorema 3.5.1), agregando una equivalencia más

4) X tiene tipo 2.

Las nociones de tipo y cotipo de espacios de Banach se originan al querer extender la ley del paralelogramo, lo que permite de alguna manera medir cuánto difiere un espacio de Banach X de un espacio de Hilbert (siendo 2 el mejor tipo y cotipo posible). Además, están estrechamente relacionados con las propiedades geométricas del espacio.

Por otro lado, como aplicación del teorema de Green y Tao sobre progresiones aritméticas en conjuntos de números primos [29], construimos ejemplos que muestran que, en términos de convergencia aleatoria, las series de Dirichlet y las series de Fourier se comportan distinto. En particular, probamos que para un sucesión $\{x_n\}_n$ fija, podemos tener que $\{x_n n^{-s}\}_n$ sea RUC en $\mathcal{H}_p(X)$, mientras que $\{x_n z^n\}_n$ no lo sea en $H_p(X)$, y viceversa. Notar que esto no contradice la equivalencia entre 1) y 3) ya que en ellas se pide que la condición se cumpla para toda sucesión.

En cuanto a las publicaciones originales, los contenidos del Capítulo 3 se encuentran en:

- Daniel Carando, Felipe Marceca, Melisa Scotti, Pedro Tradacete. *Random unconditional convergence of vector-valued Dirichlet series, Journal of Functional Analysis.*

Esta tesis se organiza de la siguiente manera.

Capítulo 1

En este capítulo presentamos los contenidos previos necesarios, pilares del resto de los capítulos. En la Sección 1.1 desarrollamos diversas propiedades sobre series de Dirichlet escalares y vectoriales. Nos concentramos principalmente en la presentación de los espacios de Hardy de series de Dirichlet y sus características principales. Luego, en la Sección 1.2 desarrollamos definiciones básicas sobre bases y sucesiones básicas en un espacio de Banach X. Por último, presentamos propiedades de variables aleatorias a valores en un espacios de Banach. En particular, analizamos propiedades de series aleatorias Rademacher para luego poder desarrollar las nociones geométricas de tipo y cotipo de espacios de Banach.

Capítulo 2

Comenzamos este capítulo exponiendo las definiciones de base y sucesión de Riesz, marco y sucesión Bessel. Luego, estudiamos estas propiedades para el sistema de dilataciones dado por una función $\varphi \in L^2(0,1)$. Comenzamos analizando cuándo el sistema $\{\varphi_n\}$ cumple alguna de las desigualdades de la definición de marco en la Sección 2.2. Seguimos en la Sección 2.3 analizando el caso en que el sistema es una sucesión de Riesz. Caracterizamos todas estas propiedades en términos de los multiplicadores del espacio $\mathcal{H}_2$ de series de Dirichlet, y también en términos del espacios de Hardy del politoro. En la Sección 2.4 mostramos ejemplos que cubren todos los casos mencionados. Por último en la Sección 2.5 extendemos los resultados a sistemas de dilataciones en varias variables.

Capítulo 3

En la primer sección del capítulo exploramos en profundidad la definición de sucesión incondicional. A partir de esto, relajamos esta condición para definir las nociones de RUC y RUD. En la Sección 3.3 estudiamos los espacios de Hardy aleatorios de series de Dirichlet. Luego, estudiamos la propiedad de convergencia $\mathcal{H}_p$ aleatoria, espacios de Banach que cumplen que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC en $\mathcal{H}_p(X)$ para toda sucesión $\{x_n\}_n$. Por último, relacionamos la definición anterior con las nociones de tipo y cotipo de espacios de Banach.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Comenzamos este capítulo presentando todos los contenidos que necesitamos sobre series de Dirichlet escalares y vectoriales, herramienta fundamental para abordar los contenidos de los Capítulos 2 y 3. En esta línea, nos concentramos en la definición de los espacios de Hardy de series de Dirichlet y sus propiedades más relevantes. Estos contenidos se pueden consultar en [21], [40], entre otros.

Continuamos con algunas definiciones básicas sobre sucesiones y series en espacios de Banach. Luego, con la definición de variable aleatoria a valores vectoriales y varias propiedades sobre sumas y series aleatorias. Estos contenidos se encuentran propiamente desarrollados en [40, Capítulo 3] y [1, Capítulo 3]. Entre las series aleatorias tenemos particular interés por las series Rademacher, ya que sirven para luego desarrollar las nociones de tipo y cotipo de espacios de Banach. Por último presentamos la definición y propiedades básicas sobre operadores absolutamente sumantes. Estos últimos temas son cruciales para abordar los contenidos del Capítulo 3.

1.1. Series de Dirichlet

Una **serie de Dirichlet** es una expresión de la forma

$$\sum_{n} a_n n^{-s}, \tag{1.1}$$

donde $\{a_n\}_n \in \mathbb{C}$ y s es una variable compleja. Llamamos $\mathfrak{D}$ al conjunto de todas las series de Dirichlet pensadas de manera formal, es decir, sin preocuparnos por su convergencia. Este espacio es un álgebra con la multiplicación $*$ dada por

$$D * E = \Big(\sum a_n n^{-s}\Big) * \Big(\sum b_n n^{-s}\Big) = \sum_n \left(\sum_{dm=n} a_d b_m\right) n^{-s}, \tag{1.2}$$

y sus elementos inversibles son aquellas series $\sum a_n n^{-s}$ tales que el coeficiente $a_1 \neq 0$.

Es un resultado básico de análisis complejo que las series de potencias convergen en discos y los radios más grandes de convergencia y convergencia absoluta coincide. Sin embargo, este no es el caso de las series de Dirichlet.

Las series de Dirichlet convergen en semiplanos, es decir, conjuntos de la forma $\{\mathrm{Re}(s) > \sigma\}$. Como este tipo de conjuntos aparece en reiteradas oportunidades en este trabajo consideramos la notación

$$\mathbb{C}_\sigma = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma\}.$$

Dada una serie de Dirichlet D se define la abscisa de convergencia $\sigma_c(D)$ de forma tal que el semiplano donde la serie converge sea lo más grande posible. Más precisamente,

$$\sigma_c(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge en } \mathbb{C}_\sigma\}.$$

Se sabe que toda serie de Dirichlet (no divergente en todo punto) define una función holomorfa en

$$\{s : \mathrm{Re}(s) > \sigma_c\} = \mathbb{C}_{\sigma_c}.$$

De la misma manera se definen la abscisa de convergencia absoluta σ_a y la de convergencia uniforme σ_u. Es inmediato que para cualquier serie de Dirichlet D se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\sigma_c(D) \leq \sigma_u(D) \leq \sigma_a(D).$$

Proposición 1.1.1. *Para toda serie de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$ se tiene que*

$$\sigma_a(D) \leq \sigma_c(D) + 1.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, la serie $\sum_n a_n n^{-(\sigma_c+\varepsilon)}$ converge y, por lo tanto, $a_n n^{-(\sigma_c+\varepsilon)}$ tiende a cero. Luego, existen $C_\varepsilon, N > 0$ de manera que $|a_n| \leq C_\varepsilon n^{\sigma_c+\varepsilon}$ para todo $n \geq N$. Si tomamos s tal que $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_c + 1 + 2\varepsilon$ se tiene que

$$\sum_n |a_n n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n n^{-s}| + C_\varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty.$$

Esto implica que $\sigma_a \leq \sigma_c + 1 + 2\varepsilon$ y, como ε es arbitrario, se obtiene el resultado deseado. □

A diferencia de la series de potencias, para una serie de Dirichlet D las abscisas de convergencia, convergencia absoluta y convergencia uniforme no siempre coinciden. También existe otra abscisa importante llamada σ_b definida como

$$\sigma_b(D) = \text{ínf}\{\sigma \in \mathbb{R} : \text{ la función límite de } D \text{ es acotada en } \mathbb{C}_\sigma\}.$$

Esta abscisa indica el máximo semiplano en el que la serie converge y es acotada. El Teorema de Bohr [12], que enunciamos a continuación, permite establecer que

$$\sigma_u(D) = \sigma_b(D).$$

Teorema 1.1.2 (Teorema de Bohr)**.** *Sea $D = \sum_n a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet que define una función límite f acotada y holomorfa en $\mathbb{C}_0$. Luego, D converge uniformemente en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir, $\sigma_u \leq 0$. Además, existe una constante universal $C > 0$ tal que para $N \geq 2$ se tiene que*

$$\sup_{\text{Re}(s)>0} \Big| \sum_{n \leq N} a_n n^{-s} \Big| \leq C \log N \sup_{\text{Re}(s)>0} \big| f(s) \big|.$$

Fueron Hedenmalm, Lindqvist y Seip quienes en [32] introdujeron el espacio de Hardy de series de Dirichlet $\mathcal{H}_2$. Luego, Bayart [4] extendió está definición para todo $1 \leq p < \infty$ de la siguiente manera.

Un **polinomio de Dirichlet** es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s},$$

es decir, una serie de Dirichlet como en (1.1) pero donde solo finitos coeficientes a_n son no nulos. Se considera la norma dada por

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})} = \left(\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \Big| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \Big|^p dt \right)^{1/p}. \tag{1.3}$$

y se define $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ como la completación del espacio de polinomios de Dirichlet con esta norma. Es fácil ver que toda serie en $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ converge en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ y define una función homolomorfa allí. Más adelante veremos otra definición que no proviene de la completación del conjunto de polinomios de Dirichlet y que resulta equivalente.

En particular, para $p = 2$ es sencillo probar que

$$\left(\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \Big| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \Big|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

(se puede consultar [21, Proposición 1.11]). Esto muestra que otra manera de pensar al espacio $\mathcal{H}_2$ es como el conjunto de las series de Dirichlet cuyos coeficientes suman al cuadrado. Más precisamente,

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ \sum_n a_n n^{-s} : \| \sum_n a_n n^{-s} \|_{\mathcal{H}_2} = \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} < +\infty \right\}. \tag{1.4}$$

Este es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \sum_n a_n n^{-s}, \sum_n b_n n^{-s} \rangle = \sum_n a_n \overline{b_n}.$$

Además, toda serie D de $\mathcal{H}_2$ converge y define una función holomorfa (y analítica) en el semiplano $Re(s) > 1/2$ como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz. En efecto, si consideramos $D = \sum_n a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_n |a_n n^{-s}| &\leq \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |n^{-s}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n n^{-2\,\mathrm{Re}(s)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Luego, para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ la serie converge absolutamente y por lo tanto

$$\sigma_a(D) \leq \frac{1}{2}.$$

Además converge uniformemente en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ y define una función holomorfa en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$.

A los conjuntos $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ los notaremos simplemente $\mathcal{H}_p$ cuando no nos haga falta aclarar que estamos trabajando sobre el espacio escalar $\mathbb{C}$.

1.1.1. Los espacios $\mathcal{H}_\infty$, $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$ y $H_\infty(B_{c_0})$

Consideramos el subconjunto del espacio de series de Dirichlet $\mathfrak{D}$ formado por

Definición 1.1.3.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\infty = \Big\{ \sum a_n n^{-s} \in \mathfrak{D} : \sum a_n n^{-s} \ &\textit{converge en } \mathbb{C}_0 \textit{ y} \\ &\textit{su límite define una función acotada en } \mathbb{C}_0 \Big\}. \end{aligned}$$

Además, por el Teorema de Bohr, que la función límite esté acotada implica la convergencia uniforme de las sumas parciales en todo semiplano estrictamente contenido en $\mathbb{C}_0$. Por lo tanto, el límite define una función holomorfa en $\mathbb{C}_0$.

Este espacio resulta un espacio de Banach si se le asocia la norma

$$\left\| \sum a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} \left| \sum a_n n^{-s} \right|.$$

Esto se deduce del hecho de que $\mathcal{H}_\infty$ es un subespacio cerrado de $H_\infty(\mathbb{C}_0)$, el espacio de Banach compuesto de funciones holomorfas y acotadas de $\mathbb{C}_0$ dotado de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathrm{Re}\, s>0} |f(s)|.$$

Dicha inclusión es en realidad estricta. Todos estos resultados sobre el espacio $\mathcal{H}_\infty$ se pueden consultar en [21]. Además de ser une espacio de Banach $\mathcal{H}_\infty$ es un álgebra de Banach. Este resultado se encuentra probado en [21, Teorema 1.17] y a continuación reproducimos la demostración para fijar ideas que se usan durante esta tesis.

Teorema 1.1.4. *El espacio $\mathcal{H}_\infty$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. Dadas $D_1 = \sum a_n n^{-s}$ y $D_2 = \sum b_n n^{-s}$ en $\mathcal{H}_\infty$ y f_1, f_2 sus funciones límite $\in H_\infty(\mathbb{C}_0)$, queremos ver que $D_1 * D_2 \in \mathcal{H}_\infty$ y que

$$\|D_1 * D_2\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \|D_1\|_{\mathcal{H}_\infty} \|D_2\|_{\mathcal{H}_\infty}. \tag{1.5}$$

Por el Teorema de Bohr sabemos que $\sigma_u(D_i) = \sigma_b(D_i)$ para $i = 1, 2$. Como D_1 y D_2 pertenecen a $\mathcal{H}_\infty$ tenemos que $\sigma_u(D_i) \leq 0$. Por la Proposición 1.1.1 deducimos que entonces $\sigma_a(D_i) \leq 1$.

Veamos que la serie

$$D_1 * D_2 = \sum_n \left(\sum_{dm=n} a_d b_m \right) n^{-s}$$

converge absolutamente en $\mathbb{C}_1$. En efecto, para todo $s \in \mathbb{C}_1$ tenemos que

$$\sum_n \sum_{dm=n} |a_d b_m| n^{-\mathrm{Re}(s)} = \left(\sum_n a_n n^{-\mathrm{Re}(s)} \right) \left(\sum_n b_n n^{-\mathrm{Re}(s)} \right) < +\infty.$$

Si llamamos D a $D_1 * D_2$ y f a la función límite, probamos que $f = f_1 f_2$ en $\mathbb{C}_1$. Como $f_1 f_2$ es una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C}_0$ que extiende a f, por el principio de identidad deben coincidir en todo $\mathbb{C}_0$. Por lo tanto D está en $\mathcal{H}_\infty$ y se tiene

$$\|D\|_{\mathcal{H}_\infty} = \|f\|_\infty \leq \|f_1\|\|f_2\| = \|D_1\|_{\mathcal{H}_\infty}\|D_2\|_{\mathcal{H}_\infty},$$

como deseábamos. $\square$

A continuación presentamos los tres contextos y espacios que tienen un rol central a lo largo de toda esta tesis. Comenzaremos por el caso del los espacios de Hardy para $p = \infty$ y luego volveremos sobre esta idea para generalizarla a series de Dirichlet múltiples en la Sección 2.5.

La idea fundamental de Bohr fue relacionar las series de potencias en varias variables (pensadas de manera formal) con las series de Dirichlet (también pensadas formalemente) de la siguiente manera. Sea $\mathfrak{p} = \{p_n\}_n$ la sucesión de números primos ordenada crecientemente. Por el teorema fundamental de la artimética todo $n \in \mathbb{N}$ tiene una única representación de la forma

$$n = \mathfrak{p}^\alpha := p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Definimos entonces

$$\alpha(n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, \dots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}, \tag{1.6}$$

como el multi-índice que cumple que $\mathfrak{p}^{\alpha(n)} = n$.

Basándose en esto, Bohr definió la biyección

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : \mathfrak{P} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha &\xrightarrow{a_n = a_{\mathfrak{p}^\alpha} = c_\alpha} \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}. \end{aligned}$$

entre el espacio de series de potencias formales en infinitas variables $\mathfrak{P}$ y el espacio de series de Dirichlet formales $\mathfrak{D}$. La función $\mathfrak{B}$ es conocida como **la transformada de Bohr**. Es importante destacar que $\mathfrak{B}$ es una transformación lineal multiplicativa, i.e., es un isomorfismos de álgebras.

Hasta ahora trabajamos con funciones holomorfas definidas en algún subconjunto de $\mathbb{C}$. Queremos ver cómo se extiende esta noción a funciones definidas en algún conjunto abierto U de un espacio de Banach X. Decimos que $f : U \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** si es diferenciable en el sentido de Fréchet, esto es, si existe un funcional lineal y continuo x^* en X^* tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} = 0.$$

Nos interesa el caso especialmente en el que $U = B_{c_0}$, donde c_0 es es el espacio de sucesiones de números complejos que tienden a cero. Al espacio vectorial compuesto por todas funciones holomorfas y acotadas f de B_{c_0} en $\mathbb{C}$ lo notamos $H_\infty(B_{c_0})$. Este espacio dotado de la norma del supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in U} |f(x)|$$

resulta un espacio de Banach.

El siguiente teorema establece la relación entre funciones holomorfas de infinitas variables y las series de Dirichlet. Este resultado se encuentra en [32] (también puede ser consultado en [21, Teorema 3.8]) y es crucial para el resto este trabajo.

Teorema 1.1.5. *Vale la siguiente igualdad isométrica*

$$H_\infty(B_{c_0}) = \mathcal{H}_\infty.$$

La transformada de Bohr es el único isomorfimo isométrico de $H_\infty(B_{c_0})$ en $\mathcal{H}_\infty$ que a cada f le asigna $\sum a_n n^{-s} = \mathfrak{B}f$, i.e. $a_n = c_\alpha(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ con $n = \mathfrak{p}^\alpha$. Además, para cada $s \in \mathbb{C}_0$ vale que

$$f\left(\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}. \tag{1.7}$$

La siguiente observación es una consecuencia vital del teorema anterior.

Observación 1.1.6. *Toda f en $H_\infty(B_{c_0})$ tiene una representación monomial de la forma $f(z) \sim \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ que coincide con f en cada $z \in B_{c_0}$ con solo finitos lugares no nulos. El Diagrama 1.1.1 refleja esta idea, mostrando las asignaciones y los espacios involucrados.*

Además, se introducen estos espacios desde el punto de vista del análisis de Fourier, para lo que necesitamos algunas definiciones. Notamos $\mathbb{T}^\infty$ al politoro de varias variables complejas

$$\mathbb{T}^\infty = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : z_n \in \mathbb{C}, |z_n| = 1\}$$

y dw a su medida de Haar normalizada. Recordemos que al ser $\mathbb{T}^\infty$ un grupo compacto y abeliano, existe la medida de Haar que es invariante por la acción del grupo (en este caso rotaciones). Luego, para $f \in L^1(\mathbb{T}^\infty)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, el coeficiente α Fourier se define como

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(w) w^{-\alpha} dw.$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{P} & & \mathfrak{P} & & \mathfrak{D} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
H_\infty(\mathbb{T}^\infty) & & H_\infty(B_{c_0}) & & \mathcal{H}_\infty \\
\sum_\alpha \hat{f}(\alpha) w^\alpha & \xrightarrow{c_\alpha = \hat{f}(\alpha)} & \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha & \xrightarrow{a_n = a_{\mathfrak{p}^\alpha} = c_\alpha} & \sum_n a_n n^{-s}
\end{array}$$

Diagram 1.1.1: Relación entre los distintos espacios de Hardy.

Esto permite definir los espacios de Hardy para $1 \leq p \leq \infty$ como

$$H_p(\mathbb{T}^\infty) = \{f \in L_p(\mathbb{T}^\infty) : \widehat{f}(\alpha) \neq 0 \textit{ solo si } \alpha_j \geq 0 \textit{ para todo } j = 1, 2, \ldots\}.$$

Para los resultados que siguen y para el desarrollo del Capítulo 2 nos interesan especialmente los casos $p = 2$ y $p = \infty$.

Es un resultado conocido que una función $f \in L_1(\mathbb{T}^\infty)$ está unívocamente determinada por sus coeficientes de Fourier y que la función $f \rightsquigarrow \hat{f}(\alpha)$ es continua de $L_1(\mathbb{T}^\infty)$ en $\mathbb{C}$. Por lo que $H_p(\mathbb{T}^\infty)$ es un subespacio cerrado de $L_p(\mathbb{T}^\infty)$ y, en consecuencia, un espacio de Banach. Estos resultado se puede encontrar, por ejemplo, en [21, Teorema 5.17]). También se prueba allí que contamos con tres contextos (o "mundos") que son esencialmente el mismo (ver [21, Corollary 5.3]). Más precisamente, el Corolario 5.3 de [21] afirma lo siguiente.

Corolario 1.1.7. *Los siguientes espacios son isomorfos como espacios de Banach*

$$H_\infty(\mathbb{T}^\infty) = H_\infty(B_{c_0}) = \mathcal{H}_\infty,$$

identificando coeficientes monomiales, coeficientes de Fourier y coeficientes de Dirichlet. El mismo resultado vale para $H_2(\mathbb{T}^\infty)$, es decir,

$$H_2(\mathbb{T}^\infty) = \mathcal{H}_2$$

isométricamente.

Notar que la segunda afirmación es mucho más simple ya que la transformada de Bohr manda la base ortogonal $\{z^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ para $H_2(\mathbb{T}^\infty)$ en $\{n^{-s}\}_n$ una base ortogonal para $\mathcal{H}_2$.

Estas igualdades son cruciales ya que nos permiten transcribir nuestras preguntas de un contexto al otro.

1.1.2. Los espacios $\mathcal{H}_p(X)$

Esta esta subsección está dedicada a introducir algunos conceptos fundamentales de la teoría de las series de Dirichlet vectoriales. Todos estos contenidos se encuentran en [21], [48] y [20].

Dados $1 \leq p < \infty$ y un espacio de Banach X, se define $L_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ como el espacio de funciones p-Bochner integrables $f : \mathbb{T}^\infty \to X$ respecto a la medida de Haar normalizada. Para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0 \dots) \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ notaremos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{\alpha_m}$.

Nuevamente toda $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ está determinada por su serie de Fourier (formal)

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}} \hat{f}(\alpha) z^\alpha,$$

donde

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(w) w^{-\alpha} dw.$$

Al igual que en el caso escalar se tiene la siguiente observación.

Observación 1.1.8. *Para toda función $f \in L_1(\mathbb{T}^\infty, X)$ y todo multi-índice α vale que*

$$\|\hat{f}(\alpha)\|_X \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

Por propiedad de la integral de Bochner y gracias a que $|w^{-\alpha}| = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|\hat{f}(\alpha)\|_X &\leq \int_{\mathbb{T}^\infty} \|f(w) w^{-\alpha}\|_X dw \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^\infty} \|f(w)\|_X |w^{-\alpha}| dw = \|f\|_{L_1(\mathbb{T}^\infty, X)}. \end{aligned}$$

Esto muestra que la asignación $f \rightsquigarrow \hat{f}(\alpha)$ es continua de $L_1(\mathbb{T}^\infty, X)$ en X, más aún, es una contracción. Gracias a esto podemos definir el los espacios $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ como los subespacios cerrados de $L_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ compuestos de todas las funciones f con $\hat{f}(\alpha) = 0$ siempre que $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \setminus \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$.

Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0 \dots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ y $n(\alpha) = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m} \in \mathbb{N}$ como antes, podemos considerar formalmente la transformada de Bohr

$$\mathcal{B}\Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_\alpha z^\alpha \Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\alpha(n)} n^{-s},$$

y definir $\mathcal{H}_p(X)$ como la imagen de $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ equipada con la norma que hace de esta transformación una isometría.

Definición 1.1.9. *Dado $1 \leq p \leq \infty$ y un espacio de Banach X. Se definen los espacios de Hardy de series de Dirichlet vectoriales $\mathcal{H}_p(X)$ como la imagen de $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ a través de la transformada de Bohr $\mathfrak{B}$, esto es*

$$\mathcal{H}_p(X) := \mathfrak{B}(H_p(\mathbb{T}^\infty, X)). \tag{1.8}$$

Más precisamente una serie de Dirichlet $D = \sum_n x_n n^{-s}$ pertenece a $\mathcal{H}_p(X)$ si existe una función $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ tal que $\hat{f}(\alpha) = x_{n(\alpha)}$ para todo α. Definimos la norma en $\mathcal{H}_p(X)$ como

$$\left\| D \right\|_{\mathcal{H}_p(X)} := \left\| \mathfrak{B}^{-1}(D) \right\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

En otras palabras,

$$\Big\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} = \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} z^\alpha \Big\|_{H_p(\mathbb{T}^\mathbb{N}, X)}.$$

Gracias a esta isometría es que podemos pasar de un contexto al otro sin que la norma de la serie que estamos considerando sea alterada.

Observación 1.1.10. *Los espacios $\mathcal{H}_p(X)$ están incluidos entre sí como los espacios $L_p(\mathbb{T}^\mathbb{N}, X)$, es decir $\mathcal{H}_q(X) \subset \mathcal{H}_p(X)$ para $1 \leq p < q < \infty$. Más aún, si $1 \leq p \leq q < \infty$ se tiene las siguiente desigualdad entre sus normas*

$$\Big\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \leq \Big\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_q(X)}.$$

La observación anterior se deduce directamente de la definición de $\mathcal{H}_p(X)$ ya que $H_p(\mathbb{T}^\mathbb{N}, X)$ es, por definición, un subespacio cerrado de $L_p(\mathbb{T}^\mathbb{N}, X)$. La desigualdad entre sus normas se deduce de la desigualdad de Hölder y de que la medida de $\mathbb{T}^\infty$ es uno.

La definición de los espacios de Hardy vectoriales fue introducida por primera vez en [20] y es una extensión del caso escalar definido por Bayart como vimos en (1.3). Por el Teorema ergódico de Birkhoff-Khinchine [8] se obtiene una descripción equivalente de los espacios a través de polinomios de Dirichlet $D = \sum_{k=1}^N x_n n^{-s}$ ya que vale la igualdad

$$\left\| D \right\|_{\mathcal{H}_p(X)} = \left(\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n n^{-it} \Big\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

A continuación presentamos dos propiedades fundamentales de las series de Dirichlet de $\mathcal{H}_p(X)$ que usaremos a lo largo de esta tesis.

Proposición 1.1.11. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

(1) Las normas de los coeficientes de una serie de Dirichlet $D \in \mathcal{H}_p(X)$ están acotados por $\|D\|_{\mathcal{H}_p(X)}$. Más precisamente, el operador c_n que devuelve el coeficiente enésimo es contractivo. Como consecuencia tenemos que si una sucesión $(D_N)_N$ converge en $\mathcal{H}_p(X)$ a una serie D, los coeficientes $c_n(D_N)$ convergen a $c_n(D)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) El conjunto de polinomios de Dirichlet $\sum_{n=1}^N x_n n^{-s}$ es denso en $\mathcal{H}_p(X)$ para $1 \leq p < \infty$ ya que los polinomios analíticos son densos en $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$.

Demostración. La afirmación *(1)* se deduce de la Observación 1.1.8 y de la definición de los espacios $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ y $\mathcal{H}_p(X)$: dada $D \in \mathcal{H}_p(X)$, llamemos f a antitransformada de Bohr de D, es decir, a la función de $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ que cumple que $D = \mathfrak{B}(f)$. Para cada n consideremos c_n y $n = \mathfrak{p}^\alpha$ de manera que $c_n = \hat{f}(\alpha)$. Luego, por la inclusión de los espacios $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|c_n\|_X = \|\hat{f}(\alpha)\|_X &\leq \|f\|_{L_1(\mathbb{T}^\infty, X)} = \|f\|_{H_1(\mathbb{T}^\infty, X)} \\ &\leq \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)} = \|\mathfrak{B}^{-1}(D)\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)} = \|D\|_{\mathcal{H}_p(X)}. \end{aligned}$$

Donde las últimas igualdades provienen del la definición de Transformada de Bohr y de que esta es una isometría.

Por otra parte, la afirmación (2) está en [21, Proposition 24.6]. □

1.2. Bases y sucesiones básicas

A lo largo de estas secciones X es un espacio de Banach. A continuación presentamos algunas propiedades básicas sobre bases, sumas y series en espacios de Banach.

Definición 1.2.1. *Una sucesión de vectores $\{x_n\}_n$ en un espacio de Banach X se dice* ***base*** *o* ***base de Schauder*** *de X si para todo elemento x de X existe una única sucesión $\{a_n\}_n$ de escalares tales que*

$$x = \sum_n a_n x_n,$$

es decir, que las sumas parciales $S_N := \sum_{n=1}^N a_n x_n$ convergen en norma a x. En tal caso, como la sucesión $\{a_n\}_n$ es única podemos definir $x_n^*(x) := a_n$.

Teorema 1.2.2. *Una sucesión $\{x_n\}_n$ de elementos no nulos de un espacio de Banach X es una base si y solo si se cumplen simultáneamente:*

(1) El conjunto $\{x_n\}_n$ genera X, es decir, $X = \overline{\text{gen}}\{x_n\}_n$.

(2) Existe una constante $K > 0$ tal que para todo $N \leq M$, y toda sucesión de escalares $\{a_n\}_n$ se tiene que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\| \leq K \Big\| \sum_{n=1}^{M} a_n x_n \Big\|.$$

Una sucesión de vectores no nulos que satisface (2) se conoce como sucesión básica. Por lo tanto, una sucesión $\{x_n\}_n$ de un espacio de Banach X se dice **sucesión básica** si es base (de Schauder) del subespacio cerrado generado por ella misma.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X **converge incondicionalmente** si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para toda permutación π de los números los naturales.

Por el teorema de Riemann, la convergencia incondicional y absoluta de sumas de escalares coinciden y las sumas en cualquier orden dan lo mismo, como para todo funcional $x^* \in X^*$ vale que $\sum_n x^*(x_{\pi(n)})$ converge, tenemos que

$$\left\langle x^*, \sum_n x_{\pi(n)} \right\rangle = \sum_n x^* \left(x_{\pi(n)} \right) = \sum_n x^*(x_n) = \left\langle x^*, \sum_n x_n \right\rangle.$$

Gracias a que el espacio dual separa puntos deducimos que si $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente, entonces $\sum_n x_{\pi(n)} = \sum_n x_n$ para toda permutación π, es decir, todas las sumas convergen al mismo valor.

A continuación definimos una sucesión de variables aleatorias que va a ser fundamental para toda esta tesis. Las siguientes variables representan la idea de considerar elecciones de signos al azar y cumplen varias propiedades muy útiles que analizamos en las próximas secciones.

Definición 1.2.3. *Llamamos **sucesión de variables Rademacher** a cualquier sucesión variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ que cumplan que*

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \tfrac{1}{2} \text{ para todo } n.$$

Una propiedad importante de las sucesiones de variables Rademacher independientes es que forman un sistema ortonormal en el sentido que $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ siempre que $i \neq j$ y $\mathbb{E}(\varepsilon_j^2) = 1$ para todo j.

Una manera de obtener sucesiones Rademacher es mediante lo que se conoce como funciones Radamacher.

Definición 1.2.4. *Llamamos sistema de* ***funciones Rademacher*** $\{r_n\}_n$ *a la sucesión compuesta por las funciones* $r_n : [0,1] \to \{-1,1\}$ *definidas por*

$$r_n(t) = signo(\sin(2^n \pi t)), \qquad t \in [0,1] \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Con la definición de variables Rademacher podemos presentar las siguientes equivalencias a la convergencia incondicional de una serie en un espacio de Banach.

Proposición 1.2.5. *Sea* $\{x_n\}_n$ *una sucesión en un espacio de Banach* X*. Son equivalentes:*

(a) la serie $\sum_n x_n$ *converge incondicionalmente;*

(b) las series $\sum_n \varepsilon_n x_n$ *convergen para toda elección de signos* $\varepsilon_n = \pm 1$*.*

(c) las series Rademacher $\sum_n r_n(t) x_n$ *convergen para todo* $t \in [0,1]$.

Una vez definida la suma incondicional podemos pasar a una definición muy importante que estudiaremos con más detalle en el Capítulo 3, la definición de base incondicional. La importancia de este concepto radica en que luego vamos a trabajar con dos propiedades más débiles a las que llamaremos RUC y RUD.

Definición 1.2.6. *Una base* $\{x_n\}_n$ *de un espacio de Banach* X *se denomina* ***base incondicional*** *si, para todo* $x \in X$*, la serie*

$$\sum_{n}^{\infty} x_n^*(x) x_n$$

converge incondicionalmente.

Equivalentemente (ver [40, Proposición III.3]), una base $\{x_n\}_n$ es incondicional si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^N$, y toda elección de signos $\varepsilon_n \in \{-1,1\}^N$ se cumple que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \le C \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|. \tag{1.9}$$

A la mejor de estas constantes se la llama **constante de incondicionalidad** de la base $\{x_n\}_n$.

Algunos ejemplos conocidos de bases incondicionales son la base canónica de c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, y cualquier base ortogonal de un espacio de Hilbert. Por otro lado, la base sumante de c_0 definida por

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.10}$$

donde $\{e_i\}_i$ denota la base canónica de c_0, es una base condicional (no incondicional) de c_0. En cuanto a la base de Fourier $\{e^{2\pi i k t}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L_p[0,1]$, es un resultado conocido que la base es incondicional para $p = 2$ y condicional para cualquier otro $p \neq 2$.

Teorema 1.2.7. *[40, Proposición III.5, Capítulo 3] Sea $1 \leq p < +\infty$. Luego, toda sucesión de variables aleatorias centradas e independientes $\{Y_n\}_n \in L_p(\Omega, \mathbb{P})$ es sucesión básica incondicional en $L_p(\Omega, \mathbb{P})$.*

Por ejemplo, si consideramos $\{\varepsilon_n\}_n$ variables Rademacher independientes definidas en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$, como las variable son centradas ($\mathbb{E}(\varepsilon_n) = 0$), tenemos que $\{\varepsilon_n\}_n$ es una sucesión básica incondicional en $L_p(\Omega, \mathbb{P})$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

Presentamos a continuación una propiedad importante de las bases incondicionales (ver [40, Proposición III.5]), que nos permitirá deducir el principio de contracción, Teorema 1.3.5.

Sea $\{x_n\}_n$ una base incondicional de X, con constante de incodicionalidad C. Luego, para todo $x = \sum_n a_n x_n \in X$ y toda sucesión de escalares $\{\lambda_n\}_n$, se tiene

$$\Big\| \sum_n \lambda_n a_n x_n \Big\| \leq C \sup_n |\lambda_n| \Big\| \sum_n a_n x_n \Big\|, \text{ si } X \text{ es real }. \tag{1.11}$$

Si X es un espacio de Banach complejo sigue valiendo el mismo resultado con $2C$ en vez de C.

1.3. Variables aleatorias en espacios de Banach

Estas últimas definiciones sobre incondicionalidad nos llevan a estudiar lo que se conocen como series (aleatorias) Rademacher vectoriales, estas son series de la forma

$$\sum_n \varepsilon_n x_n,$$

con ε_n variables Radamacher i.i.d. y x_n en un espacio de Banach X. Notar que por la definición de variables Rademacher, para cada $\omega \in \Omega$ esta suma se corresponde con alguna elección de signos

$$\sum_n \pm x_n.$$

Como son un caso particular de series aleatorias vectoriales necesitaremos algunas definiciones sobre teoría de probabilidad en espacios de Banach. Además, durante esta tesis usaremos algunos resultados para otras series de variables aleatorias, como por ejemplo series Gaussianas y Steinhauss.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ su $\sigma-$álgebra de Borel. Una* ***variable aleatoria*** *a valores en el espacio de Banach X es una función $Y : \Omega \to X$ que satisface:*

(1) Y es $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ medible, es decir, $Y^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$.

(2) Existe un espacio de Banach separable X_0 donde Y toma valores para casi todo punto. Equivalentemente $\mathbb{P}(Y \in X_0) = 1$.

Al conjunto de clases de equivalencia (c.t.p.) de variables aleatorias lo notamos $L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; X)$ o simplemente $L_0(\Omega; X)$.

Para $1 \leq p < +\infty$, denotamos $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, X)$ (abreviado $L_p(X)$) al espacio de variables aleatorias $X \in L_0(X)$ tales que

$$\mathbb{E}(\|X\|^p) = \int_\Omega \|X\|^p \, d\mathbb{P} < +\infty.$$

Los siguientes resultados clásicos sobre sumas y series de variables aleatorias a valores en un espacio de Banach son de utilidad para los capítulos que siguen.

Proposición 1.3.2 (Desigualdad de Levy)**.** *[38] Sea $\sum_{k \leq n} Y_k x_k$ una serie aleatoria en el espacio de Banach X con Y_k variables aleatorias escalares. Luego, para todo $a > 0$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(\max_{k \leq n} \| \sum_{j \leq k} Y_j x_j \| \geq a) \leq 2\mathbb{P}(\| \sum_{j \leq n} Y_j x_j \| \geq a).$$

Teorema 1.3.3 (Itô-Nisio)**.** *[37, Theorem 2.1.1] Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ variables aleatorias simétricas a valores en un espacio de Banach separable Y. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ *converge casi seguramente;*

(b) *Existe una variable aleatoria* R *que toma valores en* Y *y una familia* $\mathcal{F} \subseteq Y'$ *que separa puntos de* Y*, de manera tal que para todo* y' *en* $\mathcal{F}$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} y'(Y_n)$ *converge casi seguramente a* $y'(R)$*.*

El Teorema 1.2.7 de la sección anterior se extiende para variables aleatorias a valores en un espacio de Banach X (se pueden consultar [40, Capítulo 4, Sección IV], [26, Proposición 12.2] entre otros). Consecuencia de esto es la sigueinte herramienta que más usaremos durante todo este trabajo, conocida como el **principio de contracción**.

Teorema 1.3.4 (Versión cualitativa del principio de contracción)**.** *Sea* $\{Y_n\}_n$ *una sucesión de variables aleatorias de* $L_0(X)$*, simétricas e independientes tales que* $\sum_n Y_n$ *converge casi seguramente. Luego para toda sucesión acotada de escalares* $(\alpha_n)_n$ *, la serie* $\sum \alpha_n Y_n$ *converge casi seguramente.*

También nos será de mucha utilidad la versión cuantitativa del principio de contracción ya que nos dice como comparar las series del enunciado anterior.

Teorema 1.3.5 (Versión cuantitativa del principio de contracción)**.** *Sea* X *un espacio de Banach real y* $Y_1, \ldots, Y_N \in L^p(X)$ *variables aleatorias independientes, con* $1 \leq p < \infty$*. Las siguientes afirmaciones son válidas.*

(1) *Si las variables* Y_n *son simétricas, la sucesión* $\{Y_n\}_n$ *es incondicional con constante de incondicionalidad* 1 *y, por* (1.11)*, se tiene que*

$$\Big\| \sum_n \alpha_n a_n Y_n \Big\|_{L^p(X)} \leq \sup_n |\alpha_n| \Big\| \sum_n a_n Y_n \Big\|_{L^p(X)},$$

para todo α_n*,* $a_n \in \mathbb{R}$

(2) *Si las variables* Y_n *son centradas (i.e.* $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ *para todo* n*), la sucesión de v.a.* $\{Y_n\}_n$ *es incondicional con constante de incondicionalidad menor o igual a* 2 *y*

$$\Big\| \sum_n \alpha_n a_n Y_n \Big\|_{L^p(X)} \leq 2 \sup_n |\alpha_n| \Big\| \sum_n a_n Y_n \Big\|_{L^p(X)},$$

para todo α_n*,* $a_n \in \mathbb{R}$*.*

Si el espacio de Banach X *es complejo se deben remplazar las constante por* 2 *y* 4 *respectivamente. Si las variables* Y_n *son de simetría compleja, es decir* $\theta Y_n \sim Y_n$ *para todo* $|\theta| = 1$*, la constante de incondicionalidad sigue siendo* 1*.*

Es importante resaltar que este principio será una herramienta fundamental en lo que resta de esta tesis. Por ejemplo, como consecuencia del principio de contracción se deduce que $\{r_n x_n\}_n$ es una sucesión básica $1-$incondicional de $L_p([0,1], X)$ para todo $1 \leq p < \infty$, siempre y cuando x_n sea distinto de cero para todo n.

En particular, nos interesa trabajar con la aplicación del principio de contracción para variables Radamacher con coeficientes complejos ya que es la que usamos con mayor frecuencia. En este caso, se puede mejorar la constante 2, hecho que está relacionado con los conjuntos de Sidon y se encuentra probado en [54]. El resultado mencionado, escrito en términos de esperanzas, se enuncia de la siguiente manera.

Para toda sucesión de escalares complejos $\{a_n\}_{n=1}^N$, para toda sucesión de vectores $\{x_n\}_{n=1}^N$ de un espacio de Banach X y para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \leq \frac{\pi}{2} \max |a_n| \, \mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \Big\|. \tag{1.12}$$

Sumas y series Rademacher

En lo que sigue consideraremos variables aleatorias Rademacher dadas por funciones Rademacher r_n y $\Omega = [0,1]$. Dado un espacio de Banach X y una sucesión de vectores $\{x_n\}_n$ a las series aleatorias de la pinta

$$\sum_n r_n x_n$$

las llamamos **series Rademacher**, y en el caso en que la suma es finita, **sumas Rademacher**.

A continuación estudiamos varias propiedades particulares de este tipo de series y sumas. Por un lado, todos estos resultados van a ser utilizados varias veces durante esta tesis. Por otro, son los pilares para entender los conceptos de tipo y cotipo de un espacio de Banach, nociones que desarrollamos en la próxima sección.

En la Proposición 1.2.5 estudiamos equivalencias a que una serie Rademacher converja en todo punto. La siguiente proposición, en cambio, habla de la convergencia casi segura, es decir la convergencia en casi todo punto del espacio Ω respecto a la medida dada por $\mathbb{P}$.

Proposición 1.3.6. *Las siguientes condiciones sobre una serie Rademacher en un espacio de Bananch X son equivalentes*

(a) La serie aleatoria $\sum_n r_n x_n$ converge casi seguramente.

(b) La serie aleatoria $\sum_n r_n x_n$ *converge en* $L_p([0,1],X)$ *para algún* $1 \leq p < \infty$.

(c) La seria aleatoria $\sum_n r_n x_n$ *converge en* $L_p([0,1],X])$ *para todo* $1 \leq p < \infty$.

La desigualdad de Khintchine muestra un importante propiedad de este sistema cuando consideramos coeficientes escalares.

Teorema 1.3.7 (Desigualdad de Khintchine)**.** *Existen constantes positivas* A_p, B_p $(1 \leq p < \infty)$ *tales que para para todo* $N \in \mathbb{N}$ *y toda sucesión finita de escalares* $\{a_n\}_{n=1}^N$ *se verifica que*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \Big\| \sum_{n=1}^N a_n r_n \Big\|_{L_p[0,1]} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

La desigualdad anterior está escrita en términos de las funciones Rademacher, pero podemos reescribirla para cualquier sucesión de variables aleatorias Radamacher i.i.d $\{\varepsilon_n\}$. En efecto, como r_n y ε_n están idénticamente distribuidas tenemos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^N a_n r_n \Big\|_{L_p[0,1]}^p = \int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^N a_n r_n(t) \Big|^p dt = \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \Big\|^p = \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \Big\|^p.$$

Consideremos ahora coeficientes en un espacio de Banach X arbitrario en vez de escalares en $\mathbb{C}$. En este caso la desigualdad de Khintchine no es necesariamente válida. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado de Kahane (ver [35, Capítulo 2] o [26, 11.1]). Cuando trabajemos con expresiones de la forma $\mathbb{E}\| \sum_n \varepsilon_n x_n \|$, nos será de gran utilidad.

Teorema 1.3.8 (Desigualdad de Kahane-Khintchine)**.** *Para todo* $1 \leq p < \infty$ *existe una constante* K_p *tal que, para todo espacio de Banach* X *y para toda sucesión finita* $\{x_n\}_{n=1}^N \in X$*, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\frac{1}{K_p} \left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \Big\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \Big\| \leq K_p \left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \Big\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.13}$$

1.4. Tipo y cotipo de espacio de Banach

En esta sección daremos algunas definiciones básicas y propiedades de la noción de tipo y cotipo de espacios de Banach. Estas nociones fueron desarrolladas por Maurey y Piesier y serán indispensables para abordar los temas presentados hacia el final del Capítulo 3.

Definición 1.4.1. *Definimos la* ***distancia de Banach-Mazur*** *entre dos espacios de Banach X e Y isomorfos como*

$$d(X,Y) = \text{ínf}\{\|T\|\|T^{-1}\| : T : X \to Y \textit{ isomorfismo}\}.$$

Por convención diremos que $d(X,Y) = \infty$ si X e Y no son isomorfos.

Si trabajamos en un espacio de Banach X y tomamos un gran número de vectores $x_1, \ldots, x_N$, la desigualdad triangular $\|\sum_{n=1}^N x_n\| \leq \sum_{n=1}^N \|x_n\|$ se vuelve poco precisa. En cambio, los espacios de Hilbert tiene una estructura mucho más rica, y si los vectores x_n son ortogonales, se tiene exactamente que

$$\Big\|\sum_{n=1}^N x_n\Big\| = \left(\sum_{n=1}^N \Big\|x_n\Big\|^2\right)^{1/2}.$$

Más en general, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.4.2 (Identidad del paralelogramo generalizada)**.** *Sea X un espacio de Banach. Entonces, valen las siguientes afirmaciones:*

(1) X es isométricamente isomorfo a un espacio de Hilbert si y solamente si, para todo $x, y \in X$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(2) Siempre vale que

$$\frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(3) Para todo espacio de Hilbert H, y todo $x_1, \ldots, x_n \in H$, se tiene

$$\frac{1}{2^N} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_N x_N\|^2 = \sum_{i=1}^N \|x_n\|^2.$$

(4) Si X es isomorfo a un espacio de Hilbert H,con distancia de Banach-Mazur $d(X,H) \leq C$, entonces se tiene

$$\frac{1}{C^2} \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2 \leq \frac{1}{2^N} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_N x_N\|^2 \leq C^2 \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2.$$

La demostración de la proposición anterior se puede consultar [39, pág. 161].

Otra forma de escribir $\sum\limits_{\theta_i=\pm 1}$ es utilizar variables aleatorias de Rademacher independientes $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$, puesto que estas representan cualquier elección de signos. En efecto,

$$\frac{1}{2^N}\sum_{\theta_i=\pm 1}\|\theta_1 x_1+\ldots+\theta_N x_N\|^2=\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n\Big\|^2=\int_\Omega \Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n(\omega)x_n\Big\|^2 d\mathbb{P}(\omega).$$

Por lo tanto, la desigualdad (4) se puede reescribir como

$$\frac{1}{C}\left(\sum_{n=1}^N\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\Big\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n x_n\Big\|_{L_2(\Omega,X)}\leq C\left(\sum_{n=1}^N\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De aquí se desprenden dos preguntas naturales:

(a) ¿Qué pasa si consideramos una sola de las desigualdades y los vectores x_n en un espacio de Banach arbitrario?

(b) ¿Qué pasa si cambiamos el exponente 2?

Esto nos lleva a considerar las siguientes desigualdades.

$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n x_n\Big\|^r\right)^{1/r}\leq C\left(\sum_{n=1}^N\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{1}$$

$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n x_n\Big\|^r\right)^{1/r}\geq \frac{1}{C}\left(\sum_{n=1}^N\|x_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

Estas desigualdades nos permitirán, en cierto sentido, medir cuanto dista un espacio de Banach X de ser un espacio de Hilbert.

Algunas observaciones. Primero, el rol de r no es importante ya que podemos cambiarlo gracias a la desigualdad de Khintchine-Kahane (Teorema 1.3.8). La segunda observación es que, si queremos que (1) y (2) valgan para toda sucesión finita (de cualquier largo N) necesariamente $p\leq 2$ y $q\geq 2$. En efecto, si tomamos $r=2$ y tomamos un mismo vector x de norma 1 obtendremos de (1) que $\sqrt{N}\leq CN^{\frac{1}{p}}$, para todo $N\geq 1$. Esto solo es posible si $p\leq 2$. Del mismo modo, (2) exige que $q\geq 2$. Toda esta discusión nos lleva a considerar las siguientes dos definiciones.

Definición 1.4.3. *Sea $1 \leq p \leq 2$. Diremos que un espacio de Banach X tiene* ***tipo p*** *si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión finita $x_1, \ldots, x_N$ de elementos de X se tiene*

$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\Big\|^p\right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^p\right)^{1/p}.$$

A la mejor constante C la llamaremos ***constante de tipo p*** *de X, y la notaremos $T_p(X)$.*

Definición 1.4.4. *Sea $2 \leq q \leq \infty$. Diremos que un espacio de Banach X tiene* ***cotipo q*** *si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión finita $x_1, \ldots, x_N$ de elementos de X se tiene*

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^q\right)^{1/q} \leq C \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\Big\|^q\right)^{1/q}.$$

A la mejor constante C que verifica la desigualdad anterior la llamaremos ***constante de cotipo q*** *de X, y la notaremos $C_q(X)$.*

Las siguientes propiedades sobre tipo y cotipo de une espacio de Banach son relevantes.

(1) Si un espacio tiene tipo p, entonces tiene tipo $\tilde{p}$ para todo $\tilde{p} \leq p$. Análogamente, si tiene cotipo q también tiene cotipo $\tilde{q}$ para todo $\tilde{q} \geq q$.

(2) Todo espacio es trivialmente de tipo 1 (esto es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular), y de cotipo $+\infty$ ya que $\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\|_2 \geq \max_{n \leq N} \|x_n\|$, debido a la simetría de las variables.

Diremos que X tiene **tipo no trivial** (respectivamente **cotipo finito o no trivial**) si tiene tipo p para algún $p > 1$ (respectivamente cotipo q para algún $q < +\infty$).

(3) Es un resultado conocido y no trivial que la condición de tipo no trivial es más fuerte que la de cotipo finito. Más precisamente, si X tiene tipo no trivial entonces X tiene cotipo finito [34, Corolario 7.3.11.].

Dado un espacio de Banach X llamamos $\mathcal{F}_X$ el conjunto de todos los subespacios de dimensión finita de X. La siguiente definición es crucial para poder enunciar el teorema de Maurey-Pisier [44] (ver [26, Capítulor 14]) que es de mucha utilidad hacia el final del Capítulo 3.

Definición 1.4.5. *Sean X e Y espacios de Banach. Decimos que Y es **finitamente representable** en X si para todo $\varepsilon > 0$ cada subespacio de dimensión finita de Y es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a un subespacio de X. En otras palabras, si dado $\varepsilon > 0$ y $F \in \mathcal{F}_Y$ existe $E \in \mathcal{F}_X$ y un isomorfimos $u : F \to E$ tal que $\|u\|\|u^{-1}\| \leq 1+\varepsilon$.*

Teorema 1.4.6 (Maurey-Pisier)**.** *Sean X un espacio de Banach de dimensión infinita y*

$$p_X := \sup\{p : X \text{ tiene tipo } p\} \qquad y \qquad q_X := \inf\{q : X \text{ tiene cotipo } q\}.$$

Luego, ℓ_{p_X} y ℓ_{q_X} son finitamente representables en X. Más aún, ℓ_r es finitamente replesentable en X para todo $r \in [p_X, 2]$.

1.5. Operadores p-sumantes

Los operadores sumantes, introducidos por Grothendiek en [30], son una herramienta fundamental en la teoría moderna de espacios de Banach (ver, por ejemplo, [26]). En esta sección haremos una breve introducción a estos operadores y enunciaremos algunas propiedades fundamentales que junto con la noción de tipo y cotipo utilizaremos para concluir el teorema más importante del Capítulo 3.

Definición 1.5.1. *Sean X e Y dos espacios de Banach, y sea $T : X \to Y$. Se dice que T es **p-sumante** $(1 \leq p < \infty)$ si existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$ y toda familia finita de vectores $x_1, \ldots, x_N$ en X, se tiene*

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|T(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in X^* \|\xi\|=1} \left(\sum_{n=1}^{N} |\xi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}$$

Denotamos $\pi_p(T)$ a la menor constante C que verifica la propiedad anterior.

Notamos $\Pi_p(X,Y)$ al espacio de operadores $p-$sumantes de X en Y. Es fácil chequear que $\Pi_p(X,Y)$ es un subespacio lineal de $\mathscr{L}(X,Y)$, el espacio de operadores lineales y acotados de X a Y. Además, se tiene que π_p es una norma en $\Pi_p(X,Y)$ que satisface

$$\|T\| \leq \pi_p(T)$$

para todo $T \in \Pi_p(X,Y)$. Para ver esto último, tomemos un solo vector x en la definición de operador $p-$sumante. En tal caso se, tiene que

$$\|Tx\| \leq \pi(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\xi(x)| = \pi(T)\|x\|,$$

como deseábamos.

Proposición 1.5.2. *Sea $T : X \to Y$ un operador $p-$sumante. Entonces*

(1) Dados $U : W \to X$ y $V : Y \to Z$ operadores lineales, la composición $VTU : X \to Z$ es $p-$sumante, y $\pi_p(VTU) \leq \|V\|\pi_p(T)\|U\|$ (propiedad de ideal).

(2) si $X_1 \subseteq X$ y $Y_1 \subseteq Y$ son dos subespacios cerrados tales que $T(X_1) \subseteq Y_1$, se tiene que el operador restringido $\widetilde{T} : X_1 \to Y_1$ es $p-$sumante, y $\pi_p(\widetilde{T}) \leq \pi_p(T)$.

Definición 1.5.3. *Diremos que un operador $T : X \to Y$ se* ***factoriza a través de un espacio de Hilbert*** *si existe un espacio de Hilbert H y dos operadores $W : X \to H$ y $V : H \to Y$ tal que $T = VW$.*

Para un operador T que se factoriza a través de un espacio de Hilbert definimos

$$\gamma_2(T) = \text{ínf}\{\|V\|\|W\| : T = VW, \, con \, W : X \to H, V : H \to Y, H \, Hilbert\}.$$

Notamos $\Gamma_2(X, Y)$ al espacio de operadores factorizables a través e un espacio de Hilbert. Es fácil ver que γ_2 es un norma y que hace de $\Gamma_2(X, Y)$ un espacio de Banach.

En [36] Kwapień prueba un teorema que relaciona estos operadores con las nociones de tipo y cotipo. Este resultado se encuentra también en [26, Corolario 12.20] y dice que para X e Y espacios de Banach tales que X tiene tipo 2 e Y tiene cotipo 2, entonces

$$\mathcal{L}(X, Y) = \Gamma_2(X, Y).$$

En otras palabras, todo operador de X a Y se factoriza a través de un espacio de Hilbert. De este resultado se deduce el siguiente teorema.

Teorema 1.5.4 (Teorema de Kwapień)**.** *Un espacio de Banach X tiene simultáneamente tipo y cotipo 2 si y solo si es isomorfo a un espacio de Hilbert.*

Capítulo 2

Sistemas de dilataciones

En este capítulo, inspirados en el trabajo de Hedenmalm, Lindqvist and Seip [32], estudiamos diferentes propiedades de los sistemas dados por dilataciones de una función fija φ de $L_2(0,1)$. Específicamente, estudiamos cuándo el sistema

$$\{\varphi_n(x)\}_n := \{\varphi(nx)\}_n$$

es una sucesión Bessel, una sucesión de Riesz o satisface alguna de las desigualdades de la definición de marco. Comenzamos repasando estos conceptos elementales de análisis armónico y luego caracterizamos estas propiedades en términos tanto del espacio de multiplicadores del espacio de Hardy de series de Dirichlet $\mathcal{H}_2$ como también del espacio de Hardy del politoro. Además, extendemos estos resultados al caso multivariado.

2.1. Algunas definiciones

Dada una función $\varphi \in L_2(0,1)$ la pensamos extendida de manera impar y con período 2 a toda la recta real $\mathbb{R}$. Definimos el sistema de dilataciones

$$\varphi_n(x) = \varphi(nx),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entre los sistemas de esta forma, los únicos que forman una base ortogonal son aquellos que provienen de las funciones $\varphi(x) = C\sin(\pi x)$ con $C \neq 0$ (ver, por ejemplo, [13]). En particular, sabemos que el sistema $\{\sqrt{2}\sin(\pi n x)\}_n$ es una base ortonormal de $L_2(0,1)$. Esto nos lleva a considerar la siguiente escritura única para la función φ

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2}\sin(\pi n x).$$

De aquí en adelante, llamaremos $\{e_n\}_n$ a la base ortonormal dada por

$$e_n(x) := \sqrt{2}\sin(\pi n x).$$

Con esta notación, la identidad previa se transforma en

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n(x). \tag{2.1}$$

Fue Beurling quien tuvo la idea de asociar φ con una seria de Dirichlet en $\mathcal{H}_2$. Recordemos que $\mathcal{H}_2$, definido en (1.4), es precisamente el espacio de Hilbert de series de Dirichlet

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ \sum_n a_n n^{-s} : \left\| \sum_n a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_2} = \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} < +\infty \right\}.$$

A continuación definimos un operador que será de mucha utilidad a lo largo de todo el capítulo. Llamamos S al operador $S : L_2(0,1) \to \mathcal{H}_2$, que a cada $f = \sum_n c_n e_n(x)$ en $L^2(0,1)$ le asocia la serie de Dirichlet

$$Sf(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Es claro que este operador es una isometría entre $L_2(0,1)$ y $\mathcal{H}_2$ puesto que manda $\{e_n\}_n$ en $\{n^{-s}\}_n$, ambas bases ortonormales de los respectivos espacios.

Llamemos $\mathcal{F}$ al espacio de las combinaciones lineales finitas de e_n. Luego a cada $f = \sum_n c_n e_n \in \mathcal{F}$ le asociamos la función

$$T_\varphi f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) = \sum_n \langle f, e_n \rangle \varphi_n(x).$$

Queda definido otro operador fundamental para lo que sigue $T_\varphi : \mathcal{F} \to L_2(0,1)$ que satisface, como veremos, la siguiente identidad

$$S(T_\varphi f)(s) = S\varphi(s) Sf(s), \qquad Re(s) > \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Esto nos dice que el operador T_φ visto en el espacio de series de Dirichlet se corresponde con multiplicar por la serie $S\varphi$.

Para probar esta identidad debemos comenzar por escribir a T_φ en base $\{e_n\}$. Notemos primero que $\{e_n\}$ está dada por dilataciones de $\sqrt{2}\sin(\pi x)$ y, por lo tanto, tenemos que

$$\varphi(nx) = \sum_k a_k e_k(nx) = \sum_k a_k e_{kn}(x).$$

Sea $f = \sum_n c_n e_n$, luego

$$T_\varphi\left(\sum_n c_n e_n\right) = \sum_n c_n \varphi_n = \sum_n c_n \left(\sum_m a_m e_{nm}\right). \tag{2.3}$$

Deducimos entonces que

$$T_\varphi(f) = \sum_n \left(\sum_{dm=n} c_d a_m\right) e_n. \tag{2.4}$$

Recordemos que el espacio de series de Dirichlet formales $\mathfrak{D}$ es un álgebra con la multiplicación $*$ dada por

$$S\varphi * Sf = \left(\sum a_n n^{-s}\right) * \left(\sum c_n n^{-s}\right) = \sum_n \left(\sum_{dm=n} c_d a_m\right) n^{-s}. \tag{2.5}$$

Combinando (2.4) con (2.5) deducimos que vale (de manera formal) la siguiente identidad

$$S \circ T_\varphi = M_{S\varphi} \circ S,$$

donde $M_{S\varphi}$ es el operador de multiplicación de $\mathfrak{D}$ a $\mathfrak{D}$ dado por $M_{S\varphi}(E) = S\varphi * E$. Como S es un isomorfismo podemos reescribir la identidad anterior de manera que

$$T_\varphi = S^{-1} \circ M_{S\varphi} \circ S.$$

Esta última identidad muestra que T_φ y $M_{S\varphi}$ son conjugados mediante el isomorfimo isométrico S. Es decir tenemos una manera de ver a T_φ como un operador entre espacios de series de Dirichlet. Si bien la identidad la pensamos de manera formal, como todas las series de Dirichlet involucradas pertenecen a $\mathcal{H}_2$ se deduce que la misma vale puntualmente, es decir que se cumple (2.2) para todo $Re(s) > 1/2$.

Los espacios de Hardy de series de Dirichlet $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ con $1 \leq p < \infty$ no son un álgebra con el producto definido en (2.5). Por lo tanto, dadas dos series de Dirichlet D y E en $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ su producto $D * E$ no tiene por qué estar en $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$. En particular, $\mathcal{H}_2$ no es un álgebra y esto nos lleva a considerar la siguiente definición.

Definición 2.1.1. *Dada una serie de Dirichlet D decimos que es un **multiplicador de** $\mathcal{H}_2$ si $D * E$ pertenece a $\mathcal{H}_2$ para todo $E \in \mathcal{H}_2$.*

Siguiendo la notación de [32] llamamos $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los multiplicadores de $\mathcal{H}_2$. Recordemos que cada serie de Dirichlet define un operador de multiplicación $M_D : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ dado por $M_D(E) = D * E$. Como consecuencia del teorema del gráfico cerrado es claro que que D pertenece a $\mathcal{M}$ si y solo si el operador de multiplicación M_D define un operador acotado de $\mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H}_2$.

Definición 2.1.2. *Un sistema* $f_n\}_n \subset H$ *es una base* ***base de Riesz*** *de* H *si y solo si*

(1) toda $g \in H$ *se puede escribir como* $g = \sum_n c_n f_n$*;*

(2) existen constantes positivas $0 < A \leq B$ *tales que*

$$A\left(\sum_n |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_n c_n f_n\right\| \leq B\left(\sum_n |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

para toda sucesión finita de escalares c_n*.*

El teorema de Hedenmalm, Lindqvist y Seip, sobre el que vamos a trabajar, se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 2.1.3. [32, Theorem 5.2] El sistema $\{\varphi_n\}$ es una base de Riesz de $L_2(0,1)$ si y solo si $S\varphi$ y $1/S\varphi$ pertenecen a $\mathcal{M}$.

Además, los autores dan una caracterización de los multiplicadores de $\mathcal{H}_2$ como subespacio de $\mathfrak{D}$. Recordemos que la Definición 1.1.3 dice que

$$\mathcal{H}_\infty = \left\{\sum a_n n^{-s} \in \mathfrak{D} \text{ que definen una función acotada y holomorfa en } \mathbb{C}_0\right\},$$

y a este espacio se le asocia la norma

$$\left\|\sum a_n n^{-s}\right\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\operatorname{Re} s>0}\left|\sum a_n n^{-s}\right|.$$

En [32], Hedenmalm et al. demostraron el siguiente resultado que relaciona al espacio $\mathcal{H}_\infty$ con los multiplicadores de $\mathcal{H}_2$.

Teorema 2.1.4. [32, Theorem 3.1] Sea $D \in \mathfrak{D}$ una serie de Dirichlet. Luego, D pertenece a $\mathcal{H}_\infty$ si y solo si $M_D : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ está bien definida y es continua. En este caso se tiene que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_\infty} = \|D\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|E\|_{\mathcal{H}_2}<1} \|D * E\|.$$

Es decir, vale la igualdad de espacios de Banach $\mathcal{M} = \mathcal{H}_\infty$.

En esta línea, en [4] (ver también [21]) extienden este resultado para $p \neq 2$. Más precisamente, prueban que el espacio de multiplicadores de $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ también coincide con $\mathcal{H}_\infty$.

2.2. Marcos y sucesiones de Bessel

Nuestro primer objetivo es desdoblar el Teorema 2.1.3 en dos partes. Más precisamente, queremos caracterizar cuándo un sistema de dilataciones cumple alguna de las desigualdades de la ecuación (2.7) nuevamente en términos del espacio de multiplicadores $\mathcal{M}$. Durante este análisis la principal dificultad la encontramos al trabajar con la desigualdad inferior, ya que en este caso T_φ no necesariamente es un operador acotado. Para sortear esta dificultad usamos algunos teoremas que pueden extenderse de operadores acotados a operadores cerrados y densamente definidos. Lo interesante es que para corroborar que los operadores cumplen dichas propiedades nos vamos a apoyar fuertemente en propiedades de los espacios de series de Dirichlet.

Queremos estudiar nociones más débiles que ser una base de Riesz en sistemas de dilataciones, repasemos primero algunas definiciones sobre sistemas en un espacio de Hilbert H.

Definición 2.2.1. *Una sucesión $\{\varphi_n\}_n$ de elementos de H es un* ***marco*** *o* ***frame*** *para H si existen $A, B > 0$ tales que para toda $f \in H$ se tiene*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n \left|\langle f, \varphi_n\rangle\right|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{2.7}$$

Por otro lado, si solo se cumple la desigualdad superior decimos que $\{\varphi_n\}_n$ es una ***sucesión Bessel****.*

Es conocido que ambas definiciones están íntimamente ligadas a operadores. A continuación presentamos algunas definiciones fundamentales y un breve resumen sobre las propiedades principales de la relación entre operadores y marcos.

Definición 2.2.2. *Sea $\{\varphi_n\}_n$ una sucesión Bessel. El operador $C : H \to \ell_2$ dado por $C(f) = \{\langle f, \varphi_n\rangle\}_n$ se conoce como* ***operador de análisis*** *de $\{\varphi_n\}_n$, y su adjunto $C^* : \ell_2 \to H$ dada por*

$$C^* : \{c_n\}_n \mapsto \sum_n c_n\varphi_n,$$

como el ***operador de síntesis****.*

La desigualdad de Bessel dice que C es un operador acotado equivalentemente, C^* es acotado. A continuación enunciamos algunas equivalencias a que una sucesión sea Bessel, para más detalles sobre las nociones de sucesión Bessel y marco se puede consultar [18].

Teorema 2.2.3. *Sea $\{\varphi_n\}_n$ una sucesión Bessel. Si llamamos C al operador de análisis, las siguientes afirmaciones son válidas.*

(1) El operador C es acotado de H en ℓ^2, y por lo tanto, existe una constante $B > 0$ tal que para todo $f \in H$,

$$\sum_n \left|\langle f, \varphi_n\rangle\right|^2 \leq B\|f\|^2.$$

(1) Su adjunto C^* cumple que $\|C^*\| = \|C\| \leq B^{1/2}$. En consecuencia, para todo $\{c_n\} \in \ell^2$,

$$\Big\|\sum_n c_n\varphi_n\Big\|^2 \leq B\sum_n |c_n|^2.$$

Veamos qué relación tienen estas definiciones al estudiar un sistema de dilataciones $\{\varphi_n\}_n$ con el operador T_φ definido anteriormente. La adjunta de T_φ pensada formalmente (es decir, sin considerar su dominio) está dada por los siguientes cálculos:

$$\langle g, T_\varphi f\rangle = \langle g, \sum_n \langle f, e_n\rangle\varphi_n\rangle = \sum_n \overline{\langle f, e_n\rangle}\langle g, \varphi_n\rangle = \langle \sum_n \langle g, \varphi_n\rangle e_n, f\rangle.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$T_\varphi^*(g) = \sum_n \langle g, \varphi_n\rangle e_n.$$

Luego, como $\{e_n\}$ es una base ortonormal de $L_2(0,1)$, de la indentidad de Parseval concluimos que

$$\left\|T_\varphi^*(g)\right\|^2 = \sum_n \left|\langle g, \varphi_n\rangle\right|^2. \tag{2.8}$$

Observación 2.2.4. *En nuestro caso, es decir, cuando $\{\varphi_n\}_n$ es un sistema de dilataciones, se tiene que el operador de síntesis C^* es muy parecido a T_φ. En efecto, si llamamos $L : \ell_2 \to L_2(0,1)$ a la isometría $L(\{c_n\}_n) = \sum_n c_n e_n$, obtenemos que*

$$T_\varphi \circ L = C^*. \tag{2.9}$$

De aquí deducimos que $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión Bessel si y solo si T_φ está bien definido y es acotado.

Probamos a continuación en el Teorema 2.2.5 que $\{\varphi_n\}_n$ es un marco si y solo si tanto $S\varphi$ como $1/S\varphi$ pertenecen al espacio de multiplicadores $\mathcal{M}$. Luego, por el Teorema 2.1.3 tenemos que $\{\varphi_n\}_n$ es un marco si y solo es una base de Riesz. Otra forma de llegar al resultado es usar que toda sucesión que es marco y minimal simultáneamente, es automáticamente base de Riesz. Es posible tomar este camino ya que el sistema $\{\varphi_n\}_n$ con el que trabajamos es minimal; en el artítulo [32] construyen un sistema biortogonal para $\{\varphi_n\}$; un sistema $\{\psi_n\}$ que cumple que $\langle \varphi_j, \psi_k \rangle = \delta_{j,k}$ para todo k y j.

Estamos en condiciones de enunciar y probar que, como anticipamos, se puede desdoblar el Teorema 2.1.3 como se indica a continuación.

Teorema 2.2.5. *Sea $\varphi \in L_2(0,1)$ y $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$. Luego, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *El sistema $\{\varphi_n\}$ es una sucesión Bessel si y solo si $S\varphi \in \mathcal{M}$.*
- *El sistema $\{\varphi_n\}$ satisface la desigualdad inferior de la condición de marco si y solo si $1/S\varphi \in \mathcal{M}$.*

Antes de pasar a la demostración necesitamos algunas herramientas y observaciones. Es importante destacar que a la hora de probar la segunda afirmación (que involucra la cota inferior de la definición de marco) nos encontramos con la dificultad que el operador T_φ no es necesariamente un operador acotado. Para sortear este problema usamos que varias propiedades de los operadores acotados se pueden generalizar a a operadores densamente definidos y cerrados. Más precisamente, usamos el siguiente corolario del teorema de rango cerrado para operadores con estas características.

Corolario 2.2.6. *Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert y $T : D(T) \subset H_1 \to H_2$ un operador cerrado y densamente definido. Entonces T es suryectivo si y solo si T^* es acotado inferiormente.*

Demostración del Teorema 2.2.5. En la Observación 2.2.4 mostramos que $\{\varphi_n\}$ es una sucesión Bessel si y solo si T_φ es un operador bien definido y acotado. Combinando esto con la identidad

$$T_\varphi = S^{-1} \circ M_{S\varphi} \circ S, \tag{2.10}$$

deducimos que ambas afirmaciones son equivalentes a que $M_{S\varphi}$ sea un operador bien definido y acotado, en otras palabras, a que $S\varphi$ sea un multiplicador de $\mathcal{H}_2$. Más aún, se sabe que la mejor constante en la desigualdad de Bessel viene dada por $\|C\|$ y, por la misma observación, sabemos que

$$\|C\| = \|C^*\| = \|T_\varphi\| = \|M_{S\varphi}\|. \tag{2.11}$$

Además, por el Teorema 2.1.4 esta cantidad también coincide con $\|S\varphi\|_{\mathcal{H}_\infty}$. De esta manera queda probada la primer afirmación.

A partir de ahora nos enfocamos en la prueba de la segunda afirmación, usando nuevamente que los operadores T_φ y $M_{S\varphi}$ son conjugados (ver (2.10)). Consideremos

$$M_{S\varphi} : \mathrm{Dom}(M_{S\varphi}) \subseteq \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2, \tag{2.12}$$

donde $\mathrm{Dom}(M_{S\varphi})$ es el dominio natural de un operador de multiplicación, es decir, el conjunto de las series de Dirichlet $D \in \mathcal{H}_2$ tales que $D * S\varphi \in \mathcal{H}_2$.

Observemos que como $S\varphi$ pertenece a $\mathcal{H}_2$, $\mathrm{Dom}(M_{S\varphi})$ contiene al espacio de multiplicadores $\mathcal{M}$. Además, por el Teorema 2.1.4 sabemos que $\mathcal{M} = \mathcal{H}_\infty$. Como los polinomios están contenidos en $\mathcal{H}_\infty$, por la propiedad *(2)* de la Proposición 1.1.11, $M_{S\varphi}$ está **densamente definido**.

Resta ver que $M_{S\varphi}$ es también **cerrado**: tomemos $D_N \in \mathrm{Dom}(M_{S\varphi})$ tal que

$$D_N \xrightarrow{\mathcal{H}_2} D \quad y \quad M_{S\varphi}(D_N) \xrightarrow{\mathcal{H}_2} \widetilde{D}.$$

Queremos probar que $M_{S\varphi}(D) = \widetilde{D}$. La convergencia en $\mathcal{H}_2$ implica que D_N converge puntualmente a D en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. Si fijamos ε, tenemos que $D_N(s) \to D(s)$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, lo que implica que $S\varphi(s)D_N(s) \to S\varphi(s)D(s)$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Como adamás sabemos que $M_{S\varphi}(D_N) \to \widetilde{D}$ puntualmente, se sigue del principio de identidad que $S\varphi D = \widetilde{D}$, como queríamos.

Consideramos ahora el operador $Q = S^{-1} \circ M_{S\varphi} \circ S$ junto con el dominio

$$\mathrm{Dom}(Q) = S^{-1}(\mathrm{Dom}(M_{S\varphi})).$$

Definimos $R : \mathrm{Dom}(R) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, como

$$R(f) = \sum \langle f, \varphi_n \rangle e_n,$$

con $\mathrm{Dom}(R) = \{f \in L_2(0,1) : \sum |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < \infty\}$.

Veamos que $R = Q^*$. Recordemos que $f \in \mathrm{Dom}(Q^*)$ si y solo si

$$g \mapsto \langle Qg, f\rangle$$

es una aplicación continua para todo $g \in \mathrm{Dom}(Q)$. En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Qg, f\rangle &= \langle S^{-1} \circ M_{S\varphi} \circ Sg, f\rangle = \langle M_{S\varphi} \circ Sg, Sf\rangle \\
&= \sum_n \left(\sum_{kl=n} \langle \varphi, e_k\rangle \langle g, e_l\rangle \right) \overline{\langle f, e_n\rangle} \\
&= \sum_n \langle g, e_n\rangle \overline{\langle f, \sum_k \langle \varphi, e_k\rangle e_{kn}\rangle} \\
&= \sum_n \langle g, e_n\rangle \overline{\langle f, \varphi_n\rangle}.
\end{aligned}$$

De estas igualdades deducimos que $g \mapsto \langle Qg, f\rangle$ es continuo si y solo si la suma $\sum |\langle f, \varphi_n\rangle|^2$ es finita. Esto, junto con los cálculos previos, muestra que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(Q^*)$ y que $R = Q^*$, como queríamos.

Recordemos que $\{\varphi_n\}_n$ satisface la desigualdad inferior de frame si existe $A > 0$ tal que

$$A\|f\|^2 \leq \sum |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \quad \text{para toda } f \in L_2(0,1).$$

Es inmediato ver que $\{\varphi_n\}_n$ cumple la desigualdad inferior de frame si y solo si el operador $R = Q^*$ es acotado inferiormente.

Aplicando el Corolario 2.2.6 a Q (notar que para esto es que vimos que Q es cerrado y densamente definido), obtenemos que Q es suryectivo si y solo si Q^* es acotado inferiormente.

Por último nos queda por probar que el operador Q es suryectivo si y solo si $1/S\varphi \in \mathcal{M}$. Asumamos que Q es suryectivo y tomemos $D \in \mathcal{H}_2$. Como $M_{S\varphi}$ es también suryectivo (por ser su conjugado a través de una isometría), existe $E \in \mathrm{Dom}(M_{S\varphi})$ tal que

$$M_{S\varphi}(E) = S\varphi * E = D.$$

Se tiene entonces que

$$\frac{1}{S\varphi} * D = \frac{1}{S\varphi} * S\varphi * E = E \in \mathcal{H}_2.$$

Por lo tanto, $1/S\varphi * D \in \mathcal{H}_2$ para toda $D \in \mathcal{H}_2$ y $1/S\varphi \in \mathcal{M}$. Supongamos ahora que $1/S\varphi$ es un multiplicador y tomemos $E \in \mathcal{H}_2$. Luego, $\frac{1}{S\varphi} * E$ pertenece a $\mathcal{H}_2$ y que

$$M_{S\varphi}\left(\frac{1}{S\varphi} * E\right) = E,$$

y esto prueba que Q es suryectivo. $\square$

En el mismo artículo [32] los autores también abordaron el caso en que el sistema $\{\varphi_n\}_n$ resulta una sucesión completa para el espacio $L_2(0,1)$. Originalmente, el problema de la completitud de las dilataciones periódicas (conocido por sus siglas en inglés como PDCP) fue introducido por Beurling en [5]. Nuevamente, gracias a su idea de incorporar series de Dirichlet a este tipo de preguntas, se deduce fácilmente que el sistema $\{\varphi_n\}_n$ es completo si y solo si $S\varphi$ es un vector cíclico en $\mathcal{H}_2$. Mediante la transformada de Bohr el PDCP equivale a clasificar vectores cíclicos en el espacio de Hardy $H_2(\mathbb{D}^\infty)$, siendo este último un problema difícil de abordar. En esta dirección, se sabe que las series de Dirichlet F tales que $F \in \mathcal{H}_2$ y $1/F \in \mathcal{H}_\infty$ son cíclicas para $\mathcal{H}_2$ (ver [32] o [45] para más detalle). En esta línea, la segunda parte del Teorema 2.2.5 aporta una nueva caracterización de este tipo de vectores cíclicos para $\mathcal{H}_2$.

En la sección siguiente volveremos sobre la definición de base de Riesz (Definición 2.1.2). Como mencionamos previamente, ya fue abordado por varios autores el caso en el que el sistema es completo, es decir, cuando solo satisface la condición (1) de la definición. Por lo tanto, en la próxima sección vamos a concentrarnos en aquellos sistemas que solo cumplan la condición (2).

2.3. Sucesiones de Riesz

En la sección anterior trabajamos sobre caracterizaciones hechas en [32] para bases de Riesz de dilataciones. En el Teorema 2.2.5 debilitamos la condición de que $\{\varphi_n\}$ sea una base de Riesz y le pedimos que solo satisfaga alguna de las desigualdades de la definición de marco. Otra manera natural de debilitar la condición de base de Riesz es asumir que $\{\varphi_n\}$ es solamente una sucesión de Riesz, es decir, asumir que $\{\varphi_n\}$ cumple (2.6) pero no necesariamente es un sistema completo para $L_2(0,1)$.

Definición 2.3.1. *Una sucesión $\{\varphi_n\}_n \subset H$ es una* ***sucesión de Riesz*** *si es una base de Riesz para el subespacio cerrado generado por ella misma. En otras palabras, si satisface (2.6) pero no es necesariamente un conjunto completo en H.*

En este caso, la condición (2.6) muestra que el sistema de dilataciones $\{\varphi_n\}_n \subset L_2(0,1)$ es una sucesión de Riesz si y solo si existen $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\| \leq \|T_\varphi f\| \leq B\|f\|,$$

para toda suma finita $f = \sum c_n e_n \in \mathcal{F}$. Como e_n es una base para $L_2(0,1)$ se tiene que $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión de Riesz si y solo si el operador T_φ es acotado y acotado inferiormente. Además, como contamos con la identidad

$$T_\varphi = S^{-1} \circ M_{S\varphi} \circ, S$$

esto es a su vez equivalente a que $M_{S\varphi} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ sea acotado y acotado inferiormente.

Queremos determinar condiciones sobre la serie de Dirichlet $S\varphi$ bajo las cuales el sistema $\{\varphi_n\}$ sea una sucesión de Riesz. Basándonos en los resultados de [32] y en el capítulo anterior, estamos tentados a afirmar que $M_{S\varphi}$ es acotado inferiormente si y solo si existe $\varepsilon > 0$ de manera tal que $|S\varphi(s)| > \varepsilon$ para todo $s \in \mathbb{C}_0$. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que esta afirmación no es cierta.

Ejemplo 2.3.2. *Consideremos* $\varphi(x) = e_2(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x)$*, luego* $\{\varphi_n\}$ *es claramente una sucesión de Riesz (más aún es una sucesión ortonormal para* $L_2(0,1)$*). Por otro lado,* $S\varphi(s) = \frac{1}{2^s}$*, que claramente no está acotada inferiormente en* $\mathbb{C}_0$*.*

2.3.1. Traslaciones verticales y el Teorema de Fatou

Para abordar el teorema principal de esta sección necesitamos introducir primero algunos conceptos relacionados con grupos compactos, transformada de Fourier y series de Dirichlet. Información más detallada sobre estos temas puede ser consultada en [51] y [32].

Notamos Ξ al grupo dual de $\mathbb{Q}_+$, donde $\mathbb{Q}_+$ denota al grupo multiplicativo de números racionales estrictamente mayores que cero. El conjunto Ξ está compuesto de funciones $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ denominadas *caracteres* que satisfacen:

- $\gamma(mn) = \gamma(m)\gamma(n)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$;
- $|\gamma(n)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada una serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$, cada carácter $\gamma \in \Xi$ define una nueva serie de Dirichlet

$$D^{\gamma}(s) = \sum a_n \gamma(n) n^{-s}. \tag{2.13}$$

En particular, dado $t \in \mathbb{R}$ si elegimos como carácter a la función $\gamma(n) = n^{-it}$ obtenemos la serie de Dirichlet

$$D^{\gamma}(s) = \sum_n a_n n^{-it} n^{-s} = D(s + it),$$

a la que denominamos ***traslación vertical*** de D y la notamos D_t.

Existe una identificación natural entre el conjunto de caracteres Ξ y el toro infinito $\mathbb{T}^\infty$. Cada carácter $\gamma \in \Xi$ se identifica con un elemento $w \in \mathbb{T}^\infty$, tomando $w = (\gamma(p_1), \gamma(p_2), \dots)$. Recíprocamente, cada elemento $w = (w_1, w_2 \dots)$ de $\mathbb{T}^\infty$ define un carácter que en cada primo p_i vale $\gamma(p_i) = w_i$ y que se extiende de manera multiplicativa a todo $\mathbb{N}$. Por lo tanto, con esta notación, se tiene que $w^{\alpha(n)} = \gamma(n)$, lo que nos permite reescribir la serie de Dirichlet (2.13) como

$$D^{w}(s) = \sum a_n w^{\alpha(n)} n^{-s}, \tag{2.14}$$

con $w \in \mathbb{T}^\infty$ que se corresponde con $\gamma \in \Xi$ como mencionamos más arriba.

Dada una serie de Dirichlet D, las series de Dirichlet que obtenemos en (2.13) o (2.14) se conocen como ***límites verticales*** de D. Su nombre se debe a que para cualquier $D \in \mathcal{H}_2$ y para todo $w \in \mathbb{T}^\infty$ existe una sucesión $(\tau_k)_k \subset \mathbb{R}$ tal que D_{τ_k} converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ a D^w. Recíprocamente, todo límite (uniforme sobre compactos) de traslaciones verticales es una serie de Dirichlet de la forma (2.13). Este resultado se encuentra para $\mathcal{H}_2$ en [32, Lema 2.4], para series de Dirichlet generales con $\sigma_a(D) \leq 0$ en [24, Proposición 4.6] y es el que le da el nombre a este tipo de series.

Observemos que llamando $f = \mathfrak{B}^{-1}(D)$, de la definición de transformada de Bohr (1.7) es inmediato que

$$\mathfrak{B}^{-1}(D^w)(u) = f(w \cdot u), \tag{2.15}$$

donde $w \cdot u$ es el producto en $\mathbb{T}^\infty$ que proviene de multiplicar lugar a lugar. Es decir, si $w = (w_1, w_2, \ldots)$ y $u = (u_1, u_2, \ldots)$ entonces

$$w \cdot u = (w_1 u_1, w_2 u_2, \ldots).$$

Gracias al Teorema clásico de Fatou [27] sabemos que dada una función acotada y holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ los límites radiales

$$f^*(w) = \lim_{r \to 1^-} f(rw)$$

existen para casi todo $w \in \mathbb{T}$ respecto a la medida de Haar de $\mathbb{T}$. Este teorema habla de límites radiales mientras que las series de Dirichlet están definidas en semiplanos, por ello necesitamos la siguiente adaptación del Teorema de Fatou que nos servirá para aplicarlo a series de Dirichlet pertenecientes al espacio de Hardy $\mathcal{H}_\infty$.

Lema 2.3.3. *[21, Lema 11.22] Sea $F : \{\mathrm{Re}(s) > 0\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y acotada. Luego,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(\varepsilon + it)$$

existe para casi todo $t \in \mathbb{R}$ respecto a la medida de Lebesgue.

Para más detalle sobre el lema anterior y sobre el Teorema de Fatou en espacios de Banach X puede consultarse [21, Sección 14.11].

A continuación presentamos la conexión entre el Teorema de Fatou, las traslaciones verticales de series de Dirichlet y nuestro objetivo principal, caracterizar cuándo el sistema $\{\varphi_n\}_n$ es sucesión de Riesz.

Asumamos que el sistema $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión de Riesz. Por el Teorema 2.2.5 tenemos que $D = S\varphi$ pertenece a $\mathcal{M} = \mathcal{H}_\infty$. Luego, su antitransformada de Bohr $f = \mathfrak{B}^{-1}(D)$ pertenece a $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Se desprende inmediatamente de (2.15) que cualquiera sea $w \in \mathbb{T}^\infty$ la función $\mathfrak{B}^{-1}(D^w)$ también pertenece a $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Esto nos dice que la serie de Dirichlet D^w pertenece a $\mathcal{H}_\infty$ para todo $w \in \mathbb{T}^\infty$, es decir define una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C}_0$. Luego, mediante la adaptación del Teorema de Fatou para series de Dirichlet recién mencionada, podemos afirmar que para todo $w \in \mathbb{T}^\infty$ existe el límite

$$\lim_{\sigma \to 0^+} D^w(\sigma + it) \text{ para casi todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Siguiendo [53, Theorem 2], para cualquier función f de $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$ podemos elegir un representante $\widetilde{f}$ de f que cumpla que

$$\widetilde{f}(w) = \begin{cases} \lim\limits_{\sigma \to 0^+} D^w(\sigma) & \text{Si el límite existe;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{2.17}$$

Para una mejor comprensión de la elección del representante profundizaremos en algunos detalles de su construcción. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto

$$\mathcal{A} = \{w \in \mathbb{T}^\infty : \lim_{\sigma \to 0^+} D^w(\sigma) \text{ existe}\}.$$

Veamos que $|\mathcal{A}| = 1$. Como $\chi_\mathcal{A} \in L^1(\mathbb{T}^\infty)$ podemos aplicar el Teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin [8] obteniendo así que para casi todo $w_0 \in \mathbb{T}^\infty$ se cumple la igualdad

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \chi_\mathcal{A}(w)\, dw = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \chi_\mathcal{A}(T_t(w_o))\, dt,$$

donde $T_t : \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}^\infty$ es la función $T_t(w) = (\mathfrak{p}^{-it} \cdot w)$ con $t \in \mathbb{R}$. El sistema $\{T_t\}_t$ es conocido como el flujo de Kronecker y una prueba de su ergodicidad se puede consultar en [19].

Notemos que $T_t(w_0)$ pertenece a $\mathcal{A}$ si y solo si el límite

$$\lim_{\sigma \to 0} D^{T_t(w_0)}(\sigma)$$

existe. Aplicando el Teorema de Fatou para series de Dirichlet deducimos que $T_t(w_0)$ está en $\mathcal{A}$ para casi todo t y, por lo tanto, $|\mathcal{A}| = 1$. Esto prueba que $\widetilde{f}$ pertenece a $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$, y para ver que $\widetilde{f}$ es un representante de f basta con comparar sus coeficientes de Fourier (ver [53, Theorem 2]). Desde ahora y por el resto de la sección, f será el representante de la función que satisface (2.17).

Nuestro objetivo es determinar condiciones sobre la serie de Dirichlet $D := S\varphi$ bajo las cuales el sistema $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de Riesz. En el Ejemplo 2.3.2 probamos que nuestra primera intuición falla. Nuestra segunda (y exitosa) propuesta es involucrar el representante distinguido (2.17) y los límites

$$\lim_{\sigma\to 0^+} D^w(\sigma + it_0).$$

Con esto en mente, para $t \in \mathbb{R}$ fijamos la siguiente notación

$$D^w(it) := \lim_{\sigma\to 0^+} D^w(\sigma + it).$$

Recordar que para todo $w \in \mathbb{T}^\infty$ sabemos que $D^w(it)$ está definido para casi todo t, por el teorema de Fatou. De esta manera, como f satisface (2.17), tenemos que para casi todo $t \in \mathbb{R}$ vale que

$$D^w(it) = \lim_{\sigma\to 0^+} D^w(\sigma + it) = \lim_{\sigma\to 0^+} D^{T_t(w)}(\sigma) = f(T_t(w)). \tag{2.18}$$

Además, si consideramos $t = 0$ y obtenemos que para casi todo $w \in \mathbb{T}^\infty$ se cumple la igualdad

$$f(w) = D^w(0).$$

La igualdad (2.18) es crucial para deducir observación que sigue.

Observación 2.3.4. *Sea $D \in \mathcal{H}_\infty$ y fijemos $\varepsilon > 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Existe t_0 tal que $|D^w(it_0)| \geq \varepsilon$ para casi todo $w \in \mathbb{T}^\infty$.

(b) Para todo t existe un conjunto $\mathcal{B}_t \subset \mathbb{T}^\infty$ de medida total tal que

$$|D^w(it)| \geq \varepsilon$$

para todo $w \in \mathcal{B}_t$.

Es claro que (b) implica (a). Para la otra implicación, llamemos $\mathcal{B}_{t_0}$ al conjunto de $\mathbb{T}^\infty$ donde se cumple la condición (a). Tomemos $t \in \mathbb{R}$ y elijamos

$$\mathcal{B}_t = \{\mathfrak{p}^{-i(t_0+t)} \cdot w : w \in \mathcal{B}_{t_0}\}.$$

De esta manera, es claro que $\mathcal{B}_t$ tiene medida total. Tomemos $w' \in \mathcal{B}_t$ y elijamos $w \in B_{t_0}$ tal que $w' = \mathfrak{p}^{-i(t_0+t)} \cdot w$. Luego, por (2.18) se tiene que

$$|D^{w'}(it)| = |f(T_{t_0}(w))| = |D^w(it_0)| \geq \varepsilon.$$

2.3.2. Caracterización de las sucesiones de Riesz

Con los contenidos de la sección anterior podemos enunciar uno de los teorema principales de este capítulo que describe la caracterización que estábamos buscando, no solo en términos de la series de Dirichlet $S\varphi$ sino también de su antitransformada de Bohr $f = \mathfrak{B}^{-1}(S\varphi)$.

Teorema 2.3.5. *Sean $\varphi \in L_2(0,1)$, $D = S\varphi$ y $f = \mathfrak{B}^{-1}(D)$ y sean $B > A > 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *El sistema $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión de Riesz con constantes A y B.*

(b) *La función f pertenece a $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$, su norma es $\|f\|_{H_\infty} \leq B$, y vale que*

$$|f(z)| \geq A \quad \text{para casi todo } z \in \mathbb{T}^\infty. \tag{2.19}$$

(c) *La serie de Dirichlet D pertenece a $\mathcal{H}_\infty$, su norma $\|D\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq B$ y para casi todo $(\gamma, t) \in \Xi \times \mathbb{R}$ se tiene*

$$|D^\gamma(it)| \geq A. \tag{2.20}$$

Demostración. Se deduce del Teorema 2.2.5 que $\{\varphi_n\}_n$ satisface la desigualdad derecha en (2.6) si y solo si D pertenece a $\mathcal{H}_\infty$, o lo que es lo mismo, si f está en $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Recordemos que, como ya hemos mencionado, (2.6) muestra que el sistema de dilataciones $\{\varphi_n\}_n \subset L_2(0,1)$ es una sucesión de Riesz si y solo si existen $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\| \leq \|T_\varphi f\| \leq B\|f\|.$$

Por lo tanto, $\|T_\varphi\| \leq B$ y en consecuencia $\|f\|_{H_\infty} = \|D\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq B$ (ver (2.11) y el Teorema 2.1.4).

Solo nos queda por probar la parte que involucra a las desigualdades inferiores. Es claro de la definición que $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión de Riesz si y solo si el operador T_φ es acotado y acotado inferiormente. Esto también es equivalente a que $M_f : H_2(\mathbb{T}^\infty) \to H_2(\mathbb{T}^\infty)$ sea acotado y acotado inferiormente.

Comenzaremos por mostrar que el operador acotado $M_f : H_2(\mathbb{T}^\infty) \to H_2(\mathbb{T}^\infty)$ es acotado inferiormente si y solo si existe un conjunto $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{T}^\infty$ de medida total donde $|f|$ es acotada inferiormente por una constante positiva. Comencemos por la más sencilla de las implicaciones, la implicación hacia la izquierda. Supongamos que existe un conjunto $\mathcal{E}$ con las características mencionadas. Dada g una función cualquiera de $H_2(\mathbb{T}^\infty)$ como el conjunto $\mathcal{E}$ tiene medida uno

$$\|M_f(g)\|_{L_2}^2 = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |fg|^2 \, dz \geq A^2 \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |g|^2 \, dz.$$

En otras palabras vimos que M_f está acotado inferiormente con constante A puesto que aplicando raiz cuadrada en la desigualdad anterior obtenemos

$$\|M_f(g)\|_{L_2} \geq A\|g\|_{L_2}.$$

Para la otra implicación, asumamos que M_f es acotado y acotado inferiomente con constante A y consideremos el conjunto

$$N = \{z \in \mathbb{T}^\infty : |f(z)| < A\}.$$

Notemos χ_N a la función característica de N. Como los polinomios trigonométricos son densos en $L_2(\mathbb{T}^\infty)$ (ver [21, Proposición 5.5]) existe una sucesión P_k de polinomios de grado n_k en N_k variables (en z y $\overline{z}$) tal que

$$\lim_k P_k = \chi_N \quad \text{en } L_2(\mathbb{T}^\infty). \tag{2.21}$$

Un cálculo simple nos permite ver que

$$|N| = \|\chi_N\|_{L_2}^2 = \lim_k \|P_k\|_{L_2}^2 = \lim_k \|z_1^{n_k} \ldots z_{N_k}^{n_k} P_k\|_{L_2}^2.$$

Notar que los polinomios $z_1^{n_k} \ldots z_{N_k}^{n_k} P_k$ están en $H_2(\mathbb{T}^\infty)$ y por nuestra hipótesis sobre M_f tenemos que

$$\begin{aligned} A^2|N| &\leq \liminf_k \|M_f(z_1^{n_k} \ldots z_{N_k}^{n_k} P_k)\|^2 = \|f\,\chi_N\|_{L_2}^2 \\ &= \int_N |f|^2 dz \end{aligned}$$

Como $|f| < A$ en N, deducimos que $|N| = 0$ y,por lo tanto, $\mathcal{E} = N^c$ es conjunto de medida total donde se satisface (2.19).

Para concluir la prueba resta probar que (2.20) es equivalente a (2.19). Supongamos que se satisface (2.19) y llamemos $\mathcal{E}$ al conjunto de medida total donde se cumple la inecuación, por la definición de f tenemos que $|f(w)| = \lim_{\sigma \to 0} |D^w(\sigma)| \geq A$ para todo $w \in \mathcal{E}$. Juntando esto con la Observación 2.3.4 (tomando $\varepsilon = A$) deducimos que la t-sección del conjunto

$$\mathcal{C} = \{(t, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^\infty : |D^w(it)| < A\},$$

tiene medida cero. Luego por el Teorema de Fubini tenemos que $\mathcal{C}$ tiene medida cero. La implicación restante también es consecuencia del Teorema de Fubini por lo que se concluye la prueba. $\square$

Juntando lo comentado en (2.11) y la demostración del Teorema 2.3.5 podemos analizar cuales son las mejores constantes A y B como muestra la siguiente observación.

Observación 2.3.6. *Sea φ como en el teorema anterior, $D = S\varphi$ y $f = \mathfrak{B}^{-1}(D)$. Luego, la mejor de las constantes B está dado por $\|D\|_{\mathcal{H}_\infty} = \|f\|_{H_\infty}$, mientras que la mejor de las constantes A por $\inf_{\mathbb{T}^\infty} \operatorname{ess} |f|$.*

Es claro que una sucesión ortonormal es un caso particular de sucesión de Riesz que tiene como constantes $A = B = 1$. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente caracterización de las sucesiones ortonormales de un sistema de dilataciones.

Corolario 2.3.7. *Sean $\varphi \in L_2(0,1)$, $D = S\varphi$, $f = \mathfrak{B}^{-1}(D)$. Luego, el sistema de de dilataciones φ_n asociado a φ es una sucesión ortonormal si y solo si $D \in \mathcal{H}_\infty$ y para casi todo carácter $\gamma \in \Xi$ y casi todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $|D^\gamma(it)| = 1$.*

Retomando el Ejemplo 2.3.2, al considerar $D = S\varphi$ con $\varphi = e_2 = \sin(2\,\cdot)$ obtenemos que

$$D(s) = \frac{1}{2^s}.$$

Luego, es inmediato que se verifica el corolario anterior ya que para cualquier $w = (w_1, w_2 \ldots)$ de $\mathbb{T}^\infty$

$$D^w(s) = w^{\alpha(2)} \frac{1}{2^s} = w_1 \frac{1}{2^s},$$

y, por lo tanto, para casi todo $\gamma \in \Xi$ vale que

$$|D^\gamma(it)| = \lim_{\sigma \to 0+} \left| w_1 \frac{1}{2^{(\sigma+it)}} \right| = |w_1| = 1.$$

Cabe destacar que el corolario anterior también puede ser probado imitando la demostración de [46, Proposition 5.1]. Para ello, comencemos calculando

$$\begin{aligned}\langle n^{-s}S\varphi, m^{-s}S\varphi \rangle &= \int_{\mathbb{T}^\infty} w^\alpha \mathfrak{B}^{-1}(S\varphi)(w)\overline{w^\beta \mathfrak{B}^{-1}(S\varphi)(w)}dw \\ &= \int_{\mathbb{T}^\infty} |\mathfrak{B}^{-1}(S_\varphi)(w)|^2 w^{\alpha-\beta} dw.\end{aligned}$$

Esto nos dice que $\{n^{-s}S\varphi\}_n$ es ortonormal si y solo si $|\mathfrak{B}^{-1}(S\varphi)(w)| = |f(w)| = 1$ para casi todo $w \in \mathbb{T}^\infty$. Aquí usamos la unicidad de los coeficientes de Fourier. Observemos que

$$n^{-s}S\varphi = S\varphi n^{-s} = S\varphi S e_n = S \circ T_\varphi(e_n) = S\varphi_n.$$

Luego, como S es un isomorfirmo isométrico, las condiciones anteriores son también equivalentes a que $\{\varphi_n\}_n$ sea una sucesión ortonormal. Así recuperamos nuevamente el Corolario 2.3.7.

Concluimos esta sección con una reformulación de un teorema de [46]. Necesitaremos primero algunas definiciones. Por ***función interna*** de $\mathcal{H}_2$ nos referimos a una serie de Dirichlet D_ψ en $\mathcal{H}_2$ (con $\mathfrak{B}^{-1}(D_\psi) = \psi$) de norma uno que cumple que

$$n^{-s} D_\psi \perp m^{-s} D_\psi$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}_+$ con $n \neq m$. Equivalentemente, $D_\psi \in \mathcal{H}_2$ y $|\psi(w)| = 1$ a.e. $w \in \mathbb{T}^\infty$. Por otro lado, para todo $n \in N$ hay un operador natural

$$\Lambda(n) f(s) = n^{-s} f(s), \qquad s \in \mathbb{C}_{1/2},$$

para $f \in \mathcal{H}_2$.

A partir de ahora $\mathcal{I}$ es un subespacio shift-invariante de $\mathcal{H}_2$ (i.e. $n^{-s}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ para todo $n \in \mathbb{N}$) que además cumple que

$$\Lambda(p)|_{\mathcal{I}} \left(\Lambda(q)|_{\mathcal{I}}\right)^* = \left(\Lambda(q)|_{\mathcal{I}}\right)^* \Lambda(p)|_{\mathcal{I}} \tag{2.22}$$

para par de primos $p \neq q$. Esta propiedad es la Condición 2 en [46]. En el mismo lugar se encuentra el siguiente resultado.

Teorema 2.3.8 ([46])**.** *Sea $\mathcal{I}$ un subespacio shif-invariante y no nulo de $\mathcal{H}_2$. Luego $\mathcal{I}$ tiene la propiedad (2.22) para todo p y q ($p \neq q$) si y solo si $\mathcal{I}$ es de la forma*

$$\mathcal{I} = D\mathcal{H}_2 \tag{2.23}$$

para alguna función interna D de $\mathcal{H}_2$. Además, la función D está unívocamente determinada salvo por una constante de módulo uno.

Lo estudiado hasta el momento nos permite dar una reformulación de este teorema. Dada D como en el teorema anterior, definamos $\varphi = S^{-1}D$. Luego, combinando el Teorema 2.3.8 con el Corolario 2.3.7 deducimos $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión ortonormal. Gracias a la relación entre T_φ y S la igualdad (2.23) se convierte en

$$\mathcal{I} = S\varphi S(L_2(0,1)) = ST_\varphi(L_2(0,1)).$$

De esto concluimos que $S^{-1}(\mathcal{I}) = \overline{[\varphi_n]}$. Además, gracias que todos los pasos pueden ser hechos a la inversa, el Teorema 2.3.8 se puede volver a enunciar de la siguiente manera.

Teorema 2.3.9. *Sea $\mathcal{I}$ un subespacio shift-invariante y no nulo de $\mathcal{H}_2$. Luego $\mathcal{I}$ tiene la propiedad (2.22) si y solo si existe $\varphi \in L_2(0,1)$ tal que su sistema asociado φ_n es una sucesión ortonormal y*

$$S^{-1}(\mathcal{I}) = \overline{[\varphi_n]}.$$

2.4. Ejemplos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos y aplicaciones de los resultados conseguidos. Más precisamente, presentamos ejemplos de φ cuyos sistemas asociados satisfagan solamente una de las desigualdad de la definición de marco, sistemas que sean sucesión (o base) de Riesz, etc. En particular, el último ejemplo muestra que existen sucesiones ortonormales de $L_2(0,1)$ que no son subsucesión de $\{\sqrt{2}\sin(nx)\}_n$.

Como hasta ahora, notamos $\varphi \in L_2(0,1)$ a la función que genera el sistema de dilataciones $\{\varphi_n\}$, $D = S\varphi$ y $f = \mathfrak{B}^{-1}(D)$.

Comencemos recordando el Ejemplo 2.3.2. Consideremos la función

$$\varphi(x) = e_2(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x),$$

para la cual tenemos que $f(z) = z_1 \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$ y que $D := 1/2^s$. El sistema $\{\varphi_n\}_n$ es claramente una sucesión ortonormal (y, por lo tanto, una sucesión de Riesz), pero D no es acotado inferiormente. Por otra parte, es fácil corroborar que cualquiera de las condiciones del Corolario 2.3.7 se satisfacen.

El siguiente argumento nos permite deducir la mayoría de los ejemplos que exponemos en esta sección. Recordemos que toda función continua y positiva que no posee ceros en un conjunto compacto X, es acotada inferiormente en dicho conjunto. En particular, si f es un polinomio de N variables es claro que f pertenece a $H_\infty(\mathbb{D}^N) \subset H_\infty(B_{c_0})$. Luego, si f no tiene ceros en $\mathbb{T}^N$, por compacidad $|f|$ es acotada interiormente en $\mathbb{T}^N$ y por el Teorema 2.3.5 el sistema asociado $\{\varphi_n\}$ resulta una sucesión de Riesz. Si además f no tiene ceros en $\mathbb{D}^N$, su inverso multiplicativo $1/f$ pertenece a $H_\infty(\mathbb{D}^N)$ y, por lo tanto, $S\varphi$ y $1/S\varphi$ están en $\mathcal{M}$. Luego, como consecuencia del Teorema 2.1.3 concluimos que $\{\varphi_n\}_n$ es una base de Riesz.

Si consideramos la función $\varphi(x) = c_1c_2\sqrt{2}\sin(x) - c_2\sqrt{2}\sin(2x) - c_1\sqrt{2}\sin(3x) + \sqrt{2}\sin(6x)$, la función holomorfa asociada es $f(z) = (z_1 - c_1)(z_2 - c_2,)$ y la serie de Dirichlet

$$D(s) = c_1c_2 - c_2 2^{-s} - c_1 3^{-s} + 6^{-s}.$$

Tanto para este como para el caso general $f(z) = (z_1 - c_1)(z_2 - c_2)\dots(z_N - c_N)$, el sistema asociado $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión de Riesz si y solo si $|c_i| \neq 1$ para todo i. Es una base de Riesz si y solo si $|c_i| > 1$ para todo i. Finalmente, el sistema es una sucesión Bessel que no satisface la desigualdad inferior de frame si y solo si $|c_i| \geq 1$ para todo i y existe algún j para el cual $|c_j| = 1$. Por ejemplo podemos elegir una f muy sencilla como $f(z) = z_1 - 1$. En este caso la serie de Dirichlet correspondiente es $D(s) = 2^{-s} - 1$ y la función de $L^2(0,1)$ es $\varphi = \sqrt{2}\sin(x) + \sqrt{2}\sin(2x)$. Por lo tanto, $\{\varphi_n\}$ es sucesión de Bessel pero no es un marco.

Consideremos ahora el polinomio de N variables

$$f(z) = z_1 \dots z_N - c.$$

Repitiendo el mismo argumento deducimos que $\{\varphi_n\}$ es sucesión de Riesz si y solo si $|c| \neq 1$, y es una base de Riesz si y solo si $|c| > 1$.

En [9] se dan condiciones para que un polinomio de varias variables no tenga ceros en los conjuntos $\mathbb{T}^N$ o $\mathbb{D}^N$. A continuación usaremos estos resultados para construir algunos ejemplos. Primero nos hace falta introducir un poco de notación y algunas definiciones.

Dado un polinomio $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ que se escribe

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbf{K}} b_k z^k, \quad \text{con } \mathbf{K} \subset \mathbb{N}_0^N \quad y \quad b_k \in \mathbb{C} - \{0\}, \tag{2.24}$$

llamamos ***conjunto de grados*** a $\mathbf{K}$ y $V(\mathbf{K})$ al conjunto de vértices de la cápsula convexa de $\mathbf{K}$. Además, decimos que el polinomio multivariado f es ***estable*** si

$$f(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{D}^N.$$

Los siguientes dos teoremas son una herramienta fundamental para construir los ejemplos deseados.

Teorema 2.4.1. [9, Corolario 1](Región libre de ceros alrededor de $\mathbb{T}^N$). Sea f como en (2.24) y supongamos que para algún $v \in \mathbf{V}(\mathbf{K})$ se tiene

$$2|b_v| > \sum_{k \in \mathbf{K}} |b_k|.$$

Entonces f no tiene ceros en $\mathbb{T}^N$.

Teorema 2.4.2. [9, Teorema 5]

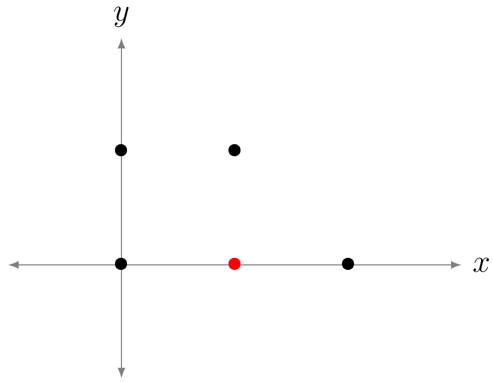
Consideremos el polinomio de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{6} a_n n^{-s}$ y su polinomio asociado a través de la transformada de Bohr

$$f(z) = a_1 + a_2 z_1 + a_3 z_2 + a_4 {z_1}^2 + a_5 z_3 + a_6 z_1 z_2.$$

Asumiendo que los coeficientes a_n son no nulos, el conjunto de grados es

$$\mathbf{K}(f) = \{(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (2,0,0),\ (1,1,0)\}.$$

Luego, excepto por $(0,0,1)$, todos elementos de $\mathbf{K}(f)$ están en el plano xy y se distribuyen como muestra la siguiente imagen.



De aquí podemos observar que $(0,1,0)$ no pertenece a $V(\mathbf{K})$ (de hecho solo necesitamos que a_1, a_2 y a_4 sean no nulos para poder garantizar esto). Luego, si

$$|a_2| > \sum_{n\neq 2} a_n, \tag{2.25}$$

se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.4.1. Por lo tanto, f no tiene ceros en $\mathbb{T}^\infty$ y en consecuencia $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de Riesz.

El ejemplo anterior se puede generalizar facilmente para cualquiera

$$D(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$$

que cumpla (2.25) y tal que a_1, a_2 y a_4 sean no nulos, esto se debe a que, en tal caso, el indice que se corresponde con a_2 no es un vértice (sin importar el número de variables).

Para el próximo ejemplo, $\pi(N)$ denota la cantidad de primos menores o iguales a N. Además, recordemos de (1.6) que α_n denota al multi-índice

$$\alpha(n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})},$$

de manera que $n = \mathfrak{p}^{\alpha(n)}$. Consideremos ahora el polinomio de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ con $a_1 \neq 0$ y tal que

$$|a_n| \leq \left(1 - \frac{1}{(1+|a_1|)^{\frac{1}{\pi(N)}}}\right)^{|\alpha(n)|} \qquad \text{para todo} \quad n = 1, \ldots, N. \tag{2.26}$$

Notemos que f, la antitransformada de Bohr de D, es un polinomio en $\pi(N)$ variables complejas. Si juntamos (2.26) con el Teorema 2.4.2 obtenemos que el sistema $\{\varphi_n\}$ es una base de Riesz para $L^2(0,1)$.

Para el siguiente ejemplo salimos del mundo de los polinomios y consideramos una f que sea el producto de d transformadas de Möbius en diferentes variables. Más precisamente, dados $c_i \in \mathbb{C}_*$ con $|c_i| < 1$ para $i = 1, \dots d$, definimos

$$f(z) = \frac{z_1 - c_1}{1 - \overline{c_1} z_1} \cdots \frac{z_d - c_d}{1 - \overline{c_d} z_d}.$$

Luego, f es una función acotada, holomorfa y de módulo 1 en $\mathbb{T}^\infty$. Por el Teorema 2.3.5 concluimos que $\{\varphi_n\}$ es una sucesión ortonormal en $L^2(0,1)$.

En el caso en que $d = 1$, es sencillo reescribir la transformada de Moebius y obtener

$$f(z_1) = \frac{z_1 - c_1}{1 - \overline{c_1} z_1} = (z_1 - c_1) \sum_{m=0} \overline{c_1}^m z_1^m.$$

Por lo tanto, su serie de Dirichlet asociada es

$$D(s) = \overline{c_1} + \sum_{m=1}^{\infty} (\overline{c_1}^{m-1} + c_1 \overline{c_1}^m)(2^m)^{-s}.$$

y

$$\varphi(x) = \overline{c_1}\sqrt{2}\sin(x) + \sum_{m=1}^{\infty} (\overline{c_1}^{m-1} + c_1 \overline{c_1}^m)\sqrt{2}\sin(2^m x). \tag{2.27}$$

Ejemplo 2.4.3. *Sea φ como en (2.27) con $0 < |c_1| < 1$. Luego, el sistema $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión ortogonal de $L_2(0,1)$ que no es una subsucesión de $\{\sqrt{2}\sin(nx)\}_n$.*

Como último ejemplo queremos construir una sistema $\{\varphi_n\}_n$ que cumpla la desigualdad inferior pero no la superior de la condición de marco (2.7). Por el Teorema 2.2.5, esto es lo mismo que hallar una función $\varphi \in L_2(0,1)$ de forma tal que D no pertenezca a $\mathcal{H}_\infty$ y que $1/D$ pertenezca a $\mathcal{H}_\infty$. Para lograrlo vamos a trabajar en los espacios de Hardy clásicos del disco $\mathbb{D}$. Es decir, buscamos una función $F \in H_2(\mathbb{D})$ que no pertenezca a $H_\infty(\mathbb{D})$ y que $1/F$ pertenezca a $H_\infty(\mathbb{D})$. De esta manera, la función φ buscada será la que se corresponda con la serie de Dirichlet $D := \mathfrak{B}(F)$.

Una función $F \in H_1(\mathbb{D})$ se dice ***externa*** si se escribe como

$$F(z) = C \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f(e^{i\theta})| d\theta \right), \tag{2.28}$$

con $|C| = 1$ y f una función medible tal que $\log |f| \in L_1(\mathbb{T})$. Veamos que si consideramos la función externa como (2.28) asociada a $f(e^{i\theta}) = |\theta|^{-\frac{1}{3}}$ con $C = 1$ cumple todo lo que necesitamos. Por [52, Theorem 17.16] sabemos que

$$\lim_{r \to 1^-} |F(re^{i\theta})| = f(e^{i\theta}) \text{ para casi todo } e^{i\theta} \in \mathbb{T}$$

y que F pertenece a $H_p(\mathbb{D})$ si y solo si f pertenece a $L_p(\mathbb{T})$ $1 \leq p \leq \infty$. Como f pertenece a $L_2(\mathbb{T})$ y no a $L_\infty(\mathbb{T})$, tenemos que F está en $H_2(\mathbb{D})$, pero no en $H_\infty(\mathbb{D})$. Además, si analizamos (2.28) podemos ver que $1/F$ es la función externa asociada a $1/f = |\theta|^{1/3}$. Por lo tanto, aplicando nuevamente el teorema tenemos que como $1/f$ pertenece a $L_\infty(\mathbb{T})$ se deduce que $1/F$ pertenece a $H_\infty(\mathbb{D})$. Esto nos dice que F cumple todas las propiedades deseadas.

2.5. Sistemas de dilataciones en varias variables

En esta sección nos concentraremos en estudiar sucesiones de Riesz, frames y bases ortonormales para $L^2((0,1)\times(0,1))$ de la forma

$$\varphi_{m,n}(x,y) = \varphi(mx, ny).$$

Nuestro objetivo es reproducir los Teoremas 2.2.5 y 2.3.5 para $\{\varphi_{m,n}\}_{n,m}$. Para esto vamos a necesitar varios resultados sobre series de Dirichlet múltiples que expondremos a continuación. Comencemos primero con la definición de serie de Dirichlet múltiple.

Definición 2.5.1. *Una* ***serie de Dirichlet*** $k-$***multiple*** *es una serie de la forma*

$$\sum_{m_1,\dots,m_k=1}^{\infty} \frac{a_{m_1,\dots,m_k}}{m_1^{s_1},\dots,m_k^{s_k}},$$

donde los coeficientes $a_{m_1,\dots,m_k}$ pertenecen a $\mathbb{C}$ y $s_1,\dots,s_k$ son variables complejas.

Muchos resultados se pueden extender de series de Dirchlet a series de Dirichlet múltiples, adaptando algunas definiciones, por ejemplo la convergencia. Para que varias de las propiedades que ya conocemos sigan siendo válidas necesitamos la siguiente noción de convergencia.

Definición 2.5.2. *Una sucesión $k-$múltiple de números complejos*

$$\{a_{m_1,\dots,m_k}\}_{m_1,\dots,m_k=1}^{\infty}$$

converge *a L si para todo $\varepsilon > 0$ existen $(M_1,\dots,M_k) \in \mathbb{N}^k$ tales que*

$$|a_{m_1,\dots,m_k} - L| < \varepsilon,$$

para todo $m_j \geq M_j$ con $1 \leq j \leq k$.

Además, decimos que una serie k-múltiple de números complejos converge a S si las sumas parciales

$$S_{p_1,\ldots,p_k} = \sum_{m_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{m_k=1}^{p_k} a_{m_1,\ldots,m_k},$$

convergen a S.

Definición 2.5.3. *Se dice que una serie k-múltiple es **regularmente convergente** si es convergente para todas sus subseries de dimensión j, para todo $1 \leq j \leq k$.*

En particular, esta definición implica la convergencia de la serie $k-$múltiple. Esta noción de convergencia preserva todas las propiedades sobre series de Dirichlet simples que necesitamos para extender nuestro trabajo. Un desarrollo exhaustivo sobre series de Dirichlet múltiples y la convergencia regular se puede consultar en la Tesis doctoral de Jaime Castillo-Medina [16].

Por comodidad, para lo que sigue vamos a considerar el problema que solo involucra series dobles. La extensión al caso general es inmediata. Notemos I^2 al conjunto $(0,1) \times (0,1)$. Dada una función $\varphi \in L^2(I^2)$ extendemos a todo $\mathbb{R}^2$ de manera impar en cada coordenada y con período 2. Luego, consideramos las dilataciones en ambas variables dadas por

$$\varphi_{m,n}(x,y) = \varphi(mx, ny).$$

Observemos que $L^2(I^2)$ tiene una base que está formada por las funciones

$$e_{m,n}(x,y) = e_m(x)e_n(y) = \sin(mx)\sin(nx).$$

Esto nos lleva a definir el operador S análogo a caso de una variable, que a cada elemento de la base $e_{m,n}$ le asigna $m^{-s}n^{-t}$. De la misma manera, definimos

$$T_\varphi f(x,y) = \sum_n \langle f, e_{m,n}\rangle \, \varphi_{m,n}(x,y).$$

Nuestro primer objetivo es extender el Teorema 2.2.5 a series de Dirichlet dobles. Repitiendo exactamente los argumentos usados para el caso de series de Dirichlet ordinarias se deduce que vale

$$T_\varphi = S^{-1} \circ M_{S\varphi} \circ S.$$

Por otro lado, también necesitamos definir el espacio de Hardy de series de Dirichlet dobles

$$\mathcal{H}_2^2 = \left\{ \sum a_{m,n} m^{-s} n^{-t} : \sum_{m,n} |a_{m,n}|^2 < \infty \right\}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, al igual que en el caso de una variable, toda serie de Dirichlet de $\mathcal{H}_2^2$ converge absolutamente en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \times \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$. En efecto, sea $\sum a_{m,n} m^{-s} n^{-t}$ una serie doble perteneciente a $\mathcal{H}_2^2$. Para todo $(s,t) \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \times \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{m,n} \left|a_{m,n} m^{-s} n^{-t}\right| &\leq \left(\sum_{m,n} |a_{m,n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m,n} |m^{-s} n^{-t}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{m,n} |a_{m,n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m} m^{-2\operatorname{Re}(s)} \sum_{n} n^{-2\operatorname{Re}(t)}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\end{aligned}$$

Además, si para cada $\varepsilon > 0$ notamos

$$C_\varepsilon = \sum_m \frac{1}{m^{1+2\varepsilon}} \sum_n \frac{1}{n^{1+2\varepsilon}},$$

usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\sup_{(s,t) \in \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon} \times \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}} |D(s,t)| \leq C_\varepsilon \|D\|_{\mathcal{H}_2^2}.$$

Esto significa que $\mathcal{H}_2^2$ está continuamente incluido en $C_b\big(\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon} \times \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big)$, el espacio de funciones continuas y acotadas que salen de $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon} \times \mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. En particular, de aquí podemos deducir que la convergencia en $\mathcal{H}_2^2$ implica convergencia puntual en $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Este hecho es necesario para la extensión del Teorema 2.2.5.

Siguiendo nuestra notación, llamamos $\mathcal{M}_2$ al conjunto de todos los multiplicadores de $\mathcal{H}_2^2$, que nuevamente resulta ser un subespacio del espacio de series de Dirichlet dobles. Cada serie de Dirichlet en $\mathcal{M}_2$ define un operador de multiplicación M_D on $\mathcal{H}_2^2$.

Con todas estas definiciones y siguiendo la misma demostración es posible extender el Teorema 2.2.5 de la siguiente manera.

Teorema 2.5.4. *Sea $\varphi \in L^2(I^2)$ and $\varphi_{m,n}(x) = \varphi(mx, ny)$. Luego se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

- *El sistema $\{\varphi_{m,n}\}$ es una sucesión Bessel si y solo si $S\varphi \in \mathcal{M}_2$.*
- *El sistema $\{\varphi_{m,n}\}$ cumple la desigualdad inferior de marco si y solo si $1/S\varphi \in \mathcal{M}_2$.*

El teorema anterior describe propiedades del sistema $\{\varphi_{m,n}\}$ en términos del espacio de multiplicadores $\mathcal{M}_2$. Por lo tanto, nos gustaría poder tener una mejor comprensión del espacio $\mathcal{M}_2$ como tenemos en el problema original dada por el Teorema 2.1.4. Para esto comencemos analizando si en el caso de series de Dirichlet múltiples se tiene un resultado análogo al Corolario 1.1.7.

Se extiende la definición de $\mathcal{H}_\infty$ (Definición 1.1.3) a series de Dirichlet dobles y múltiples de la siguiente manera.

Definición 2.5.5. *Al espacio compuesto de todas las series de Dirichlet dobles que convergen regularmente en $\mathbb{C}_0^2$ y cuyo límite define una función acotada en $\mathbb{C}_0^2$ lo llamamos*

$$\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2).$$

Análogamente, notamos $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^k)$ al espacio compuesto de todas las series de Dirichlet k-múltiples que convergen regularmente en $\mathbb{C}_0^k$ y cuyo límite define una función acotada en $\mathbb{C}_0^k$.

Este espacio resulta un álgebra de Banach [17] con la norma

$$\|D\|_{\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2)} = \sup_{\substack{s\in\mathbb{C}_0 \\ t\in\mathbb{C}_0}} \left| \sum_{m,n=1} \frac{a_{m,n}}{m^s n^t} \right|.$$

La demostración de este hecho es no trivial ya que requiere extender varios teoremas y propiedades a series de Dirichlet múltiples, entre ellas el Teorema de Bohr y varios resultados sobre la convergencia de series múltiples.

Castillo-Medina, García y Maestre prueban en [17] que los espacio $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^k)$, $k \in \mathbb{N}$, son isométricamente isomorfos entre sí independientemente de k. De hecho, ellos prueban que dichos espacios son isométricamente isomorfos a $H_\infty(B_{c_0})$. Para lograr esto, extienden el Teorema 1.1.5 y prueban (ver [17, Teorema 3.5]) que la transformada de Bohr multiple dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : H_\infty(B_{c_0^k}) &\longrightarrow \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^k) \\ \sum_{\alpha_j\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} z_1^{\alpha_1}\ldots z_k^{\alpha_k} &\longrightarrow \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{\infty} \frac{a_{\mathfrak{p}^{\alpha_1},\ldots,\mathfrak{p}^{\alpha_k}}}{m_1^{s_1},\ldots,m_k^{s_k}}, \end{aligned}$$

es un isomorfimo isométrico. Luego, como c_0^k y c_0 son isométricamente isomorfos, se obtiene un isomorfimo isometrico entre los espacios $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^k)$. Además, prueban [17, Remark 3.6] que si $f \in H_\infty(B_{c_0^k})$, tomando $D = \mathfrak{B}(f)$ se cumple que

$$D(s_1, s_2, \ldots, s_k) = f\left(\frac{1}{\mathfrak{p}^{s_1}}, \frac{1}{\mathfrak{p}^{s_2}}, \ldots, \frac{1}{\mathfrak{p}^{s_k}}\right)$$

para todo $(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}_0^k$.

Nos queda por desarrollar esta teoría desde el punto de vista del análisis de Fourier. Como antes, y por simplicidad, solo mostraremos el caso doble. Primero debemos dar algunas definiciones de este tercer mundo en el caso múltiple. Se define el espacio de Hardy clásico para $\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty$ como

$$\begin{aligned} H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty) = \{ f \in L_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty) : \widehat{f}(\gamma, \beta) \neq 0 \\ \text{sólo si } \beta_j, \alpha_i \geq 0 \text{ para todo } i, j \}. \end{aligned}$$

Para series de Dirichlet ordinarias tenemos el Corolario 1.1.7 que nos dice que los tres contextos donde estuvimos trabajando son esencialmente el mismo. Más concretamente, sabemos que los siguientes espacios son isomorfos como espacios de Banach

$$\mathcal{H}_\infty = H_\infty(B_{c_0}) = \mathcal{H}_\infty(\mathbb{T}^\infty).$$

En esta línea, el resultado de Castillo-Medina, García y Maestre [17, Teorema 3.5] extiende la primer igualdad para series múltiples, es decir, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^k) = H_\infty(B_{c_0^k}). \tag{2.29}$$

A continuación extendemos dicho resultado incorporando el punto de vista dado por el análisis de Fourier, obteniendo así una versión múltiple del Corolario 1.1.7.

Teorema 2.5.6. *Los siguientes espacios son isométricamente isomorfos:*

$$\mathcal{H}_\infty\left(\mathbb{C}_0^2\right) = H_\infty\left(B_{c_0^2}\right) = H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty).$$

Los correspondientes isomorfimos indentifican coeficientes de Dirichlet, coeficientes monomiales y coeficientes de Fourier. Además, se tiene el mismo resultado para $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_0^2)$, es decir,

$$\mathcal{H}_2^2 = H_2(B_{c_0^2}) = H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty).$$

Demostración. Como se menciona anteriormente, la primera igualdad es válida (se puede encontrar en [17]) e incluye la prueba de la transformada de Bohr múltiple es un isomorfimo isométrico entre $H_\infty(B_{c_0^2})$ y $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2)$ que indentifica coeficientes monomiales con coeficientes de Dirichlet. Además, dicho resultado se debe a que $H_\infty(B_{c_0^2}) = H_\infty(B_{c_0})$ isométricamente. Para hacer esto el isomorfimo isométrico y su inversa respectivamente viene dado por componer con la función que intercala las variables

$$\begin{aligned} \Phi : B_{c_0} \times B_{c_0} &\longrightarrow B_{c_0} \\ (\{x_l\}_l, \{y_m\}_m) &\mapsto \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\} \end{aligned}$$

y su inversa

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1} : B_{c_0} & \longrightarrow & B_{c_0} \times B_{c_0} \\ z & \mapsto & (\{z_{2l-1}\}_l, \{z_{2m}\}_m) \,. \end{array}$$

Es claro que ambas funciones son continuas y lineales, esto implica que son funciones holomorfas entre espacios de Banach. Luego, la asignación

$$\begin{array}{c} H_\infty(B_{c_0^2}) \longrightarrow H_\infty(B_{c_0}) \\ f \mapsto f \circ \Phi^{-1} \end{array}$$

está bien definida. Es claro que es el isomorfimo isométrico que buscábamos.

Con el mismo argumento podemos probar la segunda igualdad. En efecto, consideremos el mismo isomorfimos isométrico pero de $\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty$ a $\mathbb{T}^\infty$; esto es,

$$\begin{array}{c} \widetilde{\Phi} : \mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty \longrightarrow \mathbb{T}^\infty \\ (w, \tilde{w}) \longrightarrow (w_1, \tilde{w}_1, w_2, \tilde{w}_2, \ldots). \end{array}$$

Nuevamente, la asignación

$$\begin{array}{c} H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty) \longrightarrow H_\infty(\mathbb{T}^\infty) \\ f \longrightarrow f \circ \widetilde{\Phi}^{-1} \end{array}$$

es el isomorfismo isométrico entre $H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$ y $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$ que queremos. Para ver que está bien definida, tomemos $f \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$ luego $f \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$ pertenece a $L_\infty(\mathbb{T}^\infty)$ y su coeficiente α está dado por

$$\begin{aligned} \widehat{f \circ \widetilde{\Phi}^{-1}}(\alpha) &= \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} f \circ \widetilde{\Phi}^{-1}(w) w^{-\alpha} \, dw = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} f(w, \widehat{w}) w^{-\alpha} \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty} f(w_i, w_p) w_i^{-\gamma} w_p^{-\beta} dw_i dw_p = \widehat{f}(\gamma, \beta). \end{aligned}$$

Aquí, w_i denota a la sucesión compuesta de todas las variables de índice impares mientras que w_p la de todas las de índice impar y $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_2)$ tal que $\alpha = (\gamma_1, \beta_1, \gamma_2, \beta_2, \ldots)$. Esta igualdad nos asegura que $\widehat{f}(\alpha) \neq 0$ si y solo si $\alpha_j \geq 0$ para todo j, o equivalentemente, $f \circ \widetilde{\Phi}^{-1} \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$.

Combinando estos resultados con el Corolario 1.1.7 se deduce que

$$H_\infty(B_{c_0} \times B_{c_0}) = H_\infty(B_{c_0}) = H_\infty(\mathbb{T}^\infty) = H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty).$$

$$\begin{array}{ccccccc} H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty) & & H_\infty(\mathbb{T}^\infty) & & H_\infty(B_{c_0}) & & H_\infty(B_{c_0} \times B_{c_0}) \\ \sum \widehat{f}(\gamma,\beta) w_1^\gamma w_2^\beta & \xrightarrow{\bullet\circ\widetilde{\Phi}^{-1}} & \sum_\alpha \widehat{f}(\alpha) w^\alpha & \xrightarrow{c_\alpha = \hat{f}(\alpha)} & \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha & \xrightarrow{\bullet\circ\Phi} & \sum c_{\gamma,\beta} z_1^\gamma z_2^\beta \end{array}$$

Diagram 2.5.1: Relación entre los espacios de Hardy múltiples y simples.

Juntando todo lo anterior deducimos que $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2)$ es isométricamente isomorfo a cualquier espacio del siguiente diagrama:

Para concluir, queremos investigar qué sucede con los coeficientes al aplicar estos isomorfimos. Queremos probar que, como indica el Diagrama 2.5.1 se identifican los coeficientes de Dirichlet, monomiales y de Fourier. Para ver esto comencemos calculando el coeficiente monomial de $f \circ \Phi^{-1}$ para una función

$$f \sim \sum c_{\gamma,\beta} z_1^\gamma z_2^\beta$$

de $H_\infty(B_{c_0} \times B_{c_0})$ cualquiera. Tomemos $(z_1, z_2) \in c_{00} \times c_{00}$, luego $z := \Phi^{-1}(z_1, z_2)$ pertenece a c_{00}. Si definimos $\alpha = (\gamma_1, \beta_1, \gamma_2, \beta_2, \dots)$ obtenemos que

$$f \circ \Phi^{-1} \sim \sum c_{\gamma,\beta} z^\alpha.$$

Como vale para todo $(z_1, z_2) \in c_{00} \times c_{00}$ concluimos de la unicidad de los coeficientes monomiales que $c_{\gamma,\beta}(f) = C_\alpha(f \circ \Phi^{-1})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ y $f \in H_\infty(B_{c_0} \times B_{c_0})$. Por otro lado, como consecuencia del ítem *(1)* de la Proposición 1.1.11 se deduce que

$$\widehat{f \circ \widetilde{\Phi}}(\gamma, \beta) = \widehat{f}(\alpha) \text{ para todo } \gamma, \beta \text{ en } \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \text{ y } f \in H_\infty(B_{c_0}).$$

De esta manera concluimos que las asignaciones del Diagrama 2.5.1 son válidas.

La prueba de la segunda afirmación es mucho más fácil porque se deduce de identificar las bases ortonormales $\{m^{-s}n^{-t}\}_{(m,n)}$, $\{z_1^\gamma z_2^\beta\}_{(\gamma,\beta)}$ y $\{w_1^\gamma w_2^\beta\}_{(\gamma,\beta)}$ de $\mathcal{H}_2^2$, $H_2(B_{c_0^2})$ y $H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$, respectivamente. □

El siguiente objetivo es usar el teorema anterior para caracterizar el espacio

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{H}_2^2)$$

y obtener una generalización del Teorema 2.1.4.

Teorema 2.5.7. *Los siguientes espacios de Banach son isométricamente isomorfos*

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2). \tag{2.30}$$

Demostración. Es un resultado conocido que el espacio de multiplicadores de $H_2(\mathbb{T}^\infty)$ cumple que

$$\mathcal{M}(H_2(\mathbb{T}^\infty)) = H_\infty(\mathbb{T}^\infty).$$

Es fácil ver que esto también es verdad para $\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty$, esto es,

$$\mathcal{M}(H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)) = H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty). \tag{2.31}$$

Queremos combinar este último resultado con el Teorema 2.5.6 que garantiza que $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2) = H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$ y que $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_0^2) = H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$. Sin embargo, la existencia de un isomorfismo isométrico entre espacios no garantiza que sus espacio de multiplicadores coincidan. Esto se debe justamente a que, en principio, no sabemos cómo se comportan los isomorfismos con los productos. Por lo tanto, no alcanza con juntar los isomorfismos mencionados sino que tenemos que mirar específicamente cómo se comporta cada isomorfismo en particular. Veamos que

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_0^2)) = \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2)$$

probando la doble inclusión.

$\subseteq$) Si $D \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_2^2)$ se tiene que para toda $D_g \in \mathcal{H}_2^2$ el producto DD_g pertenece a $\mathcal{H}_2^2$. Esto implica que, en particular, $D.1$ pertenece a $\mathcal{H}_2^2$. Luego, existe $h \in H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$ tal que $D = D_h$ (en otras palabras, $\mathcal{B}(h) = D_h$). Como $D_h D_g$ está en $\mathcal{H}_2^2$ deducimos que $\mathfrak{B}^{-1}(D_h D_g)$ pertenece a $H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$. Además, sabemos que hg es una serie de potencias formal y sus coeficientes son igual a los de $\mathcal{B}^{-1}(D_h)\mathcal{B}^{-1}(D_g)$. Por lo que vimos antes la transformada de Bohr es multiplicativa y por lo tanto

$$\mathfrak{B}^{-1}(D_h)\mathfrak{B}^{-1}(D_g) = \mathcal{B}^{-1}(D_h D_g) \in H_2.$$

Como estas series tienen los mismo coeficientes deducimos que $h.g \in H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$ para toda $g \in H_2$, es decir, probamos que h es un multiplicador. Deducimos de (2.31) que $h \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$.

Gracias a la extensión vista en el Theorem 2.5.6 para series de Dirichlet multiples esto pasa si y solo si D_h pertenece a $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2)$ como queríamos.

$\supseteq$) Dada $D_f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0^2)$, queremos ver que para toda serie de Dirichlet $D_g \in \mathcal{H}_2^2$ se cumple que $D_f D_g \in \mathcal{H}_2^2$. Por (2.31) sabemos que $f \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$ y $g \in H_2(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$ se tiene que $fg \in H_2$. Luego, D_{fg} pertenece a $\mathcal{H}_2^2$. La transformada de Bohr formal $\mathcal{B}$, pensada del espacio de series de potencias formales $\mathfrak{P}$ al espacio de series de Dirichlet formales $\mathfrak{D}$, manda (formalmente)

$$\mathfrak{B}(fg) = D_f D_g.$$

En principio, $D_f D_g$ solo está en $\mathfrak{D}$ y sus coeficientes coinciden con los de $\mathcal{B}(fg)$ que pertenece a $\mathcal{H}_2^2$. Entonces, $D_f D_g$ pertenece a $\mathcal{H}_2^2$. $\square$

Concluimos esta capítulo aplicando los resultado vistos en esta sección para enunciar el un resultado análogo el Teorema 2.3.5 para series de Dirichlet dobles. Con todos los contenidos desarrollados en esta sección la prueba del Teorema 2.5.8 es idéntica al caso de series de Dirichlet clásicas, y por lo tanto, la omitimos.

Teorema 2.5.8. *Sea $\varphi \in L^2(I^2)$, $D = S\varphi$ y $f = \mathcal{B}^{-1}(D)$ y sean $B > A > 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *El sistema $\{\varphi_{m,n}\}_{m,n}$ es una sucesión de Riesz con constantes A y B.*
- (b) *La función f pertenece a $H_\infty(\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty)$, su norma $\|f\|_{H_\infty} \leq B$ y vale que*

$$|f(z_1, z_2)| \geq \varepsilon, \qquad \textit{para casi todo } (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^\infty.$$

En el caso de series múltiples aún no hemos podido encontrar una equivalencia similar al ítem (c) del Teorema 2.3.5. La dificultad surge al querer definir un análogo a $D^\gamma(it)$ ya que no hay una versión del Teorema de Fatou que nos sirva en este caso.

Capítulo 3

Series de Dirichlet aleatorias

Comenzamos esta capítulo analizando la definción de sucesión básica incondicional. Luego, estudiamos la convergencia aleatoria incondicional (propiedad más débil que la incondicionalidad) de sucesiones en espacios de Hardy vectoriales $\mathcal{H}_p(X)$. Mostramos que el espacio de Banach X tiene tipo 2 (respectivamente, cotipo 2) si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_n \subset X$ se cumple que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es aleatoria incondicionalmente convergente (respectivamente, divergente) en $\mathcal{H}_2(X)$. Para conseguir estos resultados primero analizamos y presentamos los espacios de Hardy aleatorios $\mathcal{H}_p^{Rad}(X)$.

3.1. Bases incondicionales

En esta sección estudiamos varias definiciones elementales y pilares de este capítulo, entre las más importantes se encuentra la definición de sucesión incondicional y base incondicional. La importancia de este concepto radica en que luego vamos a considerar dos propiedades más débiles a las que llamaremos RUC y RUD. La definición de base incondicional posee varias formulaciones equivalentes, por lo que decidimos dar la definición más intuitiva junto con las equivalencias que más utilizamos durante este trabajo.

Recordemos de la Definición 1.2.6 que una base $\{x_n\}_n$ de un espacio de Banach X se denomina **base incondicional** si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^N$, y toda elección de signos $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}^N$ se cumple que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|. \tag{3.1}$$

Es importante resaltar que C no depende de N ni de la elección de escalares ni de la de signos. Recordemos también que a la mejor de las constantes la llamamos **constante de incondicionalidad** de la base $\{x_n\}_n$.

Es momento de introducir una notación que nos permite manejarnos con mayor fluidez a la hora operar con este tipo de condiciones. Si existe una constante que cumple las condiciones mencionadas anteriormente, vamos a omitir la constante y cambiar el símbolo $\leq$ por $\lesssim$. Por ejemplo, de esta manera, la condición (3.1) se escribe como

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|.$$

A continuación, algunas equivalencias de base incondicional partiendo de la condición (3.1). Supongamos que $\{x_n\}_n$ cumple (3.1) y fijemos signos ε_n. Como la desigualdad (3.1) vale para toda sucesión de escalares podemos elegir aplicarla a $\varepsilon_n a_n$ para obtener

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\|.$$

Por lo tanto, si combinamos ambas desigualdades obtenemos que para todo $N \in N$, toda sucesión de escalares a_n y signos ε_n se tiene que

$$C^{-1} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\| \leq \Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|.$$

Siguiendo la nueva notación, decimos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \sim \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|. \tag{3.2}$$

De estas observaciones se desprende la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de vectores no nulos de un espacio de Banach X. Luego, son equivalentes:*

(a) Para todo $N \in \mathbb{N}$, toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^N$, y toda elección de signos $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}^N$ se cumple que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|.$$

(b) *Para todo $N \in \mathbb{N}$, toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^N$, y cualesquiera signos ε_n y $\varepsilon'_n \in \{-1,1\}^N$ se cumple que*

$$\Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \sim \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon'_n a_n x_n \Big\|.$$

(c) *Para todo $N \in \mathbb{N}$, toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^N$, y cualesquiera signos $\varepsilon_n \in \{-1,1\}^N$ se cumple que*

$$\mathbb{E}_\varepsilon \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \sim \Big\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \Big\|,$$

donde $\mathbb{E}_\varepsilon$ denota la esperanza respecto a las variables ε_n.

Demostración. Observemos que (a) $\Rightarrow$ (b) es consecuencia de directa de (3.2) ya que la estimación vale para toda elección de signos. Para ver que (b) $\Rightarrow$ (a) basta tomar $\varepsilon_n = 1$ para $i = 1, \dots, N$. El hecho de que (a) $\Rightarrow$ (c) se obtiene de tomar esperanza en (3.2). Por último, para deducir (c) $\Rightarrow$ (a) podemos elegir como sucesión de escalares a $\varepsilon'_n a_n$ y así obtener

$$\mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \varepsilon'_n a_n x_n \Big\| \sim \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon'_n a_n x_n \Big\|.$$

Luego, como $\varepsilon_n \varepsilon'_n$ es otra elección de signos podemos usar nuevamente (c) para conseguir la estimación

$$\Big\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \Big\| \sim \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon'_n a_n x_n \Big\|.$$

Por tanto, se satisface (a). $\square$

Notemos que una sucesión de vectores no nulos que satisface (a) es una sucesión básica. En efecto, dados $N \leq M \in \mathbb{N}$ podemos tomar

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & si \quad n \leq N; \\ -1 & si \quad N < n \leq M, \end{cases}$$

y luego calcular

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \Big\| &= \frac{1}{2} \Big\| \sum_{n=1}^M a_n x_n + \sum_{n=1}^M \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \\ &\leq \frac{1}{2} \Big\| \sum_{n=1}^M a_n x_n \Big\| + \frac{1}{2} \Big\| \sum_{n=1}^M \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^M a_n x_n \Big\|. \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos justamente la condición (a) para cada termino. Por lo tanto, una sucesión que satisface alguna de las condiciones anteriores es una **sucesión básica incondicional**. Si además la sucesión genera el espacio X decimos que es una **base incondicional**.

Ejemplo 3.1.2. *Algunos ejemplos conocidos de bases incondicional y condicionales (aquellas bases que no son incondicionales) son los siguientes:*

- La base canónica de c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ es incondicional.
- Cualquier base ortogonal de un espacio de Hilbert es incondicional.
- La base sumante de c_0 definida por

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

  donde (e_i) denota la base canónica de c_0, es una base condicional de c_0.
- Los espacios $C[0,1]$ y $L_1[0,1]$ no tienen base incondicional.
- El espacio $H_1(\mathbb{T})$ posee una base incondicional. Fue Maurey [43] quien primero dio una demostración no constructiva en 1980. Más adelante Carleson [15] y Wojtaszczyk [55] construyeron ejemplos explícitos.

A partir de estos ejemplos nos preguntamos si el espacio $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ (ver la Definición 1.1.9 para $X = \mathbb{C}$) tiene alguna base incondicional para $1 < p < \infty$. El caso $p \neq 2$ resulta ser un problema abierto. Mientras que para $p = 2$ la respuesta es claramente afirmativa. Recordemos que al espacio $\mathcal{H}_2(\mathbb{C})$ (también notado $\mathcal{H}_2$ (2.1)) es espacio Hilbert y una base ortonormal, y por lo tanto incondicional, de este espacio es $\{n^{-s}\}_n$. Cabe entonces preguntarnos qué sucede con la sucesión $\{n^{-s}\}_n$ para otros p. En principio, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3 (Helson-Aleman-Olsen-Saksman)**.** *Para todo $1 < p < \infty$ el sistema $\{n^{-s}\}_n$ es una base de Schauder de $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$.*

Este resultado es obtenido en [2] como consecuencia de la acotación uniforme de las sumas parciales, es decir, de que existe una constante C_p tal que para todo N en $\mathbb{N}$ y toda serie $\sum_n a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ se cumple que

$$\Big\| \sum_{n}^{N} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})} \leq C_p \Big\| \sum_{n}^{\infty} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})}. \tag{3.4}$$

Por otro lado, es fácil ver que el sistema genera todo el espacio, ya que visto a través de la transformada de Bohr se corresponde con $\{z^\alpha\}_\alpha$ que genera todo el espacio de Hardy $H_p(\mathbb{T})$. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.2 el sistema $\{n^{-s}\}_n$ resulta base de Schauder para todo $1 < p < \infty$.

Ahora que sabemos que para $1 < p < \infty$ la sucesión $\{n^{-s}\}_n$ es una base de Schauder de $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ surge preguntarnos para cuáles de estos p el sistema $\{n^{-s}\}_n$ es base incondicional. La Proposición 3.1.4 ([14, Proposición 4]), enunciada a continuación, nos ayuda a responder esta pregunta.

Proposición 3.1.4 (Carando-Defant-Sevilla). *Sea $1 \leq p < \infty$. Para todo $N \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^N$ se tiene que*

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})} \sim \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} = \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})}.$$

Por la Observación 1.1.10 sabemos que los espacios $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ están incluidos entre sí como los espacios $L_p(\mathbb{T}^\infty)$, es decir,

$$\mathcal{H}_q(\mathbb{C}) \subset \mathcal{H}_p(\mathbb{C})$$

siempre que $1 \leq p < q \leq \infty$. Por lo tanto, la proposición anterior prueba que valen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})} &\lesssim \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})} \qquad \text{si y solo si } p \geq 2; \\ \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})} &\lesssim \mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C})} \text{ si y solo si } p \leq 2. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que la única forma de que $\{n^{-s}\}_n$ satisfaga la condición de incondicionalidad en $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ es que $p = 2$. Lo interesante no es que $\{n^{-s}\}_n$ sea base incondicional de $\mathcal{H}_2$, esto ya lo sabíamos dado que el sistema es base ortonormal, sino que para todos los demás p el sistema $\{n^{-s}\}_n$ no es incondicional. Es decir, $\{n^{-s}\}_n$ es una base de Schauder condicional para todo $1 < p < 2$ y $2 < p < \infty$. ¿Qué pasa en el caso vectorial? No podemos esperar que sea una base de Schauder, pero ¿existe alguna acotación para las sumas parciales de una serie en $\mathcal{H}_p(X)$ del estilo (3.4)? ¿Vale algún resultado análogo al Teorema 1.1.2?

Teorema 3.1.5 (Teorema fundamental de Bohr vectorial)**.** *Existe una constante $C > 1$ tal que para todo $1 \leq p < \infty$, toda serie $\sum_n x_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ y $N \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\Big\| \sum_{n \leq N} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \leq C \log N \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

El resultado original es de Defant y Pérez [23, Teoremas 2.1 y 3.2], su prueba se puede encontrar también en [21, Teorema 24.14]. A diferencia del caso escalar (3.4), en el vectorial no se puede sacar el logaritmo, es decir, no existe una constante C que garantice

$$\Big\| \sum_{n \leq N} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}, \tag{3.5}$$

para toda serie y todo $N \in \mathbb{N}$. Para ver esto consideremos el espacio de Banach $X = H_1(\mathbb{T})$. Es un resultado conocido que el núcleo de Dirichlet

$$D_N = \sum_{n=0}^{N} z^n$$

cumple que $\|D_N\|_{H_1(\mathbb{T})} \sim \log N$ (esto es una estimación clásica para la norma L_1 del núcleo de Dirichlet se puede consutar en [42, pp. 59-60]). Llamemos P_N al operador $P_N : H_1(\mathbb{T}) \to H_1(\mathbb{T})$ que a una serie de potencias $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la manda a la serie truncada $P_N f = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Es también sabido que

$$P_N f = D_N * f \quad \text{y que} \quad \|P_N\| = \|D_N\|_{H_1(\mathbb{T})}.$$

Más aún, como los polinomios son densos en $H_1(\mathbb{T})$ la norma del operador coincide con

$$\|P_N\| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \text{ polinomio}}} \|P_N(f)\|_{H_1(\mathbb{T})}.$$

Es decir, para cada N podemos tomar un polinomio $f_N = \sum_{n=0}^{M_N} a_n^N z^n$ de norma 1 que cumpla que

$$\Big\|P_N(f_N)\Big\|_{H_1(\mathbb{T})} = \Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n^N z^n \Big\|_{H_1(\mathbb{T})} \sim \log N.$$

Consideremos la serie de Dirchlet con coeficientes en $H_1(\mathbb{T})$ dada por

$$E(s) = \sum_{n=0}^{M_N} a_n^N z^n \left(\frac{1}{2^n} \right)^s$$

perteneciente a $\mathcal{H}_p(H_1(\mathbb{T}))$.

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n^N z^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s \Big\|_{\mathcal{H}_p(H_1(\mathbb{T}))}^p &= \int_{\mathbb{T}^\infty} \Big\| \sum_{n=0} a_n^N w^n z^n \Big\|_{H_1(\mathbb{T})}^p dw \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |\sum a_n^N (wz)^n| dz \right)^p dw \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |\sum a_n^N z^n| dz \right)^p dw \\
&= \Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n^N z^n \Big\|_{H_1(\mathbb{T})}^p .
\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad usamos la invariancia por rotaciones de la medida. Por lo tanto, hemos probado que

$$\Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n^N z^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s \Big\|_{\mathcal{H}_p(H_1(\mathbb{T}))} = \Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n^N z^n \Big\|_{H_1(\mathbb{T})} \sim \log N.$$

En conclusión, no puede existir una constante C que cumpla (3.5) porque para todo N tendríamos que

$$\begin{aligned}
\log N \sim \Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n^N z^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s \Big\|_{\mathcal{H}_p(H_1(\mathbb{T}))} &\leq C \Big\| \sum_{n=0}^{M_N} a_n^N z^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s \Big\|_{\mathcal{H}_p(H_1(\mathbb{T}))} \\
&= C \Big\| \sum_{n=0}^{M_N} a_n^N z^n \Big\|_{H_1(\mathbb{T})}^p = C,
\end{aligned}$$

lo cual es un absurdo.

Respecto a este tipo de estimaciones sobre las sumas parciales de una serie de Dirichlet, en la Sección 3.3 presentamos un espacio que posee propiedades mucho mejores que $\mathcal{H}_p(X)$.

3.2. Sistemas RUC y RUD

Los espacios de Banach que poseen bases incondicionales tienen una estructura privilegiada. Sin embargo, existen espacios de Banach que no poseen ninguna base incondicional (como $C[0,1]$ o $L_1[0,1]$). Esto nos lleva a considerar propiedades más débiles que la incondicionalidad de una base. En esta sección expondremos algunas definiciones sobre convergencia aleatorias e incondicional de sucesiones básicas que fueron introducidas en [7] y [41].

En Capítulo 1 Proposición 1.2.5 recordamos que una serie $\sum_n x_n$ de un espacio de Banach converge incodicionalmente si las series $\sum_n \varepsilon_n x_n$ convergen para todo $\varepsilon_n \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$. Nos preguntamos entonces qué sucede si esta convergencia en vez de ser para todo signo es para casi todo signo de $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ respecto a la medida de Haar del grupo compacto $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$. De esta manera surge la siguiente definición, evidentemente más débil que la de convergencia incondicional.

Definición 3.2.1. *Una serie $\sum_n x_n$ en un espacio de Banach X es* ***casi incondicionalmente convergente*** *cuando $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge casi seguramente para los signos $\{\varepsilon_n\}_n \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ respecto a la medida de Haar normalizada de $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$. Equivalentemente, si la serie $\sum_n r_n(t)x_n$ converge casi seguramente respecto a la medida de Lebesgue del* $[0,1]$.

Recordar que r_n son las funciones Rademacher definidas en Sección 1.2.4. Si pensamos a ε_n y r_n como variables aleatorias, esta última equivalencia se debe simplemente a que las variables están idénticamente distribuidas. Además, por el Teorema 1.3.6 tenemos que $\sum_n x_n$ es casi incondicionalmente convergente si y solo si $\sum_n r_n x_n$ converge en $L_p([0,1],X)$ para algún (todo) $1 < p < \infty$.

Por otro lado, notemos que como la convergencia de las series no varía si hacemos finitos cambios, la ley $0-1$ nos dice que las series aleatorias

$$\sum_n \varepsilon_n x_n$$

convergen casi seguramente, o bien, divergen casi seguramente (para más detalle ver [35, Pág. 7]). Por lo tanto, diremos que una serie de elementos de un espacio de Banach $\sum_n x_n$ es **casi incondicionalmente divergente** cuando $\sum_n \varepsilon_n x_n$ diverge para casi toda elección de signos $\{\varepsilon_n\}_n \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$. Esto nos dice que las definiciones que damos a continuación son complementarias.

Definición 3.2.2. *Decimos que una sucesión básica $\{x_n\}_n$ de un espacio de Banach X es aleatoria incondicionalmente convergente (y notamos* ***RUC****), si toda serie convergente $\sum_n a_n x_n$ es casi incondicionalmente convergente. Análogamente, decimos que $\{x_n\}_n$ es aleatoria incondicionalmente divergente (****RUD****), si toda serie divergente $\sum_n a_n x_n$ es casi incondicionalmente divergente.*

En [41, Proposición 2.3] Tradacete y Lopez-Abad prueban que una sucesión básica es incondicional si y sólo si es simultáneamente RUC y RUD al mismo tiempo. Este resultado nos dice dos cosas importantes. La primera es que RUC y RUD son conceptos más débiles que la incondicionalidad. La segunda es que RUD y RUC son nociones en cierto sentido complementarias. Una vez hechas reformualaciones de las definiciones de RUC y RUD, vamos a volver a recuperar este resultado, en la Observación 3.2.4.

Como las definiciones de RUC y RUD hablan de series aleatorias de vectores en espacios de Banach, vamos a necesitar algunas herramientas sobre variables aleatorias en espacios de Banach que hemos presentado en el Capítulo 1 Sección 1.3. En particular, mencionamos en el Teorema 1.2.7 que toda sucesión de variables aleatorias centradas e independientes $\{Y_n\}_n \in L_p(\Omega, \mathbb{P})$ es sucesión básica incondicional en $L_p(\Omega, \mathbb{P})$. Más aún, si las variables son simétricas la constante de incondicionalidad es uno. El caso simétrico es muy sencillo, recordemos que una variable aleatoria real Y es simétrica si Y y $-Y$ están igualmente distribuidas (notamos $Y \sim -Y$). Dos variables igualmente distribuidas cumplen que la esperanza de cualquier función en ellas coincide y, por lo tanto,

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varepsilon_n Y_n \Big\|_p = \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n Y_n \Big\|_p .$$

Como esto se cumple para toda elección de signos ε_n y de escalares a_n se deduce que $\{Y_n\}_n$ cumple (3.1) y, por lo tanto, es una sucesión básica incondicional con constante 1.

El resultado anterior se extiende a variables aleatorias a valores en un espacio de Banach gracias al Teorema 1.3.5. Este resultado es conocido como el **principio de contracción** y es una herramienta fundamental en todo lo que sigue. Por ejemplo, como consecuencia del principio de contracción se deduce que $\{r_n x_n\}_n$ es una sucesión básica $1-$incondicional de $L^p([0,1], X)$ para todo $1 \leq p < \infty$ siempre y cuando x_n sea distinto de cero para todo n. Esto nos permite probar la siguiente condición equivalente a que una sucesión $\{x_n\}_n$ de un espacio de Banach X sea RUC.

Proposición 3.2.3. *Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión básica de X. Luego, $\{x_n\}_n$ es RUC si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^m$ se tiene que*

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \Big\|. \tag{3.6}$$

*En este caso, decimos que $(x_n)_n$ es **C-RUC**.*

Demostración. Asumamos primero que $\{x_n\}_n$ es RUC y veamos que vale (3.6). Como $\{x_n\}_n$ es RUC se tiene que toda serie convergente $\sum_n a_n x_n$ es casi incondicionalmente convergente. Equivalentemente, si $\sum_n a_n x_n$ es convergente entonces

$\sum_n a_n r_n(t) x_n$ pertenece a $L^1([0,1], X)$. Definamos Y como el subespacio cerrado de $L^1([0,1], X)$ generado por $\{r_n(t)x_n\}_n$ y $\widetilde{X}$ como el subespacio cerrado de X generado por la sucesión básica $\{x_n\}_n$. Es claro que $\{x_n\}_n$ es base de $\widetilde{X}$, $\{r_n x_n\}_n$ de Y (por la observación anterior) y que ambos son espacios de Banach. Sea $S_m : \widetilde{X} \to Y$ el operador

$$S_m\left(\sum_n a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{m} a_n r_n x_n.$$

Este operador está bien definido y es continuo. La acotación se deduce inmediatamente del teorema del gráfico cerrado y de la continuidad de tomar coeficientes, dado que tanto $\{x_n\}_n$ como $\{r_n x_n\}_n$ son bases.

Fijemos ahora $\widetilde{x} = \sum_n a_n x_n \in \widetilde{X}$. Por hipótesis tenemos que $\sum a_n r_n(t) x_n$ converge casi seguramente. Usando que $\{r_n(t)x_n\}_n$ es base $1-$incondicional de Y (como consecuencia del principio de contracción, Teorema 1.3.5) obtenemos la acotación puntual y uniforme

$$S_m(\widetilde{x}) = \Big\|\sum_{n=1}^{m} r_n a_n x_n\Big\|_{L^1([0,1],X)} \leq \Big\|\sum_{n} r_n a_n x_n\Big\|_{L^1([0,1],X)} < \infty.$$

Luego, el Principio de Acotación Uniforme nos asegura que existe una constante $C := \sup_m \|S_m\| < \infty$. De esta manera llegamos a que

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n x_n\Big\|_{L_1([0,1],X)} \leq C\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big\|.$$

Luego, como r_n y ε_n están idénticamente distribuidas podemos cambiar le termino de la izquierda por

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n\Big\| \leq C\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big\|.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo, reemplazamos $\{a_n\}_n$ por $\{b_n\}_n$ con $b_n = a_n$ para $n \leq N$ y $b_n = 0$ para $n > N$, obteniendo la desigualdad deseada.

Por otro lado, supongamos que vale (3.6) para todo $m \in \mathbb{N}$ y que $\sum a_n x_n$ es convergente. Por la convergencia de la serie sabemos que

$$\Big\{\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\Big\}_m$$

es una sucesión de Cauchy en X. De la desigualdad (3.6) se deduce que

$$\Big\{\sum_{n=1}^{m} a_n r_n x_n\Big\}_m$$

es Cauchy en $L^1([0,1],X)$. Por lo tanto, la serie $\sum a_n\varepsilon_n x_n$ converge casi seguramente. Esto nos permite concluir que $\{x_n\}_n$ es RUC. $\square$

De manera similar, se puede ver que $\{x_n\}_n$ es RUD si y solo si existe una constante C tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^m$ se tiene que

$$\Big\|\sum_{n=1}^m a_n x_n\Big\| \leq C\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n x_n\Big\|. \tag{3.7}$$

En este caso decimos que $\{x_n\}_n$ es C-RUD. La demostración de este hecho es similar a la anterior y puede consultarse en [41, Proposition 2.7].

Observación 3.2.4. *De estas últimas formulación de los conceptos RUC y RUD es inmediato deducir que una base $\{x_n\}_n$ es incondicional si y solo si es RUD y RUD simultáneamente ya que juntando ambas desigualdades obtenemos que se cumple la condición de incondicionalidad (c) de la Proposición 3.1.1.*

Es importante resaltar que las nociones de RUC y RUD también tiene sentido para sistemas biortogonales. Por eso vamos a considerar el siguiente sistema de $\mathcal{H}_p(X)$ y probar que es biortogonal. Para toda sucesión $\{x_n\}_n \subseteq X$, los elementos no nulos de $\{x_n n^{-s}\}_n$ pueden ser pensados como parte de un sistema biortogonal. En efecto, llamemos A al subconjunto de índices de $\mathbb{N}$ que cumplen que $x_n \neq 0$ para todo $n \in A$. Consideremos entonces la sucesión

$$\left\{x_n n^{-s}\right\}_{n\in A} \subset \mathcal{H}_p(X).$$

Aplicandole la transformada de Bohr vectorial a esta sucesión obtenemos que

$$\{x_\alpha z^\alpha\}_{\alpha\subseteq\Lambda(A} \subset H_p(X),$$

donde $\Lambda(A)$ corresponde al el conjuto de multi-índices

$$\Lambda(A) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} : \mathfrak{p}^\alpha = n,\, n \in A\},$$

en otras palabras los multi-índices que que se corresponden con el conjunto A por la escritura única en potencia de primos. Luego, para cada $\alpha \in \Lambda$ tomemos $\gamma_\alpha \in X^*$ tal que $\gamma_\alpha(x_\alpha) = 1$. Notemos que si definimos $\varphi_\alpha \in H_p(X)^*$ como

$$\varphi_\alpha(f) = \int_{\mathbb{T}^\mathbb{N}} \gamma_\alpha\left(f(z)\right)\overline{z}^\alpha dz,$$

el sistema $\{(x_\alpha z^\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un sistema biortogonal ya que

$$\varphi_\beta(x_\alpha z^\alpha) = \int_{\mathbb{T}^\mathbb{N}} \gamma_\alpha(x_\alpha) z^\beta \overline{z}^\alpha dz = \delta_{\alpha,\beta}.$$

Por lo tanto, de ahora en más, diremos que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC o RUD si los elementos no nulos son RUC o RUD como parte del sistema biortogonal que acabamos de definir. Es importante observar que las condiciones (3.6) y (3.7) se pueden chequear para toda la sucesión, es decir, no es necesario omitir los elementos que sean cero.

Una vez hecha esta generalización nos preguntamos si existe alguna relación entre que $\{x_n\}_n$ sea RUC (respectivamente RUD) en X y que $\{x_n n^{-s}\}_n$ sea RUC (respectivamente RUD) en $\mathcal{H}_p(X)$. La respuesta está en la próxima observación y el ejemplo subsiguiente.

Proposición 3.2.5. *Si $\{x_n\}_n$ es RUC en X, entonces la sucesión $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC en $\mathcal{H}_p(X)$ para todo $p \geq 1$.*

Demostración. Fijemos $z \in \mathbb{T}^\infty$. Como la sucesión $\{x_n\}$ es *RUC* en el espacio de Banach X se tiene que

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n z^{\alpha(n)} x_n \Big\|_X \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^m a_n z^{\alpha(n)} x_n \Big\|_X .$$

Por la desigualdad de Kahane-Khintchine (Teorema 1.3.8) podemos reescribir lo anterior como

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_X^p \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^m a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_X^p .$$

Integrando con respecto a z y cambiando el orden de integración, nos queda

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_X^p dz \right) \lesssim \int_{\mathbb{T}^\infty} \Big\| \sum_{n=1}^m a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_X^p dz,$$

o lo que es lo mismo,

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_{H_p(\mathbb{T}^\mathbb{N},X)}^p \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^m a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_{H_p(\mathbb{T}^\mathbb{N},X)}^p .$$

Nuevamente por la desigualdad de Kahane-Khintchine obtenemos que

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_{H_p(\mathbb{T}^\mathbb{N},X)} \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^m a_n x_n z^{\alpha(n)} \Big\|_{H_p(\mathbb{T}^\mathbb{N},X)} .$$

Para concluir, usamos que la transformada de Bohr es una isometría para obtener

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^m a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} .$$

$\square$

Sin embargo, la recíproca de la proposición anterior no es siempre cierta. Para ilustrar este hecho usaremos como ejemplo la *base sumante* de c_0 definida en (3.3).

Ejemplo 3.2.6. *La base sumante $\{s_n\}_n$ es una sucesión básica que no es RUC ni RUD en c_0 y, sin embargo, la sucesión $\{s_n n^{-s}\}_n$ es equivalente a la base canónica de ℓ_2, por lo tanto, incondicional en $\mathcal{H}_2(c_0)$.*

Fueron Tradacete y Lopez-Abad [41] quienes probaron que la base sumante $\{s_n\}_n$ no es RUC ni RUD en c_0. Por completitud damos esta prueba a continuación, para luego deducir el Ejemplo 3.2.6.

Para esto necesitamos primero recordar una propiedad muy conocida de la base sumante que dice que

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n s_n\Big\|_{c_0} = \sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^{m} a_n\Big|.$$

Para probar que $\{s_n\}_n$ no es RUC ni RUD mostramos primero que

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n s_n\Big\|_{c_0} \sim \Big(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2\Big)^{1/2}. \tag{3.8}$$

Para la cota superior, usando la desigualdad de Lévy [38] (Proposición 1.3.2) obtenemos que para todo $a \in \mathbb{R}$ las medidas de Lebesgue cumplen que

$$\Big|t\in[0,1] : \sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^{m} r_n(t)a_n\Big| > a\Big| \le 2\,\Big|t\in[0,1] : \Big|\sum_{n=1}^{m} r_n(t)a_n\Big| > a\Big|.$$

Combinando esto con la desigualdad de Khintchine (Teorema 1.3.7) deducimos que

$$\int_0^1 \sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^{m} r_n(t)a_n\Big|\,dt \le 2\int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{m} r_n(t)a_n\Big|\,dt \sim \Big(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Para la acotación inferior, usamos la desigualdad de Kahane-Khintchine (Teorema 1.3.8) una vez más,

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n s_n n^{-s}\Big\|_{c_0} = \mathbb{E}\Big(\sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^{m}\varepsilon_n a_n\Big|\Big) \ge \mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n a_n\Big|\Big) \sim \Big(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Por lo tanto, si $\{s_n n^{-s}\}_n$ fuese *RUC* o *RUD* deberíamos poder comparar $(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2)^{1/2}$ con

$$\|\sum_{n=1}^{m} a_n s_n\|_{c_0} = \sup_{1\le k\le m}|\sum_{n=k}^{m} a_n|$$

para toda sucesión de escalares. Sin embargo, si tomamos $\{a_n\}_{n=1}^m$ como la sucesión que tiene todos unos, nos quedan las cantidades $m^{1/2}$ y m, pero no existe ninguna constante independiente de m que satisfaga (3.7). Por otro lado, para ver que no hay constante que satisfaga (3.6) tomamos $\{a_n\}_{n=1}^m$ con $a_n = (-1)^n$ para todo n. Luego por (3.8) tenemos que

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^m \varepsilon_n(-1)^n s_n\Big\|_{c_0} \sim \left(\sum_{n=1}^m |(-1)^n|^2\right)^{1/2} = (m)^{1/2}.$$

Mientras que

$$\Big\|\sum_{n=1}^m (-1)^n s_n\Big\|_{c_0} = \sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^m (-1)^n\Big| = 1,$$

por lo que no existe una constante constante independiente de m que cumpla que

$$1 \gtrsim (m)^{1/2}.$$

Veamos ahora qué sucede con la sucesión $\{s_n n^{-s}\}_n$ en $\mathcal{H}_2(c_0)$. En este caso tenemos que la norma es

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^m a_n s_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(c_0)} &= \left(\int \sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^m a_n n^{-s}\Big|^2 ds\right)^{1/2}\\ &= \Big\|\sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^m a_n n^{-s}\Big|\Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Por un lado, es fácil ver que

$$\Big\|\sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^m a_n n^{-s}\Big|\Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})} \ge \Big\|\sum_{n=1}^m a_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})} = \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{1/2}. \tag{3.9}$$

Por otro lado, una versión del Teorema de Carleson-Hunt para series de Dirichlet [33, Teorema 1.5] nos dice que existe una constante $C > 0$ tal que se tiene

$$\Big\|\sup_{1\le k\le m}\Big|\sum_{n=k}^m a_n n^{-s}\Big|\Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})} \le C\Big\|\sum_{n=1}^m a_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})} = C\left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Juntando esto con (3.9) deducimos que

$$\Big\|\sum_{n=1}^m a_n s_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(c_0)} \sim \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Como esto vale para toda sucesión de escalares, tomando $\{\varepsilon_n a_n\}_{n=1}^m$ obtenemos que

$$\Big\|\sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n s_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(c_0)} \sim \Big(\sum_{n=1}^m |\varepsilon_n a_n|^2\Big)^{1/2}$$
$$= \Big(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\Big)^{1/2} \sim \Big\|\sum_{n=1}^m a_n s_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(c_0)},$$

concluyendo así que $\{s_n n^{-s}\}_n$ es incondicional y, por lo tanto, RUC y RUD.

3.3. Los espacios de Banach $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$

Para estudiar la convergencia aleatoria e incondicional de series de Dirichlet vectoriales necesitamos definir el siguiente espacio que fue considerado por primera vez en [14].

Definición 3.3.1. *Dados $1 \leq p < \infty$ y un espacio de Banach X, definimos*

$$\mathcal{H}_p^{rad}(X) := \Big\{\sum x_n n^{-s} : \forall \ a.e. \ \varepsilon_n = \pm 1, \sum \varepsilon_n x_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)\Big\}. \tag{3.10}$$

El espacio $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$ tiene propiedades notablemente mejores que los espacios $\mathcal{H}_p(X)$. Por ejemplo, se puede mejorar el Teorema 3.1.5 eliminando el logaritmo e incluso obteniendo $C = 1$. En efecto, en [14, Proposición 3] se prueba que para toda serie $\sum_n x_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ con $1 \leq p < \infty$ y todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\Big\|\sum_{n\leq N} x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq \Big\|\sum_{n=1}^\infty x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}. \tag{3.11}$$

Por lo tanto, usando este resultado para toda serie $\sum_{n=1}^M a_n x_n n^{-s}$ con $\{a_n\}_n$ una sucesión cualquiera de números complejos, deducimos que sin importar cuales sean los vectores no nulos $\{x_n\}_n$, el sistema $\{x_n n^{-s}\}$ es sucesión básica de $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$.

Por otro lado, como consecuencia de la ortogonalidad de las funciones Rademacher también tenemos una estimación para la norma en X de los coeficientes.

Proposición 3.3.2. *Para toda serie $\sum_n x_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p^{rad}(X)$ se cumple que*

$$\|x_n\|_X = \|x_n n^{-s}\|_{\mathcal{H}_p(X)} \leq \Big\|\sum_{n=1}^\infty x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}$$

Demostración. Es claro que $\|x_n\|_X = \|x_n n^{-s}\|_{\mathcal{H}_p(X)} = \|x_n n^{-s}\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}$. Por otro lado, por la ortogonalidad de las funciones Rademacher podemos reescribir $x_n n^{-s}$ como

$$x_n n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} x_n m^{-s} \int_0^1 r_m(t) r_n(t)\, dt = \int_0^1 \left(\sum_m x_m r_m(t) m^{-s} \right) r_n(t)\, dt.$$

Tomando norma obtenemos que

$$\|x_n n^{-s}\|_{\mathcal{H}_p(X)} \leq \int_0^1 \Big\| \sum_m x_m r_m(t) m^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} |r_n(t)|\, dt = \Big\| \sum_{n=1} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}.$$

□

Retomando, en la Definición (3.3.1) estamos pensando a la serie de Dirichlet $\sum_n x_n n^{-s}$ como una serie formal. Por la definición de $\mathcal{H}_p(X)$ (ver Definición 1.1.9), cuando decimos $D = \sum_n x_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ nos referimos a que existe una función $f \in H_p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}, X)$ cuyos coeficientes de Fourier cumplen que $\hat{f}_\alpha = x_{n(\alpha)}$. Por lo tanto, el hecho de que $D \in \mathcal{H}_p(X)$ no necesariamente implica que las sumas parciales $D_N = \sum_{n=1}^N x_n n^{-s}$ convergen a D en $\mathcal{H}_p(X)$. Sin embargo, utilizando un teorema clásico de probabilidad logramos probar que en este caso dicha implicación sí es valida, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.3.3. *Para todo espacio de Banach X y todo $1 \leq p < \infty$ se tiene que si $\{x_n\}_n \subseteq X$ cumple que $\sum_n \varepsilon_n x_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ para casi toda elección de signos ε_n, entonces $\sum_n \varepsilon_n x_n n^{-s}$ converge casi seguramente.*

Para probar este resultado vamos a usar el Teorema de Itô-Nisio 1.3.3, un teorema clásico sobre convergencia casi segura de series de variables aleatorias simétricas .

Demostración de la Proposición 3.3.3. Sea $\{x_n\}_n \subseteq X$ como en el enunciado. Definamos para $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_n \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ la función $R(\varepsilon) = \sum_n \varepsilon_n x_n n^{-s}$. Primero probemos que R es una variable aleatoria, es decir, una función medible. Para $\sigma > 0$ y toda serie de Dirichlet $D = \sum_n a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ se define $D_\sigma = \sum_n (a_n/n^\sigma)\, n^{-s}$. En [22, Proposition 2.3] prueban que D_σ converge en $\mathcal{H}_p(X)$ a D cuando $\sigma \to 0$, y que las sumas parciales de D_σ convergen uniformemente a D_σ. Si hacemos esto con R, obtenemos una sucesión de funciones medibles que convergen en casi todo punto a R, lo que prueba que R también es medible. El mismo argumento muestra que $R(\varepsilon)$ pertenece a $Y = \overline{\langle x_n n^{-s} \rangle_n} \subseteq \mathcal{H}_p(X)$ para casi todo ε. Llamemos

$Y_n = \varepsilon_n x_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$, definamos para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x' \in X'$ las funciones $\varphi_{k,x'} = x' \circ c_k$ con c_k aquellas funciones que devuelven el $k-$ésimo coeficiente de una serie de Dirichlet (como en el ítem *(1)* de la Proposición 1.1.11). Notemos que la familia $\mathcal{F} = \{\varphi_{k,x'}\}_{k,x'}$ separa puntos de Y. Además, tenemos que

$$\varphi_{k,x'}(R(\varepsilon)) = \varepsilon_k x'(x_k), \quad \sum_{n=1}^{N} \varphi_{k,x'}(Y_n) = \sum_{n=1}^{N} \delta_{n,k}\varepsilon_k x'(x_k),$$

y ambas coinciden para $N \geq k$. Esto nos dice que se cumple la segunda condición del Teorema de Itô-Nisio 1.3.3 y, en consecuencia, las sumas parciales de $R(\varepsilon)$ convergen para casi todo elección de signos ε_n. $\square$

Combinando la Proposición 3.3.3 con que sabemos que el límite de una serie convergente en $\mathcal{H}_p(X)$ pertenece a $\mathcal{H}_p(X)$ obtenemos la siguiente reformulación del espacio $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$.

Corolario 3.3.4. *Para todo espacio e Banach X y todo $1 \leq p < \infty$*

$$\mathcal{H}_p^{rad}(X) = \left\{ \sum x_n n^{-s} : \forall \text{ a.e. } \varepsilon_n = \pm 1, \sum \varepsilon_n x_n n^{-s} \text{ converge en } \mathcal{H}_p(X) \right\}.$$

La idea ahora es darle una norma adecuada al espacio $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$. Para hacer esto aplicamos la Proposición 1.3.6 ([26, Teorema 12.3]) para obtener que también

$$\mathcal{H}_p^{rad}(X) = \left\{ \sum x_n n^{-s} : \sum r_n x_n n^{-s} \in L_1\left([0,1], \mathcal{H}_p(X)\right) \right\}.$$

Por lo tanto, pensado de esta forma resulta natural otorgarle la norma

$$\left\| \sum x_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} := \int_0^1 \left\| \sum r_n(t) x_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_p(X)} dt,$$

que hace de $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$ un espacio de Banach (ver [14]).

Íntimamente ligado a este espacio se encuentra $Rad(X)$ el espacio de sucesiones casi incondicionalmente sumables, compuesto por sucesiones $\{x_n\}_n$ de un espacio de Banach X. Dicho espacio es de Banach con la norma

$$\|(x_n)_n\|_{Rad(X)} := \int_0^1 \left\| \sum r_n(t) x_n \right\| dt,$$

(cf. [26, Capítulo 12]). Tanto en la norma de $Rad(X)$ como en la de $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$ por la desigualdad de Kahane-Khintchine podemos cambiar el termino derecho por cualquier otra norma p con $1 \leq p < \infty$ y obtener una norma equivalente.

La próxima proposición nos da una forma de estimar la norma en $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$ sin calcular norma de series de Dirichlet. Además, es una generalización del Teorema 3.1.4, ya que por la Desigualdad de Khinchine 1.3.7, el espacio $Rad(\mathbb{C})$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{H}_2(\mathbb{C})$. Además, de esta se deduce que todos los espacios $\mathcal{H}_p^{rad}(X)$ son isométricamente isomorfos entre si para todo $1 \leq p < \infty$.

Proposición 3.3.5. *Para todo $1 \leq p < \infty$ existe una constante $C_p > 0$ de manera tal que si X es un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n=1}^N \subset X$ se cumple*

$$\frac{1}{C_p}\Big\|\sum_{n=1}^N x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq \|(x_n)_n\|_{Rad(X)} \leq C_p\Big\|\sum_{n=1}^N x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)},$$

donde asignamos $x_n = 0$ para $n > N$. En particular, esto prueba que

$$\mathcal{H}_p^{rad}(X) = Rad(X),$$

con normas equivalentes.

Demostración. Dada una sucesión arbitraria $\{x_n\}_{n=1}^N \subset X$, aplicando nuestras dos herramientas por excelencia, la desigualdad de Kahane-Khintchine (Teorema 1.3.8) y el principio de contracción (1.12), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n=1}^N x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} &= \int_0^1 \Big\|\sum_{n=1}^N r_n(t) x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} dt \\
&\sim \left(\int_0^1 \Big\|\sum_{n=1}^N r_n(t) x_n n^{-s}\Big\|^p_{\mathcal{H}_p(X)} dt\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}\int_0^1 \Big\|\sum_{\alpha\in(\mathbb{N}_0)^{\mathbb{N}}} r_{n(\alpha)}(t) x_{n(\alpha)} z^\alpha\Big\|^p_X dt dz\right)^{1/p} \\
&\sim \left(\int_0^1 \Big\|\sum_{\alpha\in(\mathbb{N}_0)^{\mathbb{N}}} r_{n(\alpha)}(t) x_{n(\alpha)}\Big\|^p_X dt\right)^{1/p} \\
&\sim \int_0^1 \Big\|\sum_{n=1}^N r_n(t) x_n\Big\|_X dt.
\end{aligned}$$

Notar que, como queríamos, las constantes involucradas solo dependen del valor de p $(1 \leq p < \infty)$. $\square$

3.4. Espacios con la propiedad de convergencia aleatoria en $\mathcal{H}_p$

El objetivo de esta parte es caracterizar a los espacios de Banach X que cumplen que para toda sucesión $\{x_n\}_n \subset X$ se tiene que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC en $\mathcal{H}_p(X)$. La definición de RUC nos dice que existe una constante (que depende de la sucesión) de manera que se cumple

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

La proposición que sigue muestra que cuando el espacio cumple esto para toda sucesión, podemos elegir en esta desigualdad una constante uniforme, es decir, una constante que no dependa de la sucesión. En particular, esto prueba que vale la inclusión de los espacios $\mathcal{H}_p(X) \subseteq \mathcal{H}_p^{rad}(X)$.

Proposición 3.4.1. *Sea X un espacio de Banach y $p \geq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC en $\mathcal{H}_p(X)$ para toda sucesión $\{x_n\}_n \subset X$.

(b) Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n=1}^N \subset X$ se tiene

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}. \tag{3.12}$$

(c) Vale la inclusión

$$\mathcal{H}_p(X) \subseteq \mathcal{H}_p^{rad}(X).$$

(d) Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n=1}^N \subset X$ se tiene

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \Big\| \leq C \Big(\int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n z^n \Big\|^p dz \Big)^{1/p}. \tag{3.13}$$

Estas equivalencias, que probaremos luego, nos llevan a definir la siguiente propiedad de un espacios de Banach X. En lo que resta de este trabajo nos enfocaremos en analizar y caracterizar esta definición.

Definición 3.4.2. *Dado $p \geq 2$, diremos que un espacio de Banach X tiene la* ***propiedad convergencia $\mathcal{H}_p$ aleatoria*** *(abreviado X tiene la $\mathcal{H}_p - RCP$) si X satisface alguna (y por lo tanto todas) de las condiciones en la Proposición 3.4.1.*

Para probar la Proposición 3.4.1 necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.4.3. *Supongamos que existe $M \in \mathbb{N}$ y $K > 0$ tal que $\{x_n n^{-s}\}_{n=M+1}^{\infty}$ es $K - RUC$ para toda sucesión de vectores $\{x_n\}_{n=M+1}^{\infty}$. Luego $\{x_n n^{-s}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $(M + K + KM) - RUC$ para toda sucesión de vectores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_n$ un sucesión de vectores de X. Queremos ver que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es $(M+K+KM)-$RUC. Dados $N \in \mathbb{N}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{N} \subseteq \mathbb{C}$, por la desigualdad triangular tenemos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq \sum_{n=1}^{M} \|a_n x_n n^{-s}\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} + \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}.$$

Aplicando la propiedad *(1)* de la Proposición 1.1.11, para $1 \leq k \leq N$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \|a_k x_k k^{-s}\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} = \|a_k x_k\|_X &= \Big\| c_k \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big) \Big\|_X \\ &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}. \end{aligned}$$

De lo cual deducimos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq M \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} + \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}.$$

Por otro lado, como $\{x_n n^{-s}\}_{n=M+1}^{\infty}$ es $K-$RUC por hipótesis deducimos que

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} &\leq K \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \\ &\leq K \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} + K \Big\| \sum_{n=1}^{M} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \\ &\leq K \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} + K \sum_{n=1}^{M} \|a_n x_n n^{-s}\|_{\mathcal{H}_p(X)} \\ &\leq (K + KM) \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si juntamos estas dos desigualdades concluimos el resultado. □

Prueba de la Proposición 3.4.1. Por conveniencia comenzamos probando la equivalencia $(b) \Leftrightarrow (d)$, y luego $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

$(b) \Rightarrow (d)$: Dada $(x_n)_n \subseteq X$ definimos

$$\widetilde{x}_k = \begin{cases} x_n & k = 2^n \\ \\ 0 & k \neq 2^n \end{cases}$$

Aplicando la Proposición 3.3.5 y (3.12),

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \Big\| = \mathbb{E}\Big\| \sum_{k=1}^{2^N} \varepsilon_k \widetilde{x}_k \Big\| \sim \Big\| \sum_k \widetilde{x}_k k^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq C \Big\| \sum_k \widetilde{x}_k k^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)},$$

por definición de la norma en $\mathcal{H}_p(X)$. Como la transformada de Bohr manda $(2^{-s})^n$ en z_1^n, el último término es igual a

$$\left(\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \widetilde{x}_{n(\alpha)} z^\alpha \Big\|_X^p dz \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{\alpha} x_n z_1^n \Big\|_X^p dz_1 \right)^{1/p}.$$

$(d) \Rightarrow (b)$: Recordemos que por la definición de las normas en $\mathcal{H}_p(X)$ tenemos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} = \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} z^\alpha \Big\|_{H_p(X)}.$$

Sea m el máximo de los α_i tal que $x_{n(\alpha)}$ es distinto de cero. Para cada $z_1 \in \mathbb{T}$ fijo, si usamos el cambio de variable $z_i' = z_i \cdot z_1^{(m+1)^{i-1}}$ para $2 \leq i \leq N$, de la invariancia de dz por rotaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^{N-1}} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_N^{\alpha_N} \Big\|_X^p dz_2 \ldots dz_N \\
&\qquad = \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} z_1^{\alpha_1} (z_2 z_1^{m+1})^{\alpha_2} \ldots (z_N z_1^{(m+1)^{N-1}})^{\alpha_N} \Big\|_X^p dz_2 \ldots dz_N \\
&\quad = \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} z_1^{\alpha_1 + (m+1)\alpha_2 + \cdots + (m+1)^{N-1}\alpha_N} z_2^{\alpha_2} \ldots z_N^{\alpha_N} \Big\|_X^p dz_2 \ldots dz_N.
\end{aligned}$$

Luego, cambiando el orden de integración nos queda que

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} z^\alpha \Big\|_X^p dz$$
$$= \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \Bigg(\int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} (x_{n(\alpha)} z_2^{\alpha_2} \dots z_N^{\alpha_N}) z_1^{\alpha_1 + (m+1)\alpha_2 + \dots + (m+1)^{N-1}\alpha_N} \Big\|^p dz_1 \Bigg) dz_2 \dots dz_N,$$

Como todos los números de la forma $\sum_{i=1}^N \alpha_i (m+1)^{i-1}$ son diferentes (se puede pensar que están escritos en base $m+1$), combinando (d) con el principio de contracción (1.12) en la integral respecto a z_1 (con $z_2, \dots, z_N$ fijos). De esta manera, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} z^\alpha \Big\|_X^p dz \geq \frac{1}{C^p} \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \mathbb{E} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} (x_{n(\alpha)} z_2^{\alpha_2} \dots z_N^{\alpha_N}) \varepsilon_\alpha \Big\|_X^p dz_2 \dots dz_N$$
$$\sim \mathbb{E} \Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_{n(\alpha)} \varepsilon_\alpha \Big\|_X^p \sim \Big\| \sum_{n=1}^N x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}^p,$$

donde en el último paso usamos la Proposición 3.3.5.

$(a) \Rightarrow (b)$: Supongamos que (b) no se cumple para ninguna constante $C \geq 1$. Usando la Proposición 3.3.5, el Lema 3.4.3 nos dice que para todo $M \in \mathbb{N}$ y $K > 0$, existe una sucesión de vectores

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \text{ tal que } \{x_n n^{-s}\}_{n \geq M} \text{ no es K-RUC .}$$

Repitiendo esto para distintos valores de M y K, se puede construir una sucesión que contradiga (a). Tomando $M = M_0 = 0$ y $K = 1$ podemos deducir que existen $M_1 \in \mathbb{N}$,

$$\{x_n\}_{n=1}^{M_1} \subseteq X \text{ y } \{a_n\}_{n=1}^{M_1} \subseteq \mathbb{C}$$

tales que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{M_1} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} > \Big\| \sum_{n=1}^{M_1} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

Inductivamente, supongamos que hemos definido $M_k \in \mathbb{N}$, $\{x_n\}_{n=1}^{M_k} \subseteq X$ y $\{a_n\}_{n=1}^{M_k} \subseteq \mathbb{C}$ de manera que cumplan

$$\Big\| \sum_{n=M_{j-1}+1}^{M_j} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} > j \Big\| \sum_{n=M_{j-1}+1}^{M_j} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)},$$

para todo $1 \leq j \leq k$. Tomando $M = M_k$ y $K = k+1$ deducimos que existen $M_{k+1} \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n=M_k+1}^{M_{k+1}} \subseteq X$ y $(a_n)_{n=M_k+1}^{M_{k+1}} \subseteq \mathbb{C}$ tales que

$$\Big\| \sum_{n=M_k+1}^{M_{k+1}} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} > (k+1) \Big\| \sum_{n=M_k+1}^{M_{k+1}} a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

Notemos que la sucesión $\{x_n\}_n \subseteq X$ así definida no cumple que $\{x_n n^{-s}\}_n$ sea RUC, por lo que (a) no se cumple.

$(b) \Rightarrow (c)$: Asumamos que existe una constante $C > 0$ tal que (3.12) se satisface para todo polinomio de Dirichlet, probaremos a continuación que la misma desigualdad valdrá para toda serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_p(X)$. Fijemos $D \in \mathcal{H}_p(X)$ y $M \in \mathbb{N}$. Por la propiedad *(2)* de la Proposición 1.1.11, como los polinomios de Dirichlet son densos en $\mathcal{H}_p(X)$ existe una sucesión de polinomios

$$\{D_N\}_N \subseteq \mathcal{H}_p(X)$$

que converge a D. En particular, sabemos que los coeficientes $c_n(D_N)$ de D_N convergen a los coeficientes de D para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que

$$\|c_n(D - D_N)\|_X < \frac{\varepsilon}{M}, \tag{3.14}$$

para todo $n \leq M$, y

$$\|D_N - D\|_{\mathcal{H}_p(X)} < \varepsilon. \tag{3.15}$$

Por la ecuación (3.14) y el principio de contracción (1.12) nos queda que

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n(D) n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n(D_N) n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} + \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n(D - D_N) n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \\ &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n(D_N) n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} + \varepsilon \leq \|D_N\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Usando (b) y (3.15) concluimos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n(D) n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq C \|D_N\|_{\mathcal{H}_p(X)} + \varepsilon \leq C \|D\|_{\mathcal{H}_p(X)} + (C+1)\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, haciéndolo tender a cero conseguimos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n(D) n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq C \|D\|_{\mathcal{H}_p(X)},$$

para todo $M \in \mathbb{N}$. Por último, aplicando el Corolario 3.3.4 concluimos que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)} \leq C \|D\|_{\mathcal{H}_p(X)},$$

para todo $D \in \mathcal{H}_p(X)$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Esta implicación es inmediata, por lo que concluimos la prueba de la proposición. □

El Teorema 3.4.1 muestra que si las desigualdades (3.12) y (3.13) se cumplen para toda sucesión $\{x_n\}_n$ entonces son equivalentes. De aquí se desprende una pregunta natural: ¿Dada una sucesión $\{x_n\}_n \subset X$ fija, son las condiciones (3.12) y (3.13) equivalentes? En otras palabras, es la sucesión $\{x_n n^{-s}\}_n$ *RUC* en $\mathcal{H}_p(X)$ si y solo si $\{x_n z^n\}_n$ es *RUC* en $H_p(X)$? Los próximos ejemplos muestran que ninguna de las implicaciones es válida.

Ejemplo 3.4.4. *Existe una sucesión $\{x_n\}_n \subseteq X$ tal que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC en $\mathcal{H}_2(X)$ pero $\{x_n z^n\}_n$ no es RUC en $H_2(X)$.*

Demostración. Sea X el espacio de Banach $L_1(\mathbb{T}^2)$ y consideremos la sucesión $\{x_n\}_n$ definida como

$$x_n(w_1, w_2) = \begin{cases} w_1^n & \text{si } n \text{ es primo;} \\ \\ w_2^{2^n} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Veamos primero que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es *RUC* en $\mathcal{H}_2(X)$. Para $N \in \mathbb{N}$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $p_m \leq N < p_{m+1}$, en otras palabras, $\{p_1, \ldots, p_m\}$ es el conjunto de los primos menores o iguales que N. Sea $M_N = \{1, \ldots, N\} \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(X)} \leq\ & \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_{p_i} x_{p_i} p_i^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(X)} \\ & + \mathbb{E}\Big\| \sum_{n \in M_N} \varepsilon_n a_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(X)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A continuación analizamos cada término del lado derecho por separado. Primero notemos que la transformada de Bohr manda $\{p_i^{-s}\}_{i=1}^m$ en m variables aleatorias Steinhaus independientes $\{z_i\}_{i=1}^m$. Por lo tanto, usando al desigualdad de Kahane-Khintchine (1.13), la definición de la norma en $\mathcal{H}_2(X)$ y el principio de contracción

(1.3.5), obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_{p_i} x_{p_i} p_i^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(X)} &\sim \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_{p_i} x_{p_i} p_i^{-s}\Big\|^2_{\mathcal{H}_2(X)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^m} \Big\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_{p_i} x_{p_i} z_i\Big\|^2_X dz_1 \dots dz_m\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{T}^m} \Big\|\sum_{i=1}^m a_{p_i} x_{p_i} z_i\Big\|^2_X dz_1 \dots dz_m\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{T}} x_n(w_1, w_2) dw_2 = \begin{cases} w_1^n & \text{si } n \text{ es primo;} \\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Luego, por la desigualdad de Jensen nos queda que

$$\Big|\sum_{i=1}^m a_{p_i} w_1^{p_i} z_i\Big| = \Big|\int_{\mathbb{T}} \sum_{n=1}^N a_n x_n(w_1, w_2) z^{\alpha(n)} dw_2\Big| \leq \int_{\mathbb{T}} \Big|\sum_{n=1}^N a_n x_n(w_1, w_2) z^{\alpha(n)}\Big| dw_2.$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^m} \Big\|\sum_{i=1}^m a_{p_i} x_{p_i} z_i\Big\|^2_X dz_1 \dots dz_m &= \int_{\mathbb{T}^m} \left(\int_{\mathbb{T}} \Big|\sum_{i=1}^m a_{p_i} w_1^{p_i} z_i\Big| dw_1\right)^2 dz_1 \dots dz_m \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^m} \left(\int_{\mathbb{T}^2} \Big|\sum_{n=1}^N a_n x_n(w_1, w_2) z^{\alpha(n)}\Big| dw_1 dw_2\right)^2 dz_1 \dots dz_m \\ &= \Big\|\sum_{n=1}^N a_n x_n n^{-s}\Big\|^2_{\mathcal{H}_2(X)}.\end{aligned}$$

En conclusión, hemos probado que

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_{p_i} x_{p_i} p_i^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(X)} \lesssim \Big\|\sum_{n=1}^N a_n x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(X)}. \tag{3.17}$$

Para estimar el segundo termino de (3.16), observemos que las variables $w_2^{2^n}$ se comportan como variables Rademacher, esto se debe a que el conjunto 2^n es lacunar [47, Teorema 2.1]. Luego podemos deducir que

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n\in M_N} \varepsilon_n a_n x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(X)} \lesssim \Big\|\sum_{n=1}^N a_n x_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(X)}. \tag{3.18}$$

Combinando (3.17) y (3.18) con (3.16) llegamos al resultado deseado.

Nos queda ver que $\{x_n z^n\}_n$ no es *RUC* en $H_2(X)$. La prueba de este hecho está inspirada en [50, Proposición 12.8], y usa el teorema de Green-Tao que dice que el conjunto de números primos contienen sucesiones aritméticas tan largas como queramos [29]. Dado $N \in \mathbb{N}$ existe una progresión aritmética A_N de longitud N contenida dentro de los números primos. Consideremos los coeficientes

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A_N \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Si la sucesión $\{x_n z^n\}_n$ fuese *RUC* en $H_2(X)$, tendríamos

$$\sqrt{N} = \mathbb{E}\Big\| \sum_{n \in A_N} \varepsilon_n w_1^n z^n \Big\|_{H_2(X)} \lesssim \Big\| \sum_{n \in A_N} w_1^n z^n \Big\|_{H_2(X)} \tag{3.19}$$

$$= \Big\| \sum_{n \in A_N} w^n \Big\|_{L_1(\mathbb{T})} \sim \log N. \tag{3.20}$$

Esto último proviene de la estimación de la norma en $L_1(\mathbb{T})$ del núcleo de Dirichlet. Más precisamente, como A_n es una progresión aritmética sabemos que existen k y l en $\mathbb{N}$ de manera que

$$\Big\| \sum_{n \in A_N} w^n \Big\|_{L_1(\mathbb{T})} = \Big\| \sum_{n=1}^{N} w^{kn+l} \Big\|_{L_1(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} |\sum_{n=1}^{N} (w^k)^n| |w^l| dw$$

Usando que $|w^l| = 1$ y que $w^k \sim w$ obtenemos que

$$\Big\| \sum_{n \in A_N} w^n \Big\|_{L_1(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} |\sum_{n=1}^{N} (w^k)^n| dw = \int_{\mathbb{T}} |\sum_{n=1}^{N} w^n| dw \sim \log N.$$

Por lo tanto, volviendo a (3.19) llegamos a una contradicción ya que dicha desigualdad no puede valer para valores grandes de N. □

Ejemplo 3.4.5. *Existe una sucesión $\{x_n\}_n \subseteq X$ tal que $\{x_n z^n\}_n$ es RUC en $H_2(X)$, pero $\{x_n n^{-s}\}_n$ no es RUC en $\mathcal{H}_2(X)$.*

Demostración. Sea X, como antes, el espacio de Banach $L_1(\mathbb{T}^2)$. Definamos $\{x_n\}_n$ como

$$x_n(w_1, w_2) = \begin{cases} w_1^k & \text{si } n = 2^k; \\ w_2^{2^n} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La prueba de que $\{x_n z^n\}_n$ es RUC es igual a la del ejemplo anterior y por este motivo la omitimos. Supongamos que $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUC. En particular, la desigualdad de RUC se cumple para sucesiones soportadas en las potencias de dos. Una vez más, como la transformada de Bohr manda $\left(2^k\right)^{-s}$ en z_1^k nos queda que

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n w_1^n z_1^n \Big\|_{H_2(X)} \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n w_1^n z_1^n \Big\|_{H_2(X)}. \tag{3.21}$$

Un calculo simple nos lleva a una contradicción puesto que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} = \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n w^n \Big\|_{L_2(\mathbb{T})} \lesssim \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n w^n \Big\|_{L_1(\mathbb{T})} \tag{3.22}$$

no se puede cumplir para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^N$. □

Tenemos también un resultado análogo a la Proposición 3.4.1 remplazando RUC por RUD. Esto nos permite definir la $\mathcal{H}_p - RDP$. Enunciamos estos resultados sin prueba debido a que se usan los mismos argumentos.

Proposición 3.4.6. *Sea X un espacio de Banach y $p \leq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{x_n n^{-s}\}_n$ es RUD en $\mathcal{H}_p(X)$ para todo $\{x_n\}_n \subset X$.

(b) Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n=1}^N$ se tiene

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(X)} \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(X)}. \tag{3.23}$$

(c) Se cumple la inclusión de los espacios

$$\mathcal{H}_p^{rad}(X) \subseteq \mathcal{H}_p(X).$$

(d) Existe $C \geq 1$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n=1}^N$ se tiene

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n z^n \Big\|^p dz \right)^{1/p} \leq C\mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \Big\|. \tag{3.24}$$

Definición 3.4.7. *Dado $p \leq 2$, decimos que un espacio de Banach X tiene la* ***propiedad de divergencia $\mathcal{H}_p$ aleatoria*** *(X tiene la $\mathcal{H}_p - RDP$) si y solo si X satisface alguna (y por lo tanto todas) de las condiciones en la Proposición 3.4.6*

Observación 3.4.8. *Ambos ejemplos 3.4.4 y 3.4.5 también funcionan si consideramos la misma sucesión* $\{x_n\}_n \in L_r(\mathbb{T}^2)$ *para* $1 < r < 2$ *en vez de* $L_1(\mathbb{T}^2)$. *De la misma manera es fácil ver que estos ejemplos aplican para la propiedad* RUD *siempre y cuando* $2 < r < \infty$.

3.5. El rol del tipo y cotipo

En esta sección pobaremos que $\mathcal{H}_2 - RCP$ y $\mathcal{H}_2 - RDP$ son equivalentes a tipo 2 y cotipo 2, respectivamente. La prueba está basada en el trabajo de Arendt y Bu [3, Theorem 1.5]. También consideramos el caso $p \neq 2$.

Teorema 3.5.1. *Dado un espacio de Banach* X *las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. X *tiene tipo* 2 *si y solo si tiene la* $\mathcal{H}_2 - RCP$*;*
2. X *tiene cotipo* 2 *si y solo si tiene la* $\mathcal{H}_2 - RDP$.

Recordando la caracterización de Kwapień para espacio de Hilbert junto con el teoremas anteriores llegamos a la siguiente conclusión.

Corolario 3.5.2. *Para* X *un espacio de Banach se tiene que* $\mathcal{H}_p(X) = \mathcal{H}_p^{rad}(X)$ *si y solo si* $p = 2$ *y* X *es isomorfo a un espacio de Hilbert.*

Demostración. Del caso escalar deducimos que p tiene que ser igual a 2. Por el Teorema 3.5.1 sabemos que X tipo y cotipo 2 y, por el Teorema de Kwapień 1.5.4, es isomorfo a un espacio de Hilbert. La recíproca es inmediata. □

En cuanto al caso $p > 2$, podemos aplicar el Teorema 3.5.1 para concluir que tipo 2 implica $\mathcal{H}_p - RCP$. Aun queda pendiente averiguar si $\mathcal{H}_p - RCP$ implica que X tiene tipo 2. El próximo teorema da un resultado parcial en esta dirección.

Teorema 3.5.3. *Si* X *tiene la* $\mathcal{H}_p - RCP$ *para algún* $2 \leq p < \infty$, *entonces*

$$\sup\{r : X \text{ tiene tipo } r\} = 2.$$

Por conveniencia empezamos analizando la propiedad $\mathcal{H}_p - RCP$ para el espacio $L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$.

Proposición 3.5.4. *Si* $2 \leq r < \infty$, *el espacio* $L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ *tiene la* $\mathcal{H}_p - RCP$ *para todo* $2 \leq p < \infty$. *Por otro lado, si* $1 \leq r < 2$, *el espacio* $L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ *no tiene la propiedad* $\mathcal{H}_p - RCP$ *para ningún* $2 \leq p < \infty$.

Demostración. Supongamos primero que $2 \leq r < \infty$. Es suficiente probar que el espacio $L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ goza de la propiedad $\mathcal{H}_2 - RCP$. En efecto, dado $\{f_n\}_n \subseteq L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ aplicando la Proposición 3.3.5 y luego la desigualdad de Kahane-Khintchine (1.13), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2^{rad}(L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}))} &\sim \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n \Big\|_{L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \sim \Big(\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E} \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n(z) \Big|^r dz \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\sim \Big(\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \Big(\sum_{n=1}^{N} |f_n(z)|^2 \Big)^{\frac{r}{2}} dz \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\sim \Big(\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n(z) n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})}^r dz \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}))},
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos la desigualdad de Minkowski integral.

Nos queda por ver que en el caso que $1 \leq r < 2$, el espacio $L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ no tiene la $\mathcal{H}_p - RCP$ para ningún $p \geq 2$. Sea $m \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq n \leq m$ definamos $f_n \in L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ como las funciones $f_n(w) = w^{\alpha(n)}$. Para $\{a_n\}_{n=1}^m$, usamos la Proposición 3.3.5, el principio de contracción (1.12) y la Desigualdad de Khintchine (Teorema 1.3.7) obteniendo

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n=1}^{m} a_n f_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p^{rad}(L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}))} &= \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n f_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_p(L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}))} \sim \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n f_n \Big\|_{L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \\
&\gtrsim \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n \Big\|_{L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} = \mathbb{E} \Big| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n \Big| \\
&\gtrsim \Big(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big\| \sum_{n=1}^{m} a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_p(L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}))} &= \left(\int_{T^{\mathbb{N}}} \Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n z^{\alpha(n)}\Big\|_{L_r(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})}^{p} dz\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{T^{\mathbb{N}}} \left(\int_{T^{\mathbb{N}}} \Big|\sum_{n=1}^{m} a_n w^{\alpha(n)} z^{\alpha(n)}\Big|^{r} dw\right)^{\frac{p'}{r}} dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_{T^{\mathbb{N}}} \Big|\sum_{n=1}^{m} a_n w^{\alpha(n)}\Big|^{r} dw\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_r(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Como $r < 2$ y las normas $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$ se comparan como las de $L_p(\mathbb{C})$, no existe constante $C > 0$ independiente de m tal que para toda elección de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ se verifique

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})} \lesssim \Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_r(\mathbb{C})} \quad .$$

Esto concluye la prueba. $\square$

A continuación damos la prueba del Teorema 3.5.3.

Prueba del Teorema 3.5.3. Probaremos esto por el absurdo. Supongamos que

$$s = \sup\{r : X \text{ tiene tipo } r\} < 2.$$

Luego, por el Teorema de Maurey-Pisier [44] (ver [26, Capítulor 14]), ℓ_s es finitamente representable en X (ver Definición 1.4.5). En consecuencia, el espacio $L_s(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ también es finitamente representable en X, ya que los espacios L_s son finitamente representables en ℓ_s. Como $L_s(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ no tiene la $\mathcal{H}_p - RCP$ para ningún $2 \leq p < \infty$ (y esta es claramente una propiedad local, por propiedades locales entendemos a aquellas que que dependen de la estructura de los subespacios de dimensión finita del espacio), se sigue el resultado. $\square$

Por último veamos que vale el Teorema 3.5.1. Para esta prueba vamos a considerar además de las variables Rademacher, variables Gaussianas. Por lo tanto, indicaremos respecto de qué variables calculamos la esperanza en cada caso.

Prueba del Teorema 3.5.1. Damos la prueba de la primer afirmación dado que la restante es muy similar. Supongamos que X tiene tipo 2. Sea $\{\gamma_n\}_{n=1}^m$ una sucesión de variables aleatorias gaussianas e idénticamente distribuidas. Dado $\{x_n\}_{n=1}^m \subset X$, consideremos los siguientes operadores:

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell_2^m & \to & X \\ & e_n & \mapsto & x_n \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{rccc} S: & Y \subset L_2(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) & \to & X \\ & z^\alpha & \mapsto & x_{n(\alpha)}, \end{array}$$

con $Y = \text{gen}\{z^\alpha : 1 \leq n(\alpha) \leq m\} \subset L_2(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$. Usando la Proposición 3.3.5, la comparación entre variables aleatorias Rademacher y gaussianas (se puede consultar [26, Proposición 12.11]) y [26, Corolario 12.21], nos queda que

$$\mathbb{E}_\varepsilon \Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(X)} \sim \mathbb{E}_\varepsilon \Big\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n \Big\|_X \lesssim \mathbb{E}_\gamma \Big\| \sum_{n=1}^m \gamma_n x_n \Big\|_X \lesssim \pi_2(T^*), \qquad (3.25)$$

donde π_2 es la norma 2-sumante del operador (ver Definición 1.5.1). De la definición de operador 2-sumante es inmediato que $\pi_2(T^*) = \pi_2(S^*)$. Para concluir la prueba del teorema queda ver que

$$\pi_2(S^*) \leq \Big\| \sum_\alpha x_{n(\alpha)} z^\alpha \Big\|_{H_2(X)} = \Big\| \sum_{n=1}^m x_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_2(X)},$$

ya que junto con junto con (3.25) esto prueba que X tiene la $\mathcal{H}_2 - RCP$.

Sean $x_1^*, \ldots, x_r^* \in X^*$. Calcular la norma $2-$sumante requiere estimar

$$\left(\sum_i \|S^* x_i^*\|_{L_2(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})}^2 \right)^{1/2}$$

y compararla con

$$\|\{x_i^*\}\|_2^{weak} := \sup_{x^{**} \in B_{X^{**}}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^r |x^{**}(x_i^*)|^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_i \left\|S^* x_i^*\right\|^2_{L_2(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} &= \sum_i \Big\| \sum_\alpha \langle S^* x_i^*, z^\alpha \rangle z^\alpha \Big\|^2_{L_2(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \\
&= \sum_i \int_{T^{\mathbb{N}}} \Big| \sum_\alpha x_i^*(x_{\alpha(n)}) z^\alpha \Big|^2 dz \\
&= \int_{T^{\mathbb{N}}} \Big\| \sum_\alpha x_{\alpha(n)} z^\alpha \Big\|^2_X \sum_i \left| x_i^* \left(\frac{\sum_\alpha x_{\alpha(n)} z^\alpha}{\left\| \sum_\alpha x_{\alpha(n)} z^\alpha \right\|_X} \right) \right|^2 dz \\
&\leq \int_{T^{\mathbb{N}}} \Big\| \sum_\alpha x_{\alpha(n)} z^\alpha \Big\|^2_X \sum_i \left| x_i^* \left(\frac{\sum_\alpha x_{\alpha(n)} z^\alpha}{\left\| \sum_\alpha x_{\alpha(n)} z^\alpha \right\|_X} \right) \right|^2 dz \\
&\leq \int_{T^{\mathbb{N}}} \Big\| \sum_\alpha x_{\alpha(n)} z^\alpha \Big\|^2_X dz \left\| \{x_i^*\} \right\|_2^{weak}.
\end{aligned}$$

Se deduce entonces que $\pi(S^*) \leq \left\| \sum_\alpha x_{n(\alpha)} z^\alpha \right\|_{H_2(X)}$. Concluimos que X tiene la $\mathcal{H}_2 - RCP$.

Para la recíproca adaptamos las ideas de [3]. Dado $x_1, \ldots, x_N \in X$, tenemos que probar que

$$\left(\mathbb{E}_\varepsilon \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \Big\|_X^2 \right)^{1/2} \lesssim \left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

Dadas $f_1, \ldots, f_N \in L^2(\mathbb{T})$ con $\|f_n\|_2 = 1$ y soporte disjuntos, mediante cálculos simples podemos ver que

$$\left(\mathbb{E}_\varepsilon \int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n f_n \Big\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Como los polinomios trigonométricos son densos en $L_2(\mathbb{T})$, existe un polinomio $h_n = \sum_{j=-N_n}^{N_n} a_{n,j} z^j$ de manera que

$$\|f_n - h_n\|_2 < \frac{\varepsilon}{N \sup_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|_X}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\|h_n\|_2 = 1$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}_\varepsilon \int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n h_n x_n \Big\|^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\mathbb{E}_\varepsilon \int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n f_n x_n \Big\|^2 \right)^{1/2} + \varepsilon \\
&= \left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^2 \right)^{1/2} + \varepsilon \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Notar que podemos elegir un $M_n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera tal que las potencias de z que aparecen en $h_n z^{M_n}$ sean positivas y no se pisen. Más precisamente, tenemos

$$h_n z^{M_n} = \sum_{j \in J_n} b_{n,j} z^j,$$

donde $b_{n,j} = a_{n,j-M_n}$ y $J_n = \{M_n - N_n, \dots, M_n + N_n\}$ son disjuntos de a pares. Por el principio de contracción (1.12) y la Proposición 3.4.1 deducimos que

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}_\varepsilon \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n h_n x_n \right\|^2\right)^{1/2} &\sim \left(\mathbb{E}_\varepsilon \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n h_n z^{M_n} x_n \right\|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\mathbb{E}_\varepsilon \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j \in J_n} \varepsilon_n b_{n,j} z^j x_n \right\|^2\right)^{1/2} \\
&\gtrsim \left(\mathbb{E}_\varepsilon \mathbb{E}_\delta \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j \in J_n} \delta_{n,j} \varepsilon_n b_{n,j} z^j x_n \right\|^2\right)^{1/2} \\
&\sim \left(\mathbb{E}_\delta \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j \in J_n} \delta_{n,j} b_{n,j} x_n \right\|^2\right)^{1/2}, \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

donde $\delta_{n,j}$ son variables aleatorias Bernoulli. El Teorema 3.5.3 muestra que X tiene tipo no trivial, y por lo tanto, cotipo finito (ver el ítem (3) de 1.4). Por lo tanto, podemos reemplazar las variables $\delta_{n,j}$ por Gaussianas independientes $\gamma_{n,j}$. Si definimos $\gamma_n = \sum_{j \in J_n} b_{n,j} \gamma_{n,j}$, podemos observar que estas son variables aleatorias Gaussianas independientes con varianza 1 dado que

$$\sum_{j \in J_n} |b_{n,j}|^2 = \|h_n z^{M_n}\|_2 = \|h_n\|_2 = 1.$$

Siguiendo con la desigualdad (3.27) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}_\varepsilon \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n h_n x_n \right\|^2\right)^{1/2} &\gtrsim \left(\mathbb{E}_\gamma \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j \in J_n} b_{n,j} \gamma_{n,j} x_n \right\|^2\right)^{1/2} \qquad (3.28) \\
&\gtrsim \left(\mathbb{E}_\gamma \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^2\right)^{1/2} \\
&\gtrsim \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \right\|^2\right)^{1/2}. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Por último, juntamos (3.26) y (3.28) para que se vea el resultado. □

Bibliografía

[1] F. Albiac and N. J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory.* Springer New York, 2006.

[2] A. Aleman, J.-F. Olsen, and E. Saksman. Fourier multipliers for Hardy spaces of Dirichlet series. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16):4368–4378, 2014.

[3] W. Arendt and S. Bu. Fourier series in Banach spaces and maximal regularity. In *Vector measures, integration and related topics*, volume 201 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 21–39. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[4] F. Bayart. Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators. *Monatsh. Math.*, 136(3):203–236, 2002.

[5] A. Beurling. *The collected works of Arne Beurling. Vol. 2.* Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989. Harmonic analysis, Edited by L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer.

[6] P. Billard, S. Kwapien, A. Pelczynski, and C. Samuel. Biorthogonal systems of random unconditional convergence in banach spaces. In *Texas functional analysis seminar*, volume 1986, pages 13–35, 1985.

[7] P. Billard, S. Kwapień, A. Pełczyński, and C. Samuel. Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces. In *Texas Functional Analysis Seminar 1985–1986 (Austin, TX, 1985–1986)*, Longhorn Notes, pages 13–35. Univ. Texas, Austin, TX, 1986.

[8] G. D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(12):656–660, 1931.

[9] F. G. Boese and W. J. Luther. Enclosure of the zero set of polynomials in several complex variables. *Multidimens. Systems Signal Process.*, 12(2):165–197, 2001.

[10] H. F. Bohnenblust and E. Hille. On the absolute convergence of dirichlet series. *Annals of Mathematics*, pages 600–622, 1931.

[11] H. Bohr. Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen. *J. Reine Angew. Math.*, 143:203–211, 1913.

[12] H. Bohr. Ueber die bedeutung der potenzreihen unendlich vieler variablen in der theorie der dirichletschen reihe .... *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:441–488, 1913.

[13] D. G. Bourgin and C. W. Mendel. Orthonormal sets of periodic functions of the type $f(nx)$. *Trans. Am. Math. Soc.*, 57:332–363, 1945.

[14] D. Carando, A. Defant, and P. Sevilla-Peris. Almost sure-sign convergence of Hardy-type Dirichlet series. *J. Anal. Math.*, 135(1):225–247, 2018.

[15] L. Carleson. An explicit unconditional basis in H^1. *Bull. Sci. Math. (2)*, 104(4):405–416, 1980.

[16] J. Castillo Medina. *Spaces of Dirichlet series.* PhD thesis, Universitat de València, 2019.

[17] J. Castillo-Medina, D. García, and M. Maestre. Isometries between spaces of multiple dirichlet series. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 472(1):526–545, 2019.

[18] O. Christensen et al. *An introduction to frames and Riesz bases.* Springer, 2016.

[19] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Y. G. Sinai. *Ergodic theory*, volume 245. Springer Science & Business Media, 2012.

[20] A. Defant, D. García, M. Maestre, and D. Pérez-García. Bohr's strip for vector valued Dirichlet series. *Math. Ann.*, 342(3):533–555, 2008.

[21] A. Defant, D. García, M. Maestre, and P. Sevilla-Peris. *Dirichlet series and holomorphic functions in high dimensions*, volume 37. Cambridge University Press, 2019.

[22] A. Defant and A. Pérez. Hardy spaces of vector-valued Dirichlet series. *Studia Math.*, 243(1):53–78, 2018.

[23] A. Defant and A. Pérez. Hardy spaces of vector-valued Dirichlet series. *Studia Math.*, 243(1):53–78, 2018.

[24] A. Defant and I. Schoolmann. h_p-theory of general dirichlet series. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 25(6):3220–3258, 2019.

[25] A. Defant, U. Schwarting, and P. Sevilla-Peris. Estimates for vector valued Dirichlet polynomials. *Monatsh. Math.*, 175(1):89–116, 2014.

[26] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge. *Absolutely summing operators*, volume 43 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[27] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de taylor. *Acta mathematica*, 30(1):335–400, 1906.

[28] W. T. Gowers and B. Maurey. The unconditional basic sequence problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(4):851–874, 1993.

[29] B. Green and T. Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.

[30] A. Grothendieck. Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 4:73–112 (1954), 1952.

[31] P. Hartman. On dirichlet series involving random coefficients. *American Journal of Mathematics*, 61(4):955–964, 1939.

[32] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, and K. Seip. A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$. *Duke Math. J.*, 86(1):1–37, 1997.

[33] H. Hedenmalm and E. Saksman. Carleson's convergence theorem for Dirichlet series. *Pacific J. Math.*, 208(1):85–109, 2003.

[34] T. Hytönen, J. Van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. *Analysis in Banach spaces*, volume 12. Springer, 2016.

[35] J.-P. Kahane. *Some random series of functions*, volume 5 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1985.

[36] S. Kwapień. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia mathematica*, 44(6):583–595, 1972.

[37] S. a. Kwapień and W. A. Woyczyński. *Random series and stochastic integrals: single and multiple*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[38] P. Lévy. Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (2)*, 3(3-4):337–366, 1934.

[39] D. Li and H. Queffélec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach: analyse et probabilités*, volume 12. SMF, 2004.

[40] D. Li and H. Queffélec. *Introduction to Banach spaces: analysis and probability. Vol. 1*, volume 166 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018. Translated from the French by Danièle Gibbons and Greg Gibbons, For the French original see [MR2124356].

[41] J. Lopez-Abad and P. Tradacete. Bases of random unconditional convergence in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(12):9001–9032, 2016.

[42] B. D. MacCluer. *Elementary functional analysis*, volume 253 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2009.

[43] B. Maurey. Isomorphismes entre espaces H_1. *Acta Math.*, 145(1-2):79–120, 1980.

[44] B. Maurey and G. Pisier. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. *Studia Math.*, 58(1):45–90, 1976.

[45] N. Nikolski. In a shadow of the RH: Cyclic vectors of Hardy spaces on the Hilbert multidisc. *Annales de l'Institut Fourier*, 62(5):1601–1626, 2012.

[46] A. Olofsson. On the shift semigroup on the hardy space of dirichlet series. *Acta Mathematica Hungarica*, 128(3):265–286, 2010.

[47] G. Pisier. Les inégalités de Khintchine-Kahane, d'après C. Borell. pages Exp. No. 7, 14, 1978.

[48] H. Queffélec and M. Queffélec. *Diophantine approximation and Dirichlet series*, volume 2 of *Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2013.

[49] H. Queffelec and M. Queffelec. *Diophantine approximation and Dirichlet series. 2nd extended edition*, volume 80. New Delhi: Hindustan Book Agency; Singapore: Springer, 2nd extended edition edition, 2020.

[50] W. Rudin. Trigonometric series with gaps. *J. Math. Mech.*, 9:203–227, 1960.

[51] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London, 1962.

[52] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[53] E. Saksman and K. Seip. Integral means and boundary limits of dirichlet series. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 41(3):411–422, 2009.

[54] J. Seigner. Rademacher variables in connection with complex scalars. *Acta Math. Univ. Comenianae*, 66(2):329–336, 1997.

[55] P. Wojtaszczyk. The Franklin system is an unconditional basis in H_1. *Ark. Mat.*, 20(2):293–300, 1982.