UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Una construcción no estándar del Álgebra de multiplicadores de una C*-álgebra, con aplicaciones a grupos exactos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el area Ciencias Matemáticas

Facundo Sebastian Poggi

Director y consejero de estudios: Román Sasyk
Lugar de trabajo: IMAS
Fecha de defensa: 14 de Diciembre de 2022

Una construcción no estándar del Álgebra de multiplicadores de una C*-álgebra, con aplicaciones a grupos exactos

Resumen

Esta tesis concierne al estudio de C*-Álgebras, Análisis No Estandar y Teoría Geométrica de Grupos. A partir de ultraproductos de una C*-álgebra $\mathcal{A}$ se da una nueva construcción del álgebra de multiplicadores de $\mathcal{A}$. Esto extiende el trabajo previamente realizado por Avsec y Goldbring para el caso abeliano y separable. Luego, se aplica esta construcción a la teoría de grupos exactos.

Primero, se considera una C*-álgebra $\mathcal{A}$ arbitraria, y se considera el ultraproducto de $\mathcal{A}$ respecto de $\mathcal{U}$, que se denotará $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$. En $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ se define la noción de convergencia $\mathcal{U}$-estricta, que permite distinguir una subálgebra de $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ que posee un ideal cuyo cociente resulta isomorfo al álgebra de multiplicadores de $\mathcal{A}$. Luego aplicamos esta construcción para mostrar que si un grupo actúa transivamente en un árbol localmente finito con estabilizadores exactos resulta exacto.

Palabras clave: Álgebras de multiplicadores, Ultraproductos de C*-álgebras, grupos exactos.

A non-standard construction of the multiplier algebra of a C*-algebra, with applications to exact groups

Abstract

This thesis concerns with the study of C*-Algebras, Non-Standard Analysis and Geometric Group Theory. From ultraproducts of a C*-algebra $\mathcal{A}$ a new construction of the Algebra of multipliers of $\mathcal{A}$ is given. This extends the work previously done by Avsec and Goldbring for the abelian and separable case. Then, this construction is applied to the theory of exact groups.

First, an arbitrary C*-Algebra $\mathcal{A}$ is considered, and the ultraproduct of $\mathcal{A}$ with respect to $\mathcal{U}$ is considered, which will be denoted $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$. In $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ the notion of $\mathcal{U}$-strict convergence is defined, which allows us to distinguish a subalgebra of $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ that has an ideal whose quotient is isomorphic to the algebra of multipliers of $\mathcal{A}$. Then we use this construction to show that a group acting transitively on a locally finite tree with exact stabilizers is exact.

Key words: Multiplier Algebras, Ultraproducts of C*-algebras, exact groups.

Agradecimientos

El presente trabajo es el punto cúlmine de un largo proceso que se ha iniciado hace unos años. Dicho proceso puede compararse con un largo viaje, debido a la gran cantidad de experiencias enriquecedoras que he podido vivir durante estos años, y debido también a la gran cantidad de personas que pude conocer durante esta época. Todo esto no lo habría podido realizar sin la ayuda de mucha gente que estuvo alrededor en este período, y a la que le quiero dedicar unas palabras.

En principio, quiero agradecerle a Román por muchas cosas. Primero, por la forma generosa en que me dirigió, que fue mucho más allá de dar un problema matemático para ver si salía. Román me legó una filosofía de como hacer matemática, interesandose no solo en la cuenta, si no en las motivaciones que cada problema tenía, en su contexto histórico, y en cómo se relacionan los temas vistos con otros problemas de la matemática. También me dejó la idea de mirar e intersarme por aquellos problemas matemáticos que consideraramos relevantes, y por seguir de cerca a los matemáticos importantes más allá de si estos se relacionen o no con nuestro trabajo en el día a día. En definitiva, me legó una mirada matemática amplia. También quisiera agradecer su infinita paciencia y apoyo para que este trabajo saliera adelante.

Tampoco me quiero olvidar de Fernando Cukierman. Sin su ayuda, hubiese sido muy difícil que pudiera hacer el doctorado. Además de eso, de Fernando me llevo numerosas charlas que permitía poner en contexto la matemática y a los matemáticos que en esas charlas se discutían, los problemas que encaraban y sus ideas y enfoques históricos. No hubo charla con Fernando de la que no me haya llevado algo interesante.

En este viaje que fue el doctorado, tuve la suerte de contar con tres grandes amigos y sostenes en esos momentos en que uno lo necesita. Ellos son, Marcelo Paredes, Juan Manuel Menconi y Mora Toledo. A los tres quisiera agradecerles todo el apoyo que me supieron brindar, con palabras justas y honestas aunque no por ello menos críticas cuando eran necesarias. También hubieron momentos de alegría, como los viajes, encuentros, charlas, y un largo etcétera.

Por último, sería muy injusto no mencionar a Eli, a Jaz, a Rocha, a Yami, a Dany Galicer, a Daniel Grimaldi y a Javier, quienens también han estado presentes en distintas etapas de todo este proceso. A todos ellos, muchas gracias!!

Índice general

Agradecimientos iii

Introducción vii

Capítulo 1. Preliminares 1
1. Ultrafiltros 1
2. C*-Álgebras 5
3. Grupos exactos 12

Capítulo 2. El artículo de Avsec y Goldbring 23
1. Aplicación a grupos exactos 31

Capítulo 3. Construcción del álgebra de multiplicadores a través de ultraproductos 35
1. El caso conmutativo y separable 42

Capítulo 4. Aplicaciones a Grupos Exactos 47

Bibliografía 53

Introducción

La teoría de C*-Álgebras surge hacia 1930 en mecánica cuántica como parte del estudio de observables físicos. Este tipo de objetos comienza a ser analizado por Heisenberg en el contexto de Mecánica Matricial, y en una manera matemáticamente más formal, por Jordan hacia el año 1933. Von Neumann establece un marco general para trabajar con este tipo de objetos en su trabajo pionero [43] que luego continuó con Murray en los artículos [29, 30, 44, 31] que dieron origen a la hoy llamada Teoría de Álgebras de von Neumann. Hacia el año 1943, Gelfand y Naimark consiguen una caracterización abstracta de las C*-álgebras, sin necesidad de representarla como una familia de operadores en espacios de Hilbert [18]. A la Teoría de las C*-Álgebras junto con la Teoría de las Álgebras de von Neumann se las llama conjuntamente Teoría de Álgebras de Operadores, y tiene muchas ramificaciones y especializaciones, entre ellas: la Teoría de Módulos de Hilbert, la K-Teoría, la Geometría No Conmutativa, por mencionar algunas. También se relaciona con otras áreas de la Matemática, como el Análisis Funcional, la Teoría de Representaciones de Grupos y la Teoría Geométrica de Grupos (algo a lo que se volverá más adelante), la Física Matemática, entre tantas otras.

Recordar que las C*-álgebras se pueden interpretar como topología no conmutativa, esto se debe a que la transformada de Gelfand $X \to C_0(X)$ da una correspondencia entre espacios topológicos localmente compactos y Hausdorff y C*-álgebras abelianas. En el caso de tratarse de espacios topológicos compactos, la correspondencia se da con las C*-álgebras abelianas y unitales.

Uno de los objetos centrales en el estudio de las C*-álgebras no unitales son las *Álgebras de multiplicadores*, dado que proveen una unitarización *maximal* de las mismas. Este tipo de objetos fue introducido por Busby en [8] mientras estudiaba extensiones de C*-álgebras. Dada una C*-álgebra $\mathcal{A}$ no unital, consideremos el conjunto de pares de operadores (L, R), $L, R : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ lineales y acotados tales que $R(x)y = xL(y)$ para cualesquiera elementos x e y. Este conjunto, que de ahora en más se notará $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, está dotado de una operación de multiplicación, una inversión y una norma compatibles, resultando una C*-álgebra unital que posee a $\mathcal{A}$ como un ideal esencial. Esta es una de las formas de definir al álgebra de multiplicadores de $\mathcal{A}$. Otra forma de definir a esta estructura se consigue a partir de una representación fiel de $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y considerar el conjunto de operadores $x \in B(\mathcal{H})$ tales que $x\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}x \subset \mathcal{A}$. Tales operadores se denominan multiplicadores de $\mathcal{A}$ y el conjunto de todos ellos forma una C*-álgebra unital que contiene a $\mathcal{A}$ como un ideal esencial. Es a partir de esta construcción que reciben su nombre. Este tipo de C*-álgebras cumplen la condición de ser la unitarización más grande de todas las posibles. Formalmente, si $\mathcal{B}$ es una unitarización de $\mathcal{A}$, entonces tenemos un morfismo de álgebras inyectivo de $\mathcal{B}$ al álgebra de multiplicadores de $\mathcal{A}$ que es la identidad cuando se lo restringe a $\mathcal{A}$. Dentro de los ejemplos que se pueden mencionar, caben destacar dos muy importantes. Si $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es el álgebra de operadores compactos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces su álgebra de multiplicadores resulta isomorfa a $B(\mathcal{H})$. Esto permite interpretar este tipo de estructuras como la generalización del álgebra de operadores acotados definidos sobre $\mathcal{H}$. De forma similar, el álgebra Corona, definida como el cociente $\mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A}$ generaliza al álgebra de Calkin y resulta una herramienta importante en la teoría de clasificación de extensiones.

Otro ejemplo importante proviene de las álgebras conmutativas. En ese caso, si $\sigma(\mathcal{A})$ es el espectro de una C*-álgebra conmutativa $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es isomorfo al álgebra de funciones continuas definidas sobre la compactificación de Stone-Čech de $\sigma(\mathcal{A})$. Esto permite interpretar a las álgebras de multiplicadores como una versión no conmutativa de la compactificación de Stone-Čech.

En el artículo [5], Avsec y Goldbring utilizan técnicas de análisis no estandar para construir la compactificación de Stone-Čech. A diferencia del análisis clásico, el análisis no estándar se nutre de herramientas de la Teoría de Modelos para resolver problemas de análisis. Este enfoque, basado en la idea de números infinitesimales que ya aparecían en los trabajos de Leibniz, fue impulsado principalmente por Robinson en la década de 1960 (ver, por ejemplo, [39]). El análisis no estándar brinda la posibilidad de tomar límites (llamados *ultralímites*) a suceciones que no son originalmente convergentes, pero preservando buena parte de las propiedades del límite clásico. Para poder tomar estos ultralímites, se hace uso de ultrafiltros, que son particiones no triviales de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Asociado a los ultrafiltros, también tenemos el concepto de ultraproducto, que se puede interpretar como una versión no estándar del producto cartesiano. Es pertinente mencionar que en el contexto de álgebras de operadores, Connes [11] fue el primero en emplear la lógica matemática, en particular ultraproductos, como parte de su revolucionario estudio sobre clasificación de álgebras de von Neumann de principios de los años 70. De esa época también es el famoso y muy influyente *Problema del embebimiento de Connes* [12], que conecta ultraproductos, álgebras de von Neumann, C*-álgebras, probabilidades libres y teoría de la información cuántica, (para encontrar más información acerca de él, ver, por ejemplo, el reciente survey [19]).

Volviendo al artículo previamente mencionado de Avsec y Goldbring, en él los autores parten de $\mathcal{U}$, un ultrafiltro definido sobre $\mathbb{N}$, y de X un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo contable. Si $C_0(X)$ es la C*-álgebra de funciones continuas que tienden a 0 en el infinito, la cual resulta un álgebra separable debido a las hipótesis sobre X, se considera $C_0(X)^{\mathcal{U}}$ el álgebra ultraproducto. En $C_0(X)^{\mathcal{U}}$ existen una subálgebra y un ideal de manera tal que el cociente entre ellos es isomorfo a $C_b(X)$. Finalmente, utilizando la correspondencia de Gelfand, los autores recuperan la compactificación de Stone-Čech de X. En definitiva, Avsec y Goldbring construyeron el álgebra de multiplicadores de una C*-álgebra $\mathcal{A}$ para el caso abeliano y separable. Aquí surge naturalmente la pregunta de si se puede generalizar esta construcción al caso no conmutativo. El primer objetivo de esta tesis es dar una respuesta afirmativa a esta pregunta. Esto será desarrollado en profundidad en el Capítulo 3 de esta tesis. Allí se construirá el álgebra de multiplicadores de una C*-álgebra a partir de ultraproductos. Cabe destacar que la generalización allí obtenida es en dos direcciones: se generaliza al caso no conmutativo, y al caso no necesariamente separable. Esto hace que los ultrafiltros que se deben considerar, ahora no están soportados sobre $\mathbb{N}$, si no que sobre conjuntos dirigidos $\mathcal{I}$ y que los ultrafiltros sean cofinales. Esta parte de la tesis se encuadra dentro de la fructifera relación entre las álgebras de operadores y la lógica matemática, y que luego de los trabajos fundamentales de Connes, se ha vuelto a manifestar de manera muy notoria en los últimos 20 años, como por ejemplo en los trabajos de Weaver y Philips [**37**] y Farah [**14**] sobre la incidencia de los axiomas de la teoría de conjuntos en la existencia de automorfismos externos del álgebra de Calkin, los artículos de Sasyk y Törnquist sobre teoría descriptiva de conjuntos y clasificación de álgebras de von Neumann iniciada en [**40**] y extendida por primera vez a las álgebras C* por Farah, Toms y Törnquist en [**17**]; la serie de trabajos Farah, Hart, Sherman, Goldbring y Sinclair sobre teoría de modelos continua para álgebras de operadores iniciada en [**16, 21**]. por mencionar algunas de ellas. Para interiorizarse más acerca de estas vinculaciones, ver por ejemplo la exposición de Farah en el ICM del 2014 [**15**].

En esta tesis también damos una aplicación de la construcción del álgebra de multiplicadores a la teoría geométrica de grupos, más precisamente al estudio de grupos exactos, quedando de manifiesto una vez más las conexiones entre las Álgebras de Operadores y la Teoría de Grupos. La Teoría de Grupos se ha vinculado desde sus orígenes con otras áreas de la matemática, que van desde la Teoría de Ecuaciones Algebraicas, la Teoría de Números y la Geometría hasta el Análisis, la Topología y las Ecuaciones Diferenciales. Entre los muchos ejemplos de estas interrelaciones, se pueden destacar: el trabajo de Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, en donde vincula la Teoría de Grupos con la Teoría de Números en una de sus demostraciones del teorema de reciprocidad cuadrática; los trabajos de Abel, Lagrange, Ruffini y Galois en donde utilizan grupos simétricos para probar bajo qué condiciones un polinomio posee una ecuación resolvente; el trabajo de Klein y su famoso Erlangen Program, en donde utiliza grupos y sus invariantes para distinguir geometrías, sus lenguajes y conceptos subyacentes; el trabajo de Lie, quien inspirado en las ideas de Galois, utiliza grupos para resolver y ecuaciones diferenciales y que da nacimiento a la Teoría de Grupos de Lie; los trabajos de Pontryagin, Gleason, Montgomery, Zippin y Yamabe, que trabajaron en la caracterización de los grupos de Lie, que se vincula con la Geometría y la Topología; el trabajo de Gromov, quien visualizando a los grupos como objetos geométricos, permite adaptar ideas y conceptos geométricos tradicionales para estudiar grupos infinitos y no compactos. Está claro que nos queda por mencionar muchos otros campos en donde la Teoría de Grupos brinda herramientas fructíferas para la comprensión de los problemas que se están estudiando, uno de los campos en donde vale la pena detenerse para mejorar la comprensión de esta tesis es en la Teoría de Representaciones de Grupos. Efectivamente, para entender qué es un grupo exacto, conviene primero hacer un breve repaso de representaciones de grupos.

Una representación de un grupo G es un morfismo $G \to GL(V)$ donde V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $GL(V)$ son las transformaciones lineales biyectivas sobre V. Cuando el grupo posee alguna estructura extra (por ejemplo, G es un grupo topológico) se consideran V y $GL(V)$ de manera tal que se estas estructuras se vean reflejadas por la representación. Cuando G es un grupo finito, toda representación admite una descomposición en sus factores minimales, las representaciones irreducibles. Las representaciones irreducibles resultan, en este caso, todas de dimensión finita, y pueden analizarse en profundidad a través de ciertas funciones específicas llamadas caracteres. En cuanto se considera un grupo compacto (es decir, no necesariamente finito pero con una topología que lo vuelve compacto), para que la topología se vea reflejada se miran morfismos continuos de $G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ se entiende el conjunto de operadores unitarios definidos sobre $\mathcal{H}$, dotado con la topología fuerte de operadores. En el famoso trabajo de Peter-Weyl, los autores demuestran que las representaciones irreducibles de un grupo compacto son todas de dimensión finita (o sea, que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial de dimensión finita) y que toda representación se descompone como suma directa de representaciones irreducibles, de forma similar al caso de grupos finitos. Cuando se trabaja con grupos localmente compactos y Hausdorff, el estudio de representaciones de grupos comienza a ser en extremo complejo. Es en este contexto en donde aparecen las propiedades de amenabilidad, propiedad (T), propiedad de Haagerup, etc. Para esta tesis, convendrá detenerse en el concepto de amenabilidad, introducido por von Neumann en su estudio de la paradoja de Banach-Tarski, Un grupo discreto Γ se dice amenable, si posee una sucesión de Følner, es decir, una sucesión de conjuntos finitos $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $\gamma \in \Gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|F_n \vartriangle \gamma F_n|}{|F_n|} = 0$. La definición de grupo amenable admite muchas otras definiciones equivalentes, por ejemplo: que existan medias Γ-invariantes, que existan puntos fijos, que la representación trivial esté débilmente contenida en la representación regular a izquierda, o que el grupo no tenga una descomposición paradójica (la definición original de von Neumann). A los efectos de esta tesis, es pertinente mencionar que existe una equivalencia de amenabilidad vinculada a las C*-álgebras, que pasaremos a describir a continuación.

Dentro de la teoría de C*-álgebras, son importantes los conceptos de nuclearidad y de exactitud. Una C*-álgebra $\mathcal{A}$ es nuclear si dada cualquier C*-álgebra $\mathcal{B}$, el producto tensorial algebraico $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tiene una única C*-norma. Por otra parte, una C*-álgebra $\mathcal{A}$ se dice exacta si para toda sucesión exacta corta $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{I} \to 0$ se tiene que $0 \to \mathcal{I} \otimes_{min} \mathcal{A} \to \mathcal{B} \otimes_{min} \mathcal{A} \to \mathcal{B}/\mathcal{I} \otimes_{min} \mathcal{A} \to 0$ es exacta, en donde $\otimes_{min}$ denota la tensorización con respecto a la norma espacial. Mediante equivalencias de estos conceptos se verifica que la noción de exactitud es estrictamente más débil que la noción de nuclearidad.

La teoría de grupos, más precisamente la teoría de C*-álgebras de grupos, brinda ricos ejemplos para estudiar estos dos conceptos. Históricamente, el primer ejemplo de C*-álgebra no nuclear fue la C*-álgebra de grupo reducida de $\mathbb{F}_2$, el grupo libre en dos generadores, obtenido por Takesaki en [41]. De todas formas, es sabido que esta C*-álgebra resulta exacta. En la década siguiente, Lance [28] generalizó el resultado de Takesaki y vinculó fuertemente el concepto de nuclearidad con la teoría de grupos, ya que demostró que la C*-álgebra de un grupo Γ es nuclear sí y solo sí Γ es amenable, dando así una nueva equivalencia de este concepto. Debido a que el concepto de álgebras nucleares es más fuerte que el de álgebras exactas, la siguiente definición se puede entender como una generalización del concepto de amenabilidad:

Definición 1. Sea Γ un grupo discreto. Entonces Γ se dice exacto si su C*-álgebra de grupo es exacta.

La noción de C*-álgebra exacta fue acuñada por Kirchberg y aparece por primera vez en el reporte de la exposición "Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics" dada en el año 1978 [1]. La motiviación subyacente de Kirchberg era extender el trabajo de Connes sobre clasificación de álgebras de von Neumann inyectivas, a las C*-álgebras. Desde ese entonces es uno de los temas centrales en esta teoría. Años después, Kirchberg y Wasserman comenzaron a estudiar grupos exactos (ver [27]).

Otro forma de generalizar amenabilidad es mediante el concepto de acciones amenables, que también se tratará en esta tesis. Originalmente definido por Zimmer para acciones de grupos por transformaciones medibles en espacios de medida (ver por ejemplo [48, 49]), fue posteriormente redefinido por Anantharaman-Delaroche para acciones por homeomorfismos en conjuntos compactos ([2, 3]). En este caso, si un grupo Γ es amenable, entonces toda acción por homeomorfismos en un compacto resultará amenable. Por el contrario, un grupo Γ resultará amenable cuando la acción trivial de Γ en el singletón sea amenable. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2. Sea Γ un grupo discreto. Entonces Γ se dice boundary amenable si existe conjunto compacto X en donde Γ actúa por homeomorfismos de forma amenable.

En [25], Higson y Roe demostraron que Γ es boundary amenable si y solo si Γ posee la Propiedad A de Yu. En [47], Yu define la Propiedad A para dar ejemplos de grupos finitamente generados que admiten un embebimiento uniforme en un espacio de Hilbert, y muestra que tal embebimiento garantiza que el grupo cumpla la conjetura de Novikov (algo ya postulado por Gromov en [22]). Más tarde, a principios del siglo XXI, Ozawa en [34] y Kaminker y Guentner en [24] prueban que la condición de exactitud es equivalente a poseer la Propiedad A de Yu para el caso de grupos discretos.

Haciendo uso de estas definiciones equivalentes, tenemos la siguiente propiedad:

Proposición. Sea Γ un grupo discreto. Entonces Γ es exacto si solo si existen una C*-álgebra conmutativa $\mathcal{A}$ en donde Γ actúa y una red de funciones de soporte finito $S_i : \Gamma \to \mathcal{A}$ tal que

1. $S_i(\gamma)$ es un operador positivo $\forall \gamma \in \Gamma$.
2. $\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} S_i^2(\gamma) = 1$.
3. Para cada $\gamma_1 \in \Gamma$, $||S_i - \gamma_1 * S_i||$ tiende a 0 cuando i tiende a infinito.

En el trabajo de Avsec y Golbring [5] se desarrolla un método que permite demostrar que un grupo que actúa en un árbol de forma propia y transitiva es exacto. Para ello, como ya se ha mencionado anteriormente, los autores dan primero una nueva construcción de la compactificación de Stone-Čech utilizando ultraproductos de C*-álgebras. Luego parten un grupo Γ que actúa en un árbol $\mathbb{T}$ de forma propia y transitiva, y consideran la C*-álgebra de funciones continuas definidas sobre la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{T}$. Los autores utilizan su construcción de la compactificación de Stone-Čech vía ultraproductos para definir una red de funciones y probar que cumplen las condiciones de exactitud.

En el Capítulo 4 de esta tésis se generalizará este segundo resultado obtenido en [5], para dar una nueva demostración de que un grupo que actúa transitivamente en un árbol es exacto si los estabilizadores de los vértices son exactos (sin requerir que la acción sea propia). La transitividad conlleva una noción de homegeneidad mientras que si además agregamos que la acción sea propia, los estabilizadores de los vértices resultan ser finitos e isomorfos, y estos son ingredientes esenciales de la demostración dada en [5]. Vale aclarar que el hecho de que la acción sea propia y transitiva impone restricciones fuertes al tipo de grupos a los cuales se les aplica el resultado de [5]. Por ejemplo por la teoría de Bass-Serre, el producto amalgamado libre de dos grupos actúa en un árbol (típicamente no localmente finito), pero esta acción no es ni propia, ni transitiva, y los estabilizadores de los vertices son isomorfos a los factores del producto amalgamado libre. Es sabido que el producto amalgamado libre de grupos exactos es exacto. De este resultado existen varias demostraciones diferentes, por ejemplo la pionera de Dykema [13] usando C*-álgebras, la de Tu [42] usando la propiedad A de Yu, y la de Ozawa [35] usando grafos hiperbólicos.

El objetivo subyacente de haber extendido y generalizado el trabajo de Avsec y Goldbring era dar nuevos ejemplos de grupos exactos y aplicarlos a las álgebras de operadores. Como mencionan estos autores en la introducción de su artículo [5], dada la afinidad entre árboles, ultraproductos y el grupo de Thomson F, una motivación era discernir si dicho grupo es exacto. En caso de que la respuesta fuera en la negativa, en particular tendría como corolario que el grupo de Thomson F no es amenable, lo cual resolvería uno de los problemas abiertos más famosos de la teoría geométrica de grupos (para más detalles sobre los grupos de Thompson, ver por ejemplo [9]). Los resultados y técnicas presentados en esta tesis podrían dar un indicio de que hasta este momento, este enfoque con ultraproductos no parece ser más adecuado que otros para abordar dicho problema.

Además de los capítulos antes descriptos, en el Capítulo 1 de esta tesis se definen y desarrollan aspectos preliminares sobre ultraproductos, C*-álgebras, grupos amenables y grupos exactos que serán necesarios para poder enunciar y demostrar los resultados principales que serán expuestos a lo largo de la misma. En el Capítulo 2, se analiza en profundidad el trabajo de Avsec y Goldbring. Parte de la investigación aquí presentada ha sido publicada en el artículo [38].

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo, se darán las nociones básicas y los teoremas que serán utilizados más adelante. El capítulo está separado en 3 secciones. La primera parte, está abocada al estudio de las nociones básicas de análisis no estándar requeridas para esta tesis, lo que incluye ultrafiltros, ultraproductos y ultralímites. En la segunda, se abocará al estudio de C*-álgebras, la existencia de unidades aproximadas, se reveerá la transformada de Gelfand y algunas aplicaciones y se fijará la existencia del álgebra de multiplicadores de una C*-álgebra. La última sección está enfocada en el estudio de grupos exactos, empezando con grupos amenables para que la noción de acciones amenables sea más comprensible, que resulta la pieza fundamental en la definición de grupo exacto. También se darán ejemplos de grupos con estas propiedades.

1. Ultrafiltros

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto. Un filtro F sobre $\mathcal{I}$ es una colección de subconjuntos de $\mathcal{I}$ no vacía con las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío no pertenece a F.
2. Propiedad de la intersección finita: para cada $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1 \in F$ se tiene que $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1 \in F$;
3. Direccionalidad: para cada $\mathcal{I}_o \subset \mathcal{I}_1$, donde $\mathcal{I}_o$ pertenece a F, entonces $\mathcal{I}_1 \in F$.

Definición 1.1. Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathcal{I})$ un filtro. Decimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro si cumple la siguiente propiedad:

4. Maximalidad: para cada $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$, entonces o bien $\mathcal{I}_0 \in \mathcal{U}$ o bien $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0 \in \mathcal{U}$.

Observación 1.2. Si se tiene que dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ definido sobre $\mathcal{I}$, entonces tenemos una partición de $P(\mathcal{I})$ en dos, mediante los conjuntos $A = \{\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I} : \mathcal{I}_0 \in \mathcal{U}\}$ y $B = \{\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I} : \mathcal{I}_0^c \in \mathcal{U}\}$ que resultan disjuntos.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto no vacío, y sea $i_0 \in \mathcal{I}$. El conjunto $\mathcal{U} = \{\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I} : i_0 \in \mathcal{I}_0\}$, resulta un ultrafiltro.

Definición 1.4. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{I}$ como en el Ejemplo 1.3 se denomina ultrafiltro *principal*. Todo ultrafiltro que no sea de esta forma se denomina ultrafiltro no principal.

Más adelante, en la Observación 1.12, se demostrará la existencia de este tipo de objetos.

Lema 1.5. *Sea $\mathcal{I}$ un conjunto y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1 \in \mathcal{U}$, entonces o bien $\mathcal{I}_0 \in \mathcal{U}$ o bien $\mathcal{I}_1 \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1 \in \mathcal{U}$ y pero que $\mathcal{I}_0 \notin \mathcal{U}$ y $\mathcal{I}_1 \notin \mathcal{U}$. Entonces por la maximalidad $\mathcal{I}_0^c \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{I}_1^c \in \mathcal{U}$. Luego, por la propiedad de intersección, se tiene que $\mathcal{I}_0^c \cap \mathcal{I}_1^c = (\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1)^c \in \mathcal{U}$, contradiciendo esto último la condición de maximalidad de $\mathcal{U}$. □

Corolario 1.6. *Sea $\mathcal{I}$ un conjunto y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$.*

1. *Si $\mathcal{I}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{I}_n \in \mathcal{U}$, entonces existe un i_0 tal que $\mathcal{I}_{i_0} \in \mathcal{U}$.*
2. *Si existe un conjunto finito $F \subset \mathcal{I}$ tal que $F \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal.*

Demostración. La demostración de 1 se deduce de aplicar inducción en el lema anterior.

Para probar 2, sea $F \subset \mathcal{I}$ finito tal que $F \in \mathcal{U}$. Luego, $F = \{i_1\} \cup \cdots \cup \{i_n\}$, de lo que sigue por 1 que existe j, $1 \leq j \leq n$ tal que $\{i_j\} \in \mathcal{U}$. □

Definición 1.7. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto. El conjunto $\mathcal{I}$ se denomina *conjunto dirigido* si existe un orden parcial $\leq$ con la siguiente propiedad: si $a, b \in \mathcal{I}$, entonces existe un elemento $c \in \mathcal{I}$ tal que $a \leq c$, $b \leq c$.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto dirigido, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$. Se dice que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro cofinal, si los conjuntos de la forma $\mathcal{I}_{\geq i_0} = \{i \in \mathcal{I} : i \geq i_0\}$ pertenecen a $\mathcal{U}$ para todo $i_0 \in \mathcal{I}$.

Si existe un elemento $m \in \mathcal{I}$ tal que $i \leq m$ para todo $i \in \mathcal{I}$, se dice que el elemento m es un elemento maximal de $\mathcal{I}$.

Ejemplo 1.9. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal definido sobre $\mathbb{N}$. Como el ultrafiltro es no principal, entonces no posee conjuntos finitos. Luego $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \in \mathcal{U}$, de lo que se sigue que todo ultrafiltro no principal definido sobre $\mathbb{N}$ es cofinal.

Observación 1.10. Cuando se tiene un ultrafiltro $\mathcal{U}$ cofinal, entonces $\mathcal{I}$ posee un elemento maximal si y solo si $\mathcal{U}$ es principal. Cuando existe $m \in \mathcal{I}$ tal que $m \geq i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, entonces el conjunto $\{i \in \mathcal{I} : i \geq m\} = \{m\} \in \mathcal{U}$ y el ultrafiltro resulta principal. Para la otra implicación, si $\{m\}$ es el elemento que define al ultraflitro, entonces $m \in \{i \in \mathcal{I} : i \geq i_0\}$ para todo $i_0 \in \mathcal{I}$, de lo que sigue que $m \geq i_0$ para todo $i_0 \in \mathcal{I}$ y el elemento m es maximal.

El siguiente lema muestra que los ultrafiltros cofinales existen.

Lema 1.11. *Sea $\mathcal{I}$ un conjunto dirigido que no posee elementos maximales. Entonces existe un ultrafiltro cofinal definido sobre $\mathcal{I}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset \mathcal{I} : \mathcal{I}_{\geq i_0} \subset F$ para algún $i_0 \in \mathcal{I}\}$ donde $\mathcal{I}_{\geq i_0} = \{i \in \mathcal{I} : i \geq i_0\}$. Entonces $\mathcal{F}$ resulta un filtro, es decir, posee la propiedad de intersección finita y la propiedad de direccionalidad.

Para probar que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Entonces existen $\mathcal{I}_{\geq i_1}, \mathcal{I}_{\geq i_2}$ tales que $\mathcal{I}_{\geq i_1} \subset F_1$, $\mathcal{I}_{\geq i_2} \subset F_2$. Luego, como $\mathcal{I}$ es un conjunto dirigido, existe $i_3 \geq i_1$, $i_3 \geq i_2$. De lo que se desprende que $\mathcal{I}_{\geq i_3} \subset F_1 \cap F_2$, por lo tanto $F_1 \cap F_2 \subset \mathcal{F}$. La direccionalidad se desprende de la definición de $\mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena creciente de filtros que contengan a $\mathcal{F}$, y sea $\overline{F} = \cup_{c \in \mathcal{C}} c$. Entonces, $\overline{F}$ es un filtro. Sea $F \in \overline{F}$, y sea $F \subset B$, como F pertenece a un determinado $c \in \mathcal{C}$ y es un filtro, entonces $B \in c$, de lo que se obtiene que $B \in \overline{F}$. Si $F_1, F_2 \in \overline{F}$, entonces $F_1 \in c_1$, $F_2 \in c_2$, luego $F_1, F_2 \in \max\{c_1, c_2\}$ que es un filtro, y en consecuencia $F_1 \cap F_2 \in \max\{c_1, c_2\} \subset \overline{F}$.

Por el lema de Zorn, existe un elemento $\mathcal{U}$ maximal. Entonces, $\mathcal{U}$ posee la propiedad de maximalidad. Esto se debe a que si existe un $A \subset \mathcal{I}$ tal que $A \notin \mathcal{U}$, $A^c \notin \mathcal{U}$, entonces se puede tomar el siguiente conjunto $\overline{E} = \{F \subset \mathcal{I}$ tal que $\exists B \in \mathcal{U} : A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B \subset F\}$. Por construcción, $\overline{E}$ posee la propiedades de direccionalidad y de intersección finita, que se prueban de forma análoga al caso de $\mathcal{F}$. Entonces $\overline{E}$ es un filtro, contradiciendo la maximalidad del Lema de Zorn, ya que es $\overline{E}$ es un filtro que contiene de forma estricta a $\mathcal{U}$. Luego, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que posee a los conjuntos de la forma $\mathcal{I}_{\geq i_0}$, luego es un ultrafiltro cofinal. $\square$

Observación 1.12. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto, y sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathcal{I}$. Un argumento similar al utilizado en la demostración anterior permite mostrar que toda cadena creciente de filtros $\mathcal{F}'$ definidos sobre $\mathcal{I}$ que contengan a $\mathcal{F}$ se estaciona. Luego, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathcal{U}$, que resulta un ultrafiltro.

Definición 1.13. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{I}$. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \subset X$. Decimos que $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ converge a lo largo de $\mathcal{U}$, o que es $\mathcal{U}$-convergente si existe un $a \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{i \in \mathcal{I} : d(a_i, a) < \varepsilon\}$ pertenece a $\mathcal{U}$. El elemento a se llama el $\mathcal{U}$-límite de $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ y se nota $\lim_{\mathcal{U}} a_i$.

Observación 1.14. El $\mathcal{U}$-límite es único. Esto se desprende de que si $a \neq b$ son dos $\mathcal{U}$-límites de $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$, entonces tomando $\varepsilon < \frac{d(a,b)}{2}$, los conjuntos $\{i \in \mathcal{I} : d(a_i, a) < \varepsilon\}$ y $\{i \in \mathcal{I} : d(a_i, b) < \varepsilon\}$ pertenecen a $\mathcal{U}$ pero son disjuntos, contradiciendo la condición de maximalidad de $\mathcal{U}$.

Buena parte de las propiedades usuales de límites se mantienen para el caso de convergencia a lo largo de $\mathcal{U}$.

Proposición 1.15. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{I}$. Sea $(X, \| \quad \|)$ un espacio vectorial normado, sean $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}, (b_i)_{i \in \mathcal{I}} \subset X$ tales que $\lim_{\mathcal{U}} a_i = a$, $\lim_{\mathcal{U}} b_i = b$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces*

1.
$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{U}} (a+b)_i &= \lim_{\mathcal{U}} a_i + \lim_{\mathcal{U}} b_i = a + b, \\ \lim_{\mathcal{U}} (\lambda a)_i &= \lambda \lim_{\mathcal{U}} a_i = \lambda a \end{aligned}$$

2. *Cuando* $X = \mathbb{R}$ *y* $a_i \leq b_i$ *para todo* $i \in \mathcal{I}$ *entonces* $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_i \leq \lim\limits_{\mathcal{U}} b_i$.

Demostración. Para probar que la suma de los $\mathcal{U}$-límites es igual al $\mathcal{U}$-límite de la suma, sea $\varepsilon > 0$, y sean $A(\frac{\varepsilon}{2}) = \left\{ i \in \mathcal{I} : \|a_i - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$, $B(\frac{\varepsilon}{2}) = \left\{ i \in \mathcal{I} : \|b_i - b\| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. Por definición, ambos conjuntos pertenecen a $\mathcal{U}$, y lo mismo su intersección. Si $i \in A(\varepsilon) \cap B(\varepsilon)$, entonces

$$\|(a_i + b_i - a - b)\| \leq \|a_i - a\| + \|b_i - b\| \leq \varepsilon$$

lo que demuestra que $A(\varepsilon) \cap B(\varepsilon) \subset \{i \in \mathcal{I} : \|(a_i + b_i - a - b)\| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{U}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $i \in A(\frac{\varepsilon}{|\lambda|})$, entonces

$$\|\lambda a_i - \lambda a\| = |\lambda| \|a_i - a\| \leq \varepsilon,$$

de lo que se sigue que

$$A\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right) \subset \{i \in \mathcal{I} : \|\lambda a_i - \lambda a)\| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{U},$$

demostrando que los $\mathcal{U}$-límites respetan la linealidad.

Resta mostrar que el $\mathcal{U}$-límite preserva el orden. Sean $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_i$ y $b = \lim\limits_{\mathcal{U}} b_i$, supongamos que $b < a$, entonces sean $L = a - b > 0$, $\varepsilon = \frac{L}{3}$, y sea $C = \{i \in \mathcal{I} : |a_i - a| < \varepsilon, |b_i - b| < \varepsilon\}$. Efectivamente $C \in \mathcal{U}$ porque puede expresarse como intersección de conjuntos de $\mathcal{U}$.

Sea $i \in C$, entonces $-\varepsilon < a_i - a < \varepsilon$, y $-\varepsilon < a_i - a < \varepsilon$, de lo que sigue que $-2\varepsilon < b_i - b - (a_i - a) = (b_i - a_i) + L < 2\varepsilon$, de lo que se deduce que $-L - 2\varepsilon < b_i - a_i < -L - 2\varepsilon < 0$, contradiciendo la hipótesis. □

Observación 1.16. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto dirigido y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cofinal y no principal sobre $\mathcal{I}$. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \subset X$ una red convergente a a. Entonces, $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_i$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que si $i \geq i_0$, entonces $d(a, a_i) < \varepsilon$. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{I}_{\geq i_0} \subset \{i \in \mathcal{I} : d(a, a_i) \leq \varepsilon\}$, y como el primer conjunto pertenece $\mathcal{U}$, por maximalidad también pertenece el último.

Como consecuencia del Ejemplo 1.9 se obtiene lo siguiente. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro definido sobre $\mathbb{N}$ no principal, entonces para toda sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente se tiene que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$.

Para el siguiente resultado, conviene recordar la siguiente definición:

Definición 1.17. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $K \subset X$ se dice totalmente acotado si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$, y existen $X_1, \ldots, X_n$ tal que $K \subset X_1 \cup \cdots \cup X_n$ y el diámetro de cada X_i es menor que ε.

Proposición 1.18. *Sea* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro sobre* $\mathcal{I}$. *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y sea* $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \subset X$. *Si* $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ *resulta un conjunto totalmente acotado, entonces existe* $a \in X$ *tal que* a *es el* $\mathcal{U}$*-límite de* $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$.

Demostración. Para demostrar esta proposición, se procederá a construir una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por elementos de $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$, de manera tal que los conjuntos $\{a_n, n \geq n_0\}$, tengan diámetro menor que $\frac{1}{n_0}$. Como $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es totalmente acotado, para todo $\varepsilon > 0$ existen $X_1, \ldots, X_n$ tales que $\{a_i, i \in \mathcal{I}\} \subset X_1 \cup \cdots \cup X_n$ y el diámetro de cada X_i es menor que ε. El problema es que a medida que se varía el ε los conjuntos X_i pueden no estar relacionados, es por eso que se da a continuación está construcción inductiva de a_i.

Sea $n = 1$, entonces existen $X_1, \ldots, X_j$ de diámetro menor que 1 y disjuntos dos a dos tales que $\{a_i : i \in \mathcal{I}\} \subset X_1 \cup \cdots \cup X_j$. Sean $I_k = \{i \in \mathcal{I} : a_i \in X_k\}$, $1 \leq k \leq j$, como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, existe k_0 tal que $I_{k_0} \in \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{I}_1 = I_{k_0}$ y sea $Y_1 = X_{k_0}$ y sea $a_1 \in Y_1 \cap \{a_i : i \in \mathcal{I}\}$.

Si se tienen $\mathcal{I}_n$, Y_n y a_n, se construyen $\mathcal{I}_{n+1}$, Y_{n+1} y a_{n+1} de la siguiente manera: Como Y_n es totalmente acotado e $\mathcal{I}_n \in \mathcal{U}$, entonces existen $X_1, \ldots, X_j$ disjuntos dos a dos tales que $Y_n = X_1 \cup \cdots \cup X_j$ y de diámetro menor que $\frac{1}{n+1}$. Sean $I_k = \{i \in \mathcal{I}_n : a_i \in X_k\}$, $1 \leq k \leq j$, como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, existe k_0 tal que $I_{k_0} \in \mathcal{U}$. Sea entonces $\mathcal{I}_{n+1} = I_{k_0}$ y sea $Y_{n+1} = X_{k_0}$ y sea $a_{n+1} \in Y_{n+1} \cap \{a_i : i \in \mathcal{I}_n\}$.

Por construcción, $Y_n \subset Y_{n-1}$, de lo que sigue que $d(a_n, a_m) \leq \frac{1}{\min\{n,m\}}$, luego a_n es una sucesión de Cauchy que converge a un elemento $a \in X$.

Resta ver que $a = \lim_{\mathcal{U}} a_i$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por construcción, el conjunto $\mathcal{I}_n \subset \{i \in \mathcal{I} : d(a, a_i) < \varepsilon\}$, ya que $d(a_i, a) \leq d(a_i, a_n) + d(a_n, a) < 2\varepsilon$. Luego, $\{i \in \mathcal{I} : d(a, a_i) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. □

Como consecuencia de esta proposición, se tiene el siguiente corolario que se utilizará mucho en las siguientes páginas.

Corolario 1.19. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathbb{N}$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos que está acotada. Entonces existe $\mathcal{U}$-límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Para profundizar en aplicaciones actuales de ultraproductos en la matemática ver, por ejemplo, el reciente libro de Goldbring [20].

2. C*-Álgebras

Por C*-álgebra se entiende un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ con una involución $* : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}$, $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Como ejemplos de C*-álgebras podemos encontrar, entre otros, los siguientes

1. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff, y sea $C(X)$ el conjunto de funciones continuas de X a $\mathbb{C}$. Entonces $C(X)$ resulta una C*-algebra abeliana.
2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y sea $B(\mathcal{H})$, el conjunto de operadores de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Entonces $B(\mathcal{H})$ con la norma de operador también resulta una C*-álgebra, en este caso no abeliana.

Cuando se trabaja con C*-álgebras, por un ideal I se entiende un ideal bilátero, que es cerrado en norma.

Definición 1.20. Un ideal I en una C*-álgebra $\mathcal{A}$ se dice *esencial* si $I \cap K$ es no trivial para cada ideal $K \neq \{0\}$, o equivalentemente, si $KI = 0$ entonces $K = 0$.

Intuitivamente, un ideal esencial es un ideal que es suficientemente grande o abarcativo en la C*-álgebra.

No todas las C*-álgebras poseen unidad. Cuando $\mathcal{A}$ tiene una unidad $1_{\mathcal{A}}$, se dice que $\mathcal{A}$ es *unital*.

Definición 1.21. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra no unital. Una unitarización de $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra unital $\mathcal{B}$ tal que existe un morfismo inyectivo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cuya imagen es un ideal esencial de $\mathcal{B}$.

Informalmente hablando, una unitarización de $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra $\mathcal{B}$ unital que contenga a $\mathcal{A}$, de forma tal que $\mathcal{A}$ es grande dentro de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra no unital, una unitarización puede ser $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C} = \overline{\mathcal{A}}$. En este conjunto, la estructura multiplicativa está dada por $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$, y la norma esta determinada por $\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\|, b \in \mathcal{A}, \|b\| = 1\}$. Esta unitarización resulta la minimal para $\mathcal{A}$, en el siguiente sentido: si $\mathcal{B}$ es otra unitarización de $\mathcal{A}$ vía el morfismo φ, existe un morfismo $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C} \to \mathcal{B}$ que extiende a φ. La pregunta que surge naturalmente en este contexo es si existe una unitarización maximal. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como se verá en las sucesivas líneas.

Definición 1.22. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. El álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es aquella unitarización que cumple la siguiente propiedad universal: Para toda C*-álgebra $\mathcal{B}$ tal que existe un morfismo inyectivo $\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cuya imagen es un ideal, entonces existe un único morfismo $\mu : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que $\mu(\iota(a)) = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

La existencia del álgebra de multiplicadores es un resultado clásico en la teoría de C*-álgebras. El primero en estudiar este tipo de estructuras fue Busby en [8]. Hay dos caminos para demostrar la existencia del álgebra de multiplicadores de forma tradicional. La primera, es utilizando centralizadores dobles, es decir, pares de operadores (L, R), $L, R : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tales que $xL(y) = R(x)y$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. La otra ruta es tomar una representación fiel de $\mathcal{A}$ en $B(\mathcal{H})$, y tomar el conjunto de aquellos $x \in B(\mathcal{H})$ tales que $x\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}x \subset \mathcal{A}$. Cada elemente x se lo denomina multiplicador, y es de aquí de donde el álgebra de multiplicadores recibe su nombre. Para una demostración clásica de la existencia del álgebra de multiplicadores, ver por ejemplo [36, 3.12] o [46, 2.2]). Otra demostración utilizando ultraproductos según las líneas de esta tesis será presentada en el capítulo 3.

Dentro de los ejemplos de álgebras de multiplicadores podemos encontrar:

Ejemplo 1.23. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita, y considérese $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores compactos de $B(\mathcal{H})$. Como $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, la identidad no es un operador compacto, luego $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ no es unital. Debido a que la composición de un operador compacto con cualquier otro operador acotado resulta un operador compacto, tenemos que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un ideal en $B(\mathcal{H})$. A su vez, como existe una red $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de proyecciones de dimensión finita tales que $\|P_\lambda x - x\|, \|xP_\lambda - x\| \to 0$, se tiene que el ideal es esencial. Para probar que efectivamente $B(\mathcal{H})$ resulta el álgebra de multiplicadores de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, conviene en este caso utilizar la teoría clásica (es decir, centralizadores dobles o multiplicadores, ver por ejemplo [**36**, 3.3.3]).

Ejemplo 1.24. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, y sea $C_0(X)$ el álgebra de funciones continuas a valores en $\mathbb{C}$ que tienden a 0 en el infinito, es decir, tales que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$. En este caso, el álgebra de multiplicadores de $C_0(X)$ es $C_b(X)$, el álgebra de funciones continuas y acotadas definidas sobre X a valores en $\mathbb{C}$.

Veamos esto: Claramente, $C_0(X)$ es un ideal en $C_b(X)$, basta ver que se trata de un ideal esencial. Sea $I \subset C_b(X)$ un ideal tal que $IC_0(X) = \{0\}$, tomando $f \in I$ y dado $K \subset X$, existe $g_K \in C_0(X)$ tal que $g_K(x) = 1$ si $x \in K$ (estas funciones existen gracias al lema de Urysohn). Por hipótesis, $fg_K = 0$ ya que se encuentra en la intersección de los dos ideales. Luego $f = 0$ en K, como esto vale para todo $K \subset X$, $f = 0$, luego $I = \{0\}$. Sea $\mathcal{B}$ una C*-álgebra que continene a $C_0(X)$ como un ideal. Hay que mostrar que existe un único morfismo $\mu : \mathcal{B} \mapsto C_b(X)$ tal que $\mu(f) = f$. Sea $\{K_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una red creciente de compactos, esto es, una red en donde si $j \geq i$, entonces $K_i \subset K_j$, tal que $\cup_{i\in\mathcal{I}} K_i = X$, y para cada $i \in \mathcal{I}$, sean $f_{K_i} \in C_0(X)$ funciones positivas tales que $f_{K_i}(x) = 1$ si $x \in K_i$, y $\|f_{K_i}\| \leq 1$. Si $b \in \mathcal{B}$, luego $bf_{K_i} \in C_0(X)$. sea $\hat{b}(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} bf_{K_i}(x)$. De acuerdo a la elección de los $f_{K_i}(x)$, resulta que $\hat{b}(x)$ existe, y en consecuencia la función pertenece a $C_b(X)$. Esto último se debe a que cada $\|f_{K_i}\| = 1$, entonces $|\hat{b}(x)| \leq \|bf_{K_i}\| \leq \|b\|$, luego $\hat{b} \in C_b(X)$.

Se define entonces $\mu(b) = \hat{b}$, que resulta un morfismo de C*-álgebras. Sean $b, b' \in \mathcal{B}$, entonces

$$(b \hat{+} b')(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} (b + b')f_{K_i}(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} bf_{K_i} + \lim_{i\in\mathcal{I}} b'f_{K_i}(x) = \hat{b}(x) + \hat{b'}(x),$$

$$\hat{b^*}(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} b^* f_{K_i}(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} (bf_{K_i}(x))^* = \lim_{i\in\mathcal{I}} \overline{bf_{K_i}(x)} = \overline{\lim_{i\in\mathcal{I}} bf_{K_i}(x)} = \overline{\hat{b}(x)} = (\hat{b})^*(x).$$

Para ver la multiplicatividad, notemos que si $\sqrt{f_{K_i}}$ también cumplen las mismas condiciones que las $\lim_{i\in\mathcal{I}} (b\sqrt{f_{K_i}}(x)) = \hat{b}(x)$, luego

$$\begin{aligned} \hat{bb'}(x) &= \lim_{i\in\mathcal{I}} (bb' f_{K_i}(x)) = \lim_{i\in\mathcal{I}} (b\sqrt{f_{K_i}} b' \sqrt{f_{K_i}}(x)) \\ &= \lim_{i\in\mathcal{I}} (b\sqrt{f_{K_i}}(x)) \lim_{i\in\mathcal{I}} (b'\sqrt{f_{K_i}}(x)) = \hat{b}(x)\hat{b'}(x). \end{aligned}$$

Cabe destacar que en este punto se está utilizando la conmutatividad de $C_0(X)$, y se esta usando de la siguiente manera: como $C_0(X)$ es un ideal, entonces $b\sqrt{f_{K_i}} \in C_0(x)$, luego $b'(b\sqrt{f_{K_i}})\sqrt{f_{K_i}} \in C_0(x)$ y es aquí en donde se pueden permutar los factores.

Finalmente para cada $b \in \mathcal{B}$ se tiene $\mu(b) \in C_b(X)$ y la asignación es un morfismo de álgebras que preserva la involución. Veamos que es único. Supongamos que existe otro morfismo $\nu : \mathcal{B} \mapsto C_b(X)$ tal que $\nu(f) = f$ si $f \in C_0(X)$. En este caso si $b \in \mathcal{B}$

$$\nu(b)(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} \nu(b)f_{K_i}(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} \nu(b)\nu f_{K_i}(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} \nu(bf_{K_i})(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} bf_{K_i}(x) = \mu(b)(x),$$

de lo que sigue que el morfismo es único. Luego $C_b(X)$ es el álgebra de multiplicadores de $C_0(X)$.

En la demostración anterior, las f_{K_i} juegan un rol importante. Esto es porque forman lo que se llama una unidad aproximada, es decir, una red tal que para toda $g \in C_b(X)$, $\lim_{i\in\mathcal{I}} gf_{K_i} = g$.

Definición 1.25. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Una unidad aproximada en $\mathcal{A}$ es una red $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}$, $\lim_{i\in\mathcal{I}} xu_i = \lim_{i\in\mathcal{I}} u_i x = x$.

Teorema 1.26. *Toda C*-álgebra $\mathcal{A}$ posee una unidad aproximada.*

Antes de comenzar con la demostración, conviene repasar algunos conceptos. Primero, un operador a es autoadjunto si para todo $v, w \in \mathcal{H}$, $\langle av, w\rangle = \langle v, aw\rangle$. El operador a será positivo si $\langle av, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathcal{H}$. Por $\mathcal{A}_+$ se entiende a los elementos autoadjuntos y positivos de $\mathcal{A}$. En $\mathcal{A}_+$ existe un orden parcial, que está dado por $a < b$ si $b - a > 0$.

Demostración. Sea $(\Lambda, \leq)$ el conjunto $\Lambda = \{a \in \mathcal{A}_+; \|a\| < 1\}$, que dotado con el orden heredado por $\mathcal{A}_+$ resulta parcialmente ordenado.

Si $a, b \in \Lambda$, entonces los elementos $u = (1-a)^{-1}a$ y $v = (1-b)^{-1}b$ pertenecen a $\mathcal{A}_+$. Esto se debe a que la función $f(x) = \frac{x}{1-x}$ es una función positiva que no se anula sobre los espectros de a ni de b. Entonces $u, v \in \mathcal{A}_+$. Sea ahora $g(x) = \frac{x}{1+x}$ que nuevamente es positiva para todo $x \geq 0$ y decreciente. Si $c = g(u+v)$, entonces $\|c\| < 1$ y

$$c = g(u+v) \geq g(u) = \frac{u}{u+1} = \frac{a}{1-a}\frac{1}{1+\frac{a}{1-a}} = a.$$

Similarmente, $c \geq b$. Esto demuestra que Λ es un conjunto parcialmente ordenado.

Resta ver entonces que $\lim_{a\in\Lambda}\|x - ax\| \to 0$. Alcanza con probarlo para $a \in \mathcal{A}_+$.

$$\|x - ax\|^2 = \|(1-a)x\|^2 = \|x(1-a)^2x\| \leq \|x(1-a)x\|$$

(la última desigualdad se deduce del hecho que si $a \leq b$, entonces $xax^* \leq xbx^*$). $\square$

Observación 1.27. Como parte de la demostración anterior se desprende que las unidades aproximadas se pueden tomar positivas y uniformemente acotadas. Asimismo, cuando la C*-álgebra es separable, podemos tomar unidades aproximadas numerables.

En el trabajo de Avsec-Goldbring [5], los autores construyen $C_b(X)$, para X un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo contable. Como se vió en el ejemplo, $C_b(X)$ es el álgebra de multiplicadores para el caso de la C*-álgebra conmutativa $C_0(X)$. La idea de generalizar el trabajo de Avsec y Goldbring para el caso no conmutativo, y así intentar dar mas información sobre grupos exactos fue la principal motivación para el trabajo presentado en esta tesis. Una vez construída $C_b(X)$, mediante la transformada de Geldfand se obtiene la compactificación de Stone-Čech de X como el espectro de $C_b(X)$. Es por este hecho que los autores dicen que han construido la compactificación de Stone-Čech vía ultraproductos.

Definición 1.28. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra conmutativa. Se define el espectro de $\mathcal{A}$, notado $Spec(\mathcal{A})$, al conjunto de homomorfismos multiplicativos no nulos $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

El conjunto $Spec(\mathcal{A})$ resulta ser un subconjunto de la bola unitaria de dual de $\mathcal{A}$, esto quiere decir que cada morfismo es continuo y de norma 1. Si se toma $Spec(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ resulta entonces que $Spec(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, dotada con la topología débil* es espacio topológico localmente compacto y Hausdorff.

La transformada de Gelfand de $\mathcal{A}$ es el homomorfismo $x \mapsto \hat{x}$ que va de $\mathcal{A}$ a $C_0(Spec(\mathcal{A}))$ definido como $\hat{x}(t) = t(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$ y para todo $t \in C_0(Spec(\mathcal{A}))$. Esta asignación resulta un *-isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $C_0(Spec(\mathcal{A}))$.

La transformada de Gelfand permite caracterizar a todas las C*-álgebras abelianas como $C_0(X)$ para algún X localmente compacto y Hausdorff. En el caso de que X sea un espacio topológico compacto y Hausdorff, se tiene que $C_0(X) = C_b(X) = C(X)$, que resulta una C*-álgebra unitaria, puesto que la función constantemente 1 pertenece a $\mathcal{A}$.

Análogamente, cuando $\mathcal{A}$ es unitaria, resulta que $Spec(\mathcal{A})$ es un conjunto compacto. Esto se debe a que $Spec(\mathcal{A})$ es un conjunto cerrado de la bola unitaria del dual de $\mathcal{A}$, que es w*-compacta. Como consecuencia, si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra unital, entonces es isometricamente isomorfa a $C(X)$, con X compacto.

La asignación que vincula $\mathcal{A}$ y $Spec(\mathcal{A})$ resulta un functor contravariante entre C*-álgebras y morfismos de C*-álgebras, y espacios topológicos localmente compactos y Hausdorff, y funciones continuas *propias*, es decir, funciones continuas tales que la preimagen de un compacto es un compacto.

Lema 1.29. *Sea Y un espacio topológico compacto y sea $C(Y)$ la C*-álgebra de funciones continuas definidas sobre Y. Entonces $J \subset C(Y)$ es un ideal si y solo si existe un $X \subset Y$ abierto tal que J es isomorformo a $C_0(X)$*

Demostración. Primero, se verá que $C_0(X)$ resulta un ideal. Si X un abierto de Y, entonces $Z = Y \setminus X$ resulta compacto. Se define $\pi : C(Y) \mapsto C(Z)$, $\pi(f)$ la restricción de f a Z. Esta función es un morfismo de C*-álgebras, luego $Ker(\pi)$ es un ideal. Ahora, $Ker(\pi) = \{f \in C(Y) : f(z) = 0 \quad \forall z \in Z\}$, de lo que sigue por continuidad que $\lim_{x \in X \to \infty} f(x) = 0$. Por otro lado, si $f \in C_0(X)$, entonces se puede extender f a todo Y por 0, luego, f pertenece a $Ker(\pi)$. Esto demuestra que $C_0(X)$ resulta un ideal de $C(Y)$.

Sea ahora J un ideal en $C(Y)$. Se define $\pi : C(Y) \mapsto C(Y)/J$ la proyección al cociente. Entonces $C(Y)/J$ es una C*-álgebra unital, luego, $Spec(C(Y)/J)$ es un conjunto compacto que se denotará Z.

Sea $\pi^* : Z \mapsto Y$, si $x, y \in Z$ son elementos distintos tales que $\pi^*(x) = \pi^*(y) \in Y$, entonces existe $f \in C(Z)$ que separa a x e y, esto es $f(x) \neq f(y)$. Ahora. todo elemento g de la preimagen de f por π (preimagen que es no vacía porque π es sobreyectiva) cumple que $g(\pi^*(x)) = (\pi(g))(x) = f(x) \neq f(y) = (\pi(g))(y) = g(\pi^*(y))$, de lo que sigue que todo elemento de la preimagen de f separa $\pi^*(x)$ de $\pi^*(y)$. Luego π^* es inyectiva, de lo que sigue que la imagen de Z por π^* es un conjunto compacto de Y, que se seguirá denotando Z.

Sea $X = Y \setminus Z$, que resulta abierto de Y. Si $f \in J$, entonces $\pi(f) = 0$, luego $f(z) = 0$ para todo $z \in Z$, de lo que se deduce que $\lim_{x \in X \to \infty} f(x) = 0$, o lo que es lo mismo, que $f \in C_0(X)$. De forma similar, si $f \in C_0(X)$, entonces nuevamente extendiendo por 0 a f en todo Y, tenemos que $f(z) = 0$ y en consecuencia $f \in J$. Luego, $Spec(J) = X$ □

Observación 1.30. Notar que la demostración previa permite dar la caracterización de $Spec(J)$ como $Y \setminus Spec(C(Y)/J)$.

Lema 1.31. *Sea Y un espacio topológico compacto y Hausdorff, y sea $X \subset Y$ un abierto. Entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de $C(Y)$ si y solo si Y es una compactificación de X, es decir, es un conjunto compacto tal que X es un abierto denso en Y.*

Demostración. Primero, se demostrará que si X es abierto denso, entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de Y. Para ello, sea K un ideal de $C(Y)$ no nulo, y sea $C_0(X) \subset C(Y)$, hay que ver que $C_0(X) \cap K \neq \{0\}$. Por el lema previo, existe un $V \subset Y$ abierto tal que $K = C_0(V)$. Como X es denso, $X \cap V$ es un abierto no nulo de Y, luego existe $f \in C_0(X \cap V)$ no nula. Extendiendo por 0 a f en todo Y, entonces $f \in C_0(X) \cap K$, luego $C_0(X)$ resulta un ideal esencial de $C(Y)$.

Sea ahora J un ideal esencial de $C(Y)$, por el lema anterior, $J = C_0(X)$ para X abierto. Hay que ver que X es denso. Para eso, se demostrará que para todo V un abierto no nulo de Y, $X \cap V \neq \emptyset$. Sea V abierto no nulo y sea $C_0(V)$, que resulta un ideal no nulo de $C(Y)$. Luego $J \cap C_0(V) = J'$ es un ideal no nulo por la esencialidad de J, de lo que sigue que $J' = C_0(W)$, para $W \subset Y$ abierto no nulo. Resta ver que $W \subset X \cap V$. Si no, existe $y \in W$ tal que $y \notin X \cap V$, entonces o bien $y \notin V$ o bien, $y \notin X$. Si $y \notin V$, sea $f \in C_0(W)$ tal que $f(y) \neq 0$, y además, como $J' \subset C_0(V)$, entonces $f \in C_0(V)$ lo que contradice que $f(y) \neq 1$. Análogamente, si $y \notin X$, se llega a la misma contradicción. Luego, $y \in X \cap V$. $\square$

Corolario 1.32. *Si βX es la compactificación de Stone-Čech de X, entonces*

$$Spec(C_b(X)) = \beta X.$$

Demostración. Por el lema anterior, y por el hecho de que $C_b(X)$ es el álgebra de multiplicadores de $C_0(X)$, se tiene que $Spec(C_b(X))$ resulta una compactificación de X. Para demostrar el corolario, resta ver que $Spec(C_b(X))$ cumple la propiedad universal de la compactificación de Stone-Čech, esto es, que si K es un conjunto compacto y $f : X \mapsto K$ es continua, entonces existe una unica $\beta f : Spec(C_b(X)) \mapsto K$ que extiende a f.

Como K es el espectro de $C(K)$, se puede definir $\beta f : Spec(C_b(X)) \mapsto Spec(C(K))$ de la siguiente manera: si $\gamma \in Spec(C_b(X))$ y $g \in C(K)$, entonces

$$\beta f(\gamma)(g) = \gamma(g \circ f).$$

Si $\gamma \in X$, entonces $\gamma = ev_x$ y se sigue que $\gamma(g \circ f) = g(f(x))$, por lo que βf extiende a f. $\square$

Para finalizar esta sección, se darán a continuación algunas nociones básicas de ultraproductos de C*-álgebras.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Sea $\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ el conjunto $\{(a_i)_{i\in\mathcal{I}} : \sup_{i\in\mathcal{I}} \|a_i\| < \infty\}$. Se tiene que $\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ es una C*-álgebra, vía la norma dada por $\|(a_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty = \sup\{\|a_i\|; i \in \mathcal{I}\}$.

Sea $\mathcal{N}_{\mathcal{U}} \subset \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ el subespacio generado por $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ tal que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|a_i\| = 0$.

Lema 1.33. *El conjunto $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ es un ideal de $\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$.*

Demostración. Sean $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}, (b_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\lim_{\mathcal{U}} \|a_i + b_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\| + \lim_{\mathcal{U}} \|b_i\| = 0,$$
$$\lim_{\mathcal{U}} \|\lambda a_i\| = \lim_{\mathcal{U}} |\lambda| \|a_i\| = |\lambda| \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\| = 0,$$

notar que aquí se estan utilizando las propiedades de $\mathcal{U}$-límites exhibidas en 1.15.

Para ver que es un ideal bilátero, sea $(b_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$, entonces existe un $M > 0$ tal que $\sup\{\|b_i\|; i \in \mathcal{I}\} \leq M$. Entonces

$$\lim_{\mathcal{U}} \|a_i b_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\| \|b_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\| M = M \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\| = 0,$$

De forma análoga se prueba que $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ es un ideal a izquierda.

Resta ver que es cerrado en norma. Sea $(a_i^n)_{i\in\mathcal{I}}^{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Hay que ver que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|a_i\| = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$, y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Theta(n) = \{i \in \mathcal{I} : \|a_i^n - a_i\| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$. Para ese n_0 sea $\Omega(n_0) = \{i \in \mathcal{I} : \|a_i^{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$. El conjunto $\Omega(n_0) \cap \Theta(n_0) \in \mathcal{U}$. y si i pertenece a esta intersección, entonces

$$\|a_i\| \leq \|a_i - a_i^{n_0}\| + \|a_i^{n_0}\| \leq \sup\{\|a_i - a_i^{n_0}\|\} + \|a_i^{n_0}\| \leq \varepsilon,$$

mostrando que el conjunto $\Omega(n_0) \cap \Theta(n_0) \subset \{i \in \mathcal{I} : \|a_i\| < \varepsilon\}$, luego este último pertenece a $\mathcal{U}$ y en consecuencia, $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|a_i\| = 0$. □

Corolario 1.34. *El cociente $\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}/\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ es una C*-álgebra.*

Definición 1.35. La C*-álgebra $\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}/\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ se denomina el ultraproducto de $\mathcal{A}$ respecto de $\mathcal{U}$ y se la nota $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$.

Observación 1.36. Sea $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, entonces la norma y la involución quedan determinadas de la siguiente manera

1. $\|(a_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_{\mathcal{U}} := \lim\limits_{\mathcal{U}} \|a_i\|$,
2. $(a_i)^*_{i\in\mathcal{I}} := (a_i^*)_{i\in\mathcal{I}}$.

3. Grupos exactos

Durante esta sección, por G un grupo se entenderá un grupo topológico localmente compacto, Hausdorff y compactamente generado, mientras que Γ será un grupo discreto. Notemos que, en estos casos, siempre vale que G posee una medida invariante a izquierda μ definida sobre los borelianos de G, y en el caso de Γ, la medida es la medida de contar.

Para entender la definición de grupos exactos, primero se dará una breve revisión del concepto de grupos amenables. Vale aclarar que para estudiar el concepto de amenabilidad con mayor profundidad de la requerida para la lectura de esta tesis se puede consultar, por ejemplo, los libros [**6**, **26**, **49**].

Definición 1.37. Sea G un grupo localmente compacto, Hausdorff y compactamente generado. Una sucesión de conjuntos medibles $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de G de medida finita y positiva se dice una sucesión Følner si para todo $g \in G$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(gF_n \bigtriangleup F_n)}{\mu(F_n)} = 0$$

donde $A \bigtriangleup B$ representa la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B.

Definición 1.38. Un grupo topológico G localmente compacto, Hausdorff y compactamente generado se dice *amenable* si posee una sucesión de Følner.

La condición de amenabilidad admite diversas definiciones equivalentes, todas ellas dependiendo del problema que se quiera estudiar. Entre otras, existen equivalencias vinculadas con el crecimiento de grupos. También hay una equivalencia que se vincula con la no existencia de una descomposición paradójica. Otra equivalencia es la existencia de una media G-invariante. Esta definición es la que le da el nombre, ya que amenable se podría traducir como *promediable*. Muchas de estas equivalencias, cubren casos más generales que el caso de grupos localmente compactos, Hausdorff y compactamente generados. El contexto clásico de estudio de grupos amenables es el de grupos topológicos localmente compactos y Haussdorff. En este contexto, en donde puede no existir una sucesión de Følner, lo que se pide es que el grupo tenga la *condición de Følner* (ver por ejemplo [**6**, G.5.1]).

En el caso de grupos infinitos numerables, la topología subyacente es la topología discreta. A su vez, la medida invariante resulta la medida de contar. En este caso, se tiene el siguiente resultado (ver por ejemplo [**26**, 2.7]).

PROPOSICIÓN 1.39. *Un grupo infinito numerable* Γ *es amenable si y solo si todos sus subgrupos finitamente generados son amenables.*

Es debido a esta proposición que se suele hacer foco en el estudio de grupos amenables finitamente generados, que es el que abarca la Definición 1.38.

Entre los ejemplos más simples de grupos amenables, podemos destacar los grupos finitos, tomando $F_n = G \ \forall n \in \mathbb{N}$. Un ejemplo un poco más elaborado es el de $\mathbb{Z}$. Tomando $F_n = [-n, \ldots, n]$ entonces se tiene que dado $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(kF_n \vartriangle F_n)}{\mu(F_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mu([-n+k, n+k] \vartriangle [-n, n])}{\mu([-n, n])} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\mu([-n, -n+k-1]) + \mu([n+1, n+k])}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2k}{n} = 0
\end{aligned}$$

lo que muestra que F_n es una sucesión de Følner.

No todos los grupos resultan amenables. Por ejemplo, aquellos grupos no compactos que tengan la propiedad (T) de Kazhdan, no lo son (ver por ejemplo [**6**, Theorem 1.1.6]). Dentro de esta familia de grupos se encuentran (casi todos) los grupos de Lie semisimples y sus retículos, algunos grupos de automorfismos de grafos y también, la mayoría de los grupos aleatorios en el modelo de presentación de Gromov. Históricamente, el primer ejemplo de grupo que no es amenable fue el grupo libre en 2 generadores, demostrado por von Neumann en el año 1929 en el artículo [**32**]. Este trabajo motivó el estudio de distintos problemas vinculados a grupos amenables, entre ellos, la conjetura de von Neumann que afirma que todo grupo que no amenable posee al grupo libre en dos generadores como subgrupo, conjetura que fue finalmente demostrada falsa por Olshanskii en 1980. En las siguientes líneas se dará una demostración de que el grupo libre en dos generadores no es amenable. Para ello, primero, se darán algunas equivalencias de amenabilidad

DEFINICIÓN 1.40. Sea G un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. Una media invariante a izquierda m es una medida de probabilidad **finitamente aditiva** definida sobre los borelianos de G, tal que para todo boreliano $X \subset G$, $m(gX) = m(X)$.

Se puede caracterizar una media invariante como aquella función m definida sobre los borelianos de G que cumple las siguientes condiciones:

1. $m(X) \geq 0$ para todo X boreliano de G.
2. $m(G) = 1$
3. $m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2)$ para todos $X_1, X_2 \subset G$ borelianos disjuntos.
4. $m(X) \leq m(Y)$ si $X \subset Y$ borelianos de G
5. $m(gX) = m(X)$ para todo $X \subset G$ y para todo $g \in G$.

PROPOSICIÓN 1.41. *Sea G un grupo amenable. Entonces G admite una media invariante.*

Como se mencionó anteriormente, la existencia de una media invariante resulta una equivalencia de amenabilidad. Para no alejarse demasiado del objetivo de esta tesis, se dará la demostración en una dirección.

DEMOSTRACIÓN. Sea μ una medida G invariante a izquierda definida sobre G, y sea F_n una sucesión de Følner de G. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathbb{N}$. Si $X \subset G$ es un boreliano, se define

$$m(X) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap X)}{\mu(F_n)}.$$

Por lo analizado en la Proposición 1.15, m no posee problemas de definición y además $m(X) \geq 0$, y $m(G) = 1$. Al mismo tiempo, si $X \subset Y$, entonces para todo n, $\mu(F_n \cap X) \leq \mu(F_n \cap Y)$, y como el $\mathcal{U}$-límite preserva el orden $m(X) \leq m(Y)$. De forma similar se deduce la aditividad, puesto que si $X \cap Y = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} m(x) + m(y) &= \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap X)}{\mu(F_n)} + \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap Y)}{\mu(F_n)} \\ &= \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap X) + \mu(F_n \cap Y)}{\mu(F_n)} \\ &= \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap (X \cup Y))}{\mu(F_n)} = m(X \cup Y). \end{aligned}$$

Resta ver la invarianza. Para esto, sea $g \in G$ y sea $X \subset G$, entonces

$$\begin{aligned} m(X) - m(gX) &= \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap X)}{\mu(F_n)} - \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap gX)}{\mu(F_n)} \\ &= \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \cap X)}{\mu(F_n)} - \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(g^{-1}F_n \cap X)}{\mu(F_n)} \\ &\leq \lim_{\mathcal{U}} \frac{(\mu(F_n \vartriangle g^{-1}F_n) \cap X)}{\mu(F_n)} \\ &\leq \lim_{\mathcal{U}} \frac{\mu(F_n \vartriangle g^{-1}F_n)}{\mu(F_n)} = 0 \end{aligned}$$

donde en la segunda línea, nuevamente se hace uso del hecho de que el $\mathcal{U}$-límite preserva el orden. □

Corolario 1.42. *El grupo libre en dos generadores $\mathbb{F}_2$ no es amenable.*

Demostración. Sean a, b los generadores libres de $\mathbb{F}_2$. Se definen los siguientes conjuntos: $A = \{g \in \mathbb{F}_2 : g \text{ que empiezan con } a\}$. $B = \{g \in \mathbb{F}_2 : g \text{ que empiezan con } b\}$. $C = \{g \in \mathbb{F}_2 : g \text{ que empiezan con } a^{-1}\}$. $D = \{g \in \mathbb{F}_2 : g \text{ que empiezan con } b^{-1}\}$.

Es fácil ver que $\mathbb{F}_2 = A \cup B \cup C \cup D \cup \{e\}$ y esta unión es disjunta. Entonces, de ser $\mathbb{F}_2$ amenable, debe tener una media $\mathbb{F}_2$ invariante m. En este caso,

$$1 = m(A) + m(B) + m(C) + m(D) \tag{1.1}$$

(es fácil ver que si un grupo G es infinito, $m(F) = 0$ para todo conjunto finito)

Pero al mismo tiempo, se tiene que $\mathbb{F}_2 = A \cup a^{-1}A = B \cup b^{-1}B = C \cup aC = D \cup bD$ (esta unión no es disjunta, a diferencia de la anterior), entonces

- $1 \geq m(A) + m(a^{-1}A) = 2m(A)$
- $1 \geq m(B) + m(b^{-1}B) = 2m(B)$
- $1 \geq m(C) + m(aC) = 2m(C)$
- $1 \geq m(D) + m(bD) = 2m(D)$

lo cual contradice la ecuación (1.1). Luego, $\mathbb{F}_2$ no admite una media invariante, entonces no es amenable. □

A continuación, se extenderá la definición de amenable para acciones de grupos. En lo que sigue, Γ será grupo discreto y $\mathcal{A}$ será una C*-álgebra unital, dotada de una acción de Γ. En algunas referencias bibliográficas, este tipo de C*-álgebras se denominan Γ-C*-álgebras, denominación que se tomará aquí también.

Sea $\mathcal{A}$ una Γ-C*-álgebra, se considera $C_c(\Gamma, \mathcal{A})$ el conjunto de funciones de soporte finito de Γ en $\mathcal{A}$. Sean $S, T \in C_c(\Gamma, \mathcal{A})$, se definen

$$\begin{aligned}
S^*(\gamma) &= \gamma.S(\gamma^{-1}) \\
\langle S, T\rangle &= \sum_{\gamma\in\Gamma} S^*(\gamma)T(\gamma), \\
S * T(\gamma) &= \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} S(\gamma_1)(\gamma_1.T(\gamma_2)), \\
\|S\|_2 &= \langle S, S\rangle.
\end{aligned}$$

Definición 1.43. Sea Γ un grupo discreto y sea $\mathcal{A}$ una Γ-C*-álgebra. Decimos que la acción de Γ en $\mathcal{A}$ es amenable si existe una sucesión $(S_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_c(\Gamma, \mathcal{A})$ tal que

1. S_i es positiva y central, es decir, $S_i(\gamma) \geq 0$ y $S_i(\gamma)$ pertence al centro de $\mathcal{A}$ para todo $\gamma \in \Gamma$.
2. $\sum_{\gamma\in\Gamma} S_i^2(\gamma) = 1_{\mathcal{A}}$.
3. Para todo $\gamma_1 \in \Gamma$, $\|S_i - \gamma_1 * S_i\|$ tiende a 0 cuando i tiende a infinito, donde $\gamma_1 \in C_c(\Gamma, \mathcal{A})$ es la función que vale la identidad cuando se la evalúa en γ_1, mientras que vale 0 en el resto de los elementos de Γ.

Definición 1.44. Un grupo Γ es exacto si existe un conjunto compacto X tal que la acción de Γ en $\mathcal{A} = C(X)$ es amenable.

Como es de esperar, un grupo discreto amenable resulta exacto. Sea $X = \{*\}$, el sigletón, y sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Følner. Definiendo entonces $S_n : \Gamma \mapsto C(X)$

$$S_n(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{|F_n|}}\chi_{F_n}(\gamma).$$

Claramente las S_n son positivas. Además

$$\langle S_n, S_n\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} S_n(\gamma)^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{|F_n|}\chi_{F_n}(\gamma) = 1.$$

Por último,

$$\begin{aligned}
\|S_n - \gamma_1 * S_n\|^2 &= \sum_{\gamma\in\Gamma} (S_n(\gamma) - S_n(\gamma_1^{-1}\gamma))^2 \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{|F_n|}(\chi_{F_n}(\gamma) - \chi_{F_n}(\gamma_1^{-1}\gamma))^2 \\
&= \frac{1}{|F_n|}\sum_{\gamma\in\Gamma} (\chi_{F_n}(\gamma) - \chi_{F_n}(\gamma_1^{-1}\gamma))^2 \\
&= \frac{|F_n \vartriangle \gamma_1 F_n|}{|F_n|} \to 0.
\end{aligned}$$

Como consecuencia, el concepto de grupo exacto se puede pensar como una generalización de grupo amenable.

En lo que sigue, $Prob(\Gamma)$ se referirá al conjunto de elementos positivos y de norma 1 en $\ell^1(\Gamma)$. A $Prob(\Gamma)$ se lo dota de la topología débil-*. En consecuencia, si X es un espacio topológico, una función $f : X \to Prob(\Gamma)$ será continua si para toda red $x_i \to x$ se tiene que $F(x_i)(\gamma) \to F(x)(\gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Definición 1.45. Sea X un espacio topológico compacto. Una acción de Γ por homeomorfismos en X se dice topológicamente amenable si existe una red de funciones continuas $m_i : X \to Prob(\Gamma)$ tal que, para cada $\gamma \in \Gamma$

$$\lim_i \left(\sup_{x \in X} \|\gamma m_i^x - m_i^{\gamma x}\|_1 \right) = 0$$

donde $\gamma_1 m_i^x(\gamma) = m_i^x(\gamma_1^{-1}\gamma)$.

Teorema 1.46. *Sea X un espacio topológico compacto. Una acción de Γ en X es topológicamente amenable si la acción inducida por Γ en $C(X)$ es amenable.*

Demostración. Sea $m_i : X \to Prob(\Gamma)$ una red de funciones continuas que cumplen la definición previa.

Sea $S_i : \Gamma \to C(X)$, $S_i(\gamma)(x) = m_i^x(\gamma)$. Para cada $x \in X$ se tiene

$$\sum_\gamma S_i(\gamma)(x) = \sum_\gamma m_i^x(\gamma) = 1$$

por la condición de ser medidas de probabilidad.

Se define $T_i'(\gamma) = \sqrt{S_i(\gamma)}$. Del hecho de que las funciones son positivas se desprende que no hay problemas de definición en las T_i'. Para cada i,

$$\langle T_i', T_i' \rangle = \sum_\gamma (T_i'(\gamma))^2 = 1 = 1_{C(x)}.$$

Para cada $\gamma_1 \in \Gamma$ y para cada $x \in X$

$$(\gamma_1 * T_i')(\gamma)(x) = \gamma_1(T_i'(\gamma_1^{-1}\gamma))(x) = T'(\gamma_1^{-1}\gamma)(\gamma_1^{-1}x) = \sqrt{\gamma m_i^{\gamma_1^{-1}x}(\gamma)}.$$

Mediante la desigualdad $(a-b)^2 \leq |a^2-b^2|$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|(\gamma_1 * T_i') - T_i'\| &= \sup_{x\in X}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|\sqrt{\gamma_1 m_i^{\gamma_1^{-1}x}(\gamma)} - \sqrt{m_i^x(\gamma)}|^2\right)\\
&\leq \sup_{x\in X}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma_1 m_i^{\gamma_1^{-1}x}(\gamma) - m_i^x(\gamma)|\right)\\
&= \sup_{y\in X}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma_1 m_i^{y}(\gamma) - m_i^{\gamma_1 y}(\gamma)|\right)\\
&= \sup_{y\in X}\|\gamma_1 m_i^y - m_i^{\gamma_1 y}\|_1 \to 0.
\end{aligned}$$

El único inconveniente que tenemos con estas T_i' es que no son de soporte finito. Lo que se debe hacer a continuación es truncarlas por funciones de soporte finito de forma tal que se preserven las condiciones de convergencia previa. En este punto, es de crucial importante que el grupo Γ es contable.

Con el objetivo de truncar las funciones T_i, se tiene que para cada $T:\Gamma\to C(X)$ positiva que cumple que $\langle T,T\rangle = 1_{C(X)}$ existe una sucesión $T_n:\Gamma\to C(X)$ de soporte finito, con $\langle T_n,T_n\rangle = 1_{C(X)}$ tal que

$$\|\gamma_1 * T_n - T_n\| \to \|\gamma * T - T\|.$$

Como Γ es contable, existe una sucesión creciente de conjuntos finitos F_n tales que $\Gamma = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Como

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} T^2(\gamma) = 1_{C(X)},$$

y la convergencia es uniforme, entonces existe un $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\gamma\in F_n} T^2(\gamma) > 0,$$

(como elementos de $C(X)$, es decir, que estan uniformemente alejadas de 0). Se define,

$$T_n(\gamma) = \frac{T(g)}{\sqrt{\sum_{\gamma\in F_n} T^2(\gamma)}},$$

para los $\gamma\in F_n$, y $T_n(\gamma)=0$ para el resto de los elementos de Γ. Eligiendo la T_n adecuada, podemos truncar las T_i por funciones de soporte finito.

Para probar la otra implicación, se define $m_i^x(\gamma) = T_i^2(\gamma)(x)$. La condición 2 de la Definición 1.43 muestra que m_i^x es una medida de probabilidad definida sobre Γ. Resta ver que si $\gamma_1 \in \Gamma$

$$\lim_i \left(\sup_{x \in X} \| \gamma_1 m_i^x - m_i^{\gamma_1 x} \|_1 \right) = 0.$$

Para ello, notar que

$$\begin{aligned} \gamma_1 m_i^x(\gamma) &= \gamma_1 T_i^2(\gamma)(x), \\ m_i^{\gamma_1 x}(\gamma) &= T_i^2(\gamma)(\gamma_1 x). \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $y = \gamma_1 x$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \| \gamma_1 m_i^x - m_i^{\gamma_1 x} \|_1 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} | \gamma_1 T_i^2(\gamma)(x) - T_i^2(\gamma)(\gamma_1 x) | \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} | \gamma_1 T_i^2(\gamma)(\gamma_1^{-1} y) - T_i^2(\gamma)(y) | \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big| \gamma_1 T_i(\gamma)(\gamma_1^{-1} y) - T_i(\gamma)(y) \Big| (\gamma_1 T_i(\gamma)(\gamma_1^{-1} y) + T_i(\gamma)(y)) \\ &\leq \| \gamma_1 * T_i - T_i \| \| \gamma_1 * T_i + T_i \| \\ &\leq 2 \| \gamma_1 * T_i - T_i \|, \end{aligned}$$

Donde la primer desigualdad es consecuencia de Cauchy-Schwartz. Por hipótesis, $\|\gamma_1 * T_i - T_i\|$ tiende a 0 cuando i tiende a infinito. □

Lema 1.47. *Sea $m : X \to Prob(\Gamma)$ una función continua. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\overline{m} : X \to Prob(\Gamma)$ y un conjunto finito $F \subset \Gamma$ tal que el soporte de $\overline{m}^x \subset F$ y $\|m^x - \overline{m}^x\|_1 < \varepsilon$.*

Demostración. Para cada $F \subset \Gamma$, sea $U(F) = \{x \in X : \|m^x \chi_F\|_1 < 1 - \frac{\varepsilon}{2}\} \subset X$. El conjunto $U(F)$ es abierto para todo F finito, luego $(U(F))_{F \subset \Gamma}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Luego, existen finitos $F_1, \ldots, F_j$ tales que $X = U(F_1) \cup \cdots \cup U(F_j)$. Como el conjunto $F = F_1 \cup \cdots \cup F_j$ también es finito, se tiene que $\overline{m}^x = m^x \chi_F - \|m^x \chi_{\Gamma \setminus F}\|_1 \delta_e$.

Luego

$$\|\overline{m}^x - m^x\|_1 = \| \|m^x \chi_{\Gamma \setminus F}\|_1 \delta_e - m^x \chi_{\Gamma \setminus F} \|_1 \leq 2 \|m^x \chi_{\Gamma \setminus F}\|_1 < \varepsilon$$

lo que demuestra el lema. □

Lema 1.48. *Sean X, Y dos Γ-espacios compactos tales que la acción de Γ en X es amenable, y sea $f : Y \to X$ una función continua y Γ-invariante. Entonces la acción de Γ en Y es amenable.*

Demostración. Sea m_i una red de funciones continuas $m_i : X \to Prob(\Gamma)$ tal que, para cada $\gamma \in \Gamma$

$$\lim_i \left(\sup_{x \in X} \| \gamma m_i^x - m_i^{\gamma x} \|_1 \right) = 0.$$

Sea $\overline{m_i} : Y \to Prob(\Gamma)$, $\overline{m_i^y} = m_i^{f(y)}$, entonces

$$\gamma\overline{m_i^y} - \overline{m_i^{\gamma y}} = \gamma m_i^{f(y)} - m_i^{f(\gamma y)} = \gamma m_i^{f(y)} - m_i^{\gamma f(y)}$$

de lo que se sigue que

$$\lim_i \left(\sup_{y\in Y} \|\gamma\overline{m_i^y} - \overline{m_i^{\gamma y}}\|_1\right) \leq \lim_i \left(\sup_{x\in X} \|\gamma m_i^x - m_i^{\gamma x}\|_1\right) = 0$$

demostrando el lema. □

La siguiente es una caracterización puramente dinámica de la condición de que un grupo sea exacto.

Teorema 1.49. *Sea Γ un grupo contable. Entonces son equivalentes:*

1. *Γ es exacto.*
2. *La acción de Γ en la compactificación de Stone-Čech $\beta\Gamma$ es amenable.*

La demostración de este teorema, que utiliza herramientas que escapan a los alcances de esta tesis, se puede hallar en [7, Theorem 5.1.7]. De todas formas, se dará un breve comentario de como se llega a este resultado. En principio, Higson y Roe en [25] mostraron que la acción de Γ en $\beta\Gamma$ es amenable si y solo si el Álgebra Uniforme de Roe es nuclear (recordar que una C*-álgebra $\mathcal{A}$ es nuclear si y solo si para toda $\mathcal{B}$ el producto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tiene una única norma que la vuelve una C*-álgebra). Luego, cuando el Álgebra Uniforme de Roe es nuclear se tiene que Γ es exacto, mostrando que Teorema 1.49 2 implica Teorema 1.49 1. De hecho, en el artículo previamente mencionado, los autores demuestran que la acción de Γ en $\beta\Gamma$ es amenable si y solo si Γ posee la Propiedad A de Yu, una propiedad de teoría geométrica de grupos que fue enunciada en [47]. Mediante este trabajo se vinculan la propiedad A de Yu con el concepto de grupos exactos, es decir, se vincula noción del Álgebra de Operadores con una de Teoría Geométrica de Grupos.

Por otro lado, en [34], Ozawa demuestra la vuelta de esta propiedad, es decir, que si un Γ es exacto entonces el Álgebra uniforme de Roe resulta nuclear.

La pregunta natural que surge en este momento es si existe un grupo exacto que no sea amenable. La respuesta se sigue de la siguiente proposición.

Proposición 1.50. *El grupo libre $\mathbb{F}_2$ es exacto.*

Esta proposición se demostrará en forma más general en el Capítulo 4 Corolario 4.3 de esta tesis.

Lo realmente difícil es encontrar grupos que no sean exactos. En el artículo [23], Gromov señala la forma de construir lo que resulta el primer ejemplo de un grupo que no admite embebimiento uniforme en un espacio de Hilbert (el conocido como Gromov Monster Group). Esta resulta una de las equivalencias de grupos exactos, es decir, un grupo es exacto si y solo si, admite un embebimiento uniforme en un espacio de

Hilbert. En la misma linea, caben mencionar los siguientes artículos. En [33], Osajda construye el primer ejemplo de un grupo que no es exacto pero que es residualmente finito. En [4], Arzhantseva y Osajda construyen un grupo que no es exacto, pero que sin embargo, posee la propiedad de Haagerup. La propiedad de Haagerup proviene de la teoría de representaciones, y se puede pensar como otra generalización de amenabilidad (dado que no será un tema a estudiar en esta tesis, para más información acerca de grupos con la propiedad de Haagerup se puede consultar la monografía [10]). El trabajo [4] muestra que estas dos propiedades no son equivalentes, concluyendo que ambas son generalizaciones de amenabilidad, pero en distintas direcciones. Los artículos [23, 33, 4] construyen estos grupos utilizando herramientas combinatorias.

Capítulo 2

El artículo de Avsec y Goldbring

En las siguientes líneas se presentará el artículo de Avsec y Goldbring (apartados 3 y 4 de [5]). En el apartado 3 de dicho artículo, los autores primero parten una C*-álgebra $\mathcal{A}$ abeliana y separable, para construir a partir de un ultraproducto $\mathcal{U}$ definido sobre $\mathbb{N}$, el álgebra de funciones acotadas definidas sobre el espectro de $\mathcal{A}$. Para ello, se basan en el concepto de funciones $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinuas sobre conjuntos acotados, que les permite obtener una C*-subálgebra de $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$. Luego, se verifica que un cociente de esta subálgebra es isomorfa a $C_b(Spec(\mathcal{A}))$. Por último, como el espectro de $C_b(Spec(\mathcal{A}))$ es isomorfo a $C(\beta Spec(\mathcal{A}))$, donde $\beta Spec(\mathcal{A})$ es la compactificación de Stone-Čech de $Spec(\mathcal{A})$, los autores construyen la compactificación de Stone-Čech a partir de ultraproductos de $Spec(\mathcal{A})$. El artículo tiene una segunda parte, que es el apartado 4, en donde aplican esta construcción para mostrar que un grupo que actúa de forma propia y transitiva sobre un árbol es exacto. Aquí, el hecho de que la acción sea propia implica que los estabilizadores de cada vértice del árbol son finitos, en particular son compactos. El objetivo del presente capítulo es presentar el artículo [5], desarrollando en detalle las demostraciones en él exhibidas, con el objetivo de poder realizar una comparación con las técnicas desarrolladas en los siguientes capítulos de la presente tesis.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal definido sobre $\mathbb{N}$. Sea X un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo contable. Sea $\mathcal{A} = C_0(X)$, las funciones continuas a valores en $\mathbb{C}$ sobre X que se anulan en el infinito. El objetivo será construir $C_b(X)$ a partir de ultraproductos de $C_0(X)$. Recordar que $C_b(X)$ es la C*-álgebra de funciones continuas y acotadas definidas sobre X.

En este punto, caben destacar algunos asuntos. Primero, como bien señalan los autores, las hipótesis sobre el espacio topológico X implican la existencia de una métrica d propia que define una topología equivalente a la topología original de X (ver [45]). Este es un hecho topológicamente no trivial, que resulta clave en el trabajo que presentado a continuación. A partir de esta métrica, y fijando un punto base $o \in X$, se define para cada $r \in \mathbb{R}$ la bola **cerrada** $B(r)$ de radio r centrada en o. Como d es propia, las bolas $B(r)$ resultan compactas. Segundo, el hecho de que X sea segundo contable implica que el álgebra $\mathcal{A}$ es separable, lo que habilita a los autores a utilizar ultraproductos definidos sobre $\mathbb{N}$. Es importante mencionar en este punto que los ultraproductos no principales definidos sobre $\mathbb{N}$ no necesitan la condición de cofinalidad, ya que la poseen automáticamente. Esto se debe a que el complemento del conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ es finito, y los ultrafiltros no principales no poseen conjuntos finitos (item 2 de Corolario 1.4).

Otra facilidad que otorga trabajar con álgebras separables es la siguiente: como se vió al final de la Sección 2 del capítulo anterior, para la construcción de la C*-álgebra ultraproducto, se considera el cociente $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}/N$, donde $N = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim\limits_{\mathcal{U}} \|a_n\| = 0\}$. Es sabido que $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}$ es isomorfo a $\ell^\infty(\mathcal{A})$. Es por este motivo que la mayoría de las definiciones y propiedades del trabajo [5] se dan en términos del espacio $\ell^\infty(\mathcal{A})$.

Sea $\mathcal{A} = C_0(X)$, donde X un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo contable, dotado de una métrica d propia y con un punto base fijo $o \in X$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal definido sobre $\mathbb{N}$, y sea $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ la C*-álgebra ultraproducto de $\mathcal{A}$ respecto de $\mathcal{U}$. El siguiente lema se deduce de la Proposición 1.18

Lema 2.1. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathcal{A})$*, entonces* $\forall x \in X$*, existe* $\lim\limits_{\mathcal{U}}(f_n(x))$.

La función $x \mapsto \lim\limits_{\mathcal{U}}(f_n(x))$ se la denota $f_{\mathcal{U}}(x)$.

Definición 2.2. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathcal{A})$, se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua en conjuntos acotados si para todos $r, \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \forall s, t \in B(r) \text{ tal que } d(s,t) < \delta \text{ entonces } |f_n(s) - f_n(t)| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Lema 2.3. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* $\mathcal{U}$*-uniformemente equicontinua en conjuntos acotados, entonces* $f_{\mathcal{U}}$ *es uniformemente continua en conjuntos acotados.*

Demostración. Se probará esta propiedad por el absurdo. Si $f_{\mathcal{U}}$ no es uniformemente continua, entonces existen un conjunto X_0 acotado, un ε_0 y dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_0$ tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ pero $|f_{\mathcal{U}}(x_n) - f_{\mathcal{U}}(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Sea k fijo, tal que $\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Sea r tal que $X_0 \subset B(r)$, y sea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \forall s, t \in B(r) \text{ tal que } d(s,t) < \frac{1}{k} \text{ entonces } |f_n(s) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} \right\}.$$

El conjunto A pertenece a $\mathcal{U}$ por hipótesis.

Como $f_{\mathcal{U}}$ es el $\mathcal{U}$-límite de las (f_n), entonces $B = \{n \in \mathbb{N} : |f_{\mathcal{U}}(x_k) - f_n(x_k)| < \frac{\varepsilon_0}{4}\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} : |f_{\mathcal{U}}(y_k) - f_n(y_k)| < \frac{\varepsilon_0}{4}\}$ pertenecen a $\mathcal{U}$.

Si $n \in A \cap B \cap C$, entonces

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &\leq |f_{\mathcal{U}}(y_k) - f_{\mathcal{U}}(x_k)| \\ &\leq |f_{\mathcal{U}}(y_k) - f_n(y_k)| + |f_n(y_k) - f_n(x_k)| + |f_{\mathcal{U}}(x_k) - f_n(x_k)| \leq \frac{3\varepsilon_0}{4}\end{aligned}$$

lo cual es absurdo. □

El siguiente lema muestra que el concepto de $\mathcal{U}$-uniforme equicontinuidad está bien definido en $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$.

LEMA 2.4. *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathcal{A})$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definen el mismo elemento en $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua en conjuntos acotados, entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathcal{A})$ que satisfacen las hipótesis. Para probar que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua, sean $r, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : \forall s, t \in B(r), d(s,t) < \delta \Rightarrow |f_n(s) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}\} \in \mathcal{U}$. A su vez, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \|g_n - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}\}$ también pertenece a $\mathcal{U}$, de lo que sigue que si n está en la intersección de ambos conjuntos, se tiene que

$$|g_n(s) - g_n(t)| \leq 2\|g_n - f_n\| + |f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

Como esto vale para toda bola $B(r)$ y para todo $\varepsilon > 0$, entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua. □

DEFINICIÓN 2.5. Sea $\mathcal{A} = C_0(X)$, donde X un espacio topológico localmente compacto, segundo contable, dotado de una métrica d compatible y con un punto base fijo $o \in X$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal definido sobre $\mathbb{N}$. Se define la parte continua de $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ al subconjunto

$$\mathcal{A}^{c\mathcal{U}} = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}} \quad \mathcal{U}\text{-uniformemente equicontinuas en conjuntos acotados}\}.$$

OBSERVACIÓN 2.6. Por la diagonal de $\ell^\infty(\mathcal{A})$ se entiende al subconjunto $\{(f)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathcal{A}); f \in \mathcal{A}\}$. Claramente, la diagonal de $\ell^\infty(\mathcal{A})$ pertenece a $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ y además resulta una C*-álgebra isomorfa a $\mathcal{A}$. Es por esto que se identificará a la diagonal con la misma álgebra $\mathcal{A}$. Esta identificación será importante en los Lemas 2.10, 2.11.

PROPOSICIÓN 2.7. *El conjunto $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ es una C*-subálgebra de $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$.*

DEMOSTRACIÓN. La condición de subespacio vectorial es evidente. Para mostrar $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ es multiplicativamente cerrada, sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$. Entonces, existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|, \|g_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\varepsilon > 0$ y $r > 0$, existe un δ tal que

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} : \forall s, t \in B(r) \text{ tal que } d(s,t) < \delta \text{ entonces } |f_n(s) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \in \mathcal{U}$$

$$B = \left\{n \in \mathbb{N} : \forall s, t \in B(r) \text{ tal que } d(s,t) < \delta \text{ entonces } |g_n(s) - g_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Si $n \in A \cap B$, entonces para todo $s, t \in B(R)$ tal que $d(s,t) < \delta$

$$\begin{aligned} |f_n(s)g_n(s) - f_n(t)g_n(t)| &\leq |f_n(s)g_n(s) - f_n(t)g_n(s)| + |f_n(t)g_n(s) - f_n(t)g_n(t)| \\ &\leq |f_n(s) - f_n(t)||g_n(t)| + |f_n(t)||g_n(s) - g_n(t)| \\ &\leq M|f_n(s) - f_n(t)| + M|g_n(s) - g_n(t)| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de lo que se desprende que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \forall s, t \in B(r) \text{ tal que } d(s,t) < \delta \text{ entonces } |f_n(s)g_n(s) - f_n(t)g_n(t)| \leq \varepsilon\}$$

contiene a $A \cap B$, por lo tanto pertenece a $\mathcal{U}$. Luego, $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ es multiplicativamente cerrada.

Resta ver que $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ es cerrado en norma. Para ello, sea $((f_n^m)_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ que converge a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para ver que $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ es cerrado, tiene que ocurrir que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua sobre conjuntos acotados. Sean $\varepsilon, r \in \mathbb{R}_{>0}$. El hecho de que $((f_n^m)_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión convergente en $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n^m - g_n\|_{\mathcal{A}^{\mathcal{U}}} < \varepsilon$ para todo $m \geq m_0$. En particular, para m_0, el conjunto $C = \left\{n \in \mathbb{N} : \sup_{x\in X}\{|f_n^{m_0}(x) - g_n(x)|\} < \dfrac{\varepsilon}{3}\right\} \in \mathcal{U}$. A su vez, como cada $((f_n^{m_0})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua, entonces existe un $\delta > 0$ tal que el conjunto $D = \{n \in \mathbb{N} : s, t \in B(r), d(s,t) < \delta \implies |f_n^{m_0}(s) - f_n^{m_0}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\} \in \mathcal{U}$.

Luego, si $n \in C \cap D$, y $s, t \in B(r), d(s,t) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |g_n(s) - g_n(t)| &\leq |g_n(s) - f_n^{m_0}(s)| + |f_n^{m_0}(s) - f_n^{m_0}(t)| + |g_n(t) - f_n^{m_0}(r)| \\ &\leq 2\|f_n^{m_0} - g_n\| + |f_n^{m_0}(s) - f_n^{m_0}(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

de lo que se sigue que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua, mostrando que $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ es cerrada. ☐

Para las siguientes demostraciones se necesitarán de las siguientes funciones auxiliares. Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, las funciones continuas χ_n que cumplen

- $0 \leq \chi_n \leq 1$.
- $\chi_n(t) = 0$ para cada $t \in B(n-1)$.
- $\chi_n(t) = 1$ si $t \notin B(n)$.

Observar que estas funciones no pertenecen originalmente a $C_0(X)$.

Sea I el siguiente conjunto

$$I = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}} : (\exists r_n \in \mathbb{R})(\lim_{\mathcal{U}} r_n = +\infty \text{ y } f_n|_{B(r_n)}) = 0\}. \tag{2.1}$$

Proposición 2.8. *El conjunto I es un ideal de $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$.*

Demostración. Para mostrar que I es un espacio vectorial, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)n \in \mathbb{N}$, tales que $f_n|_{B(s_n)} = 0$, $g_n|_{B(r_n)} = 0$. Entonces $(f_n + g_n)\big|_{B(\min s_n, r_n)} = 0$ y $\lambda f_n\big|_{B(s_n)} = 0$, de lo que se sigue que I es un espacio vectorial.

El hecho de que I es multiplicativamente cerrado es evidente. Lo que resta en consecuencia es mostrar que I es cerrado en norma.

Sea $((f_n^m)_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}} \subset I$ una sucesión que cumple que $\lim_{m\to+\infty}(f_n^m)_{n\in\mathbb{N}} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hay que ver que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$, o lo que es lo mismo, que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$

tal que el conjunto

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \|g_n - h_n\| < \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Notar que como $(f_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \in I$, entonces para cada $m, n \in \mathbb{N}$, existe r_n^m tal que $f_n^m|_{B(r_n^m)} = 0$. Debido a que $\lim\limits_{m\to+\infty}(f_n^m)_{n\in\mathbb{N}} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $m(k) \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto

$$X(k) = \left\{n \in \mathbb{N} : \|f_n^{m(k)} - g_n\| < \frac{1}{2k}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Fijado $m(k)$, el conjunto $W(k) = \{n \in \mathbb{N} : r_n^{m_k} > k\} \in \mathcal{U}$. Sea $Y(k) = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k, |g_n(t)| \leq \frac{1}{2k} \text{ si } t \in B(k)\}$. El conjunto $Y(k)$ pertenece a $\mathcal{U}$ porque contiene a $X(k) \cap W(k)$, ya que si $t \in B(k)$

$$|g_n(t)| \leq |g_n - f_n^{m(k)}(t)| + |f_n^{m(k)}(t)| \leq \|f_n^{m(k)} - g_n\| + 0 < \frac{1}{2k}.$$

Como este procedimiento se puede hacer para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se puede definir para cada $n \in \mathbb{N}$, $l(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : n \in X(k)\}$, entonces $l(n) \to \infty$, ya que si $n \in X(k)$, por construcción $n \geq k$. Se define $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n = g_n\chi_{l(n)}$. La sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a I por construcción. Para que la proposición quede demostrada, basta ver que para todo $k \in \mathbb{N}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen (2.2), lo que implica que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$.

Sea $n \in X(k) \cap Y(k)$, entonces Si $t \in B(l(n) - 1)$,

$$|g_n(t) - h_n(t)| = |g_n(t)| \leq \frac{1}{l(n)} \leq \frac{1}{2k}.$$

Si $t \in B(l(n)) \setminus B(l(n) - 1)$, entonces

$$|g_n(t) - h_n(t)| \leq |g_n(t)| + |h_n(t)| \leq 2|g_n(t)| < \frac{1}{k}.$$

Si $t \notin B(l(n))$ entonces

$$|g_n(t) - h_n(t)| = |g_n(t) - \chi_{l(n)}(t)g_n(t)| = 0.$$

Luego, $X(k) \cap Y(k) \subset \{n \in \mathbb{N} : \|h_n - g_n\| < \dfrac{1}{k}\}$ por lo tanto el último conjunto pertenece a $\mathcal{U}$. □

LEMA 2.9. *La C^*-álgebra $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$ es unital.*

DEMOSTRACIÓN. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n una función continua que vale 1 en $B(n)$ y 0 en $B(n+1)$. El elemento $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$, se proyecta a la identidad, puesto que para todo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$, se tiene que $(f_ng_n - f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$, puesto que si $n \in \mathbb{N}$, $(f_ng_n - f_n)(t) = 0$ si $t \in B(n)$, luego es un elemento que pertenece a I. □

Lema 2.10. *La proyección de la diagonal de $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ en el cociente $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$ es un ideal.*

Demostración. Para mostrar que es un ideal, alcanza con ver que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ y $g \in \mathcal{A}$, entonces $(gf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de la diagonal de $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$.

Sea $f_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} f_n$. El elemento $gf_{\mathcal{U}}$ pertenece a la diagonal. Hay que demostrar que $(f_{\mathcal{U}}g - f_ng)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. Para ello, alcanza con mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $(h_n) \in I$ tal que

$$\{n \in \mathbb{N} : \|f_{\mathcal{U}}g - f_ng - h_n\| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Sea $h_n = (f_{\mathcal{U}}g - f_ng)\chi_n$. Es claro que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. Como $g \in C_0(X)$, entonces existe un $r > 0$ tal que $|g(t)| < \frac{\varepsilon}{4M}$ si $t \notin B(r)$, donde $M = \sup\{\|f_n\|\}$. Sea ahora $\delta > 0$ tal que $|f_{\mathcal{U}}(s) - f_{\mathcal{U}}(t)| < \dfrac{\varepsilon}{3\|g\|}$ para todo $s, t \in B(r)$ tal que $d(s,t) < \delta$ (esto se puede hacer porque por el lema 2.3 $f_{\mathcal{U}}$ es uniformemente continua en conjuntos acotados). A su vez, sean $t_1, \dots, t_l \in B(r)$ tales que las bolas de centro t_i y radio δ formen un cubrimiento finito de $B(r)$. Como $f_{\mathcal{U}}$ es el $\mathcal{U}$-límite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces los conjuntos

$$\omega(i) = \left\{n \in \mathbb{N} : |f_{\mathcal{U}}(t_i) - f_n(t_i)| < \frac{\varepsilon}{3\|g\|}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Luego, el conjunto $\Omega = \omega(1) \cap \cdots \cap \omega(l)$ pertenece a $\mathcal{U}$.

Finalmente, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua en conjuntos acotados, el conjunto

$$\Theta = \left\{n \in \mathbb{N} : |f_n(t) - f_n(s)| < \frac{\varepsilon}{3\|g\|} \text{ si } s, t \in B(r), d(s,t) < \delta\right\} \in \mathcal{U}$$

A continuación, se verá que para todo $n \in \Omega \cap \Theta \cap \{n \in \mathbb{N}, n > k\}$ (notar que esta intersección resulta un elemento de $\mathcal{U}$), entonces $\|f_{\mathcal{U}}g - f_ng - h_n\| \leq \varepsilon$. Para ello primero notar que

$$\begin{aligned} &|(f_{\mathcal{U}}g - f_ng - h_n)(t)| \leq \\ &\qquad |[f_{\mathcal{U}}g - f_ng - (f_{\mathcal{U}}g - f_ng)\chi_r](t)| + |[(f_{\mathcal{U}}g - f_ng)\chi_r - (f_{\mathcal{U}}g - f_ng)\chi_n](t)| \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para el primer sumando de (2.3), se distinguirá en tres casos dependiendo de en qué bolas está t. Si $t \notin B(r+1)$ notar que $f_{\mathcal{U}}g - f_ng - (f_{\mathcal{U}}g - f_ng)\chi_r = 0$. Si $t \in B(r+1)\backslash B(r)$, entonces

$$\begin{aligned} |(f_{\mathcal{U}}g - f_ng - (f_{\mathcal{U}}g - f_ng)\chi_r)(t)| &= |g(t)||(f_{\mathcal{U}} - f_n - f_{\mathcal{U}}\chi_r - f_n\chi_r)(t)| \\ &\leq |g(t)|(2\|f_{\mathcal{U}}\| + 2\|f_n\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M}(2M + 2M) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $t \in B(r)$ se tiene que

$$|(f_{\mathcal{U}}g - f_n g - (f_{\mathcal{U}}g - f_n g)\chi_r)(t)| = |(f_{\mathcal{U}}(t) - f_n(t))g(t)|.$$

Para acotar esta expresión, sea t_i tal que $d(t, t_i) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|(f_{\mathcal{U}}(t) - f_n(t))g(t)| &= |(f_{\mathcal{U}}(t) - f_{\mathcal{U}}(t_i) + f_{\mathcal{U}}(t_i) - f_n(t_i) + f_n(t_i) - f_n(t))g(t)| \\
&\leq \big(|(f_{\mathcal{U}}(t) - f_{\mathcal{U}}(t_i))| + |(f_{\mathcal{U}}(t_i) - f_n(t_i))| + |(f_n(t_i) - f_n(t))|\big)|g(t)| \\
&\leq \big(|f_{\mathcal{U}}(t) - f_{\mathcal{U}}(t_i)| + |f_{\mathcal{U}}(t_i) - f_n(t_i)| + |f_n(t_i) - f_n(t)|\big)\|g\| \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{3\|g\|} + \frac{\varepsilon}{3\|g\|} + \frac{\varepsilon}{3\|g\|}\right)\|g\| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego, $|f_{\mathcal{U}}g - f_n g - (f_{\mathcal{U}}g - f_n g)\chi_r| \leq \varepsilon$ para los n elegidos.

Para el segundo sumando de (2.3) también se distinguirá en dististos casos dependiendo la pertenencia de t como se hizo en el caso anterior. Si $t \in B(r)$, entonces

$$|(f_{\mathcal{U}}g - f_n g)(t)\chi_r(t) - (f_{\mathcal{U}}g - f_n g)(t)\chi_n(t)| = 0.$$

Por otra parte si $t \notin B(r)$, entonces

$$\begin{aligned}
&|(f_{\mathcal{U}}g - f_n g)(t)\chi_r(t) - (f_{\mathcal{U}}g - f_n g)(t)\chi_n(t)| \leq \\
&|f_{\mathcal{U}}(t)||g(t)| + |f_n(t)||g(t)| + |f_{\mathcal{U}}(t)||g(t)| + |f_n(t)||g(t)| \leq \\
&|g(t)|(2\|f_{\mathcal{U}}\| + 2\|f_n\|) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

De esto se concluye que la triple intersección $\Omega \cap \Theta \cap \{n \in \mathbb{N}, n > k\}$ está contenida en

$$\{n \in \mathbb{N} : \|f_{\mathcal{U}}g - f_n g - h_n\| \leq \varepsilon\}$$

demostrando que este último conjunto pertenece a $\mathcal{U}$. Por lo tanto la proyección diagonal de $\mathcal{A}$ es un ideal de $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$. □

Lema 2.11. *El ideal $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$ es esencial.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$ tal que $(f_n g)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ para todo $g \in \mathcal{A}$. Esto significa que $(f_n g)_{n\in\mathbb{N}} \in I$ para todo $g \in \mathcal{A}$. Hay que ver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$.

Sea $t \in X$ fijo, y sea $r > 0$ tal que $t \in B(r)$. Sea $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(t) = 1$, entonces como $f_n g \in I$ entonces por definición (2.1) existe una sucesión r_n, $\lim_{\mathcal{U}} r_n = \infty$ tal que $f_n g|_{B(r_n)} = 0$. En particular el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : f_n(t)g(t) = 0\} \in \mathcal{U},$$

de lo que se sigue que $f_{\mathcal{U}}(t) = 0$.

Como este argunmento vale para todo $t \in X$, entonces $f_{\mathcal{U}} = 0$. Sea ahora el siguiente conjunto

$$U(k) = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k \text{ y } |f_n(t)| \leq \frac{1}{k} \text{ para todo } t \in B(k)\}.$$

A continuación se verá que $U(k)$ pertenece a $\mathcal{U}$. como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinuas, entonces existe $\delta > 0$ tal que el conjunto

$$\Theta = \left\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(t) - f_n(s)| < \frac{1}{2k} \text{ si } s, t \in B(k), d(s,t) < \delta \right\} \in \mathcal{U}.$$

De la misma manera que se hizo para demostrar que $\mathcal{A}$ es un ideal, para ese $\delta > 0$, sean $t_1 \ldots t_l \in B(k)$ tal que las bolas de centro t_i y radio δ forman un cubrimiento de $B(k)$. Entonces los conjuntos

$$\omega(i) = \left\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(t_i))| < \frac{1}{2k} \right\} \in \mathcal{U}.$$

Luego si $n \in \Sigma \cap \omega(1) \cap \cdots \cap \omega(l)$

$$|f_n(t)| \leq |f_n(t) - f_n(t_i)| + |f_n(t_i)| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{k}$$

tomando t_i tal que $d(t, t_i) < \delta$.

De la misma manera que se hizo en la demostración del Lema 2.8, sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $l(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : n \in U(k)\}$. Al igual que antes $\lim\limits_{n\to\infty} l(n) = \infty$. Definiendo $h_n = f_n \chi_n$, entonces se tiene que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. Resta ver que el conjunto

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \|f_n - h_n\| \leq \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{U}.$$

Sea $n \in \Theta \cap \omega(1) \cap \cdots \cap \omega(l)$. Si $t \notin B(l(n))$, entonces $h_n(t) = f_n(t)$ y en consecuencia $|f_n(t) - h_n(t)| = 0$.

Si $t \in B(l_n) \setminus B(l(n) - 1)$, entonces

$$|f_n(t) - h_n(t)| \leq 2|f_n(t)| < \frac{1}{k}.$$

Finalmente, si $t \in B(l(n) - 1)$, entonces $|f_n(t) - h_n(t)| = |f_n(t)| < \frac{1}{2k}$. Entonces, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ queda identificada en $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ con la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenece a I. Luego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$, de lo que se sigue que $\mathcal{A}$ es un ideal esencial de $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$. $\square$

Observación 2.12. Notar que de la demostración anterior se desprende que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $f_{\mathcal{U}} = 0$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. Esto permite dar la siguiente caracterización de I

$$I = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : f_{\mathcal{U}} = 0\}.$$

Teorema 2.13. *Existe un isomorfismo* $\varphi : \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I \to C_b(X)$ *tal que* $\varphi((f)_{n\in\mathbb{N}}) = f$ *para todo* $f \in C_0(X)$.

Demostración. Sea $\varphi((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f_{\mathcal{U}}$. De manera similar a la que se demuestra que $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ es una C*-álgebra, se puede ver que φ es un *-morfismo.

Para ver que φ es sobreyectiva, sea $f \in C_b(X)$, sea g_n funciones continuas que valen 1 en $B(n)$ y 0 en $B(n+1)$. Entonces $(fg_n) \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ y $(fg_n)_{\mathcal{U}} = f$.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$, entonces el $\mathcal{U}$-límite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la función constantemente 0. Por lo visto en la observación anterior, se desprende que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$, de lo que se sigue que φ es un isomorfismo. $\square$

El siguiente lema será importante a la hora de abordar la aplicación a grupos exactos.

LEMA 2.14. *Sea X un espacio métrico, y sea Γ un grupo discreto que actúa isométricamente sobre X. Sea $\mathcal{A} = C(X)$. Entonces tanto $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ como I resultan conjuntos Γ invariantes por la acción inducida.*

DEMOSTRACIÓN. Lo único que hay que probar es que el conjunto I resulta Γ invariante. Debido a que Γ actúa por isometrías, manda conjuntos acotados en conjuntos acotados. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces existe una sucesión r_n tal que $\lim_{\mathcal{U}} r_n = +\infty$ y $f_n\Big|_{B(r_n)} = 0$. Cada $\gamma \in \Gamma$ cumple que $\gamma B(r_n) = B(\gamma\sigma, r_n)$, que a su vez está en $B(r_k)$ para algún $k \geq n$. Luego, $(\gamma f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. $\square$

1. Aplicación a grupos exactos

En esta sección, se aplicará la construcción de la sección anterior para estudiar grupos exactos. Más precisamente, se demostrará que un grupo discreto que actúa de forma propia y transitiva en un árbol $\mathcal{T}$ es exacto. Para ello, y de acuerdo a la definición dada en 1.43, se buscará una C*-álgebra $\mathcal{B}$ y una familia de funciones $(T_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_c(\Gamma, \mathcal{B})$ tal que

1. T_i es positiva y central, es decir, $T_i(\gamma) \geq 0$ y $T_i(\gamma)$ pertence al centro de $\mathcal{A}$ para todo $\gamma \in \Gamma$;
2. $\sum_{\gamma\in\Gamma} T_i^2(\gamma) = 1_{\mathcal{B}}$;
3. Para todo $\gamma_1 \in \Gamma$, $\|T_i - \gamma_1 * T_i\|$ tiende a 0 cuando i tiende a infinito.

Sea un árbol $\mathcal{T}$ dotado con la topología inducida por la métrica de caminos (es decir, si x, y son vértices, entonces $d(x, y)$ es la mínima cantidad de aristas adyacentes que debo recorrer para ir de x a y). Sea Γ un grupo discreto que actúa de forma propia, isométrica y transitiva sobre $\mathcal{T}$, esto es:

1. La función $\Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T} \times \mathcal{T}$, $(\gamma, v) \to (\gamma v, v)$ es propia, es decir, que la preimagen de conjuntos finitos resultan finitos. En particular, los estabilizadores de cada vértice resultan finitos.
2. Para todo $v, w \in \mathcal{T}$ y todo $\gamma \in \Gamma$, se tiene que $d(\gamma v, \gamma w) = d(v, w)$.
3. Para todo $v, w \in \mathcal{T}$ existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma v = w$.

Sea $\sigma \in \mathcal{T}$ un vértice fijo. Para cada $v \in \mathcal{T}$, se define $x_{[\sigma,v]}$ el segmento geodésico que une a v con σ (esto es, el camino de longitud mínima entre ambos vértices). En el artículo [5] los autores demuestran el siguiente teorema:

TEOREMA 2.15. *Sea Γ un grupo discreto que actúa de forma propia, isométrica y transitiva sobre $\mathcal{T}$, entonces Γ es exacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal definido sobre $\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{A} = C_0(\mathcal{T})$, y sean $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$ donde I es

$$I = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}} : (\exists r_n \in \mathbb{R})(\lim_{\mathcal{U}} r_n = +\infty \text{ y } f_n|_{B(r_n)}) = 0\}.$$

y sea $q : \mathcal{A}^{c\mathcal{U}} \to \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}/I$ la proyección al cociente.

Para cada $v \in \mathcal{T}$ e $i \in \mathbb{N}$ se definen

$$X(i, v) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma\sigma \in B(i) \text{ y } \gamma v \in x_{[\sigma,v]}\}$$

y $x(i, v) = \sqrt{|X(i, v)|}$. A continuación, se definen $T_i^n : \Gamma \to \mathcal{A}$ como

$$T_i^n(\gamma)(v) = \begin{cases} x(i, v) & \text{si } v \in B(2n) \text{ y } \gamma \in X(i, v); \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ahora, se definen $T_i : \Gamma \to \mathcal{B}$ las proyecciones de $(T_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathcal{B}$, es decir, $T_i = q((T_i^n))$. Veamos que las funciones T_i cumplen las condiciones de la definición de acción amenable 1.43.

Primero, las T_i son positivas, puesto que las T_i^n lo son, luego $(T_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento positivo de $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, y como las T_i son proyecciones de las anteriores, resultan positivas.

Luego, hay ver que $\langle T_i, T_i\rangle = 1_{\mathcal{B}}$. Esto se desprende de que

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} (T_n^i)^2(\gamma)(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{|X(i, v)|} \chi_{X(i,v)}(\gamma)\chi_{B(2n)}(x) = \chi_{B(2n)}.$$

Luego, como la proyección de $(\chi_{B(2n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es la identidad, y las proyecciones son continuas, entonces

$$1_{\mathcal{B}} = q((\chi_{B(2n)})_{n\in\mathbb{N}}) = q(\langle T_i^n, T_i^n\rangle) = \langle T_i, T_i\rangle.$$

Resta ver que para todo $\gamma_1 \in \Gamma$, $\lim_{i\to\infty} \|T_i - \gamma_1 * T_i\|_2 = 0$. Notar que $(\gamma_1 * T_i)(\gamma) = \gamma_1 T_i(\gamma_1^{-1}\gamma)$, luego

$$\|T_i - (\gamma_1 * T_i)\|^2 = \Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma} (T_i(\gamma))^2 + (\gamma_1 T_i(\gamma_1^{-1}\gamma))^2 - 2(T_i(\gamma))(\gamma_1 T_i(\gamma_1^{-1}\gamma)) \Big\|_{\mathcal{B}}. \quad (2.4)$$

Notar que $\gamma_1 T_i^n(\gamma_1^{-1}\gamma)(t) = T_i^n(\gamma_1^{-1}\gamma)(\gamma_1^{-1}t)$, que resulta no nulo si se cumple simultáneamente

1. $\gamma_1^{-1}t \in B(2n)$;
2. $\gamma_1^{-1}\gamma\sigma \in B(i) \cap x_{[\sigma,\gamma_1^{-1}t]}$.

Al mismo tiempo,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}(\gamma_1 T_i^n(\gamma_1^{-1}\gamma))^2 = \chi_{\gamma_1 B(2n)}$$

de lo que sigue que (2.4) es igual a

$$\left\|\left|q(\chi_{B(2n)}) + q(\chi_{\gamma_1 B(2n)}) - 2q\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}(T_i^n(\gamma)\gamma_1 T_i^n(\gamma_1^{-1}\gamma))\right)\right|\right\|_{\mathcal{B}}$$

que es igual a

$$\inf_{(g_n)\in I, a\in\mathcal{A}}\left\{\lim_{\mathcal{U}}\left\|\left|\chi_{B(2n)} + \chi_{\gamma_1 B(2n)} - 2\sum_{\gamma\in\Gamma}T_i^n(\gamma)\gamma_1 T_i^n - g_n - a\right|\right\|\right\}. \tag{2.5}$$

Sea $a(t)\in\mathcal{A}$ la siguiente función

$$a(t) = \left(\chi_{B(2n)} + \chi_{\gamma_1 B(2n)} - 2\sum_{\gamma\in\Gamma}T_i^n(\gamma)\gamma_1 T_i^n - g_n - a\right)\chi_{B(i)\cup\gamma_1 B(i)}.$$

Sea $g_n(t) = \chi_{B(2n)\triangle\gamma_1 B(2n)}(t)$. Y sea

$$O(i,n) = (B(2n)\cap\gamma_1 B(2n))\setminus(B(i)\cup\gamma_1 B(i)).$$

Se puede ver, en consecuencia, que el valor de (2.5) queda acotado por

$$\lim_{\mathcal{U}}\sup_{t\in O(i,n)}\left\{\left|2 - 2\sum_{\gamma\in\Gamma}(T_i^n(\gamma)\gamma_1 T_i^n)(t)\right|\right\}. \tag{2.6}$$

Para acotar (2.6) sea

$$Z(i,t) = \left\{\gamma\in\Gamma : \gamma\sigma\in B(i), \gamma\sigma\in x_{[\sigma,t]}, \gamma_1^{-1}\gamma\sigma\in B(i), \gamma_1^{-1}\gamma\sigma\in x_{[\sigma,\gamma_1^{-1}t]}\right\}.$$

Sea $k = d(\gamma_1\sigma,\sigma)$, para n suficientemente grande y para $t\in O(i,n)$, se tiene que $|Z(i,t)| = (i-k)m$, donde $m = |Stab\{\sigma\}|$ el estabilizador de σ. Luego,

$$2\sum_{\gamma\in\Gamma}(T_i^n(\gamma)\gamma_1 T_i^n)(t) = \frac{(i-k)m}{im},$$

de lo que se sigue que (2.6) es igual $2 - 2\dfrac{i-k}{i}$ que tiende a 0 cuando i tiende a infinito, mostrando que Γ es exacto. $\square$

Capítulo 3

Construcción del álgebra de multiplicadores a través de ultraproductos

A lo largo de este capítulo, se analizará al detalle la construcción del álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ a partir de ultraproductos de $\mathcal{A}$. Esto generalizará la construcción principal de Avsec y Goldbring (Teorema 2.13) al caso no conmutativo y no separable. Partiendo de una C*-álgebra $\mathcal{A}$, no necesariamente abeliana, se tomará $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ la ultrapotencia de $\mathcal{A}$ sobre un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Aquí es donde aparece la primer diferencia con respecto al trabajo anterior. Se tomará $\mathcal{I}$ un conjunto dirigido como conjunto base, en vez de $\mathbb{N}$. Esto permitirá tomar C*-álgebras $\mathcal{A}$ no necesariamente separables. La adopción de un conjunto dirigido requerirá imponer la condición de que $\mathcal{U}$ sea un ultrafiltro cofinal. Como se vió en Observación 1.10, si un ultrafiltro cofinal $\mathcal{U}$ está definido sobre un conjunto dirigido $\mathcal{I}$ sin elementos maximales, entonces resulta no principal. Para construir el álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, se tomará una subálgebra de $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, denotada $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$, que tomará el rol de la subálgebra $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ introducida en la Definición 2.5. En este punto, surge una nueva diferencia con respecto al caso abeliano: al no ser un álgebra conmutativa, no se tiene un espacio topológico X en donde representar al álgebra como una subálgebra de funciones continuas. En particular, no se podrá hacer uso de la existencia de una métrica compatible d de manera tal que vuelva a las bolas cerradas conjuntos compactos. Por lo tanto, las condiciones topológicas que permiten definir el álgebra $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ no son utilizables (recordar que para la definición de $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ se utilizó la noción de $\mathcal{U}$-uniforme equicontinuidad presentada en la Definición 2.2 en donde la métrica d jugaba un rol fundamental). Para salvar esta dificultad, se hará uso de la noción de convergencia $\mathcal{U}$-estricta que reemplazará la noción de $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua. También será necesario definir la noción de $\mathcal{U}$-WOT-convergencia de una sucesión de elementos $(a_n)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$. Este concepto es una versión no conmutativa de las funciones $f_{\mathcal{U}}$ definidas en el Lema 2.1, y será fundamental para demostrar que $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ es cerrada. Al igual que en el caso conmutativo, se tomará $I \subset \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ el ideal de elementos $(a_n)_{i\in\mathcal{I}}$ $\mathcal{U}$-estrictamente convergentes a 0. Este ideal es subconjunto de $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ y resultará una adaptación del ideal I definido en la ecuación (2.1), al contexto no conmutativo. Una vez definidos todos estos objetos, resulta que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es isomorfo a $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/I$. A continuación se darán los detalles de lo anteriormente mencionado

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto dirigido. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cofinal definido sobre $\mathcal{I}$. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra no necesariamente abeliana. Sea $B(\mathcal{H})$ una representación fiel y no degenerada de $\mathcal{A}$, esto quiere decir que si $\xi \in \mathcal{H}$ es tal que $a\xi = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, entonces $\xi = 0$ y que la clausura de $\{a\xi; a \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{H}\}$ sea $\mathcal{H}$.

El siguiente lema permitirá introducir la noción de $\mathcal{U}$-WOT-límite de un elemento $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$.

Lema 3.1. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra. Para cada $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ existe un único elemento $a_{\mathcal{U}\text{-}WOT} \in B(\mathcal{H})$ tal que para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, se tiene que $\langle a_{\mathcal{U}\text{-}WOT}\xi, \eta\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle a_i\xi, \eta\rangle$.*

Definición 3.2. Al operador denotado $a_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$ se lo llama el $\mathcal{U}$-WOT-límite de $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Demostración. Sea $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ y sean $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Entonces $(\langle a_i\xi, \eta\rangle)_{i\in\mathcal{I}}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$, entonces tiene $\mathcal{U}$-límite por el Corolario 1.19. Sea $b_{\xi,\eta}$ dicho límite.

Hay que ver que el mapa $(\xi, \eta) \mapsto b_{\xi,\eta}$ es una forma sesquilinear acotada en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Para eso, sea λ un escalar complejo y sean $\xi, \xi', \eta \in \mathcal{H}$, entonces por las propiedades de suma y producto por escalar de $\mathcal{U}$-límites vistas en la Proposición 1.15 se tiene que

$$\begin{aligned} b_{\xi+\lambda\xi',\eta} &= \lim_{\mathcal{U}} \langle a_i(\xi + \lambda\xi'), \eta\rangle \\ &= \lim_{\mathcal{U}} \langle a_i\xi, \eta\rangle + \lim_{\mathcal{U}} \langle a_i\lambda\xi', \eta\rangle = b_{\xi,\eta} + \lambda b_{\xi',\eta}. \end{aligned}$$

La antilinealidad se demuestra de forma análoga. Para probar que la forma está acotada, sea $M > 0$ tal que $\|(a_i)\| \leq M$ para cada i. Debido a que los $\mathcal{U}$-límites preservan el orden (Proposición 1.15) se tiene que

$$|b_{\xi,\eta}| = \lim_{\mathcal{U}} |\langle a_i\xi, \eta\rangle| \leq \lim_{\mathcal{U}} \sup\{\|a_i\|\}\|\xi\|\|\eta\| \leq M\|\xi\|\|\eta\|.$$

Finalmente, existe un único $a_{\mathcal{U}\text{-}WOT} \in B(\mathcal{H})$ asociado a esta forma sesquilinear acotada. □

El siguiente concepto será clave para el desarrollo de este trabajo.

Definición 3.3. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Un elemento $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ es $\mathcal{U}$-*strict* convergente (o $\mathcal{U}$-estrictamente convergente) si existe un operador $a_{\mathcal{U}} \in B(\mathcal{H})$ tal que para cada $x \in \mathcal{A}$, y para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $\{i \in \mathcal{I} : \|a_i x - a_{\mathcal{U}} x\| < \varepsilon, \|x a_i - x a_{\mathcal{U}}\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. El operador $a_{\mathcal{U}}$ se denomina $\mathcal{U}$-*strict límite* de $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Observación 3.4. Si $x \in \mathcal{A}$, entonces $a_{\mathcal{U}}x$ y $xa_{\mathcal{U}}$ son elementos de $\mathcal{A}$. Esto se debe a que tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, existe una sucesión xa_n que tiende a $a_{\mathcal{U}}x$, y siendo $\mathcal{A}$ una C*-álgebra, resulta cerrada en norma, por lo que $a_{\mathcal{U}}x \in \mathcal{A}$ (análogamente, $xa_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}$).

Para demostrar los siguientes resultados resulta conveniente fijar la siguiente notación.

NOTACIÓN 3.5. Sea $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}, (b_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \Pi_{\mathcal{I}}\mathcal{A}$ que son $\mathcal{U}$-strict convergentes a $a_{\mathcal{U}}$ y $b_{\mathcal{U}}$ respectivamente. Para cada $x \in \mathcal{A}$ y para cada $\varepsilon > 0$, notamos

$$A_x(\varepsilon) := \{i \in \mathcal{I} : \|x(a_i - a_{\mathcal{U}})\|, \|(a_i - a_{\mathcal{U}})x\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U},$$
$$B_x(\varepsilon) := \{i \in \mathcal{I} : \|x(b_i - b_{\mathcal{U}})\|, \|(b_i - b_{\mathcal{U}})x\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

El siguiente resultado garantizará que los conceptos $\mathcal{U}$-WOT límite y $\mathcal{U}$-strict límite están bien definidos sobre $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra. Si $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}, (b_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \Pi_{\mathcal{I}}\mathcal{A}$ definen el mismo elemento en $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, entonces*

1. *Si $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-WOT convergente a $a_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$, entonces $(b_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-WOT convergente a $a_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$,*
2. *Si $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a $a_{\mathcal{U}}$, entonces $(b_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a $a_{\mathcal{U}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar (1), sean $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ elementos de norma 1, y sea $\varepsilon > 0$, si i pertenece al conjunto $\{i \in \mathcal{I} : \|a_i - b_i\| < \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{i \in \mathcal{I} : |\langle a_{\mathcal{U}\text{-}WOT}\xi, \eta\rangle - \langle a_i\xi, \eta\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}$, entonces

$$|\langle a_{\mathcal{U}\text{-}WOT}\xi, \eta\rangle - \langle b_i\xi, \eta\rangle| \leq |\langle (a_{\mathcal{U}\text{-}WOT} - a_i)\xi, \eta\rangle| + |\langle (a_i - b_i)\xi, \eta\rangle| < \varepsilon.$$

esto muestra que el conjunto $\{i \in \mathcal{I} : |\langle a_{\mathcal{U}\text{-}WOT}\xi, \eta\rangle - \langle b_i\xi, \eta\rangle| < \varepsilon\}$ pertenece a $\mathcal{U}$.

Para mostrar (2), sean $\varepsilon > 0$, $x \in \mathcal{A}$ e $i \in \left\{i \in \mathcal{I} : \|a_i - b_i\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right\} \cap A_x(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{U}$. Luego

$$\|x(b_i - a_{\mathcal{U}})\| \leq \|x(b_i - a_i)\| + \|x(a_i - a_{\mathcal{U}})\| < \varepsilon,$$
$$\|(b_i - a_{\mathcal{U}})x\| \leq \|(b_i - a_i)x\| + \|(a_i - a_{\mathcal{U}})x\| < \varepsilon.$$

Entonces se sigue que el conjunto $\{i \in \mathcal{I} : \|x(b_i - a_{\mathcal{U}})\|, \|(b_i - a_{\mathcal{U}})x\| < \varepsilon\}$ pertenece a $\mathcal{U}$. □

DEFINICIÓN 3.7. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Se define

$$\mathcal{A}^{s\mathcal{U}} = \{(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}} : \text{ existe } a_{\mathcal{U}} \in B(\mathcal{H}) : (a_i)_{i\in\mathcal{I}} \text{ es } \mathcal{U}\text{-estrictamente convergente a } a_{\mathcal{U}}\}$$

OBSERVACIÓN 3.8. Sea $((a_i^n)_{i\in\mathcal{I}})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ una sucesión que converge a $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$. Luego, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\|(a_i^n)_{i\in\mathcal{I}} - (a_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_{\mathcal{U}} < \varepsilon$.

Se tiene entonces que si $n \geq n_0$, el conjunto $\Omega_n(\varepsilon) := \{i \in \mathcal{I} : \|a_i^n - a_i\| < \varepsilon\}$ pertenece a $\mathcal{U}$. Para demostrar esto, tomemos $\alpha_n := \|(a_i^n)_{i\in\mathcal{I}} - (a_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_{\mathcal{U}}$. Para cada $\delta > 0$, se tiene que $\{i \in \mathcal{I} : |\|a_i^n - a_i\| - \alpha_n| < \delta\} \in \mathcal{U}$. Tomemos $\delta = \varepsilon - \alpha_n > 0$, entonces se tiene que $\varepsilon - \alpha_n > |\|a_i^n - a_i\| - \alpha_n| \geq \|a_i^n - a_i\| - \alpha_n$. Se sigue que

$\{i \in \mathcal{I} : |\|a_i^n - a_i\| - \alpha_n| < \delta\} \subset \Omega_n(\varepsilon)$. Por la condicion de direccionalidad, resulta que $\Omega_n(\varepsilon) \in \mathcal{U}$.

PROPOSICIÓN 3.9. *El conjunto $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ es una C^*-álgebra.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver que $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ es un espacio vectorial, sean $(a_i)_{\in\mathcal{I}}, (b_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ $\mathcal{U}$-strict convergentes a $a_{\mathcal{U}}$ y $b_{\mathcal{U}}$ respectivamente, sea $\lambda \neq 0$ un número complejo, y sea $x \in \mathcal{A}$. De acuerdo a la Notación 3.5, si $i \in A_x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_x\left(\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}\right) \in \mathcal{U}$, entonces

$$\|(a_i + \lambda b_i - a_{\mathcal{U}} - \lambda b_{\mathcal{U}})x\| \leq \|(a_i - a_{\mathcal{U}})x\| + |\lambda|\|(b_i - b_{\mathcal{U}})x\| < \varepsilon,$$
$$\|x(a_i + \lambda b_i - a_{\mathcal{U}} - \lambda b_{\mathcal{U}})\| \leq \|x(a_i - a_{\mathcal{U}})\| + |\lambda|\|x(b_i - b_{\mathcal{U}})\| < \varepsilon.$$

Se sigue entonces que el conjunto $A_x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_x\left(\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}\right)$ es un subconjunto de

$$\{i \in \mathcal{I} : \|(a_i + \lambda b_i - a_{\mathcal{U}} - \lambda b_{\mathcal{U}})x\| < \varepsilon, \|x(a_i + \lambda b_i - a_{\mathcal{U}} - \lambda b_{\mathcal{U}})\| < \varepsilon\},$$

haciendo que este último conjunto pertenezca a $\mathcal{U}$, y por lo tanto $(a_i + \lambda b_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-estrictamente convergente a $a_{\mathcal{U}} + \lambda b_{\mathcal{U}}$.

El hecho de que $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ es $*$-cerrada se sigue de que si $\|a_i x - a_{\mathcal{U}} x\| = \|x^* a_i^* - x^* a_{\mathcal{U}}^*\|$, y como esto vale para todo $x \in \mathcal{A}$, se sigue que el límite $\mathcal{U}$-strict respeta la involución.

Para mostrar que $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ es cerrada para la multiplicación, sea $M = \sup_{i\in\mathcal{I}}\{\|a_i\|, \|b_i\|\}$. Debido a la Observacion 3.4, se tiene que $b_{\mathcal{U}}x, xa_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}$, luego, y siguiendo la Notación 3.5, si i pertenece a

$$A_x\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) \cap A_{b_{\mathcal{U}}x}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_x\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) \cap B_{xa_{\mathcal{U}}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathcal{U}$$

se tiene que

$$\|(a_i b_i - a_{\mathcal{U}} b_{\mathcal{U}})x\| \leq \|(a_i b_i - a_i b_{\mathcal{U}})x\| + \|(a_i b_{\mathcal{U}} - a_{\mathcal{U}} b_{\mathcal{U}})x\| \leq \varepsilon;$$
$$\|x(a_i b_i - a_{\mathcal{U}} b_{\mathcal{U}})\| \leq \|x(a_i b_i - a_{\mathcal{U}} b_i)\| + \|x(a_{\mathcal{U}} b_i - a_{\mathcal{U}} b_{\mathcal{U}})\| \leq \varepsilon,$$

lo que muestra que $(a_i b_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a $a_{\mathcal{U}} b_{\mathcal{U}}$.

Resta mostrar que $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ es cerrada en norma. Sea $((a_i^n)_{i\in\mathcal{I}})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ que converge en $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ a $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Para mostrar que es norma cerrada se debe demostrar que $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente.

Como primer paso, se mostrará que para un elemento fijo $x \in \mathcal{A}$, $(\alpha_i x)_{i\in\mathcal{I}}$ y $(x\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ tiene $\mathcal{U}$-limite en $\mathcal{A}$ (de acuerdo a la Definición 1.13).

Sea $x \in \mathcal{A}$ fijo y $x \neq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $a_{\mathcal{U}}^n$ el $\mathcal{U}$-strict límite de $(a_i^n)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$. Por Observación 3.8, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ los conjuntos $\Omega_n\left(\frac{\varepsilon}{4\|x\|}\right)$ son elementos de $\mathcal{U}$. Se sigue que

$$\left\{i \in \mathcal{I} : \|a_i^n x - a_{\mathcal{U}}^n x\| < \frac{\varepsilon}{4}\right\} \cap \left\{i \in \mathcal{I} : \|a_i^m x - a_{\mathcal{U}}^m x\| < \frac{\varepsilon}{4}\right\} \cap \Omega_n\left(\frac{\varepsilon}{4\|x\|}\right) \cap \Omega_m\left(\frac{\varepsilon}{4\|x\|}\right)$$

es un elemento de $\mathcal{U}$ para todo $n, m \geq n_0$. Sea i perteneciente a este conjunto. Entonces

$$\begin{aligned}\|a_{\mathcal{U}}^n x - a_{\mathcal{U}}^m x\| &\leq \|a_{\mathcal{U}}^n x - a_i^n x\| + \|a_i^n x - a_i^m x\| + \|a_i^m x - a_{\mathcal{U}}^m x\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \|a_i^n - \alpha_i\|\|x\| + \|\alpha_i - a_i^m\|\|x\| + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,\end{aligned}$$

lo que demuestra que $(a_{\mathcal{U}}^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}$.

Sea $\rho(x) := \lim_{n\in\mathbb{N}} a_{\mathcal{U}}^n x \in \mathcal{A}$. Hay que ver que $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i x = \rho(x)$, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{i \in \mathcal{I} : \|\rho(x) - \alpha_i x\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\|\rho(x) - a_{\mathcal{U}}^n x\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \Omega_n\left(\frac{\varepsilon}{3\|x\|}\right) \in \mathcal{U}.$$

Para ese $n \in \mathbb{N}$, sea i en

$$\{i \in \mathcal{I} : \|a_{\mathcal{U}}^n x - a_i^n x\| < \frac{\varepsilon}{3}\} \cap \Omega_n\big(\frac{\varepsilon}{3\|x\|}\big) \in \mathcal{U}.$$

Para ese i, se tiene que

$$\|\rho(x) - \alpha_i x\| \leq \|\rho(x) - a_{\mathcal{U}}^n x\| + \|a_{\mathcal{U}}^n x - a_i^n x\| + \|a_i^n x - \alpha_i x\| \leq \varepsilon.$$

Repitiendo este procedimiento con $(x\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ se concluye el primer paso.

El segundo paso consiste en mostrar que $\alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT}x = \rho(x)$ independientemente de x. Sean $\eta, \xi \in \mathcal{H}$ unitarios, $\varepsilon > 0$, y sea i un elemento de

$$\Big\{i \in \mathcal{I} : |\langle(\alpha_i - \alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT})x\xi, \eta\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cap \Big\{i \in \mathcal{I} : \|\rho(x) - \alpha_i x\| < \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \in \mathcal{U}.$$

entonces, para dicho i se tiene que

$$|\langle(\rho(x) - \alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT}x)\xi, \eta\rangle| \leq |\langle(\rho(x) - \alpha_i x)\xi, \eta\rangle| + |\langle(\alpha_i x - \alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT}x)\xi, \eta\rangle| < \varepsilon,$$

lo que implica que $\alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT}x = \rho(x) = \lim_{\mathcal{U}} \alpha_i x$. Como consecuencia, para todo $x \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$, se tiene que $\{i \in \mathcal{I} : \|\alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT}x - \alpha_i x\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. De forma análoga, se puede ver que $\{i \in \mathcal{I} : \|x\alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT} - x\alpha_i\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Finalmente, queda demostrado que $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a $\alpha_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$. Esto finaliza la demostración de que $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ es norma cerrada, y por lo tanto es una C*-álgebra. $\square$

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. El conjunto*

$$J := \{(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{s\mathcal{U}} : a_i \text{ is } \mathcal{U}\text{-strict convergente a } 0\}$$

es un ideal de $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que J cumple las propiedades algebraicas, lo único que resta es ver que es cerrado en norma. Sea $((a_i^n)_{i\in\mathcal{I}})_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ una sucesión que converge en norma a $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ y sea $\alpha_\mathcal{U}$ el $\mathcal{U}$-strict límite de $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\Omega_n\Big(\dfrac{\varepsilon}{3\|x\|}\Big) \in \mathcal{U}$, y sea i perteneciente a

$$\Big\{i \in \mathcal{I} : \|(\alpha_i - \alpha_\mathcal{U})x\| < \frac{\varepsilon}{3}\Big\} \cap \Big\{i \in \mathcal{I} : \|a_i^n x\| < \frac{\varepsilon}{3}\Big\} \cap \Omega_n\Big(\frac{\varepsilon}{3\|x\|}\Big) \in \mathcal{U}.$$

entonces se tiene que para ese i,

$$\|\alpha_\mathcal{U} x\| \leq \|(\alpha_\mathcal{U} - \alpha_i)x\| + \|\alpha_i x\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|(\alpha_i - a_i^n)x\| + \|a_i^n x\| \leq \varepsilon.$$

Dado que la acción de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$ es no degenerada, $\alpha_\mathcal{U} = 0$. □

La C*-algebra $\mathcal{A}$ se embebe naturalmente en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$, vía la asignación diagonal $a \mapsto (a)_{i\in\mathcal{I}}$. Es claro que estos elementos son $\mathcal{U}$-strict convergentes a a. Además, como la representación es no degenarada y fiel, entonces dicho embebimiento pasa al cociente $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ de forma inyectiva.

Lema 3.11. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido sobre $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Entonces, la imagen de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ es un ideal esencial.*

Demostración. Sean $a \in \mathcal{A}$, $(b_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ y $b_\mathcal{U}$ su $\mathcal{U}$-strict límite. Entonces $(b_i a)_{i\in\mathcal{I}}$ y $(b_\mathcal{U} a)_{i\in\mathcal{I}}$ son ambas $\mathcal{U}$-strict convergentes a $b_\mathcal{U} a$. Se sigue entonces que $(b_i a)_{i\in\mathcal{I}}$ y $(b_\mathcal{U} a)_{i\in\mathcal{I}}$ son el mismo elemento en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$. Analogamente, $(ab_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es igual a $(ab_\mathcal{U})_{i\in\mathcal{I}}$ en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$.

Sea ahora $J' \subset \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ un ideal tal que $J' \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Si $(b_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ está en la preimagen de J', entonces para cada $x \in \mathcal{A}$, $(b_i x)_{i\in\mathcal{I}} \in J$. Sea $b_\mathcal{U}$ el $\mathcal{U}$-strict límite de $(b_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Entonces $(b_i x)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a $b_\mathcal{U} x$. Luego $b_\mathcal{U} x = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Se sigue entonces que $b_\mathcal{U} = 0$. Como consecuencia, $J' = \{0\}$. □

Ultrafiltros y unidades aproximadas. Como se vió en el Teorema 1.26, toda C*-álgebra $\mathcal{A}$ tiene unidades aproximadas, esto es, un conjunto dirigido $\mathcal{I}$ y una red $(e_i)_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{A}$ tal que para cada $x \in \mathcal{A}$, las redes $(xe_i)_{i\in\mathcal{I}}$ y $(e_i x)_{i\in\mathcal{I}}$ convergen a x. Recordar que las unidades aproximadas se pueden tomar positivas, y uniformemente acotadas, en cuyo caso resultan elementos de $\prod_\mathcal{I} \mathcal{A}$.

En lo que sigue, sea $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una unidad aproximada uniformemente acotada y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cofinal definido sobre $\mathcal{I}$. Cabe destacar que, en este caso, los conjuntos $\{i \in \mathcal{I} : \|xe_i - x\| < \varepsilon\}$ y $\{i \in \mathcal{I} : \|e_i x - x\| < \varepsilon\}$ forman parte de $\mathcal{U}$, para cada $x \in \mathcal{A}$ y para todo $\varepsilon > 0$. Adicionalmente, cuando $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra unital, la unidad aproximada puede ser como el conjunto de un único elemento $\{1_\mathcal{A}\}$ y la unidad aproximada puede ser considerada directamente $\{1_\mathcal{A}\}$. En esta situación, el único ultrafiltro es $\{1_\mathcal{A}\}$, que resulta cofinal.

Teorema 3.12. *Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra y sea $(e_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}$ una unidad aproximada de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cofinal sobre $\mathcal{I}$. Entonces la C*-álgebra $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ es isomorfa al álgebra de multiplicadores de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Ya ha quedado demostrado en el Lema 3.11 que $\mathcal{A}$ es un ideal esencial en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$. Resta ver que para toda C*-álgebra $\mathcal{B}$ que contenga a $\mathcal{A}$ como un ideal, existe un único homomorfismo de C*-álgebras $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ tal que $\varphi(a) = a$. Para ello, sea $b \in \mathcal{B}$ y considerese $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ definida por $\psi(b) = (be_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Para ver que ψ está bien definida sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathcal{A}$. Sea $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que si $i \geq i_0$, $\|xbe_i - xb\| < \varepsilon$. Sea $i_1 \in \mathcal{I}$ tal que si $i \geq i_1$, entonces $\|e_i x - x\| < \dfrac{\varepsilon}{\|b\|}$. Debido a la cofinalidad de $\mathcal{U}$ se tiene que $\{i \in \mathcal{I} : \|be_i x - bx\| < \varepsilon, \|xbe_i - xb\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Se puede observar que si $b \notin B(\mathcal{H})$ la última línea no implica que $(be_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$. Se debe “representar” b en $B(\mathcal{H})$. Para ello, sea $b_{\mathcal{U}\text{-}WOT} \in B(\mathcal{H})$ el $\mathcal{U}$-WOT-límite de $(be_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, un argumento similar al usado para demostrar 3.9, muestra que $b_{\mathcal{U}\text{-}WOT}x = bx$ y $xb_{\mathcal{U}\text{-}WOT} = xb$. Como consecuencia de esto $(be_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a $b_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$. El mismo procedimiento muestra que $(e_i b)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a $b_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$.

A continuación, se denotará π a la proyección al cociente de $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$, y sea $\varphi = \pi \circ \psi$. Es claro que φ es lineal y acotada. Como $\psi(b^*) = (b^* e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ y $\psi(b)^* = (e_i b^*)_{i\in\mathcal{I}}$ y ambas son $\mathcal{U}$-strict convergentes a $(b^*)_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$, entonces $\psi(b^*) - \psi(b)^*$ es un elemento de J, luego φ es un morfismo que preserva la involución.

Para mostrar que φ es multiplicativa, sean $b, b' \in \mathcal{B}$ fijos de norma 1 y sean $x \in \mathcal{A}$, $\varepsilon > 0$, $M = \sup_{i\in\mathcal{I}}\{\|e_i\|\}$ e i en el conjunto

$$\left\{i \in \mathcal{I} : \|e_i x - x\| < \frac{\varepsilon}{3M}\right\} \cap \left\{i \in \mathcal{I} : \|x - e_i x\| < \frac{\varepsilon}{3M}\right\} \cap \left\{i \in \mathcal{I} : \|e_i b' x - b' x\| < \frac{\varepsilon}{3M}\right\}$$

que resulta un elemento de $\mathcal{U}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|(be_i b' e_i - bb' e_i)x\| &\leq \|e_i b' e_i x - e_i b' x\| + \|e_i b' x - b' x\| + \|b' x - b' e_i x\| \\ &\leq \|e_i b'\|\|e_i x - x\| + \|e_i b' x - b' x\| + \|b'\|\|x - e_i x\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Si se toma i perteneciente a $\left\{i \in \mathcal{I} : \|xbe_i - xb\| < \dfrac{\varepsilon}{M}\right\} \in \mathcal{U}$, entonces se tiene que $\|x(be_i b' e_i - bb' e_i)\| \leq \|xbe_i - xb\|\|b' e_i\| < \varepsilon$. Luego, se sigue que $\psi(b)\psi(b') - \psi(bb') = (be_i b' e_i - bb' e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es un elemento de J.

Debido a que $(ae_i - a)_{i\in\mathcal{I}}$ es $\mathcal{U}$-strict convergente a 0, para todo $a \in \mathcal{A}$, $\varphi(a) = a$ en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$.

Para mostrar la unicidad de φ, sea $\varphi' : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ otro morfismo tal que $\varphi'(a) = a$, para todo $a \in \mathcal{A}$. entonces

$$\varphi'(b)a = \varphi'(b)\varphi'(a) = ba = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(b)a.$$

Por el Lema 3.11, $\varphi(b) = \varphi'(b)$. □

Observación 3.13. Una de las claves de este trabajo es que se puede identificar $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ sin pasar por los centralizadores dobles.

COROLARIO 3.14. *La C*-Álgebra* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *es isomorfa a*

$$\mathcal{M} := \{m \in B(\mathcal{H}) : \text{ para todo } a \in \mathcal{A}, am \in \mathcal{A}\,,\, ma \in \mathcal{A}\}.$$

En particular $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *es unital.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi : \mathcal{A}^{s\mathcal{U}} \to \mathcal{M}$ definida por $\varphi((a_i)_{i\in\mathcal{I}}) = \lim_{\mathcal{U}\text{-}strict} a_i$. Esta función está bien definida, es un morfismo de C*-Álgebras (Proposición 3.9) y $\ker(\varphi) = J$. Para ver que φ es surjectiva, sea $m \in \mathcal{M}$. Luego, para toda, $a \in \mathcal{A}$, $am \in \mathcal{A}$ y $ma \in \mathcal{A}$. De lo que sigue que si $\varepsilon > 0, \{i \in \mathcal{I} : \|a(me_i - m)\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ se tiene que $\{i \in \mathcal{I} : \|(me_i - m)a\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Entonces $(me_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ is $\mathcal{U}$-strict convergente a m.

Sea $m = 1$ entonces la imagen de $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$ es la unidad de $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J$. $\square$

Otra aplicación de esta construcción es la siguiente: todo morfismo $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ define un morfismo natural $\phi' : \mathcal{A}^{\mathcal{U}} \to \mathcal{B}^{\mathcal{U}}$. Si ϕ es suryectiva, entonces siguiendo el mismo razonamiento dado en la demostración de la Proposición 3.9, se puede ver que $\phi'(\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}) \subset \mathcal{B}^{s\mathcal{U}}$. Esto, sumado al Teorema 3.12, permite deducir el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.15. *Sean* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *C*-Álgebras y sea* $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *un morfismo suryectivo. La extensión natural* $\phi' : \mathcal{A}^{\mathcal{U}} \to \mathcal{B}^{\mathcal{U}}$ *induce el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{A}^{s\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & \mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A} \arrow[d, "\phi'''"] \\
\mathcal{B} \arrow[r] & \mathcal{B}^{s\mathcal{U}} \arrow[r] & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \arrow[r] & \mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B}.
\end{tikzcd}$$

1. El caso conmutativo y separable

En este apartado se verá que efectivamente, el álgebra $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$ introducida en la Definición 3.7 es exactamente la misma que el álgebra $\mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ determinada en la Definición 2.5 para el caso abeliano y separable. En las siguientes líneas, X será un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo contable y $\mathcal{A} = C_0(X)$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$. Aunque no sea necesario para demostrar el resultado principal de esta sección, se demostrará el siguiente lema, que muestra que en el caso abeliano y separable, el $\mathcal{U} - WOT$-límite de (f_n) coincide con $f_{\mathcal{U}}$.

LEMA 3.16. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{c\mathcal{U}}$ *entonces* $f_{\mathcal{U}}$ *coincide con* $f_{\mathcal{U}\text{-}WOT}$.

DEMOSTRACIÓN. Notar que como representación fiel y no degenerada de $C_0(X)$ se puede tomar $L^2(X,\mu)$ para μ una medida boreliana positiva en todo abierto. Hay que ver que para todo $g, h \in L^2(X,\mu)$

$$\int f_{\mathcal{U}} gh d\mu = \lim_{\mathcal{U}} \int f_n gh d\mu$$

o lo que es lo mismo, que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \left|\int f_{\mathcal{U}} g h d\mu - \int f_n g h d\mu\right| < \varepsilon\right\} \in \mathcal{U}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Notar que como $g, h \in L^2(X, \mu)$, entonces $gh \in L^1(X, \mu)$. Sea $A = \int |gh| d\mu$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0(X)^{\mathcal{U}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada, de lo que se tiene que existe un $r > 0$ tal que

$$\int_{B(r)^c} |f_{\mathcal{U}} g h| d\mu, \int_{B(r)^c} |f_n g h| d\mu < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Como $f_{\mathcal{U}}$ es uniformemente continua en conjuntos acotados (por Lema 2.3), entonces existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $d(s,t) < \delta_1$ entonces

$$|f_{\mathcal{U}}(s) - f_{\mathcal{U}}(t)| < \frac{\varepsilon}{4A}.$$

Asimismo como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-uniformemente equicontinua, se tiene que existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$\Theta = \left\{n \in \mathbb{N} : |f_n(s) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{4A} \text{ si } d(s,t) < \delta_2\right\} \in \mathcal{U}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Particionando al conjunto $B(r)$ en finitos borelianos disjuntos $\{Y_j\}_{1\leq j\leq n_0}$ de diámetro menor que δ y tomando $x_j \in Y_j$, entonces los conjuntos

$$\omega_j = \left\{n \in \mathbb{N} : |f_{\mathcal{U}}(x_j) - f_n(x_j)| < \frac{\varepsilon}{4A}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Sea $n \in \Theta \cap \omega_1 \cap \cdots \cap \omega_{n_0}$, entonces

$$\left|\int f_{\mathcal{U}} gh d\mu - \int f_n gh d\mu\right| \leq \int_{B(r)^c} |f_{\mathcal{U}} - f_n||gh| d\mu + \int_{B(r)} |f_{\mathcal{U}} - f_n||gh| d\mu \leq$$

$$\int_{B(r)^c} |f_{\mathcal{U}}||gh| d\mu + \int_{B(r)^c} |f_n||gh| d\mu + \sum_{j=1}^{n_0} \int_{Y_j} |f_{\mathcal{U}}(x) - f_n(x)||gh|(x) d\mu \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^{n_0} \int_{Y_j} (|f_{\mathcal{U}}(x) - f_{\mathcal{U}}(x_j)| + |f_{\mathcal{U}}(x_j) - f_n(x)|)|gh|(x) d\mu \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^{n_0} \int_{Y_j} |f_{\mathcal{U}}(x) - f_{\mathcal{U}}(x_j)||gh|(x) d\mu + \int_{Y_j} |f_{\mathcal{U}}(x_j) - f_n(x)||gh|(x) d\mu \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^{n_0} \int_{Y_j} \frac{\varepsilon}{4A}|gh|(x) d\mu + \int_{Y_j} (|f_{\mathcal{U}}(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)|)|gh|(x) d\mu \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^{n_0} \int_{Y_j} \frac{\varepsilon}{4A}|gh|(x) d\mu + \sum_{j=1}^{n_0} \int_{Y_j} \left(\frac{\varepsilon}{4A} + \frac{\varepsilon}{4A}\right) |gh|(x) d\mu = \frac{\varepsilon}{4} + \int_{B(r)} \frac{\varepsilon}{4A}|gh| d\mu \leq \varepsilon.$$

Como $\Theta \cap \omega_1 \cap \cdots \cap \omega_{n_0}$ es un elemento de $\mathcal{U}$, entonces $\int f_{\mathcal{U}} gh d\mu = \lim_{\mathcal{U}} \int f_n gh d\mu$. Como esto vale para todo $g, h \in L^2(X)$, entonces $f_{\mathcal{U}}$ es el $\mathcal{U} - WOT$-límite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Proposición 3.17. *Sea $\mathcal{A} = C_0(X)$ una C^*-álgebra abeliana y separable. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathcal{A})$ y sea $f_{\mathcal{U}}(x) = \lim_{\mathcal{U}} f_n(x)$ el $\mathcal{U}$-límite de las (f_n). Son equivalentes:*

1. *La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-equicontinua en conjuntos acotados.*
2. *La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-estrictamente convergente a $f_{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Para ver que (1) implica (2), sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathcal{A})$ $\mathcal{U}$-equicontinua en conjuntos acotados. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $g \in C_0(X)$. Si se toman $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|f_n\|, \|g\|\}$ y $K \subset X$ un conjunto compacto tal que $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ si $x \notin K$, exite δ_1 tal que si $x, y \in K$ donde $d(x,y) < \delta_1$, $\left\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_n(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3M}\right\} \in \mathcal{U}$. De acuerdo al Lema 2.1 existe $\delta_2 > 0$ tal que si $x, y \in K$ con $d(x,y) < \delta_2$, $|f_{\mathcal{U}}(x) - f_{\mathcal{U}}(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y considerando un cubrimiento finito de K por bolas $B_{x_j}(\delta)$ de radio δ centradas en x_j, $j = 1, \ldots, m$, como $f_{\mathcal{U}}(x_j) = \lim_{\mathcal{U}} f_n(x_j)$, se tiene que los conjuntos $A_j = \left\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x_j) - f_{\mathcal{U}}(x_j)| < \dfrac{\varepsilon}{3M}\right\}$ pertenecen a $\mathcal{U}$. En consecuencia, si $n \in \bigcap_{j=1}^m A_j \in \mathcal{U}$ y $x \in K$, tomando x_j tal que $d(x, x_j) < \delta$ se tiene que

$$|(f_n(x) - f_{\mathcal{U}}(x))g(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)|\|g\| + |f_n(x_j) - f_{\mathcal{U}}(x_j)|\|g\| + |f_{\mathcal{U}}(x_j) - f_{\mathcal{U}}(x)|\|g\| < \varepsilon.$$

Por otra parte, si $x \notin K$, entonces $|(f_n - f_{\mathcal{U}})g(x)| < \varepsilon$. Esto demuestra que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \|f_n g - f_{\mathcal{U}} g\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$.

Para demostrar la ímplicación restante, sea $g \in C_0(X)$ tal que $g = 1$ en $B_o(r)$. Luego por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : \|(f_n - f_{\mathcal{U}})g\| < \varepsilon\}$ son elementos de $\mathcal{U}$. Notar que estos conjuntos son infinitos, puesto que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal. Luego, se puede construir una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a $f_{\mathcal{U}}$ en $B_0(r)$. Recordar que en el caso que estamos estudiando, las bolas $B_o(r)$ son conjuntos compactos, de lo que sigue que $f_{\mathcal{U}}$ es uniformemente continua sobre $B_o(r)$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $|f_{\mathcal{U}}(y) - f_{\mathcal{U}}(x)| < \varepsilon$ en $B_o(r)$. Tomando $n \in \left\{n \in \mathbb{N} : \|(f_n - f_{\mathcal{U}})g\| < \dfrac{\varepsilon}{3}\right\} \in \mathcal{U}$, entonces para $x, y \in B_o(r)$ tal que $d(x, y) < \delta$ se tiene

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_{\mathcal{U}}(x)| + |f_{\mathcal{U}}(x) - f_{\mathcal{U}}(y)| + |f_n(y) - f_{\mathcal{U}}(y)| \leq \varepsilon,$$

En consecuencia el conjunto

$$\Omega = \{n \in \mathbb{N} : \forall x, y \in B_o(r) \text{ tal que } d(x, y) < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\}$$

contiene al conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \|(f_n - f_{\mathcal{U}})g\| < \frac{\varepsilon}{3}\}$. Esto demuestra que el conjunto Ω pertenece a $\mathcal{U}$. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones a Grupos Exactos

En esta sección se estudiarán las aplicaciones a grupos exactos. Sea Γ un grupo contable. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital, dotada de una acción de Γ por morfismos de C*-álgebras. Siguiendo las notaciones de la Definición 1.43, sea $C_c(\Gamma, \mathcal{A})$ el espacio de funciones de soporte finito de Γ a $\mathcal{A}$, entonces este conjunto resulta una $*$-álgebra con el producto dado por

$$T * S(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} T(\gamma_1)(\gamma_1 \cdot S(\gamma_2))$$

y la involusión está definida vía

$$T^*(\gamma) = \gamma \cdot T(\gamma^{-1})^*.$$

El conjunto $C_c(\Gamma, \mathcal{A})$ tiene una estructura de pre-$\mathcal{A}$-modulo de Hilbert vía el producto interno $\langle T, S\rangle_{\mathcal{A}} := \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} T(\gamma)^* S(\gamma)$, y la norma definida como $\|T\|_{\mathcal{A}} := \langle T, T\rangle^{1/2}$.

El siguiente lemma será necesario para la demostración del teorema principal.

Lema 4.1. *Sean $\Gamma_i \subset \Gamma$ una familia de subgrupos de Γ tales que cada Γ_i es exacto. Entoces existe un Γ-espacio compacto X tal que la acción de Γ_i en X es amenable.*

Demostración. Sea $\beta\Gamma_i$ la compactificación de Stone-Cech de Γ_i. Entonces, por Teorema 1.49 la acción de Γ_i en $\beta\Gamma_i$ es amenable. Sea, para cada i, $f_i : \beta\Gamma_i \to \beta\Gamma$ una función Γ_i-invariante, luego, por Lema 1.48, la acción de Γ_i en $\beta\Gamma$ es amenable. Finalmente, $\beta\Gamma$ es un Γ-espacio tal que la acción de cada Γ_i en $\beta\Gamma$ resulta amenable. $\square$

Teorema 4.2. *Sea Γ un grupo contable que actúa transitivamente en un árbol localmente finito $\mathfrak{T}$ cuyos estabilizadores son exactos. Entonces Γ es exacto.*

Demostración. Sea $o \in \mathfrak{T}$ fijo. Por $B(r)$ se entiende las bolas cerradas de radio r centradas en o. A la geodésica que une o con t será notada como $[o, t]$, y al grupo estabilizador de o se lo denotará Λ. Claramente, los estabilizadores de cada vértice $v \in \mathfrak{T}$ son isomorfos a Λ. Como la acción de Γ en $\mathfrak{T}$ es transitiva, existe un conjunto de representantes dentro de la acción, es decir, que para cada $v \in \mathfrak{T}$ existe un $g_v \in \Gamma$ tal que $g_v o = v$.

Sea $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento creciente por conjuntos finitos de Γ, y sea

$$\Lambda_i := \bigcup_{v\in B(i)} \bigcup_{w\in B(i)} \big(g_v^{-1}\Gamma_i g_w \cap \Lambda\big).$$

Al ser $\mathcal{T}$ localmente finito, cada Λ_i resulta finito.

Por hipótesis Λ es exacto, luego existe un conjunto compacto Y y existe una sucesión $(S_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_c((\Lambda, C(Y))$ que satisface las condiciones de la Definición 1.43. El compacto Y puede ser tomado como un Γ-espacio por el lema previo.

A su vez, se puede extender las S_i por 0 de manera tal que esten definidas en todo Γ. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea

$$\kappa(i) := \text{mín}\left\{k \in \mathbb{N} : ||S_l - \lambda * S_l|| < \frac{1}{i} \text{ para todo } l \geq k \text{ y para todo } \lambda \in \Lambda_i\right\}.$$

Sea la C*-álgebra $\mathcal{A} := C_0(\mathcal{T} \times Y)$. Como Y es compacto y $\mathcal{T}$ es contable, $\mathcal{A}$ resulta una C*-álgebra σ-unital. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal definido sobre $\mathbb{N}$ y sea $\mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A}$ el álgebra corona, que se identificará en este caso con $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J/\mathcal{A}$. Esta álgebra resulta unital.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $T_i : \Gamma \to \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}$, donde $T_i(\gamma) = (T_i^n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$T_i^n(\gamma)(t,y) = \frac{1}{\sqrt{\left|[o,t] \cap B(i)\right|}} \chi_{B(n)}(t) \sum_{v\in B(i)} \chi_{[o,t]}(v) S_{\kappa(i)}(g_v^{-1}\gamma)(g_v^{-1}y),$$

donde $\left|[o,t] \cap B(i)\right|$ significa el número de puntos en la geodésica $[o,t]$ que pertenecen a $B(i)$. Notar que $(T_i^n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{U}$-estrictamente convergente a

$$T_i = T_i(\gamma)(t,y) = \frac{1}{\sqrt{\left|[o,t] \cap B(i)\right|}} \sum_{v\in B(i)} \chi_{[o,t]}(v) S_{\kappa(i)}(g_v^{-1}\gamma)(g_v^{-1}y)$$

Por T_i se denotará a su proyección en $\mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J/\mathcal{A}$.

Afirmación: La secuencia $(T_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C(\Gamma; \mathcal{A}^{s\mathcal{U}}/J/\mathcal{A})$ satisface las condiciones de Definición 1.43.

Para mostrar esto, observar en primer lugar que si notamos como $\Omega_{\kappa(i)} \subseteq \Lambda$ al soporte de las $S_{\kappa(i)}$, entonces el soporte de las T_i está contenido en $\bigcup_{v\in B(i)} g_v\Omega_{\kappa(i)}$ que es un conjunto finito por ser $\mathcal{T}$ un árbol localmente finito.

La condición (1) de la Definición 1.43 se sigue del hecho de que T_i es suma y producto de funciones positivas.

Con respecto a la condición (2) de la Definición 1.43, notar que para cada $\gamma \in \Gamma$ fijo existe solo un único g_v tal que $g_v^{-1}\gamma \in \Lambda$. Entonces existe al menos un g_v tal que

$S_{\kappa(i)}(g_v^{-1}\gamma)$ es no nulo. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma}(T_i)^2(t,y) &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{1}{\Big|[o,t]\cap B(i)\Big|}\sum_{v\in B(i)}\chi_{[o,t]}(v)S^2_{\kappa(i)}(g_v^{-1}\gamma)(g_v^{-1}y)\\ &= \frac{1}{\Big|[o,t]\cap B(i)\Big|}\sum_{v\in B(i)}\chi_{[o,t]}(v)\sum_{\gamma\in\Gamma}S^2_{\kappa(i)}(g_v^{-1}\gamma)(g_v^{-1}y)\\ &= \frac{1}{\Big|[o,t]\cap B(i)\Big|}\sum_{v\in B(i)}\chi_{[o,t]}(v)\sum_{\lambda\in\Lambda}S^2_{\kappa(i)}(\lambda)(g_v^{-1}y)\\ &= \frac{1}{\Big|[o,t]\cap B(i)\Big|}\sum_{v\in B(i)}\chi_{[o,t]}(v)=1.\end{aligned}$$

Resta ver la condición (3) de la Definición 1.43 . Para ello, sea $\gamma_1\in\Gamma$ fijo. Observar que si $(t,y)\in\mathcal{T}\times Y$ entonces $\gamma_1 * T_i(\gamma)(t,y)=T_i(\gamma_1^{-1}\gamma)(\gamma_1^{-1}t,\gamma_1^{-1}y)$. Luego

$$\begin{aligned}\|T_i-\gamma_1 * T_i\|^2_{C_c(\Gamma,\mathcal{A}^s\mathcal{U}/J/\mathcal{A})} &= \|\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(T_i(\gamma)-\gamma_1 * T_i(\gamma)\right)^2\|_{\mathcal{A}^s\mathcal{U}/J\big/\mathcal{A}}\\ &= \inf_{a\in\mathcal{A}}\|\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(T_i(\gamma)-\gamma_1 * T_i(\gamma)\right)^2-a\|_{\mathcal{A}^s\mathcal{U}/J}\\ &= \inf_{a\in\mathcal{A}}\|2-2\sum_{\gamma\in\Gamma}T_i(\gamma)(\gamma_1 * T_i(\gamma))-a\|_{\mathcal{A}^s\mathcal{U}/J} \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Sea $\theta(i,t):=\Big|[o,t]\cap B(i)\Big|^{-1/2}\Big|[o,\gamma_1^{-1}t]\cap B(i)\Big|^{-1/2}$, entonces

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma\in\Gamma}T_i(\gamma)(t,y)T_i(\gamma_1^{-1}\gamma)(\gamma_1^{-1}t,\gamma_1^{-1}y)\\ &=\theta(i,t)\sum_{\substack{v\in B(i)\\ w\in B(i)}}\chi_{[o,t]}(v)\chi_{[o,\gamma_1^{-1}t]}(w)\sum_{\gamma\in\Gamma}S_{\kappa(i)}(g_v^{-1}\gamma)(g_v^{-1}y)S_{\kappa(i)}(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma)(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}y)\\ &=\theta(i,t)\sum_{\substack{v\in B(i)\\ w\in B(i)}}\chi_{[o,t]}(v)\chi_{[o,\gamma_1^{-1}t]}(w)\sum_{\lambda\in\Lambda}S_{\kappa(i)}(\lambda)(z)S_{\kappa(i)}(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v\lambda)(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_vz), \qquad (4.2)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce del siguiente cambio de variables $\lambda:=g_v^{-1}\gamma$ y $z:=g_v^{-1}y$, y además observando que $S_{\kappa(i)}(\lambda)=0$ si $\lambda\notin\Lambda$.

Para ver que $S_{\kappa(i)}(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v\lambda)\neq 0$, es necesario mostrar que $g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v$ pretenece a Λ. Observar que para cada v fijo existe solo un g_w tal que $g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v\in\Lambda$. Para ese g_w, se tiene que $w=\gamma_1^{-1}v$ y $\chi_{[o,\gamma_1^{-1}t]}(w)=\chi_{[o,\gamma_1^{-1}t]}(\gamma_1^{-1}v)=\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v)$. En consecuencia, (4.2) es igual a la siguiente suma, solo dependiente de v.

$$\theta(i,t)\sum_{v\in B(i)\cap\gamma_1 B(i)}\chi_{[o,t]}(v)\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v)\sum_{\lambda\in\Lambda}S_{\kappa(i)}(\lambda)(z)S_{\kappa(i)}(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v\lambda)(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v z).$$

Reemplazando esto en (4.1) se obtiene que $\|T_i-\gamma_1 * T_i\|^2_{C_c(\Gamma,\mathcal{A}^s\mathcal{U}/J/\mathcal{A})}$ es igual a

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ínf}_{a\in\mathcal{A}}\sup_{(t,y)\in T\times Y}\Bigg\{\Bigg|2-a(t,y)-\\ &2\theta(i,t)\sum_{v\in B(i)\cap\gamma_1 B(i)}\chi_{[o,t]}(v)\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v)\sum_{\lambda\in\Lambda}S_{\kappa(i)}(\lambda)(z)S_{\kappa(i)}(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v\lambda)(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v z)\Bigg|\Bigg\}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Por la desigualdad triangular, (4.3) se sigue de los siguientes computos:

$$2\theta(i,t)\sum_{v\in B(i)\cap\gamma_1 B(i)}\chi_{[o,t]}(v)\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v)\Bigg|1-\sum_{\lambda\in\Lambda}S_{\kappa(i)}(\lambda)(z)S_{\kappa(i)}(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v\lambda)(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v z)\Bigg|\tag{4.4}$$

y

$$\Bigg|2-2\theta(i,t)\sum_{v\in B(i)\cap\gamma_1 B(i)}\chi_{[o,t]}(v)\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v)-a(t,y)\Bigg|\tag{4.5}$$

Para acotar (4.4), primero, notar que

$$2\Bigg|1-\sum_{\lambda\in\Lambda}S_{\kappa(i)}(\lambda)(z)S_{\kappa(i)}(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v\lambda)(g_w^{-1}\gamma_1^{-1}g_v z)\Bigg|=\|S_{\kappa(i)}-(g_v^{-1}\gamma_1 g_w)*S_{\kappa(i)}\|^2.$$

Entonces existe un $r\in\mathbb{N}$ tal que $\gamma_1\in\Gamma_i$ para todo $i\geq r$. Se sigue que para todo $i\geq r$, $g_v^{-1}\gamma_1 g_w\in\Lambda_i$, para cualesquiera $v,w\in B(i)$. Entonces, de acuerdo a la definición de $\kappa(i)$, se sigue que

$$\|S_{\kappa(i)}-(g_v^{-1}\gamma_1 g_w)*S_{\kappa(i)}\|^2\leq\frac{1}{i},\ \text{para todo } i\geq r,\ \text{y todo } v\in B(i)\cap\gamma_1 B(i).$$

Luego, para todo $i \geq r$, (4.4) resulta acotada por

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i}\theta(i,t) \sum_{v \in B(i)\cap\gamma_1 B(i)} \chi_{[o,t]}(v)\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v) \\
&\qquad \leq \frac{1}{i}\theta(i,t)\Big(\sum_{v \in B(i)\cap\gamma_1 B(i)} \chi_{[o,t]}(v)\Big)^{1/2}\Big(\sum_{v \in B(i)\cap\gamma_1 B(i)} \chi_{[\gamma_1 o,t]}(v)\Big)^{1/2} \\
&\qquad \leq \frac{1}{i}\theta(i,t)\Big|[o,t]\cap B(i)\Big|^{1/2}\Big|[\gamma_1 o,t]\cap \gamma_1 B(i)\Big|^{1/2} \\
&\qquad = \frac{1}{i}\theta(i,t)\Big|[o,t]\cap B(i)\Big|^{1/2}\Big|[o,\gamma_1^{-1}t]\cap B(i)\Big|^{1/2} \\
&\qquad = \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

Para acotar (4.5), para cada $i \in \mathbb{N}$ sea

$$a(t,y) = a(t) := \left(2 - 2\theta(i,t) \sum_{v \in B(i)\cap\gamma_1 B(i)} \chi_{[o,t]}(v)\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v)\right)\chi_{B(i)\cup\gamma_1 B(i)}(t).$$

Esta elección de $a \in \mathcal{A}$ permite acotar (4.5) solo cuando $t \notin B(i)\cup\gamma_1 B(i)$. En ese caso $\theta(i,t) = \frac{1}{i}$. A su vez, si $i \geq d(o,\gamma_1 o)$ entonces

$$\Big|[o,t]\cap[\gamma_1 o,t]\cap B(i)\cap\gamma_1 B(i)\Big| \geq i - d(o,\gamma_1 o).$$

Luego la ecuación (4.5) resulta acotada por

$$\begin{aligned}
2 - \frac{2}{i}\sum_{v \in B(i)\cap\gamma_1 B(i)} \chi_{[o,t]}(v)\chi_{[\gamma_1 o,t]}(v) &= 2 - \frac{2}{i}\Big|[o,t]\cap[\gamma_1 o,t]\cap B(i)\cap\gamma_1 B(i)\Big| \\
&\leq 2 - \frac{2}{i}(i - d(o,\gamma_1 o)) \\
&= \frac{d(o,\gamma_1 o)}{i}.
\end{aligned}$$

Combinando estas cotas, si $\varepsilon > 0$, y si $i \geq \text{máx}\{r; d(o,\gamma_1 o), 2/\varepsilon; 2d(o,\gamma_1 o)/\varepsilon\}$, entonces $\|T_i - \gamma_1 * T_i\|^2_{C_c(\Gamma,\mathcal{A}^s\mathfrak{U}/J/\mathcal{A})} < \varepsilon$. □

Corolario 4.3. *Sea F_n el grupo libre en n generadores. Entonces F_n es exacto*

Demostración. Lo único que hay que ver es que F_n actúa sobre un árbol localmente finito. Sea $\mathcal{T}$ el grafo de Cayley de F_n, asociado a la presentación trivial $\langle a_1,\dots,a_n|\emptyset\rangle$. Entonces el grafo de Cayley es un árbol y la acción de F_n es propia, cuyos estabilizadores son triviales. Luego, por el Teorema 4.2, F_n resulta exacto. □

Bibliografía

[1] *Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics: Proceedings, International Conference, Leipzig, Sep 12-20, 1977*, Leipzig, 1978. Teubner.

[2] C. Anantharaman-Delaroche. Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité. *Math. Ann.*, 279(2):297–315, 1987.

[3] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids*, volume 36 of *Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique]*. L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000. With a foreword by Georges Skandalis and Appendix B by E. Germain.

[4] Goulnara Arzhantseva and Damian Osajda. Infinitely presented small cancellation groups have the Haagerup property. *J. Topol. Anal.*, 7(3):389–406, 2015.

[5] Stephen Avsec and Isaac Goldbring. Boundary amenability of groups via ultrapowers. *Houston J. Math.*, 45(3):731–741, 2019.

[6] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[7] Nathanial P. Brown and Narutaka Ozawa. *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*, volume 88 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[8] Robert C. Busby. Double centralizers and extensions of C^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 132:79–99, 1968.

[9] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry. Introductory notes on Richard Thompson's groups. *Enseign. Math. (2)*, 42(3-4):215–256, 1996.

[10] Pierre-Alain Cherix, Michael Cowling, Paul Jolissaint, Pierre Julg, and Alain Valette. *Groups with the Haagerup property*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, Basel, 2001. Gromov's a-T-menability, Paperback reprint of the 2001 edition [MR1852148].

[11] A. Connes. Almost periodic states and factors of type III_1. *J. Functional Analysis*, 16:415–445, 1974.

[12] A. Connes. Classification of injective factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$. *Ann. of Math. (2)*, 104(1):73–115, 1976.

[13] Kenneth J. Dykema. Exactness of reduced amalgamated free product C^*-algebras. *Forum Math.*, 16(2):161–180, 2004.

[14] Ilijas Farah. All automorphisms of the Calkin algebra are inner. *Ann. of Math. (2)*, 173(2):619–661, 2011.

[15] Ilijas Farah. Logic and operator algebras. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*, pages 15–39. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[16] Ilijas Farah, Bradd Hart, and David Sherman. Model theory of operator algebras I: stability. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 45(4):825–838, 2013.

[17] Ilijas Farah, Andrew S. Toms, and Asger Törnquist. Turbulence, orbit equivalence, and the classification of nuclear C^*-algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 688:101–146, 2014.

[18] I. Gelfand and M. Neumark. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 12(54):197–213, 1943.
[19] Isaac Goldbring. The connes embedding problem: A guided tour. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2022.
[20] Isaac Goldbring. *Ultrafilters throughout mathematics*, volume 220 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2022] ©2022.
[21] Isaac Goldbring, Bradd Hart, and Thomas Sinclair. The theory of tracial von Neumann algebras does not have a model companion. *J. Symbolic Logic*, 78(3):1000–1004, 2013.
[22] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
[23] M. Gromov. Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1):73–146, 2003.
[24] Erik Guentner and Jerome Kaminker. Exactness and the Novikov conjecture. *Topology*, 41(2):411–418, 2002.
[25] Nigel Higson and John Roe. Amenable group actions and the Novikov conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 519:143–153, 2000.
[26] Kate Juschenko. *Amenability of discrete groups by examples*, volume 266 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2022] ©2022.
[27] Eberhard Kirchberg and Simon Wassermann. Exact groups and continuous bundles of C^*-algebras. *Math. Ann.*, 315(2):169–203, 1999.
[28] Christopher Lance. On nuclear C^*-algebras. *J. Functional Analysis*, 12:157–176, 1973.
[29] F. J. Murray and J. Von Neumann. On rings of operators. *Ann. of Math. (2)*, 37(1):116–229, 1936.
[30] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41(2):208–248, 1937.
[31] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44:716–808, 1943.
[32] J. Neumann. Zur allgemeinen theorie des masses. *Fundamenta Mathematicae*, 13(1):73–116, 1929.
[33] Damian Osajda. Residually finite non-exact groups. *Geom. Funct. Anal.*, 28(2):509–517, 2018.
[34] Narutaka Ozawa. Amenable actions and exactness for discrete groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(8):691–695, 2000.
[35] Narutaka Ozawa. Boundary amenability of relatively hyperbolic groups. *Topology Appl.*, 153(14):2624–2630, 2006.
[36] Gert K. Pedersen. *C^*-algebras and their automorphism groups*. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Academic Press, London, 2018. Second edition of [MR0548006], Edited and with a preface by Søren Eilers and Dorte Olesen.
[37] N. Christopher Phillips and Nik Weaver. The Calkin algebra has outer automorphisms. *Duke Math. J.*, 139(1):185–202, 2007.
[38] Facundo Poggi and Román Sasyk. An ultrapower construction of the multiplier algebra of a C^*-algebra and an application to boundary amenability of groups. *Adv. Oper. Theory*, 4(4):852–864, 2019.
[39] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. Reprint of the second (1974) edition, With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg.
[40] Roman Sasyk and Asger Törnquist. The classification problem for von Neumann factors. *J. Funct. Anal.*, 256(8):2710–2724, 2009.
[41] Masamichi Takesaki. On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras. *Tohoku Math. J. (2)*, 16:111–122, 1964.

[42] Jean-Louis Tu. Remarks on Yu's "property A" for discrete metric spaces and groups. *Bull. Soc. Math. France*, 129(1):115–139, 2001.

[43] J. v. Neumann. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. *Math. Ann.*, 102(1):370–427, 1930.

[44] J. v. Neumann. On rings of operators. III. *Ann. of Math. (2)*, 41:94–161, 1940.

[45] Herbert E. Vaughan. On locally compact metrisable spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43(8):532–535, 1937.

[46] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. A friendly approach.

[47] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. *Invent. Math.*, 139(1):201–240, 2000.

[48] Robert J. Zimmer. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. *J. Functional Analysis*, 27(3):350–372, 1978.

[49] Robert J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

Facundo Poggi