UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

# Morfismos entre álgebras de funciones holomorfas desde el espectro vectorial

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas.

**Joaquín Camilo Singer**

Directora de tesis: Dra. Verónica Dimant
Consejero de estudios: Dr. Daniel Carando

**Morfismos entre álgebras de funciones holomorfas desde el espectro vectorial.**

Resumen.

En este trabajo estudiamos el *espectro vectorial*, esto es, el conjunto de morfismos de álgebras no nulos con dominio en una de las siguientes álgebras de funciones holomorfas: $\mathcal{H}_b(X)$ (funciones holomorfas de tipo acotado en $X$), $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ (funciones holomorfas y acotadas en la bola unidad $B_X$) o $\mathcal{A}_u(B_X)$ (funciones holomorfas y uniformemente continuas en $B_X$) a valores en el álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$, donde $X$ e $Y$ son espacios de Banach de dimensión infinita. El estudio de este espectro nos permite relacionar los morfismos entre álgebras de funciones holomorfas con herramientas que son propias del estudio escalar. Principalmente nos centramos en tres aspectos fundamentales: fibras, partes de Gleason y conjuntos cluster.

En una primera instancia analizamos el espectro vectorial en su definición general. Establecemos una estructura de dominio de Riemann para $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ (los morfismos de álgebras continuos y no nulos de $\mathcal{H}_b(X)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$) sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ y estudiamos las fibras resultantes. Luego relacionamos este espectro con $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ (morfismos de $\mathcal{A}_u(B_X)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$) y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ (morfismos de $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$) vía la función radio. Completamos nuestro análisis del caso general definiendo la versión vectorial de partes de Gleason y conjuntos Cluster y analizando la relación entre estos conjuntos con las previamente estudiadas fibras.

En segunda instancia nos abocamos al estudio de los espectros $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ y $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ correspondientes a los morfismos entre álgebras de funciones holomorfas en el polidisco infinito. A fin de buscar copias analíticas de una bola infinito dimensional en todas las fibras del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ mejoramos resultados existentes sobre el espectro escalar. El espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ se proyecta naturalmente sobre $\overline{B}_{\ell_\infty}$. Extendiendo un resultado de Cole, Gamelin y Johnson y respondiendo una pregunta abierta planteada por Aron, Falcó, García y Maestre probamos que todas las fibras de este espectro contienen una copia analítica de $B_{\ell_\infty}$. Construyendo en base a este resultado escalar obtenemos inyecciones analíticas para todas las fibras en el espectro vectorial $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. Relacionamos luego esta estructura de las fibras con las partes de Gleason correspondientes a este espectro.

Por último estudiamos el espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$. Nuevamente para conseguir resultados sobre las fibras vectoriales obtenemos primero un resultado sobre las fibras escalares, esta vez para el espectro $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$, que nos indica que podemos obtener una copia analítica de la bola $B_{\ell_2}$ en todas las fibras sobre elementos de $B_{\ell_2}$ y que la forma de construir estas inyecciones analíticas puede hacerse de manera holomorfa. Con esta construcción obtenemos inyecciones analíticas para las fibras sobre elementos en $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)}$. Analizamos luego los casos restantes, presentando condiciones para las cuales estas fibras contienen una copia analítica de una bola o resultan conjuntos de un sólo elemento. Completa nuestro análisis de este espectro el estudio de los conjuntos cluster definidos previamente, sobre los cuales obtenemos condiciones que aseguran que estos conjuntos contienen estructuras

analíticas.

**Homomorphisms between algebras of holomorphic functions from the vector valued spectrum viewpoint.**

Abstract.

In this thesis we study the *vector valued spectrum*, that is, the set of non null continuous homomorphisms mapping either $\mathcal{H}_b(X)$ (the algebra of holomorphic functions of bounded type on $X$), $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ (the algebra of bounded holomorphic functions on the unit ball $B_X$) or $\mathcal{A}_u(B_X)$ (the algebra of holomorphic functions that are uniformly continuous on $B_X$) to $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$, where $X$ and $Y$ are infinite dimensional Banach spaces. The vector valued spectrum allows us to study homomorphisms between algebras of holomorphic functions through aspects that have their analogue in the scalar valued specrum. Our main focus is on three fundamental aspects: fibers, Gleason parts and cluster sets.

First we study the vector valued spectrum in the most general case. We estabish a Riemann domain structure for $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ (the set of non null continuous homomorphisms from $\mathcal{H}_b(X)$ to $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$) over $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ and look into the resulting fibers. We then relate this spectrum with both $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ (the set of non null continuous homomorphisms from $\mathcal{A}_u(B_X)$ to $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$) and $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ (the set of non null continuous homomorphisms from $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ to $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$) via the radius function. We round up our analysis for the general case by defining the vector valued version of Gleason parts and Cluster sets and looking into the relationship between these sets and the previously mentioned fibers.

Secondly we focus on the spectra $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ and $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$, corresponding of homomorphisms between algebras of holomorphic functions on the infinite dimensional polydisk. Aiming to obtain analytic copies of an infinite dimensional ball on every fiber of the spectrum $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ we extend existing results regarding the scalar valued case. The (scalar valued) spectrum is naturally projected over $\overline{B}_{\ell_\infty}$. Improving upon a result from Cole, Gamelin and Johnson and answering an open question presented by Aron, Falcó, García and Maestre we show that every fiber in this spectrum contains an analytic copy of $B_{\ell_\infty}$. Through this result we are able to construct analytical injections for every fiber in the vector valued spectrum $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. We then relate the structure of fibers with that of Gleason parts.

Finally we study the spectrum $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$. Again, in order to obtain results regarding the vector valued fibers we first look into the scalar valued case, this time for the spectrum $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$. We show that there is analytical injections from the ball $B_{\ell_2}$ to any fibers over an element in $B_{\ell_2}$ and these analytical injections depend holomorphically on the fiber. Through this result we obtain analytical injections for the fibers over $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ in the vector valued case. We then look into the remaining fibers, presenting conditions for which these contain an analytic copy of a ball or are singleton sets. Our analysis of this spectrum is completed by looking into its cluster sets, for which we obtain conditions that ensure that they contain analytical structures.

*A mi viejo*

# Índice general

# Introducción

El estudio del álgebra de funciones holomorfas y acotadas en el disco complejo $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ a partir de su espacio de ideales maximales (o espectro) $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ es iniciado por Kakutani en 1941, quien plantea uno de los problemas claves del área, conocido como el Problema de la Corona: ¿Son las evaluaciones densas en el espectro?

Los primeros avances en este problema surgen a partir del encuentro entre ocho reconocidos matemáticos (entre ellos Kakutani) en el marco de la Conference on Analytic Functions (Institute for Advanced Studies, 1957). Esto dio lugar a la publicación en 1961 del notable artículo [55], bajo el acrónimo I. J. Schark. En este trabajo se define una proyección de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ en el disco complejo $\overline{\mathbb{D}}$ y se estudian las fibras asociadas. A partir del análisis de las fibras, I. J. Schark da una descripción del espectro: los únicos morfismos que se proyectan sobre puntos interiores del disco son las evaluaciones, mientras que las fibras sobre elementos en el borde $\partial\mathbb{D}$ contienen una copia analítica del disco. La búsqueda de estructuras analíticas en el espectro fue también desarrollada en artículos individuales, entre los que destacamos el trabajo de Gleason [39], quien las relaciona con la topología del espectro a partir de la definición de las partes de Gleason.

El estudio de las fibras (especificamente, de los valores que toman las funciones de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ en las mismas) se vincula también con el problema planteado por Kakutani. A tal efecto se define en [55] el concepto de conjuntos cluster, formados por límites de las funciones de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ evaluadas en sucesiones convergentes en $\overline{\mathbb{D}}$. A partir de los conjuntos cluster se prueba una versión débil del Teorema de la Corona, conocida como el Cluster Value Theorem. El enfoque para el estudio del espectro planteado por I. J. Schark quedaría sin embargo en suspenso como consecuencia de que Newman primero en forma parcial [52] y luego Carleson [16] resuelven de manera afirmativa el Problema de la Corona. No obstante, el camino marcado por Schark es retomado cuando se aborda este estudio en dimensión infinita.

Paralelamente, a partir de el trabajo pionero de David Hilbert [42] el estudio de holomorfía y de álgebras de funciones holomorfas avanza en problemas en dimensión infinita. Estos dos caminos confluyen en el ya clásico artículo de Aron, Cole y Gamelin [6]. Aquí se estudia para un espacio de Banach de dimensión infinita $X$ el espectro del álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_X)$, notado $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ . Dada la mayor complejidad del espacio $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ y por consiguiente de su espectro, Aron, Cole y Gamelin analizan primero el álgebra $\mathcal{H}_b(X)$ (conformada por aquellas funciones holomorfas en $X$ acotadas en conjuntos acotados) y su correspondiente espectro $\mathcal{M}_b(X)$. Para este último definen una proyección sobre $X^{**}$ (el bidual de $X$) y prueban que es posible dotar al espectro $\mathcal{M}_b(X^{**})$ con una estructura de dominio de Riemann sobre $X^{**}$. La relación entre los espectros $\mathcal{M}_b(X)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ es luego consolidada a partir de la definición de la función radio, que mide el mayor $r$ tal que los morfismos están acotados en la bola de radio $r$. Adicionalmente, encontramos en [6], un análisis de las fibras y de las estructuras analíticas de los espectros $\mathcal{M}_b(X)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ en consonancia con lo planteado por I. J. Schark.

El análisis de las fibras y la búsqueda de estructuras analíticas para el caso infinito dimensional fue posteriormente desarrollado por Aron, Cole, Farmer, Galindo, Gamelin, García, Johnson, Maestre entre otros [11, 22, 33] y es a la fecha un área activa de investigación con resultados recientes por ejemplo en [10, 19]. Este no es, sin embargo, el único objeto de estudio del artículo original de I. J. Schark que vuelve a tomar relevancia en el contexto de dimensión infinita. Lo mismo sucede con los conjuntos cluster, cuya generalización a $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ es estudiada por múltiples autores, entre ellos Aron, Carando, Gamelin, Johnson, Lassalle y Maestre a lo largo de diferentes artículos [1, 4, 5, 46, 53].

Además del espectro (morfismos de un álgebra de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$), los morfismos entre dos álgebras de funciones holomorfas han sido un importante objeto de estudio del área, tanto en el caso finito dimensional, incluyendo (entre otros) trabajos de Gorkin, MacCluer, Mortini, Ohno y Suárez [41, 48, 58] como en dimensión infinita, con aportes de múltiples autores, por ejemplo, Aron, Galindo, Gamelin y Lindström [12, 21, 34, 35, 38]. La conexión entre esta teoría y el estudio de los espacios de ideales maximales se da a partir del trabajo de Dimant, García, Maestre y Sevilla [28] quienes, con el objetivo de estudiar los morfismos entre álgebras no de forma individual sino como conjunto, definenel espectro vectorial. Este espectro permite estudiar al conjunto de morfismos entre álgebras con las ideas propuestas por Aron, Cole y Gamelin para el caso escalar. En este sentido en [28] definen una proyección sobre el espacio de funciones lineales de $Y$ en $X^{**}$ y se obtienen resultados tanto de estructura de dominio de Riemann como también sobre el fibrado de esta proyección y la existencia de estructuras analíticas.

Es en este contexto en el que se ubica nuestro trabajo. En esta tesis estudiamos los morfismos con dominio en las álgebras $\mathcal{H}^\infty(B_X)$, $\mathcal{H}_b(X)$ ó $\mathcal{A}_u(B_X)$ (las funciones holomorfas y uniformemente continuas en $B_X$) a valores en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$, para $X$ e $Y$ espacios de Banach de dimensión infinita, desde la óptica del espectro vectorial. Utilizamos un enfoque distinto a [28], obteniendo descripción del espectro vectorial más adecuada a partir de considerar la proyección sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ en lugar de considerar únicamente transformaciones lineales. Los resultados originales de esta tesis comienzan en el capítulo 2 y se estructuran en tres partes. En el capítulo 2 estudiamos el espectro vectorial en el caso general, analizamos su estructura de fibrado sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$, definimos las nociones vectoriales de conjuntos cluster y partes de Gleason y presentamos resultados sobre la existencia de estructuras analíticas en el espectro. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [29]. El capítulo 3 está dedicado al análisis del espectro vectorial en el polidisco infinito, esto es, $X = Y = c_0$ e incluye también resultados sobre el espectro escalar $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ que fueron obtenidos con la idea de construir inyecciones analíticas para el caso vectorial. Lo desarrollado en este capítulo fue publicado en [30]. Por último en el capítulo 4 analizamos los morfismos entre las álgebras $\mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ y $\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})$ a partir del espectro vectorial, presentando resultados de [31] sobre sus fibras y conjuntos cluster. A continuación incluimos un breve resumen de cada capítulo.

**Capítulo 1**

En este capítulo presentamos las nociones y resultados previos necesarios para el resto de la tesis. Introducimos primero las nociones de holomorfía que usaremos a lo largo de este trabajo, para luego presentar las álgebras uniformes cuyos morfismos estudiamos. Por último hacemos un breve racconto sobre sobre algunas nociones y resultados del espectro escalar, focalizados principalmente en las fibras, conjuntos cluster y partes de Gleason.

**Capítulo 2**

Este capítulo está dedicado al estudio de los espectros vectoriales $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ (formado por el conjunto de morfismos continuos y no nulos de $\mathcal{H}_b(X)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$), $\mathcal{M}_{u,\infty}(X, B_Y)$ (formado por el conjunto de morfismos no nulos de $\mathcal{A}_u(B_X)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$) y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ (formado por el conjunto de morfismos no nulos de $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$). Para estos tres espectros definimos sus correspondientes proyecciones sobre el espacio de funciones $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ y probamos que $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ posee una estructura de dominio de Riemann sobre este espacio.

Continuamos el capítulo definiendo la función Radio obteniendo así una relación entre los morfismos de estos espectros.

El final del capítulo está dedicado a los tres aspectos del espectro vectorial en el que nos centramos en toda la tesis: fibras, conjuntos cluster y partes de Gleason. Respecto de las fibras, estudiamos las condiciones para que estas estén conformadas por un sólo elemento o bien contengan una copia analítica de una bola. Obtenemos a partir de estos resultados una descripción del espectro $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

Proseguimos definiendo la versión vectorial de partes de Gleason y estudiando sus propiedades. Probamos además la relación entre ellas y la existencia de estructuras analíticas en el espectro. Presentamos además el panorama de las partes de Gleason para el espectro $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D}, B_Y)$.

Por último, damos la defininción vectorial de conjuntos cluster, presentamos propiedades generales analizamos la interacción de estos conjuntos con las fibras previamente definidas.

**Capítulo 3**

Este capítulo está dedicado al estudio del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. Con el objetivo de obtener inyecciones analíticas en todas las fibras, analizamos primero el caso escalar.

El espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ se proyecta sobre $\overline{B}_{\ell_\infty}$. En [22], Cole, Gamelin y Johnson prueban que puede incluirse una copia analítica de la bola $B_{\ell_\infty}$ en cada punto interior. En este trabajo extendemos el resultado de Cole, Gamelin y Johnson probando que todas las fibras contienen $2^c$ copias analíticas de la bola $B_{\ell_\infty}$, respondiendo así una pregunta abierta planteada en [10].

Para poder obtener inyecciones analíticas a partir del resultado escalar, damos primero una descripción de las funciones holomorfas en $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$. Esto nos permite entonces caracterizar las fibras del espectro vectorial y, posteriormente, construir una isometría de Gleason que asegura que todas las fibras del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ contienen $2^c$ copias analíticas de la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$.

Estudiamos además las implicaciones de este resultado a las estructura de partes de Gleason de este espectro, así como también analizamos qué partes de Gleason pueden ser de un sólo elemento y cuáles intersecan diferentes fibras.

**Capítulo 4**

Aquí el objeto de estudio es el espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$. El hecho de que el espectro escalar $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ sea mucho más complejo que $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ (que se identifica con $\overline{B}_{\ell_\infty}$) impacta en la cantidad de morfismos del espectro vectorial estudiado, produciendo una descripción menos completa de las fibras.

Para atacar este problema probamos que las fibras tienen distinto comportamiento según el tipo de función que las determina. Las clasificamos en tres grupos que denominamos fibras interiores, de transición y de borde. En el primer caso, construyendo a partir de inyecciones escalares demostramos que todas las fibras contienen una copia analítica de una bola. Respecto de las fibras de transición, probamos condiciones necesarias para que contengan una copia analítica de una bola o bien sean de un sólo elemento. Para las fibras de borde vemos que estas sólo pueden tener un elemento.

Concluimos este capítulo (y la tesis) estudiando los conjuntos cluster asociados al espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ y probando condiciones que aseguran la existencia de estructuras analíticas en estos conjuntos.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo introducimos las nociones y resultados previos que necesitaremos a lo largo de este trabajo. Comenzamos por la noción de holomorfía para luego presentar las álgebras de funciones holomorfas cuyos morfismos son el objeto de estudio de esta tesis. Por último damos una breve descripción del espectro escalar y las definiciones de fibras, conjuntos cluster y partes de Gleason.

## 1.1. Funciones holomorfas

A lo largo de esta sección presentamos la noción de holomorfía que usaremos a lo largo de este trabajo, junto con una serie de resultados clásicos sobre funciones holomorfas.

Decimos que $P : X \to Y$ es un polinomio $m-$homogéneo continuo si existe $L : X \times \ldots \times X \to Y$ $m-$lineal y continua tal que $P(x) = L(x, \ldots, x)$. En tal caso, notamos con $\overset{\vee}{P}$ a la única función $m-$lineal continua y simétrica tal que $P(x) = \overset{\vee}{P}(x, \ldots, x)$.

Un caso destacado dentro de los polinomios $m-$homogéneos es el de los polinomios de tipo finito. Un polinomio $P : X \to \mathbb{C}$ $m-$homogéneo es de tipo finito si existen $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en $X^*$ tal que

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^*(x))^m.$$

El espacio de los polinomios $m-$homogéneos continuos de $X$ en $Y$, $\mathcal{P}(^m X, Y)$ es un espacio de Banach con la norma $\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|$.

A partir de esta definición podemos presentar las distintas definiciones de holomorfía y ver cómo se relacionan.

**Definición 1.1.1** (Función holomorfa)**.** *Sea $U \subset X$ un abierto. Diremos que $f : U \to Y$ es holomorfa si para todo $x_0 \in U$ existe una sucesión $(P_m f(x_0))$ con $P_m f(x_0) \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ tal que la serie*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m f(x_0)(x - x_0)$$

*converge uniformemente en un entorno de $x_0$ contenido en $U$.*

**Definición 1.1.2** ($\mathcal{G}$-Holomorfa)**.** *Sea $U \subset X$ un abierto. Diremos que $f : U \to Y$ es Gâteaux holomorfa o $\mathcal{G}$-holomorfa si para cada $x_0 \in U$, $x \in X$ e $y^* \in Y^*$ la función compleja*

$$\lambda \mapsto y^* \circ f(x_0 + \lambda x)$$

*es holomorfa en un entorno de $0$.*

Ambas nociones de holomorfía resultan equivalentes bajo la hipótesis de que $f$ sea una función continua.

**Teorema 1.1.3.** *Sean $U \subset X$ un abierto y $f : U \to Y$ función. Son equivalentes:*

(a) *$f$ es holomorfa.*

(b) *$f$ es continua y $\mathcal{G}-$holomorfa.*

A lo largo de este trabajo en numerosas ocasiones deberemos considerar funciones $f : U \to Y^*$ con $U \subset X$ un abierto, es decir, cuyo codominio sea un espacio dual. Para dichas funciones se tiene además de las ya mencionadas la noción de $w^*-$holomorfía. Decimos que $f : U \to Y^*$ es $w^*-$holomorfa si para todo $y \in Y$ la función $[x \mapsto f(x)(y)]$ es holomorfa. Esta noción también resulta equivalente a las anteriores.

**Proposición 1.1.4** ([50, Ej. 8.D])**.** *Sean $X, Y$ espacios de Banach y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Entonces $f : U \to Y^*$ es holomorfa si y sólo si $f$ es $w^*$-holomorfa.*

Por último, incluímos también la noción de que una función sea *separadamente holmorfa*. Sean $X_1, \ldots, X_n, Y$ espacios de Banach y sea $U \subset X_1, \ldots, X_n$ un abierto. Decimos que una función $f : U \to Y$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ es separadamente holomorfa si, al fijar todas las variables excepto $x_j$ $(1 \leq j \leq n)$, $f$ resulta holomorfa.

**Teorema 1.1.5** (Teorema de Hartogs)**.** *Sean $X_1, \ldots, X_n, Y$ espacios de Banach y sea $U \subset X_1, \ldots, X_n$ un abierto. Entonces $f : U \to Y$ es una función holomorfa si y sólo si $f$ es separadamente holomorfa.*

Para completar esta sección incluimos resultados clásicos sobre funciones holomorfas que nos serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

**Teorema 1.1.6** (Principio del módulo máximo). *Sea $U \subset X$ un abierto convexo. Si $f : U \to Y$ es una función holomorfa tal que $\|f\|$ alcanza un máximo en $U$, entonces $\|f\|$ es constante en $U$.*

**Teorema 1.1.7** (Principio de identidad). *Sean $X, Y$ espacios de Banach y sea $U \subset X$ un abierto no vacío. Si $f, g : X \to Y$ son funciones holomorfas tales que $f \equiv g$ en $U$ entonces $f \equiv g$ en $X$.*

**Teorema 1.1.8** (Desigualdad de Cauchy). *Sean $X, Y$ espacios de Banach y $U \subset X$ un abierto. Sean además $f : U \to Y$ una función holomorfa, $x_0 \in U$, $x \in X$ y $r > 0$ tal que $x_0 + \lambda x \in U$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < r$. Entonces para todo $n \in N$ se tiene que*

$$\|P_m f(x_0)(x - x_0)\| \leq r^{-m} \sup_{|\lambda|=r} \|f(x_0 + \lambda x)\|.$$

## 1.2. Álgebras de funciones holomorfas

A partir de las definiciones de la sección anterior presentamos ahora las álgebras de funciones holomorfas con las que vamos a trabajar.

- $\mathcal{H}_b(X, Y)$.

Diremos que una función $f : X \to Y$ es de tipo acotado si para cada $R > 0$ existe $C = C(R) > 0$ tal que

$$\sup_{\|x\|<R} \|f(x)\| \leq C.$$

Definimos entonces el álgebra $\mathcal{H}_b(X, Y)$ como

$$\mathcal{H}_b(X, Y) = \{f : X \to Y : \ f \text{ es holomorfa de tipo acotado}\}.$$

Si consideramos la familia de seminormas $\{\sup_{\|x\|<R} \|f(x)\|\}_{R>0}$, $\mathcal{H}_b(X, Y)$ resulta un álgebra de Fréchet.

- $\mathcal{A}_u(B_X, Y)$

La siguiente álgebra de funciones holomorfas que consideraremos es $\mathcal{A}_u(B_X, Y)$ definida como

$$\mathcal{A}_u(B_X, Y) = \{f : B_X \to Y : \ f \text{ es holomorfa y uniformemente continua en } B_X\}.$$

Dotada con la norma $\sup_{x \in B_X} \|f(x)\|$, $\mathcal{A}_u(B_X, Y)$ resulta un álgebra de Banach. Notamos además que $\mathcal{A}_u(B_X, Y)$ contiene a las restricciones a $B_X$ de las funciones en $\mathcal{H}_b(X, Y)$. Como la restricción a $B_X$ de una función en $\mathcal{H}_b(X, Y)$ identifica a la función, podemos pensar a las funciones de $\mathcal{H}_b(X, Y)$ en $\mathcal{A}_u(B_X, Y)$.

- $\mathcal{H}^\infty(B_X, Y)$

Por último, consideraremos el álgebra de funciones holomorfas y acotadas de $B_X$ en $Y$ definida como

$$\mathcal{H}^\infty(B_X, Y) = \{f : B_X \to Y : f \text{ es holomorfa y } \sup_{x \in B_X} \|f(x)\| < \infty\}.$$

Con la norma $\sup_{x \in B_X} \|f(x)\|$ $\mathcal{H}^\infty(B_X, Y)$ resulta un álgebra de Banach que contiene a $\mathcal{A}_u(B_X, Y)$. El espacio $\mathcal{H}^\infty(B_X, Y)$ tiene además la propiedad de ser un dual:

**Teorema 1.2.1** ([51, Th. 2.1])**.** *Sean $X$ espacio de Banach y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Entonces existe un espacio de Banach $\mathcal{G}^\infty(U)$ y una función $g_U \in \mathcal{H}^\infty(U, \mathcal{G}^\infty(U))$ con la siguiente propiedad universal: para todo espacio de Banach $Y$ y toda $f \in \mathcal{H}^\infty(U, Y)$ existe un único operador $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^\infty(U), Y)$ tal que $T_f \circ g_U = f$. La correspondencia*

$$f \in \mathcal{H}^\infty(U, Y) \mapsto T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^\infty(U), Y),$$

*resulta un isomorfismo isométrico. Esta propiedad caracteriza a $\mathcal{G}^\infty(U)$ salvo isomorfismos.*

Es importante remarcar que de la demostración de este teorema surge que las evaluaciones $\delta_x$ con $x$ en $U$ generan un subespacio denso de $\mathcal{G}^\infty(U)$.

Notamos $\mathcal{H}_b(X), \mathcal{A}_u(B_X)$ y $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ respectivamente a los espacios $\mathcal{H}_b(X, Y), \mathcal{A}_u(B_X, Y)$ y $\mathcal{H}^\infty(B_X, Y)$ en el caso $Y = \mathbb{C}$. Con esta notación y a partir del Teorema 1.2.1 se tiene que $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ es isométricamente isomorfo al espacio dual $\mathcal{G}^\infty(B_X)^*$.

Un caso particular en el que analizaremos las álgebras $\mathcal{H}_b(X), \mathcal{A}_u(B_X)$ y $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ es para aquellos espacios $X$ simétricamente regulares. Decimos que $X$ es simétricamente regular si toda transformación lineal $T : X \to X^*$ continua y simétrica es $w-$compacta. Esta propiedad del espacio se relaciona con características de su espectro escalar (como puede verse por ejemplo en [2, 11]) y será también relevante al analizar el espectro vectorial.

### Extensión al bidual

Si bien hasta aquí hemos considerado las funciones en $\mathcal{H}_b(X), \mathcal{A}_u(B_X)$ y $\mathcal{H}^\infty(B_X)$, podemos pensar estas funciones como elementos de $\mathcal{H}_b(X^{**})$, $\mathcal{A}_u(B_{X^{**}})$ y $\mathcal{H}^\infty(B_{X^{**}})$ respectivamente. En efecto, Aron y Berner prueban en [3] (ver también [23]), que para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ existe una extensión canónica $[f \mapsto \widetilde{f}]$ de $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_{X^{**}})$ que resulta un isomorfismo de álgebras de Banach. Esta misma extensión está también definida de $\mathcal{A}_u(B_X)$ en $\mathcal{A}_u(B_{X^{**}})$ y de $\mathcal{H}_b(X)$ a $\mathcal{H}_b(X^{**})$. En este último caso, para toda $f \in \mathcal{H}_b(X)$ y todo $R > 0$ se verifica

$$\|f\|_{RB_X} = \|\widetilde{f}\|_{RB_{X^{**}}},$$

donde $\|f\|_{RB_X} = \sup_{x \in RB_X} |f(x)|$. Usaremos la notación $\widetilde{f}$ para referir a la extensión canónica de $f$ en cada caso.

## 1.3. El espectro escalar $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

Dada $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach o Frechét con unidad, definimos el espectro de $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \text{ morfismo de álgebras continuo } \} \setminus \{0\}.$$

El espectro escalar se denomina también el espacio de ideales maximales pues $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ si y sólo si $Ker(\varphi)$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$. Notemos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un subconjunto de la esfera de $\mathcal{A}^*$. Más aún, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ resulta $w^*-$cerrado y por lo tanto $w^*-$compacto en $\mathcal{A}^*$.

### La transformada de Gelfand

Dada $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach se define la transformada de Gelfand como la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to C(\mathcal{M}(\mathcal{A})) \\ z &\mapsto \hat{z} = [\varphi \mapsto \varphi(z)]. \end{aligned}$$

En el caso particular en el que $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$ o $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ esta transformada verifica $\|\hat{f}\| = \|f\|$ para toda $f \in \mathcal{A}$.

En lo que sigue nos centraremos en los casos $\mathcal{M}_b(X) = \mathcal{M}(\mathcal{H}_b(X)), \mathcal{M}_u(B_X) = \mathcal{M}(\mathcal{A}_u(B_X))$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X) = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty(B_X))$.

### 1.3.1. Fibras

Habiendo definido el espectro escalar, resulta natural preguntarse qué elementos podemos encontrar en este espectro. Comencemos por $\mathcal{M}_b(X)$. Los elementos más sencillos presentes en este espectro son las evaluaciones: para todo $x \in X$ se tiene el morfismo $\delta_x \in \mathcal{M}_b(X)$ dado por $\delta_x(f) = f(x)$. Más aún, dado que toda función $f \in \mathcal{H}_b(X)$ se extiende canónicamente a una función $\widetilde{f}$ en $\mathcal{H}_b(X^{**})$, podemos definir las evaluaciones para todo $x^{**} \in X^{**}$. Tenemos entonces bien definida una inclusión

$$\begin{aligned} i : X^{**} &\to \mathcal{M}_b(X) \\ x^{**} &\mapsto \delta_{x^{**}} = [f \mapsto \widetilde{f}(x^{**})]. \end{aligned}$$

En el caso del espectro $\mathcal{M}_u(B_X)$ las evaluaciones $\delta_{x^{**}}$ están bien definidas para todo $x^{**}$ en $\overline{B}_{X^{**}}$ mientras que para $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ consideramos $\delta_{x^{**}}$ para todo $x^{**} \in B_{X^{**}}$.

La contrapartida de la inclusión $i$ definida arriba es la proyección $\pi$ dada por

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_b(X) &\to X^{**} \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{X^*}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

A partir de la definición resulta inmediato que para todo $x^{**} \in X^{**}$ se tiene la igualdad

$$\pi(\delta_{x^{**}}) = x^{**}.$$

De manera análoga se definen las proyecciones de los espectros $\mathcal{M}_u(B_X)$

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_u(B_X) &\to X^{**} \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{X^*}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

y para $\mathcal{M}_\infty(B_X)$

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_\infty(B_X) &\to X^{**} \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{X^*}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

De ser necesario usaremos la notación $\pi_b, \pi_u$ y $\pi_\infty$ para distinguir las proyecciones desde $\mathcal{M}_b(X), \mathcal{M}_u(B_X)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ respectivamente.

**Observación 1.3.1.** *Las imágenes $\pi_u(\mathcal{M}_u(B_X))$ y $\pi_\infty(\mathcal{M}_\infty(B_X))$ están contenidas en $\overline{B}_{X^{**}}$.*

**Observación 1.3.2.** *A partir de la igualdad $\pi \circ i(x^{**}) = x^{**}$ resulta claro que $\pi_b(\mathcal{M}_b(X)) = X^{**}$ y $\pi_u(\mathcal{M}_u(B_X)) = \overline{B}_{X^{**}}$. Lo mismo sucede con $\pi_\infty(\mathcal{M}_\infty(B_X))$. En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} B_{X^{**}} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id"'] & \mathcal{M}_\infty(B_X) \arrow[d, "\pi"] \\ & \overline{B}_{X^{**}}. \end{tikzcd}$$

*Como $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ es $w^*-$compacto y $\pi$ es $w^*-$continua obtenemos que $\pi_\infty(\mathcal{M}_\infty(B_X)) = \overline{B}_{X^{**}}$.*

Si bien todo $x^{**}$ de $X^{**}$ verifica que $\pi_b(\delta_{x^{**}}) = x^{**}$, pueden existir otros elementos $\varphi \in \mathcal{M}_b(X)$ tales que $\pi(\varphi) = x^{**}$. Se define para cada $x^{**} \in X^{**}$ la fibra sobre $x^{**}$ como

$$\pi_b^{-1}(x^{**}) = \{\varphi \in \mathcal{M}_b(X) \colon \pi(\varphi) = x^{**}\}.$$

De manera análoga se definen las fibras para $\mathcal{M}_u(B_X)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ considerando únicamente elementos $x^{**}$ en $\overline{B}_{X^{**}}$. Entre otros motivos, las fibras son estudiadas en búsqueda de estructuras analíticas y con el fin de dar una descripción del espectro. Para ejemplificar esto presentamos un breve resumen de lo que ocurre en el espectro $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$.

**Fibras en $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$**

El espectro $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D}) = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}))$ es el conjunto de morfismos de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ a $\mathbb{C}$ no nulos. Este conjunto se identifica con el conjunto de ideales maximales de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$. En $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ los morfismos más simples que podemos encontrar son las evaluaciones $\delta_\lambda$ para $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$\delta_\lambda(f) = f(\lambda).$$

Respectivamente, $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ se proyecta naturalmente sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Si denotamos con $z$ a la función identidad en $\mathbb{C}$, la proyección $\pi$ definida en (1.3) está dada por

$$\pi(\varphi) = \varphi(z).$$

Notemos que $\pi(\delta_\lambda) = \delta_\lambda(z) = \lambda$, por lo que $\mathbb{D}$ está contenido en la imagen de $\pi$. Estamos entonces en las condiciones del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id"'] & \mathcal{M}_\infty(\mathbb{D}) \arrow[d, "\pi"] \\ & \overline{\mathbb{D}}. \end{tikzcd}$$

Al ser $\pi$ continua y $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ compacto, resulta que $\pi(\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})) = \overline{\mathbb{D}}$.

Para analizar las fibras asociadas a esta proyección debemos distinguir entre:

(a) Fibras sobre elementos $\lambda \in \mathbb{D}$, donde la evaluación $\delta_\lambda$ está bien definida.

(b) Fibras sobre elementos $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, donde la evaluación no está definida.

La descripción de estas fibras la podemos encontrar en [55] (ver también [43]). Allí se prueba que las fibras sobre elementos del disco son conjuntos de un sólo elemento.

**Teorema 1.3.3** ([55, Th. 2.1]). *Para todo* $\lambda \in \mathbb{D}$ *se tiene que* $\pi^{-1}(\lambda) = \{\delta_\lambda\}$.

Por el contrario, aquellas fibras sobre elementos del borde $\partial\mathbb{D}$ contienen una copia analítica del disco.

**Teorema 1.3.4** ([55, Sec. 5]). *Para todo* $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ *existe una inyección analítica* $\psi : \mathbb{D} \to \pi^{-1}(\lambda)$.

### 1.3.2. Conjuntos cluster

El estudio de conjuntos cluster es originado por I. J. Schark (un seudónimo de 8 brillantes matemáticos de la época) en [55]. Allí se considera el conjunto cluster en $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ con el objetivo de estudiar, para funciones $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ los posibles valores de $\hat{f}$ en las fibras.

En su versión general, para $X$ un espacio de Banach, $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ y $x^{**} \in \overline{B}_{X^{**}}$ se define el conjunto cluster como

$$\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \exists\ (x_\alpha) \subset B_X, x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**} \text{ tal que } f(x_\alpha) \to \lambda\}.$$

Si denotamos con $\mathscr{U}$ a una base de entornos de $x^{**}$ en la topología $w^*$, tenemos que el cluster $\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**})$ coincide con $\cap_{U \in \mathscr{U}} \overline{\hat{f}(U \cap B_X)}^{w^*}$. De aquí se sigue que el cluster $\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**})$ es un conjunto compacto y conexo [4, Lem. 2.1].

La relación entre $\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**})$ y los valores que toma $\hat{f}$ en la fibra $\pi^{-1}(x^{**})$ está dada por el siguiente Lema:

**Lema 1.3.5** ([4, Lem. 2.2]). *Sean* $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ *y* $x^{**} \in \overline{B}_{X^{**}}$. *Entonces*

$$\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**}) \subseteq \hat{f}(\pi^{-1}(x^{**})). \tag{1.4}$$

A partir de esta inclusión surge la pregunta, conocida como el *cluster value problem*: ¿bajo qué condiciones vale la igualdad

$$\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**}) = \hat{f}(\pi^{-1}(x^{**}))$$

para todo $x^{**} \in B_{X^{**}}$? Este problema, que sigue abierto, tiene además la propiedad de ser una versión débil de lo que se conoce como el *problema de la corona* (también abierto): ¿bajo qué condiciones se verifica que $\mathcal{M}_\infty(B_X) = \overline{\{\delta_x : x \in B_X\}}^{w^*}$? Estos problemas, así como también la definición de conjuntos cluster no se limitan exclusivamente al álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ sino que se pueden adaptar tanto a $\mathcal{A}_u(B_X), H_b(X)$ como también a otras álgebras.

Para completar la imagen de los conjuntos cluster escalares, nos valemos del ejemplo de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$.

### Conjuntos cluster en $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$

Dados $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ y $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, el cluster $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{D}}(f, \lambda)$ está dado por

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbb{D}}(f, \lambda) = \{\mu \in \mathbb{C} \colon \exists (\lambda_n) \subset \mathbb{D}, \lambda_n \to \lambda \text{ tal que } f(\lambda_n) \to \mu\}.$$

Para analizar estos conjuntos resulta conveniente dividir los clusters $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{D}}(f, \lambda)$ según si $\lambda$ es un punto en el interior del disco o, por el contrario, pertenece al borde $\partial\mathbb{D}$.

En el primer caso, como $\pi^{-1}(\lambda) = \{\delta_\lambda\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}$, sabemos por la inclusión (1.4) que los conjuntos clusters para elementos en el interior del disco $\mathbb{D}$ contienen únicamente al elemento $f(\lambda)$ para toda función $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$. Para aquellos $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ no podemos valernos de este argumento pues, como vimos previamente, las fibras sobre elementos de $\partial\mathbb{D}$ contienen una copia analítica del disco. Respecto de este caso I. J. Schark prueba en [55] que también vale la igualdad $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{D}}(f, \lambda) = \hat{f}(\pi^{-1}(\lambda))$ para todo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, completando así el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.6** ([55])**.** *Para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ y toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ se tiene la igualdad*

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbb{D}}(f, \lambda) = \hat{f}(\pi^{-1}(\lambda)).$$

Es importante remarcar que si bien las fibras sobre elementos en $\partial\mathbb{D}$ contienen una copia analítica de $\mathbb{D}$, no siempre sucede lo mismo con los correspondientes conjuntos cluster. Si denotamos con $z$ a la función identidad, sabemos que para todo $\varphi \in \mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ se tiene

$$\hat{z}(\varphi) = \varphi(z) = \pi(\varphi).$$

De aquí que $\hat{z}(\pi^{-1}(\lambda)) = \{\lambda\}$ para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$. Más aún, por continuidad se deduce que $\hat{f}(\pi^{-1}(\lambda)) = \{f(\lambda)\}$ para toda $f \in \mathcal{A}_u(\mathbb{D})$. Luego, para toda $f \in \mathcal{A}_u(\mathbb{D})$ y todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ se tiene

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbb{D}}(f, \lambda) = \{f(\lambda)\}.$$

Preguntarse en qué casos el cluster $\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**})$ es grande (es decir, contiene una copia analítica de una bola) resulta entonces de particular interés en aquellos casos en los que no se conoce la igualdad $\mathcal{C}\ell_{B_X}(f, x^{**}) = \hat{f}(\pi^{-1}(x^{**}))$.

### 1.3.3. Partes de Gleason

Uno de los objetivos en el estudio de álgebras de funciones es encontrar condiciones para las cuales existen estructuras analíticas en el espectro. Por ejemplo, buscamos encontrar para el álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ un mapa $\Psi : B_X \to \mathcal{M}_\infty(B_X)$ tal que $f \circ \Psi : B_X \to \mathbb{C}$ resulte analítica para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$. Esto motiva el análisis de las denominadas partes de Gleason del espectro pues, como veremos, la imagen de un tal mapa debe estar contenida en una única parte de Gleason.

Dada $\mathcal{A}$ un álgebra uniforme se define la distancia *pseudo-hiperbólica* en el espectro $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ como

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup\{|\varphi(f)| : \ f \in \mathcal{A}, \|f\| \leq 1, \psi(f) = 0\}. \tag{1.5}$$

Notemos que siempre $\rho(\varphi, \psi) \leq 1$. Recordemos además que podemos dotar al espectro $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ con la métrica heredada como subconjunto de $\mathcal{A}^*$, esto es,

$$\|\varphi - \psi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\varphi(f) - \psi(f)|.$$

Esta métrica es denominada la métrica de Gleason. La relación entre ambas nociones es vía la siguiente igualdad que puede encontrarse por ejemplo en [14, Th. 2.8]:

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{4\|\varphi - \psi\|}{4 + \|\varphi - \psi\|^2}. \tag{1.6}$$

Como la función $h(t) = \frac{4t}{4+t^2}$ es continua y creciente en el intervalo $[0, 2]$ y alcanza el máximo en $t = 2$ donde toma el valor $h(2) = 1$ obtenemos que $\|\varphi - \psi\| = 2$ si y sólo si $\rho(\varphi, \psi) = 1$. La condición $\varphi \sim \psi$ si $\rho(\varphi, \psi) < 1$ define una relación de equivalencia (ver por ejemplo [14, Th. 2-9]), motivando así la definición de parte de Gleason de $\varphi$ como la clase de equivalencia de $\varphi$, esto es

$$\mathcal{GP}(\varphi) = \{\psi : \ \rho(\varphi, \psi) < 1\} = \{\psi : \ \|\varphi - \psi\| < 2\}.$$

En el caso particular de las álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ o $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$ podemos calcular la métrica pseudo-hiperbólica entre evaluaciones a partir de los automorfismos de $B_X$.

**Proposición 1.3.7** ([9, Prop. 1.5])**.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ o $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$. Supongamos que existe un automorfismo $\phi : B_X \to B_X$ y para el caso $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ supongamos además que $\phi$ es uniformemente continuo. Entonces, dado $x \in B_X$ tal que $\phi(x) = 0$ se tiene para todo $y \in B_X$ que*

$$\rho(\delta_x, \delta_y) = \|\phi(y)\|.$$

En el análisis de partes de Gleason vuelve a ser relevante la distinción entre fibras sobre elementos interiores y fibras sobre elementos en el borde $\partial B_{X^{**}}$. En efecto a partir de la siguiente proposición sabemos que elementos en distintas clases de fibras deben pertenecer a distintas partes de Gleason.

**Proposición 1.3.8** ([9, Prop. 1.1])**.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ o $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$. Denotemos con $\delta_0$ a la evaluación en $0$. Entonces*

(a) *El conjunto $\{\delta_w \colon w \in B_{X^{**}}\}$ está contenido en $\mathcal{GP}(\delta_0)$. Más aún, $\rho(\delta_w, \delta_0) = \|w\|$ para todo $z \in B_{X^{**}}$*

(b) *Sean $w_1 \in S_{X^{**}}$ y $w_2 \in B_{X^{**}}$. Entonces para todo par $\varphi \in \pi^{-1}(w_1)$ y $\psi \in \pi^{-1}(w_2)$ resulta $\rho(\varphi, \psi) = 1$.*

Para relacionar la búsqueda de estructuras analíticas en el espectro con las partes de Gleason retomamos el ejemplo del inicio de la sección. Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ o $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ y tenemos para $Z$ un espacio de Banach un mapa $\Psi : B_Z \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ analítico entonces necesariamente para todo par $z_1, z_2 \in B_Z$ resulta

$$\rho(\Psi(z_1), \Psi(z_2)) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}^\infty(B_X) \\ \|f\| \leq 1 \\ \Psi(z_2)(f) = 0}} |\Psi(z_1)(f)|.$$

Por hipótesis, para cada $f \in \mathcal{A}$ la composición $f \circ \Psi : B_Z \to \mathbb{C}$ resulta analítica. Además, si $\|f\| \leq 1$ entonces $\|f \circ \Psi\| \leq 1$. Luego

$$\rho(\Psi(z_1), \Psi(z_2)) \leq \sup_{\substack{g \in \mathcal{H}^\infty(B_Z) \\ \|g\| \leq 1 \\ g(z_2) = 0}} |g(z_1)| = \rho(z_1, z_2) < 1.$$

Esto implica que la imagen $\Psi(B_Z)$ debe estar contenida en una única parte de Gleason.

Por último, presentamos brevemente el caso de las partes de Gleason de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$. Las partes de Gleason en $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ fueron largamente estudiadas por Hoffman en [43] y luego por diversos autores (ver por ejemplo [40, 49, 56]). A continuación incluimos un breve resumen apuntado a ejemplificar lo visto en el caso general así como también incluir resultados que necesitaremos más adelante.

### Partes de Gleason de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$

Para analizar la situación de las partes de Gleason en el $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ resulta conveniente recordar la descripción de este espectro en términos de sus fibras:

- Las fibras sobre elementos del disco $\mathbb{D}$, que poseen como único elemento a la correspondiente evaluación.
- Las fibras sobre elementos en el borde del disco, que son “grandes”: contienen una copia analítica de $\mathbb{D}$.

En el caso particular de las evaluaciones, podemos computar la distancia pseudo-hiperbólica a partir de automorfismos: dado $\lambda \in \mathbb{D}$ la aplicación $[x \mapsto \frac{x-\lambda}{1-\overline{x}\lambda}]$ verifica las condiciones de la Proposición 1.3.7. Podemos entonces calcular la distancia pseudo-hiperbólica entre $\delta_\lambda$ y $\delta_\mu$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{D}$) como

$$\rho(\delta_\lambda, \delta_\mu) = \left| \frac{\lambda - \mu}{1 - \overline{\lambda}\mu} \right|. \tag{1.7}$$

**Observación 1.3.9.** *La igualdad anterior también vale para la distancia pseudo-hiperbólica en $\mathcal{A}_u(\mathbb{D})$, es decir que para todo $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{D}}$ se verifica*

$$\rho_u(\delta_\lambda, \delta_\mu) = \left| \frac{\lambda - \mu}{1 - \overline{\lambda}\mu} \right|. \tag{1.8}$$

En particular, si notamos con $\delta_0$ a la evaluación en 0, tenemos para todo $\lambda \in \mathbb{D}$ que

$$\rho_u(\delta_\lambda, \delta_0) = |\lambda| < 1.$$

De aquí que todas las evaluaciones $\delta_\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{D}$ pertenecen a $\mathcal{GP}(\delta_0)$ y por lo tanto esta parte de Gleason contiene elementos de diferentes fibras (cf. con Prop. 1.3.8). El caso de aquellos morfismos $\varphi$ en fibras sobre $x \in \partial\mathbb{D}$ dado que estos morfismos no pueden ser evaluaciones. Sin embargo podemos obtener información al respecto a partir de la fórmula (1.8) por la siguiente observación.

**Observación 1.3.10.** *Sea $X$ un espacio de Banach $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X)$. Si notamos con $\rho_u$ a la distancia pseudo-hiperbólica en $\mathcal{M}_u(B_X)$ tenemos que*

$$\rho(\varphi, \psi) \geq \rho_u(\varphi, \psi),$$

*donde $\varphi, \psi$ en el segundo caso denotan las restricciones de estos morfismos a $\mathcal{A}_u(B_X)$.*

Si consideramos entonces para $\mu \in \partial\mathbb{D}$ un morfismo $\varphi \in \pi^{-1}(\mu)$ tenemos que

$$\rho(\varphi, \delta_0) \geq \rho_u(\varphi, \delta_0) = \rho_u(\delta_\mu, \delta_0) = |\mu| = 1.$$

Concluímos entonces que $\varphi$ y $\delta_0$ pertenecen a distintas partes de Gleason (cf. con Prop. 1.3.8). Más aún, si consideramos $\lambda \neq \mu \in \partial\mathbb{D}$ y $\varphi, \psi$ en las respectivas fibras tenemos que

$$\rho(\varphi, \psi) \geq \rho_u(\varphi, \psi) = \rho_u(\delta_\lambda, \delta_\mu) = \left| \frac{\lambda - \mu}{1 - \overline{\lambda}\mu} \right| = 1.$$

Por lo tanto estas partes de Gleason sólo pueden tener elementos pertenecientes a la misma fibra.

# Capítulo 2

# El espectro vectorial

Este capítulo está dedicado al estudio de los morfismos con dominio en una de las siguientes álgebras: $\mathcal{H}^\infty(B_X)$, $\mathcal{H}_b(X)$ o $\mathcal{A}_u(B_X)$ a valores en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$ para el caso general, donde $X$ e $Y$ son espacios de Banach de dimensión infinita. Esto lo hacemos a partir de estudiar los correspondientes espectros vectoriales.

El espectro vectorial $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es definido originalmente en [28] para álgebras de Banach o Frechét $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como

$$\mathcal{M}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \{\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \text{ morfismos de álgebras continuos}\} \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

Nos interesan particularmente para $X$ e $Y$ espacios de Banach los casos $\mathcal{B} = \mathcal{H}^\infty(B_Y)$, $\mathcal{A} = \mathcal{H}_b(X), \mathcal{A}_u(B_X)$ ó $\mathcal{H}^\infty(B_X)$, que notamos $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ respectivamente. Esto es

$$\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) = \{\Phi : \mathcal{H}_b(X) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y) \text{ morfismos de álgebras continuos}\} \setminus \{0\}.$$

$$\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y) = \{\Phi : \mathcal{A}_u(B_X) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y) \text{ morfismos de álgebras continuos}\} \setminus \{0\}.$$

$$\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) = \{\Phi : \mathcal{H}^\infty(B_X) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y) \text{ morfismos de álgebras continuos}\} \setminus \{0\}.$$

Notemos que, si consideramos $Y = \{0\}$ recuperamos los correspondientes espectros escalares $\mathcal{M}_b(X), \mathcal{M}_u(B_X)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X)$.

Antes de seguir, discutamos brevemente la palabra *continuos* de la definición de $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Un morfismo $\Phi$ pertenece a $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ si es no nulo y existen constantes $r, C > 0$ tales que para toda $f \in \mathcal{H}_b(X)$ se cumple

$$\|\Phi(f)\| = \sup_{y \in B_Y} |\Phi(f)(y)| \leq C\|f\|_{rB_X}.$$

En los casos $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$ ó $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$, un morfismo $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{H}^\infty(B_Y)$ resulta continuo si existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{A}$

$$\|\Phi(f)\| = \sup_{y \in B_Y} |\Phi(f)(y)| \leq C\|f\|_{B_X}.$$

Para las álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$ y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ la condición de que $\Phi$ sea un morfismo de álgebras no nulo asegura que se trata de un morfismo continuo, más aún, que tendrá norma 1.

**Lema 2.0.1.** *Sean $X, Y$ espacios de Banach y $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$ ó $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$. Entonces todo $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{H}^\infty(B_Y)$ morfismo de álgebras es continuo. Más aún, $\|\Phi\| = 1$.*

*Demostración.* Lo vemos para $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$ (el caso $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ es análogo). Sea $\Phi : \mathcal{H}^\infty(B_X) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y)$ un morfismo de álgebras no nulo. Si denotamos con $1_X$ a la función constantemente 1 en $X$ tenemos que

$$\Phi(1_X) = \Phi(1_X^2) = \Phi(1_X)^2.$$

Como $B_X$ es conexo y $\Phi$ no puede ser idénticamente nulo, se sigue que $\Phi(1_X) = 1_Y$. Por otra parte si $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $\|f\| < |\lambda|$ entonces $f - \lambda$ es inversible en $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ y por lo tanto su imagen por $\Phi$, $\Phi(f - \lambda)$ resulta inversible en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$. Esto implica que $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|$ por lo que $\Phi$ es continuo. Como además $\Phi(1_X) = 1_Y$ concluímos que $\|\Phi\| = 1$. $\square$

Si consideramos el caso $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, sabemos que existe una constante $r > 0$ tal que $\Phi$ es continuo respecto a la norma $\|\cdot\|_{rB_X}$. Razonando de manera análoga a la demostración anterior obtenemos que $\Phi$ resulta nuevamente un morfismo de "norma"1, como indica el siguiente corolario.

**Corolario 2.0.2.** *Sea $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ un morfismo continuo respecto a la norma $\|\cdot\|_{rB_X}$. Entonces*

$$\|\Phi(f)\| = \sup_{y \in B_Y} |\Phi(f)(y)| \leq \|f\|_{rB_X}, \tag{2.2}$$

*para toda $f$ en $\mathcal{H}_b(X)$.*

Habiendo definido el espectro vectorial la primera pregunta que surge es, ¿qué elementos podemos encontrar en el espectro vectorial? Consideremos primero el espectro $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$. Toda función $g$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ induce naturalmente un morfismo en el espectro. Este morfismo, que notamos con $C_g$ se denomina el morfismo de composición asociado a $g$ y está dado por

$$C_g(f) = [y \mapsto \widetilde{f}(g(y))]. \tag{2.3}$$

Tenemos entonces una inclusión $j : \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}) \to \mathcal{M}_{b,\infty}(B_X, B_Y)$, $j(g) = C_g$. De manera análoga a lo que sucede en el espectro escalar, en el caso del espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ los morfismos de composición están bien definidos para toda función $g$ en la bola cerrada $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$, mientras que en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ consideramos $C_g$ para toda $g$ en la bola abierta $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$.

La contrapartida de la proyección $j$ definida arriba es la proyección $\xi_b$:

$$\begin{gathered}\xi_b : \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})\\ \xi_b(\Phi)(y)(x^*) = \Phi(x^*)(y).\end{gathered}$$

Veamos que la proyección $\xi_b$ está bien definida. Debemos probar que para todo $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, $\xi_b(\Phi) : B_Y \to X^{**}$ es una función holomorfa y acotada. Comencemos por ver que $\xi_b(\Phi)$ es holormorfa. Por el Teorema 1.1.4 basta verificar que $\xi_b(\Phi)$ es $w^*$-holomorfa. Esto se sigue de que para todo $x^* \in X^*$ tenemos que

$$\widetilde{x^*}(\xi_b(\Phi)) = \Phi(x^*) \in \mathcal{H}^\infty(B_Y).$$

Resta probar que $\xi(\Phi)$ es acotada. Por el Corolario 2.0.2 existe $r > 0$ tal que $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_{rB_X}$ para toda $f \in \mathcal{H}_b(X)$. Luego

$$\begin{aligned}\sup_{y\in B_Y} \|\xi_b(\Phi)(y)\| &= \sup_{y\in B_Y} \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\xi_b(\Phi)(y)(x^*)|\\ &= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sup_{y\in B_Y} |\Phi(x^*)(y)|\\ &\leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*\|_{rB_X} \leq r.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\xi_b$ está bien definida.

La proyección $\xi_b$ fue originalmente definida en [28], pero no se usó para definir las fibras. Por el contrario allí se estudia la estructura de fibras del espectro $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ sobre $\mathcal{L}(X^*, Y^*)$ (los operadores lineales de $X^*$ en $Y^*$) vía otra proyección. En este trabajo nos centramos en la proyección $\xi_b$ que define un fibrado sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ dado que, si bien el espacio sobre el cual proyectamos es más complejo, veremos más adelante que la estructura de las fibras tiene más similitudes con el caso escalar: entre ellas, la definición de $\xi_b$ coincide con la definición de la proyección escalar si $Y = \{0\}$ (y en ese caso el espectro vectorial coincide con el escalar). Adicionalmente, esta estructura de fibras resulta más natural en vista a cómo construiremos morfismos para el espectro vectorial a partir de morfismos de composición $C_g$, definidos por funciones holomorfas.

De manera análoga al caso $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ se definen las proyecciones en los espectros $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$

$$\begin{gathered}\xi_u : \mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})\\ \xi_u(\Phi)(y)(x^*) = \Phi(x^*)(y),\end{gathered}$$

y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$

$$\xi_\infty : \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$$
$$\xi_\infty(\Phi)(y)(x^*) = \Phi(x^*)(y).$$

**Observación 2.0.3.** *Como los morfismos en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ tienen norma 1, las imágenes $\xi_u(\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y))$ y $\xi_\infty(\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y))$ están contenidas en $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$.*

La proyección $\xi_b$ aplicada a morfismos de composición $C_g$ nos permite recuperar la función holomorfa que define el morfismo. En efecto,

$$\xi_b(C_g)(y)(x^*) = C_g(x^*)(y) = \widetilde{x^*}(g(y)) = g(y)(x^*). \tag{2.4}$$

Por lo tanto

$$\xi_b(C_g) = g \quad \forall g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}).$$

Concluimos entonces que la imagen de $\xi_b$ es exactamente $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$.

Razonando como en (2.4) obtenemos para el espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ que

$$\xi_u(C_g) = g \quad \forall g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}.$$

De aquí que $\xi_u(\mathcal{M}_{b,\infty}(B_X, B_Y)) = \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$.

En el caso $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ el mismo argumento dice que

$$\xi_\infty(C_g) = g \quad \forall g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}.$$

Esto nos dice que la imagen de $\xi_\infty$ contiene a la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$. Al igual que sucede con $\xi_u$, la imagen de esta proyección resulta ser $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$ pero para justificar esta afirmación primero hace falta ver resultados acerca de la topología de $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$.

## 2.1. Dualidad y Compacidad

El espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ es un subconjunto de la esfera unidad de $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y))$. Como tal, su métrica está dada por

$$\|\Phi - \Psi\| = \sup_{f \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_X)}} \|\Phi(f) - \Psi(f)\|. \tag{2.5}$$

Al igual que sucede con el espectro escalar resulta útil (por ejemplo al momento de construir morfismos) considerar otra topología en el espectro de forma tal que éste resulte compacto. En el caso escalar, $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ es un subconjunto de $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_X)^*}$ y resulta compacto con la topología $w^*$ inducida por $\mathcal{H}^\infty(B_X)^*$. Para el caso vectorial la topología a elegir no es tan inmediata, por lo que debemos primero reinterpretar la inclusión $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y))$.

Recordemos que el espacio $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$ es un espacio dual, con predual $\mathcal{G}^\infty(B_Y)$. A partir de esto y usando la clásica identificación del dual del tensor (presentada por ejemplo en [24]) podemos escribir

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y)) = (\mathcal{H}^\infty(B_X)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_Y))^*. \tag{2.6}$$

Si dotamos a $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ con la topología $w^*$ correspondiente a $(\mathcal{H}^\infty(B_X)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_Y))^*$ el espectro resulta un subconjunto $w^*-$cerrado de la esfera y por lo tanto compacto. En efecto, sea $(\Phi_\alpha)$ una red en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ que converge $w^*$ a $\Phi$. Como las evaluaciones $\delta_y$ pertenecen a $\mathcal{G}^\infty(B_Y)$ para todo $y \in B_Y$, tenemos que

$$\Phi_\alpha(f)(y) \to \Phi(f)(y) \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(B_X),\ y \in B_Y.$$

De aquí es inmediato que $\Phi$ debe ser un morfismo de álgebras. Como además $\Phi_\alpha(1_X) = 1_Y$ para todo $\alpha$, $\Phi$ resulta no nulo y por lo tanto pertenece a $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$.

La $w^*-$compacidad de $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ fue demostrada con otros argumentos en [28, Th. 11].

**Observación 2.1.1.** *Como las evaluaciones $\delta_y$ con $y \in B_Y$ generan un subespacio denso de $\mathcal{G}^\infty(B_Y)$ podemos describir la convergencia $w^*$ en el espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ como*

$$\Phi_\alpha \xrightarrow{w^*} \Phi \text{ si y sólo si } \Phi_\alpha(f)(y) \to \Phi(f)(y)\ \forall f \in \mathcal{H}^\infty(B_Y),\ y \in B_Y. \tag{2.7}$$

Notemos además que tenemos la identificación

$$\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}) = (\mathcal{G}^\infty(B_Y)\widehat{\otimes}_\pi X^*)^*.$$

Nuevamente, por la densidad de las evaluaciones $\delta_y$ en $\mathcal{G}^\infty(B_Y)$, la $w^*-$convergencia en $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ está dada por

$$g_\alpha \overset{w^*}{\to} g \text{ si y sólo si } g_\alpha(y)(x^*) \to g(y)(x^*) \quad \forall y \in B_Y, x^* \in X^*. \tag{2.8}$$

**Observación 2.1.2.** *De lo anterior es inmediato que la proyección $\xi_\infty$ es $w^*-w^*$continua i.e. $\Phi_\alpha \xrightarrow{w^*} \Phi$ implica que $\xi_\infty(\Phi_\alpha)(y)(x^*) \to \xi_\infty(\Phi)(y)(x^*)$ para todo $y \in B_Y$, $x^* \in X^*$.*

Estamos ahora sí en condiciones de justificar la afirmación $\xi_\infty(\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)) = \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$. A partir de la interacción entre $\xi_\infty$ y la inclusión $j : B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})} \to \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "id"'] & \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \arrow[d, "\xi_\infty"] \\
& \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ es $w^*-$compacto y $\xi_\infty$ es $w^*-w^*$continua concluimos que $\xi_\infty(\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)) = \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$.

Hasta aquí hemos estudiado en esta sección el espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$. Sin embargo, los razonamientos utilizados pueden adaptarse con el fin de obtener resultados sobre los casos restantes. Si consideramos ahora el espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$, este resulta un subconjunto de la esfera unidad de $\mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y))$. Podemos reescribir este último espacio como

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y)) = (\mathcal{A}_u(B_X)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_Y))^*. \tag{2.9}$$

Análogamente a lo realizado para $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ se verifica que $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ es $w^*-$cerrado y por lo tanto compacto con la topología $w^*$ de $(\mathcal{A}_u(B_X)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_Y))^*$.

Para $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, al ser $\mathcal{H}_b(X)$ un espacio de Fréchet debemos modificar ligeramente nuestro argumento. Consideremos primero los conjuntos

$$\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)_R = \{\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)\colon \ \Phi \text{ es continuo respecto de } \|\cdot\|_{rB_X}\}.$$

Para estos conjuntos repetimos el razonamiento previo: $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)_R$ está incluido en la esfera de $\mathcal{L}((\mathcal{H}_b(X), \|\cdot\|_{rB_X}), \mathcal{H}^\infty(B_Y)) = (\mathcal{H}_b(X), \|\cdot\|_{rB_X})\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_Y))^*$. Como antes, $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)_R$ resulta $w^*-$cerrado y por lo tanto compacto.

## 2.2. Función Radio

La función Radio es definida originalmente para el espectro escalar $\mathcal{M}_b(X)$ por Aron, Cole y Gamelin en [6, Sect. 2], estableciendo a partir de la misma una relación entre los morfismos de $\mathcal{M}_b(X)$ y los de $\mathcal{M}_\infty(B_X)$. Con este plan como guía definimos en esta sección la función radio para $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y estudiamos la relación entre los espectros $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$.

Dado un morfismo $\Phi$ en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ definimos su radio como

$$R(\Phi) = \inf\{r > 0\colon \|\Phi(f)\|_{B_Y} \le \|f\|_{rB_X}, \forall f \in \mathcal{H}_b(X)\}. \tag{2.10}$$

Notemos que al ser continuos los morfismos de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ el radio verifica

$$0 \le R(\Phi) < \infty \quad \forall \Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y).$$

Al igual de lo que sucede en el caso escalar (cf. [6, Lem. 2.1]) los morfismos en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ son continuos con respecto a la norma $\|\cdot\|_{R(\Phi)B_X}$. La demostración de este resultado es análoga a la del lema citado, pero la incluímos por completitud.

**Lema 2.2.1.** *Para todos $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y $f \in \mathcal{H}_b(X)$ se tiene que*

$$\|\Phi(f)\|_{B_Y} \le \|f\|_{R(\Phi)B_X}.$$

*Demostración.* Por Corolario 2.0.2, los morfismos de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ tienen norma 1 respecto a $\|\cdot\|_{rB_X}$ para todo $r > R(\Phi)$, es decir

$$\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_{rB_X}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_b(X).$$

Usando que toda función $f \in \mathcal{H}_b(X)$ es uniformemente continua en conjuntos acotados de $X$, un cálculo directo muestra que la función $[r \mapsto \|f\|_{rB_X}]$ es continua. Podemos entonces pasar al límite y obtener la desigualdad

$$\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_{R(\Phi)B_X}.$$

□

Además de la definición (2.10), podemos calcular el radio de un morfismo $\Phi$ a partir de analizar las correspondientes restricciones a polinomios $m-$homogéneos de manera similar a lo que sucede con el radio escalar (cf [6, Th. 2.3]). Previo a ver esto, introducimos la siguiente notación.

Dado $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ notamos con $\Phi_m$ a su restricción a $\mathcal{P}(^m X)$ (los polinomios $m$-homogéneos en $X$ de grado $m$). Con esta notación, la fórmula del radio de un morfismo vectorial está dada por la siguiente proposición

**Proposición 2.2.2.** *Sea $\Phi$ un morfismo en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$. Entonces*

$$R(\Phi) = \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m} = \sup_{m\geq 1} \|\Phi_m\|^{1/m}. \tag{2.11}$$

*Demostración.* Haremos la demostración en dos partes, comenzando por la igualdad $R(\Phi) = \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m}$. La prueba en esta primera parte sigue los mismos pasos que los del caso escalar en [6, Th. 2.3].

Sea $0 < t < \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m}$. Entonces existe una sucesión de polinomios homogéneos $P_j$ de grado $m_j$ con $m_j \to \infty$ tales que $\|P_j\| = 1$ y $\|\Phi(P_j)\| > t^{m_j}$. Si $0 < r < t$, por homogeneidad tenemos que $\|P_j\|_{rB_X} = r^{m_j}$ y por lo tanto

$$\|\Phi(P_j)\| \geq (t/r)^{m_j} \|P_j\|_{rB_X},$$

por lo que $\Phi$ no resulta continua respecto de $\|\cdot\|_{rB_X}$, es decir, $R(\Phi) \geq r$. Como la elección de $r$ y $t$ es arbitraria, $R(\Phi) \geq \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m}$.

Para ver la igualdad, tomamos $s > \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m}$. Para $m$ suficientemente grande se tiene entonces que $\|\Phi_m\| \leq s^m$. Luego existe una constante $c > 1$ tal que para todo $m \geq 0$

$$\|\Phi_m\| \leq cs^m.$$

Si $f \in \mathcal{H}_b(X)$ tiene serie de Taylor $f = \sum_m f_m$ y fijamos $r > s$ arbitrario, por la desigualdad de Cauchy tenemos

$$\|f_m\|_{rB_X} = r^m \|f_m\| \leq \|f\|_{rB_X}.$$

Luego

$$\|\Phi(f_m)\| \leq \|\Phi_m\| \|f_m\| \leq c(s/r)^m \|f\|_{rB_X}.$$

Se sigue que

$$\|\Phi(f)\| \leq c \sum_m (s/r)^m \|f\|_{rB_X},$$

es decir, $\Phi$ resulta continua respecto de $\|\cdot\|_{rB_X}$ y entonces $R(\Phi) \leq \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m}$ completando la primera parte de la prueba.

Resta entonces probar que

$$\limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m} = \sup_{m\geq 1} \|\Phi_m\|^{1/m}.$$

Aquí la demostración del caso escalar no se puede adaptar directamente, pero podemos llegar al mismo resultado mediante otro camino. Para ello, nos valemos de la siguiente desigualdad de [6, p. 55]

$$\|\varphi_m\|^2 \leq \|\varphi_{2m}\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_b(X), m \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Buscamos entonces obtener la misma desigualdad para el caso vectorial. Para ello notemos que si $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|\Phi_m\| = \sup_{y\in B_Y} \|\delta_y \circ \Phi_m\|.$$

Más aún, $\delta_y \circ \Phi_m$ coincide con la restricción a $\mathcal{P}(^m X)$ del morfismo escalar $\delta_y \circ \Phi$, por lo que

$$\|\Phi_m\| = \sup_{y\in B_Y} \|(\delta_y \circ \Phi)_m\|. \tag{2.13}$$

Combinando la desigualdad (2.12) con la igualdad (2.13) vemos que

$$\|\Phi_m\|^2 \leq \|\Phi_{2m}\| \quad \forall \Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y), m \in \mathbb{N}.$$

Esto a su vez implica que

$$\|\Phi_m\|^{1/m} \leq \|\Phi_{2m}\|^{1/2m} \quad \forall \Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y), m \in \mathbb{N},$$

por lo que el límite superior $\limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{1/m}$ y el supremo $\sup_{m\geq 1} \|\Phi_m\|^{1/m}$ deben coincidir. $\square$

Notemos que el límite superior anterior no tiene por qué ser un límite. En efecto, Deghoul exhibe en [26] un morfismo escalar $\varphi \in \mathcal{M}_b(\ell_2)$ con $R(\varphi) \neq 0$ y $\|\varphi_m\| = 0$ para todo $m$ impar. Este mismo morfismo nos aporta un ejemplo vectorial vía la inclusión

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b(\ell_2) &\to \mathcal{M}_{b,\infty}(\ell_2, B_Y) \\ \varphi &\mapsto [f \mapsto \varphi(f) \cdot 1_Y], \end{aligned}$$

donde $1_Y$ es la función constantemente 1 en $B_Y$.

Ya mencionamos anteriormente que los morfismos de composición $C_g$ cumplen para el espectro vectorial el rol que en el espectro escalar tienen las evaluaciones $\delta_x$. La relación entre el radio y los morfismos escalares $\delta_x$ demostrada en [6, Lem. 3.1 y 3.2] también tiene su versión vectorial que probamos en los dos lemas a continuación.

**Lema 2.2.3.** *La proyección $\xi_b$ satisface para todo $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$*

$$\|\xi_b(\Phi)\| \leq R(\Phi).$$

*Demostración.* Basta observar que $\|\xi_b(\Phi)\|$ coincide con $\|\Phi_1\|$ y usar la igualdad (2.11). □

**Lema 2.2.4.** *Para toda $g \in \mathcal{H}^\infty(B_X, B_Y)$ se tiene:*

$$R(C_g) = \|g\|.$$

*Demostración.* La desigualdad $R(C_g) \geq \|g\|$ es inmediata a partir del Lema 2.2.3. Para la desigualdad contraria, consideramos para cada $m \in \mathbb{N}$ la norma $\|C_{g_m}\|^{1/m}$. Tenemos entonces

$$\|C_{g_m}\|^{1/m} = \sup_{\substack{P \in \mathcal{P}(^m X) \\ \|P\| \leq 1}} \|C_g(P)\|^{1/m} = \sup_{\substack{P \in \mathcal{P}(^m X) \\ \|P\| \leq 1}} \|\widetilde{P} \circ g\|^{1/m} \leq \|g\|.$$

Por la fórmula del radio dada en (2.11) concluimos que

$$R(C_g) \leq \|g\|.$$

Y por lo tanto vale la igualdad $R(C_g) = \|g\|$. □

El siguiente paso para relacionar los diferentes espectros es extender la noción del radio a $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$. Para ello, dado $\Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ definimos $R(\Psi)$ como

$$R(\Psi) = \text{ínf}\{r > 0 \colon \|\Psi(f)\|_{B_Y} \leq \|f\|_{rB_X}, \forall f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)\}.$$

Como las funciones $\Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ son continuas respecto a la norma $\|\cdot\|_{B_X}$ sabemos que

$$0 \leq R(\Psi) \leq 1 \quad \forall \Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y).$$

El espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ se proyecta de forma natural sobre $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ vía

$$\begin{aligned} \varrho : \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) &\to \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y), \\ \Psi &\mapsto \Psi|_{\mathcal{H}_b(X)}. \end{aligned}$$

La relación entre el radio de $\Psi$ y el de su proyección $\varrho(\Psi)$ la vemos en la siguiente observación.

**Observación 2.2.5.** *Si $\Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ es tal que*

$$\|\Psi(f)\| \leq \|f\|_{rB_X} \quad \forall f \in \mathcal{H}^\infty(B_X),$$

*en particular se cumple que*

$$\|\Psi(f)\| \leq \|f\|_{rB_X} \quad \forall f \in \mathcal{H}_b(X).$$

*Por lo tanto*

$$R(\varrho(\Psi)) \leq R(\Psi).$$

Hasta aquí hemos visto que los morfismos de $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ se proyectan sobre $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ respetando una desigualdad en su radio. Para completar la descripción de la interacción entre estos espectros buscamos extender ciertos morfismos de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ a $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ a partir de la siguiente definición.

**Definición 2.2.6.** *Dados $\zeta \in \mathbb{C}$ y $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ definimos el morfismo $\Phi^\zeta$ como*

$$\Phi^\zeta(f) = \Phi(\zeta f).$$

**Observación 2.2.7.** *Los morfismos $\Phi^\zeta$ cumplen que $R(\Phi^\zeta) = |\zeta| R(\Phi)$.*

La relación entre $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ está entonces dada por la siguiente Proposición (cf. [6, Th. 10.1]).

**Proposición 2.2.8.** *La imagen de la proyección $\varrho$ es*

$$\varrho(\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)) = \{\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) \colon R(\Phi) \leq 1\}.$$

*Más aún, la proyección $\varrho$ establece la siguiente correspondencia 1-1*

$$\{\Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \colon R(\Psi) < 1\} \longleftrightarrow \{\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) \colon R(\Phi) < 1\}.$$

*Demostración.* Supongamos que $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ verifica $R(\Phi) < 1$. Como toda $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ es límite uniforme de sus sumas parciales de Taylor en la bola $R(\Phi)B_X$ y $\Phi$ es continua con respecto a la norma $\|\cdot\|_{R(\Phi)B_X}$ podemos extender $\Phi$ a $f$ de manera única. Esta extensión nos define un morfismo $\Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ que automáticamente verifica

$\varrho(\Psi) = \Phi$. Más aún, $R(\Psi) = R(\Phi)$. Concluímos que $\varrho$ es 1-1 en los respectivos conjuntos con radio menor a 1.

Si, en cambio, tomamos $\Phi$ con $R(\Phi) = 1$ podemos considerar para $|\zeta| < 1$ los morfismos $\Phi^\zeta$. Como ahora $R(\Phi^\zeta) = |\zeta|$ podemos extender estos morfismos a $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ como antes. Llamando $\Psi_\zeta$ a la correspondiente extensión, como $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ es $w^*-$compacto, podemos tomar $\Psi$ un punto de acumulación de la red $(\Psi_\zeta)_\zeta$ con $\zeta \to 1$. Por construcción necesariamente $\varrho(\Psi) = \Phi$, por lo que la imagen de $\varrho$ es exactamente el subconjunto de morfismos en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ con radio menor o igual a 1. □

Razonando de manera similar al resultado anterior podemos obtener también una correspondencia entre morfismos de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$.

**Lema 2.2.9.** *Los morfismos en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ están en correspondencia 1-1 con el conjunto $\{\Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \colon R(\Psi) < 1\}$.*

*Demostración.* Dado $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ con $R(\Phi) \leq 1$ podemos extender este morfismo a funciones en $\mathcal{A}_u(B_X)$ de la siguiente forma: para $f \in \mathcal{A}_u(B_X)$, $f = \sum P_k$ en $B_X$ definimos $\Phi(f) = \sum \Phi(P_k)$. Este procedimiento determina un morfismo en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ cuya restricción a $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ coincide con $\Phi$. Respectivamente si $\Psi$ es un morfismo en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$, la restricción a $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ que, como en la proposición anterior, notamos $\rho(\Psi)$ coincide con $\Psi$ en los polinomios. Como consecuencia la extensión de $\rho(\Psi)$ a $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ es nuevamente $\Psi$. □

## 2.3. Dominio de Riemann sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$

Un **dominio de Riemann** sobre un espacio localmente convexo $E$ es un par $(\Omega, p)$ que consiste de un espacio topológico Hausdorff $\Omega$ junto con un homeomorfismo local $p$.

Para $X$ simétricamente regular, la estructura de dominio de Riemman del espectro escalar ha sido estudiada por ejemplo en [32] para $\mathcal{M}_b(X)$ y en [11] para $\mathcal{M}_b(U)$ con $U \subset X$ abierto. Respecto al caso vectorial, en [28] se prueba que a $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ se le puede otorgar una estructura de dominio de Riemann sobre $\mathcal{L}(X^*, Y^*)$.

Como explicamos previamente, en nuestro trabajo nos hemos centrado en estudiar el espectro vectorial proyectado sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$. Además de la relación con el espectro escalar, este cambio está además justificado en la forma de construir morfismos vectoriales y en el estudio tanto de partes de Gleason como conjuntos cluster, como veremos más adelante. Al no pensar a $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ en términos de su proyección sobre $\mathcal{L}(X^*, Y^*)$ no podemos valernos de su estructura de dominio de Riemann sobre este espacio. En esta sección, sin embargo, probamos que es posible definir una estructura de dominio de Riemann en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ sobre $\mathcal{H}^\infty(Y, X^{**})$.

Para poder presentar la topología que da lugar a esta estructura a partir de sus conjuntos abiertos necesitamos primero algunas nociones previas.

Para $x^{**} \in X^{**}$ denotamos con $\tau_{x^{**}}$ a la traslación dada por

$$\tau_{x^{**}}(x) = J_X x + x^{**},$$

donde $J_X : X \to X^{**}$ es la inclusión canónica. Esta traslación induce un mapa $\tau^*_{x^{**}} : \mathcal{H}_b(X) \to \mathcal{H}_b(X)$ dado por

$$\tau^*_{x^{**}}(f)(x) = \widetilde{f}(J_X x + x^{**}).$$

Por [32, Prop. 6.30], para cada $f \in \mathcal{H}_b(X)$ la función $[x^{**} \mapsto \tau^*_{x^{**}}(f)]$ es holomorfa y de tipo acotado. Definimos entonces para cada $g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ y $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ el morfismo $\Phi^g$ en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ como

$$\begin{aligned} \Phi^g(f)(y) &= \Phi(\tau^*_{g(y)}(f))(y) \\ &= \Phi[x \mapsto \widetilde{f}(J_X x + g(y))](y). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para ver que $\Phi^g$ está bien definido debemos probar que es un morfismo de álgebras y que $\Phi^g(f)$ pertenece a $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$ para cada $f \in \mathcal{H}_b(X)$.

Comencemos por verificar que $\Phi^g(f)$ resulta una función holomorfa. Con tal objetivo consideramos la siguiente función de dos variables:

$$\begin{aligned} B_Y \times B_Y &\to \mathbb{C} \\ (y, z) &\mapsto \Phi(\tau^*_{g(z)}(f))(y). \end{aligned}$$

Es inmediato que esta función es holomorfa con respecto a la primera variable. Fijando ahora la primera variable, podemos pensar esta función como el resultado de aplicar el morfismo $\delta_y \circ \Phi$ a la composición de $[x^{**} \mapsto \tau^*_{x^{**}}(f)]$ con $[y \mapsto g(y)]$, por lo que nuevamente se trata de una función holomorfa. Por el Teorema de Hartogs la función resulta holomorfa al considerar ambas variables simultáneamente y por lo tanto lo es al restringirla al conjunto $\{(y, y) : y \in B_Y\}$. Puesto que la restricción de $[(y, z) \mapsto \Phi(\tau^*_{g(z)}(f))(y)]$ a la diagonal coincide con $\Phi^g(f)$ concluimos que esta función es holomorfa. Veamos ahora que $\Phi^g(f)$ es de tipo acotado. Recordemos que como $\Psi$ es un morfismo en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, existe una constante $r > 0$ tal que

$$\|\Phi(h)\| \leq \|h\|_{rB_X} \quad \forall h \in \mathcal{H}_b(X).$$

Podemos acotar entonces la norma de $\Psi^g(f)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B_Y} |\Phi^g(f)(y)| &= \sup_{y \in B_Y} |\Phi(\tau^*_{g(y)}(f))(y)| \leq \sup_{y,z \in B_Y} |\Phi(\tau^*_{g(z)}(f))(y)| \\ &= \sup_{z \in B_Y} \|\Phi(\tau^*_{g(z)}(f))\|_{B_Y} \leq \sup_{z \in B_Y} \|\tau^*_{g(z)}(f)\|_{rB_X} \\ &= \sup_{\substack{z \in B_Y \\ x \in rB_X}} |\widetilde{f}(g(z) + J_X x)| \leq \|f\|_{(\|g\|+r)B_X} < \infty. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Para completar la buena definición resta comprobar que $\Phi^g$ es un morfismo de álgebras pero esto es inmediato de la definición (2.14), por lo que $\Phi^g$ es un elemento de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$.

La interacción entre los morfismos $\Phi^g$ y la proyeccion $\xi_b$ está dada por la siguiente observación.

**Observación 2.3.1.** *La proyección $\xi_b$ cumple*

$$\xi_b(\Phi^g) = \xi_b(\Phi) + g. \tag{2.16}$$

*En efecto, esto se sigue de que*

$$\tau^*_{g(y)}(x^*) = x^* + g(y)(x^*) \quad \forall y \in B_Y, x^* \in X^*.$$

Estamos entonces en condiciones de presentar la estructura de Riemann de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$.

**Proposición 2.3.2.** *Sean $X$ un espacio de Banach simétricamente regular e $Y$ un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ resulta un dominio de Riemann sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ donde cada componente conexa es homeomorfa a $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$.*

*Demostración.* El esquema de la demostración es análogo a la del caso escalar [32, Sect. 6.3]. Para cada $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y $\varepsilon > 0$ consideramos los conjuntos

$$V_{\Phi,\varepsilon} = \{\Phi^g \colon g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}),\ \|g\| < \varepsilon\}.$$

Probaremos que estos conjuntos forman una base para una topología Hausdorff en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$. Veamos primero que es base: dado $\Psi \in V_{\Phi,\varepsilon}$ existe $g$ con $\|g\| < \varepsilon$ tal que $\Psi = \Phi^g$. Como $X$ es simétricamente regular, por [32, Lem. 6.28] tenemos que $\tau^*_{g(y)} \circ \tau^*_{h(y)} = \tau^*_{(g+h)(y)}$ para todo $y \in B_Y$, $h \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$. A partir de esto podemos escribir

$$\begin{aligned}\Psi^h(f)(y) &= (\Phi^g)^h(f)(y) = \Phi^g(\tau^*_{h(y)}(f))(y) = \Phi(\tau^*_{g(y)} \circ \tau^*_{h(y)}(f))(y) \\ &= \Phi(\tau^*_{(g+h)(y)}(f))(y) = \Phi^{g+h}(f)(y).\end{aligned}$$

Concluimos que $V_{\Psi,\delta} \subset V_{\Phi,\varepsilon}$ si $\delta = \varepsilon - \|g\|$ y por lo tanto estos conjuntos forman una base.

Habiendo definido la base de abiertos, probamos ahora que la topología generada es Hausdorff. Dados $\Psi \neq \Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(B_Y, X^{**})$ se tienen dos posibilidades,

$$\xi_b(\Psi) = \xi_b(\Phi) \text{ o bien } \xi_b(\Psi) \neq \xi_b(\Phi).$$

En el primer caso, a partir de la relación (2.16) se deduce que $V_{\Phi,\varepsilon} \cap V_{\Psi,\varepsilon'} = \emptyset$ para todos $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. Si, por el contrario, $\xi_b(\Phi) \neq \xi_b(\Psi)$ tomamos $\varepsilon = \frac{\|\xi_b(\Phi) - \xi_b(\Psi)\|}{2}$. Con este $\varepsilon$ obtenemos por (2.16) que $V_{\Phi,\varepsilon} \cap V_{\Psi,\varepsilon} = \emptyset$.

Para completar la demostración notemos que para cada $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ la igualdad (2.16) asegura que la proyección $\xi_b : V_{\Phi,\varepsilon} \to B_\varepsilon(\xi_b(\Psi))$ es un homeomorfismo. Se sigue que el conjunto

$$V_\Phi = \cup_{\varepsilon>0} V_{\Phi,\varepsilon} = \{\Phi^g : g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})\}$$

es homeomorfo a $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ (y por lo tanto es abierto y conexo). Además resulta inmediato que, con la topología generada por los conjuntos $V_{\Phi,\varepsilon}$ la función $\xi_b : \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ sigue siendo continua. Para completar la prueba veamos que cada conjunto $V_\Phi$ es también cerrado y por lo tanto es la componente conexa de $\Phi$. Si tomamos una red $\Phi^{g_\alpha}$ en $V_\Phi$ convergente a $\Psi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, se tiene que

$$\xi_b(\Phi^{g_\alpha}) = \xi_b(\Phi) + g_\alpha \to \xi_b(\Psi).$$

Esto implica que la red $g_\alpha$ es convergente a cierta función $g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ y que $\Psi = \Phi^g$. Por lo tanto $V_\Phi$ es cerrado y coincide con la componente conexa de $\Phi$. $\square$

Como fue notado en [28, Prop. 10], cada función $f \in \mathcal{H}_b(X)$ se puede extender a $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ de forma análoga a como opera la transformada de Gelfand en el caso escalar vía

$$\begin{aligned} \widehat{f} \colon \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) &\to \mathcal{H}^\infty(B_Y) \\ \Phi &\mapsto \Phi(f), \end{aligned}$$

esta extensión resulta holomorfa al restringir a cada componente conexa $V_\Phi$ definida anteriormente (cf. [28, Prop. 10]). Para ver esto último, hacemos uso del siguiente lema.

**Lema 2.3.3.** *Sean $X, Y$ espacios de Banach, $U \subset X$ abierto y $F : U \to H^\infty(B_Y)$ una función localmente acotada. Luego $F$ es holomorfa si y sólo si $\delta_y \circ F$ es holomorfa para todo $y \in B_Y$.*

*Demostración.* Recordemos que al ser $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$ el dual de $\mathcal{G}^\infty(B_Y)$, por la Proposición 1.1.4 basta ver que $F$ es $w^*-$holomorfa. Es decir, que basta que componer un elemento de $\mathcal{G}^\infty(B_Y)$ con $F$ resulta en una función holomorfa. Debemos ahora ver que alcanza con considerar sólamente los elementos de la forma $\delta_y$. Todo elemento $v$ en $\mathcal{G}^\infty(B_Y)$ puede ser representado en el cociente $\ell_1(B_Y)/\mathcal{H}^\infty(B_Y)^\perp$ como una suma del tipo $\sum_k \lambda_k \delta_{y_k}$, donde $(\lambda_k) \in \ell_1$ e $y_k \in B_Y$ para todo $k$. Debemos probar entonces que la función $[x \mapsto F(x)(v) = \sum_k \lambda_k F(x)(y_k)]$ es holomorfa. Sabemos por hipótesis que las funciones $[x \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k F(x)(y_k)]$ resultan holomorfas para todo $n$. Por medio de [18, Th. 14.16] basta ver que las funciones $[x \mapsto F(x)(v) = \sum_k \lambda_k F(x)(y_k)]$ son localmente acotadas para poder concluir la holomorfía de $[x \mapsto F(x)(v) = \sum_k \lambda_k F(x)(y_k)]$. En efecto, dado $x_0 \in U$, tomamos entonces $r > 0$ y $C > 0$ tales que $B_X(x_0, r) \subset U$ y tal que $F$ resulte acotada por $C$ en $B_X(x_0, r)$. Luego, para cada $x \in B_X(x_0, r)$ tenemos

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k F(x)(y_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| |F(x)(y_k)| \leq C \|(\lambda_k)\|_{\ell_1}.$$

□

Veamos ahora sí que la función

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}) &\to \mathcal{H}^\infty(B_Y) \\ g &\mapsto \Phi^g(f), \end{aligned}$$

resulta holomorfa de tipo acotado. Razonando igual que en (2.15) obtenemos que existe $r > 0$ tal que

$$\|\Phi^g(f)\| \leq \|f\|_{(\|g\|+r)B_X}.$$

A partir de esta desigualdad vemos que nuestra función es localmente acotada. Aplicando el lema previo basta entonces probar que para todo $y \in B_Y$ la función

$$[g \mapsto \Phi^g(f)(y)]$$

resulta holomorfa. Para ello escribimos $[g \mapsto \Phi^g(f)(y)]$ como la composición de las siguientes funciones holomorfas:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}) & \to & X^{**} \\ g & \mapsto & g(y) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} X^{**} & \to & \mathbb{C} \\ x^{**} & \mapsto & \Phi(\tau^*_{x^{**}}(f))(y). \end{array}$$

En conclusión hemos probado el siguiente resultado:

**Proposición 2.3.4.** *Sean $X$ un espacio de Banach simétricamente regular e $Y$ un espacio de Banach. Entonces para cada función $f \in \mathcal{H}_b(X)$ se tiene que la extensión $\widehat{f}\colon \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y)$ es una función holomorfa de tipo acotado cuando se la restringe a cada componente conexa del espectro. Es decir, $\widehat{f}\circ(\xi|_{V_\Phi})^{-1} \in \mathcal{H}_b(\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}), \mathcal{H}^\infty(B_Y))$ para todo $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$.*

## 2.4. Fibras

Recordemos brevemente la definición de la proyección $\xi_b : \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$, que está dada por

$$\begin{aligned} \xi_b : \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) &\to \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}) \\ \xi_b(\Phi)(y)(x^*) &= \Phi(x^*)(y). \end{aligned}$$

En esta sección nos centramos en el estudio de aquellos elementos de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ que proyectan sobre la misma función $g$. Este conjunto se denomina la *fibra sobre* $g$ y lo notamos

$$\mathscr{F}(g) = \{\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)\colon \xi_b(\Phi) = g\}.$$

De manera análoga se definen las fibras para $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ y para $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ considerando únicamente funciones $g$ en $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$. Seguimos escribiendo en estos casos $\mathscr{F}(g)$ para denotar las fibras por no recargar la notación pero notando que la definición depende del espectro que se está proyectando.

En el análisis de las fibras del espectro vectorial presentamos los siguientes interrogantes como guía.

**Pregunta 2.4.1.** *¿Bajo qué condiciones es $\mathscr{F}(g)$ un conjunto de un solo elemento?*

**Pregunta 2.4.2.** *¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que las fibras son grandes? En otras palabras, ¿bajo qué condiciones podemos definir una inyección analítica de una bola a $\mathscr{F}(g)$?*

### 2.4.1. Fibras de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ sobre $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$

Como vimos anteriormente, en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ tenemos bien definido para cada $g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ el morfismo de composición $C_g$ que verifica $C_g \in \mathscr{F}(g)$. Estudiar qué fibras son de un sólo elemento se traduce entonces en ver qué fibras verifican $\mathscr{F}(g) = \{C_g\}$. Para responder esta pregunta, comenzamos por relacionar la proyección de un morfismo $\Phi$ con el comportamiento de los morfismos escalares $\delta_y \circ \Phi$.

**Observación 2.4.3.** *Todo par $(y, \Phi)$ con $y \in B_Y$, $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ define un morfismo escalar $\delta_y \circ \Phi$ en $\mathcal{M}_b(X)$. Más aún, podemos reescribir la proyección $\xi_b$ como*

$$\xi_b : \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**}) \tag{2.17}$$

$$\Phi \mapsto [y \mapsto (\delta_y \circ \Phi)|_{X^*}] = [y \mapsto \pi(\delta_y \circ \Phi)]. \tag{2.18}$$

A partir de esta reescritura de $\xi_b$, notamos que para cada $y \in B_Y$ resulta

$$\xi_b(\Phi)(y) = \pi(\delta_y \circ \Phi) \quad \forall \Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y), y \in B_Y. \tag{2.19}$$

Obtenemos por lo tanto la siguiente descripción de las fibras.

**Lema 2.4.4.** *Sea $\Phi$ un morfismo en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, entonces*

1. *$\Phi$ pertenece a $\mathscr{F}(g)$ si y sólo si $\pi(\delta_y \circ \Phi) = g(y)$ para todo $y \in B_Y$.*
2. *$\Phi$ coincide con $C_g$ si y sólo si $\delta_y \circ \Phi = \delta_{g(y)}$ para todo $y \in B_Y$.*

Habiendo relacionado la proyección de un morfismo $\Phi$ con los morfismos escalares $\delta_y \circ \Phi$ podemos recurrir al siguiente resultado sobre el espectro $\mathcal{M}_b(X)$ para dar una respuesta a la pregunta 2.4.1.

**Teorema 2.4.5** ([6, Th. 3.3]). *Supongamos que los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{H}_b(X)$. Entonces la proyección $\pi : \mathcal{M}_b(X) \to X^{**}$ es una biyección.*

Notemos entonces que si los únicos morfismos en $\mathcal{M}_b(X)$ son las evaluaciones y $\Phi \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ está en $\mathscr{F}(g)$, por el Lema 2.4.4 debe ser que $\delta_y \circ \Phi = \delta_{g(y)}$ y por lo tanto $\Phi$ coincide con $C_g$. Lo que obtenemos es el siguiente resultado, que fue previamente observado en [28, pag. 10].

**Proposición 2.4.6.** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach. Si los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{H}_b(X)$ entonces para cada $g \in \mathcal{H}_b(B_Y, X^{**})$ se tiene que $\mathscr{F}(g) = \{C_g\}$.*

Para poder dar una respuesta a la pregunta 2.4.2 necesitamos morfismos en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ que no sean de composición. Lo primero que observamos en este sentido es que podemos encontrar en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ a los morfismos del espectro escalar:

**Observación 2.4.7.** *El espectro escalar se puede ver naturalmente dentro de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ a través de la inclusión $[\varphi \mapsto \varphi \cdot 1_Y]$ donde cada elemento de $\mathcal{M}_b(X)$ yace en la fibra sobre una función constante.*

Esta primera aproximación nos permite encontrar morfismos que no son de composición a partir de fibras escalares que contienen más de un elemento. Tiene, sin embargo, dos limitantes: no aporta morfismos nuevos (i.e. morfismos que sean propios del espectro vectorial) y sólo refiere a fibras sobre constantes. Incluyendo la hipótesis adicional de que $X$ tenga un polinomio que no es $w-$continuo en acotados podemos encontrar morfismos que no coinciden con el morfismo de composición en todas las fibras, similarmente a lo que sucede en el caso escalar (cf.[10, Th. 3.1]). En particular, esta construcción aporta morfismos nuevos en todas las fibras sobre funciones no constantes.

**Teorema 2.4.8.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que existe un polinomio no $w-$continuo en acotados. Entonces para cada $g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ podemos inyectar el disco complejo $\mathbb{D}$ analíticamente en la fibra sobre $g$.*

*Demostración.* Si existe en $X$ un polinomio que no es $w-$continuo en acotados entonces por [15, Cor. 2] o [8, Prop. 1] podemos encontrar un polinomio $m-$homogéneo $P$ tal que su extensión canónica $\widetilde{P}$ no es $w^*-$continua en ningún $x^{**} \in X^{**}$. Dada $g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$, si notamos con $x_0^{**}$ a $g(0)$ podemos encontrar $\varepsilon > 0$ y una red $(x_\alpha^{**})_\alpha$ $w^*-$convergente a $x_0^{**}$ que satisface $|\widetilde{P}(x_\alpha^{**}) - \widetilde{P}(x_0^{**})| > \varepsilon$ para todo $\alpha$. Sea entonces para cada $\alpha$ y cada $t \in \mathbb{D}$ el morfismo $\Phi_{\alpha,t} \in \mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ dado por

$$\Phi_{\alpha,t}(f)(y) = \widetilde{f}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**})).$$

Notemos que los morfismos $\Phi_{\alpha,t}$ son morfismos de composición, por lo que están bien definidos. Fijamos ahora un ultrafiltro $\mathscr{U}$ que contenga a los conjuntos $\{\alpha \colon \alpha \geq \alpha_0\}$ y definimos para cada $t \in \mathbb{D}$ el morfismo $\Phi_t : \mathcal{H}_b(X) \to \mathcal{H}^\infty(B_Y)$ dado por

$$\Phi_t(f)(y) = \lim_{\mathscr{U}} \Phi_{\alpha,t}(f)(y) = \lim_{\mathscr{U}} \widetilde{f}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**})).$$

Aquí el límite existe pues para cada $t$ y cada $f$, si $M$ es una cota para la red $(x_\alpha^{**})_\alpha$ tenemos

$$\left\| \widetilde{f}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**})) \right\| \leq \|f\|_{(\|g\|+M+\|x_0^{**}\|)B_X}$$

y, como notamos en la sección 2, el conjunto $(\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y))_{\|g\|+M+\|x_0^{**}\|}$ es $w^*-$compacto. La desigualdad anterior muestra además que para todo $\alpha$ las funciones

$$[y \mapsto \Phi_{\alpha,t}(f)(y)] = [y \mapsto \widetilde{f}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**}))]$$

están en una bola de $\mathcal{H}^\infty(B_Y) = (\mathcal{G}^\infty(B_Y))^*$. Al ser esta bola $w^*-$compacta existe el límite $\lim_{\mathscr{U}}[y \mapsto \Phi_{\alpha,t}(f)(y)]$ y resulta una función en $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$. Por construcción, es inmediato que

$$\lim_{\mathscr{U}}[y \mapsto \Phi_{\alpha,t}(f)(y)] = \Phi_t(f) \in \mathcal{H}^\infty(B_Y).$$

Veamos ahora que $\xi(\Phi_t) = g$ para todo $t \in \mathbb{D}$. Sabemos que para cada $\alpha$ y $x^* \in X^*$ se tiene

$$\Phi_{\alpha,t}(x^*) = [y \mapsto g(y)(x^*) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**})(x^*)].$$

Tomando límite en $\alpha$ obtenemos

$$\Phi_t(x^*) = g(y)(x^*).$$

De aquí es inmediato que $\xi(\Phi_t) = g$. Lo siguiente es probar que la función $[t \mapsto \Phi_t]$ es analítica. Para ello debemos ver que para toda $f \in \mathcal{H}_b(X)$ la función

$$\begin{aligned} \Phi(f) : \mathbb{D} &\to \mathcal{H}^\infty(B_Y) \\ t &\mapsto [y \mapsto \Phi_t(f)(y) = \lim_{\mathscr{U}} \widetilde{f}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**}))], \end{aligned}$$

es analítica. Fijamos entonces $f \in H_b(X)$ y definimos $f_\alpha : \mathbb{D} \to \mathcal{H}^\infty(B_Y)$ como

$$f_\alpha(t)(y) = \Phi_{\alpha,t}(f) = \widetilde{f}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**})).$$

El conjunto $\{f_\alpha\}_\alpha$ está contenido en $\|f\|_{KB_X}\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D},\mathcal{H}^\infty(B_Y))}$, donde $K = \|g\| + (|t_0| + s)(M + \|x_0^{**}\|)$. Como, por [51, Th. 2.1],

$$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{H}^\infty(B_Y)) = \mathcal{L}(\mathcal{G}^\infty(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_Y)) = (\mathcal{G}^\infty(\mathbb{D})\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_Y))^*,$$

el conjunto $\|f\|_{KB_X}\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D},\mathcal{H}^\infty(B_Y))}$ es $w^*-$compacto, por lo que el límite de las $f_\alpha$ se puede tomar de forma analítica en $t$. Esto prueba que la función

$$t \mapsto \Phi_t(f) = \lim_{\mathscr{U}} \widetilde{f}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**}))$$

es analítica. Resta entonces construir la inyección analítica a partir de $[t \mapsto \Phi_t]$. Como $P$ es un polinomio $m-$homogéneo, podemos escribir

$$\widetilde{P}(g(y) + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**})) = \widetilde{P}(g(y)) + \sum_{j=1}^{m} t^j \binom{m}{j} \overset{\vee}{\widetilde{P}}(g(y)^{m-j}, (x_\alpha^{**} - x_0^{**})^j).$$

En particular, si tomamos $y = 0$ obtenemos

$$\Phi_t(P)(0) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j.$$

Utilizando que

$$|\Phi_1(P)(0) - \Phi_0(P)(0)| = \lim_{\mathscr{U}} |\widetilde{P}(x_\alpha^{**}) - \widetilde{P}(x_0^{**})| \geq \varepsilon,$$

tenemos un polinomio no constante de grado $\leq m$. Existe entonces $t_0 \in \mathbb{D}$ t $s > 0$ tal que $\Phi_t(P)(0)$ es una función inyectiva en $\mathbb{D}(t_0, s)$. Componiendo con la función

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{D} &\to \mathbb{D}(t_0, s) \\ t &\mapsto t_0 + st \end{aligned}$$

obtenemos la inyección analítica $\Phi \circ \gamma : \mathbb{D} \to \mathscr{F}(g)$, como queríamos. $\square$

Es importante notar que para el caso de fibras sobre funciones constantes $g$, el Teorema anterior no aporta morfismos que no provengan del espectro escalar. En efecto, si tomamos $g(y) = x_0^{**}$ tenemos que

$$\Phi_t(f)(y) = \lim_{\mathscr{U}} \widetilde{f}(x_0^{**} + t(x_\alpha^{**} - x_0^{**})),$$

que resulta una función constante con respecto a $y$ y por lo tanto se identifica con un morfismo en $\mathcal{M}_b(X)$. Sin embargo, a partir del resultado anterior podemos construir una nueva inyección analítica de la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ a la fibra de una función constante $g$ que nos provee de ejemplos de morfismos que no provienen del espectro escalar.

**Teorema 2.4.9.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que existe un polinomio no $w-$continuo en acotados. Entonces para cada función constante $g \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ podemos inyectar la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ analíticamente en la fibra sobre $g$. Más aún, la imagen por esta inyección de una función no constante $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ es un morfismo en $\mathscr{F}(g)$ que no proviene del espectro escalar.*

*Demostración.* Dada $g(y) = x_0^{**}$ para todo $y$, por la demostración del Teorema 2.4.8 tenems una inyección analítica $\Phi \circ \gamma : \mathbb{D} \to \mathscr{F}(g)$. Consideramos ahora $\Psi : B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)} \to \mathscr{F}(g)$ dada por

$$\Psi(h)(f)(y) = \Phi \circ \gamma(h(y))(f), \quad \forall h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)},\ f \in \mathcal{H}_b(X),\ y \in B_Y.$$

Veamos que $\Psi$ está bien definida y resulta una inyección analítica. Primero notemos que para toda $f \in \mathcal{H}_b(X)$ y $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ se tiene que $\Psi(h)(f)$ es analítica pues es la composición de las siguientes funciones holomorfas: $[y \mapsto h(y)]$ y $[t \mapsto \Phi \circ \gamma(t)(f)]$. Adicionalmente, $\Psi(h)(f)$ es acotada

$$\sup_{y \in B_Y} |\Psi(h)(f)(y)| \leq \|f\|_{(\|g\|+M+\|x_0^{**}\|)B_X}.$$

Por construcción, resulta inmediato que $\Psi(h)$ pertenece a $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y que proyecta sobre $g$, por lo que $\Psi$ está bien definida.

Para ver que $\Psi$ es analítica debemos probar que para cada $f \in \mathcal{H}_b(X)$ la función de $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ a $\mathcal{H}^\infty(B_Y)$ dada por $[h \mapsto \Psi(h)(f)]$ es analítica. Nuevamente por Lema 2.3.3 basta verificar que la función $[h \mapsto \Psi(h)(f)(y)]$ es analítica para todo $y \in B_Y$, pero esto se comprueba al reescribir la función como la composición de $[h \mapsto h(y)]$ y $[t \mapsto \Phi \circ \gamma(t)(f)]$.

Por último, notemos que la inyectividad de $\Psi$ se sigue de que $\Phi \circ \gamma$ tiene la misma propiedad. Más aún, a partir de esto podemos ver que $\Psi$ manda toda función no constante de $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ en un morfismo no-escalar. Si $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ es no constante entonces existen $y_1$ e $y_2$ en $B_Y$ tales que $h(y_1) \neq h(y_2)$. Luego por la inyectividad de $\Phi \circ \gamma$ tenemos $\Phi \circ \gamma(h(y_1)) \neq \Phi \circ \gamma(h(y_2))$. Por lo tanto $\Psi(h)$ no puede ser de la forma $\varphi \cdot 1_Y$ para $\varphi$ un morfismo escalar. $\square$

### 2.4.2. Fibras de $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ sobre $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$

Tornamos ahora nuestra atención sobre $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$. Aquí la proyección $\xi_\infty$ está dada por

$$\begin{gathered} \xi_\infty : \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \to \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})} \\ \xi_\infty(\Phi)(x^*)(y) = \Phi(x^*)(y). \end{gathered}$$

Queremos estudiar las fibras definidas como

$$\mathscr{F}(g) = \{\Phi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \colon \xi_\infty(\Phi) = g\},$$

para cada $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$. A diferencia del caso de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ aquí resulta necesario hacer una distinción entre las fibras. De forma similar a lo que sucede con $\mathcal{M}_\infty(X)$, donde es relevante la distinción entre las fibras sobre $z \in B_{X^{**}}$ (para las cuales $\delta_z$ pertenece a la fibra) y fibras sobre elementos del borde (donde no se puede definir $\delta_z$) las fibras sobre funciones $g$ se distinguen naturalmente según si $C_g$ está bien definido o no.

Recordemos que si $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$ cumple $\|g(y_0)\| = 1$ para $y_0 \in B_Y$ entonces necesariamente $g(y)$ pertenece a $S_{X^{**}}$ para todo $y \in B_Y$. De aquí que tenemos dos posibilidades para las fibras:

(i) $g(B_Y) \subset B_{X^{**}}$ (donde $C_g \in \mathscr{F}(g)$).

(ii) $g(B_Y) \subset S_{X^{**}}$ (donde no se puede definir $C_g$).

En el caso particular en que $X^{**}$ es estrictamente convexo, las únicas funciones que verifican $g(B_Y) \subset S_{X^{**}}$ son funciones constantes [57, Th. 3.1]. En este caso podemos reescribir la condición (ii) como:

(ii') Existe $x_0^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que $g(y) = x_0^{**}$ para todo $y \in B_Y$ (donde no se puede definir $C_g$).

Con esta distinción en mente, buscamos una descripción de $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ en torno a las preguntas 2.4.1 y 2.4.2. Siguiendo la guía de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, obtenemos la siguiente interacción entre la proyección $\xi_\infty$ y los morfismos escalares $\delta_y \circ \Phi$ ($\Phi \in \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$).

**Lema 2.4.10.** *Sea $\Phi$ un morfismo en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$, entonces*

1. *$\Phi$ pertenece a $\mathscr{F}(g)$ si y sólo si $\pi(\delta_y \circ \Phi) = g(y)$ para todo $y \in B_Y$.*

2. *$\Phi$ coincide con $C_g$ si y sólo si $\delta_y \circ \Phi = \delta_{g(y)}$ para todo $y \in B_Y$.*

Omitimos en este caso la demostración por ser análoga a la del Lema 2.4.4.

El siguiente paso en nuestro estudio de las fibras en $\mathcal{M}_{b,\infty}(B_X, B_Y)$ fue incluir los morfismos del espectro escalar correspondiente. Nuevamente en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ podemos incluír los morfismos de $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ vía

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot 1_Y.$$

Esta inclusión manda la fibra sobre un elemento $x_0^{**}$ a la fibra sobre la función constante $x_0^{**}$. Las fibras sobre funciones constantes atraviesan los casos (i) y (ii) remarcados anteriormente.

Sobre ciertas funciones constantes (específicamente aquellas sobre elementos en $S_{X^{**}}$ que sean *norm attaining*) podemos construir morfismos nuevos a partir de resultados escalares.

**Definición 2.4.11.** *Decimos que un elemento $x_0^{**} \in S_{X^{**}}$ es norm attaining si existe $x_0^* \in S_{X^*}$ tal que $x_0^{**}(x_0^*) = 1$.*

Por ejemplo, todo elemento $x \in S_X$ resulta *norm attaining*. Las fibras escalares sobre elementos *norm attaining* contienen una copia analítica del disco $\mathbb{D}$.

**Proposición 2.4.12** ([10, Prop. 2.1]). *Dado un espacio de Banach $X$ y un elemento norm attaining $x_0^{**} \in S_{X^{**}}$, existe una inyección analítica*

$$F : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{M}_{x_0^{**}}(\mathcal{H}^\infty(B_X)).$$

A partir de esta inyección analítica en el caso escalar, obtenemos morfismos en el espectro vectorial.

**Proposición 2.4.13.** *Sean $X$, $Y$ espacios de Banach y $x_0^{**} \in S_{X^{**}}$ un elemento norm attaining. Si $g(y) = x_0^{**}$ para todo $y \in B_Y$, existe una inyección analítica*

$$\Psi : B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)} \hookrightarrow \mathscr{F}(g) \subset \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y).$$

*Más aún, para toda función $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ no constante, la imagen $\Psi(h)$ es un morfismo que no proviene del espectro escalar.*

*Demostración.* Sea $F : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{M}_{x_0^{**}}(\mathcal{H}^\infty(B_X))$ la inyección analítica dada por la Proposición 2.4.12. Definimos entonces la inyección analítica $\Psi : B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)} \hookrightarrow \mathscr{F}(g)$ como

$$\begin{aligned} \Psi : B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)} &\hookrightarrow \mathscr{F}(g) \subset \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \\ \Psi(h)(f)(y) &= F(h(y))(f), \end{aligned}$$

de aquí en adelante la demostración es igual a la prueba del Teorema 2.4.19, por lo que omitimos los detalles restantes. $\square$

A partir de este resultado podemos dar una descripción de ciertos espectros. Para $X$ de dimensión finita citamos la siguiente conjetura de [6, pag. 88]: *"one expects that the fiber over $x_0$ consists of only the evaluation homomorphism $\delta_{x_0}$ for $x_0 \in B_X$"*. No sabemos si esta conjetura es cierta, pero si que esto sucede para $B_X = \mathbb{D}$ [43, Ch. 10] y para todo espacio de dimensión finita $X$ tal que el problema de Gleason está resuelto para $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ ([54, 6.6] o [17, 47]) que incluye por ejemplo los espacios $X = \ell_p^n$, con $1 < p < \infty$. Bajo la hipótesis adicional de que $X$ sea estrictamente convexo obtenemos la siguiente descripción para las fibras de $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$.

**Teorema 2.4.14.** *Sea $X$ un espacio de Banach de dimensión finita, estrictamente convexo tal que el problema de Gleason está resuelto para $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ y sea $Y$ un espacio de Banach. Entonces para cada $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X)}$ hay dos alternativas para la fibra $\mathscr{F}(g)$:*

*(i) Si $g(B_Y) \subset B_X$, entonces $\mathscr{F}(g) = \{C_g\}$.*

*(ii) Si $g \equiv x_0$ con $x_0 \in S_X$, entonces existe una inyección analítica de $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ en $\mathscr{F}(g)$.*

Cabe destacar que el ítem $(i)$ fue previamente probado para $\mathbb{D}$ en [36, Proposition 15] y para $\ell_2^n$ en [54, Theorem 6.6.5].

*Demostración.* Primero recordemos que al ser $X$ estrictamente convexo las únicas dos posibilidades para una función $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X)}$ son las que corresponden a los dos ítems del enunciado.

Si $g$ verifica que $g(B_Y) \subset B_X$ y $\Phi \in \mathscr{F}(g)$ entonces razonando como en el Lema 2.4.4 sabemos que para todo $y \in B_Y$ el morfismo escalar $\delta_y \circ \Phi$ es un elemento de la fibra sobre $g(y) \in B_X$. Como esta fibra es el conjunto de un elemento $\{\delta_{g(y)}\}$, recurriendo nuevamente al Lema 2.4.4 deducimos que $\Psi = C_g$.

Si por el contrario $g \equiv x_0$ con $x_0 \in S_X$ el resultado se sigue de la Proposición 2.4.13. $\square$

Un caso destacado al que aplica el Teorema anterior es $X = Y = \mathbb{C}$. Los morfismos de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ en $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ han sido largamente estudiados, por ejemplo en [58, 48, 41, 36]. A partir de nuestra construcción podemos dar una descripción de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D},\mathbb{D})$ en términos de sus fibras, que se asemeja a lo que sucede en el espectro escalar $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ (cf. [55, 43]).

El espectro $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D},\mathbb{D})$ se proyecta sobre $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$, vía

$$\begin{aligned} \xi_\infty : \mathcal{M}_\infty(\mathbb{D},\mathbb{D}) &\to \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})} \\ \Phi &\mapsto [x \mapsto \Phi(z)(x)], \end{aligned}$$

donde $z : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es la función identidad. Esta proyección divide el espectro en términos de dos tipos de fibras, que caracterizamos a partir del Teorema 2.4.14.

(i) Fibras sobre funciones $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$ tales que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, que únicamente contienen al morfismo $C_g$.

(ii) Fibras sobre funciones $g \equiv x_0$ con $x_0 \in S_X$, que contienen una copia analítica de $B_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$.

Pasamos ahora al caso $X$ infinito dimensional. Aquí la situación del caso escalar es muy distinta: sabemos por [6, Theorem 11.1] que cada fibra del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ contiene una copia homeomorfa de $\beta(\mathbb{N})$. A partir de la inclusión

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot 1_Y$$

esto se traslada canónicamente a las fibras sobre funciones $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ constantes del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X,B_Y)$. Obtenemos así ejemplos de fibras "grandes"para ambos tipos de fibras.

Para el segundo tipo de fibras

(ii) Fibras sobre funciones $g$ tales que $g(B_Y) \subset S_{X^{**}}$ o equivalentemente, funciones $g$ de norma constante igual a 1.

Demostramos que para toda función $g$ de norma constante 1 (no necesariamente funciones constantes) la fibra $\mathscr{F}(g)$ contiene una copia homeomorfa de $\beta(\mathbb{N})$.

**Proposición 2.4.15.** *Sean $X, Y$ espacios de Banach con $X$ de dimensión infinita. Si $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$ es tal que $g(B_Y) \subset S_{X^{**}}$ entonces la fibra sobre $g$ contiene una copia homeomorfa de $\beta(\mathbb{N})$.*

Para poder probar este resultado necesitamos primero hablar brevemente de las sucesiones interpolantes.

Decimos que una sucesión $(z_k)_k$ en $B_{X^{**}}$ es **interpolante** para $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ si para toda sucesión $(\alpha_k)$ en $\ell_\infty$ existe una función $f \in B_X$ tal que $f(z_k) = \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Vamos a necesitar además el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.16** ([6, Th. 10.5]]). *Sea $(z_k)_k$ una sucesión en $B_{X^{**}}$ tal que $\|z_k\| \to 1$. Entonces existe una subsucesión $(z_{k_j})$ que resulta interpolante para $\mathcal{H}^\infty(B_X)$.*

Por último vamos a usar también la siguiente observación sobre $\beta(\mathbb{N})$.

**Observación 2.4.17.** *El espacio $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ contiene una copia homeomorfa de $\beta(\mathbb{N})$. En efecto, si escribimos $\mathbb{N}$ como una unión numerable de conjuntos $A_n$ numerables y disjuntos dos a dos podemos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento $a_n \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ tal que $a_n \in \overline{A_n}$. Sea entonces $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. La clausura de este nuevo conjunto $A$ está contenida en $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ y resulta homeomorfa a $\beta(\mathbb{N})$.*

*Demostración de la proposición 2.4.15.* Sea $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$ tal que $g(B_Y) \subset S_{X^{**}}$. Fijamos $y_0 \in B_Y$. Como $\|g(y_0)\| = 1$, para cada $(r_n)_n \in \mathbb{D}$ tal que $r_n \to 1$ la sucesión $(r_n g(y_0))_n$ tiene una subsucesión interpolante para $\mathcal{H}^\infty(B_X)$ (que volvemos a llamar $(r_n g(y_0))_n$). Sea ahora $g_n = r_n g$, consideramos:

$$\begin{aligned} I : \mathbb{N} &\to \overline{\{C_{g_n}\}}^{w^*} \subseteq \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \\ m &\mapsto C_{g_m}. \end{aligned}$$

Por la propiedad universal de $\beta\mathbb{N}$ existe una extensión continua $\beta I : \beta\mathbb{N} \to \overline{\{C_{g_n}\}}^{w^*}$ tal que $\beta I|_{\mathbb{N}} = I$. Como $(r_n g(y_0))$ es una sucesión interpolante, la composición $\delta_{y_0} \circ \beta I$ es inyectiva y por lo tanto también es inyectiva $\beta I$.

Por último, resulta inmediato que para cada $\eta \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ la imagen $\beta I(\eta)$ yace en la fibra sobre $g$. El resultado entonces se completa a partir de la Observación 2.4.17 que indica que $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. □

Para estudiar el caso restante ($g(B_Y) \subset B_{X^{**}}$) resulta necesario ajustar la distinción de fibras presentada al principio de la sección para separar aquellas funciones que verifican simultáneamente $\|g\| = 1$ y $g(B_Y) \subset B_{X^{**}}$. Las posibles fibras a considerar entonces son:

(i) Fibras sobre funciones $g$ tales que $\|g\| < 1$. Las denominamos **fibras interiores**.

(ii) Fibras sobre funciones $g$ tales que $g(B_Y) \subset B_{X^{**}}$ y $\|g\| = 1$. Las denominamos **fibras de transición**.

(iii) Fibras sobre funciones $g$ tales que $g(B_Y) \subset S_{X^{**}}$. Las denominamos **fibras de borde**.

Hasta aquí hemos visto en la Proposición 2.4.15 que las fibras de borde contienen una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. Resulta natural preguntarse si el mismo resultado puede extenderse a fibras de transición o a fibras interiores. Si bien no tenemos una respuesta general a esta pregunta, podemos obtener morfismos que no son de composición en las fibras interiores para aquellos espacios $X$ que poseen un polinomio no $w-$continuo en acotados.

**Teorema 2.4.18.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que existe un polinomio en $X$ que no es $w-$continuo en acotados y sea $Y$ un espacio de Banach. Entonces para toda función $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ podemos inyectar el disco complejo $\mathbb{D}$ analíticamente en la fibra sobre $g$.*

La demostración de este resultado es similar a la del Teorema 2.4.8, por lo que la omitimos. Un ligero cambio surge al elegir la red $(x_\alpha^{**})$ debido a que esta elección debe hacerse en la bola $B(x_0^{**}, 1-\|g\|)$. De allí en adelante la demostración continúa de manera análoga.

Tal y como sucede en $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ esta inyección analítica no aporta morfismos nuevos (que no provengan del espectro escalar) para las fibras sobre funciones constantes. Podemos, sin embargo (como hicimos en el caso de $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$) construir morfismos vectoriales en estas fibras a partir del resultado anterior.

**Teorema 2.4.19.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que existe un polinomio no $w-$continuo en acotados. Entonces para cada función constante $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ podemos inyectar la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ analíticamente en la fibra sobre $g$. Más aún, la imagen por esta inyección de una función no constante $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ es un morfismo en $\mathscr{F}(g)$ que no proviene del espectro escalar.*

*Demostración.* Sea $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ una función constante y $F : \mathbb{D} \to \mathscr{F}(g)$ la inyección analítica dada por el Teorema 2.4.18. Definimos entonces

$$\begin{aligned} \Psi : B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)} &\to \mathscr{F}(g) \\ \Psi(h)(f)(y) &= F(h(y))(f). \end{aligned}$$

Siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 2.4.19 obtenemos que $\Psi$ es una inyección analítica. $\square$

Completamos esta sección estudiando qué fibras resultan isométricas en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$. Recordemos que en el espectro la métrica (denominada la métrica de Gleason) es inducida por $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y))$, esto es

$$d(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\|.$$

El siguiente resultado nos da condiciones suficientes bajo las cuales existe una isometría en el espectro que manda una fibra en otra (cf. con [9, Proposition 1.6] en el espectro escalar).

**Proposición 2.4.20.** *Sean $X, Y$ espacios de Banach y $\theta : B_X \to B_X$ un automorfismo. Entonces el mapa*

$$\begin{aligned} \Lambda_\theta : \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) &\to \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \\ \Phi &\mapsto (f \mapsto \Phi(f \circ \theta)) \end{aligned}$$

*resulta una isometría con la métrica de Gleason. Más aún, si $X$ es simétricamente regular y para cada $x^* \in X^*$ tanto $x^* \circ \theta$ como $x^* \circ \theta^{-1}$ pueden obtenerse como límite uniforme de polinomios de tipo finito entonces para cada $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$ se tiene que $\Lambda_\theta(\mathscr{F}(g)) = \mathscr{F}(\widetilde{\theta} \circ g)$.*

*Demostración.* Para cada $\Phi$ y $\Psi$ en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ tenemos que

$$\|\Lambda_\theta(\Phi) - \Lambda_\theta(\Psi)\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}^\infty(B_X) \\ \|f\| \le 1}} \|\Phi(f \circ \theta) - \Psi(f \circ \theta)\| \le \|\Phi - \Psi\|.$$

Aplicando la misma desigualdad a $\Lambda_{\theta^{-1}}$ y observando que $\Lambda_{\theta^{-1}} \circ \Lambda_\theta = Id$ vemos que $\Lambda_\theta$ resulta una isometría.

Supongamos ahora que $X$ es simétricamente regular y que para todo $x^*$ tanto $x^* \circ \theta$ como $x^* \circ \theta^{-1}$ están en la clausura de los polinomios de tipo finito. Para todo $\Phi \in \mathscr{F}(g)$, $y \in B_Y$, $x^* \in X^*$ tenemos

$$\Lambda_\theta(\Phi)(x^*)(y) = \Phi(x^* \circ \theta)(y).$$

Como $x^* \circ \theta$ es límite uniforme de polinomios de tipo finito, lo mismo ocurre con $\widetilde{x^* \circ \theta}$ esto implica que existe una única extensión de $\widetilde{\theta}$ a $\overline{B}_{X^{**}}$ que es $w^*-$continua. Podemos entonces calcular

$$\Phi(x^* \circ \theta)(y) = \widetilde{x^* \circ \theta}(g(y)) = \widetilde{\theta}(g(y))(x^*).$$

Esto prueba que $\Lambda_\theta(\mathscr{F}(g))$ está contenido en $\mathscr{F}(\widetilde{\theta} \circ g)$. Como $X$ es simétricamente regular, razonando como en la demostración de [20, Cor. 2.2] es fácil ver que $\widetilde{\theta^{-1}} \circ \widetilde{\theta} = Id$. Repitiendo entonces el argumento anterior para $\theta^{-1}$ en lugar de $\theta$ obtenemos que

$$\mathscr{F}(\widetilde{\theta} \circ g) = \Lambda_\theta \left[ \Lambda_{\theta^{-1}}(\mathscr{F}(\widetilde{\theta} \circ g)) \right] \subset \Lambda_\theta(\mathscr{F}(\widetilde{\theta^{-1}} \circ \widetilde{\theta} \circ g)) = \Lambda_\theta(\mathscr{F}(g)),$$

probando así la igualdad deseada. $\square$

### 2.4.3. Fibras de $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ sobre $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$

Situado entre $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$ y $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ podemos aplicar algunos resultados previos correspondientes a cada espectro al caso de $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$ con demostraciones análogas. Presentamos a través de estos resultados (omitiendo repetir las demostraciones) el panorama de las fibras de $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$.

Similarmente a lo que sucede con $\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y)$, siempre podemos encontrar a los morfismos de composición $C_g$ en la fibra para toda $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$. Nuevamente, podemos determinar si un morfismo $\Phi$ es de composición a partir de los morfismos escalares $\delta_y \circ \Phi$.

**Lema 2.4.21.** *Sea $\Phi$ un morfismo en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_X, B_Y)$, entonces*

1. *$\Phi$ pertenece a $\mathscr{F}(g)$ si y sólo si $\pi(\delta_y \circ \Phi) = g(y)$ para todo $y \in B_Y$.*
2. *$\Phi$ coincide con $C_g$ si y sólo si $\delta_y \circ \Phi = \delta_{g(y)}$ para todo $y \in B_Y$.*

Para aquellos espacios $X$ tales que los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{A}_u(B_X)$, el correspondiente morfismo de composición resulta el único elemento en la fibra sobre $g$.

**Proposición 2.4.22.** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach. Si los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{A}_u(B_X)$ entonces para cada $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ se tiene que $\mathscr{F}(g) = \{C_g\}$.*

Si, por el contrario, existe un polinomio que no es $w-$continuo en acotados, podemos encontrar más elementos en las fibras sobre $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$.

**Teorema 2.4.23.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que existe un polinomio en $X$ que no es $w-$continuo en acotados y sea $Y$ un espacio de Banach. Entonces para toda función $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ podemos inyectar el disco complejo $\mathbb{D}$ analíticamente en la fibra sobre $g$.*

Nuevamente, este resultado puede mejorarse para las fibras sobre funciones constantes:

**Teorema 2.4.24.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que existe un polinomio no $w-$continuo en acotados. Entonces para cada función constante $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ podemos inyectar la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ analíticamente en la fibra sobre $g$. Más aún, la imagen por esta inyección de una función no constante $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ es un morfismo en $\mathscr{F}(g)$ que no proviene del espectro escalar.*

Notemos que, a diferencia de lo que sucede en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$, no podemos asegurar que las fibras de borde sean grandes, aún con la hipótesis adicional de que exista en $X$ un polinomio no $w-$continuo. Estas fibras pueden incluso sólo contener al correspondiente morfismo de composición, como veremos más adelante en el caso $X = \ell_2$.

## 2.5. Partes de Gleason

Como mencionamos en el capítulo 1, el estudio de partes de Gleason en el caso escalar está motivado por la búsqueda de estructuras analíticas. En esta sección extendemos la noción de partes de Gleason al espectro vectorial y estudiamos sus propiedades generales así como también su relación con las fibras y estructuras analíticas.

Dadas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras uniformes definimos para cada par $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la distancia $\sigma(\Phi, \Psi)$ como

$$\sigma(\Phi, \Psi) = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{B})} \rho(\varphi \circ \Phi, \varphi \circ \Psi).$$

Aquí $\rho$ está dada por la fórmula (1.5) correspondiente al espectro escalar. Esta distancia se relaciona con la métrica usual del espectro $d(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\|$ vía la siguiente igualdad

$$\sigma(\Phi, \Psi) = \frac{4\|\Phi - \Psi\|}{4 + \|\Phi - \Psi\|^2}.$$

En efecto, por la igualdad (1.6) sabemos que

$$\rho(\varphi \circ \Phi, \varphi \circ \Psi) = \frac{4\|\varphi \circ \Phi - \varphi \circ \Psi\|}{4 + \|\varphi \circ \Phi - \varphi \circ \Psi\|^2}.$$

Como la función $h(t) = \frac{4t}{4+t^2}$ es continua y creciente en el intervalo $[0, 2]$, tenemos para todo $C \subset [0, 2]$ la igualdad $\sup_{t \in C} h(t) = h(\sup_{t \in C})$. Luego

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi, \Psi) &= \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{B})} \rho(\varphi \circ \Phi, \varphi \circ \Psi) \\ &= \frac{4 \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}))} \|\varphi \circ \Phi - \varphi \circ \Psi\|}{4 + \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{B})} \|\varphi \circ \Phi - \varphi \circ \Psi\|^2} \\ &= \frac{4\|\Phi - \Psi\|}{4 + \|\Phi - \Psi\|^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma(\Phi, \Psi) = 1$ si y sólo si $\|\Phi - \Psi\| = 2$. Más aún, se desprende de la misma propiedad en el caso escalar que la condición $\Phi \sim \Psi$ si $\sigma(\Phi, \Psi) < 1$ da lugar a una relación de equivalencia. Definimos entonces la parte de Gleason de un morfismo $\Phi$ como

$$\mathcal{GP}(\Phi) = \{\Psi : \ \|\Phi - \Psi\| < 2\} = \{\Psi : \ \sigma(\Phi, \Psi) = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{B})} \rho(\varphi \circ \Phi, \varphi \circ \Psi) < 1\}. \tag{2.20}$$

Esta noción (sin el nombre de partes de Gleason) ya fue considerada en varios artículos, entre ellos [12, 21, 34, 41, 45, 48]. En el caso particular del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ podemos reescribir la definición de partes de Gleason como

$$\mathcal{GP}(\Phi) = \{\Psi : \ \|\Phi - \Psi\| < 2\} = \{\Psi : \ \sigma(\Phi, \Psi) = \sup_{y \in B_Y} \rho(\delta_y \circ \Phi, \delta_y \circ \Psi) < 1\}, \tag{2.21}$$

donde aquí $\rho$ es la métrica pseudo-hiperbólica en $\mathcal{M}_\infty(B_X)$. Al igual que en el caso escalar, las partes de Gleason del espectro vectorial permiten buscar estructuras analíticas:

**Proposición 2.5.1.** *Sean $X, Y$ y $Z$ espacios de Banach. Si $F : B_Z \to \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ es una inyección analítica entonces $F(B_Z)$ está contenido en una única parte de Gleason.*

*Demostración.* Sean $z_1, z_2 \in B_Z$. $F(z_1)$ y $F(z_2)$ están en la misma parte de Gleason si $\sigma(F(z_1), F(z_2)) < 1$, donde

$$\sigma(F(z_1), F(z_2)) = \sup_{y \in B_Y} \rho(\delta_y \circ F(z_1), \delta_y \circ F(z_2)) = \sup_{y \in B_Y} \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}^\infty(B_X) \\ \|f\| \leq 1 \\ F(z_2)(f)(y) = 0}} |F(z_1)(f)(y)|.$$

Para cada $y \in B_Y$, $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ consideramos la función $g_{y,f} = \delta_y \circ \widehat{f} \circ F : B_z \to \mathbb{C}$. Por hipótesis, $g_{y,f}$ resulta analítica. Además, si $\|f\| \leq 1$ tenemos que $\|g_{y,f}\| \leq 1$. Luego

$$\sigma(F(z_1), F(z_2)) \leq \sup_{\substack{g \in \mathcal{H}^\infty(U) \\ \|g\| \leq 1 \\ g(z_2) = 0}} |g(z_1)| = \rho(z_1, z_2) < 1.$$

Por lo tanto $F(B_Z)$ está contenido en una única parte de Gleason. $\square$

Al momento de analizar las partes de Gleason del espectro escalar vimos que el comportamiento cambia según el tipo de fibras. Recordemos que en el espectro vectorial debemos considerar tres tipos de fibras distintos:

- Fibras sobre funciones $g$ tales que $\|g\| < 1$ (fibras interiores).
- Fibras sobre funciones $g$ tales que $g(B_Y) \subset B_{X^{**}}$ y $\|g\| = 1$ (fibras de transición).
- Fibras sobre funciones $g$ tales que $g(B_Y) \subset S_{X^{**}}$ (fibras de borde).

Para el espectro escalar $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ se prueba en [9, Prop. 1.1] que las evaluaciones en puntos de la bola abierta $B_{X^{**}}$ están en una misma parte de Gleason. Además, una parte de Gleason no puede tener a la vez morfismos que estén en fibras sobre puntos interiores y morfismos que estén en fibras sobre puntos de borde. En la siguiente proposición damos una versión vectorial de este resultado: tomando en cuenta los tres tipos de fibras vemos que no puede haber en una misma parte de Gleason elementos de fibras de distinto tipo. Además, en analogía al caso escalar, los morfismos de composición por funciones de la bola abierta $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$ están todos en la misma parte de Gleason.

**Proposición 2.5.2.** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach y denotemos con $C_{\mathbf{0}}$ el morfismo de composición por la función constante $g \equiv 0$.*

(a) *Para toda $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$, el morfismo de composición $C_g$ está contenido en la parte de Gleason $\mathcal{GP}(C_{\mathbf{0}})$. Más aún, $\sigma(C_g, C_{\mathbf{0}}) = \|g\|$.*

(b) *Sean* $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ *y* $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$. *Para todo* $\Phi \in \mathscr{F}(g)$, $\Psi \in \mathscr{F}(h)$ *resulta que* $\Phi$ *y* $\Psi$ *pertenecen a diferentes partes de Gleason.*

(c) *Sean* $g, h \in \mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ *tales que* $g(B_Y) \subset B_{X^{**}}$ *y* $h(B_Y) \subset S_{X^{**}}$. *Para todos* $\Phi \in \mathscr{F}(g)$, $\Psi \in \mathscr{F}(h)$ *resulta que* $\Phi$ *y* $\Psi$ *pertenecen a diferentes partes de Gleason.*

*Demostración.* (a) Por el Lema de Schwarz y el hecho de que $S_{X^*}$ es un conjunto normante para $X^{**}$ tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\delta_y \circ C_g, \delta_y \circ C_{\mathbf{0}}) &= \sup\{|\delta_y \circ C_g(f)| : f \in \mathcal{H}^\infty(B_X),\ \|f\| \leq 1, \delta_y \circ C_{\mathbf{0}}(f) = 0\} \\ &= \sup\{|\widetilde{f}(g(y))| : f \in \mathcal{H}^\infty(B_X),\ \|f\| \leq 1, f(0) = 0\} = \|g(y)\|.\end{aligned}$$

Luego $\sigma(C_g, C_{\mathbf{0}}) = \|g\|$.

(b) Como $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ existen sucesiones $(y_n) \subset B_Y$ y $(x_n^*) \subset S_{X^*}$ tales que $g(y_n)(x_n^*) \to 1$. Sea para cada $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n = h(y_n)(x_n^*)$. Notemos que $|\lambda_n| \leq \|h\| < 1$ para todo $n$. Consideramos entonces para cada $n, m$ la función definida en $B_X$

$$f_{n,m}(\cdot) = \frac{(x_n^*(\cdot))^m - \lambda_n^m}{\|(x_n^*)^m - \lambda_n^m\|}.$$

Es claro que $f_{n,m} \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$, $\Psi(f_{n,m})(y_n) = 0$ y $\|f_{n,m}\| = 1$. Luego

$$\begin{aligned}\sigma(\Phi, \Psi) &= \sup_{y \in B_Y} \sup\{|\Phi(f)(y)| :\ f \in \mathcal{H}^\infty(B_X),\ \|f\| \leq 1,\ \Psi(f)(y) = 0\} \\ &\geq \sup_{n,m} |\Phi(f_{n,m})(y_n)| = \sup_{n,m} \frac{|g(y_n)(x_n^*)^m - \lambda_n^m|}{\|(x_n^*)^m - \lambda_n^m\|} \\ &\geq \sup_{n,m} \frac{|g(y_n)(x_n^*)|^m - \|h\|^m}{1 + \|h\|^m} = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Phi$ y $\Psi$ pertenecen a diferentes partes de Gleason.

(c) Por [9, Proposition 1.1] sabemos que si $\varphi$, $\psi$ son dos morfismos en $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ tales que $\varphi$ proyecta sobre $z \in S_{X^{**}}$ y $\psi$ proyecta sobre $w \in B_X$ entonces $\rho(\varphi, \psi) = 1$. Como, para todo $y \in B_Y$ sabemos que $\delta_y \circ \Phi$ y $\delta_y \circ \Psi$ proyectan sobre $g(y) \in B_{X^{**}}$ y $h(y) \in S_{X^{**}}$, respectivamente se sigue que

$$\rho(\delta_y \circ \Phi, \delta_y \circ \Psi) = 1 \quad \forall y \in B_Y.$$

Por lo tanto $\sigma(\Phi, \Psi) = 1$ y esto indica que los morfismos pertenecen a distintas partes de Gleason. $\square$

Notemos que a partir de (a) sabemos que $\{C_g :\ g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}\} \subset \mathcal{GP}(C_{\mathbf{0}})$. Esta inclusión puede ser estricta, por ejemplo, cuando existe un polinomio en $X$ que no es $w-$continuo en acotados como muestra el siguiente resultado, una versión vectorial de [9, Prop. 1.2 & Cor. 1.3].

**Proposición 2.5.3.** *Sean $X, Y$ espacios de Banach.*

(a) *Sea $(g_\alpha)$ una red en $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ tal que $\|g_\alpha\| \leq r < 1$, para todo $\alpha$. Si la red $(C_{g_\alpha})$ es $w^*-$convergente a $\Phi$ en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ entonces $\Phi$ pertenece a $\mathcal{GP}(C_{\mathbf{0}})$.*

(b) *Si existe en $X$ un polinomio no $w-$continuo en acotados entonces $\{C_g : g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}\}$ resulta un subconjunto propio de $\mathcal{GP}(C_{\mathbf{0}})$.*

*Demostración.* (a) Fijamos $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(0) = 0$ y un elemento $y \in B_Y$. Por la $w^*-$convergencia de $(C_{g_\alpha})$ para cada $\varepsilon > 0$ tal que $r + \varepsilon < 1$ podemos encontrar $\alpha$ tal que $|C_{g_\alpha}(f)(y) - \Phi(f)(y)| < \varepsilon$. Se sigue que

$$|\Phi(f)(y) - C_{\mathbf{0}}(f)(y)| \leq \varepsilon + |C_{\mathbf{0}}(f)(y) - \Phi_{g_\alpha}(f)(y)| \leq \varepsilon + \sigma(\Phi_{g_\alpha}, C_{\mathbf{0}}) = \varepsilon + \|g_\alpha\| < \varepsilon + r.$$

Por lo tanto, $\sigma(\Phi, C_{\mathbf{0}}) < 1$.

(b) Razonando como en 2.4.18 podemos construir una red $(C_{g_\alpha})$ como en el ítem (a), que es $w-$convergente a un morfismo $\Phi$ que no es de composición pero pertenece a la parte de Gleason de $C_{\mathbf{0}}$. □

El morfismo de composición $C_0$ resulta particular en el sentido de que su parte de Gleason siempre es "grande": contiene a todos los morfismos de composición $C_g$ con $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$.

En el espectro podemos encontrar también partes de Gleason de un solo elemento. Un primer ejemplo de este fenómeno proviene del espectro escalar: la igualdad $\sigma(\Phi, \Psi) = \sup_{y \in B_Y} \rho(\delta_y \circ \Phi, \delta_y \circ \Psi)$ nos asegura que si $\varphi$ es un morfismo en $\mathcal{M}_\infty(B_X)$ tal que $\mathcal{GP}(\varphi) = \{\varphi\}$ entonces necesariamente el morfismo vectorial $\varphi \cdot 1_Y$ conforma una parte de Gleason de un solo elemento.

Existen además partes de Gleason de un sólo elemento sobre fibras no constantes: la identidad, por ejemplo, conforma una parte de Gleason de un sólo elemento. Este problema fue tratado en [21] donde se prueba que no hay morfismos de composición en la parte de Gleason de la identidad, respondiendo a una conjetura planteada en [12]. La demostración completa de esta afirmación puede encontrarse en [34] y hace uso de los denominados *strong boundary points.*

**Definición 2.5.4.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra uniforme y $S \subset \mathcal{A}$ un subespacio. Decimos que $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un strong boundary point para $S$ si para todo entorno $U$ de $\varphi$ existe una función $f$ en $S$ tal que $|\widehat{f}(\varphi)| = \|f\|$ y $|\widehat{f}| < \|f\|$ en $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \setminus U$.*

**Teorema 2.5.5** ([34, Th. 6.2])**.** *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras uniformes tales que el espectro $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ es conexo. Sea $\Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tal que la imagen por $C_\Phi^*$ de strong boundary points de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ son strong boundary points de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{GP}(\Phi) = \{\Phi\}$.*

A partir de este resultados podemos encontrar más ejemplos de partes de Gleason de un solo elemento en $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$.

**Corolario 2.5.6.** *Sea $g : B_Y \to B_X$ una función biholomorfa. Entonces $\mathcal{GP}(C_g) = \{C_g\}$.*

*Demostración.* En efecto, como $g : B_Y \to B_X$ es biholomorfa resulta inmediato que $C_g^* : \mathcal{M}_\infty(B_Y) \to \mathcal{M}_\infty(B_X)$, $C_g^* = [\varphi \mapsto \varphi \circ C_g]$ cumple que la imagen por $C_g^*$ de *strong boundary points* de $\mathcal{M}_\infty(B_Y)$ son nuevamente *strong boundary points*. El resultado entonces se sigue de aplicar el Teorema 2.5.5. □

El Teorema 2.5.5 puede además extenderse a más casos vía la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.7.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras uniformes y $\Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Si $\Phi^*$ manda cada strong boundary point de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ en partes de Gleason unipuntuales de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ entonces $\Phi$ es aislado para la métrica de Gleason de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

*Demostración.* Supongamos que $\Psi, \Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ están en la misma parte de Gleason. Luego para toda $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ se tiene que

$$\rho(\varphi \circ \Phi, \varphi \circ \Psi) = \rho(\Phi^*(\varphi), \Psi^*(\varphi)) \leq r < 1.$$

Si $\varphi$ es un *strong boundary point* nuestra hipótesis dice que $\Phi^*(\varphi) = \Psi^*(\varphi)$. Luego,

$$\varphi(\Phi(f)) = \varphi(\Psi(f)), \quad \forall \varphi \text{ strong boundary point de } \mathcal{M}(\mathcal{B}), \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Como cada elemento de un álgebra uniforme alcanza su norma en un *strong boundary point* de su espectro [37, Th. 12.10], obtenemos que $\Phi(f) = \Psi(f)$, para toda $f$ y por lo tanto $\Phi = \Psi$. □

### Relación entre Fibras y partes de Gleason para $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D}, B_Y)$.

Cuando presentamos las partes de Gleason para el caso escalar nos valimos del ejemplo de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$. Para ilustrar la relación entre fibras y partes de Gleason en su versión vectorial tomamos ahora el caso del espectro $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D}, B_Y)$.

Recordemos que en este caso los posibles tipos de fibras son:

- Fibras sobre funciones $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ (fibras interiores). Cada una de estas fibras está compuesta únicamente por el correspondiente morfismo de composición.
- Fibras sobre funciones $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ que verifican $g(B_Y) \subset \mathbb{D}$ (fibras de transición). Nuevamente estas fibras contienen únicamente al correspondiente morfismo de composición.

- Fibras sobre funciones $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$ del tipo $g \equiv \lambda$ con $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ (fibras de borde).

El caso de las fibras interiores resulta el más sencillo: todas están contenidas en una única parte de Gleason. Esto se debe a que, como vimos previamente, todos los morfismos de composición $C_g$ con $\|g\| < 1$ pertenecen a una misma parte de Gleason a la que identificamos como $\mathcal{GP}(C_{\mathbf{0}})$.

Por el contrario, si $\Phi$ pertenece a una fibra de borde, su correspondiente parte de Gleason $\mathcal{GP}(\Phi)$ está completamente contenida en la correspondiente fibra: Si $\Phi$ es un morfismo en $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D}, B_Y)$ que pertenece a una fibra de borde y $\Psi$ es un morfismo no pertenece a la misma fibra entonces necesariamente para todo $y \in B_Y$ tenemos que $\delta_y \circ \Phi$ y $\delta_y \circ \Psi$ son dos morfismos en $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ que proyectan sobre $\lambda$ y $\mu$ respectivamente con $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq \mu$. Luego

$$1 = \left|\frac{\lambda - \mu}{1 - \bar{\lambda}\mu}\right| = \rho_u(\delta_\lambda, \delta_\mu) = \rho_u(\delta_y \circ \Phi, \delta_y \circ \Psi) \leq \rho(\delta_y \circ \Phi, \delta_y \circ \Psi) \leq \sigma(\Phi, \Psi).$$

Se sigue que $\mathcal{GP}(\Phi) \neq \mathcal{GP}(\Psi)$. Por lo tanto ninguna parte de Gleason puede contener elementos de dos fibras de borde diferentes.

La transición entre una parte de Gleason que contiene a todas las fibras (el caso de las fibras interiores) y partes de Gleason contenidas totalmente en una fibra (el caso de las fibras de borde) está dada por las fibras de transición. Toda fibra de transición contiene solamente al correspondiente morfismo de composición no obstante varias fibras (pero no todas) pueden pertenecer a una misma parte de Gleason.

Vemos esta última situación con un ejemplo parcialmente adaptado de [48, Ex. 2]. Dado $y^* \in S_{X^*}$ consideramos las siguientes funciones definidas en $B_Y$ $g(y) = y^*(y)$, $h(y) = \frac{y^*(y)+1}{2}$ y $i(y) = \frac{y^*(y)+1}{2} + k(y^*(y) - 1)^2$, donde $0 < k < \frac{1}{8}$. Es claro que son estas funciones corresponden a fibras de transición en $\mathcal{M}_\infty(B_Y)$, veamos entonces que los morfismos de composición asociados verifican $\mathcal{GP}(C_g) \neq \mathcal{GP}(C_h) = \mathcal{GP}(C_i)$. En efecto, sea $(y_n)$ una sucesión en $B_Y$ tal que $y^*(y_n) \to -1$. Entonces

$$\rho(\delta_{y_n} \circ C_g, \delta_{y_n} \circ C_h) = \rho(\delta_{g(y_n)}, \delta_{h(y_n)}) = \left|\frac{g(y_n) - h(y_n)}{1 - \overline{g(y_n)}h(y_n)}\right| \to 1.$$

Esto implica que $\mathcal{GP}(C_g) \neq \mathcal{GP}(C_h)$. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma(C_h, C_i) &= \sup_{y \in B_Y} \rho(\delta_y \circ C_h, \delta_y \circ C_i) = \sup_{y \in B_Y} \rho(\delta_{h(y)}, \delta_{i(y)}) \\
&= \sup_{y \in B_Y} \left|\frac{h(y) - i(y)}{1 - \overline{h(y)}i(y)}\right| = \sup_{y \in B_Y} \left|\frac{k(y^*(y) - 1)^2}{1 - \frac{\overline{y^*(y)}+1}{2}\left(\frac{y^*(y)+1}{2} + k(y^*(y) - 1)^2\right)}\right| \\
&= \sup_{z \in \mathbb{D}} \left|\frac{k(z-1)^2}{1 - \frac{\bar{z}+1}{2}\left(\frac{z+1}{2} + k(z-1)^2\right)}\right| < 1,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad proviene de [48, Ex. 2]. Por lo tanto $\mathcal{GP}(C_h) = \mathcal{GP}(C_i)$.

## 2.6. Conjuntos Cluster

El estudio de los conjuntos cluster es iniciado por I. J. Schark en [55] con el objetivo de estudiar para $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ los valores de $\widehat{f}$ en las fibras $\pi^{-1}(\lambda)$. En esta sección definimos la versión vectorial de los conjuntos cluster y estudiamos sus propiedades, la relación con las fibras del espectro vectorial y condiciones bajo las cuales podemos encontrar estructuras analíticas en estos conjuntos.

Dadas $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$, $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ definimos el cluster vectorial de $f$ sobre $g$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\ell_{\mathcal{M}_\infty(B_X,B_Y)}(f,g) = \{h \in \mathcal{H}^\infty(B_Y)\colon \exists\ (g_\alpha) \subset B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}, g_\alpha \xrightarrow{w^*} g \\ \text{y tal que } C_{g_\alpha}(f)(y) \to h(y) \quad \forall y \in B_Y\}.\end{aligned}$$

Donde la $w^*-$convergencia en $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$ es la observada en (2.8).

En caso de que no haya ambigüedad respecto del espectro involucrado escribimos $\mathcal{C}\ell(f,g)$.

Recordemos que, por el Lema 1.3.5, el cluster escalar verifica la inclusión

$$\mathcal{C}\ell_{B_X}(f,z) \subset \widehat{f}(\pi^{-1}(z)). \tag{2.22}$$

Esta relación tiene su análogo en el caso vectorial, como se ve en el siguiente lema:

**Lema 2.6.1.** *Sean $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$, $f \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$. Entonces el cluster $\mathcal{C}\ell(f,g)$ es un subconjunto $w^*-$compacto de $\widehat{f}(\mathscr{F}(g))$.*

*Demostración.* Sea $h \in \mathcal{C}\ell(f,g)$. Por definición existe una red $(g_\alpha)_\alpha$ en $B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ tal que $g_\alpha \xrightarrow{w*} g$ y $C_{g_\alpha}(f)(y) \to h(y)$ para todo $y \in B_Y$. Como $(C_{g_\alpha})_\alpha$ es una red en el espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ podemos encontrar una subred convergente $(C_{g_{\alpha_\beta}})_\beta$. Sea $\Phi$ el límite de esta subred, entonces $\Phi(f)(y) = \lim_\beta C_{g_{\alpha_\beta}}(f)(y) = h(y)$ para todo $y \in B_Y$.

Por otro lado, como $g_\alpha \xrightarrow{w^*} g$ tenemos que

$$\xi_\infty(\Phi)(y)(x^*) = \Phi(x^*)(y) = \lim_\beta C_{g_{\alpha_\beta}}(x^*)(y) = \lim_\alpha g_{\alpha_\beta}(y)(x^*) = g(y)(x^*).$$

Esto prueba la inclusión $\mathcal{C}\ell(f,g) \subset \widehat{f}(\mathscr{F}(g))$.

Veamos ahora que el cluster $\mathcal{C}\ell(f,g)$ es $w^*-$compacto. Dado que resulta inmediato que el cluster $\mathcal{C}\ell(f,g)$ está contenido en $\|f\|\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$, basta ver que es $w^*-$cerrado.

Denotemos con $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los $w^*-$entornos $U$ de $g$ en $\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})$. Para simplificar la notación escribimos $\widetilde{U} = U \cap B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Vamos a probar la igualdad

$$\mathcal{C}\ell(f,g) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{\widehat{f}(j(\widetilde{U}))}^{w*},$$

donde $j : B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})} \to \mathcal{M}_\infty(B_X,B_Y)$ es la inclusión $j(s) = C_s$.

Sea $h \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{\widehat{f}(j(\widetilde{U}))}^{w*}$. Luego para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $w^*-$entorno $V$ de $h$ existe una función $g_{U,V}$ tal que

(i) $g_{U,V} \in U \cap B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y)}$.

(ii) $C_{g_{U,V}}(f) \in V$.

. Dotamos a todos los posibles pares $(U,V)$ con el orden de la inclusión inversa (i.e. $(U',V') \geq (U,V)$ si $U' \subset U$ y $V' \subset V$ simultáneamente). Como resultado, obtenemos una red $(g_{U,V})_{(U,V)}$ indexada en los pares de $w^*-$entornos de $g$ y $h$ respectivamente. Por construcción esta red satisface:

(i) $g_{U,V} \xrightarrow{w^*} g$.

(ii) $C_{g_{U,V}}(f) \xrightarrow{w^*} h$.

De aquí concluímos que $h \in \mathcal{C}\ell(f,g)$ y por lo tanto se verifica la inclusión $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{\widehat{f}(j(\widetilde{U}))}^{w*} \subset \mathcal{C}\ell(f,g)$.

Para ver la inclusión recíproca tomamos $h \in \mathcal{C}\ell(f,g)$. Existe entonces una red $(g_\alpha)_\alpha$ que verifica

(i) $g_\alpha \xrightarrow{w^*} g$.

(ii) $C_{g_\alpha}(f) \xrightarrow{w^*} h$.

Dado $U \in \mathcal{U}$, sea $\alpha_0$ tal que $g_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Como $h \in \overline{(C_{g_\alpha})(f)}^{w*}_{\alpha\geq\alpha_0}$ se sigue que $h \in \overline{\widehat{f}(j(\widetilde{U}))}^{w*}$. Como el entorno $U$ es arbitrario esto prueba la contención restante. $\square$

Notemos que esta inclusión nos indica que sólo podemos buscar clusters 'grandes' en aquellas fibras que no son unipuntuales. Si por ejemplo $X$ posee un polinomio $f_0$ que no es $w-$continuo, el Teorema 2.4.18 nos asegura que existen fibras con muchos elementos. Bajo condiciones similares podemos encontrar conjuntos cluster que contiene una copia analítica del disco complejo.

**Proposición 2.6.2.** *Sean $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y,X^{**})}$ y $f_0 \in \mathcal{H}^\infty(B_X)$ tal que $\widetilde{f_0}$ no es $w^*-$continua en $g(y_0)$ para $y_0 \in B_Y$. Entonces el cluster $C\ell(f_0, g)$ contiene una copia analítica de $\mathbb{D}$.*

El enunciado de esta proposición tiene algunas diferencias con aquel del Teorema 2.4.18 que resulta importante remarcar. Si bien nos permite considerar funciones $f_0$ que no sean $w^*$ continuas en lugar de restringirnos a polinomios, incluye la condición adicional de que la función debe no ser $w^*$ continua en un punto que pertenezca a la imagen de $g$. Esto se debe a que para probar contenciones en el cluster estamos limitados a una única función *test*, por lo que debemos pedirle más hipótesis a dicha función.

Para poder demostrar la Proposición 2.6.2 hacemos uso del siguiente Lema, una ligera modificación de [7, Lem. 2.1]:

**Lema 2.6.3** ([7, Lem. 2.1])**.** *Sea $f$ una función analítica en una bola abierta $B \subset X^{**}$, con serie de Taylor $f = \sum f_m$. Si $f$ es $w^*-$continua en $\overline{B}$, entonces cada $f_m$ resulta $w^*-$continua en $B$. Recíprocamente, si $f$ es uniformemente continua en $B$ y cada $f_m$ es $w^*-$continua entonces $f$ se puede extender de manera $w^*-$continua a la bola cerrada $\overline{B}$.*

*Demostración de la Proposición 2.6.2.* Sea $\|g\| < r < 1$. Si $f_0$ no es $w^*-$continua en $g(y_0) = x_0^{**}$ entonces por el Lema 2.6.3 existe una red $(x_\alpha^{**})_\alpha$ en $B_{1-r}(x_0^{**})$ tal que $x_\alpha^{**} \stackrel{w^*}{\to} x_0^{**} = g(y_0)$ y $|f_0(x_\alpha^{**}) - \widetilde{f}_0(x_0^{**})| > \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$. Definimos entonces para cada $\alpha$

$$\Psi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$$
$$\Psi_\alpha(\lambda)(f)(y) = f\left(g(y) + \lambda(x_\alpha^{**} - x_0^{**})\right).$$

A partir de la inclusión

$$\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y)) = (\mathcal{H}^\infty(B_X)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_Y))^*$$

y que la red $(\Psi_\alpha)_\alpha$ está contenida en la bola de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y)))$ de radio $\|f_0\|$ podemos tomar una subred, que volvemos a llamar $(\Psi_\alpha)_\alpha$, $w^*-$convergente a un elemento $\Psi_g \in H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty(B_X), \mathcal{H}^\infty(B_Y)))$. Es inmediato además que para cada $\lambda \in \mathbb{D}$ $\Psi_g(\lambda)$ resulta multiplicativo, por lo que $\Psi_g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y))$.

Notemos además que cada $\Psi_\alpha(\lambda)$ es un morfismo de composición. Tenemos entonces para todo $\lambda \in \mathbb{D}$, $y \in B_Y$ que:

$$\Psi_g(\lambda)(f_0)(y) = \lim_\alpha \Psi_\alpha(\lambda)(f_0)(y) = \lim_\alpha C_{\xi_\infty(\Psi_\alpha(\lambda))}(f_0)(y).$$

Como $\xi_\infty(\Psi_\alpha(\lambda))$ es $w^*-$convergente a $g$ obtenemos que $\Psi_g(\lambda)(f_0) \in C\ell(f_0, g)$.

Para obtener finalmente la inyección analítica buscada consideramos $y = y_0$ y seguimos los pasos de la demostración del Teorema 2.4.8. □

### 2.6.1. Clusters de funciones en $\mathcal{A}_u(B_X)$

Si bien el caso general del *cluster problem* permanece abierto, una de las primeras respuestas afirmativas es para el álgebra $\mathcal{A}_u(B_X)$ en el caso en que los polinomios de tipo finito resultan densos. Recordemos que si los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{A}_u(B_X)$ entonces el espectro $\mathcal{M}_u(B_X)$ consiste únicamente de evaluaciones en elementos de $\overline{B}_{X^{**}}$. De aquí resulta inmediata la igualdad

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbb{D}}(f, x^{**}) = \widehat{f}(\pi^{-1}(x^{**})),$$

para toda $f \in \mathcal{A}_u(B_X)$.

En el caso vectorial, si los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{A}_u(B_X)$ entonces dado $Y$ un espacio de Banach sabemos por la Proposición 2.4.22 que

$$\mathscr{F}(g) = \{C_g\} \quad \forall g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}.$$

Dado que la composición $\widehat{f} \circ g$ siempre pertenece al cluster $\mathcal{C}\ell(f, g)$ obtenemos entonces la igualdad

$$\mathcal{C}\ell(f, g) = \widehat{f}(\mathscr{F}(g)).$$

Si por el contrario $X$ posee un polinomio que no es $w^*-$continuo en $g(y_0)$ para cierta $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_Y, X^{**})}$, razonando como en la Proposición 2.6.2 obtenemos que para ese polinomio (que pertenece a $\mathcal{A}_u(B_X)$) el cluster $\mathcal{C}\ell(f, g)$ contiene una copia analítica de $\mathbb{D}$. Desconocemos si en este caso se verifica la igualdad $\mathcal{C}\ell(f, g) = \widehat{f}(\mathscr{F}(g))$.

# Capítulo 3

# El espectro vectorial en el polidisco infinito

En este capítulo nos focalizamos en el estudio del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_X, B_Y)$ para el caso del polidisco infinito dimensional, esto es $X = Y = c_0$. Con el objetivo de obtener estructuras analíticas en todas las fibras de este espectro analizamos también el caso escalar $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ extendiendo resultados existentes.

## 3.1. El contexto escalar en $c_0$

Con el objetivo de analizar el espectro vectorial $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ y siguiendo lo realizado para el caso general analizamos primero los espectros escalares $\mathcal{M}_b(c_0), \mathcal{M}_u(B_{c_0})$ y $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ con la intención de aplicar los resultados al caso vectorial.

### 3.1.1. Los espectros escalares $\mathcal{M}_b(c_0)$ y $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$

Comencemos por el espectro $\mathcal{M}_b(c_0)$. Recordemos que este conjunto se define como

$$\mathcal{M}_b(c_0) = \{\varphi : \mathcal{H}_b(c_0) \to \mathbb{C} \text{ morfismos de álgebras continuos}\} \setminus \{0\}.$$

En este espectro tenemos definida una inclusión $i : \ell_\infty \to \mathcal{M}_b(c_0)$ dada por $i(w) = \delta_w$. La contrapartida de esta inclusión es la proyección $\pi : \mathcal{M}_b(c_0) \to \ell_\infty$. Definida en su versión general en (1.1), podemos reescribir la proyección $\pi$ en este caso como

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_b(c_0) &\to \ell_\infty \\ (\pi(\varphi))_n &= \varphi(\langle \cdot, e_n \rangle). \end{aligned}$$

La descripción de las fibras de esta proyección caracteriza el espectro en este caso: es bien sabido (ver por ejemplo [38, Sect. 3.4]) que los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{H}_b(c_0)$. Aplicando entonces el Teorema 2.4.5 obtenemos que $\pi$ resulta biyectiva. Esto da una descripción completa de $\mathcal{M}_b(c_0)$:

$$\mathcal{M}_b(c_0) = \{\delta_w \colon w \in \ell_\infty\}.$$

El caso de $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ es análogo. Definido como

$$\mathcal{M}_u(B_{c_0}) = \{\varphi : \mathcal{A}_u(B_{c_0}) \to \mathbb{C} \text{ morfismos de álgebras}\} \setminus \{0\},$$

este espectro contiene a los morfismos de evaluación $\delta_z$ para todo $z \in \overline{B}_{\ell_\infty}$. Respectivamente, $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ se proyecta sobre $\overline{B}_{\ell_\infty}$ vía

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_u(B_{c_0}) &\to \overline{B}_{\ell_\infty} \\ (\pi(\varphi))_n &= \varphi(\langle \cdot, e_n \rangle). \end{aligned}$$

Nuevamente, como los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{A}_u(B_{c_0})$ obtenemos que $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ esta compuesto exclusivamente por evaluaciones. Esto es,

$$\mathcal{M}_u(B_{c_0}) = \{\delta_z \colon z \in \overline{B}_{\ell_\infty}\}.$$

**Partes de Gleason en $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$:**

El estudio de partes de Gleason en $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ está intrínsecamente relacionado con lo que sucede en disco. En [9], Aron et. al. se prueba la relación:

**Teorema 3.1.1** ([9, Th. 2.4])**.** *Sean $z = (z_n)$ y $w = (w_n)$ en $\overline{B}_{\ell_\infty}$. Entonces*

$$\|\delta_w - \delta_z\|_{\mathcal{M}_u(B_{c_0})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\delta_{z_n} - \delta_{w_n}\|_{\mathcal{M}_u(\mathbb{D})}. \tag{3.1}$$

*Más aún,*

$$\rho_u(\delta_z, \delta_w) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \rho_u(\delta_{z_n}, \delta_{w_n}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{z_n - w_n}{1 - \overline{z}_n w_n} \right|. \tag{3.2}$$

*Por lo tanto, dado $z = (z_n) \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ se tiene que*

$$\mathcal{GP}(\delta_z) = \bigcup_{0<r<1} \{\delta_w \colon w_n = z_n \text{ si } |z_n| = 1 \text{ y } \left| \frac{z_n - w_n}{1 - \overline{z}_n w_n} \right| < r \text{ si } |z_n| < 1\}.$$

Notemos que, a partir de la descripción de $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ como

$$\mathcal{M}_u(B_{c_0}) = \{\delta_z \colon z \in \overline{B}_{c_0}\},$$

esta relación caracteriza tanto la métrica de Gleason como las partes de Gleason en $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$.

### 3.1.2. Implicaciones al caso vectorial, $\mathcal{M}_{b,\infty}(c_0, B_{c_0})$ y $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$

A partir de las descripciones de $\mathcal{M}_b(c_0)$ y $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ podemos dar una panorama de lo que ocurre en los espectros vectoriales $\mathcal{M}_{b,\infty}(c_0, B_{c_0})$ y $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$. Retomando lo visto en el capítulo 2, el espectro $\mathcal{M}_{b,\infty}(c_0, B_{c_0})$ está dado por

$$\{\Phi : \mathcal{H}_b(c_0) \to \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}) \text{ morfismos de álgebras continuos}\} \setminus \{0\}.$$

En particular, $\mathcal{M}_{b,\infty}(c_0, B_{c_0})$ contiene a los morfismos de composición $C_g$ definidos en (2.3) para toda $g \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)$.

Respectivamente, $\mathcal{M}_{b,\infty}(c_0, B_{c_0})$ se proyecta sobre $\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)$ vía $\xi$, que podemos reescribir en este contexto como

$$\begin{aligned} \xi_b : \mathcal{M}_{b,\infty}(c_0, B_{c_0}) &\to \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty) \\ \Phi &\mapsto [x \mapsto (\Phi(\langle \cdot, e_n \rangle)(x))_n]. \end{aligned}$$

Dado que los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{H}_b(X)$, la Proposición 2.4.6 da una caracterización de este espectro:

$$\mathcal{M}_{b,\infty}(X, B_Y) = \{C_g \colon g \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)\}.$$

Similarmente el espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ contiene a los morfismos de composición $C_g$ definidos aquí para funciones $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$. Respectivamente, este espectro se proyecta sobre $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$ vía

$$\begin{aligned} \xi_u : \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0}) &\to \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)} \\ \Phi &\mapsto [x \mapsto (\Phi(\langle \cdot, e_n \rangle)(x))_n]. \end{aligned}$$

Nuevamente, como los polinomios de tipo finito son densos en $\mathcal{A}_u(B_{c_0})$, obtenemos por la Proposición 2.4.22 que $\xi$ resulta biyectiva. Es decir, que $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ está dado por

$$\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0}) = \{C_g \colon g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}\}.$$

### 3.1.3. El espectro escalar $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$

Definido como el conjunto

$$\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}) = \{\varphi : \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}) \to \mathbb{C} \text{ morfismos de álgebras }\} \setminus \{0\},$$

el comportamiento del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ difiere de los casos escalares anteriores. Recordemos que en este espectro sólo tenemos definidas las evaluaciones $\delta_z$ para $z \in B_{\ell_\infty}$.

El espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ se proyecta sobre $\overline{B}_{\ell_\infty}$ vía

$$\pi : \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}) \to \overline{B}_{\ell_\infty}$$
$$(\pi(\varphi))_n = \varphi(\langle \cdot, e_n \rangle).$$

Por lo visto en la Observación 1.3.2, $\pi$ resulta sobreyectiva. Las fibras asociadas a esta proyección son los conjuntos

$$\{\pi^{-1}(z) \colon z \in \overline{B}_{\ell_\infty}\}.$$

En contraposición a lo que sucede en $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ y $\mathcal{M}_b(c_0)$, Cole, Gamelin y Johnson prueban en [22] que las fibras sobre los puntos de la bola abierta $B_{\ell_\infty}$ contienen una copia de la bola $\mathcal{B}_{\ell_\infty}$:

**Teorema 3.1.2** ([22, Th. 6.7]). *Existe una inyección analítica*

$$\Phi : B_{\ell_\infty} \times B_{\ell_\infty} \to \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}),$$

*tal que para todo $z \in B_{\ell_\infty}$ la imagen de $\Phi(z, -)$ está contenida en la fibra $\pi^{-1}(z)$. Como consecuencia, la fibra sobre $z$ contiene una copia analítica de $B_{\ell_\infty}$.*

Respecto de las fibras sobre elementos del borde $\partial B_{\ell_\infty}$ Aron, Falcó, García y Maestre prueban en [10], a través de una construcción distinta, que las fibras sobre $z \in \mathbb{T}^\infty$ (es decir, aquellos $z$ tal que $|z_n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$) contienen una copia analítica de $B_{\ell_\infty}$:

**Teorema 3.1.3** ([10, Th. 2.2]). *Sea $z \in \mathbb{T}^\infty$. Entonces existe una inyección analítica $\Psi : B_{\ell_\infty} \to \pi^{-1}(z)$ que resulta biholomorfa con su imagen.*

Este resultado se extiende a aquellos elementos $z \in \partial B_{\ell_\infty}$ con infinitas coordenadas de módulo 1. Sin embargo la pregunta sobre la estructura analítica de las fibras en $\partial B_{\ell_\infty}$ con finitas (o ninguna) coordenada de módulo 1 permanece abierta en el trabajo citado. Al respecto podemos leer en [10, Rmk. 2.10]: "... we do not know if $B_{\ell_\infty}$ can be embedded in the fiber over $z$, for $z$ in the unit sphere of $\ell_\infty$ but $|z_n| < 1$ for all $n$, as for example $(\frac{n-1}{n})$".

### Partes de Gleason en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$

En forma similar a lo que sucede en $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$, la distancia pseudo-hiperbólica entre evaluaciones $\delta_z, \delta_w$ para $z, w \in B_{\ell_\infty}$ está intrínsecamente relacionada con lo que sucede en el disco. Tanto en [9, Ex. 1.7] como en la demostración de [22, Th. 6.6] encontramos la relación

$$\rho(\delta_z, \delta_w) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho(\delta_{z_n}, \delta_{w_n}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{z_n - w_n}{1 - \overline{z}_n w_n} \right| = \rho_u(\delta_z, \delta_w). \tag{3.3}$$

### 3.1.4. Implicaciones al caso vectorial $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$

A partir de los resultados escalares para $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ podemos obtener información sobre los morfismos vectoriales en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. Recordemos que este espectro está compuesto por

$$\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0}) = \{\Phi : \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}) \to \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}) \text{ morfismos de álgebras}\} \setminus \{0\}.$$

En particular, contiene a los morfismos de composición $C_g$ para aquellas funciones $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$. Respectivamente $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ se proyecta sobre $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ vía

$$\begin{aligned}\xi_\infty : \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0}) &\to \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} \\ \Phi &\mapsto [x \mapsto (\Phi(\langle \cdot, e_n \rangle)(x))_n].\end{aligned}$$

Retomando la distinción del capítulo anterior, caracterizamos a las fibras asociadas a esta proyección como:

(i) Fibras sobre funciones $g$ tales que $\|g\| < 1$ (fibras interiores).

(ii) Fibras sobre funciones $g$ tales que $\|g\| = 1$ y $g(B_{c_0}) \subset B_{\ell_\infty}$ (fibras de transición).

(iii) Fibras sobre funciones $g$ tales que $g(B_{c_0}) \subset S_{\ell_\infty}$ (fibras de borde).

Siguiendo los interrogantes 2.4.1 y 2.4.2 planteados en el capítulo 2 como guía, podemos dar una descripción parcial de las fibras de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ construyendo inyecciones analíticas a partir de los resultados escalares. En efecto, si fijamos $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ tal que $g(B_{c_0}) \subset B_{\ell_\infty}$ (es decir, tal que la fibra sobre $g$ es una fibra interior o de transición) podemos definir una inyección analítica

$$\begin{aligned}\Psi_g : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} &\to \mathscr{F}(g) \\ \Psi_g(h)(f)(x) &= \Phi(g(x), h(x))(f),\end{aligned}$$

donde $\Phi$ es la inyección analítica del Teorema 3.1.2.

Veamos que efectivamente esta construcción da una inyección analítica bien definida. Por el Lema 2.3.3 para probar que $\Psi_g$ así definida es una función analítica basta ver que fijados $f \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ y $x \in B_{c_0}$ la función $\delta_x \circ f \circ \Psi_g$ es analítica, pero esto resulta inmediato a partir de escribir $\delta_x \circ f \circ \Psi_g$ como la composición de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rcl} B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} & \to & B_{\ell_\infty} \\ h & \mapsto & h(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} B_{\ell_\infty} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \Phi(g(x), z)(f). \end{array}$$

Como además $\Psi(g(x), h(x))$ proyecta sobre $g(x)$ para todo $x \in B_{c_0}$ deducimos que la imagen de $\Psi_g$ está contenida en $\mathscr{F}(g)$. Por último la inyectividad de esta función se obtiene a partir de la inyectividad de $\Phi$.

Es posible obtener un resultado análogo para algunas fibras de borde (específicamente sobre aquellas funciones $g$ constantes con infinitas coordenadas de módulo 1) a partir de una construcción similar basándonos en la inyección escalar del Teorema 3.1.3. Para poder alcanzar a todas las fibras volvemos al caso escalar para extender el resultado de Cole, Gamelin y Johnson a toda la bola $\overline{B}_{\ell_\infty}$ y así responder la pregunta abierta planteada en [10, Rmk. 2.10].

## 3.2. Fibras de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ sobre $\overline{B}_{\ell_\infty}$ (segunda parte)

El objetivo principal de esta sección es completar la descripción de las fibras para $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ de forma tal de poder además aplicar el resultado al espectro vectorial. Para ello probamos, extendiendo el resultado de Cole, Gamelin y Johnson, el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Para todo $z \in \overline{B}_{\ell_\infty}$, existe una función*

$$\Phi_z : \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N} \times B_{\ell_\infty} \to \pi^{-1}(z) \subset \mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$$

*que satisface*

1. *Para todo $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, el mapa $\Phi_z^\eta : B_{\ell_\infty} \to \pi^{-1}(z)$ dado por $\Phi_z^\eta(w) = \Phi_z(\eta, w)$ es una isometría de Gleason analítica.*

2. *Dados $\eta_1 \neq \eta_2$ en $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, las imágenes $\Phi_z^{\eta_1}(B_{\ell_\infty})$ y $\Phi_z^{\eta_2}(B_{\ell_\infty})$ están contenidas en partes de Gleason diferentes.*

**Observación 3.2.2.** *Mediante una construcción distinta, Choi, et al. prueban en [19] de manera simultánea e independiente que existe una inyección analítica de $B_{\ell_\infty}$ en la fibra $\pi^{-1}(z)$ para todo $z \in \overline{B}_{\ell_\infty}$. Esta inyección analítica resulta además una isometría de Gleason. Es importante además remarcar que la construcción demostrada en [19] no depende de cada $z \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ de forma holomorfa, por lo que no permite obtener el resultado vectorial que buscamos.*

La demostración del Teorema 3.2.1 la haremos en varios pasos. Para poder ver que cada función resulta una isometría de Gleason (de la métrica de Gleason de $B_{\ell_\infty}$ a la métrica de Gleason del espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$) y para deducir que las imágenes asociadas a distintos elementos de $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ yacen en distintas partes de Gleason necesitamos primero el siguiente lema sobre productos infinitos.

**Lema 3.2.3.** *Sea $(\alpha_k)$ una sucesión creciente de números reales positivos que converge a 1 tal que $\sum_j (1 - \alpha_j) < \infty$. Sea $z = (z_j) \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ para el cual existe $\delta > 0$ que verifica $|z_j - 1| > \delta$ para todo $j$. Entonces para cada $N \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \alpha_j < \delta/4$ para todo $j \geq N$,* *el siguiente producto infinito converge (a un número complejo no nulo):*

$$\prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - z_j}{1 - \alpha_j z_j}. \tag{3.4}$$

*Más aún, si $(\ell(k))_k$ es una sucesión de enteros positivos que converge a $\infty$ entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=N}^{\ell(k)} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j} = \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - z_j}{1 - \alpha_j z_j}. \tag{3.5}$$

*Demostración.* Veamos primero que el producto de (3.4) resulta convergente. En efecto, esto se deduce de la desigualdad:

$$\left|1 - \frac{\alpha_j - z_j}{1 - \alpha_j z_j}\right| = \left|\frac{1 + z_j}{1 - \alpha_j z_j}\right| (1 - \alpha_j) \leq \frac{2}{\delta 3/4}(1 - \alpha_j),$$

donde el último término es sumable por hipótesis.

En un segundo paso estudiamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, la velocidad de convergencia del producto infinito $\prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j}$. Tenemos la siguiente acotación independiente de $k$:

$$\left|1 - \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j}\right| = \left|\frac{1 + \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j}\right| (1 - \alpha_j) \leq \frac{2}{\delta/2}(1 - \alpha_j).$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\widetilde{N} \geq N_1$,

$$\left|\prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j} - \prod_{j=N}^{\widetilde{N}} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j}\right| < \varepsilon/4,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, y

$$\left|\prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - z_j}{1 - \alpha_j z_j} - \prod_{j=N}^{\widetilde{N}} \frac{\alpha_j - z_j}{1 - \alpha_j z_j}\right| < \varepsilon/4.$$

Podemos entonces encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene

$$\left|\prod_{j=N}^{N_1} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j} - \prod_{j=N}^{N_1} \frac{\alpha_j - z_j}{1 - \alpha_j z_j}\right| < \varepsilon/4.$$

Finalmente tomamos $k_0' = \min\{k : \ell(k) \geq N_1\}$ y $k_1 = \max\{k_0, k_0'\}$. Para $k \geq k_1$, la expresión

$$\left|\prod_{j=N}^{\ell(k)} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1 - \alpha_j \alpha_k z_j} - \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - z_j}{1 - \alpha_j z_j}\right|$$

está acotada por

$$\left|\prod_{j=N}^{\ell(k)} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1-\alpha_j\alpha_k z_j} - \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1-\alpha_j\alpha_k z_j}\right| + \left|\prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1-\alpha_j\alpha_k z_j} - \prod_{j=N}^{N_1} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1-\alpha_j\alpha_k z_j}\right|$$
$$+\left|\prod_{j=N}^{N_1} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_j}{1-\alpha_j\alpha_k z_j} - \prod_{j=N}^{N_1} \frac{\alpha_j - z_j}{1-\alpha_j z_j}\right| + \left|\prod_{j=N}^{N_1} \frac{\alpha_j - z_j}{1-\alpha_j z_j} - \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - z_j}{1-\alpha_j z_j}\right| < \varepsilon,$$

probando así el límite deseado. $\square$

Como ya mencionamos, usaremos el Lema 3.2.3 para obtener isometrías de Gleason en la fibra sobre $z$. Si bien el lema está enunciado para fibras sobre $z$ con coordenadas a distancia positiva de 1 podemos subsanar esta restricción considerando isometrías convenientemente definidas. Para ello, vamos a necesitar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.4** ([9, Prop. 1.6])**.** *Sea $X$ un espacio de Bananch y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u(B_X)$ o $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty(B_X)$. Supongamos que existe un automorfismo $\Phi : B_X \to B_X$ y supongamos además para el caso de $\mathcal{A}_u(B_X)$ que $\Phi$ y $\Phi^{-1}$ son uniformemente continuos. Entonces*

1. *El mapa $\Phi$ induce un operador de composición $\Lambda_\Phi : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ dado por $\Lambda_\Phi(\varphi)(f) = \varphi(C_\Phi(f))$ que resulta una isometría de Gleason con inversa $\Lambda_{\Phi^{-1}}$.*

2. *Si para todo $x^* \in X^*$, $x^* \circ \Phi$ y $x^* \circ \Phi^{-1}$ son límites uniformes de polinomios de tipo finito entonces para cada $x \in \overline{B}_X$ se tiene que $\Lambda_\Phi(\pi^{-1}(z)) = \pi^{-1}(\widetilde{\Phi}(z))$.*

Aplicando esta proposición a $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ obtenemos el corolario:

**Corolario 3.2.5.** *Sean $z, w \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ tales que $|z_n| = |w_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces las fibras $\pi^{-1}(z)$ y $\pi^{-1}(w)$ resultan isométricas con la métrica de Gleason.*

*Demostración.* Sean $z, w \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ tales que $|z_n| = |w_n|$ para todo $n$. Podemos escribir $w_n = \lambda_n z_n$ con $\lambda_n \in \mathbb{T}$ y definir

$$\begin{aligned} \theta &: c_0 \to c_0 \\ \theta(x) &= (\lambda_n x_n)_n. \end{aligned}$$

Observemos que $\theta$ es una isometría lineal y que la extensión $\widetilde{\theta} : \ell_\infty \to \ell_\infty$ está dada por $\widetilde{\theta}(y) = (\lambda_n y_n)_n$. Se sigue de la Proposición 3.2.4 que el mapa inducido $\Lambda_\theta : \mathcal{M}(B_{c_0}) \to \mathcal{M}(B_{c_0})$ resulta una isometría de Gleason que verifica $\Lambda_\theta(\pi^{-1}(z)) = \pi^{-1}(w)$. $\square$

Ahora si estamos en condiciones de probar el Teorema 3.2.1.

*Demostración del Teorema 3.2.1.* Comencemos fijando $(\alpha_k)_k$ una sucesión de números reales positivos convergente a 1 y que satisface $\sum_k(1-\alpha_k) < \infty$ y $(m_k)_k$ una sucesión de enteros no negativos tales que $m_k + k < m_{k+1}$. Probaremos primero el resultado con hipótesis adicionales sobre $z$ y luego lo extendemos a toda la bola $\overline{B}_{\ell_\infty}$.

Paso 1: Sea $z \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ tal que existe $\delta > 0$ para el cual se verifica $|z_k - 1| > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, el mapa $\Phi_z^k : B_{\ell_\infty} \to B_{\ell_\infty}$ de la siguiente forma

$$(\Phi_z^k(w))_j = \begin{cases} \alpha_k z_j, & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ 0, & \text{si } k+1 \leq j \leq m_k \\ \dfrac{\alpha_k - w_i}{1 - \alpha_k w_i}, & \text{si } j = m_k + i, 1 \leq i \leq k \\ 0, & \text{si } j > m_k + k. \end{cases}$$

Identificando $\Phi_z^k(w)$ con $\delta_{\Phi_z^k(w)} \in \mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ podemos definir

$$\Phi_z : \mathbb{N} \times B_{\ell_\infty} \to \mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$$
$$\Phi_z(k, w) = \Phi_z^k(w).$$

Al ser $\mathcal{M}_\infty(B_{\ell_\infty})$ un subconjunto $w^*-$compacto de $(\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))^*$ tenemos para cada $w \in B_{\ell_\infty}$ una única extensión continua

$$\Phi_z(-, w) : \beta(\mathbb{N}) \to \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}).$$

Escribimos entonces $\Phi_z^\eta(w) = \Phi_z(\eta, w)$ para $\eta \in \beta(\mathbb{N})$. Notar que, si $n \leq k$,

$$\langle \Phi_z^k(w), e_n \rangle = \alpha_k z_n \xrightarrow[k\to\infty]{} z_n.$$

Por lo que $\pi(\Phi_z^\eta(w)) = z$ para todos $w \in B_{\ell_\infty}$ y $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. Concluímos que la imagen de $\Phi_z^\eta$ está contenida en la fibra $\pi^{-1}(z)$.

Para ver que $\Phi_z^\eta$ resulta un mapa analítico notemos que, para cada función $f \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$, la sucesión $(f \circ \Phi_z^k)_k$ está contenida en el conjunto $w^*-$compacto $\|f\|\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_\infty})}$. Con un argumento estándar obtenemos que $f \circ \Phi_z^\eta$ pertenece a $\|f\|\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_\infty})}$ y en particular la composición resulta holomorfa.

Probemos ahora que $\Phi_z^\eta$ es una isometría. Para ello, dados $w, v \in B_{\ell_\infty}$ y $k \in \mathbb{N}$ comparamos la distancia pseudo-hiperbólica $\rho(\delta_{\Phi_z^k(w)}, \delta_{\Phi_z^k(v)})$ con $\rho(\delta_w, \delta_v)$ a partir de la igualdad (3.3):

$$\rho(\delta_{\Phi_z^k(w)}, \delta_{\Phi_z^k(v)}) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \frac{\Phi_z^k(w)_j - \Phi_z^k(v)_j}{1 - \overline{\Phi_z^k(w)}_j \Phi_z^k(v)_j} \right| = \sup_{1\leq i\leq k} \left| \frac{w_i - v_i}{1 - \overline{w}_i v_i} \right| \leq \rho(\delta_w, \delta_v).$$

Esto implica que

$$\|\Phi_z^\eta(w) - \Phi_z^\eta(v)\| \leq \|\delta_w - \delta_v\| \quad \forall w, v \in B_{\ell_\infty},\ \eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}.$$

Para la desigualdad contraria evaluamos $\Phi_z^\eta(z)$ y $\Phi_z^\eta(w)$ en funciones test convenientemente definidas. Consideramos entonces para cada $i \leq N$ el mapa

$$G_{i,N}(\omega) = \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - \omega_{i+m_j}}{1 - \alpha_j \omega_{i+m_j}}.$$

Un cálculo directo muestra que el módulo de cada factor está acotado por 1. Más aún, para cada $0 < r < 1$ y $\omega \in rB_{c_0}$ se verifica

$$\left|1 - \frac{\alpha_j - \omega_{i+m_j}}{1 - \alpha_j \omega_{i+m_j}}\right| = \left|\frac{1 + \omega_{i+m_j}}{1 - \alpha_j \omega_{i+m_j}}\right| (1 - \alpha_j) \leq \frac{1+r}{1-r}(1 - \alpha_j).$$

De aquí que los productos parciales involucrados en $G_{i,N}$ convergen uniformemente en $rB_{c_0}$ para cada $0 < r < 1$. Aplicando un criterio de tipo Weierstrass [25, Th. 2.13] a los productos parciales obtenemos que las funciones $G_{i,N}$ pertenecen a $\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ y verifican $\|G_{i,N}\| \leq 1$ para todo $i \leq N$.

Habiendo definido las funciones test $G_{i,N}$, calculamos para $k > N$ la composición $G_{i,N}(\Phi_z^k(w))$. Si notamos con $\ell(k)$ al máximo $j \in \mathbb{N}$ tal que $i + m_j \leq k$, podemos escribir

$$G_{i,N}(\Phi_z^k(w)) = \left(\prod_{j=N}^{\ell(k)} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_{i+m_j}}{1 - \alpha_j \alpha_k z_{i+m_j}}\right) \cdot \left(\prod_{j=\ell(k)+1}^{k-1} \alpha_j\right) \cdot w_i \cdot \left(\prod_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j\right).$$

Observemos que, en caso de existir el límite $\lim_k G_{i,N}(\Phi_z^k(w))$, este debe verificar

$$\lim_k G_{i,N}(\Phi_z^k(w)) = \Phi_z^\eta(w)(G_{i,N}) \quad \forall \eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}.$$

Veamos entonces que este límite efectivamente existe. Como $\alpha_k \nearrow 1$ debe existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \alpha_k < \delta/4$ para todo $k \geq k_0$. Luego, si $N \geq k_0$, por el Lema 3.2.3, el factor

$$\left(\prod_{j=N}^{\ell(k)} \frac{\alpha_j - \alpha_k z_{i+m_j}}{1 - \alpha_j \alpha_k z_{i+m_j}}\right)$$

converge a

$$C_{i,N}(z) = \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - z_{i+m_j}}{1 - \alpha_j z_{i+m_j}}$$

cuando $k \to \infty$. Como los factores

$$\left(\prod_{j=\ell(k)+1}^{k-1} \alpha_j\right) \text{ y } \left(\prod_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j\right)$$

convergen a 1, obtenemos

$$\Phi_z^\eta(G_{i,N}) = C_{i,N}(z) \cdot w_i \quad \forall \eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}.$$

Notemos que $|C_{i,N}(z)| \leq 1$ para todo $N$ y que $C_{i,N}(z) \to 1$ cuando $N \to \infty$. Por lo tanto, para cada $h \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ con $\|h\| \leq 1$ se tiene que $h \circ G_{i,N} \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$, $\|h \circ G_{i,N}\| \leq 1$ y

$$|\Phi_z^\eta(w)(h \circ G_{i,N}) - \Phi_z^\eta(v)(h \circ G_{i,N})| = |h(C_{i,N}(z) \cdot w_i) - h(C_{i,N}(z) \cdot v_i)| \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} |h(w_i) - h(v_i)|.$$

Esto implica que $\|\Phi_z^\eta(w) - \Phi_z^\eta(v)\| \geq \|\delta_{w_i} - \delta_{v_i}\|$ para todo $i$, donde la última norma la tomamos en $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$. Apelando nuevamente a la igualdad (3.3) obtenemos

$$\|\Phi_z^\eta(w) - \Phi_z^\eta(v)\| \geq \|\delta_w - \delta_v\| \quad \forall w, v \in B_{\ell_\infty},$$

mostrando así que $\Phi_z^\eta$ es una isometría.

Para completar la demostración en este caso resta probar que si $\eta_1 \neq \eta_2$ las imágenes $\Phi_z^{\eta_1}(B_{\ell_\infty})$ y $\Phi_z^{\eta_2}(B_{\ell_\infty})$ están contenidas en partes de Gleason diferentes. Sean $\eta_1 \neq \eta_2$ dos elementos en $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, existe entonces un conjunto infinito $A \subset \mathbb{N}$ cuyo complemento $\mathbb{N} \setminus A$ también es infinito y que verifica $\eta_1 \in \overline{A}$, mientras que $\eta_2 \in \overline{\mathbb{N} \setminus A}$. Consideramos ahora la función

$$G_{1,N}^A(\omega) = \prod_{\substack{j \geq N \\ j \in A}} \frac{\alpha_j - \omega_{1+m_j}}{1 - \alpha_j \omega_{1+m_j}}.$$

Razonando como antes, vemos que para todo $k \in A$ se cumple que $G_{1,N}^A(\Phi_z^k(0)) = 0$, por lo que $\Phi_z^{\eta_1}(0)(G_{1,N}^A) = 0$. Por otra parte, si $k' \geq N$ pertenece a $\mathbb{N} \setminus A$ podemos calcular

$$G_{1,N}^A(\Phi_z^{k'}(0)) = \prod_{\substack{N \leq j \leq \ell(k') \\ j \in A}} \frac{\alpha_j - \alpha_{k'} z_{1+m_j}}{1 - \alpha_j \alpha_{k'} z_{1+m_j}} \prod_{\substack{j \geq \ell(k')+1 \\ j \in A}} \alpha_j.$$

Dado que el segundo factor converge a 1, deducimos que

$$\Phi_z^{\eta_2}(0)(G_{1,N}^A) = \prod_{\substack{j \geq N \\ j \in A}} \frac{\alpha_j - z_{1+m_j}}{1 - \alpha_j z_{1+m_j}}.$$

Aplicando entonces el Lema 3.2.3 vemos que $\Phi_z^{\eta_2}(0)(G_{1,N}^A) \to 1$ cuando $N \to \infty$. De aquí que $\Phi_z^{\eta_1}(0)$ y $\Phi_z^{\eta_2}(0)$ yacen en distintas partes de Gleason. La demostración concluye al observar que, al ser una isometría de Gleason, $\Phi_z^{\eta_i}(B_{\ell_\infty})$ está contenida en una única parte de Gleason para $i = 1, 2$.

Paso 2: Consideremos ahora $z \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ para el que existen $\delta > 0$ y una subsucesión $(z_{n_j})$ tales que $|z_{n_j} - 1| > \delta$. Tomamos ahora $\mathbb{J} = \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ y repetimos la construcción del paso anterior en las coordenadas de $\mathbb{J}$. Esto es, para cada coordenada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\Phi_{z,\mathbb{J}}^k$ de la siguiente forma

$$(\Phi_{z,\mathbb{J}}^k(w))_n = \begin{cases} \alpha_k z_n, & \text{si } n \neq n_j \text{ para todos } j,\ n \leq k, \\ \alpha_k z_{n_j}, & \text{si } n = n_j, 1 \leq j \leq k, \\ \dfrac{\alpha_k - w_i}{1 - \alpha_k w_i}, & \text{si } n = n_j,\ \text{con } j = m_k + i, 1 \leq i \leq k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Como antes, obtenemos $\Phi_{z,\mathbb{J}} : \beta(\mathbb{N}) \times B_{\ell_\infty} \to \mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ tomando para cada $w \in B_{\ell_\infty}$ la única extensión continua a $\beta(\mathbb{N})$ del mapa $\Phi_{z,\mathbb{J}}(-, w)$. De aquí en adelante seguimos como en el Paso 1, notando que las funciones test a considerar son

$$G_{i,N}(\omega) = \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - \omega_{n_{i+m_j}}}{1 - \alpha_j \omega_{n_{i+m_j}}}.$$

Obtenemos entonces para cada $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, que $\Phi_{z,\mathbb{J}}^\eta$ es una isometría de Gleason analítica que proyecta sobre $z$. Más aún, si $\eta_1 \neq \eta_2$ son elementos de $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, al evaluar los morfismos en las funciones

$$G_{1,N}^A(w) = \prod_{\substack{j \geq N \\ j \in A}} \frac{\alpha_j - \omega_{n_{i+m_j}}}{1 - \alpha_j \omega_{n_{i+m_j}}}$$

y repetir el procedimiento del Paso 1 resulta inmediato que $\Phi_{z,\mathbb{J}}^{\eta_1}(B_{\ell_\infty})$ y $\Phi_{z,\mathbb{J}}^{\eta_2}(B_{\ell_\infty})$ yacen en distintas partes de Gleason.

Paso 3: Para alcanzar todas las posibles fibras resta analizar el caso de $z \in \overline{B}_{\ell_\infty}$ que no satisface las condiciones del Paso 2. En tal caso, necesariamente

$$\lim_{k \to \infty} z_k = 1.$$

Fijamos entonces $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda \neq 1$. Como $\lambda z$ cumple las condiciones del Paso 1, podemos obtener un mapa $\Phi_{\lambda z} : \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N} \times B_{\ell_\infty} \to \pi^{-1}(\lambda z)$ que cumple todo lo pedido. El resultado se sigue entonces de tomar la isometría de Gleason entre las fibras $\pi^{-1}(z)$ y $\pi^{-1}(\lambda z)$ dada por el Corolario 3.2.5. $\square$

Es importante remarcar que para aquellos $z \in B_{\ell_\infty}$, el teorema anterior nos aporta $\beta(\mathbb{N})$ copias de $B_{\ell_\infty}$ en la fibra $\pi^{-1}(z)$ que no solamente pertenecen a partes de Gleason disjuntas sino que además resultan disjuntas de $\mathcal{GP}(\delta_z)$:

**Observación 3.2.6.** *Si $z \in B_{\ell_\infty}$, $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ entonces la imagen $\Phi_z^\eta(B_{\ell_\infty})$ es disjunta de $\mathcal{GP}(\delta_z)$. En efecto, si*

$$G_{i,N}(\omega) = \prod_{j=N}^{\infty} \frac{\alpha_j - \omega_{i+m_j}}{1 - \alpha_j \omega_{i+m_j}},$$

*sabemos por la demostración del Teorema 3.2.1 que $\Phi_z^\eta(0)(G_{1,N}) = 0$, mientras que $\delta_z(G_{i,N}) \to 1$ cuando $N \to \infty$ por lo que $\rho(\Phi_z^\eta(0), \delta_z) = 1$. Como $\Psi_z^\eta$ es una isometría de Gleason esto implica que $\Phi_z^\eta(B_{\ell_\infty})$ pertenece a una parte de Gleason disjunta a $\mathcal{GP}(\delta_z)$.*

## 3.3. Fibras de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ sobre $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ (segunda parte)

Volvemos ahora al caso vectorial. Nuestro objetivo aquí es valernos de la construcción escalar para obtener inyecciones analíticas en todas las fibras de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. Recordemos que, por el Lema 2.4.21 un morfismo $\Phi$ pertenece a la fibra sobre $g$ si y solo si

$$\delta_x \circ \Phi \in \pi^{-1}(g(x)) \quad \forall x \in B_{c_0}.$$

Para obtener entonces, para cada $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, una inyección analítica $\Psi^\eta$ de $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ en la fibra $\mathscr{F}(g)$ resultaría natural proponer

$$\Psi^\eta(h)(f)(x) = \Phi_{g(x)}^\eta(h(x))(f). \tag{3.7}$$

El problema de este planteo es que la construcción de $\Phi_z^\eta$ del Teorema 3.2.1 depende de $z$ (específicamente, depende de si $z$ posee una subsucesión cuyas coordenadas están alejadas del 1 y en tal caso, de qué coordenadas se utilizan). Luego, para que funcione la fórmula (3.7), necesitamos que todos los $z = g(x)$ sean del mismo tipo, independientemente de $x \in B_{c_0}$. En otras palabras, necesitamos (tal vez luego de aplicar una rotación) una subsucesión $(g(x))_{n_k}$, independiente de $x$ tal que todos sus elementos están a distancia positiva del 1. Para probar que la existencia del tal subsucesión para toda función $g$ en $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ presentamos primero algunos resultados sobre las funciones en $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$.

Podemos ver a las funciones $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ como una sucesión de funciones $g = (g_n)_n$ con $g_n \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}$. Esto nos permite aplicar el siguiente Teorema.

**Teorema 3.3.1** ([25, Th. 2.17]). *Sea $X$ un espacio normado y separable. Si $(f_n)_n$ es una sucesión acotada de funciones en $\mathcal{H}^\infty(B_X)$, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ y una función holomorfa $f : B_X \to \mathbb{C}$ tal que $f_{n_k} \to f$ uniformemente en cada compacto de $B_X$.*

Aplicando este resultado buscamos probar que toda función $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ posee una subsucesión $(g(x))_{n_k}$, independiente de $x$ tal que o bien todos sus elementos están a distancia positiva del 1 o podemos aplicar una rotación tal que los elementos queden a distancia positiva del 1.

**Lema 3.3.2.** *Sea $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$, $g = (g_n)_n$. Entonces $g$ verifica alguna de las siguientes opciones:*

*(i) Existe una subsucesión $(g_{n_k})$ tal que $g' = (g_{n_k})_k$ verifica $g'(B_{c_0}) \subset B_{\ell_\infty}$.*

*(ii) Existe $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ y una subsucesión $(g_{n_k})$ tal que $g_{n_k}(x) \to \lambda$ para todo $x \in B_{c_0}$.*

*Demostración.* Aplicando el Teorema 3.3.1 a la sucesión $(g_n)$ obtenemos que existen una subsucesión $(g_{n_k})_k$ y una función $h \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}$ tal que $g_{n_k}(x) \to h(x)$, para todo $x \in B_{c_0}$. Si $g$ no verifica $(i)$, necesariamente

$$\sup_{k \geq k_0} |g_{n_k}(x)| = 1 \quad \text{para todo } x \in B_{c_0}, \text{ y } k_0 \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que existe $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ tal que $h(x) = \lambda$, para todo $x$ y por lo tanto $(g_{n_k})_k$ verifica $(ii)$. □

Este lema nos aporta la subsucesión que buscamos salvo que estemos en el caso $(ii)$ con $\lambda = 1$, esto es que la sucesión $g_{n_k}$ que aporta el lema verifique

$$g_{n_k}(x) \to 1 \quad \forall x \in B_{c_0}.$$

Para este caso probamos una isometría entre las fibras, en el mismo espíritu que el Corolario 3.2.5.

**Lema 3.3.3.** *Sean $g, h \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ tales que $|g_n(x)| = |h_n(x)|$, para todos $n \in \mathbb{N}, x \in B_{c_0}$. Entonces:*

*(i) Existe una sucesión $(\lambda_n)$ en el toro $\partial\mathbb{D}$ tal que $h_n(x) = \lambda_n g_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in B_{c_0}$.*

*(ii) Las fibras $\mathscr{F}(g)$ y $\mathscr{F}(h)$ son Gleason isométricas.*

*Demostración.* $(i)$ Dado $n \in \mathbb{N}$, si $g_n \equiv 0$, el resultado es trivial. En caso contrario, podemos encontrar un abierto $V_n$ de $B_{c_0}$ tal que $g_n \neq 0$ en $V_n$. Esto implica que $\frac{h_n}{g_n}$ es una función holomorfa en $V_n$ con módulo constantemente igual a 1. Por el principio de identidad esta nueva función resulta constante, de lo que obtenemos $(i)$.

$(ii)$ Dada una sucesión $(\lambda_n)$ en $\partial\mathbb{D}$, sea $\theta : B_{c_0} \to B_{c_0}$ dada por $\theta(x_n) = (\lambda_n x_n)$. Razonando como en la Observación 3.2.5, esta vez usando 2.4.20 en lugar de 3.2.4 obtenemos el resultado deseado. □

Tenemos ahora sí todos los ingredientes para presentar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.3.4.** *Para toda $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$, existe una función*

$$\Psi_g : \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N} \times B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} \to \mathscr{F}(g),$$

*que verifica*

1. *Para todo $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, el mapa $\Psi_g^\eta : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} \to \mathscr{F}(g)$, dado por $\Psi_g^\eta(h) = \Psi_g(\eta, h)$ es una isometría de Gleason analítica.*
2. *Dados $\eta_1 \neq \eta_2 \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, las imágenes $\Psi_g^{\eta_1}(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)})$ y $\Psi_g^{\eta_2}(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)})$ están contenidas en partes de Gleason diferentes.*

*Demostración.* Sea $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$, $g = (g_n)_n$. Haremos la demostración por casos a partir de las opciones del Lema 3.3.2.

Asumimos primero que $(g_n)$ tiene una subsucesión $(g_{n_k})$ tal que $g' = (g_{n_k})_k$ verifica $g'(B_{c_0}) \subset B_{\ell_\infty}$. Escribimos entonces $\mathbb{J} = \{n_k\}_k$ y a partir de las funciones $\Phi_{z,\mathbb{J}}^k(w)$ dadas por (3.6) definimos

$$\begin{aligned} \Psi_g : \mathbb{N} \times B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} &\to \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0}) \\ \Psi_g(k,h)(f)(x) &= \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^k(h(x))(f). \end{aligned}$$

Veamos que para cada $k \in N$ la función $\Psi_g(k, -)$ está bien definida. Dados $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ y $f \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ consideramos el mapa

$$[(x, x') \mapsto \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^k(h(x'))(f)].$$

Si fijamos $x$, podemos escribir el mapa resultante como la composición de las funciones holomorfas

$$\begin{array}{rcl} B_{c_0} & \to & B_{\ell_\infty} \\ x' & \mapsto & h(x') \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} B_{\ell_\infty} & \to & \mathbb{C} \\ w & \mapsto & \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^k(w)(f). \end{array}$$

Fijando $x'$, nuevamente podemos escribir el mapa resultante como composición de funciones holomorfas, esta vez

$$\begin{array}{rcl} B_{c_0} & \to & B_{\ell_\infty} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} B_{\ell_\infty} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \Phi_{z,\mathbb{J}}^k(h(x'))(f). \end{array}$$

Por el Teorema de Hartogs, $[(x, x') \mapsto \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^k(h(x'))(f)]$ resulta holomorfo en $B_{c_0} \times B_{c_0}$. Restringiendo entonces a la diagonal obtenemos que la función

$$[x \mapsto \Psi_g^k(h)(f)(x) = \Psi_g(k,h)(f)(x)]$$

es holomorfa. Por otra parte, para cada $x \in B_{c_0}$ la composición

$$\delta_x \circ \Psi_g(k,h) : \mathcal{A}_u(B_{c_0}) \to \mathbb{C}$$

es un morfismo evaluación, por lo que $\Psi_g^k$ está bien definida.

Como $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ es $w^*-$compacto, para cada $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ fija, el mapa $\Psi_g(-,h) : \mathbb{N} \to \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ se extiende de forma única a $\beta(\mathbb{N})$. Esto induce

$$\Psi_g : \beta(\mathbb{N}) \times B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} \to \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0}).$$

Veamos que $\Psi_g$ cumple lo pedido. Notemos que para cada $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, y $x \in B_{c_0}$ se tiene la igualdad

$$\delta_x \circ \Psi_g^\eta(h) = \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^\eta(h(x)). \tag{3.8}$$

Por el Teorema 3.2.1,

$$\pi(\Phi_{g(x),\mathbb{J}}^\eta(h(x))) = g(x).$$

Aplicando entonces el Lema 2.4.21 concluímos que $\xi(\Psi_g^\eta(h)) = g$, por lo que la imagen de $\Psi_g^\eta$ está contenida en $\mathscr{F}(g)$. Resulta además inmediato que $\Psi_g^\eta$ es una isometría de Gleason, pues podemos calcular

$$\rho(\delta_x \circ \Psi_g^\eta(h), \delta_x \circ \Psi_g^\eta(h')) = \rho(\Phi_{g(x),\mathbb{J}}^\eta(h(x)), \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^\eta(h'(x))) = \rho(\delta_{h(x)}, \delta_{h'(x)}),$$

donde la última igualdad surge de que, por el Teorema 3.2.1, $\Phi_{g(x),\mathbb{J}}^\eta$ es una isometría de Gleason. Si tomamos ahora $\eta_1 \neq \eta_2 \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, como el Teorema 3.2.1 asegura que las imágenes $\Phi_z^{\eta_1}(B_{\ell_\infty})$ y $\Phi_z^{\eta_2}(B_{\ell_\infty})$ están contenidas en partes de Gleason (escalares) diferentes, la igualdad implica entonces que lo mismo ocurre en el caso vectorial. Esto es, $\Psi_g^{\eta_1}(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)})$ y $\Psi_g^{\eta_2}(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)})$ están contenidas en partes de Gleason diferentes.

Para completar la prueba en este caso resta ver que $\Psi_g^\eta$ es analítica. Fijamos entonces $f \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$, $x \in B_{c_0}$ y $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. La igualdad de (3.3) muestra que el mapa $\delta_x \circ f \circ \Psi_g : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} \to \mathbb{C}$ puede pensarse como la composición de los mapas analíticos

$$\begin{array}{rcl} B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)} & \to & B_{\ell_\infty} \\ h & \mapsto & h(x) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} B_{\ell_\infty} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^\eta(z)(f), \end{array}$$

por lo que $\Psi_g^\eta$ resulta analítica.

En el segundo caso consideramos $g = (g_n)$ tal que existen una subsucesión $(g_{n_k})$ y un complejo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, $\lambda \neq 1$ tal que $g_{n_k}(x) \to \lambda$ para todo $x \in B_{c_0}$. Para cada $x \in B_{c_0}$ existen entonces $\delta = \delta(x) > 0$ y $k_0 = k_0(x) \in \mathbb{N}$ tales que $|g_{n_k}(x) - 1| > \delta$ para todo $k \geq k_0$. Sea $\mathbb{J} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Tomando entonces

$$\Psi_g^k(h)(f)(x) = \Phi_{g(x),\mathbb{J}}^k(h(x))(f),$$

y siguiendo los mismos pasos que antes obtenemos el resultado.

Finalmente, si $g$ no cumple ninguna de las condiciones anteriores, por el Lema 3.3.2 existe una subsucesión $(g_{n_k})$ tal que $g_{n_k}(x) \to 1$ para todo $x \in B_{c_0}$. En este caso, el resultado se sigue del argumento anterior, junto con el Lema 3.3.3. □

En [10, Lem. 2.9] se prueba que, para $b \in \mathbb{D}$ y $w \in \overline{B}_{\ell_\infty}$, las fibras escalares sobre $w$ y $(b, w)$ resultan homeomorfas. Fue luego observado en [9] que este homeomorfismo es de hecho una isometría de Gleason. Completamos esta sección probando una extensión de este resultado al espectro vectorial.

Necesitaremos primero recordar la construcción de esta isometría. Dado $b \in \mathbb{D}$, notamos con $\Lambda_b : B_{c_0} \to B_{c_0}$ a la función

$$\Lambda_b(x) = (b, x).$$

Notemos además con $S$ al shift a izquierda de $c_0$ en $c_0$ (esto es, $Sx = (x_2, x_3, \dots)$).

La construcción es entonces la siguiente: si $\varphi$ pertenece a la fibra sobre $w$ su imagen es $\psi \in \pi^{-1}(b, w)$, donde

$$\psi(f) = \varphi(f \circ \Lambda_b).$$

El paso central es probar que, si $\psi$ pertenece a la fibra sobre $(b, w)$ entonces,

$$\psi(f) = \psi(f \circ \Lambda_b \circ S) \quad \forall f \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}). \tag{3.9}$$

Hacemos uso de la igualdad (3.9) para obtener la versión vectorial de este resultado:

**Lema 3.3.5.** *Sea $g_1 \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ tal que $g_1(B_{c_0}) \subset \mathbb{D}$. Entonces para toda $h \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ tenemos que las fibras $\mathscr{F}(h)$ y $\mathscr{F}(g_1, h)$ son Gleason isométricas.*

*Demostración.* Consideremos el mapa $R_{g_1} : \mathscr{F}(h) \to \mathscr{F}(g_1, h)$ dado por

$$R_{g_1}(\Phi)(f)(x) = \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(x).$$

Veamos que $R_{g_1}$ resulta una isometría de Gleason bien definida. Fijamos $f \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ y $\Phi \in \mathscr{F}(h)$. Para probar la buena definición debemos verificar que

$$[x \mapsto \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(x)]$$

es una función holomorfa en $B_{c_0}$. Consideramos entonces el mapa

$$[(x, y) \mapsto \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(y)].$$

Si fijamos "$x$", es inmediato que la función

$$[y \mapsto \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(y)] = [y \mapsto \Phi((g_1(x), f(-))(y)]$$

pertenece a $\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$. Similarmente, si fijamos "$y$" la función

$$[x \mapsto \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(y)] = [x \mapsto \delta_y \circ \Phi(g_1(x), f(-))]$$

es holomorfa y acotada en la bola $B_{c_0}$. De aquí que el mapa

$$[(x, y) \mapsto \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(y)]$$

es separadamente holomorfo. Por el Teorema de Hartogs, resulta también holomorfo como función de ambas variables. Luego, lo es también al restringirlo a la diagonal. Por otra parte, resulta claro que el mapa

$$R_{g_1}(\Phi)(f)(x) = \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(x).$$

está acotado por $\|f\|$ y que $R_{g_1}(\Phi)$ es un morfismo; por lo que $R_{g_1}(\Phi)$ pertenece a $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$.

Probemos ahora que $\xi(R_{g_1}(\Phi)) = (g_1, h)$. Tomamos para ello $x^* \in \ell_1$ y denotamos con $S_1$ al operador de shift de $\ell_1$ en $\ell_1$. Calculamos entonces

$$\begin{aligned} R_{g_1}(\Phi)(x^*)(x) &= \Phi(x^* \circ \Lambda_{g_1(x)})(x) = \Phi(x_1^* g_1(x) + S_1 x^*)(x) \\ &= x_1^* g_1(x) + \Phi(S_1 x^*)(x) = x_1^* g_1(x) + h(x)(S_1 x^*) \\ &= x^*(g_1(x), h(x)). \end{aligned}$$

Esto muestra que $R_{g_1}$ manda la fibra sobre $h$ a la fibra sobre $(g_1, h)$ y por lo tanto $R_{g_1}$ está bien definido.

Para ver que $R_{g_1}$ es sobreyectivo, dado $\Psi \in \mathscr{F}(g_1, h)$ definimos el morfismo $\Phi \in \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ como

$$\Phi(f)(x) = \Psi(f \circ S)(x).$$

Es inmediato que $\Phi$ es un morfismo de $\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ en $\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ que verifica $\xi(\Phi) = h$. Más aún, para $x \in B_{c_0}$ y $f \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ podemos aplicar la igualdad (3.9) a $\delta_x \circ \Psi$ obteniendo que

$$\delta_x \circ \Psi(f) = \delta_x \circ \Psi(f \circ \Lambda_{g_1(x)} \circ S).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \delta_x \circ R_{g_1}(\Phi)(f) &= \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(x) \\ &= \Psi(f \circ \Lambda_{g_1(x)} \circ S)(x) = \delta_x \circ \Psi(f). \end{aligned}$$

De aquí que $R_{g_1}(\Phi) = \Psi$, por lo que $R_{g_1}$ es sobreyectivo.

Por último, concluimos que $R_{g_1}$ es una isometría de Gleason como consecuencia de que esto ocurre para el caso escalar y del hecho que tanto $S$ como $\Lambda_b$ son contracciones lineales que satisfacen $S \circ \Lambda_b = Id$. $\square$

Al igual que en el caso escalar, es importante remarcar que podemos repetir el procedimiento de este Lema en varias coordenadas (no necesariamente las primeras). Luego, si tomamos $h \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ e insertamos en $(h_n)$ finitas funciones coordenadas $g_1, \ldots, g_k$ con $g_i \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$ y $g_i(B_{c_0}) \subset \mathbb{D}$, la fibra de la función resultante resulta Gleason isométrica a la original.

## 3.4. Partes de Gleason

En el estudio de fibras de la sección anterior hemos presentado múltiples resultados respecto a la interacción entre fibras y la métrica de Gleason. Nos abocamos ahora al estudio de las partes de Gleason de los espectros $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ y $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ y su relación con las fibras descritas previamente.

### 3.4.1. Partes de Gleason de $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$.

Recordemos que el espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ está dado por

$$\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0}) = \{C_g \colon g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}\}.$$

Como los únicos morfismos a considerar son los de composición $C_g$, las partes de Gleason en este espectro son los conjuntos

$$\mathcal{GP}(C_g) = \{C_h : \sup_{x \in B_{c_0}} \rho_u(\delta_x \circ C_g, \delta_x \circ C_h) < 1\} = \{C_h : \sup_{x \in B_{c_0}} \rho_u(\delta_{g(x)}, \delta_{h(x)}) < 1\}.$$

Recordemos que por la igualdad (3.2) del Teorema 3.1.1 podemos calcular la distancia pseudo-hiperbólica entre $\delta_{g(x)}$ y $\delta_{h(x)}$ como

$$\rho_u(\delta_{g(x)}, \delta_{h(x)}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \rho_u(\delta_{g_n(x)}, \delta_{h_n(x)}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{g_n(x) - h_n(x)}{1 - \overline{g_n(x)} h_n(x)} \right|. \tag{3.10}$$

Sabemos por la Proposición 2.5.2 que todas las las fibras interiores comparten la misma parte de Gleason. Respecto de las fibras de transición y las fibras de borde, veremos que sus partes de Gleason pueden tener un solo elemento o contener una copia analítica de una bola a partir de los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.4.1.** *Sea $g : B_{c_0} \to B_{c_0}$ una funcion biholomorfa (en particular, la fibra sobre $g$ es una fibra de transición). Entonces*

$$\begin{aligned} C_g^* &: \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}) \to \mathcal{M}_u(B_{c_0}) \\ C_g^*(\psi)(f) &= \psi(C_g(f)) = \psi(f \circ g) \end{aligned}$$

*manda strong boundary points en partes de Gleason de un solo elemento. En efecto, notamos en el Corolario 2.5.6 que $C_g^*$ visto como un mapa de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ en si mismo manda strong boundary points en strong boundary points. Por otra parte, por [9, Prop. 3.6] todo strong boundary point de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ se proyecta sobre $\mathbb{T}^\infty$. Se sigue que si $\psi$ es un strong boundary point entonces*

$$C_g^*(\psi) = \delta_z \qquad \text{con } z \in \mathbb{T}^\infty.$$

*Como indica la igualdad (3.2), la distancia pseudo-hiperbólica $\rho_u$ en $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ está dada por*

$$\rho_u(\delta_z, \delta_w) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_u(\delta_{z_n}, \delta_{w_n}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{z_n - w_n}{1 - \overline{z}_n w_n} \right|.$$

*Por lo que las evaluaciones en elementos de $\mathbb{T}^\infty$ forman partes de Gleason de un solo elemento. Esto prueba que $C_g^* : \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}) \to \mathcal{M}_u(B_{c_0})$ manda strong boundary points en partes de Gleason de un solo elemento. Por la Proposición 2.5.7 concluímos que $C_g$ pertenece a una fibra de transición y es aislado en la métrica de Gleason. Ejemplos de estas funciones son $g = Id$ y $g(x) = \left(\frac{a_n - x_n}{1 - \overline{a}_n x_n}\right)_n$ con $(a_n)_n \in B_{c_0}$.*

**Ejemplo 3.4.2.** *Sea $g : B_{c_0} \to S_{\ell_\infty}$ una función constante $g(x) = (a_n)_n$ con $|a_n| = 1$ para todo $n$. Entonces, por la fórmula 3.10 resulta claro que $C_g$ pertenece a una fibra de borde y resulta aislado en la métrica de Gleason.*

A partir de los ejemplos anteriores nos preguntamos si existen otro tipo de partes de Gleason unipuntuales, es decir, si hay fibras de borde tal que $C_g$ es aislado y $g$ no es constante o bien fibras de transición tal que $C_g$ es aislado y $g$ no es una función biholomorfa. Para responder esta pregunta presentamos primero el siguiente resultado que relaciona partes de Gleason de $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ con partes de Gleason de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_u(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$.

**Lema 3.4.3.** *Sea $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$, $g = (g_n)_n$. Entonces $C_g$ es aislado en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ si y sólo si $C_{g_n}$ es aislado en $\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Sean $g \neq h \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$. Si $C_{g_n}$ es aislado para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sup_{x\in B_{c_0}} \rho_u(\delta_x \circ C_g, \delta_x \circ C_h) = \sup_{x\in B_{c_0}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_u(\delta_x \circ C_{g_n}, \delta_x \circ C_{h_n}) = 1.$$

Luego $C_g$ es aislado. Si, por el contrario, suponemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_{g_{n_0}}$ no es aislado en $\mathcal{M}(\mathcal{A}_u(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$, tomamos $C_{\widehat{g}_{n_0}} \in \mathcal{GP}(C_{g_{n_0}})$ con $\widehat{g}_{n_0} \neq g_{n_0}$ y definimos $h \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$ como $h_n = g_n$ para $n \neq n_0$ y $h_{n_0} = \widehat{g}_{n_0}$. Obtenemos así un elemento en $\mathcal{GP}(C_g)$ distinto de $C_g$. □

El Lema anterior, junto al Ejemplo 3.4.1 (que muestra que $C_{Id}$ es aislado) implica que el operador de composición correspondiente a cualquier función coordenada $g_n : B_{c_0} \to \mathbb{D}$, $g_n(x) = x_n$ es aislado en $\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$. En consecuencia, podemos producir ejemplos de morfismos aislados en fibras de transición asociadas a funciones que no son biholomorfas.

**Ejemplo 3.4.4.** *Sea $g : B_{c_0} \to B_{\ell_\infty}$ dada por $g(x) = (x_1)_n$. Entonces $C_g$ pertenece a una fibra de transición y es aislado en la métrica de Gleason, pese a que $g$ no es una función biholomorfa. Es claro además que cualquier otra elección de $g$ con $g_n(x) = x_{k_n}$ para todo $n$ (y cualquier elección de $k_n$) tiene asociado un morfismo de composición que resulta aislado.*

El Lema 3.4.3 resulta útil también para obtener un ejemplo de un morfismo $C_g$ aislado, perteneciente a una fibra de borde y que no está asociado a una función constante. En efecto, es fácil ver que

$$\begin{aligned} g &: B_{c_0} \to \mathbb{D} \\ g(x) &= \frac{a - x_n}{1 - \overline{a} x_n} \qquad (\text{con } |a| < 1) \end{aligned}$$

induce un morfismo de composición que resulta aislado en $\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$. Combinando estas funciones tenemos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.4.5.** *Sea $(a_n)_n$ una sucesión creciente de números reales tales que $0 < a_n < 1$ para todo $n$ y $a_n \to 1$. Consideramos*

$$\begin{aligned} g &: B_{c_0} \to \ell_\infty \\ g(x) &= \left( \frac{a_n - x_n}{1 - a_n x_n} \right)_n . \end{aligned}$$

*Luego $g(B_{c_0}) \subset S_{\ell_\infty}$ y por lo tanto $C_g$ conforma una fibra de borde. Más aún, es inmediato que $g$ no es constante y que, a partir del argumento anterior, $C_g$ es aislado en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$.*

Hasta aquí hemos presentado ejemplos de morfismos $C_g$ pertenecientes a fibras de transición o a fibras de borde que resultan aislados en la métrica de Gleason. Todos los posibles ejemplos de este tipo de morfismos deben ser construidos a partir de una función $g$ que resulte un punto extremal de $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$, como veremos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.6.** *Sea $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$ tal que $C_g$ resulta aislado en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$. Entonces $g$ es un punto extremal de $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$.*

*Demostración.* Supongamos que $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$ no es un punto extremal. Entonces existen $f \neq h \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$ tales que $g = (f + h)/2$. Repitiendo la construcción del

Ejemplo 2.5 tomamos $j(x) = g(x) + k(f(x) - h(x))^2$ con $0 < k < 1/8$. Recordemos que $\|j\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|j_n\|$. Tenemos además que

$$\begin{aligned}\|j_n\| &= \sup_{x\in B_{c_0}} |g_n(x) + k(f_n(x) - h_n(x))^2| = \sup_{x\in B_{c_0}} \left|\frac{f_n(x)+h_n(x)}{2} + k(f_n(x) - h_n(x))^2\right| \\ &\leq \sup_{x\in B_{c_0}} \left|\frac{f_n(x)+h_n(x)}{2}\right| + k|(f_n(x) - h_n(x))^2| \\ &\leq \sup_{x\in B_{c_0}} \left|\frac{f_n(x)+h_n(x)}{2}\right| + 4k\left(1 - \left|\frac{f_n(x)+h_n(x)}{2}\right|^2\right) \leq 1.\end{aligned}$$

Luego $j \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$. Veamos entonces que $C_j$ y $C_g$ pertenecen a la misma parte de Gleason. Para ello calculamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{g_n(x) - j_n(x)}{1 - \overline{g_n(x)}j_n(x)}\right| &= \left|\frac{k(f_n(x) - h_n(x))^2}{1 - \frac{\overline{f_n(x)}+\overline{h_n(x)}}{2}\left(\frac{f_n(x)+h_n(x)}{2} + k(f_n(x) - h_n(x))^2\right)}\right| \\ &= \frac{k|f_n(x) - h_n(x)|^2}{\left|1 - |\frac{f_n(x)+h_n(x)}{2}|^2 - k\left(\frac{\overline{f_n(x)}+\overline{h_n(x)}}{2}\right)(f_n(x) - h_n(x))^2\right|} \\ &\leq \frac{k}{1/4 - k} < 1.\end{aligned}$$

De aquí que $C_j$ pertenece a $\mathcal{GP}(C_g)$ y por lo tanto $C_g$ no es aislado. $\square$

**Pregunta abierta 1.** ¿Es cierta la recíproca del resultado anterior? Es decir, dada $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$, ¿resulta equivalente que $g$ sea un punto extremal a que $C_g$ resulte aislado en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$?

Es importante notar que si reemplazamos $B_{c_0}$ por el disco $\mathbb{D}$ la respuesta es afirmativa. En efecto, combinando [48, Cor. 9] con [45, Th. 4.1] y una caracterización clásica de los extremales dada por Arens, Buck, Carleson, Hoffman y Royden (ver [27, Th. 12] o [44, Ch. 9]) se obtiene que toda $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$ que verifica $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ resulta extremal si y sólo si $C_g$ es aislado en el conjunto de morfismos de composición de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ en $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$. Esto resulta equivalente a afirmar que $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$ es extremal si y sólo si $C_g$ es aislado en $\mathcal{M}(\mathcal{A}_u(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}))$.

Dado que resulta inmediato que $g = (g_n)_n$ es un punto extremal en $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ si y sólo si $g_n$ es un punto extremal de $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}$ para todo $n$ y considerando el Lema 3.4.3 podemos reformular la anterior pregunta abierta de la siguiente forma: ¿es $C_g$ aislado en $\mathcal{M}(\mathcal{A}_u(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$ para toda $g$ extremal en $\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}$?

Para completar nuestra descripción de las partes de Gleason para fibras de transición y fibras de borde presentamos ejemplos que contienen una copia analítica de una bola.

**Ejemplo 3.4.7.** *Teniendo en cuenta que todas las fibras interiores comparten una misma parte de Gleason y que la distancia entre dos morfismos se calcula como el supremo de sus coordenadas resulta sencillo construir ejemplos de partes de Gleason que contienen copias analíticas de una bolas tanto para fibras de transición como de borde.*

*Fijamos $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ (es decir, que determina una fibra de transición o de borde) y consideramos $h \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$, $h = (h_n)_n$ dada por $h_{2n} = g_n$ y $h_{2n+1} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $C_g$ y $C_h$ corresponden al mismo tipo de fibra. Cambiando las coordenadas impares de $h$ por las de cualquier función en $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ obtenemos una nueva función cuyo morfismo asociado está en la misma parte de Gleason que $C_h$. Concluímos entonces que $\mathcal{GP}(C_h)$ contiene una copia isométrica de $\{C_j : j \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}\}$.*

### 3.4.2. Partes de Gleason de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$.

Nuestro objetivo para este espectro más complejo es estudiar cómo se relacionan las fibras y las partes de Gleason. Para empezar, notemos que a partir del Teorema 3.3.4 podemos identificar una relación interesante entre estas nociones. Traducido al "lenguaje de partes de Gleason" el enunciado del teorema es el siguiente:

*Para toda función $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ la fibra $\mathscr{F}(g)$ interseca al menos $2^{\mathfrak{c}}$ partes de Gleason diferentes y cada una de esas intersecciones contiene una copia de una bola infinito dimensional.*

Para completar nuestro análisis nos centramos en las siguientes dos preguntas:

(Q1) ¿Qué partes de Gleason contienen elementos de distintas fibras?

(Q2) ¿En qué fibras podemos encontrar partes de Gleason de un solo elemento?

Previo a avanzar sobre estos interrogantes necesitamos una serie de observaciones sobre las partes de Gleason de $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ y su interacción con $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$.

Si $g, h \in \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)$ son tales que la imagen de $B_{c_0}$ está contenida en $B_{\ell_\infty}$ podemos definir los morfismos de composición $C_g$ y $C_h$ tanto en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ como en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. Dado que, por la igualdad (3.3), la distancia pseudo-hiperbólica entre evaluaciones coincide si la calculamos en $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ o en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$, deducimos la misma identidad para el caso vectorial:

$$\sigma(C_g, C_h) = \sup_{x \in B_{c_0}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{g_n(x) - h_n(x)}{1 - \overline{g_n(x)} h_n(x)} \right| = \sigma_u(C_g, C_h). \tag{3.11}$$

**Observación 3.4.8.** *Si $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ cumple que $g(B_{c_0}) \subset B_{\ell_\infty}$, la fibra $\mathscr{F}(g)$ (que es una fibra interior o de transición) contiene tanto al morfismo de composición $C_g$ como* *a la imagen de la inyección analítica $\Psi_g$ del Teorema 3.2.1. Sabemos que para distintos valores de $\eta \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, las imágenes $\Psi_g^\eta(B_{\ell_\infty})$ están contenidas en distintas partes de Gleason. Más aún, similarmente a lo que ocurre en el caso escalar, estas resultan disjuntas a $\mathcal{GP}(C_g)$. Esto último se deduce de combinar la igualdad (3.3) con la Observación 3.2.6.*

En la subsección anterior hemos estudiado funciones $g$ tales que su correspondiente morfismo de composición $C_g$ resulta aislado en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$. A estas funciones (que sólo pueden corresponder a fibras de transición o de borde) las denominaremos *funciones aisladas*.

Dada $\Phi \in \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$, si consideramos su restricción a $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$ obtenemos el morfismo de composición $C_{\xi(\Phi)}$. Si $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$, resulta claro que

$$\sigma(\Phi, \Psi) \geq \sigma_u(C_{\xi(\Phi)}, C_{\xi(\Psi)}).$$

De aquí deducimos que si $C_{\xi(\Phi)}$ y $C_{\xi(\Psi)}$ no pertenecen a la misma parte de Gleason en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{c_0}, B_{c_0})$, lo mismo debe ocurrir con $\Phi$ y $\Psi$ en el espectro $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. En particular, si $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$ es una función aislada entonces para todo $\Phi \in \mathscr{F}(g) \subset \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ la parte de Gleason de $\Phi$ debe estar contenida en $\mathscr{F}(g)$.

Damos ahora una respuesta completa a la pregunta (Q1) en la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.9.** *Sea $\Phi \in \mathscr{F}(g) \subset \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. Son equivalentes*

*(i) $g$ no es una función aislada.*

*(ii) $\mathcal{GP}(\Phi)$ contiene elementos de distintas fibras.*

*Demostración.* Basta ver que $(i)$ implica $(ii)$, en vistas a lo explicado en el párrafo anterior. Si $g$ no es una función aislada, por el Lema 3.4.3 existe $n$ tal que la función $g_n$ no es aislada. Podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que se trata de $g_1$, es decir, que existe una función $h_1 \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}$ tal que $h_1 \neq g_1$ y $C_{g_1}$, $C_{h_1}$ pertenecen a la misma parte de Gleason en $\mathcal{M}(\mathcal{A}_u(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$. Observemos que esto implica que $g_1(B_{c_0}) \subset \mathbb{D}$ (y lo mismo debe ocurrir para $h_1$), pues de lo contrario $g_1$ debe ser una función constante $g_1(x) = \lambda \in \partial\mathbb{D}$ lo que significa que $C_{g_1}$ es aislado. Escribimos entonces $\overset{\vee}{g} = (g_n)_{n\geq 2} \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0}, \ell_\infty)}$ y consideramos, como en el Lema 3.3.5, los mapas

$$\begin{array}{ccc} R_{g_1} : \mathscr{F}(\overset{\vee}{g}) \to \mathscr{F}(g) & \quad \text{y} \quad & R_{h_1} : \mathscr{F}(\overset{\vee}{g}) \to \mathscr{F}(h_1, \overset{\vee}{g}) \\ R_{g_1}(\Phi)(f)(x) = \Phi(f \circ \Lambda_{g_1(x)})(x) & & R_{h_1}(\Phi)(f)(x) = \Phi(f \circ \Lambda_{h_1(x)})(x), \end{array}$$

donde $\Lambda_{g_1(x)}(y) = (g_1(x), y)$.

Como $R_{g_1}$ es suryectivo existe $\Psi \in \mathscr{F}(\overset{\vee}{g})$ tal que $R_{g_1}(\Psi) = \Phi$. Veamos entonces que $R_{h_1}(\Psi)$ y $\Phi$ pertenecen a la misma parte de Gleason (si bien corresponden a diferentes fibras):

$$\begin{aligned}
\|R_{g_1}(\Psi) - R_{h_1}(\Psi)\| &= \sup_{f \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}} \|R_{g_1}(\Psi)(f) - R_{h_1}(\Psi)(f)\| \\
&= \sup_{f \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}} \sup_{x \in B_{c_0}} \left|\Psi\left(f \circ \Lambda_{g_1(x)} - f \circ \Lambda_{h_1(x)}\right)(x)\right| \\
&\leq \sup_{f \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}} \sup_{x \in B_{c_0}} \left\|f \circ \Lambda_{g_1(x)} - f \circ \Lambda_{h_1(x)}\right\| \\
&= \sup_{x \in B_{c_0}} \|\delta_{g_1(x)} - \delta_{h_1(x)}\| = \|C_{g_1} - C_{h_1}\| < 2.
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba. □

Respecto a nuestra segunda pregunta (Q2), la proposición anterior nos indica que el único lugar donde podemos encontrar partes de Gleason de un solo elemento es en las fibras sobre funciones $g$ aisladas.

En el caso escalar, los elementos aislados de $\mathcal{M}_u(B_{c_0})$ son las evaluaciones $\delta_\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{T}^\infty$. A este respecto, sabemos por [9, Prop. 3.6] que toda fibra en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ sobre un elemento en $\mathbb{T}^\infty$ contiene un *strong boundary point*, que resulta aislado en la métrica de Gleason.

En el contexto vectorial, los ejemplos presentados hasta aquí de funciones aisladas son los siguientes:

- Toda función biholomorfa resulta aislada por el Ejemplo 3.4.1. Como comentamos allí, $C_g^*$ manda *strong boundary points* en *strong boundary points*. Luego, por el Teorema 2.5.5 la parte de Gleason de $C_g$ en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ posee un solo elemento.

- El Ejemplo 3.4.2 muestra que cada función constante $g(x) = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{T}^\infty$ resulta aislada. Dado que la fibra sobre $g$ es de borde, el morfismo de composición $C_g$ no está definido en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$. Sabemos, sin embargo, que la fibra sobre $g$ contiene una parte de Gleason de un solo elemento. En efecto, para el caso escalar tenemos por [9, Prop. 3.6] que en la fibra sobre cada $\lambda \in \mathbb{T}^\infty$ hay un morfismo (escalar) aislado. Basta notar entonces que $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ está contenido naturalmente en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ y que si $\varphi \in \mathcal{M}_\infty(B_{c_0})$ compone en sí mismo una parte de Gleason para el espectro escalar, también resulta aislado en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$.

- En el Ejemplo 3.4.4 presentamos una función $g$ aislada no biholomorfa. Por la proposición 3.4.9 la parte de Gleason de $C_g$ en $\mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ está contenida en $\mathscr{F}(g)$, pero no sabemos si contiene más elementos.

- La función aislada $g$ del Ejemplo 3.4.5 es una función no constante que corresponde a una fibra de borde. No podemos responder en este caso si existe o no una parte de Gleason de un elemento en la fibra sobre $g$.

No sabemos entonces si vale un análogo de [9, Prop. 3.6] para el espectro vectorial, por lo que proponemos la siguiente pregunta abierta.

**Pregunta abierta 2.** Sea $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ una función aislada ¿Existe un morfismo $\Phi \in \mathscr{F}(g) \subset \mathcal{M}_\infty(B_{c_0}, B_{c_0})$ tal que $\mathcal{GP}(\Phi) = \{\Phi\}$?

Por lo visto anteriormente, podemos restringir esta pregunta a los casos de fibras de borde que corresponden a funciones no constantes o a fibras de transición sobre funciones no biholomorfas. En este último caso nos preguntamos no sólo si existe un morfismo en la fibra sobre $g$ que resulte aislado, sino también si el correspondiente morfismo $C_g$ debe ser aislado. Para completar el panorama correspondiente a la pregunta (Q2), presentamos ejemplos de funciones aisladas para los que sí podemos encontrar morfismos aislados en la fibra.

**Ejemplo 3.4.10.** *Sea $g_1 \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})}$ una función aislada en $\mathcal{M}(\mathcal{A}_u(\mathbb{D}), \mathcal{H}^\infty(B_{c_0}))$ tal que $g_1(B_{c_0}) \subset \mathbb{D}$. Ejemplos de este tipo de funciones son $g_1(x) = x_1$ y $g_1(x) = \frac{a-x_1}{1-\bar{a}x_1}$ con $|a| < 1$. Fijamos además $h : B_{c_0} \to B_{c_0}$ una función biholomorfa. Por el Lema 3.3.5 tenemos definida una isometría de Gleason sobreyectiva $R_{g_1} : \mathscr{F}(h) \to \mathscr{F}(g_1, h)$. Dado que $\mathcal{GP}(C_h) = \{C_h\}$, deducimos por el Lema 3.4.3 que $(g_1, h)$ es una función aislada. De aquí que $R_{g_1}(C_h) = C_{(g_1,h)}$ forma una parte de Gleason de un solo elemento que pertenece a una fibra de transición sobre una función no biholomorfa.*

*Si en cambio consideramos $h \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{c_0},\ell_\infty)}$ una función constante $h(x) = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{T}^\infty$, vimos anteriormente que existe un morfismo (escalar) $\Phi \in \mathscr{F}(h)$ cuya parte de Gleason es de un solo elemento. Repitiendo el argumento anterior obtenemos que $R_{g_1}(\Phi) \in \mathscr{F}(g_1, h)$ es aislado y en este caso pertenece a una fibra de borde sobre una función aislada que no es constante.*

# Capítulo 4

# El espectro vectorial en la bola euclídea infinito dimensional

Este capítulo se enfoca en el estudio del espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$. Para este espectro caracterizamos los distintos tipos de fibras (interiores, de transición y de borde) y estudiamos su comportamiento. Luego nos focalizamos en los conjuntos cluster de este espectro, tanto en su relación con las fibras como en la búsqueda de estructuras analíticas en estos conjuntos.

## 4.1. El espectro escalar $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$

Al igual que hicimos en los capítulos anteriores, para analizar el espectro vectorial $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ comenzamos primero por dar una descripción de lo que sucede en el caso escalar. Recordemos que el espectro $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ está dado por

$$\mathcal{M}_u(B_{\ell_2}) = \{\varphi : \mathcal{A}_u(B_{\ell_2}) \to \mathbb{C} \text{ morfismo de álgebras } \} \setminus \{0\}.$$

Cada $x$ en $\overline{B}_{\ell_2}$ define un elemento en este espectro vía la inclusión

$$\begin{aligned} i : \overline{B}_{\ell_2} &\to \mathcal{M}_u(\ell_2) \\ x &\mapsto \delta_x. \end{aligned}$$

Respectivamente, $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ se proyecta sobre $\overline{B}_{\ell_2}$ vía $\pi$, que podemos reescribir en este caso como

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_u(B_{\ell_2}) &\to \overline{B}_{\ell_2} \\ (\pi(\varphi))_n &= \varphi(\langle \cdot, e_n \rangle). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Respecto a la estructura de las fibras asociadas a esta proyección, sabemos por [33] (ver también [4]) que las fibras sobre elementos $x \in S_{\ell_2}$ coinciden con $\{\delta_x\}$. Por el contrario, la situación de las fibras sobre $x \in B_{\ell_2}$ es completamente distinta: a partir del siguiente resultado debido a Cole, Gamelin y Johson podemos ver que contienen una copia analítica de una bola.

**Teorema 4.1.1.** *[22, Th. 6.1] Supongamos que $X$ tiene una base normalizada $\{x_j\}$ que es shrinking, es decir, cuyos funcionales asociados $\{L_j\}$ generan un subespacio denso en $X^*$. Supongamos además que existe un entero $N \geq 1$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |L_j(x)|^N < \infty$$

*para todo $x = \sum_{j=1}^{\infty} L_j(x)x_j$ in $X$. Entonces existe una inyección analítica de $B_{\ell_\infty}$ en la fibra sobre $0$ en $\mathcal{M}_\infty(B_X)$.*

Si bien el enunciado original no hace referencia al espectro $\mathcal{M}_u(B_X)$, la demostración de este teorema se aplica también a $\mathcal{M}_u(B_X)$, puesto que las funciones que se utilizan para ver la inyectividad pertenecen a $\mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ . En el caso particular $X = \ell_2$ obtenemos una inyección analítica de $B_{\ell_\infty}$ en la fibra $\pi_u^{-1}(0) = \{\varphi \in \mathcal{M}_u(B_{\ell_2})\colon \pi_u(\varphi) = 0\}$. Este resultado se extiende a todas las fibras sobre $x \in B_{\ell_2}$: sabemos por [9, Ex. 1.8] que, vía la composición con el mapa

$$\beta_x(y) = \frac{1}{1+\sqrt{1-\|x\|^2}} \left\langle \frac{x-y}{1-\langle y, x\rangle}, x \right\rangle x + \sqrt{1-\|x\|^2}\frac{x-y}{1-\langle y,x\rangle} \tag{4.2}$$

podemos obtener un isomorfismo isométrico entre las fibras $\pi_u^{-1}(x)$ y $\pi_u^{-1}(0)$ para todo $x \in B_{\ell_2}$. Como consecuencia, la fibra sobre todo $x \in B_{\ell_2}$ contiene una copia analítica de $B_{\ell_\infty}$.

## 4.2. Fibras en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$

El espectro $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ está dado por

$$\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2}) = \{\Phi : \mathcal{A}_u(B_{\ell_2}) \to \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}) \text{ morfismos de álgebras}\} \setminus \{0\}.$$

En esta sección nos centramos en la descripción de este espectro a partir del estudio de las fibras asociadas a la proyección

$$\begin{aligned} \xi_u : \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2}) &\to \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)} \\ \Phi &\mapsto [x \mapsto (\Phi(\langle \cdot, e_n\rangle)(x))_n]. \end{aligned}$$

Para toda $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ tenemos bien definido el correspondiente morfismo de composición $C_g \in \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ que pertenece a la fibra $\mathscr{F}(g)$. Sin embargo resulta importante mantener la distinción entre fibras interiores, de transición o de borde, puesto que esta diferencia se refleja en el comportamiento de las fibras. Adaptada a este contexto, la descripción de estas fibras presentada en el Capítulo 2 es la siguiente:

- Fibras sobre funciones $g$ tales que $\|g\| < 1$ (y por lo tanto $g(B_{\ell_2}) \subset B_{\ell_2}$) **(fibras interiores)**.
- Fibras sobre funciones $g$ tales que $\|g\| = 1$ y $g(B_{\ell_2}) \subset B_{\ell_2}$ **(fibras de transición)**.
- Fibras sobre funciones constantes $g \equiv y_0$ con $y_0 \in S_{\ell_2}$ **(fibras de borde)**.

Es importante remarcar que las funciones constantes son las únicas posibles funciones que pueden determinar una fibra de borde. Esto se debe a que si $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ es una función holomorfa tal que $g(x) \in S_{\ell_2}$ para cierto $x \in B_{\ell_2}$ entonces, por ser $\ell_2$ estrictamente convexo, $g$ resulta constante.

La lógica detrás de esta distinción entre las fibras es las siguiente: buscamos obtener morfismos "nuevos" en la fibra sobre una función $g$ a partir de tomar límite de morfismos de composición que estén en cierto sentido "cerca" de $C_g$ (esto es, tales que el límite de sus proyecciones siga siendo $g$). A diferencia de lo que sucede en $c_0$, donde la norma $\|\cdot\|_\infty$ permite modificar coordenadas sin agrandar la norma, mientras que con $\|\cdot\|_2$ esto no es posible. Por ello, al pasar de fibras interiores a fibras de borde tenemos menos lugar para operar y esto se ve reflejado en el tamaño de las fibras en cada caso. Como veremos a continuación, podemos inyectar una copia analítica de una bola en toda fibra interior mientras que para las fibras de borde sucede lo contrario, consisten únicamente del correspondiente morfismo $C_g$. El caso de las fibras de transición resulta el más complejo. Al ser una caso intermedio entre fibras interiores y de borde, pueden ser aisladas o bien contener una copia analítica de una bola. Presentamos ejemplos de estos dos casos pero desconocemos si existe una tercera posibilidad para estas fibras.

### 4.2.1. Fibras de borde

Así como las fibras de $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ sobre $x \in S_{\ell_2}$ constan de un único elemento $\{\delta_x\}$, lo mismo ocurre con las fibras de borde en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$.

Sea $g$ una función constante, $g \equiv y_0$ con $y_0 \in S_{\ell_2}$ (es decir una función que define una fibra de borde). Por el Lema 2.4.21, un morfismo $\Psi \in \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ pertenece a la fibra sobre $g$ si y sólo si

$$\pi(\delta_x \circ \Psi) = g(x) = y_0 \quad \forall x \in B_{\ell_2}.$$

Pero entonces $\delta_x \circ \Psi$ debe ser un morfismo escalar que proyecta sobre $y_0 \in S_{\ell_2}$. Como el único posible morfismo escalar que verifica esta condición es $\delta_{y_0} = \delta_{g(x)}$, obtenemos que

$$\delta_x \circ \Phi = \delta_{g(x)} \quad \forall x \in B_{\ell_2}.$$

Aplicando nuevamente el Lema 2.4.21 concluimos que $\Phi = C_g$. Hemos probado entonces el siguiente resultado, que caracteriza a las fibras de borde.

**Proposición 4.2.1.** *Sea $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ una función constante. Entonces la fibra $\mathscr{F}(g)$ consiste únicamente del morfismo $C_g$.*

### 4.2.2. Fibras interiores

Sea $g \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)$ con $\|g\| < 1$ (es decir, que determina una fibra interior). Buscar morfismos $\Psi$ en la fibra sobre $g$ equivale a buscar morfismos $\Psi$ que satisfacen

$$\pi(\delta_x \circ \Psi) = g(x) \quad \forall x \in B_{\ell_2}.$$

Aquí la situación es polarmente opuesta a la de las fibras de borde: como $g(x) \in B_{\ell_2}$ para cada $x \in B_{\ell_2}$, existen infinitos morfismos escalares $\varphi$ que cumplen $\pi(\varphi) = g(x)$. El problema es ver que podemos elegir estos morfismos de manera holomorfa. Si quisiéramos valernos de la construcción escalar del Teorema 4.1.1 nos encontramos inmediatamente con una dificultad: los mapas $\beta_x$ definidos en (4.2) que nos permiten pasar de la fibra sobre 0 a cualquier otra, no varían en forma analítica en "$x$".

Para solucionar este problema probamos un nuevo resultado para el caso escalar, en el mismo sentido que el Teorema 4.1.1, que muestra que para todo $0 < r < 1$ podemos obtener una inyección analítica de $B_{\ell_2}$ en la fibra sobre todo $x \in rB_{\ell_2}$ y de manera tal que la construcción de estas inyecciones depende de manera analítica de "$x$".

**Lema 4.2.2.** *Para todo $0 < r < 1$ existe una inyección analítica $\Phi_r : rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2} \to \mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ que verifica que la imagen de $\Phi_r(w, \cdot)$ está contenida en la fibra $\pi^{-1}(w)$.*

*Demostración.* Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $s_k : rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2} \to B_{\ell_2}$ como

$$s_k(w, x) = \sum_{j=1}^{k} \langle w, e_j \rangle e_j + (1 - r) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_{k+j} \right).$$

y $\Phi_k : rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2} \to \mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ dado por

$$\Phi_k(w, x) = \delta_{s_k(w,x)}.$$

Fijamos ahora un ultrafiltro $\mathscr{U}$ que contenga los conjuntos $\{k : k \geq k_0\}$ y definimos el mapa $\Phi_r : rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2} \to \mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ de la siguiente forma: para cada par $(w, x) \in rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2}$,

$\Phi_r(w,x)$ se obtiene como el $w^*-$límite dado por $\mathscr{U}$ de $(\Phi_k(w,x))_k$. Este límite existe pues $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ es un subconjunto $w^*-$compacto de $(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}))^*$. Tenemos entonces para $(w,x) \in rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2}$ y $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ que

$$\Phi_r(w,x)(f) = \lim_{\mathscr{U}} \Phi_k(w,x)(f).$$

Veamos que $\Phi_r : rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2} \to \mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ así definida resulta una inyección analítica que manda $\{w\} \times B_{\ell_2}$ en la fibra sobre $w$.

Para probar que la imagen de $\Phi_r(w,\cdot)$ está contenida en $\pi^{-1}(w)$ fijamos $x \in B_{\ell_2}$ y $n \in \mathbb{N}$. Para todo $k \geq n$ se verifica la igualdad

$$\Phi_k(w,x)(\langle \cdot, e_n \rangle) = w_n.$$

Esto implica que $\Phi_r(w,x)(\langle \cdot, e_n \rangle) = w_n$ para todo $n$, por lo que concluimos que

$$\pi(\Phi_r(w,x)) = w \quad \forall (w,x) \in rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2}.$$

Verificamos ahora que $\Phi_r$ es analítica. Comenzamos entonces por fijar $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$. Debemos ver que el mapa

$$\begin{aligned} \widehat{f} \circ \Phi_r : rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2} &\to \mathbb{C} \\ (w,x) &\mapsto \Phi_r(w,x)(f) \end{aligned}$$

es holomorfo. Como la sucesión $(\widehat{f} \circ \Phi_k)_k$ está contenida en el conjunto $w^*-$compacto $\|f\|\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2})}$, tiene límite a lo largo del ultrafiltro $\mathscr{U}$. Este límite necesariamente coincide con $\widehat{f} \circ \Phi_r$, lo cual implica que el mapa pertenece a $\|f\|\overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(rB_{\ell_2} \times B_{\ell_2})}$. De aquí que $\widehat{f} \circ \Phi_r$ resulta holomorfo.

Resta entonces probar la inyectividad de $\Phi_r$. Notemos primero que para $w \neq w'$ sabemos que $\Phi_r(w,x) \neq \Phi_r(w',x)$ pues las imágenes pertenecen a distintas fibras. Ahora, inspirados por [19, Th. 3.1], consideramos para cada $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ la función test $f_\lambda(x) = \sum_{j=1}^\infty \lambda^j x_j^2$ de manera que

$$\Phi_k(w,x)(f_\lambda) = \sum_{j=1}^k \lambda^j \langle w, e_j \rangle^2 + \lambda^k \sum_{j=1}^\infty \lambda^j ((1-r)\langle x, e_j \rangle)^2.$$

Si escribimos $\chi(\lambda) = \lim_{\mathscr{U}} \lambda^k$ (que existe pues todos los $\lambda$ pertenecen a $\partial\mathbb{D}$) podemos calcular

$$\Phi_r(w,x)(f_\lambda) = \sum_{j=1}^\infty \lambda^j \langle w, e_j \rangle^2 + \chi(\lambda) \sum_{j=1}^\infty \lambda^j ((1-r)\langle x, e_j \rangle)^2. \tag{4.3}$$

Como consecuencia, para $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, $\Phi_r(w,x)(f_\lambda) = \Phi_r(w,x')(f_\lambda)$ si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j ((1-r)\langle x, e_j\rangle)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j ((1-r)\langle x', e_j\rangle)^2.$$

Supongamos que $\Phi_r(w,x) = \Phi_r(w,x')$. En particular, para todo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ ocurre que $\Phi_r(w,x)(f_\lambda) = \Phi_r(w,x')(f_\lambda)$. Dado que

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j ((1-r)\langle x, e_j\rangle)^2$$

es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y coincide con

$$F'(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j ((1-r)\langle x', e_j\rangle)^2$$

en $\partial\mathbb{D}$, el desarrollo de Taylor de ambas funciones debe coincidir. Por lo tanto $(\langle x, e_j\rangle)^2 = (\langle x', e_j\rangle)^2$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Repitiendo este argumento con $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j x_j^3$ obtenemos la igualdad $x = x'$ probando así que $\Phi_r$ es efectivamente una inyección analítica. $\square$

A partir de este resultado y valiéndonos de la propiedad que define a las fibras interiores ($\|g\| < 1$) construimos la inyección analítica en el caso vectorial.

**Teorema 4.2.3.** *Para cada $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ existe una inyección analítica*

$$\Psi_g : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)} \to \mathscr{F}(g).$$

*Demostración.* Dada $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ existe $r > 0$ tal que $\|g\| < r < 1$. Considerando el mapa $\Phi_r$ construido en el lema anterior definimos

$$\begin{aligned} \Psi_g : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)} &\to \mathscr{F}(g) \\ \Psi_g(h)(f)(x) &= \Phi_r(g(x), h(x))(f). \end{aligned}$$

Para comprobar que este mapa está bien definido debemos verificar que para cada $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$, $\Psi_g(h)$ es un morfismo en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ y que $\xi_u(\Psi_g(h)) = g$. Fijamos entonces $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$. Sabemos por el Lema 4.2.2 que el mapa de $B_{\ell_2}$ en $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$ dado por

$$[x \mapsto \Phi_r(g(x), h(x))]$$

es analítico. Esto dice que la función

$$\Psi_g(h)(f) = [x \mapsto \Phi_r(g(x), h(x))(f)]$$

es holomorfa. De la definición de $\Phi_r$ resulta claro que $\Psi_g(h)(f)$ es además acotada y que

$$\Psi_g(h) = [f \mapsto \Psi_g(h)(f)]$$

es un morfismo, por lo que $\Psi_g(h) \in \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$.

Para completar la buena definición falta entonces probar que $\xi_u(\Psi_g(h)) = g$. Nuevamente esto se desprende de las propiedades de $\Phi_r$ demostradas en el Lema 4.2.2, dado que podemos calcular

$$\xi_u\left(\Psi_g(h)\right)(x) = \pi\left(\Phi_r(g(x), h(x))\right) = g(x),$$

por lo que $\xi_u(\Psi_g(h)) = g$.

Resta entonces demostrar que $\Psi_g$ es un mapa inyectivo y analítico. Lo primero resulta inmediato a partir de la inyectividad de $\Phi_r$. Para ver que $\Psi_g$ es analítico debemos verificar que, fijados $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ y $x \in B_{\ell_2}$, el mapa

$$[h \mapsto \Psi_g(h)(f)(x)]$$

de es analítico. Esto se deduce al pensarlo como la siguiente composición de funciones analíticas:

$$h \mapsto (g(x), h(x)) \mapsto \Phi_r(g(x), h(x))(f) = \Psi_g(h)(f)(x).$$

Por lo tanto $\Psi_g$ resulta una inyección analítica de $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ en la fibra $\mathscr{F}(g)$. $\square$

Notemos que para toda $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ tenemos $\Psi_g(0) = C_g$. Si consideramos entonces $h \not\equiv 0$, la inyectividad de $\Psi_g$ junto con la propiedad $\xi_u(\Psi_g(h)) = g$ nos aseguran que $\Psi_g(h)$ no puede ser un morfismo de composición.

### 4.2.3. Fibras de transición

Las fibras de transición forman un caso de intermedio entre fibras interiores y de borde dado que podemos encontrar casos que contienen una copia analítica de una bola, así como también fibras de un sólo elemento. Presentamos a continuación una serie de ejemplos que hacen a la vez de guía para poner en contexto nuestros resultados sobre fibras de transición.

Sea $Id : B_{\ell_2} \to B_{\ell_2}$ la función identidad. Claramente la fibra sobre $Id$ es una fibra de transición. Sin embargo, en el contexto de fibras de transición, la identidad es singular en muchos aspectos. Entre ellos: $Id$ se extiende de forma continua a $\overline{B}_{\ell_2}$ y esta extensión verifica $Id(S_{\ell_2}) \subset S_{\ell_2}$.

Puesto que todo $x \in S_{\ell_2}$ tiene una fibra de un solo elemento en el espectro escalar $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$, la condición $Id(S_{\ell_2}) \subset S_{\ell_2}$ resulta ser muy restrictiva: veremos que el único morfismo en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ que pertenece a la fibra sobre $Id$ es el correspondiente morfismo de composición (que es el morfismo identidad). Para probar este resultado, hacemos uso del siguiente Lema.

**Lema 4.2.4.** *[33, Lem. 4.4] Sea $B$ la bola de un espacio de Banach uniformemente convexo. Entonces $f \in \mathcal{H}^\infty(B)$ se puede extender continuamente a un elemento $x$ en la esfera unidad si y sólo si $f$ es constante en la fibra $\pi_\infty^{-1}(x)$.*

**Ejemplo 4.2.5.** *Sea $\Phi \in \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ tal que $\xi_u(\Phi) = Id$. Denotamos con $C_\Phi^*$ al mapa*

$$C_\Phi^* : \mathcal{M}_\infty(B_{\ell_2}) \to \mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$$
$$C_\Phi^*(\varphi) = \varphi \circ \Phi.$$

*Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\pi_u(C_\Phi^*(\varphi))_n = C_\Phi^*(\varphi)(\langle \cdot, e_n \rangle) = \varphi(\Phi(\langle \cdot, e_n \rangle)) = \varphi(\langle \cdot, e_n \rangle) = \pi_\infty(\varphi)_n.$$

*Se sigue que*

$$\pi_u(C_\Phi^*(\varphi)) = \pi_\infty(\varphi).$$

*Fijamos entonces $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ y $x \in S_{\ell_2}$. Si $\varphi \in \pi_\infty^{-1}(x)$ podemos calcular*

$$\varphi(\Phi(f)) = C_\Phi^*(\varphi)(f).$$

*Como $\pi_u(C_\Phi^*(\varphi)) = \pi_\infty(\varphi) = x$ y el único morfismo escalar en $\pi_u^{-1}(x)$ es $\delta_x$, necesariamente $C_\Phi^*(\varphi) = \delta_x$ y por lo tanto $\varphi(\Phi(f)) = f(x)$.*

*Para toda $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ la función $\Phi(f) \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})$ es constante en la fibra sobre cualquier $x \in S_{\ell_2}$ (donde toma el valor $f(x)$). Por el Lema 4.2.4, $\Phi(f)$ se extiende de manera continua a $S_{\ell_2}$, donde coincide con $f$. Aplicando el principio de módulo máximo concluimos que $\Phi(f) = f$, por lo que la función identidad es el único elemento en su fibra.*

A partir de aislar los factores claves del ejemplo anterior obtenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.2.6.** *Sea $g \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)$ una función que se extiende de forma continua a $S_{\ell_2}$ de forma tal que $g(S_{\ell_2}) \subset S_{\ell_2}$. Entonces la fibra $\mathscr{F}(g)$ coincide con $\{C_g\}$.*

*Demostración.* Sean $x \in S_{\ell_2}$ y $\varphi \in \pi_\infty^{-1}(x)$. Para $\Phi \in \mathscr{F}(g)$ se tiene

$$\pi_u(C_\Phi^*(\varphi))_n = C_\Phi^*(\varphi)(\langle \cdot, e_n \rangle) = \varphi(\Phi(\langle \cdot, e_n \rangle)) = \varphi(\langle g, e_n \rangle). \tag{4.4}$$

Como $\varphi$ pertenece a la fibra sobre $x \in S_{\ell_2}$ y $g$ se extiende continuamente a la esfera unidad, sabemos por el Lema 4.2.4 que

$$\varphi(\langle g, e_n \rangle) = \langle g, e_n \rangle(x). \tag{4.5}$$

Juntando las igualdades (4.4) y (4.5) vemos que

$$\pi_u(C^*_\Phi(\varphi)) = g(x) \in S_{\ell_2}.$$

Dada $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ podemos calcular

$$\varphi(\Phi(f)) = C^*_\Phi(\varphi)(f) = \delta_{g(x)}(f) = f(g(x)).$$

Como esto vale para todo $\varphi$ en la fibra sobre $x$, $\Phi(f)$ resulta constante en la fibra $\pi_\infty^{-1}(x)$ y, por el Lema 4.2.4, se extiende continuamente a $x$ donde coincide con $f \circ g(x)$. Esto a su vez implica que $\Phi(f)$ es una función en $\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})$ que se extiende continuamente a $S_{\ell_2}$ donde coincide con $f \circ g$ y por lo tanto $\Phi(f) = C_g(f)$. $\square$

Como mencionamos previamente, $Id$ verifica las hipótesis del lema anterior. Más aún, toda isometría lineal (no necesariamente sobreyectiva) restringida a la bola unidad satisface estas condiciones (por ejemplo, el shift $S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$) y por lo tanto la correspondiente fibra se compone únicamente del morfismo de composición.

Podemos reescribir Lema 4.2.6, posiblemente de forma más general, si notamos que la condición $g(S_{\ell_2}) \subset S_{\ell_2}$ se usa para asegurar que si $\Phi$ pertenece a la fibra sobre $g$, el correspondiente morfismo $C^*_\Phi$ manda todos los morfismos $\varphi$ en $\pi_\infty^{-1}(x)$ (con $x \in S_{\ell_2}$) a un mismo elemento en $\mathcal{M}_u(B_{\ell_2})$.

**Lema 4.2.7.** *Sea $\Phi \in \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ tal que existe una función continua $h : S_{\ell_2} \to \overline{B}_{\ell_2}$ que satisface $C^*_\Phi(\pi_\infty^{-1}(x)) = \{\delta_{h(x)}\}$ para todo $x \in S_{\ell_2}$. Entonces $\Phi$ coincide con el morfismo $C_{\xi_u(\Phi)}$.*

*Demostración.* Sean $x \in S_{\ell_2}$ y $\varphi \in \pi_\infty^{-1}(x)$. Por hipótesis,

$$C^*_\Phi(\varphi) = \delta_{h(x)}.$$

Para cada $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ tenemos entonces que

$$\varphi(\Phi(f)) = C^*_\Phi(\varphi)(f) = \delta_{h(x)}(f) = f \circ h(x).$$

Se sigue que $\Phi(f)$ se extiende de forma continua a $S_{\ell_2}$ donde coincide $f \circ h$. En particular, la función

$$(\xi_u(\Phi))_n = \Phi(\langle \cdot, e_n \rangle)$$

se extiende continuamente a todo $x \in S_{\ell_2}$ como $(\xi_u(\Phi))_n(x) = \langle h(x), e_n \rangle$. De aquí que $\xi_u(\Phi)$ coincide con $h$ en $S_{\ell_2}$. Por el principio de módulo máximo concluimos que $\Phi(f) = C_{\xi_u(\Phi)}(f)$ para toda $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ y por lo tanto $\Phi = C_{\xi_u(\Phi)}$. $\square$

No sabemos, sin embargo, si existen morfismos $\Phi$ en $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ que verifican las condiciones del Lema 4.2.7 pero que no pertenecen a fibras sobre funciones alcanzadas por el Lema 4.2.6.

Hasta aquí hemos mostrado ejemplos de fibras de transición que consisten únicamente del correspondiente morfismo de composición. Es decir, cuyo comportamiento asemeja al de las fibras de borde. Como ya anticipamos, hay fibras de transición que por el contrario contienen una bola (o sea, que actúan de igual forma que las fibras interiores). Nuevamente comenzamos con un ejemplo guía.

**Ejemplo 4.2.8.** *Sea $g \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)$ dada por $g(x) = x_1 e_1$. Entonces $g$ verifica $\|g\| = 1$, $g(B_{\ell_2}) \subset B_{\ell_2}$ y existe una inyección analítica $\Psi_g : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)} \to \mathscr{F}(g)$.*

*Para ver la existencia de esta inyección analítica definimos primero para $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ y $k \in \mathbb{N}$ la función $s_{h,k} \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)$ como*

$$s_{h,k}(x) = x_1 e_1 + x_2 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle h(x), e_j \rangle e_{k+j} \right).$$

*Notemos que*

$$\|s_{h,k}(x)\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \|h(x)\|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1. \tag{4.6}$$

*Por lo que $s_{h,k}(B_{\ell_2}) \subset B_{\ell_2}$. Consideramos entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ el mapa*

$$\begin{aligned} \Psi_k : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)} &\to \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2}) \\ \Psi_k(h)(f) &= C_{s_{h,k}}(f) = f \circ s_{h,k}. \end{aligned}$$

*A partir de la inclusión*

$$\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})),$$

*pensamos a la sucesión $(\Psi_k)$ en la bola unidad de $\mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})))$. Por el Teorema 1.2.1 podemos escribir*

$$\mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}))) = \mathcal{L}(\mathcal{G}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}), \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}))).$$

*A partir de la igualdad (2.9) observada en el Capítulo 2 tenemos que*

$$\mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}))) = (\mathcal{G}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}) \widehat{\otimes}_\pi (\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{G}^\infty(B_{\ell_2})))^*.$$

*Podemos tomar entonces, para un ultrafiltro fijo $\mathscr{U}$ que contenga a los conjuntos $\{k \geq k_0\}$, $\Psi_g$ como un $w^*-$límite a lo largo de $\mathscr{U}$ de la sucesión $(\Psi_k)_k$.*

*Por construcción, para cada $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$, $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ tenemos que*

$$\Psi_g(h)(f) = \lim_{\mathscr{U}} C_{s_{h,k}}(f),$$

*por lo que resulta inmediato que $\Psi_g$ está bien definida y es analítica. Resta entonces comprobar que es inyectiva y que la imagen $\Psi_g(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)})$ está contenida en la fibra $\mathscr{F}(g)$.*

*Veamos que, para cada $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$, $\Psi_g(h)$ proyecta sobre $g$. Para ello notamos que si $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo $k \geq n$ se tiene*

$$C_{s_{h,k}}(\langle \cdot, e_n \rangle)(x) = \begin{cases} x_1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

*Tomando límite en $k$ obtenemos que $\xi_u(\Psi_g(h)) = g$.*

*Por último, verificamos que $\Psi_g$ es inyectiva. Para ello consideramos para cada $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ las funciones test $f_\lambda(x) = \sum_{j=1}^\infty \lambda^j x_j^2$ que usamos en el Lema 4.2.2. Para estas funciones,*

$$\Psi_k(h)(f_\lambda)(x) = \lambda x_1 + x_2^2 \lambda^k \sum_{j=1}^\infty \lambda^j \langle h(x), e_j \rangle^2.$$

*Si escribimos $\chi(\lambda) = \lim_{\mathscr{U}} \lambda^k$ entonces*

$$\Psi_g(h)(f_\lambda)(x) = \lambda x_1 + x_2^2 \chi(\lambda) \sum_{j=1}^\infty \lambda^j \langle h(x), e_j \rangle^2.$$

*Dadas $h \neq h'$ dos funciones en $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$, existe $\widetilde{x} \in B_{\ell_2}$ con $\widetilde{x}_2 = \langle \widetilde{x}, e_2 \rangle \neq 0$ tal que $h_1(\widetilde{x}) \neq h_2(\widetilde{x})$. Para cada $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ tenemos que $\Psi_g(h)(f_\lambda)(\widetilde{x}) = \Psi_g(h)(f_\lambda)(\widetilde{x})$ si y sólo si*

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda^j \langle h(\widetilde{x}), e_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^\infty \lambda^j \langle h'(\widetilde{x}), e_j \rangle^2.$$

*Prosiguiendo como en la demostración del Lema 4.2.2 concluimos que $\Psi_g(h)(f_\lambda)(\widetilde{x}) \neq \Psi_g(h)(f_\lambda)(\widetilde{x})$ y por lo tanto $\Psi_g$ resulta inyectiva.*

Los argumentos utilizados en el ejemplo anterior pueden ser modificados ligeramente para alcanzar más casos como vemos en el siguiente teorema. Las hipótesis se condicen con la idea de que necesitamos condiciones que nos provean de cierto "espacio" para así obtener una inyección analítica. Esto se logra al pedir que (tal vez después de un cambio de coordenadas) la función $g$ no depende de al menos una variable. Adicionalmente, como queremos extender estas ideas más allá de aquellas funciones que verifican $g(0) = 0$, incluimos la restricción $\|g(0)\| + \|g - g(0)\| \leq 1$ que nos permite hacer uso de las herramientas del Ejemplo 4.2.8 para la función auxiliar $g - g(0)$.

**Teorema 4.2.9.** *Sea $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ tal que $g(B_{\ell_2}) \subset B_{\ell_2}$. Si $g$ satisface:*

*(i)* $\|g(0)\| + \|g - g(0)\| \leq 1.$

*(ii) Existe una transformación lineal $P : \ell_2 \to \ell_2$ con $\|P\| \leq 1$ y núcleo no trivial que verifica $g = g \circ P$.*

*Entonces existe una inyección analítica $\Psi_g : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)} \to \mathscr{F}(g)$.*

*Demostración.* Probamos primero el resultado con la hipótesis adicional $g(0) = 0$. Fijamos entonces $w \in S_{\ell_2} \cap Ker(P)$ y definimos para cada $k \in \mathbb{N}, h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ la función $s_{h,k} \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)$ como

$$s_{h,k}(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle g(x), e_j \rangle e_j + \langle x, w \rangle \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle h(x), e_j \rangle e_{k+j} \right).$$

Notemos que para cada $x \in B_{\ell_2}$ se tiene

$$\|s_{h,k}(x)\|^2 \leq \sum_{j=1}^{k} |\langle g(x), e_j \rangle|^2 + |\langle x, w \rangle|^2 \leq \|g(x)\|^2 + |\langle x, w \rangle|^2. \tag{4.7}$$

Como $g(0) = 0$ y $\|g\| \leq 1$ podemos aplicar el Lema de Schwarz a $g = g \circ P$ obteniendo así

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 + |\langle x, w \rangle|^2 \leq \|P(x)\|^2 + |\langle x, w \rangle|^2 &= \|P(x - \langle x, w \rangle w)\|^2 + |\langle x, w \rangle|^2 \\ &\leq \|x - \langle x, w \rangle w\|^2 + |\langle x, w \rangle|^2 < 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Juntando ambas desigualdades vemos que $s_{h,k}(B_{\ell_2}) \subset B_{\ell_2}$. Definimos ahora para cada $k \in \mathbb{N}$ el morfismo

$$\begin{aligned} \Psi_k : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)} &\to \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2}) \\ \Psi_k(h)(f) &= C_{s_{h,k}}(f) = f \circ s_{h,k}. \end{aligned}$$

La demostración en este caso concluye tomando $\Psi_g$ como un $w^*-$límite a lo largo de un ultrafiltro de la sucesión $(\Psi_k)_k$ y repitiendo los argumentos utilizados en el Ejemplo 4.2.8.

Para el caso general, escribimos $\widetilde{g} = g - g(0)$ y definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ la función $s_{h,k} \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)$ dada por

$$s_{h,k}(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle g(x), e_j \rangle e_j + \|\widetilde{g}\| \langle x, w \rangle \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle h(x), e_j \rangle e_{k+j} \right).$$

Repitiendo los argumentos utilizados en las desigualdades (4.7) y (4.8) para

$$\sum_{j=1}^{k} \langle \widetilde{g}(x), e_j \rangle e_j + \|\widetilde{g}\| \langle x, w \rangle \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle h(x), e_j \rangle e_{k+j} \right)$$

obtenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \langle \widetilde{g}(x), e_j \rangle e_j + \|\widetilde{g}\| \langle x, w \rangle \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle h(x), e_j \rangle e_{k+j} \right) \right\|^2 < \|\widetilde{g}\|^2.$$

La hipótesis $\|g(0)\| + \|g - g(0)\| \leq 1$ nos asegura entonces que $s_{h,k}(B_{\ell_2}) \subset (B_{\ell_2})$. A partir de aquí el argumento prosigue de manera análoga al caso $g(0) = 0$. $\square$

Hemos presentado previamente un ejemplo de función que verifica las condiciones del Teorema 4.2.9. Podemos construir más funciones que verifican estas hipótesis a partir de polinomios $m-$homogéneos.

**Ejemplo 4.2.10.** *Sean $m \in \mathbb{N}$, $Q : \ell_2 \to \ell_2$ un polinomio $m-$homogéneo con $\|Q\|_{B_{\ell_2}} = 1$ y $P : \ell_2 \to \ell_2$ una proyección lineal. Definimos para $x \in S_{\ell_2}$ y $0 < \alpha < 1$ la función*

$$\begin{aligned} g : B_{\ell_2} &\to \ell_2 \\ g(x) &= \alpha(Q \circ P)(x) + (1 - \alpha)x. \end{aligned}$$

*Notemos que $g(0) = (1 - \alpha)x$ por lo que para cada $x \in B_{\ell_2}$ se tiene la desigualdad*

$$\|g(0)\| + \|g(x) - g(0)\| = (1 - \alpha)\|x\| + \alpha\|Q \circ P(x)\| < 1.$$

*Más aún, como $P$ verifica $P \circ P = P$ se sigue que $g = g \circ P$. Como consecuencia, $g$ verifica las hipótesis del Teorema 4.2.9 y por lo tanto la fibra $\mathscr{F}(g)$ contiene una copia analítica de la bola.*

Hasta aquí hemos encontrado condiciones que aseguran que una fibra de transición es de un sólo elemento o contiene una copia analítica de una bola. Sin embargo, como no tenemos una descripción completa del espectro, permanece abierta la pregunta de si estas son las únicas dos posibilidades para las fibras restantes. Por ejemplo, desconocemos qué sucede con la función

$$g(x) = (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Claramente $g$ se extiende a $S_{\ell_2}$ pero la extensión no verifica $g(S_{\ell_2}) \subset S_{\ell_2}$. Por otra parte, como $g(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ tampoco existe una proyección $P$ con núcleo no trivial tal que $g \circ P = g$. Luego $g$ no verifica las hipótesis del Lema 4.2.6 ni aquellas del Teorema 4.2.9. Si bien existen más funciones que no verifican las hipótesis del Lema o Teorema referidos, esta función $g$ es en cierta forma un elemento natural de $\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)$ por lo que sería interesante conocer el comportamiento de la correspondiente fibra.

## 4.3. Conjuntos cluster de $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$

Dadas $g \in \overline{B}_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{B},\ell_2)}$, $f \in \mathcal{A}_u(\mathcal{B})$, el conjunto cluster $\mathcal{C}\ell(f,g)$ que definimos originalmente en el capítulo 2 está dado en este contexto por

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\ell(f,g) = \{h \in \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})\colon \exists\ (g_\alpha) \subset B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}, g_\alpha \xrightarrow{w^*} g \text{ y verifica}\\ C_{g_\alpha}(f)(y) \to h(y)\ \forall y \in B_{\ell_2}\}.\end{aligned}$$

En esta sección analizamos los conjuntos cluster de $\mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ en búsqueda de estructuras analíticas. Recordemos que la inclusión

$$\mathcal{C}\ell(f,g) \subset \widehat{f}(\mathscr{F}(g)),$$

demostrada en el Lema 2.6.1 nos indica que sólo puede haber clusters grandes para funciones $g$ que contienen más de un elemento en la correspondiente fibra. Esto nos remite inmediatamente al análisis de las fibras de la sección anterior. Sin embargo, el estudio de conjuntos cluster difiere de aquel de las fibras en muchos aspectos, pero principalmente en el hecho de que ya no tenemos la posibilidad de utilizar diferentes “funciones test”; la función queda determinada al considerar un cierto cluster. Como consecuencia, no podemos aprovechar completamente los resultados sobre fibras, puesto que estos requieren modificar las funciones test.

Por otra parte, la cantidad de elementos en el conjunto cluster también está condicionada por la función $f$ que lo define. Si, por ejemplo, $f$ es una función que se aproxima por polinomios de tipo finito, entonces para todo $\Phi \in M_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$ se cumple que

$$\Phi(f) = C_{\xi_u(\Phi)}(f).$$

En ese caso, para toda función $g$ tenemos

$$\mathcal{C}\ell(f,g) = \widehat{f}(\mathscr{F}(g)) = \{C_g(f)\}.$$

Por [7, Lem. 6.2] y [13, Cor. 2.11], una función $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ se aproxima por polinomios de tipo finito si y sólo si $f$ es $w-$continua en todo $x \in B_{\ell_2}$. Por lo tanto, el cluster set $\mathcal{C}\ell(f,g)$ sólo puede ser grande cuando $f$ no es $w-$continua y $g$ determina una fibra interior o bien una fibra de transición con más de un elemento.

Considerando primero funciones $g$ corresponden a fibras interiores, podemos adaptar la Proposición 2.6.2 a este contexto, obteniendo así el siguiente resultado:

**Proposición 4.3.1.** *Sean $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ y $f \in \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ tal que $f$ no es $w-$continua en $g(x_0)$ para cierto $x_0 \in B_{\ell_2}$. Entonces el cluster $C\ell(f_0,g)$ contiene una copia analítica del disco $\mathbb{D}$.*

Omitimos en este caso la demostración, por ser análoga a la de la Proposición 2.6.2.

Si nos restringimos a un tipo especial de funciones $f$, podemos encontrar una copia analítica de una bola infinito-dimensional en el cluster $C\ell(f,g)$ para cualquier función $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$.

**Proposición 4.3.2.** *Sea $f_0 = \sum_{j=1}^\infty x_j^N$ con $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Entonces para toda $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$ el cluster $C\ell(f_0,g)$ contiene una copia analítica de la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}$.*

*Demostración.* Fijamos $g \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2},\ell_2)}$, $\|g\| < r < 1$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ el mapa

$$\Psi_k : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})} \to \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$$
$$\Psi_k(h)(f)(x) = f\left(\sum_{j=1}^k \langle g(x), e_j\rangle e_j + (1-r)h(x)e_{k+1}\right).$$

Notemos que para cada $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}$, $\Psi_k(h)$ es un morfismo de composición por lo que $\Psi_k$ es un mapa analítico. Pensamos entonces a la sucesión $(\Psi_k)$ en $\mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})))$. Por el Teorema 1.2.1 sabemos que

$$\mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}))) = \mathcal{L}(\mathcal{G}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}), \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}))).$$

Aplicando la igualdad (2.9) obtenemos entonces

$$\mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}))) = (\mathcal{G}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})})\widehat{\otimes}_\pi(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2})\widehat{\otimes}_\pi\mathcal{G}^\infty(B_{\ell_2})))^*.$$

Como además los mapas $\Psi_k$ verifican

$$\|\Psi_k\| \leq \|f\|,$$

podemos tomar una subred $(\Psi_{k_\alpha})_\alpha$ $w^*-$convergente a un elemento $\Psi_g$, con $\Psi_g \in \mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_u(B_{\ell_2}), \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})))$. Por construcción, resulta inmediato que para cada $h$, $\Psi_g(h)$ es multiplicativo. Evaluando en la función constante 1 se obtiene además que es no nulo, por lo que $\Psi_g \in \mathcal{H}^\infty(B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}, \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2}))$.

Por definición

$$\Psi_g(h)(f)(x) = \lim_\alpha \Psi_{k_\alpha}(h)(f)(x) = \lim_\alpha C_{\xi_u(\Psi_{k_\alpha}(h))}(f)(x).$$

Dado que $\xi_u(\Psi_{k_\alpha}(h))$ es $w^*-$convergente a $g$, se sigue que $\Psi_g(h)(f_0) \in C\ell(f_0,g)$. Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos calcular

$$\Psi_k(h)(f)(x) = \sum_{j=1}^k \langle g(x), e_j\rangle^N + (1-r)^N h(x)^N.$$

Tomando el límite $k \to \infty$ obtenemos

$$\Psi_g(h)(f)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle g(x), e_j \rangle^N + (1-r)^N h(x)^N.$$

Esto indica que si $\Psi_g(h)(f) = \Psi_g(h')(f)$, necesariamente $h(x)^N = h'(x)^N$ para todo $x \in B_{\ell_2}$. Por el principio de identidad, existe entonces $\zeta \in \mathbb{C}$ con $\zeta^N = 1$ tal que $h' = \zeta h$. Notemos además que la igualdad

$$\|h - \zeta h\| = |1-\zeta| \|h\|$$

nos indica que si tomamos $\tau = \text{mín}\{|1-\zeta| : \zeta^N = 1, \zeta \neq 1\}$ entonces para cada $h \in B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}$ con $\|h\| = \frac{1}{2}$, $\Psi_g$ resulta inyectivo restringido a la bola $B_s(h)$ donde $s = \frac{\tau}{2(\tau+1)}$. En otras palabras, hemos visto que el cluster $C\ell(f_0, g)$ contiene una copia analítica de la bola $B_s(h) \subset \mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})$.

Por último, componiendo con el mapa canónico $\chi : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})} \to B_s(h)$ dado por $\chi(u) = su + h$ concluimos que $\Psi_g \circ \chi : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})} \to C\ell(f_0, g)$ es una inyección analítica. □

Manteniendo la misma restricción sobre $f$, podemos obtener un resultado análogo para aquellas funciones $g$ que determinan fibras de transición y verifican las hipótesis del Teorema 4.2.9.

**Proposición 4.3.3.** *Sea $f_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^N$ con $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Entonces para toda $g \in S_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2}, \ell_2)}$ con $g(B_{\ell_2}) \subset B_{\ell_2}$ que satisface*

*(i)* $\|g(0)\| + \|g - g(0)\| \leq 1$.

*(ii) Existe una transformación lineal $P : \ell_2 \to \ell_2$ con $\|P\| \leq 1$ y núcleo no trivial que verifica $g = g \circ P$,*

*el cluster $C\ell(f_0, g)$ contiene una copia analítica de la bola $B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})}$.*

*Demostración.* Sea $\widetilde{g} = g - g(0)$, definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ el mapa

$$\Psi_k : B_{\mathcal{H}^\infty(B_{\ell_2})} \to \mathcal{M}_{u,\infty}(B_{\ell_2}, B_{\ell_2})$$
$$\Psi_k(h)(f)(x) = f\left( \sum_{j=1}^{k} \langle g(x), e_j \rangle e_j + \|\widetilde{g}\| \langle x, w \rangle h(x) e_{k+1} \right).$$

El resultado se obtiene entonces siguiendo los pasos de la Proposición 4.3.2 y utilizando los argumentos de la demostración del Teorema 4.2.9. □

# Bibliografía


[1] T. R. Alves and D. Carando. Holomorphic functions with large cluster sets. *Math. Nachr.*, en prensa.

[2] R. M. Aron. Algebras of analytic functions on Banach spaces. In *Seminar of Mathematical Analysis (Malaga/Seville, 2002/2003)*, volume 64 of *Colecc. Abierta*, pages 41–56. Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville, 2003.

[3] R. M. Aron and P. D. Berner. A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. *Bull. Soc. Math. France*, 106:3–24, 1978.

[4] R. M. Aron, D. Carando, T. W. Gamelin, S. Lassalle, and M. Maestre. Cluster values of analytic functions on a Banach space. *Math. Ann.*, 353(2):293–303, 2012.

[5] R. M. Aron, D. Carando, S. Lassalle, and M. Maestre. Cluster values of holomorphic functions of bounded type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(4):2355–2369, 2016.

[6] R. M. Aron, B. J. Cole, and T. W. Gamelin. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space. *J. Reine Angew. Math.*, 415:51–93, 1991.

[7] R. M. Aron, B. J. Cole, and T. W. Gamelin. Weak-star continuous analytic functions. *Canad. J. Math.*, 47(4):673–683, 1995.

[8] R. M. Aron and V. Dimant. Sets of weak sequential continuity for polynomials. *Indag. Math. (N.S.)*, 13(3):287–299, 2002.

[9] R. M. Aron, V. Dimant, S. Lassalle, and M. Maestre. Gleason parts for algebras of holomorphic functions in infinite dimensions. *Rev. Mat. Complut.*, 33(2):415–436, 2020.

[10] R. M. Aron, J. Falcó, D. García, and M. Maestre. Analytic structure in fibers. *Studia Math.*, 240(2):101–121, 2018.

[11] R. M. Aron, P. Galindo, D. García, and M. Maestre. Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(2):543–559, 1996.

[12] R. M. Aron, P. Galindo, and M. Lindström. Connected components in the space of composition operators in $H^\infty$ functions of many variables. *Integral Equations Operator Theory*, 45(1):1–14, 2003.

[13] R. M. Aron, C. Hervés, and M. Valdivia. Weakly continuous mappings on Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, 52(2):189–204, 1983.

[14] H. S. Bear. *Lectures on Gleason parts*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 121. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[15] C. Boyd and R. A. Ryan. Bounded weak continuity of homogeneous polynomials at the origin. *Arch. Math. (Basel)*, 71(3):211–218, 1998.

[16] L. Carleson. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. of Math. (2)*, 76:547–559, 1962.

[17] L. Carlsson. *Ideals and boundaries in Algebras of Holomorphic functions*. Doctoral dissertation, Umeå universitet, 2006.

[18] S. B. Chae. *Holomorphy and calculus in normed spaces*, volume 92 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1985. With an appendix by Angus E. Taylor.

[19] Y. S. Choi, J. Falcó, D. García, M. Jung, and M. Maestre. Analytic structure in fibers of $\mathcal{H}^\infty(B_{c_0})$. *J. Math. Anal. Appl.*, 488(2):124088, 16, 2020.

[20] Y. S. Choi, D. García, S. G. Kim, and M. Maestre. Composition, numerical range and Aron-Berner extension. *Math. Scand.*, 103(1):97–110, 2008.

[21] C.-H. Chu, R. V. Hügli, and M. Mackey. The identity is isolated among composition operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(11):3305–3308, 2004.

[22] B. J. Cole, T. W. Gamelin, and W. B. Johnson. Analytic disks in fibers over the unit ball of a Banach space. *Michigan Math. J.*, 39(3):551–569, 1992.

[23] A. M. Davie and T. W. Gamelin. A theorem on polynomial-star approximation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(2):351–356, 1989.

[24] A. Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[25] A. Defant, D. García, M. Maestre, and P. Sevilla-Peris. *Dirichlet Series and Holomorphic Funcions in High Dimensions*, volume 37 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2019.

[26] D. Deghoul. Construction de caractères exceptionnels sur une algèbre de Fréchet. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(8):579–580, 1991.

[27] K. DeLeeuw and W. Rudin. Extreme points and extremum problems in $H_1$. *Pacific J. Math.*, 8(3):467–485, 1958.

[28] V. Dimant, D. García, M. Maestre, and P. Sevilla-Peris. Homomorphisms between algebras of holomorphic functions. *Abstr. Appl. Anal.*, 2014. Art. ID 612304, 12 pages.

[29] V. Dimant and J. Singer. A fibered description of the vector-valued spectrum. *Math. Nachr.*, 293(7):1328–1344, 2020.

[30] V. Dimant and J. Singer. Homomorphisms Between Algebras of Holomorphic Functions on the Infinite Polydisk. *J. Geom. Anal.*, 31(6):6171–6194, 2021.

[31] V. Dimant and J. Singer. A look into homomorphisms between uniform algebras over a Hilbert space. *Studia Math.*, en prensa.

[32] S. Dineen. *Complex analysis on infinite-dimensional spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.

[33] J. D. Farmer. Fibers over the sphere of a uniformly convex Banach space. *Michigan Math. J.*, 45(2):211–226, 1998.

[34] P. Galindo, T. W. Gamelin, and M. Lindström. Composition operators on uniform algebras, essential norms, and hyperbolically bounded sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(5):2109–2121, 2007.

[35] P. Galindo, T. W. Gamelin, and M. Lindström. Fredholm composition operators on algebras of analytic functions on Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, 258(5):1504–1512, 2010.

[36] P. Galindo and M. Lindström. Gleason parts and weakly compact homomorphisms between uniform Banach algebras. *Monatsh. Math.*, 128(2):89–97, 1999.

[37] T. W. Gamelin. *Uniform algebras.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.

[38] T. W. Gamelin. Homomorphisms of uniform algebras. In *Recent progress in functional analysis (Valencia, 2000)*, volume 189 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 95–105. North-Holland, Amsterdam, 2001.

[39] A. M. Gleason. Function algebras. In *Seminar on Analytic Functions*, volume II, pages 213–226. Princeton, 1957.

[40] P. Gorkin. Gleason parts and COP. *J. Funct. Anal.*, 83(1):44–49, 1989.

[41] P. Gorkin, R. Mortini, and D. Suárez. Homotopic composition operators on $H^\infty(B^n)$. In *Function spaces (Edwardsville, IL, 2002)*, volume 328 of *Contemp. Math.*, pages 177–188. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[42] D. Hilbert. Wesen und ziele einer analysis der unendlichvielen unabhängigen variablen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, page 27:59–74, 1909.

[43] K. Hoffman. Bounded analytic functions and Gleason parts. *Ann. of Math. (2)*, 86:74–111, 1967.

[44] K. Hoffman. *Banach spaces of analytic functions.* Courier Corporation, 2007.

[45] T. Hosokawa, K. Izuchi, and D. Zheng. Isolated points and essential components of composition operators on $H^\infty$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(6):1765–1773, 2002.

[46] W. B. Johnson and S. Ortega Castillo. The cluster value problem in spaces of continuous functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(4):1559–1568, 2015.

[47] O. Lemmers. *On the Gleason problem.* Doctoral dissertation, Universiteit van Amsterdam, 2002.

[48] B. MacCluer, S. Ohno, and R. Zhao. Topological structure of the space of composition operators on $H^\infty$. *Integral Equations Operator Theory*, 40(4):481–494, 2001.

[49] R. Mortini. Gleason parts and prime ideals in $h^\infty$. In V. P. Havin and N. K. Nikolski, editors, *Linear and complex analysis. Problem book 3*, volume 1574 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 136–138. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[50] J. Mujica. *Complex analysis in Banach spaces*, volume 120 of *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 107.

[51] J. Mujica. Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):867–887, 1991.

[52] D. J. Newman. Some remarks on the maximal ideal structure of $H^\infty$. *Ann. of Math. (2)*, 70:438–445, 1959.

[53] S. Ortega Castillo and A. Prieto. The polynomial cluster value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 461(2):1459–1470, 2018.

[54] W. Rudin. *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1980 edition.

[55] I. J. Schark. Maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions. *J. Math. Mech.*, 10:735–746, 1961. "I. J. Schark" is an acronym for the group: Irving Kaplansky, John Wermer, Shizuo Kakutani, R. Creighton Buck, Halsey Royden, Andrew Gleason, Richard Arens and Kenneth Hoffman.

[56] D. Suárez. Maximal Gleason parts for $H^\infty$. *Michigan Math. J.*, 45(1):55–72, 1998.

[57] E. Thorp and R. Whitley. The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18:640–646, 1967.

[58] L. Zheng. The essential norms and spectra of composition operators on $H^\infty$. *Pacific J. Math.*, 203(2):503–510, 2002.