



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

**Espacios de móduli de foliaciones, álgebras de Lie y  
variedades tóricas**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de  
Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

**Sebastián Lucas Velazquez**

Director de tesis: Dr. Fernando Cukierman.  
Consejera de estudios: Dra. Alicia Dickenstein.

Buenos Aires, 3 de Junio de 2022.



## Espacios de móduli de foliaciones, álgebras de Lie y variedades tóricas

El objetivo de esta tesis es contribuir al estudio y clasificación de foliaciones singulares en una variedad algebraica compleja  $X$ . Dicho problema se traduce en el estudio de las propiedades geométricas de los esquemas  $\text{Inv}$ ,  $\text{iPf}$  y  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$  que parametrizan foliaciones en  $X$ . En el primer capítulo mostramos que dichos espacios pueden tener geometrías distintas aunque fácilmente comparables.

En el segundo de los capítulos nos centramos en el estudio de foliaciones en variedades tóricas. Mostramos que bajo ciertas condiciones, para cada elección de fibrados de línea  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n-q} \in \text{Pic}(X)$  el conjunto de foliaciones  $\mathcal{F}$  con haz tangente  $\mathcal{TF} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{L}_i$  tiene interior no vacío en el correspondiente espacio  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$ , generalizando [Theorem 1, [12]] y [Theorem 2, [12]]. Como aplicación de estos resultados construimos componentes irreducibles de dichos espacios tales que su punto genérico es un pullback lineal de una foliación en una subvariedad invariante por la acción del toro de  $X$ . Como caso particular de esta construcción recuperamos las componentes irreducibles asociadas a pullbacks por proyecciones lineales  $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^r$  construidas en [Corollary 5.1, [12]].

La última parte de este trabajo está dedicada al análisis de la estabilidad del conjunto de foliaciones  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  inducidas por la acción infinitesimal de una subálgebra de Lie  $\mathfrak{g} \subseteq L := H^0(X, \mathcal{TX})$  en una variedad proyectiva  $X$ . Tras construir los espacios  $S(d)$  de subálgebras de dimensión  $d$  de  $L$ , definimos un morfismo

$$\phi : \prod_i S(d)_i \rightarrow \text{Inv}$$

cuyo dominio es la flattening stratification asociada a la familia de distribuciones tautológica en  $X$  con base  $S(d)$ . El resultado principal de este capítulo establece que si  $\mathfrak{g} \subseteq L$  es una subálgebra tal que  $\mathfrak{g} = H^0(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g}))$  y  $h^1(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g})) = 0$ , entonces  $\phi$  es un isomorfismo localmente alrededor de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ . Este fenómeno puede ser interpretado en términos de una conexión entre el complejo de hojas de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  introducido en [15] y el complejo de Chevalley-Eilenberg del  $\mathfrak{g}$ -módulo  $L/\mathfrak{g}$ . Dicho resultado nos permite dotar de un marco común a distintas construcciones hechas en la literatura y generalizar muchas de ellas a contextos más generales. En particular, describimos varias componentes irreducibles de  $\text{Inv}$  para distintos tipos de variedades.

*Palabras clave:* foliaciones singulares, espacios de moduli, variedades tóricas, álgebras de Lie.

---

## Moduli spaces of foliations, Lie algebras and toric varieties

The main goal of this thesis is to contribute to the study and classification of singular foliations in a complex algebraic variety  $X$ . This problem can be interpreted in terms of the algebraic properties of the schemes  $\text{Inv}$ ,  $\text{iPf}$  and  $\mathcal{F}_q(X, \mathcal{L})$  parameterizing foliations in  $X$ . In the first chapter of this thesis we show that these spaces may have different (although easily comparable) geometries.

In the second chapter we focus on foliations on toric varieties. We show that under certain hypotheses, for every choice of line bundles  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n-q}$  on  $X$  the set of foliations  $\mathcal{F}$  with tangent sheaf  $\mathcal{T}\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{L}_i$  has non-trivial interior in the corresponding space  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$ , generalizing [Theorem 1, [12]] and [Theorem 2, [12]]. As an application of these results, we construct irreducible components of these spaces whose general element is a linear pullback of a foliation on a variety that is invariant under the action of the torus of  $X$ . In particular, we can recover the irreducible components associated to linear projections  $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^r$  introduced in [Corollary 5.1, [12]].

The final part of this thesis is dedicated to the analysis of the stability of the set of foliations  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  induced by the infinitesimal action of a Lie subalgebra  $\mathfrak{g} \subseteq L := H^0(X, \mathcal{T}X)$  on a projective variety  $X$ . After constructing the spaces  $S(d)$  parameterizing subalgebras of dimension  $d$  of  $L$ , we define a morphism

$$\phi : \coprod_i S(d)_i \rightarrow \text{Inv}$$

whose domain is the flattening stratification associated to the tautological family of distributions on  $X$  with base  $S(d)$ . The main theorem of this chapter states that if  $\mathfrak{g} \subseteq L$  is a subalgebra satisfying  $\mathfrak{g} = H^0(X, \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$  and  $h^1(X, \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 0$ , then  $\phi$  is an isomorphism locally around  $\mathfrak{g}$  and  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ . This can be understood in terms of a connection between the leaf complex of  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  introduced in [15] and the Chevalley-Eilenberg complex of the  $\mathfrak{g}$ -module  $L/\mathfrak{g}$ . This result gives a common framework for different constructions previously made in the literature and allows many of them to be generalized to more general contexts. In particular, we describe many irreducible components of  $\text{Inv}$  for different types of varieties.

*Keywords:* singular foliations, moduli spaces, toric varieties, Lie algebras.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Preliminares sobre haces . . . . .	7
1.2 Funtores de moduli y representabilidad . . . . .	11
1.3 Distribuciones, sistemas de Pfaff y foliaciones . . . . .	14
1.3.1 Distribuciones y foliaciones . . . . .	14
1.3.2 Familias playas y espacios de moduli . . . . .	19
<b>2 Foliaciones split en variedades tóricas</b>	<b>31</b>
2.1 Conos, abanicos y variedades tóricas . . . . .	31
2.2 Coordenadas homogéneas y sucesiones de Euler . . . . .	35
2.3 Algunos lemas sobre formas diferenciales . . . . .	39
2.4 Distribuciones split . . . . .	42
2.5 Estabilidad . . . . .	44
<b>3 L-foliaciones</b>	<b>57</b>
3.1 Familias de álgebras de Lie de campos de vectores . . . . .	58
3.2 Subálgebras y L-foliaciones . . . . .	61
3.3 Estabilidad de L-foliaciones . . . . .	66
<b>Código</b>	<b>78</b>

# Introducción

Esta tesis está abocada al problema de clasificación de foliaciones singulares en variedades algebraicas complejas. Una foliación de codimensión  $q$  en un espacio  $X$  es, intuitivamente, una descomposición de  $X$  en subvariedades de codimensión  $q$  *localmente planas*, que llamaremos *hojas*. Desde sus comienzos en los trabajos de Cartan, Darboux, Painlevé, Poincaré y Pfaff (entre otros), la teoría de foliaciones estuvo íntimamente relacionada con la teoría de ecuaciones diferenciales, proporcionando un contexto sólido para el estudio geométrico de sus soluciones.

Para entender mejor esta conexión consideremos por ejemplo la ecuación diferencial ordinaria en  $\mathbb{A}^2$

$$(1) \quad (x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t)),$$

donde  $F = (A, B)$  es un campo polinomial. Para un punto  $p$  tal que  $F(p) \neq (0, 0)$  (un punto *no singular*) la solución  $z(t)$  que pasa por  $p$  es una parametrización de una curva cuyo espacio tangente en cada punto  $q$  es el subespacio  $\langle F(q) \rangle$ . Es decir, las soluciones geométricas no triviales son exactamente las curvas integrales del campo  $F$ . Alrededor de un punto no singular, en un sistema coordenado  $(u(x, y), v(x, y))$  adecuado estas curvas coincidirán con las fibras de la proyección a la primera coordenada. Esta familia de curvas define entonces una foliación singular de codimensión 1 en el plano.

Alternativamente, en la literatura los sistemas (1) son a menudo explicitados mediante una ecuación de la forma

$$(2) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Esto puede lograrse por ejemplo tomando  $P = B$  y  $Q = -A$ . Lejos de los puntos singulares, la expresión (2) indica que el espacio tangente a una solución en un punto  $q$  es el subespacio  $\{P(q)x + Q(q)y = c\}$ . Es decir, el espacio tangente a la foliación (y por lo tanto, la foliación misma) puede ser

explicitado mediante el campo (generadores)

$$\mathfrak{X} = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

o la 1-forma diferencial (ecuaciones)

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

En sintonía con este ejemplo, para abordar el estudio geométrico de ecuaciones diferenciales en una variedad compleja más general adoptaremos las siguientes definiciones (que serán explicadas con mayor detalle en el Capítulo 1). Para un subhaz  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{TX}$  (resp.  $\mathcal{H} \subseteq \Omega_X^1$ ) denotaremos  $\text{Ann}(\mathcal{H}) = \ker(\Omega_X^1 \rightarrow \mathcal{H}^\vee) \subseteq \Omega_X^1$  (resp.  $\text{Ann}(\mathcal{H}) = \ker(\mathcal{TX} \rightarrow \mathcal{H}^\vee) \subseteq \mathcal{TX}$ ).

**Definición 0.1.** Una *distribución singular*  $\mathcal{D}$  en una variedad  $X$  de dimensión  $n$  es un par  $(\mathcal{TD}, I(\mathcal{D}))$  de subhaces de  $(\mathcal{TX}, \Omega_X^1)$  tales que

- $\mathcal{TD} = \text{Ann}(I(\mathcal{D}))$  y
- $I(\mathcal{D}) = \text{Ann}(\mathcal{TD})$ .

Decimos que  $\mathcal{D}$  es de codimensión  $q$  si  $\text{rg}(I(\mathcal{D})) = n - \text{rg}(\mathcal{TD}) = q$ . El haz *normal* y el haz *conormal* son  $N_{\mathcal{D}} := \mathcal{TX}/\mathcal{TD}$  y  $\Omega_{\mathcal{D}}^1 := \Omega_X^1/I(\mathcal{D})$  respectivamente. El *conjunto singular*  $S(\mathcal{D})$  de  $\mathcal{D}$  es el conjunto singular del haz  $N_{\mathcal{D}} \oplus \Omega_{\mathcal{D}}^1$  (los puntos donde no es localmente libre).

**Definición 0.2.** Decimos que una distribución singular  $\mathcal{D}$  de codimensión  $q$  es una *foliación singular en  $X$*  si satisface alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

- Para cada par de secciones locales  $v, w$  de  $\mathcal{TD}$ , el corchete de Lie de campos de vectores  $[v, w]$  también es una sección local de  $\mathcal{TD}$  (“ $[\mathcal{TD}, \mathcal{TD}] \subseteq \mathcal{TD}$ ”, i.e.  $\mathcal{TD}$  es involutivo).
- $d(I(\mathcal{D})) \wedge \wedge^q I(\mathcal{D}) = 0$ , donde  $d$  es el diferencial ( $\mathbb{C}$ -lineal) de De Rham ( $I(\mathcal{D})$  es integrable).

Por el Teorema de Frobenius (ver [Sección II.5 en [22]]), una foliación singular  $\mathcal{F}$  en  $X$  induce una descomposición de  $X \setminus S(\mathcal{D}) = \coprod_{i \in I} L_i$  por subvariedades analíticas de codimensión  $q$  tal que para cada punto no singular  $x \in L_j$  se tiene  $\mathcal{T}_x L_j = \mathcal{TF}(x)$ . Es decir, al igual que en el ejemplo discutido previamente si  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}$  y  $\omega_1, \dots, \omega_q$  son generadores de  $\mathcal{TF}$  e  $I(\mathcal{F})$  en un entorno de  $x$  respectivamente, entonces el espacio tangente a la correspondiente hoja es

$$\mathcal{T}_x L_j = \langle \mathfrak{X}_1(x), \dots, \mathfrak{X}_{n-q}(x) \rangle = \{\omega_1(x) = \dots = \omega_q(x) = 0\} \subseteq \mathcal{T}_x X.$$



Podemos intepretar entonces a las parametrizaciones de las hojas como soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (de tipo (2))

$$\begin{cases} f_1^1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + f_n^1(x_1, \dots, x_n)dx_n = 0 \\ \dots \\ f_1^q(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + f_n^q(x_1, \dots, x_n)dx_n = 0, \end{cases}$$

donde  $\omega_i = \sum_{j=1}^n f_j^i(x_1, \dots, x_n)dx_j$  es una escritura de  $\omega_i$  en algún sistema coordinado  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Para cada distribución singular  $\mathcal{D}$  de codimensión  $q$  en  $X$  podemos considerar el morfismo natural  $\det(N_{\mathcal{D}})^\vee \hookrightarrow \Omega_X^q$ . Así, cada distribución determina una  $q$ -forma diferencial torcida  $\omega_{\mathcal{D}} \in H^0(X, \Omega_X^q \otimes \det(N_{\mathcal{D}}))$ . Denotaremos  $S(\omega) = \{x \in X \mid \omega(x) = 0\}$ . Por construcción, el núcleo  $\ker(\omega_{\mathcal{D}})$  del operador de contracción  $\mathcal{T}X \xrightarrow{\omega_{\mathcal{D}}} \Omega_X^{q-1} \otimes \det(N_{\mathcal{D}})$  coincide con  $\mathcal{T}\mathcal{D}$ . El elemento  $\omega_{\mathcal{D}}$  satisface además  $\text{codim}(S(\omega_{\mathcal{D}})) \geq 2$  y es *localmente descomponible fuera de su lugar singular*, es decir, alrededor cada elemento  $x$  fuera de  $S(\omega_{\mathcal{D}})$  existen 1-formas  $\omega_1, \dots, \omega_q$  (generadores locales de  $I(\mathcal{D})$ ) tales que  $\omega_{\mathcal{D}} = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q$ . Ésta última condición es equivalente a satisfacer las ecuaciones de Plücker

$$(P) \quad (\iota_v \omega) \wedge \omega = 0 \quad \forall v \in \bigwedge^{q-1} \mathcal{T}X.$$

La distribución  $\mathcal{D}$  será una foliación si y solamente si  $\omega_{\mathcal{D}}$  satisface la *condición de Frobenius*

$$(F) \quad (\iota_v \omega) \wedge d\omega = 0 \quad \forall v \in \bigwedge^{q-1} \mathcal{T}X.$$

De lo hecho en [13] se sigue que para cada  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ , toda  $q$ -forma torcida  $\omega \in H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L})$  satisfaciendo las ecuaciones (P), (F) y  $\text{codim}(S(\omega)) \geq 2$  induce una foliación  $\mathcal{F}_\omega$  en  $X$  tal que  $\mathcal{T}\mathcal{F}_\omega = \ker(\omega)$  y  $\det(N_{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}$ . Más aún, dos elementos  $\omega$  y  $\omega'$  definen la misma foliación si y sólo si existe un elemento  $\lambda \in H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$  tal que  $\omega = \lambda\omega'$ . Podemos concluir entonces que para cada  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$  el conjunto de foliaciones de codimensión  $q$  satisfaciendo  $\det(N_{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}$  está en biyección con el *espacio de foliaciones de codimensión  $q$  y grado  $\mathcal{L}$*

$$\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L}) = \{[\omega] \in \mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L}) \mid \omega \text{ satisface (P), (F) y } \text{codim}(S(\omega)) \geq 2\}.$$

**Observación 0.3.** A partir de su íntima relación con el problema de clasificación de foliaciones algebraicas, el estudio de la geometría de éstas variedades quasi-proyectivas ha sido un área de investigación muy activa a lo largo de las últimas décadas, principalmente en el caso  $X = \mathbb{P}^n$ .

El siguiente concepto fundamental es el de *familia* de foliaciones. Para cada esquema  $S$  denotaremos  $\mathcal{T}X_S$  (resp.  $\Omega_{X \times S|S}^1$ ) al haz tangente (resp. cotangente) relativo a la proyección  $X \times S \rightarrow S$ .

**Definición 0.4.** Sea  $S$  un esquema sobre  $\mathbb{C}$ . Una *familia de foliaciones singulares en  $X$*  con base  $S$  es un par  $(\mathcal{T}\mathcal{F}, I(\mathcal{F}))$  de subhaces de  $(\mathcal{T}X_S, \Omega_{X \times S|S}^1)$  tales que

- $\mathcal{T}\mathcal{F} = \text{Ann}(I(\mathcal{F}))$ ,
- $I(\mathcal{F}) = \text{Ann}(\mathcal{T}\mathcal{F})$ ,
- $\mathcal{T}\mathcal{F}$  es involutivo (o equivalentemente  $I(\mathcal{F})$  es integrable).

Asociadas a esta definición a lo largo de la literatura (ver por ejemplo [27], [26], [15] o [7]) se pueden encontrar dos nociones distintas de continuidad (playitud), que se corresponden con los sistemas de tipo (1) y (2) del principio de esta introducción. Éstas consisten en pedir que  $\mathcal{T}X_S/\mathcal{T}\mathcal{F}$  o bien  $\Omega_{X \times S|S}^1/I(\mathcal{F})$  sea playo sobre la base. Esta elección en la definición de familia playa de foliaciones da lugar -en el caso en que  $X$  sea una variedad proyectiva- a los espacios de moduli  $\text{Inv} \leftrightarrow \text{Quot}(\mathcal{T}X)$  e  $\text{iPf} \leftrightarrow \text{Quot}(\Omega_X^1)$  y sus respectivas familias universales, construidos independientemente en [27], [15] y [26] (ver pág. 21). Como la involutividad/integrabilidad es una condición cerrada por la acción de  $\text{Aut}(X)$  en el respectivo esquema  $\text{Quot}$ , estos esquemas vienen equipados con una acción de dicho grupo. En cualquiera de los casos, diremos que un elemento es *rígido* si su órbita contiene un abierto no vacío. Cabe destacar que como dichas nociones de playitud no son equivalentes, éstos espacios no son canónicamente isomorfos. No obstante, existen mapas naturales  $\text{Inv} \dashrightarrow \text{iPf}$  e  $\text{iPf} \dashrightarrow \text{Inv}$ . Surge entonces naturalmente el problema de encontrar los puntos alrededor de los cuales éstas aplicaciones son mutuamente inversas. Como veremos más adelante, éstos puntos constituyen un abierto no necesariamente denso en los espacios de moduli.

El contenido de esta tesis está dividido de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 haremos un breve repaso de algunas herramientas de geometría algebraica y de la teoría de foliaciones singulares que serán indispensables para más adelante. Además, presentaremos las distintas nociones de continuidad para familias de foliaciones que fueron brevemente introducidas en los párrafos anteriores. Terminaremos el capítulo mostrando que los espacios de moduli correspondientes pueden tener geometrías esencialmente distintas, aunque fácilmente comparables.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio de foliaciones split en una variedad tórica  $X$ , esto es, foliaciones cuyo haz tangente es isomorfo a una suma de fibrados de línea. Veremos que bajo ciertas hipótesis, para cada elección de fibrados de línea  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n-q} \in \text{Pic}(X)$  el conjunto de foliaciones  $\mathcal{F}$  con haz tangente  $\mathcal{TF} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_i$  tiene interior no vacío en el correspondiente espacio  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$ , generalizando los teoremas [Theorem 1, [12]] y [Theorem 2, [12]]. Como aplicación de estos resultados construiremos componentes irreducibles de dichos espacios tales que su punto genérico es un pullback lineal de una foliación en una subvariedad invariante por la acción del toro de  $X$ . Como caso particular de esta construcción podemos recuperar las componentes irreducibles asociadas a pullbacks por proyecciones lineales  $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^r$  construidas en [Corollary 5.1, [12]].

El último de los capítulos se centra en el estudio de  $L$ -foliaciones en una variedad proyectiva  $X$ . Éstas son las foliaciones  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  inducidas por la acción infinitesimal canónica de una subálgebra de Lie  $\mathfrak{g} \subseteq L := H^0(X, \mathcal{TX})$ . Tras hacer un breve repaso de algunos resultados básicos de la teoría de deformaciones construiremos para cada  $d \in \mathbb{N}$  el espacio de moduli de subálgebras de  $L$  de dimensión  $d$ , que denotaremos  $S(d)$ . Sobre este esquema podemos construir una familia de foliaciones singulares en  $X$

$$\mathcal{F}_d : 0 \rightarrow \mathcal{TF}_d \rightarrow \mathcal{TX}_{S(d)} \rightarrow N_d \rightarrow 0$$

tal que para cada  $\mathfrak{g} \in S(d)$  la foliación  $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}$  en la correspondiente fibra coincide con  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ . Sea  $\coprod_i S(d)_i \hookrightarrow S(d)$  la flattening stratification de  $S(d)$  asociada al haz  $N_d$ . De la universalidad de  $\text{Inv}$  se sigue que debe existir un mapa

$$\phi : \coprod_i S(d)_i \rightarrow \text{Inv}$$

tal que  $\mathcal{F}_d$  es el pullback por  $\phi$  de la familia universal en  $\text{Inv}$ . El resultado principal de este capítulo (Teorema 3.38) establece que si  $\mathfrak{g} \subseteq L$  es una subálgebra tal que  $\mathfrak{g} = H^0(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g}))$  y  $h^1(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g})) = 0$ , entonces  $\phi$  es un isomorfismo localmente alrededor de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ . A nivel de espacios tangentes, este fenómeno puede ser entendido a partir de una conexión entre el complejo de hojas de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  introducido en [15] y el complejo de Chevalley-Eilenberg del  $\mathfrak{g}$ -módulo  $L/\mathfrak{g}$ . Este resultado nos permitirá identificar componentes irreducibles de  $\text{Inv}$ , siendo algunas de estas rígidas. El contenido de esta última sección puede ser interpretado como una generalización de [Corollary 6.1 y Theorem 3, [12]] al contexto de acciones con estabilizadores genéricos de dimensión positiva y/o variedades proyectivas satisfaciendo  $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

A lo largo de esta tesis trabajaremos sobre los números complejos.

### 1.1 Preliminares sobre haces

Comencemos recapitulando algunas nociones generales de la teoría de haces que serán de utilidad más adelante.

**Definición 1.1.** Sea  $A$  un anillo local regular con ideal maximal  $\mathfrak{m}$  y  $M$  un  $A$ -módulo. Un elemento  $a \in A$  es  $M$ -regular si la multiplicación por  $a$  es una inclusión  $M \hookrightarrow M$ . Una sucesión  $(a_1, \dots, a_l)$  es  $M$ -regular si  $a_i$  es  $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$  regular. La *profundidad de  $M$* , denotada  $\text{prof}(M)$  es el máximo de los largos de las sucesiones  $M$ -regulares.

El siguiente hecho conocido nos permite calcular la profundidad de un módulo a partir de sus extensiones.

**Lema 1.2.** *Sea  $A$  un anillo local regular con ideal maximal  $\mathfrak{m}$  y  $M$  un  $A$ -módulo. Entonces*

$$\text{prof}(M) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}^i(M, A/\mathfrak{m}) \neq 0\}$$

**Definición 1.3.** Sea  $A$  un anillo local regular y  $M$  un  $A$ -módulo. La *dimensión homológica de  $M$* , denotada  $\text{dh}(M)$  es el largo mínimo de una resolución proyectiva de  $M$ .

En el caso de módulos finitos, su conexión con las extensiones de  $M$  es la siguiente:

**Lema 1.4.** *Sea  $A$  un anillo local regular y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Entonces*

$$\text{dh}(M) = \max\{i \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}^i(M, A) \neq 0\}.$$

Estas nociones se relacionan con la dimensión de  $A$  a través de la fórmula de Auslander-Buchsbaum:

**Teorema 1.5.** *Sea  $A$  un anillo local regular y  $M$  un  $A$ -módulo. Entonces*

$$dh(M) + prof(M) = \dim(A).$$

**Observación 1.6.** Reemplazando a  $\mathfrak{m}$  por el ideal irrelevante, las definiciones de profundidad y dimensión homológica se extienden de forma canónica a la categoría de módulos graduados sobre un anillo de polinomios. La fórmula de Auslander-Buchsbaum también es válida en este contexto.

Si  $\mathcal{F}$  es un haz coherente en un esquema regular  $X$ , definimos la dimensión homológica de  $\mathcal{F}$  como  $dh(\mathcal{F}) = \max\{dh(\mathcal{F}_x) | x \in X\}$ . La fórmula de Auslander-Buchsbaum nos dice que este valor está acotado por la dimensión de  $X$ . Observemos que  $dh(\mathcal{F}) = 0$  si y sólo si  $\mathcal{F}$  es localmente libre. Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 1.7.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz coherente en un esquema suave  $X$  de dimensión  $n$ . El lugar singular de  $\mathcal{F}$  es el subesquema cerrado

$$Sing(\mathcal{F}) := Supp \left( \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \right).$$

**Observación 1.8.** Por el Lema 1.4,  $Sing(\mathcal{F})$  consiste exactamente de los puntos donde  $\mathcal{F}$  no es localmente libre. En particular,  $\text{codim}(Sing(\mathcal{F})) \geq 1$ . Si además  $\mathcal{F}$  es libre de torsión, entonces por [Corollary, p. 75, [24]] podemos concluir que  $\text{codim}(Sing(\mathcal{F})) \geq 2$ .

**Observación 1.9.** Muchas de las ideas que originan este trabajo surgen de intentar entender cómo se comportan las distintas dimensiones homológicas asociadas a una foliación a lo largo de los espacios de moduli. Esta inquietud puede entenderse como un hilo conductor entre los distintos capítulos.

A lo largo de esta tesis hablaremos de *familias* de distintos tipos de objetos. En el caso de haces coherentes, esta noción se corresponde con:

**Definición 1.10.** Sea  $f : Y \rightarrow S$  un morfismo de esquema noetherianos. Una *familia de haces coherentes en las fibras de  $f$*  es un haz coherente  $\mathcal{F}$  en  $Y$ . La familia es *playa* si  $\mathcal{F}$  es playo sobre  $S$ . Si  $f : Y = X \times S \rightarrow S$  es la proyección en la segunda coordenada, diremos que  $\mathcal{F}$  es una *familia de haces en  $X$* . Para cada  $s \in S$  usaremos la notación  $\mathcal{F}_s$  para la restricción de  $\mathcal{F}$  a la fibra  $Y_s := f^{-1}(s) = Y \times_S \text{Spec}(k(s))$ . En el caso en el que  $Y = X \times S$ , escribiremos  $X_s := X \times \text{Spec}(k(s))$ .

Ante una familia que no es necesariamente playa, haremos uso de la siguiente herramienta:

**Teorema 1.11.** *Sea  $f : Y \rightarrow S$  un morfismo proyectivo de esquemas noetherianos,  $\mathcal{O}(1)$  un fibrado de línea muy amplio con respecto a  $S$  y  $\mathcal{F}$  un haz coherente en  $Y$ . Entonces el conjunto  $\mathcal{P} = \{P(\mathcal{F}_s) | s \in S\}$  de polinomios de Hilbert de las restricciones de  $\mathcal{F}$  a las fibras de  $f$  es finito. Más aún, existen finitos subesquemas localmente cerrados  $S_P$  indexados por  $\mathcal{P}$  tales que:*

1. *el morfismo natural  $j : \coprod_P S_P \rightarrow S$  es una biyección y*
2. *si  $g : S' \rightarrow S$  es un morfismo de esquemas noetherianos, entonces el haz  $g_Y^* \mathcal{F}$  en  $Y \times_S S'$  es playa sobre  $S'$  si y sólo si  $g$  se factoriza por  $j$ .*

*Demostración.* Ver [Theorem 2.1.5, [19]]. □

Del segundo ítem del teorema se sigue que dicha descomposición es única. Decimos que  $\coprod_P S_P \rightarrow S$  es la *flattening stratification* de  $S$  asociada a  $\mathcal{F}$ . Los siguientes teoremas nos permiten controlar la familia de cohomologías a lo largo de cada estrato.

**Teorema 1.12.** *Sea  $f : Y \rightarrow S$  un morfismo proyectivo de esquemas noetherianos y  $\mathcal{F}$  una familia playa de haces coherentes en las fibras de  $f$ . Entonces para cada  $i \geq 0$  la función*

$$h^i(s, \mathcal{F}) = \dim_{k(s)} H^i(Y_s, \mathcal{F}_s)$$

*es semicontinua superiormente en  $S$ .*

*Demostración.* Ver [Theorem 12.8, Chapter III, [18]]. □

**Teorema 1.13.** *Sea  $f : Y \rightarrow S$  un morfismo proyectivo de esquemas noetherianos y  $\mathcal{F}$  una familia playa de haces coherentes en las fibras de  $f$ . Sea  $s$  un punto de  $S$ . Entonces:*

1. *si el mapa natural*

$$\varphi^i(s) : R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes k(s) \rightarrow H^i(Y_s, \mathcal{F}_s)$$

*es suryectivo, entonces es un isomorfismo y lo mismo es cierto para todo  $s'$  en un entorno suficientemente chico de  $s$ .*

2. *si  $\varphi^i(s)$  es suryectivo, entonces son equivalentes:*
  - $\varphi^{i-1}(s)$  también es suryectivo.

- $R^i f_*(\mathcal{F})$  es localmente libre en un entorno de  $s$ .

*Demostración.* Ver [Theorem 12.11, Chapter III, [18]].  $\square$

Haciendo uso de estos resultados, podemos dar condiciones suficientes para que las secciones globales en las fibras se extiendan a un entorno en la base.

**Lema 1.14.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia plana de haces coherentes sobre  $X$  con base  $S$  y  $s \in S$  un punto tal que  $h^1(X_s, \mathcal{F}_s) = 0$ . Entonces para cada sección global  $\mathfrak{X} \in H^0(X_s, \mathcal{F}_s)$  existe un entorno  $\mathcal{U} \subseteq S$  de  $s$  y un elemento  $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}} \in H^0(X \times \mathcal{U}, \mathcal{F})$  tal que su restricción a  $X_s$  coincide con  $\mathfrak{X}$ .*

*Demostración.* El Teorema 1.12 nos dice que  $h^1(X_{s'}, \mathcal{F}_{s'}) = 0$  para cada  $s'$  en un entorno  $\mathcal{U}$  suficientemente chico de  $s$ . Luego, achicando  $\mathcal{U}$  de ser necesario, por el primer inciso del Teorema 1.13 debe ser  $R^1 p_*(\mathcal{F}) \otimes k(s') = 0$  para cada  $s' \in \mathcal{U}$ . Pero entonces  $s \notin \text{Supp}(R^1 p_*(\mathcal{F}))$  y por lo tanto

$$\varphi^0(s) : p_*(\mathcal{F}) \otimes k(s) \rightarrow H^0(X_s, \mathcal{F}_s)$$

es un isomorfismo. En particular, toda sección global de  $\mathcal{F}_s$  se extiende a una sección definida en un entorno  $\mathcal{U}$  de  $s$ .  $\square$

**Definición 1.15.** Decimos que una variedad proyectiva  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  es aritméticamente Cohen-Macaulay si su anillo de coordenadas homogéneo es Cohen-Macaulay.

En el caso en el que  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  es una variedad aritméticamente Cohen-Macaulay de dimensión  $n$ , podemos reemplazar la hipótesis sobre el primer grupo de cohomología por una condición en términos de dimensiones homológicas (graduadas). Para cada haz coherente  $\mathcal{F}_0$  en  $X$  es posible construir una resolución libre graduada de la forma

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{k_n} \mathcal{O}_X(-d_i^n) \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i=1}^{k_0} \mathcal{O}_X(-d_i^0) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_0 \rightarrow 0.$$

Decimos que la resolución tiene largo  $l$  si  $k_l > 0$  y  $k_{l'} = 0$  para  $l' > l$ . En el caso  $X = \mathbb{P}^n$ , el Teorema de las Syzygies de Hilbert nos dice que todo haz coherente  $\mathcal{F}_0$  admite una resolución libre graduada de largo  $n$ .

**Lema 1.16.** *Sea  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  una variedad aritméticamente Cohen-Macaulay de dimensión  $n$  y  $\mathcal{F}_0$  un haz coherente en  $X$ . Si  $\mathcal{F}_0$  admite una resolución libre de largo  $n - 3$  entonces  $h^1(X, \mathcal{F}_0(e)) = 0$  para todo  $e \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Primero hay que observar que si  $\mathcal{F}_0$  admite una resolución libre de largo  $n - 3$ , entonces  $\mathcal{F}_0(e)$  también. Además, siendo  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  aritméticamente Cohen-Macaulay tenemos que  $h^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$  para todo  $d \in \mathbb{Z}$  y  $1 \leq i \leq n - 1$ . Veamos entonces que si  $\mathcal{F}_0$  admite una resolución de este tipo entonces  $h^1(X, \mathcal{F}_0) = 0$ . Para cada  $0 \leq r \leq n - 3$ , llamemos  $\mathcal{K}^r = \ker(d_r)$ . El primero de estos elementos cabe en la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{K}^0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{k_0} \mathcal{O}_X(-d_i^0) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_0 \rightarrow 0,$$

de modo que tomando sucesión exacta larga de cohomología obtenemos la igualdad  $h^1(X, \mathcal{F}_0) = h^2(X, \mathcal{K}^0)$ . De la misma manera, para cada  $r$  la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{K}^{r+1} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{k_{r+1}} \mathcal{O}(-d_i^{r+1}) \xrightarrow{d_{r+1}} \mathcal{K}^r \rightarrow 0$$

es exacta y por lo tanto  $h^{r+2}(X, \mathcal{K}^r) = h^{r+3}(X, \mathcal{K}_{r+1})$ . Pero entonces siendo que  $\mathcal{K}^{n-3} \simeq \bigoplus_{i=1}^{k_{n-3}} \mathcal{O}_X(-d_i^{n-3})$  debe ser

$$h^1(X, \mathcal{F}_0) = h^2(X, \mathcal{K}^0) = \dots = h^{n-1}(X, \mathcal{K}^{n-3}) = 0.$$

□

## 1.2 Funtores de moduli y representabilidad

A continuación vamos a establecer las nociones relativas a funtores de moduli y sus correspondientes espacios de moduli que usaremos más adelante.

Un *funtor de moduli* o un *problema de moduli* es un funtor contravariante

$$F : Sch_{\mathbb{C}} \rightarrow Sets.$$

Usualmente estos funtores son de la forma

$$F(S) = \{\text{familias de objetos sobre } S\} / \sim,$$

donde  $\sim$  es alguna noción de isomorfismo y  $F$  actúa en las flechas a través del pullback de dichos objetos.

**Ejemplo 1.17.** Sea  $Y$  un esquema sobre  $\mathbb{C}$ . El *funtor de puntos de  $Y$*  es el funtor  $h_Y$  que a cada esquema  $S$  le asigna el conjunto  $\text{Hom}_{Sch_{\mathbb{C}}}(S, Y)$ . Si  $f : T \rightarrow S$  es un morfismo entonces la aplicación correspondiente

$$h_Y(f) : \text{Hom}_{Sch_{\mathbb{C}}}(S, Y) \rightarrow \text{Hom}_{Sch_{\mathbb{C}}}(T, Y)$$

es la precomposición con  $f$ .



**Ejemplo 1.18.** Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión  $N$  y  $1 \leq d \leq N$ . Queremos considerar un funtor que a cada esquema  $S$  le asigne el conjunto de familias sobre  $S$  de subespacios de  $V$  de dimensión  $d$ . Más precisamente,

$$G_{V,d}(S) := \{\text{cocientes localmente libres de } V^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S \text{ de rango } d\}.$$

Dado un morfismo  $f : T \rightarrow S$ , la función  $G_{V,d}(f) : G_{V,d}(S) \rightarrow G_{V,d}(T)$  está dada por el pullback

$$G_{V,d}(f)(V^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S \rightarrow Q) = f^*(V^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S \rightarrow Q) = V^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T \rightarrow f^*Q.$$

**Ejemplo 1.19.** Un ejemplo más sofisticado surge de querer parametrizar familias de cocientes coherentes de un cierto haz coherente. Sea  $X$  un esquema proyectivo polarizado sobre  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{H}$  un haz coherente en  $X$  y  $P \in \mathbb{Q}[t]$  un polinomio. Para cada esquema  $S$  sobre  $\mathbb{C}$  denotaremos  $\mathcal{H}_S := p^*\mathcal{H}$ , donde  $p : X \times S \rightarrow X$  es la proyección en la primer coordenada. Vamos a definir el funtor  $Quot_P(\mathcal{H}) : Sch_{\mathbb{C}} \rightarrow Sets$  de modo que

$$Quot_P(\mathcal{H})(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{cocientes coherentes } \mathcal{H}_S \rightarrow Q, \text{ playos sobre } S \text{ con} \\ \text{polinomio de Hilbert } P \text{ en las fibras } X_s \end{array} \right\}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, la funtorialidad se define a través del pullback de familias.

**Definición 1.20.** Decimos que un funtor de moduli *está representado por un esquema*  $Y$  si existe un isomorfismo de funtores  $F \simeq h_Y$ . En este caso diremos que  $Y$  es un *espacio de moduli* para el problema de moduli  $F$ .

**Observación 1.21.** Si  $Y$  es un espacio de moduli para  $F$  mediante un isomorfismo  $F \simeq h_Y$ , entonces hay un elemento destacado  $\mathcal{F} \in F(Y)$  que se corresponde con  $id_Y \in \text{Hom}(Y, Y)$ . Vamos a llamar a este objeto el *elemento universal* o *familia universal* de  $F$ . Como tal, cumple con la siguiente propiedad universal: para cada esquema  $S$  sobre  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{G} \in F(S)$  existe un único morfismo  $\phi : S \rightarrow Y$  tal que  $\mathcal{G} = F(\phi)(\mathcal{F})$ . De lo dicho previamente se sigue que dicho espacio de moduli es único y que la familia universal es única salvo acción de automorfismos de  $Y$ . Muchas veces, esta universalidad nos permite traducir características de *todas* las familias en propiedades geométricas del espacio de moduli.

**Ejemplo 1.22.** El funtor  $G_{V,d}$  está representado por una variedad proyectiva suave  $G(V, d)$  (ver [Section 4.3.3 en [30]]).

La familia universal es una sucesión de fibrados

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow V^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{G(V,d)} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

donde  $rg(Q) = d$ . Dualizando y restringiéndonos a un  $\mathbb{C}$ -punto  $x \in G(V, d)$ , obtenemos

$$0 \rightarrow Q^\vee(x) \rightarrow V \rightarrow \mathcal{K}(x) \rightarrow 0.$$

Es decir, los  $\mathbb{C}$ -puntos de  $G(V, d)$  están en biyección con los subespacios vectoriales de  $V$  de dimensión  $d$ . Si nos restringimos al caso  $d = 1$ , vemos que  $G(V, d)$  representa al functor que a cada esquema le asigna un fibrado de línea  $\mathcal{L}$  y una suryección

$$\mathcal{O}_S^{\oplus N} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0,$$

de modo que  $G(V, d) = \mathbb{P}^{N-1}$ . En este caso, la familia universal coincide con la sucesión de Euler

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^{N-1}}^1(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}^N \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1) \rightarrow 0$$

**Ejemplo 1.23.** El functor  $Quot_P(\mathcal{H})$  introducido en el Ejemplo 1.19 está representado por un esquema proyectivo  $Quot_P(\mathcal{H})$  sobre  $\mathbb{C}$ , equipado con una familia universal de cocientes coherentes

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}_{Quot_P(\mathcal{H})} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

con polinomios de Hilbert igual a  $P$  en las fibras.

Para concluir esta sección enunciaremos una caracterización functorial del subesquema de ceros  $Z(s)$  de una sección global  $s$  de un haz localmente libre en un esquema  $X$ .

**Definición 1.24.** Sea  $X$  un esquema,  $\mathcal{H}$  un haz localmente libre en  $X$  y  $s : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{H}$  una sección global. El subesquema de ceros  $Z(s)$  de  $s$  es el subesquema cerrado cuyo haz de ideales es la imagen del morfismo dual  $s^\vee : \mathcal{H}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X$ .

La siguiente descripción del subfunctor de  $h_X$  determinado por  $Z(s)$  nos será de mucha utilidad en los capítulos siguientes.

**Lema 1.25.** *Sea  $\mathcal{H}$  un haz localmente libre en  $X$  y  $s \in H^0(X, \mathcal{H})$  una sección global. El esquema  $Z(s)$  representa el subfunctor  $Z_s \hookrightarrow h_X$  definido por*

$$Z_s(S) = \{f \in Hom(S, X) \mid f^*s = 0 \in H^0(S, f^*\mathcal{H})\}.$$

*Demostración.* Ver [Proposition 3.10, [27]]. □

## 1.3 Distribuciones, sistemas de Pfaff y foliaciones

### 1.3.1 Distribuciones y foliaciones

En esta sección discutiremos algunos fundamentos de la teoría distribuciones y foliaciones sobre una variedad algebraica compleja y suave  $X$  de dimensión  $\dim(X) = n$ .

**Definición 1.26.** Una *distribución regular*  $\mathcal{D}$  en  $X$  es un par  $(\mathcal{T}\mathcal{D}, I(\mathcal{D}))$  de subfibrados de  $(\mathcal{T}X, \Omega_X^1)$  tales que

- $\mathcal{T}\mathcal{D} = \text{Ann}(I(\mathcal{D}))$  y
- $I(\mathcal{D}) = \text{Ann}(\mathcal{T}\mathcal{D})$ .

Decimos que  $\mathcal{D}$  es una distribución de codimensión  $q$  si satisface  $\text{rg}(I(\mathcal{D})) = n - \text{rg}(\mathcal{T}\mathcal{D}) = q$ . El *fibrado normal* y el *fibrado conormal* son los fibrados  $N_{\mathcal{D}} := \mathcal{T}X/\mathcal{T}\mathcal{D}$  y  $\Omega_{\mathcal{D}}^1 := \Omega_X^1/I(\mathcal{D})$  respectivamente.

**Observación 1.27.** La definición anterior no es minimal, pero intenta mostrar cierta simetría a la hora de elegir hacer uso de formas diferenciales o campos de vectores. En efecto, alcanza con explicitar solamente uno de los subfibrados. Si empezamos por ejemplo con  $\mathcal{T}\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{T}X$ , aplicando el funtor  $\text{Hom}(-, \mathcal{O}_X)$  a la sucesión exacta corta correspondiente tenemos

$$0 \rightarrow N_{\mathcal{D}}^{\vee} \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{D}^{\vee} \rightarrow 0,$$

de modo que  $I(\mathcal{D})$  se corresponde con la primer inclusión. Localmente, esta equivalencia se puede explicitar en de la siguiente manera: si  $\omega_1, \dots, \omega_q$  son generadores locales de  $I(\mathcal{D})$  en un abierto  $U$ , se sigue de las definiciones que

$$\bigcap_{i=1}^q \ker(\omega_i) = \ker(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q) = \mathcal{T}\mathcal{D}|_U.$$

**Definición 1.28.** Decimos que una distribución regular  $\mathcal{D}$  de codimensión  $q$  es una *foliación regular en  $X$*  si satisface alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

- Para cada par de secciones locales  $v, w$  de  $\mathcal{T}\mathcal{D}$ , el corchete de Lie de campos de vectores  $[v, w]$  también es una sección local de  $\mathcal{T}\mathcal{D}$  (“ $[\mathcal{T}\mathcal{D}, \mathcal{T}\mathcal{D}] \subseteq \mathcal{T}\mathcal{D}$ ”).
- $d(I(\mathcal{D})) \wedge \wedge^q I(\mathcal{D}) = 0$ , donde  $d$  es el diferencial ( $\mathbb{C}$ -lineal) de De Rham.

**Definición 1.29.** Una distribución singular  $\mathcal{D}$  en  $X$  es una distribución regular en un abierto  $U \subseteq X$  maximal tal que  $\text{codim}(X \setminus U) \geq 2$ . Decimos que  $S(\mathcal{D}) := X \setminus U$  es el *conjunto singular* de  $\mathcal{D}$ .

**Definición 1.30.** Decimos que una distribución singular  $\mathcal{F}$  es una *foliación singular* si es una foliación regular en el abierto  $U = X \setminus S(\mathcal{F})$ .

Como el complemento de  $U$  es de codimensión mayor o igual que dos, podemos extender de forma única el subhaz  $\mathcal{TD}|_U \hookrightarrow \mathcal{TX}|_U$  a un subhaz global  $\mathcal{TD} \hookrightarrow \mathcal{TX}$ , que llamaremos el *haz tangente a  $\mathcal{D}$* . Decimos que  $\mathcal{D}$  es *split* si su haz tangente se descompone como una suma de fibrados de línea en  $X$ . Siendo que  $\text{codim}(S(\mathcal{D})) \geq 2$ , se sigue que los haces cociente  $N_{\mathcal{D}}$  y  $\Omega_{\mathcal{D}}^1$  son libres de torsión. Si además  $\mathcal{D}$  es una foliación singular, como la involutividad es una propiedad cerrada tenemos al igual que en el caso regular  $[\mathcal{TD}, \mathcal{TD}] \subseteq \mathcal{TD}$ .

**Observación 1.31.** Por el teorema de Frobenius, toda foliación singular  $\mathcal{F}$  de codimensión  $q$  en  $X$  induce una descomposición  $X \setminus S(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \in I} L_i$  en subvariedades holomorfas de codimensión  $q$  - que llamaremos *hojas* - tal que

1. Para cada punto  $x \in X \setminus S(\mathcal{F})$  existe una única hoja  $L_x$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $x \in L_x$ .
2. Existe un cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X \setminus S(\mathcal{F})$  y cartas  $\phi_j : U_j \rightarrow V_j \times W_j$ , donde  $V_j$  y  $W_j$  son abiertos de  $\mathbb{C}^q$  y  $\mathbb{C}^{n-q}$  respectivamente, tales que para cada  $(y, z) \in V_j \times W_j$  vale que  $\phi^{-1}(\{y\} \times W_j)$  es un abierto de la hoja  $L_{\phi^{-1}(y,z)}$ .

**Ejemplo 1.32.** Sea  $Y$  una variedad suave y  $\phi : X \rightarrow Y$  un morfismo suave en codimensión 1. Las (componentes conexas de) fibras de  $f$  son hojas de la foliación singular  $\mathcal{F}_\phi$  con haz tangente  $\mathcal{TF}_\phi = \mathcal{T}_Y X$ . El conjunto  $S(\mathcal{F}_\phi)$  coincide con el conjunto de puntos críticos de  $\phi$ .

De la misma manera, todo morfismo racional  $f : X \dashrightarrow Y$  define una foliación  $\mathcal{F}_f$  cuyas hojas son los abiertos regulares  $f^{-1}(y)_{reg}$  de las fibras de  $f$ . El haz tangente a dicha foliación es  $\mathcal{TF}_f = \text{Ann}(i_*(\Omega_{\mathcal{U}|Y}^1))$ , donde  $\mathcal{U} \subseteq X$  es el dominio de  $f$ .

**Ejemplo 1.33.** El ejemplo anterior puede ser generalizado de la siguiente manera. Sea  $f : X \dashrightarrow Y$  un mapa dominante y  $\mathcal{F}$  una foliación en  $Y$ . En el abierto  $\mathcal{U}$  donde el mapa es suave podemos considerar el epimorfismo dado por la composición

$$\mathcal{TX}|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{df} f^*TY|_{\mathcal{U}} \rightarrow f^*N_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{U}}.$$

El *pullback*  $f^*\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}$  por el mapa  $f$  es la foliación que tiene por haz tangente a la saturación del núcleo de dicho morfismo. Alrededor de un punto no singular, las hojas de  $f^*\mathcal{F}$  coinciden con la preimagen de las hojas de  $\mathcal{F}$ .

Alternativamente, se sigue de lo hecho en [13] que una distribución puede ser definida mediante una  $q$ -forma diferencial *localmente descomponible fuera de su lugar singular*. Más precisamente, para cada distribución singular  $\mathcal{D}$  de codimensión  $q$  podemos considerar el correspondiente monomorfismo  $\det(N_{\mathcal{D}})^{\vee} \hookrightarrow \Omega_X^q$ . Así, toda distribución determina una  $q$ -forma diferencial torcida

$$\omega_{\mathcal{D}} \in H^0(\Omega_X^q \otimes \det(N_{\mathcal{D}})).$$

Vamos a denotar  $S(\omega_{\mathcal{D}})$  al conjunto de puntos donde  $\omega_{\mathcal{D}}$  se anula. Este elemento satisface

- $\text{codim}(S(\omega_{\mathcal{D}})) \geq 2$  (“ $\omega_{\mathcal{D}}$  no tiene contenido”).
- $\ker(\omega_{\mathcal{D}}(x)) = \mathcal{T}\mathcal{D}(x)$  para cada  $x \notin S(\omega_{\mathcal{D}})$ .
- Para cada punto  $x \notin S(\omega_{\mathcal{D}})$  vale que  $\omega_{\mathcal{D}} = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q$  para ciertas 1-formas  $\omega_i$  definidas en un entorno de  $x$  (“ $\omega_{\mathcal{D}}$  es localmente descomponible fuera del lugar singular”).

Ésta última condición es equivalente a pedir que  $\omega_{\mathcal{D}}$  satisfaga las *ecuaciones de Plücker*

$$(P) \quad \iota_v(\omega_{\mathcal{D}}) \wedge \omega_{\mathcal{D}} = 0$$

para toda sección local  $v$  de  $\bigwedge^{q-1} \mathcal{T}X$ . Además, la distribución  $\mathcal{D}$  es una foliación si y sólo si  $\omega_{\mathcal{D}}$  satisface la *ecuación de Frobenius*

$$(F) \quad \iota_v(\omega_{\mathcal{D}}) \wedge d\omega_{\mathcal{D}} = 0$$

para toda sección local  $v$  de  $\bigwedge^{q-1} \mathcal{T}X$ . En este caso diremos que  $\omega_{\mathcal{D}}$  es *integrable*.

**Observación 1.34.** Para cada punto  $x$  en  $X$  vale que

$$\omega_{\mathcal{D}}(x) = \omega_1(x) \wedge \cdots \wedge \omega_q(x) \neq 0$$

si y sólo si  $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(\omega_{\mathcal{D}})(x)) = n - q$ . Luego,  $S(\mathcal{D}) = S(\omega_{\mathcal{D}})$ .

**Definición 1.35.** Sea  $\mathcal{D}$  una distribución de codimensión 1 en  $X$ . Decimos que  $p$  es un *punto singular de tipo Reeb* si existe un entorno analítico  $\mathcal{U}$  de  $p$  tal que  $\mathcal{F}$  es la foliación inducida por una forma  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dz_i$ , con  $f_i(x) = 0$  para todo  $i$  y  $(df_1)_x, \dots, (df_n)_x$  son linealmente independientes.

**Definición 1.36.** Decimos que  $p$  es *punto singular de tipo Kupka* si es un punto singular de  $\mathcal{D}$  y  $d\omega_{\mathcal{D}}(p) \neq 0$ . El *conjunto de Kupka* de  $\mathcal{D}$  es el conjunto  $K(\mathcal{D})$  de puntos singulares de tipo Kupka.

**Observación 1.37.** En el caso de codimensión 1, alrededor de cada punto de tipo Kupka la foliación  $\mathcal{F}$  se puede escribir como un pullback de un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . En particular, El conjunto de puntos Kupka tiene codimensión 2. Para más información acerca de la estructura local de la foliación alrededor de un punto de tipo Kupka ver [Capítulo 1.4, [20]].

De la misma manera, toda  $q$ -forma  $\omega \in H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L})$  localmente descomponible fuera de su lugar singular tal que  $\text{codim}(S(\omega)) \geq 2$  define una distribución singular  $\mathcal{D}(\omega)$  de codimensión  $q$  con haz tangente

$$\mathcal{T}\mathcal{D}(\omega) = \ker(\omega).$$

Más aún, dadas dos  $q$ -formas  $\omega$  y  $\eta$  vale que  $D(\omega) = \mathcal{D}(\eta)$  si y sólo si existe un elemento  $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$  tal que  $\omega = f\eta$ . En otras palabras, el conjunto de distribuciones singulares (resp. foliaciones) está en biyección con el conjunto de  $q$ -formas diferenciales sin contenido que satisfacen (1) (resp. (1) y (2)) módulo multiplicación por secciones globales de  $\mathcal{O}_X^*$ . Esto motiva las siguientes definiciones:

**Definición 1.38.** Sea  $X$  una variedad suave y completa y  $\mathcal{L}$  un fibrado de línea. Definimos el espacio de distribuciones de codimensión  $q$  y grado  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{D}^q(X, \mathcal{L}) = \{[\omega] \in \mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L}) \mid \omega \text{ satisface (P) y } \text{codim}(S(\omega)) \geq 2\}$$

**Definición 1.39.** Sea  $X$  una variedad suave y completa y  $\mathcal{L}$  un fibrado de línea. Definimos el espacio de foliaciones de codimensión  $q$  y grado  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L}) = \{[\omega] \in \mathcal{D}^q(X, \mathcal{L}) \mid \omega \text{ satisface (F)}\}.$$

De aquí en adelante diremos que un elemento  $\omega \in H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L})$  es una  $q$ -forma torcida de grado  $\mathcal{L}$  y denotaremos  $\text{deg}(\omega) = \mathcal{L}$ .

**Observación 1.40.** El grupo  $\text{Aut}(X)$  de automorfismos de  $X$  actúa en  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$  vía cambios de coordenadas: para cada elemento  $g \in \text{Aut}(X)$  y  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$  la acción de  $g$  sobre  $\mathcal{F}$  está dada por  $g \cdot \mathcal{F} := g^*\mathcal{F}$ . Decimos que una foliación es *rígida* si su órbita por ésta acción contiene un abierto Zariski no vacío.

**Observación 1.41.** Éstos espacios son esquemas quasi-proyectivos embebidos en  $\mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L})$ . En las últimas décadas el estudio de su geometría ha sido un área muy activa, principalmente en el caso  $X = \mathbb{P}^n$ .

**Ejemplo 1.42.** *Foliaciones racionales en  $\mathbb{P}^n$ .* Sean  $\bar{d} = (d_0, \dots, d_q) \in \mathbb{N}^q$  y  $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^q$  un mapa racional dominante a un espacio proyectivo con pesos. Sea  $d = \sum d_i$  y  $f = (f_0, \dots, f_q)$  una representación de  $f$  en coordenadas homogéneas por polinomios de grado  $\deg(f_i) = d_i$ . Consideremos el elemento

$$\omega(f) = \iota_R(df_0 \wedge \dots \wedge df_q) \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^q(d)),$$

que es localmente descomponible fuera de su lugar singular e integrable por tratarse del pullback por  $f$  de la forma de volumen  $\iota_{R_{\bar{d}}}\Omega$  en  $\mathbb{P}^q$  (aquí  $R_{\bar{d}}$  denota el campo radial de dicho espacio proyectivo).

Decimos que una foliación  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{P}^n$  es *racional de tipo  $\bar{d}$*  si  $\omega_{\mathcal{F}} = \omega(f)$  para algún morfismo  $f = (f_0, \dots, f_q) : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^q$  con  $\deg(f_i) = d_i$ . Observemos que la hipótesis sobre  $f$  implica que  $\omega(f)$  se anula en codimensión mayor o igual que dos. Éste tipo de foliaciones fueron estudiadas en [11], donde se prueba que para cada elemento  $\bar{d} \in \mathbb{N}^q$ , el conjunto de foliaciones racionales de tipo  $\bar{d}$  determina una componente irreducible  $\mathcal{R}(n, \bar{d})$  genéricamente reducida del espacio  $\mathcal{F}^q(\mathbb{P}^n, d)$ .

El conjunto singular de una foliación racional de codimensión  $q$  genérica definida por el elemento

$$\omega(f) = \sum_{i=0}^q (-1)^i d_i f_i df_0 \wedge \dots \wedge df_{i-1} \wedge df_{i+1} \wedge \dots \wedge df_q$$

puede escribirse en coordenadas homogéneas como

$$S(\mathcal{F}) = \{f_0(x) = \dots = f_q(x) = 0\} \cup \{rg(J(f)(x)) \leq q\},$$

donde  $J(f)$  es la matriz jacobiana asociada a los polinomios  $f_0, \dots, f_q$ . El primer término es una intersección completa de codimensión  $q + 1$  que consiste de singularidades genéricamente de tipo Kupka, mientras que el segundo término es una variedad determinantal de codimensión  $n + 1 - q$ .

**Ejemplo 1.43.** *Acción de un grupo de Lie.* Sea  $G \subseteq \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$  un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \subseteq H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathbb{P}^n)$  cuya acción natural en  $\mathbb{P}^n$  tiene órbitas de dimensión constante fuera de un conjunto de codimensión mayor o igual que dos. Dicha acción induce una foliación  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  cuyas hojas coinciden con las órbitas de dimensión máxima.

Supongamos además que  $G$  actúa con estabilizadores discretos fuera de un conjunto de codimensión mayor o igual a dos. El haz tangente  $\mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es la imagen de la evaluación de secciones globales  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{T}\mathbb{P}^n$ . La hipótesis respecto a los estabilizadores nos asegura que la (co)restricción de dicho mapa es un isomorfismo  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \simeq \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ . En cuanto a la

forma diferencial torcida que define la foliación, el producto  $\bigwedge^{\dim(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}$  es un subespacio de dimensión 1 de  $\bigwedge^{\dim(\mathfrak{g})} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathbb{P}^n)$ . Por dualidad, ésto se corresponde con un elemento

$$\omega(\mathfrak{g}) \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^q(n+1))$$

(definido a menos de multiplicación por escalares). Si  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{\dim(\mathfrak{g})}$  son campos que inducen el morfismo  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{T}\mathbb{P}^n$ , entonces

$$\omega(\mathfrak{g}) = \iota_{\mathfrak{X}_1} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{\dim(\mathfrak{g})}} \iota_R (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}).$$

Éste elemento satisface trivialmente  $\omega_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})} = \omega(\mathfrak{g})$ . Más adelante veremos que como  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es una foliación split, su conjunto singular es aritméticamente Cohen Macaulay. Éste tipo de foliaciones constituyen distintas componentes irreducibles de los espacios  $\mathcal{F}^q(\mathbb{P}^n, n+1)$ , siendo algunas de éstas rígidas. Las referencias para estos resultados son [12] y [4], entre otras.

Si por el contrario la acción tuviese estabilizadores genéricos de dimensión positiva, las órbitas de dimensión máxima tendrían dimensión  $n - q < \dim(\mathfrak{g})$  y por lo tanto la aplicación  $\bigwedge^{\dim(\mathfrak{g})} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \bigwedge^{\dim(\mathfrak{g})} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathbb{P}^n)$  sería el morfismo nulo. En éste caso, para cualquier elección de  $(n - q)$  elementos linealmente independientes  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}$  la forma

$$\iota_{\mathfrak{X}_1} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{n-q}} \iota_R (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}) \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^q(n+1))$$

se anula en codimensión 1: caso contrario, la aplicación  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n-q)} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  inducida por dichos campos sería un isomorfismo y por lo tanto tendríamos  $\dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = n - q$ , lo cual es absurdo ya que  $\mathfrak{g} \subseteq H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$ . No obstante, la forma  $\omega(\mathfrak{g}) := \omega_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}$  puede calcularse haciendo una elección de  $n - q$  campos linealmente independientes y escribiendo

$$\iota_{\mathfrak{X}_1} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{n-q}} \iota_R \Omega = H\omega(\mathfrak{g})$$

donde  $H$  es el máximo común divisor de los menores maximales de la matriz cuyas filas se corresponden con los coeficientes polinomiales de los campos  $R, \mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}$ . En particular, podemos concluir que  $\deg(\omega(\mathfrak{g})) = n + 1$  si y sólo si la acción de  $G$  tiene estabilizadores discretos fuera de un conjunto de codimensión mayor o igual que dos, en cuyo caso el haz  $\mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es trivial.

### 1.3.2 Familias playas y espacios de moduli

En la bibliografía muchas veces se hace una elección a la hora de estudiar familias de foliaciones a partir de su descripción mediante formas diferenciales o mediante campos de vectores. Ésta elección se corresponde con las siguientes nociones de playitud. Para un morfismo  $f : Y \rightarrow S$  denotaremos  $\mathcal{T}Y_S$  (resp.  $\Omega_{Y|S}^1$ ) al haz tangente (resp. cotangente) relativo a  $f$ .



**Definición 1.44.** Una familia de distribuciones singulares involutivas de codimensión  $q$  en  $X$  con base  $S$  es una sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{T}X_S \rightarrow N_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$$

tal que  $\text{rg}(N_{\mathcal{D}}) = q$  y  $[\mathcal{T}\mathcal{D}, \mathcal{T}\mathcal{D}] \subseteq \mathcal{T}\mathcal{D}$ . Decimos que la familia es *playa* si  $N_{\mathcal{D}}$  es playo sobre  $S$ . El *esquema singular* de  $\mathcal{D}$  es  $\text{Sing}(\mathcal{D}) := \text{Sing}(N_{\mathcal{D}})$ .

**Definición 1.45.** Una familia de sistemas de Pfaff integrables  $\mathcal{F}$  de codimensión  $q$  en  $X$  con base  $S$  es una sucesión

$$0 \rightarrow I(\mathcal{F}) \hookrightarrow \Omega_{X \times S|S}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^1 \rightarrow 0$$

tal que  $\text{rg}(I(\mathcal{F})) = q$  y  $d(I(\mathcal{F})) \wedge \wedge^q I(\mathcal{F}) = 0 \subseteq \Omega_{X \times S|S}^{q+2}$ . Decimos que la familia es *playa* si  $\Omega_{\mathcal{F}}^1$  es playo sobre  $S$ . El *esquema singular* de  $\mathcal{F}$  es  $\text{Sing}(\mathcal{F}) := \text{Sing}(\Omega_{\mathcal{F}}^1)$ .

**Observación 1.46.** Una distribución involutiva (resp. sistema de Pfaff integrable) en  $X$  es simplemente una familia de distribuciones involutivas (resp. sistemas de Pfaff integrables) con base  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ . En los casos en los que el haz normal (resp. el conormal) son libres de torsión, ambas definiciones coinciden con la noción de foliación establecida en la Definición 1.30.

Dada una familia de distribuciones  $\mathcal{D}$ , podemos considerar la sucesión exacta dual

$$0 \rightarrow N_{\mathcal{D}}^{\vee} \rightarrow \Omega_{X \times S|S}^1 \rightarrow (\mathcal{T}\mathcal{D})^{\vee} \rightarrow \mathcal{E}xt^1(N_{\mathcal{D}}, \mathcal{O}_{X \times S}) \rightarrow 0.$$

Tomando  $I(\mathcal{F}) := N_{\mathcal{D}}^{\vee}$  y  $\Omega_{\mathcal{F}}^1 := \text{Im}(\Omega_{X \times S|S}^1 \rightarrow (\mathcal{T}\mathcal{D})^{\vee})$ , conseguimos la familia de sistemas de Pfaff dual a  $\mathcal{D}$ . De manera completamente análoga podemos definir la distribución singular dual a un sistema de Pfaff. Al igual que en el caso regular, usando la fórmula de Cartan se puede probar que las familias de distribuciones involutivas se dualizan en familias integrables y viceversa. Usaremos la notación  $(-)^{\vee}$  para denotar la familia de sistemas de Pfaff (resp. familia de distribuciones) dual a una familia de distribuciones (resp. sistemas de Pfaff).

**Observación 1.47.** La familia  $(\mathcal{D}^{\vee})^{\vee}$  es la saturación de  $\mathcal{D}$ . En particular, si  $N_{\mathcal{D}}$  es libre de torsión, entonces  $(\mathcal{D}^{\vee})^{\vee} = \mathcal{D}$ . Lo mismo sucede para familias de sistemas de Pfaff.

Como se muestra en [27], las familias duales tienen el mismo esquema singular:

**Lema 1.48.** *Sea  $\mathcal{D}$  una familia de distribuciones involutivas y  $\mathcal{F}$  una familia de sistemas de Pfaff tal que  $\mathcal{D} = \mathcal{F}^\vee$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{D}^\vee$ . Entonces sus esquemas singulares son iguales, i.e.,  $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(\mathcal{D})$ .*

*Demostración.* Podemos proceder exactamente como en la prueba de [Proposition 7.3, [27]]. La idea es esencialmente la siguiente: si  $x$  es un punto alrededor del cual  $N_{\mathcal{D}}$  es localmente libre, entonces  $\mathcal{T}\mathcal{D}_x$  también lo es y por lo tanto  $(\Omega_{\mathcal{F}}^1)_x = (\mathcal{T}\mathcal{D}_x)^\vee$  es un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo libre. Con esto en mente se prueba que ambos subesquemas representan el subfunctor de  $h_X$  dado por

$$S \mapsto \left\{ f \in \text{Hom}(S, X) \mid f^* \left( \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}xt^i(N_{\mathcal{D}}, \mathcal{O}_X) \right) \text{ es un haz de torsión} \right\}.$$

□

En línea con lo hecho en la Definición 1.26, vamos a dar una definición simétrica de playitud para familias de foliaciones singulares.

**Definición 1.49.** Una familia de foliaciones singulares en  $X$  con base  $S$  es un par  $(\mathcal{T}\mathcal{F}, I(\mathcal{F}))$  de subhaces de  $(\mathcal{T}X_S, \Omega_{X \times S|S}^1)$  tales que

- $\mathcal{T}\mathcal{F} = \text{Ann}(I(\mathcal{F}))$ ,
- $I(\mathcal{F}) = \text{Ann}(\mathcal{T}\mathcal{F})$ ,
- $\mathcal{T}\mathcal{F}$  es involutivo e
- $I(\mathcal{F})$  es integrable.

Decimos que la familia es de codimensión  $q$  si  $\text{rg}(\mathcal{T}\mathcal{F}) = n - q$ . El haz normal (resp. conormal) de  $\mathcal{F}$  es el cociente  $N_{\mathcal{F}} := \mathcal{T}X_S / \mathcal{T}\mathcal{F}$  (resp.  $\Omega_{\mathcal{F}}^1 := \Omega_{X \times S|S}^1 / I(\mathcal{F})$ ). Decimos que la familia es *playa* si  $N_{\mathcal{F}} \oplus \Omega_{\mathcal{F}}^1$  es playo sobre  $S$ . El *esquema singular* de  $\mathcal{F}$  es  $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(N_{\mathcal{F}}) = \text{Sing}(\Omega_{\mathcal{F}}^1)$ .

A continuación ahondaremos en las relaciones entre estas nociones de playitud, sus respectivos espacios de moduli y los espacios de foliaciones introducidos en la sección anterior. *En lo que sigue de esta sección  $X$  será una variedad proyectiva con una polarización fija.*

Para cada cada polinomio  $P \in \mathbb{Q}[t]$  podemos definir el funtor

$$\mathfrak{Inv}^P : \text{Sch}_{\mathbb{C}}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$$

(resp.  $\mathfrak{Iff}^P$ ) que a cada esquema  $S$  le asigna el conjunto de familias playas de distribuciones involutivas (resp. sistemas de Pfaff integrables) tales que la restricción de  $N_{\mathcal{D}}$  (resp.  $\Omega_{\mathcal{F}}^1$ ) a las distintas fibras sobre  $S$  tiene polinomio

de Hilbert  $P$ . Las proposiciones [Proposition 6.3, [27]] y [Proposition 6.5, [27]] indican que estos funtores están representados por dos subsquemas cerrados  $\text{Inv}_P \subseteq \text{Quot}_P(\mathcal{T}X)$  y  $\text{iPf}_P \subseteq \text{Quot}_P(\Omega_X^1)$ . Para simplificar la notación vamos a escribir

$$\begin{aligned}\text{Inv} &= \coprod_{P \in Q[t]} \text{Inv}_P \text{ y} \\ \text{iPf} &= \coprod_{P \in Q[t]} \text{iPf}_P\end{aligned}$$

cuando esto no traiga ambigüedades. Estos esquemas vienen equipados con sus respectivas familias universales  $\mathcal{D}_{\text{Inv}}$  y  $\mathcal{F}_{\text{iPf}}$ . También llamaremos  $\text{Inv}^q$  e  $\text{iPf}^q$  a los espacios de moduli de familias de codimensión  $q$ . Cabe destacar que como la involutividad/integrabilidad es invariante por la acción de  $\text{Aut}(X)$  en los respectivos esquemas  $\text{Quot}$ , éstos espacios también vienen equipados con una acción de dicho grupo. Decimos que un elemento es *rígido* si su órbita por la acción de  $\text{Aut}(X)$  contiene un abierto no vacío.

La dualidad discutida previamente se traduce en dos mapas

$$\phi : \text{Inv} \dashrightarrow \text{iPf} \text{ y } \psi : \text{iPf} \dashrightarrow \text{Inv}.$$

En los puntos donde es posible, éstos morfismos son mutuamente inversos. En cada componente irreducible  $\mathcal{C} \subseteq \text{Inv}$  (resp.  $\mathcal{C} \subseteq \text{iPf}$ ), el dominio de  $\phi|_{\mathcal{C}}$  (resp.  $\psi|_{\mathcal{C}}$ ) es el abierto maximal  $\mathcal{U}$  tal que  $(\mathcal{D}_{\text{Inv}}|_{\mathcal{U}})^\vee$  (resp.  $(\mathcal{F}_{\text{iPf}}|_{\mathcal{U}})^\vee$ ) es una familia playa. En [27], el autor muestra que la playitud de la familia dual está íntimamente relacionada con la del lugar singular. En el caso de codimensión 1, por ejemplo, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.50** (Theorem 7.8, [27]). *Sea  $\mathcal{D}$  una familia de distribuciones involutivas de codimensión 1 sobre  $S$  tal que  $N_{\mathcal{D}}$  es libre de torsión. Supongamos además que  $\text{Sing}(\mathcal{D})$  es playo sobre  $S$ . Entonces  $\mathcal{D}$  es una familia playa si y sólo si  $\mathcal{D}^\vee$  lo es.*

Por otro lado, [Theorem 3.2, [7]] indica que el lugar singular de una familia playa de distribuciones de codimensión 1 es playo sobre la base. Juntando estas dos afirmaciones, podemos concluir que la restricción de  $\phi$  al abierto  $\mathcal{U}$  de  $\text{Inv}^1$  donde  $N_{\mathcal{D}_{\text{Inv}}}$  es libre de torsión es en realidad un morfismo  $\phi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \text{iPf}^1$ . Esto es concordante con el hecho de que para familias de sistemas de Pfaff de codimensión 1, la condición de playitud se satisface “más a menudo”:

**Lema 1.51.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de sistemas de Pfaff de codimensión 1 en  $X$  tal que  $I(\mathcal{F})$  es un fibrado de línea en  $X \times S$  y el morfismo  $I(\mathcal{F}) \rightarrow \Omega_{X \times S|S}^1$  es no trivial en todas las fibras. Entonces  $\mathcal{F}$  es una familia playa.*

*Demostración.* Se sigue directamente de [Lemma 2.1.4, [19]].  $\square$

Como dijimos anteriormente, los morfismos de dualidad son una equivalencia birracional *donde esto es posible*. A continuación veremos que existen componentes irreducibles a lo largo de las cuales esto no sucede. Más precisamente, exhibiremos componentes irreducibles de  $\text{Inv}^1$  tales que su imagen por  $\phi$  no interseca al dominio de  $\psi$ . Antes, veamos cómo podemos usar este último lema para trasladar resultados de estabilidad en los espacios  $\mathcal{F}^1(X, \mathcal{L})$  a  $\text{iPf}^1$ .

**Lema 1.52.** *Sea  $X$  una variedad proyectiva suave con grupo de Picard discreto y  $S$  un esquema afín. Entonces toda familia  $\mathcal{L}_S$  de fibrados de línea en  $X$  es de la forma  $p_1^*\mathcal{L}$ , donde  $p_1 : X \times S \rightarrow X$  es la proyección canónica y  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ .*

*Demostración.* Como el grupo de Picard de  $X$  es discreto, la restricción de  $\mathcal{L}_S$  a cada una de las fibras debe ser isomorfa a un cierto fibrado de línea  $\mathcal{L}$  en  $X$ . Consideremos entonces el fibrado  $\mathcal{L}'_S := \mathcal{L}_S^\vee \otimes p_1^*\mathcal{L}$ . Su restricción a cada fibra sobre  $S$  es trivial, de modo que por el “Seesaw Theorem” [Corollary 6, p.54 en [23]] debe ser  $\mathcal{L}_S \simeq p_2^*\mathcal{L}''$  para un cierto  $\mathcal{L}'' \in \text{Pic}(S) = 0$ , donde  $p_2$  es la proyección en la segunda coordenada. Pero entonces  $\mathcal{L}_S = p_1^*\mathcal{L}$ , lo cual prueba el Lema.  $\square$

**Observación 1.53.** Si  $\mathcal{F}$  es una familia playa de sistemas de Pfaff integrables de codimensión 1 tal que  $\Omega_{\mathcal{F}}^1$  es libre de torsión en las fibras, entonces  $I(\mathcal{F}) = N_{\mathcal{F}}^\vee$  es un fibrado de línea. Si además suponemos que la base es afín y  $\text{Pic}(X)$  es discreto, entonces por el Lema 1.52 debe ser de la forma  $I(\mathcal{F}) = p_1^*\mathcal{L}$ . La familia

$$0 \rightarrow I(\mathcal{F}) \xrightarrow{\omega_{\mathcal{F}}} \Omega_{X \times S|S}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^1 \rightarrow 0$$

queda entonces unívocamente determinada por un elemento integrable en las fibras

$$\omega_{\mathcal{F}} \in H^0(X \times S, p_1^*(\Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee)) = H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S.$$

Al tratarse de una familia playa de sistemas de Pfaff de codimensión 1, este elemento debe satisfacer  $\omega_{\mathcal{F}}(s) \neq 0$  para cada  $s \in S$ . Observemos que la asignación  $\omega$  es funtorial, es decir, que para cada morfismo  $f : T \rightarrow S$  tenemos  $\omega_{(f^*\mathcal{F})} = f^*(\omega_{\mathcal{F}})$ .

Por otro lado, consideremos la familia tautológica de sistemas de Pfaff con base  $S = \mathcal{F}^1(X, \mathcal{L}^\vee)$ . Esta familia satisface trivialmente las hipótesis del Lema 1.51 y por lo tanto es playa.

Pero entonces el espacio  $\mathcal{F}^1(X, \mathcal{L}^\vee)$  y el abierto de  $\text{iPf}^1$  donde  $\Omega_{\mathcal{F}/\text{iPf}}^1$  es libre de torsión en las fibras representan el mismo funtor, de modo que deben ser isomorfos (mediante la aplicación que a cada punto  $\mathcal{F} \in \text{iPf}^1$  le asigna el elemento  $[\omega_{\mathcal{F}}]$ ). Éste fenómeno será generalizado al final de este capítulo.

**Ejemplo 1.54.** Consideremos la foliación en  $X = \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}\text{Sym}^4(\mathbb{C}^2)$  inducida por la acción natural por cambios de coordenadas de  $PGL(2, \mathbb{C})$  estudiada en [4]. Llamemos  $\mathcal{D}_0$  y  $\mathcal{F}_0$  a su respectiva distribución y sistema de Pfaff asociados. Observemos que esta foliación es del tipo descrito en el Ejemplo 1.43.

Como la acción de  $PGL(2, \mathbb{C})$  es localmente libre fuera de un conjunto de codimensión 2, el haz  $\mathcal{T}\mathcal{D}_0$  es la imagen del morfismo  $\mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \hookrightarrow \mathcal{T}\mathbb{P}^4$  y por lo tanto es split. Sea  $\mathcal{C} \subseteq \text{Inv}^1$  una componente irreducible que contiene a  $\mathcal{D}_0$ . El Ejemplo 3.42 en esta tesis establece que

$$\mathcal{C} = \overline{\text{Aut}(\mathbb{P}^n) \cdot \mathcal{D}_0}.$$

Esencialmente esto se debe a que todas las deformaciones locales de  $\mathcal{D}_0$  tienen haz tangente trivial. Así, siendo  $\mathfrak{sl}_2 \subseteq H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathbb{P}^n)$  una subálgebra rígida esto implica que  $\mathcal{D}_0$  es un elemento rígido de  $\text{Inv}^1$ .

El esquema singular correspondiente a una foliación split en  $\mathbb{P}^n$  es aritméticamente Cohen-Macaulay (ver Proposición 2.24 en esta tesis). Como se muestra en [4], en este caso el esquema singular  $\text{Sing}(\mathcal{D}_0)$  tiene dos componentes de codimensión dos, siendo una de ellas genéricamente tipo Kupka.

Por otro lado, esta foliación es de tipo racional (2, 3): el sistema  $\mathcal{F}_0$  está dado por

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5) \xrightarrow{\omega_0} \Omega_{\mathbb{P}^4}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}_0}^1 \rightarrow 0,$$

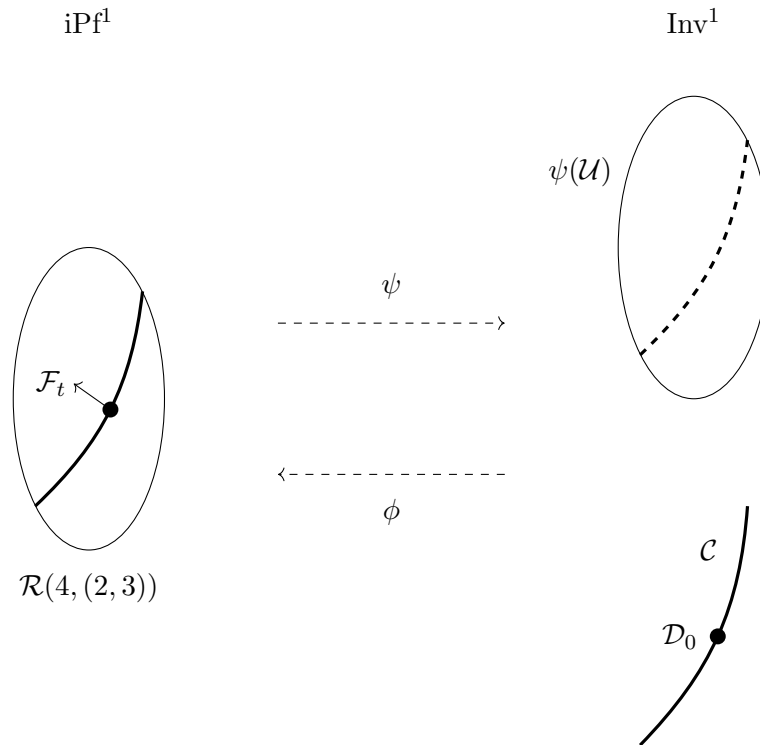
donde  $\omega_0 = 2QdC - 3CdQ$  para ciertos  $Q$  y  $C$  de grados  $\deg(Q) = 2$  y  $\deg(C) = 3$ . Recordemos de la Observación 1.53 que los espacios  $\text{iPf}^1$  y  $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))$  son localmente isomorfos alrededor del punto  $\mathcal{F}_0$ . Para cada par de deformaciones de primer orden genéricas  $Q_t$  y  $C_t$  de  $Q$  y  $C$  respectivamente sobre  $D = \text{Spec}(k[t]/(t^2))$  podemos considerar la familia playa de sistemas de Pfaff

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_D^4}(5) \xrightarrow{\omega_t} \Omega_{\mathbb{P}_D^4|D}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}_t}^1 \rightarrow 0$$

definida por el elemento  $\omega_t = 2Q_t dC_t - 3C_t dQ_t$ . Como vimos en el Ejemplo 1.42, el lugar singular de foliación racional genérica no es equidimensional, de modo que no se trata de una foliación split.

Sea  $\mathcal{R}(4, (2, 3)) \subseteq \text{iPf}^1$  la componente irreducible racional que contiene a  $\mathcal{F}_0$ . De lo dicho en el párrafo anterior se deduce que su punto genérico

no tiene haz tangente trivial. Sea  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}(4, (2, 3))$  el abierto maximal tal que  $\psi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \text{Inv}^1$  es un morfismo. Entonces (genéricamente)  $\psi(\mathcal{U})$  no interseca a  $\mathcal{C}$  (porque su punto genérico tiene haz tangente trivial) y por lo tanto  $\phi(\mathcal{C})$  no puede intersecar a  $\mathcal{U}$ .



**Observación 1.55.** Esto no contradice el Teorema 1.50: la familia de esquemas  $\text{Sing}(\mathcal{F}_t)$  no es playa: los puntos aislados de tipo no-Kupka correspondientes a una foliación racional genérica se transforman en una componente de codimensión 2 en la fibra central.

En el capítulo 3 ahondaremos en éste y otros ejemplos similares (de acciones de álgebras de Lie semisimples con álgebra de invariantes libre).

**Observación 1.56.** En particular, no es cierto que toda componente irreducible de  $\text{Inv}$  sea birracionalmente equivalente a una componente de  $i\text{Pf}$ : es posible que dos componentes se peguen al dualizar.

Dada la naturaleza simétrica del problema, es esperable que este fenómeno se manifieste en ambas direcciones. En efecto, el siguiente ejemplo muestra el mismo comportamiento para la aplicación  $i\text{Pf}^{n-1} \dashrightarrow \text{Inv}^{n-1}$ .

**Ejemplo 1.57.** Vamos a restringirnos a foliaciones de dimensión 1 en la variedad  $X = \mathbb{P}^n$ . Una foliación  $\mathcal{F}$  de este tipo satisface  $\mathcal{T}\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$  para

un cierto  $d \in \mathbb{Z}$ . Es decir, está inducida por un único campo global torcido (salvo multiplicación por escalares)  $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}} \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathbb{P}^n(-d))$  que se anula en un conjunto de codimensión mayor o igual que dos. Como en este caso la condición de integrabilidad es trivial, todo elemento de esta forma induce una foliación. Un argumento análogo al de la Observación 1.53 muestra que la asignación  $\mathcal{F} \mapsto X_{\mathcal{F}}$  define un isomorfismo entre el abierto de  $\text{Inv}^{n-1}$  donde  $N_{\mathcal{F}}$  es libre de torsión y el abierto de  $\coprod_{d \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathbb{P}^n(-d))$  de campos que se anulan en codimensión 2. En particular, un elemento genérico en  $\text{Inv}^{n-1}$  tiene singularidades aisladas.

Consideremos por otra parte una foliación  $\mathcal{F}$  tal que

$$I(\mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_i)$$

para ciertos  $e_i \in \mathbb{Z}$ . Esto sucede por ejemplo en el caso en el que  $\mathcal{F}$  es la intersección de  $n - 1$  foliaciones de codimensión 1 que son transversales fuera de un conjunto de codimensión 2. Sea  $\omega_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(-e_i))$  el elemento inducido por el  $i$ -ésimo sumando de  $I(\mathcal{F})$ . La  $q$ -forma diferencial que asociada a  $\mathcal{F}$  es

$$\omega_{\mathcal{F}} = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-1}.$$

En particular,  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  es equidimensional de codimensión 2 (esto se puede concluir por ejemplo aplicando [Theorem 5.1, [1]] en cartas afines). Sea  $\mathcal{C}$  una componente irreducible de  $\text{iPf}^{n-1}$  que contiene a  $\mathcal{F}$ . Como todas las deformaciones infinitesimales de  $I(\mathcal{F})$  son triviales, un elemento genérico  $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$  debe satisfacer  $I(\mathcal{F}') \simeq I(\mathcal{F})$  y por lo tanto  $\text{codim}(\text{Sing}(\mathcal{F}')) = 2$ . Sea entonces  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$  el dominio del mapa  $\psi$ . Comparando los esquemas singulares genéricos podemos concluir que  $\overline{\psi(\mathcal{U})}$  no es una componente irreducible de  $\text{Inv}^{n-1}$ .

En vistas de estos ejemplos, sería deseable que un “espacio de foliaciones” represente un functor de moduli con una noción de playitud simétrica respecto a la elección de formas diferenciales/campos vectoriales.

**Definición 1.58.** Sean  $P, Q \in \mathbb{Q}[t]$ . El functor  $\mathfrak{Fol}^{P, Q} : \text{Sch}_k \rightarrow \text{Sets}$  es el functor que a cada esquema  $S$  sobre  $\mathbb{C}$  le asigna el conjunto de familias playas de foliaciones singulares en  $X$  con base  $S$  tales que las restricciones de  $N_{\mathcal{F}}$  y  $\Omega_{\mathcal{F}}^1$  a las fibras sobre  $S$  tiene polinomio de Hilbert  $P$  y  $Q$  respectivamente.

**Teorema 1.59.** Sean  $P, Q \in \mathbb{Q}[t]$ . Entonces

1.  $\mathfrak{Fol}^{P, Q}$  está representado por un esquema quasi-proyectivo  $\text{Fol}_{P, Q}$  y
2. existen embeddings canónicos  $i : \text{Fol}_{P, Q} \hookrightarrow \text{Inv}_P$  y  $j : \text{Fol}_{P, Q} \hookrightarrow \text{iPf}_Q$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un esquema irreducible y  $\mathcal{F}$  una familia de foliaciones con base  $S$ . De la definición de familia playa de foliaciones se sigue que tanto  $N_{\mathcal{F}}$  como  $\Omega_{\mathcal{F}}^1$  son libres de torsión y playos sobre la base. Es decir,  $\mathcal{F}$  induce una familia playa de distribuciones involutivas y una familia playa de sistemas de Pfaff integrables (duales entre sí).

De las definiciones se sigue que  $\mathfrak{Fol}^{P,Q}$  es un subfunctor de  $\mathfrak{Inv}^P$ . Veamos que además está representado por un subesquema de  $\text{Inv}_P$ . Sea  $\mathcal{D}_{\text{Inv}}$  la familia universal de distribuciones con base  $\text{Inv}_P$ . Consideremos la flattening stratification asociada al haz  $\Omega_{\mathcal{D}_{\text{Inv}}}^1$  y definamos  $\text{Inv}_{P,Q}$  como la unión disjunta de los estratos tal que  $\Omega_{\mathcal{D}_{\text{Inv}}}^1$  tiene polinomio de Hilbert igual a  $Q$  en las fibras. El funtor de puntos de este subesquema puede describirse de la siguiente manera: para cada  $\mathbb{C}$ -esquema  $T$  vale que

$$\text{Hom}(T, \text{Inv}_{P,Q}) = \left\{ \begin{array}{l} f \in \text{Hom}(T, \text{Inv}_P) \text{ tal que } f^* \Omega_{\mathcal{D}_{\text{Inv}}}^1 \text{ es playo} \\ \text{con polinomio de Hilbert } Q \text{ en las fibras.} \end{array} \right\}$$

Luego, el funtor  $\mathfrak{Fol}^{P,Q}$  está representado por el subesquema abierto  $\text{Fol}_{P,Q}$  de  $\text{Inv}_{P,Q}$  donde  $N_{\mathcal{D}_{\text{Inv}}}$  es libre de torsión. En particular,  $\text{Fol}_{P,Q}$  es quasiproyectivo y admite un embedding  $i : \text{Fol}_{P,Q} \hookrightarrow \text{Inv}_P$ .

De la misma manera,  $\mathfrak{Fol}^{P,Q}$  es un subfunctor de  $i\mathfrak{P}f^Q$ , de modo que podemos hacer la construcción dual a partir de la familia universal de sistemas de Pfaff con base  $i\text{Pf}^Q$  y conseguir el correspondiente embedding  $j : \text{Fol}_{P,Q} \hookrightarrow i\text{Pf}^Q$ .  $\square$

En sintonía con lo hecho con los otros espacios, denotaremos  $\text{Fol}^q$  al esquema que representa al funtor de foliaciones de codimensión  $q$ . El Teorema anterior nos dice que éste espacio admite embeddings  $\text{Fol}^q \hookrightarrow i\text{Pf}^q$  y  $\text{Fol}^q \hookrightarrow \text{Inv}^q$ . Veamos ahora cuál es la relación entre estos esquemas y los espacios de foliaciones  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$ . Vamos a hacer énfasis en el caso de los espacios de foliaciones, pero el mismo análisis se aplica al caso de distribuciones (no necesariamente involutivas).

Haciendo uso de la restricción de la sucesión tautológica del espacio  $\mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L})$  a la clausura  $\overline{\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})}$  podemos construir una familia de distribuciones involutivas  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^q$  con base  $\overline{\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})}$  tal que

$$\mathcal{T}\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^q|_{X_{[\omega]}} = \ker(\omega)$$

para cada  $[\omega] \in \overline{\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})}$ . Como vimos en el Ejemplo 1.54, esta familia en general no será playa.

*Supongamos ahora que el grupo  $\text{Pic}(X)$  es discreto.* Sea  $\mathcal{F}$  una familia de foliaciones singulares de codimensión  $q$  en  $X$  con base  $S = \text{Spec}(A)$ . A



través del argumento análogo (relativo) al de la sección anterior podemos construir un morfismo

$$\omega_{\mathcal{F}} \in H^0(X \times S, \Omega_{X \times S|S}^q \otimes \det(N_{\mathcal{F}}))$$

tal que el núcleo  $\ker(\omega_{\mathcal{F}})$  del morfismo de contracción

$$\omega_{\mathcal{F}} : \mathcal{T}X_S \rightarrow \Omega_{X \times S|S}^{q-1} \otimes \det(N_{\mathcal{F}})$$

satisface  $\ker(\omega_{\mathcal{F}}) = \mathcal{T}\mathcal{F}$ .

Comencemos suponiendo que  $\mathcal{F}$  es una familia playa de distribuciones involutivas, es decir, que  $N_{\mathcal{F}}$  es playo sobre la base. Como la imagen  $\text{Im}(\omega_{\mathcal{F}}) \simeq \mathcal{T}X_S/\mathcal{T}\mathcal{F}$  es naturalmente isomorfa a  $N_{\mathcal{F}}$ , se trata de un haz playo sobre  $S$ . En particular, para cada  $s \in S$  tenemos

$$(\star) \quad \ker(\omega_{\mathcal{F}}(s)) = \ker(\omega_{\mathcal{F}})_s = \mathcal{T}\mathcal{F}_s,$$

donde  $\omega_{\mathcal{F}}(s) : \mathcal{T}X_s \rightarrow \Omega_{X_s}^{q-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_s}} \det(N_{\mathcal{F}})_s$  es la restricción de  $\omega_{\mathcal{F}}$  a la fibra sobre  $s$ .

Siendo  $\text{Pic}(X)$  discreto, el Lema 1.52 nos dice que  $\det(N_{\mathcal{F}})$  debe ser de la forma

$$\det(N_{\mathcal{F}}) \simeq p_1^* \mathcal{L}'$$

para un cierto fibrado de línea  $\mathcal{L}'$  en  $X$  y por lo tanto

$$\Omega_{X \times S|S}^q \otimes \det(N_{\mathcal{F}}) = p_1^*(\Omega_X^q \otimes \mathcal{L}').$$

Así, el elemento  $\omega_{\mathcal{F}}$  define una sección  $\omega_{\mathcal{F}} \in H^0(S, H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L}') \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S)$  o equivalentemente un morfismo  $S \rightarrow H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L}')$ . Para cada punto  $s \in S$  la restricción  $\mathcal{F}_s$  es una foliación de codimensión  $q$  en  $X_s$ . Luego, por  $(\star)$  debe ser  $\omega_{\mathcal{F}}(s) \neq 0$  y por lo tanto  $\omega_{\mathcal{F}}$  desciende a un morfismo

$$\omega_{\mathcal{F}} : S \rightarrow \mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{L}').$$

Como  $\omega_{\mathcal{F}}$  es una familia de formas integrables y localmente descomponibles fuera de su lugar singular, este es en realidad un morfismo

$$\omega_{\mathcal{F}} : S \rightarrow \overline{\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L}')}$$

y  $\mathcal{F}$  es el pullback por  $\omega_{\mathcal{F}}$  de la familia  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}^q$  construida al principio de esta discusión. Más aún, como  $\mathcal{F}$  es una familia playa sabemos que  $\omega_{\mathcal{F}}$  se factoriza por la flattening stratification asociada al haz  $N_{\mathcal{F}^q}$  en  $\overline{\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L}')}$ .

**Observación 1.60.** Si  $\{U_i\}$  es un cubrimiento afín de un  $\mathbb{C}$ -esquema  $S$ , las secciones  $\omega_i$  con dominio  $U_i$  satisfacen  $\omega_i = f_{ij}\omega_j$  en  $U_i \cap U_j$  para cierta  $f \in \mathcal{O}_S^*(U_i \cap U_j)$ , de modo que inducen un morfismo  $\omega_{\mathcal{F}} : S \rightarrow \overline{\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L}')}^{\vee}$  con las mismas propiedades. Por construcción, si  $f : T \rightarrow S$  es un morfismo entonces  $\omega_{f^*\mathcal{F}} = f^*\omega_{\mathcal{F}}$ .

Comparando ambos problemas de deformación, podemos concluir:

**Proposición 1.61.** Sea  $X$  una variedad proyectiva suave con grupo de Picard discreto,  $\mathcal{F}$  una foliación singular de codimensión  $q$  en  $X$  y  $S$  el estrato correspondiente a la flattening stratification asociada al haz  $N_{\mathcal{F}/\mathcal{L}}^q$  en  $\mathcal{F}^q(X, \det(N_{\mathcal{F}}))$  que pasa por  $[\omega_{\mathcal{F}}]$ . Entonces la aplicación

$$\omega : \text{Inv}^q \rightarrow S \subseteq \mathcal{F}^q(X, \det(N_{\mathcal{F}}))$$

es un isomorfismo localmente alrededor de  $\mathcal{F}$  y  $[\omega_{\mathcal{F}}]$ .

Si por el contrario suponemos que  $\mathcal{F}$  se trata de una familia playa de sistemas de Pfaff, entonces para cada  $s \in S$  el morfismo  $I(\mathcal{F})_s \rightarrow \Omega_{X_s}^1$  tiene rango  $q$  y por lo tanto la aplicación  $\omega_S : \mathcal{O}_{X \times S} \rightarrow \Omega_{X \times S|S}^q \otimes \det(I(\mathcal{F}))^{\vee}$  satisface  $\omega_S(s) \neq 0$ . Así, el mismo argumento muestra la versión dual de la última proposición:

**Proposición 1.62.** Sea  $X$  una variedad proyectiva suave con grupo de Picard discreto,  $\mathcal{F}$  una foliación singular de codimensión  $q$  en  $X$  y  $S$  el estrato correspondiente a la flattening stratification asociada al haz  $\Omega_{\mathcal{F}/\mathcal{L}}^1$  en  $\mathcal{F}^q(X, \det(N_{\mathcal{F}}))$  que pasa por  $[\omega_{\mathcal{F}}]$ . Entonces la aplicación

$$\omega : \text{iPf}^q \rightarrow S \subseteq \mathcal{F}^q(X, \det(N_{\mathcal{F}}))$$

es un isomorfismo localmente alrededor de  $\mathcal{F}$  y  $[\omega_{\mathcal{F}}]$ .

La interacción entre los distintos espacios puede resumirse entonces de la siguiente manera:

**Proposición 1.63.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular de codimensión  $q$  en  $X$ . Si  $\text{Pic}(X)$  es discreto, entonces localmente alrededor de  $\mathcal{F}$  los morfismos definidos en esta sección caben en un diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \text{Fol}^q & \xleftarrow{j} & \text{iPf}^q \\ \downarrow i & & \downarrow \omega \\ \text{Inv}^q & \xleftarrow{\omega} & \mathcal{F}^q(X, \det(N_{\mathcal{F}})). \end{array}$$

*Demostración.* Fijemos  $\mathcal{L} := \det(N_{\mathcal{F}})$ . Sea  $Y$  un esquema conexo sobre  $\mathbb{C}$  y  $f : Y \rightarrow \text{Inv}^q$ ,  $g : Y \rightarrow \text{iPf}^q$  morfismos tales que  $\omega \circ f = \omega \circ g$ . La familia  $\mathcal{F}' := (\omega \circ f)^* \mathcal{F}_{\mathcal{L}}^q = (\omega \circ g)^* \mathcal{F}_{\mathcal{L}}^q$  es una familia playa de foliaciones singulares de codimensión  $q$  en  $X$  con base  $Y$ . Existe entonces un único morfismo  $h : Y \rightarrow \text{Fol}^q$  tal que  $\mathcal{F}'$  es el pullback por  $h$  de la familia universal en  $\text{Fol}^q$ . Como a su vez dicha familia es el pullback de la familia universal en  $\text{iPf}^q$  (resp. en  $\text{Inv}^q$ ) por la aplicación  $j$  (resp. el morfismo  $i$ ) las igualdades  $f = i \circ h$  y  $g = j \circ h$  se satisfacen automáticamente y por lo tanto el diagrama es cartesiano.  $\square$

## Capítulo 2

# Foliaciones split en variedades tóricas

El estudio de las variedades tóricas ha surgido independientemente en distintos trabajos relacionados a problemas de compactificación. El estudio de esta clase de variedades ha atraído el interés de numerosos matemáticos. Entre otras cosas, ésto se debe a la fuerte conexión entre la geometría tórica y la geometría simplicial. Esta relación se centra en una correspondencia entre ciertos objetos simpliciales (*abanicos*) y las variedades tóricas. De esta manera muchas de las propiedades geométricas de una variedad tórica pueden ser expresadas en términos combinatorios. Todo esto tiene como consecuencia que éste tipo de variedades sean una fuente rica de ejemplos donde la dificultad para testear conjeturas es más o menos uniforme. En este capítulo analizaremos la teoría de foliaciones split en variedades tóricas suaves y completas. Haciendo uso de las coordenadas homogéneas en el sentido de [8], veremos que bajo ciertas hipótesis sobre el esquema singular el tipo de isomorfismo del haz tangente  $\mathcal{T}\mathcal{F}$  de una foliación split  $\mathcal{F}$  es estable en el espacio  $\mathcal{F}^q(X, \det(N_{\mathcal{F}}))$ . Como aplicación de estos resultados construiremos componentes irreducibles de dichos espacios tales que su punto genérico es un pullback lineal (ver Definición 2.40) de una foliación en una subvariedad invariante por la acción del toro de  $X$ .

### 2.1 Conos, abanicos y variedades tóricas

En esta sección estableceremos algunas nociones básicas sobre la teoría de variedades tóricas. El objetivo es transmitir las ideas necesarias para entender las construcciones posteriores y mantener los tecnicismos al mínimo. Las demostraciones faltantes pueden consultarse en [9].

**Definición 2.1.** Sea  $N \simeq \mathbb{Z}^s$  un reticulado. El *toro asociado al reticulado*  $N$  es  $T_N := N \otimes \mathbb{C}^* \simeq (\mathbb{C}^*)^s$ .

Observemos que todo objeto  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^s$  es el toro asociado a su reticulado  $N$  de grupos uniparamétricos. Llamaremos  $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  al reticulado de caracteres de  $T$  y  $\chi^m : T \rightarrow \mathbb{C}^*$  al caracter asociado a un elemento  $m \in M$ . De aquí en adelante omitiremos las referencias al reticulado cuando esto no traiga confusiones.

**Definición 2.2.** Sea  $N$  un reticulado. Un *cono*  $\sigma$  en  $N$  es un conjunto de la forma

$$\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{R} \geq 0 \right\} \subseteq N \otimes \mathbb{R},$$

donde  $v_1, \dots, v_n \in N$ . La *dimensión* de  $\sigma$  es la dimensión del subespacio más chico que lo contiene. El *conjunto de rayos*  $\sigma(1)$  de  $\sigma$  es el elemento minimal del conjunto ordenado

$$\{S \subseteq \sigma \mid \sigma = \text{Cone}(S)\}.$$

Si  $\sigma$  y  $\tau$  son dos conos, decimos que  $\tau \leq \sigma$  si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ , es decir, si existe un conjunto  $C \subseteq \sigma(1)$  tal que  $\tau = \text{Cone}(C)$ . Decimos que  $\sigma$  es *suave* (resp. *simplicial*) si existe una base de  $N$  (resp. de  $N \otimes \mathbb{R}$ ) que contenga al conjunto  $\sigma(1)$ .

**Definición 2.3.** Un *abanico*  $\Sigma$  en  $N$  es una colección finita de conos estrictamente convexos (que no contienen subespacios no triviales) de  $N$  tal que:

1. Si  $\sigma \in \Sigma$  y  $\tau \leq \sigma$  entonces  $\tau \in \Sigma$ .
2. Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$  entonces  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \leq \sigma_1$  y  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \leq \sigma_2$ .

El *soporte* de  $\Sigma$  es  $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ . Denotaremos  $\Sigma(k)$  al subconjunto de conos de dimensión  $k$  y  $\langle \Sigma \rangle$  al subespacio de  $N \otimes \mathbb{R}$  más chico que contiene a  $|\Sigma|$ .

**Definición 2.4.** Sea  $\sigma$  un cono en  $N$ . El *cono dual* a  $\sigma$  es el cono en  $M$

$$\sigma^\vee = \{\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \mid \phi(\sigma) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

**Definición 2.5.** Una *variedad tórica* es una variedad algebraica normal e irreducible  $X$  provista de un abierto Zariski  $T \subseteq X$  tal que  $T$  es un toro cuya estructura de grupo se extiende a una acción algebraica en  $X$ .

**Proposición 2.6.** Sea  $X$  una variedad afín y  $N \simeq \mathbb{Z}^n$  un reticulado. Son equivalentes:

1.  $X$  es una variedad tórica con toro  $T_N$ .
2. Existe un cono  $\sigma$  en  $N$  tal que  $X = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$ .

En este caso usaremos la notación  $X = U_\sigma$ .

**Ejemplo 2.7.** El espacio afín  $\mathbb{A}^n$  es la variedad tórica con toro  $(\mathbb{C}^*)^n$  definida por el cono  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_n)$  en  $\mathbb{Z}^n = N$ . En efecto, su cono dual es  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1^*, \dots, e_n^*) \subseteq M$  de modo que

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] = \mathbb{C}[e_1^*, \dots, e_n^*] \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

La siguiente proposición indica cómo se comporta esta construcción con respecto al orden simplicial.

**Proposición 2.8.** Sea  $\sigma$  un cono en  $N$  y  $\tau \leq \sigma$ . Si  $r = \dim(\sigma) - \dim(\tau)$ , entonces existen elementos  $m_1, \dots, m_r \in \sigma^\vee \cap M$  (únicos salvo combinaciones lineales) tales que

$$U_\tau \simeq (U_\sigma)_{\chi^{m_1 \dots m_r}}.$$

*Demostración.* Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  y  $r = \dim(\sigma) - \dim(\tau)$ , deben existir  $m_1 \dots m_r \in \sigma^\vee \cap M$  (únicos, salvo combinaciones lineales) satisfaciendo  $\tau = (\bigcap_i \ker(m_i)) \cap \sigma$ . Pero entonces

$$\tau^\vee \cap M = (\sigma^\vee \cap M) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}m_i \right),$$

de modo que  $\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]$  coincide con la localización de  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  en el elemento  $\chi^{m_1 + \dots + m_r}$ .  $\square$

**Ejemplo 2.9.** La recta afín es la variedad tórica afín  $X_\sigma$  asociada al cono  $\sigma = \text{Cone}(1)$  en  $\mathbb{Z}$  de dimensión 1 con una única cara propia  $\tau = \{0\}$ . Los conos duales son  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1^*)$  y  $\tau^\vee = \text{Cone}(e_1^*, -e_1^*)$ , de modo que  $U_\tau \simeq \mathbb{C}^*$ ,  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}$  y la inclusión  $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}$  se corresponde con el abierto de  $\mathbb{C}$  donde la función  $\chi^{e_1}$  es no nula.

En particular, esto nos da lugar a pegar éstos objetos para construir variedades tóricas no necesariamente afines. Si  $\Sigma$  es un abanico en  $N$  y  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ , debe ser  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Sigma$ . Usando la última propiedad, tenemos

$$U_{\sigma_1} \leftrightarrow U_\tau \hookrightarrow U_{\sigma_2}.$$

Con estos datos de pegado, podemos construir a partir del cubrimiento  $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$  una variedad  $X_\Sigma$  para cada abanico  $\Sigma$ .

**Teorema 2.10.** *Sea  $\Sigma$  un abanico en  $N$  y  $X_\Sigma$  la variedad descrita más arriba. Entonces*

1.  $X_\Sigma$  es una variedad tórica normal con toro  $T_N$ .
2.  $X_\Sigma$  es un orbifold si y sólo si todos los conos de  $\Sigma$  son simpliciales.
3.  $X_\Sigma$  es suave si y sólo si todos los conos de dimensión positiva  $\sigma \in \Sigma$  son suaves.
4.  $X_\Sigma$  es completa si y sólo si  $|\Sigma| = N \otimes \mathbb{R}$ .

**Definición 2.11.** El punto distinguido  $\gamma_\sigma \in U_\sigma$  asociado un cono  $\sigma$  es el punto cerrado con ideal maximal

$$\langle \chi^m | m \in \sigma^\vee \cap M \setminus \{0\} \rangle \subseteq \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M].$$

Esta asignación nos permitirá describir completamente la descomposición de  $X$  como unión de  $T_N$ -órbitas:

**Teorema 2.12.** *Sea  $X$  la variedad tórica de dimensión  $n$  asociada al abanico  $\Sigma$  en  $N$ . Entonces*

1. La correspondencia

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow \{T_N - \text{órbitas en } X\} \\ \sigma &\mapsto O(\sigma) := T_N \cdot \gamma_\sigma \end{aligned}$$

es biyectiva.

2. Para cada  $\sigma \in \Sigma$  se tiene  $\dim O(\sigma) = n - \dim(\sigma)$ .
3. La descomposición del abierto  $U_\sigma$  como unión de órbitas es

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\tau).$$

4.  $\tau \leq \sigma$  si y sólo si  $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$  y

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\sigma).$$

Asimismo, estas clausuras también tienen una estructura natural de variedad tórica:

**Proposición 2.13.** *Para cada  $\tau \in \Sigma$ , la clausura  $\overline{O(\tau)}$  es la variedad tórica asociada al abanico*

$$\text{Star}(\tau) = \{\bar{\sigma} \mid \tau \leq \sigma\}$$

en el reticulado cociente  $N(\tau) = N/\langle N \cap \tau \rangle$ , donde  $\bar{\sigma}$  es la imagen de  $\sigma$  por el cociente  $N \rightarrow N(\tau)$ .

## 2.2 Coordenadas homogéneas y sucesiones de Euler

Sea  $X = X_\Sigma$  la variedad tórica suave y completa de dimensión  $n$  asociada al abanico  $\Sigma$  en  $N$  y  $M$  el reticulado de caracteres de su toro  $T$ . La acción de  $T$  en  $X$  induce una acción en el grupo  $Div(X)$  de divisores de  $X$ . El grupo  $Div_T(X)$  de invariantes de esta acción es el grupo libre generado por los elementos  $D_i := \overline{O(v_i)}$ , donde  $\{v_1, \dots, v_{n+s}\} = \Sigma(1)$  es el conjunto de rayos (conos de dimensión 1) de  $\Sigma$ .

El morfismo  $M \rightarrow Div_T(X)$  que a cada elemento  $m \in M$  le asigna el divisor  $div(\chi^m)$  y la restricción del cociente  $Div_T(X) \rightarrow Pic(X)$  dan lugar a una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Div_T(X) \longrightarrow Pic(X) \longrightarrow 0.$$

Ésta es la base fundamental de la construcción de coordenadas homogéneas en  $X$ : escribiendo  $G = Hom(Pic(X), \mathbb{C}^*)$  y aplicando el functor  $Hom(-, \mathbb{C}^*)$  obtenemos una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+s} \longrightarrow T \longrightarrow 1.$$

Es decir, podemos pensar a  $T$  como el cociente de  $(\mathbb{C}^*)^{n+s}$  por el subgrupo  $G$ . La construcción de coordenadas homogéneas en el sentido de [8] es una extensión de esta presentación: es un cociente geométrico  $\pi : \mathbb{C}^{n+s} \setminus Z \rightarrow X$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*)^{n+s} & \longrightarrow & T \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+s} \setminus Z & \xrightarrow{\pi} & X_\Sigma \end{array}$$

conmuta.

**Observación 2.14.** Como  $X$  es suave y tiene un punto fijo por la acción del toro (o equivalentemente,  $\Sigma$  tiene un cono de dimensión  $n$ ) usando [Proposition 4.2.5, [9]] podemos asegurar que  $Pic(X)$  es libre. *A partir de ahora fijaremos un isomorfismo  $Pic(X) \simeq \mathbb{Z}^s$ .* Esta elección induce un isomorfismo canónico  $G \simeq (\mathbb{C}^*)^s$ .

Los detalles de la construcción de este cociente no serán explicados en esta tesis. El lector que no este familiarizado con estos conceptos y desee ampliar la exposición es referido a [Chapter 5, [9]]. A continuación explicaremos las precisiones necesarias para las siguientes secciones. Un hecho



fundamental es que el conjunto  $Z$  es una unión de subespacios lineales coordenados de codimensión mayor o igual que dos. En particular, esto nos dice que el anillo de coordenadas de  $\mathbb{C}^{n+s} \setminus Z$  es el anillo de polinomios en  $n+s$  variables  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+s}]$ .

Como  $Pic(X)$  es un grupo abeliano libre, el morfismo inducido por la evaluación  $ev : Pic(X) \rightarrow Hom(G, \mathbb{C}^*)$  del grupo de Picard en el reticulado de caracteres de  $G$  es un isomorfismo. Usaremos la notación  $\chi^\alpha$  para el caracter inducido por un elemento  $\alpha \in Pic(X)$ . Si miramos con detenimiento el diagrama anterior, podemos deducir que la acción de  $G$  en  $\mathbb{C}^{n+s} \setminus Z$  está dada por

$$g \cdot (p_1, \dots, p_{n+s}) = (\chi^{[D_1]}(g)p_1, \dots, \chi^{[D_{n+s}]}(g)p_{n+s}),$$

donde  $g \in G$  y  $[D_i] \in Pic(X)$  es la clase del divisor  $T$ -invariante  $D_i$ . Habiendo fijado el isomorfismo de la Observación 2.14 podemos describir la acción de una forma más concreta: si reemplazamos el embedding  $G \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+s}$  por el correspondiente morfismo  $(\mathbb{C}^*)^s \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+s}$ , podemos pensar a la imagen de esta aplicación actuando en  $\mathbb{C}^{n+s} \setminus Z$  por matrices diagonales:

$$(t_1, \dots, t_s) \cdot (p_1, \dots, p_{n+s}) = (t_1^{a_1^1} \dots t_s^{a_s^1} p_1, \dots, t_1^{a_1^{n+s}} \dots t_s^{a_s^{n+s}} p_{n+s}),$$

donde  $(a_i^1, \dots, a_i^s) = [D_i] \in Pic(X)$ .

A nivel de anillos de coordenadas, esta acción puede ser diagonalizada simultáneamente, es decir, podemos descomponer

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+s}] = \bigoplus_{\alpha \in Pic(X)} S_\alpha,$$

donde  $S_\alpha = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+s}] \mid f(g \cdot x) = \chi^\alpha(g)f(x)\}$ . El anillo  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+s}]$  equipado con esta graduación es el *anillo de Cox* de  $X$ . Una gran característica de esta graduación es que admite isomorfismos naturales

$$H^0(X, \mathcal{L}) \simeq S_{\mathcal{L}}.$$

En particular, tenemos  $S_0 = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$  siendo que  $X$  es completa.

**Observación 2.15.** Calcular el grado de un elemento no presenta mayores dificultades dado que las funciones coordenadas satisfacen  $\deg(x_i) = [D_i]$ .

Con respecto a la teoría de foliaciones, la ventaja principal de la construcción de coordenadas homogéneas es la *sucesión de Euler generalizada*

$$(2.1) \quad 0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+s} \mathcal{O}_X(-D_i) \longrightarrow Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

y su dual

$$(2.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus s} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+s} \mathcal{O}_X(D_i) \longrightarrow \mathcal{T}X \longrightarrow 0,$$

donde estamos usando el isomorfismo  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^s$  de la Observación 2.14 para obtener  $\text{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus s}$ . La primer flecha en la segunda sucesión se corresponde con los *campos de vectores radiales*

$$R_t = \sum_{i=1}^{n+s} a_i^t x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad 1 \leq t \leq s.$$

Observemos que los coeficientes de éstos campos dependen de la elección hecha en la Observación 2.14. Sea  $\alpha \in \text{Pic}(X)$  y  $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1(\alpha))$ . De aquí en adelante diremos que  $\omega$  es *una forma diferencial torcida de grado  $\alpha$*  y escribiremos  $\deg(\omega) = \alpha$ . Como en el caso proyectivo, podemos usar la sucesión de Euler para describir a  $\omega$  en coordenadas homogéneas de la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+s} A_i(x) dx_i,$$

donde  $A_i \in S_{\alpha - [D_i]}$  y  $\iota_{R_t}(\sum A_i dx_i) = 0$  para cada  $1 \leq t \leq s$ . De la misma manera, toda  $q$ -forma diferencial torcida de grado  $\alpha$  admite una escritura como forma polinomial homogénea

$$\sum_{|I|=q} A_I dx_I,$$

donde  $A_I \in S_{\alpha - \sum_{i \in I} [D_i]}$  y tal que su contracción con cada campo radial  $R_t$  es nula. Análogamente, para cada  $f \in S_{\alpha}$  el grado del campo vectorial afín  $Y = f \frac{\partial}{\partial x_j}$  es  $\deg(Y) = \alpha - \deg(x_j)$ . Con esto en mente, uno puede interpretar la primer sucesión exacta de la siguiente manera: las formas diferenciales en  $X$  se corresponden con formas polinomiales homogéneas  $\omega$  satisfaciendo  $\iota_{R_t} \omega = 0$  para cada campo radial.

Por otra parte, si tensorizamos la sucesión (2) por un elemento  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$  y tomamos cohomología obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{L})^{\oplus s} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+s} H^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D_i)) \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L}}} H^0(X, \mathcal{T}X(\mathcal{L})) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+s} H^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D_i)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

**Observación 2.16.** La imagen del morfismo

$$\rho_{\mathcal{L}} : \bigoplus_{i=1}^{n+s} H^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D_i)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{T}X(\mathcal{L}))$$

de arriba consiste exactamente de los elementos  $Y \in H^0(X, \mathcal{T}X(\mathcal{L}))$  que admiten una descripción en coordenadas homogéneas de la forma  $Y = \sum_{i=1}^{n+s} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , donde  $g_i$  es un polinomio homogéneo de grado  $\deg(g_i) = \mathcal{L} + [D_i]$ . Esta descripción es única a menos de combinaciones lineales de los campos radiales. En las secciones siguientes nos restringiremos a éste tipo de elementos. Por supuesto, si  $H^1(X, \mathcal{L}) = 0$  entonces toda sección global de  $\mathcal{T}X(\mathcal{L})$  es de este tipo. Esto no es demasiado restrictivo si tenemos en cuenta los teoremas de anulamiento de Demazure y Batyrev-Borisov (Theorem 9.2.3 y Theorem 9.2.7 en [9] respectivamente).

**Ejemplo 2.17.**  $\mathbb{P}^n$ . Uno puede describir al espacio proyectivo de dimensión  $n$  como la variedad tórica asociada al abanico completo  $\Sigma$  en  $\mathbb{Z}^n$  con rayos  $\Sigma(1) = \{e_1, \dots, e_n, -e_1 - \dots - e_n\}$ . Si aplicamos la construcción descrita en esta sección a este caso particular, obtenemos la presentación estándar  $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ .

**Ejemplo 2.18.** Sea  $X = Bl_p(\mathbb{P}^n)$  el blow-up del espacio proyectivo de dimensión  $n$  en un punto, digamos  $p = [0 : \dots : 0 : 1]$ . La geometría tórica provee una forma intrínseca de explotar subvariedades  $T$ -invariantes a través de la *subdivisión baricéntrica* del cono correspondiente (ver [Chapter 3, [9]]). Aplicando dicha construcción podemos obtener un cociente geométrico

$$Bl_p(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{C}^{n+2} \setminus Z / (\mathbb{C}^*)^2,$$

donde  $(t_1, t_2) \cdot p = (t_1 p_1, \dots, t_1 p_n, t_2 p_{n+1}, t_1 t_2 p_{n+2})$  y  $Z$  es la unión de las variedades lineales  $V(x_{n+1}, x_{n+2})$  y  $V(x_1, \dots, x_n)$ . Además, el conjunto de hipersuperficies  $T$ -invariantes irreducibles consiste del divisor excepcional  $D_{n+1}$  y la clausura de los hiperplanos usuales en  $\mathbb{P}^n$ . El grupo de Picard de esta variedad es isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$  y la graduación del anillo de Cox  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+2}]$  queda definida por  $\deg(x_i) = (1, 0)$  para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $\deg(x_{n+1}) = (0, 1)$  y  $\deg(x_{n+2}) = (1, 1)$ .

**Ejemplo 2.19.** La superficie de Hirzebruch  $\mathcal{H}_r$  es la variedad tórica definida por el abanico completo con rayos  $\Sigma(1) = \{e_1, e_2, -e_2, -e_1 + r e_2\}$ . En este caso, el cociente correspondiente es

$$\mathcal{H}_r \simeq \mathbb{C}^4 \setminus Z / (\mathbb{C}^*)^2,$$

donde  $Z = V(x_1, x_4) \cup V(x_2, x_3)$  y la acción de  $(\mathbb{C}^*)^2$  está definida por  $(t_1, t_2) \cdot p = (t_1 p_1, t_2 p_2, t_1^r t_2 p_3, t_1 p_4)$ . En cuanto a la graduación, su grupo de Picard es isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$  y mediante un isomorfismo adecuado tenemos

$$\deg(x_1) = (0, 1), \deg(x_2) = (1, 0), \deg(x_3) = (1, r) \text{ y } \deg(x_4) = (0, 1).$$

## 2.3 Algunos lemas sobre formas diferenciales

En esta sección probaremos algunos lemas sobre formas diferenciales que serán necesarios para las demostraciones siguientes. De aquí en adelante usaremos la siguiente notación para hacer los cálculos más amenos: si  $w_1, \dots, w_l$  son campos de vectores, entonces

$$w = w_1 \wedge \dots \wedge w_l \text{ y } \widehat{w}_i = w_1 \wedge \dots \wedge w_{i-1} \wedge w_{i+1} \wedge \dots \wedge w_l.$$

El símbolo  $\Omega$  denotará la  $(n+s)$ -forma afín  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+s}$ . La noción de homogeneidad siempre estará sujeta a la graduación del anillo de Cox de  $X$ .

Comencemos demostrando una variante de la fórmula de Euler que será de mucha utilidad para nuestros cálculos:

**Lema 2.20.** *Sea  $\omega$  una forma diferencial polinomial homogénea de grado  $\deg(\omega) = (c_1, \dots, c_s) \in \text{Pic}(X)$ . Entonces para cada  $1 \leq k \leq s$  vale la igualdad*

$$\iota_{R_k} d\omega = c_k \omega.$$

*Demostración.* Antes de comenzar la demostración recordemos cuál es la relación entre el producto interior y la derivada de Lie. Sea  $Z$  un campo de vectores y  $\eta$  una forma diferencial. La fórmula de Cartan nos dice que

$$(2.3) \quad \mathcal{L}_Z \eta = d\iota_Z \eta + \iota_Z d\eta.$$

Como  $\omega$  desciende a  $X$ , aplicando esta identidad al caso en el que  $Z = R$  y  $\eta = \omega$  obtenemos

$$\iota_{R_k} d\omega = \mathcal{L}_{R_k} \omega = \frac{\partial}{\partial t_k} \Big|_{t=1} \chi^{\deg(\omega)}(t) \omega.$$

La igualdad  $c_k = \frac{\partial}{\partial t_k} \Big|_{t=1} \chi^{\deg(\omega)}(t)$  se sigue de que  $\chi^{\deg(\omega)}(t) = \prod_{i=1}^s t_i^{c_i}$ .  $\square$

Recordemos que una  $q$ -forma diferencial afín  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+s}}^q$  define un mapa  $\omega : \mathcal{TC}^{n+s} \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^{n+s}}^{q-1}$  tal que para cada sección local  $Z$  tenemos  $\omega(Z) = \iota_Z \omega$ . En sintonía con lo dicho en el Capítulo 1, decimos que  $\omega$  es integrable si  $\ker(\omega) \subseteq \mathcal{TC}^{n+s}$  es un subhaz cerrado por el corchete de Lie de campos de vectores, i.e.,  $[\ker(\omega), \ker(\omega)] \subseteq \ker(\omega)$ .

**Lema 2.21.** Sean  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n+s-q}$  campos de vectores polinomiales en  $\mathbb{C}^{n+s}$ . Si  $\omega = \iota_{\mathfrak{X}}\Omega$  es integrable entonces existen funciones racionales  $f_1, \dots, f_{n+s-q}$  tal que

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n+s-q} f_j \iota_{\widehat{\mathfrak{X}_j}} \Omega$$

*Demostración.* Si  $Y$  y  $Z$  son campos de vectores, podemos describir el conmutador de  $\mathcal{L}_Z$  e  $\iota_Y$  a través de la identidad

$$(2.4) \quad [\mathcal{L}_Z, \iota_Y] = \iota_{[Z, Y]}.$$

Sean  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n+s-q}$  campos de vectores satisfaciendo las hipótesis del enunciado. Para cada conjunto ordenado  $J = \{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, n+s-q\}$  de tamaño  $r$  denotaremos  $\mathfrak{X}_J = \mathfrak{X}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{X}_{j_r}$ . Vamos a probar - por inducción en  $r$  - que para cada  $J$  existen funciones racionales  $\{f_I\}_{|I|=r-1}$  tales que

$$d\iota_{\mathfrak{X}_J} \Omega = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n+s-q\} \\ |I|=r-1}} f_I \iota_{\mathfrak{X}_I} \Omega.$$

El lema quedará entonces probado especializando en  $J = \{1, \dots, n+s-q\}$ . Para un conjunto con un sólo elemento la afirmación es trivial, ya que toda  $(n+s)$ -forma es un múltiplo de  $\Omega$ . Supongamos entonces que la afirmación vale para cara  $k < r$  y sea  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$  un conjunto ordenado. Aplicando (2.3) para el caso  $Z = \mathfrak{X}_{j_1}$  y  $\eta = \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{j_r}} \Omega$  vemos que  $d\iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} \eta = \mathcal{L}_{\mathfrak{X}_{j_1}} \eta - \iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} d\eta$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} d\iota_{\mathfrak{X}_J} \Omega &= \left( \mathcal{L}_{\mathfrak{X}_{j_1}} - \iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} d \right) \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{j_r}} \Omega \\ &= \left( \mathcal{L}_{\mathfrak{X}_{j_1}} \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} - \iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} d\iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \right) \iota_{\mathfrak{X}_{j_3}} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{j_r}} \Omega. \end{aligned}$$

La ecuación 2.4 por otro lado nos dice que  $[\mathcal{L}_{\mathfrak{X}_{j_1}}, \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}}] = \iota_{[\mathfrak{X}_{j_1}, \mathfrak{X}_{j_2}]}$  de modo que

$$(\iota_{[\mathfrak{X}_{j_1}, \mathfrak{X}_{j_2}]} + \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \mathcal{L}_{\mathfrak{X}_{j_1}} - \iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} d\iota_{\mathfrak{X}_{j_2}}) \iota_{\mathfrak{X}_{j_3}} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{j_r}} \Omega.$$

Siendo  $\omega = \iota_{\mathfrak{X}}\Omega$  integrable, sabemos que  $[\mathfrak{X}_{j_1}, \mathfrak{X}_{j_2}] \in \ker(\omega)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n+s-q}\}$  puede ser extendido a una base del  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_{n+s})$ -espacio vectorial de campos de vectores racionales en  $\mathbb{C}^{n+s}$  (caso contrario sería  $\omega = 0$  y la afirmación sobre  $d\omega$  se satisfecería trivialmente). Por dualidad, deben existir funciones racionales  $\beta_1, \dots, \beta_{n+s-q}$  tales que  $[\mathfrak{X}_{j_1}, \mathfrak{X}_{j_2}] = \sum_{i=1}^{n+s-q} \beta_i \mathfrak{X}_i$ . Volviendo a la ecuación,

esto nos dice que

$$\begin{aligned} d\iota_{\mathfrak{X}_J} &= \left( \sum_{i=1}^{n+s-q} \beta_i \iota_{\mathfrak{X}_i} + \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \mathcal{L}_{\mathfrak{X}_{j_1}} - \iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} d\iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \right) \iota_{\mathfrak{X}_{j_3}} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{j_r}} \Omega \\ &= \left( \sum_{i=1}^{n+s-q} \beta_i \iota_{\mathfrak{X}_i} + \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} d\iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} + \iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} d - \iota_{\mathfrak{X}_{j_1}} d\iota_{\mathfrak{X}_{j_2}} \right) \iota_{\mathfrak{X}_{j_3}} \dots \iota_{\mathfrak{X}_{j_r}} \Omega. \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis inductiva a los conjuntos  $\{j_1, j_3, \dots, j_r\}$ ,  $\{j_2, \dots, j_r\}$  y  $\{j_3, \dots, j_r\}$  conseguimos la expresión deseada para  $d\iota_{\mathfrak{X}_J}$ . Esto concluye la demostración del Lema.  $\square$

**Lema 2.22.** Sean  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}$  campos de vectores polinomiales homogéneos en  $\mathbb{C}^{n+s}$ . Si  $\omega = \iota_{\mathfrak{X}} \iota_R \Omega$  es integrable y satisface  $\text{codim}(S(\omega)) \geq 2$ , entonces existen campos de vectores polinomiales homogéneos  $\tilde{\mathfrak{X}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{X}}_{n-q}$  tales que  $\deg(\tilde{\mathfrak{X}}_i) = \deg(\mathfrak{X}_i)$  y

1.  $\omega = \iota_{\tilde{\mathfrak{X}}} \iota_R \Omega$ .
2.  $d\omega = \sum_{t=1}^s (-1)^{n-q+t-1} c_t \iota_{\tilde{\mathfrak{X}}} \iota_{\hat{R}_t} \Omega$ ,

donde  $(c_1, \dots, c_s) = \text{deg}(\omega)$ .

*Demostración.* El lema anterior nos garantiza la existencia de funciones racionales  $f_1, \dots, f_{n-q}, a_1, \dots, a_s$  tales que

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n-q} f_j \iota_{\tilde{\mathfrak{X}}_j} \iota_R \Omega + \sum_{t=1}^s a_t \iota_{\tilde{\mathfrak{X}}} \iota_{\hat{R}_t} \Omega.$$

La forma diferencial polinomial  $\iota_{\mathfrak{X}_i} d\omega = (-1)^{i+1} f_i \omega$  es homogénea de grado  $\text{deg}(\omega) + \text{deg}(\mathfrak{X}_i)$  y por lo tanto  $f_i$  es homogéneo de grado  $\text{deg}(\mathfrak{X}_i)$ . Escribamos  $f_i = \frac{h_i}{g_i}$  donde  $h_i$  y  $g_i$  son polinomios sin factores comunes. Multiplicando la última igualdad por  $g_i$  obtenemos

$$g_i \iota_{\mathfrak{X}_i} d\omega = (-1)^{i+1} h_i \omega,$$

y por lo tanto  $\omega$  sea anula a lo largo de  $\{g_i = 0\}$ . Pero entonces nuestra hipótesis sobre  $S(\omega)$  implica que  $g_i \in \mathbb{C}$  y por lo tanto  $f_i$  es un polinomio. Por otro lado, por el Lema 2.20 debe ser

$$\iota_{R_t} d\omega = c_t \omega = (-1)^{n-q+t-1} a_t \omega,$$

y entonces  $a_t = (-1)^{n-q+t-1} c_t \in \mathbb{Z}$ .

Para cada  $1 \leq i \leq n - q$  y para cada elección de  $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{C}$  consideremos el campo de vectores polinomial

$$\tilde{\mathfrak{X}}_i = \mathfrak{X}_i + (-1)^i f_i \sum_{t=1}^s b_t R_t.$$

Los campos radiales tienen grado cero por ser de la forma  $R_t = \sum_{i=1}^{n+s} a_i^t x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , de modo que éstos nuevos elementos son homogéneos de grado  $\deg(\tilde{\mathfrak{X}}_i) = \deg(\mathfrak{X}_i)$ . También satisfacen trivialmente la igualdad  $\omega = \iota_{\tilde{\mathfrak{X}}} \iota_R \Omega$ .

Calculemos entonces  $d\omega$  en términos de estos nuevos campos. Para cada  $1 \leq t \leq s$  el multivector  $\tilde{\mathfrak{X}} \wedge \widehat{R}_t$  es igual a

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} \wedge \widehat{R}_t + \sum_{j=1}^{n-q} (-1)^j f_j \mathfrak{X}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{j-1} \wedge \sum_{k=1}^s b_k R_k \wedge \mathfrak{X}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{n-q} \wedge \widehat{R}_t \\ = \mathfrak{X} \wedge \widehat{R}_t + \sum_{j=1}^{n-q} (-1)^{n-q+t-1} b_t f_j \widehat{\mathfrak{X}}_j \wedge R. \end{aligned}$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^s a_t \iota_{\tilde{\mathfrak{X}}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega &= \sum_{t=1}^s a_t \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega + \sum_{t=1}^s a_t \sum_{j=1}^{n-q} (-1)^{n-q+t-1} b_t f_j \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_j} \iota_R \Omega \\ &= \sum_{t=1}^s a_t \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega + \left( \sum_{t=1}^s a_t (-1)^{n-q+t-1} b_t \right) \sum_{j=1}^{n-q} f_j \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_j} \iota_R \Omega \\ &= \sum_{t=1}^s a_t \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega + \left( \sum_{t=1}^s c_t b_t \right) \sum_{j=1}^{n-q} f_j \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_j} \iota_R \Omega \\ &= d\omega + \left( -1 + \sum_{t=1}^s c_t b_t \right) \sum_{j=1}^{n-q} f_j \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_j} \iota_R \Omega. \end{aligned}$$

Observemos que como  $\omega$  no es la forma nula (y  $X$  es una variedad completa) debe ser  $\deg(\omega) \neq (0, \dots, 0)$  y por lo tanto podemos hacer una elección de escalares  $b_t \in \mathbb{C}$  que satisfaga la ecuación  $\sum_{t=1}^s c_t b_t = 1$  para obtener la expresión deseada para  $d\omega$ .  $\square$

## 2.4 Distribuciones split

A continuación detallaremos algunos aspectos de los objetos centrales de este capítulo: las distribuciones split, i.e., las distribuciones cuyo haz tangente

se descompone como una suma de fibrados de línea. Sea  $\mathcal{D}$  una distribución tal que su haz tangente admite una descomposición

$$\mathcal{T}\mathcal{D} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{O}_X(\alpha_i)$$

para ciertos  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-q} \in \text{Pic}(X)$ . Cada sumando define un morfismo  $\mathcal{O}_X(\alpha_i) \rightarrow \mathcal{T}X$  que puede ser representado por un campo de vectores torcido  $\mathfrak{X}_i \in H^0(X, \mathcal{T}X(-\alpha_i))$ . Así, cada stalk  $\mathcal{T}\mathcal{D}_x$  es el  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo libre generado por  $\{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}\}$ . Si además éstos elementos admiten una descripción como campos de vectores polinomiales homogéneos (ver Observación 2.16), entonces  $\mathcal{D}$  es la distribución inducida por la forma polinomial homogénea

$$\omega_{\mathcal{D}} = \iota_{\mathfrak{X}} \iota_R dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+s} \in H^0(X; \Omega_X^q(\beta)),$$

donde  $\beta = \sum \alpha_i - \omega_X$ .

**Observación 2.23.** Si en cambio comenzamos con campos de vectores polinomiales  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}$  homogéneos tales que  $\omega = \iota_{\mathfrak{X}} \iota_R dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+s}$  no se anula en codimensión 1, entonces la distribución de codimensión  $q$  asociada  $\mathcal{D}_\omega$  satisface

$$\mathcal{T}\mathcal{D}_\omega \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{O}_X(\alpha_i),$$

donde  $\alpha_i = -\deg(\mathfrak{X}_i)$ . Esto se debe a que la hipótesis sobre  $S(\omega)$  nos asegura que el morfismo inducido por los campos de vectores  $\bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{O}_X(\alpha_i) \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{D}_\omega$  es un isomorfismo en codimensión 1 (y por lo tanto es un isomorfismo).

Una de las características fundamentales de éste tipo de distribuciones es que su conjunto singular  $S(\mathcal{D})$  es una variedad determinantal muy particular. Sea  $A(\mathfrak{X})$  la matriz cuyas columnas son los coeficientes de los campos polinomiales  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}, R_1, \dots, R_s$ . Por dualidad,

$$(\iota_{\mathfrak{X}} \iota_R dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+s})(p) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{X} \wedge R(p) = 0.$$

El conjunto singular coincide entonces con el lugar donde los campos de vectores son linealmente dependientes, es decir, el lugar donde la matriz  $A(\mathfrak{X})$  baja el rango. Equivalentemente,

$$S(\mathcal{D}) = V\left(\delta_1, \dots, \delta_{\binom{n+s}{q}}\right)$$

donde los elementos  $\delta_i$  son los  $(n+s-q) \times (n+s-q)$ -menores de  $A(\mathfrak{X})$ . La siguiente proposición es una consecuencia directa del Teorema de Hilbert-Schaps (Theorem 5.1, [1]):



**Proposición 2.24.** *Sea  $\mathcal{D}$  una distribución split de codimensión 1 en una variedad  $X$  tórica suave y completa tal que  $\text{codim}(S(\mathcal{D})) = 2$ . Entonces  $S(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}^{n+s}$  es Cohen-Macaulay.*

Con esto en mente, podemos dar una descripción del conjunto singular de una foliación split de codimensión 1 genérica en términos de su conjunto de Kupka de la siguiente manera:

**Proposición 2.25.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación split de codimensión 1 en una variedad tórica suave y completa de dimensión  $n \geq 3$  tal que  $S(\mathcal{F})$  satisface  $\text{codim}(S(\mathcal{F})) = 2$  y  $\text{codim}(S(\mathcal{F}) \setminus K(\mathcal{F})) \geq 3$ . Entonces  $S(\mathcal{F}) = \overline{K(\mathcal{F})}$ .*

*Proof.* Por la Proposition 2.24 sabemos que el conjunto singular de  $\mathcal{F}$  es equidimensional. Además, el conjunto de Kupka de una foliación holomorfa en una variedad compleja de dimensión  $n \geq 3$  es una subvariedad suave de codimensión 2 siempre que  $\text{codim}(S(\mathcal{F})) \geq 2$  (ver Proposição 1.4.1 en [20]). En particular, la hipótesis sobre la codimensión de  $S(\mathcal{F}) \setminus K(\mathcal{F})$  implica que el conjunto singular satisface  $S(\mathcal{F}) = \overline{K(\mathcal{F})}$ .  $\square$

## 2.5 Estabilidad

En esta sección probaremos que las foliaciones con haz tangente split tienen interior no vacío en los espacios de distribuciones/foliaciones. Esto nos permitirá construir componentes irreducibles cuyo punto genérico es un pull-back lineal de una cierta subvariedad  $T$ -invariante.

### Foliaciones split

Las ideas desarrolladas en [12] serán de mucha utilidad: definiremos una parametrización algebraica análoga del conjunto de foliaciones (resp. distribuciones) de codimensión 1 (resp. codimensión  $q \geq 2$ ) y veremos que su diferencial en un punto genérico es sobreyectivo. Esta misma estrategia también fue usada en [10] y [11]. Como mencionamos anteriormente, vamos a restringirnos a los campos de vectores torcidos que admiten una representación como campos polinomiales homogéneos. Seguiremos usando la notación  $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_l$ ,  $\widehat{w}_i = w_1 \wedge \cdots \wedge w_{i-1} \wedge w_{i+1} \wedge \cdots \wedge w_l$  para campos de vectores  $w_1, \dots, w_l$  y  $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+s}$  establecida previamente.

Sea  $1 \leq q \leq n$  un entero y  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-q} \in \text{Pic}(X)$  elementos tales que  $h^1(X, \mathcal{O}_X(-\alpha_i)) = 0$  para cada  $1 \leq i \leq n - q$ . La Observación 2.16 implica que cada elemento en  $H^0(X, \mathcal{T}X(-\alpha_i))$  puede ser descrito como un campo de vectores polinomial homogéneo (de manera única salvo combinaciones lineales de los campos radiales).

Sea  $V_i$  el espacio de campos de vectores polinomiales homogéneos  $\mathfrak{X}_i$  de grado  $\deg(\mathfrak{X}_i) = -\alpha_i$ . Consideremos la aplicación multilinear

$$\Phi : \bigoplus_{i=1}^{n-q} V_i \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^q(\sum \alpha_i - \omega_X))$$

definida por  $(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}) \mapsto \iota_{\mathfrak{X}} \iota_R \Omega$ . El diferencial de  $\Phi$  en el punto  $\mathfrak{X}$  es

$$d\Phi(\mathfrak{X})(Z_1, \dots, Z_{n-q}) = \sum_{j=1}^{n-q} (-1)^{j-1} \iota_{Z_j} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_j} \iota_R \Omega.$$

En efecto, si  $\varepsilon$  es un parámetro tal que  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q})$  y  $Z = (Z_1, \dots, Z_{n-q})$  tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{X} + \varepsilon Z) &= \iota_{(\mathfrak{X}_1 + \varepsilon Z_1)} \cdots \iota_{(\mathfrak{X}_{n-q} + \varepsilon Z_{n-q})} \iota_R \Omega \\ &= \Phi(\mathfrak{X}) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-q} \iota_{\mathfrak{X}_1} \cdots \iota_{\mathfrak{X}_{j-1}} \iota_{\varepsilon Z_j} \iota_{\mathfrak{X}_{j+1}} \cdots \iota_{\mathfrak{X}_{n-q}} \iota_R \Omega \\ &= \Phi(\mathfrak{X}) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-q} (-1)^{j-1} \iota_{Z_j} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_j} \iota_R \Omega. \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{U}$  el abierto de  $H^0(X, \Omega_X^q(\sum \alpha_i - \omega_X))$  donde  $\text{codim}(S(\mathcal{D})) \geq 2$ . La Observación 2.23 y la discusión que la precede establecen que el conjunto de distribuciones split con haz tangente isomorfo a  $\bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{O}_X(-\alpha_i)$  coincide con la imagen de  $\Phi|_{\Phi^{-1}\mathcal{U}}$ .

**Observación 2.26.** Como fue mencionado en la prueba de la Proposición 2.25, por [Proposition 1.4.1, [20]] toda foliación split  $\mathcal{F}$  de codimensión 1 tal que  $\text{codim}(S(\mathcal{F})) = 2$  satisface  $\text{codim}(K(\mathcal{F})) = 2$ . El siguiente teorema muestra que la imagen de  $\Phi$  contiene un entorno de  $\mathcal{F}$  si toda componente de codimensión 2 de  $S(\mathcal{F})$  es genéricamente de tipo Kupka.

**Teorema 2.27.** *Sea  $X$  una variedad tórica completa de dimensión  $n \geq 3$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \text{Pic}(X)$  tal que  $h^1(X, \mathcal{O}_X(-\alpha_i)) = 0$  para cada  $1 \leq i \leq n-1$ . Entonces para todo  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^1(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  satisfaciendo las condiciones  $\text{codim}(S(\mathcal{F}) \setminus \overline{K(\mathcal{F})}) \geq 3$  y*

$$\mathcal{T}\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_X(\alpha_i)$$

*existe un abierto Zariski  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}^1(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  que contiene a  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{T}\mathcal{F}' \simeq \mathcal{T}\mathcal{F}$  para cada  $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F} = [\omega] \in \mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^1(\sum \alpha_i - \omega_X))$  un elemento que satisface las hipótesis del teorema. Sean  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-1}$  campos de vectores polinomiales homogéneos tales que

$$\omega = \iota_{\mathfrak{X}} \iota_R \Omega.$$

Por el Lema 2.22, podemos asumir que  $d\omega = \sum_{t=1}^s (-1)^{n-q+t-1} c_t \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega$ . Supongamos (sin pérdida de generalidad) que  $c_1 \neq 0$  y definamos para cada  $2 \leq i \leq s$  el elemento

$$R'_i = R_i + \frac{c_i}{c_1} R_1.$$

Estos nuevos campos de vectores satisfacen  $\sum_t (-1)^{t-1} c_t \widehat{R}_t = c_1 R'_2 \wedge \dots \wedge R'_s$  y por lo tanto

$$d\omega = \pm c_1 \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{R'} \Omega.$$

Sea  $\eta$  un vector tangente al espacio  $\mathcal{F}^1(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  en el punto  $\mathcal{F}$ , es decir, una 1-forma homogénea de grado  $\sum \alpha_i - \omega_X$  tal que la deformación de primer orden  $\omega_\varepsilon := \omega + \varepsilon \eta$  satisface la ecuación de Frobenius:

$$\omega_\varepsilon \wedge d\omega_\varepsilon = 0 \pmod{\varepsilon^2}.$$

Como  $\omega$  cumple  $\omega \wedge d\omega = 0$ , esto es equivalente a

$$\eta \wedge d\omega + \omega \wedge d\eta = 0.$$

Derivando esta ecuación podemos concluir que  $d\omega \wedge d\eta = 0$ . Luego, usando [Lemma 3.1, [12]] obtenemos una descripción de  $d\eta$  en la forma

$$d\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \iota_{Y_i} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_i} \iota_{R'} \Omega + \sum_{t=2}^s \iota_{Z_t} \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega,$$

donde  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  y  $Z_2, \dots, Z_s$  son campos de vectores polinomiales. Reemplazando  $Y_k$  (resp.  $Z_j$ ) por su componente homogénea de grado  $\deg(\mathfrak{X}_i)$  (resp.  $\deg(R_j) = 0$ ) si fuera necesario, podemos suponer que estos nuevos campos son homogéneos y satisfacen  $\deg(Y_i) = \deg(\mathfrak{X}_i)$  and  $\deg(Z_t) = 0$ . La identidad que involucra a  $d\eta$  seguirá siendo cierta porque es una igualdad en cada componente homogénea. Contrayendo con  $R_1$ , por el Lema 2.20 debe ser

$$\pm c_1 \eta = \iota_{R_1} d\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \iota_{Y_i} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_i} \iota_{R_1} \Omega + \sum_{t=1}^s \iota_{Z_t} \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega.$$

Como  $\eta$  desciende a  $X$  tenemos que para cada  $1 \leq j \leq s$

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_{R_j} \eta = \iota_{R_j} \left( \pm c_1^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \iota_{Y_i} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_i} \iota_{R_1} \Omega + \sum_{t=1}^s \iota_{Z_t} \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_t} \Omega \right) \\ &= \pm c_1^{-1} \iota_{R_j} \iota_{Z_j} \iota_{\mathfrak{X}} \iota_{\widehat{R}_j} \Omega = \pm c_1^{-1} \iota_{Z_j} \omega, \end{aligned}$$

y por lo tanto  $Z_j \in \ker(\omega)$ . Esto quiere decir que existen polinomios homogéneos  $f_1^j, \dots, f_{n-1}^j, g_1^j, \dots, g_s^j$  tales que  $Z_j = \sum_i f_i^j \mathfrak{X}_i + \sum_k g_k^j R_k$ . Pero entonces

$$\pm c_1 \eta = \sum_{i=1}^{n-1} \iota_{Y_i} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_i} \iota_R \Omega + \left( \sum_{j=1}^s g_j^j \right) \omega.$$

Observemos que  $g := \sum_j g_j^j$  tiene grado cero, de modo que  $g \in \mathbb{C}$ . Como  $g\omega = 0$  in  $\mathcal{T}_{[\omega]} \mathcal{F}^1(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$ , podemos concluir que

$$\eta = \pm c_1^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \iota_{Y_i} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_i} \iota_R \Omega$$

está en la imagen del diferencial de  $\Phi$  en el punto  $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-1})$ .

Hemos probado que el diferencial de nuestra parametrización en un punto genérico es sobreyectivo. Al igual que en el final de la demostración de [Theorem 1, [12]], esto es suficiente para asegurar que la imagen de  $\Phi$  contiene un entorno de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}^1(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$ .  $\square$

**Observación 2.28.** En [Section 9, [27]], el autor da una demostración compacta de la estabilidad de la familia de foliaciones split en los espacios de moduli de foliaciones de codimensión 1 en los espacios proyectivos. El punto clave del argumento es observar que el problema de estabilidad del tipo de isomorfismo del haz tangente se vuelve más abordable luego de dualizar (tomar anuladores). Para que esto sea posible uno primero debe asegurarse de que una foliación split genérica se encuentra en el abierto donde la aplicación  $i\text{Pf}^1 \dashrightarrow \text{Inv}^1$  es una equivalencia birracional. Usando la Proposición 2.25 uno puede usar exactamente el mismo argumento para probar:

**Teorema 2.29.** *Sea  $X$  una variedad tórica suave y proyectiva y*

$$0 \longrightarrow I(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega_{X \times S|S}^1 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^1 \longrightarrow 0$$

*una familia playa de sistemas de Pfaff de codimensión 1. Supongamos que  $0 \rightarrow I(\mathcal{F})_s \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^1 \rightarrow 0$  define una foliación con cuyo haz tangente admite un isomorfismo  $\mathcal{T}\mathcal{F}_s \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_i$  tal que  $h^1(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j^{-1}) = 0$  para cada  $i, j$ . Si la codimensión de  $S(\mathcal{F}_s) \setminus \overline{K(\mathcal{F}_s)}$  en  $X$  es mayor que 2, entonces todos los miembros de la familia son split.*

En codimensión superior, la condición de ser localmente descomponible fuera de su lugar singular es no trivial (y por lo tanto los correspondientes espacios de distribuciones no son abiertos de variedades lineales). Bajo las hipótesis adecuadas, el tipo split del haz tangente sigue siendo estable.

**Teorema 2.30.** *Sea  $q \geq 2$  un entero,  $X$  una variedad tórica completa de dimensión  $n \geq 3$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-q} \in \text{Pic}(X)$  tales que  $h^1(X, \mathcal{O}_X(-\alpha_i)) = 0$  para cada  $1 \leq i \leq n-q$ . Entonces para cada distribución  $\mathcal{D} \in \mathcal{D}^q(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  satisfaciendo  $\text{codim}(S(\mathcal{D})) \geq 3$  y*

$$\mathcal{T}\mathcal{D} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{O}_X(\alpha_i)$$

*existe un abierto Zariski  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}^q(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  que contiene a  $\mathcal{D}$  tal que  $\mathcal{T}\mathcal{D}' \simeq \mathcal{T}\mathcal{D}$  para cada  $\mathcal{D}' \in \mathcal{U}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D} = [\omega] \in \mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^q(\sum \alpha_i - \omega_X))$  un elemento que satisface las hipótesis del teorema y  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n-q}$  campos de vectores polinomiales homogéneos tales que

$$\omega = \iota_{\mathfrak{X}} \iota_R \Omega.$$

Sea  $\eta$  un vector tangente al espacio  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{D}^q(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  en el punto  $\mathcal{D}$ , i.e., una  $q$ -forma homogénea de grado  $\sum \alpha_i - \omega_X$  tal que  $\omega_\varepsilon := \omega + \varepsilon\eta$  satisface las ecuaciones de Plücker

$$\iota_v(\omega_\varepsilon) \wedge \omega_\varepsilon = 0 \pmod{\varepsilon^2} \quad \forall v \in \bigwedge^{q-1} \mathcal{T}\mathbb{C}^{n+s}.$$

Como  $\omega$  satisface esta igualdad, esto es equivalente a

$$\iota_v(\eta) \wedge \omega + \iota_v(\omega) \wedge \eta = 0 \quad \forall v \in \bigwedge^{q-1} \mathcal{T}\mathbb{C}^{n+s}.$$

Podemos aplicar entonces [Lemma 3.2, [12]] (y reemplazar cada nuevo campo de vectores por su componente homogénea del grado correspondiente) para conseguir una escritura de  $\eta$  de la forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{n-q} \iota_{Y_i} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_i} \iota_R \Omega + \sum_{t=1}^s \iota_{Z_t} \iota_{\widehat{\mathfrak{X}}_t} \iota_{R_t} \Omega,$$

donde  $Y_1, \dots, Y_{n-q}$  y  $Z_2, \dots, Z_s$  son campos de vectores polinomiales homogéneos de grado  $\deg(Y_i) = \deg(\mathfrak{X}_i)$  y  $\deg(Z_t) = 0$ . Si contraemos a  $\eta$  con  $R_j$  obtenemos la igualdad

$$\iota_{R_j} \eta = \iota_{Z_j} \omega = 0.$$

Desde aquí se puede concluir como en la demostración anterior.  $\square$

**Observación 2.31.** La hipótesis sobre el anulamiento de  $h^1(X, \mathcal{O}_X(-\alpha_i))$  en los teoremas 2.27 y 2.30 se piden para toda distribución  $\mathcal{D}$  con haz tangente

$$\mathcal{T}\mathcal{D} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-q} \mathcal{O}_X(\alpha_i)$$

sea inducida por un elemento de la forma  $\omega_{\mathcal{D}} = \iota_{\mathfrak{x}_1} \dots \iota_{\mathfrak{x}_{n-q}} \iota_R \Omega$  para ciertos campos de vectores polinomiales homogéneos  $\mathfrak{x}_i$  de grado  $\deg(\mathfrak{x}_i) = -\alpha_i$ . Las demostraciones de éstos teoremas también prueban la siguiente afirmación: si éstos grupos de cohomología no se anulan pero  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{F}$ ) satisface las hipótesis correspondientes respecto a su lugar singular y resulta estar inducida por una forma diferencial de éste tipo, entonces existe un entorno  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}^q(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  de  $\mathcal{D}$  (resp. un entorno  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}^1(X, \sum \alpha_i - \omega_X)$  de  $\mathcal{F}$ ) tal que lo mismo vale para cada elemento de  $\mathcal{U}$ .

### Pullbacks lineales

En [12] la estabilidad de las foliaciones con haz tangente split es usada para probar que existen componentes irreducibles de los espacios  $\mathcal{F}^q(\mathbb{P}^{n+m}, d)$  cuyos elementos genéricos son un pullback de una foliación de grado  $d$  por una proyección lineal  $\mathbb{P}^{n+m} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ . El objetivo de esta sección es generalizar esta afirmación al contexto de variedades tóricas. Primero, analicemos los ingredientes.

En los espacios proyectivos, los elementos  $D_i$  son linealmente equivalentes y todo campo de vectores  $Z \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}\mathbb{P}^n(-D_i))$  tiene - en coordenadas homogéneas - coeficientes constantes. Más aún, la intersección de  $k$  elementos de este tipo resulta una copia de  $\mathbb{P}^{n-k}$  linealmente embebida. Por más de que este fenómeno es deseable para nuestros propósitos, no podemos esperar encontrar este tipo de comportamiento en una variedad tórica suave arbitraria. Es por ello que vamos a focalizarnos en una clase especial de divisores  $T$ -invariantes.

El conjunto de fibrados de línea efectivos  $\text{Eff}(X)$  es el cono de dimensión  $s$  en reticulado  $\text{Pic}(X)$  generado por las clases de los elementos  $D_1, \dots, D_{n+s}$ . Vamos a definir la siguiente relación en  $\text{Pic}(X)$  :

$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \notin \text{Eff}(X).$$

**Definición 2.32.** Sea  $D_j$  una hipersuperficie irreducible  $T$ -invariante. Decimos que  $D_j$  es *maximal* si para cada  $1 \leq i \leq n+s$  se tiene  $[D_i] \prec [D_j]$  o bien  $[D_i] = [D_j]$ .

Observemos que como  $X$  es una variedad completa, para  $\alpha, \beta \in \text{Pic}(X)$  debe ser  $\alpha \prec \beta$ ,  $\beta \prec \alpha$  o  $\alpha = \beta$ . La definición anterior puede ser expresada en términos de secciones globales como

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D_i - D_j)) = 0$$

para cada  $D_j \not\sim D_i$ .

**Proposición 2.33.** *Toda variedad tórica admite un divisor maximal.*

*Proof.* Sea  $m$  el número de caras de dimensión  $(s-1)$  de  $\text{Eff}(X)$  y  $\phi_1, \dots, \phi_m$  un conjunto de operadores lineales que las define, es decir, aplicaciones lineales  $\phi_i : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\phi_i(x) \geq 0$  para todo  $x \in \text{Eff}(X)$  y tales que  $\{\phi_i(x) = 0\} \cap \text{Eff}(X)$  es una cara de dimensión  $(s-1)$  de  $\text{Eff}(X)$ . Sea  $Y$  el espacio vectorial  $\mathbb{R}^m$  provisto del orden lexicográfico. Consideremos la función  $\phi : \{1, \dots, n+s\} \rightarrow Y$  tal que

$$k \mapsto (\phi_1([D_k]), \dots, \phi_m([D_k])).$$

Claramente  $\phi$  debe tener un máximo en algún elemento  $k_0$ . Observemos que como  $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Eff}(X)) = s$ , los elementos  $\phi_i$  generan el espacio  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ . En particular, para cada  $1 \leq i \leq n+s$  debe ser  $[D_i] = [D_{k_0}]$  o bien  $\phi_j(i) < \phi_j(k_0)$  para algún  $j$ . En el segundo de los casos,  $\phi_j([D_i - D_{k_0}]) < 0$  y por lo tanto  $[D_i] - [D_{k_0}] \notin \text{Eff}(X)$ . Luego,  $[D_{k_0}]$  es maximal, lo que prueba la proposición.  $\square$

**Observación 2.34.** Si  $D_i$  es maximal y linealmente equivalente a un cierto  $D_j$ , entonces  $D_j$  también es maximal.

Usaremos la notación  $\Delta(i)$  para el conjunto de índices  $j$  tales que  $D_j$  es equivalente a  $D_i$ . Veamos que la noción de maximalidad se lleva bien con algunas construcciones básicas:

**Proposición 2.35.** *Sea  $X_1$  y  $X_2$  variedades tóricas suaves y completas. Si  $D$  es maximal en  $X_1$ , entonces  $D \times X_2$  es maximal en  $X_1 \times X_2$ .*

*Proof.* Recordemos que la variedad tórica  $X_1 \times X_2$  tiene a  $T_1 \times T_2$  por toro abierto (aquí  $T_1$  y  $T_2$  son los toros de  $X_1$  y  $X_2$  respectivamente) con la acción natural. Así, todo divisor  $T_1 \times T_2$ -invariante es de la forma  $D \times X_2$  o  $X_1 \times D$  para algún divisor  $T_i$ -invariante  $D$ . Con esto en mente, la proposición se sigue de la fórmula de Künneth.  $\square$

**Ejemplo 2.36.** El espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  tiene una única clase (maximal) de hipersuperficies irreducibles  $T$ -invariantes.

**Ejemplo 2.37.** A partir del Ejemplo 2.18 sabemos que el anillo de Cox de  $Bl_p(\mathbb{P}^n)$  es  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+2}]$  equipado con la graduación  $\deg(x_i) = (1, 0)$ ,  $\deg(x_{n+1}) = (0, 1)$  and  $\deg(x_{n+2}) = (1, 1)$ . En este caso, vemos que el único elemento maximal es  $D_{n+2} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ , que resulta ser el único de los hiperplanos coordenados en  $\mathbb{P}^n$  tal que  $p = [1 : 0 : \dots : 0] \notin D_i$ . Más aún,  $D_{n+2}$  es numéricamente efectivo de modo que por el teorema de anulamiento de Batyrev y Borisov tenemos  $h^1(X, \mathcal{O}_X(-D_{n+2})) = 0$ .

Este último ejemplo es un caso particular de un fenómeno general, como se puede ver en la siguiente proposición:

**Proposición 2.38.** *Sea  $X$  una variedad tórica suave y completa de dimensión  $n \geq 2$ . Si  $D$  es maximal en  $X$  y  $p \in X \setminus D$  es un punto fijo por la acción del toro, entonces  $D$  es maximal en  $Bl_p(X)$ .*

*Proof.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $p$  es el punto distinguido asociado al cono  $\sigma = Cone(e_1, \dots, e_n)$ . Así, la hipótesis  $p \notin D$  es equivalente a que  $D$  no sea el divisor asociado a alguno de los rayos  $e_i$ . Recordemos que el blowup  $Bl_p(X) \rightarrow X$  puede ser construido a partir de la subdivisión baricéntrica de  $\sigma$  [Proposition 3.3.15, [9]], de modo que el único nuevo divisor  $T$ -invariante es el divisor excepcional  $E$  asociado al (único) nuevo rayo  $e_1 + \dots + e_n$ . Como el isomorfismo  $Bl_p(X) \setminus E \rightarrow X \setminus \{p\}$  manda a los  $D_i$  en sí mismos, la restricción de funciones racionales induce una inyección

$$H^0(Bl_p(X), \mathcal{O}_{Bl_p(X)}(D_i - D)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D_i - D)),$$

que es cero por hipótesis. En cuanto al divisor excepcional, las secciones globales de  $\mathcal{O}_{Bl_p(X)}(E - D)$  se restringen a elementos en  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0$ , que es nulo por ser  $X$  is completa.  $\square$

**Observación 2.39.** Si  $\{D_i\}_{i \in S}$  es un conjunto de elementos tal que la intersección  $D_S := \bigcap_{i \in S} D_i$  es no vacía y  $\tau = Cone(\rho_i | i \in S)$ , entonces la Proposición 2.13 nos dice que  $D_S$  es la variedad tórica suave y completa asociada al abanico

$$Star(\tau) = \{\bar{\sigma} \mid \tau \leq \sigma.\}$$

en el reticulado cociente  $N(\tau) = N/\langle N \cap \tau \rangle$ . En particular, los divisores  $T_{N(\tau)}$ - invariantes de  $D_S$  son exactamente las intersecciones con el resto de los  $T$ -divisores de  $X$ . Usaremos la notación  $\pi_S : \mathbb{C}^{m_S} \setminus Z_S \rightarrow D_S$  para el cociente correspondiente a  $D_S$ .

Recordemos que la preimagen del divisor  $D_i$  por el morfismo  $\pi$  está dada por la ecuación  $\{x_i = 0\} \subseteq \mathbb{C}^{n+s} \setminus Z$ . Para cada conjunto  $\{D_i\}_{i \in S}$  que



consista de elementos maximales vamos a considerar un tipo específico de proyecciones  $X \dashrightarrow D_S$ . Por supuesto, debemos asumir que la intersección es no vacía (o equivalentemente que existe algún cono  $\sigma \in \Sigma$  que contiene a los correspondientes rayos). Si  $\{T_j\}_{j \notin S}$  son operadores linealmente independientes en  $\mathbb{C}^{n+s}$ , homogéneos con respecto a la graduación de  $X$  de grado  $\deg(T_j) = \deg(x_j)$  (esto es,  $T_j$  depende sólo de las variables en  $\Delta(j)$ ) podemos definir la proyección  $p : \mathbb{C}^{n+s} \rightarrow V(x_k | k \in S)$  tal que para cada  $x \in \mathbb{C}^{n+s}$  vale

$$p(x)_j = \begin{cases} T_j(x) & \text{if } j \notin S \\ 0 & \text{if } j \in S. \end{cases}$$

La elección de los grados nos garantiza que el morfismo es  $G$ -equivariante. En efecto, para cada  $g \in G$  y  $j \notin S$  tenemos

$$p(g \cdot x)_j = T_j(g \cdot x) = \chi^{[D_j]}(g)T_j(x)$$

y por lo tanto  $p(g \cdot x) = g \cdot p(x)$ . Esto quiere decir que  $p$  desciende a  $X$ , es decir, tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+s} \setminus Z & \xrightarrow{p} & V(\{x_i\}_{i \in S}) \setminus Z \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X & \dashrightarrow & D_S. \end{array}$$

La Observación 2.39 nos dice que la información en las variables correspondientes a los divisores que no intersecan a  $D_S$  puede ser desechada: el morfismo  $p : X \rightarrow D_S$  se levanta (en coordenadas de Cox) al mapa

$$\hat{p} : \mathbb{C}^{n+s} \setminus Z \dashrightarrow \mathbb{C}^{m_S} \setminus Z_S$$

inducido por los operadores  $T_i$  tales que  $D_i \cap D_S \neq \emptyset$ . El conjunto afín  $B(p) \subseteq \mathbb{C}^{n+s} \setminus Z$  donde  $p$  no está definido es exactamente  $p^{-1}(Z_S)$ . En particular, su codimensión es mayor o igual que 2 si  $p$  es genérica.

**Definición 2.40.** Sea  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  y  $p : X \dashrightarrow D_S$  un morfismo dominante. Decimos que  $p$  es una *proyección lineal equivariante* si admite una descripción como la de la discusión precedente.

Sea  $\omega$  una forma diferencial homogénea (con respecto a la graduación de  $D_S$ ) en  $\mathbb{C}^{m_S}$  y  $p^*\omega$  su pullback por una proyección lineal equivariante. Observemos que tras un cambio de coordenadas *equivariante* (es decir, un automorfismo de  $X$ ) podemos suponer que  $p$  es la proyección estándar, de modo que podemos concluir que  $\text{codim}(S(p^*\omega)) = \text{codim}(S(\omega))$ .

Con estas definiciones ya establecidas, podemos dar una mejor descripción de las foliaciones cuyo splitting involucra elementos maximales. Combinando los Teoremas 2.27 y 2.30 con las construcciones de más arriba, podemos señalar algunas componentes específicas de los espacios  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$ . Tengamos en mente que toda foliación de codimensión  $q \geq 1$  en una superficie es split.

**Corolario 2.41.** *Sea  $X$  una variedad tórica completa de dimensión  $n \geq 3$  y  $\{D_i\}_{i \in S}$  un conjunto de elementos maximales tales que  $\dim(D_S) \geq 2$ . Sea  $\beta \in \text{Pic}(D_S)$ ,  $\alpha \in \text{Pic}(X)$  su pullback por una proyección lineal equivariante genérica y  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}^q(D_S, \beta)$  una componente irreducible. Si el elemento genérico de  $\mathcal{C}$  satisface las hipótesis del Teorema 2.27 (para  $q = 1$ ) o el Teorema 2.30 (para  $q > 1$ ) entonces existe una componente irreducible de  $\mathcal{F}^q(X, \alpha)$  cuyo elemento genérico es un pullback lineal de un elemento en  $\mathcal{C}$ .*

*Proof.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $S = \{1, \dots, d\}$  y que los divisores invariantes que intersecan a  $D_S$  son  $D_1, \dots, D_{m_S+d}$ . Para una proyección lineal equivariante genérica,  $p$  y un elemento genérico  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$  tal que

$$\mathcal{T}\mathcal{G} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-d-q} \mathcal{O}_{D_S}(\alpha_i),$$

el haz tangente a la foliación pullback  $\mathcal{F} = p^*\mathcal{G}$  es

$$\mathcal{T}\mathcal{F} \simeq \left( \bigoplus_{i=1}^{n-d-q} \mathcal{O}_X(p^*\alpha_i) \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_X(D_i) \right),$$

donde los nuevos términos se corresponden con las fibras de  $p$ . Veamos porqué esta afirmación es cierta: como dijimos anteriormente, tras el cambio de coordenadas equivariante  $x_j \mapsto T_j(x)$  para  $j \notin S$  podemos suponer que  $p$  es la proyección estándar. Sean  $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_{n-d-q}$  campos de vectores torcidos en  $D_S$  de grado  $\deg(\bar{Z}_k) = -\alpha_k \in \text{Pic}(D_S)$  induciendo el splitting de  $\mathcal{T}\mathcal{G}$ . Por hipótesis, éstos elementos deben admitir una representación como campos de vectores polinomiales en  $\mathbb{C}^{m_S}$ , homogéneos (con respecto a la graduación del anillo de Cox de  $D_S$ , con variables  $z_1, \dots, z_{m_S}$ ) de la forma

$$\bar{Z}_k = \sum_{j=1}^{m_S} B_j^k(z) \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

La descripción de  $p$  en coordenadas homogéneas  $\mathbb{C}^{n+s} \setminus Z \dashrightarrow \mathbb{C}^{m_S} \setminus Z_S$  está

dada por al fórmula  $\hat{p}(x_1, \dots, x_{n+s}) = (x_{d+1}, \dots, x_{m_s+d})$ . Como el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} V(\{x_i\}_{i \in S}) \setminus Z \xrightarrow{\hat{p}} \mathbb{C}^{m_s} \setminus Z_S \\ \downarrow \pi \qquad \qquad \qquad \downarrow \pi_S \\ D_S \xlongequal{\qquad \qquad \qquad} D_S \end{array}$$

es conmutativo, el haz tangente a  $(\pi|_{V(\{x_i\}_{i \in S})})^* \mathcal{G}$  está generado por los campos radiales  $R_1, \dots, R_s$  y los elementos

$$Z_k = \sum_{j=d+1}^{m_s+d} B_j^k(x_{d+1}, \dots, x_{m_s+d}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

de grado  $\deg(Z_k) = -p^* \alpha_k \in \text{Pic}(X)$ . Como cada hoja de  $\pi^* \mathcal{F}$  es un cono con centro en una hoja de  $(\pi|_{V(\{x_i\}_{i \in S})})^* \mathcal{G}$ , para cada punto regular  $x$  el stalk  $\mathcal{T}\mathcal{F}_x$  debe ser libremente generado por el conjunto de campos de vectores  $\{Z_1, \dots, Z_{n-d-q}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\}$ . Luego, éstos campos polinomiales inducen un splitting de  $\mathcal{T}\mathcal{F}$  como el de más arriba.

Por otro lado, si  $\mathcal{G}$  es la foliación asociada a una  $q$ -forma diferencial  $\omega$  de grado  $\beta \in \text{Pic}(D_S)$ , entonces  $\omega_{\mathcal{F}} = p^* \omega \in H^0(X, \Omega_X^q(p^* \beta))$ . Podemos concluir entonces que  $\mathcal{F}$  es la foliación asociada al elemento

$$\omega_{\mathcal{F}} = \iota_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \dots \iota_{\frac{\partial}{\partial x_d}} \iota_{Z_1}, \dots, \iota_{Z_{n-d-q}} \iota_R \Omega \in H^0(X, \Omega_X^1(p^* \beta)).$$

La discusión que precede al enunciado implica que las codimensiones de  $S(\mathcal{G})$  y  $S(\mathcal{G}) \setminus \overline{K(\mathcal{G})}$  coinciden con las codimensiones de  $S(\mathcal{F})$  y  $S(\mathcal{F}) \setminus \overline{K(\mathcal{F})}$  respectivamente. En particular, si  $S(\mathcal{G})$  satisface las hipótesis del Teorema 2.27 o del Teorema 2.30, lo mismo sucede con  $S(\mathcal{F})$ .

La Observación 2.31 nos dice entonces que si  $\mathcal{F}'$  está suficientemente cerca de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}^q(X, \alpha)$ , entonces debe ser

$$\omega_{\mathcal{F}'} = \iota_{\mathfrak{X}_1} \dots \iota_{\mathfrak{X}_d} \iota_{Y_{d+1}} \iota_{Y_{n-q}} \iota_R \Omega,$$

para ciertos campos de vectores polinomiales homogéneos de respectivos grados  $\deg(\mathfrak{X}_i) = -[D_i]$  y  $\deg(Y_k) = -p^* \alpha_k$ . Los primeros  $d$  elementos deben ser de la forma

$$\mathfrak{X}_i = \sum_{j=1}^{n+s} g_j^i(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde los  $g_j^i$  son polinomios homogéneos tal que  $\deg(g_j^i) - [D_j] = -[D_i]$ . La hipótesis sobre la maximalidad de los divisores en  $\Delta(i)$  simplifica la situación de la siguiente manera: como  $g_j^i \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D_j - D_i))$ , debe ser  $g_j^i \in \mathbb{C}$ . Más aún,  $g_j^i = 0$  para cada  $j \notin \Delta(i)$ .

Consideremos la matriz  $M(\mathfrak{X})$  de  $d \times (n + s)$  con filas  $g_1^i, \dots, g_{n+s}^i$ . Debe existir algún subconjunto de  $\{1, \dots, n + s\}$  de tamaño  $d$  tal que el menor correspondiente no se anula (caso contrario, el haz tangente no tendría el rango esperado). Esto quiere decir que tras un cambio de coordenadas equivariante podemos asumir que los campos de vectores satisfacen  $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j \in S} = \{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_d\}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer también que los elementos  $Y_i$  correspondientes a los otros sumandos de  $\mathcal{TF}$  son ortogonales a los  $\mathfrak{X}_i$ . Como esta condición se mantiene por el corchete de Lie, éstos campos de vectores definen una subfoliación  $\mathcal{G}''$  de  $\mathcal{F}$  cuyas hojas son paralelas a  $V(x_i | i \in S)$ . Tomando  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}''|_{V(x_i | i \in S)}$  obtenemos una foliación en  $D_S$  satisfaciendo  $S(\mathcal{F}') = q^{-1}(S(\mathcal{G}'))$ , donde  $q$  es la proyección estándar. La foliación  $\mathcal{G}'$  cumple  $\text{codim}(S(\mathcal{G}')) = \text{codim}(S(\mathcal{F}'))$  y  $\mathcal{TF}'|_{X \setminus S(q)} = \mathcal{T}q^*\mathcal{G}'|_{X \setminus S(q)}$  de modo que  $\mathcal{F}' = q^*\mathcal{G}'$ .  $\square$

La prueba del Corolario 2.41 contiene una caracterización de las foliaciones split que se puede obtener como un pullback por una proyección lineal equivariante:

**Proposición 2.42.** *Sea  $X$  una variedad tórica completa de dimensión  $n \geq 3$  y  $\mathcal{F}$  una foliación en  $X$ . Supongamos que*

$$\mathcal{TF} \simeq \left( \bigoplus_{j=1}^{n-|S'|-q} \mathcal{O}_X(\beta_j) \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \in S'} \mathcal{O}_X(D_i) \right)$$

para algún conjunto  $\{D_i\}_{i \in S'}$  que consiste de elementos maximales tales que para cada  $i \in S'$  tenemos  $h^1(X, \mathcal{O}_X(-D_i)) = 0$ . Entonces existe un conjunto  $\{D_j\}_{j \in S} \subseteq \bigcup_{i \in S'} \Delta(i)$  tal que  $|S| \leq |S'|$  y  $\dim D_S \geq 2$ , una foliación  $\mathcal{G}$  en  $D_S$  y una proyección lineal equivariante  $p: X \rightarrow D_S$  tal que  $\mathcal{F} = p^*\mathcal{G}$ .

*Proof.* Podemos repetir el argumento de la demostración anterior, achicando el conjunto  $S$  para garantizar  $\dim(\bigcap_{i \in S} D_i) \geq 2$  de ser necesario.  $\square$

**Observación 2.43.** El conjunto  $S$  puede no ser único: la misma foliación podría ser un pullback de dos divisores  $T$ -invariantes no isomorfos (aunque birracionalmente equivalentes) al mismo tiempo.

**Ejemplo 2.44.** Como fue mencionado al principio de esta sección, podemos recuperar los pullbacks lineales  $\mathbb{P}^{n+m} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$  como un caso particular del Corolario 2.41 especializando en  $X = \mathbb{P}^{n+m}$  y  $S = \{1, \dots, m\}$ .

**Ejemplo 2.45.** Sea  $\mathcal{C}$  una componente irreducible de  $\mathcal{F}^q(\mathbb{P}^n, d)$  tal que su elemento genérico satisface las hipótesis del Teorema 2.27 (si  $q = 1$ ) o del Teorema 2.30 (si  $q \geq 2$ ). Combinando el Corolario 2.41 con el

Ejemplo 2.37, podemos concluir que existe una componente irreducible de  $\mathcal{F}^q(Bl_p(\mathbb{P}^{n+1}), (d, 0))$  tal que su elemento genérico es un pullback lineal de un elemento en  $\mathcal{C}$ .

**Ejemplo 2.46.** Sean  $X$  y  $X'$  variedades tóricas suaves y completas y  $D$  un divisor maximal  $T'$ -invariante en  $X'$ . Sea  $\beta \in Pic(X)$ ,  $\alpha \in Pic(X')$  su pullback por una proyección lineal equivariante genérica y  $\mathcal{C}$  una componente irreducible de  $\mathcal{F}^q(D, \beta)$  tal que su elemento genérico satisface las hipótesis del Teorema 2.27 (si  $q = 1$ ) o del Teorema 2.30 (si  $q \geq 2$ ) (por ejemplo podemos tomar  $X' = \mathbb{P}^n$ ,  $D = \mathbb{P}^{n-1}$  y  $\mathcal{C}$  una de las componentes conocidas satisfaciendo las hipótesis correspondientes). La Proposición 2.35 nos dice que  $D$  es maximal en  $X \times X'$ . Luego, por el Corolario 2.41 podemos concluir que existe una componente irreducible en  $\mathcal{F}^q(X \times X', (0, \alpha))$  tal que su punto genérico es el pullback por una proyección lineal equivariante de un elemento en  $\mathcal{C}$ .

## Capítulo 3

# L-foliaciones

En este capítulo nos centraremos en el estudio de  $L$ -foliaciones, i.e., foliaciones inducidas por acciones  $G \curvearrowright X$  de grupos de Lie conexos para una variedad proyectiva suave  $X$ . Éstos objetos han sido una gran fuente de ejemplos para la teoría de foliaciones, hasta el punto de determinar componentes irreducibles de los espacios de foliaciones. No obstante, su estudio se ha restringido mayormente a los casos en los que  $X = \mathbb{P}^n$  y/o la acción tiene estabilizadores genéricos discretos. En lo que sigue de esta tesis el objetivo principal será construir una maquinaria que nos permita analizar su estabilidad en el contexto de variedades y acciones más generales. Los Corolarios 3.25 y 3.26, por ejemplo, establecen que (bajo ciertas hipótesis sobre el conjunto singular) el conjunto de foliaciones inducidas por acciones con estabilizadores genéricos discretos tiene interior no vacío en los espacios de foliaciones en una variedad tórica. Para variedades proyectivas más generales, por otro lado, el Teorema 3.38 da condiciones cohomológicas suficientes para que una  $L$ -foliación admita un entorno  $\mathcal{V} \subseteq \text{Inv}$  consistiendo de  $L$ -foliaciones. Más precisamente, veremos que bajo dichas condiciones el espacio  $\text{Inv}$  es localmente isomorfo a una estratificación del espacio de moduli de subálgebras de  $L := H^0(X, \mathcal{T}X)$ . En el caso de foliaciones de codimensión 1, si además hacemos ciertas suposiciones sobre el esquema singular de dicha foliación entonces lo mismo valdrá para los espacios  $\mathcal{F}^1(X, \mathcal{L})$ . Entre otras cosas, ésto nos permitirá identificar componentes irreducibles de estos espacios.

### 3.1 Familias de álgebras de Lie de campos de vectores

En esta sección vamos a establecer las nociones de la teoría de deformaciones de álgebras de Lie que serán necesarias más adelante. Comencemos recordando brevemente su teoría de cohomología. Para más detalles se sugiere consultar [Section 7.7, [32]].

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$  y  $M$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo. Los grupos de cohomología  $H^\bullet(\mathfrak{g}, M)$  se definen como la homología del complejo  $(C^\bullet(\mathfrak{g}, M), \delta)$ , donde  $C^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^\bullet \mathfrak{g}, M)$  y el diferencial  $\delta^k : C^k(\mathfrak{g}, M) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}, M)$  está dado por

$$\delta(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot f(\widehat{x}_i) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge \widehat{x}_{ij}).$$

Llamaremos  $Z^k(\mathfrak{g}, M) = \ker(\delta^k)$  y  $B^k(\mathfrak{g}, M) = \text{Im}(\delta^{k-1})$ .

**Definición 3.1.** Sea  $S$  un esquema sobre  $\mathbb{C}$ . Una *familia de álgebras de Lie de dimensión  $r$  con base  $S$*  es un haz localmente libre  $\mathcal{L}$  de rango  $r$  junto con un morfismo  $[-, -] : \wedge^2 \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  que cumpla la identidad de Jacobi en las secciones locales.

Si  $L$  es un álgebra de Lie de dimensión  $r$  sobre  $\mathbb{C}$  podemos considerar la *familia trivial*  $L_S$  que consiste del haz  $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$  junto con la extensión  $\mathcal{O}_S$ -lineal  $\wedge^2 L_S \rightarrow L_S$  del corchete de  $L$ . Esto nos permite dar la siguiente definición:

**Definición 3.2.** Una *familia sobre  $S$  de subálgebras de  $L$  de dimensión  $d$*  es un subfibrado  $\mathcal{G} \hookrightarrow L_S$  tal que  $\text{rg}(\mathcal{G}) = d$  y  $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subseteq \mathcal{G}$ . Denotamos  $\mathfrak{Sub}_d^L : \text{Sch}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Sets}$  al funtor que a cada esquema  $S$  le asigna el conjunto  $\mathfrak{Sub}_d^L(S)$  de familias sobre  $S$  de subálgebras de  $L$  de dimensión  $d$ .

**Observación 3.3.** Por simplicidad, de aquí en adelante trabajaremos con el álgebra de Lie  $L = H^0(X, \mathcal{T}X)$  de campos de vectores globales en  $X$  y escribiremos  $\mathfrak{Sub}_d$  en vez de  $\mathfrak{Sub}_d^L$ .

**Ejemplo 3.4.** Sea  $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow L$  una subálgebra y  $S$  un esquema sobre  $\mathbb{C}$ . La *deformación trivial* de  $\mathfrak{g}$  sobre  $S$  es la familia dada por la imagen de la inclusión

$$i \otimes 1 : \mathfrak{g}_S \hookrightarrow L_S.$$

Recordemos que, siendo  $X$  una variedad proyectiva sobre  $\mathbb{C}$ , su grupo de automorfismos  $\text{Aut}(X)$  tiene una estructura natural de esquema en grupo

suave localmente de tipo finito (pág. 268, [17])). Asociada a este grupo tenemos la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \text{Aut}^0(X) \rightarrow \text{Aut}(X) \rightarrow \pi_0 \text{Aut}(X) \rightarrow 1,$$

donde  $\text{Aut}^0(X)$  es la componente conexa de la identidad y  $\pi_0 \text{Aut}(X)$  es un grupo discreto.

**Ejemplo 3.5.** Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra y  $S = \text{Aut}^0(X)$ . La acción adjunta es un morfismo  $Ad : \text{Aut}^0(X) \rightarrow \text{Aut}(L)$  a partir del cual podemos construir (tensorizando por 1) un automorfismo  $Ad_S : L_S \rightarrow L_S$  de forma tal que si  $g$  es un  $\mathbb{C}$ -punto de  $\text{Aut}^0(X)$  entonces  $Ad_S(g) = Ad(g) : L \rightarrow L$ . Así, podemos definir la familia de subálgebras

$$\mathcal{G} := \text{Im}(\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_S \hookrightarrow L_S \xrightarrow{Ad_S} L_S).$$

Éste último ejemplo señala cómo construir una acción del grupo  $\text{Aut}^0(X)$  en  $\mathfrak{Sub}_d$  por transformaciones naturales. Si  $S$  es un esquema y  $g \in \text{Aut}^0(X)$ , podemos extender la aplicación adjunta de  $g$  a un morfismo

$$Ad(g)_S := Ad(g) \otimes_{\mathbb{C}} 1 : L_S \rightarrow L_S.$$

Así, para cada familia  $\mathcal{G} \hookrightarrow L_S$  sobre una base  $S$  y cada  $g \in \text{Aut}^0(X)$  podemos considerar la familia

$$g \cdot \mathcal{G} = \text{Im}(Ad(g)(\mathcal{G})) \subseteq L_S.$$

La acción es funtorial en el siguiente sentido: si  $f : T \rightarrow S$  es un morfismo, entonces por construcción

$$f^*(g \cdot \mathcal{G}) = g \cdot (f^* \mathcal{G}).$$

**Ejemplo 3.6.** Consideremos para cada  $n \geq 5$  la familia  $\mathcal{G}$  de subálgebras de dimensión 3 de campos de vectores en  $X = \mathbb{P}^5$  con base  $S = \text{Spec}(\mathbb{C}[t])$  generada por los elementos

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= (x_1 + tx_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_4 + tx_5) \frac{\partial}{\partial x_4} + x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}, \\ \mathfrak{X}_2 &= -x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \quad \text{y} \\ \mathfrak{X}_3 &= -tx_0 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} - tx_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_5} \end{aligned}$$

Como familia de álgebras de Lie abstracta, la estructura de  $\mathcal{G}$  está dada por

$$[\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2] = \mathfrak{X}_2, \quad [\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3] = t\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3.$$



Si  $t \neq 0$  entonces  $\mathcal{G}(t)$  es isomorfa a  $\mathcal{G}(1)$  (vía la aplicación  $\mathfrak{X}_2(t) \mapsto t\mathfrak{X}_2(t)$ ). Para  $t = 0$  por otra parte el álgebra  $\mathcal{G}(0)$  no es isomorfa a  $\mathcal{G}(1)$  (la clasificación completa de álgebras de Lie complejas de dimensión menor o igual que 4 y sus correspondientes degeneraciones puede encontrarse en [3]).

**Observación 3.7.** Sea  $\mathcal{G} \hookrightarrow L_S$  un subfibrado. Observemos que  $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subseteq \mathcal{G}$  si y sólo si la composición

$$\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G} \xrightarrow{[-, -]} L_S \rightarrow L_S/\mathcal{G}$$

o equivalentemente su dual

$$b : (L_S/\mathcal{G})^\vee \rightarrow \mathcal{G}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G}^\vee$$

son los morfismos nulos.

**Proposición 3.8.** El funtor  $\mathfrak{Sub}_d$  está representado por un esquema proyectivo  $S(L, d)$ .

*Demostración.* Cada familia  $\mathcal{G} \subseteq L_S$  puede identificarse con un cociente  $L_S^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{G}^\vee$ . Así,  $\mathfrak{Sub}_d$  es un subfunctor de  $G_{V,d}$ , que está representado por  $Gr = G(L, d)$ . Éste último viene equipado con una familia universal de cocientes localmente libres

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow L^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Gr} \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Siguiendo la notación de antes, podemos considerar al morfismo de haces  $b : \mathcal{K} \rightarrow Q^{\otimes 2}$  como una sección global del haz localmente libre  $Hom(\mathcal{K}, Q^{\otimes 2})$ . Sea  $S(L, d) := Z(b)$  el subesquema cerrado donde se anula  $b$ , i.e., el esquema definido por el haz de ideales  $Im(Hom(\mathcal{K}, Q^{\otimes 2})^\vee \rightarrow \mathcal{O}_{Gr})$  (el morfismo es el dual de  $\mathcal{O}_{Gr} \rightarrow Hom(\mathcal{K}, Q^{\otimes 2})$  inducido por  $b$ ).

Sea  $g : Z \rightarrow Gr$  un morfismo. La Observación 3.7 implica que el subfibrado  $g^*Q^\vee \hookrightarrow V \otimes_{\mathcal{O}_Z}$  es una familia de subálgebras si y sólo si  $g^*b = 0$  como elemento de  $H^0(Z, Hom(g^*\mathcal{K}, g^*Q^{\otimes 2})) = H^0(Z, g^*Hom(\mathcal{K}, Q^{\otimes 2}))$  o equivalentemente por el Lema 1.25 si  $g$  se factoriza por el subesquema  $S(L, d)$ . Luego,  $S(L, d)$  representa al funtor  $\mathfrak{Sub}_d$ .  $\square$

**Observación 3.9.** Para mantener la coherencia de la notación omitiremos la especificación del álgebra de Lie y escribiremos  $S(d) = S(L, d)$ .

La imagen de  $id_{S(d)}$  por la biyección  $End(S(d)) \rightarrow \mathfrak{Sub}_d(S(d))$  es la familia universal de subálgebras de  $L$  de dimensión  $d$  con base  $S(d)$

$$\mathcal{G}_{S(d)} \subseteq L_{S(d)}.$$

La acción de  $\text{Aut}^0(X)$  en  $\mathfrak{Sub}_d(S(d)) = \text{End}(S(d))$  induce el morfismo  $\text{Aut}^0(L) \rightarrow \text{Aut}(S(d))$  dado por

$$g \mapsto g \cdot \text{id}_{S(d)}.$$

De esta manera tenemos una acción del grupo algebraico  $\text{Aut}^0(X)$  en  $S(d)$ .

**Proposición 3.10.** *Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra de dimensión  $d$ . Entonces*

1. *el espacio tangente a  $S(d)$  en  $\mathfrak{g}$  es  $Z^1(\mathfrak{g}, L/\mathfrak{g})$ .*
2. *el espacio tangente a la órbita  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$  de la acción de  $\text{Aut}^0(X)$  que pasa por  $\mathfrak{g}$  es  $B^1(\mathfrak{g}, L/\mathfrak{g})$ .*

*Demostración.* Ver [Proposition 6.1, [28]] y [Proposition 7.1, [28]].  $\square$

**Observación 3.11.** La familia de subálgebras con base  $\text{Aut}^0(X)$  del Ejemplo 3.5 se corresponde con un morfismo  $\text{Aut}^0(X) \rightarrow S(d)$  que satisface  $1_{\text{Aut}^0(X)} \mapsto \mathfrak{g}$ . De la representabilidad de  $\mathfrak{Sub}_d$  se deduce que ésta aplicación coincide con el morfismo  $\text{Aut}^0(X) \rightarrow S(d)$  correspondiente a la acción de  $\text{Aut}^0(X)$  en el punto  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 3.12.** Decimos que  $\mathfrak{g} \subseteq L$  es *rígida* si su órbita por la acción de  $\text{Aut}^0(X)$  contiene un abierto de  $S(d)$ .

**Corolario 3.13.** *Si  $\mathfrak{g} \subseteq L$  satisface  $H^1(\mathfrak{g}, L/\mathfrak{g}) = 0$ , entonces  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra rígida.*

**Ejemplo 3.14.** Sea  $\mathfrak{g}$  una subálgebra semisimple de  $L$ . Por el teorema de Whitehead sabemos que  $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$  para todo  $\mathfrak{g}$ -módulo finitamente generado. En particular,  $\mathfrak{g}$  es rígida en  $L$ .

**Ejemplo 3.15.** Consideremos la subálgebra de Lie  $\mathfrak{g} \subseteq H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{T}\mathbb{P}^5)$  de dimensión 3 correspondiente a la fibra  $\mathcal{G}$  sobre el punto  $t = 1$  en el Ejemplo 3.6. Haciendo uso del software GAP (ver [31]) podemos calcular los correspondientes cociclos y cobordes y así obtener  $\dim_{\mathbb{C}}(Z^1(\mathfrak{g}, L/\mathfrak{g})) = 32$  y  $\dim_{\mathbb{C}}(B^1(\mathfrak{g}, L/\mathfrak{g})) = 28$ . Es decir,  $\mathfrak{g}$  es rígida como álgebra abstracta, pero admite deformaciones no triviales como subálgebra de  $L$ .

## 3.2 Subálgebras y L-foliaciones

Sea  $G \subseteq \text{Aut}(X)$  un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Supongamos que la acción natural de  $G$  en  $X$  satisface que  $\dim G \cdot x$  es constante fuera

de un conjunto de codimensión mayor o igual que dos. Dicha acción induce una foliación cuyas hojas son las órbitas de dimensión máxima. La derivada de  $G \hookrightarrow \text{Aut}(X)$  es la aplicación  $\mathfrak{g} \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{T}X) = L$ . Tensorizando por el haz estructural  $\mathcal{O}_X$  conseguimos un morfismo

$$\rho_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{T}X.$$

Denotamos  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  a la distribución involutiva cuyo haz tangente es  $\text{Im}(\rho_{\mathfrak{g}})$ . La hipótesis sobre la acción de  $\mathfrak{g}$  en  $X$  nos asegura que  $N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}$  es libre de torsión. Vamos a usar la notación  $\omega(\mathfrak{g}) = \omega_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}$ .

**Definición 3.16.** Decimos que  $\mathcal{F}$  es una  $L$ -foliación si  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{g})$  para alguna subálgebra  $\mathfrak{g} \subseteq L$ .

Como veremos a continuación, éste tipo de foliaciones admiten algunas estructuras adicionales.

**Definición 3.17.** Decimos que  $\mathfrak{X} \in L$  es una simetría de  $\mathcal{F}$  si  $\mathfrak{X}$  no es un campo tangente a  $\mathcal{F}$  y  $\exp(t\mathfrak{X})^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$ .

Observemos que  $\mathfrak{X}$  es una simetría de  $\mathcal{F}$  si y sólo si no es tangente a  $\mathcal{F}$  y además satisface  $[\mathfrak{X}, \mathcal{T}\mathcal{F}] \subseteq \mathcal{T}\mathcal{F}$  o equivalentemente  $\mathfrak{X} \in \ker(d)$ , donde  $d : L \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{T}\mathcal{F}, N_{\mathcal{F}})$  es el morfismo que a cada campo global  $\mathfrak{X}$  le asigna el morfismo de haces  $[\mathfrak{X}, -] : \mathcal{T}\mathcal{F} \rightarrow N_{\mathcal{F}}$ .

**Definición 3.18.** Definimos el espacio vectorial de simetrías de  $\mathcal{F}$  como

$$\text{Sym}(\mathcal{F}) := \ker(d)/H^0(X, \mathcal{T}\mathcal{F}).$$

Una foliación general de codimensión 1 no admite simetrías ni hojas algebraicas. El siguiente teorema es una adaptación de [Théoreme 1.8, [5]].

**Teorema 3.19.** *Sea  $\mathcal{F}$  una  $L$ -foliación en  $X$ . Entonces*

1.  $\mathcal{F}$  posee una simetría, o bien
2. Todas las hojas de  $\mathcal{F}$  son algebraicas.

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}$  es una  $L$ -foliación, entonces  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{g})$  para la subálgebra  $\mathfrak{g} := H^0(X, \mathcal{T}\mathcal{F}) \hookrightarrow L$ . Consideremos el subgrupo conexo

$$G_1 := \langle \exp(tY) \rangle_{Y \in \mathfrak{g}} < \text{Aut}(X)$$

generado por los flujos de  $\mathfrak{g}$ . Por otro lado, consideremos el grupo de automorfismos de la foliación  $G_2 := \{\phi \in \text{Aut}(X) \mid \phi^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\}$ . Observemos que

$G_2$  es el estabilizador del elemento  $[\omega(\mathfrak{g})] \in \mathcal{F}^q(X, \det(N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}))$ . En particular,  $G_2$  es un subgrupo algebraico de  $\text{Aut}(X)$ . Además,  $G_1 < G_2$ . Sea  $\overline{G_1}$  la clausura Zariski de  $G_1$  y  $G_2^0$  la componente conexa de la identidad de  $G_2$ . Entonces

$$G_1 < \overline{G_1} < G_2^0.$$

Si  $G_1 = \overline{G_1}$ , entonces las órbitas  $G_1 \cdot x$  son algebraicas para cada  $x \in X$ . Pero entonces todas las hojas de  $\mathcal{F}$  son algebraicas.

Si en cambio la inclusión fuese estricta, entonces debe existir un elemento  $\mathfrak{X} \in T_e G_2^0 \setminus \mathfrak{g}$ , que no es otra cosa que una simetría de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Observación 3.20.** En el segundo caso, [Théorème, [16]] nos asegura la existencia de una integral primera meromorfa, es decir, un mapa  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  cuyas fibras coinciden con las hojas de  $\mathcal{F}$  como en el Ejemplo 1.32.

Recordemos que una foliación racional en un espacio proyectivo es una foliación que puede construirse como en el Ejemplo 1.42. Para acciones de álgebras perfectas actuando en  $X = \mathbb{P}^n$ , tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.21.** *Sea  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{g})$  una foliación de codimensión 1 en  $\mathbb{P}^n$  con  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sl}_{n+1}$  una subálgebra tal que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es una foliación racional.*

*Demostración.* Podemos proceder como en la demostración de [Proposition 6.5, [12]]. En esencia, el argumento es el siguiente: por [Théoreme 1.22, [5]] sabemos que  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  admite una integral primera racional

$$F = (G : H) : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

(única salvo automorfismos de  $\mathbb{P}^1$ ). Haciendo uso del hecho de que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  se muestra que todas las fibras de  $F$  son irreducibles. Luego, por un teorema de Halphen podemos suponer sin pérdida de generalidad que todas las fibras salvo  $F^{-1}(0)$  y  $F^{-1}(\infty)$  son reducidas. Esto implica que la forma

$$\omega(f) = \deg(G)GdH - \deg(H)HdG$$

se anula en codimensión 2 y por lo tanto  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es una foliación racional.  $\square$

**Observación 3.22.** La condición  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  es necesaria: las componentes excepcionales (no racionales) de los espacios  $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n, n+1)$  tienen por elemento genérico a una foliación (rígida) inducida por una acción del álgebra afín  $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(\mathbb{C}) = \langle X, Y \mid [X, Y] = -Y \rangle$  (ver [Section 4, [6]]). En efecto,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  no es una foliación de tipo racional.

En términos de teoría de representaciones, el teorema anterior nos dice que si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra perfecta y  $V$  es una representación de dimensión finita tal que la acción en  $\mathbb{P}V$  tiene órbitas de codimensión 1 fuera de un conjunto de codimensión 2, entonces el álgebra de invariantes  $\mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$  es el álgebra libre en ciertos generadores homogéneos  $f_1$  y  $f_2$ . En codimensión arbitraria, esta condición es suficiente para garantizar la racionalidad de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  cuando el álgebra es semisimple:

**Lema 3.23.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple,  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo fiel de dimensión finita y  $F \in \mathbb{C}[V]$  un elemento homogéneo. Son equivalentes:*

1.  $X = V(F)$  es  $\mathfrak{g}$ -invariante,
2. cada componente irreducible de  $X$  es  $\mathfrak{g}$ -invariante,
3.  $F \in \mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $V(F)$  es  $\mathfrak{g}$ -invariante. Sea  $\mathcal{C}$  una de sus componentes irreducibles. Si  $p \in \mathcal{C}$  no está en la intersección con alguna de las otras componentes, consideremos el morfismo  $m_p : \exp(\mathfrak{g}) \subseteq GL(V) \rightarrow \mathcal{C}$  definido por  $g \mapsto g \cdot p$ . Su imagen es irreducible ( $\exp(\mathfrak{g})$  es irreducible) y contiene a  $p$ , de modo que esta contenida en  $\mathcal{C}$ . Sea

$$\mathcal{U} = \mathcal{C} \setminus \bigcup_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} \mathcal{C}'$$

el interior de  $\mathcal{C}$  en  $X$ . El argumento anterior nos dice que  $\exp(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$  y por lo tanto  $\mathcal{C}$  es  $\mathfrak{g}$ -invariante.

Para ver que la segunda afirmación implica la tercera, supongamos (sin pérdida de generalidad) que  $F$  es irreducible. Como  $X$  es  $\mathfrak{g}$ -invariante y  $F$  es irreducible, debe ser para cada  $g \in \exp(\mathfrak{g})$

$$g \cdot F = \chi(g)F$$

para algún caracter  $\chi : \exp(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Como  $\mathfrak{g}$  es semisimple,  $\chi \equiv 1$  y por lo tanto  $F \in \mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$ . La tercer afirmación implica la primera trivialmente, lo que concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 3.24.** *Sea  $\mathfrak{g} \subseteq sl(V)$  un álgebra de Lie semisimple. Si el álgebra de invariantes  $\mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$  es libre, entonces la foliación  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  en  $\mathbb{P}V$  es de tipo racional.*

*Demostración.* Sean  $\mathfrak{g}$  y  $V$  como en el enunciado y  $f_1, \dots, f_r$  una base de  $\mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$ , es decir,  $\mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$ . Queremos probar la igualdad

$$\omega(\mathfrak{g}) = \iota_R(df_1 \wedge \cdots \wedge df_r).$$

Veamos primero que la forma  $\eta = df_1 \wedge \cdots \wedge df_r \in \Omega^1(V)^{\mathfrak{g}}$  no tiene contenido. Supongamos  $\eta = F\eta'$ , con  $\text{codim}(S(\eta')) \geq 2$ . Como  $\eta(g \cdot x) = F(g \cdot x)\eta'(g \cdot x)$ , el conjunto  $\{F = 0\}$  es  $G$ -invariante y por el Lema 3.23 tenemos  $F \in \mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$ . Esto implica que la forma  $\eta'$  también es  $\mathfrak{g}$ -invariante. Además,  $\iota_{\mathfrak{X}}\eta' = 0$  para todo  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$  (es decir,  $\eta'$  es *horizontal*). Luego, por [Theorem 1, [2]] debe ser

$$\eta' = f^*(\alpha),$$

donde  $f : V \rightarrow \mathbb{A}^r$  es el morfismo  $f = (f_1, \dots, f_r)$  y  $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{A}^r)$ . En particular, como  $\text{codim}(S(\eta')) \geq 2$  debe ser  $\text{codim}(S(\alpha)) \leq 2$ . Pero entonces  $\alpha = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_r$  y por lo tanto  $F = 1$ .

Para ver que  $\iota_R(df_1 \wedge \cdots \wedge df_r)$  no tiene contenido, basta con observar que

$$\iota_R(df_1 \wedge \cdots \wedge df_r) \wedge df_k = f_k df_1 \wedge \cdots \wedge df_r.$$

Si la forma diferencial se anulase sobre un divisor irreducible  $\{g = 0\}$ , entonces el elemento  $g$  sería  $\mathfrak{g}$ -invariante y dividiría a todos los  $f_k$ , lo cual es absurdo.

Por otro lado, cada fibra del morfismo  $f$  es unión de  $\mathfrak{g}$ -órbitas. En particular, debe ser  $\iota_{\mathfrak{X}}\iota_R(df_1 \wedge \cdots \wedge df_r) = 0$  para cada  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$ . Pero entonces  $\ker(\omega(\mathfrak{g})) = \ker(\iota_R(df_1 \wedge \cdots \wedge df_r))$  y por lo tanto  $\omega(\mathfrak{g}) = \iota_R(df_1 \wedge \cdots \wedge df_r)$ .  $\square$

El estudio y clasificación de las representaciones con álgebra de invariantes libres ha sido una área de estudio muy activa. Gran parte de este trabajo puede encontrarse en [25], donde (al final) se incluye una tabla con todos los grupos de Lie simples  $G \subseteq SL(V)$  tales que el álgebra de invariantes  $\mathbb{C}[V]^G$  es libre. Por la Proposición 3.24, todas las entradas cuya foliación en  $\mathbb{P}V$  no tenga una órbita densa son ejemplos de  $L$ -foliaciones de tipo racional.

En la próxima sección discutiremos qué lugar ocupa el conjunto de  $L$ -foliaciones en los correspondientes espacios de moduli. Para tener una mejor perspectiva, veamos qué podemos concluir con lo hecho hasta ahora. Sabiendo que para una variedad tórica  $X$  las foliaciones split son estables, podemos generalizar [Corollary 6.4, [12]] de la siguiente manera:

**Corolario 3.25.** *Sea  $X$  una variedad tórica suave y proyectiva satisfaciendo  $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  y  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra. Si  $\mathfrak{g}$  actúa de forma localmente libre con órbitas de codimensión  $q$  fuera de un conjunto de codimensión 2 y  $S(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$  satisface las hipótesis de los Teoremas 2.27 (si  $q = 1$ ) o 2.30 (si  $q \geq 2$ ), entonces para toda  $\mathcal{F}'$  suficientemente cerca de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  en el correspondiente espacio  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$  existe una subálgebra  $\mathfrak{g}' \subseteq L$  tal que  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(\mathfrak{g}')$ .*

Este último corolario nos permite señalar componentes rígidas de los espacios de foliaciones y al mismo tiempo -en el caso  $X = \mathbb{P}^n$ - detectar foliaciones con singularidades no genéricas:

**Corolario 3.26.** *Sea  $X$  una variedad tórica suave y proyectiva satisfaciendo  $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  y  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra rígida. Si  $\mathfrak{g}$  satisface las propiedades del Corolario 3.25, entonces  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es rígida en el correspondiente espacio de foliaciones.*

**Corolario 3.27.** *Sea  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sl}(V)$  un álgebra de Lie semisimple. Si  $\mathfrak{g}$  actúa en  $\mathbb{P}V$  de forma localmente libre fuera de un conjunto de codimensión 2 con órbitas de codimensión  $q$  (resp. codimensión  $q > 1$ ) y  $\mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$  es un álgebra libre, entonces  $\text{codim } S(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) \setminus K(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 2$  (resp.  $\text{codim } S(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 2$ ).*

*Demostración.* Basta con aplicar la Proposición 3.24 y concluir de la misma forma que en [Proposition 6.5, [12]]: las componentes racionales de los espacios  $\mathcal{F}^q(\mathbb{P}V, d)$  no son componentes rígidas, de modo que  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  no puede satisfacer las hipótesis del Corolario 3.26. Como las hipótesis sobre la acción garantizan  $\mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}V}$ , debe ser  $\text{codim } S(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) \setminus K(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 2$  si  $q = 1$  o bien  $\text{codim } S(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 2$  si  $q \geq 2$ .  $\square$

### 3.3 Estabilidad de L-foliaciones

Una interpretación posible de los corolarios de la sección anterior es:

“Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra actuando de forma localmente libre en una variedad tórica proyectiva suave  $X$  con órbitas de codimensión  $q$  fuera de un conjunto de codimensión 2. Si  $S(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$  satisface las hipótesis del Teorema 2.27 (si  $q = 1$ ) o el Teorema 2.30 (si  $q > 1$ ) y  $h^1(X, \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 0$  entonces existe un entorno  $\mathcal{V}$  de  $\mathfrak{g}$  en  $S(d)$  tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{F}^q(X, \mathcal{L}) \\ \mathfrak{g}' &\mapsto \mathcal{F}(\mathfrak{g}') \end{aligned}$$

define un isomorfismo de  $\mathcal{V}$  con un entorno de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  en  $\mathcal{F}^q(X, \mathcal{L})$ .”

En esta sección enunciaremos esta idea de forma más precisa y la extendemos al contexto de variedades proyectivas y acciones más generales.

**Definición 3.28.** Sea  $\mathcal{G} \subseteq L_S$  una familia de subálgebras de Lie parametrizada por un esquema  $S$ . La familia de distribuciones involutivas  $\mathcal{F}(\mathcal{G})$  asociada a  $\mathcal{G}$  es la familia cuyo haz tangente es la imagen del morfismo

$$\rho_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{X \times S} \rightarrow \mathcal{T}X_S.$$

**Lema 3.29.** Sea  $S = \text{Spec}(A)$  y  $0 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}X_S \rightarrow N_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$  una familia de distribuciones integrables. Entonces  $\mathcal{T}\mathcal{F}$  es globalmente generado si y sólo si  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G})$  para una familia de subálgebras  $\mathcal{G} \subseteq L_S$ .

*Demostración.* La vuelta se sigue de la definición. Supongamos entonces que  $\mathcal{F}$  es una familia tal que  $\mathcal{T}\mathcal{F}$  está generado por secciones globales, es decir, existe un epimorfismo

$$\mathfrak{X} : \mathcal{O}_{X \times S}^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}.$$

Sea  $\mathcal{G} = H^0(X \times S, \mathcal{T}X_S) \subseteq L_S$  la familia de subálgebras de Lie con base  $S$  generada por los campos globales tangentes a  $\mathcal{F}$  en las fibras. El haz tangente a  $\mathcal{F}(\mathcal{G})$  coincide con el de  $\mathcal{F}$ , de modo que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G})$ .  $\square$

El esquema  $S(d)$  viene equipado con una familia universal  $\mathcal{G}_{S(d)} \subseteq L_{S(d)}$  de subálgebras de  $L$  de dimensión  $d$ , de modo que es natural considerar el caso  $S = S(d)$ . Tenemos una familia de distribuciones involutivas

$$\mathcal{F}_d := \mathcal{F}(\mathcal{G}_{S(d)})$$

en  $X$  con base  $S(d)$

$$0 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}_d \rightarrow \mathcal{T}X_{S(d)} \rightarrow N_d \rightarrow 0.$$

Como esta familia no es necesariamente playa, consideremos la flattening stratification

$$\coprod_i S(d)_i \rightarrow S(d)$$

para el haz  $N_d$ . Así, para cada  $i$  conseguimos una familia playa de distribuciones involutivas  $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}(\mathcal{G}_{S(d)_i})$  con base  $S(d)_i$  y por lo tanto un morfismo  $\phi_i : S(d)_i \rightarrow \text{Inv}$  de forma tal que

$$0 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{T}\mathbb{P}_{S(d)_i}^n \rightarrow N_d \rightarrow 0$$

es el pullback por  $\phi_i$  de la familia universal en  $\text{Inv}$ . Observemos que si  $\mathfrak{g} \in S(d)_i$  entonces su órbita  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$  por la acción de  $\text{Aut}(X)$  está contenida en  $S(d)_i$ . De la definición se deduce que el morfismo  $\phi$  es  $\text{Aut}(X)$ -equivariante. En particular, tenemos que  $\phi_i(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = \mathcal{O}(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$ .



**Definición 3.30.** Denotaremos  $\phi : \coprod_i S(d)_i \rightarrow \text{Inv}$  al morfismo inducido por los mapas  $\phi_i$ .

**Observación 3.31.** Dado un esquema afín  $S$  y una familia  $\mathcal{G} \subseteq L_S$ , tenemos  $\mathcal{G} \subseteq H^0(X \times S, \mathcal{TF}(\mathcal{G}))$ . En general, podría suceder que la inclusión sea estricta. En lo que sigue, vamos a querer poder recuperar la familia de subálgebras a partir de la familia de distribuciones, de modo que vamos a sustituir  $\mathcal{G} \subseteq L_S$  por  $H^0(X \times S, \mathcal{TF}(\mathcal{G})) \subseteq L_S$  de ser necesario. Por otro lado, la condición  $\mathcal{G} = H^0(X, \mathcal{TF}(\mathcal{G}))$  es equivalente a pedir  $p_{2,*}(\mathcal{TF}(\mathcal{G}))/\mathcal{G} = 0$ , donde  $p_2 : X \times S \rightarrow S$  es la proyección. En particular, es una propiedad *abierto* en el espacio de moduli de subálgebras.

En el caso en el que  $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$ , tenemos la siguiente definición (que ya fue introducida en [5]):

**Definición 3.32.** Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra. Decimos que  $\mathfrak{g}$  es *maximal* si satisface  $\mathfrak{g} = H^0(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g}))$ .

**Ejemplo 3.33.** Consideremos la familia  $\mathcal{G}$  de campos de vectores globales en  $\mathbb{P}^n$  con base  $S = \text{Spec}(\mathbb{C}[t])$  introducida en el Ejemplo 3.6. La familia  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G})$  de distribuciones involutivas de dimensión 3 está generada por los elementos  $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3 \in H^0(\mathbb{P}^n \times S, \mathcal{TP}_S^n)$ , que inducen un isomorfismo

$$\mathfrak{X} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times S}^{\oplus 3} \xrightarrow{\sim} \mathcal{TF}.$$

Como  $\mathfrak{X}(t) : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{TF}_t$  es un isomorfismo para todo  $t \in \mathbb{C}$ , la familia de distribuciones involutivas es automáticamente *plana* sobre  $S$ .

**Definición 3.34.** Sea  $\mathcal{F}$  una distribución involutiva en  $X$ . El *complejo de hojas de  $\mathcal{F}$*  es el complejo

$$L_{\mathcal{F}} : \mathcal{TX} \xrightarrow{d_0} \text{Hom}(\mathcal{TF}, N_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{d_1} \text{Hom}\left(\bigwedge^2 \mathcal{TF}, N_{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{d_2} \dots,$$

donde los morfismos están definidos a nivel de secciones locales como

$$d_0(v)(w) = \overline{[v, w]} \text{ y}$$

$$d_r(\alpha)(w_1, \dots, w_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \overline{[w_i, \alpha(\widehat{w}_i)]} + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([w_i, w_j], \widehat{w_{ij}}).$$

Este objeto es muy relevante en cuanto a la teoría de deformaciones de  $\mathcal{F}$ . Recordemos que el espacio tangente a  $\text{Quot}(\mathcal{TX})$  en el punto  $\mathcal{F}$  es isomorfo a  $\text{Hom}(\mathcal{TF}, N_{\mathcal{F}})$ . Llamemos  $\psi : \text{Hom}(\mathcal{TF}, N_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{F}}\text{Quot}(\mathcal{TX})$  a dicho isomorfismo. Usando las ideas presentadas en [15] podemos relacionar fácilmente al complejo de hojas con el espacio tangente a  $\text{Inv}$  en el punto  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 3.35.** *Sea  $\mathcal{F}$  una distribución involutiva en  $X$  y  $\mathcal{O}(\mathcal{F})$  la órbita de la acción de  $\text{Aut}(X)$  en  $\text{Inv}$  que pasa por  $\mathcal{F}$ . Denotemos  $L = H^0(X, \mathcal{T}X)$ . Existe un diagrama conmutativo de espacios vectoriales con filas exactas*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Sym}(\mathcal{F}) \oplus H^0(X, \mathcal{T}\mathcal{F}) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathcal{F}}\mathcal{O}(\mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow H^0(d_0) & & \downarrow \\ & & & & \ker(H^0(d_1)) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{T}_{\mathcal{F}}\text{Inv} \longrightarrow 0. \end{array}$$

*Demostración.* El problema de deformación considerado en [15] incluye posibles deformaciones de la variedad  $X$ . Allí el autor prueba que el espacio vectorial de clases de isomorfismo de deformaciones de primer orden  $\mathcal{F}$  coincide con el primer grupo de hipercohomología  $\mathbb{H}^1(X, L_{\mathcal{F}})$  del complejo de hojas (ver [Theorem 2.4, [15]]). En otras palabras, si  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento afín de  $X$  entonces dar una deformación de primer orden  $\mathcal{X}$  de  $X$  y un subhaz  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{T}\mathcal{X}_{\text{Spec}(D)}$  es equivalente a explicitar un 1-cociclo  $\theta \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{T}X)$  (que define a  $\mathcal{X}$ ) y un elemento  $\eta \in C^0(\mathcal{U}, \text{Hom}(\mathcal{T}\mathcal{F}, N_{\mathcal{F}}))$  cumpliendo ciertas ecuaciones de compatibilidad e integrabilidad.

Para aplicar esta correspondencia a nuestro problema de deformación, basta con considerar elementos de la forma

$$(0, \eta) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{T}X) \oplus C^0(\mathcal{U}, \text{Hom}(\mathcal{T}\mathcal{F}, N_{\mathcal{F}})).$$

En este caso, la ecuación de compatibilidad indica que el elemento  $\eta$  define un elemento en  $H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{T}\mathcal{F}, N_{\mathcal{F}}))$  y la ecuación de integrabilidad es exactamente  $d_1(\eta) = 0$ . La afirmación sobre las deformaciones triviales se sigue directamente de la definición del grupo de hipercohomología.

Alternativamente, uno puede aplicar [Theorem 1.4, [15]] teniendo en cuenta que se está trabajando sobre la deformación trivial de  $X$ .  $\square$

Con esto en mente, tenemos herramientas suficientes para comparar los espacios tangentes a  $\coprod_i S(d)_i$  e  $\text{Inv}$  en los puntos  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  respectivamente.

**Observación 3.36.** Recordemos que de acuerdo con la Observación 3.31, a fines de estudiar la geometría de  $\text{Inv}$  en un entorno de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathfrak{g}$  es maximal.

**Proposición 3.37.** *Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra maximal de dimensión  $d$  satisfaciendo  $h^1(X, \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 0$ . Entonces el diferencial de  $\phi$  en el punto  $\mathfrak{g}$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $S(d)_i$  el estrato que pasa por  $\mathfrak{g}$ . De las definiciones se sigue que su espacio tangente en el punto  $\mathfrak{g}$  consiste de los elementos

$(\mathcal{G} \hookrightarrow L_D) \in \mathfrak{Sub}_d^L(\text{Spec}(D))$  tales que  $\mathcal{F}(\mathcal{G})$  es una familia playa de distribuciones involutivas sobre  $\text{Spec}(D)$ . El diferencial de  $\phi$  en el punto  $\mathfrak{g}$  es la aplicación

$$d\phi : \mathcal{T}_{\mathfrak{g}}S(d)_i \subseteq \mathfrak{Sub}_d^L(\text{Spec}(D)) \rightarrow \mathfrak{Inv}(\text{Spec}(D)) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}\text{Inv} \\ (\mathcal{G} \subseteq L_D) \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{G}).$$

La Observación 3.31 implica que si  $\mathcal{G} \hookrightarrow L_D$  es una deformación de primer orden de  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\mathcal{G} = H^0(X \times D, \mathcal{TF}(\mathcal{G}))$ . En particular, esto muestra que  $d\phi_i$  es inyectivo.

Para probar que además es sobreyectivo, vamos a construir una sección  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}\text{Inv} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{g}}S(d)_i$ . Comencemos observando que la hipótesis respecto al primer grupo de cohomología de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  nos dice que al tomar sucesión exacta larga de cohomología a  $0 \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{TX} \rightarrow N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})} \rightarrow 0$  obtenemos

$$0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow L \rightarrow H^0(X, N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

de modo que  $H^0(X, N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}) \simeq_{\mathfrak{g}\text{-mod}} L/\mathfrak{g}$ .

Por otro lado, las potencias exteriores del morfismo  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g})$  son epimorfismos

$$f^\bullet : \bigwedge^\bullet \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \bigwedge^\bullet \mathcal{TF}(\mathfrak{g}).$$

Para simplificar la notación vamos a escribir simplemente  $f$ . Los morfismos

$$f^* : \text{Hom}(\bigwedge^\bullet \mathcal{TF}(\mathfrak{g}), N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}) \rightarrow \text{Hom}(\bigwedge^\bullet \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X, N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}, L/\mathfrak{g})$$

inducen un monomorfismo de complejos  $f^* : H^0(L_{\mathcal{F}}) \rightarrow C(\mathfrak{g}, M)$  de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ L & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{TF}(\mathfrak{g}), N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}) & \xrightarrow{d} & \text{Hom}(\bigwedge^2 \mathcal{TF}(\mathfrak{g}), N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}) & \xrightarrow{d} & \dots \\ \parallel \text{id} & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ L & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, L/\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^2 \mathfrak{g}, L/\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \end{array}$$

Como  $f^*$  es un morfismo de complejos, debe ser  $f^* \ker(d) \subseteq \ker(\delta)$ .

Sea  $\mathcal{F}_D : 0 \rightarrow \mathcal{TF}_D \rightarrow \mathcal{T}_D X_D \rightarrow N_{\mathcal{F}_D} \rightarrow 0$  una deformación de primer orden de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  en  $\text{Inv}$  y  $\eta \in \ker(H^0(d_1))$  el elemento correspondiente según el Teorema 3.35. El morfismo  $f^* \eta : \mathfrak{g} \rightarrow L/\mathfrak{g}$  define la familia de subálgebras de  $L$  sobre  $D$  dada por

$$\mathcal{G} = H^0(X_D, \mathcal{TF}_D) \hookrightarrow L_D.$$

El diferencial de  $\phi$  aplicado a este elemento es la familia de foliaciones  $\text{Im}(\rho_{\mathfrak{g}} : \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{X \times D} \rightarrow \mathcal{T}X_D) \subseteq \mathcal{T}\mathcal{F}_D$ . Como  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  está generado en secciones globales, por el Lema de Nakayama esta inclusión es en realidad una igualdad. Podemos concluir entonces que  $f^*\eta$  es un elemento tangente al estrato  $S(d)_i$  y que la aplicación  $\mathcal{F}_D \mapsto H^0(X_D, \mathcal{T}\mathcal{F}_D) \subseteq L_D$  es una sección de  $d\phi_i$ , que es biyectivo.  $\square$

Como no sabemos que  $\mathfrak{g}$  sea un punto suave de  $\coprod_i S(d)_i$ , la proposición anterior no es suficiente para concluir que  $\phi$  es un isomorfismo localmente alrededor de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ . Afortunadamente, podemos probar esta afirmación usando la hipótesis sobre el primer grupo de cohomología de  $\mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  para extender secciones globales en las fibras.

**Teorema 3.38.** *Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra maximal de dimensión  $d$  satisfaciendo  $h^1(X, \mathcal{T}\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = 0$ . Entonces existen entornos  $\mathcal{U} \subseteq \coprod_i S(d)_i$  y  $\mathcal{V} \subseteq \text{Inv}$  de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  respectivamente tales que la restricción  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* En sintonía con la demostración de la proposición anterior, vamos a construir un morfismo  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  que sea una inversa de  $\phi$ .

Sea  $0 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}X_{\text{Inv}} \rightarrow N_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$  la familia universal sobre  $\text{Inv}$  y  $\mathfrak{X}_0 : \mathcal{O}_X^{\oplus d} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}_0$  el morfismo inducido por la acción de  $\mathfrak{g}$ . El Lema 1.14 nos dice que podemos extender el morfismo, es decir, que existe un entorno  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  y un morfismo  $\mathfrak{X}_{\mathcal{V}} : \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^{\oplus d} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}|_{\mathcal{V}}$  que extiende a  $\mathfrak{X}_0$ . Por el Lema de Nakayama podemos suponer que  $\mathfrak{X}_{\mathcal{V}}$  también es un epimorfismo.

Llamemos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  a las proyecciones de  $X \times \mathcal{V}$  en  $X$  y  $\mathcal{V}$  respectivamente. Por el Teorema 1.13 (achicando  $\mathcal{V}$  de ser necesario) sabemos que  $\pi_{2,*}\mathcal{T}\mathcal{F}|_{\mathcal{V}}$  es localmente libre. Así, el pushforward de  $\mathcal{T}\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{T}X_{\mathcal{V}}$  se convierte en un monomorfismo de fibrados

$$\pi_{2,*}\mathcal{T}\mathcal{F}|_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \pi_{2,*}\mathcal{T}X_{\mathcal{V}} = H^0(X, \mathcal{T}X) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{V}} = L_{\mathcal{V}},$$

cuya imagen es un elemento de  $\mathfrak{Sub}_d^L(\mathcal{V})$ . Debe existir entonces un morfismo  $f : \mathcal{V} \rightarrow S(d)$  tal que  $\pi_{2,*}\mathcal{T}\mathcal{F}|_{\mathcal{V}}$  es el pullback por  $f$  de la subálgebra universal. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathcal{V} & \xrightarrow{1 \times f} & X \times S(d) \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow p_2 \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{f} & S(d), \end{array}$$

donde  $p_2 : X \times S(d) \rightarrow S(d)$  es la proyección usual. Como  $\mathcal{T}\mathcal{F}_d$  es globalmente generado, como subhaz de  $\mathcal{T}X_{S(d)}$  debe coincidir con la imagen de

la evaluación de secciones  $p_2^*p_{2,*}\mathcal{TF}_d \rightarrow \mathcal{TX}_{S(d)}$ . Siendo que  $\mathfrak{g}$  es maximal, haciendo uso de la Observación 3.31 podemos restringirnos a un entorno  $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq S(d)$  de  $\mathfrak{g}$  y redefinir  $\mathcal{V} = f^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$  para garantizar la igualdad

$$p_{2,*}(\mathcal{TF}_{\tilde{\mathcal{U}}} \hookrightarrow \mathcal{TX}_{\tilde{\mathcal{U}}}) = \mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{U}}} \hookrightarrow L_{\tilde{\mathcal{U}}},$$

donde  $\mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{U}}} = \mathcal{G}_{S(d)}|_{\tilde{\mathcal{U}}}$ . Pero entonces el haz tangente a la familia de distribuciones involutivas  $f^*(\mathcal{F}_d|_{\tilde{\mathcal{U}}})$  es

$$\begin{aligned} \text{Im}((1 \times f)^*(p_2^*p_{2,*}(\mathcal{TF}_d|_{\tilde{\mathcal{U}}}) \rightarrow \mathcal{TX}_{\tilde{\mathcal{U}}})) &= \text{Im}((f \circ \pi_2)^*p_{2,*}\mathcal{TF}_{\tilde{\mathcal{U}}} \rightarrow \mathcal{TX}_{\mathcal{V}}) \\ &= \text{Im}((f \circ \pi_2)^*\mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{U}}} \rightarrow \mathcal{TX}_{\mathcal{V}}) \\ &= \text{Im}(\pi_2^*\pi_{2,*}\mathcal{TF}|_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{TX}_{\mathcal{V}}). \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{TF}|_{\mathcal{V}}$  también es globalmente generado, debe ser

$$\text{Im}(\pi_2^*\pi_{2,*}\mathcal{TF}|_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{TX}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{TF}|_{\mathcal{V}}.$$

Así, el pullback de la familia  $\mathcal{F}_d|_{\tilde{\mathcal{U}}}$  es

$$0 \rightarrow \mathcal{TF}|_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{TX}_{\mathcal{V}} \rightarrow (1 \times f)^*N(d) \rightarrow 0$$

y por lo tanto  $f^*N(d) \simeq N_{\mathcal{F}}$  es playo sobre  $\mathcal{V}$ . Luego,  $f$  se factoriza por la flattening stratification

$$\mathcal{V} \rightarrow \coprod_k S(d)_k \rightarrow S(d)$$

y por lo tanto (achicando  $\mathcal{V}$  de ser necesario) por el estrato  $S(d)_i$  que pasa por  $\mathfrak{g}$ . Observemos que además hemos probado la igualdad de familias de distribuciones involutivas

$$f^*(\mathcal{F}_d|_{\tilde{\mathcal{U}}}) = \mathcal{F}_{\text{Inv}}|_{\mathcal{V}}.$$

Sea  $\mathcal{U} = \phi_i^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq S(d)_i$ . La composición  $\phi_i \circ f : \mathcal{V} \rightarrow \text{Inv}$  satisface  $(f \circ \phi_i)^*\mathcal{F}|_{\mathcal{V}} = \mathcal{F}|_{\mathcal{V}}$ . De la representabilidad de  $\text{Inv}$  se sigue que dicha composición coincide con la inclusión de  $\mathcal{V}$  en  $\text{Inv}$ . Análogamente la composición  $f \circ \phi_i : \mathcal{U} \rightarrow S(d)_i$  coincide con la inclusión de  $\mathcal{U}$  en  $S(d)_i$  y por lo tanto  $\phi_i : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  es un isomorfismo.  $\square$

Usando este resultado podemos recuperar una versión del Corolario 3.26 para acciones sobre variedades proyectivas con estabilizador genérico de dimensión positiva:

**Corolario 3.39.** *Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra de Lie semisimple satisfaciendo  $\mathfrak{g} = H^0(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g}))$  y  $h^1(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g})) = 0$ . Entonces  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es una distribución integrable rígida.*

*Demostración.* Sea  $S(d)_i$  el estrato correspondiente a  $\mathfrak{g}$  en  $S(d)$ . Como  $\mathfrak{g}$  es semisimple, la órbita de  $\mathfrak{g}$  es un abierto de  $S(d)_i$ . Por el Teorema 3.38 se sigue que  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es rígida en  $\text{Inv}$ .  $\square$

En particular para variedades aritméticamente Cohen-Macaulay podemos reversionar el Corolario 3.25 de la siguiente manera:

**Proposición 3.40.** *Sea  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  una variedad aritméticamente Cohen-Macaulay de dimensión  $n$  y  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra de Lie tal que el morfismo de haces  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g})$  admite una resolución de la forma*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_{n-3}} \mathcal{O}_X(e_i^{n-3}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_1} \mathcal{O}_X(e_i^1) \rightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0.$$

Entonces  $\mathfrak{g}$  satisface las hipótesis del Teorema 3.38.

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{g}$  una subálgebra rígida tal que  $\mathcal{TF}(\mathfrak{g})$  admite una resolución por fibrados de línea como en el enunciado. Por el Lema 1.16, sabemos que  $h^1(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g})) = 0$ . Consideremos entonces la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0.$$

Observemos que como  $\mathfrak{g} \hookrightarrow L$ , el morfismo a nivel de secciones globales  $\mathfrak{g} = H^0(X, \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g}))$  es inyectivo. Tomándole cohomología a la sucesión anterior obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow H^0(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g})) \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}) \rightarrow 0.$$

Como

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_{n-2}} \mathcal{O}_X(e_i^{n-2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_1} \mathcal{O}_X(e_i^1) \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow 0$$

es una resolución de  $\mathcal{K}$ , podemos aplicar nuevamente el Lema 1.16 para concluir que  $h^1(X, \mathcal{K}) = 0$  y por lo tanto  $\mathfrak{g} = H^0(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g}))$ .  $\square$

**Corolario 3.41.** *Sea  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  una variedad aritméticamente Cohen-Macaulay de dimensión  $n$  y  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra de Lie tal que el morfismo de haces  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g})$  admite una resolución de la forma*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_{n-3}} \mathcal{O}_X(e_i^{n-3}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_1} \mathcal{O}_X(e_i^1) \rightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0.$$

Entonces  $\phi : \coprod_i S(d)_i \rightarrow \text{Inv}$  es un isomorfismo localmente alrededor de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ . En particular, si  $\mathfrak{g} \subseteq L$  es rígida, entonces  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es rígida en  $\text{Inv}$ .

*Demostración.* Se sigue directamente de la Proposición 3.40 y el Teorema 3.38.  $\square$

**Ejemplo 3.42.** *El invariante  $j$  en  $Sym^4(\mathbb{C}^2)$ .* En el caso de la foliación asociada a la acción del álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  en  $Sym^4(\mathbb{C}^2)$  por cambios de coordenadas analizada en el Ejemplo 1.54, el morfismo  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g})$  es un isomorfismo. Luego, como se trata de una álgebra semisimple, el elemento  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es rígido en  $\text{Inv}^1$ . Cabe resaltar que se trata de una foliación racional cuyo conjunto singular tiene una componente de codimensión 2 que no es genéricamente de tipo Kupka.

**Ejemplo 3.43.** *Acción de  $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$  sobre la cuádrica suave  $Q \subseteq \mathbb{P}^4$ .* En [21], los autores clasifican las componentes irreducibles de los espacios de foliaciones con haz canónico trivial en variedades Fano  $X$  de dimensión 3 tales que  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ . En el caso en el que  $X$  es la hipersuperficie cuádrica suave en  $\mathbb{P}^4$ , dicho espacio consta de 3 componentes irreducibles y sólo una de ellas consiste genéricamente de  $L$ -foliaciones (rígidas) asociadas al álgebra afín. Veamos que podemos recuperar la correspondiente componente irreducible de  $\text{Inv}$  como aplicación de éstos últimos resultados. La clausura de la órbita del punto  $q = \{1, -1, i, -i\}$  bajo la acción de  $\mathfrak{sl}_2$  en  $\mathbb{P}^4 = Sym^4(\mathbb{C}^2)$  descrita en el ejemplo anterior es una cuádrica suave  $Q$ , cuya ecuación es uno de los generadores de la correspondiente álgebra de invariantes. Consideremos la restricción de dicha acción sobre  $Q$  al álgebra afín  $\mathfrak{aff}(\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{sl}_2$ . Como  $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$  actúa con órbitas de dimensión 2 fuera del conjunto  $\{p + 3\infty\} \cup \{3p + \infty\}$  de codimensión 2, debe ser

$$\mathcal{TF} \simeq \mathfrak{aff}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Q.$$

Estamos entonces bajo las hipótesis del Corolario 3.41. Recordemos que en este caso tenemos  $L = \mathfrak{so}_5$ . Usando el software GAP, podemos calcular las dimensiones correspondientes a la inclusión  $\mathfrak{aff}(\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{sl}_2 \subseteq \mathfrak{so}_5$

$$\dim Z^1(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_5/\mathfrak{aff}(\mathbb{C})) = \dim B^1(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_5/\mathfrak{aff}(\mathbb{C})) = 8.$$

Se trata entonces de una subálgebra rígida y por lo tanto la foliación  $\mathcal{F}$  es rígida en  $\text{Inv}^1$ .

**Ejemplo 3.44.** *La representación adjunta de  $\mathfrak{sl}_n$ .* Consideremos la entrada número cuatro de la tabla expuesta al final de [25]: la representación adjunta  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \curvearrowright V := \mathfrak{sl}_n$ . Las órbitas de dicha acción coinciden con las clases de conjugación de los elementos en el espacio de matrices  $V$ . Su álgebra de invariantes  $\mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$  es el álgebra de polinomios en los  $n - 2$  coeficientes del

polinomio característico  $\chi$ . De acuerdo con la Proposición 3.24 la foliación inducida en  $\mathbb{P}V$  es la foliación racional  $\mathcal{F}$  definida por el morfismo

$$\chi : \mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}_{(2,\dots,n)}^{n-3}.$$

La inclusión  $\mathfrak{sl}_n \hookrightarrow \mathfrak{sl}(V) = H^0(\mathbb{P}V, \mathcal{T}\mathbb{P}V)$  puede interpretarse de la siguiente manera: para cada elemento  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{sl}_n$ , la evaluación en un punto  $p \in V$  satisface

$$\mathfrak{X}(p) = \overline{[\mathfrak{X}, p]} \in \mathfrak{sl}_n / \langle p \rangle.$$

Con esto en mente, calculemos el núcleo del epimorfismo

$$\rho : \mathfrak{sl}_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}V} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}.$$

Consideremos el abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{P}V$  definido por

$$\mathcal{U} = \{[p] \in \mathbb{P}V \mid \{Id, p, \dots, p^{n-1}\} \text{ es linealmente independiente} \}.$$

Para un punto  $p \in \mathcal{U}$  y un elemento  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{sl}_n$  tenemos que  $\mathfrak{X}(p) = 0$  si y sólo si  $[\mathfrak{X}, p] = 0$ . En efecto, si este no fuera el caso existiría un elemento  $A \in \mathfrak{sl}_n$  tal que

$$[A, p] = p.$$

Por inducción se puede ver fácilmente que esto implica que  $[A, p^k] = n_k p^k$  para cierta sucesión  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ . Pero entonces  $tr(p^k) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y por lo tanto  $p$  debería ser un elemento nilpotente, lo cual es absurdo. Así, la fibra  $\ker(\rho)(p)$  consiste exactamente del espacio vectorial de matrices que conmutan con  $p$ , que tiene dimensión  $n - 1$  (ver por ejemplo [29]). Para cada  $1 \leq k \leq n - 1$  consideremos la matriz  $P_k \in \mathbb{C}[V]_k^{n \times n}$  tal que para cada  $p \in V$  vale

$$P_k(p) = p^k - tr(p^k)Id.$$

Cada uno de estos elementos define una sección  $Z_k \in H^0(\mathbb{P}V, \mathfrak{sl}_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(k))$  que trivialmente satisface  $Z_k \in \ker(\rho)$ . Observemos además que las matrices  $P_k(p)$  son linealmente independientes si  $p \in \mathcal{U}$ . Conseguimos entonces un complejo

$$0 \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(-k) \rightarrow \mathfrak{sl}_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}V} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F} \rightarrow 0$$

que es exacto sobre  $\mathcal{U}$ . Como  $\text{codim}(\mathbb{P}V \setminus \mathcal{U}) \geq 2$ , esto es de hecho una resolución de  $\mathcal{T}\mathcal{F}$ .

Como se trata de un álgebra semisimple, si  $n \geq 5$  podemos usar el Corolario 3.41 para concluir que el elemento  $\mathcal{F}$  es rígido en  $\text{Inv}^{n-1}$ .



**Ejemplo 3.45.** Consideremos la distribución involutiva de codimensión 2 en  $\mathbb{P}^5$  inducida por los campos

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_1 &= (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_4 + x_5) \frac{\partial}{\partial x_4} + x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}, \\ \mathfrak{X}_2 &= -x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \quad \text{y} \\ \mathfrak{X}_3 &= -x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_5}\end{aligned}$$

(es decir, la distribución inducida por la subálgebra  $\mathfrak{g} \subseteq L$  de los Ejemplos 3.15 y 3.33). Usando el paquete DiffAlg en Macaulay2 (ver [14]) podemos ver que el conjunto singular  $S(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$  consta de dos componentes de codimensión 2, siendo una sola de ella genéricamente de tipo Kupka. Como el morfismo  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5} \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g})$  es un isomorfismo, éste elemento satisface automáticamente las hipótesis del Corolario 3.41. Recordemos del Ejemplo 3.15 que el espacio tangente a  $S(3)$  en el punto  $\mathfrak{g}$  tiene dimensión 32 y el espacio a la órbita por la acción de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^5)$  tiene dimensión 28. Aplicando el Corolario, podemos concluir que toda componente irreducible de  $\text{Inv}^2$  que pase por  $\mathfrak{g}$  es de dimensión menor o igual a 32 (y mayor o igual a 28). Como además  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie rígida, tal componente debe corresponderse con una componente irreducible del espacio de morfismos de álgebras de Lie  $\text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{sl}_6) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{sl}_6)$  que pase por el punto  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{sl}_6$  que define a la foliación.

Combinando el Teorema 3.38 con las ideas al final del Capítulo 1 podemos dar una versión de los últimos resultados para los espacios  $\mathcal{F}^1(X, \mathcal{L})$  en el caso en el que el grupo  $\text{Pic}(X)$  sea discreto.

**Teorema 3.46.** *Sea  $X$  una variedad proyectiva con grupo de Picard discreto y  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra maximal actuando con órbitas de codimensión 1 fuera de un conjunto de codimensión 2 y tal que  $h^1(X, \mathcal{TF}(\mathfrak{g})) = 0$ . Si  $\text{Sing}(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$  no tiene componentes embebidas y el conjunto singular es de la forma  $S(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = \overline{K(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))} \cup \{p_1, \dots, p_r\}$  donde los  $p_i$  son singularidades de tipo Reeb, entonces existen entornos  $\mathcal{U} \subseteq \coprod_i S(d)_i$  y  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}^1(X, N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}^{\vee\vee})$  de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  respectivamente tales que la aplicación  $\omega : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  definida por  $\mathfrak{g} \mapsto [\omega(\mathfrak{g})]$  es un isomorfismo. En particular, si  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra rígida, entonces  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es rígida en  $\mathcal{F}^1(X, N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}^{\vee\vee})$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{g}$  una subálgebra satisfaciendo las hipótesis del enunciado y  $\mathcal{L} = \det(N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}) = N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}^{\vee\vee}$ . Consideremos la familia tautológica de distribuciones involutivas  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^q$  con base  $\mathcal{F}^1(X, \mathcal{L})$  construida en el Capítulo 1. Esto es, la familia de distribuciones  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^q$  parametrizada por  $\mathcal{F}^1(X, \mathcal{L})$  tal

que  $(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^q)_{[\omega]} = \mathcal{F}_{\omega}$ . Las hipótesis respecto al lugar singular de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  nos permiten aplicar [Theorem 8.13, [27]] para asegurar que el esquema singular  $Sing(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^1)$  es playo en un entorno de  $[\omega(\mathfrak{g})] \in \mathcal{F}^1(X, \mathcal{L})$ . Luego, por el Teorema 1.50 la familia de distribuciones involutivas  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^1$  es playa en un entorno del punto  $[\omega(\mathfrak{g})]$ . Es decir, el estrato de la flattening stratification asociada al haz  $N_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^1}$  que pasa por  $[\omega(\mathfrak{g})]$  es abierto en  $\mathcal{F}^1(X, \mathcal{L})$ . Así, aplicando el Teorema 3.38 y la Proposición 1.61 podemos concluir que la composición

$$\begin{aligned} \omega : \coprod_i S(d)_i &\rightarrow \text{Inv}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1(X, \mathcal{L}) \\ \mathfrak{g} &\longmapsto \omega(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo localmente alrededor de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

En el caso de los espacios proyectivos, de la conjunción del último teorema con el Corolario 3.41 se obtiene:

**Corolario 3.47.** *Sea  $\mathfrak{g} \subseteq L$  una subálgebra actuando en una variedad aritméticamente Cohen Macaulay  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  de dimensión  $n$  con órbitas de codimensión 1 fuera de un conjunto de codimensión 2. Supongamos que el morfismo  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g})$  admite una resolución de la forma*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_{n-3}} \mathcal{O}_X(e_i^{n-2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_1} \mathcal{O}_X(e_i^1) \rightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{TF}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0.$$

*Si  $Sing(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))$  no tiene componentes embebidas y el conjunto singular es de la forma  $S(\mathcal{F}(\mathfrak{g})) = \overline{K(\mathcal{F}(\mathfrak{g}))} \cup \{p_1, \dots, p_r\}$  donde los  $p_i$  son singularidades de tipo Reeb, entonces existen entornos  $\mathcal{U} \subseteq \coprod_i S(d)_i$  y  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}^1(X, N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}^{\vee\vee})$  de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  respectivamente tales que el mapa  $\omega : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  definido por  $\mathfrak{g} \mapsto \omega(\mathfrak{g})$  es un isomorfismo. En particular, si  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra rígida, entonces  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  es rígida en  $\mathcal{F}^1(X, N_{\mathcal{F}(\mathfrak{g})}^{\vee\vee})$ .*

# Código

A continuación se encuentran los códigos con los que se efectuaron los cálculos referenciados en los distintos ejemplos.

## Macaulay2: Diffalg

**Ejemplo 3.45:** Cálculo de las dimensiones del esquema singular y de Kupka

```
1 loadPackage ("DiffAlg", Reload => true, Configuration => {"
  BaseRing" => QQ})
2
3 // Definimos los campos que definen la distribucion y el campo
  radial
4 A = newField("(x_1+ *x_2)*ax_1+x_2*ax_2+(x_4 + *x_5)*ax_4+x_5*
  ax_5");
5 B = newField("-x_0*ax_1-x_3*ax_4");
6 C = newField("-x_0*ax_1-x_0*ax_2-x_3*ax_4-x_3*ax_5");
7 R = radial 5;
8
9 // Primero chequeamos que la distribucion sea involutiva
10 if isInvolutive dist{R,A,B,C} then print "la distribucion es
  involutiva"
11 >> la distribucion es involutiva.
12
13
14 // Vamos a definir la 1-forma omega correspondiente
15 omega = newForm("dx_0 * dx_1 * dx_2 * dx_3 * dx_4 * dx_5");
16 omega = R.Omega;
17 omega = A.omega;
18 omega = C.omega;
19 omega = B.omega;
20
21 // Calculamos el ideal singular y la dimension de sus
  componentes irreducibles en el espacio afin
22 I = singularIdeal(omega);
23 primdecI = primaryDecomposition I;
```

```

24 for i in primdecI list dim i
25 >>{4,4}
26
27 // Ahora hacemos lo mismo con su derivada exterior
28 K=singularIdeal(diff(omega));
29 primdecK = primaryDecomposition K;
30 for i in primdecK list dim i
31 >>{4,3}

```

## GAP: Cálculo de 1-cociclos y 1-cobordes

### Ejemplo 3.15

```

1 A:=FullMatrixAlgebra(GaussianRationals, 6);
2 L:=LieAlgebra(A);
3
4 // Definimos la base canonica con la numeracion por filas
5 v := [];
6 for i in [1..36] do
7 v[i]:=Basis(L)[i];
8 od;
9
10 // Ahora definimos los generadores de la subalgebra y el campo
    radial
11 g1:=v[8]+v[9]+v[15]+v[29]+v[30]+v[36];
12 g2:=-v[7]-v[28];
13 g3:=-v[7]-v[13]-v[28]-v[34];
14 R:=v[1]+v[8]+v[15]+v[22]+v[29]+v[36];
15 G:=Subalgebra(L, [R, g1, g2, g3]);
16 g:=Subalgebra(G, [g1, g2, g3]);
17
18 // Ahora pasamos a construir el g-modulo al que queremos
    calcularle los invariantes
19 V:=AdjointModule(L);
20 M:=ModuleByRestriction(V,G);
21
22 // Para definir el modulo cociente, primero explicitamos los
    objetos modulo correspondientes a los generadores de la
    subalgebra
23 m := [];
24 for i in [1..36] do
25 m[i]:=Basis(M)[i];
26 od;
27 m1:=m[8]+m[9]+m[15]+m[29]+m[30]+m[36];
28 m2:=-m[7]-m[28];
29 m3:=-m[7]-m[13]-m[28]-m[34];
30 mR:=m[1]+m[8]+m[15]+m[22]+m[29]+m[36];

```

```

31 W:=SubAlgebraModule(M,[mR, m1, m2, m3]);
32 QQ:=M/W;;
33 Q:=ModuleByRestriction(QQ,g);;
34
35 // Las dimensiones de los espacios de 1-cociclos y 1-cobordes
    son
36 b1:=Dimension(Coboundaries(Q,1));
37 >>28
38 z1:=Dimension(Cocycles(Q,1));
39 >>32

```

### Ejemplo 3.43

```

1 A:=FullMatrixAlgebra(GaussianRationals, 5);;
2 L:=LieAlgebra(A);
3
4 // Definimos la base canonica con la numeracion por filas
5 v:=[];;
6 for i in [1..25] do
7   v[i]:=Basis(L)[i];;
8 od;
9
10 // Ahora definimos los generadores de la subalgebra
11 g1:=2*v[1]+v[7]-v[19]-2*v[25];;
12 g2:=v[6]+2*v[12]+3*v[18]+4*v[24];;
13 g:=Subalgebra(L, [g1, g2]);;
14
15 // Ahora pasamos a construir el g-modulo al que queremos
    calcularle los invariantes
16 V:=AdjointModule(L);
17 N:=ModuleByRestriction(V,g);;
18
19 // Definimos la base canonica de M, ordenada por filas
20 m:=[];;
21 for i in [1..25] do
22   m[i]:=Basis(N)[i];;
23 od;
24
25 // Construimos el modulo correspondiente al algebra aut(Q),
    explicitando una base
26 b1:=m[16]+4*m[22];;
27 b2:=m[11]-6*m[23];;
28 b3:=m[6]+4*m[24];;
29 b4:=m[1]-m[25];;
30 b5:=m[7]-m[19];;
31 b6:=m[12]+(3/2)*m[18];;
32 b7:=4*m[2]+m[20];;
33 b8:=(3/2)*m[8]+m[14];;

```

```
34 b9:=-6*m[3]+m[15];;
35 b10:=4*m[4]+m[10];;
36 M:=SubAlgebraModule(N,[b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, b10])
    ;;
37
38 // y ahora los objetos modulo correspondientes a los campos g1 y
    g2, para luego construir el modulo cociente
39 m1:=2*m[1]+m[7]-m[19]-2*m[25];;
40 m2:=m[6]+2*m[12]+3*m[18]+4*m[24];;
41 W:=SubAlgebraModule(M,[m1, m2]);;
42 Q:=M/W;;
43
44 // Las dimensiones de los espacios de 1-cociclos y 1-cobordes
    son
45 b1:=Dimension(Coboundaries(Q,1));
46 >>8
47 z1:=Dimension(Cocycles(Q,1));
48 >>8
```

# Bibliografía

- [1] M. Artin. *Lectures on deformations of singularities*, Tata Institute of Fundamental Research, 1976.
- [2] M Brion. *Differential forms on quotients by reductive group actions*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, vol. 126, no 9, p. 2535-2539.
- [3] D. Burde and C. Steinhoff. *Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras*, Journal of Algebra, 1999, vol. 214, no 2, p. 729-739.
- [4] O. Calvo-Andrade and F. Cukierman. *A note on the  $j$  invariant and foliations*, Proceedings of the XVIth Latin American Algebra Colloquium, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana (Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 2007), pp. 99– 108.
- [5] D. Cerveau and J. Déserti. *Feuilletages et actions de groupes sur les espaces projectifs*, Société Mathématique de France, 2005.
- [6] D. Cerveau and A. Lins Neto. *Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in  $CP(n)$ ,  $n \geq 3$* . Annals of Mathematics, 1996, p. 577-612.
- [7] M. Corrêa, M. Jardim and A. Muniz. *Moduli of distributions via singular schemes*. arXiv preprint arXiv:2010.02382 , 2020. To appear in Mathematische Zeitschrift.
- [8] D. A. Cox. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, Journal of Algebraic Geometry, 1995, vol 4., p.17-50.
- [9] D. A. Cox, J. B. Little and H. K. Schenck. *Toric varieties*, American Mathematical Soc., 2011.

- 
- [10] F. Cukierman, J. Gargiulo Acea and C. Massri. *Stability of logarithmic differential one-forms*, Transactions of the American Mathematical Society, 2019, vol. 371, no 9, p. 6289-6308.
- [11] F. Cukierman, J. V. Pereira and I. Vainsenscher. *Stability of foliations induced by rational maps*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse: Mathématiques, 2009, p. 685-715.
- [12] F. Cukierman and J. V. Pereira. *Stability of holomorphic foliations with split tangent sheaf*, American journal of mathematics, 2008, vol. 130, no 2, p. 413-439.
- [13] A. S. de Medeiros. *Singular foliations and differential p-forms*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse: Mathématiques, 2000, p. 451-466.
- [14] M. Dubinsky, C. Massri, A. Molinuevo and F. Quallbrunn. *DiffAlg: a Differential algebra package*, Journal of Software for Algebra and Geometry, 2019, 9(1), 11-17.
- [15] X. Gómez-Mont. *The transverse dynamics of a holomorphic flow*, Annals of Mathematics, 1988, vol. 127, no 1, p. 49-92.
- [16] E. Ghys. *A propos d'un théoreme de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2000, vol. 49, no 1, p. 175-180.
- [17] A. Grothendieck. *Techniques de construction et théoremes d'existence en géométrie algébrique IV: Les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1960, vol. 221.
- [18] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Springer Science and Business Media, 2013.
- [19] D. Huybrechts and M. Lehn. *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Cambridge University Press, 2010.
- [20] A. Lins-Neto. *Componentes irredutíveis dos espaços de folheações*, IMPA, 2007.
- [21] F. Loray, J. V. Pereira and F. Touzet. *Foliations with trivial canonical bundle on Fano 3-folds*. Mathematische Nachrichten, 2013, vol. 286. 8-9, p. 921-940.



- 
- [22] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque*, Collection Enseignement des Sciences, Hermann, 1972.
- [23] D. Mumford, C.P. Ramanujam and I. Manin. *Abelian varieties*, Oxford: Oxford University Press, 1974.
- [24] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, 1980.
- [25] A. N. Parshin and I. R. Shafarevich. *Algebraic geometry IV: linear algebraic groups, invariant theory*, Springer-Verlag, 1994.
- [26] G. Pourcin. *Deformations of coherent foliations on a compact normal space*, Annales de l'institut Fourier, 1987, p. 33-48.
- [27] F. Quallbrunn. *Families of distributions and Pfaff systems under duality*, Journal of Singularities, 2015, vol. 11, p. 164-189.
- [28] J. R. Richardson. *A rigidity theorem for subalgebras of Lie and associative algebras*, Illinois Journal of Mathematics, 1967, vol. 11, no 1, p. 92-110.
- [29] J. Rotman. *Advanced modern algebra*, Vol. 114. American Mathematical Soc., 2010.
- [30] E. Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, Springer Science and Business Media, 2007.
- [31] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1; 2021. (<https://www.gap-system.org>).
- [32] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1995.