UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Computación

Problemas en coloreos de aristas con vértices adyacentes distinguibles

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias de la Computación

Lic. Brian Luis Curcio

Directora de tesis: Dra. Paula Zabala

Consejera de estudios: Dra. Isabel Méndez Díaz

Fecha de defensa: 27 de diciembre de 2021

Lugar de trabajo: Departamento de Computación - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

Resumen

En el presente trabajo analizamos el *problema de suma de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles*. Un coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles es una asignación de colores a las aristas de un grafo con las siguientes restricciones: todo par de aristas adyacentes debe tener distinto color, y todo par de vértices adyacentes debe tener diferencia en el conjunto de colores asignados a sus aristas incidentes. El objetivo es minimizar la suma de los colores asignados en un coloreo de aristas que cumpla estas restricciones. Este problema es un caso particular de una gran familia de problemas conocida bajo el nombre de *etiquetado de grafos*, que resultan una herramienta abstracta muy útil y versátil para modelar situaciones de la *vida cotidiana* que se quieren formalizar y resolver mediante algoritmos.

Algunas variantes del problema de etiquetado de grafos han sido abordadas con éxito con técnicas de programación lineal entera basadas en la caracterización poliedral del conjunto de soluciones factibles. Bajo este enfoque, en esta tesis nos proponemos desarrollar un algoritmo tipo *Branch and Cut* para resolver el problema. Además, aprovechando el análisis realizado, también hacemos una propuesta algorítmica para resolver el problema que busca minimizar la cantidad de colores utilizados en el coloreo.

Adicionalmente, se exploró la opción de utilizar técnicas heurísticas para resolver el problema. Las heurísticas permiten conocer asignaciones de colores factibles del problema pero, en general, no pueden determinar si son óptimas o cuan cerca están de la solución del problema. Desarrollamos tres técnicas distintas para resolver el problema: un algoritmo goloso, un algoritmo de programación por restricciones, y un algoritmo de generación de columnas.

Para el desarrollo del algoritmo tipo *Branch and Cut*, propusimos dos modelos de programación lineal entera que evaluamos empíricamente para elegir el más prometedor, sobre el cual se realizó un estudio poliedral en profundidad. Caracterizamos la dimensión del poliedro asociado y demostramos que tres familias de desigualdades válidas definen facetas. El objetivo de realizar el estudio poliedral es entender mejor el espacio de soluciones del modelo para conseguir formulaciones más ajustadas que mejoren la performance del algoritmo. Las desigualdades estudiadas son incorporadas como cortes al modelo, para las cuales se desarrollaron algoritmos de separación que permiten agregarlas a demanda. Además, se consideraron heurística inicial, preprocesamiento y estrategias particulares de generación del árbol de búsqueda.

Los resultados muestran que el algoritmo desarrollado permite resolver instancias que no son posibles de abordar utilizando las herramientas de resolución generales. Haber realizado el estudio poliedral y agregar las facetas como planos de corte resulta ser un factor determinante para afrontar instancias del problema mucho más desafiantes.

Problems on vertex distinguishing edge colorings

In this thesis we analyze the *adjacent vertex distinguishing sum edge coloring problem*. This problem consists in finding an assignment of colors to the edges of a graph with the following constraints: every pair of adjacent edges must have a different color, and every pair of adjacent vertices must not have the same set of colors assigned to the edges incident to each. The goal is to minimize the sum of the colors in an edge coloring that satisfies these constraints. This problem is a special case of a large family of problems known as *graph labeling*, which are a widely used and very popular set of tools to build abstract models for problems that come up in everyday life.

Some variants of *graph labeling problem* have been successfully addressed with mixed integer linear programming (MIP) techniques based on a polyhedral characterization of the set of feasible solutions. We use this approach to develop a branch and cut algorithm to solve the problem. Furthermore, taking advantage of the analysis, we also propose an algorithm to solve the problem that minimizes the number of colors used for an *adyacent vertex distinguishing edge coloring*.

Additionally, we explored using heuristic techniques to solve the problem. These heuristics allow to obtain feasible coloring assignments for the problem but, in general, can not determine if they are optimal or even how far they are from the solution to the problem. We use three different approaches: a greedy algorithm, a constraint programming model and a column generation algorithm.

To develop the branch and cut algorithm we propose two MIP models. We evaluate these models to choose the most promising one and continue with a thorough polyhedral study. We characterized the dimension of the associated polyhedron and proved that three families of valid inequalities result facet-inducing. The aim of the polyhedral study is to understand the set of feasible solutions in the model to obtain a more compact formulation in hope of improving the algorithm's performance. These inequalities are added as cutting planes in the model, we developed exact and heuristic separation algorithms to add them on demand. Moreover, we considered the use of initial heuristics, preprocessing and particular branching strategies.

The results show that the algorithm developed allows us to solve instances that were unsolvable using general purpose solvers. Our polyhedral study and the addition of facets as cutting planes proved to be a crucial factor to solve the most challenging instances.

Índice general

Resumen III

Abstract V

1. Introducción 1

2. Problemas de etiquetado de aristas en grafos 7

2.1. Coloreo propio de aristas 7

2.2. Suma de coloreo propio de aristas 9

2.3. Distinguibilidad de vértices en coloreos propios de aristas 10

2.4. Coloreo propio de aristas con vértices adyacentes dist. 12

2.5. Suma de coloreo propio de aristas con vértices ady. dist. 13

3. Modelos de PLE para AVDSEC 15

3.1. Un modelo de PLE para el problema: **POLI** 15

3.2. Otro Modelo de PLE: **EXP** 17

3.3. Análisis computacional 18

3.3.1. Instancias de prueba 18

3.3.2. Resultados 19

4. Heurísticas 27

4.1. Una heurística golosa 28

4.2. Modelos de Constraint Programming 33

4.2.1. Modelo 1 34

4.2.2. Modelo 2 35

4.3. Heurística basada en generación de columnas 36

4.4. Experimentación y discusión de resultados 44

4.4.1. Criterios para la heurística golosa 45

4.4.2. Comparación de modelos de CP 49

4.4.3. Criterios para GC 53
4.4.4. Comparación entre distintos algoritmos 56

5. Estudio Poliedral **59**
5.1. Casos especiales 60
5.2. Dimensión de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ 65
5.3. Desigualdad válida *Conjuntos de d colores* 67
5.4. Faceta 2 - Conjuntos de $d-1$ colores 107
5.5. Faceta Blossom 140
5.5.1. Puntos que pertenecen a la cara *blossom* 151
5.5.2. Aristas Π-*equivalentes* 155
5.5.3. Faceta *blossom* 162
5.6. Desigualdades válidas para el modelo **POLI** 169
5.6.1. Igualdad válida 170
5.6.2. Desigualdades válidas 170

6. Algoritmo B&C **173**
6.1. Planos de Corte 174
6.1.1. Desigualdades válidas para el modelo **POLI** 175
6.1.2. Desigualdades válidas **d-Color** 175
6.1.3. Desigualdades válidas **(d-1)-Color** 176
6.1.4. Desigualdades válidas *blossom* 177
6.2. Heurística Inicial 180
6.3. Heurística Primal 181
6.4. Estrategias de *Branching* 181
6.5. Discusión de resultados computacionales 183
6.5.1. Instancias de pruebas y entorno de ejecución 183
6.5.2. Evaluación del modelo **POLI** y cortes 183
6.5.3. Evaluación del modelo **EXP** y cortes de conjuntos 186
6.5.4. Evaluación del modelo **EXP** y cortes blossom 192
6.5.5. Evaluación del modelo **EXP** con heurísticas 195
6.5.6. Evaluación del modelo **EXP** con estrategias de *branching* . 198
6.5.7. *EXP-CPX* vs *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* 201

7. AVDEC **205**
7.1. Modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** 205

7.2. Modelo **POLI**$^{\mathbf{r}}$ para el problema **AVDECP** 206
7.3. Fortalecimiento de los modelos 207
7.4. Experiencia computacional 209

8. Conclusiones y trabajo futuro **219**
8.1. Trabajo futuro 222

A. Conceptos preliminares **225**
A.1. Definiciones y notación sobre grafos 225
A.2. Conceptos básicos de Programación Lineal Entera 227
A.2.1. Algoritmos para Problemas de Programación Lineal Entera . 228

B. Resultados extendidos **233**

Bibliografía **275**

1. Introducción

Un etiquetado o valuación de un grafo es un mapeo de los elementos del grafo a un conjunto de números, usualmente enteros positivos, que representan las etiquetas. Si el dominio del mapeo es el conjunto de vértices del grafo, define un etiquetado de los vértices; en el caso de que sea el conjunto de aristas, es un etiquetado de aristas; mientras que si las etiquetas son asignadas a los vértices y aristas del grafo, se obtiene un etiquetado total del mismo. Los problemas de etiquetado de grafos fueron introducidos a fines de la década de 1960 [58] y desde entonces se han publicado miles de artículos estudiando diferentes casos, tanto desde enfoques teóricos como algorítmicos [28].

Como muchos problemas en grafos, el etiquetado es una herramienta muy útil para modelar situaciones de la vida real provenientes de campos muy disímiles, como por ejemplo redes de comunicación, biología, física o psicología social.

Según el escenario que se quiera modelar será necesario requerir que el mapeo cumpla determinadas condiciones. Como estructura general, para modelar las distintas situaciones, a partir de un etiquetado se utiliza la noción de peso de los elementos de un grafo. Por ejemplo, como peso de un vértice se puede definir la suma de todas las etiquetas de sus aristas incidentes más su etiqueta. Análogamente, el peso de una arista podría ser la suma de las etiquetas de sus vértices incidentes más su etiqueta. En ambos casos sólo se consideran las etiquetas de los elementos pertenecientes al dominio del etiquetado.

Formalmente, consideremos un grafo no dirigido $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de vértices y E el de aristas que relacionan dos vértices del conjunto V. Decimos que una arista es incidente a un vértice si es uno de los dos vértices que relaciona la arista, y que dos vértices son adyacentes si existe una arista que los relaciona. Denotamos con $I(v)$ al conjunto de aristas incidentes a $v \in V$ y con $N(v)$

al conjunto de sus vértices adyacentes. Un etiquetado es un mapeo $f : D \rightarrow N$, donde $D = V$, $D = E$ ó $D = V \cup E$ según el caso. El peso de un vértice $v \in V$ se define como

$$w(v) = f(v) * f(e_1) * \ldots * f(e_{|I(v)|}),$$

con $e_i \in I(v)$, y el peso de una arista $e = uv \in E$ es

$$w(e) = f(e) * f(u) * f(v),$$

donde $*$ es una operación binaria, usualmente la adición.

Los distintos requerimientos que se imponen sobre los pesos de los elementos del grafo caracterizan el problema a ser estudiado. En la literatura, los problemas de etiquetado de grafos persiguen alguno de los siguientes tipos de objetivo:

- *Factibilidad:* encontrar un etiquetado que cumpla los requerimientos.
- *Optimalidad:* minimizar o maximizar una función objetivo tal que exista un etiquetado que cumpla los requerimientos.

Los problemas de etiquetado, además de un interés teórico, tienen una gran relevancia desde el punto de vista de aplicaciones. En numerosas situaciones presentes en diversas organizaciones se debe administrar recursos, donde cada escenario da lugar a restricciones particulares que deben ser satisfechas. Los problemas de etiquetado de grafos resultan esquemas muy flexibles para modelar estas situaciones. Básicamente, los recursos son asociados a los vértices del grafo y las aristas modelan incompatibilidades sobre su utilización.

Por ejemplo, en problemas en redes de comunicaciones, los transmisores son asociados a los vértices del grafo y las aristas representan potenciales interferencias. Un posible objetivo es asignar frecuencias (etiquetas) tratando de minimizar el espectro usado o el nivel de interferencia. También pueden incluirse restricciones sobre las demandas o modelado de flujo de la información que circula en la red. Las primeras publicaciones sobre la aplicación de etiquetado de grafos a problemas de gestión de redes surgieron con el trabajo de Metzger [52] y posteriormente algunas generalizaciones presentadas por Hale [33]. Muy buenas reseñas de esta relación son presentadas por Aardal et al. [1] y Eisenblätter et al. [24].

El constante avance en la tecnología y crecimiento de las organizaciones hace que el problema de administrar recursos despierte un interés activo entre los investigadores, ya que, día a día, aparecen nuevos desafíos en problemas donde se busca un compromiso entre costos, confiabilidad, diseño y eficiencia. La importancia práctica de estos problemas en este tipo de escenarios, plantea la necesidad de obtener soluciones para instancias de tamaño medio a moderado provenientes de aplicaciones del mundo real en tiempos razonables.

Dentro de la gran familia de problemas de etiquetado, los casos particulares más estudiados son el *coloreo de vértices* y el *coloreo de aristas*, donde las etiquetas son referidas como colores. En un coloreo de los vértices de un grafo $G = (V, E)$, el dominio del mapeo f es el conjunto de vértices V y se requiere que $f(v) \neq f(u)\ \forall uv \in E$. El problema de coloreo de vértices busca un coloreo de los vértices de G que minimice la cantidad de colores utilizados. Esta cantidad se conoce como número cromático de G y se denota por $\chi(G)$.

Análogamente, en la versión para aristas, el dominio es el conjunto E y la imposición es que $f(uv) \neq f(u\bar{v})$ para todo par de aristas uv y $u\bar{v}$ incidentes en u, $\forall u \in V$ para obtener un coloreo propio de las aristas. El problema de coloreo de aristas busca un coloreo propio de las aristas de G que minimice la cantidad de colores utilizados. Esta cantidad se conoce como índice cromático de G y se denota por $\chi'(G)$.

También existen variantes de etiquetado de grafos donde el objetivo, en lugar de encontrar la mínima cantidad de etiquetas (colores representados por números naturales) utilizadas, es minimizar alguna otra función de los colores. Por ejemplo, el problema *sum coloring* busca una asignación de colores a los vértices del grafo tal que, además de definir un coloreo, minimice la suma de los colores utilizados. Este problema fue introducido por Kubicka and Schwenk [42][43] en 1989.

Análogamente, el *sum edge coloring* es un etiquetado que asigna colores a las aristas del grafo G tal que sea un coloreo propio de aristas y la suma de los colores asignados a las aristas sea mínima [29][6]. En este caso se denota con $\Sigma'(G)$ al valor de la mínima suma y con $s'(G)$ a la cantidad de colores que se utilizan para alcanzar $\Sigma'(G)$.

Cualquiera de las versiones mencionadas forma parte del área de investigación llamada Optimización Combinatoria y, en su gran mayoría, pertenecen a la clase de complejidad *NP-Difícil*. En general, estos problemas tienen un número exponencial de soluciones factibles, lo que hace inviable pensar en un algoritmo enumerativo exhaustivo para hallar la solución óptima.

Algunas variantes del problema de etiquetado de grafos han sido abordadas con éxito con técnicas de programación lineal entera. Usualmente existen diferentes formas de representar matemáticamente el mismo problema, y de la formulación utilizada puede depender el éxito de resolver en forma óptima instancias de tamaño mediano/grande en una cantidad de tiempo razonable. Algunas veces, contrariamente a la intuición, puede resultar ventajoso incrementar, en lugar de disminuir, el número de variables o restricciones. La metodología habitual de resolución de un problema de programación lineal entera está basada en algoritmos tipo *Branch and Cut* ó *Branch and Price*, para los cuales la caracterización poliedral del conjunto de soluciones factibles suele resultar clave para el éxito del algoritmo.

Dentro de los problemas de etiquetado, el problema de coloreo de vértices y algunas generalizaciones han sido abordados exitosamente mediante técnicas de programación lineal entera [15, 48, 47, 46, 50, 51, 36, 27, 21]. Cabe señalar que cada variante del problema es tratada en forma particular, explotando sus características, no existiendo algoritmos competitivos para casos generales. El problema de coloreo de aristas, así como algunas generalizaciones, no ha tenido en la literatura un tratamiento algorítmico basado en programación lineal entera tan vasto como el coloreo de vértices [54, 44, 11, 10].

Dado el éxito demostrado de los métodos basados en programación lineal entera a problemas de Optimización Combinatoria y, en particular, a problemas de etiquetado de grafos, el objetivo propuesto en esta tesis es explorar la utilización de este enfoque para resolver algunas variantes del problema de etiquetado de aristas que, hasta donde llega nuestro conocimiento, no han sido hasta el momento abordadas en la literatura bajo esta perspectiva.

Como describimos antes, a partir de las etiquetas asignadas a las aristas de un grafo se puede definir una función de peso para los vértices. Entre las más usuales que se encuentran en la literatura podemos destacar:

- *suma*: $Sum(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e) \ \forall v \in V$
- *unión*: $Set(v) = \cup_{e \in I(v)} f(e) \ \forall v \in V$
- *gap*: $Gap(v) = \max_{e \in I(v)} f(e) - \min_{e \in I(v)} f(e) \ \forall v \in V$

Diferentes requerimientos sobre estos pesos dan origen a diferentes clases de coloreos de aristas. Por ejemplo:

- $Sum(u) \neq Sum(v) \ \forall u, v \in V$ (*irregular assignment* [18])
- $Gap(u) \neq Gap(v) \ \forall u, v \in V$ (*gap vertex distinguishing edge coloring* [61])
- $Set(u) \neq Set(v) \ \forall u, v \in V$ (*vertex-distinguishing edge coloring* [5])
- $Set(u) \neq Set(v) \ \forall u, v$ tq $uv \in E$ (*adjacent vertex-distinguishing edge coloring* [68]).

En esta tesis nos vamos a centrar en coloreos propios de aristas que exigen distinguibilidad entre vértices adyacentes con dos objetivos: la minimización de la suma de los colores utilizados (*adjacent vertex-distinguishing sum edge coloring problem*-**AVDSECP**) y la minimización de la cantidad de colores utilizados (*adjacent vertex-distinguishing edge coloring problem*-**AVDECP**).

Como mencionamos, nuestro objetivo es abordar los problemas desde la programación lineal entera, proponiendo un algoritmo *Branch and Cut* basado en el estudio poliedral de un modelo propuesto.

El trabajo está dividido en 7 Capítulos.

En el Capítulo 2 hacemos un relevamiento de la literatura de resultados teóricos y algorítmicos relacionados con problemas de coloreo de aristas que resultan de interés en este trabajo.

En el Capítulo 3, proponemos modelos de programación lineal entera para el **AVDSECP**. Estos modelos son evaluados computacionalmente, analizando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. El objetivo es identificar qué modelo resulta más promisorio para desarrollar un algoritmo tipo *Branch and Cut* sobre el mismo.

En el Capítulo 4, presentamos y evaluamos algoritmos heurísticos para **AVDSECP**. Debido a que los problemas que tratamos pertenecen a la clase de complejidad *NP-Difícil*, este tipo de algoritmos tiene el objetivo de encontrar soluciones de buena calidad en tiempos razonables.

En el Capítulo 5, presentamos un estudio poliedral de uno de los modelos analizados en el Capítulo 3. La caracterización del poliedro asociado a un modelo de programación lineal entera mediante desigualdades válidas juega un rol clave en el desarrollo de algoritmos eficientes tipo *Branch and Cut*.

En el Capítulo 6 describimos las principales componentes de nuestro algoritmo: algoritmos de separación, heurísticas inicial y primal y estrategias de recorrido del árbol. Finalizamos con una evaluación computacional del algoritmo y discusión de resultados.

En el Capítulo 7 experimentamos y evaluamos un algoritmo para el caso **AVDECP**, adaptando el desarrollo propuesto para **AVDSECP** e incluyendo algunas técnicas particulares para este problema.

Finalmente, en el Capítulo 8 exponemos las conclusiones sobre este trabajo y futuras líneas de investigación.

En el Apéndice introducimos la notación y conceptos básicos de la teoría de grafos y programación lineal entera que usamos en esta tesis.

2. Problemas de etiquetado de aristas en grafos

2.1. Coloreo propio de aristas

Un coloreo propio de las aristas de un grafo consiste en un etiquetado de las aristas tal que todo par de ellas incidentes a un mismo vértice tengan distinto color.

Formalmente, sea el grafo $G = (V, E)$ y $M = \{1, \cdots, m\}$, con $m = |E|$, un conjunto de números naturales que representan los colores o etiquetas, un coloreo propio de aristas es una asignación de colores a las aristas $f : E \to M$ tal que cumple la restricción
$f(uv) \neq f(u\bar{v})$ para todo par de aristas, uv y $u\bar{v} \in E$, incidentes a u, $\forall u \in V$.

El problema de coloreo de aristas de un grafo G consiste en encontrar la mínima cantidad de colores necesarios tal que exista un coloreo propio de las aristas de G. A este número se lo conoce como índice cromático de G y se denota como $\chi'(G)$. Determinar $\chi'(G)$ es un problema computacionalmente difícil [39]. Como los colores son indistinguibles, podemos pensar que un coloreo con k colores utiliza los colores del 1 a k.

Una gran cantidad de aplicaciones se pueden resolver modelándolas como problemas de coloreo propio de aristas, como es el caso de escenarios de programación de tareas. Analicemos situaciones donde se quiere realizar un conjunto de tareas que tardan el mismo tiempo en ejecutarse y que cada una requiere de dos recursos compartidos. Por ejemplo, si se requiere fabricar un conjunto de productos, para lo cual cada producto necesita ser procesado a través de ciertas tareas (en cualquier orden, no simultáneas) y cada tarea se realiza en una máquina específica (Open

Shop Scheduling [32]). En este caso, podemos construir un grafo G donde los vértices representan a cada uno de los productos y a cada una de las máquinas. Si para un producto se debe realizar una tarea en una máquina, existirá una arista en G entre los vértices que los representan. Si todas las tareas demoran la misma cantidad de tiempo, un coloreo propio de aristas representa una posible programación, donde cada color representa el período en el cual cada tarea es procesada. Entonces, $\chi'(G)$ define el menor tiempo en el que se pueden realizar todas las tareas.

En otro contexto, supongamos que en una red de computadoras se desean intercambiar archivos (Scheduling file transfers [20]). Cada intercambio requiere de una máquina específica que envía el archivo y otra que lo recibe, durante este proceso la máquina es exclusiva del mismo, es decir, una máquina no puede enviar o recibir más de un archivo a la vez. En este caso, los vértices del grafo se corresponderán a las máquinas, y una arista entre dos vértices representará que se debe intercambiar un archivo entre las máquinas correspondientes. Un coloreo propio de aristas modela una programación de tareas en donde las aristas que utilizan el color i representan los intercambios de archivos que se ejecutan en el momento i. Si el objetivo es minimizar el tiempo en que todas las tareas terminan, nuevamente la situación es modelada por el problema de coloreo propio de aristas.

Dentro de los resultados más conocidos del problema de coloreo propio de aristas está el teorema de Vizing[64]. Este teorema dice que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ para cualquier grafo G, donde $\Delta(G)$ es el grado máximo de G. Dado que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, se pueden clasificar los grafos en dos clases: clase 1 si $\chi'(G) = \Delta(G)$ o clase 2 si $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Decidir a qué clase pertenece un grafo es un problema computacionalmente difícil. En la literatura existen trabajos que analizan la pertenencia de cierta familia de grafos a alguna de estas clases, así como también conjeturas que aun están abiertas. Muy buenas referencias sobre el estado del arte son los trabajos de Cao et al.[16] y McDonald [49].

Desde el punto de vista de técnicas basadas en programación lineal entera, hasta donde llega nuestro conocimiento, hay sólo dos trabajos en la literatura. El primer trabajo es de Nemhauser and Park [54] donde proponen un modelo con un número exponencial de variables correspondientes a todos los posibles *matchings* maximales del grafo. En un coloreo propio de aristas, cada color define un *matching*, por lo tanto el problema de coloreo propio de aristas puede formularse como encontrar un cubrimiento de cardinal mínimo de las aristas del grafo por medio de *matchings*.

El algoritmo propuesto es un algoritmo de generación de columnas el cual, además, incluye como planos de corte a las desigualdades de ciclo impar (se necesitan al menos 3 *matchings* para cubrir las aristas de un ciclo impar). Los autores restringen su propuesta a grafos regulares de grado 3 y, de esta manera, tanto el problema de *pricing* como la separación de los planos de corte los pueden resolver en forma eficiente.

El segundo trabajo es de Lee and Leung [44], donde comparan la formulación propuesta en [54] con una formulación basada en variables binarias que indican si una arista está coloreada con un color. Con estas variables logran un modelo polinomial, tanto en número de variables como de restricciones. Este modelo es ajustado con las conocidas desigualdades *blossom* [22], así como también con otras que explotan el hecho de trabajar con grafos regulares de grado 3. La experimentación y comparación de formulaciones se realiza en una familia muy acotada de grafos regulares de grado 3, donde el modelo polinomial propuesto muestra buena performance.

2.2. Suma de coloreo propio de aristas

El problema de suma de coloreo propio de aristas consiste en encontrar un coloreo propio de aristas tal que minimice la suma de los colores utilizados. Se denota con $\Sigma'(G)$ al valor de la mínima suma y decimos que $s'(G)$ es la mínima cantidad de colores que se utilizan para alcanzar $\Sigma'(G)$.

Consideremos el problema de programación de tareas descripto anteriormente (Scheduling file transfers [20]). Como mencionamos, si el objetivo es minimizar el tiempo en que todas las tareas terminan, la situación es modelada por el problema de coloreo propio de aristas. En cambio, si se desea una programación que minimice el promedio del tiempo en que se realizan las tareas, entonces el problema que se desea resolver se puede modelar como un problema de coloreo propio de aristas donde se busca minimizar la suma de los colores de las aristas.

El problema fue introducido por Kubicka[42][43] en 1989, donde se demuestra que es un problema *NP-Difícil*. En su gran mayoría, los trabajos publicados se enfocan en resultados teóricos que buscan determinar $\Sigma'(G)$ y/o $s'(G)$ en ciertas familias particulares de grafos o en dar cotas superiores/inferiores para estos índices.

Respecto a cotas, es claro que la cantidad de colores debe ser mayor o igual al índice cromático $\chi'(G)$ y por lo tanto $s'(G) \geq \chi'(G)$. Además, por el teorema de Vizing, se sabe que $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Un resultado interesante de Mitchem et al.[53] es que $s'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Es decir, todo coloreo propio que minimiza la suma de los colores utiliza a lo sumo $\Delta(G) + 1$ colores, que es la cota superior del índice cromático.

Estudios de complejidad y propuestas de algoritmos para diversas familias particulares de grafos han sido tratadas en la literatura, por ejemplo: árboles [29, 70], bipartitos [29, 57], regulares [59] y multiciclos [17].

Desde el punto de vista de técnicas basadas en programación lineal entera, hasta donde llega nuestro conocimiento, sólo el trabajo de Halldórsson et al. [35] utiliza un modelo de programación lineal entera basado en variables asociadas a los *matchings* del grafo para el desarrollo de un algoritmo aproximado.

2.3. Distinguibilidad de vértices en coloreos propios de aristas

Dado un coloreo propio de aristas, definimos al *conjunto de colores de un vértice* como el conjunto de colores de sus aristas incidentes. Un par de vértices se dice *distinguible* si sus conjuntos de colores son distintos.

Un coloreo propio de aristas con vértices distinguibles es un coloreo propio de aristas tal que todo par de vértices es *distinguible*. Por lo tanto, un conjunto de colores identifica unívocamente a cada vértice. El problema de encontrar la mínima cantidad de colores necesarias para obtener un coloreo propio de aristas con vértices distinguibles se conoce en inglés como *vertex-distiguishing edge coloring* *problem*[14] y se nota con $\chi'_s(G)$ a esta cantidad. La idea de distinguir los conjuntos de colores en etiquetados fue introducida por Aigner and Triesch en [2] y en particular, para coloreos propios de aristas por Burris and Schelp en [14].

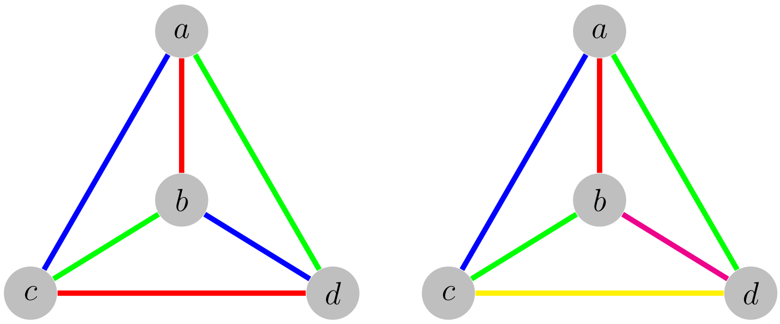


Figura 2.1. Coloreos de aristas

En la figura 2.1 mostramos un grafo con dos coloreos propios de aristas distintos. El coloreo de la izquierda es un coloreo propio de aristas válido. Sin embargo, los vértices a y b tienen el mismo conjunto de colores. Entonces, este coloreo no cumple con tener vértices distinguibles. Por otro lado, el coloreo de la derecha es un ejemplo de un coloreo propio de aristas con vértices distinguibles; es decir, todos los conjuntos de colores de los vértices son diferentes.

En la literatura, este problema recibió especial atención desde el punto de vista de teoría de grafos, como una extensión del problema de coloreo propio de aristas entre muchas otras variantes.

En el trabajo inicial de Burris and Schelp[14] se estudiaron los casos particulares de grafos completos, bipartitos, caminos y ciclos. Además se dejó planteada una conjetura que establece que para un grafo de n vértices se verifica que $\chi'_s(G) \leq n+1$. El trabajo de Favaron et al.[25] demostró una cota superior igual a $n+\Delta(G)-1$ y en Balister et al. [4] analizaron el caso de grafos con $\Delta(G) = 2$. La conjetura fue demostrada por Bazgan et al.[7] quienes, además, demostraron que en caso de grafos con $\Delta(G) > n/3$, esta cota puede ser ajustada a $\Delta(G) + 5$ [8].

Desde el punto de vista de técnicas basadas en programación lineal entera, hasta donde llega nuestro conocimiento, no hay trabajos publicados en la literatura.

2.4. Coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles

Un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles busca encontrar un coloreo propio de aristas que tenga la propiedad que para cada par de vértices adyacentes el conjunto de colores de las aristas incidentes a cada uno sea diferente. Este problema es similar al anterior salvo que restringe la restricción de distinguibilidad a vértices adyacentes. Es decir, podría existir un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles tal que dos vértices no adyacentes tengan el mismo conjunto de colores. El problema de encontrar la mínima cantidad de colores necesarios para un coloreo de este tipo se lo conoce en inglés como *adjacent vertex-distiguishing edge coloring*(**AVDECP**) y se nota $\chi'_{av}(G)$ a la mínima cantidad de colores.

Zhang et al. [68] fueron los primeros en definir y estudiar el problema. Determinaron $\chi'_{av}(G)$ para varias clases de grafos: árboles, ciclos, completos, bipartitos completos, y propusieron la siguiente conjetura:

Conjetura 2.4.1. *Si G es un grafo conexo con al menos 6 vértices, entonces $\chi'_{av}(G) \leq \Delta(G) + 2$ donde $\Delta(G) = max\{d(u) : u \in V\}$*

Si bien la conjetura aun no ha sido demostrada para grafos en general, desde entonces diversos trabajos estudiaron casos particulares para los cuales demostraron la conjetura o identificaron cotas superiores. El trabajo de Balister et al.[5] confirmó la conjetura 2.4.1 para todos los grafos bipartitos y grafos con $\Delta(G) = 3$. Hatami[38] demostró que todo grafo G con $\Delta(G) > 10^{20}$ cumple que $\chi'_{av}(G) \leq \Delta(G) + 300$. Posteriormente, Joret and Lochet[40] mejoraron esa cota a $\Delta(G)+19$. Bu et al.[13] validaron la conjetura 2.4.1 para todos los grafos planares de cintura mayor o igual a 6.

El trabajo de Chen and Guo[19] determinó los índices cromáticos para el problema **AVDECP** en el caso de grafos hipercubos. Wang and Wang[65] estudiaron los grafos tales que el máximo de los promedios de los grados en los subgrafos es bajo. Edwards et al.[23] mostraron que si G es un grafo planar bipartito con $\Delta(G) \geq 12$ entonces $\chi'_{av}(G) \leq \Delta(G) + 1$. Akbari et al.[3] probaron que $\chi'_{av}(G) \leq 3\Delta(G)$.

Wang and Wang[66] dieron una caracterización completa de $\chi'_{av}(G)$ para los grafos que no tienen menores K_4. Tian and Wang[62] caracterizaron el coloreo **AVDECP** de ciertas composiciones de grafos.

Como mencionamos antes, Bazgan et al.[7] probaron que para grafos con n vértices existe un coloreo propio con vértices distinguibles con a lo sumo $n+1$ colores. Como este tipo de coloreo también cumple las condiciones de nuestro problema, entonces esta cota también es válida para $\chi'_{av}(G)$. Además, la cota que probaron [8] para el caso $d(v) > n/3 \ \forall v \in V$, también nos permite afirmar que $\chi'_{av}(G) \leq \Delta(G) + 5$.

A pesar de la gran cantidad de trabajos publicados que existen sobre este problema, hasta donde llega nuestro conocimiento, no hay propuestas de algoritmos basados en programación lineal entera.

2.5. Suma de coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles

Tal como ocurre con el problema de coloreo propio de aristas, puede resultar de interés minimizar la suma de los colores utilizados. En este caso, queda definido lo que llamaremos el problema de suma de coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Utilizaremos las siglas **AVDSECP** (*adjacent vertex distiguishing sum edge coloring*) para referirnos al problema.

Utilizaremos $\Sigma'_{av}(G)$ para definir el mínimo valor de dicha suma para el grafo G y $s'_{av}(G)$ para la mínima cantidad de colores utilizados para alcanzar la suma mínima.

No necesariamente conviene utilizar la menor cantidad de colores. Esto depende de la estructura del grafo. En la figura 2.2 se puede ver que la suma del coloreo de la izquierda es de 30, mientras que el coloreo de la derecha suma 27. No existe un coloreo con menor suma a 30 utilizando el conjunto de colores de la izquierda. Por lo tanto, la utilización de menos colores no garantiza una mejora en la suma del coloreo.

No hemos encontrado definido el problema en la literatura, por lo cual no disponemos de resultados teóricos. Para el problema **AVDSECP** no tenemos una

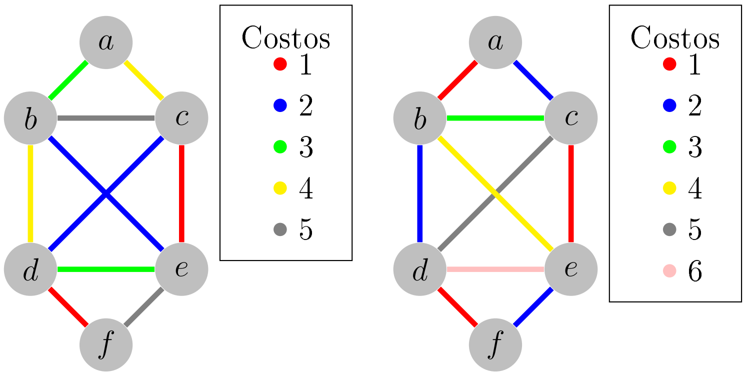


Figura 2.2. El primer coloreo tiene mayor costo que el segundo que utiliza más colores

cota para $s'_{av}(G)$ más allá de que todas las aristas pueden tener un color distinto. Basándose en los resultados obtenidos para la suma de coloreos de aristas, se podría esperar que si la conjetura fuera cierta entonces $s'_{av}(G) \leq \Delta(G) + 2$. Sin embargo, hay casos que no cumplen esa propiedad y, además, tampoco vale que $s'_{av}(G) \leq |V| + 1$, que es una cota demostrada para el problema de coloreo propio de aristas con vértices distinguibles. Esto le da un interés particular a este problema.

3. Modelos de programación lineal entera para AVDSECP

En este capítulo proponemos y comparamos dos modelos de programación lineal entera para el problema **AVDSECP**. El objetivo es analizar el comportamiento de los modelos para elegir el más prometedor y profundizar su estudio con el fin de desarrollar un algoritmo tipo *Branch and Cut* de buena performance.

Recordamos que consideramos un grafo $G = (V, E)$ y $M = \{1, \cdots, m\}$, con $m = |E|$, un conjunto de números naturales que representan los colores. Un par de vértices se dice *distinguible* si se diferencian en el conjunto de colores de las aristas incidentes a cada vértice. En **AVDSECP** buscamos un coloreo propio de aristas tal que todo par de vértices adyacentes sea *distinguible* y se minimice la suma de los colores utilizados.

Diremos que dos vértices adyacentes y de igual grado generan un *conflicto*. Nos referiremos a estos vértices como *vértices en conflicto*, y a la arista incidente a ellos como *arista en conflicto*. Además, definimos el *grado del conflicto* como el grado de los vértices.

3.1. Un modelo de PLE para el problema: POLI

El primer modelo con el que trabajamos utiliza una cantidad de variables y restricciones de orden polinomial (en la cantidad de vértices y de aristas), por lo que lo llamaremos **POLI**. Dado un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto de colores M, para cada arista $uv \in E$ y para cada color $k \in M$, definimos la variable binaria a_{uvk} que toma valor 1 si la arista uv tiene asignado el color k y valor 0 en caso contrario. Por cada vértice $v \in V$ y color $k \in M$, determinamos la variable binaria x_{vk} que toma valor 1 si alguna arista incidente a v tiene asignado el color k, si no toma valor 0. Por último, la variable binaria w_{uvk}, definida para los pares de vértices en conflicto u y v, toma valor 1 si los vértices u y v difieren en el color k, si no toma valor 0.

Con estas variables describimos el siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{k \in M} \sum_{uv \in E} k a_{uvk} & \\
\text{sujeto a} & \\
\sum_{k \in M} w_{uvk} \geq 1 & \qquad \forall uv \in E, deg(u) = deg(v) && (3.1)\\
w_{uvk} \leq x_{uk} + x_{vk} & \qquad \forall uv \in E, deg(u) = deg(v), k \in M && (3.2)\\
w_{uvk} \leq 2 - (x_{uk} + x_{vk}) & \qquad \forall uv \in E, deg(u) = deg(v), k \in M && (3.3)\\
x_{uk} = \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} a_{uvk} & \qquad \forall u \in V, k \in M && (3.4)\\
\sum_{k \in M} a_{uvk} = 1 & \qquad \forall uv \in E && (3.5)\\
a_{uvk} \in \{0,1\} & \qquad \forall uv \in E, k \in M &&\\
x_{uk} \in \{0,1\} & \qquad \forall u \in V, k \in M &&\\
w_{uvk} \in \{0,1\} & \qquad \forall uv \in E, deg(u) = deg(v), k \in M &&
\end{aligned}
$$

La restricción (3.1) fuerza a que exista un color que distinga a cada par de vértices en conflicto. Si los vértices comparten algún color k, o ninguno es incidente al color k, entonces las restricciones (3.2) y (3.3) fuerzan a la variable que distingue a esos vértices en el color k a tomar el valor 0. Entonces, w_{uvk} sólo podrá tomar el valor 1 en el caso que el color k esté asignado a una única arista incidente a u ó v. Luego, en (3.4), se fijan los valores de las variables binarias x_{uk} como la suma de todas las aristas que tienen el color k. A su vez, restringe el valor de la suma a los valores 0 y 1. Por último, en (3.5), se define que cada arista debe tener asignado exactamente un color.

3.2. Otro Modelo de PLE: EXP

El segundo modelo que presentamos tiene una cantidad de variables de orden polinomial (en número de vértices y de aristas), pero cuenta con una cantidad de restricciones de orden exponencial, por lo que lo llamamos **EXP**. Utilizamos las mismas variables binarias a_{uvk} y x_{uk} que en el caso anterior. El modelo queda definido de la siguiente manera:

$$\min \sum_{k \in M} \sum_{uv \in E} k a_{uvk}$$

sujeto a

$$\sum_{v \in \mathcal{N}(u)} a_{uvk} = x_{uk} \qquad \forall u \in V, k \in M \tag{3.6}$$

$$\sum_{k \in M} a_{uvk} = 1 \qquad \forall uv \in E \tag{3.7}$$

$$\sum_{k \in S} x_{uk} + x_{vk} \leq 2deg(u) - 1 \qquad \substack{\forall S \subseteq M, |S| = deg(u) \\ uv \in E, deg(u) = deg(v)} \tag{3.8}$$

$$a_{uvk} \in \{0, 1\} \qquad \forall uv \in E, k \in M$$

$$x_{uk} \in \{0, 1\} \qquad \forall u \in V, k \in M$$

Las restricciones (3.6) y (3.7) establecen las condiciones para un coloreo propio de aristas, tal como señalamos en el modelo anterior. Con la restricción (3.8) se restringe el uso de los colores en las aristas incidentes a vértices adyacentes en conflicto. Sean u y v dos vértices adyacentes de grado $deg(u) = deg(v) = d$, no puede existir un conjunto de d colores tal que todas las aristas incidentes a estos vértices tienen asignado alguno de estos colores.

Si bien el modelo parece más simple por poder escribirse de manera más sucinta y con menos variables, contiene muchas más restricciones que el modelo anterior, ya que para cada par de vértices de grado d en conflicto existen $\binom{m}{d}$ cantidad de restricciones. Por ejemplo, si existe un conflicto de grado 5 en un grafo con 20 aristas, existen 15504 restricciones.

3.3. Análisis computacional

En las secciones anteriores presentamos dos modelos para resolver el mismo problema. Por un lado, el modelo **POLI** tiene mayor cantidad de variables que el modelo **EXP**. Sin embargo, el modelo **EXP** tiene una mayor cantidad de desigualdades que el modelo **POLI**. A priori no hay ninguna razón a partir de la cual podamos afirmar que uno de los modelos es computacionalmente superior al otro. El tamaño del modelo (cantidad de variables y/o restricciones) no es un indicador fehaciente de la performance que pueda tener una formulación. Nuestro primer objetivo entonces es evaluar empíricamente los modelos con el fin de identificar aquel más prometedor para desarrollar un algoritmo *Branch and Cut*. Dado que en la literatura no hemos encontrado un tratamiento algorítmico del problema, tuvimos que definir nuestro propio conjunto de instancias de prueba.

3.3.1. Instancias de prueba

En primer lugar armamos grafos pseudo-aleatorios. En unas pruebas preliminares notamos que la cantidad de conflictos en grafos aleatorios es baja. Además, al comparar resultados entre instancias, la cantidad de conflictos puede ser determinante, ya que cada arista entre vértices de igual grado impone una restricción al problema. Por lo tanto decidimos construir grafos pseudo-aleatorios con una cantidad controlada e *interesante* de conflictos. Para lograr esto comenzamos con un árbol y agregamos aristas incrementalmente. En cada paso elegimos aleatoriamente un vértice y tratamos de crear una arista que aumente la cantidad de conflictos, es decir, buscamos vértices del mismo grado. Para este tipo de grafos tenemos instancias de baja, media y alta densidad de aristas. Estos grafos los denominaremos *random*.

En pruebas preliminares no encontramos grafos G donde la solución de **AVDECP** requiriera más de $\Delta(G) + 2$ colores. Esto refuerza de alguna manera la conjetura establecida en [68]. Es más, en nuestras pruebas notamos que la cantidad de grafos que requieren $\Delta(G) + 2$ colores es muy baja. Sin embargo, este tipo de grafos son muy interesantes ya que requieren decidir que no hay coloreo factible con $\Delta(G)+1$ colores. Por lo tanto, utilizamos un tipo de grafo con una alta densidad de aristas y para los cuales conocemos que la cantidad de colores necesarios es $\Delta(G) + 2$. La estructura de estos grafos es muy particular para lograr este número, resultan de dividir una arista en un grafo completo. Es decir, se eligen dos vértices u y v del grafo completo y se agrega un vértice w. Luego, se saca la arista uv del grafo y se agregan las aristas uw y vw. A estos grafos los llamaremos $\Delta + 2$.

Por último decidimos experimentar con grafos $k-regulares$. En estos grafos todos los vértices tienen el mismo grado. De esta forma obtenemos que todas las aristas del grafo son entre vértices de igual grado. Por lo tanto, todo par de vértices adyacentes está en conflicto. En este caso, no existen asignaciones que utilicen $\Delta(G)$ colores, ya que siempre existen dos vértices adyacentes de grado $\Delta(G)$. Estas instancias las denominamos *regular*.

En la tabla 3.1 pueden verse los detalles de cada una de las instancias: cantidad de vértices, cantidad de aristas, grado máximo, los diferentes índices cromáticos, cantidad de pares de vértices en conflicto, porcentaje de densidad y de conflictos.

3.3.2. Resultados

Utilizando las instancias de referencia comparamos el modelo **POLI** con el modelo **EXP** de manera computacional.

Para realizar los experimentos computacionales utilizamos una computadora con procesador Intel i7 3.5GHz con 48 GB de memoria RAM. Utilizamos Ubuntu 16.04 LTS como sistema operativo.

Implementamos un algoritmo *Branch and Cut* utilizando las librerías del paquete CPLEX[1] 12.7, con un solo *thread* y todos los parámetros por defecto. El código se desarrolló en C++ con la interfaz en C de CPLEX. En el caso del modelo **EXP**, las restricciones (3.8) fueron tratadas como restricciones *lazy*, es decir, incorporándose al modelo bajo demanda en el caso que la solución de la relajación lineal asociada a un nodo tenga coordenadas enteras. La búsqueda de restricciones violadas se realiza en forma exhaustiva. Todas las ejecuciones fueron realizadas con un tiempo límite de 3600 segundos.

[1]https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio

Tipo	densidad	Nombre	$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$	$\Delta(G)$	χ'_{av}	Σ'_{av}	s'_{av}	conflictos	%densidad	%conflictos
random	baja	bc-43-1-1	43	92	8	9	305	9	25	9.73 %	27.17 %
		bc-43-2-1	43	96	9	10	331	10	25	10.15 %	26.04 %
		bc-43-3-1	43	95	8	9	310	9	27	10.04 %	28.42 %
		bc-43-4-1	43	146	10	11	631*	11	38	15.43 %	26.03 %
		bc-43-5-1	43	98	9	10	354	11	25	10.36 %	25.51 %
		bc-43-6-1	43	109	9	10	401	10	31	11.52 %	28.44 %
	media	bc-13-1-5	13	38	9	9	149	9	12	41.76 %	31.58 %
		bc-13-2-5	13	37	8	9	148	9	9	40.66 %	24.32 %
		bc-13-3-5	13	36	6	7	129	7	19	39.56 %	52.78 %
		bc-13-4-5	13	21	4	5	55	5	17	23.08 %	80.95 %
		bc-13-5-5	13	33	6	7	115	8	25	36.26 %	75.76 %
		bc-13-6-5	13	34	6	7	119	7	18	37.36 %	52.94 %
	alta	bc-12-1-9	12	65	11	13	398	14	45	83.33 %	69.23 %
		bc-12-2-9	12	64	11	13	387	13	37	82.05 %	57.81 %
		bc-12-3-9	12	64	11	13	387	13	37	82.05 %	57.81 %
		bc-12-4-9	12	64	11	13	387	13	37	82.05 %	57.81 %
		bc-12-5-9	12	63	11	12	374	13	29	80.77 %	46.03 %
		bc-12-6-9	12	63	11	12	375	14	31	80.77 %	49.21 %
$\Delta + 2$	alta	inst_7_5	7	16	5	7	53	7	14	57.14 %	87.50 %
		inst_8_6	8	22	6	8	82	8	20	61.11 %	90.91 %
		inst_9_7	9	29	7	9	124	9	27	64.44 %	93.10 %
		inst_10_8	10	37	8	10	176	10	35	67.27 %	94.59 %
regular	baja	kinst-4-033-0	33	66	4	5	183	5	66	11.76 %	100.00 %
		kinst-4-033-1	33	66	4	5	183	5	66	11.76 %	100.00 %
		kinst-4-033-2	33	66	4	5	183	5	66	11.76 %	100.00 %
		kinst-4-033-3	33	66	4	5	183	5	66	11.76 %	100.00 %
		kinst-4-033-4	33	66	4	5	183	5	66	11.76 %	100.00 %
		kinst-4-034-0	34	68	4	5	188	5	68	11.43 %	100.00 %
		kinst-4-034-1	34	68	4	5	188	5	68	11.43 %	100.00 %
		kinst-4-034-2	34	68	4	5	188	5	68	11.43 %	100.00 %
		kinst-4-034-3	34	68	4	5	188	5	68	11.43 %	100.00 %
		kinst-4-034-4	34	68	4	5	188	5	68	11.43 %	100.00 %
	media	nn16k7i1	16	56	7	8	235	9	56	41.18 %	100.00 %
		n16k7i2	16	56	7	8	235	9	56	41.18 %	100.00 %
		n16k7i3	16	56	7	8	235	9	56	41.18 %	100.00 %
		n16k7i4	16	56	7	8	235	9	56	41.18 %	100.00 %
		n16k7i5	16	56	7	8	235	9	56	41.18 %	100.00 %
		n16k7i6	16	56	7	8	235	9	56	41.18 %	100.00 %
		n16k8i1	16	64	8	9	299	10	64	47.06 %	100.00 %
		n16k8i2	16	64	8	9	300	10	64	47.06 %	100.00 %
		n16k8i3	16	64	8	9	300	10	64	47.06 %	100.00 %
		n16k8i4	16	64	8	9	300	10	64	47.06 %	100.00 %
		n16k8i5	16	64	8	9	300	10	64	47.06 %	100.00 %
		n16k8i6	16	64	8	9	300	10	64	47.06 %	100.00 %
	alta	n12k10i1	12	60	10	11	341	12	60	76.92 %	100.00 %
		n12k10i2	12	60	10	11	341	12	60	76.92 %	100.00 %
		n12k10i3	12	60	10	11	341	12	60	76.92 %	100.00 %
		n12k10i4	12	60	10	11	341	12	60	76.92 %	100.00 %
		n12k10i5	12	60	10	11	341	12	60	76.92 %	100.00 %
		n12k10i6	12	60	10	11	341	12	60	76.92 %	100.00 %
		n12k9i1	12	54	9	10	281	11	54	69.23 %	100.00 %
		n12k9i2	12	54	9	10	281	11	54	69.23 %	100.00 %
		n12k9i3	12	54	9	10	281	11	54	69.23 %	100.00 %
		n12k9i4	12	54	9	10	281	11	54	69.23 %	100.00 %
		n12k9i5	12	54	9	10	281	11	54	69.23 %	100.00 %
		n12k9i6	12	54	9	10	281	11	54	69.23 %	100.00 %

Cuadro 3.1. Instancias de prueba

Modelo POLI

Comenzamos analizando los resultados de **POLI**. En la tabla 3.2 mostramos para cada instancia: el óptimo y la cantidad de colores usados en el óptimo, el tiempo total en segundos, la cota inferior alcanzada, la mejor solución encontrada y la cantidad de colores usados en la solución, el porcentaje de *gap* final y la cantidad de nodos del árbol generados.

El modelo **POLI** presenta una muy pobre performance. De las 56 instancias, sólo pudo resolver 12 instancias (21.42 %) en el término de una hora con un promedio de tiempo de 387.70 segundos.

En el 38.63 % de las instancias no resueltas, la mejor solución encontrada coincide con el valor óptimo del problema, sin embargo, al no poder mejorar la cota dual, el algoritmo no pudo demostrar la optimalidad. En estos casos, el promedio de *gap* final es de 1.53 %. En el 61, 37 % restante de las instancias no resueltas, la mejor solución encontrada tiene un valor mayor de función objetivo que el de la solución óptima. En promedio, las soluciones encontradas son 2.14 % peores que el valor óptimo, alcanzando valores de casi el 10 % en las instancias regulares de baja densidad. El promedio del *gap* final es de 3.04 %, siendo las instancias regulares de baja densidad las que presentan mayores *gaps*, alcanzando valores por encima del 5 %. Cabe mencionar que, dentro de las instancias no resueltas que no encontraron el óptimo, el 40.74 % utiliza la cantidad de colores necesaria para alcanzar el óptimo pero falla en la asignación, mientras que el 59.26 % restante utiliza una cantidad mayor de colores. En general están utilizando un color extra, pero hay instancias donde se utilizan hasta 3 colores por encima de los necesarios. Este último caso, mayormente concentrado en instancias *random* de alta densidad y regulares de baja densidad. Notamos una correspondencia marcada entre esto y el *gap* final: si utiliza mayor cantidad de colores, hay un mayor *gap*.

Entre las instancias no resueltas, el promedio de enumeración total de nodos es de 220610.59. En el caso de las instancias resueltas, el promedio de nodos enumerados es 94110.7. Estos números evidencian que las relajaciones se resuelven muy rápido, no siendo un factor que influya significativamente en el total del tiempo utilizado.

Los cortes que por defecto usa CPLEX son en su mayoría de tipo *zero half*, *Gomory* y en menor medida *covers* y *clique*. El promedio de cortes por instancia es inferior

Tipo	densidad	Nombre	Opt	#ColOpt	Tiempo	CotaInf	MejorSolu	#ColUsados	GapFinal	Nodos
random	baja	bc-43-1-1	305	9	3028.82	305.00	305	9	**0.00**	554940
		bc-43-2-1	331	10	64.69	331.00	331	10	**0.00**	10294
		bc-43-3-1	310	9	3600	309.00	310	9	0.32	606290
		bc-43-4-1	631	11	3600	627.00	632	12	0.63	113598
		bc-43-5-1	354	11	910.58	354.00	354	11	**0.00**	142577
		bc-43-6-1	401	10	3600	400.00	401	10	0.25	567138
	media	bc-13-1-5	149	9	2.29	149.00	149	9	**0.00**	840
		bc-13-2-5	148	9	3.26	148.00	148	9	**0.00**	2481
		bc-13-3-5	129	7	3.89	129.00	129	7	**0.00**	142
		bc-13-4-5	55	5	2.31	55.00	55	5	**0.00**	1131
		bc-13-5-5	115	8	53.48	115.00	115	8	**0.00**	20298
		bc-13-6-5	119	7	5.16	119.00	119	7	**0.00**	1138.0
	alta	bc-12-1-9	398	14	3600	390.88	398	14	1.79	264501.0
		bc-12-2-9	387	13	3600	382.00	387	13	1.29	352070
		bc-12-3-9	387	13	3600	382.50	387	15	1.16	435676
		bc-12-4-9	387	13	3600	381.50	387	15	1.42	400797
		bc-12-5-9	374	13	3600	368.13	374	13	1.57	449395
		bc-12-6-9	375	14	3600	372.33	375	14	0.71	471096
$\Delta+2$	alta	inst_7_5	53	7	0.42	53.00	53	7	**0.00**	55
		inst_8_6	82	8	185.48	82.00	82	8	**0.00**	185568
		inst_9_7	124	9	392.06	124.00	124	9	**0.00**	209864
		inst_10_8	176	10	3600	174.00	176	10	1.14	1488024
regular	baja	kinst-4-033-0	183	5	3600	174.75	189	6	4.51	15296
		kinst-4-033-1	183	5	3600	174.75	190	6	4.51	15342
		kinst-4-033-2	183	5	3600	173.16	201	7	5.38	9540
		kinst-4-033-3	183	5	3600	174.61	187	6	4.58	60403
		kinst-4-033-4	183	5	3600	174.43	183	5	4.69	43349
		kinst-4-034-0	188	5	3600	176.56	201	6	6.08	15692
		kinst-4-034-1	188	5	3600	176.57	194	6	6.08	15868
		kinst-4-034-2	188	5	3600	176.48	204	8	6.13	12638
		kinst-4-034-3	188	5	3600	177.08	196	6	5.81	12228
		kinst-4-034-4	188	5	3600	176.67	201	6	6.03	12816
	media	nn16k7i1	235	9	3600	230.25	236	9	2.02	183975
		nn16k7i2	235	9	3600	230.00	236	9	2.13	181600
		nn16k7i3	235	9	3600	230.27	236	9	2.01	178201
		nn16k7i4	235	9	3600	230.25	236	9	2.02	171113
		nn16k7i5	235	9	3600	229.86	235	9	2.19	163189
		nn16k7i6	235	9	3600	230.01	236	9	2.12	209600
		nn16k8i1	299	10	3600	292.31	305	10	2.24	13538
		nn16k8i2	300	10	3600	293.03	302	11	2.32	61243
		nn16k8i3	300	10	3600	294.00	302	11	2.00	113900
		nn16k8i4	300	10	3600	292.50	301	11	2.50	25226
		nn16k8i5	300	10	3600	293.75	300	10	2.08	101121
		nn16k8i6	300	10	3600	293.92	301	10	2.03	123332
	alta	n12k10i1	341	12	3600	335.25	344	13	1.69	218533
		n12k10i2	341	12	3600	336.75	342	12	1.25	188449
		n12k10i3	341	12	3600	338.13	341	12	0.84	260544
		n12k10i4	341	12	3600	337.50	342	12	1.03	211869
		n12k10i5	341	12	3600	337.00	341	12	1.17	194981
		n12k10i6	341	12	3600	335.38	342	12	1.65	182983
		n12k9i1	281	11	3600	276.00	281	11	1.78	280001
		n12k9i2	281	11	3600	276.25	282	12	1.69	273089
		n12k9i3	281	11	3600	275.88	281	11	1.82	230906
		n12k9i4	281	11	3600	275.50	282	12	1.96	169135
		n12k9i5	281	11	3600	276.00	281	11	1.78	329900
		n12k9i6	281	11	3600	276.25	282	11	1.69	278681

Cuadro 3.2. Resultados Modelo **POLI**

a 10 para todas las familias, salvo las tipo *zero half* que alcanzan un promedio de 14. En general, estos cortes son aplicados en el nodo raíz, si bien hay instancias donde aparecen incluidos en otros nodos del árbol.

Modelo EXP

Analizamos ahora los resultados de **EXP**. En la tabla 3.3 mostramos, para cada instancia: el óptimo y la cantidad de colores usados en el óptimo, el tiempo total en segundos, la cota inferior alcanzada, la mejor solución encontrada y la cantidad de colores usados en la solución, el porcentaje de *gap* final, la cantidad de nodos del árbol generados y la cantidad de cortes agregados.

El modelo **EXP** presenta una mejor performance. De las 56 instancias, pudo resolver 44 instancias (78.57 %) en el término de una hora con un promedio de tiempo de 476.10 segundos.

En el 83.33 % de las instancias no resueltas, el valor de la función objetivo de la mejor solución encontrada coincide con el valor óptimo del problema y el gap final promedio es de 0.64 %. Es decir, es necesario mejorar la cota dual para probar la optimalidad de la solución. Hay dos instancias, regular de baja densidad, donde no se obtiene la mejor solución y se utilizan más colores de los necesarios y el *gap* superó el 2 %. Respecto al valor óptimo, están al 1 % de este valor.

Entre las instancias no resueltas, el promedio de enumeración total de nodos es de 1751986.66. En el caso de las instancias resueltas, el promedio de nodos enumerados es 341581.34. Estos números evidencian que las relajaciones se resuelven muy rápido, aun más que las del modelo **POLI**.

Si bien las desigualdades (3.8) fueron tratadas como cortes, la incidencia del tiempo de separación así como también del tiempo de resolución de las relajaciones al ser incorporadas, es insignificante y no tiene un impacto en el tiempo total ya que sólo son incorporadas a demanda en el caso de solución entera. En promedio se agregan 200 cortes por instancia, observándose que a mayor densidad, mayor cantidad de cortes.

Los cortes que por defecto usa CPLEX son en su mayoría de tipo *zero half*, *clique* y en menor medida *covers*. No se evidencia que la densidad o la cantidad de conflictos

Tipo	densidad	Nombre	Opt	#ColOpt	Tiempo	CotaInf	MejorSolu	#ColUsados	GapFinal	Nodos	#Cortes
random	baja	bc-43-1-1	305	9	1041.14	305	305	9	**0.00**	426632	48
		bc-43-1-1	331	10	79.21	331	331	10	**0.00**	29591	61
		bc-43-3-1	310	9	298.76	310	310	9	**0.00**	129115	51
		bc-43-4-1	631	11	3600	628.5	631	11	0.40	462900	97
		bc-43-5-1	354	11	132.82	354	354	11	**0.00**	33090	52
		bc-43-6-1	401	10	943.7	401	401	10	**0.00**	337901	75
	media	bc-13-1-5	149	9	0.68	149	149	9	**0.00**	554	31
		bc-13-2-5	148	9	0.44	148	148	9	**0.00**	282	23
		bc-13-3-5	129	7	0.36	129	129	7	**0.00**	50	30
		bc-13-4-5	55	5	0.39	55	55	5	**0.00**	163	45
		bc-13-5-5	115	8	1.64	115	115	8	**0.00**	2763	73
		bc-13-6-5	119	7	0.56	119	119	7	**0.00**	366	43
	alta	bc-12-1-9	398	14	3600	394.83	398	14	0.80	2640651	257
		bc-12-2-9	387	13	3600	384.25	387	13	0.71	2953372	302
		bc-12-3-9	387	13	3600	384.37	387	13	0.68	2757000	303
		bc-12-4-9	387	13	3600	383.75	387	15	0.84	2748500	307
		bc-12-5-9	374	13	1098.88	374	374	13	0.00	1108451	137
		bc-12-6-9	375	14	3600	373.75	375	14	0.33	2997184	150
$\Delta + 2$	alta	inst_7_5	53	7	0.12	53	53	7	**0.00**	137	32
		inst_8_6	82	8	0.38	82	82	8	**0.00**	908	47
		inst_9_7	124	9	3.54	124	124	9	**0.00**	10165	94
		inst_10_8	176	10	1822.47	176	176	10	**0.00**	5030196	89
regular	baja	kinst-4-033-0	183	5	377.8	183	183	5	**0.00**	85891	239
		kinst-4-033-1	183	5	376.99	183	183	5	**0.00**	85891	239
		kinst-4-033-2	183	5	1379.45	183	183	5	**0.00**	342496	266
		kinst-4-033-3	183	5	3600	179.13	185	6	2.11	1042087	270
		kinst-4-033-4	183	5	3600	180.25	183	5	1.50	789833	255
		kinst-4-034-0	188	5	3600	186.71	188	5	0.68	761838	249
		kinst-4-034-1	188	5	3600	186.82	188	5	0.63	785836	249
		kinst-4-034-2	188	5	3402.22	188	188	5	**0.00**	835272	258
		kinst-4-034-3	188	5	1053.32	188	188	5	**0.00**	233120	240
		kinst-4-034-4	188	5	3600	184	190	6	2.13	1040264	327
	media	nn16k7i1	235	9	35.06	235	235	9	**0.00**	17527	248
		nn16k7i2	235	9	113.65	235	235	9	**0.00**	68712	257
		nn16k7i3	235	9	52.07	235	235	9	**0.00**	32266	220
		nn16k7i4	235	9	126.79	235	235	9	**0.00**	67020	272
		nn16k7i5	235	9	145.14	235	235	9	**0.00**	65421	245
		nn16k7i6	235	9	74.73	235	235	9	**0.00**	42620	247
		nn16k8i1	299	10	109.5	299	299	10	**0.00**	51969	495
		nn16k8i2	300	10	469.75	300	300	10	**0.00**	250017	304
		nn16k8i3	300	10	410.78	300	300	10	**0.00**	188431	300
		nn16k8i4	300	10	332.78	300	300	10	**0.00**	164182	301
		nn16k8i5	300	10	475.44	300	300	10	**0.00**	242163	298
		nn16k8i6	300	10	836.1	300	300	10.0	**0.00**	441913	297
	alta	n12k10i1	341	12	440.18	341	341	12	**0.00**	309454	398
		n12k10i2	341	12	520.39	341	341	12	**0.00**	382699	273
		n12k10i3	341	12	241.55	341	341	12	**0.00**	156486	318
		n12k10i4	341	12	3600	337.66	341	12	**0.00**	2044375	340
		n12k10i5	341	12	706.22	341	341	12	**0.00**	636354	290
		n12k10i6	341	12	1117.4	341	341	12	**0.00**	779012	304
		n12k9i1	281	11	119.32	281	281	11	**0.00**	94281	280
		n12k9i2	281	11	289.74	281	281	11	**0.00**	260243	331
		n12k9i3	281	11	840.83	281	281	11	**0.00**	617860	244
		n12k9i4	281	11	251.31	281	281	11	**0.00**	190256	279
		n12k9i5	281	11	580.79	281	281	11	**0.00**	625219	264
		n12k9i6	281	11	644.12	281	281	11	**0.00**	652440	321

Cuadro 3.3. Resultados Modelo **EXP**

sea un factor decisivo en la inclusión de estos cortes. Además, el promedio de cortes por instancia es inferior a 10 para todas las familias, salvo las tipo *zero half* que alcanzan un promedio de 19.

POLI vs EXP

Para concluir nuestro análisis, en la tabla 3.4 mostramos el tiempo y *gap* final para cada instancia y cada modelo.

En primer lugar, la cantidad resuelta por cada modelo evidencia la superioridad de **EXP**: 12 vs 44.

En todas las instancias no resueltas por ambos modelos, el *gap* final alcanzado por el modelo **EXP** es menor, siendo en promedio 53 % mejor. Particularmente, en las instancias regulares de baja densidad, la diferencia se acentúa alcanzando valores cercanos al 90 %. Además, las soluciones encontradas con el modelo **EXP** son siempre igual o mejores que las del modelo **POLI**.

Todas las instancias resueltas con **POLI** se resolvieron con **EXP**. En el primer caso, con un tiempo promedio de 387.70 segundos, y para **EXP**, en 105.10 segundos.

El análisis y la comparación realizados sobre los modelos nos permite suponer, con cierta certeza, que el modelo **EXP** es una base más sólida para desarrollar sobre él un algoritmo *Branch and Cut*. En particular, confiamos en que un estudio poliedral nos pueda dar herramientas para mejorar las relajaciones lineales y poder cerrar el *gap* más rápidamente.

Tipo	densidad	Nombre	**POLI**		**EXP**	
			Tiempo	%gap	Tiempo	%gap
random	baja	bc-43-1-1	3028.82	**0.00**	1041.14	**0.00**
		bc-43-2-1	64.69	**0.00**	79.21	**0.00**
		bc-43-3-1	3600	0.32	298.76	**0.00**
		bc-43-4-1	3600	0.63	3600	0.39
		bc-43-5-1	910.58	**0.00**	132.82	**0.00**
		bc-43-6-1	3600	0.24	943.7	**0.00**
	media	bc-13-1-5	2.29	**0.00**	0.68	**0.00**
		bc-13-2-5	3.26	**0.00**	0.44	**0.00**
		bc-13-3-5	3.89	**0.00**	0.36	**0.00**
		bc-13-4-5	2.31	**0.00**	0.39	**0.00**
		bc-13-5-5	53.48	**0.00**	1.64	**0.00**
		bc-13-6-5	5.16	**0.00**	0.56	**0.00**
	alta	bc-12-1-9	3600	1.79	3600	0.79
		bc-12-2-9	3600	1.29	3600	0.71
		bc-12-3-9	3600	1.16	3600	0.67
		bc-12-4-9	3600	1.42	3600	0.83
		bc-12-5-9	3600	1.57	1098.88	**0.00**
		bc-12-6-9	3600	0.71	3600	0.33
$\Delta + 2$	alta	inst_7_5	0.42	**0.00**	0.12	**0.00**
		inst_8_6	185.48	**0.00**	0.38	**0.00**
		inst_9_7	392.06	**0.00**	3.54	**0.00**
		inst_10_8	3600	1.13	1822.47	**0.00**
regular	baja	kinst-4-033-0	3600	4.50	377.8	**0.00**
		kinst-4-033-1	3600	4.50	376.99	**0.00**
		kinst-4-033-2	3600	5.377	1379.45	**0.00**
		kinst-4-033-3	3600	4.584	3600	2.11
		kinst-4-033-4	3600	4.68	3600	1.50
		kinst-4-034-0	3600	6.088	3600	0.68
		kinst-4-034-1	3600	6.08	3600	0.62
		kinst-4-034-2	3600	6.12	3402.22	**0.00**
		kinst-4-034-3	3600	5.80	3600	2.12
	media	nn16k7i1	3600	2.02	35.06	**0.00**
		nn16k7i2	3600	2.12	113.65	**0.00**
		nn16k7i3	3600	2.01	52.07	**0.00**
		nn16k7i4	3600	2.02	126.79	**0.00**
		nn16k7i5	3600	2.18	145.14	**0.00**
		nn16k7i6	3600	2.12	74.73	**0.00**
		nn16k8i1	3600	2.23	109.5	**0.00**
		nn16k8i2	3600	2.32	469.75	**0.00**
		nn16k8i3	3600	2	410.78	**0.00**
		nn16k8i4	3600	2.5	332.78	**0.00**
		nn16k8i5	3600	2.08	475.44	**0.00**
		nn16k8i6	3600	2.02	836.1	**0.00**
	alta	n12k10i1	3600	1.68	440.18	**0.00**
		n12k10i2	3600	1.24	520.39	**0.00**
		n12k10i3	3600	0.84	241.55	**0.00**
		n12k10i4	3600	1.02	3600	0.97
		n12k10i5	3600	1.17	706.22	**0.00**
		n12k10i6	3600	1.64	1117.4	**0.00**
		n12k9i1	3600	1.77	119.32	**0.00**
		n12k9i2	3600	1.69	289.74	**0.00**
		n12k9i3	3600	1.82	840.83	**0.00**
		n12k9i4	3600	1.95	251.31	**0.00**
		n12k9i5	3600	1.77	580.79	**0.00**
		n12k9i6	3600	1.69	644.12	**0.00**

Cuadro 3.4. Comparación Modelo **POLI** vs Modelo **EXP**

4. Heurísticas

Los algoritmos heurísticos tienen un rol muy importante en el contexto de los problemas de optimización. Como muchos de estos problemas pertenecen a la clase de complejidad *NP-Difícil*, encontrar una solución óptima del problema es muy complejo y lleva mucho tiempo de cómputo. En contraposición, las soluciones encontradas por los algoritmos heurísticos no necesariamente son óptimas, aunque sí es esperable que sean de buena calidad, y el tiempo de cómputo requerido por estos algoritmos es considerablemente menor. Aunque para muchas instancias una heurística puede llegar a obtener un resultado óptimo, no brinda garantía de ello. En general, los algoritmos heurísticos tampoco ofrecen una medida que diga qué tan mala o buena es la solución encontrada con respecto a una solución óptima. En la literatura se puede encontrar una gran cantidad de trabajos que desarrollan una amplia variedad de algoritmos heurísticos para problemas de optimización [26, 55].

Este capítulo está dedicado al desarrollo de diversos algoritmos heurísticos que encuentran soluciones del problema **AVDSECP**. Algunas de estas heurísticas son sumamente rápidas, mientras que otras consumen una cantidad de tiempo considerable (teniéndose en cuenta que no son procedimientos exactos). Dentro de las heurísticas rápidas comenzaremos desarrollando una heurística golosa. Luego estudiaremos dos modelos de Constraint Programming, uno de ellos enmarcado dentro de los procedimientos rápidos y el otro dentro de los lentos. Por último, también dentro del grupo de los métodos lentos, expondremos una heurística basada en una formulación de PLE con cantidad de variables exponencial, a la cual le aplicaremos un proceso de generación de columnas.

4.1. Una heurística golosa

Al primer algoritmo que presentaremos lo llamamos *heurística golosa*. Los algoritmos golosos son ampliamente utilizados para construir soluciones de problemas de optimización combinatoria, por ser relativamente fáciles de implementar y muy rápidos en tiempo de ejecución. Estos procedimientos construyen gradualmente una solución, eligiendo en cada paso la mejor alternativa posible basándose en la información *local* con la que cuenta *en ese momento*. Pero no siempre una elección localmente óptima deriva en una elección globalmente óptima. La velocidad de ejecución y simplicidad de estos algoritmos se basa, principalmente, en que nunca retroceden ni revierten una decisión tomada. Esto hace que esta estrategia falle en encontrar soluciones óptimas para muchos problemas de optimización combinatoria, convirtiéndose en procedimientos heurísticos para ellos.

El nombre de nuestro procedimiento corresponde a que vamos a elegir aristas del grafo en algún orden y a cada arista elegida le asignaremos el menor color posible. Esto es similar a como funciona el algoritmo DSATUR [12] para coloreo de vértices, pero aplicado en este caso a coloreo de aristas. Claramente esta decisión no asegura que, al finalizar el procedimiento, hayamos construido un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles cuya suma sea lo menor posible. Para implementar este algoritmo, debemos definir el criterio para seleccionar la próxima arista a pintar y cómo elegir el menor color posible para asegurar que el coloreo obtenido cumpla con todas las restricciones de nuestro problema. Es decir, vamos a garantizar que nuestro procedimiento construya un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles, pero no que lo haga minimizando la suma.

Comenzamos por definir un algoritmo (Algoritmo 1) que, a partir de un coloreo parcial de aristas válido, construya un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

En cada iteración del ciclo principal del Algoritmo 1 (líneas 2 a 25), siguiendo algún criterio, se selecciona una arista uv aún sin color asignado. En el conjunto C se incluirán todos los colores *prohibidos* para pintar la arista seleccionada. En la línea 4 se incorporan los colores ya utilizados para pintar aristas incidentes a u o a v. Esto es para asegurar que el coloreo obtenido sea un coloreo propio de aristas.

Algoritmo 1 Algoritmo de extensión

Función ALGORITMOEXTENSION(G, f) ▷ G es un grafo y f un coloreo parcial válido.
  while Hay aristas sin pintar **do**
    $uv \leftarrow$ arista sin pintar elegida con un criterio
    $C \leftarrow \{f(uu') : u' \in N(u)\} \cup \{f(vv') : v' \in N(v)\}$
    if uv es la última arista sin pintar de u **then**
      for all $u' \in N(u)$ con $d(u') = d(u)$ y todas sus aristas ya pintadas **do**
        if $\{f(u'z) : z \in N(u')\} \setminus \{f(uz) : z \in N(u)\} = \{c\}$ **then**
          $C \leftarrow C \cup \{c\}$
        Fin if
      Fin for
    Fin if
    if uv es la última arista sin pintar de v **then**
      for all $v' \in N(v)$ con $d(v') = d(v)$ y todas sus aristas ya pintadas **do**
        if $\{f(v'z) : z \in N(v')\} \setminus \{f(vz) : z \in N(v)\} = \{c\}$ **then**
          $C \leftarrow C \cup \{c\}$
        Fin if
      Fin for
    Fin if
    if uv es la última arista sin pintar de $N(u) \cup N(v)$ y
        $\{f(uu') : u' \in N(u)\} = \{f(vv') : v' \in N(v)\}$ **then**
      $e \leftarrow$ arista aleatoria entre las incidentes a u o v
      $f(e) \leftarrow max(f) + 1$
    Fin if
    $f(uv) \leftarrow$ mínimo color posible que no está en C
  Fin while
Fin Función

Los controles realizados entre las líneas 5 y 23 aseguran que el coloreo obtenido sea con vértices adyacentes distinguibles. El condicional de la línea 5 controla si la arista uv es la última arista que se colorea de las incidentes a u. Si esto es así, se verifica si u tiene algún vértice adyacente con igual grado, w, cuyas aristas ya han sido todas coloreadas. Si este es el caso y todos los colores utilizados en aristas incidentes a u también han sido usados en aristas incidentes a w, hay un único color utilizado por aristas incidentes a w que todavía no ha sido utilizado en una arista incidente a u. Por lo tanto, se debe prohibir este color para colorear a uv para que así distinga a u y w, agregándolo al conjunto C de colores prohibidos. Lo mismo ocurre sobre el vértice v entre las líneas 12 y 18. Finalmente, entre las líneas 20 y 23 se analiza el caso cuando los vértices u y v tienen igual grado y todas las aristas incidentes a u y v (menos la uv) ya tienen color asignado. En este caso, si los vértices no resultan distinguibles, a alguna arista entre las incidentes a u o v se le asigna un nuevo color no usado hasta el momento, lo que asegura la distinguibilidad de este par de vértices y no afecta las distinguibilidad de otros.

Veamos que el Algoritmo 1 genera un coloreo de aristas que cumple con todos los requisitos impuestos en nuestro problema. En primer lugar, se puede verificar fácilmente que el algoritmo termina, ya que en cada paso asigna un color a una arista sin color asignado. Falta mostrar ahora que el coloreo final obtenido cumple todas las restricciones.

Las condiciones para ser un coloreo propio de aristas se cumplen ya que, al asignar color a la arista uv, en la línea 4 se agregan al conjunto C de colores prohibidos, los colores ya asignados a aristas incidentes a u o a v. Esto asegura que las aristas incidentes a un mismo vértice siempre tienen asignados colores distintos.

Nos queda analizar la distinguibilidad de vértices adyacentes. Supongamos que esto no es así, es decir que existen vértices u y v adyacentes del mismo grado que tienen el mismo conjunto de colores en sus aristas incidentes. Consideremos las siguientes situaciones que pueden haberse dado en el algoritmo:

- Entre todas las aristas incidentes a u o v, la última arista en asignarle color fue la arista uv. Entonces el algoritmo hubiera entrado al condicional de la línea 20. En ese caso a una arista incidente a u o a v se le asignará un color que no se utilizó aún, por lo que no puede haber conflicto en el coloreo final entre u y v ni verse afectado otro conflicto. Por lo tanto, la última arista a asignarle color entre las incidentes a u o v no puede haber sido la uv.

- Entre todas las aristas incidentes a u o v, sin pérdida de generalidad, la última arista en asignarle color fue la uu'. Entonces, el vértice v ya tenía todas sus aristas incidentes con color asignado. Luego, el algoritmo hubiera entrado al condicional de la línea 5 y en la línea 6 hubiese considerado al vértice v, por ser vecino de u, tener su mismo grado y verificar que v ya tiene todas sus aristas incidentes con color asignado. Si todos los colores ya asignados a aristas incidentes a u también están utilizados en aristas incidentes a v, solo quedaría una única arista incidente a v con un color no utilizado por aristas incidentes a u, y ese color hubiese sido agregado al conjunto de colores prohibidos C. Por lo tanto, la arista uu' tendría un color asignado que haría distinguible a los vértices.

En consecuencia, si se comienza el Algoritmo 1 con un coloreo parcial válido, no puede haber en el coloreo completo de las aristas generado dos vértices adyacentes indistinguibles.

La complejidad del Algoritmo 1 es $O(m^2)$, asumiendo que el criterio para la elección de la próxima arista a colorear es $O(1)$. El ciclo principal se realiza la cantidad de aristas sin asignación de color, que es, a lo sumo, la cantidad de aristas en el grafo. En el peor caso, recorrer los vecinos de u y v implica considerar todos los vértices del grafo, pero cada arista del grafo se recorre a lo sumo 1 vez entre las líneas 6-11 y 12-18. La misma situación se presenta cuando es necesario arreglar el caso donde u y v tienen el mismo conjunto de colores (líneas 20 a 23). Por último, elegir el mínimo color que no pertenezca al conjunto C de colores prohibidos es recorrer los colores que son a lo sumo m.

En el próximo paso, utilizando el Algoritmo 1 que extiende un coloreo parcial, vamos a diseñar la heurística golosa. Comenzaremos por fijar un coloreo parcial de las aristas y luego llamaremos al algoritmo de extensión. Para obtener un coloreo parcial inicial buscamos al vértice de mayor grado y comenzamos por asignar los colores $1, \ldots, \Delta(G)$ a sus aristas. El esquema de este procedimiento se presenta en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2 Heurística golosa

Función HEURISTICAGOLOSA(G) $\triangleright$ G es un grafo
  $x \leftarrow$ Vértice de máximo grado de G
  $coloreoParcial \leftarrow$ Cada arista a x con un color distinto entre $1, \ldots, \Delta(G)$
  $coloreo \leftarrow$ Algoritmo de Extensión($G, coloreoParcial$)
  Devolver *coloreo*
Fin Función

Como vimos que el Algoritmo 1 de extensión es correcto y *coloreoParcial* con que se lo invoca es un coloreo válido, ya que no viola las restricciones del problema, entonces *coloreo* retornado por el Algoritmo 2 es una solución válida del problema.

La complejidad del Algoritmo 2 está dominada por la complejidad del Algoritmo de extensión, ya que elegir un vértice de máximo grado e inicializar el coloreo parcial tiene complejidad $O(n + m)$.

Finalmente, debemos analizar posibles criterios de elección de la próxima arista a asignarle color en el Algoritmo 1 de extensión. Como sucede en los algoritmos secuenciales para coloreo de vértices, la decisión de cuál es la próxima arista a colorear impacta fuertemente en la performance del algoritmo y en la calidad de la solución obtenida. En general, cuando se utilizan criterios para esta selección que se adaptan de forma dinámica a medida que el procedimiento avanza, se obtienen mejores resultados. Un ejemplo de esto, para el caso de coloreo de vértices, es el criterio propuesto por Brelaz en el algoritmo DSATUR [12]. Siguiendo esta idea, hemos considerado para la experimentación los siguientes criterios:

- Elegir la arista con mayor cantidad de colores prohibidos.
- Elegir la arista con mayor cantidad de colores permitidos.
- Elegir la arista con mayor proporción de aristas adyacentes con color asignado.
- Elegir la arista con mayor proporción de aristas adyacentes sin color asignado.

Si bien los criterios parecieran ser contradictorios, todos tienen fundamentos que en principio los hacen prometedores. Dar prioridad a la arista con mayor cantidad de colores prohibidos se basa en que esa arista tiene pocas posibilidades y si se demora su asignación seguramente va a requerir un color nuevo. Por otro lado, la elección de la arista con mayor cantidad de colores permitidos posibilita utilizar los colores en un sentido secuencial, ya que es más probable que las aristas con un conjunto mayor puedan utilizar colores de menor valor. Si se consideran las aristas con mayor proporción de aristas adyacentes ya elegidas, entonces se prioriza dinámicamente las aristas *cercanas* a las otras aristas ya coloreadas y el grafo se colorea con una especie de barrida. Finalmente, el criterio de elegir las aristas con mayor proporción de aristas adyacentes sin color asignado ayuda a agregar una mayor proporción de restricciones.

Por último, los criterios de decisión no siempre identifican una única arista, sino que, en general, suele haber empate, eligiendo a un conjunto candidato de aristas. Por lo tanto, debemos también decidir cómo elegimos una arista de este conjunto. En nuestro algoritmo decidimos realizar esta elección de forma aleatoria.

4.2. Modelos de Constraint Programming

Constraint Programming (*CP*), denominado programación por restricciones en español, es un paradigma de programación en donde las relaciones entre variables se expresan por medio de restricciones. Se utiliza para resolver problemas de optimización, ya que se basa en explorar el conjunto de soluciones factibles de una manera inteligente.

La dificultad, y el éxito, de resolver un problema mediante *CP* radica en la elaboración de un modelo que permita explorar de la mejor forma posible el espacio de soluciones factibles. La exploración se hace de manera similar al recorrido del árbol de los algoritmos de *Branch and Cut*, con la diferencia de que no existe poda por cota. La gran desventaja que presenta esta técnica es que no permite tener una cota dual del problema. Es decir que si el algoritmo termina, sabremos que la solución obtenida es óptima, pero en caso contrario, no se puede tener una medida de la calidad de la solución encontrada.

Cuando se modelan problemas *NP-Difícil* mediante esta técnica, obviamente es de esperar que estos procedimientos tarden un tiempo considerable en terminar.

La estrategia que utilizaremos es establecer un límite de tiempo máximo de ejecución para determinar la mejor opción posible, convirtiéndose de esta manera en procedimientos heurísticos.

A continuación presentaremos dos modelos de *CP* para resolver nuestro problema.

4.2.1. Modelo 1

Como mencionamos en el capítulo 2, si bien los problemas **AVDECP** (donde se busca minimizar la cantidad de colores utilizados) y **AVDSECP** (donde se minimiza la suma de los colores utilizados) tienen cierta similitud, un coloreo de aristas óptimos para el **AVDECP** no necesariamente es óptimo para el **AVDSECP**. Sin embargo, dado un coloreo óptimo para el **AVDECP**, si los colores se ordenan crecientemente por costo y se utilizan los colores de menor costo, es de esperar que la suma de los colores utilizados en el coloreo sea baja.

Con esto en mente, por simplicidad, el primer modelo que presentamos busca minimizar la cantidad de colores utilizados, resultando en un modelo heurístico para el **AVDSECP**.

El modelo propuesto tiene las siguientes variables:

- $color_i$: Para toda arista i, esta variable indica el color de la arista i
- $colorMax$: Expresa el valor del máximo color utilizado.

Las restricciones son:

- Para cada vértice del grafo, todos los colores de las aristas incidentes al vértice deben ser distintos.
- Para cada par de vértices adyacentes de igual grado, los conjuntos de colores de las aristas incidentes a cada vértice deben ser distintos.
- La variable $maxColor$ toma el valor máximo de los colores.

La primera restricción es una de las más estudiadas dentro de *CP*. Se la conoce con el nombre de *alldifferent*. Existe una extensa literatura [63] que trata de podar soluciones lo mejor posible utilizando teoría de grafos mediante el Teorema de Hall [34].

La segunda restricción es particular del problema que estamos estudiando. No encontramos una restricción especializada para resolverla como el caso anterior. Para distinguir esta restricción utilizamos una regla simple: si no existe una solución factible para un coloreo parcial se poda la exploración.

La tercera restricción solo asigna el valor del máximo color. Esto es para guiar la exploración a que encuentre el mínimo valor posible. La forma de hacer esto es asignándole una cota superior a esta variable.

4.2.2. Modelo 2

La ventaja del modelo anterior es que utiliza una pequeña cantidad de variables y restricciones. Esto ayuda a que las soluciones sean más fáciles de obtener (y de forma más rápida). La desventaja es que, si bien utilizar la mínima cantidad de colores es una buena estrategia, existen casos en donde puede convenir utilizar más colores para minimizar la suma de los costos de los colores de las aristas. Más aún, dentro del conjunto de grafos que utilizan la mínima cantidad de colores puede haber una enorme cantidad de coloreos con distintos costos. Es por eso que buscamos un modelo de *CP* que permita resolver el problema de forma exacta, aunque a costo de mayor complejidad computacional.

Por eso, el segundo modelo busca minimizar la suma de los costos de los colores. Por la herramienta que estamos utilizando, esto no se puede expresar en el modelo anterior utilizando solo esas variables sin hacerlo muy costoso. Entonces, definimos un segundo modelo donde la función objetivo sea fácil de escribir. Para esto definimos un arreglo auxiliar *cantidad* en donde la posición i tiene la cantidad de aristas pintadas con el color i y buscamos minimizar el producto escalar entre este arreglo y los costos de cada color. De esta forma el motor de *CP* puede hacer inferencia de los colores posibles que pueden tomar las aristas.

4.3. Heurística basada en generación de columnas

En esta sección presentamos una formulación de PLE para el **AVDSECP**, con cantidad de variables exponencial. Luego, utilizando esta formulación desarrollamos una heurística basada en un algoritmo de generación de columnas. El algoritmo iterativamente intenta mejorar las cotas superior e inferior usando la información proveniente de la relajación lineal del modelo, esperando obtener finalmente una buena solución factible del problema. La efectividad de esta técnica para abordar problemas de optimización combinatoria puede verse en por ejemplo [69].

Cuando la cantidad de variables de un modelo de PLE es muy grande (podría ser exponencial), éste no puede ser formulado explícitamente para instancias de tamaño mediano y grande. Sin embargo, en muchos casos estos modelos suelen ser computacionalmente atractivos por tener relajaciones lineales más ajustadas que modelos con pocas variables, afectando positivamente al comportamiento de algunos algoritmos. Los algoritmos *Branch and Price*, introducidos por Savelsbergh [60], han resultado ser muy eficientes resolviendo este tipo de modelos, usando generación de columnas para resolver las relajaciones lineales asociadas a cada nodo del árbol. En este contexto, la relajación del modelo se llama problema maestro, PM. La idea principal de la técnica se basa en el hecho que en la mayoría de los modelos de PL, sólo un subconjunto muy pequeño de las columnas (variables) tiene valor distinto de cero en una solución óptima, mientras que todas las demás columnas tienen valor nulo y por lo tanto podrían ignorarse. En un problema de minimización, todas las columnas con costo reducido positivo en una solución óptima, podrían, de hecho, ser ignoradas. Estos algoritmos comienzan considerando sólo un conjunto reducido de columnas, obteniendo así un problema maestro restringido (PMR), y al concluir encuentran una solución óptima para el PM resolviendo una sucesión de PMR más pequeños. Cuando se encuentra una solución óptima de un PMR, se buscan columnas no incluidas en éste con costo reducido negativo. A este problema se le llama problema esclavo. Si el problema esclavo no encuentra una columna de costo reducido negativo, entonces la solución óptima actual del PMR también es solución óptima del PM. Caso contrario, una o más columnas con costos reducidos negativos se agregan al PMR y el procedimiento se repite.

El procedimiento utilizado para resolver el problema esclavo, es decir para verificar la optimalidad en el PM de una solución del PMR, es un factor clave para el éxito de esta técnica. En muchas situaciones, las columnas de la matriz de restricciones se pueden describir implícitamente como vectores característicos de subconjuntos de un conjunto particular. Por ejemplo, dado el conjunto de vértices de un grafo, los subconjuntos de vértices que son conjuntos independientes. En este caso, el problema esclavo se reduce a encontrar un subconjunto independiente de un grafo de costo mínimo, donde el costo representaría el costo reducido de la columna del PM correspondiente a ese conjunto independiente. Uno de los primeros artículos que aplica esta técnica es el de Gilmore y Gomory [30] para el problema de *cutting-stock*.

Una vez que la relajación correspondiente a cada nodo del árbol es resuelta, se procede a realizar la ramificación para generar nuevos nodos del árbol en el caso que por criterios de poda el nodo actual no deba ser cerrado.

Nuestro objetivo es utilizar este enfoque para obtener buenas soluciones del **AVDSECP**, aunque no necesariamente sean soluciones óptimas, en tiempos de cómputo acotados.

Sea $\mathcal{M}(G)$ el conjunto de *matchings* del grafo G y $\{1, \ldots, m\}$ el conjunto de colores disponibles. Definimos una variable binaria $x_{\mathcal{M}k}$, $\forall \mathcal{M} \in \mathcal{M}(G), \forall k \in \{1, \ldots, m\}$, que toma valor 1 si todas las aristas de $\mathcal{M}$, y sólo esas aristas, tienen asignado el color k, y 0 en caso contrario. El siguiente PLE expresa el **AVDSECP**:

$$\min \quad \sum_{k=1}^{m} \sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{M}(G)} k|\mathcal{M}| x_{\mathcal{M}k} \tag{4.1}$$

s.t

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{\mathcal{M} \in \mathcal{M}(G) \\ ij \in \mathcal{M}}} x_{\mathcal{M}k} = 1 \qquad \forall ij \in E \tag{4.2}$$

$$\sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{M}(G)} x_{\mathcal{M}k} \leq 1 \qquad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{\mathcal{M} \in \mathcal{M}(G) \\ i \in s(\mathcal{M}) \; j \notin s(\mathcal{M})}} x_{\mathcal{M}k} \geq 1 \quad \forall ij \in E \text{ con } deg(i) = deg(j) \tag{4.4}$$

$$x_{\mathcal{M}k} \in \{0, 1\} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, m\},\ \forall \mathcal{M} \in \mathcal{M}(G) \tag{4.5}$$

donde $s(\mathcal{M})$ denota el conjunto de vértices saturados por $\mathcal{M}$.

La función objetivo 4.1 minimiza el peso de los pares *matching*-color seleccionados. Las restricciones 4.2 aseguran que cada arista recibe exactamente un color y las 4.3 que cada color sea asignado a lo sumo a un *matching*. Las restricciones 4.4 imponen que los conjuntos de los colores de las aristas incidentes a vértices en conflicto difieran en por lo menos un color.

El modelo 4.1-4.5 tiene un número exponencial de variables, una por cada color para cada *matching* del grafo. Un inconveniente encontrado en este modelo, a diferencia de lo que sucede en muchos casos similares, es que se deben considerar todos los *matchings* del grafo. No es válido restringirse sólo a los *matchings* maximales y modificar levemente la restricción 4.2, pidiendo que toda arista tenga asignado por lo menos un color en lugar de exactamente uno. Si así se hiciera podría darse el caso en donde, en una posible solución del modelo, una arista uv tenga asignado dos colores distintos y el modelo utilice uno de estos colores para distinguir al vértice u de algún vecino y el otro color para distinguirlo de otro vecino. Esto muestra que no es posible transformar cualquier solución del modelo modificado a una solución válida del **AVDSECP**. Este condicionamiento aumenta enormemente el número de columnas del modelo y hace aún más compleja su resolución.

Para encontrar columnas con costo reducido negativo, definimos el problema esclavo asociado a este modelo. Recordemos que una columna está representada por un *matching* y un color. Llamamos $(\pi_{ij}, \rho_k, \delta_{ij})$ a los valores óptimos de las variables duales asociadas a las restricciones 4.2, 4.3 y 4.4 respectivamente. Definimos las variables binarias w_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, que toman valor 1 si el color k es seleccionado e y_{ij}, $ij \in E$, que toman valor 1 si la arista ij pertenece al *matching* elegido. Además, para poder expresar el costo reducido de la columna correspondiente, definimos las variables binarias z_{ij}, $ij \in E$ con $deg(i) = deg(j)$, que son forzadas a tomar valor 1 si el *matching* elegido satura al vértice i pero no al j, y finalmente las variables u_{ijk}, $ij \in E$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, que vale 1 si son seleccionados la arista ij y el color k. Entonces el problema esclavo queda definido de la siguiente forma:

$$\min \sum_{k=1}^{m} \sum_{ij \in E} k u_{ijk} + \sum_{k=1}^{m} \rho_k w_k - \sum_{ij \in E} \pi_{ij} y_{ij} - \sum_{\substack{ij \in E \\ deg(i)=deg(j)}} \delta_{ij} z_{ij} \tag{4.6}$$

s.t

$$\sum_{j \in N(i)} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall\, i \in V \tag{4.7}$$

$$z_{ij} \leq \sum_{s \in N(i)} y_{is} \qquad \forall\, ij \in E, \text{ con } deg(i) = deg(j) \tag{4.8}$$

$$z_{ij} + \sum_{s \in N(j)} y_{sj} \leq 1 \qquad \forall\, ij \in E, \text{ con } deg(i) = deg(j) \tag{4.9}$$

$$\sum_{k=1}^{m} w_k = 1 \tag{4.10}$$

$$1 + u_{ijk} \geq y_{ij} + w_k \qquad \forall\, ij \in E,\ k \in \{1, \ldots, m\} \tag{4.11}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, ij \in E \tag{4.12}$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, ij \in E, \text{ con } deg(i) = deg(j) \tag{4.13}$$

$$u_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall\, ij \in E\ k \in \{1, \ldots, m\} \tag{4.14}$$

$$w_k \in \{0,1\} \qquad \forall\, k \in \{1, \ldots, m\} \tag{4.15}$$

La función objetivo 4.6 expresa el valor del costo reducido de la variable que representa el par *matching*-color correspondiente. Las restricciones 4.7 aseguran que las variables y_{ij} seleccionadas definan un *matching* del grafo y la 4.10 determina su color. Las restricciones 4.8 y 4.9 fuerzan el valor correcto de las variables z, mientras que las 4.11 el de las u, ambas utilizadas para expresar el costo reducido de la columna correspondiente como función objetivo del problema esclavo.

Dada la cantidad de variables y restricciones del modelo esclavo, el tiempo requerido para su resolución lo hace ineficiente en nuestro contexto de uso. Debido a esto, decidimos generar un problema esclavo auxiliar para cada color, dejando de ser necesarias las variables w_k y u_{ijk} y las restricciones que las involucran. Si bien ahora tenemos que resolver m problemas esclavos auxiliares, al ser cada uno de ellos más simples, el tiempo de cómputo total requerido disminuye.

Entonces el problema esclavo para el color k, queda definido de la siguiente forma:

$$\min \sum_{ij \in E} (k - \pi_{ij}) y_{ij} - \sum_{\substack{ij \in E \\ deg(i) = deg(j)}} \delta_{ij} z_{ij} \tag{4.16}$$

s.t

$$\sum_{j \in N(i)} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in V \tag{4.17}$$

$$z_{ij} \leq \sum_{s \in N(i)} y_{is} \qquad \forall ij \in E, \text{ con } deg(i) = deg(j) \tag{4.18}$$

$$z_{ij} + \sum_{s \in N(j)} y_{sj} \leq 1 \qquad \forall ij \in E, \text{ con } deg(i) = deg(j) \tag{4.19}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall ij \in E \tag{4.20}$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall ij \in E \text{ con } deg(i) = deg(j) \tag{4.21}$$

Si el valor objetivo de la solución óptima del problema esclavo auxiliar correspondiente al color k es menor que $-\rho_k$, la columna correspondiente tiene costo reducido negativo y es agregada al PMR. En cambio, si no hay color donde esto ocurra, el PM ha sido resuelto a optimalidad.

Resultados computacionales preliminares mostraron que es conveniente agregar más de una columna con costo reducido negativo, en caso que hubiese, en cada iteración del algoritmo de generación de columnas. Para esto, cuando encontramos una columna candidata a ser agregada, probamos si el *matching* correspondiente con otro color también genera una columna con costo reducido negativo. Además, en lugar de interrumpir la búsqueda al encontrar la primera columna con costo reducido negativo, continuamos el proceso resolviendo los problemas esclavos auxiliares para el resto de los colores. Al recorrer los colores en orden creciente según su costo, sabemos que el valor objetivo óptimo del problema esclavo auxiliar correspondiente irá creciendo al aumentar el color. Como las variables duales ρ son mayores o iguales a 0, esto nos permite interrumpir la búsqueda inmediatamente si para un color tenemos un óptimo con funcional positivo. Además, si para un color k no existe *matching* que genere una columna con costo reducido negativo, tampoco lo habrá para un color k', si $\rho_{k'} > \rho_k$. En base a esto podemos saltear los colores que cumplan esta condición, evitándonos así la resolución del esclavo auxiliar correspondiente.

Como mencionamos, en cada iteración, luego de resolver optimamente un PMR, es necesario encontrar una columna con costo reducido negativo, si existiera. Sin embargo no se requiere encontrar la columna con menor costo reducido, alcanza con que sea negativo. Por esta razón, para acelerar el proceso de encontrar columnas con costo reducido negativo en cada iteración del algoritmo, implementamos una heurística esclava. En el caso de que esta heurística falle, aplicamos el procedimiento descripto anteriormente. La heurística arma un *matching* candidato analizando las aristas del grafo en orden decreciente según el valor de π (valores óptimos correspondientes a las variables duales asociadas a las restricciones 4.2). Si la arista es factible de ser agregada al *matching* actual (sus extremos no están saturados), e incorporarla hace que la parte no dependiente del color de la función objetivo disminuya, la arista es agregada al *matching*. Una vez finalizado este proceso, se verifica si para algún color el *matching* generado produce una columna con costo reducido negativo. Si este es el caso, se procede a agregar las columnas correspondientes al *matching*, con todos los colores, al PMR. En caso contrario, se perturba el orden en el que fueron consideradas las aristas y se repite el procedimiento un número máximo de veces. El esquema de este procedimiento se presenta en el Algoritmo 3.

Como nuestro objetivo es obtener buenas soluciones factibles del **AVDSECP**, desarrollamos una heurística primal que es aplicada luego de la resolución de cada PMR. Esta heurística construye una solución parcial coloreando las aristas de G teniendo en cuenta el valor de la solución óptima del PMR correspondiente, x^*. Para ello se ordenan las columnas (par *matching*-color) de forma decreciente según el valor de $x^*_{\mathcal{M}k}$. Luego se recorren los pares *matching*-color, $\mathcal{M}k$, según ese orden y se colorean las aristas aún no coloreadas de $\mathcal{M}$ con color k, siempre que no haya otra arista incidente a alguno de sus extremos que ya haya recibido ese color. Sólo se consideran para este procedimiento las columnas con valor $x^*_{\mathcal{M}k}$ mayor a cierto umbral. Como esta construcción no asegura que el coloreo parcial sea con vértices adyacentes distinguibles, si es necesario luego de finalizada se remueven aristas para obtener un coloreo distinguible parcial. Si todas las aristas de grafo tienen asignado un color, esta es una solución factible del **AVDSECP**. En caso que no, finalmente se completa el coloreo parcial aplicando el Algoritmo 1 de extensión

Algoritmo 3 Heurística esclava

```
Función HeuristicaEsclava(π, PMR)                ▷ π valores óptimos duales
    M ← ∅
    ordenar las aristas de G de forma decreciente según π
    while no se encuentre columna candidata y no se cumpla criterio de parada do
        for all arista ij siguiendo el orden do
            if i y j no están saturados por M y el segundo término de la función objetivo disminuye al agregar ij a M then
                M ← M ∪ {ij}
            Fin if
        Fin for
        if existe color k tal que M y k generen columna de costo reducido negativo then
            for all color k  do
                agregar la columna x_{Mk} a PMR
            Fin for
        else
            perturbar el orden de las aristas
        Fin if
    Fin while
Fin Función
```

sobre el mismo. El esquema completo de la heurística primal está descripto en el Algoritmo 4.

Adicionalmente, se verifica si hay algún par *matching*-color construido por este procedimiento que origine una columna con costo reducido negativo. Si este es el caso, es agregada al PMR una columna para este *matching* por cada color.

Algoritmo 4 Heurística primal

Función HEURISTICAPRIMAL($G, PMR, x^*, bestUB$) ▷ x^* solución óptima del PMR
    ordenar las columnas de PMR de forma decreciente según x^*
    for all columna $x_{\mathcal{M}k}$ con $x^*_{\mathcal{M}k} > UMBRAL$ siguiendo el orden **do**
        for all arista $e \in \mathcal{M}$ **do**
            if e no esta coloreada y k no es usado en una arista incidente a e **then**
                $f(e) \leftarrow k$ (pintar con color k a e)
            Fin if
        Fin for
    Fin for
    if existen dos vértices adyacentes que no son *distinguibles* **then**
        despintar aristas del grafo tal que lo hagan *distinguible*
    Fin if
    if hay aristas sin colorear **then**
        ALGORITMOEXTENSION(G, f)
    Fin if
    $fo \leftarrow$ valor del coloreo obtenido f
    if $fo < bestUB$ **then**
        $bestUB \leftarrow$ fo
    Fin if
    for all columna $x_{\mathcal{M}k}$ definida por f **do**
        if $x_{\mathcal{M}k}$ tiene costo reducido negativo **then**
            for all color k' **do**
                agregar la columna $x_{\mathcal{M}k'}$ al PMR
            Fin for
        Fin if
    Fin for
    Devolver $bestUB$
Fin Función

El primer PMR del procedimiento de generación de columnas debe ser factible, es decir es necesario un conjunto de columnas iniciales apropiado que aseguren su factibilidad. De lo contrario no sería posible obtener los valores duales y no se podría comenzar a iterar. Para obtener este conjunto utilizamos la heurística golosa descripta en la sección 4.1.

Dado el contexto de aplicación que nos interesa, limitamos el tiempo máximo del procedimiento de generación de columnas. Además, una vez que es finalizada la generación de columnas, ya sea porque resolvimos el PM a optimalidad o porque se excedió el tiempo máximo impuesto, el PMR resultante, considerando como binarias sus variables, es resuelto mediante un algoritmo *Branch and Cut* tradicional acotando el tiempo de ejecución. El esquema general del procedimiento completo está descripto en los Algoritmos 5 y 6.

Algoritmo 5 Heurística basada en GC

Función HEURISTICAGC(G) ▷ G es un grafo
    $bestUB \leftarrow$ HEURISTICAGOLOSA(G)
    Inicializar el PMR con las columnas iniciales
    $LB, bestUB \leftarrow$ NODORAIZ($G, PMR, bestUB$)
    if $LB < bestUB$ **then**
        $bestUB \leftarrow$ MIP($PMR, bestUB$)
    Fin if
    Devolver $bestUB$
Fin Función

4.4. Experimentación y discusión de resultados

En esta sección presentamos un análisis de la performance de las diferentes heurísticas. Comenzamos experimentando con cada una de las tres propuestas, buscando identificar cuales son los criterios que brindan el mejor rendimiento en cada una. Concluimos con una comparación entre las diferentes propuestas.

Para realizar los experimentos computacionales utilizamos una computadora con procesador Intel i7 3.5GHz con 48 GB de memoria RAM y Ubuntu 16.04 LTS como sistema operativo. Los modelos de constraint programming se resuelven con una librería de IBM llamada CP Optimizer [1], que permite agregar las restricciones que necesitamos. Los códigos se desarrollaron en C++ y, para el caso de generación de

[1] https://www.ibm.com/ar-es/analytics/cplex-cp-optimizer

Algoritmo 6 Nodo raíz

Función NodoRaiz$(G, PMR, bestUB)$
  while No se cumple criterio de parada **do**
    Resolver el PMR 4.1 - 4.5. Sea x^* la solución óptima, z^* su valor objetivo y π^* sus valores duales
    $x^H, cols \leftarrow$ HeuristicaPrimal(x^*, π^*)
    Si $x^H \leq bestUB$, $bestUB \leftarrow x^H$
    if $cols = \emptyset$ **then** ▷ la heurística primal encontró columna con costo reducido negativo
      $cols \leftarrow$ HeuristicaEsclava(π^*)
      if $cols = \emptyset$ **then** ▷ la heurística esclava no encontró columna con costo reducido negativo
        $cols \leftarrow$ MipEsclavo
        if $cols = \emptyset$ **then** ▷ z^x es el valor de la relajación lineal
          Devolver $\lceil z^* \rceil, bestUB$
        Fin if
      Fin if
    Fin if
  Fin while
  Devolver $-\infty, bestUB$
Fin Función

columnas se interactuó con la interfaz en C de CPLEX 12.7 [2] Las instancias que consideramos son las descriptas en la sección 3.3.1.

Con el objetivo de limitar el tiempo, tanto en los modelos de constraint programming como en los de generación de columnas restringimos el conjunto de colores a $M = \{1, \ldots, \Delta(G) + 2\}$.

4.4.1. Criterios para la heurística golosa

La heurística golosa tiene dos decisiones aleatorias dentro del algoritmo de extensión (Algoritmo 1). Una es el criterio de desempate en la elección de la próxima arista a pintar (línea 3). La otra se aplica cuando hay que reasignar un color a una arista para evitar que los vértices extremos de la arista sean indistinguibles (línea 21). Para prevenir que los resultados estén influenciados por el azar, realizamos múltiples ejecuciones independientes del algoritmo durante un tiempo fijado,

[2]https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio

utilizando diferentes semillas para el generador de números aleatorios.

Como vimos en la sección 4.1 tenemos varios criterios para elegir la próxima arista a pintar en nuestra heurística golosa. El primer análisis que haremos es decidir cuál de estos criterios resulta ser el más adecuado. Para esto, vamos a ejecutar el algoritmo goloso con cada uno de estos criterios sobre todas las instancias de prueba con un límite de tiempo de 60 segundos.

Consideramos el valor objetivo promedio para reflejar la performance en general y así poder hacer una comparación entre criterios.

Instancias	Densidad	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3	Criterio 4	ValOptProm
	alta	386.5	403.17	385.83	396.33	384.66
random	media	120.17	124.67	120.17	123	119.16
	baja	416.17	438.5	397	426.33	388.66
$\Delta + 2$	alta	109.5	111.5	109.25	109.25	108.75
	alta	312	314.25	312	314.25	311
regulares	media	269.58	273.58	269.58	273.58	267.41
	baja	189	194.4	189	194.4	185.5
Total		257.56	265.73	254.69	262.45	252.16

Cuadro 4.1. Criterios en heurística golosa: valor objetivo promedio en 60s.

En la tabla 4.1 se encuentran los resultados promedio de la heurística golosa para los diferentes criterios para cada grupo de instancias, así como también el valor óptimo promedio. Se puede ver que para las instancias *random* el criterio 3 obtuvo las mejores soluciones en todos los valores de densidad, empatando en densidad media con el criterio 1. Para las instancias $\Delta + 2$ los criterios 3 y 4 obtuvieron la mejor solución. En las instancias *regulares* los criterios 1 y 3 coincidieron en todos los valores, logrando los mejores resultados para este tipo de instancias. En resumen, el criterio 3 nunca fue superado, llegando en el caso de las instancias *random* de baja densidad a superar en un 4.6 % al criterio 1, en un 9.5 % al criterio 2 y en un 6.9 % al criterio 4.

Considerando el promedio general, observamos que la calidad de las soluciones obtenidas con el criterio 3 es muy buena, quedando en promedio al 1 % del valor óptimo promedio. Por otro lado, en 30 de las 56 instancias logra obtener el valor óptimo, resultando las instancias de baja densidad, tanto *random* como regulares, las más difíciles.

Si bien el promedio de los valores de las soluciones encontradas sirve para hacer una primera evaluación de la performance del algoritmo en general, en la tabla 4.2 analizamos la cantidad de instancias en las que cada criterio logra alcanzar el mejor resultado. Este análisis nos permite ver que los promedios son representativos y que no están sesgados por la presencia de instancias particulares.

Instancias	Densidad	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3	Criterio 4
	alta	3/6	0/6	6/6	0/6
random	media	5/6	1/6	4/6	1/6
	baja	0/6	0/6	6/6	0/6
$\Delta + 2$	alta	3/4	1/4	4/4	4/4
	alta	12/12	1/12	12/12	1/12
regulares	media	12/12	0/12	12/12	0/12
	baja	10/10	0/10	10/10	0/10
Total		45/56	3/56	54/56	6/56

Cuadro 4.2. Criterios en heurística golosa: cantidad de instancias sobre el total en los que se alcanza el mejor valor.

En la tabla 4.2 se puede ver que el algoritmo utilizando el criterio 3 logra el mejor valor en 54 de las 56 instancias evaluadas, mientras que el criterio 1 lo obtiene en 45 de ellas. En las dos instancias donde el criterio 3 no gana, pierde por menos del 2 % en uno de los casos y menos del 1 % en el otro contra el criterio 1. Los criterios 2 y 4 obtienen las mejores soluciones sólo en 3 y 6 instancias de las 56 respectivamente.

Estos resultados son consistentes con el análisis de la tabla de promedios, por lo que concluimos que el criterio 3 claramente es el que tiene la mejor performance, siendo el criterio seleccionado para continuar con la experimentación.

Analizamos ahora cómo impacta el límite del tiempo de ejecución en la calidad de la solución obtenida por la heurística usando el criterio 3. Es de esperar que, cuanto más tiempo sea ejecutado el procedimiento, mejor serán las soluciones. Queremos observar cómo cambia la función objetivo en el transcurso del tiempo para poder evaluar la relación entre tiempo de ejecución y calidad de la solución obtenida. En la tabla 4.3 vemos los promedios sobre los valores objetivo de las soluciones encontradas cuando la heurística es ejecutada durante 1, 5, 10, 30 y 60 segundos. En la tabla 4.4 se muestra la cantidad de instancias en las que el mejor valor es alcanzado en ese intervalo de tiempo.

Instancias	Densidad	1s	5s	10s	30s	60s
	alta	387	386	386	386	385.83
random	media	120.17	120.17	120.17	120.17	120.17
	baja	398.67	397.67	397.5	397	397
$\Delta + 2$	alta	109.25	109.25	109.25	109.25	109.25
	alta	315.75	314	312.92	312.25	312
regulares	media	272.42	271	270.58	269.75	268.58
	baja	191.2	189.9	189.7	189.1	189
Total		256.35	255.99	255.15	254.78	254.69

Cuadro 4.3. Criterio 3 en heurística golosa: valor objetivo promedio en diferentes tiempos límites.

Instancias	Densidad	1s	5s	10s	30s	60s
	alta	1/6	4/6	0/6	0/6	1/6
random	media	6/6	0/6	0/6	0/6	0/6
	baja	1/6	2/6	1/6	2/6	0/6
$\Delta + 2$	alta	4/4	0/4	0/4	0/4	0/4
	alta	0/12	3/12	4/12	3/12	2/12
regulares	media	0/12	3/12	1/12	6/12	2/12
	baja	0/10	4/10	0/10	5/10	1/10
Total		12/56	16/54	6/56	16/56	6/56

Cuadro 4.4. Criterio 3 en heurística golosa: cantidad de instancias sobre el total en que se alcanza el mejor valor en diferentes tiempos límites.

De la tabla 4.4 se puede ver que son pocas las instancias en las que se logra encontrar soluciones de mejor valor luego de los 30 segundos. Esto muestra que a partir de un momento, ya no se consiguen muchas mejoras. En esa franja de tiempo observamos en la tabla 4.3 que el promedio sobre todas las instancias se redujo aproximadamente un 0.1 %, por lo que además vemos que las pocas soluciones nuevas obtenidas no son significativamente mejores.

De la tabla 4.4 se puede ver que hay dos límites de tiempo en los que aumenta notoriamente la cantidad de instancias para las que se obtienen las mejores soluciones. A los 5 segundos, ya 28 de las 56 instancias obtienen el mejor valor, mientras que a los 30 segundos se alcanzó en 50 instancias. Se observa en la tabla 4.3 que la diferencia de los resultados son relativamente bajos, el promedio general mejora aproximadamente un 2 % después de los 5 segundos y, agrupando por instancias, vemos que en el mejor de los casos la mejora es de 6.6 % para las instancias *random* de alta densidad. En ese caso, alcanzaban 10 segundos para una mejora mayor a 6 %.

En conclusión, esta heurística cumple el objetivo de alcanzar buenas soluciones en tiempos muy reducidos.

4.4.2. Comparación de modelos de CP

En el caso de *Constraint Programming* hemos planteado dos modelos. Recordemos que el primer modelo (CP1), formula una versión aproximada más simple para el problema **AVDSECP** que resuelve el problema **AVDECP**. Para este modelo observamos que luego de 1 segundo la solución ya no cambia en las instancias evaluadas. Para el modelo 2 (CP2), al ser un modelo más complejo que resuelve el problema de forma exacta, utilizamos distintos límites de tiempo para analizar los resultados. En la tabla 4.5 vemos los valores de las mejores soluciones encontradas en 1 segundo para CP1 y CP2, y en 60 segundos para CP2, así como también el valor óptimo promedio.

Instancias	Densidad	CP1	CP2-1s	CP2-60s	ValOptProm
random	alta	408.83	397.17	386.17	384.66
	media	130.17	121.5	119.67	119.16
	baja	431.5	505	411.33	388.66
$\Delta + 2$	alta	119.25	110.75	108.75	108.75
regulares	alta	325.08	321.75	314.17	311
	media	286.83	281.92	271.58	267.41
	baja	195.6	200.7	191.2	185.5
Total		271.04	276.97	257.55	252.16

Cuadro 4.5. Modelos de CP: valor objetivo promedio de las soluciones obtenidas.

En la tabla 4.5 se puede ver que, en promedio, el modelo CP1 tiene mejores resultados que el CP2-1s pero peores que CP2-60s.

CP1 consigue una mejora promedio de 2.14 % con respecto a CP2-1s, y hasta 14.55 % de mejora promedio en las instancias *random* de baja densidad. Sin embargo, para varios grupos de instancias (*random* de alta y media densidad, $\Delta + 2$ y regulares de media y alta densidad) es superior CP2-1s, llegando a serlo en más de un 7.12 % en las $\Delta + 2$. Medido en cantidad de instancias, CP1 logra mejores resultados en 24 instancias (42.85 %), concentradas particularmente en grafos de baja densidad.

Por otro lado, CP2-60s obtiene el mejor resultado en 54 instancias (96.42 %), con un promedio de mejora de más de un 5 % con respecto a CP1 y alrededor de 9 % en las instancias *random* de media densidad y en las instancias $\Delta + 2$.

Considerando el promedio general, observamos que la calidad de las soluciones obtenidas por CP2-60s es muy buena, quedando en promedio al 2.15 % del valor óptimo promedio. Notar que, nuevamente, las instancias de baja densidad resultan las más difíciles.

La ventaja del modelo CP1 es que en poco tiempo consigue muy buenos resultados. Sin embargo, como no es un modelo exacto, la calidad de su resultado se encuentra acotada y no puede conseguir mejores soluciones aunque se permita mayor tiempo de ejecución. Por otro lado, el modelo CP2 es capaz de mejorar su solución con el trascurso del tiempo. Al aumentar el tiempo de corrida de 1 a 60 segundos, en promedio se redujo más del 7 % el valor de la mejor solución encontrada, alcanzando valores de reducción superiores al 18 % en instancias *random* de baja densidad. En base a estos resultados, nos interesa analizar más profundamente como influye el tiempo de ejecución en la calidad de la solución obtenida en el modelo CP2.

Durante la ejecución, el algoritmo guarda la mejor solución encontrada hasta el momento. Para los siguientes análisis, cada vez que la mejor solución es actualizada por haber encontrado una aún mejor, registramos el tiempo y el porcentaje de mejora obtenido. En primer lugar, graficamos un histograma con la cantidad de veces que el algoritmo actualiza la mejor la solución hallada hasta el momento.

En la figura 4.1 se puede ver que la mayor cantidad de soluciones se encuentran antes de los 10 segundos. Se observa un quiebre importante antes y después de los 10 segundos. También se aprecia que antes de 1 segundo se encuentran muchas soluciones, más que cualquier otro intervalo del gráfico.

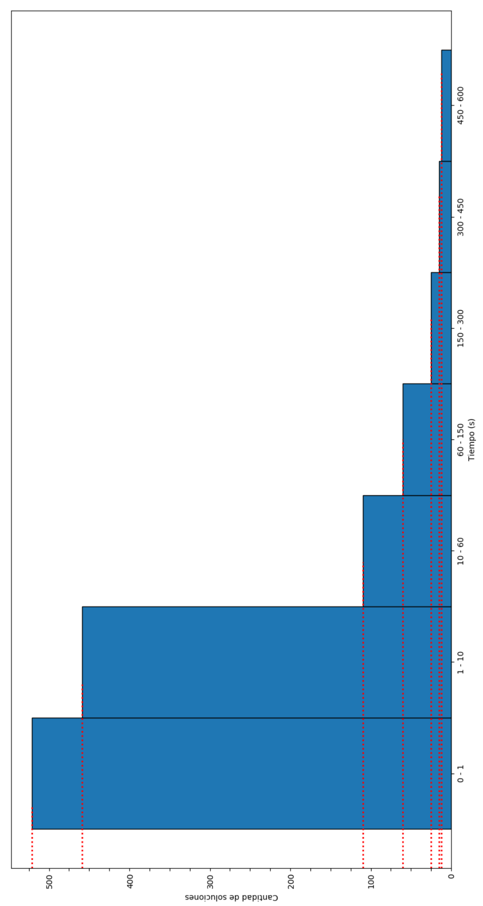


Figura 4.1. Histograma de la cantidad de soluciones en cada intervalo de tiempo

Sin embargo, se observa que existe una gran cantidad de soluciones encontradas luego de los 60 segundos. Si bien en porcentaje son pocas, se ve que hay más de 100 soluciones encontradas en las 56 instancias. Dado que vimos que CP2-60s es mucho mejor que CP2-1s, queremos ver si estas soluciones son las que logran la diferencia.

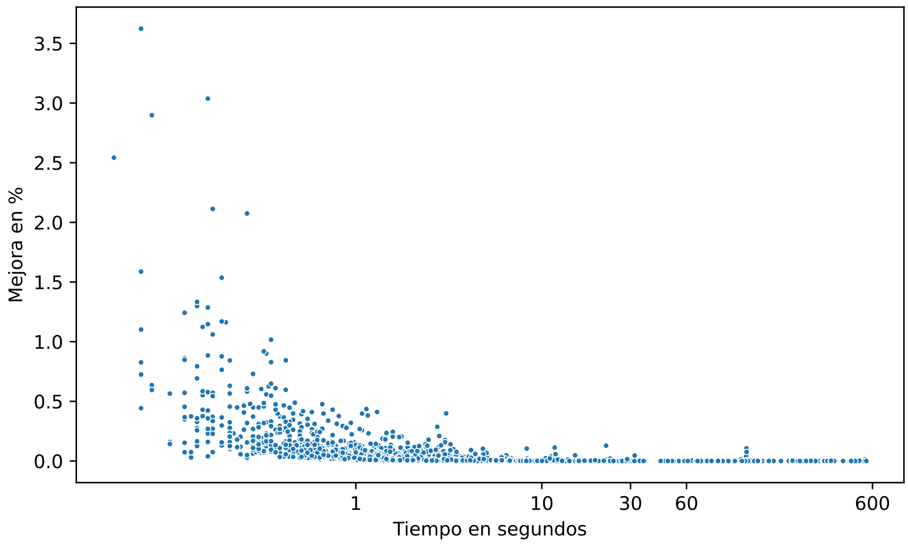


Figura 4.2. Mejora con respecto a la solución anterior durante el tiempo

En la figura 4.2 se muestra el porcentaje de mejora con respecto a la solución encontrada anterior. Podemos ver que a medida que se aumenta el tiempo baja la mejora incremental. Sin embargo también se puede ver que existe una gran cantidad de soluciones, por lo que podría ocurrir que la suma de todos estos incrementos se obtenga una diferencia significativa.

En la figura 4.3 se muestra el porcentaje de mejora con respecto a la primera solución encontrada. En esta figura se puede ver como aumenta la mejora.

Algo interesante que se aprecia en la figura 4.3 es que se logra una gran mejora entre 1 segundo y 10 segundos. Si bien el tiempo se encuentra en escala logarítmica para ver mejor todos los puntos, en caso de la escala lineal la pendiente sería mayor a lo que se observa luego de los 10 segundos. También se puede ver que las soluciones siguen mejorando luego de los 10 segundos, pero no se observan casos que logren una diferencia significativamente mayor.

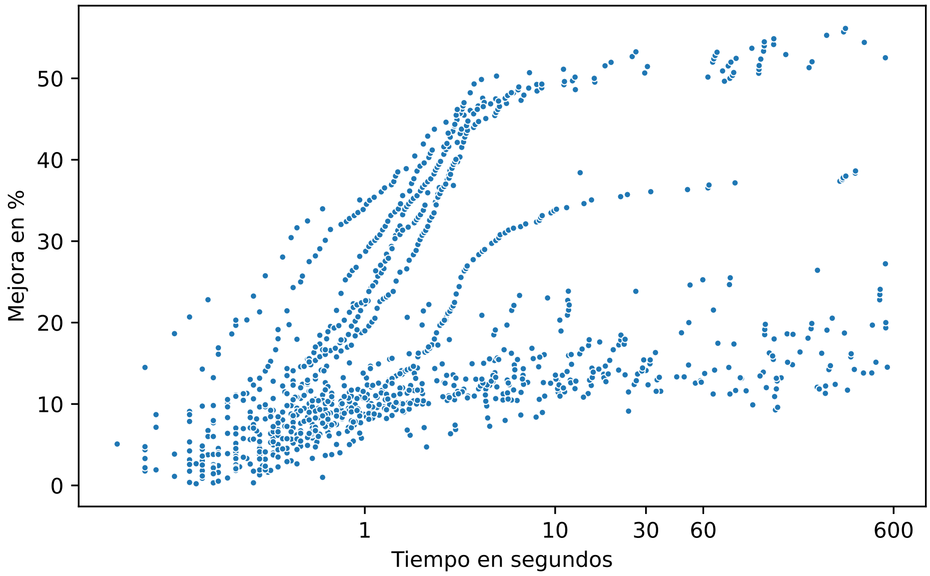


Figura 4.3. Mejora de la solución con respecto a la primera encontrada

4.4.3. Criterios para GC

El primer punto que evaluaremos es la generación de las columnas iniciales para resolver el primer PMR asociado al modelo 4.1-4.5. Para asegurar que este PMR sea factible, consideramos los *matchings* generados en la solución dada por la heurística golosa desarrollada en la sección 4.1. En base al análisis realizado en los resultados computacionales obtenidos con esta heurística, decidimos utilizar el criterio 3 con un límite de tiempo de 5 segundos. Además, analizamos dos alternativas para obtener un conjunto más grande de columnas iniciales: para cada arista generar 1 ó 10 *matchings* aleatorios que la contengan (no necesariamente maximales). Luego, para cada uno de estos *matching* generamos una columna para cada color. La tabla 4.6 muestra la comparación de estas 3 alternativas, fijando en 60 segundos el tiempo máximo invertido en el proceso de generación de columnas. Para cada tipo de instancia, informamos el valor objetivo promedio y el tiempo promedio de ejecución en segundos.

Como se puede apreciar en la tabla 4.6 no hay una diferencia notoria entre las distintas opciones, con una sutil ventaja cuando sólo se considera un *matching* adicional por arista a los arrojados por la heurística golosa. Por lo tanto, la opción

# matchigs x arista		0		1		10	
Instancias	Densidad	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo
random	alta	385.83	48	385.67	46	385.67	46
	media	119,5	5	119.5	5	119.5	5
	baja	397.5	60	397.5	60	397.5	60
$\Delta + 2$	alta	108.75	5	108.75	5	108.75	5
regulares	alta	313.75	60	313.67	60	313.67	70
	media	270.66	60	270.75	60	270.75	69
	baja	189.5	60	189.5	60	189.5	60
Total		255.07	43	255.05	42	255.05	48

Cuadro 4.6. GC: valor objetivo y tiempo promedios con tiempo límite 60s.

elegida para las siguientes pruebas es generar un *matching* aleatorio por cada arista del grafo para agregar a las columnas dadas por la heurística golosa para inicializar el PMR.

En las pruebas anteriores, sólo en el 23 % de las instancias se alcanzó el óptimo del PM luego de los 60 segundos establecidos como tiempo máximo al proceso de generación de columnas, es decir al óptimo de la relajación lineal del modelo 4.1-4.5. Esto nos motiva a analizar el comportamiento del algoritmo si se aumenta este límite de tiempo. De esta manera se permite un mayor número de iteraciones de resolución de diferentes PMR, dándonos más oportunidades de aplicar la heurística primal y por lo tanto aumentar las posibilidades de obtener buenas soluciones factibles. Entonces, el siguiente punto evaluado es la eficacia del algoritmo fijando como límite 60, 600 y 1000 segundos para el proceso de generación de columnas.

En la tabla 4.7 informamos el valor objetivo promedio obtenido con los diferentes límites de tiempo y el tiempo promedio de resolución.

Del 23 % de instancias en las que se llega al óptimo del PM al acotar a la etapa de

Tiempo límite GC		60		600		1000	
Instancias	Densidad	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo
random	alta	385.67	46	385.67	105	385.67	105
	media	119.5	5	119.5	5	119.5	5
	baja	397.5	60	397.16	600	396	1000
$\Delta + 2$	alta	108.75	5	108.75	5	108.75	5
regulares	alta	313.67	60	313.58	587	313.58	836,5
	media	270.75	60	270.67	446	270.67	575
	baja	189.5	60	188.9	302	188.9	349
Total		255.05	42	254.89	293	254.75	411

Cuadro 4.7. GC: valor objetivo y tiempo promedios con diferentes tiempos límites para PM.

generación de columnas, se pasa al 64 % al aumentar ese límite a 600 y a casi el 70 % si se limita a 1000 segundos. Esto evidencia que el número de iteraciones en los que se aplica la heurística primal aumenta considerablemente, sobre todo en los primeros 600 segundos. Sin embargo, el valor de la mejor solución factible encontrada no se ve reducido significativamente. Es decir, la resolución a optimalidad del PM no es un factor determinante para la calidad de la solución encontrada.

Por último, nos interesa evaluar el efecto adicional de resolver el modelo 4.1-4.5 restringido a las variables resultantes del proceso de generación de columnas mediante el algoritmo *Branch and Cut* de CPLEX, acotando el tiempo máximo de resolución. Para esto comparamos en la tabla 4.8 las soluciones obtenidas y tiempos de cómputo al finalizar la primera fase y luego de resolver el MIP resultante con límites de 10, 60 y 600 segundos. Para estas pruebas seguimos manteniendo el mismo conjunto de columnas iniciales y acotamos a 60 segundos el tiempo máximo del proceso de generación de columnas.

Como se puede apreciar en la tabla 4.8, los resultados de correr el MIP resultante con el conjunto de columnas encontrado al ejecutar el proceso de generación de columnas por 60 segundos son nulos. Esto puede deberse a que el conjunto de columnas obtenidos es muy restrictivo. Para entender mejor este comportamiento, en la tabla 4.9 realizamos una última prueba limitando a 1000 segundos tanto el proceso de generación de columnas como la resolución del MIP resultante.

Si bien en algunas instancias se consigue una mejora, ésta es muy sutil, menos del 0.13 %, especialmente si se considera la diferencia de tiempo insumida, más del 1250 %.

tiempo límite MIP		0		10		60		600	
Instancias	Densidad	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo
	alta	385.67	46	385.67	56	385.67	93	385.67	94
random	media	119.5	5	119.5	5	119.5	5	119.5	5
	baja	397.5	60	397.5	63	397.5	63	397.5	63
$\Delta + 2$	alta	108.75	5	108.75	5	108.75	5	108.75	5
	alta	313.67	60	313.67	70	313.67	101	313.67	121
regulares	media	270.75	60	270.75	69	270.75	69	270.75	69
	baja	189.5	60	189.5	70	189.5	80	189.5	81
Total		255.05	42	255.05	48	255.05	60	255.05	63

Cuadro 4.8. GC+MIP: valor objetivo promedio y tiempo promedio con diferentes tiempos límites para MIP y 60s para PM.

		60-0		1000-1000	
Instancias	Densidad	ValObjProm	Tiempo	ValObjProm	Tiempo
random	alta	385.67	46	385.67	324
	media	119.5	5	119.5	5
	baja	397.5	60	396	1021
$\Delta + 2$	alta	108.75	5	108.75	5
regulares	alta	313.67	60	313.58	1587
	media	270.75	60	270.67	696
	baja	189.5	60	189	386
Total		255.05	42	254.74	575

Cuadro 4.9. GC+MIP: valor objetivo promedio y tiempo promedio con diferentes tiempos límites para PM y MIP.

4.4.4. Comparación entre distintos algoritmos

Finalmente, vamos a comparar los distintos enfoques abordados para el desarrollo de heurísticas para el **AVDSECP**. Podemos dividir a las heurísticas en *rápidas* y *lentas*, y, según el contexto de aplicación serán útiles unas u otras. Obviamente es de esperar que las heurísticas que consumen más tiempo obtengan mejores soluciones, y eso hace que no tenga sentido comparar heurísticas en las que sólo se invierte un par de segundos de cómputo con las que insumen algunos minutos de tiempo.

En la familia de heurísticas rápidas incluimos la heurística golosa (con criterio 3 y 1 segundo de límite de tiempo) y la basada en el modelo CP1 (con tiempo límite 1 segundo). Dentro de las heurísticas lentas encuadramos la basada en el modelo de *Constraint Programming* CP2 con tiempo máximo de 60 segundos y la de generación de columnas con tiempo máximo de 60 segundos.

De la tabla 4.10 podemos ver que la heurística constructiva golosa consigue mejores soluciones no sólo en promedio general, sino también en todos los tipos de instancias. En promedio, las soluciones de CP1 son 5.73 % peor que las obtenidas por la heurística golosa, alcanzando casi un 10 % en las instancias $\Delta + 2$. CP1 no obtuvo mejores resultados en ninguna instancia. En conclusión, si de heurísticas rápidas se trata, la heurística golosa resulta la mejor opción.

En el caso de las heurísticas con mayor tiempo de cómputo podemos observar que

		Criterio 3-1s	CP1-1s
Instancias	Densidad	ValObjProm	ValObjProm
	alta	387	408.83
random	media	120.17	130.17
	baja	398.67	431.5
$\Delta + 2$	alta	109.25	119.25
	alta	315.75	325.08
regulares	media	272.42	286.83
	baja	191.2	195.6
Total		256.35	271.04

Cuadro 4.10. Heurísticas rápidas: valor objetivo promedio

		CP2-60s	GC-1-60-0	
Instancias	Densidad	ValObjProm	ValObjProm	Tiempo
	alta	386.17	385.67	46
random	media	119.66	119.5	5
	baja	411.33	397.5	60
$\Delta + 2$	alta	108.75	108.75	5
	alta	314.16	313.67	60
regulares	media	271.58	270.75	60
	baja	191.2	189.5	60
Total		257.55	255.05	42

Cuadro 4.11. Heurísticas lentas: valor objetivo promedio y tiempo promedio

el algoritmo de generación de columnas consigue mejores resultados en todos los casos. En promedio, CP2-60s es 1 % peor que GC, si bien en los casos *random* de baja densidad supera el 3.5 %. Respecto al tiempo, no hay una diferencia significativa si bien GC en algunos casos consigue obtener las soluciones en menor tiempo. Como era de esperar los resultados obtenidos son mejores que los resultados de las heurísticas rápidas, sin embargo no superan en promedio el 0.5 %.

5. Estudio Poliedral

El objetivo de caracterizar propiedades de un poliedro asociado a un modelo de programación lineal entera es identificar desigualdades válidas para ser usadas como planos de corte dentro de un algoritmo *Branch and Cut*. En general, ajustar la relajación lineal mediante la incorporación de planos de corte ayuda a mejorar el rendimiento del algoritmo. Si bien no existe una relación fehaciente entre la efectividad computacional de una desigualdad y la dimensión de la cara que define, es de esperar que las desigualdades con mayor dimensión aporten más al algoritmo que otras con menor dimensión.

En este capítulo nos centraremos en estudiar el poliedro asociado al modelo **EXP** para el problema de coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Nos enfocaremos en caracterizar desigualdades válidas que definan caras con dimensión alta, particularmente facetas.

Recordamos las restricciones que definen al modelo **EXP**:

$$\sum_{v \in \mathcal{N}(u)} a_{uvk} = x_{uk} \qquad \forall u \in V, k \in M \tag{5.1}$$

$$\sum_{k \in M} a_{uvk} = 1 \qquad \forall uv \in E \tag{5.2}$$

$$\sum_{k \in S'} x_{uk} + x_{vk} \leq 2|S'| - 1 \qquad \substack{\forall S' \subseteq M, |S'| = deg(u) \\ uv \in E, deg(u) = deg(v)} \tag{5.3}$$

$$a_{uvk} \in \{0,1\} \qquad \forall uv \in E, k \in M$$

$$x_{uk} \in \{0,1\} \qquad \forall u \in V, k \in M$$

Definimos el poliedro de la relajación lineal del modelo **EXP** como

$$\mathcal{P}^{\exp} = \{(A, X) \in \mathbb{R}^{nm+m^2} | (A, X) \text{ satisfacen las restricciones del modelo } \mathbf{EXP}\}.$$

El poliedro $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ que estudiaremos es la cápsula convexa definida por los puntos con coordenadas enteras en $\mathcal{P}^{\exp}$, es decir

$$\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}} = conv\{(A,X) \in \{0,1\}^{nm+m^2} | (A,X) \in \mathcal{P}^{\exp}\}.$$

Para simplificar la terminología, toda asignación $f : E \longrightarrow \{1,\ldots,m\}$ tal que define un coloreo propio de aristas y cumple con las restricciones de vértices adyacentes distinguibles define un coloreo Col que denominaremos coloreo *avdec*.

Existe una relación biunívoca entre un coloreo *avdec* Col y un punto factible (A,X) con coordenadas enteras en $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$. Dado un coloreo *avdec* Col, notaremos (A^{Col}, X^{Col}) a la solución factible de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ que lo representa. Es decir, dado Col, a^{Col}_{ijk} vale 1 si la arista ij tiene asignado el color k en el coloreo Col y 0 en caso contrario. Por otro lado x^{Col}_{ik} toma el valor 1 si el vértice i tiene una arista incidente que tiene asignado el color k en el coloreo Col y 0 en caso contrario.

Comenzaremos por identificar la dimensión de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ y posteriormente presentaremos desigualdades válidas y analizaremos cuándo definen facetas.

5.1. Casos especiales

Cuando comenzamos a estudiar a $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$, notamos que una propiedad que diferencia sustancialmente las características del poliedro es la existencia de un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que requiera menos de $|E|$ colores. Los resultados más generales se aplican a grafos para los cuales existe coloreo *avdec* con a lo sumo $|E|-1$. Estos resultados no son válidos para aquellos grafos donde cualquier coloreo propio de aristas necesita de $|E|$ colores o no existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

Los grafos para los cuales no existe coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles con a lo sumo $|E|-1$ colores quedarán excluidos de nuestro estudio pero, como veremos a continuación, son casos muy particulares sin mayor interés.

Proposición 5.1.1. *Sea $G = (V, E)$ tal que no existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utilice $|E| - 1$ colores. Entonces G es alguno de los siguientes grafos:*

1. *G contiene a P_2 como componente conexa.*

2. *G es una estrella.*

3. *G es un ciclo de a lo sumo 5 vértices (C_3, C_4, C_5).*

4. *G es un camino con a lo sumo 4 vértices (P_3, P_4).*

Demostración. Comenzaremos viendo que efectivamente los grafos enumerados no tienen un coloreo que utilice a lo sumo $|E| - 1$ colores:

1. P_2 está formado por dos vértices adyacentes de grado 1, que por la definición de distinguibilidad, nunca podrán ser distinguibles.

2. En una estrella todas las aristas son incidentes a un mismo vértice por lo tanto, en un coloreo propio de aristas, todas deben tener asignado un color diferente y serán necesarios $|E|$ colores.

3. En C_3, cualquier coloreo propio de aristas necesita de 3 colores. Tanto en C_4 como en C_5 sólo los pares de aristas no incidentes en los mismos vértices podrían repetir color, pero debido a la exigencia de distinguibilidad, esto no es posible.

4. En el caso de P_3 todas las aristas son adyacentes y por lo tanto deben tener asignado distintos colores. En el caso de P_4, la arista incidente al primer vértice y la arista incidente al cuarto vértice son las únicas que podrían compartir color. Sin embargo, debido a la exigencia de distinguibilidad del segundo y tercer vértice, esto no es posible.

Veamos ahora que si G no es uno de los grafos enumerados, entonces G tiene un coloreo que utiliza $|E| - 1$ colores. Nos alcanza con ver que existen dos aristas a las que se les puede asignar el mismo color.

Sea $u \in V$ un vértice de mayor grado y $v \in N(u)$ un vértice entre los vecinos de u que tiene mayor grado. Como G no es un grafo estrella, entonces el grado de v es mayor o igual 2.

Consideramos dos casos:

- **deg(u)** $\geq$ **3**. Existen dos aristas uu_1 y uu_2 incidentes a u, $u_1, u_2 \neq v$, $u_1 \neq u_2$ y una arista vv_1 incidente a v.

  Si existe un coloreo *avdec* tal que uu_1 y vv_1 tienen asignado el mismo color, entonces obtenemos un coloreo *avdec* con $|E| - 1$ colores. Si no existe dicho coloreo *avdec* puede ser por las siguientes razones:

  - Falla que sea un coloreo propio de aristas: Las aristas son incidentes en el mismo vértice, por lo cual debe cumplirse que $u_1 = v_1$. Afirmamos que en este caso existe un coloreo *avdec* que utiliza $|E| - 1$ colores tal que la arista uu_2 comparte color con la arista vv_1 y el resto de las aristas tiene colores distintos. Veamos los posibles problemas que podrían surgir:

    - Coloreo propio de aristas: las dos aristas con color repetido no son incidentes en un mismo vértice pues $u_1 \neq u_2$, $u_1, u_2 \neq v$.

    - Distinguibilidad en caso de adyacencia:

      - para cualquier z, $z \neq u, v, u_1, u_2$ existe una arista incidente con color único que lo distingue de cualquier adyacente.

      - u y v son distinguibles entre si ya que la arista uu_1 es única en su color.

      - u y v son distinguibles con respecto a cualquier otro vértice ya que la arista uv es única en su color.

      - u_1 y u_2 son distinguibles ya que la arista uu_1 es única en su color

    Por lo tanto, existe un coloreo *avdec* que utiliza $|E| - 1$ colores.

  - Falla la distinguibilidad: existe un conflicto que no permite que las aristas uu_1 y vv_1 tengan un mismo color. Consideramos que $u_2 \neq v_1$ ya que si fueran iguales estamos en el caso anterior donde ya probamos la existencia de un coloreo que utiliza $|E| - 1$ colores. Analicemos todos los posibles conflictos entre estos 4 vértices.

- u y v (o u_1 o v_1) son distinguibles, ya que la arista uu_2 es única en su color.
- u_2 y v (o u_1 o v_1) son distinguibles, ya que la arista uu_2 es única en su color.
- v y u_1 (o v_1) son distinguibles ya que la arista uv es única en su color.
- u y u_2 son distinguibles ya que la arista uv es única en su color.
- u_1 y v_1 son distinguibles si $deg(u_1) = deg(v_1) \geq 3$ ya que existe un vértice $u'_1 \neq u, v_1$ tal que la arista $u_1u'_1$ es única en su color.
- u_1 y v_1 no son distinguibles si $deg(u_1) = deg(v_1) = 2$ ya que las aristas uu_1 y vv_1 tienen el mismo color. En este caso consideramos el coloreo tal que las aristas uu_2 y vv_1 tienen el mismo color y todas las demás aristas del grafo tienen un color único. Como $u_2 \neq v_1$ las aristas no son incidentes en los mismos vértices, por lo que es un coloreo propio de aristas válido. Analicemos todos los posibles conflictos entre estos 4 vértices. Recordemos que estamos bajo el caso que $N(v_1) = \{v, u_1\}$.
    - u y v son distinguibles ya que la arista uu_1 es única en su color.
    - u y v_1 no son adyacentes ya que $N(v_1) = \{v, u_1\}$.
    - v y u_2 son distinguibles ya que la arista uv es única en su color.
    - u_2 y v_1 no son adyacentes ya que $N(v_1) = \{v, u_1\}$.

  Por lo tanto, si no es posible que las aristas uu_1 y vv_1 tengan el mismo color, entonces las aristas uu_2 y vv_1 pueden tener el mismo color. Entonces, existe un coloreo *avdec* con $|E| - 1$ colores.

- **deg(u)=2**. Como u es un vértice con mayor grado, entonces todos los vértices del grafo tiene grado 0, 1 ó 2. Los vértices de grado 0 pueden ser eliminados del grafo ya que no tienen aristas incidentes que haya que colorear. Entonces, el grafo está conformado por componentes conexas en la que cada una puede ser un ciclo o un camino. Si hay más de una componente conexa y ninguna de ellas es un P_2, sea p la cantidad máxima de aristas presentes en las diferentes componentes conexas. Entonces, todo el grafo se puede colorear con p colores ya que en cada componente se puede asignar colores que no se repiten y entre componentes conexas distintas es posible repetir colores. Con esta asignación no hay ningún conflicto violado. Si una de las componentes conexas es un P_2, entonces G es uno de los grafos que enumeramos.

Nos queda analizar el caso en que existe una única componente conexa que, tal como señalamos, es un camino o un ciclo.

Supongamos que G es un camino de por lo menos 5 vértices.

Sea $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 5)$ y $E = \{v_1v_2, \ldots, v_iv_{i+1}, \ldots, v_{n-1}v_n\}$. Construimos un coloreo tal que las aristas v_1v_2 y $v_{n-1}v_n$ tienen el mismo color y todas las demás tienen un color único. Como $v_3 \neq v_{n-1}$ entonces las dos aristas no son incidentes en los mismos vértices y tenemos un coloreo propio de aristas. Como $deg(v_1) = deg(v_n) = 1$, la única distinguibilidad que podría no satisfacerse es entre v_2 y v_{n-1}. Pero estos vértices son adyacentes solo en el caso que $n = 4$. Por lo tanto si G es un camino de por lo menos 5 vértices, existe un coloreo *avdec* de $|E| - 1$ colores.

Supongamos que G es un ciclo de por lo menos 6 vértices.

Sea $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 6)$ y $E = \{v_1v_2, \ldots, v_iv_{i+1}, \ldots, v_nv_1\}$. Construimos un coloreo tal que las aristas v_1v_2 y v_4v_5 tienen el mismo color y todas las demás tienen un color único. Dado que las aristas no son incidentes en los mismos vértices, es un coloreo propio de aristas válido. Por otro lado, dado que $n \geq 6$, no existen las aristas v_1v_4, v_1v_5, v_2v_4 y v_2v_5 y por lo tanto la distinguibilidad entre vértices adyacentes está asegurada.

Entonces, si u tiene grado 2 y no es del tipo de los grafos excluidos, existe un coloreo *avdec* que utiliza $|E| - 1$ colores.

$\square$

Dado que los grafos enumerados son casos muy particulares y donde el problema no resulta de mayor interés, excluir estos grafos del análisis poliedral no es significativo. Podemos enfocarnos entonces en considerar grafos que admitan un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza a lo sumo $|E|-1$ colores.

5.2. Dimensión de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$

Como mencionamos anteriormente, comenzaremos por caracterizar la dimensión del poliedro.

Proposición 5.2.1. *Sea $G=(V,E)$ un grafo tal que existe un coloreo* avdec *que utiliza $|E|-1$ colores. El sistema minimal de ecuaciones asociado al poliedro $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ es:*

$$\sum_{v\in N(u)} a_{uvk} = x_{uk} \qquad \forall u \in V \wedge k \in M \tag{5.4}$$

$$\sum_{k\in M} a_{uvk} = 1 \qquad \forall uv \in E \tag{5.5}$$

Demostración. Las igualdades del sistema minimal son válidas ya que están en la definición del poliedro. Comenzaremos justificando el por qué de la hipótesis de existencia de un coloreo *avdec* que utiliza $|E|-1$ colores. Si no existiera un coloreo *avdec* con $|E|-1$ colores, entonces todos los coloreos *avdec* del grafo G utilizan m colores. Como cada color se usa exactamente una vez, entonces $\sum_{uv\in E} a_{uvk}=1$ es una igualdad válida para todo color k para el poliedro asociado a G. Sin embargo, esta igualdad no resulta válida para el poliedro asociado a grafos para los cuales existen coloreos *avdec* que usan menos cantidad de colores.

Dado que estos son casos muy particulares que ya analizamos previamente, la hipótesis de existencia de un coloreo *avdec* con $|E|-1$ colores no es muy restrictiva y nos permite caracterizar la dimensión para los poliedros asociados a la mayoría de los grafos.

Veamos ahora que el sistema es minimal. Sea la siguiente una igualdad válida para los puntos factibles de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$:

$$\sum_{k\in M}\sum_{uv\in E} \Pi^a_{uvk} a_{uvk} + \sum_{k\in M}\sum_{u\in V} \Pi^x_{uk} x_{uk} = \pi_0.$$

Debemos ver que la igualdad se puede escribir como una combinación lineal de las igualdades del sistema minimal propuesto.

Sea λ_{uk} el coeficiente asociado a la igualdad (5.4) para $u \in V \wedge k \in M$ y μ_{uv} el coeficiente asociado a la igualdad (5.5) para $uv \in E$. Entonces debería cumplirse que:

$$\Pi^a_{uvk} = \lambda_{uk} + \lambda_{vk} + \mu_{uv}$$
$$\Pi^x_{uk} = -\lambda_{uk}.$$

Como λ_{uk} queda definida a partir de Π^x_{uk} podemos definir μ_{uv} utilizando un color particular k_0.

$$\mu_{uv} = \Pi^a_{uvk_0} - \lambda_{uk_0} - \lambda_{vk_0}$$
$$\mu_{uv} = \Pi^a_{uvk_0} + \Pi^x_{uk_0} + \Pi^x_{vk_0}.$$

Queda ver que la definición de μ_{uv} es consistente para $k \neq k_0$. Es decir que:

$$\Pi^a_{uvk_0} + \Pi^x_{uk_0} + \Pi^x_{vk_0} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \neq k_0, uv \in E.$$

Como por hipótesis existe un coloreo *avdec* que utiliza $|E| - 1$ colores, entonces existe un coloreo *avdec* Col_1 que no utiliza el color k y la arista uv tiene asignado el color k_0. Si cambiamos el color de la arista uv al color k tenemos otro coloreo Col_2. Como k no se utilizaba en Col_1, entonces Col_2 es un coloreo propio de aristas ya que no hay otra arista adyacente del mismo color. Además como u y v son los únicos vértices que cambiaron su conjunto de colores, y ningún otro vértice tiene el color k, entonces no puede existir un conflicto entre ellos y otro vértice del grafo que se encuentre violado en el coloreo Col_2. Por último, u y v eran distinguibles en Col_1 y no diferían en k_0, por lo tanto, en Col_2 también difieren. Entonces Col_2 es un coloreo *avdec* y vale:

$$\sum_{k\in M}\sum_{uv\in E}\Pi^a_{uvk}a^{Col_1}_{uvk}+\sum_{k\in M}\sum_{u\in V}\Pi^x_{uk}x^{Col_1}_{uk}=\sum_{k\in M}\sum_{uv\in E}\Pi^a_{uvk}a^{Col_2}_{uvk}+\sum_{k\in M}\sum_{u\in V}\Pi^x_{uk}x^{Col_2}_{uk}.$$

Dado que Col_1 y Col_2 sólo difieren en el color de la arista uv obtenemos:

$$\Pi^a_{uvk_0}+\Pi^x_{uk_0}+\Pi^x_{vk_0}=\Pi^a_{uvk}+\Pi^x_{uk}+\Pi^x_{vk}.$$

Por lo tanto la definición de μ_{uv} es consistente y toda igualdad válida en el poliedro es combinación lineal de las igualdades del sistema minimal de ecuaciones.

Finalmente veamos que las igualdades son linealmente independientes. Como x_{uk} aparece en exactamente una igualdad, entonces cada igualdad de (5.4) es linealmente independiente del resto. Por otro lado, cada igualdad de (5.5) solo puede ser combinación lineal de otras igualdades (5.5) ya que cada igualdad de (5.4) tiene un término x_{uk} que no hay manera de anular. Como cada igualdad (5.5) contiene variables que solo están relacionadas con una arista en particular entonces son todas linealmente independientes.

En conclusión, el sistema propuesto es un sistema minimal de ecuaciones asociado al poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$. □

5.3. Desigualdad válida *Conjuntos de d colores*

La desigualdad (5.3) del modelo **EXP** correspondiente a una arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene la propiedad de que, en el caso que defina una cara, los puntos que se encuentran en la misma satisfacen que uno de los vértices debe usar los $deg(\tilde{u})$ colores. De otra manera, no sería posible alcanzar el valor del término independiente. Concluimos entonces que la arista $a_{\tilde{u}\tilde{v}}$ debe tener asignado un color del conjunto S' y por lo tanto se satisface que $\sum\limits_{k\notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k}=0$.

Esta condición nos permite obtener un refuerzo de esta desigualdad.

Proposición 5.3.1. *Sea $G=(V,E)$ un grafo tal que existe un coloreo* avdec *que utiliza $|E|-1$ colores. Consideremos $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo* *grado y $S' \subset M$ un conjunto de colores de tamaño $d = deg(\tilde{u})$. La siguiente desigualdad, denominada **d-Color**, es válida para los puntos del poliedro $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$:*

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2|S'| - 1 \tag{5.6}$$

Demostración. Para todo punto entero hay dos posibilidades:

- Si $\sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0$ entonces la desigualdad queda $\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) \leq 2|S'| - 1$, que resulta válida ya que es la desigualdad (5.3) que define al poliedro $\mathcal{P}^{\exp}$.
- Si $\sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$ entonces pasamos restando el término al lado derecho de la desigualdad y nos queda $\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) \leq 2|S'| - 2$. Como la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ no tiene un color $k \in S'$, entonces $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} \leq deg(\tilde{u}) - 1$. El mismo argumento vale para $\tilde{v}$, por lo tanto $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} \leq deg(\tilde{v}) - 1$. Sumando las dos desigualdades surge la validez de la desigualdad **d-Color**.

□

Proposición 5.3.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo* avdec *que utiliza $|E| - 1$ colores. Consideremos $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo grado y $S' \subset M$ un conjunto de colores de tamaño $d = deg(\tilde{u})$. La desigualdad **d-Color** no es redundante para el poliedro $\mathcal{P}^{\exp}$.*

Demostración. Consideremos el caso de un grafo que tenga como subgrafo inducido al de la figura 5.1 donde $u_1, u_2 \in N(\tilde{u})$ y $v_1, v_2 \in N(\tilde{v})$ tal que $u_1 \neq v_1, v_2$ y $u_2 \neq v_1, v_2$.

Vamos a construir un punto fraccionario que pertenece a $\mathcal{P}^{\exp}$ y no satisface la desigualdad propuesta. En la figura 5.1 indicamos en cada arista el o los colores asignados, es decir el valor de k tal que la variable $a_{uvk} > 0$, caso contrario la variable toma valor nulo. Si se indica un único color, a_{uvk} toma el valor 1. Si hay dos colores, las dos variables respectivas se definen como $a_{uvk} = 0.5$. Toda otra arista del grafo uv tiene asignado un color k' diferente del conjunto $\{5, \ldots, m\}$ y definimos $a_{uvk'} = 1$, $x_{uk'} = x_{vk'} = 1$. Para otros colores, estas variables toman valor 0.

Queremos ver que este punto satisface todas las restricciones del poliedro pero viola una desigualdad del tipo **d-Color**.

El hecho de que todas las aristas que no sean aristas del subgrafo inducido tengan asignado un color diferente del conjunto $\{5, \ldots, m\}$ permite afirmar que se satisfacen toda las restricciones del modelo que involucran a estas aristas.

A continuación detallamos las variables no nulas referidas al subgrafo inducido:

$x_{\tilde{u}1} = 1$	$x_{\tilde{u}2} = 0.5$	$x_{\tilde{u}3} = 1$	$x_{\tilde{u}4} = 0.5$
$x_{u_1 1} = 1$	$x_{u_2 2} = 0.5$	$x_{u_2 3} = 0.5$	$x_{\tilde{v}4} = 0.5$
$x_{\tilde{v}1} = 0.5$	$x_{\tilde{v}2} = 1$	$x_{\tilde{v}3} = 1$	$a_{\tilde{u}\tilde{v}4} = 0.5$
$x_{v_2 1} = 0.5$	$x_{v_1 2} = 1$	$x_{v_2 3} = 0.5$	
$a_{\tilde{u}u_1 1} = 1$	$a_{\tilde{u}u_2 2} = 0.5$	$a_{\tilde{u}u_2 3} = 0.5$	
$a_{\tilde{v}v_2 1} = 0.5$	$a_{\tilde{v}v_1 2} = 1$	$a_{\tilde{u}\tilde{v}3} = 0.5$	
		$a_{\tilde{v}v_2 3} = 0.5$	

Es fácil ver que satisfacen todas las igualdades que definen al poliedro: $x_{uk} = \sum\limits_{v \in N(u)} a_{uvk}$ y $\sum\limits_{k \in M} a_{uvk} = 1$. Nos resta verificar que satisface todas las desigualdades del tipo (5.3).

Debemos considerar todo subconjunto S' de M con cardinal 3. El término independiente de la desigualdad es $2deg(\tilde{u}) - 1 = 5$. En el caso que a S' pertenezca

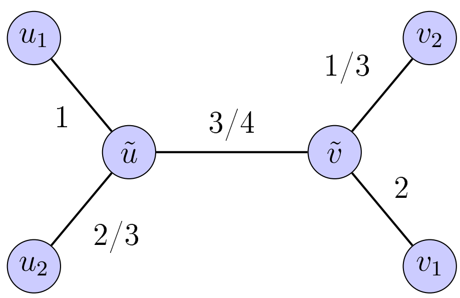


Figura 5.1. Un coloreo parcial que viola la desigualdad **d-Color**

algún color ≥ 5, entonces $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k}$ es a lo sumo 2. Lo mismo ocurre con $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k}$. Por lo tanto la desigualdad es válida.

Analicemos ahora los casos en los cuales $S' \subset \{1, 2, 3, 4\}$:

- $S' = \{1, 2, 3\}$, $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k} = 5$
- $S' = \{1, 2, 4\}$, $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k} = 4$
- $S' = \{1, 3, 4\}$, $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k} = 4.5$
- $S' = \{2, 3, 4\}$, $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k} = 4.5$

Entonces, la asignación de colores cumple con todas las restricciones del poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}$.

Sin embargo, tomando el conjunto $S' = \{1, 2, 3\}$:

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 5.5 > 5 = 2|S'| - 1$$

Por lo tanto la desigualdad **d-Color** no es válida para todo punto del poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}$, es decir no es redundante. □

Veamos a continuación que la desigualdad **d-Color** induce una cara propia de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Proposición 5.3.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo* avdec *que utiliza $|E| - 1$ colores, $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo grado y $S' \subset M$ un conjunto de colores de tamaño $d = deg(\tilde{u})$. La desigualdad **d-Color** no es combinación lineal del sistema minimal de ecuaciones de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.*

Demostración. Nos alcanza con mostrar que la desigualdad **d-Color** no siempre se satisface por igualdad. Definimos un coloreo Col tal que todas las aristas tienen distinto color y la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene un color que pertenece a S'. Entonces:

$$\sum_{k\in S'}(x_{\tilde{u}k}+x_{\tilde{v}k})+\sum_{k\notin S'}a_{\tilde{u}\tilde{v}k}\leq |S'|+0=|S'|<2|S'|-1.$$

Esta última desigualdad es estricta ya que $|S'|\geq 2$ dado que, si $|S'|$ fuera igual a 1, entonces G tendría a P_2 como componente conexa y por lo tanto no existiría un coloreo *avdec* que utiliza $|E|-1$ colores.

$\square$

Proposición 5.3.4. *Sea $G=(V,E)$ un grafo tal que existe un coloreo* avdec *que utiliza $|E|-1$ colores, $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo grado y $S'\subset M$ un conjunto de colores de tamaño $d=deg(\tilde{u})$. La desigualdad* ***d-Color*** *induce una cara no vacía de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$.*

Demostración. Construiremos un punto que pertenece a $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ y satisface la desigualdad **d-Color** por igualdad. Sin pérdida de generalidad supongamos $S'=\{1,\ldots,deg(\tilde{u})\}$.

Consideremos la división de las vecindades de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ en los siguientes conjuntos de vértices:

- $N_1=\{u : u\in N(\tilde{u})\cap N(\tilde{v})\}$, es decir el conjunto de vértices que son adyacentes a $\tilde{u}$ y a $\tilde{v}$. Notamos $N_1=\{a_1,\ldots,a_{|N_1|}\}$.
- $N_2=\{u : u\in N(\tilde{u})\setminus N(\tilde{v})\setminus\{\tilde{v}\}$ tal que $deg(u)=2$ y se verifica que $v\in N(u)-\{\tilde{u}\}$ es adyacente a $\tilde{v}$ y $deg(v)=2\}$.

  $N_3=\{v : v\in N(u)-\{\tilde{u}\}$ para algún $u\in N_2\}$.

  Consideramos sin pérdida de generalidad que los conjuntos N_2 y N_3 están ordenados de forma tal que $b_ic_i\in E$, $b_i\in N_2, c_i\in N_3$ para $i=1,\ldots,|N_2|$.
- $N_4=\{u : u\in N(\tilde{u})\setminus(N_1\cup N_2\cup\{\tilde{v}\})\}$.

  $N_5=\{v : v\in N(\tilde{v})\setminus(N_1\cup N_3\cup\{\tilde{u}\})\}$.

  Notamos $N_4=\{d_1,\ldots,d_{|N_4|}\}$ y $N_5=\{f_1,\ldots,f_{|N_4|}\}$.

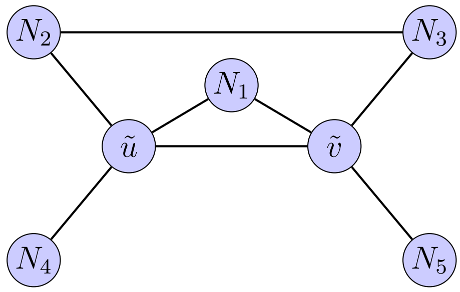


Figura 5.2. Esquema de conjuntos N_1, N_2, N_3, N_4 y N_5.

Observar que $|N_2| = |N_3|$ y $|N_4| = |N_5|$ y $deg(\tilde{u}) = 1 + |N_1| + |N_2| + |N_4| = |S'|$. Se puede ver un esquema de las vecindades en la figura 5.2.

Notamos W al conjunto de aristas que no inciden en $\tilde{u}$ ni en $\tilde{v}$, es decir $W = \{w_i^1 w_i^2 \in E : w_i^1 \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} \wedge w_i^2 \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}\}$ con $|W| = |E| - 2d(\tilde{u}) + 1$.

Sea un coloreo Col definido a partir de la siguiente asignación $f : E \to M$:

$$
\begin{aligned}
&f(\tilde{u}\tilde{v}) = 1 && \\
&f(\tilde{u}a_i) = i + 1 && \forall i = 1 \ldots |N_1| \\
&f(\tilde{u}b_i) = i + 1 + |N_1| && \forall i = 1 \ldots |N_2| \\
&f(\tilde{u}d_i) = i + 1 + |N_1| + |N_2| && \forall i = 1 \ldots |N_4| \\
&f(\tilde{v}a_i) = i + 2 && \forall i = 1 \ldots |N_1| \\
&f(\tilde{v}c_i) = i + 2 + |N_1| && \forall i = 1 \ldots |N_3| \\
&f(\tilde{v}f_i) = i + 2 + |N_1| + |N_3| && \forall i = 1 \ldots |N_5| \\
&f(w_i^1 w_i^2) = i + 2 + |N_1| + |N_2| + |N_4| = i + 1 + |S'| && \forall i = 1 \ldots |W|
\end{aligned}
$$

La cardinalidad de S' es el grado de $\tilde{u}$, por lo tanto en $\tilde{u}$ se utilizan todos los colores de S', y en $\tilde{v}$ se utilizan los colores $1, \ldots, deg(\tilde{u}) + 1$ excepto el 2. Todas las demás aristas del grafo tienen color distinto ya que $3 + |N_1| + |N_2| + |N_4|$ es mayor que el color de cualquier arista incidente a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$.

En primer lugar, veamos que Col es un coloreo propio de aristas.

- Todas las aristas incidentes a $\tilde{u}$ tienen distinto color ya que los colores se asignan secuencialmente. Lo mismo ocurre con las aristas incidentes a $\tilde{v}$.

- Todas las aristas incidentes a un vértice a_i para $i = 1, \ldots, |N_1|$ tienen distinto color ya que la arista incidente a $\tilde{u}$ tiene color $i + 1$, la arista incidente a $\tilde{v}$ tiene el color $i + 2$ y el resto de las aristas incidentes pertenecen a W y por lo tanto tienen un color único.

- Para los vértices de los conjuntos N_2, N_3, N_4 y N_5, existe una sola arista que es incidente a $\tilde{u}$ ó $\tilde{v}$. Como todas las demás aristas incidentes a estos vértices pertenecen a W y son de distinto color, entonces no hay dos aristas incidentes a estos vértices con el mismo color.

- En el caso del resto de las aristas, éstas pertenecen al conjunto W y tienen color único.

Por lo tanto no hay dos aristas incidentes a un mismo vértice con el mismo color. Es decir, Col es un coloreo propio de aristas.

Ahora veamos que es un coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles, es decir que no existe un par de vértices en conflicto que no se distingan por al menos un color. Vamos a separar en siete posibles casos, dependiendo donde se encuentre el conflicto:

- Caso 1: **Conflicto entre $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$**. Como $\tilde{u}$ es incidente a una arista de color 2 y $\tilde{v}$ no, los vértices se distinguen por al menos ese color. Por lo tanto el conflicto entre $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ no está violado.

- Caso 2: **Conflicto entre $\tilde{u}$ y otro vértice** $u \in N(\tilde{u}) \setminus \{\tilde{v}\}$. Como la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color 1 y es única en su color, entonces $\tilde{u}$ y $u \in N(\tilde{u}) \setminus \{\tilde{v}\}$ son distinguibles al menos por el color 1.

- Caso 3: **Conflicto entre $\tilde{v}$ y otro vértice** $v \in N(\tilde{v}) \setminus \{\tilde{u}\}$. Como la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color 1 y es única en su color, entonces $\tilde{v}$ y $v \in N(\tilde{v}) \setminus \{\tilde{u}\}$ son distinguibles al menos por el color 1.

- Caso 4: **Conflicto entre un vecino de $\tilde{u}$ y un vecino de $\tilde{v}$**. Sea $u \in N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$. Si u y v están en conflicto entonces $|N(u)| = |N(v)|$.

- Si $|N(u)| = 2$ entonces $u = b_i$ y $v = c_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, |N_2|\}$. Como $f(\tilde{v}c_i) = f(\tilde{u}b_i) + 1$ entonces estas aristas tienen distinto color y el conflicto no está violado.

- Si $|N(u)| > 2$ entonces hay una arista incidente a u que no es incidente a $\tilde{u}$ ni a v. Si existe una arista no incidente a $\tilde{v}$, entonces pertenece a W y tiene asignado un color único. Por lo tanto, el conflicto no está violado. De igual manera, si existe una arista incidente a v que pertenece a W, ésta tiene asignado un color único y por lo tanto el conflicto no está violado.

  Nos queda entonces el caso en que $N(u) = \{v, \tilde{u}, \tilde{v}\}$ y $N(v) = \{u, \tilde{u}, \tilde{v}\}$, es decir que $u, v \in N_1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u = a_i$ y $v = a_j$ con $i < j$

  Sabemos que $f(\tilde{u}a_i) = i + 1 < f(\tilde{v}a_i) = i + 2 \leq f(\tilde{u}a_j) = j + 1 < f(\tilde{v}a_j) = j + 2 < f(uv)$. Por lo tanto, los vértices u, v difieren en al menos los colores $i + 1$ y $j + 2$ y el conflicto entre u y v no está violado.

- Caso 5: **Conflicto entre dos vértices en** $N(\tilde{u}) \setminus \{\tilde{v}\}$ Sean $u_1, u_2 \in N(\tilde{u})$, $u_1, u_2 \neq \tilde{v}$.

  Si $u_1, u_2 \in N_1$, sin pérdida de generalidad, supongamos $u_1 = a_i$ y $u_2 = a_j$ con $i < j$. Entonces la arista $\tilde{v}u_2$ los distingue.

  Si u_1 ó $u_2 \in N_2$ entonces no son adyacentes por lo cual no hay requisito de que sean distinguibles.

  Si $u_1, u_2 \in N_4$, las aristas $\tilde{u}u_1$ y $\tilde{u}u_2$ reciben distinto color y cualquier otra arista incidente a u_1 o u_2 pertenece a W y tienen color único. Por lo tanto los vértices son distinguibles.

  Si $u_1 \in N_1$ y $u_2 \in N_4$ entonces $deg(u_1) = deg(u_2) \geq 3$ y por lo tanto existe una arista $zu_2 \in W$ con $z \neq u_1$ que distingue a los vértices.

- Caso 6: **Conflicto entre dos vértices en** $N(\tilde{v}) \setminus \{\tilde{u}\}$ El caso es análogo al anterior.

- Caso 7: **Conflicto entre un vértice w_1 que no es vecino de $\tilde{u}$ ni $\tilde{v}$ y un vértice w_2.** Para que exista un conflicto debe cumplirse que $deg(w_1) \geq 2$. Como $w_1 \notin N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$, las aristas incidentes a w_1 no son incidentes a $\tilde{u}$ ni a $\tilde{v}$. Por lo tanto, en caso de conflicto, existe una arista que pertenece a W que no es incidente en w_2 y tienen asignado un color único, lo cual implica que no hay posibilidad de que exista un conflicto violado.

Concluimos entonces que Col es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

Por último veamos que el coloreo cumple la desigualdad **d-Color** por igualdad, es decir pertenece a la cara inducida por **d-Color**. Por un lado podemos afirmar que $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = deg(\tilde{u})$ (todas las aristas incidentes a $\tilde{u}$ toman los primeros $deg(\tilde{u})$ colores). Por otro lado, $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = deg(\tilde{u}) - 1$ porque se utilizan todos los colores de S' salvo el color 2 que no está asignado a ninguna arista incidente a $\tilde{v}$. Además, la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene el color 1, entonces $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0$. Por lo tanto $\sum\limits_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 2|S'| - 1$.

$\square$

El coloreo Col que hemos definido tiene características, algunas muy evidentes, que resaltamos a continuación.

Proposición 5.3.5. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes del mismo grado y $S' = \{1, \ldots, deg(\tilde{u})\}$. Consideremos Col el coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles definido en la proposición anterior. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

Propiedad P1: Las aristas no incidentes a $\tilde{u}$ ni a $\tilde{v}$ utilizan colores que no pertenecen a S'.

Propiedad P2: La arista $\tilde{u}\tilde{v}$ utiliza un color en S' y es única en su color.

Propiedad P3: El vértice $\tilde{v}$ tiene una arista incidente con un color que no pertenece a S' y es única en su color.

Propiedad P4: El vértice $\tilde{u}$ tiene una arista incidente que es la única con color 2.

Propiedad P5: Los colores $3, \ldots, |S'|$ se repiten en aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$.

Propiedad P6: Si $|S'| \geq 3$, Col utiliza menos de m colores.

Demostración. A continuación demostramos cada una de las propiedades.

Propiedad P1: Las aristas que pertenecen a W usan colores a partir de $3+|N_1|+|N_2|+|N_4|$ que no pertenecen a S'.

Propiedad P2: La arista $\tilde{u}\tilde{v}$ usa el color 1 que pertenece a S' y además es la única arista del grafo que tiene ese color.

Propiedad P3: Existe una arista $\tilde{v}z$ que tiene asignado el color $2+|N_5|+|N_1|+|N_3|$ que no pertenece a S' y además es la única arista del grafo que tiene ese color. Dependiendo de la cardinalidad de los conjuntos definidos en la vecindad, z sería $f_{|N_5|}$ ó $c_{|N_3|}$ ó $a_{|N_1|}$.

Propiedad P4: Si existe a_1, entonces la arista $\tilde{u}a_1$ es la única que tiene asignado el color 2. Si $|N_1| = 0$ y $|N_3| \geq 1$, entonces la arista $\tilde{u}b_1$ es la única que tiene asignado el color 2. En otro caso, $|N_1| = |N_3| = 0$ y la arista $\tilde{u}d_1$ es la única que tiene asignado el color 2.

Propiedad P5: Las aristas incidentes a $\tilde{u}$ tienen asignados los colores $2, \ldots, |N_1|+|N_2|+|N_4|+1$ (exceptuando $\tilde{u}\tilde{v}$). Las aristas incidentes a $\tilde{v}$ tienen asignados los colores $3, \ldots, |N_1| + |N_2| + |N_4| + 2$ (exceptuando $\tilde{u}\tilde{v}$). Por lo tanto, los colores $3, \ldots, |N_1| + |N_2| + |N_4| + 1$ se repiten en aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$.

Propiedad P6: Si $|S'| \geq 3$, Col utiliza dos veces el color 3. Esto implica que Col utiliza a lo sumo $|E| - 1$ colores.

□

El coloreo *avdec* Col está construido a partir de un ordenamiento de los vértices de las vecindades: $u_1, \ldots u_{deg(\tilde{u})-1}$ y $v_1, \ldots v_{deg(\tilde{v})-1}$, asignando $f(\tilde{v}v_i) = f(\tilde{u}u_i) + 1$ para $i = 1, \ldots, deg(\tilde{u}) - 1$, $f(\tilde{u}u_1) = 2$ y $f(\tilde{u}\tilde{v}) = 1$. El orden de las dos vecindades no es arbitrario: verifica que el par u_i, v_i tiene la propiedad que $u_i = v_i \in N_1$

ó $u_i \in N_2$ y $v_i \in N_3$ con $u_iv_i \in E$ ó $u_i \in N_4$ y $v_i \in N_5$. Este ordenamiento y esta asignación son los que nos permiten demostrar que Col es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Cabe notar que, cualquier otro ordenamiento de los vértices que respete que u_i y v_i ocupen el mismo lugar en el orden, permite construir un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara.

En la siguiente proposición mostramos algunos coloreos que nos resultarán de interés más adelante.

Proposición 5.3.6. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes del mismo grado y $S' = \{1, \ldots, deg(\tilde{u})\}$. Se satisfacen las siguientes propiedades sobre coloreos* avdec *que pertenecen a la cara F definida por la desigualdad **d-Color**:*

Propiedad P7: Con la misma enumeración de vértices utilizada para construir Col, se pueden intercambiar los colores asignados a las aristas incidentes a $\tilde{u}$ con los de $\tilde{v}$ y obtener un nuevo coloreo avdec *que pertenece a la cara F.*

Propiedad P8: Existe un coloreo avdec *que pertenece a la cara F donde la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ no tiene asignado un color de S'*

Propiedad P9: Dada una arista $\tilde{v}v$, existe un coloreo avdec *que pertenece a la cara F donde esta arista no tiene asignado un color de S'.*

Demostración. A continuación demostramos cada una de las propiedades.

Propiedad P7: El rol en la asignación de los colores a las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ es simétrico. Puede obtenerse un nuevo coloreo *avdec* intercambiando el orden en el que se asignaron los colores: primero las aristas de $\tilde{v}$ y luego las de $\tilde{u}$. Esta asignación verifica que $f(\tilde{u}u_i) = f(\tilde{v}v_i) + 1$ para $i = 1, \ldots, deg(\tilde{u}) - 1$, $f(\tilde{u}\tilde{v}) = 1$ y $f(\tilde{v}, v_1) = 2$. Dado que los vértices de las vecindades no cambiaron su ordenamiento, se deduce de la demostración anterior que esta nueva asignación de colores define un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F.

Propiedad P8: En el coloreo *avdec* Col, la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color 1 y además, existe una arista $\tilde{v}z$ que tiene asignado el color $2 + |N_5| + |N_1| + |N_3| \notin S'$. Dependiendo de la composición de la vecindad de $\tilde{v}$, el vértice

z es $f_{|N_5|}$, $c_{|N_3|}$ ó $a_{|N_1|}$. Además, estas dos aristas son únicas en su color. Si intercambiamos los colores entre estas dos aristas, obtenemos Col_1 que resulta un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles como consecuencia de la singularidad de los colores que se intercambian. Además, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col y Col_1 que están presentes en la desigualdad **d-Color** son:

$x^{Col}_{\tilde{u}1} = x^{Col}_{\tilde{v}1} = 1$, $a^{Col}_{\tilde{u}\tilde{v}1} = 1$, $a^{Col}_{\tilde{u}\tilde{v}|S'|+1} = 0$

$x^{Col_1}_{\tilde{u}1} = 0$, $x^{Col_1}_{\tilde{v}1} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}\tilde{v}1} = 0$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}\tilde{v}|S'|+1} = 1$

Teniendo en cuenta estos valores, podemos concluir que Col_1 también pertenece a la cara F y la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ no tiene asignado un color de S'.

Propiedad P9: Como mencionamos antes, si en el proceso de construcción del coloreo, el orden de las dos vecindades de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ verifica que el par u_i, v_i tiene la propiedad que $u_i = v_i \in N_1$ ó $u_i \in N_2$ y $v_i \in N_3$ con $(u_i, v_i) \in E$ ó $u_i \in N_4$ y $v_i \in N_5$ y además $f(\tilde{v}v_i) = f(\tilde{u}u_i) + 1$ para todo $i = 1, \ldots, deg(\tilde{u}) - 1$, $f(\tilde{u}u_1) = 2$ y $f(\tilde{u}\tilde{v}) = 1$, el coloreo que se construye resulta un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara definida por la desigualdad **d-Color**.

En el coloreo *avdec* Col, existe una arista $\tilde{v}z$ que tiene asignado el color $2 + |N_5| + |N_1| + |N_3| \notin S'$. Dependiendo de la composición de la vecindad de $\tilde{v}$, el vértice z es $f_{|N_5|}$, $c_{|N_3|}$ ó $a_{|N_1|}$. Por lo tanto, dada la arista $\tilde{v}v$, basta considerar un intercambio en el orden de los vértices de la vecindad de $\tilde{v}$ entre v y z. Ese mismo intercambio debe hacerse entre los vecinos de $\tilde{u}$ asociados a v y z. Considerando este nuevo orden y con el mismo proceso constructivo, la asignación de colores define un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara definida por la desigualdad **d-Color** y tiene la propiedad que $f(\tilde{v}v) \notin S'$.

□

Ya sabemos que la desigualdad **d-Color** define una cara propia de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$. Queremos determinar bajo qué condiciones esta cara tiene dimensión máxima, es decir, cuándo define faceta. Comenzamos analizando condiciones necesarias.

Nuevamente, para simplificar la notación y sin pérdida de generalidad, asumiremos $S' = \{1, \ldots, deg(\tilde{u})\}$.

Proposición 5.3.7. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E|-1$ colores. Sean $\tilde{u} \in V$ y $\tilde{v} \in V$ dos vértices adyacentes con el mismo grado y sea $S' = \{1, 2, \ldots, d = deg(\tilde{u})\}$ un conjunto de colores.*

Las siguientes condiciones:

- $deg(\tilde{u}) > 3$
- *si* $deg(\tilde{u}) = 3$ *entonces no existe una arista* uv *tal que* $deg(u) = 3$, $u \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$ *y* $v \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$.

*son necesarias para que la desigualdad válida **d-Color***

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2|S'| - 1$$

defina una faceta del poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Demostración. Sea F la cara propia definida por la desigualdad **d-Color**. Tenemos dos posibles casos en los cuales las condiciones no serían válidas :

- $deg(\tilde{u}) = 2$. En este caso, $S' = \{1, 2\}$ y existen $u \in N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$ (figura 5.3).

Figura 5.3. $deg(\tilde{u}) = 2$

Afirmamos que los puntos que pertenecen a F satisfacen la siguiente igualdad:

$$a_{\tilde{u}u1} + a_{\tilde{u}\tilde{v}1} + a_{\tilde{v}v1} = 1 \tag{5.7}$$

Para que los vértices $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ sean distinguibles y la asignación sea un coloreo propio de aristas, las aristas $\tilde{u}\tilde{v}, \tilde{u}u$ y $\tilde{v}v$ deben tener asignado distinto color.

Si $a_{\tilde{u}\tilde{v}1} = 1$, la igualdad (5.7) es válida.

Si $a_{\tilde{u}\tilde{v}2} = 1$ entonces $x_{\tilde{u}2} + x_{\tilde{v}2} = 2$. Para pertenecer a la cara, debe cumplirse que $x_{\tilde{u}1} + x_{\tilde{v}1} = 1$. Entonces $a_{\tilde{u}u1} = 1$ ó $a_{\tilde{v}v1} = 1$ y la igualdad (5.7) resulta válida.

Finalmente, si $a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$ para algún $k > 2$, entonces $x_{\tilde{u}1} + x_{\tilde{u}2} \leq 1$ y $x_{\tilde{v}1} + x_{\tilde{v}2} \leq 1$ y para pertenecer a la cara debe cumplirse que $x_{\tilde{u}1} + x_{\tilde{u}2} + x_{\tilde{v}1} + x_{\tilde{v}2} = 2$. Como deben ser distinguibles, entonces $x_{\tilde{u}1} + x_{\tilde{v}1} = 1$ lo que implica que $a_{\tilde{u}u1} + a_{\tilde{v}v1} = 1$ y por lo tanto (5.7) es una igualdad válida.

Veamos que (5.7) es linealmente independiente de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define a F. Esta condición nos permitiría afirmar que si $deg(\tilde{u}) = 2$, entonces la desigualdad **d-Color** no define una faceta de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Dado que por hipótesis existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza a lo sumo $|E| - 1$ colores, entonces existen coloreos en $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ que no usan el color 1. Por lo tanto, (5.7) no puede ser combinación lineal de las ecuaciones (5.4) y (5.5) que definen el sistema minimal. Entonces, si (5.7) fuera linealmente dependiente debería existir en la combinación lineal, un multiplicador $\alpha \neq 0$ asociado a la ecuación que define la cara F.

Como se deben anular los coeficientes correspondientes a $x_{\tilde{u}k}$ y $x_{\tilde{v}k}$ para todo $k \notin \{1, 2\}$, entonces los multiplicadores de las igualdades (5.4) quedan determinados con valor nulo. En el caso de $x_{\tilde{u}k}$ y $x_{\tilde{v}k}$ con $k \in \{1, 2\}$, los multiplicadores de las correspondientes ecuaciones de (5.4) deben ser igual a α. Para el resto de las ecuaciones en (5.4), dada la presencia única de la variable x_{vk} con $v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$, $k \in M$, se deduce que los multiplicadores deben ser nulos.

Dado que $m \geq 3$, la presencia única de las variables a_{uv3} para $uv \neq \tilde{u}\tilde{v}$ en las correspondientes ecuaciones (5.5) implican que los multiplicadores son nulos.

Como conclusión, en el caso de que existiera dependencia lineal, las ecuaciones con multiplicador no necesariamente nulo serían:

$x_{\tilde{u}1} + x_{\tilde{v}1} + x_{\tilde{u}2} + x_{\tilde{v}2} + \sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 2|S'| - 1$ con multiplicador α,

$\sum\limits_{z \in N(\tilde{u})} a_{\tilde{u}z1} = x_{\tilde{u}1}$ con multiplicador α,

$\sum\limits_{z \in N(\tilde{u})} a_{\tilde{u}z2} = x_{\tilde{u}2}$ con multiplicador α,

$\sum\limits_{z \in N(\tilde{v})} a_{\tilde{v}z1} = x_{\tilde{v}1}$ con multiplicador α,

$\sum\limits_{z \in N(\tilde{v})} a_{\tilde{v}z2} = x_{\tilde{v}2}$ con multiplicador α,

$\sum\limits_{k \in M} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$ con multiplicador β.

Para anular el coeficiente correspondiente a $a_{\tilde{u}\tilde{v}2}$, debería cumplirse que $2\alpha + \beta = 0$. Por otro lado, para anular el coeficiente correspondiente a $a_{\tilde{u}\tilde{v}3}$, debería cumplirse que $\alpha + \beta = 0$. Esto implica que $\alpha = 0$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Entonces la ecuación (5.7) es válida para los puntos que pertenecen a F y no depende linealmente de la otras ecuaciones que definen la cara. Por lo tanto, $deg(\tilde{u}) \geq 3$ es condición necesaria para que la cara F resulte ser faceta.

- **Si** $deg(\tilde{u}) = 3$ **y existe una arista** uv **tal que** $deg(u) = 3$**,** $u \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$ **y** $v \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$.

  Afirmamos que la siguiente ecuación es válida para todos los puntos que pertenecen a F:

$$\sum_{k \in S'} a_{uvk} = 0 \tag{5.8}$$

  Supongamos que existe un punto que pertenece a F tal que $\sum_{k \in S'} a_{uvk} = 1$. Entonces, existe un color $k_0 \in S'$ que está asignado a la arista uv. Por lo tanto las aristas $\tilde{u}u$,$\tilde{v}u$,$\tilde{u}v$ y $\tilde{v}v$ no tienen el color k_0 ya que son incidentes a u o v. Notar que los pares de vértices $\tilde{u}u$, $\tilde{v}u$ y $\tilde{u}\tilde{v}$ están en conflicto. Analicemos las diferentes configuraciones que pueden presentarse:

- Si la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color k_0 (figura 5.4), entonces $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0$. Por lo tanto, los puntos en la cara deben cumplir que $\sum\limits_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) = 5$. Es decir, existe exactamente una arista, que no es $\tilde{u}\tilde{v}$, que debe tener un color $t \notin S'$, y existe un color $k_1 \in S'$ que debe utilizarse una vez en las aristas incidentes $\tilde{u}$ y una vez en las incidentes a $\tilde{v}$. Como la asignación debe definir un coloreo propio de aristas, entonces existen dos posibilidades: $a_{\tilde{u}uk_1} = a_{\tilde{v}vk_1} = 1$ ó $a_{\tilde{u}vk_1} = a_{\tilde{v}uk_1} = 1$. En el primer caso, u y $\tilde{v}$ no serian distinguibles. En el segundo caso, u y $\tilde{u}$ no serian distinguibles.

Figura 5.4. $a_{\tilde{u}\tilde{v}k_0} = 1$

- Si la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene un color $k_1 \in S'$ (figura 5.5), entonces las aristas $\tilde{u}u$,$\tilde{v}u$,$\tilde{u}v$ y $\tilde{v}v$ no tienen el color k_1 ni el k_0. Como $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0$ y sólo nos queda un color en S' para usar en las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$, entonces no puede existir un punto en la cara con estas características.

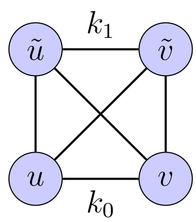


Figura 5.5. $a_{\tilde{u}\tilde{v}k_1} = 1$

- Si la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado un color $t \notin S'$ (figura 5.6), entonces $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$. Por lo tanto los puntos en la cara deben cumplir que $\sum\limits_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) = 4$. Como el color k_0 no se puede utilizar en aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$, se deben utilizar en estas aristas los colores k_1 y k_2. Pero en ese caso $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ resultarían no distinguibles.

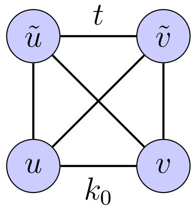


Figura 5.6. $a_{\tilde{u}\tilde{v}k_1} = t$

Por lo tanto, bajo esta condición, no existe un punto en la cara tal que $\sum\limits_{k \in S'} a_{uvk} = 1$.

Veamos que (5.8) es linealmente independiente de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define a F. De esta manera podremos afirmar que F no define una faceta de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Como se deben anular los coeficientes correspondientes x_{zk} con $z \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$, $k \in M$, se deduce que los multiplicadores correspondientes a las ecuaciones (5.4) deben ser nulos. Pero entonces, la variable a_{uv4} aparecería únicamente en la correspondiente ecuación (5.5) y por lo tanto el multiplicador tambien sería nulo. Esta ecuación es la única que tiene las variables a_{uvk} con $k \in S'$. Lo cual nos lleva a concluir que (5.8) es linealmente independiente del sistema minimal y de la ecuación que define a la cara F.

□

Veamos ahora que bajo las condiciones analizadas en la proposición anterior, la desigualdad **d-Color** define una faceta de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Proposición 5.3.8. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E| - 1$ colores. Sean $\tilde{u} \in V$ y $\tilde{v} \in V$ dos vértices adyacentes con el mismo grado y sea $S' = \{1, 2, \ldots, d = deg(\tilde{u})\}$ un conjunto de colores. Supongamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- *$deg(\tilde{u}) > 3$*
- *si $deg(\tilde{u}) = 3$ y no existe una arista uv tal que $deg(u) = 3$, $u \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$ y $v \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$.*

Entonces la desigualdad válida ***d-Color***

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2|S'| - 1$$

define una faceta del poliedro $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Demostración. Para demostrar que la desigualdad define una faceta veremos que toda igualdad satisfecha por los puntos de la cara F definida por la desigualdad, es combinación lineal del sistema minimal y de la ecuación que define a F. De esta manera, la dimensión de la cara será máxima.

Sea (Π, Π_0) una igualdad satisfecha por todos los puntos que pertenecen a la cara. Es decir

$$\sum_{uv \in E} \sum_{k \in M} \Pi^a_{uvk} a_{uvk} + \sum_{u \in V} \sum_{k \in M} \Pi^x_{uk} x_{uk} = \Pi_0 \text{ para todo } (A, X) \in F.$$

Como señalamos, debemos demostrar que (Π, Π_0) se puede escribir como combinación lineal de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define a F.

Sean α_{uk}, β_{uv} y δ multiplicadores asociados a las ecuaciones (5.4), (5.5) y a la ecuación que define a F, respectivamente.

Consideremos $s \in S'$ y $t \notin S'$. Si (Π, Π_0) es una combinación lineal de las igualdades debería verificarse que:

$$\Pi^a_{uvt} = \alpha_{ut} + \alpha_{vt} + \beta_{uv} \qquad \forall u \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} \tag{5.9}$$
$$\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} \qquad \forall u \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \neq t \tag{5.10}$$
$$\Pi^a_{uvt} = \alpha_{ut} + \alpha_{vt} + \beta_{uv} \qquad \forall u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} \tag{5.11}$$
$$\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} \qquad \forall u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \notin S', k \neq t \tag{5.12}$$
$$\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} \qquad \forall u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \in S' \tag{5.13}$$
$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} = \alpha_{\tilde{u}s} + \alpha_{\tilde{v}s} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} \tag{5.14}$$
$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = \alpha_{\tilde{u}k} + \alpha_{\tilde{v}k} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} \qquad \forall k \in S', k \neq s \tag{5.15}$$
$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} = \alpha_{\tilde{u}t} + \alpha_{\tilde{v}t} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} + \delta \tag{5.16}$$
$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = \alpha_{\tilde{u}k} + \alpha_{\tilde{v}k} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} + \delta \qquad \forall k \notin S', k \neq t \tag{5.17}$$
$$\Pi^x_{uk} = -\alpha_{uk} \qquad \forall u \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} \tag{5.18}$$
$$\Pi^x_{\tilde{u}t} = -\alpha_{\tilde{u}t} \tag{5.19}$$
$$\Pi^x_{\tilde{u}k} = -\alpha_{\tilde{u}k} \qquad \forall k \notin S', k \neq t \tag{5.20}$$
$$\Pi^x_{\tilde{v}t} = -\alpha_{\tilde{v}t} \tag{5.21}$$
$$\Pi^x_{\tilde{v}k} = -\alpha_{\tilde{v}k} \qquad \forall k \notin S', k \neq t \tag{5.22}$$
$$\Pi^x_{\tilde{u}s} = -\alpha_{\tilde{u}s} + \delta \tag{5.23}$$
$$\Pi^x_{\tilde{u}k} = -\alpha_{\tilde{u}k} + \delta \qquad \forall k \in S', k \neq s \tag{5.24}$$
$$\Pi^x_{\tilde{v}s} = -\alpha_{\tilde{v}s} + \delta \tag{5.25}$$
$$\Pi^x_{\tilde{v}k} = -\alpha_{\tilde{v}k} + \delta \qquad \forall k \in S', k \neq s \tag{5.26}$$

A partir de estas ecuaciones, definimos los siguientes multiplicadores:

- $\alpha_{\tilde{u}t}$ a partir de (5.19): $\alpha_{\tilde{u}t} = -\Pi^x_{\tilde{u}t}$
- $\alpha_{\tilde{v}t}$ a partir de (5.21): $\alpha_{\tilde{v}t} = -\Pi^x_{\tilde{v}t}$
- δ a partir de (5.14)+(5.23)+(5.25)-(5.16)-(5.19)-(5.21):

$$\delta = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t}$$

- $\beta_{\tilde{u}\tilde{v}}$ a partir de (5.16): $\beta_{\tilde{u}\tilde{v}} = 2\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + 2\Pi^x_{\tilde{u}t} + 2\Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s}$
- $\alpha_{\tilde{u}s}$ a partir de (5.23): $\alpha_{\tilde{u}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t}$

- $\alpha_{\tilde{v}s}$ a partir de (5.25): $\alpha_{\tilde{v}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t}$
- α_{uk} para todo k, para todo $u \neq \tilde{u}, \tilde{v}$ a partir de (5.18): $\alpha_{uk} = -\Pi^x_{uk}$
- $\alpha_{\tilde{u}k}$ para todo $k \notin S', k \neq t$ a partir de (5.20): $\alpha_{\tilde{u}k} = -\Pi^x_{\tilde{u}k}$
- $\alpha_{\tilde{v}k}$ para todo $k \notin S', k \neq t$ a partir de (5.22): $\alpha_{\tilde{v}k} = -\Pi^x_{\tilde{v}k}$
- $\alpha_{\tilde{u}k}$ para todo $k \in S', k \neq s$ a partir de (5.24):

$$\alpha_{\tilde{u}k} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}k}$$

- $\alpha_{\tilde{v}k}$ para todo $k \in S', k \neq s$ a partir de (5.26):

$$\alpha_{\tilde{u}k} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{v}k}$$

- β_{uv} para todo u y v que no coincidan con $\tilde{u}$ ni $\tilde{v}$ a partir de (5.9): $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt}$
- β_{uv} para todo $u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ y $v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ a partir de (5.11): $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt}$

Con estas definiciones para los multiplicadores, deberíamos ver que las ecuaciones (5.10), (5.12), (5.13), (5.15) y (5.17) sean consistentes.

La ecuación (5.10) establece que $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} - \alpha_{uk} - \alpha_{vk}$ para todo $u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}$, $k \neq t$. Reemplazando las definiciones de α_{uk} y α_{vk} obtenidas a partir de las ecuaciones (5.18), resulta $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk}$ para todo k. Como β_{uv} está definido en función del color t a partir de la ecuación (5.9), entonces debemos mostrar que

$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \quad \forall k \in M, k \neq t \quad u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}} \tag{C1}$$

La ecuación (5.12) establece que $\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} \forall u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \notin S', k \neq t$. Supongamos que $u = \tilde{u}$. El caso $u = \tilde{v}$ es análogo. Reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}k}$, α_{vk} y $\beta_{\tilde{u}v}$ obtenidas a partir de (5.20), (5.18) y (5.11) respectivamente, deberíamos demostrar que

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk} \quad \forall k \notin S', k \neq t \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}} \tag{C2}$$

La ecuación (5.13) establece que $\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} \forall u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \in S'$. Supongamos que $u = \tilde{u}$. El caso $u = \tilde{v}$ es análogo. Para el caso que $k \neq s$, reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}k}$, α_{vk} y $\beta_{\tilde{u}v}$ obtenidas a partir de (5.20), (5.18) y (5.11) respectivamente, deberíamos demostrar que

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vk} - \Pi^x_{\tilde{u}k} - \Pi^x_{vk} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s}}$$
$$\boldsymbol{\forall k \in S', k \neq s \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}} \tag{C3}$$

Para el caso que $k = s$, reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}s}$, α_{vs} y $\beta_{\tilde{u}v}$ obtenidas a partir de (5.23), (5.18) y (5.11) respectivamente, deberíamos demostrar que

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vs} - \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s} \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}} \tag{C4}$$

La ecuación (5.15) establece que $\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = \alpha_{\tilde{u}k} + \alpha_{\tilde{v}k} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}}$ para todo $k \in S', k \neq s$. Reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}k}$, $\alpha_{\tilde{v}k}$ y $\beta_{\tilde{u}\tilde{v}}$ obtenidas a partir de (5.24), (5.26) y (5.11) respectivamente, deberíamos demostrar que:

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} \quad \forall k \in S', k \neq s} \tag{C5}$$

La ecuación (5.17) establece que $\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = \alpha_{\tilde{u}k} + \alpha_{\tilde{v}k} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} + \delta$ para todo $k \notin S', k \neq t$. Reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}k}$, $\alpha_{\tilde{v}k}$ y $\beta_{\tilde{u}\tilde{v}}$ obtenidas a partir de (5.20), (5.22) y (5.16) respectivamente, y de la expresión de δ, deberíamos demostrar que:

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{\tilde{u}t} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} \quad \forall k \notin S', k \neq t} \tag{C6}$$

A continuación demostraremos la validez de cada una de las identidades derivadas.

- **C1:** $\boldsymbol{\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \quad \forall k \in M, k \neq t \quad u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}}$
  Analizaremos diferentes casos:
    - $k \notin S'$

Consideremos el coloreo *avdec* Col definido en la proposición 5.3.4. Dado que Col utiliza a lo sumo $|E|-1$ colores, podemos asumir que no utiliza el color k. Dado que $u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}$, la arista uv pertenece al conjunto W y por lo tanto tiene asignado un color que no pertenece a S' y es única en su color. Sin pérdida de generalidad, asumimos que el color es t. A partir de este coloreo, se puede obtener un nuevo coloreo Col_1 tal que el color k es asignado a la arista uv y el resto de las aristas conservan su color. Debido a la unicidad de color de la arista uv y a que k no está siendo usado por ninguna arista, Col_1 es un coloreo de aristas que respeta la distinguibilidad de los vértices y pertenece a la cara F definida por la desigualdad **d-Color**.

Teniendo en cuenta que Col y Col_1 difieren sólo en el color asignado a la arista uv, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x_{ut}^{Col} = x_{vt}^{Col} = 1$, $a_{uvt}^{Col} = 1$
$x_{uk}^{Col_1} = x_{vk}^{Col_1} = 1$, $a_{uvk}^{Col_1} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara F, satisfacen

$$\Pi^a a^{Col} + \Pi^x x^{Col} = \Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1}$$

y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

$$\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk}.$$

- $k \in S'$ y no existen conflictos entre u y $\tilde{u}$, u y $\tilde{v}$, v y $\tilde{u}$, v y $\tilde{v}$:

Consideremos el coloreo *avdec* Col definido en la proposición 5.3.4. La arista $\tilde{u}\tilde{v}$ es la única con color 1 y existe al menos una arista incidente a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ que tiene asignado el color k. Además, como la arista $uv \in W$, tiene asignado un color que no pertenece a S'. Sin pérdida de generalidad, asumimos que el color es t.

Intercambiando la asignación del color k por la del color 1 (dos colores en S'), obtenemos Col_1 un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara. En Col_1, la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ es la única con color k y la arista uv tiene asignado el color t. A partir de este coloreo, construimos un nuevo coloreo Col_2 cambiando el color de la arista uv al color k.

Col_2 es un coloreo propio de aristas ya que u y v no tienen una arista incidente de color k (solo $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color k). Además, como todas las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ no cambian de color, el coloreo Col_2 pertenece a la cara F.

La única arista que cambió el color es uv y sólo se repite en la arista $\tilde{u}\tilde{v}$. Por lo tanto, los únicos conflictos potencialmente violados podrían ser entre u y $\tilde{u}$, u y $\tilde{v}$, v y $\tilde{u}$, v y $\tilde{v}$. Pero por hipótesis estos conflictos no existen.

Teniendo en cuenta que Col_1 y Col_2 difieren sólo en el color de la arista uv, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x_{ut}^{Col_1} = x_{vt}^{Col_1} = 1$, $a_{uvt}^{Col_1} = 1$
$x_{uk}^{Col_2} = x_{vk}^{Col_2} = 1$, $a_{uvk}^{Col_2} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara F, satisfacen

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

$$\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk}$$

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$ y $v \notin N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$

  Como $v \notin N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$, entonces podemos asegurar que no existe conflicto entre v y $\tilde{u}$ ni v y $\tilde{v}$.

  Si $deg(u) = 2$, entonces u no tiene conflicto con $\tilde{u}$ ni con $\tilde{v}$ ya que $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) \geq 3$. Por lo tanto, estaríamos en las condiciones del caso anterior y la identidad es verdadera.

Si $deg(u) > 3$, entonces existe una arista (u, z) con $z \neq \tilde{u}, \tilde{v}, v$. Esta arista pertenece al conjunto W, por lo cual es única en su color en los coloreos Col_1 y Col_2 definidos en el caso anterior. Entonces, no puede haber ningún conflicto violado en estos coloreos. Por lo tanto, estaríamos en las condiciones del caso anterior y la identidad es verdadera.

Si $deg(u) = 3$ y existe una arista (u, z) con $z \neq \tilde{u}, \tilde{v}, v$, entonces nuevamente se repiten las condiciones anteriores y la identidad es verdadera.

Si $deg(u) = 3$, $N(u) = \{v, \tilde{u}, \tilde{v}\}$ y $deg(\tilde{u}) \neq 3$ entonces u no tiene conflicto con $\tilde{u}$ ni con $\tilde{v}$. Por lo tanto estaríamos en las condiciones del caso anterior y la identidad es verdadera.

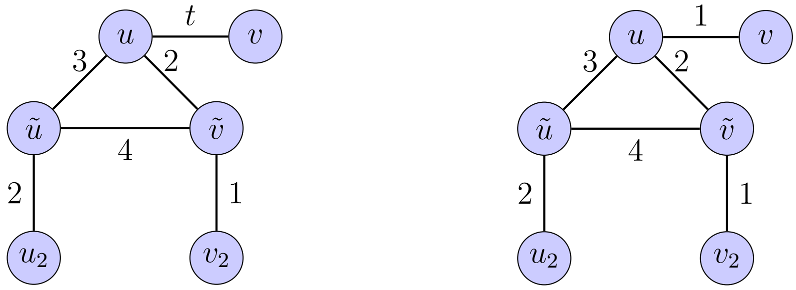
Si $deg(u) = 3$, $N(u) = \{v, \tilde{u}, \tilde{v}\}$ y $deg(\tilde{u}) = 3$. Sean $z_1 \in N(\tilde{u})$ y $z_2 \in N(\tilde{v})$. Como $v \notin N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$, entonces $z_1, z_2 \neq v$. Eventualmente podría ocurrir que $z_1 = z_2$. Observar que $N(\tilde{u}) = \{\tilde{v}, u, z_1\}$ y $N(\tilde{v}) = \{\tilde{u}, u, z_2\}$.

Como $deg(\tilde{u}) = 3$, entonces $S' = \{1, 2, 3\}$. Consideremos los siguientes órdenes en las vecindades de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$: $u_1 = u, u_2 = z_1$ y $v_1 = u, v_2 = z_2$.

Siguiendo el procedimiento de asignación de colores que hemos descripto en la proposición 5.3.4, el coloreo que se obtiene a partir de este orden asigna color 1 a $\tilde{u}\tilde{v}$, color 2 a $\tilde{u}u$, color 3 a $\tilde{u}u_2$ y $\tilde{v}u$ y color 4 a $\tilde{v}v_2$. La arista $uv \in W$, por lo cual tiene asignado un color que no pertenece a S' y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el color es t. Si permutamos el color 2 con el 3 y el color 1 con el 4, obtenemos Col_1 (figura 5.7a) un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F.

A partir de este coloreo, nos construimos un nuevo coloreo Col_2 (figura 5.7b) cambiando el color de la arista uv al color 1. Como ni u ni v tienen aristas incidentes con color 1, entonces Col_2 es un coloreo propio de aristas.

Supongamos en primer lugar que $u_2 \neq v_2$. Si v no tiene conflicto con ninguno de ellos, si hubiera algún par de vértices en conflicto que no fueran distinguibles deberían ser vértices que tengan arista incidente



(a) Col_1 (b) Col_2

Figura 5.7. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$ y $v \notin N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$

con color 1: u y $\tilde{v}$. Estos vértices difieren en color 4. Entonces Col_2 resulta un coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

Si v tuviera conflicto con u_2 y v_2 entonces $deg(v) \geq 3$. Por lo tanto, debería existir alguna arista u_2z y v_2w con $z, w \neq \tilde{u}, \tilde{v}$ que tienen único color que hacen que los vértices sean distinguibles. Entonces Col_2 resulta un coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

Si v tuviera conflicto con u_2 ó v_2, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v tiene conflicto con u_2 (si fuera v_2, intercambiar en Col_1 los colores de $\tilde{u}u_2$ y $\tilde{v}v_2$). En este caso, los vértices son distinguibles por el color 2. Entonces Col_2 resulta un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

Analicemos ahora el caso que $u_2 = v_2$. Si v tuviera conflicto con u_2, entonces $deg(v) \geq 3$. Por lo tanto debería existir alguna arista vz con $z \neq \tilde{u}, \tilde{v}, u, u_2$ que tienen único color que hace que los vértices sean distinguibles. Entonces Col_2 resulta un coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

Dado que las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ no cambiaron de color podemos afirmar que Col_2 pertenece a la cara F. Teniendo en cuenta que Col_1 y Col_2 difieren sólo en el color de la arista uv, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x_{ut}^{Col_1} = x_{vt}^{Col_1} = 1$, $a_{uvt}^{Col_1} = 1$
$x_{u1}^{Col_2} = x_{v1}^{Col_2} = 1$, $a_{uv1}^{Col_2} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara, satisfacen

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

y por la diferencia entre los valores de las variables, concluimos que:

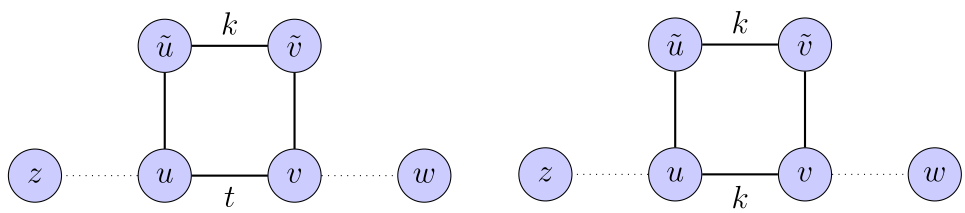
$$\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uv1} + \Pi^x_{u1} + \Pi^x_{v1}$$

La elección del color $1 \in S'$ fue arbitraria, por lo cual la identidad es cierta para todo $k \in S'$:

$$\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \ \ \forall k \in S', t \notin S'$$

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \notin N(\tilde{v})$, $v \notin N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$

  Consideremos el coloreo *avdec* Col definido en la proposición 5.3.4 a partir del cual definimos un coloreo Col_1 (figura 5.8a) intercambiando la asignacion del color 1 con la del color k ($k \in S'$). Claramente, Col_1 pertenece a la cara F ya que la cantidad de aristas incidentes a $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ con colores en S' no cambia. A partir de este coloreo, se puede obtener un nuevo coloreo Col_2 (figura 5.8b) tal que el color k es asignado a la arista uv y el resto de las aristas conservan su color.



(a) Col_1 (b) Col_2

Figura 5.8. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \notin N(\tilde{v})$, $v \notin N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$

Como las aristas $\tilde{u}\tilde{v}$ y uv no inciden en los mismos vértices, Col_2 es un coloreo propio de aristas. Si hubiera algún par de vértices en conflicto que no fueran distinguibles deberían ser vértices que tengan arista incidente con color k: $\tilde{u}, \tilde{v}, u, v$. Como $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) \geq 3$, si alguno de ellos tuviera conflicto con u y/o v implicaría que $deg(u) \geq 3$ y/o $deg(v) \geq 3$. Entonces, en ambos casos podemos afirmar que existe una arista uz y/o vw con $z, w \neq \tilde{u}, \tilde{v}, u, v$. Estas aristas son únicas en su color, por lo tanto Col_2 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Dado que las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ no cambiaron de color podemos afirmar que Col_2 pertenece a la cara F. Teniendo en cuenta que Col_1 y Col_2 difieren sólo en el color de la arista uv, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x_{ut}^{Col_1} = x_{vt}^{Col_1} = 1$, $a_{uvt}^{Col_1} = 1$
$x_{uk}^{Col_2} = x_{vk}^{Col_2} = 1$, $a_{uvk}^{Col_2} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara F, satisfacen

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

y por la diferencia entre los valores de las variables, concluimos que:

$$\Pi_{uvt}^a + \Pi_{ut}^x + \Pi_{vt}^x = \Pi_{uvk}^a + \Pi_{uk}^x + \Pi_{vk}^x \quad \forall k \in S', t \notin S'$$

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \notin N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$

Consideremos los mismos coloreos del caso anterior y analicemos si son coloreos válidos para este caso. Col_1 (figura 5.9a) es claramente un coloreo propio de aristas ya que surge del coloreo *avdec Col* a partir de una permutación de colores.

(a) Col_1 (b) Col_2

Figura 5.9. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \notin N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$

Los potenciales conflictos que podrían ocurrir en Col_2 (figura 5.9b) son entre $\tilde{u}$ y u y $\tilde{u}$ y v. En el primer caso, $deg(u)$ debería ser mayor o igual a 3 y por lo tanto existe una arista $(u, z) \in W$ con $z \neq \tilde{u}, \tilde{v}, v$ que al ser única en su color, distingue a los vértices $\tilde{u}$ y u. En el segundo caso, $deg(v)$ debería ser mayor o igual 3 y por lo tanto existe una arista $vz \in W$ con $z \neq \tilde{u}, \tilde{v}, u$ que al ser única en su color, distingue a los vértices $\tilde{u}$ y v.

Teniendo en cuenta que Col_1 y Col_2 difieren sólo en el color de la arista uv, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x_{ut}^{Col_1} = x_{vt}^{Col_1} = 1$, $a_{uvt}^{Col_1} = 1$
$x_{uk}^{Col_2} = x_{vk}^{Col_2} = 1$, $a_{uvk}^{Col_2} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara F, satisfacen

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

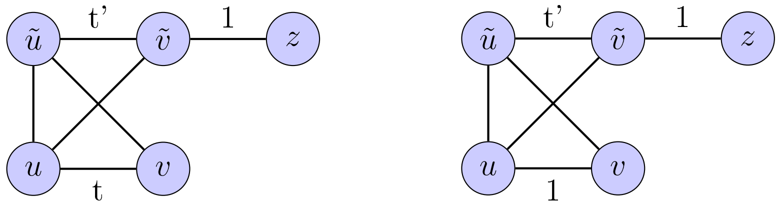
y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

$$\Pi_{uvt}^a + \Pi_{ut}^x + \Pi_{vt}^x = \Pi_{uvk}^a + \Pi_{uk}^x + \Pi_{vk}^x \quad \forall k \in S', t \notin S'$$

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$

  Por la propiedad P8 podemos afirmar que existe Col_1 (figura 5.10a) un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F tal que la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado un color t' que no pertenece S' y existe una arista $\tilde{v}z, z \neq \tilde{u}, u, v$ que tiene asignado el color 1. Como $v \notin N(\tilde{v})$, z puede ser elegido tal que $z \notin N(\tilde{u})$. Ambas aristas son únicas en su color. La arista $uv \in W$ por lo cual tiene asignado un color que no pertenece a S'. Sin pérdida de generalidad suponemos que tiene asignado el color t.

  A partir de Col_1, se puede obtener un nuevo coloreo Col_2 (figura 5.10b) tal que el color 1 es asignado a la arista uv y el resto de las aristas conservan su color.



(a) Col_1 (b) Col_2

Figura 5.10. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$

Como las aristas $\tilde{v}z$ y uv no inciden en los mismos vértices, Col_2 es un coloreo propio de aristas. Si hubiera algún par de vértices en conflicto que no fueran distinguibles, deberían ser vértices que tengan arista incidente con color 1. Entonces, los potenciales conflictos son entre $\tilde{v}$ y u, z y u y z y v.

En el caso de $\tilde{v}$ y u, difieren en el color que no pertenece a S' que está asignado a la arista $\tilde{u}\tilde{v}$. En el caso de z y u, $deg(z)$ debería ser mayor o igual a 4 y por lo tanto existe una arista incidente en z que pertenece a W que los distinguiría. En el caso de v y z, $deg(z)$ debería ser mayor o igual a 3 y por lo tanto existe una arista incidente en z que pertenece a W que los distinguiría. Dado que las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ no cambiaron de color podemos afirmar que Col_2 pertenece a la cara F.

Como la elección de $k = 1$ es arbitraria y dado que Col_1 y Col_2 difieren sólo en el color de la arista uv, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x_{ut}^{Col_1} = x_{vt}^{Col_1} = 1$, $a_{uvt}^{Col_1} = 1$
$x_{uk}^{Col_2} = x_{vk}^{Col_2} = 1$, $a_{uvk}^{Col_2} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara F, satisfacen

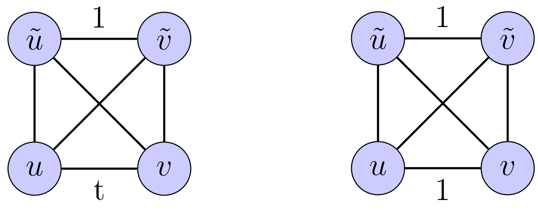
$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

$$\Pi_{uvt}^a + \Pi_{ut}^x + \Pi_{vt}^x = \Pi_{uvk}^a + \Pi_{uk}^x + \Pi_{vk}^x \forall k \in S', t \notin S'$$

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$

  Consideremos el coloreo *avdec* Col (figura 5.11a) definido en la proposición 5.3.4. A partir de Col, se puede obtener un nuevo coloreo Col_1 (figura 5.11b) tal que el color 1 es asignado a la arista uv y el resto de las aristas conservan su color.



(a) Col (b) Col_1

Figura 5.11. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$

Como las aristas $\tilde{u}\tilde{v}$ y uv no inciden en los mismos vértices, Col_1 es un coloreo propio de aristas. Si hubiera algún par de vértices en conflicto que no fueran distinguibles, debería ser vértices que tengan arista incidente con color 1. Entonces, los potenciales conflictos son entre $\tilde{u}$ y u, $\tilde{v}$ y u , $\tilde{u}$ y v, $\tilde{v}$ y v.

Debido a las hipótesis que enunciamos, si hubiera conflicto debería ocurrir que los vértices involucrados tuvieran grado mayor a 3. Pero entonces existirían aristas vz y/o uz con $z \neq \tilde{u}, \tilde{v}, u, v$. Estas aristas tienen color único en ambos coloreos, por lo cual los vértices serían distinguibles.

Dado que las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ no cambiaron de color podemos afirmar que Col_1 pertenece a la cara F.

Como Col y Col_1 difieren sólo en el color de la arista uv y la elección de $k = 1$ es arbitraria, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col y Col_1 son:

$x_{ut}^{Col} = x_{vt}^{Col} = 1$, $a_{uvt}^{Col} = 1$
$x_{uk}^{Col_1} = x_{vk}^{Col_1} = 1$, $a_{uvk}^{Col_1} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara, satisfacen

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

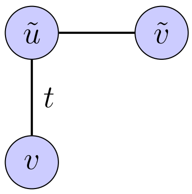
y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

$$\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \ \forall k \in S', t \notin S'$$

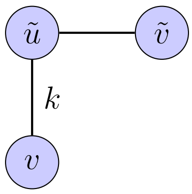
- **C2:** $\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk} \quad \forall k \notin S', k \neq t \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}}$

Por las propiedades P7 y P9 podemos afirmar que existe un coloreo *avdec* Col_1 (figura 5.12a) que pertenece a la cara F, que asigna el color t a la arista $\tilde{u}v$ y es única en su color, y no utiliza el color k.

A partir de Col_1, definimos el coloreo Col_2 (figura 5.12b) tal que todas las aristas tienen el mismo color que en Col_1, salvo $\tilde{u}v$ que tiene asignado el color k. Como Col_1 era un coloreo válido y k no se usa en ninguna otra arista, entonces Col_2 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles.



(a) Col_1



(b) Col_2

Figura 5.12. Coloreos 1 y 2 para **C2**

Dado que la única arista que cambió de color es $\tilde{u}v$ y fue entre colores que no pertenecen a S', podemos afirmar que Col_2 pertenece a la cara F.

Como todas las demás aristas tienen asignado el mismo color, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x^{Col}_{\tilde{u}t} = x^{Col}_{vt} = 1$, $a^{Col}_{\tilde{u}vt} = 1$
$x^{Col_1}_{\tilde{u}k} = x^{Col_1}_{vk} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}vk} = 1$

Como los dos coloreos pertenecen a la cara, satisfacen

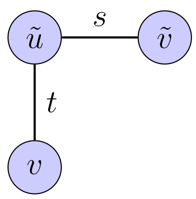
$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

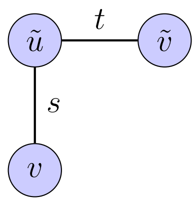
$$\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk}$$

- **C3:** $\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vk} - \Pi^x_{\tilde{u}k} - \Pi^x_{vk} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s}}$ $\boldsymbol{\forall k \in S', k \neq s \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}}$

  Por las propiedades P7 y P9, existe un coloreo Col_1 (figura 5.13a) que pertenece a la cara que asigna el color s a $\tilde{u}\tilde{v}$, el color t a $\tilde{u}v$ y estas aristas son únicas en su color.



(a) Col_1



(b) Col_2

Figura 5.13. Coloreos 1 y 2 para **C3**

  A partir de Col_1, definimos el coloreo Col_2 (figura 5.13b) tal que todas las aristas tienen el mismo color que en Col_1, salvo $\tilde{u}\tilde{v}$ que tiene el color t y $\tilde{u}v$ tiene el color s. Como estas aristas son únicas en su color, Col_2 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Además, el intercambio de colores asegura que el nuevo coloreo pertenece a la cara F. La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

  $x^{Col_1}_{\tilde{u}s} = x^{Col_1}_{\tilde{v}s} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}\tilde{v}s} = 1$, $x^{Col_1}_{\tilde{u}t} = x^{Col_1}_{vt} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}vt} = 1$,

  $x^{Col_2}_{\tilde{u}s} = x^{Col_2}_{vs} = 1$, $a^{Col_2}_{\tilde{u}vs} = 1$, $x^{Col_2}_{\tilde{u}t} = x^{Col_2}_{\tilde{v}t} = 1$, $a^{Col_2}_{\tilde{u}\tilde{v}t} = 1$,

  (por conveniencia dejamos a $x^{Col_1}_{\tilde{u}s}$ y $x^{Col_2}_{\tilde{u}t}$ si bien ambos coloreos no difieren en los valores de estas variables)

Considerando las variables en las que difieren Col_1 y Col_2, y que

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

concluimos que:

$$\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vs} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{vs} =$$
$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s} \tag{5.27}$$

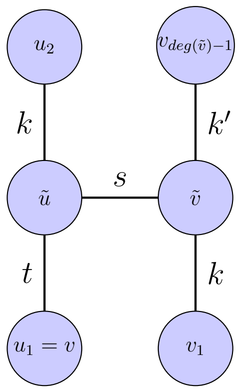
Si mostramos que:

$$\Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \in S', k \neq s$$

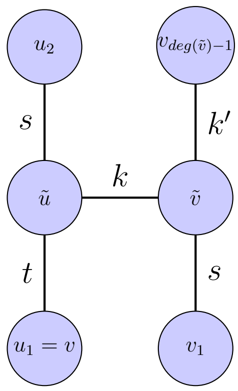
entonces la identidad que debemos demostrar sería verdadera.

Al definir el coloreo *avdec Col*, las vecindades de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ se ordenaron de determinada manera de acuerdo a los conjuntos $N_1 - N_2 - N_4$ y $N_1 - N_3 - N_5$ respectivamente. En las demostraciones de la existencia de coloreos en la cara con ciertas propiedades, hemos observado que la lista de los vecinos de $\tilde{u}$ podría reordenarse siempre que el mismo reordenamiento se refleje en los vecinos de $\tilde{v}$ y la asignación secuencial de colores define otros posibles coloreos propios de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenecen a la cara. Además, el coloreo definido a partir de un orden, tiene la propiedad que: la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color 1 y es única en su color, la arista $\tilde{u}u_1$ tiene asignado el color 2 y es única en su color, las aristas $\tilde{u}u_2$ y $\tilde{v}v_1$ tienen asignado el color 3 y son únicas en su color y la arista $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$ tiene asignado un color t que no pertenece a S' y es única en su color. Dados s, k y $k' \in S'$, siempre es posible permutar los colores 1 con s, 2 con k y 3 con k' y seguir teniendo un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara. Además, los colores de k y t se pueden intercambiar obteniendo otro coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F.

A partir de todas estas observaciones, considerando un orden donde v sea el primero de la lista en la vecindad de $\tilde{u}$, podemos afirmar que existe un coloreo *avdec* Col_3 (figura 5.14a) donde la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ es la única que tiene asignado el color s, $\tilde{u}v$ es la única que tiene asignado el color $t \notin S$, $\tilde{u}u_2$ y $\tilde{v}v_1$ son las únicas con color k' y la arista $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$tiene asignado el color k y es única en su color. Dado que los colores s, k, k' y t no son usados en otras aristas, es posible intercambiar estos colores en Col_3 y obtener 3 nuevos coloreos propios de aristas con vértices adyacentes distinguibles: Col_4 (figura 5.14b), Col_5 (figura 5.15a) y Col_6 (figura 5.15b).

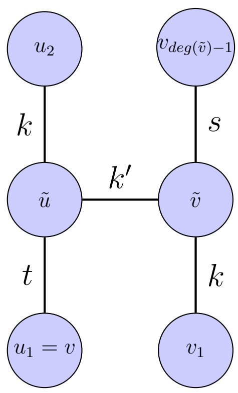


(a) Col_3

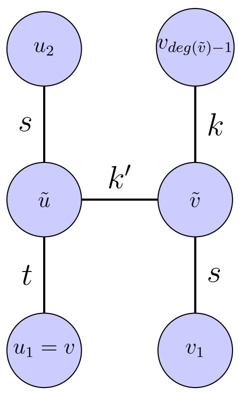


(b) Col_4

Figura 5.14. Coloreos 3 y 4 para **C3**



(a) Col_5



(b) Col_6

Figura 5.15. Coloreos 5 y 6 para **C3**

Notar que en Col_4, Col_5 y Col_6, la vecindad de $\tilde{v}$ usa todos los colores de S' y la vecindad de $\tilde{u}$ usa todos salvo uno, por lo tanto, en todos los casos son coloreos que pertenecen a la cara definida por la desigualdad **d-Color**.

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_3 y Col_5

son:

$x^{Col_3}_{\tilde{u}s} = 1$, $a^{Col_3}_{\tilde{u}\tilde{v}s} = 1$, $x^{Col_3}_{v_{deg(\tilde{v})-1}k'} = 1$, $a^{Col_3}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k'} = 1$

$x^{Col_5}_{\tilde{u}k'} = 1$, $a^{Col_5}_{\tilde{u}\tilde{v}k'} = 1$, $x^{Col_5}_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$, $a^{Col_5}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_3 y Col_5, y que

$$\Pi^a a^{Col_3} + \Pi^x x^{Col_3} = \Pi^a a^{Col_5} + \Pi^x x^{Col_5}$$

concluimos que:

$$\Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}k'} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k'} = \Pi^x_{\tilde{u}k'} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k'} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s} \tag{5.28}$$

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_4 y Col_6 son:

$x^{Col_4}_{\tilde{u}k} = 1$, $a^{Col_4}_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$, $x^{Col_4}_{v_{deg(\tilde{v})-1}k'} = 1$, $a^{Col_4}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k'} = 1$

$x^{Col_6}_{\tilde{u}k'} = 1$, $a^{Col_6}_{\tilde{u}\tilde{v}k'} = 1$, $x^{Col_6}_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$, $a^{Col_6}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$

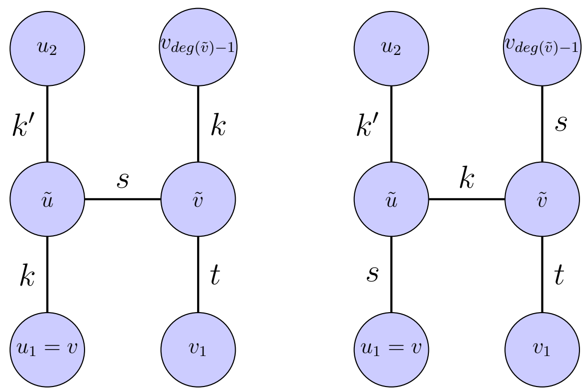
Considerando las variables en las que difieren Col_4 y Col_6, y que

$$\Pi^a a^{Col_4} + \Pi^x x^{Col_4} = \Pi^a a^{Col_6} + \Pi^x x^{Col_6}$$

concluimos que:

$$\Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}k'} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k'} = \Pi^x_{\tilde{u}k'} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k'} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} \tag{5.29}$$

La forma en que hemos construido el coloreo *avdec Col* tiene otra particularidad de la que haremos uso. A partir de un orden establecido en las vecindades, la única arista con la cual $\tilde{u}u_i$ potencialmente no debería compartir color es la arista $\tilde{v}v_i$. Esta situación se da esencialmente si $u_i, v_i \in N_1$ o $u_i \in N_2$ y $v_i \in N_3$. Podemos afirmar entonces que la arista $\tilde{u}u_1$ y $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$ podrían tener asignado el mismo color. Para asegurar la distinguibilidad, otra arista debe tener asignado un color que no pertenezca a S', por ejemplo $\tilde{v}v_1$. Aplicando esta propiedad, podemos definir un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F donde la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ es la única con color 1, $\tilde{u}u_1$ y $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$ son las únicas con color 2, $\tilde{v}v_1$ es la única con color t y $\tilde{u}u_2$ es la única con color 3. Intercambiando los colores 1 con s, 2 con k y 3 con k', se obtiene Col_7 (figura 5.15a), un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F. A partir de Col_7, intercambiando los colores s con k (ambos en S'), obtenemos Col_8 (figura 5.15b) un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F.



(a) Col_7 (b) Col_8

Figura 5.16. Coloreos 7 y 8 para **C3**

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_7 y Col_8 son:

$a^{Col_7}_{\tilde{u}\tilde{v}s} = 1$, $a^{Col_7}_{\tilde{u}vk} = 1$, $x^{Col_7}_{vk} = 1$, $x^{Col_7}_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$, $a^{Col_7}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$

$a^{Col_8}_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$, $a^{Col_8}_{\tilde{u}vs} = 1$, $x^{Col_8}_{vs} = 1$, $x^{Col_8}_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$, $a^{Col_8}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_7 y Col_8, y que

$$\Pi^a a^{Col_7} + \Pi^x x^{Col_7} = \Pi^a a^{Col_8} + \Pi^x x^{Col_8}$$

concluimos que:

$$\begin{gathered}\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{vk} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} = \\ \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{vs} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s}\end{gathered} \tag{5.30}$$

Si ahora combinamos las igualdades: - (5.28)+(5.29)+(5.30) se obtiene:

$$\Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \in S', k \neq s$$

- **C4:** $\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vs} - \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s} \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}}$

  En el caso anterior, obtuvimos la ecuación (5.27) a partir de dos coloreos válidos tal que $v \neq \tilde{u}, \tilde{v}$.

$$\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vs} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{vs} =$$
$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s}$$

  Cancelando de ambos lados los términos $\Pi^x_{\tilde{u}t}$ y $-\Pi^x_{\tilde{u}s}$ obtenemos:

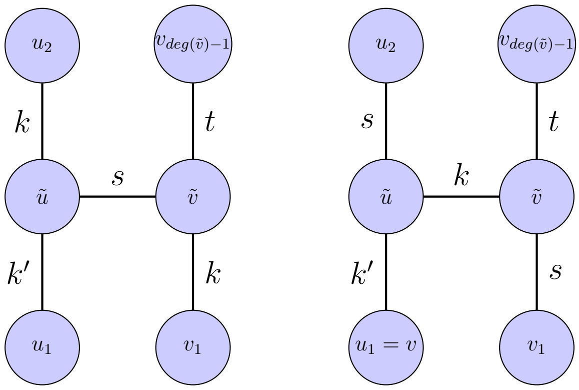
$$\Pi^x_{\tilde{v}s} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{vt} + \Pi^a_{\tilde{u}vt} = \Pi^x_{vt} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} + \Pi^a_{\tilde{u}vs}.$$

- **C5:** $\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} \quad \forall k \in S', k \neq s}$

  Sean $\{u_1, u_2\} \subseteq N(\tilde{u})$ y $\{v_1, v_{deg(v)-1}\} \subseteq N(\tilde{v})$ los vértices correspondientes a un orden de las vecindades siguiendo los lineamientos de lo realizado para construir el coloreo *avdec Col* en la proposición (5.3.4). Como ya hemos observado, el coloreo *avdec Col* asigna color 1 a $\tilde{u}\tilde{v}$ (único), color 2 a $\tilde{u}u_1$ (único), color 3 a $\tilde{u}u_2$ y $\tilde{v}v_1$ (únicos) y color $t \notin S'$ a $\tilde{v}v_{deg(v)-1}$ (único). Dados $s, k, k' \in S'$, partir de este coloreo podemos construir un nuevo coloreo Col_1 (figura 5.17a) intercambiando los colores 1 con s, 2 con k', 3 con k y dejando al resto de las aristas con el mismo color. Además, a partir de Col_1, intercambiando los colores k y s, obtenemos un nuevo coloreo Col_2 (figura 5.17b). Tanto Col_1 como Col_2 son coloreos propios de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenecen a la cara F.

  La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

  $x^{Col_1}_{u_2k} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}u_2k} = 1$, $x^{Col_1}_{v_1k} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}\tilde{v}s} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{v}v_1k} = 1$



(a) Col_1 (b) Col_2

Figura 5.17. Coloreos 1 y 2 para **C5**

$x_{v_1 s}^{Col_2} = 1$, $a_{\tilde{v}v_1 s}^{Col_2} = 1$, $x_{u_2 s}^{Col_2} = 1$, $a_{\tilde{u}\tilde{v}k}^{Col_2} = 1$, $a_{\tilde{u}u_2 s}^{Col_2} = 1$

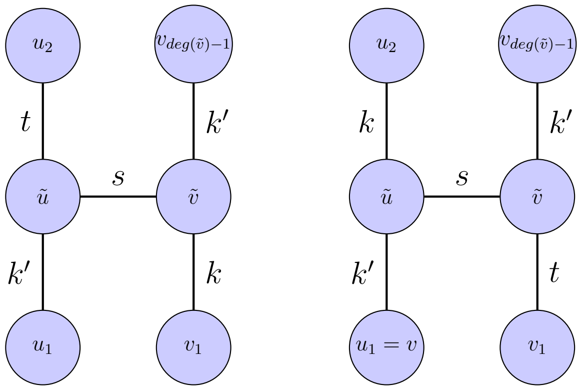
Considerando las variables en las que difieren Col_1 y Col_2, y que

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

concluimos que:

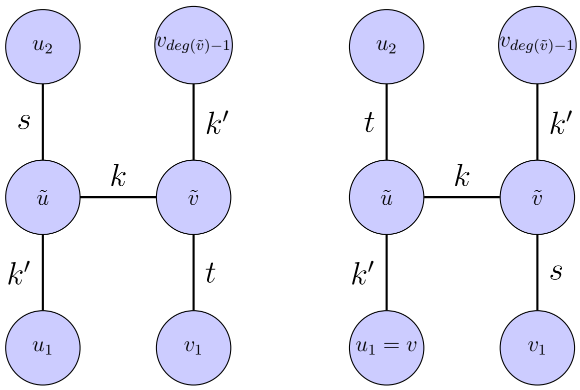
$$\Pi_{u_2 k}^x + \Pi_{\tilde{u}u_2 k}^a + \Pi_{v_1 k}^x + \Pi_{\tilde{v}v_1 k}^a + \Pi_{\tilde{u}\tilde{v}s}^a = \Pi_{v_1 s}^x + \Pi_{\tilde{u}u_2 s}^a + \Pi_{u_2 s}^x + \Pi_{\tilde{v}v_1 s}^a + \Pi_{\tilde{u}\tilde{v}k}^a \quad (5.31)$$

Por otro lado, tal como señalamos anteriormente, las aristas $\tilde{v}v_{deg(v)-1}$ y $\tilde{u}u_1$ pueden compartir color. Entonces a partir de Col podemos construir un coloreo donde se le asigna a la arista $\tilde{v}v_{deg(v)-1}$ el color 2 y el color t a la arista $\tilde{u}v_1$. El resto de las aristas conserva su color. De esta manera hay 3 aristas que han quedado únicas en su color: $\tilde{u}\tilde{v}$ con color 1, $\tilde{u}u_2$ con color t y $\tilde{v}v_1$ con color 3. Intercambiando los colores 1 con s, 2 con k' y 3 con k, se obtiene Col_3 (figura 5.18a) un coloreo propio de aristas con vértices distinguibles que pertenece a la cara F. A partir de Col_3, permutando convenientemente la asignación de estos colores, obtenemos Col_4 (figura 5.18b), Col_5 (figura 5.19a) y Col_6 (figura 5.19b), coloreos propios de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenecen también a la cara F.



(a) Col_3 (b) Col_4

Figura 5.18. Coloreos 3 y 4 para **C5**



(a) Col_5 (b) Col_6

Figura 5.19. Coloreos 5 y 6 para **C5**

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_3 y Col_6 son:

$x_{\tilde{u}s}^{Col_3} = 1$, $a_{\tilde{u}\tilde{v}s}^{Col_3} = 1$, $x_{v_1k}^{Col_3} = 1$, $a_{\tilde{v}v_1k}^{Col_3} = 1$

$x_{\tilde{u}k}^{Col_6} = 1$, $a_{\tilde{u}\tilde{v}k}^{Col_6} = 1$, $x_{v_1s}^{Col_6} = 1$, $a_{\tilde{v}v_1s}^{Col_6} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_3 y Col_6, y que

$$\Pi^a a^{Col_3} + \Pi^x x^{Col_3} = \Pi^a a^{Col_6} + \Pi^x x^{Col_6}$$

concluimos que:

$$\Pi_{\tilde{u}s}^x + \Pi_{\tilde{u}\tilde{v}s}^a + \Pi_{v_1k}^x + \Pi_{\tilde{v}v_1k}^a = \Pi_{\tilde{u}k}^x + \Pi_{\tilde{u}\tilde{v}k}^a + \Pi_{v_1s}^x + \Pi_{\tilde{v}v_1s}^a \tag{5.32}$$

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_4 y Col_5 son:

$x_{\tilde{v}s}^{Col_4} = 1$, $a_{\tilde{u}u_2k}^{Col_4} = 1$, $x_{u_2k}^{Col_4} = 1$, $x_{\tilde{u}\tilde{v}s}^{Col_4} = 1$,

$x_{\tilde{v}k}^{Col_5} = 1$, $a_{\tilde{u}u_2s}^{Col_5} = 1$, $x_{u_2s}^{Col_5} = 1$, $x_{\tilde{u}\tilde{v}k}^{Col_5} = 1$,

Considerando las variables en las que difieren Col_4 y Col_5, y que

$$\Pi^a a^{Col_4} + \Pi^x x^{Col_4} = \Pi^a a^{Col_5} + \Pi^x x^{Col_5}$$

concluimos que:

$$\Pi_{\tilde{u}\tilde{v}s}^a + \Pi_{\tilde{u}u_2k}^a + \Pi_{u_2k}^x + \Pi_{\tilde{v}s}^x = \Pi_{\tilde{v}k}^x + \Pi_{\tilde{u}u_2s}^a + \Pi_{u_2s}^x + \Pi_{\tilde{u}\tilde{v}k}^a \tag{5.33}$$

Si ahora combinamos las igualdades: -(5.31)+(5.32)+(5.33) se obtiene:

$$\Pi_{\tilde{u}\tilde{v}s}^a + \Pi_{\tilde{u}s}^x + \Pi_{\tilde{v}s}^x = \Pi_{\tilde{u}\tilde{v}k}^a + \Pi_{\tilde{u}k}^x + \Pi_{\tilde{v}k}^x$$

Por lo tanto se cumple lo que queríamos probar.

- **C6: $\boldsymbol{\Pi_{\tilde{u}\tilde{v}t}^a + \Pi_{\tilde{u}t}^x + \Pi_{\tilde{u}t}^x = \Pi_{\tilde{u}\tilde{v}k}^a + \Pi_{\tilde{u}k}^x + \Pi_{\tilde{u}k}^x \quad \forall k \notin S', k \neq t}$**

  Por la propiedad P8, sabemos que existe Col_1 un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara, donde la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene un color t que no pertenece a S', es única en su color y no se utiliza el color k en el grafo. Reemplazando el color t por k, se obtiene Col_2 otro coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F.

  La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

  $x_{\tilde{u}t}^{Col_1} = 1, x_{\tilde{v}t}^{Col_1} = 1$, $a_{\tilde{u}\tilde{v}t}^{Col_1} = 1$

  $x_{\tilde{u}k}^{Col_2} = 1, x_{\tilde{v}k}^{Col_2} = 1$, $a_{\tilde{u}\tilde{v}k}^{Col_2} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_1 y Col_2, y que

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

concluimos que:

$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k}$$

□

5.4. Faceta 2 - Conjuntos de $d-1$ colores

En esta sección presentamos una nueva desigualdad que también restringe el uso de los colores de un conjunto dado entre vértices a los cuales hay que asegurar la distinguibilidad.

Proposición 5.4.1. *Sea un grafo $G = (V, E)$ tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E| - 1$ colores. Sean $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo grado. Sea S' un conjunto de colores de tamaño $d-1$ con $d = deg(\tilde{u})$. La siguiente desigualdad, denominada **(d-1)-Color**, es válida para los puntos del poliedro $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$:*

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2|S'| \tag{5.34}$$

Demostración. Separamos el análisis en dos casos:

- Supongamos que $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0$. Si todos los colores de S' son incidentes a $\tilde{u}$ entonces $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = |S'|$. Lo mismo vale para $\tilde{v}$. Por lo tanto se cumple la desigualdad.
- Supongamos que $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$, entonces la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene un color $t \notin S'$. Lo máximo que puede valer $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k}$ es $deg(\tilde{u}) - 1$ ya que la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene el color $t \notin S'$.

- Supongamos que $\sum_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} < deg(\tilde{u}) - 1$. Entonces, por el mismo razonamiento anterior pero aplicado a $\tilde{v}$, el máximo valor de $\sum_{k\in S'} x_{\tilde{v}k}$ es $deg(\tilde{v}) - 1$ y se cumple que $\sum_{k\in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k\notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2|S'|$.
- Supongamos que $\sum_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = deg(\tilde{u}) - 1$. Entonces, todos los colores de S' están asignados a las aristas incidentes a $\tilde{u}$ salvo $\tilde{u}\tilde{v}$. Como los puntos enteros son coloreos de aristas con vértices adyacentes distinguibles, entonces $\tilde{v}$ no puede utilizar todos los colores de S', ya que tendrían el mismo conjunto de colores y no serían distinguibles. Por lo tanto $\sum_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} \leq deg(\tilde{v}) - 2$. Entonces se cumple la desigualdad.

$\square$

Debido a la similitud entre las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color**, una pregunta válida que se puede hacer es: ¿existen puntos en el poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ que satisfacen la restricción impuesta por la desigualdad **d-Color** y no satisfacen la desigualdad **(d-1)-Color**? La respuesta es sí.

Proposición 5.4.2. *La desigualdad **(d-1)-Color**, basada en conjuntos de colores de tamaño $d-1$ no es redundante para el poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ incluyendo las desigualdades **d-Color** basadas en conjuntos de colores de tamaño d.*

Demostración. Consideremos G el grafo de la figura 5.20.

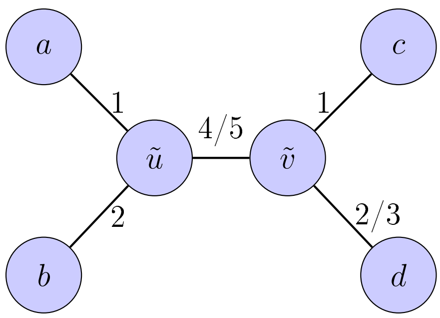


Figura 5.20. Un coloreo parcial que viola la desigualdad (d-1)-Color

Nos vamos a construir un punto fraccionario que pertenece a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$, satisface todas las desigualdades **d-Color** de conjuntos de colores de tamaño d y no satisface la desigualdad **(d-1)-Color**. En la figura 5.20 indicamos en cada arista el o los colores asignados, es decir el valor de k tal que la variable $a_{uuk} > 0$, caso contrario la variable toma valor nulo. En el caso de que se indica un único color, a_{uvk} toma el valor 1. Si hay dos colores, las dos variables respectivas se definen como $a_{uvk} = 0.5$. Queremos ver que este punto satisface todas las restricciones de $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ incluyendo las desigualdades **d-Color** de conjuntos de colores de tamaño d pero viola una desigualdad **(d-1)-Color**.

A continuación detallamos las variables no nulas asociadas al coloreo:

$x_{a1} = 1$	$x_{b2} = 1$	$x_{\tilde{v}3} = 0.5$	$x_{\tilde{u}4} = 0.5$	$x_{\tilde{u}5} = 0.5$
$x_{\tilde{u}1} = 1$	$x_{\tilde{u}2} = 1$	$x_{d3} = 0.5$	$x_{\tilde{v}4} = 0.5$	$x_{\tilde{v}5} = 0.5$
$a_{a\tilde{u}1} = 1$	$a_{b\tilde{u}2} = 1$	$a_{\tilde{v}d3} = 0.5$	$a_{\tilde{u}\tilde{v}4} = 0.5$	$a_{\tilde{u}\tilde{v}5} = 0.5$
$x_{\tilde{v}1} = 1$	$x_{\tilde{v}2} = 0.5$			
$x_{c1} = 1$	$x_{d2} = 0.5$			
$a_{\tilde{v}c1} = 1$	$a_{\tilde{v}d2} = 0.5$			

Veamos que satisface todas las restricciones que definen a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ y todas las desigualdades **d-Color** de conjuntos de colores de tamaño d. Es fácil ver que se satisfacen las ecuaciones (5.1) y (5.2).

Dado que las desigualdades (5.3) están dominadas por las desigualdades **d-Color** de conjuntos de tamaño d, es suficiente ver que el coloreo satisface todas las desigualdades **d-Color**. Como $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 3$, debemos ver que para cualquier subconjunto S' de colores de cardinal 3 de $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se verifica que $\sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} + \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} + \sum\limits_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 5$. A continuación chequeamos cada una de las desigualdades de conjuntos de tamaño 3:

- $S' = \{1, 2, 3\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 2 \quad \sum\limits_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1.$
- $S' = \{1, 2, 4\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 2.5 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 2 \quad \sum\limits_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{1, 2, 5\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 2.5 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 2 \quad \sum\limits_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$

- $S' = \{1, 3, 4\}$: $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{1, 3, 5\}$: $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{1, 4, 5\}$: $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.$
- $S' = \{2, 3, 4\}$: $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{2, 3, 5\}$: $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{2, 4, 5\}$: $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.$
- $S' = \{3, 4, 5\}$: $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.$

En conclusión, el coloreo definido pertenece a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ y además satisface todas las desigualdades **d-Color** de conjuntos de colores de tamaño 3.

Veamos ahora que existe una desigualdad **(d-1)-Color** que no es satisfecha por el coloreo. Consideremos $S' = \{1, 2\}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \\
&\sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1 \\
&\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} + \sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 4.5 > 4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, existen puntos fraccionarios en $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ que además satisfacen todas las desigualdades **d-Color** de conjuntos de colores de tamaño 3 y no cumplen todas las desigualdades **(d-1)-Color**.

□

La pregunta que nos surge ahora es si existen puntos en el poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ que satisfacen la desigualdad **(d-1)-Color** de conjuntos de $d-1$ colores y no satisfacen la desigualdad **d-Color** de conjuntos de d colores. Nuevamente la respuesta es si.

Proposición 5.4.3. *La desigualdad* ***d-Color*** *no es redundante para el poliedro* $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ *incluyendo las desigualdades* ***(d-1)-Color*** *de conjuntos de colores de tamaño* $d-1$.

Demostración. Nos vamos a construir un punto fraccionario que pertenezca a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ y además satisfaga todas las desigualdades **(d-1)-Color** de conjuntos de colores de tamaño $d-1$ y no satisfaga un desigualdad **d-Color** de conjuntos de colores de tamaño d. En la figura 5.21 mostramos un grafo e indicamos en cada arista el o los colores asignados, es decir el valor de k tal que la variable $a_{uvk} > 0$, caso contrario la variable toma valor nulo. En el caso de que se indica un único color, a_{uvk} toma el valor 1. Si hay dos colores, las dos variables respectivas se definen como $a_{uvk} = 0.5$. Queremos ver que este punto satisface todas las restricciones de $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ incluyendo las desigualdades **(d-1)-Color** de conjuntos de colores de tamaño $d-1$ pero viola una desigualdad **d-Color** de conjuntos de colores de tamaño d.

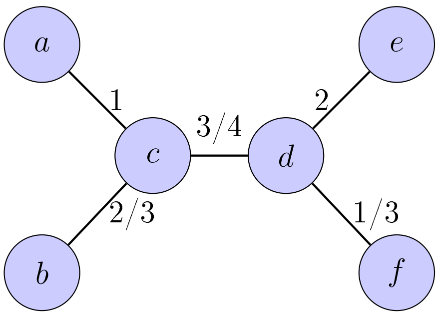


Figura 5.21. Un coloreo parcial que viola la desigualdad d-Color

A continuación detallamos las variables no nulas asociadas al coloreo:

$x_{\tilde{u}1} = 1$	$x_{\tilde{u}2} = 0.5$	$x_{\tilde{u}3} = 1$	$x_{\tilde{u}4} = 0.5$
$x_{a1} = 1$	$x_{b2} = 0.5$	$x_{b3} = 0.5$	$x_{\tilde{v}4} = 0.5$
$x_{d1} = 0.5$	$x_{\tilde{v}2} = 1$	$x_{d3} = 0.5$	$a_{\tilde{u}\tilde{4}} = 0.5$
$a_{\tilde{u}a1} = 1$	$x_{c2} = 1$	$x_{\tilde{v}3} = 1$	
$x_{\tilde{v}1} = 0.5$	$a_{\tilde{u}b2} = 0.5$	$a_{\tilde{u}b3} = 0.5$	
$a_{\tilde{v}d1} = 0.5$	$a_{\tilde{v}c2} = 1$	$a_{\tilde{u}\tilde{v}3} = 0.5$	
		$a_{\tilde{v}d3} = 0.5$	

Es fácil ver que este coloreo satisface las ecuaciones (5.1) y (5.2). Veamos ahora que cumple con todas las desigualdades (5.3). Como $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 3$, debemos ver que para cualquier subconjunto de colores de cardinal 3 de $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se verifica que $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} + \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} \leq 5$. A continuación chequeamos cada una de las desigualdades de conjuntos de tamaño 3:

- $S' = \{1, 2, 3\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2.5.$
- $S' = \{1, 2, 4\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2.$
- $S' = \{1, 2, 5\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5.$
- $S' = \{1, 3, 4\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2.$
- $S' = \{1, 3, 5\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5.$
- $S' = \{1, 4, 5\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.$
- $S' = \{2, 3, 4\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2.5.$
- $S' = \{2, 3, 5\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 2.$
- $S' = \{2, 4, 5\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5.$
- $S' = \{3, 4, 5\} : \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5.$

Concluimos entonces que este coloreo pertenece a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$. Veamos que además satisface todas las desigualdades **(d-1)-Color** de conjuntos de colores de tamaño $d - 1$. Debemos ver que para cualquier subconjunto S' de colores de cardinal 2 de $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se verifica que $\sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} + \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} + \sum\limits_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 4$. A continuación chequeamos cada una de las desigualdades de conjuntos de tamaño 2:

- $S' = \{1, 2\} : \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1.$
- $S' = \{1, 3\} : \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 2 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{1, 4\} : \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = 1 \quad \sum_{k \notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$

- $S' = \{1,5\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 1 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 0.5 \quad \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1.$
- $S' = \{2,3\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 2 \quad \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{2,4\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 1 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{2,5\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 0.5 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 1 \quad \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1.$
- $S' = \{3,4\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.$
- $S' = \{3,5\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 1 \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{v}k} = 1 \quad \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5.$
- $S' = \{3,4\}: \quad \sum\limits_{k\in S'} x_{\tilde{u}k} = 1.5 \quad \sum x_{\tilde{v}k} = 1.5 \quad \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.$

En conclusión, el coloreo definido pertenece a $\mathcal{P}^{\exp}$ y además satisface todas las desigualdades **(d-1)-Color** de conjuntos de colores de tamaño 2.

Veamos ahora que existe una desigualdad **d-Color** que no es satisfecha por el coloreo. Consideremos $S' = \{1,2,3\}$ y calculemos la suma de las variables involucradas en la desigualdad:

$$\sum_{k\in S} x_{\tilde{u}k} = 2.5 \quad \sum_{k\in S} x_{\tilde{v}k} = 2.5$$
$$\sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0.5$$
$$\sum_{k\in S} x_{\tilde{u}k} + \sum_{k\in S} x_{\tilde{v}k} + \sum_{k\notin S} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 5.5 > 5$$

Por lo tanto, la desigualdad **d-Color** no está implicada por las restricciones que definen a $\mathcal{P}^{\exp}$ junto con las desigualdades **(d-1)-Color** de conjuntos de colores de tamaño $d-1$. □

A partir de lo observado, concluimos que esta nueva desigualdad válida tiene un valor agregado en la descripción del $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$

Sea F la cara inducida por la desigualdad de conjuntos de colores de tamaño $d-1$. Veamos que F es una cara propia de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$. Sea F la cara inducida por la desigualdad de conjuntos de colores de tamaño $d-1$. Veamos que F es una cara propia de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Comenzamos viendo que la desigualdad no está implicada por las ecuaciones que definen el sistema minimal de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Proposición 5.4.4. *Sean $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo grado y $G = (V; E)$ un grafo tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E|-1$ colores. Entonces para cualquier conjunto de colores S' tal que $|S'| = deg(\tilde{u}) - 1$, existe un punto tal que la desigualdad **(d-1)-Color** no se cumple por igualdad.*

Demostración. Si $|S'| \geq 2$, consideremos un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles tal que la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color 1, $deg(\tilde{u}) - 2$ aristas incidentes a $\tilde{u}$ tienen color $2 \ldots deg(\tilde{u}) - 1$ y el resto de las aristas únicas en su color con colores $deg(\tilde{u}), \ldots, m$.

Entonces

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq |S'| + 1 < 2|S'|$$

Si $|S'| = 1$, como existe un coloreo con $|E|-1$ colores, entonces G no es un camino de 3 vértices y por lo tanto $|E| \geq 4$. Tomando un coloreo que asigna a todas las aristas colores diferentes y a una arista no incidente a $\tilde{u}$ ni a $\tilde{v}$ el color 1, entonces

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1 < 2|S'|$$

Por lo tanto, la desigualdad **(d-1)-Color** no es una combinación lineal del sistema minimal de ecuaciones.

□

Veamos ahora que la cara F es no vacía.

Proposición 5.4.5. *Sean $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo grado y S' un conjunto de colores tal que $|S'| = deg(\tilde{u}) - 1$. La cara F inducida por la desigualdad **(d-1)-Color** es una cara no vacía.*

Demostración. Construiremos un punto en el poliedro que pertenece a la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color** . Sin pérdida de generalidad supongamos $S' = \{1, \ldots, deg(\tilde{u}) - 1\}$.

Consideremos la enumeración de los vértices de $N(\tilde{u}) \setminus \{\tilde{v}\}$ y de $N(\tilde{v}) \setminus \{\tilde{u}\}$ y el coloreo *avdec* Col que utilizamos en la proposición 5.3.4 considerando el conjunto de colores $1, \ldots, |S'| + 1$. Definimos un nuevo coloreo $\tilde{Col}$ donde el color 2 (única asignación en $(\tilde{u}, u_1)$ se intercambia con el color $|S'| + 1$ (dos asignaciones en $\tilde{u}u_{deg(\tilde{u})-1}$ y $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-2}$). De esta manera el coloreo tiene una única arista que tiene asignado el color $|S'|+1$ y los colores que se repiten en las vecindades son $2, \ldots, |S'|$.

Entonces $\tilde{Col}$ es una asignación de colores definida por la siguiente función $f : E \to M$:

$$
\begin{aligned}
& f(\tilde{u}\tilde{v}) = 1 \\
& f(\tilde{u}u_1) = |S'| + 1 \\
& f(\tilde{u}u_{i+1}) = f(\tilde{u}v_i) = i + 2 && \forall i = 1, \ldots, deg(\tilde{u}) - 3 \\
& f(\tilde{u}u_{deg(\tilde{u})-1}) = 2 \\
& f(\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-2}) = 2 \\
& f(\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}) = |S'| + 2 \\
& f(w_i^1 w_i^2) = |S'| + 2 + i && \forall i = 1 \ldots |W|
\end{aligned}
$$

Claramente, por el tipo de permutación entre dos colores dentro de las vecindades de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$, el coloreo que se obtiene es un coloreo propio de aristas que satisface la distinguibilidad entre vértices adyacentes del mismo grado.

Veamos que el coloreo cumple la desigualdad **(d-1)-Color** por igualdad. Por un lado podemos afirmar que $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{u}k} = |S'|$ (todas las aristas incidentes a $\tilde{u}$ tienen asignados los colores de S' salvo $\tilde{u}u_1$. Por otro lado, $\sum_{k \in S'} x_{\tilde{v}k} = |S'|$ ya que todas las aristas incidentes a $\tilde{v}$ tienen asignados los colores de S' salvo $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$. Además, la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene el color 1, entonces $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0$. Por lo tanto $\sum\limits_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 2|S'|$ $\square$

Debido a que $\tilde{C}ol$ es construido en base a Col, tiene propiedades que analizamos para Col que resultan también válidas para $\tilde{C}ol$.

Proposición 5.4.6. *Sea $G = (V, E)$, $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes con el mismo grado. Consideremos $\tilde{C}ol$ el coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles definido en la proposición anterior. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

Propiedad $\tilde{P}1$: Las aristas no incidentes a $\tilde{u}$ ni a $\tilde{v}$ utilizan colores que no pertenecen a S'.

Propiedad $\tilde{P}2$: La arista $\tilde{u}\tilde{v}$ utiliza un color en S' y es única en su color.

Propiedad $\tilde{P}3$: El vértice $\tilde{v}$ tiene una arista incidente con un color que no pertenece a S' y es única en su color.

Propiedad $\tilde{P}4$: El vértice $\tilde{u}$ tiene una arista incidente con un color que no pertenece a S' y es única en su color.

Propiedad $\tilde{P}5$: Los colores $2, \ldots, |S'|$ se repiten en aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$.

Propiedad $\tilde{P}6$: Si $|S'| \geq 2$, $\tilde{C}ol$ utiliza menos de $|E|$ colores.

Demostración. A continuación demostramos cada una de las propiedades.

Propiedad $\tilde{P}1$: Los colores de S' son $1, \ldots, |S'|$ y son utilizados en las aristas incidentes $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$. El resto de las aristas utilizan colores a partir del $|S'| + 1$ que no pertenecen a S'.

Propiedad $\tilde{P}2$: La arista $\tilde{u}\tilde{v}$ usa el color 1 que pertenece a S' y además es la única arista del grafo que tiene ese color.

Propiedad $\tilde{P}3$: Existe una arista $\tilde{v}z$ que tiene asignado el color $|S'| + 2$ que no pertenece a S' y además es la única arista del grafo que tiene ese color. Dependiendo de la cardinalidad de los conjuntos definidos en la vecindad, z sería $f_{|N_5|}$ ó $c_{|N_3|}$ ó $a_{|N_1|}$.

Propiedad $\tilde{P}4$: Existe una arista $\tilde{u}z$ que tiene asignado el color $|S'|+1$ que no pertenece a S' y además es la única arista del grafo que tiene ese color. Dependiendo de la cardinalidad de los conjuntos definidos en la vecindad, z sería c_1 ó b_1 ó a_1.

Propiedad $\tilde{P}5$: Las aristas incidentes a $\tilde{u}$ tienen asignados los colores $2,\ldots,|S'|$ (exceptuando $\tilde{u}\tilde{v}$ y $\tilde{u}u_1$). Las aristas incidentes a $\tilde{v}$ tienen asignados los colores $2,\ldots,|S'|$ (exceptuando $\tilde{u}\tilde{v}$ y $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$). Por lo tanto, los colores $2,\ldots,|S'|$ se repiten en aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$.

Propiedad $\tilde{P}6$: Si $|S'|\geq 2$, $\tilde{C}ol$ utiliza dos veces el color 2. Esto implica que $\tilde{C}ol$ utiliza a lo sumo $|E|-1$ colores.

$\square$

Ya hemos observado que cualquier orden que se establezca en las vecindades, siempre que respete que u_i tiene el mismo número de orden que v_i, permite definir coloreos válidos con el proceso secuencial de asignación de colores que utilizamos para construir Col. Esta característica nos permite derivar coloreos que satisfagan la desigualdad **(d-1)-Color** por igualdad con ciertas propiedades que nos resultarán útiles más adelante.

Proposición 5.4.7. *Sea $G=(V,E)$ y $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes del mismo grado. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

*Propiedad $\tilde{P}7$: Con la misma enumeración de vértices utilizada para construir $\tilde{C}ol$, se pueden intercambiar los colores asignados a las aristas incidentes a $\tilde{u}$ con los de $\tilde{v}$ y obtener un nuevo coloreo en la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color**.*

*Propiedad $\tilde{P}8$: Existe un coloreo que pertenece a la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color** donde la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ no tiene asignado un color de S'*

*Propiedad $\tilde{P}9$: Dada una arista $\tilde{v}v$, existe un coloreo que pertenece a la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color** donde esta arista no tiene asignado un color de S'.*

Demostración. A continuación demostramos cada una de las propiedades.

Propiedad $\tilde{P}7$: Por la propiedad de Col, sabemos que la asignación de los colores a las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ es simétrico. Puede obtenerse un nuevo coloreo intercambiando el orden en el que se asignaron los colores: primero las aristas de $\tilde{v}$ y luego las de $\tilde{u}$. A partir de este coloreo, intercambiando lo colores 2 con $|S'| + 1$, se obtiene un coloreo en la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color** donde el rol de $\tilde{u}$ está intercambiado con $\tilde{v}$.

Propiedad $\tilde{P}8$: En el coloreo $\tilde{C}ol$, la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color 1 y además, existe una arista $\tilde{v}z$ que tiene asignado el color $|S'|+2 \notin S'$. Dependiendo de la composición de la vecindad de $\tilde{v}$, el vértice z es $f_{|N_5|}$, $c_{|N_3|}$ ó $a_{|N_1|}$. Además, estas dos aristas son únicas en su color. Si intercambiamos los colores entre estas dos aristas, obtenemos $\tilde{C}ol_1$ que resulta un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles como consecuencia de la singularidad de los colores que se intercambian. Es fácil ver que $\tilde{C}ol_1$ también pertenece a la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color**.

Propiedad $\tilde{P}9$: Para todo $v \in N(\tilde{v}), v \neq \tilde{u}$, sabemos que existe un coloreo que pertenece a la cara definida por la desigualdad **d-Color** donde $f(\tilde{v}v) \notin S'$. Este coloreo sigue teniendo la propiedad que 2 es el único color que no se repite y $|S'| + 1$ se repite en dos aristas (una incidente a $\tilde{u}$ y otra incidente a $\tilde{v}$). El intercambio de colores entre 2 y $|S'| + 1$ no afecta a la arista $\tilde{v}v$ y de esta manera se obtiene un coloro que pertenece a la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color** con la propiedad buscada.

□

Tenemos entonces que la desigualdad **(d-1)-Color** define una cara propia de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$. Vamos a analizar bajo que condiciones esta cara tiene dimensión máxima, es decir, cuando define faceta. Comenzamos analizando el caso en el cual $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) \geq 3$. Nuevamente, para simplificar la notación y sin pérdida de generalidad, asumiremos $S' = \{1, \ldots, deg(\tilde{u}) - 1\}$.

En el caso que $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 3$, la desigualdad **(d-1)-Color** no siempre define faceta. A continuación presentamos una condición necesaria.

Proposición 5.4.8. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E| - 1$ colores. Sea $\tilde{u} \in V$ y*

*$\tilde{v} \in V$ dos vértices adyacentes con $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 3$ y sea $S' = \{1, 2, \ldots, d-1\}$ un conjunto de colores donde $d = deg(\tilde{u})$. Para que la desigualdad **(d-1)-Color** defina faceta de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ es necesario que no exista una arista uv tal que $deg(u) = 3$, $u \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$ y $v \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$.*

Demostración. Sea F la cara definida por la desigualdad **(d-1)-Color**. Afirmamos que, en el caso que exista uv tal que $deg(u) = 3$, $u \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$ y $v \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$, los puntos que pertenecen a F satisfacen la siguiente igualdad:

$$\sum_{k \in S'} a_{uvk} = 0 \tag{5.35}$$

Supongamos que no se cumple y que existe un punto que pertenece a F tal que $\sum\limits_{k \in S'} a_{uvk} = 1$.

Entonces existe un color $k_0 \in S'$ que esta asignado en la arista uv. Por lo tanto, las aristas $\tilde{u}u$,$\tilde{v}u$,$\tilde{u}v$ y $\tilde{v}v$ no tienen asignado el color k_0 porque son adyacentes a la arista uv.

- Si la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene el color $k_0 \in S'$, entonces $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 0$. Por lo tanto los puntos en la cara deben cumplir que $\sum\limits_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) = 4$. Es decir el otro color $k_1 \in S'$ debe utilizarse en una arista incidente a $\tilde{u}$ y en otra arista incidente a $\tilde{v}$ Entonces todos los vértices tienen aristas incidentes a k_0 y k_1. Supongamos sin pérdida de generalidad que la arista $\tilde{u}u$ tiene asignado un color $t \notin S'$. Entonces no son distinguibles $\tilde{u}$ y u.

- Si la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene el color $k_1 \in S', k_1 \neq k_0$, entonces las aristas $\tilde{u}u$, $\tilde{v}u$, $\tilde{u}v$ y $\tilde{v}v$ no pueden tener el color k_1. Pero tampoco pueden tener el color k_0. Por lo tanto $\sum\limits_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) = 2 < 2|S'| = 4$ y el punto no pertenece a la cara F.

- Si la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene un color $t \notin S'$, entonces $\sum\limits_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$. Por lo tanto los puntos en la cara cumplen que $\sum\limits_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) = 3$. Como el color k_0 no se puede utilizar y el color k_1 se lo puede usar a lo sumo una vez en cada vecindad, entonces no hay un coloreo válido que pertenezca a la cara F.

Por lo tanto, si existen u y v en las condiciones enunciadas, todo punto de la cara satisface $\sum_{k\in S'} a_{uvk} = 0$.

Veamos ahora que esta ecuación es linealmente independiente de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define a F.

Consideremos una combinación lineal de las ecuaciones del sistema minimal y la ecuación que define a F. La variable x_{uk}, para todo $k \in M$, está presente únicamente en la ecuación (5.2), por lo tanto el multiplicador asociado debe ser nulo. Eliminadas estas ecuaciones, la ecuación (5.1) es la única donde están presentes las variables a_{uvk} para $k \notin S'$, por lo tanto el multiplicador asociado deber ser nulo. Luego, no queda ninguna ecuación donde estén presentes las variables a_{uvk} para $k \in S'$. Entonces la ecuación (5.35) es válida para los puntos que pertenecen a F y es linealmente de la otras ecuaciones que definen la cara. Por lo tanto, la cara F no es faceta.

$\square$

Establecidas condiciones necesarias, veamos ahora que resultan suficientes para que la desigualdad defina una faceta.

Proposición 5.4.9. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E|-1$ colores. Sea $\tilde{u} \in V$ y $\tilde{v} \in V$ dos vértices en conflicto con $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) \geq 3$ y sea $S' = \{1, 2, \ldots, d-1\}$ un conjunto de colores donde $d = deg(\tilde{u})$. Supongamos además que si $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 3$, no existe una arista uv tal que $deg(u) = 3$, $u \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$ y $v \in N(\tilde{u}) \cap N(\tilde{v})$. Entonces, la desigualdad* ***(d-1)-Color****.*

$$\sum_{k\in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k\notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2|S'|$$

define una faceta de $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Demostración. Para demostrar que la desigualdad **(d-1)-Color** define una faceta veremos que toda igualdad satisfecha por los puntos que pertenecen a la cara F definida por la desigualdad, es combinación lineal de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define a F.

Sea (Π, Π_0) una igualdad satisfecha por todos los puntos que pertenecen a la cara F. Es decir,

$$\sum_{k\in M}\sum_{uv\in E}\Pi^a_{uvk}a_{uvk} + \sum_{k\in M}\sum_{u\in V}\Pi^x_{uk}x_{uk} = \Pi_0 \text{ para todo } (A, X) \in F$$

Sean α_{uk}, β_{uv} y δ los multiplicadores de las ecuaciones (5.4), (5.5) y la ecuación que define a F. Consideremos $s \in S'$ y $t \notin S'$. Si (Π, Π_0) es una combinación lineal de las igualdades debería verificarse que:

$$\begin{aligned}
&\Pi^a_{uvt} = \alpha_{ut} + \alpha_{vt} + \beta_{uv} && \forall u \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} && (5.36)\\
&\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} && u \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \neq t && (5.37)\\
&\Pi^a_{uvt} = \alpha_{ut} + \alpha_{vt} + \beta_{uv} && \forall u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} && (5.38)\\
&\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} && u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \notin S, k \neq t && (5.39)\\
&\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} && u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \in S && (5.40)\\
&\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} = \alpha_{\tilde{u}s} + \alpha_{\tilde{v}s} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} && && (5.41)\\
&\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = \alpha_{\tilde{u}k} + \alpha_{\tilde{v}k} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} && \forall k \in S', k \neq s && (5.42)\\
&\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} = \alpha_{\tilde{u}t} + \alpha_{\tilde{v}t} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} + \delta && && (5.43)\\
&\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = \alpha_{\tilde{u}k} + \alpha_{\tilde{v}k} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}} + \delta && \forall k \notin S', k \neq t && (5.44)\\
&\Pi^x_{uk} = -\alpha_{uk} && \forall u \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} && (5.45)\\
&\Pi^x_{\tilde{u}t} = -\alpha_{\tilde{u}t} && && (5.46)\\
&\Pi^x_{\tilde{u}k} = -\alpha_{\tilde{u}k} && \forall k \notin S', k \neq t && (5.47)\\
&\Pi^x_{\tilde{v}t} = -\alpha_{\tilde{v}t} && && (5.48)\\
&\Pi^x_{\tilde{v}k} = -\alpha_{\tilde{v}k} && \forall k \notin S', k \neq t && (5.49)\\
&\Pi^x_{\tilde{u}s} = -\alpha_{\tilde{u}s} + \delta && && (5.50)\\
&\Pi^x_{\tilde{u}k} = -\alpha_{\tilde{u}k} + \delta && \forall k \in S', k \neq s && (5.51)\\
&\Pi^x_{\tilde{v}s} = -\alpha_{\tilde{v}s} + \delta && && (5.52)\\
&\Pi^x_{\tilde{v}k} = -\alpha_{\tilde{v}k} + \delta && \forall k \in S', k \neq s && (5.53)
\end{aligned}$$

Definimos los siguientes coeficientes en orden:

- $\alpha_{\tilde{u}t}$ a partir de (5.46): $\alpha_{\tilde{u}t} = -\Pi^x_{\tilde{u}t}$
- $\alpha_{\tilde{v}t}$ a partir de (5.48):: $\alpha_{\tilde{v}t} = -\Pi^x_{\tilde{v}t}$
- δ a partir de (5.41)+(5.50)+(5.52)-(5.43)-(5.46)-(5.48):

$$\delta = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t}$$

- $\beta_{\tilde{u},\tilde{v}}$ a partir de (5.43):: $\beta_{\tilde{u}\tilde{v}} = 2\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + 2\Pi^x_{\tilde{u}t} + 2\Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s}$
- $\alpha_{\tilde{u}s}$ a partir de (5.50): $\alpha_{\tilde{u}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t}$
- $\alpha_{\tilde{v}s}$ a partir de (5.52): $\alpha_{\tilde{v}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t}$
- α_{uk} a partir de (5.45): $\alpha_{uk} = -\Pi^x_{uk}$
- $\alpha_{\tilde{u}k}$ para todo $k \notin S, k \neq t$ a partir de (5.47):$\alpha_{\tilde{u}k} = -\Pi^x_{\tilde{u}k}$
- $\alpha_{\tilde{v}k}$ para todo $k \notin S, k \neq t$ a partir de (5.49): $\alpha_{\tilde{v}k} = -\Pi^x_{\tilde{v}k}$
- $\alpha_{\tilde{u}k}$ para todo $k \in S, k \neq s$ a partir de (5.51):

$$\alpha_{\tilde{u}k} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}k}$$

- $\alpha_{\tilde{v}k}$ para todo $k \in S, k \neq s$ a partir de (5.53):

$$\alpha_{\tilde{v}k} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{u}t} - \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^x_{\tilde{v}k}$$

- β_{uv} para todo $u, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ a partir de (5.36): $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt}$
- β_{uv} para todo $u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ a partir de (5.38): $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt}$

Por último queda pendiente revisar que las ecuaciones (5.37), (5.39), (5.40), (5.42) y (5.44) sean consistentes. Lo que debemos probar es que:

La ecuación (5.37) establece que $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} - \alpha_{uk} - \alpha_{vk}$ para todo $u \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \neq t$. Reemplazando las definiciones de α_{uk} y α_{vk} obtenidas de (5.45), resulta que $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk}$ para todo k. Como β_{uv} está definido en función del color t a partir de la ecuación (5.36), debemos mostrar que:

$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \quad \forall k \in M, k \neq t, u, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}} \quad (\tilde{C}1)$$

La ecuación (5.39) establece que $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} - \alpha_{uk} - \alpha_{vk}$ para todo $u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \notin S', k \neq t$. Reemplazando las definiciones de α_{uk} y α_{vk} obtenidas de (5.47) y (5.45), resulta que $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk}$ para todo $k \notin S', k \neq t$. Como β_{uv} está definido en función del color t a partir de la ecuación (5.38), debemos mostrar que:

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \quad \forall k \notin S', k \neq t \\ u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\} \end{aligned}} \quad (\tilde{C}2)$$

La ecuación (5.40) establece que $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} - \alpha_{uk} - \alpha_{vk}$ para todo $u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, k \in S'$. Si k $\neq s$, reemplazando las definiciones de α_{uk} y α_{vk} obtenidas de (5.51) y (5.45), resulta que $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk}$ para todo $k \in S'$. Como β_{uv} está definido en función del color t a partir de la ecuación (5.38), debemos mostrar que:

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vk} - \Pi^x_{\tilde{u}k} - \Pi^x_{vk} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s} \\ \forall k \in S', k \neq s \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v} \end{aligned}} \quad (\tilde{C}3)$$

Para el caso que $k = s$, reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}s}$, α_{vs} y $\beta_{\tilde{u}v}$ obtenidas a partir de (5.50), (5.45) y (5.38) respectivamente, deberíamos demostrar que

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vs} - \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s} \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}} \quad (\tilde{C}4)$$

La ecuación (5.42), establece que $\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = \alpha_{\tilde{u}k} + \alpha_{\tilde{v}k} + \beta_{\tilde{u}\tilde{v}}$ para todo $k \in S', k \neq s$. Reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}k}$, $\alpha_{\tilde{v}k}$ y $\beta_{\tilde{u}\tilde{v}}$obtenidas a partir de (5.51) y (5.38) , debemos demostrar que :

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} \ \ \forall k \in S', k \neq s} \qquad (\tilde{\boldsymbol{C}}\mathbf{5})$$

La ecuación (5.44) determina a $\beta_{\tilde{u}\tilde{v}} + \delta$. Por lo tanto, para que la ecuación (5.44) sea consistente, reemplazando las definiciones de $\alpha_{\tilde{u}k}$ y $\alpha_{\tilde{v}k}$ obtenidas de (5.47) y $\alpha_{\tilde{u}t}$ y $\alpha_{\tilde{v}t}$ obtenidas de (5.46) y (5.48), debemos verificar que :

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} \ \ \forall k \notin S'} \qquad (\tilde{\boldsymbol{C}}\mathbf{6})$$

A continuación demostraremos la validez de cada una de las identidades derivadas. Notar la similitud entre las condiciones que debemos demostrar y aquellas que nos quedaron para la desigualdad **d-Color** de conjunto de d colores. Debido a esto es que el hilo conductor de esta demostración será análogo al anterior. En cada caso, nos enfocaremos en mostrar que existen coloreos en la cara F definida por la desigualdad **(d-1)-Color** de conjunto de $d-1$ colores que cumplen con las propiedades que fueron usadas para probar la misma condición en el caso de la desigualdad **d-Color** de conjunto de d colores. Si fuera necesario otro tipo de argumento, entonces nos extenderemos en más detalle.

- $\tilde{C}1$**:** $\boldsymbol{\Pi^a_{uvt}+\Pi^x_{ut}+\Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk}+\Pi^x_{uk}+\Pi^x_{vk} \ \ \forall k \in M, k \neq t \ \ u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}}$
  Analizaremos diferentes casos:

  - $k \notin S'$

    Consideramos $\tilde{C}ol$. Cualquier arista $uv \in W$ tiene asignado un color que no pertenece a S' y es única en su color. Además $\tilde{C}ol$ utiliza a lo sumo $|E|-1$ colores. Intercambiando el color de la arista uv con el color no usado se obtiene un nuevo coloreo $\tilde{C}ol_1$ que pertenece a la cara F. Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** y la identidad es válida.

  - $k \in S'$ y no existen conflictos entre $u, \tilde{u}$, $u, \tilde{v}$, $v, \tilde{u}$ y $v, \tilde{v}$

    Consideramos $\tilde{C}ol$. La única arista que tiene asignado el color 1 es $\tilde{u}\tilde{v}$ y existe una arista incidente a $\tilde{u}$ y otra a $\tilde{v}$ que usan el color k. Además la arista $uv \in W$ tiene asignado un color que no pertenece a S', asumimos que es t. Si intercambiamos los colores 1 y k, obtenemos $\tilde{Col}_1$ un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F ya que permutamos colores de S' entre aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$. Ahora cambiamos el color de uv al color k y obtenemos $\tilde{Col}_2$. Como $uv \in W$, entonces $\tilde{Col}_2$ es un coloreo propio de aristas. Además, como las únicas aristas con color k son $\tilde{u}\tilde{v}$ y uv y no hay conflictividad entre $u, \tilde{u}$, $u, \tilde{v}$, $v, \tilde{u}$ y $v, \tilde{v}$, entonces $\tilde{Col}_2$ resulta coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Como los colores de las aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ no cambiaron, entonces $\tilde{Col}_2$ pertenece a la cara F. Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** y la identidad es válida.

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$, $v \notin N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$

  El análisis realizado en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** para los tres primeros casos sobre el $deg(u) \geq 3$ son válidos aquí también y por lo tanto, también se reducen al caso anterior y la identidad es válida.

  En el caso $deg(u) = 3$, $N(u) = \{v, \tilde{u}, \tilde{v}\}$ y $deg(\tilde{u}) = 3$, los coloreos Col_1 y Col_2 construidos en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** también pertenecen a la cara F, por lo tanto todo el desarrollo es válido aquí también.

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}), u \notin N(\tilde{v})$, $v \notin N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$

  Consideremos $\tilde{Col}$ a partir del cual definimos $\tilde{Col}_1$ intercambiando el color 1 con el color k. $\tilde{Col}_1$ es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a F ya que intercambiamos dos colores de S'. A partir de este coloreo, se puede obtener un nuevo coloreo $\tilde{Col}_2$ tal que el color k es asignado a la arista uv y el resto de las aristas conservan su color. El análisis sobre que este coloreo resulta un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles es el que fue realizado en la demostración anterior. Además, $\tilde{Col}_2$ pertenece a la cara ya que $\tilde{Col}_1$ pertenece a la cara y la reasignación de color fue hecha en una arista no incidente a $\tilde{u}$ ni a $\tilde{v}$. Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** y la identidad es válida.

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}), u \notin N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$

  El análisis hecho sobre Col_1 y Col_2 en la demostración de la desigualdad **d-Color** es válido para $\tilde{C}ol_1$ y $\tilde{C}ol_2$. Por lo tanto, con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones y la identidad es válida.

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}), u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$

  Consideremos $\tilde{C}ol$. Si intercambiamos el color 1 (única asignación a la arista $\tilde{u}\tilde{v}$) con el color $d+1$ (única asignación a la arista $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$) obtenemos $\tilde{C}ol_1$ un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Además $\tilde{C}ol_1$ pertenece a la cara F ya que al cambiar el color, entre las variables involucradas en la desigualdad, se anula la variable $x_{\tilde{u}1}^{\tilde{C}ol} = 1$ y toma valor 1 la variable $a_{\tilde{u}\tilde{v}d+1}^{\tilde{C}ol_1}$. Como $v \notin N(\tilde{v})$, entonces existe $z \in N(\tilde{v}) \setminus N(\tilde{u})$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z = v_{deg(\tilde{v})-1}$. La arista $uv \in W$ tiene asignado un color que no pertenece a S', supongamos el color t. A partir de $\tilde{C}ol_1$, se puede obtener un coloreo $\tilde{C}ol_2$ tal que el color 1 es asignado a la arista uv y el resto de las aristas conservan su color. El análisis sobre que $\tilde{C}ol_2$ es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles es exactamente igual al realizado en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color**. Además, $\tilde{C}ol_2$ pertenece a la cara ya que $\tilde{C}ol_1$ pertenece a la cara y la reasignación de color fue hecha en una arista no incidente a $\tilde{u}$ ni a $\tilde{v}$.

  Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** y la identidad es válida.

- $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}), u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$

  Consideremos $\tilde{C}ol$. A partir de $\tilde{C}ol$ se obtiene un nuevo coloreo $\tilde{C}ol_1$ donde el color 1 es asignado a la arista uv y el resto de las aristas conservan su color. Debido a la hipótesis que enunciamos, $\tilde{C}ol_1$ resulta un coloreo propio de aristas con vértices distinguibles ya que es válido lo desarrollado en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color**.

Además, $\tilde{C}ol_1$ pertenece a la cara ya que $\tilde{C}ol$ pertenece a la cara y la reasignación de color fue hecha en una arista no incidente a $\tilde{u}$ ni a $\tilde{v}$.

Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** y la identidad es válida.

- $\tilde{C}2$**:**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi^a_{uvt} + \Pi^x_{ut} + \Pi^x_{vt} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk}} \quad & \boldsymbol{\forall k \notin S', k \neq t} \\ & \boldsymbol{u \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}, v \notin \{\tilde{u}, \tilde{v}\}}\end{aligned} \tag{5.54}$$

Por las propiedades $\tilde{P}7$ y $\tilde{P}9$ podemos afirmar que existe un coloreo *avdec* $\tilde{C}ol_1$ que pertenece a la cara F y que asigna un color que no pertenece a S' a la arista $\tilde{u}v$ y es única en su color y no utiliza el color $k \notin S'$. A partir de $\tilde{C}ol_1$, definimos $\tilde{C}ol_2$ cambiando el color de $\tilde{u}v$ a k. $\tilde{C}ol_2$ resulta un coloreo propio de aristas con vértices distinguibles que pertenece a la cara F. Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** y la identidad es válida.

- $\tilde{C}3$**:**

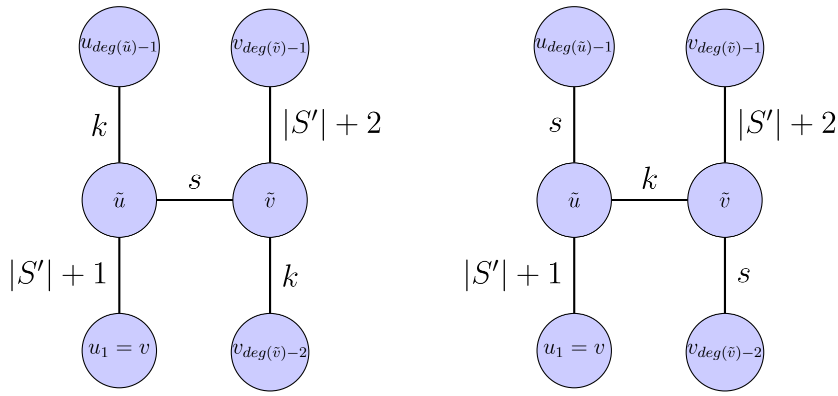
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vk} - \Pi^x_{\tilde{u}k} - \Pi^x_{vk} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{u}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s}} \\ \boldsymbol{\forall k \in S', k \neq s \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}}\end{aligned} \tag{5.55}$$

Por las propiedades $\tilde{P}7$ y $\tilde{P}9$ podemos afirmar que existe un coloreo *avdec* $\tilde{C}ol_1$ que pertenece a la cara F y que asigna el color $s \in S'$ a la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ y el color $t \notin S'$ a la arista $\tilde{u}v$. Además estas aristas son únicas en su color. A partir de $\tilde{C}ol_1$, intercambiamos los colores s y t y obtenemos $\tilde{C}ol_2$, un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F. Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la primera parte de demostración anterior.

Nos faltaría poder generar los coloreos restantes que demuestren

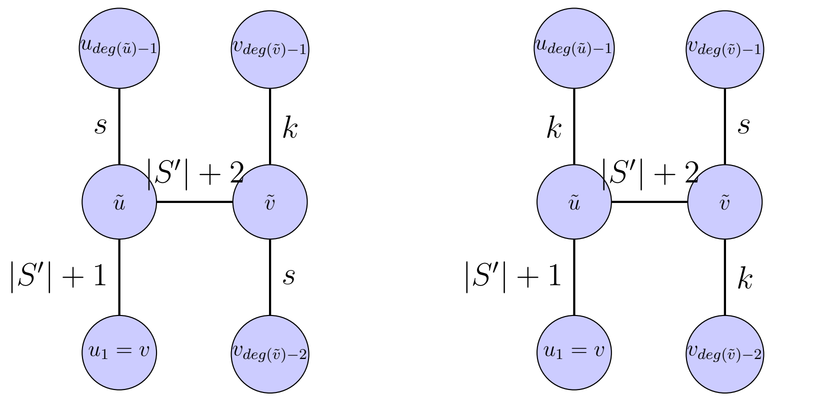
$$\Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \in S', k \neq s$$

Ubicando a v en el primer lugar en el orden de la vecindad, sabemos que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara, tal que $f(\tilde{u}v) = |S'| + 1$ (única en su color), $f(\tilde{u}\tilde{v}) = 1$ (única en su color), $f(\tilde{u}u_{deg(\tilde{u})-1}) = f(\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-2}) = 2$ (únicas en su color) y $f(\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}) = |S'| + 2$ (única en su color). Intercambiando s con 1 y 2 con k, obtenemos $\tilde{C}ol_1$ (figura 5.22a). A partir de $\tilde{C}ol_1$, permutando s con k se obtiene $\tilde{C}ol_2$ (figura 5.22b), un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F ya que la permutación fue en aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ y entre colores en S'.



(a) $\tilde{C}ol_1$ (b) $\tilde{C}ol_2$

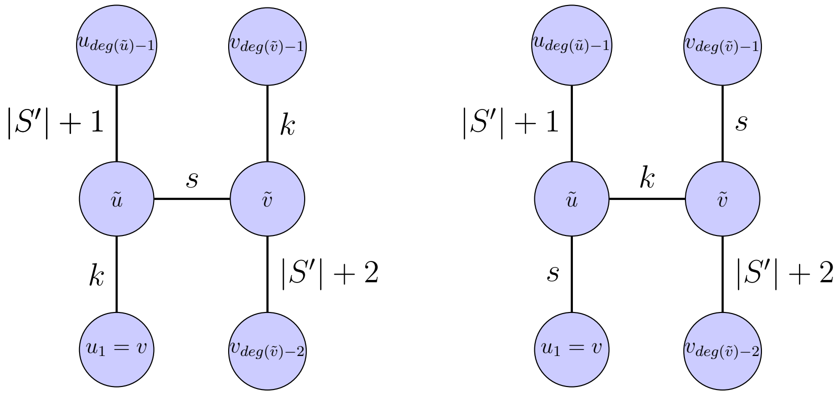
Figura 5.22. Coloreos 1 y 2 para $\tilde{C}3$



(a) $\tilde{C}ol_3$ (b) $\tilde{C}ol_4$

Figura 5.23. Coloreos 3 y 4 para $\tilde{C}3$

A partir de $\tilde{C}ol_2$, se pueden permutar el color k con el color $|S'| + 2$ y obtener $\tilde{C}ol_3$ (figura 5.23a). Las aristas correspondientes son únicas en su color por lo que no se afecta la distinguibilidad ni que sea un coloreo propio



(a) $\tilde{C}ol_5$ (b) $\tilde{C}ol_6$

Figura 5.24. Coloreos 5 y 6 para $\tilde{C}3$

de aristas. Además, el coloreo pertenece a la cara F. A partir de $\tilde{C}ol_1$, se pueden permutar el color s con el color $|S'|+2$ y obtener $\tilde{C}ol_4$ (figura 5.23b). Las aristas correspondientes son únicas en su color por lo que no se afecta la distinguibilidad ni que sea un coloreo propio de aristas. Además, el coloreo pertenece a la cara F. Por otro lado, sabemos que $\tilde{u}v$ y $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$ pueden compartir color, entonces a partir de $\tilde{C}ol_1$ podemos obtener $\tilde{C}ol_5$ (figura 5.24a) intercambiando el color k de la arista $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-2}$ con el color $|S'|+2$ de la arista $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}$ y el color k de la arista $\tilde{u}u_{deg(\tilde{v})-1}$ con el color $|S'|+1$ de la arista $\tilde{u}v$. Este intercambio no afecta la distinguibilidad ni que sea un coloreo propio de aristas. Además, el coloreo pertenece a la cara F. Por último, a partir de $\tilde{C}ol_5$, se puede obtener $\tilde{C}ol_6$ (figura 5.24b) intercambiando los colores s con k.

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_4 son:

$x^{\tilde{C}ol_1}_{\tilde{u}s} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_1}_{\tilde{u}\tilde{v}s} = 1$, $x^{\tilde{C}ol_1}_{v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_1}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} = 1$

$x^{Col_4}_{\tilde{u}|S'|+2} = 1$, $a^{Col_4}_{\tilde{u}\tilde{v}|S'|+2} = 1$, $x^{\tilde{C}ol_4}_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$, $a^{Col_4}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_1 y Col_4, y que

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_4} + \Pi^x x^{Col_4}$$

concluimos que:

$$\Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} = \\ \Pi^x_{\tilde{u}|S'|+2} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}|S'|+2} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s} \tag{5.56}$$

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_2 y Col_3 son:

$x^{\tilde{C}ol_2}_{\tilde{u}k} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_2}_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$, $x^{\tilde{C}ol_2}_{v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_2}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} = 1$

$x^{Col_3}_{\tilde{u}|S'|+2} = 1$, $a^{Col_3}_{\tilde{u}\tilde{v}|S'|+2} = 1$, $x^{\tilde{C}ol_3}_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$, $a^{Col_3}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_2 y Col_3, y que

$$\Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2} = \Pi^a a^{Col_3} + \Pi^x x^{Col_3}$$

concluimos que:

$$\Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}|S'|+2} = \\ \Pi^x_{\tilde{u}|S'|+2} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}|S'|+2} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} \tag{5.57}$$

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_5 y Col_6 son:

$x^{\tilde{C}ol_5}_{vk} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_5}_{\tilde{u}vk} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_5}_{\tilde{u}\tilde{v}s} = 1$, $x^{\tilde{C}ol_5}_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_5}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} = 1$

$x^{\tilde{C}ol_6}_{vs} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_6}_{\tilde{u}vs} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_6}_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$, $x^{\tilde{C}ol_6}_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$, $a^{\tilde{C}ol_6}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_5 y Col_6, y que

$$\Pi^a a^{Col_5} + \Pi^x x^{Col_5} = \Pi^a a^{Col_6} + \Pi^x x^{Col_6}$$

concluimos que:

$$\begin{aligned}\Pi^x_{vk} + \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}k} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}k} = \\ \Pi^x_{vs} + \Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1}s} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1}s}\end{aligned} \tag{5.58}$$

Si ahora combinamos las igualdades (5.56)-(5.57)+(5.58), se obtiene

$$\Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \in S', k \neq s$$

- $\tilde{C}4$**:**

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}vt} + \Pi^x_{vt} - \Pi^a_{\tilde{u}vs} - \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} - \Pi^x_{\tilde{v}s} \quad v \neq \tilde{u}, \tilde{v}} \tag{5.59}$$

En $\tilde{C}ol$, la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ es la única con color 1 y $\tilde{u}u_1$ es la única con color $|S'|+1$. Intercambiando s con 1, obtenemos $\tilde{C}ol_1$ un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F. Como las dos aristas son únicas en su color, se pueden intercambiar de color y obtener $\tilde{C}ol_2$ un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que también pertenece a la cara.

Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color**, de donde deducimos que la identidad es válida.

- $\tilde{C}5$**:**

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} \quad \forall k \in S', k \neq s} \tag{5.60}$$

Con el procedimiento usado para construir $\tilde{C}ol$, podemos construir $\tilde{C}ol_1$, un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F, tal que la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado el color k (única en su color), las aristas $\tilde{u}v$ y $\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1)}$ tienen asignado el color s (únicas en su color), la arista $\tilde{u}u_2$ tiene asignado el color $|S'|+1$ y la arista $\tilde{v}v_1$ el color $|S'|+2$. Intercambiando los colores k y s, ambos en S' y asignados a aristas incidentes a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$, obtenemos $\tilde{C}ol_2$, un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F.

La diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

$x^{Col_1}_{v_{deg(\tilde{v})-1)}s} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1)}s} = 1$, $x^{Col_1}_{vs} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}vs} = 1$

$x^{Col_1}_{v_{deg(\tilde{v})-1)}k} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}\tilde{v}s} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1)}k} = 1$, $x^{Col_1}_{vk} = 1$, $a^{Col_1}_{\tilde{u}vk} = 1$

Considerando las variables en las que difieren Col_3 y Col_4, y que

$$\Pi^a a^{Col_3} + \Pi^x x^{Col_3} = \Pi^a a^{Col_4} + \Pi^x x^{Col_4}$$

concluimos que:

$$\begin{gathered} \Pi^x_{vs} + \Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1)}s} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1)}s} = \\ \Pi^x_{vk} + \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1)}k} + \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1)}k} \end{gathered} \tag{5.61}$$

En la segunda parte de la demostración de **C3** hemos visto que se satisfacían las siguientes relaciones:

$$\Pi^a_{\tilde{u}vs} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{vs} = \Pi^a_{\tilde{u}vk} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{vk} \tag{5.62}$$

$$\Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1)}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1)}s} = \Pi^a_{\tilde{v}v_{deg(\tilde{v})-1)}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} + \Pi^x_{v_{deg(\tilde{v})-1)}k} \tag{5.63}$$

Si ahora a la ecuación (5.61) les restamos las ecuaciones (5.62) y (5.63) obtenemos

$$\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}s} + \Pi^x_{\tilde{u}s} + \Pi^x_{\tilde{v}s} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} \;\; \forall k \in S', k \neq s$$

- $\tilde{C}6$:

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}t} + \Pi^x_{\tilde{u}t} + \Pi^x_{\tilde{v}t} = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k} + \Pi^x_{\tilde{u}k} + \Pi^x_{\tilde{v}k} \quad \forall k \notin S'} \tag{5.64}$$

Por la propiedad $\tilde{P}8$, sabemos que existe $\tilde{C}ol_1$ un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F, donde la arista $\tilde{u}\tilde{v}$ tiene asignado un color $t \notin S'$, es única en su color y no se utiliza el color k. Reemplazando el color t por el color k, se obtiene $\tilde{C}ol_2$ otro coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara F. Con estos dos coloreos estamos en las mismas condiciones que en la demostración anterior de la desigualdad **d-Color** y la identidad es válida.

$\square$

Para completar la caracterización de la desigualdad **(d-1)-Color**, nos queda analizar el caso que $deg(\tilde{u}) = 2$. Sea $\tilde{u} \in V$ y $\tilde{v} \in V$ dos vértices en conflicto con $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 2$ y sea $S' = \{1\}$. La cara F definida por la desigualdad **(d-1)-Color** no siempre define una faceta. Por ejemplo, si $u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}$, $u \in N(\tilde{u})$, $v \in N(\tilde{v}) \cap N(u)$ y $deg(v) = 2$, entonces todo punto factible que pertenezca a la cara verifica que la arista uv no puede tener asignado el color 1. En decir, todo punto que pertenece a F verifica que $a_{uv1} = 0$.

A partir del análisis de este caso, hemos identificado que es necesario que se cumplan ciertas condiciones para que la desigualdad defina una faceta. Presentamos a continuación condiciones necesarias.

Proposición 5.4.10. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E| - 1$ colores. Sea $\tilde{u} \in V$ y $\tilde{v} \in V$ dos vértices en conflicto con $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 2$ y sea $S' = \{1\}$. Para que la desigualdad **(d-1)-Color** defina una faceta es necesario que para toda arista $uv \in E$, $u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}$, exista al menos una arista incidente a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ tal que ambas aristas pueden tener asignado el mismo color.*

Demostración. Consideremos la arista $uv \in E$, $u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}$ y supongamos que no existe una arista incidente a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ tal que ambas aristas pueden tener asignado el mismo color. Para pertenecer a la cara, al menos una arista incidente a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ debe tener asignado el color 1. Entonces $a_{uv1} = 0$ para todo punto que pertenece a la cara F definida por la desigualdad **(d-1)-Color**. Afirmamos que esta ecuación es linealmente independiente de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define a la cara F.

Consideremos una combinación lineal de las ecuaciones del sistema minimal y la ecuación que define a F. La variable x_{uk} , para todo $k \in M$, está presente únicamente en la ecuación (5.2), por lo tanto el multiplicador asociado debe ser nulo. Eliminadas estas ecuaciones, la ecuación (5.1) es la única donde están presentes las variables a_{uvk} para $k \notin S'$, por lo tanto el multiplicador asociado deber ser nulo. Luego, no queda ninguna ecuación donde estén presentes las variables a_{uvk} para $k \in S'$. Entonces la ecuación $a_{uv1} = 0$ es válida para los puntos que pertenecen a F y es linealmente independiente de la otras ecuaciones que definen la cara.

Por lo tanto, la cara no tendría dimensión máxima en el caso que no se dieran estas condiciones. □

Establecidas condiciones necesarias, veamos ahora que resultan suficientes para que la desigualdad defina una faceta.

Proposición 5.4.11. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E| - 1$ colores. Sea $\tilde{u} \in V$ y $\tilde{v} \in V$ dos vértices en conflicto con $deg(\tilde{u}) = deg(\tilde{v}) = 2$ y sea $S' = \{1\}$. Supongamos además que para toda arista $uv \in E$, $u, v \neq \tilde{u}, \tilde{v}$, existe al menos una arista incidente a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ tal que ambas aristas pueden tener asignado el mismo color. Entonces, la desigualdad **(d-1)-Color**.*

$$x_{\tilde{u}1} + x_{\tilde{v}1} + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2$$

define una faceta de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Demostración. Denominamos a_1, a_2 y a_3 a las 3 aristas incidentes a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ y $a_4, \ldots a_m$ al resto de las aristas del grafo, con $m = |E|$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que a_1 y a_m pueden tener asignado el mismo color.

Vamos a construir $m(m - 1)$ puntos afínmente independientes a partir de lo cual podremos concluir que la desigualdad **(d-1)-Color** es faceta.

A continuación describimos los puntos que consideramos:

- Sean $i = 4 \ldots m-1$ y $k = 2 \ldots m-1$ tal que $i \neq k$. Construimos el coloreo Col_i^k tal que:

  $f(a_1) = 1$

  $f(a_i) = k$

  $f(a_m) = i$

  $f(a_k) = m$

  $f(a_j) = j$ para $j \neq 1, m, i, k$

  Total de puntos: $(m-4)(m-3)$

- Consideremos a_i, $i = 4, \ldots m-1$ y definimos $a_1^i \in \{a_1, a_2, a_3\}$ tal que a_1^i puede tener asignado el mismo color que a_i. Las otras dos aristas incidentes a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ las denominamos a_2^i, a_3^i. Construimos el coloreo Col_i^1 tal que:

  $f(a_i) = f(a_1^i) = 1$

  $f(a_2^i) = 2$

  $f(a_3^i) = 3$

  $f(a_j) = j$ para $j \neq 1, 2, 3, i$

  Total de puntos: $(m-4)$

- Sean $i = 4 \ldots m-1$. Construimos el coloreo Col_i^m tal que:

  $f(a_1) = 1$

  $f(a_i) = m$

  $f(a_m) = i$

  $f(a_j) = j$ para $j \neq 1, m, i$

  Total de puntos: $(m-4)$

- Para $i = 4, \ldots, m-1$. Construimos el coloreo Col_1^i tal que:

  $f(a_2) = 1$

  $f(a_3) = 2$

  $f(a_m) = 3$

  $f(a_1) = i$

  $f(a_i) = m$

  $f(a_j) = j$ para $j \neq 1, 2, 3, m, i$

  Total de puntos: $(m-4)$

- Para $i = 4, \ldots, m-1$. Construimos el coloreo Col_2^i tal que:

  $f(a_1) = 1$

  $f(a_m) = 2$

  $f(a_3) = 3$

  $f(a_2) = i$

  $f(a_i) = m$

  $f(a_j) = j$ para $j \neq 1, 2, 3, m, i$

  Total de puntos: $(m-4)$

- Para $i = 1, \ldots, m-1$. Construimos el coloreo Col_3^i tal que:

  $f(a_1) = 1$

  $f(a_2) = 2$

  $f(a_m) = 3$

  $f(a_3) = i$

  $f(a_i) = m$

  $f(a_j) = j$ para $j \neq 1, 2, 3, m, i$

Total de puntos: $(m-4)$

- Consideremos a_i, $i = 4, \dots m-1$ y definimos $a_1^i \in \{a_1, a_2, a_3\}$ tal que a_1^i puede tener asignado el mismo color que a_i. Las otras dos aristas incidentes a $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$ las denominamos a_2^i, a_3^i. Construimos el coloreo Col_{i1}^m tal que:

  $f(a_2^i) = 1$

  $f(a_3^i) = 2$

  $f(a_m) = 3$

  $f(a_i) = f(a_1^i) = m$

  $f(a_j) = j$ para $j \neq 1, 2, 3, m, i$

  Total de puntos: $(m-4)$

Considerando todos estos coloreos, tenemos un total de $(m-4)(m-3)+6(m-4) = m(m-1)-12$. A continuación enumeramos 12 coloreos para llegar a la cantidad necesaria. Estos coloreos difieren en la asignación de los colores de las aristas a_1, a_2, a_3 y a_m. En todos los casos la asignación de colores a las aristas a_j con $j \neq 1, 2, 3, m$ es $f(a_j) = j$.

Dada una combinación lineal:

$$\sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=2, k\neq i}^{m-1} \alpha_i^k Col_i^k + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_i^1 Col_i^1 + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_i^m Col_i^m + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_{i1}^m Col_{i1}^m +$$
$$\sum_{i=4}^{m-1} \alpha_1^i Col_1^i + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_2^i Col_2^i + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_3^i Col_3^i + \sum_{i=1}^{12} \alpha_i Col_i = 0$$

tal que

$$\sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=2, k\neq i}^{m-1} \alpha_{ik} + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_i^1 + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_i^m + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_{i1}^m + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_1^i + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_2^i + \sum_{i=4}^{m-1} \alpha_3^i + \sum_{i=1}^{12} \alpha_i = 0,$$

debemos probar que todos los coeficientes α son nulos.

Considerando estos coloreos en el orden dado, a continuación detallamos la asignación única que los distingue respecto a los que se encuentran detrás en el orden.

$$Col_1 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=2 \\ f(a_2)=1 \\ f(a_3)=3 \\ f(a_m)=m \end{array} \qquad Col_2 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=2 \\ f(a_2)=1 \\ f(a_3)=m \\ f(a_m)=3 \end{array} \qquad Col_3 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=m \\ f(a_2)=1 \\ f(a_3)=3 \\ f(a_m)=2 \end{array}$$

$$Col_4 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=3 \\ f(a_2)=1 \\ f(a_3)=m \\ f(a_m)=2 \end{array} \qquad Col_5 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=1 \\ f(a_2)=3 \\ f(a_3)=2 \\ f(a_m)=1 \end{array} \qquad Col_6 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=1 \\ f(a_2)=2 \\ f(a_3)=3 \\ f(a_m)=1 \end{array}$$

$$Col_7 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=2 \\ f(a_2)=1 \\ f(a_3)=m \\ f(a_m)=2 \end{array} \qquad Col_8 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=2 \\ f(a_2)=3 \\ f(a_3)=1 \\ f(a_m)=2 \end{array} \qquad Col_9 \quad \begin{array}{l} f(a_1)=1 \\ f(a_2)=m \\ f(a_3)=3 \\ f(a_m)=1 \end{array}$$

$$Col_{10} \quad \begin{array}{l} f(a_1)=2 \\ f(a_2)=1 \\ f(a_3)=3 \\ f(a_m)=2 \end{array} \qquad Col_{11} \quad \begin{array}{l} f(a_1)=2 \\ f(a_2)=m \\ f(a_3)=1 \\ f(a_m)=2 \end{array} \qquad Col_{12} \quad \begin{array}{l} f(a_1)=1 \\ f(a_2)=m \\ f(a_3)=3 \\ f(a_m)=2 \end{array}$$

Esto nos permite comprobar que el sistema es triangular y poder concluir que los coeficientes α son nulos.

- Col_i^k es el único que asigna a la arista a_i el color k para $i = 4, \ldots, m-1$ y $k = 2, \ldots, m-1$, $k \neq i$. Por lo tanto $\alpha_i^k = 0$.
- Col_i^1 es el único que asigna a la arista a_i el color 1 para $i = 4, \ldots, m-1$. Por lo tanto $\alpha_i^1 = 0$
- Col_i^m es el único que asigna a la arista a_m el color i para $i = 4, \ldots, m-1$. Por lo tanto $\alpha_i^m = 0$
- Col_1^i es el único que asigna a la arista a_1 el color i para $i = 4, \ldots, m-1$. Por lo tanto $\alpha_1^i = 0$
- Col_2^i es el único que asigna a la arista a_2 el color i para $i = 4, \ldots, m-1$. Por lo tanto $\alpha_2^i = 0$

- Col_3^i es el único que asigna a la arista a_3 el color i para $i = 4, \ldots, m-1$. Por lo tanto $\alpha_3^i = 0$
- Col_{i1}^m es el único que asigna a la arista a_i el color m para $i = 4, \ldots, m-1$. Por lo tanto $\alpha_{i1}^m = 0$
- Col_1 es el único que asigna a la arista a_m el color m. Por lo tanto $\alpha_1 = 0$.
- Col_2 es el único que asigna a la arista a_m el color 3. Por lo tanto $\alpha_2 = 0$.
- Col_3 es el único que asigna a la arista a_1 el color m. Por lo tanto $\alpha_3 = 0$.
- Col_4 es el único que asigna a la arista a_1 el color 3. Por lo tanto $\alpha_4 = 0$.
- Col_5 es el único que asigna a la arista a_3 el color 2. Por lo tanto $\alpha_5 = 0$.
- Col_6 es el único que asigna a la arista a_2 el color 2. Por lo tanto $\alpha_6 = 0$.
- Col_7 es el único que asigna a la arista a_3 el color m. Por lo tanto $\alpha_7 = 0$.
- Col_8 es el único que asigna a la arista a_2 el color 3. Por lo tanto $\alpha_8 = 0$.
- Col_9 es el único que asigna a la arista a_m el color 1. Por lo tanto $\alpha_9 = 0$.
- Col_{10} es el único que asigna a la arista a_2 el color 1. Por lo tanto $\alpha_{10} = 0$.
- Col_{11} es el único que asigna a la arista a_3 el color 1. Por lo tanto $\alpha_{11} = 0$.
- Col_{12} es el único que asigna a la arista a_m el color 1. Por lo tanto $\alpha_{12} = 0$.

$\square$

Concluimos entonces que los puntos dados son afínmente independientes y por lo tanto la desigualdad **(d-1)-Color** para $d = 2$ define una faceta de $\mathcal{P}_{\mathcal{AVDEC}}^{\text{exp}}$ bajo las hipótesis establecidas.

5.5. Faceta Blossom

Un poliedro muy estudiado en la literatura del área es $\mathcal{MATCH}_G$, la cápsula convexa de $\{x \in \{0,1\}^m | x$ es un *matching* de $G\}$ donde la variable x_i indican si la arista i es utilizada en el *matching*. Este poliedro representa todos los *matchings* posibles en un grafo. Existe una familia de desigualdades de $\mathcal{MATCH}_G$ conocidas con el nombre de desigualdades *blossom*. La importancia de estas desigualdades radica en que son parte de la descripción del poliedro de matching [22].

Como cada color induce un *matching* en el grafo debido a que dos aristas del mismo color no pueden incidir sobre un mismo vértice, entonces se puede ver que las desigualdades blossom son desigualdades válidas para un color fijo en función de las variables a_{uvk} para todo $uv \in E$ y $k \in M$.

En esta sección vamos a mostrar que bajo ciertas condiciones las desigualdades *blossom* definen una faceta para nuestro poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Comenzamos viendo la validez.

Proposición 5.5.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, $k_0 \in M$ y $S \subset V$ con $|S|$ impar. La siguiente familia de desigualdades es válida para el poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$:*

$$\sum_{uv \in E_{[S]}} a_{uvk_0} \leq \frac{|S|-1}{2} \qquad \forall S \subseteq V \wedge |S| \textsf{ impar} \tag{5.65}$$

Demostración. Veamos que para todo punto $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ la desigualdad se satisface.

Para cualquier conjunto de vértices S, la máxima cantidad de aristas que pueden tener asignado el mismo color es $\lfloor\frac{|S|}{2}\rfloor$ ya que cada arista es incidente a dos vértices en los cuales no incide otra arista con el mismo color asignado. Si hubiera $\lfloor\frac{|S|}{2}\rfloor + 1$ aristas entonces habría $2\lfloor\frac{|S|}{2}\rfloor + 2$ vértices incidentes a las aristas que resulta mayor que $|S|$.

Entonces, la desigualdad es válida para todos los puntos con coordenadas enteras que pertence a $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ y por lo tanto para todo punto que pertenece a $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$. $\square$

El objetivo de caracterizar estas desigualdades es que existen puntos del poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ que cumplen las desigualdades presentadas anteriormente, pero no cumplen las desigualdades *blossom* por lo que, agregando estas desigualdades, podríamos reforzar la relajación lineal de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$. Para esto debemos ver que estas desigualdades no se deducen de las que ya tenemos caracterizadas.

Proposición 5.5.2. *Las desigualdades* blossom *no son redundantes en el poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ aún agregando las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color***

Demostración. Consideremos el grafo de la figura 5.25. Nos vamos a construir un punto fraccionario que pertenece a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$, satisface todas las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color** y viola una desigualdad *blossom*. En la figura 5.25 indicamos en cada arista el o los colores asignados, es decir el valor de k tal que la variable $a_{uvk} > 0$, caso contrario la variable toma valor nulo. En el caso de que se indica un único color, a_{uvk} toma el valor 1. Si hay dos colores, las dos variables respectivas se definen como $a_{uvk} = 0.5$.

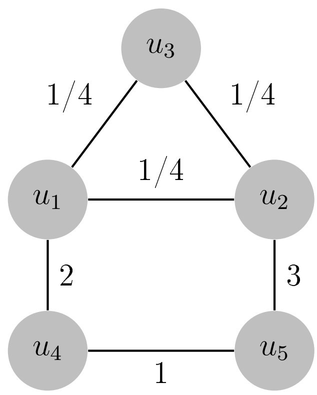


Figura 5.25. Solución que satisface todas las desigualdades y facetas de conjuntos de colores

A continuación detallamos las variables no nulas correspondientes a la asignación:

$x_{u_1 1} = 1$	$x_{u_4 1} = 1$	$a_{u_1 u_3 1} = 0.5$	$x_{u_4 2} = 1$
$x_{u_2 1} = 1$	$x_{u_5 1} = 1$	$a_{u_2 u_3 1} = 0.5$	$x_{u_1 2} = 1$
$x_{u_3 1} = 1$	$a_{u_1 u_2 1} = 0.5$	$a_{u_4 u_5 1} = 1$	$a_{u_1 u_4 2} = 1$

$x_{u_2 3} = 1$ $\quad$ $x_{u_1 4} = 1$ $\quad$ $a_{u_1 u_2 4} = 0.5$

$x_{u_5 3} = 1$ $\quad$ $x_{u_2 4} = 1$ $\quad$ $a_{u_1 u_3 4} = 0.5$

$a_{u_2 u_5 3} = 1$ $\quad$ $x_{u_3 4} = 1$ $\quad$ $a_{u_2 u_3 4} = 0.5$

Todo el resto de las variables no especificadas toman valor 0. Es fácil ver que la asignación de colores satisface las ecuaciones de $\mathcal{P}^{\text{exp}}$. Debemos ver que las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color** son válidas en este coloreo. Recordar que las desigualdades **d-Color** dominan a las desigualdades (5.3) que definen a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$.

Los vértices en conflicto son los pares u_1, u_2 y u_4, u_5.

Para el primer par, debemos ver las desigualdades **d-Color**, es decir, que para todo subconjunto S' de M de cardinal $deg(u_1) = deg(u_2) = 3$, se satisface

$\sum_{k \in S'} x_{u_1 k} + x_{u_2 k} + \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} \leq 2|S'| - 1 = 5$

A continuación chequeamos cada una de las desigualdades:

- $S' = \{1, 2, 3\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0.5$
- $S' = \{1, 2, 4\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 3, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0$
- $S' = \{1, 2, 5\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0.5$
- $S' = \{1, 2, 6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0.5$
- $S' = \{1, 3, 4\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 3, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0$
- $S' = \{1, 3, 5\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0.5$
- $S' = \{1, 3, 6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0.5$
- $S' = \{1, 4, 5\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0$
- $S' = \{1, 4, 6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0$
- $S' = \{1, 5, 6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1 k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2 k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1 u_2 k} = 0.5$

- $S' = \{2,3,4\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{2,3,5\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{2,3,6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{2,4,5\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{2,4,6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{2,5,6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 0, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{3,4,5\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{3,4,6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{3,5,6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 0, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{4,5,6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$

Nos falta ver las desigualdades **(d-1)-Color**, es decir, que para todo subconjunto S' de M de cardinal $deg(u_1) - 1 = deg(u_2) - 1 = 2$, se satisface

$$\sum_{k \in S'} x_{u_1k} + x_{u_2k} + \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} \leq 2|S'| = 4$$

A continuación chequeamos cada una de las desigualdades:

- $S' = \{1,2\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{1,3\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{1,4\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 2, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 2, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0$
- $S' = \{1,5\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{1,6\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{2,3\} : \sum_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$

- $S' = \{2,4\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 2, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{2,5\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 0, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{2,6\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 0, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{3,4\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 2, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{3,5\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 0, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{3,6\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 0, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$
- $S' = \{4,5\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{4,6\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 0.5$
- $S' = \{5,6\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_1k} = 0, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_2k} = 0, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_1u_2k} = 1$

Nos falta analizar el par u_4, u_5. Debemos ver que satisface las desigualdades **d-Color**, es decir, para todo subconjunto S' de M de cardinal $deg(u_1) = deg(u_2) = 2$, debe cumplirse que:

$$\sum_{k \in S'} x_{u_4k} + x_{u_5k} + \sum_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} \leq 2|S'| = 4$$

A continuación chequeamos cada una de las desigualdades:

- $S' = \{1,2\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_4k} = 2, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} = 0$
- $S' = \{1,3\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_5k} = 2, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} = 0$
- $S' = \{1,4\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} = 0$
- $S' = \{1,5\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} = 0$
- $S' = \{1,6\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} = 0$
- $S' = \{2,4\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{2,5\}: \sum\limits_{k \in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum\limits_{k \in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum\limits_{k \notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$

- $S' = \{2,6\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{3,4\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{3,5\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{3,6\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{4,5\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{4,6\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{5,6\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$

Por último, nos falta ver las desigualdades **(d-1)-Color**, es decir, que para todo subconjunto S' de M de cardinal $deg(u_1) - 1 = deg(u_2) - 1 = 1$, se satisface

$\sum_{k\in S'} x_{u_1k} + x_{u_2k} + \sum_{k\notin S'} a_{u_1u_2k} \leq 2|S'| = 2$

A continuación chequeamos cada una de las desigualdades:

- $S' = \{1\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 0$
- $S' = \{2\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 1, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{3\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 1, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{4\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{5\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$
- $S' = \{6\}: \sum_{k\in S'} x_{u_4k} = 0, \quad \sum_{k\in S'} x_{u_5k} = 0, \quad \sum_{k\notin S'} a_{u_4u_5k} = 1$

En conclusión, el coloreo definido pertenece a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ y satisface todas las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color**.

Consideremos la desigualdad *blossom* para $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $k = 1$:

$$a_{u_1u_21} + a_{u_1u_31} + a_{u_2u_31} + a_{u_4u_51} = 2.5 > \frac{|S| - 1}{2} = 2$$

El coloreo no satisface la desigualdad *blossom*, es decir, las desigualdades *blossom* no están implicadas por las restricciones que definen a $\mathcal{P}^{\text{exp}}$ y las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color**. $\square$

Veamos a continuación que, bajo ciertas hipótesis, la desigualdad *blossom* induce una cara propia de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Proposición 5.5.3. *Sea un grafo $G = (V, E)$ tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E| - 1$ colores. Consideremos $k_0 \in M$ y S un subconjunto de vértices de cardinal impar, tal que no existe un conflicto de grado 2 entre cualquier par de vértices en S. Si existe un* matching *de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ en $G_{[S]}$ entonces la desigualdad* blossom *sobre ese conjunto de vértices induce una cara propia de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$.*

Demostración. Por hipótesis existe un *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ en $G_{[S]}$. Definimos un coloreo Col donde todas las aristas del *matching* tienen asignado el color k_0 y el resto de las aristas tienen asignado colores distintos.

El coloreo Col es un coloreo propio de aristas ya que el único color que se repite es k_0 y no existen dos aristas con ese color que sean incidentes en un mismo vértice ya que el color fue asignado a un *matching*.

Veamos que en este caso todo par de vértices adyacentes resulta distinguible en el coloreo Col. Analicemos en primer lugar vértices que pertenecen a S. Supongamos que existen dos vértices u y v cuyas aristas incidentes tienen asignado el mismo conjunto de colores. Si el grado de u es mayor o igual a 3, entonces el conjunto de colores de u contiene por lo menos 3 colores y lo mismo para el vértice v. El único color que se repite es k_0 y no se repite entre aristas incidentes a u ya que es un coloreo propio de aristas. Como la cantidad de colores asignados a aristas incidentes a u es al menos 3, entonces existe una arista que tiene asignado un color distinto a k_0 y que es única en su color. Por lo tanto los vértices u y v son distinguibles. Como por hipótesis no existen conflictos de grado 2 en el subgrafo, entonces todos los vértices de S son distinguibles. Para todos los vértices que no pertenecen a S, todas sus aristas tienen asignado un color distinto, por lo que también resultan distinguibles.

Por último vemos que la desigualdad se cumple por igualdad, ya que hay exactamente $\frac{|S|-1}{2}$ aristas con el color k_0:

$$\sum_{uv \in E_{[S]}} a_{uvk_0} = \frac{|S|-1}{2}$$

Dado que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $|E|-1$ colores, entonces existe un coloreo que no utiliza el color k_0. Por lo tanto existen soluciones en $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ que no pertenecen a la cara. En consecuencia, la desigualdad *blossom* define una cara propia del poliedro.

□

Corolario 5.5.0.1. *Dado $S \subset V$, $|S|$ impar y tal que no existe un conflicto de grado 2 entre cualquier par de vértices en S. Para cualquier matching de $G_{[S]}$ de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$, existe un punto en la cara tal que las aristas del matching tienen el mismo color y todas las demás aristas tienen asignado un color distinto.*

Existen grafos para los cuales sabemos que la desigualdad induce una cara propia que no es faceta. Por ejemplo:

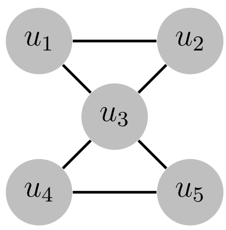


Figura 5.26. Grafo donde el conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ no define faceta blossom.

Consideremos $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $k_0 \in M$. La cara definida por la desigualdad *blossom* exige que 2 aristas utilicen el color k_0. A lo sumo una arista de cada triángulo puede pertenecer al *matching* inducido por k_0. Por lo tanto, todo punto que pertenezca a la cara satisface las siguientes igualdades:

$$a_{u_1u_2k_0} + a_{u_1u_3k_0} + a_{u_2u_3k_0} = 1 \tag{5.66}$$

$$a_{u_3u_4k_0} + a_{u_3u_5k_0} + a_{u_4u_5k_0} = 1 \tag{5.67}$$

Veamos que cada una es linealmente independiente de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define a la cara. Las ecuaciones (5.1) son las únicas en las que aparecen las variables x_{uk}, por lo cual el coeficiente usado para la combinación lineal debe ser nulo. Las ecuaciones (5.2) son las únicas donde aparecen las variables a_{uvk} para $k \neq k_0$, por lo cual el coeficiente usado para la combinación lineal debe ser nulo. Nos queda entonces como única posibilidad que sean múltiplo de la ecuación que define a la cara. Pero esto no es posible ya que en cada caso, faltan variables que están presentes en la ecuación que define la cara. Entonces la desigualdad *blossom* inducida por el conjunto S no define una faceta.

Analizando la estructura del grafo, advertimos que la causa es que existe una partición de las aristas del grafo que suman a lo sumo la cantidad que necesita el *matching* para estar en la cara. Entonces, si en la cara hacen falta $\frac{|S|-1}{2}$ aristas que pertenezcan al *matching* y

$$\exists T \in E_{G_{[S]}} : \nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) = \frac{|S|-1}{2}$$

entonces existirá una ecuación válida para todos los puntos que pertenecen a la cara en donde $\sum_{uv \in T} a_{uvk_0} = \nu(T)$. Por lo tanto, para que la desigualdad defina una faceta será necesario que, en el subgrafo inducido por S, no exista una partición de las aristas con la mencionada propiedad.

A continuación analizamos ciertas propiedades que se satisfacen en el caso que no existe una partición T que cumpla la condición anterior. Estas propiedades nos resultarán útiles cuando demostremos, bajo ciertas hipótesis, que la desigualdad *blossom* define una faceta.

Proposición 5.5.4. *Sea $G = (V, E)$ y $S \subseteq V$ tal que $|S|$ es impar. Supongamos que vale:*

$$\forall\, T \in E_{G_{[S]}} : \nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) > \frac{|S|-1}{2} \tag{5.68}$$

Entonces son válidas las siguientes propiedades:

- *Propiedad B1:* $G_{[S]}$ *es conexo.*
- *Propiedad B2:* $\forall v \in S$, *existe un matching de tamaño* $\frac{|S|-1}{2}$ *en el subgrafo* $G_{[S-\{v\}]}$.
- *Propiedad B3:* $\forall uv \in E_{G_{[S]}}$ *existe un matching de tamaño* $\frac{|S|-1}{2}$ *en el grafo* $G_{[S]}$ *que no utiliza la arista* uv.
- *Propiedad B4: No existe un vértice de corte en* $G_{[S]}$.
- *Propiedad B5: El grado de los vértices en* $G_{[S]}$ *es mayor a 1 .*
- *Propiedad B6: No existe un recubrimiento de vértices de* V *de tamaño* $\frac{|S|-1}{2}$.

Demostración. Vamos a demostrar cada propiedad:

- Propiedad B1: Si existe más de una componente conexa en $G_{[S]}$, entonces consideramos T al conjunto de aristas que pertenecen a una componente conexa. Por lo tanto $\nu(G_{[T]}) \leq \left\lfloor \frac{\left|V_{G_{[T]}}\right|}{2} \right\rfloor$ y $\nu(G_{[\bar{T}]}) \leq \left\lfloor \frac{\left|V_{G_{[\bar{T}]}}\right|}{2} \right\rfloor$. Como uno de ellos tiene una cantidad impar de vértices entonces $\nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) \leq \frac{|S|-1}{2}$. Entonces T no cumple con la propiedad enunciada en las hipótesis.
- Propiedad B2: Consideremos T el conjunto de aristas incidentes al vértice v. Sabemos que $\nu(G_{[T]}) = 1$ y $\nu(G_{[\bar{T}]}) \leq \frac{|S|-1}{2}$. Como por hipótesis se satisface que $\nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) > \frac{|S|-1}{2}$ entonces $\nu(G_{[\bar{T}]}) = \frac{|S|-1}{2}$. Es decir, existe un *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ en el subgrafo $G_{[S-\{v\}]}$.
- Propiedad B3: Sea u el vértice de uno de los extremos de la arista uv. Por la propiedad B2, el subgrafo inducido por $S-\{u\}$ tiene un *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$. Dicho *matching* no contiene la arista uv por lo que podemos afirmar que existe un *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ al que no pertenece la arista uv.

- Propiedad B4: Un vértice de corte es un vértice tal que si se saca del grafo aumenta la cantidad de componentes conexas. Supongamos que existe un vértice v que es un punto de corte en el grafo. Existe un conjunto de vértices W que pertenecen a una componente conexa del subgrafo inducido por $S - \{v\}$. Consideremos T el conjunto de las aristas del subgrafo inducido por $W \cup \{v\}$.

  Afirmamos que $|W|$ no puede ser impar. Por lo visto anteriormente existe un *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ en el subgrafo inducido por $S - \{v\}$ entonces todos los vértices están saturados y el *matching* es perfecto. Si existiera una componente conexa de tamaño impar, no podría existir un *matching* perfecto. Entonces $|W|$ es par.

  Como $|W|$ es par, entonces $\nu(G_{[T]}) \leq \frac{|W|}{2}$ y $\nu(G_{[\bar{T}]}) \leq \frac{|S|-|W|-1}{2}$. Por lo tanto $\nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) \leq \frac{|W|}{2} + \frac{|S|-|W|-1}{2} = \frac{|S|-1}{2}$. Esto contradice las hipótesis, por lo tanto no existe vértice de corte.

- Propiedad B5: Si existiera un vértice de grado 1, entonces el vértice adyacente a él sería un vértice de corte. Como demostramos anteriormente, esto no puede suceder.

- Propiedad B6: Un recubrimiento de vértices, es un conjunto de vértices tal que todas las aristas son incidentes en al menos un vértice del conjunto. Supongamos que existe recubrimiento de vértices $V' \subseteq V$ de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$. Consideremos un vértice cualquiera v que pertenece al recubrimiento y T el conjunto de todas las aristas incidentes a v.

  Entonces $\nu(G_{[T]}) = 1$ y $\nu(G_{[\bar{T}]}) = \frac{|S|-1}{2}$ por la propiedad B2. Dado que $V' - \{v\}$ es un recubrimiento de vértices de $G_{[\bar{T}]}$ de tamaño $\frac{|S|-1}{2} - 1$, no puede existir un *matching* en $G_{[\bar{T}]}$ de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$. Concluimos entonces que no existe un recubrimiento de vértices de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$.

$\square$

5.5.1. Puntos que pertenecen a la cara *blossom*

Nuestro objetivo es demostrar que, bajo ciertas condiciones, la desigualdad *blossom* define una faceta. Para esto, tal como hemos hecho anteriormente, vamos a suponer que existe una igualdad (Π, Π_0) satisfecha por todos los puntos que pertenecen a la cara y demostrar que es combinación del sistema minimal y de la ecuación que define a la cara. En el desarrollo de la demostración vamos a necesitar generar puntos que pertenezcan a la cara y nos permitan validar las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la combinación. Sabemos por el corolario 5.5.0.1 que, a partir de un *matching*, podemos generar un punto que pertenece a la cara. El propósito de las siguientes definiciones y lemas es presentar resultados sobre *matchings* que nos permitirán construir puntos que pertenecen a la cara con determinadas características.

Comenzamos con algunas definiciones asociadas a *matchings*.

Definición 1. *Un matching de un grafo se dice* ***casi perfecto*** *si existe solo un vértice del grafo que no se encuentra saturado por el matching.*

Definición 2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que G es* ***factor crítico*** *si para cada vértice $v \in V$ vale que $G_{[V-\{v\}]}$ tiene un matching perfecto.*

Como vimos en la proposición 5.5.4 los conjuntos de vértices que cumplen la ecuación (5.68) inducen un subgrafo que es factor crítico.

Definición 3. *Un* ***ciclo alternado impar*** *con respecto a un matching $\mathcal{M}$ es un ciclo simple impar tal que uno de los vértices del ciclo no está saturado en el matching $\mathcal{M}$ y para todos los demás vértices se cumple que hay una arista incidente a ellos en el matching que pertenece al ciclo.*

Veamos ahora como, dado un *matching*, la existencia de un ciclo alternado impar nos determina la existencia de caminos alternados respecto al *matching*.

Lema 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, $\mathcal{M}$ un matching, y C un ciclo alternado impar con respecto a $\mathcal{M}$. Sea u el vértice no saturado por $\mathcal{M}$ que pertenece a C. Existe un camino alternado de longitud par y un camino alternado de longitud impar entre u y cualquier vértice del ciclo.*

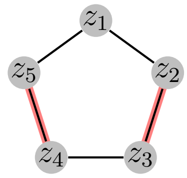


Figura 5.27. Ejemplo de ciclo alternado impar

Demostración. Sea $u = z_1$ y $C = \{z_1, \ldots, z_p, z_1\}$ y z_i un vértice cualquiera. El ciclo alternado impar se puede descomponer en dos caminos alternados $C_1 = \{z_1, \ldots, z_i\}$ y $C_2 = \{z_i, \ldots, z_1\}$. Como lo caminos C_1 y C_2 contienen todas las aristas del ciclo y deben ser una cantidad impar entonces uno debe ser de longitud par y el otro de longitud impar. $\square$

Dado un *matching*, a partir de la propiedad anterior, veamos como se puede construir un nuevo *matching* con determinadas características. Tal como mencionamos anteriormente, esta construcción nos será de utilidad cuando necesitemos construirnos puntos factibles que pertenezcan a la cara definida por una desigualdad *blossom*.

Lema 2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, $\mathcal{M}$ un* matching*, y C un ciclo alternado impar con respecto a $\mathcal{M}$. Para todo vértice v en el ciclo existe un matching $\mathcal{M}'$ tal que $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$, C sigue siendo un ciclo alternado impar y el vértice v no está saturado.*

Demostración. Sea u el vértice perteneciente al ciclo que no está saturado en el *matching* $\mathcal{M}$ y v un vértice cualquiera de C. Existe un camino alternado de longitud par P' entre u y v. Sea $\mathcal{M}'$ el *matching* que resulta de alternar las aristas de P' en $\mathcal{M}$. Es decir, las aristas de P' que no pertenecen a $\mathcal{M}$ pertenecen a $\mathcal{M}'$ y las aristas de P' que no pertenecen a $\mathcal{M}$ pertenecen a $\mathcal{M}'$. Como la cantidad de aristas perteneciente al *matching* $\mathcal{M}'$ es igual al de $\mathcal{M}$ y v no está saturado, entonces el ciclo C es un ciclo alternado impar en el *matching* $\mathcal{M}'$ con el vértice v no saturado. $\square$

Hasta aquí hemos visto como, a partir de un *matching*, podemos generar otros. El propósito de lo que presentamos a continuación es mostrar como, a partir de una caracterización en orejas de un grafo, podemos construir *matchings* con determinadas propiedades.

Comenzamos con algunas definiciones.

Definición 4. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $G' = (V', E')$ un subgrafo de G. Se llama* ***oreja*** *de G con respecto a G' a un camino de G tal que los vértices en sus extremos pertenecen a V' y sus puntos interiores no pertenecen a V', o bien, a un ciclo de G tal que exactamente un vértice corresponde a los vértices en V'.*

Definición 5. *Una oreja es* ***abierta*** *si sus dos extremos son vértices distintos. En el caso que sea un ciclo, se dice que la oreja es* ***cerrada****.*

Definición 6. *Una* ***descomposición de orejas de*** *G* ***comenzando en*** *G' es una representación de G de la forma $G = G' \cup P_1 \cup \cdots \cup P_k$. Donde P_1 es una oreja de $G' \cup P_1$ con respecto a G' y P_i es una oreja de $G' \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$ con respecto a $G' \cup P_1 \cup \cdots \cup P_{i-1}$ para todo $2 \leq i \leq k$.*

Un ejemplo de una descomposición de orejas puede observarse en la figura 5.28.

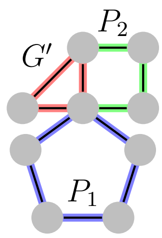


Figura 5.28. El ciclo P_1 es una oreja cerrada respecto a G' y el camino P_2 es una oreja abierta respecto a $G' \cup P_1$. El grafo de la figura se puede descomponer como $G' \cup P_1 \cup P_2$.

El siguiente es un teorema de Lovasz y Plummer [45] que muestra la caracterización de descomposición en orejas.

Teorema 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo factor crítico sin vértice de corte. G se puede descomponer en $P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_r$ tal que $P_0 = K_1$, P_1 es un ciclo impar y cada P_i es una oreja abierta con una cantidad impar de vértices. Además vale que todo $G_i = P_0 \cup \cdots \cup P_i$ es un grafo factor crítico sin vértice de corte.*

Para cada vértice $u \in V$, notamos $O(u)$ al mínimo i tal que P_i contiene al vértice u.

Haciendo uso de esta caracterización, veremos la existencia de *matchings* con determinadas propiedades.

Lema 3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo factor crítico sin vértice de corte y una descomposición de $G = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_r$ tal que $P_0 = K_1$, P_1 es un ciclo impar y cada P_i es una oreja abierta con una cantidad impar de vértices.*

Entonces existe un matching $\mathcal{M}$ de G de cardinal $\frac{|V|-1}{2}$ y un vértice $v \in V$ tal que cada oreja es un camino alternado y v no está saturado por $\mathcal{M}$.

Además, existe un camino alternado de longitud par entre v y cualquier vértice u tal que el camino contiene aristas que pertenecen a $P_0 + \cdots + P_{O(u)}$.

Demostración. Consideramos la descomposición de orejas impares de $G = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_r$ y notamos $G_i = (V_i, E_i) = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$. Definimos el vértice $v = P_0$. Vamos a mostrar que existe un *matching* $\mathcal{M}_i$ de cardinal $\frac{|V_i|-1}{2}$ del grafo G_i tal que, para cada vértice del grafo G_i, existe un camino alternado par desde v. Usamos inducción en i.

Caso base: Sea $G_1 = (V_1, E_1) = P_0 \cup P_1$ es un ciclo impar. Sea Q el camino de longitud impar que surge de sacar el vértice v de V_1. Definimos $\mathcal{M}_1$ como el conjunto de las aristas en posiciones impares. Entonces, $|\mathcal{M}_1| = \frac{|V_1|-1}{2}$. Como G_1 es un ciclo impar, entonces $\mathcal{M}_1$ es un *matching* máximo de G_1 donde v no está saturado. Por el lema 1, podemos afirmar la existencia de los caminos alternados de longitud par entre v y cualquier vértice u con aristas que pertenecen a $P_0 + \cdots + P_{O(u)} = P_0 + P_1$.

Paso inductivo: Sea $G_i = G_{i-1} \cup P_i$. Por el teorema 1, G_i y G_{i-1} son grafos factor crítico sin vértices de corte. Notemos $P_i = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Como P_i es de longitud impar entonces t es par. Además, como P_i es una oreja abierta de G_i con respecto a G_{i-1}, entonces sólo p_1 y p_t son vértices del grafo G_{i-1}. Llamamos P al conjunto de aristas del camino P_i de la forma $p_{2k}p_{2k+1}$. Sea $\mathcal{M}_{i-1}$ el matching de G_{i-1} que existe por hipótesis inductiva. Como ninguna arista de P es incidente a p_1, ni a

p_t ni a ningún vértice de G_{i-1} entonces $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{i-1} \cup P$ es un *matching* de G_i de cardinal $\frac{|V_i|-1}{2}$.

Falta mostrar que existe un camino par entre v y los vértices internos de P_i. Para todos los vértices de la forma p_{2k+1} existe un camino alternado par entre p_1 y p_{2k+1}. Dicho camino puede extender al camino alternado de longitud par entre v y p_1 que existe por hipótesis inductiva. Por lo tanto estos vértices tienen un camino alternado de longitud par en el *matching* $\mathcal{M}_i$.

Para cada vértice de la forma p_{2k} existe un camino alternado de longitud par entre p_t y p_{2k} recorriendo las aristas de la oreja. Este camino puede extender el camino alternado de longitud par entre v y p_t que existe por hipótesis inductiva. Por lo tanto existe el *matching* $\mathcal{M}_i$ con las propiedades requeridas.

Como $G = G_r$ obtenemos que existe un *matching* $\mathcal{M} = \mathcal{M}_r$ que cumple lo pedido.

$\square$

5.5.2. Aristas Π-*equivalentes*

En el caso que una desigualdad *blossom* defina una faceta, entre las relaciones que deben satisfacer los coeficientes de una igualdad (Π, Π_0) válida para los puntos que pertenecen a la cara definida por la desigualdad, se encuentra una relación entre pares de aristas que denominamos Π-*equivalencia*. Los detalles de donde surge esta relación en el contexto de la demostración de faceta, serán explicados más adelante. Por el momento, trabajaremos con la definición de Π-*equivalencia* y demostraremos diferentes conjuntos de aristas que son Π-*equivalentes*.

Definición 7. *Consideremos la cara del poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ inducida por una desigualdad blossom sobre un conjunto de vértices S, con $|S|$ impar, y $k_0 \in M$. Sea (Π, Π_0) la siguiente igualdad satisfecha por todos los puntos de la cara.*

$$\sum_{k \in M} \sum_{uv \in E} \Pi^a_{uvk} a_{uvk} + \sum_{k \in M} \sum_{u \in V} \Pi^x_{uk} x_{uk} = \Pi_0$$

Diremos que dos aristas $uv, u'v' \in E$, $u, v, u', v' \in S$ son Π***-equivalentes*** *si cumplen con la condición:*

$$\Pi^a_{uvk_0} + \Pi^x_{uk_0} + \Pi^x_{vk_0} - \Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1} =$$

$$\Pi^a_{u'v'k_0} + \Pi^x_{u'k_0} + \Pi^x_{v'k_0} - \Pi^a_{u'v'k_1} + \Pi^x_{u'k_1} + \Pi^x_{v'k_1} \qquad \forall k_1 \in M, k_1 \neq k_0$$

El primer resultado que presentamos a continuación caracteriza la Π-*equivalencia* entre aristas que pertenecen a un ciclo alternado impar de un *matching* máximo de $G_{[S]}$.

Lema 4. *Sean $G = (V, E)$ un grafo, $S \subset V$ con $|S|$ impar tal que ningún vértice de S tiene un conflicto de grado 2, $\mathcal{M}$ un matching de $G_{[S]}$ de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ y C un ciclo alternado impar con respecto a $\mathcal{M}$. Consideremos la cara del poliedro $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ inducida por la desigualdad blossom asociada a S y $k_0 \in M$. Si (Π, Π_0) es una igualdad satisfecha por todos los puntos de la cara, entonces todas las aristas de C son* Π-equivalentes.

Demostración. Sea $C = \{z_1, \ldots, z_p\}$ con z_1 el vértice del ciclo no saturado en el *matching* $\mathcal{M}$.

Construimos Col_1 un coloreo que asigna el color k_0 a todas las aristas de $\mathcal{M}$, la arista z_1z_2 tiene asignado el color k_1 y todos las demás aristas del grafo tienen asignado un color distinto. Como los vértices de S no están involucrados en un conflicto de grado 2, por el corolario 5.5.0.1 entonces Col_1 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles.

A partir de Col_1, definimos Col_2 un coloreo que resulta de intercambiar los colores asignados a las aristas z_1z_2 y z_2z_3 y el resto de las aristas conservan su color. Es fácil ver que esta nueva asignación es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Además, este nuevo coloreo también pertenece a la cara ya que los *matchings* tienen el mismo tamaño.

Como la igualdad Π vale en ambos puntos se cumple que:

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

$$\Pi^a_{z_1z_2k_1} + \Pi^x_{z_1k_1} + \Pi^x_{z_2k_1} + \Pi^a_{z_2z_3k_0} + \Pi^x_{z_2k_0} + \Pi^x_{z_3k_0} =$$
$$\Pi^a_{z_1z_2k_0} + \Pi^x_{z_1k_0} + \Pi^x_{z_2k_0} + \Pi^a_{z_2z_3k_1} + \Pi^x_{z_2k_1} + \Pi^x_{z_3k_1}$$

Por lo tanto, las dos aristas adyacentes a z_2 en el ciclo simple impar son Π-*equivalentes.*

Por el lema 2, podemos afirmar que para todo vértice del ciclo impar existe un *matching* tal que no se encuentra saturado. Entonces, por cada vértice del ciclo, considerando un *matching* en el cual no esté saturado, podemos concluir que todas las aristas del ciclo son Π-equivalentes. □

En el próximo lema probamos la Π-*equivalencia* de aristas que distinguen a dos *matchings* de $G_{[S]}$.

Lema 5. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Consideremos la cara del poliedro $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$ inducida por la desigualdad blossom para un conjunto dado de vértices $S \subset V$, con $|S|$ impar, y $k_0 \in M$, $G_{[S]}$ el subgrafo de inducido por los vértices de S y (Π, Π_0) una igualdad satisfecha por todos los puntos de la cara.*

Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ dos matchings de $G_{[S]}$ tales que $|\mathcal{M}_1| = |\mathcal{M}_2| = \frac{|S|-1}{2}$, $|\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2| = |\mathcal{M}_1| - 1$ y existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles tal que las aristas de $\mathcal{M}_1$ tienen el mismo color. Sea $u_1v_1 \in \mathcal{M}_1$ y $u_2v_2 \in \mathcal{M}_2$ tal que $u_1v_1 \notin \mathcal{M}_2$ y $u_2v_2 \notin \mathcal{M}_1$. Si los grados de los vértices u_2 y v_2 son mayores a 2, entonces las aristas u_1v_1 y u_2v_2 son Π-equivalentes.

Demostración. Sea Col_1 el coloreo que asigna el color k_0 a las aristas del *matching* $\mathcal{M}_1$, k_1 a la arista u_2v_2 y todas las demás aristas un color distinto en el grafo. El coloreo existe ya que por hipótesis existía un coloreo válido. Como $|\mathcal{M}_1| = \frac{|S|-1}{2}$ entonces el coloreo pertenece a la cara. Sea Col_2 el coloreo que resulta de alternar los colores de u_1v_1 y u_2v_2. El coloreo Col_2 es un coloreo propio de aristas ya que las aristas coloreadas con k_0 inducen el *matching* $\mathcal{M}_2$. Veamos que además los vértices adyacentes son distinguibles. La arista u_1v_1 tiene un color único en el grafo, por lo que no puede producirse un conflicto. La arista u_2v_2 puede tener un conflicto entre u_2 y alguno de sus vecinos, o entre v_2 y sus vecinos.

Supongamos que u_2 es adyacente a u'_2 y tienen el mismo grado. Como el grado de u_2 es mayor a dos existe otro vértice u''_2 tal que el color de la arista $u_2u''_2$ es único en el grafo y distingue a u_2 de u'_2. El caso para v_2 y sus vecinos es análogo.

Por lo tanto, Col_2 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Además, pertenece a la cara ya que $|\mathcal{M}_2| = \frac{|S|-1}{2}$ y todas las aristas de $\mathcal{M}_2$ tienen asignado el color k_0.

Considerando la igualdad Π, que por hipótesis se satisface para todo punto que pertenezca a la cara, y las diferencias entre los coloreos C_1 y C_2 se obtiene:

$$\Pi^a_{u_1v_1k_0} + \Pi^x_{u_1k_0} + \Pi^x_{v_1k_0} - \Pi^a_{u_2v_2k_1} + \Pi^x_{u_2k_1} + \Pi^x_{v_2k_1} =$$
$$\Pi^a_{u_2v_2k_0} + \Pi^x_{u_2k_0} + \Pi^x_{v_2k_0} - \Pi^a_{u_1v_1k_1} + \Pi^x_{u_1k_1} + \Pi^x_{v_1k_1}$$

Por lo tanto, las aristas u_1v_1 y u_2v_2 son Π-equivalentes. □

Siguiendo con la caracterización de aristas Π-*equivalentes*, el próximo resultado comprueba la Π-*equivalencia* entre aristas de subgrafos de $G_{[S]}$ con ciertas propiedades.

Lema 6. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Consideremos la cara del poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ inducida por la desigualdad blossom para un conjunto dado de vértices S, con $|S|$ impar, y $k_0 \in M$, $G_{[S]}$ el subgrafo de G inducido por los vértices de S y (Π, Π_0) una igualdad satisfecha por todos los puntos que pertenecen a la cara. Asumimos además que no existe conflicto de grafo 2 entre pares de vértices que pertenecen a S.*

Sea H un subgrafo de $G_{[S]}$ y P un camino en $G_{[S]}$ que cumplen:

- *H es un grafo factor crítico sin vértice de corte.*
- *Todas las aristas de H son Π-equivalentes.*
- *P tiene longitud impar.*

- *Los extremos de P son vértices distintos y son los únicos que pertenecen a los vértices de H.*
- *Existe un matching $\mathcal{M}$ casi perfecto de $G_{[S]}$ tal que existe un vértice v perteneciente a H que no está saturado, el camino P es alternado y existe un camino de longitud par entre v y cualquier vértice de H que no incluye a los vértices de P.*

Entonces todas las aristas de $H \cup P$ son Π-equivalentes.

Demostración. Sea $p_1, \ldots, p_t$ una enumeración de los vértices del camino P. Como P tiene longitud impar, entonces t es par. Primero vamos a mostrar que las aristas de la forma $p_{2k-1}p_{2k}$ son Π-*equivalentes* a las aristas $p_{2k}p_{2k+1}$.

En el *matching* $\mathcal{M}$ existe un camino alternado par Q_1 entre v y p_1 que no utiliza aristas de P. Existe un camino alternado de longitud par Q_2 entre p_1 y p_{2k-1} (ya que P era un camino alternado y ambos vértices están en posiciones impares). Sea Q el camino que surge de extender el camino Q_1 por Q_2. Si se alternan las aristas de Q se obtiene un *matching* $\mathcal{M}_1$ tal que el vértice p_{2k-1} no está saturado. Sea $\mathcal{M}_2$ el *matching* que surge de sacar la arista $p_{2k}p_{2k+1}$ de $\mathcal{M}_1$ y agregar la arista $p_{2k-1}p_{2k}$. Sea Col_1 el coloreo que surge de asignar el color k_0 a las aristas del *matching*, k_1 a la arista $p_{2k-1}p_{2k}$ y todas las demás aristas de color único. Como entre los vértices de S no existen conflictos de grado 2, es válido el corolario 5.5.0.1. Entonces Col_1 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara.

Usando el lema 5 con los *matchings* $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, concluimos que $p_{2k-1}p_{2k}$ y $p_{2k}p_{2k+1}$ son Π-*equivalentes.*

Veamos ahora que las aristas de la forma $p_{2k}p_{2k+1}$ son Π-*equivalentes* a las aristas $p_{2k+1}p_{2k+2}$.

En el *matching* $\mathcal{M}$ existe un camino alternado par Q_1 entre v y p_t que no utiliza aristas de P. Existe un camino alternado de longitud par Q_2 entre p_t y p_{2k+2} (ya que P era un camino alternado y ambos vértices están en posiciones pares). Sea Q el camino que surge de extender el camino Q_1 por Q_2. Si se alternan las aristas de Q se obtiene un *matching* $\mathcal{M}_1$ tal que el vértice p_{2k+2} no está saturado. Sea

$\mathcal{M}_2$ el *matching* que surge de sacar la arista $p_{2k}p_{2k+1}$ de $\mathcal{M}_1$ y agregar la arista $p_{2k+1}p_{2k+2}$.

Sea Col_1 el coloreo que surge de asignar el color k_0 a las aristas del *matching*, k_1 a la arista $p_{2k+1}p_{2k+2}$ y todas las demás aristas de color único. Como entre los vértices de S no existen conflictos de grado 2, es válido el corolario 5.5.0.1. Entonces Col_1 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara.

Usando el lema 5 con los *matchings* $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ vale que $p_{2k-1}p_{2k}$ y $p_{2k}p_{2k+1}$ son Π-*equivalentes*.

Por lo tanto, todas las aristas del camino P son Π-*equivalentes*.

En el *matching* $\mathcal{M}$ existe un camino alternado par Q_1 entre v y p_1 que no utiliza aristas de P. Existe un camino alternado de longitud par Q_2 entre p_1 y p_{t-1} (ya que P era un camino alternado y ambos vértices están en posiciones impares). Sea Q el camino que surge de extender el camino Q_1 por Q_2. Si se alternan las aristas del camino par se obtiene un *matching* $\mathcal{M}_1$ tal que el vértice p_{t-1} no está saturado. El vértice p_t es incidente a una arista del *matching* ya que $\mathcal{M}_1$ es un *matching* casi perfecto. Sea p_tt' dicha arista. Como p_{t-1} es la única arista del camino P adyacente a p_t entonce $t' \notin P$. Sea $\mathcal{M}_2$ el *matching* que surge de sacar la arista p_tt' de $\mathcal{M}_1$ y agregar la arista $p_{t-1}p_t$.

Sea Col_1 el coloreo que surge de asignar el color k_0 a las aristas del *matching*, k_1 a la arista $p_{t-1}p_t$ y todas las demás aristas con un color único. Como entre los vértices de S no existen conflictos de grado 2, es válido el corolario 5.5.0.1. Entonces Col_1 es un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara.

Usando el lema 5 con los *matchings* $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ vale que $p_{t-1}p_t$ y p_tt' son Π-*equivalentes*.

Por lo tanto las aristas de P y las aristas de H son Π-*equivalentes*.

$\square$

Para concluir con los resultados de Π-*equivalencia*, probaremos que las aristas de $G_{[S]}$ son Π-*equivalentes*. Este es la propiedad principal que usaremos más adelante cuando demostremos la condición de faceta de la desigualdad *blossom*.

Proposición 5.5.5. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Consideremos la cara del poliedro $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$ inducida por la desigualdad blossom para un conjunto dado de vértices S, con $|S|$ impar, y $k_0 \in M$, $G_{[S]}$ el subgrafo de G inducido por los vértices de S y (Π, Π_0) una igualdad satisfecha por todos los puntos que pertenecen a la cara.*

Supongamos que vale:

- *No existen dos vértices en S de grado 2 que estén en conflicto.*
- $\forall T \subset E_{[S]} : \nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) > \frac{|S|-1}{2}$

Entonces todas las aristas de $G_{[S]}$ son Π-equivalentes.

Demostración. Por la proposición 5.5.4 $G_{[S]}$ es factor crítico sin vértice de corte. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de Lovasz y Plummer [45], existe una descomposición en orejas.

Sea $G_{[S]} = P_0 \cup P_1 + \cup P_2 \cup \cdots \cup P_r$ tal que $P_0 = K_1$, P_1 es una oreja ciclo impar y cada oreja P_i es un camino impar abierto. Por el lema 3 podemos afirmar que existen $v \in S$ y un *matching* $\mathcal{M}$ de $G_{[S]}$ de cardinal $\frac{|S|-1}{2}$ tal que existe un camino alternado de longitud par entre v y cualquier vértice del grafo y cada oreja es un camino alternado.

Vamos a probar la Π-*equivalencia* de las aristas de $G[S]$ por inducción en la descomposición del grafo.

Caso base $G_1 = P_0 \cup P_1$. En este caso G_1 es un ciclo alternado impar en el *matching* $\mathcal{M}$, por el lema 4 todas las aristas son Π-*equivalentes*.

Paso inductivo. Supongamos que vale que todas las aristas de G_{i-1} son Π-*equivalentes*.

Veamos que podemos aplicar el lema 6 en el grafo G_{i-1} y el camino P_i.

- G_{i-1} y P_i son subgrafos de $G_{[S]}$.

- G_{i-1} es un grafo factor crítico sin vértice de corte por el teorema 1.
- Todas las aristas de G_{i-1} son Π-*equivalentes* por hipótesis inductiva.
- P tiene longitud impar por el teorema 1.
- P es una oreja abierta por el teorema 1 por lo tanto los extremos de P son vértices distintos y son los únicos que pertenecen a los vértices de G_{i-1}.
- Por el lema 3 existe un *matching* $\mathcal{M}$ casi perfecto de $G_{[S]}$ tal que existe un vértice v de G_{i-1} que no está saturado, el camino P_i es alternado y existe un camino de longitud par entre v y cualquier vértice de G_{i-1} que no incluye a los vértices de P_i.

Por lo tanto, todas las aristas del grafo $G_i = G_{i-1} \cup P_i$ son Π-*equivalentes.*

Como $G[S] = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_r$ obtenemos que todas las aristas de $G[S]$ son Π-*equivalentes.*

□

5.5.3. Faceta *blossom*

Las definiciones y resultados presentados anteriormente sirven para demostrar el resultado principal sobre la condición de faceta de la desigualdad *blossom.*

Proposición 5.5.6. *Sea un grafo $G = (V, E)$ tal que existe un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que utiliza $m-1$ colores. Consideremos $S \subset V$ un conjunto de vértices de cardinal impar mayor o igual a 5, $k_0 \in M$ y la desigualdad* blossom*:*

$$\sum_{uv \in E_{[S]}} a_{uvk_0} \leq \frac{|S|-1}{2}$$

siendo $G_{[S]}$ al subgrafo inducido por los vértices de S y $E_{[S]}$ el conjunto de aristas entre los vértices de S. Supongamos que:

- *No existen dos vértices en S de grado 2 que estén en conflicto*

- $\forall T \subset E_{[S]} : \nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) > \frac{|S|-1}{2}$

Entonces la desigualdad blossom *define una faceta de* $\mathcal{P}^{\exp}_{\mathcal{AVDEC}}$.

Demostración. Notemos que debido a las hipótesis, podemos afirmar que la cara es propia y que, a partir de cualquier *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ podemos construir un punto que pertenece a la cara (corolario 5.5.0.1, proposición 5.5.4).

En primer lugar veamos que las condiciones son necesarias.

- Sean u y v dos vértices de grado 2 en conflicto que pertenecen a S. Entonces existe $u' \in N(u)$ y $v' \in N(v)$ tal que $u' \neq v$ y $v' \neq u$. Dado que u y v deben ser distinguibles y las aristas adyacentes no comparten color entonces para todo color k se satisface $a_{uu'k} + a_{uvk} + a_{vv'k} \leq 1$.

  Es decir, como la arista uv es incidente a las otras dos, entonces no puede compartir el color k con ninguna de ellas. Por otro lado, las aristas uu' y vv' no pueden compartir el color k ya que u y v no serían distinguibles.

  Afirmamos que, en el caso de coloreos que pertenezcan a la cara, se satisface la siguiente igualdad :

  $$a_{uu'k_0} + a_{uvk_0} + a_{vv'k_0} = 1$$

  Si $a_{uu'k_0} + a_{uvk_0} + a_{vv'k_0} = 0$ entonces u y v no son incidentes al color k_0. Para pertenecer a la cara debe existir un *matching* en $G_{[S]}$ de cardinal $\frac{|S|-1}{2}$ cuyas aristas tengan asignado el color k_0. Por lo tanto a lo sumo un vértice puede no tener una arista incidente con color k_0. Entonces no existe un punto en la cara tal que la suma es 0.

  Esta ecuación es linealmente independiente de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define la cara.

  Las ecuaciones (5.1) son las únicas en las que aparecen las variables x_{uk}, por lo cual el coeficiente usado para la combinación lineal debe ser nulo. Las ecuaciones (5.2) son las únicas donde aparecen las variables a_{uvk} para $k \neq k_0$, por lo cual el coeficiente usado para la combinación lineal debe ser nulo. Nos queda entonces como única posibilidad que sean múltiplo de la ecuación que define a la cara. Pero esto no es posible ya que en cada caso, faltan variables que están presentes en la ecuación que define la cara ($|S| > 3$). Entonces la desigualdad *blossom* inducida por el conjunto S no define una faceta.

- Supongamos que existe una partición de aristas T tal que $\nu(G_{[T]})+\nu(G_{[\bar{T}]}) \leq \frac{|S|-1}{2}$.

  - Si $\nu(G_{[T]}) + \nu(G_{[\bar{T}]}) = \frac{|S|-1}{2}$. Todo punto en la cara cumple que el subgrafo inducido por las aristas de T y de $\bar{T}$ tiene una cantidad de aristas asignadas con el color k_0 equivalente al *matching* máximo. Entonces obtenemos la igualdad:

$$\sum_{uv \in T} a_{uvk_0} = \nu(G_{[T]})$$

    Esta ecuación el linealmente independiente de las ecuaciones del sistema minimal y de la ecuación que define la cara (deducción similar al caso anterior).

  - Si $\nu(G_{[T]})+\nu(G_{[\bar{T}]}) < \frac{|S|-1}{2}$. Como $\nu(G_{[T]})+\nu(G_{[\bar{T}]}) \geq \nu(G_{[S]})$ entonces resulta que $\nu(G[S]) < \frac{|S|-1}{2}$. Pero dadas las hipótesis sabemos que existe un *matching* de este tamaño en el grafo $G_{[S]}$. Por lo tanto no puede ocurrir este caso.

Veamos ahora que estas condiciones son suficientes para demostrar que la desigualdad *blossom* define una faceta de $\mathcal{P}^{\text{exp}}_{\mathcal{AVDEC}}$. Para eso, demostraremos que cualquier igualdad válida para la cara definida por la desigualdad (5.65) es una combinación lineal del sistema:

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in N(u)} a_{uvk} = x_{uk} && \forall u \in V \wedge k \in M \\
&\sum_{k \in M} a_{uvk} = 1 && \forall uv \in E \\
&\sum_{uv \in S} a_{uvk_0} = \frac{|S|-1}{2}
\end{aligned}$$

Consideramos la siguiente igualdad válida en la cara:

$$\Pi = \sum_{\substack{uv\in E\\ k\in M}} \Pi^a_{uvk} a_{uvk} + \sum_{\substack{u\in V\\ k\in M}} \Pi^x_{uk} x_{uk} = \pi_0$$

Sean α_{uk}, β_{uv} y δ los multiplicadores asociados a cada una de las ecuaciones respectivamente.

Si Π fuera una combinación lineal de las igualdades entonces debería cumplirse que:

$$\Pi^x_{uk} = -\alpha_{uk} \qquad \forall u \in V, \forall k \in M \tag{5.69}$$

$$\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} \qquad \text{Si } u \notin S \vee v \notin S \tag{5.70}$$

$$\Pi^a_{uvk} = \alpha_{uk} + \alpha_{vk} + \beta_{uv} \qquad \text{Si } \{u,v\} \subset S \wedge k \neq k_0 \tag{5.71}$$

$$\Pi^a_{uvk_0} = \alpha_{uk_0} + \alpha_{vk_0} + \beta_{uv} + \delta \qquad \text{Si } \{u,v\} \subset S \tag{5.72}$$

Sean $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ dos vértices adyacentes pertenecientes a S y sea $k_1 \neq k_0$. Definimos los siguientes multiplicadores :

- α_{uk} a partir (5.69): $\alpha_{uk} = -\Pi^x_{uk} \forall u \in V, k \in M$
- β_{uv} a partir de (5.70) y (5.71) y $k = k_1$: $\beta_{uv} = \Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1}$
- δ a partir de (5.72) y $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$:$\delta = \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k_0} + \Pi^x_{\tilde{u}k_0} + \Pi^x_{\tilde{v}k_0} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k_1} + \Pi^x_{\tilde{u}k_1} + \Pi^x_{\tilde{v}k_1}$

Para demostrar que esta definición de los multiplicadores es consistente se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Si u y v no pertenecen los dos a S entonces β_{uv} no dependen del color k_1.

$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \in M, k \neq k_1} \tag{CB1}$$

2. Si $\{u,v\} \subset S$ entonces β_{uv} no dependen del color k_1.

$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \neq k_0, k_1} \tag{CB2}$$

3. δ no depende de la arista $\tilde{u}\tilde{v}$.

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k_0} + \Pi^x_{\tilde{u}k_0} + \Pi^x_{\tilde{v}k_0} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k_1} + \Pi^x_{\tilde{u}k_1} + \Pi^x_{\tilde{v}k_1} =}$$
$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvk_0} + \Pi^x_{uk_0} + \Pi^x_{vk_0} - \Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1} \quad \forall uv \in E, \{u, v\} \subset S} \tag{CB3}$$

A continuación demostraremos la validez de cada una de las identidades derivadas.

- **CB1:**

$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \quad \forall k \neq k_0, k_1, |\{u, v\} \cap S| \leq 1}$$

Supongamos $u \notin S$ ($v \notin S$ es análogo). Analizamos diferentes casos:

- $k \neq k_1, k_0$. Consideramos un coloreo Col_1 que no utiliza el color k en el grafo y el único color asignado a más de una arista es k_0 que se repite en las aristas de un *matching* de $G_{[S]}$ de cardinal $\frac{|S|-1}{2}$. Como ya vimos, dadas las hipótesis, Col_1 resulta un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara.

  Suponemos que la arista uv tiene asignado el color k_1. A partir de Col_1, nos construimos el coloreo Col_2 que cambia el color de la arista uv al color k. Ya que $u \notin S$, la arista tiene asignado un color único k_1 distinto a k_0. Como k no era utilizado en el coloreo Col_1, no puede presentarse ningún conflicto por cambiar el color y es un coloreo propio de aristas. Además, como tampoco cambiamos los colores de las aristas que tienen asignado el color k_0 entonces, Col_2 pertenece a la cara. Teniendo en cuenta que Col_1 y Col_2 difieren sólo en el color de la arista uv, la diferencia en los valores de las variables (X, A) asociadas a Col_1 y Col_2 son:

  $a^{Col_1}_{uvk_1} = 1$, $x^{Col_1}_{uk_1} = 1$, $x^{Col_1}_{vk_1} = 1$
  $a^{Col_2}_{uvk} = 1$, $x^{Col_2}_{uk} = 1$, $x^{Col_2}_{vk} = 1$

  Como los dos coloreos pertenecen a la cara, satisfacen

$$\Pi^a a^{Col_1} + \Pi^x x^{Col_1} = \Pi^a a^{Col_2} + \Pi^x x^{Col_2}$$

y por la diferencia de los valores entre las variables, concluimos que:

$$\Pi^{a}_{uvk_1} + \Pi^{x}_{uk_1} + \Pi^{x}_{vk_1} = \Pi^{a}_{uvk} + \Pi^{x}_{uk} + \Pi^{x}_{vk} \qquad \forall k \in M, k \neq k_1, k_0$$

- $k = k_0$.

  Si $v \in S$ definimos Col_1 un coloreo basado en un *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ en el subgrafo $G_{[S-\{v\}]}$ (existe por proposición (5.5.4)) donde k_0 es el color asignado a todas las aristas del *matching* y el resto de las aristas tiene colores distintos. Sin pérdida de generalidad, suponemos que la arista uv tiene asignado el color k_1. A partir de Col_1, definimos un nuevo coloreo Col_2 que se obtiene al cambiar el color de la arista uv al color k_0. Como u y v no tienen una arista incidente del color k_0 entonces Col_2 es un coloreo propio de aristas. Los únicos conflictos que pueden verse afectados por este cambio son los que involucren a u o v. Analicemos que ocurre. Si $z \notin S$ tiene conflicto con u o v, ninguna arista incidente a z tiene asignado k_0, y todas son únicas en su color por lo que los vértices resultan distinguibles. Si $z \in S$ tiene conflicto con u, como el grado de z en el subgrafo $G_{[S]}$ es mayor o igual a 2 (propiedad B5), entonces existe una arista incidente a z única en su color que no tiene asignado el color k_0. Entonces z es distinguible de u por ese color. Por último si v está en conflicto con $z \in S$, como el grado de v es mayor o igual a 2 en el subrafo $G_{[S]}$ entonces v tiene por lo menos otro vecino $\tilde{z} \in S$. Como los colores asignados a vz y $v\tilde{z}$ son únicos y distintos a k_0, entonces v se distingue de z por el color de la arista $v\tilde{z}$.

  Si $v \notin S$ entonces consideramos cualquier coloreo Col_1 que pertenezca a la cara que asigne el color k_1 a la arista uv. A partir de Col_1 nos construimos el coloreo Col_2 donde a la arista uv le asignamos el color k_0 y el resto de las aristas no cambian de color. Como u y v no pertenecen a S, entonces ninguna arista incidente a ellos tiene asignado el color k_0 en Col_1, por lo cual Col_2 es un coloreo propio de aristas. Los únicos conflictos que pueden verse afectados por este cambio son los que involucren a u o v. Si $z \notin S$ y está en conflicto con u o v, entonces no tiene ninguna arista incidente con color k_0 y por lo tanto se distinguen por ese color. Si $z \in S$ entonces como z tiene grado mayor o igual 2 en el subgrafo $G_{[S]}$, entonces tiene una arista incidente con un color distinto a k_0. Como el único color repetido en los coloreos es k_0, entonces se distinguen por ese color.

En conclusión, en todos los casos nos hemos construido dos coloreos donde la diferencia entre ellos es el color de la arista uv. Siguiendo el mismo razonamiento sobre la diferencia entre las variables de ambos coloreos que hicimos para $k \neq k_0$, llegamos a la ecuación requerida.

- **CB2:**

$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1} = \Pi^a_{uvk} + \Pi^x_{uk} + \Pi^x_{vk} \qquad \forall k \neq k_0, k_1, u, v \in S}$$

Por la propiedad B3, existe un *matching* de tamaño $\frac{|S|-1}{2}$ en el subgrafo $G_{[S]}$ que no utiliza la arista uv. Definimos un coloreo Col_1 tal que las aristas del *matching* tienen asignado el color k_0 y el resto de las aristas tiene un color único. Sin pérdida de generalidad, asumimos que la arista uv tiene asignado el color k_1 y no se utiliza el color k ya que al menos dos aristas repiten el color k_0. A partir de Col_1 nos construimos un coloreo donde a la arista uv le asignamos el color k y el resto de las aristas conservan su color. Como $k, k_1 \neq, k_0$, la nueva asignación define un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles que pertenece a la cara.

En conclusión, la diferencia entre los dos coloreos es el color de la arista uv. Siguiendo el mismo razonamiento sobre la diferencia entre las variables de ambos coloreos que hicimos en el caso anterior, llegamos a la ecuación requerida.

- **CB3:**

$$\boldsymbol{\Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k_0} + \Pi^x_{\tilde{u}k_0} + \Pi^x_{\tilde{v}k_0} - \Pi^a_{\tilde{u}\tilde{v}k_1} + \Pi^x_{\tilde{u}k_1} + \Pi^x_{\tilde{v}k_1} =}$$
$$\boldsymbol{\Pi^a_{uvk_0} + \Pi^x_{uk_0} + \Pi^x_{vk_0} - \Pi^a_{uvk_1} + \Pi^x_{uk_1} + \Pi^x_{vk_1} \quad \forall uv \in E, \{u, v\} \subset S}$$

Esta condición es la que hemos definido en la sección 5.5.2 como $\Pi-$*equivalencia*. Es decir, para cada par de aristas en $G_{[S]}$ queremos mostrar que son Π-*equivalentes*. Por hipótesis sabemos que se cumplen las condiciones necesarias para la proposición 5.5.5. Entonces todas las aristas de $G_{[S]}$ son Π-*equivalentes*.

Por lo tanto la definición de los multiplicadores es consistente. Entonces, toda igualdad válida en la cara definida por la desigualdad (5.65) resulta combinación lineal del sistema minimal y de la ecuación que define la cara, utilizando los multiplicadores determinados.

Bajo las hipótesis mencionadas concluimos que la desigualdad (5.65) induce una faceta en el poliedro.

□

5.6. Desigualdades válidas para el modelo POLI

A lo largo de este capítulo hemos caracterizado desigualdades para el modelo **EXP** y mostramos que inducen facetas en el poliedro asociado bajo ciertas condiciones. En esta sección nos enfocaremos en el poliedro asociado al modelo **POLI**, el que tiene una cantidad de restricciones de orden polinomial con respecto al tamaño del grafo.

Recordamos que el modelo **POLI** tiene variables binarias de tres tipos: a_{uvk} (indica que la arista uv tiene asignado el color k), x_{uk} (representa que una arista incidente a u tiene asignado color k) y para vértices u, v en conflicto, w_{uvk} (denota que los vértices u, v difieren en el color k).

La primera observación es que las facetas del modelo **EXP** también resultan desigualdades válidas para el modelo **POLI**, ya que utilizan las variables que están presentes en ambos modelos. Sin embargo, no hemos podido determinar si definen facetas en el modelo **POLI**, pues no tenemos una descripción del sistema minimal de ecuaciones asociado al poliedro.

A pesar de la dificultad de poder caracterizar el sistema minimal, pudimos encontrar desigualdades válidas y una igualdad válida bajo ciertas condiciones.

5.6.1. Igualdad válida

Consideremos $u, v \in V$, $uv \in E$ tal que $deg(u) = deg(v) = 2$. Sean $u' \in N(u)$, $u' \neq v$ y $v' \in N(v)$, $v' \neq u$. La siguiente ecuación es satisfecha por todos los puntos del poliedro asociado al modelo **POLI**:

$$w_{uvk} = a_{uu'k} + a_{vv'k} \qquad \forall_{\substack{uv \in E \; deg(u)=deg(v)=2 \\ uu', vv' \in E}}$$

Como los vértices tienen grado 2, entonces las aristas uu' y vv' deben tener asignado colores diferentes. Por lo tanto, si los vértices difieren en el color k, entonces alguna arista incidente a los vértices en conflicto debe tener el color k. Si los vértices no difieren en el color k, entonces ninguna de las dos aristas uu' y vv' pueden tener asignado el color k.

5.6.2. Desigualdades válidas

Caracterizamos 4 familias de desigualdades válidas que no están implicadas por las restricciones del modelo y que pueden ser utilizadas para mejorar la relajación lineal del modelo **POLI**.

- **Desigualdad 1:** Esta desigualdad es una versión reforzada de la restricción (3.2):

  $$w_{uvk} + 2a_{uvk} \leq x_{uk} + x_{vk} \qquad \forall k \in M, uv \in E, deg(u) = deg(v)$$

  Si ambas variables del lado izquierdo de la desiguldad son nulas, la desigualdad es trivialmente válida. Si la arista uv tiene el color k, entonces estos vértices no pueden diferir en el color k y ambos lo utilizan. Si la arista uv no tiene el color k y los vértices difieren en el color k, entonces uno de ellos tiene una arista incidente que tiene asignado el color k.

- **Desigualdad 2:** Consideremos un subgrafo K_3 con vértices u_1, u_2 y u_3 tal que $deg(u_1) = deg(u_2) = deg(u_3)$. Si una arista u_1u_2 del subgrafo tiene asignado el color k, entonces los dos vértices incidentes, u_1 y u_2, tienen el color k en su conjunto de colores. Por lo tanto el tercer vértice del subgrafo, u_3, difiere en el color k con ambos o con ninguno de ellos. La siguiente desigualdad está basada en esta propiedad:

$$a_{u_1u_2k} + w_{u_1u_3k} \leq 1 + w_{u_2u_3k} \qquad \begin{array}{c} \forall k \in M, u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3 \in E \\ deg(u_1) = deg(u_2) = deg(u_3) \end{array}$$

- **Desigualdad 3:** De manera similar al caso anterior, si u_1 y u_2 difieren en el color k, entonces u_3 difiere con al menos uno de ellos en ese color. Esto se modela con la siguiente desigualdad:

$$w_{u_1u_2k} \leq w_{u_1u_3k} + w_{u_2u_3k} \qquad \begin{array}{c} \forall k \in M, u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3 \in E \\ deg(u_1) = deg(u_2) = deg(u_3) \end{array}$$

- **Desigualdad 4:** Consideremos un vértice z tal que $\{u, v\} \subseteq N(z)$, $uv \in E$ y $deg(u) = deg(v)$. Si una de las aristas incidentes a z y a u o v tiene asignado el color k, entonces los vértices u, v se distinguen en el color k o hay alguna otra arista incidente a ellos que utiliza el color k. Esto se modela con la siguiente desigualdad:

$$a_{uzk} + a_{vzk} \leq w_{uvk} + \sum_{\substack{u'v' \in E \\ u' \in \{u,v\} \\ v' \neq u,v,z}} a_{u'v'k} \qquad \forall k \in M, z \in V, \{u, v\} \subseteq N(z),$$

$$uv \in E, \; deg(u) = deg(v)$$

Otra manera de expresarla:

$$2a_{uzk} + 2a_{vzk} + 2a_{uvk} \leq w_{uvk} + x_{uk} + x_{vk} \quad \forall k \in M, z \in V, \{u, v\} \subseteq N(z),$$
$$uv \in E,\ deg(u) = deg(v)$$

6. Algoritmo *Branch and Cut*

En este capítulo presentamos el algoritmo *Branch and Cut* desarrollado para resolver el problema **AVDSECP**.

Los algoritmos *Branch and Cut* consisten en la utilización de una técnica algorítmica conocida como *backtracking*. El algoritmo recorre un árbol de problemas donde cada nodo del árbol representa un subproblema del problema original. En cada nodo se resuelve la relajación lineal del subproblema que representa y, en función de los resultados, decide si ramificar el nodo o cerrarlo.

Las cotas inferiores van a ser muy importantes para reducir el tamaño del árbol, ya que podrían indicar que no hay necesidad de explorar ciertas ramas (poda). En nuestro contexto, la cota inferior asociada a un nodo corresponde al valor de la función objetivo de la relajación lineal del subproblema que representa. De aquí la importancia de tener relajaciones lo más ajustadas posibles.

En el capítulo 5 presentamos una serie de desigualdades válidas para los dos modelos, que utilizaremos como planos de corte dentro del algoritmo *Branch and Cut*. Por lo tanto, debemos contar con algoritmos de separación para ir agregándolos dinámicamente a la formulación y, de esta manera, reforzar las relajaciones bajo demanda. Si bien los cortes permiten reducir el tamaño del poliedro, a veces esto no se refleja directamente en el rendimiento del algoritmo, ya que las rutinas de separación requieren de un tiempo de cómputo adicional. En algunos casos conviene utilizar políticas de inserción de cortes particulares. Este delicado equilibrio entre *refuerzo vs tiempo* debe ser tenido en cuenta.

Además, es importante contar con cotas superiores para el problema. Estas cotas, en conjuntos con las cotas inferiores, nos posibilitan descartar los nodos que no resulten prometedores. Para obtener cotas superiores, utilizaremos una de las heurísticas presentadas en el capítulo 4. Además de proveer una solución inicial, también nos permiten encontrar soluciones en nodos intermedios del árbol utilizando información del subproblema asociado.

En este capítulo detallamos el desarrollo propuesto para nuestro algoritmo *Branch and Cut*, analizando cada una de sus componentes.

6.1. Planos de Corte

El estudio poliedral sobre el problema proporcionó un conjunto de desigualdades que son válidas tanto para el modelo **POLI** como para el modelo **EXP**. Además vimos que, en el caso del poliedro asociado a **EXP**, existen 3 familias de desigualdades que inducen facetas.

Ahora nuestro objetivo es utilizar estas desigualdades como planos de corte dentro de un algoritmo *Branch and Cut*. Al resolver la relajación lineal en un nodo del árbol de *Branch and Cut* nos interesa saber si existe una desigualdad válida que es violada por el punto fraccionario óptimo de la relajación lineal y, en caso de que existiera alguna, agregala al modelo. Hay dos cuestiones a resolver para convertir una desigualdad válida en un corte eficaz. Primero, se debe tener un algoritmo eficiente para decidir qué desigualdades están violadas por el óptimo de la relajación lineal. Es decir, dado un punto fraccionario se deben encontrar las desigualdades que no se satisfacen en dicho punto.

El segundo tema a resolver es decidir el criterio para agregar estas desigualdades como planos de cortes. Podría ocurrir que la cantidad de desigualdades violadas en puntos fraccionarios sea muy grande. Si bien agregar desigualdades al modelo ayuda a descartar puntos fraccionarios, a veces puede resultar contraproducente, pues el tiempo necesario para resolver la relajación lineal crece en función del tamaño del modelo (cantidad de restricciones en este caso).

A continuación describiremos los algoritmos desarrollados para encontrar desigualdades violadas de cada una de las familias.

6.1.1. Desigualdades válidas para el modelo POLI

En la sección 5.6 mostramos desigualdades válidas para el modelo **POLI**. La cantidad de estas desigualdades está acotada por el cubo de la cantidad de vértices del grafo. Esta cota nos permite para estas familias buscar los cortes de forma exhaustiva, es decir, recorrer todas las ternas posibles de vértices buscando desigualdades violadas.

6.1.2. Desigualdades válidas d-Color

En la sección 5.3 estudiamos desigualdades basadas en un par de vértices $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ en conflicto. Para cada conflicto se debe seleccionar un conjunto de colores de tamaño $deg(\tilde{u})$ para definir la desigualdad.

Mientras que en el modelo **POLI** esta familia de desigualdades nos permite reducir el conjunto de soluciones fraccionarias, en el segundo modelo es necesaria para modelar el conjunto de soluciones enteras factibles. Por lo tanto, **EXP** necesita para ser correcto de una cantidad exponencial de desigualdades, haciendo que no sea eficiente considerar a todas en el modelo inicialmente debido a su cantidad. Por supuesto tampoco es conveniente recorrerlas exhaustivamente para encontrar alguna que esté violada por el óptimo de la relajación lineal. Por lo tanto, debemos agregar las desigualdades a demanda, aun cuando el óptimo de la relajación lineal no sea un punto fraccionario, utilizando un algoritmo de separación eficiente.

Entonces, el problema que debemos resolver es determinar de forma exacta si alguna desigualdad **d-Color** es violada. Es decir, dado un punto, si existe desigualdad **d-Color** violada por el punto, el algoritmo debe retornar al menos una. Observemos que estas desigualdades se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\sum_{k \in S'} (x_{\tilde{u}k} + x_{\tilde{v}k}) + \sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} \leq 2\deg(\tilde{u}) - 1.$$

Como sabemos que $\sum_{k \notin S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k} = 1 - \sum_{k \in S'} a_{\tilde{u}\tilde{v}k}$, reemplazando obtenemos:

$$\sum_{k\in S'}(x_{\tilde{u}k}+x_{\tilde{v}k}-a_{\tilde{u}\tilde{v}k})\leq 2\deg(\tilde{u})-2.$$

Desarrollamos el siguiente algoritmo basándonos en la reescritura de la desigualdad:

Algoritmo 7 Algoritmo de Separación desigualdad **d-Color**

```
Función CorteConjuntosD(x*,a*)
    for (ũ, ṽ) arista conflictiva de grado d do
        W ← ∅
        for k ∈ M do
            Agregar x*_ũk + x*_ṽk − a*_ũṽk a W.
        Fin for
        Ordenar W de mayor a menor
        suma ← Suma de los primeros d colores de W
        if suma > 2d − 2 then
            Agregar plano de corte
        Fin if
    Fin for
Fin Función
```

El algoritmo recorre todos los pares de vértices en conflicto y determina cuál es el conjunto de colores que maximiza el lado izquierdo de la desigualdad. Para esto analizamos todos los colores calculando cuanto aporta cada uno en la desigualdad, y los ordenamos en forma creciente según este valor. Al tomar los primeros $\deg(\tilde{u})$ colores, tendremos el valor máximo posible del lado izquierdo de la desigualdad.

6.1.3. Desigualdades válidas (d-1)-Color

Al igual que en el caso anterior, nos interesa poder encontrar desigualdades que no sean válidas para un punto dado. Aunque estas desigualdades no son necesarias para la correctitud del modelo, es razonable esperar que mejoren la relajación lineal del mismo. El algoritmo es similar al anterior: por cada conflicto se calcula el conjunto de $d-1$ colores con mayor valor utilizando la misma reescritura que en el caso de la desigualad **d-Color**.

6.1.4. Desigualdades válidas *blossom*

Analizamos tres opciones para identificar desigualdades *blossom* violadas:

- Basadas en conjuntos de 3 vértices.
- Basadas en conjuntos de 5 vértices.
- Basadas en conjuntos de cualquier tamaño de vértices.

Conjuntos de 3 vértices

Queremos ver si la desigualdad

$$a_{uvk} + a_{uwk} + a_{vwk} \leq 1 \qquad \forall k \in M,\ \{u, v, w\} \subseteq V,\ uv, uw, vw \in E$$

está violada en un punto fraccionario dado.

En este caso, podemos revisar todos los conjuntos de vértices de tamaño 3 exhaustivamente, buscando que se viole la desigualdad *blossom*. De ser así, se agrega el corte a la formulación. Lo complejidad temporal de este algoritmo es $O(n^3)$ por cada color.

Conjuntos de 5 vértices

Los algoritmos de separación deben ser rápidos para no influir significativamente en el tiempo total de resolución del algoritmo *Branch and Cut*. Teniendo en cuenta esto, revisar todos los conjuntos de tamaño cinco y todos los colores, se vuelve computacionalmente costoso. La desigualdad *blossom* con cinco elementos se puede escribir como:

$$\sum_{ij \in E_{[S]}} a_{ijk} \leq 2 \qquad \forall k \in M,\ S \subseteq V,\ |S| = 5$$

Un conjunto S tendrá más potencial de generar una desigualdad violada cuanto mayor sea la cantidad de aristas asignadas a un mismo color en $E_{[S]}$. En base a esto, dado un color, ordenamos las aristas por su valor en la relajación en dicho color. Luego se toma el par de aristas con mayor valor en la relajación con vértices disjuntos, de manera que ya hay 4 vértices elegidos. Finalmente se recorren los vértices para escoger al quinto de manera tal que se maximice $\sum\limits_{ij \in E_{[S]}} a_{ijk}$. Si la desigualdad así definida es violada, se agrega el corte.

Teniendo en cuenta que la cantidad de aristas esta acotada por $O(n^2)$, la complejidad de este algoritmo es $O(n^3 log(n))$.

Conjuntos de tamaño arbitrario

Por último buscamos un algoritmo que pueda separar de forma exacta cualquier desigualdad *blossom* violada. Recordemos la desigualdad genérica:

$$\sum_{ij \in E_{[S]}} a_{ijk} \leq \frac{|S|-1}{2} \qquad \forall k \in M,\ S \subseteq V,\ |S| \text{ impar}$$

Proposición 6.1.1. *Consideremos $k \in M$ y (a^*, s^*) una solución factible fraccionaria. Sea $s^*_{vk} = 1 - \sum\limits_{v' \in N(v)} a^*_{vv'k}$ para todo $v \in V$. Entonces*

$$\sum_{ij \in E_{[S]}} a^*_{ijk} > \frac{|S|-1}{2} \iff \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} a^*_{ijk} + \sum_{v \in S} s^*_{vk} < 1$$

.

Demostración. Consideremos la siguiente expresión:

$$2 \sum_{ij \in E_{[S]}} a^*_{ijk} + \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} a^*_{ijk} + \sum_{v \in S} s^*_{vk}$$

Utilizando la definición de s^*_{vk} reemplazamos y obtenemos:

$$2 \sum_{ij \in E_{[S]}} a^*_{ijk} + \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} a^*_{ijk} + |S| - \sum_{v \in S} \sum_{v' \in N(v)} a^*_{vv'k}$$

Si ahora dividimos la vecindad de cada vértice entre aquellos vecinos que pertenecen a S o no, obtenemos la siguiente ecuación:

$$2\sum_{ij\in E_{[S]}} a^*_{ijk} + \sum_{\substack{i\in S\\ j\notin S}} a^*_{ijk} + |S| - \sum_{v\in S}\left(\sum_{v'\in N(v)\cap S} a^*_{vv'k} + \sum_{v'\in N(v)\cap\bar{S}} a^*_{vv'k}\right) = |S|$$

Entonces, si

$$\sum_{ij\in E_{[S]}} a^*_{ijk} > \frac{|S|-1}{2}$$

deducimos que

$$|S| = 2\sum_{ij\in E_{[S]}} a^*_{ijk} + \sum_{\substack{i\in S\\ j\notin S}} a^*_{ijk} + \sum_{v\in S} s^*_{vk} > |S| - 1 + \sum_{\substack{i\in S\\ j\notin S}} a^*_{ijk} + \sum_{v\in S} \tilde{s}_{vk}$$

Por lo tanto, si la desigualdad *blossom* está violada, esto implica que:

$$1 > \sum_{\substack{i\in S\\ j\notin S}} a^*_{ijk} + \sum_{v\in S} s^*_{vk}$$

Con los mismos argumentos se obtiene la implicación inversa.

□

De esta manera cambiamos la formulación del problema de separación al de encontrar un conjunto de vértices S de cardinal impar que cumpla $\sum_{\substack{i\in S\\ j\notin S}} a^*_{ijk} + \sum_{v\in S} s^*_{vk} < 1$.

Podemos modelar este problema como uno de corte de capacidad mínima en un grafo $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ con capacidad en sus aristas, $cap : \widetilde{E} \to \mathbb{R}$, y un vértice distinguido, r. Un corte en este grafo es un conjunto de vértices $S \subset \widetilde{V}$ tal que $r \notin S$ y su capacidad es $\sum_{e=ij\in\tilde{E}, i\in S, j\in\tilde{V}\setminus S} cap(e)$.

Para esto, definimos para cada color k el grafo $\widetilde{G}_k = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ con $\widetilde{V} = V \cup \{r\}$ y $\widetilde{E} = \{ij \in E : a^*_{ijk} > 0\} \cup \{rv : v \in V \wedge s^*_{vk} > 0\}$, y la función de capacidad $cap : \widetilde{E} \to \mathbb{R}$ como $cap(e) = s^*_{vk}$ si $e = rv$ y $cap(e) = a^*_{ijk}$ si $e = ij \in E$.

La capacidad de un corte S de $\tilde{G}_k$ es:

$$cap(S) = \sum_{e=ij\in\tilde{E}, i\in S, j\in\tilde{V}\setminus S} cap(e) = \sum_{e=ij\in E, i\in S, j\in V\setminus S} cap(e) + \sum_{e=rv\in\tilde{E}, v\in S} cap(e) =$$

$$\sum_{\substack{i\in S\\ j\notin S}} a^*_{ijk} + \sum_{v\in S} \tilde{s}_{vk}$$

Por lo tanto, el problema de separación para las desigualdades *blossom* para un color k es equivalente a encontrar un corte S de $\tilde{G}_k$ de cardinal impar, tal que $cap(S) < 1$. Con este fin, buscaremos el corte de cardinal impar con capacidad mínima de este grafo. Si esta capacidad es menor a 1, habremos encontrado una desigualdad violada por (a^*, s^*) para el color k.

Este problema está estudiado en la literatura [56]. Nosotros utilizamos el árbol Gomory-Hu, una representación de los cortes de capacidad mínima del grafo, para encontrar los cortes impares.

Teniendo en cuenta que la cantidad de aristas está acotada por $O(n^2)$, la complejidad de esta rutina consiste en construir el árbol de Gomory-Hu en $O(n^4)$ y luego buscar un corte de cardinal impar en $O(n^2)$. Por lo tanto, si bien este algoritmo permite encontrar desigualdades *blossom* violadas de cualquier cardinal, es computacionalmente más costoso que los algoritmos anteriores.

6.2. Heurística Inicial

El tamaño del árbol de búsqueda es un factor determinante en la performance de los algoritmos de *Branch and Cut*. La finalidad de proveer al algoritmo de una heurística inicial es contar desde el inicio con una solución factible de buena calidad que permita una poda eficiente del árbol. En el capítulo 4 definimos distintas heurísticas para el problema **AVDSECP**. De acuerdo al análisis que hicimos y reportamos, decidimos utilizar la heurística golosa (algoritmo 2 sección 4.1) para obtener una solución inicial.

6.3. Heurística Primal

A medida que se van procesando las relajaciones en los nodos del árbol de búsqueda vamos obteniendo información que puede ser utilizada para encontrar buenas soluciones factibles. Este es el propósito de la heurística primal, es decir, obtener una solución factible de **AVDSECP** a partir de la solución óptima de la relajación lineal, utilizando los valores fraccionarios de las variables como una fuente de información para asignar colores a las aristas del grafo cumpliendo con todas las restricciones de nuestro problema.

Comenzamos considerando las variables a_{uvk} asociadas a las aristas con valor en la solución fraccionaria mayor o igual a 0.5 y ordenamos estas variables de menor a mayor. Recorriendo esta lista siguiendo el orden, cuando consideramos la variable a_{uvk}, si la arista uv aún no ha sido coloreada en este proceso, le asignamos el color k, verificando antes que el color sea factible en cuanto a no violar ninguna restricción de coloreo propio de aristas ni de distinguibilidad de vértices adyacentes. En caso de que no se pueda hacer esa asignación, se ignora y se procede a analizar la siguiente variable de la lista. Al finalizar este proceso, se tendrá una asignación parcial con la cual invocar al algoritmo de extensión 1 (sección 4.1) .

Si la solución así obtenida tiene valor de función objetivo menor que la mejor solución conocida hasta el momento, se reemplaza ésta por la encontrada por la heurística primal.

6.4. Estrategias de *Branching*

Entre las funcionalidades que brinda la librería de CPLEX se encuentra la posibilidad de controlar el proceso de *branching* mediante un orden de prioridades entre las variables. A cada variable se le asigna una prioridad que es usada para seleccionar la variable fraccionaria sobre la cual se realizará la generación de los nuevos nodos del árbol de búsqueda. Frente a dos variables fraccionarias candidatas, se elige la de mayor prioridad.

Aprovechando esta herramienta, hemos considerado diferentes órdenes de prioridad:

- Estrategia de *branching* por defecto de CPLEX.
- *Br1*: x_{ik} tiene mayor prioridad cuanto mayor es el k. Si hubiera empate o ninguna de estas variables es fraccionaria, CPLEX toma el control de la decisión.
- *Br2*: x_{ik} tiene mayor prioridad cuanto mayor es el k y cuanto mayor es el grado de i. Si hubiera empate o ninguna de estas variables es fraccionaria, CPLEX toma el control de la decisión.
- *Br3*: x_{ik} tiene mayor prioridad cuanto mayor es el k, luego las variables a_{ijk} se priorizan según la cantidad de conflictos en los vértices i y j. Si hubiera empate, CPLEX toma el control de la decisión.
- *Br4*: x_{ik} tiene mayor prioridad cuanto mayor es el k, luego las variables a_{ijk} se priorizan según la cantidad de conflictos en los vértices i y j. Si es una arista entre dos vértices de igual grado tiene mayor prioridad. Si hubiera empate, CPLEX toma el control de la decisión.
- *Br5*: x_{ik} tiene mayor prioridad cuanto mayor es el k y cuanto mayor es el grado de i. Las variables a_{ijk} se priorizan según la cantidad de conflictos en los vértices i y j. Si hubiera empate, CPLEX toma el control de la decisión.
- *Br6*: x_{ik} tiene mayor prioridad cuanto mayor es el k y cuanto mayor es el grado de i. Las variables a_{ijk} se priorizan según la cantidad de conflictos en los vértices i y j. Si es una arista entre dos vértices de igual grado tiene mayor prioridad. Si hubiera empate, CPLEX toma el control de la decisión.

6.5. Discusión de resultados computacionales

6.5.1. Instancias de pruebas y entorno de ejecución

Para realizar los experimentos computacionales utilizamos una computadora con procesador Intel i7 3.5GHz con 48 GB de memoria RAM, y Ubuntu 16.04 LTS como sistema operativo. En todos los casos, los algoritmos se implementaron en C++ con la interfaz de C de las librerías de CPLEX 12.7.

En esta sección se consideró el mismo conjunto de instancias que en el capítulo 3.

6.5.2. Evaluación del modelo POLI y cortes

Si bien el modelo **POLI** no es nuestro objetivo central, hemos caracterizado algunas desigualdades válidas que podrían mejorar la performance de un algoritmo *Branch and Cut* y vale la pena evaluar su efecto al ser utilizadas como planos de corte. Evaluamos cuatro algoritmos:

- Algoritmo *POLI*: corresponde al *Branch and Cut* por defecto de CPLEX 12.7 (utilizando un solo thread y todos los parámetros por defecto) sobre el modelo **POLI**.
- Algoritmo *POLI-DV*: corresponde al modelo **POLI** utilizando las desigualdades válidas de ese modelo.
- Algoritmo *POLI-DV+*: adicionalmente agrega las desigualdades de conjuntos de colores.
- *POLI-CC*: considera solo las desigualdades de conjuntos de colores.

En la tabla 6.1, para cada uno de estos algoritmos, reportamos el tiempo promedio sobre las instancias resueltas y el *gap* final promedio sobre las instancias no resueltas, agrupadas por tipo de instancia. Al final de la tabla, informamos el promedio general y la media geométrica, así como también los valores máximos y mínimos. En el caso de la media geométrica, usamos un desplazamiento de 10 para el caso de tiempos y de 1 para el *gap*. Esta es una medida estándar [1] utilizada por la comunidad científica del área de programación lineal entera, para comparar performance de algoritmos [31, 41]. En todos los casos, entre paréntesis, figura la cantidad de instancias sobre las cuales se reporta cada valor.

En primer lugar, notamos que *POLI-DV* no tiene buen rendimiento. Si bien tiene un tiempo promedio y media geométrica inferior a *POLI*, se resuelve una instancia menos. En esta instancia el algoritmo *POLI* requiere más de 3000 segundos, motivo por el cual se eleva el tiempo promedio. Si nos restringimos a las instancias resueltas por ambos algoritmos, el promedio de tiempo de *POLI* desciende a 147 segundos y no existe ninguna instancia donde *POLI-DV* supere a *POLI*. Si comparamos el *gap* promedio y media geométrica sobre las instancias no resueltas, no se nota una diferencia significativa, lo que indicaría que estas desigualdades válidas no aportan a mejorar el *gap*. *POLI* enumera, en promedio, 193503.5 nodos, mientras que *POLI-DV* enumera 98326.2 nodos. El tiempo de procesamiento por nodo en *POLI-DV* es 50 % mayor que en *POLI*, no sólo por el tiempo involucrado en la separación (alrededor de 8 % del total), sino también por el tiempo invertido en la resolución de las relajaciones.

Este tiempo extra por nodo no resultó útil para alcanzar la optimalidad en mayor cantidad de instancias ni para reducir el tiempo en el procesamiento del árbol de búsqueda. En conclusión, las desigualdades no sólo no aportan a la performance sino, que por el contrario, la perjudican.

Respecto a *POLI-DV+*, se evidencia claramente que con el agregado de todas las familias de cortes se logra un incremento significativo en la cantidad de instancias resueltas dentro del tiempo límite. Con el algoritmo *POLI*, el *Branch and Cut* provisto por CPLEX, se resuelven 12 instancias, mientras que con *POLI-DV+* casi se triplica esta cantidad (32 instancias resueltas). El promedio de tiempo y media geométrica del algoritmo *POLI-DV+* es significativamente mayor, debido a que existen muchas instancias resueltas por este algoritmo y no por los otros. Si nos enfocamos en aquellas instancias que son resueltas tanto por *POLI* como por *POLI-DV+* (12 instancias), la versión con cortes promedia 277 segundos vs los 387 segundos de *POLI*. Es decir, este algoritmo no solo resuelve más instancias sino que además, resuelve en menor tiempo las que ya eran resueltas por *POLI*.

[1] https://community.fico.com/s/blog-post/a5Q2E000000Dt0JUAS/fico1421

Respecto al promedio de *gap* final entre instancias no resueltas, los cortes tuvieron un impacto que se percibe en el *gap* final, que tiene un valor promedio de 0.95 % y media geométrica de 0.92 %, y en los valores máximo y mínimo. Mientras que con *POLI* hay instancias con *gap* final superior al 6 %, con *POLI-DV+* los *gaps* son inferiores al 2 %.

En 22 instancias no resueltas (que representa el 91 % de las no resueltas), *POLI-DV+* encontró la solución óptima, fallando la certificación de optimalidad. En el caso de *POLI*, esto ocurrió solo en el 18 % (17 instancias sobre 44). Respecto a la cota dual, *POLI* tiene un *gap* promedio respecto al óptimo de 2.45 %, mientras que el valor correspondiente a *POLI-DV+* es de 0.95 %. Esto demuestra que las desigualdades aportaron tanto para mejorar la cota dual como primal. La cantidad promedio de nodos enumerados es de 62490.1, un tercio de los nodos enumerados por *POLI*, y el tiempo de separación promedio es de 12.97 % del tiempo total. Este comportamiento es similar a *POLI-DV*, pero en este caso, las desigualdades aportaron significativamente a la performance general del algoritmo.

Debido a la pobre performance de las desigualdades válidas propias del modelo **POLI**, es razonable preguntarse si con las desigualdades de conjunto de colores no será suficiente para alcanzar los mejores resultados. Una primera evaluación respecto a la cantidad de instancias resueltas es que al no incluir las desigualdades propias se resuelven 3 instancias menos. Esto ya es un factor que inclina la balanza a favor de *POLI-DV+*. Si nos concentramos en las instancias resueltas por ambos algoritmos (29 instancias), podemos observar que en el 56 % de ellas el algoritmo *POLI-DV+* es más rápido por un 36 % , mientras que *POLI-CC* vemos que es más rápido en el 44 % de las 29 instancias con una mejora de 28 % en promedio. En conclusión, si bien las desigualdades válidas propias de **POLI** no contribuyen por sí solas a mejorar el algoritmo *Branch and Cut* y las de conjunto de colores son efectivas, la combinación de ambas resulta ser la mejor opción.

Un punto a destacar es que aun con el agregado de cortes, el modelo **POLI** no logra obtener resultados comparables a los del modelo **EXP** en su versión básica. El *POLI-DV+* resuelve un total de 32 instancias frente a las 44 instancias de un *Branch and Cut* de CPLEX aplicado al modelo **EXP**. El tiempo promedio entre las instancias resueltas por ambos algoritmos es de 892.30 segundos para el primero y 380.98 segundos para el segundo. Se confirma así nuestra apreciación inicial sobre que el modelo **POLI** no es un buena formulación para resolver computacionalmente el problema.

6.5.3. Evaluación de modelo EXP y cortes de conjuntos de colores

Para el modelo **EXP**, nuestra primera experimentación está enfocada en evaluar la eficacia de las desigualdades válidas cuando son utilizadas como planos de corte. Comenzamos con las desigualdades de conjuntos de colores y consideramos diferentes alternativas. Por un lado, como base para comparar, tenemos en cuenta el modelo **EXP** sobre el cual experimentamos con el algoritmo *Branch and Cut* con todos los parámetros por defecto de CPLEX (algoritmo *EXP-CPX*) y con una versión donde los cortes de CPLEX no están activados (algoritmo *EXP*). En ambos casos, las restricciones 3.8 fueron tratadas como cortes, incorporándose al modelo bajo demanda en el caso que la solución de la relajación lineal asociada a un nodo tenga coordenadas enteras. La búsqueda de restricciones violadas se realiza en forma exhaustiva como describimos en la sección 6.1. Respecto a las desigualdades de conjuntos de colores, experimentamos con los siguientes esquemas:

- Algoritmo *EXP-C1*: se utilizan las desigualdades **d-Color** y los cortes CPLEX no están activos.
- Algoritmo *EXP-CPX-C1*: se utilizan las desigualdades **d-Color** y los cortes CPLEX están activos.
- Algoritmo *EXP-C2*: se utilizan las desigualdades **(d-1)-Color** y los cortes CPLEX no están activos.

		POLI		*POLI-DV*		*POLI-DV+*		*POLI-CC*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*	tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
	baja	1334.70(3)	0.4(3)	1241.26(2)	0.45(4)	906.28(4)	0.33(2)	213.75(2)	0.39(4)
random	media	11.73(6)	-	22.89(6)	-	46.19(6)	-	214.04(6)	-
	alta	-	1.32(6)	-	1.7(6)	1469.88(2)	0.98(4)	1192.08(2)	0.84(4)
$\Delta + 2$	alta	192.65(3)	0.28(1)	379.71(3)	0.28(1)	16.04(3)	0.14(1)	322.42(3)	0.27(1)
	baja	-	5.38(10)	-	5.54(10)	1556.00(10)	-	1513.61(10)	-
regular	media	-	2.14(12)	-	2.33(12)	1035.17(7)	0.36(5)	1205.60(6)	0.42(6)
	alta	-	1.53(12)	-	2.03(12)	-	0.96(12)	-	0.71 (12)
Promedio		387.70(12)	2.45(44)	341.73(11)	2.68(45)	928.01(32)	0.95(24)	945.95(29)	0.78(27)
Med Geom		53.84(12)	2.11(44)	54.04(11)	2.35(45)	300.10(32)	0.92(24)	311.52(29)	0.76(27)
Máximo		3028.82	6.12	2420.89	6.15	2951.4	1.80	2901.09	1.80
Mínimo		0.42	0.24	2	0.3	0.29	0.24	0.25	0.25

Cuadro 6.1. Resultados de la experimentación con el modelo POLI

- Algoritmo *EXP-CPX-C2*: se utilizan las desigualdades **(d-1)-Color** y los cortes CPLEX están activos.
- Algoritmo *EXP-C1C2*: se utilizan las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color** y los cortes CPLEX no están activos.
- Algoritmo *EXP-CPX-C1C2*: se utilizan las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color** y los cortes CPLEX están activos.

Después de una experimentación exhaustiva donde probamos diferentes estrategias en el manejo de los planos de corte analizando efectividad y tiempo de corrida, hemos definido los siguientes criterios:

- Se aplican planos de corte en nodo raíz y cada 6 nodos del árbol de búsqueda.
- No hay límite en la cantidad de iteraciones por nodo.
- Desigualdades **d-Color**: por cada llamada a la rutina de separación, se agregan todas aquellas desigualdades que se encuentren violadas.
- Desigualdades **(d-1)-Color**: se agrega a lo sumo una por color.
- En el caso de la combinación de ambas desigualdades, se alterna el llamado a cada rutina.
- El umbral utilizado para decidir si un corte se encuentra violado es de 0.9.
- Los cortes provistos por CPLEX son administrados por las estrategias por defecto.

Comenzamos realizando un análisis del *gap* (respecto al óptimo) alcanzado al terminar de procesar el nodo raíz para todas las versiones. En la tabla 6.2 reportamos los resultados promedio según tipo de instancia, así como también el valor promedio general, la media geométrica, el máximo y el mínimo.

En primer lugar podemos decir que agregar únicamente cortes **(d-1)-Color** no sólo no contribuye a mejorar el *gap* sino que, en muchos casos, lo empeora. Esto se evidencia tanto con la opción que incluye cortes por defecto de CPLEX como en la opción que no los incluye. En todos los algoritmos que no incluyen los cortes por defecto de CPLEX, el *gap* promedio supera el 3 % y hay instancias donde

		EXP	*EXP-C1*	*EXP-C2*	*EXP-C1C2*	*EXP-CPX*	*EXP-CPX-C1*	*EXP-CPX-C2*	*EXP-CPX-C1C2*
	baja	1.34	0.99	1.40	0.99	1.20	0.71	0.96	0.75
random	media	5.01	4.08	4.97	4.08	1.70	1.94	2.11	1.95
	alta	2.43	2.34	2.41	2.34	2.11	1.86	2.21	1.81
$\Delta + 2$		7.53	6.93	7.36	6.93	1.86	1.27	1.91	1.27
	baja	4.38	4.36	5.29	4.36	3.65	3.57	3.53	3.57
regular	media	2.68	2.69	2.84	2.69	2.31	1.75	2.27	1.77
	alta	2.52	2.50	2.59	2.50	2.10	1.72	1.97	1.84
Promedio		3.37	3.18	3.58	3.18	2.27	1.95	2.24	1.98
Med Geom		4.84	4.55	5.09	4.55	3.42	2.92	3.40	2.93
Máximo		9.43	8.87	9.90	8.87	4.12	4.26	4.62	4.26
Mínimo		0.94	0.70	0.99	0.70	0.73	0	0.65	0

Cuadro 6.2. Experimentación con los cortes de conjuntos de colores: *gap* nodo raíz

se alcanza casi un 10 %. Cuando estos cortes están activos, el *gap* se reduce de manera apreciable, obteniéndose en algunas instancias disminuciones por encima del 100 %.

Ante la presencia de cortes por defecto de CPLEX, los mejores resultados se obtienen con la incorporación de los cortes **d-Color** y, con valores muy cercanos en promedio y en media geométrica, cuando se consideran tanto **d-Color** como **(d-1)-Color**. Se observa también que los valores máximos y mínimos de *gaps* se reducen ante la presencia de estos cortes.

En conclusión, el impacto en la relajación inicial es relevante para dos de las estrategias de incorporación de cortes: *EXP-CPX-C1* y *EXP-CPX-C1C2*

A continuación analizaremos la performance de estos cortes cuando se utilizan en un algoritmo *Branch and Cut*. En las tablas 6.3 y 6.4 reportamos los resultados de tiempo promedio entre las instancias resueltas y *gap* promedio entre las instancias no resueltas de las diferentes versiones. En todos los casos, entre paréntesis, figura la cantidad de instancias sobre las cuales se promedia.

		EXP		*EXP-C1*		*EXP-C2*		*EXP-C1C2*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*	tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
	baja	55.59(1)	0.49(5)	690.51(3)	0.39(3)	336.23(2)	0.40(4)	755.13(3)	0.37(3)
random	media	814.37(4)	1.60(2)	607.82(5)	0.78(1)	511.25(5)	1.16(1)	954.51(6)	-
	alta	-	0.72(6)	284.76(2)	0.75(4)	1427.00(2)	0.80(4)	308.73(2)	0.74(4)
$\Delta + 2$	alta	134.82(2)	3.26(2)	2.02(2)	1.73(2)	25.80(2)	2.98(2)	2.38(2)	1.75(2)
	baja	1573.19(9)	1.08(1)	904.66(10)	-	2293.15(9)	1.10(1)	826.88(10)	-
regular	media	412.34(10)	0.33(2)	295.01(12)	-	478.55(12)	-	271.88(12)	-
	alta	840.67(7)	0.32(5)	552.91(12)	-	573.94(12)	-	626.80(12)	-
Promedio		840.89(33)	0.86(23)	541.43(46)	0.84(10)	895.51(44)	1.08(12)	588.67(47)	0.84(9)
Med Geom		466.58(33)	0.73(23)	302.33(46)	0.78(10)	464.64(44)	0.94(12)	325.15(47)	0.77(9)
Máximo		2438.27	3.69	2660.11	1.84	3085.29	3.23	2887.16	1.89
Mínimo		0.57	0.26	0.12	0.37	0.31	0.32	0.14	0.32

Cuadro 6.3. Experimentación con los cortes de conjuntos de colores: branch and cut sin cortes CPLEX

		EXP-CPX		*EXP-CPX-C1*		*EXP-CPX-C2*		*EXP-CPX-C1C2*	
		tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap
random	baja	499.13(5)	0.40(1)	842.19(4)	0.24(2)	662.47(5)	0.40(1)	915.77(4)	0.32(2)
	media	0.68(6)	-	4.29(6)	-	28.34(6)	-	7.29(6)	-
	alta	1098.88(1)	0.67(5)	1981.26(2)	0.87(4)	704.50(2)	0.85(4)	206.41(2)	1.04(4)
$\Delta + 2$	alta	456.63(4)	-	3.70(4)	-	247.48(4)	-	2.20(4)	-
regular	baja	1317.96(5)	1.41(5)	290.36(10)	-	1113.82(10)	-	317.21(10)	-
	media	265.15(12)	-	210.04(12)	-	365.79(9)	1.36(3)	159.45(12)	-
	alta	522.90(11)	0.98(1)	343.98(11)	0.83(1)	626.13(12)	-	337.65(10)	0.99(2)
Promedio		476.10(44)	0.98(12)	338.36(49)	0.68(7)	579.69(48)	0.98(8)	262.30(48)	0.84(8)
Med Geom		173.86(44)	0.90(12)	115.19(49)	0.64(7)	252.64(48)	0.91(8)	106.31(48)	0.81(8)
Máximo		3402.22	2.12	3592.75	1.43	3138.79	2.26	1917.23	1.20
Mínimo		0.12	0.33	0.18	0.23	0.09	0.39	0.18	0.31

Cuadro 6.4. Experimentación con los cortes de conjuntos de colores: branch and cut con cortes CPLEX

Analicemos en primer lugar los resultados de la tabla 6.3. La primera conclusión que podemos expresar es que, sin duda, los cortes contribuyen a mejorar la performance con cualquiera de las estrategias consideradas. Desde el punto de vista de cantidad de instancias resueltas a optimalidad, mientras que el algoritmo base *EXP* resolvió el 58 %, cualquiera de los algoritmos que incorporan las desigualdades de conjuntos de colores supera el 78 % de instancias resueltas. Todas las instancias resueltas por *EXP* también lo fueron por el resto de los algoritmos. Si nos concentramos en este conjunto de instancias, el tiempo promedio de *EXP* es 840.89 segundos, mientras que resulta 459.35 segundos en *EXP-C1* (mejorado por *EXP* en solo 3 instancias), 872.42 segundos en *EXP-C2* (mejorado por *EXP* en 16 instancias) y 456.32 segundos en *EXP-C1C2* (mejorado por *EXP* en 7 instancias). Es decir, tanto *EXP-C1* como *EXP-C1C2*, obtienen mejores resultados en tiempo (45 % menos) y en cantidad de instancias resueltas. En el caso de *EXP-C2*, resuelve mayor cantidad de instancias pero el tiempo promedio sobre las resueltas por ambos es muy similar.

El promedio del porcentaje de tiempo utilizado en rutinas de separación es 12.43 %, 16.93 % y 13.68 % para *EXP-C1*, *EXP-C2* y *EXP-C1C2* respectivamente, resultando un factor de poco peso en cuanto al tiempo global de corrida.

Respecto a las instancias no resueltas, hay 9 instancias que ninguno de los algoritmos pudo resolver. En estos casos, el promedio de *gap* final es 1.30 %, 0.84 %, 1.15 % y 0.84 % para *EXP*, *EXP-C1*, *EXP-C2* y *EXP-C1C2* respectivamente.

Una vez que los algoritmos terminan de procesar el nodo raíz, reportan un promedio de porcentaje de *gap* de 49.36 %, 34.72 %, 62.95 % y 33.16 % respectivamente.

Estos valores son calculados teniendo en cuenta la cota inferior brindada por el nodo raíz y la mejor solución encontrada hasta ese momento. Se confirma nuestra apreciación inicial respecto a que la desigualdad **d-Color** juega un rol importante en el fortalecimiento de la relajación lineal.

En todos las opciones que incluyen planos de corte, en las instancias no resueltas, la mejor solución encontrada coincide con el óptimo. En el caso de *EXP*, hay dos instancias donde le mejor solución encontrada no es la óptima.

Este conjunto de indicadores que evaluamos muestran que las desigualdades **d-Color** resultan fundamental para mejorar el rendimiento. Además, se aprecia que las **(d-1)-Color** por sí solas tienen un desempeño menor, pero colaboran cuando están combinadas con las desigualdades **d-Color**.

Consideremos ahora los resultados de la tabla 6.4. En este caso, como ya mencionamos, decidimos incluir además los planos de corte por defecto que incluye CPLEX. La primera conclusión es que estos cortes impactan significativamente. Si comparamos *EXP* y *EXP-CPX*, notamos que de un 58 % de instancias resueltas, se mejora a 78 %, y el tiempo promedio y media geométrica se reducen sustancialmente. No quedan dudas que los cortes de CPLEX tienen un efecto muy relevante en el rendimiento del algoritmo.

En cuanto a cantidad de instancias resueltas y tiempo promedio, la eficiencia de *EXP-CPX* es mejor que *EXP-C2*, pero no supera a *EXP-C1* y *EXP-C1C2*. Es decir, las desigualdades **d-Color** siguen resultando un factor clave en el rendimiento del algoritmo. De la combinación de los cortes CPLEX con las desigualdades de conjunto de colores (con una de ellas o con ambas) surgen las mejores versiones de los algoritmos. En todos los casos, aumentó la cantidad de instancias resueltas y disminuyó notablemente el tiempo promedio y la media geométrica. El algoritmo *EXP-CPX-C1* es el que resuelve mayor cantidad de instancias (87 %). Si bien el algoritmo *EXP-CPX-C2* resuelve la misma cantidad de instancias que *EXP-CPX-C1C2*, el tiempo promedio y la media geométrica son significativamente mayores, resultando en la opción menos favorable.

Si comparamos *EXP-CPX-C1* con *EXP-CPX-C1C2*, el primero resuelve una instancia más que el segundo. Coinciden en resolver 47 instancias con un promedio de tiempo de 270.31 segundos y 239.02 segundos respectivamente. En 23 de estas instancias *EXP-CPX-C1* es ligeramente más rápido (306.72 segundos vs 368.68 segundos) y en otras 23 instancias, *EXP-CPX-C1C2* es significativamente más rápido (114.32 segundos vs 361.92 segundos).

Hay 3 instancias que sólo resuelve *EXP-CPX-C1* con un tiempo promedio de 1381.77 segundos y 2 que resuelve sólo *EXP-CPX-C1C2* con un tiempo promedio de 797.68. Notamos además, que una de las instancias resueltas por *EXP-CPX-C1* quedó a 8 segundos del tiempo límite y otra consumió más de 3000 segundos. En el caso de *EXP-CPX-C1C2*, todas las instancias resueltas a optimalidad terminaron en menos de 2000 segundos.

Entre las instancias no resueltas a optimalidad por ninguno de los dos algoritmos, el promedio de *gap* final de *EXP-CPX-C1* es 0.73 % y de 0.89 % para *EXP-CPX-C1C2*.

Respecto al *gap* final una vez procesado el nodo raíz, *EXP-CPX* tiene un valor promedio de 52.43 %, *EXP-CPX-C1* tiene un valor de 28.03 %, *EXP-CPX-C2* tiene un valor de 41.31 % y *EXP-CPX-C1C2* tiene un valor de 32.50 %. Estos valores están en línea con aquellos analizados previamente: los cortes mejoran la relajación lineal.

El promedio del porcentaje de tiempo utilizado en rutinas de separación es 9.62 %, 10.25 % y 10.59 % para *EXP-CPX-C1*, *EXP-CPX-C2* y *EXP-CPX-C1C2* respectivamente, resultando un factor de poco peso en cuanto al tiempo global de corrida.

Cabe señalar que, salvo *EXP* en una única instancia, en todas las instancias todos los algoritmos encuentran como mejor solución a la solución óptima. En el caso de instancias no resueltas, la dificultad proviene de no poder ajustar la cota inferior.

Estos resultados nos presentan un panorama no muy determinante respecto a cuál de las dos versiones, *EXP-CPX-C1* ó *EXP-CPX-C1C2*, es la mejor opción. Decidimos priorizar la cantidad de instancias resueltas e inclinarnos por *EXP-CPX-C1*. Sin embargo, en los próximos experimentos no vamos a descartar completamente a *EXP-CPX-C1C2*.

6.5.4. Evaluación del modelo EXP y cortes blossom

De la experimentación con las desigualdades de conjuntos de colores, la estrategia implementada en *EXP-CPX-C1* resultó la más eficiente, seguida por *EXP-CPX-C1C2*. Tomando como base estos dos algoritmos, analizaremos ahora la incorporación de las desigualdades *blossom* en tres versiones:

- *EXP-CPX-C1-B3* y *EXP-CPX-C1C2-B3*: utiliza la separación exacta de conjuntos de 3 vértices,
- *EXP-CPX-C1-B5* y *EXP-CPX-C1C2-B5*: utiliza la separación heurística para conjuntos de 5 vértices
- *EXP-CPX-C1-B* y *EXP-CPX-C1C2-B* encuentra de forma exacta conjuntos de vértices de cualquier cardinal que violen la desigualdad *blossom*.

Comenzamos por analizar el impacto sobre *EXP-CPX-C1*. En la tabla 6.5 reportamos los resultados para las distintas estrategias (tiempo y *gap* promedio).

Los algoritmos *EXP-CPX-C1-B3* y *EXP-CPX-C1-B5* no tienen un buen rendimiento. Por un lado, disminuyen la cantidad de instancias resueltas respecto al algoritmo base *EXP-CPX-C1*. Todas las instancias resueltas por estos algoritmos, también las resuelve *EXP-CPX-C1* con un tiempo promedio de 270.56 segundos versus 358.28 segundos y 380.57 segundos para *EXP-CPX-C1-B3* y *EXP-CPX-C1-B5*, respectivamente. En conclusión, estas versiones no mejoran ni tiempo ni cantidad de instancias resueltas. Respecto a *EXP-CPX-C1-B*, es el algoritmo que mayor cantidad de instancias resuelve. Todas las instancias resueltas por *EXP-CPX-C1*

		EXP-CPX-C1		*EXP-CPX-C1-B3*		*EXP-CPX-C1-B5*		*EXP-CPX-C1-B*	
		tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap
random	baja	842.19(4)	0.24(2)	853.26(4)	0.32(2)	1103.62(4)	0.30(2)	609.59(5)	0.40(1)
	media	4.29(6)	-	10.54(6)	-	15.30(6)	-	3.24(6)	-
	alta	1981.26(2)	0.87(4)	599.39(1)	0.95(5)	824.86(1)	0.92(5)	676.56(2)	0.93(4)
$\Delta+2$	alta	3.70(4)	-	5.60(4)	-	1.03(4)	-	5.91(4)	-
regular	baja	290.36(10)	-	297.18(10)	-	300.30(10)	-	338.80(10)	-
	media	210.04(12)	-	232.29(12)	-	330.25(12)	-	233.92(12)	-
	alta	343.98(11)	0.83(1)	667.29(11)	0.98(1)	542.41(11)	1.08(1)	645.64(11)	0.92(1)
Promedio		338.36(49)	0.68(7)	358.28(48)	0.79(8)	380.58(48)	0.79(8)	354.82(50)	0.84(6)
Med Geom		115.19(49)	0.64(7)	129.05(48)	0.76(8)	138.16(48)	0.74(8)	120.04(50)	0.81(6)
Máximo		3592.75	1.43	2576.63	1.42	2580.96	1.42	2754.6	1.42
Mínimo		0.18	0.23	0.16	0.24	0.18	0.24	0.18	0.39

Cuadro 6.5. Experimentación con cortes *blossom* sobre *EXP-CPX-C1*

con promedio de tiempo de 338.36, también son resueltas por *EXP-CPX-C1-B* con un tiempo promedio de 359.55, levemente superior. En 16 instancias, *EXP-CPX-C1-B* es más rápido y en las 32 restantes *EXP-CPX-C1* tiene mejores tiempos. Respecto al gap final, *EXP-CPX-C1* logra mejores porcentajes en todas las instancias salvo una. En conclusión, la incorporación de las desigualdades *blossom* de tamaño arbitrario contribuyen a resolver mayor cantidad de instancias, aunque a un costo temporal un poco más elevado.

Analizamos ahora el impacto de las desigualdades *blossom* sobre *EXP-CPX-C1C2*. En la tabla 6.6 reportamos los resultados (tiempo y *gap* promedios) para las distintas estrategias.

El algoritmo *EXP-CPX-C1C2-B3* no tiene un buen rendimiento. Por un lado, no consigue resolver más instancias que el algoritmo base *EXP-CPX-C1C2*, si bien el conjunto de instancias resueltas es diferente. En las 43 instancias en las que coinciden, *EXP-CPX-C1C2-B3* duplica el tiempo promedio y el promedio de *gap* sobre las instancias no resueltas es ligeramente superior para *EXP-CPX-C1C2-B3* (0.85 vs 0.91). Si nos concentramos en las instancias no resueltas por ambos (5 instancias), el *gap* es 0.89 y 1.02 para *EXP-CPX-C1C2* y *EXP-CPX-C1C2-B3*, respectivamente. En definitiva, *EXP-CPX-C1C2-B3* no resulta una buena opción.

El algoritmo *EXP-CPX-C1C2-B5* resuelve una instancia más que *EXP-CPX-C1C2*. Hay 43 instancias resueltas por ambos algoritmos, con tiempo promedio de de 232.56 segundos para *EXP-CPX-C1C2* y 173.06 segundos para *EXP-CPX-C1C2-B5*. Respecto a las instancias no resueltas por ambos (6 instancias), el pro-

		EXP-CPX-C1C2		*EXP-CPX-C1C2-B3*		*EXP-CPX-C1C2-B5*		*EXP-CPX-C1C2-B*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*	tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
random	baja	915.77(4)	0.32(2)	572.31(5)	0.32(1)	1013.56(4)	0.35(2)	334.37(4)	0.30(2)
	media	7.29(6)	-	3.22(6)	-	22.77(6)	-	3.90(6)	-
	alta	206.41(2)	1.04(4)	-	1.15(5)	641.76(2)	1.24(4)	279.87(2)	1.04(4)
$\Delta + 2$	alta	2.20(4)	-	3.35(4)	-	1.84(4)	-	2.64(4)	-
regular	baja	317.21(10)	-	352.93(10)	-	336.06(10)	-	365.71(10)	-
	media	159.45(12)	-	444.23(11)	1.22(1)	179.05(11)	0.55(1)	223.98(12)	-
	alta	337.65(10)	0.99(2)	577.18(12)	-	351.13(12)	-	327.77(12)	-
Promedio		262.30(48)	0.85(8)	379.92(48)	0.91(8)	306.64(49)	0.89(7)	244.19(50)	0.79(6)
Media Geom		106.31(48)	0.81(8)	117.23(48)	0.85(8)	127.22(49)	0.83(7)	109.94(50)	0.75(6)
Máximo		1917.23	1.20	3517.68	1.40	2183.59	1.47	974.05	1.19
Mínimo		0.18	0.31	0.16	0.26	0.18	0.31	0.18	0.24

Cuadro 6.6. Experimentación con cortes *blossom* sobre *EXP-CPX-C1C2*

medio de *gap* final es 0.89 para *EXP-CPX-C1C2* y 1.05 para *EXP-CPX-C1C2-B5*. En conclusión, la incorporación de las desigualdades *blossom* de tamaño 5 contribuyen a resolver mayor cantidad de instancias, aunque a un costo temporal un poco más elevado (tanto en promedio como en media geométrica).

Finalmente, analizamos los resultados del algoritmo *EXP-CPX-C1C2-B*. En primer lugar, es el algoritmo con mayor cantidad de instancias resueltas, tiempo promedio menor y promedio de porcentaje de *gap* final menor. No hay dudas que, bajo estos criterios, supera a *EXP-CPX-C1C2*. En las instancias resueltas por los dos algoritmos (46), el tiempo promedio es 173.41 segundos y 269.51 segundos para *EXP-CPX-C1C2* y *EXP-CPX-C1C2-B* respectivamente. En 22 instancias el algoritmo *EXP-CPX-C1C2* es mejor (33 % en promedio) y en las restantes 24, es mejor *EXP-CPX-C1C2-B* (26 % en promedio). Estos números nos indican que, en las instancias resueltas por ambos, hay una cierta ventaja para *EXP-CPX-C1C2*, pero dada la diferencia en la cantidad de instancias resueltas, nos inclinamos por la eficiencia de *EXP-CPX-C1C2-B* comparada con *EXP-CPX-C1C2*.

En resumen, tanto *EXP-CPX-C1C2-B* como *EXP-CPX-C1-B* resultan ser los algoritmos con mejor rendimiento en cuanto a cantidad de instancias resueltas. Sin embargo, *EXP-CPX-C1C2-B* supera a *EXP-CPX-C1-B* tanto en promedio y media geométrica de tiempo como en promedio y media geométrica de *gap* final. Además, los valores máximos, tanto en tiempo como en *gap*, son menores.

Si nos centramos en las 48 instancias resueltas por ambos, *EXP-CPX-C1-B* tiene un tiempo promedio de 359.55 segundos, mientras que *EXP-CPX-C1C2-B* de 243.24 segundos.

Cabe señalar que, en todas las instancias, todos los algoritmos finalizan teniendo como mejor solución encontrada a la solución óptima. Esto muestra que, en el caso de instancias no resueltas, la dificultad proviene de no poder ajustar la cota inferior.

Este análisis nos confirma que *EXP-CPX-C1C2-B* es la mejor opción y sobre ella seguiremos construyendo más herramientas para eficientizar el algoritmo desarrollado.

6.5.5. Evaluación del modelo EXP con heurísticas

En el conjunto de instancias utilizadas para experimentar con el algoritmo hemos notado que la dificultad no proviene de encontrar soluciones factibles, sino de ajustar la cota inferior. Las soluciones factibles proceden de la aplicación de heurísticas primales por parte de CPLEX o porque resulta entera la solución de la relajación. Por lo tanto, las herramientas de CPLEX parecerían ser suficientes y una heurística inicial y/o primal no cumpliría el rol de encontrar mejores soluciones para el caso de instancias donde no se alcance el óptimo. Sin embargo, podría cambiar la performance si estas soluciones se encontraran más rápidamente en el proceso de recorrido del árbol de búsqueda.

Con este objetivo en mente, hemos experimentado con varios criterios respecto a heurística inicial y/o primal, tomando como base el algoritmo *EXP-CPX-C1C2-B* (que tiene los parámetros de heurísticas por defecto de CPLEX).

- *EXP-CPX-C1C2-B-NH*: sin ningún tipo de heurística inicial ni primal.
- *EXP-CPX-C1C2-B-i*: con heurística inicial, sin heurística primal
- *EXP-CPX-C1C2-B-iPP*: con heurística inicial y heurística primal propia.
- *EXP-CPX-C1C2-B*: heurísticas por defecto de CPLEX
- *EXP-CPX-C1C2-B-iPC*: con heurística inicial y heurísticas de CPLEX.

De los resultados mostrados en 6.7, podemos notar que *EXP-CPX-C1C2-B-NH* es la versión que menor cantidad de instancias resuelve y su tiempo promedio, así como también la media geométrica, es mayor que en el resto de los algoritmos. Esto comprueba la necesidad de tener algún tipo de heurística, ya sea inicial y/o

		EXP-CPX-C1C2-B-NH		*EXP-CPX-C1C2-B-i*		*EXP-CPX-C1C2-B-iPP*		*EXP-CPX-C1C2-B*		*EXP-CPX-C1C2-B-iPC*	
		tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap
random	baja	101.43(3)	0.34(3)	1219.15(4)	0.35(2)	550.78(4)	0.36(2)	334.37(4)	0.30(2)	796.33(4)	0.36(2)
	media	0.47(6)	-	0.26(6)	-	0.27(6)	-	3.90(6)	-	0.40(6)	-
	alta	320.65(2)	0.80(4)	286.78(2)	1.22(4)	784.39(2)	1.08(4)	279.87(2)	1.04(4)	419.33(2)	1.01(4)
$\Delta + 2$		1.89(4)	-	5.28(4)	-	4.10(4)	-	2.64(4)	-	4.03(4)	-
regular	baja	714.96(10)	-	404.89(10)	-	674.80(10)	-	365.71(10)	-	373.74(10)	-
	media	537.06(10)	0.87(2)	222.45(12)	-	374.79(12)	-	223.98(12)	-	273.69(12)	-
	alta	274.37(12)	-	373.38(12)	-	263.93(12)	-	327.77(12)	-	269.66(12)	-
Promedio		356.77(47)	0.66(9)	333.43(50)	0.92(6)	364.05(50)	0.84(6)	244.19(50)	0.79(6)	286.00(50)	0.79(6)
Med Geom		121.64(47)	0.64(9)	104.86(50)	0.87(6)	135.48(50)	0.78(6)	109.94(50)	0.75(6)	96.88(50)	0.74(6)
Máximo		1932.4	1.07	2489.49	1.35	2562.94	1.71	974.05	1.19	3003.46	1.67
Mínimo		0.11	0.24	0.11	0.24	0.12	0.24	0.18	0.24	0.1	0.32

Cuadro 6.7. Experimentación con heurísticas sobre *EXP-CPX-C1C2-B*

primal. El resto de los algoritmos alcanza la optimalidad en la misma cantidad de instancias. *EXP-CPX-C1C2-B-iPP* no muestra buenos valores de media ni de media geométrica, al igual que *EXP-CPX-C1C2-B-i*.

En el caso de *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* y *EXP-CPX-C1C2-B*, las métricas utilizadas para compararlos no son del todo concluyentes.

Si consideramos el tiempo promedio, *EXP-CPX-C1C2-B* es el algoritmo que tiene menor valor, seguido por *EXP-CPX-C1C2-B-iPC*. Sin embargo, si tenemos en cuenta la media geométrica, es superior *EXP-CPX-C1C2-B-iPC*.

Restringido a las instancias que resuelven ambos algoritmos (49), la media en ambos se diferencia en apenas 1 segundo (230.54 *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* vs 229.29 *EXP-CPX-C1C2-B*). Analizando con más detalle los resultados, de estas 49 instancias, *EXP-CPX-C1C2-B* resuelve más rápido 20 instancias con un promedio de 43.79 % de mejora. En las 29 restantes, *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* es un 46.86 % más rápido. Esta métrica, por lo tanto, favorece a *EXP-CPX-C1C2-B-iPC*.

El máximo tiempo de una instancia resuelta por *EXP-CPX-C1C2-B* es 974.05 y 3003.46 en el caso de *EXP-CPX-C1C2-B-iPC*. Cabe destacar que la instancia de 3003.46 segundos es la primera vez que se resuelve a optimalidad. En cuanto a un percentil del 90 %, *EXP-CPX-C1C2-B* tiene un valor de 701.84, mientras que *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* tiene un valor de 643.78.

También analizamos el tiempo que tarda cada algoritmo en encontrar la solución óptima. En promedio, *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* lo hace en 25.25 segundos, mientras que *EXP-CPX-C1C2-B* tiene un promedio de 48.55 segundos. La media geométrica es de 12.74 vs 21.10, con percentil al 0.9 de 62.92 vs 80.28 y porcentaje promedio de mayor rapidez de 67.54 % vs 41.55 %, respectivamente. En 34 instancias, *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* encuentra la mejor solución más rápido que *EXP-CPX-C1C2-B*. En menos de 10 segundos, *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* encuentra la mejor solución en 12 instancias y *EXP-CPX-C1C2-B* en 9. En 60 segundos, *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* encuentra la mejor solución en 28 instancias, en cambio *EXP-CPX-C1C2-B* lo hace en 18.

En cuanto a nodos del árbol, en promedio *EXP-CPX-C1C2-B* recorre 6092.44 nodos para encontrar la mejor solución, mientras que *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* recorre 4191.03. Estos valores, si bien no son determinantes en la performance final del algoritmo en las instancias consideradas, nos dan una visión sobre que, en caso de que se acotara el tiempo límite o el tamaño del árbol, las soluciones encontradas por *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* serían de mejor calidad.

En definitiva, las diferentes métricas utilizadas no nos permiten concluir en forma terminante acerca de la superioridad entre estos dos algoritmos.

Para tener una visión más clara, experimentamos con un tiempo límite mayor (6 horas) para evaluar si alguna de las estrategias lograba resolver las instancias que en una hora quedaron sin resolver. Tenemos 7 instancias random: 3 de baja densidad y 4 de alta densidad. En la tabla 6.8 mostramos los resultados.

Dentro de las instancias de baja densidad, notar que la instancia bc-43-1-1 es resuelta por *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* en 3557.95 segundos cuando con el tiempo límite de 3600 no se resolvió. De la misma manera, la instancia bc-43-6-1 se resolvía en 3003.46 segundos y ahora en 2976.46. Esta diferencia de pocos segundos puede explicarse debido a alguna carga extra en el sistema operativo al momento de realizar la experimentación. Es decir, podríamos considerar que, dentro de 3600 segundos, *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* es capaz de resolver una instancia más que *EXP-CPX-C1C2-B*. En el caso de *EXP-CPX-C1C2-B*, se logra resolver una instancia más que antes, pero requiriendo más de 2 horas.

A partir de estos resultados, decidimos inclinarnos por incluir una heurística inicial junto a las heurísticas provistas por CPLEX.

	EXP-CPX-C1C2-B		*EXP-CPX-C1C2-B-iPC*	
	tiempo	gap	tiempo	gap
bc-43-1-1	953.26	0.00	3557.95	0.00
bc-43-4-1	21600	0.32	21600	0.29
bc-43-6-1	8384.62	0.00	2976.46	0.00
bc-12-1-9	21600	0.94	21600	0.57
bc-12-2-9	21600	0.65	21600	0.54
bc-12-3-9	21600	1.16	21600	1.54
bc-12-4-9	21600	0.97	21600	0.45
Promedio	4668.94(2)	0.81(5)	3267.20(2)	0.68(5)
Med Geom	2833.62(2)	0.58(5)	3254.28(2)	0.48(5)
Maximo	8384.62	1.16	3557.95	1.54
Minimo	953.26	0.32	2976.46	0.29

Cuadro 6.8. Experimentación con heurística inicial sobre *EXP-CPX-C1C2-B* con mayor tiempo límite

6.5.6. Evaluación del modelo EXP con estrategias de *branching*

Como última herramienta para agregar a nuestro *Branch and Cut*, hemos considerado diferentes estrategias de *branching* sobre el algoritmo base *EXP-CPX-C1C2-B-iPC*. De acuerdo a lo descripto anteriormente, los algoritmos con los que hemos experimentado dan prioridad a diferentes variables.

En la tabla 6.9 mostramos los resultados (tiempo y *gap*) para las 6 diferentes estrategias propuestas y la estrategia por defecto de CPLEX.

En primer lugar, comparamos a *Br2*, *Br4* y *Br6*, que priorizan las variables x_{ik} con mayor color k y mayor grado del vértice i. Para estas estrategias, observamos que considerar además prioridades en las variables a_{ijk} no otorga ventajas, ya que la cantidad de instancias resueltas es la misma y las métricas de tiempo y *gap* no muestran diferencias significativas. En todos los casos se resuelven las mismas instancias con muy poca diferencia en tiempos. El árbol generado coincide en varias instancias y en otras, las diferencias entre los árboles son de muy pocos nodos.

En el caso de *Br1*, *Br3* y *Br5*, hay una leve ventaja en tiempo promedio al considerar prioridades en las variables a_{ijk}. Sin embargo, si nos enfocamos en la media geométrica, la ventaja es de *Br1*. Las estrategias *Br3* y *Br5* coinciden en las instancias que resuelven y difieren en una instancia respecto a *Br1*. Los árboles de búsqueda generados por *Br3* y por *Br5* son casi iguales, pero difieren con el de *Br1*. En algunas instancias, con *Br1* se generan menos nodos y en otras la medida del árbol es mayor.

Si nos centramos en aquellas resueltas por los tres algoritmos, *Br1* tiene un promedio de 247 segundos y, tanto *Br3* como *Br5*, tienen un promedio de 252 segundos. Entre ellas, no evidenciamos una estrategia superadora.

En cantidad de instancias, estas estrategias tienen un rendimiento similar a la estrategia por defecto de CPLEX. Además, si tenemos en cuenta las otras métricas, observamos que no hay una evidencia clara de una estrategia superadora. Respecto a tiempo promedio, *Br5* sería la mejor, pero en media geométrica, la estrategia por defecto muestra mejor valor.

Considerando como representante del primer grupo a *Br2* y del segundo grupo a la estrategia por defecto, la cantidad de instancias es mayor en el caso de *Br2*. Si nos restringimos a las instancias resueltas por ambos, el tiempo promedio para *Br2* es de 311 segundos y para la estrategia por defecto es 286 segundos.

Para tener una visión más clara, experimentamos con un tiempo límite mayor (6 horas) para evaluar si alguna de las estrategias lograba resolver las instancias que en una hora quedaron sin resolver. En la tabla 6.10 mostramos los resultados. Con la estrategia por defecto, sólo pudo resolverse la instancia que ya resolvía *Br2*, quien además ahora resuelve 3 nuevas instancias en menos de 3 horas.

En conclusión, haber utilizado las variables x_{ik} con prioridad mayor cuanto mayor es el color k y cuanto mayor es el grado del vértice i, es la mejor estrategia de *branching*.

De esta manera, de acuerdo a la experimentación realizada, el algoritmo con mejor performance resulta ser *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* que considera el modelo **EXP**, los cortes de conjuntos de colores (**d-Color** y **(d-1)-Color**), los cortes *blossom*, heurística inicial y estrategia de prioridades de *branching* sobre las variables x_{ik}.

		EXP-CPX-C1C2-B-iPC		*Br1*		*Br2*		*Br3*		*Br4*		*Br5*		*Br6*	
		tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap	tiempo	gap
random	baja	796.32(4)	0.36(2)	1039.13(4)	0.35(2)	857.00(5)	0.39(1)	318.7(4)	0.36(2)	855.93(5)	0.32(1)	315.47(4)	0.39(2)	858.53(5)	0.36(1)
	media	0.4(6)	-	0.36(6)	-	0.32(6)	-	0.34(6)	-	0.32(6)	-	0.345(6)	-	0.32(6)	-
	alta	419.33(2)	1.01(4)	171.48(2)	0.65(4)	140.61(2)	0.60(4)	144.53(2)	1.01(4)	142.31(2)	0.62(4)	146.61(2)	0.60(4)	141.80(2)	1.01(4)
$\Delta + 2$		4.03(4)	-	1.93(4)	-	0.66(4)	-	0.69(4)	-	0.67(4)	-	0.69(4)	-	0.66(4)	-
regular	baja	373.74(10)	-	705.77(10)	-	503.10(10)	-	504.99(10)	-	507.94(10)	-	500.74(10)	-	504.30(10)	-
	media	273.69(12)	-	171.24(12)	-	263.27(12)	-	264.92(12)	-	265.03(12)	-	264.31(12)	-	264.32(12)	-
	alta	269.66(12)	-	148.63(12)	-	274.71(12)	-	276.56(12)	-	276.35(12)	-	276.50(12)	-	275.94(12)	-
Promedio		286.00(50)	0.79(6)	308.11(50)	0.55(6)	314.85(51)	0.56(5)	262.33(50)	0.79(6)	316.56(51)	0.52(5)	261.14(50)	0.56(6)	315.82(51)	0.79(5)
Med Geom		96.88(50)	0.74(6)	101.15(50)	0.55(6)	117.37(51)	0.55(5)	113.69(50)	0.74(6)	117.92(51)	0.51(5)	113.44(50)	0.55(6)	117.78(51)	0.74(5)
Máximo		3003.46	1.67	3392.49	0.75	2877.22	0.81	2169.85	1.67	2870.36	0.8	2148.09	0.81	2884.37	1.67
Mínimo		0.1	0.32	0.1	0.32	0.1	0.39	0.1	0.32	0.1	0.24	0.1	0.39	0.1	0.32

Cuadro 6.9. Experimentación con *branching* sobre *EXP-CPX-C1C2-B-iPC*

	EXP-CPX-C1C2-B-iPC		*Br2*	
	tiempo (3600)	tiempo (21600)	tiempo (3600)	tiempo (21600)
bc-43-1-1	3600	3622.8	500.83	496.92
bc-43-4-1	3600	21600	3600	21600
bc-12-1-9	3600	21600	3600	21600
bc-12-2-9	3600	21600	3600	11666.73
bc-12-3-9	3600	21600	3600	12851.35
bc-12-4-9	3600	21600	3600	11808.99

Cuadro 6.10. Experimentación con *branching* con mayor tiempo límite

6.5.7. *EXP-CPX* vs *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2*

De acuerdo a la experimentación y análisis que hemos realizado, determinamos la mejor manera de administrar los planos de corte, las heurísticas y la estrategia de *branching*. El proceso del desarrollo fue incremental: a partir del modelo **EXP** y sobre un esquema *Branch and Cut*, fuimos incorporando y evaluando diferentes componentes con el objetivo de ir mejorando la performance hasta obtener una configuración completa.

Para concluir y mostrar la eficiencia de nuestra propuesta, realizamos una comparación entre *EXP-CPX* y *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* para dejar clara evidencia del contraste entre el punto de inicio y el final de nuestro trabajo.

Además de las 56 instancias con las que trabajamos durante el desarrollo, consideramos 52 nuevas instancias con mayor cantidad de vértices, que fueron generadas utilizando el mismo procedimiento detallado en el capítulo 3. Las características de estas nuevas instancias son:

- 6 grafos *random* de baja densidad con 48 vértices
- 6 grafos *random* de media densidad con 23 vértices
- 10 grafos *random* de alta densidad con 16-17 vértices
- 8 grafos $\Delta + 2$ con 11 a 18 vértices.
- 8 grafos *4-regulares* de baja densidad con 39 vértices
- 6 grafos *10-regulares* de media densidad con 21 vértices
- 8 grafos *10-regulares* de alta densidad con 14 vértices

En la tabla 6.11 pueden verse los detalles de cada una de las instancias: cantidad de vértices, cantidad de aristas, grado máximo, los diferentes índices cromáticos, cantidad de pares de vértices en conflicto, porcentaje de densidad y de conflictos.

En la tabla 6.12 mostramos los resultados para las instancias que usamos en toda la experimentación y en la tabla 6.13 mostramos los resultados para las nuevas instancias.

Tipo	densidad	Nombre	$\|V\|$	$\|E\|$	$\Delta(G)$	χ'_{av}	Σ'_{av}	s'_{av}	conflictos	%densidad	%conflictos
random	baja	bc-48-1-1	48	122	10	11	460	11	35	10.37 %	28.69 %
		bc-48-2-1	48	118	10	11	448	11	27	10.03 %	22.88 %
		bc-48-3-1	48	115	9	10	391	10	47	9.78 %	40.87 %
		bc-48-4-1	48	120	9	10	432	10	36	10.20 %	30.00 %
		bc-48-5-1	48	215	15	15	1231*	16*	48	18.28 %	22.33 %
		bc-48-6-1	48	138	12	12	565	12	33	11.73 %	23.91 %
	media	bc-23-1-5	23	113	13	14	665*	14*	28	40.94 %	24.78 %
		bc-23-2-5	23	139	15	16	976*	16*	29	50.36 %	20.86 %
		bc-23-3-5	23	157	17	18	1222*	18*	31	56.88 %	19.75 %
		bc-23-4-5	23	162	17	17	1287	17	33	58.70 %	20.37 %
		bc-23-5-5	23	161	17	18	1277*	18*	40	58.33 %	24.84 %
		bc-23-6-5	23	121	13	13	741	14	36	43.84 %	29.75 %
	alta	bc-16-8-9	16	108	15	16	801	17	28	79.41 %	25.93 %
		bc-16-10-9	16	104	14	15	749	16	35	76.47 %	33.65 %
		bc-16-17-9	16	111	15	16	840	17	40	81.62 %	36.04 %
		bc-16-25-9	16	110	15	16	830	17	29	80.88 %	26.36 %
		bc-17-3-9	17	126	16	17	1058*	17*	56	82.35 %	44.44 %
		bc-17-7-9	17	118	15	16	937	17	38	77.12 %	32.20 %
		bc-17-11-9	17	123	16	17	1014	18	48	80.39 %	39.02 %
		bc-17-13-9	17	128	16	17	1094*	18*	43	83.66 %	33.59 %
		bc-17-18-9	17	119	16	16	950*	16*	34	77.78 %	28.57 %
		bc-17-20-9	17	117	15	16	926	17	55	76.47 %	47.01 %
$\Delta+2$	alta	inst_11_9	11	46	9	11	243	11	44	69.70 %	95.65 %
		inst_12_10	12	56	10	12	324	12	54	71.79 %	96.43 %
		inst_13_11	13	67	11	13	420*	13*	65	73.63 %	97.01 %
		inst_14_12	14	79	12	14	538	14	77	75.24 %	97.47 %
		inst_15_13	15	92	13	15	669*	17*	90	76.67 %	97.83 %
		inst_16_14	16	106	14	16	830	16	104	77.94	98.11 %
		inst_17_15	17	121	15	17	1000*	18*	119	79.08 %	98.35 %
		inst_18_16	18	137	16	18	1212	18	135	80.12 %	98.54 %
regular	baja	kinst-39-4-1	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
		kinst-39-4-2	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
		kinst-39-4-3	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
		kinst-39-4-4	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
		kinst-39-4-5	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
		kinst-39-4-6	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
		kinst-39-4-7	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
		kinst-39-4-8	39	78	4	5	216	5	78	10.00 %	100.00 %
	media	kinst-10-021-1	21	105	10	11	610	12	105	45.45 %	100.00 %
		kinst-10-021-2	21	105	10	11	609	11	105	45.45 %	100.00 %
		kinst-10-021-3	21	105	10	11	609	11	105	45.45 %	100.00 %
		kinst-10-021-4	21	105	10	11	609	11	105	45.45 %	100.00 %
		kinst-10-021-5	21	105	10	11	609	11	105	45.45 %	100.00 %
		kinst-10-021-6	21	105	10	11	610	12	105	45.45 %	100.00 %
	alta	kinst-14-10-1	14	70	10	11	399*	13*	70	66.67 %	100.00 %
		kinst-14-10-2	14	70	10	11	397	12	70	66.67 %	100.00 %
		kinst-14-10-3	14	70	10	11	397	12	70	66.67 %	100.00 %
		kinst-14-10-4	14	70	10	11	400*	12*	70	66.67 %	100.00 %
		kinst-14-10-5	14	70	10	11	399*	13*	70	66.67 %	100.00 %
		kinst-14-10-6	14	70	10	11	397	12	70	66.67 %	100.00 %
		kinst-14-10-7	14	70	10	11	399*	13*	70	66.67 %	100.00 %
		kinst-14-10-8	14	70	10	11	400*	12*	70	66.67 %	100.00 %

Cuadro 6.11. Nuevo conjunto de instancias de prueba

En el caso del primer conjunto de instancias, el algoritmo *EXP-CPX* resuelve el 78 %, mientras que *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* logra resolver el 91 %. Tanto en promedio como en media geométrica de tiempo y *gap*, los valores de *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* son menores.

Las 44 instancias resueltas por *EXP-CPX* con un tiempo promedio de 476.10 segundos, también son resueltas por *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* pero con un tiempo promedio de 202 segundos. En 30 de estas instancias, la reducción del tiempo es superior al 56 % y en las 14 restantes, el tiempo de *EXP-CPX* es 37 % mejor.

En las 5 instancias no resueltas por ambos, el promedio de *gap* es 0.6 vs 0.7 en favor de *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* y en todos los casos se obtuvo la solución óptima y falló mejorar la cota dual.

Las 7 instancias que no logró resolver *EXP-CPX*, terminan con un promedio de *gap* de 1.20 % y en 2 de ellas, no se encontró la solución óptima.

En el caso del segundo conjunto de instancias, al aumentar la cantidad de vértices del grafo, se evidencia una superioridad aún más notoria del algoritmo *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2*. El algoritmo resuelve el 69 % de las instancias mientras que *EXP-CPX* sólo resuelve el 23 %.

Las 12 instancias resueltas por *EXP-CPX*, con un tiempo promedio de 786.32 segundos y media geométrica de 568.49, también son resueltas por *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* con un tiempo promedio de 965.55 segundos y media geométrica de 534.93. En 6 de estas instancias, *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* empeora los tiem-

		EXP-CPX		*EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
	baja	499.13(5)	0.40(1)	857.00(5)	0.39(1)
random	media	0.68(6)	-	0.32(6)	-
	alta	1098.88(1)	0.67(5)	140.61(2)	0.60(4)
$\Delta + 2$	alta	456.63(4)	-	0.66 (4)	-
	baja	1317.96(5)	1.41(5)	503.10(10)	-
regular	media	265.15(12)	-	263.27(12)	-
	alta	522.90(11)	0.98(1)	274.71(12)	-
Promedio		476.10(44)	0.98(12)	314.85(51)	0.56(5)
Med Geom		173.86(44)	0.90(12)	117.37(51)	0.55(5)
Máximo		3402.22	2.12	2877.22	0.81
Mínimo		0.12	0.33	0.1	0.39

Cuadro 6.12. Cplex vs nuestro algoritmo-Primer conjunto de instancias

pos en un 120 %, mientras que las restantes 6, *EXP-CPX* empeora los tiempos en un 232 %.

Las 24 instancias no resueltas por *EXP-CPX* pero sí por *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2*, tienen un tiempo promedio de 585.15 segundos y media geométrica de 206.76 segundos, con máximo de 2226.78 y mínimo de 2.62 segundos. De las 24 instancias, 17 se resuelven por debajo de los 900 segundos (menos de un cuarto del tiempo límite). El *gap* promedio de *EXP-CPX* para estas instancias es superior al 1 %, alcanzando en algunas instancias valores mayores al 4 %. Es decir, el algoritmo no pareceria encontrarse próximo a finalizar, si bien en la mayoría de las instancias encontró la solución óptima.

Con cualquiera de las métricas que utilizamos para evaluar la eficiencia (cantidad de instancias a optimalidad, promedio y media geométrica de tiempo y *gap*), el algoritmo *EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2* es superior a *EXP-CPX*. Esta superioridad se acentúa a medida que aumentamos la cantidad de vértices del grafo. En algunos casos, se disminuye considerablemente el tiempo necesario para alcanzar la optimalidad. En otros casos, se logra resolver instancias que no se resuelven con CPLEX dentro del tiempo límite planteado y por último, en aquellas instancias no resueltas por ninguno de los algoritmos, el *gap* final es menor

Los resultados no dejan dudas sobre que el desarrollo realizado fue exitoso. La buena performance proviene de una buena interacción entre los componentes del algoritmo por sobre la acción de cada componente por separado, si bien las desigualdades utilizadas como planos de corte son las que mayor impacto tienen.

		EXP-CPX		*EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
random	baja	239.03(3)	0.41(3)	1187.15(5)	0.39(1)
	media	-	0.88(6)	150.10(2)	0.37(4)
	alta	1523.16(1)	0.76(9)	1145.26(7)	0.19(3)
$\Delta + 2$	alta	-	1.04(8)	64.93(5)	1.47(3)
regular	baja	842.02(6)	1.13(2)	697.84(8)	-
	media	-	2.82(6)	59.27(6)	-
	alta	1071.78(2)	0.86(6)	1704.90(3)	1.01(5)
Promedio		786.32(12)	1.15(40)	711.95(36)	0.75(16)
Med Geom		568.49(12)	1.15(40)	284.74(36)	0.74(16)
Máximo		1523.16	4.01	2940.18	1.65
Mínimo		42.03	0.17	2.62	0.09

Cuadro 6.13. Cplex vs nuestro algoritmo-Segundo conjunto de instancias

7. Coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles

En esta sección trabajaremos con el problema de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Recordemos que el objetivo de este problema es minimizar la cantidad de colores necesarios en un coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles. No encontramos en la literatura algoritmos que lo resuelvan, es por ello que vamos a analizar el comportamiento de lo desarrollado para el **AVDSECP** en este problema. El objetivo es mostrar que nuestro algoritmo también resulta eficiente para el caso de **AVDECP**.

7.1. Modelo EXP$^{\mathbf{r}}$ para el problema AVDECP

Para adaptar el modelo **EXP** al caso de minimizar la cantidad de colores, vamos a agregar variables r_k binarias que indican si el color k está siendo utilizado en el coloreo. De esta manera, buscaremos minimizar la suma de estas variables. En este problema definimos $M = \{1, \ldots, min(|E|, n+1)\}$ como el conjunto de colores que pueden tomar las aristas, teniendo en cuenta que existe una cota superior teórica de $n + 1$.

El modelo **EXP**$^{\mathbf{r}}$ queda definido de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k \in M} r_k \\
\text{sujeto a} \quad & \\
& \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} a_{uvk} = x_{uk} && \forall u \in V, k \in M && (7.1)\\
& \sum_{k \in M} a_{uvk} = 1 && \forall uv \in E && (7.2)\\
& \sum_{k \in S} x_{uk} + x_{vk} \leq 2deg(u) - 1 && {\scriptstyle S \subseteq M, |S| = deg(u) \atop uv \in E, deg(u) = deg(v)} && (7.3)\\
& x_{uk} \leq r_k && \forall u \in V, k \in M && (7.4)\\
& a_{uvk} \in \{0,1\} && \forall uv \in E, k \in M\\
& x_{uk} \in \{0,1\} && \forall u \in V, k \in M\\
& r_k \in \{0,1\} && \forall k \in M
\end{aligned}
$$

7.2. Modelo POLI$^{\mathbf{r}}$ para el problema AVDECP

De la misma manera que hicimos en el caso anterior, para adaptar el modelo **POLI** al caso de minimizar la cantidad de colores, vamos a agregar variables r_k binarias que indican si el color k está siendo utilizado en el coloreo.

El modelo **POLI**$^{\mathbf{r}}$ queda definido de la siguiente manera:

$$\min \quad \sum_{k \in M} r_k$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in M} w_{uvk} &\geq 1 && \forall uv \in E, deg(u) = deg(v) && (7.5)\\
w_{uvk} &\leq x_{uk} + x_{vk} && \forall uv \in E, deg(u) = deg(v), k \in M && (7.6)\\
w_{uvk} &\leq 2 - (x_{uk} + x_{vk}) && \forall uv \in E, deg(u) = deg(v), k \in M && (7.7)\\
x_{uk} &= \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} a_{uvk} && \forall u \in V, k \in M && (7.8)\\
\sum_{k \in M} a_{uvk} &= 1 && \forall uv \in E && (7.9)\\
x_{uk} &\leq r_k && \forall u \in V, k \in M && (7.10)\\
a_{uvk} &\in \{0,1\} && \forall uv \in E, k \in M\\
x_{uk} &\in \{0,1\} && \forall u \in V, k \in M\\
w_{uvk} &\in \{0,1\} && \forall uv \in E, deg(u) = deg(v), k \in M r_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in M
\end{aligned}$$

7.3. Fortalecimiento de los modelos

Debido a ciertas particularidades de **AVDECP**, podemos aplicar algunos procesos con el fin de ajustar los modelos y eliminar soluciones que no resultan óptimas o que tienen alguna equivalente que permanece en el poliedro. Estos procesos son descriptos a continuación.

- Preprocesamiento

  El objetivo es reducir la cantidad de variables de los modelos. Por un lado, sabemos que $n+1$ es una cota superior de la cantidad de colores necesarias para obtener un coloreo propio de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Esto nos permite eliminar todas las variables que tenga un índice de color entre $n+2$ y m. Esto no fue posible en el caso de **AVDSECP** ya que, hasta el momento, no se conoce una cota superior de la cantidad de colores utilizados por la solución óptima.

Por otro lado, una diferencia importante con el problema **AVDSECP**, es que una vez que se conoce una solución válida con k colores, entonces ya no resulta necesario explorar soluciones que tengan más de k colores. De esta forma, utilizando la solución de una heurística inicial podemos restringir la cantidad de colores al valor obtenido por la heurística y conseguir así reducir el tamaño de los modelos.

Además, como los colores son indistinguibles, podemos fijar el color de algunas aristas en el grafo. En particular, se pueden asignar los colores de las aristas incidentes a alguno de los vértices con mayor grado. De esta forma los modelos no deben contar con las variables asociadas a dichas aristas, por lo que se reduce su tamaño.

- Rompimiento de simetría

Tal como se mencionó anteriormente, los colores en el problema **AVDECP** son indistinguibles. Debido a esto podemos afirmar que, para todo punto factible, cualquier permutación de los colores también será factible y con igual función objetivo. Este problema de simetría puede hacer que el algoritmo *Branch and Cut* tenga un bajo rendimiento, ya que hay una gran cantidad de hojas del árbol de búsqueda que representan soluciones equivalentes o simétricas. Siendo conscientes de ello y que este proceso ha dado muy buen resultado en otros problemas de coloreos de grafos ([51, 46]), utilizamos diferentes desigualdades válidas que nos permitan reducir la cantidad de soluciones, eliminando algunas soluciones simétricas.

Analizamos distintos criterios para romper la simetría:

1. Definimos un orden de los colores, solo se puede utilizar un color si el anterior fue utilizado.

$$r_k \geq r_{k+1} \qquad \forall k \in M \tag{7.11}$$

2. Sea la función $\theta : E \to \mathbb{N}$ una enumeración de las aristas. Utilizamos este orden para asignar colores. Una arista puede tener el color k solo

si existe una arista menor con el color $k-1$.

$$a_{ijk} \leq \sum_{\substack{uv \in E \\ k-1 \leq \theta(uv) < \theta(ij)}} a_{uvk-1} \tag{7.12}$$

3. Dado un coloreo cualquiera de un grafo hay múltiples aristas asignadas a un mismo color. Observando esto, el tercer criterio estudiado es ordenar los conjuntos de aristas que tienen el mismo color de menor a mayor cardinal y seguir ese orden para la asignación de color. Es decir, cuánto más grande sea el cardinal del conjunto de aristas con un mismo color, menor será el número de ese color. De esta forma incluimos el primer criterio y, además, reducimos algunos casos de simetría adicionales.

   Manteniendo este propósito, pero logrado mediante restricciones menos densas, consideramos la cantidad de vértices incidentes a aristas que tienen el mismo color, en lugar de explícitamente las aristas.

$$\sum_{v \in V} x_{vk} \geq \sum_{v \in V} x_{vk+1} \qquad \forall k \in M \tag{7.13}$$

   Al utilizar el preprocesamiento nos encontramos que, al fijar los colores de algunas aristas, puede ocurrir que los coloreos óptimos no satisfagan esta desigualdad. Por lo tanto, en las versiones del algoritmo que tienen activo el preprocesamiento, este rompimiento de simetría se aplica sólo a los colores que no fueron asignados durante dicho procedimiento.

7.4. Experiencia computacional

En primer lugar, tal como lo hicimos en el caso de **AVDSECP**, comparamos computacionalmente los modelos $\mathbf{POLI^r}$ y $\mathbf{EXP^r}$. Implementamos un *Branch and Cut* utilizando las librerías del paquete CPLEX 12.7, con un solo thread y todos los parámetros por defecto. El código se desarrolló en C++ con la interfaz en C de CPLEX. En el caso del modelo $\mathbf{EXP^r}$, las restricciones 7.3 fueron tratadas como cortes, incorporándose al modelo bajo demanda en el caso de que la solución de la relajación lineal asociada a un nodo tenga coordenadas enteras. La búsqueda de restricciones violadas se realiza en forma exhaustiva. Todas las ejecuciones fueron realizadas con un tiempo límite de 3600 segundos y utilizando $n+1$ como cota superior de número de colores. Denotamos *POLI^r-CPX* y *EXP^r-CPX* a dichos algoritmos.

En la tabla 7.1 mostramos los resultados correspondientes a las 56 primeras instancias que consideremos en los experimentos anteriores. Se puede observar que, al contrario de lo que pasaba en **AVDSECP**, el algoritmo *POLI^r-CPX* es superior a *EXP^r-CPX* ya que logra resolver dos instancias más (20 vs 18). Además, entre las instancias resueltas por ambos, el promedio de tiempo es 656.78 para *POLI^r-CPX*, mientras que asciende a 788.87 para *EXP^r-CPX*.

Algo interesante a destacar en las instancias no resueltas es cómo se comporta el *gap* en este problema. Por un lado, la solución a cualquier coloreo de aristas tiene una cota inferior de Δ. Por otro lado, en el problema **AVDECP** existe una conjetura que establece una cota superior a la cantidad de colores de $\Delta+2$. En las instancias que utilizamos no encontramos una que refute la conjetura. Entonces, independientemente de la cantidad de vértices, aristas y conflictos en el grafo, la diferencia entre la cota inferior y el óptimo es un valor entre 0 y 2. Es por eso que para este problema decidimos reportar para las instancias no resueltas la diferencia absoluta entre la cota inferior y la mejor solución obtenida como la métrica que mide cuán satisfactoria es una instancia no resuelta. Como dicha diferencia en las instancias no resueltas tiene un mínimo de 1, consideramos que es más justa para hacer las comparaciones entre los resultados.

Respecto al *gap* entre las instancias no resueltas, los rendimientos son mixtos. En algunos tipos de instancias son comparables, sin mayores diferencias entre la mejor solución que obtienen y en la cota inferior. En las instancias *random* de alta densidad, *POLI^r-CPX* termina con un *gap* menor, en cambio en instancias regulares de baja densidad ocurre lo contrario. En el primer caso, se debe a que *POLI^r-CPX* tiene una cota inferior de mejor calidad, en cambio en el segundo caso, la calidad de las mejores soluciones encontradas es inferior.

No encontramos que la diferencia entre ambos algoritmos sea tan significativa como lo es en el caso de **AVDSECP**, donde hay una desigualdad muy marcada ya que con el modelo **EXP** se resuelven 32 instancias más que con el modelo **POLI**.

Para analizar si esta tendencia se ratifica en instancias de mayor tamaño, experimentamos con 46 de las 52 instancias del segundo conjunto que consideramos para **AVDSECP**. Las 6 instancias que omitimos corresponden a instancias $\Delta + 2$ con al menos 12 vértices que no pudieron ser resueltas con ningún algoritmo, y por lo tanto, no aportan información que no pueda ser ya obtenida de las 46 instancias consideradas.

En la tabla 7.2 mostramos los resultados correspondientes a este segundo conjunto de instancias. Se puede observar que la superioridad del algoritmo *POLI^r-CPX* se acentúa, ya que logra resolver el doble de instancias (20 vs 10). Entre las instancias resueltas por ambos, el promedio de tiempo es 559.55 segundos para *POLI^r-CPX* y 147.10 segundos para *EXP^r-CPX*. Respecto al *gap* entre las instancias no resueltas, en general, *POLI^r-CPX* tiene mayor valor de *gap*, acentuándose la diferencia en las instancias regulares donde hay casos con una diferencia absoluta de valor cuatro veces mayor. Cabe destacar que el valor de la cota inferior suele ser muy similar para ambos algoritmos, sin embargo, la diferencia mayor entre ellos es la calidad de la mejor solución encontrada.

Sin descartar ninguno de los algoritmos, continuamos la experimentación agregando la etapa de preprocesamiento en ambos casos.

En primer lugar, informamos en las tablas 7.3 y 7.4 los porcentajes de reducción en la cota superior y en el tamaño del modelo que se logra con este proceso. Cabe mencionar que en el caso del modelo *EXP^r* no se contabilizaron las restricciones exponenciales, si bien también el algoritmo de separación se ve afectado por la

		POLI^r-CPX		*EXP^r-CPX*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
	baja	-	1.00(6)	-	1.00(6)
random	media	140.63 (6)	-	454.89(6)	-
	alta	39.49(2)	1.00(4)	10.32(1)	1.40(5)
$\Delta + 2$	alta	833.96(1)	1.00(3)	1316.83(1)	1.42(3)
	baja	-	2.20(10)	-	1.10(10)
regular	media	-	1.00(12)	-	1.00(12)
	alta	950.34(11)	1.00(1)	1014.33(10)	1.00(2)
Promedio		610.52	1.33	788.87	1.11
Med Geom		282.38	1.24	438.68	1.09
Máximo		2539.47	3.00	1834.28	2.00
Mínimo		0.23	1.00	0.03	1.00

Cuadro 7.1. Comparación modelo **POLI$^{\mathbf{r}}$** vs **EXP$^{\mathbf{r}}$**-Primer conjunto de instancias

		POLI^r-CPX		*EXP^r-CPX*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
random	baja	140.67(2)	1.00(4)	3.14(2)	1.00(4)
	media	30.15(2)	1.00(4)	0.59(2)	1.00(4)
	alta	1309.69(9)	1.00(1)	288.81(6)	1.00(4)
$\Delta + 2$	alta	-	1.00(2)	-	1.70(2)
regular	baja	-	2.50(8)	-	1.38(8)
	media	-	1.83(6)	-	1.00(6)
	alta	2342.58(7)	1.00(1)	-	1.00(8)
Promedio		1426.34	1.65	174.03	1.12
Media Geom		687.12	1.48	44.73	1.09
Máximo		2927.94	4.00	814.68	2.00
Mínimo		12.03	1.00	0.58	1.00

Cuadro 7.2. Comparación modelo **POLI$^{\mathbf{r}}$** vs **EXP$^{\mathbf{r}}$**-Segundo conjunto de instancias

disminución de la cota superior de colores. Debido a las características de los modelos, el porcentaje de disminución en la cota se traslada en forma directa a la cantidad de variables y en un porcentaje levemente menor a la de restricciones. Como se puede apreciar, el impacto de esta etapa es muy significativo, logrando una reducción importante en la mayoría de las instancias. Como era de esperar, a mayor densidad menor es el impacto.

En la tabla 7.5 mostramos los resultados de resolver los modelos preprocesados utilizando el algoritmo por defecto de CPLEX. Denotamos *POLI^r-CPX-Pre* y *EXP^r-CPX-Pre* a las versiones de cada algoritmo.

En 15 instancias, la solución inicial no es óptima. Además, en ningún caso coincide con Δ, por lo cual no se puede afirmar que sea óptima o no. Al finalizar los algoritmos, en todas las instancias se tiene como mejor solución a la óptima.

		Cota	**POLI$^{\mathbf{r}}$-Pre**	**EXP$^{\mathbf{r}}$-Pre**
		%red	%redFilas	%redFilas
random	baja	77.65	76.50	75.57
	media	46.43	44.76	42.82
	alta	2.56	2.44	2.15
$\Delta + 2$	alta	10.68	10.20	9.31
regular	baja	85.50	84.53	83.13
	media	45.10	43.96	40.77
	alta	14.10	13.63	12.03
Promedio		42.29	41.42	39.74
Máximo		85.71	84.7	83.4
Minimo		0.00	0.00	0.00

Cuadro 7.3. Reducción post preprocesamiento-Primer conjunto de instancias

		Cota	**POLI^r-Pre**	**EXP^r-Pre**
		%red	%redFilas	%redFilas
	baja	75.85	74.78	73.71
random	media	31.94	30.71	28.48
	alta	7.39	7.06	6.20
$\Delta + 2$	alta	8.01	7.73	6.85
	baja	87.50	86.64	85.39
regular	media	46.26	45.37	40.91
	alta	20.00	19.41	17.23
Promedio		40.74	39.9	38.16
Máximo		87.50	86.64	85.39
Minimo		5.56	5.29	4.62

Cuadro 7.4. Reducción post preprocesamiento-Segundo conjunto de instancias

		POLI^r-CPX-Pre		*EXP^r-CPX-Pre*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
	baja	0.10	-	0.04	-
random	media	0.01	-	0.01	-
	alta	0.06(2)	1.00(4)	0.05(2)	1.00(4)
$\Delta + 2$	alta	120.83(3)	1.00(1)	82.97(3)	1.00(1)
	baja	0.07	-	6.89	-
regular	media	894.35	-	0.35	-
	alta	1010.02	-	18.14	-
Promedio		444.13	1.00	10.59	1.00
Media Geom		34.85	0.71	2.54	0.51
Máximo		3454.04	1.00	243.52	1.00
Mínimo		0	1.00	0	1.00

Cuadro 7.5. Utilizando preprocesamiento - Primer conjunto de instancias

El impacto del preprocesamiento es muy significativo, tanto en *POLI^r-CPX-Pre* como en *EXP^r-CPX-Pre*. El número de instancias resueltas a optimalidad es dos veces y media mayor que sin preprocesamiento y entre los algoritmos, difieren en solo una instancia a favor de *EXP^r-CPX-Pre*. Bajo este criterio, los dos algoritmos tienen una performance bastante pareja. Sin embargo, si consideramos las 50 instancias resueltas por los dos, el tiempo promedio de *EXP^r-CPX-Pre* es de 10.77 segundos mientras que con *POLI^r-CPX-Pre* el tiempo promedio es 444.12 segundos. Hay tiempos muy pequeños debido a que el 45 % de las instancias se resuelven en nodo raíz (en ambos algoritmos). Esto ocurre principalmente en instancias *random* de media y baja densidad e instancias regulares de baja y media.

Para analizar si esta tendencia se ratifica en instancias de mayor tamaño, en la tabla 7.6 mostramos los resultados para el segundo conjunto de instancias. Podemos observar que las diferencias entre los dos algoritmos con preprocesamiento se acrecientan.

Con el algoritmo *EXP^r-CPX-Pre* se resuelven 44 de las 46 instancias, mientras que con *POLI^r-CPX-Pre* se resuelven 39. El tiempo promedio para *EXP^r-CPX-Pre* es 98.50 segundos y para *POLI^r-CPX-Pre* es 416.15 segundos. Si nos concentramos en las 39 instancias resueltas por ambos, el tiempo promedio de *EXP^r-CPX-Pre* es 110.45 segundos. Estos números confirman la superioridad del algoritmo *EXP^r-CPX-Pre*, tanto en cantidad de instancias resueltas como en tiempo promedio.

Tomando como base *EXP^r-CPX-Pre*, queremos evaluar ahora si vale la pena incorporar al algoritmo los planos de corte y estrategia de *branching* que utilizamos en

		POLI^r-CPX-Pre		*EXP^r-CPX-Pre*	
		tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
random	baja	1.88(6)	-	0.05(6)	-
	media	0.94(6)	-	0.18(6)	-
	alta	0.63(10)	-	27.42(10)	-
$\Delta + 2$	alta	-	1.00(2)	-	1.00(2)
regular	baja	0.11(8)	-	79.84(8)	-
	media	1870.07(3)	1.00(3)	5.00(6)	-
	alta	1766.00(6)	1.00(2)	423.77(8)	-
Promedio		416.16	1.00	98.51	1.00
Media Geom		22.66	5.83	8.67	1.56
Máximo		3372.05	1.00	3383.90	1.00
Mínimo		0.00	1.00	0.00	1.00

Cuadro 7.6. Utilizando preprocesamiento - Segundo conjunto de instancias

el caso de **AVDECP**. Denotamos a ese algoritmo *EXP^r-CPX-Pre-BC*. Comenzamos con las 16 instancias que necesitaron al menos de 1 minuto para ser resueltas (9) con preprocesamiento o no se resolvieron (7). Mostramos los resultados en la tabla 7.7.

Con estas componentes extras en el algoritmo *EXP^r-CPX-Pre-BC*, se resuelve 1 instancia más que corresponde a una instancia $\Delta + 2$ de las consideradas difíciles. Sin embargo, lo más significativo es la disminución del tiempo promedio en el caso de las 9 instancias resueltas por ambos: 519.44 segundos vs 6.79 segundos en favor de haber incluido los planos de cortes y la estrategia de *branching*. El impacto mayor se produce porque los cortes en el nodo raíz logran cerrar el gap rápidamente.

Por último, sobre este mismo subconjunto de instancias, experimentamos con los 3 criterios de rompimiento de simetría. Tenemos entonces tres versiones del algoritmo: *EXP^r-CPX-Pre-BC-S1*, *EXP^r-CPX-Pre-BC-S2* y *EXP^r-CPX-Pre-BC-S3*. Reportamos los resultados en la tabla 7.8.

Con cualquiera de los tres criterios, se resuelve una nueva instancia (tipo $\Delta + 2$). Si nos concentramos en las 10 instancias que ya se resolvían, el tiempo promedio es de 242.48 segundos sin incorporar rompimiento de simetría, mientras que con los 3 criterios es de 60.59, 68.72 y 18.2 segundos, respectivamente. En aquellas instancias donde el tiempo era menor a un segundo, no se aprecian diferencias. El impacto mayor está en las instancias que requerían más tiempo. Respecto a la nueva instancia resuelta, el tiempo es de 403.35, 357.87 y 267.69 segundos para cada criterio.

Con estos resultados, podemos afirmar que incorporando el criterio 3 se obtienen los mejores resultados.

Para finalizar y mostrar la eficiencia de nuestra propuesta aún para el caso de **AVDECP**, realizamos una comparación final sobre todas las instancias. El objetivo es mostrar como, a partir de *EXP^r-CPX*, diferentes componentes que proponemos mostraron un impacto muy notorio en la eficiencia del algoritmo. En particular, queremos mostrar que, si bien el preprocesamiento es clave, las otras componentes también influyen positivamente independientemente si se realiza o no este proceso.

	EXP^r-CPX-Pre		*EXP^r-CPX-Pre-BC*	
	tiempo	*gap*	tiempo	*gap*
bc-12-1-9	3600	1	3600	1
bc-12-2-9	3600	1	3600	1
bc-12-3-9	3600	1	3600	1
bc-12-4-9	3600	1	3600	1
bc-17-13-9	271.14	0	**0.32**	0
inst_9_7	243.52	0	**59.15**	0
inst_10_8	3600	1	3600	1
inst_11_9	3600	1	**2363.66**	0
inst_12_10	3600	1	3600	1
n12k10i2	213.05	0	**0.41**	0
kinst-14-10-2	3383.9	0	**1.08**	0
kinst-39-4-2	83.18	0	**0.04**	0
kinst-39-4-5	65.02	0	**0.05**	0
kinst-39-4-6	101.82	0	**0.04**	0
kinst-39-4-7	252.96	0	**0.04**	0
kinst-39-4-8	60.37	0	**0.04**	0

Cuadro 7.7. Agregando cortes y estrategia de *branching*

	EXP^r-CPX-Pre	*EXP^r-CPX-Pre-BC*	*EXP^r-CPX-Pre-BC-S1*	*EXP^r-CPX-Pre-BC-S2*	*EXP^r-CPX-Pre-BC-S3*
bc-12-1-9	3600	3600	3600	3600	3600
bc-12-2-9	3600	3600	3600	3600	3600
bc-12-3-9	3600	3600	3600	3600	3600
bc-12-4-9	3600	3600	3600	3600	3600
bc-17-13-9	271.14	0.32	**0.23**	0.36	0.29
inst_9_7	243.52	59.15	35.75	29.96	**14.15**
inst_10_8	3600	3600	403.35	357.87	**267.69**
inst_11_9	3600	2363.66	568.29	652.99	**164.41**
inst_12_10	3600	3600	3600	3600	3600
n12k10i2	213.05	**0.41**	0.59	1.08	0.68
kinst-14-10-2	3383.9	1.08	**0.9**	1.84	1.01
kinst-39-4-2	83.18	**0.04**	0.05	0.05	0.06
kinst-39-4-5	65.02	0.05	0.05	**0.04**	0.64
kinst-39-4-6	101.82	**0.04**	**0.04**	0.05	0.05
kinst-39-4-7	252.96	**0.04**	0.05	0.79	0.05
kinst-39-4-8	60.37	**0.04**	0.04	0.05	0.66

Cuadro 7.8. Agregando rompiendo de simetría

Consideramos 3 opciones además del algoritmo base (*EXP^r-CPX*):

- *EXP^r-CPX-Pre*: algoritmo que incluye preprocesamiento.
- *EXP^r-CPX-BC-S3*: algoritmo que incluye planos de cortes y el tercer criterio de rompimiento de simetría.
- *EXP^r-CPX-Pre-BC-S3*: algoritmo que incluye preprocesamiento, planos de cortes y el tercer criterio de rompimiento de simetría.

En las tablas 7.9 y 7.10 reportamos los tiempos de cada uno de los algoritmos, así como también la cantidad de instancias resueltas dentro del tiempo límite.

Se puede observar que cuando incluimos los planos de corte y el rompimiento de simetría el número de instancias resueltas se triplica respecto al algoritmo base. Es decir, sin dudas, la inclusión de estas componentes influyen positivamente.

El preprocesamiento marca un umbral tanto en cantidad de instancias resueltas a optimalidad como en tiempo promedio y media geométrica. Sobre este umbral, la incorporación de los otras componentes (planos de corte y el rompimiento de simetría) mejoran todos los criterios de evaluación.

Aún con el algoritmo más efectivo, han quedado instancias de alta densidad sin resolver dentro del tiempo límite. Hemos realizado el ejercicio de ampliar el tiempo a 12hs y no se alcanzó la optimalidad en ningún caso.

Los resultados no dejan dudas que el desarrollo realizado para **AVDSECP**, sumado a componentes propias del problema, se adaptó con éxito a **AVDECP**.

		EXP^r-CPX tiempo	*EXP^r-CPX-Pre* tiempo	*EXP^r-CPX-BC-S3* tiempo	*EXP^r-CPX-Pre-BC-S3* tiempo
	baja	-	0.04(6)	874.81(4)	0.03(6)
random	media	454.89(6)	0.01(6)	4.26(6)	0.01(6)
	alta	10.32(1)	0.05(2)	14.12(2)	0.025(2)
$\Delta + 2$	alta	1316.83(1)	82.97(3)	123.02(1)	70.77(4)
	baja	-	6.89(10)	79.74(10)	0.21(10)
regulares	media	-	0.35(12)	933.24(11)	0.53(12)
	alta	1014.33(10)	18.14(12)	810.06(11)	0.38(12)
Promedio		788.87(18)	10.59(51)	525.55(45)	5.70(52)
Media Geom		438.68	2.55	162.67	1.14
Máximo		1834.28	243.52	3244.14	267.69
Mínimo		0.03	0.00	0.01	0.00
CantOpt		18.00	51.00	45.00	52.00

Cuadro 7.9. Comparación final-Primer conjunto de instancias

		EXP^r-CPX	*EXP^r-CPX-Pre*	*EXP^r-CPX-BC-S3*	*EXP^r-CPX-Pre-BC-S3*
		tiempo	tiempo	tiempo	tiempo
	baja	3.14(2)	0.05(6)	831.34(6)	0.09(6)
random	media	0.59(2)	0.18(6)	0.98(2)	0.21(6)
	alta	288.81(6)	27.42(10)	418.63(9)	0.21(10)
$\Delta + 2$	alta	-	-	-	164.41(1)
	baja	-	79.84(8)	194.36(8)	0.21(8)
regulares	media	-	5.00(6)	1439.07(5)	2.52(6)
	alta	-	423.77(8)	-	0.89(8)
Promedio		174.03(10)	98.51(44)	583.60(30)	4.27(45)
Media Geom		44.73	8.67	135.84	1.28
Máximo		814.668	3383.90	3415.74	164.41
Mínim		0.58	0.01	0.13	0.01
CantOpt		10.00	44.00	30.00	45.00

Cuadro 7.10. Comparación final-Segundo conjunto de instancias

8. Conclusiones y trabajo futuro

A lo largo del trabajo se realizaron distintas observaciones y conclusiones especificas de cada sección. A continuación mencionamos algunas conclusiones generales sobre el trabajo realizado.

- **Problemas**

  El problema de la suma de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles (**AVDSECP**) es una variante del problema de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles (**AVDECP**) que es muy estudiado en la literatura desde un enfoque teórico. En este trabajo presentamos un conjunto de instancias y algoritmos para los dos problemas.

  El problema de la suma de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles está basado en otras variantes de suma de colores. Mientras que en algunos de estos problemas existen cotas de la máxima cantidad de colores necesaria en un coloreo de mínima suma, encontramos instancias para las que **AVDSECP** requiere más colores que lo esperado. Por ejemplo, una instancia de 12 vértices requiere a lo sumo 13 colores (alcanzando la conocida cota superior de $n+1$) para obtener un coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles. Sin embargo, esta instancia requiere 14 colores para obtener la suma mínima. En este sentido, **AVDSECP** tiene una similitud más cercana al problema de suma de coloreos de vértices que al de suma de coloreos de aristas.

  El problema de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles cuenta con una conjetura que establece que el índice cromático tiene tres valores posibles $(\Delta, \Delta+1, \Delta+2)$. Durante el desarrollo de este trabajo no hemos encontrado grafos que refuten esta conjetura. Más allá de las instancias presentadas en esta tesis, hemos experimentado con gran cantidad de grafos y siempre encontramos que la conjetura se cumplía. En general vimos que obtener una solución factible del problema es relativamente fácil, pero para demostrar optimalidad, las instancias $\Delta+2$ fueron particularmente desafiantes.

- **Modelos, estudio poliedral y desigualdades válidas**

  Presentamos dos modelos distintos para tratar con la distinguibilidad de colores. El primer modelo tiene una cantidad de variables y restricciones polinomial. El segundo depende de la combinatoria entre los grados de los vértices y la cantidad de colores utilizados para expresar las restricciones, si bien la cantidad de variables es polinomial.

  Para el segundo modelo hicimos un estudio del poliedro asociado al conjunto de soluciones factibles. Caracterizamos la dimensión de la cápsula convexa y obtuvimos tres familias de desigualdades válidas que resultaron ser facetas. La primera de ellas, **d-Color**, es una versión reforzada de la desigualdad utilizada para distinguir vértices. La segunda familia de desigualdades, **(d-1)-Color**, es muy similar a la anterior, pero mostramos que efectivamente logra reforzar el poliedro. Finalmente trabajamos con una familia de desigualdades conocidas en la literatura como *blossom*. Si bien esta familia es comúnmente utilizada en problemas relacionados con *matchings* y coloreos, no encontramos en la literatura que alguna vez se mostrara la cualidad de faceta que éstas tienen en problemas de coloreo de aristas.

  Cada una de las familias de desigualdades válidas consiste de un conjunto de cardinal grande debido a la explosión combinatoria. En el caso de las desigualdades **d-Color** y **(d-1)-Color**, el cardinal depende de subconjuntos de colores, y en el caso de las desigualdades *blossom* de subconjuntos de vértices. Sin embargo implementamos rutinas de separación exacta para todos los planos de corte. Las desigualdades de conjuntos permiten una reescritura tal que obtener la máxima desigualdad violada para un determinado color se reduce a un problema de ordenamiento. Por otro lado, la desigualdad *blossom* requirió una reescritura y el uso de la estructura conocida como árbol de Gomory-Hu para poder encontrar una desigualdad violada. La importancia de este algoritmo de separación radica en que permite encontrar desigualdades sobre conjuntos de vértices de tamaño arbitrario haciendo que, cuando comparamos esta separación con otros algoritmos más rápidos exactos o heurísticos pero en conjuntos de tamaño fijo, los cortes *blossom* generales resulten más beneficiosos.

- **Heurísticas**

  Hicimos un estudio de distintas heurísticas para obtener soluciones de **AVDSECP**, clasificándolas en *rápidas* versus *lentas*. Dentro de las heurísticas rápidas encontramos que una variante de un algoritmo conocido como *D-SATUR* consiguió muy buenos resultados. Agregarle un elemento no determinístico y ejecutarlo múltiples veces permitió obtener soluciones de muy buena calidad. Además, desarrollamos una heurística basada en una formulación no compacta de programación lineal entera. El modelo resultó desafiante ya que requiere de una variable para cada *matching* posible en el grafo y para cada color para asegurar distinguibilidad de vértices adyacentes. A pesar de eso, dentro de las heurísticas *lentas* vimos que este enfoque consiguió mejores resultados que el modelo de *Constraint Programming*.

- **Instancias**

  En la literatura de coloreo de grafos, existe un conjunto de instancias (de los desafíos DIMACS por ejemplo) que suelen usarse como referentes para comparar rendimiento de diferentes algoritmos. En nuestro caso, vimos que estas instancias no necesariamente cuentan con grafos particularmente interesantes para este problema. La mayoría de las instancias cuentan con pocos vértices adyacentes de igual grado, por lo tanto **AVDSECP** y **AVDECP** se reducen a su versión de coloreo propio de aristas.

  Debido a esto, nos vimos obligados a generar nuestro propio conjunto de instancias, buscando grafos que resultaran desafiantes para el problema. Esto no fue un trabajo menor. Tuvimos que entender, más allá de la existencia de un número razonable de conflictos, que particularidad hacía que una instancia resultara difícil para nuestros problemas.

- **CPLEX**

  Si bien los algoritmos de resolución generales son muy útiles y permiten una rápida implementación de un modelo de programación lineal entera, vimos que un análisis particular del problema es clave para resolver instancias más desafiantes. El paquete CPLEX permitió el agregado de planos de cortes, heurísticas y criterios de branching de manera efectiva.

- **AVDECP**

  Aunque nuestro desarrollo no estuvo centrado en este problema, el algoritmo propuesto para **AVDSECP** mostró una eficiencia destacable en **AVDECP** conjugado con algunas componentes específicas.

8.1. Trabajo futuro

A continuación se mencionan algunas líneas de trabajo futuro.

- **Cotas de cantidad de colores**

  El problema de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguibles tiene una conjetura con respecto a la mínima cantidad de colores necesarios. Una línea teórica de trabajo futuro es poder mejorar la cota demostrada existente o entender por qué es difícil de demostrar la conjetura.

  A pesar de ello, gracias a la cota conocida y a la naturaleza del problema, podemos utilizar un preprocesamiento en el algoritmo que resulta ser un factor clave a la hora de resolver las instancias. En contraste, para **AVDSECP** no tenemos una cota de la cantidad de colores de un coloreo óptimo. No solo eso, sino que además un coloreo válido no brinda una cota de la máxima cantidad de colores necesarios, lo que no permite utilizar la información de una heurística inicial para reducir el tamaño del problema (en cantidad de colores). Sería interesante realizar un estudio teórico para caracterizar una cota dado que, por la experiencia del algoritmo en **AVDECP**, puede resultar en una mejora significativa a nivel algorítmico para el **AVDSECP**.

- **Otras variantes**

  Haciendo revisión de literatura encontramos otros problemas que están relacionados con el problema de coloreo de aristas con vértices adyacentes distinguidos. Por ejemplo: distinguibilidad de vértices de igual grado sin importar la adyacencia y distinguibilidad de vértices en al menos un color sin importar el grado. Algunas de estas variantes se pueden modelar de forma directa con las formulaciones propuestas, por lo que podría ser interesante ver si algún otro problema puede utilizar las técnicas abordadas en esta tesis y los resultados obtenidos.

- **Estudio poliedral**

  En esta tesis vimos que al agregar las desigualdades válidas encontradas como planos de corte en el algoritmo de *Branch and Cut* obtuvimos una notable mejora en la resolución de las instancias. ¿Existirán otras desigualdades válidas que permitan una mejor descripción del poliedro asociado al modelo?, ¿pueden mejorar el rendimiento del algoritmo? Una posible línea de trabajo es continuar con el estudio poliedral realizado en busca de otras desigualdades válidas.

  Además, muchos de los trabajos teóricos encontrados en la bibliografía se centran en clases de grafos particulares. Lo que da lugar a plantearnos, si nos enfocáramos en alguna de estas clases de grafos, ¿surgiría alguna desigualdad válida que valga la pena explotar computacionalmente? ¿Se puede sacar provecho de las propiedades teóricas sobre clases de grafos particulares en el algoritmo?

- **Performance del algoritmo**

  Experimentamos con nuestro algoritmo *Branch and Cut* haciendo pruebas bajo distintos parámetros y configuraciones para las componentes que consideramos más influyentes para su performance. Sin embargo, existen puntos donde todavía podría existir lugar a mejora. ¿Se puede hacer una elección más efectiva de los cortes o de estrategias de *branching*? ¿Hay otros parámetros de CPLEX que permitan mejorar la versión final del algoritmo?

- **Instancias**

  Como mencionamos anteriormente, dado que en la literatura no existían instancias atrayentes para el problema, propusimos un conjunto de instancias con diferentes características que las hacen de particular interés. Un interrogante adicional podría ser cuán robusto es el algoritmo con respecto a la forma en que está representado el grafo. ¿Es robusto el algoritmo frente a distintos ordenamientos de vértices? Y si no lo fuera, ¿puede determinarse alguna representación favorable para la performance del algoritmo?

Además, ¿existe una instancia que refuta la conjetura sobre la mínima cantidad de colores para que exista un coloreo **AVDECP**? ¿Qué tipo de instancias maximizan la cantidad de colores necesarios en la suma de colores?

- **Aplicación**

  Tanto para **AVDECP** como para **AVDSECP**, no hemos podido encontrar una aplicación que provenga de un problema práctico que pueda ser modelado con alguno de estos dos problemas de grafos. Sería muy interesante poder conseguir instancias reales sobre las cuales experimentar y evaluar nuestro algoritmo.

Con esta tesis esperamos haber contribuido a despertar el interés para trabajar en la gran familia de problemas de etiquetado de grafos y estimular a la discusión de las líneas de investigación presentes y futuras.

A. Conceptos preliminares

A.1. Definiciones y notación sobre grafos

Introducimos algunos conceptos que usamos en el desarrollo de la tesis. Más detalles se pueden consultar en la numerosa bibliografía básica de teoría de grafos, por ejemplo [37].

Un ***grafo*** $G = (V, E)$ consiste en un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E que relacionan dos vértices del conjunto V. Decimos que una arista uv es incidente a un vértice si es uno de los dos vértices que relaciona la arista, y dos vértices son adyacentes si existe una arista que los relaciona. Dos aristas son adyacentes si son incidentes a un mismo vértice.

La ***vecindad*** de un vértice v es el conjunto de vértices tales que existe una arista que lo relacionan con v. Utilizamos $N(v)$ para referirnos al conjunto de vecinos de v. Se denomina ***grado de un vértice*** a la cantidad de aristas incidentes a un vértice $deg(v) = |N(v)|$. Además notamos con $\Delta(G)$ al máximo grado de un vértice de G y $\delta(G)$ al grado mínimo.

Sea $V' \subseteq V$, definimos al ***subgrafo inducido*** $G_{[V']} = (V', X)$ con $X \subseteq E$ tal que toda arista de E que relaciona dos vértices de V' pertenece a X. Análogamente, sea $E' \subseteq E$ definimos $G_{[E']} = (W, E')$ para referirnos al subgrafo inducido por aristas donde $W \subseteq V$ es el conjunto de vértices que están relacionados en E'.

Dados $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ se define la ***unión de grafos*** $G_1 \cup G_2$ como el grafo $G = (V, E)$ tal que $V = V_1 \cup V_2$ y $E = E_1 \cup E_2$

Un ***matching*** es un conjunto de aristas tal que ningún par de aristas son incidentes al mismo vértice. Se dice que un ***vértice está saturado*** en el *matching* si existe una arista del *matching* incidente al vértice.

Un *matching* maximal es un *matching* tal que cumple la propiedad que para toda arista del grafo que no pertenece al *matching*, alguno de sus vértices incidentes está saturado. Un *matching* máximo es un *matching* maximal que contiene la mayor cantidad posible de aristas. Se denomina número de matching como $\nu(G)$ al tamaño del matching máximo en el grafo G. Un matching perfecto es un matching tal que todos los nodos están saturados, por lo tanto $\nu(G) = |V|/2$.

Un ***camino*** es una secuencia de vértices tal que existe una arista que relaciona a todo par de vértices consecutivos. La ***longitud de un camino*** es su número de aristas. Un grafo se dice ***conexo*** si existe un camino entre todo par de vértices. Una ***componente conexa*** del grafo es un subgrafo inducido conexo maximal. Un vértice se denomina ***vértice de corte*** si al eliminarlo del grafo aumenta el número de componentes conexas del grafo.

Un ***ciclo*** es un camino con al menos 3 vértices que comienza y termina en el mismo nodo. Se define ***cintura*** de un grafo (en inglés *girth*) a la longitud del ciclo más corto.

Dado un *matching* $\mathcal{M}$ y un grafo G se define ***camino alternado*** en el grafo como un camino tal que para todo par de aristas adyacentes en el camino exactamente una pertence a $\mathcal{M}$. Las aristas del camino alternan entre pertenecer al *matching* y no. Un ***camino de aumento*** es un camino alternado que comienza y finaliza en vértices no saturados. El lema de Berge dice que un matching es máximo si y solo si no existe camino de aumento [9].

Un ***recubrimiento de vértices*** de un grafo es un conjunto de vértices tal que toda arista del grafo es incidente a algún vértice del conjunto. Un recubrimiento de vértices mínimo es un recubrimiento con la menor cantidad de vértices posible del grafo. El *matching* máximo de un grafo es a lo sumo la cantidad de vértices de un recubrimiento mínimo, por lo que el tamaño del *matching* máximo esta acotado por ese número.

Un ***corte*** de un grafo es una partición del conjunto de vértices en dos subconjuntos disjuntos. Se dice *corte mínimo* si minimiza alguna métrica, por ejemplo la suma de pesos asociados a las aristas cuyos vértices incidentes pertenecen a diferentes conjuntos.

Un ***coloreo de aristas*** es una asignación de colores a las aristas de un grafo. Un ***coloreo de aristas propio*** cumple la propiedad que todo par de aristas que son incidentes a un mismo vértice tienen distinto color. Un k-coloreo de aristas utiliza a lo sumo k colores. La mínima cantidad de colores tal que existe un k-coloreo es $\chi'(G)$.

Un ***etiquetado*** consiste en una asignación de etiquetas, usualmente representadas con números enteros, a los vértices de un grafo, las aristas o ambos.

A.2. Conceptos básicos de Programación Lineal Entera

Detallamos algunos conceptos básicos de la PLE y generalidades de algoritmos de resolución. Para una ampliación de los temas aquí introducidos, ver [67].

Un problema de PLE puede ser formulado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Minimizar \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
sujeto\ a \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Es decir, una función lineal a optimizar sujeta a un conjunto de inecuaciones lineales y toda coordenada debe ser un número entero. Cada formulación PLE tiene asociado un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ y el conjunto de soluciones factibles $S = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \in \mathbb{Z}\ \forall j \in I\}$. A P se lo denomina *relajación lineal* de S.

El poliedro se encuentra definido como la intersección de las regiones definidas por las desigualdades presentes en la formulación.

Si llamamos $conv(S)$ a la ***cápsula convexa*** de S (menor poliedro que contiene a S), entonces PLE es equivalente a resolver $\min\{cx \mid x \in conv(S)\}$. Si $P = conv(S)$ o se tuviera una descripción de $conv(S)$ mediante una cantidad polinomial (en la cantidad de variables) de desigualdades lineales, el problema PLE puede ser resuelto por cualquier algoritmo de Programación Lineal que resulta computacionalmente fácil. Cabe aclarar que, aún en el caso en que esta caracterización no fuese polinomial, bajo ciertas circunstancias el problema podría ser resuelto en tiempo polinomial.

La ***dimensión*** de un poliedro $P \subset R^n$ se define como la cantidad máxima de puntos afínmente independientes que pertenecen al poliedro menos 1. Una ***desigualdad*** $\Pi x \leq \Pi_0$ (inecuación lineal) es ***válida*** para un poliedro P si es satisfecha por todos los puntos que pertenecen a P. Una ***cara*** definida por una desigualdad válida (Π, Π_0) es un poliedro que resulta de la intersección del poliedro P con el conjunto de puntos que satisfacen $\Pi x = \Pi_0$. Una cara se dice propia si es no vacía y está contenida estrictamente en el poliedro. Un desigualdad válida define una ***faceta*** si la cara asociada tiene una dimensión menos que el poliedro P.

Un ***sistema minimal de ecuaciones*** de un poliedro está formado por un conjunto de ecuaciones linealmente independientes de cardinal máximo que satisfacen los puntos que pertenecen al poliedro. La dimensión de un poliedro está también definida como la dimensión del espacio menos la cantidad de ecuaciones del sistema minimal.

El sistema minimal junto con las desigualdades válidas que definan facetas son suficientes para la descripción completa de un poliedro.

A.2.1. Algoritmos para Problemas de Programación Lineal Entera

Los algoritmos más utilizados se encuadran dentro de algunos de estos esquemas básicos:

- Enumeración inteligente: algoritmos *Branch and Bound*.

  Estos algoritmos están asociados al concepto *divide y conquista*. La enumeración puede representarse mediante un árbol cuya raíz corresponde al problema original y sus ramas resultan de la división en partes del espacio de búsqueda. Cada nodo del árbol tiene asociado un subproblema que consiste en buscar el óptimo en una parte del espacio de soluciones. Argumentos de dominancia y factiblidad permiten descartar ramas del árbol en el proceso de búsqueda. En este esquema hay tres puntos claves: poda (*bounding*), ramificación (*branching*) y recorrido. El primero refiere al cálculo de cotas del óptimo del problema restringido a esa parte del espacio de soluciones. Si la cota es peor que la mejor solución obtenida hasta el momento, no es necesario explorar dicha parte. Respecto al *branching*, consiste en dividir la región factible en dos o más regiones. Cada nueva región da origen a un nuevo subproblema o nodo hijo, originado por la adición de una nueva restricción al problema del nodo padre que además elimina la solución fraccionaria actual. Es esencial que cada solución entera factible del nodo padre pertenezca a al menos uno de los hijos. Por último, el recorrido del árbol se puede realizar mediante diferentes estrategias: profundidad (DFS), a lo ancho (BFS), mejor cota (BB), etc.

- Caracterización de $conv(S)$ o ajuste de la relajación lineal: algoritmos de planos de corte.

  Un algoritmo básico de planos de corte relaja las condiciones de integralidad sobre las variables y resuelve el programa lineal resultante. Si el programa lineal es infactible, el programa entero también lo es. Si la solución óptima del programa lineal cumple las condiciones de integralidad, se ha encontrado un óptimo del PLE. En caso contrario, se busca identificar desigualdades lineales válidas para $conv(S)$ (*problema de separación*) que estén violadas por la solución actual fraccionaria del programa lineal. Es decir, desigualdades válidas que *separen* el óptimo fraccionario de $conv(S)$. El algoritmo continúa hasta que una solución óptima entera es encontrada, el programa lineal es infactible ó no se pudo identificar alguna desigualdad lineal que separe al óptimo de la relajación actual, ya sea porque no se conoce la descripción completa de la cápsula convexa o porque los algoritmos de separación no son exactos.

El éxito del algoritmo depende en gran medida de la disponibilidad y la eficacia en encontrar desigualdades violadas (*planos de corte*). Si bien pueden usarse planos de corte de uso general como los cortes de Gomory [30], suelen ser más eficaces aquellos que provienen de una descripción parcial/total de la cápsula convexa del conjunto de las soluciones factibles enteras. Para estos planos de corte, es necesario el diseño de rutinas de separación. Estas rutinas toman como entrada una solución y retornan restricciones violadas por este punto, si es que existe alguna. El problema de separación puede ser NP-difícil o tener complejidad alta, lo que lleva en la práctica a utilizar algoritmos heurísticos, o sea, que es posible que no sean capaces de encontrar una desigualdad violada aunque exista. La estrategia que se utilice para decidir la búsqueda de planos de corte es clave para la performance del algoritmo.

- Una combinación de las dos técnicas anteriores: algoritmos *Branch and Cut*.

  Un algoritmo *Branch and Cut* es un *Branch and Bound* en el cual se generan planos de corte a través del árbol de enumeración. El objetivo de esto es reducir significativamente el número de nodos del árbol mejorando la formulación de los subproblemas. En un *Branch and Cut*, la enumeración y los planos de corte se benefician mutuamente. En la implementación de un algoritmo *Branch and Cut* hay que tener en cuenta las estrategias propias de un algoritmo *Branch and Bound* sumadas a las de un algoritmo de planos de corte. Además, se agregan nuevas decisiones como ¿cuándo buscar planos de cortes?, ¿cuántos cortes agregar?, etc.

- Algoritmos *Branch and Price*.

  Un algoritmo *Branch and Price* es un *Branch and Bound* en el cual las relajaciones lineales asociadas a los nodos del árbol de búsqueda se resuelven mediante la técnica de generación de columnas. Esta técnica se utiliza cuando la cantidad de columnas del conjunto de restricciones que define al problema es muy grande y se van incorporando al modelo bajo demanda. Se considera un problema restringido omitiendo columnas (*problema maestro*) que se resuelve a optimalidad. Luego, entre las columnas omitidas, se comprueba si hay alguna que deba ser incorporada al problema para mejorar la solución (*problema esclavo*). Si la hay, se incorpora y se reoptimiza. Si no, se obtuvo el óptimo del problema lineal. El éxito de aplicar esta técnica depende de la eficacia de resolver el problema esclavo y del impacto que tiene el criterio de ramificación en la definición del problema esclavo.

B. Resultados extendidos

	1	2	3	4
bc-43-1-1	323.00	339.00	311.00	333.00
bc-43-2-1	363.00	383.00	341.00	369.00
bc-43-3-1	332.00	354.00	318.00	342.00
bc-43-4-1	659.00	699.00	640.00	688.00
bc-43-5-1	390.00	407.00	363.00	390.00
bc-43-6-1	430.00	449.00	409.00	436.00
bc-13-1-5	150.00	155.00	153.00	153.00
bc-13-2-5	153.00	170.00	149.00	163.00
bc-13-3-5	129.00	130.00	130.00	130.00
bc-13-4-5	55.00	55.00	55.00	55.00
bc-13-5-5	115.00	116.00	115.00	116.00
bc-13-6-5	119.00	122.00	119.00	121.00
bc-12-1-9	401.00	407.00	401.00	405.00
bc-12-2-9	388.00	405.00	387.00	401.00
bc-12-3-9	389.00	412.00	387.00	404.00
bc-12-4-9	387.00	405.00	387.00	400.00
bc-12-5-9	377.00	396.00	376.00	383.00
bc-12-6-9	377.00	394.00	377.00	385.00
inst_7_5	55.00	54.00	54.00	54.00
inst_8_6	82.00	86.00	82.00	82.00
inst_9_7	125.00	126.00	125.00	125.00
inst_10_8	176.00	180.00	176.00	176.00
kinst-4-033-0	187.00	191.00	187.00	191.00
kinst-4-033-1	187.00	191.00	187.00	191.00
kinst-4-033-2	187.00	193.00	187.00	193.00
kinst-4-033-3	186.00	191.00	186.00	191.00
kinst-4-033-4	186.00	190.00	186.00	190.00
kinst-4-034-0	191.00	198.00	191.00	198.00
kinst-4-034-1	191.00	198.00	191.00	198.00
kinst-4-034-2	192.00	199.00	192.00	199.00
kinst-4-034-3	191.00	197.00	191.00	197.00
kinst-4-034-4	192.00	196.00	192.00	196.00
nn16k7i1	237.00	239.00	237.00	239.00
nn16k7i2	238.00	239.00	238.00	239.00
nn16k7i3	236.00	239.00	236.00	239.00
nn16k7i4	237.00	241.00	237.00	241.00
nn16k7i5	237.00	242.00	237.00	242.00
nn16k7i6	236.00	241.00	236.00	241.00
nn16k8i1	302.00	308.00	302.00	308.00
nn16k8i2	303.00	306.00	303.00	306.00
nn16k8i3	303.00	306.00	303.00	306.00
nn16k8i4	302.00	307.00	302.00	307.00
nn16k8i5	301.00	310.00	301.00	310.00
nn16k8i6	303.00	305.00	303.00	305.00
n12k10i1	344.00	345.00	344.00	345.00
n12k10i2	343.00	345.00	343.00	345.00
n12k10i3	341.00	345.00	341.00	345.00
n12k10i4	343.00	344.00	343.00	344.00
n12k10i5	341.00	345.00	341.00	345.00
n12k10i6	343.00	344.00	343.00	344.00
n12k9i1	281.00	284.00	281.00	284.00
n12k9i2	281.00	285.00	281.00	285.00
n12k9i3	282.00	283.00	282.00	283.00
n12k9i4	281.00	284.00	281.00	284.00
n12k9i5	281.00	284.00	281.00	284.00
n12k9i6	283.00	283.00	283.00	283.00

Cuadro B.1. Valor obtenido por la heurística constructiva con distintos criterios en 60 segundos para **AVDSECP**.

	1	5	10	30	60
bc-43-1-1	311.00	311.00	311.00	311.00	311.00
bc-43-2-1	343.00	342.00	342.00	341.00	341.00
bc-43-3-1	319.00	318.00	318.00	318.00	318.00
bc-43-4-1	644.00	642.00	642.00	640.00	640.00
bc-43-5-1	364.00	364.00	363.00	363.00	363.00
bc-43-6-1	411.00	409.00	409.00	409.00	409.00
bc-13-1-5	153.00	153.00	153.00	153.00	153.00
bc-13-2-5	149.00	149.00	149.00	149.00	149.00
bc-13-3-5	130.00	130.00	130.00	130.00	130.00
bc-13-4-5	55.00	55.00	55.00	55.00	55.00
bc-13-5-5	115.00	115.00	115.00	115.00	115.00
bc-13-6-5	119.00	119.00	119.00	119.00	119.00
bc-12-1-9	402.00	401.00	401.00	401.00	401.00
bc-12-2-9	389.00	387.00	387.00	387.00	387.00
bc-12-3-9	388.00	387.00	387.00	387.00	387.00
bc-12-4-9	388.00	387.00	387.00	387.00	387.00
bc-12-5-9	378.00	377.00	377.00	377.00	376.00
bc-12-6-9	377.00	377.00	377.00	377.00	377.00
inst_7_5	54.00	54.00	54.00	54.00	54.00
inst_8_6	82.00	82.00	82.00	82.00	82.00
inst_9_7	125.00	125.00	125.00	125.00	125.00
inst_10_8	176.00	176.00	176.00	176.00	176.00
kinst-4-033-0	188.00	187.00	187.00	187.00	187.00
kinst-4-033-1	188.00	187.00	187.00	187.00	187.00
kinst-4-033-2	188.00	187.00	187.00	187.00	187.00
kinst-4-033-3	188.00	187.00	187.00	186.00	186.00
kinst-4-033-4	187.00	187.00	187.00	186.00	186.00
kinst-4-034-0	195.00	193.00	192.00	191.00	191.00
kinst-4-034-1	195.00	193.00	192.00	191.00	191.00
kinst-4-034-2	194.00	192.00	192.00	192.00	192.00
kinst-4-034-3	195.00	193.00	193.00	191.00	191.00
kinst-4-034-4	194.00	193.00	193.00	193.00	192.00
nn16k7i1	240.00	238.00	238.00	237.00	237.00
nn16k7i2	240.00	240.00	238.00	238.00	238.00
nn16k7i3	241.00	239.00	238.00	236.00	236.00
nn16k7i4	239.00	237.00	237.00	237.00	237.00
nn16k7i5	240.00	238.00	238.00	237.00	237.00
nn16k7i6	240.00	238.00	238.00	236.00	236.00
nn16k8i1	305.00	304.00	304.00	302.00	302.00
nn16k8i2	305.00	303.00	303.00	303.00	303.00
nn16k8i3	305.00	304.00	304.00	304.00	303.00
nn16k8i4	305.00	304.00	303.00	303.00	302.00
nn16k8i5	304.00	304.00	303.00	301.00	301.00
nn16k8i6	305.00	303.00	303.00	303.00	303.00
n12k10i1	347.00	345.00	345.00	345.00	344.00
n12k10i2	345.00	345.00	345.00	343.00	343.00
n12k10i3	347.00	346.00	341.00	341.00	341.00
n12k10i4	346.00	345.00	345.00	343.00	343.00
n12k10i5	347.00	346.00	345.00	341.00	341.00
n12k10i6	346.00	346.00	343.00	343.00	343.00
n12k9i1	286.00	281.00	281.00	281.00	281.00
n12k9i2	286.00	283.00	281.00	281.00	281.00
n12k9i3	284.00	284.00	282.00	282.00	282.00
n12k9i4	286.00	281.00	281.00	281.00	281.00
n12k9i5	284.00	283.00	283.00	283.00	281.00
n12k9i6	285.00	283.00	283.00	283.00	283.00

Cuadro B.2. Valor obtenido por la heurística constructiva utilizando criterio 3 con diferentes límites de tiempo (en segundos) para **AVDSECP**.

	CP1	CP2 1 segundo	CP2 60segundos
bc-43-1-1	337	359	321
bc-43-2-1	379	444	352
bc-43-3-1	347	386	330
bc-43-4-1	684	842	665
bc-43-5-1	402	467	377
bc-43-6-1	440	532	423
bc-13-1-5	165	153	149
bc-13-2-5	169	155	150
bc-13-3-5	137	130	130
bc-13-4-5	58	55	55
bc-13-5-5	123	116	115
bc-13-6-5	129	120	119
bc-12-1-9	412	416	401
bc-12-2-9	416	397	387
bc-12-3-9	399	398	388
bc-12-4-9	421	398	388
bc-12-5-9	407	389	375
bc-12-6-9	398	385	378
inst_7_5	57	53	53
inst_8_6	93	82	82
inst_9_7	140	127	124
inst_10_8	187	181	176
kinst-4-033-0	191	198	189
kinst-4-033-1	191	198	189
kinst-4-033-2	196	199	189
kinst-4-033-3	196	197	190
kinst-4-033-4	193	198	188
kinst-4-034-0	196	203	193
kinst-4-034-1	196	203	193
kinst-4-034-2	201	202	194
kinst-4-034-3	197	205	193
kinst-4-034-4	199	204	194
nn16k7i1	252	244	239
nn16k7i2	252	250	237
nn16k7i3	248	251	239
nn16k7i4	257	248	239
nn16k7i5	252	247	240
nn16k7i6	252	249	240
nn16k8i1	323	314	304
nn16k8i2	321	312	304
nn16k8i3	316	318	304
nn16k8i4	324	314	304
nn16k8i5	324	320	305
nn16k8i6	321	316	304
n12k10i1	352	353	345
n12k10i2	348	353	344
n12k10i3	352	350	343
n12k10i4	348	354	345
n12k10i5	365	358	345
n12k10i6	346	353	345
n12k9i1	305	290	285
n12k9i2	304	292	285
n12k9i3	291	292	283
n12k9i4	303	289	284
n12k9i5	292	289	283
n12k9i6	295	288	283

Cuadro B.3. Valor obtenido por la heurística de *Constraint Programming* con diferentes algoritmos para **AVDSECP**.

	0 matchings, 60 seg		1 matching 60 seg		10 matchings, 60 seg		1 matching, 600 seg		1 matching, 1000 seg	
	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo
bc-43-1-1	311	60.02	311	60.02	311	60.02	310	600.12	310	1000.02
bc-43-2-1	342	60.00	342	60.02	342	60.02	341	600.06	338	1000.30
bc-43-3-1	318	60.03	318	60.02	318	60.02	318	600.06	318	1000.09
bc-43-4-1	642	60.02	642	60.05	642	60.05	642	600.56	638	1000.26
bc-43-5-1	363	60.01	363	60.01	363	60.01	363	600.07	363	1000.07
bc-43-6-1	409	60.04	409	60.02	409	60.02	409	600.03	409	1000.17
bc-13-1-5	151	1.49	149	1.71	149	1.71	149	1.71	149	1.66
bc-13-2-5	148	1.39	149	0.92	149	0.92	149	0.94	149	0.90
bc-13-3-5	129	4.96	130	4.33	130	4.33	130	4.36	130	4.44
bc-13-4-5	55	1.15	55	1.01	55	1.01	55	1.01	55	1.00
bc-13-5-5	115	18.12	115	17.92	115	17.92	115	18.02	115	17.91
bc-13-6-5	119	3.93	119	3.52	119	3.52	119	3.54	119	3.60
bc-12-1-9	401	60.44	401	60.11	401	60.11	401	386.87	401	386.44
bc-12-2-9	387	49.73	387	49.07	387	49.07	387	49.15	387	49.08
bc-12-3-9	387	61.09	387	60.17	387	60.17	387	69.22	387	69.19
bc-12-4-9	387	60.03	387	61.02	387	61.02	387	82.00	387	81.84
bc-12-5-9	376	30.87	375	21.90	375	21.90	375	21.87	375	21.92
bc-12-6-9	377	24.54	377	23.86	377	23.86	377	23.91	377	23.84
inst_7_5	53	0.30	53	0.30	53	0.30	53	0.31	53	0.32
inst_8_6	82	1.13	82	1.11	82	1.11	82	1.13	82	1.11
inst_9_7	124	3.09	124	3.18	124	3.18	124	3.18	124	3.21
inst_10_8	176	15.21	176	14.32	176	14.32	176	14.45	176	14.33
kinst-4-033-0	186	60.18	186	60.10	186	60.10	186	231.64	186	238.68
kinst-4-033-1	186	60.11	186	60.03	186	60.03	186	231.65	186	288.50
kinst-4-033-2	187	60.01	187	60.12	187	60.12	187	220.38	187	221.25
kinst-4-033-3	187	60.01	187	60.04	187	60.04	187	600.06	187	1000.03
kinst-4-033-4	187	60.03	186	60.06	186	60.06	186	224.93	186	225.16
kinst-4-034-0	192	60.03	193	60.03	193	60.03	193	303.07	193	303.61
kinst-4-034-1	192	60.05	193	60.03	193	60.03	193	303.79	193	303.37
kinst-4-034-2	192	60.05	191	60.00	191	60.00	191	292.43	191	291.74
kinst-4-034-3	193	60.02	193	60.06	193	60.06	190	344.87	190	349.56
kinst-4-034-4	193	60.10	193	60.04	193	60.04	190	265.80	190	264.83
nn16k7i1	238	60.00	238	60.15	238	60.15	238	248.38	238	249.28
nn16k7i2	240	60.50	239	60.11	239	60.11	239	379.61	239	380.81
nn16k7i3	238	60.34	239	60.07	239	60.07	239	303.81	239	305.14
nn16k7i4	236	60.50	236	60.27	236	60.27	236	241.21	236	241.53
nn16k7i5	237	60.54	238	60.89	238	60.89	238	317.70	238	318.28
nn16k7i6	237	60.50	238	60.33	238	60.33	238	288.81	238	289.83
nn16k8i1	304	60.54	304	60.73	304	60.73	304	600.17	304	756.21
nn16k8i2	303	60.44	303	60.42	303	60.42	303	600.06	303	1000.06
nn16k8i3	304	60.62	304	60.39	304	60.39	304	602.37	304	1000.95
nn16k8i4	304	60.00	303	60.23	303	60.23	303	569.87	303	569.98
nn16k8i5	304	60.04	304	60.68	304	60.68	303	600.01	303	1000.10
nn16k8i6	303	60.44	303	60.10	303	60.10	303	600.95	303	790.16
n12k10i1	345	60.29	345	60.81	345	60.81	345	602.43	345	1003.01
n12k10i2	345	60.03	345	60.60	345	60.60	345	600.87	345	1001.86
n12k10i3	345	60.27	345	60.70	345	60.70	345	600.06	345	1000.08
n12k10i4	345	60.72	345	60.20	345	60.20	345	601.07	345	1001.43
n12k10i5	346	60.02	346	61.58	346	61.58	346	601.52	346	1001.02
n12k10i6	346	60.30	345	60.33	345	60.33	345	600.64	345	1000.84
n12k9i1	281	60.01	281	60.18	281	60.18	281	580.46	281	582.22
n12k9i2	281	60.57	281	60.92	281	60.92	281	507.88	281	508.50
n12k9i3	284	60.38	284	60.09	284	60.09	283	600.08	283	785.40
n12k9i4	281	60.69	281	60.35	281	60.35	281	600.06	281	1000.03
n12k9i5	283	60.22	283	60.85	283	60.85	283	571.80	283	572.03
n12k9i6	283	60.12	283	60.38	283	60.38	283	579.87	283	581.68

Cuadro B.4. Valor obtenido por la heurística de generación de columnas con distinta cantidad de *matchings* generados por aristas y límites de tiempo para **AVDSECP**.

	10 segundos		60 segundos		600 segundos		1000 segundos	
	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo
bc-43-1-1	311	66.45	311	66.41	311	66.60	310	1007.20
bc-43-2-1	342	67.37	342	67.40	342	67.75	338	1094.26
bc-43-3-1	318	60.22	318	60.24	318	60.22	318	1000.74
bc-43-4-1	642	62.00	642	62.03	642	62.39	638	1024.81
bc-43-5-1	363	60.24	363	60.28	363	60.25	363	1000.95
bc-43-6-1	409	60.24	409	60.26	409	60.25	409	1000.85
bc-13-1-5	149	1.65	149	1.70	149	1.70	149	1.71
bc-13-2-5	149	1.09	149	1.12	149	1.09	149	1.08
bc-13-3-5	130	4.60	130	4.57	130	4.56	130	4.54
bc-13-4-5	55	1.03	55	1.02	55	1.01	55	1.03
bc-13-5-5	115	17.91	115	17.90	115	18.04	115	17.96
bc-13-6-5	119	3.53	119	3.50	119	3.55	119	3.57
bc-12-1-9	401	70.18	401	95.57	401	95.53	401	1386.61
bc-12-2-9	387	59.19	387	93.29	387	93.29	387	93.23
bc-12-3-9	387	70.25	387	120.16	387	130.66	387	126.89
bc-12-4-9	387	70.15	387	111.06	387	100.14	387	189.50
bc-12-5-9	375	31.94	375	54.70	375	54.80	375	54.67
bc-12-6-9	377	33.97	377	83.93	377	91.81	377	91.80
inst_7_5	53	0.31	53	0.31	53	0.31	53	0.31
inst_8_6	82	1.17	82	1.20	82	1.18	82	1.18
inst_9_7	124	3.55	124	3.53	124	3.51	124	3.55
inst_10_8	176	15.26	176	15.27	176	15.36	176	15.21
kinst-4-033-0	186	70.12	186	73.65	186	76.16	186	253.40
kinst-4-033-1	186	70.15	186	76.28	186	76.33	186	253.56
kinst-4-033-2	187	70.03	187	79.55	187	79.22	187	247.17
kinst-4-033-3	187	70.23	187	78.91	187	80.06	187	1021.46
kinst-4-033-4	186	70.03	186	78.03	186	77.71	186	254.72
kinst-4-034-0	193	70.02	193	83.62	193	83.54	193	363.47
kinst-4-034-1	193	70.04	193	83.85	193	83.56	193	363.77
kinst-4-034-2	191	70.02	191	76.49	191	76.55	191	343.00
kinst-4-034-3	193	70.65	193	86.31	193	87.99	191	437.06
kinst-4-034-4	193	70.34	193	86.72	193	84.26	190	317.49
nn16k7i1	238	65.67	238	65.67	238	65.73	238	260.25
nn16k7i2	239	70.14	239	70.88	239	71.02	239	712.61
nn16k7i3	239	67.65	239	67.65	239	67.65	239	391.31
nn16k7i4	236	64.61	236	64.64	236	64.75	236	247.75
nn16k7i5	238	66.40	238	66.27	238	65.19	238	328.14
nn16k7i6	238	66.60	238	66.37	238	66.66	238	300.53
nn16k8i1	304	70.73	304	74.43	304	74.51	304	989.14
nn16k8i2	303	70.39	303	70.88	303	70.94	303	1092.86
nn16k8i3	304	70.44	304	73.51	304	73.54	304	1201.70
nn16k8i4	303	69.79	303	69.82	303	69.85	303	593.54
nn16k8i5	304	70.65	304	71.12	304	71.07	303	1229.72
nn16k8i6	303	70.51	303	70.63	303	70.45	303	1000.32
n12k10i1	345	70.80	345	94.88	345	94.92	345	2001.03
n12k10i2	345	70.60	345	97.78	345	97.81	345	2002.62
n12k10i3	345	70.80	345	120.76	345	157.90	345	1433.10
n12k10i4	345	70.20	345	120.21	345	181.45	345	2000.94
n12k10i5	346	71.72	346	121.75	346	155.57	346	1795.80
n12k10i6	345	70.38	345	120.48	345	156.91	345	2001.82
n12k9i1	281	63.90	281	63.84	281	63.97	281	657.94
n12k9i2	281	70.98	281	120.93	281	164.10	281	1508.31
n12k9i3	284	70.09	284	120.15	284	143.90	283	1785.93
n12k9i4	281	64.49	281	64.43	281	64.50	281	1015.60
n12k9i5	283	70.75	283	81.51	283	81.48	283	1571.84
n12k9i6	283	70.45	283	84.44	283	84.58	283	1265.22

Cuadro B.5. Valor obtenido por GC+MIP con distintos límites de tiempo de MIP para **AVDSECP**.

	POLI solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	554940	3028.82	0	1.55
bc-43-2-1	331	331	10294	64.69	0	1.41
bc-43-3-1	310	309	606290	3600	0.32	3.72
bc-43-4-1	632	627	113598	3600.02	0.63	49.14
bc-43-5-1	354	354	142577	910.58	0	5.17
bc-43-6-1	401	400	567138	3600	0.25	7.60
bc-13-1-5	149	149	840	2.29	0	4.38
bc-13-2-5	148	148	2481	3.26	0	3.33
bc-13-3-5	129	129	142	3.89	0	10.55
bc-13-4-5	55	55	1131	2.31	0	9.36
bc-13-5-5	115	115	20298	53.48	0	10.49
bc-13-6-5	119	119	1138	5.16	0	4.40
bc-12-1-9	398	390.88	264501	3600	1.79	5.83
bc-12-2-9	387	382	352070	3600	1.29	34.69
bc-12-3-9	387	382.50	435676	3600	1.16	36.46
bc-12-4-9	387	381.50	400797	3600	1.42	12.19
bc-12-5-9	374	368.12	449395	3600	1.57	31.15
bc-12-6-9	375	372.33	471096	3600	0.71	16.57
inst_7_5	53	53	55	0.42	0	16.09
inst_8_6	82	82	185568	185.48	0	16.84
inst_9_7	124	124	209864	392.06	0	6.54
inst_10_8	176	174	1488024	3600.01	1.14	6.95
kinst-4-033-0	189	174.75	15296	3600	4.51	74.36
kinst-4-033-1	190	174.75	15342	3600	4.51	74.36
kinst-4-033-2	201	173.16	9540	3600.01	5.38	73.30
kinst-4-033-3	187	174.61	60403	3600	4.58	21.72
kinst-4-033-4	183	174.43	43349	3600	4.69	21.35
kinst-4-034-0	201	176.56	15692	3600	6.08	74
kinst-4-034-1	194	176.57	15868	3600	6.08	74
kinst-4-034-2	204	176.48	12638	3600.01	6.13	64.23
kinst-4-034-3	196	177.08	12228	3600.01	5.81	64.86
kinst-4-034-4	201	176.67	12816	3600.01	6.03	66.33
nn16k7i1	236	230.25	183975	3600	2.02	28.17
nn16k7i2	236	230	181600	3600	2.13	32.46
nn16k7i3	236	230.27	178201	3600	2.01	18.66
nn16k7i4	236	230.25	171113	3600	2.02	78.73
nn16k7i5	235	229.86	163189	3600	2.19	62.11
nn16k7i6	236	230.01	209600	3600	2.12	11.01
nn16k8i1	305	292.31	13538	3600	2.24	58.97
nn16k8i2	302	293.03	61243	3600.01	2.32	7.91
nn16k8i3	302	294	113900	3600.01	2	50.92
nn16k8i4	301	292.50	25226	3600	2.50	34.03
nn16k8i5	300	293.75	101121	3600	2.08	12.35
nn16k8i6	301	293.92	123332	3600	2.03	16.14
n12k10i1	344	335.25	218533	3600	1.69	6.38
n12k10i2	342	336.75	188449	3600	1.25	29.29
n12k10i3	341	338.12	260544	3600	0.84	14.37
n12k10i4	342	337.50	211869	3600	1.03	35.06
n12k10i5	341	337	194981	3600	1.17	28.81
n12k10i6	342	335.38	182983	3600	1.65	7.19
n12k9i1	281	276	280001	3600	1.78	23.91
n12k9i2	282	276.25	273089	3600	1.69	10.99
n12k9i3	281	275.88	230906	3600	1.82	6.07
n12k9i4	282	275.50	169135	3600	1.96	7.96
n12k9i5	281	276	329900	3600	1.78	40.40
n12k9i6	282	276.25	278681	3600	1.69	4.76

Cuadro B.6. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX en el modelo **POLI** para **AVDSECP**

	EXP solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	304.12	533186	2320.57	0.29	4.59
bc-43-2-1	331	331	18432	67.40	0	49.25
bc-43-3-1	310	309.29	360526.50	1949.38	0.23	93.09
bc-43-4-1	631.50	627.75	332275	3600.01	0.52	94.06
bc-43-5-1	354	353.32	256156.50	1866.41	0.19	48.91
bc-43-6-1	401	400.25	351200.50	2271.85	0.19	93.03
bc-13-1-5	149	149	2433018.50	1219.47	0	6.09
bc-13-2-5	148	148	400767	198.94	0	10.63
bc-13-3-5	129	127.75	2634325	1800.18	0.97	8.14
bc-13-4-5	55	55	650	0.48	0	14.72
bc-13-5-5	115	115	380622	211.42	0	14.62
bc-13-6-5	119	118.25	2788318.50	1800.28	0.63	8.37
bc-12-1-9	398	394.76	2182775.50	3600	0.81	43.55
bc-12-2-9	387	383.33	2283236	3600	0.95	8.46
bc-12-3-9	387	384.22	2311000	3600	0.72	81.29
bc-12-4-9	387	383.75	2320990	3600	0.84	45.35
bc-12-5-9	374	373.50	2042998.50	2349.44	0.13	82.46
bc-12-6-9	375	373.50	2708757.50	3600	0.40	43.41
inst_7_5	53	53	8206.50	1.76	0	12.04
inst_8_6	82	82	676761.50	133.31	0	9.32
inst_9_7	124	122.25	3456032.50	1801.77	1.41	18.97
inst_10_8	176	172.75	4814557.50	2711.24	1.85	6.24
kinst-4-033-0	183	183	173040	1106.90	0	91.97
kinst-4-033-1	183	183	173040	1104.93	0	91.97
kinst-4-033-2	184	182.02	407648	2489.72	0.54	91.83
kinst-4-033-3	184	181.07	677697	2937.64	1.06	92.22
kinst-4-033-4	183	181.62	497726	2528.24	0.75	92.20
kinst-4-034-0	188	187.36	456757	2381.43	0.34	92.62
kinst-4-034-1	188	187.41	468756	2376.14	0.31	92.62
kinst-4-034-2	188	188	479466.50	2229.68	0	53.76
kinst-4-034-3	188	188	172762	1006.47	0	91.95
kinst-4-034-4	189	186	666755.50	3013.09	1.06	92.51
nn16k7i1	235	235	24264.50	71.31	0	47.96
nn16k7i2	235	235	67205.50	180.49	0	15.46
nn16k7i3	235	235	37360	96.29	0	86.53
nn16k7i4	235	235	52291	136.56	0	85.45
nn16k7i5	235	235	57512.50	154.55	0	47.99
nn16k7i6	235	235	47903.50	132.87	0	46.87
nn16k8i1	299	299	47727	178.24	0	48.30
nn16k8i2	300	299.50	1356642.50	2034.88	0.17	85.95
nn16k8i3	300	300	154210.50	429.67	0	59.83
nn16k8i4	300	299.50	875188.50	1966.39	0.17	49.58
nn16k8i5	300	300	289919	892.25	0	12.84
nn16k8i6	300	300	379293	979.12	0	56.98
n12k10i1	341	340.50	1524840.50	2020.09	0.15	28.09
n12k10i2	341	341	442547	874.43	0	46.23
n12k10i3	341	340.50	1187660.50	1920.78	0.15	43.70
n12k10i4	341	339.33	1144961	2137.96	0.49	6.92
n12k10i5	341	340.50	1410227	2153.11	0.15	47.05
n12k10i6	341	341	451736.50	721.71	0	82.72
n12k9i1	281	281	173383	347.24	0	8.70
n12k9i2	281	281	309439.50	508.88	0	43.94
n12k9i3	281	280.50	1933932	2220.41	0.18	81.31
n12k9i4	281	280.50	1740528	1925.65	0.18	82.91
n12k9i5	281	281	428034	569.51	0	8.85
n12k9i6	281	281	722733.50	1218.50	0	46.16

Cuadro B.7. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX en el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	POLI-DV					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	304	462113	3600	0.33	10.57
bc-43-2-1	331	331	6726	61.64	0	2.46
bc-43-3-1	310	308.78	543749	3600	0.39	4.82
bc-43-4-1	632	627.12	77600	3600.01	0.61	4.15
bc-43-5-1	354	354	282594	2420.89	0	3.84
bc-43-6-1	401	399.12	248900	3600.01	0.47	12.86
bc-13-1-5	149	149	2605	4.30	0	5.19
bc-13-2-5	148	148	1684	3.91	0	4.44
bc-13-3-5	129	129	140	3.87	0	1.90
bc-13-4-5	55	55	761	2.56	0	7.33
bc-13-5-5	115	115	24351	104.66	0	13.49
bc-13-6-5	119	119	2663	18.07	0	7.47
bc-12-1-9	398	389.62	88100	3600.01	2.10	34.41
bc-12-2-9	387	379.70	108000	3600	1.89	19.99
bc-12-3-9	387	376.85	146397	3600.02	2.62	24.54
bc-12-4-9	387	380.50	168841	3600	1.68	6.51
bc-12-5-9	374	370	237100	3600	1.07	7.17
bc-12-6-9	375	371.75	208829	3600	0.87	6.12
inst_7_5	53	53	720	2	0	13.30
inst_8_6	82	82	449191	693.04	0	5.88
inst_9_7	124	124	112966	444.08	0	14.98
inst_10_8	176	174	475900	3600	1.14	21.27
kinst-4-033-0	197	174.60	9315	3600.01	4.59	74.36
kinst-4-033-1	196	174.59	9302	3600.01	4.60	74.36
kinst-4-033-2	197	173.35	15045	3600.01	5.27	73.30
kinst-4-033-3	197	173.34	7905	3600	5.28	81.32
kinst-4-033-4	191	173.37	10359	3600	5.26	72.19
kinst-4-034-0	190	176.42	15229	3600	6.16	74
kinst-4-034-1	190	176.42	15275	3600.01	6.16	74
kinst-4-034-2	207	176.61	10842	3600.01	6.06	76.33
kinst-4-034-3	204	176.77	10556	3600	5.97	74.85
kinst-4-034-4	218	176.62	9561	3600.01	6.05	66.33
nn16k7i1	236	229.93	104791	3600	2.16	14.36
nn16k7i2	236	229.35	89431	3600	2.41	29.97
nn16k7i3	236	229.25	113900	3600	2.45	16.27
nn16k7i4	237	229.75	106500	3600	2.23	9.51
nn16k7i5	236	229.07	85315	3600	2.52	44.25
nn16k7i6	236	229.25	108459	3600	2.45	31.03
nn16k8i1	313	291.50	7823	3600	2.51	84.53
nn16k8i2	300	293.50	49800	3600	2.17	9.03
nn16k8i3	301	293.81	69500	3600.01	2.06	9.89
nn16k8i4	301	293.25	54100	3600	2.25	32.97
nn16k8i5	301	292.75	31800	3600	2.42	72.58
nn16k8i6	303	293	68100	3600.01	2.33	38.49
n12k10i1	342	334.47	39100	3600.01	1.91	24.65
n12k10i2	342	335	64700	3600.02	1.76	8.69
n12k10i3	345	334.25	45595	3600	1.98	32.46
n12k10i4	346	334.25	41704	3600	1.98	46.13
n12k10i5	342	334.75	54137	3600.01	1.83	12.30
n12k10i6	341	334	53200	3600.01	2.05	52.53
n12k9i1	283	274.47	103500	3600	2.32	29.62
n12k9i2	282	274.75	73600	3600	2.22	9.82
n12k9i3	281	275	82246	3600	2.14	21.29
n12k9i4	282	275.25	91000	3600	2.05	10.71
n12k9i5	283	275.25	120546	3600	2.05	8.91
n12k9i6	283	275.25	84100	3600	2.05	6.72

Cuadro B.8. Resultados de *Branch and Cut* con planos de corte propios para el modelo **POLI** para **AVDSECP**

	POLI-DV+					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	284732	2951.40	0	1.23
bc-43-2-1	331	331	2910	33.40	0	6.13
bc-43-3-1	310	310	89752	615.01	0	3.08
bc-43-4-1	631	628.36	107446	3600.01	0.42	8.89
bc-43-5-1	354	354	1708	25.29	0	3.96
bc-43-6-1	401	400	272345	3600	0.25	8.14
bc-13-1-5	149	149	112	1.40	0	2.28
bc-13-2-5	148	148	0	0.29	0	0
bc-13-3-5	129	129	52	2.82	0	5.32
bc-13-4-5	55	55	51	0.63	0	4.34
bc-13-5-5	115	115	47	3.30	0	1.50
bc-13-6-5	119	119	143500	268.72	0	4.11
bc-12-1-9	398	392.53	124349	3600	1.37	10.77
bc-12-2-9	387	380	60000	3600	1.81	7.54
bc-12-3-9	387	381.67	72485	3600	1.38	9.39
bc-12-4-9	387	382	86695	3600	1.29	15.08
bc-12-5-9	374	374	174469	1890.44	0	12.53
bc-12-6-9	375	375	50784	1049.33	0	13.21
inst_7_5	53	53	6	0.53	0	1.98
inst_8_6	82	82	74	1.42	0	2.09
inst_9_7	124	124	2099	46.16	0	3.07
inst_10_8	176	175	494633	3600	0.57	1.69
kinst-4-033-0	183	183	14423	2417.39	0	55.08
kinst-4-033-1	183	183	14423	2411.43	0	55.08
kinst-4-033-2	183	183	25196	1585.47	0	8.48
kinst-4-033-3	183	183	12673	596.06	0	17.46
kinst-4-033-4	183	183	23039	991.85	0	11.74
kinst-4-034-0	188	188	25568	890.57	0	16.80
kinst-4-034-1	188	188	25568	898.25	0	16.80
kinst-4-034-2	188	188	25225	991.10	0	20.10
kinst-4-034-3	188	188	71770	2707.42	0	12.85
kinst-4-034-4	188	188	56561	2070.48	0	14.04
nn16k7i1	235	235	25224	810.26	0	40.33
nn16k7i2	235	235	46843	1189.35	0	15.48
nn16k7i3	235	235	24489	722.91	0	16.07
nn16k7i4	235	235	32061	860.50	0	31.81
nn16k7i5	235	235	22620	724.60	0	44.12
nn16k7i6	235	235	31123	958.18	0	57.98
nn16k8i1	299	299	49224	1980.39	0	40.76
nn16k8i2	300	297.31	57600	3600.01	0.90	6.70
nn16k8i3	300	297.83	67000	3600.01	0.72	31.51
nn16k8i4	300	296.04	12157	3600	1.32	41.77
nn16k8i5	300	297.57	42400	3600.01	0.81	40.94
nn16k8i6	300	298.12	48967	3600	0.63	39.20
n12k10i1	341	338.42	30338	3600	0.76	24.72
n12k10i2	341	338.02	66616	3600	0.87	29.28
n12k10i3	341	338.08	74000	3600.01	0.86	31.21
n12k10i4	341	339.50	43900	3600	0.44	7.03
n12k10i5	341	337.15	46547	3600.02	1.13	13.84
n12k10i6	345	335.93	10000	3600	1.49	17.75
n12k9i1	281	278.34	92300	3600	0.95	41.39
n12k9i2	281	278.42	78400	3600	0.92	25.01
n12k9i3	282	277	50624	3600.01	1.42	10.65
n12k9i4	281	279	94235	3600	0.71	37.80
n12k9i5	281	278.65	126683	3600.01	0.83	31.24
n12k9i6	281	277.67	63400	3600	1.18	37.78

Cuadro B.9. Resultados de *Branch and Cut* con más planos de corte propios y los de conjunto de colores para el modelo **POLI** para **AVDSECP**

	POLI-CC					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	304	299637	3600	0.33	1.23
bc-43-2-1	331	331	1736	24.89	0	3.09
bc-43-3-1	310	308.19	274096	3600	0.58	1.76
bc-43-4-1	631	628.50	114498	3600.02	0.40	6.67
bc-43-5-1	354	354	49731	402.60	0	3.17
bc-43-6-1	401	400	332292	3600	0.25	8.14
bc-13-1-5	149	149	50	1.36	0	1.51
bc-13-2-5	148	148	0	0.25	0	0
bc-13-3-5	129	129	9	2.33	0	2.65
bc-13-4-5	55	55	13	0.61	0	4.22
bc-13-5-5	115	115	25	3.35	0	1.52
bc-13-6-5	119	119	719801	1276.31	0	7.95
bc-12-1-9	398	393.17	190668	3600	1.21	6.24
bc-12-2-9	387	382.94	278905	3600	1.05	7.70
bc-12-3-9	387	383.25	230543	3600	0.97	14.59
bc-12-4-9	387	380	127570	3600	1.81	26.07
bc-12-5-9	374	374	122281	1067.38	0	11.69
bc-12-6-9	375	375	78213	1316.77	0	1.58
inst_7_5	53	53	177	0.80	0	5.66
inst_8_6	82	82	1107	2.90	0	5.55
inst_9_7	124	124	232391	963.57	0	8.90
inst_10_8	176	174.11	501015	3600	1.07	11.22
kinst-4-033-0	183	183	14566	2885.62	0	55.08
kinst-4-033-1	183	183	14566	2901.09	0	55.08
kinst-4-033-2	183	183	31492	1717.54	0	10.77
kinst-4-033-3	183	183	6862	339.38	0	13.86
kinst-4-033-4	183	183	4006	191.56	0	16.65
kinst-4-034-0	188	188	26200	1007.73	0	14.46
kinst-4-034-1	188	188	26200	1014.08	0	14.46
kinst-4-034-2	188	188	71157	2590.67	0	16.42
kinst-4-034-3	188	188	37884	1362.66	0	14.86
kinst-4-034-4	188	188	32154	1125.72	0	15.64
nn16k7i1	235	235	23408	648	0	10.50
nn16k7i2	235	235	49854	1151.64	0	30.79
nn16k7i3	235	235	38685	1066.09	0	14.83
nn16k7i4	235	232.96	30159	3600	0.87	42.73
nn16k7i5	235	235	20591	552.33	0	9.44
nn16k7i6	235	235	40656	1484.32	0	13.91
nn16k8i1	299	299	74598	2331.19	0	50.06
nn16k8i2	300	297.40	73200	3600	0.87	30.42
nn16k8i3	300	298.19	83200	3600.01	0.60	32.46
nn16k8i4	300	297.46	57586	3600	0.85	43.23
nn16k8i5	301	296.70	46500	3600.01	1.10	20.61
nn16k8i6	300	297.73	82644	3600.01	0.76	9.83
n12k10i1	341	339.50	64610	3600	0.44	35.67
n12k10i2	341	339.77	139224	3600	0.36	31.59
n12k10i3	341	338.39	93631	3600	0.77	40
n12k10i4	341	338.25	33230	3600	0.81	39.50
n12k10i5	341	338.59	58300	3600	0.71	57.34
n12k10i6	341	338.04	73400	3600	0.87	33.37
n12k9i1	281	278.80	135000	3600	0.78	48.93
n12k9i2	281	279.50	126105	3600	0.53	7.78
n12k9i3	281	279	150800	3600.01	0.71	11.50
n12k9i4	281	279.15	144400	3600	0.66	26.64
n12k9i5	281	277.93	96197	3600	1.09	71.61
n12k9i6	281	278.61	128906	3600	0.85	13.36

Cuadro B.10. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes de conjuntos de colores para el modelo **POLI** para **AVDSECP**

	EXP-C1 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	303.75	1262271	3600	0.41	7.95
bc-43-2-1	331	331	9089	34.67	0	6.14
bc-43-3-1	310	310	666447	1670.01	0	93.21
bc-43-4-1	631	628.50	334732	3600.01	0.40	94.33
bc-43-5-1	354	354	133506	366.84	0	2.06
bc-43-6-1	401	399.50	697152	3600	0.37	6.09
bc-13-1-5	149	149	497295	158.70	0	5.36
bc-13-2-5	148	148	146105	50.76	0	5.09
bc-13-3-5	129	128	7719087	3600	0.78	6.41
bc-13-4-5	55	55	152	0.12	0	25.70
bc-13-5-5	115	115	371089	169.40	0	16.62
bc-13-6-5	119	119	5953923	2660.11	0	6.65
bc-12-1-9	398	394.50	1386300	3600	0.88	17.19
bc-12-2-9	387	384	1614003	3600	0.78	5.85
bc-12-3-9	387	384.50	1539751	3600.03	0.65	83.05
bc-12-4-9	387	384.28	1543477	3600	0.70	11.02
bc-12-5-9	374	374	131490	199.54	0	3.48
bc-12-6-9	375	375	228331	369.99	0	9.25
inst_7_5	53	53	8475	1.20	0	8.88
inst_8_6	82	82	9516	2.83	0	69.57
inst_9_7	124	122	7857761	3600	1.61	9.37
inst_10_8	176	172.75	3809503	3600	1.85	20.42
kinst-4-033-0	183	183	279125	1273.97	0	92.40
kinst-4-033-1	183	183	279125	1270.32	0	92.40
kinst-4-033-2	183	183	135594	645.46	0	92.07
kinst-4-033-3	183	183	356507	1651.15	0	91.37
kinst-4-033-4	183	183	187927	830.34	0	92.62
kinst-4-034-0	188	188	195154	870.12	0	19.25
kinst-4-034-1	188	188	195154	877.31	0	19.25
kinst-4-034-2	188	188	70160	376	0	92.70
kinst-4-034-3	188	188	179949	886.98	0	91.22
kinst-4-034-4	188	188	67315	364.96	0	92.03
nn16k7i1	235	235	21069	69.36	0	11.53
nn16k7i2	235	235	32215	88.47	0	10.88
nn16k7i3	235	235	25067	77.97	0	85.76
nn16k7i4	235	235	41659	137.75	0	22.65
nn16k7i5	235	235	20012	68.75	0	8.63
nn16k7i6	235	235	25110	77.29	0	86.25
nn16k8i1	299	299	36346	141	0	11.36
nn16k8i2	300	300	282999	894.19	0	86.54
nn16k8i3	300	300	273558	773.56	0	8.29
nn16k8i4	300	300	122346	423.96	0	6.32
nn16k8i5	300	300	124769	488.70	0	84.61
nn16k8i6	300	300	82548	299.11	0	7.52
n12k10i1	341	341	135446	404.14	0	16.53
n12k10i2	341	341	139469	388.77	0	5.40
n12k10i3	341	341	213901	473.09	0	81.71
n12k10i4	341	341	253147	544.14	0	41.03
n12k10i5	341	341	401920	877.18	0	28.74
n12k10i6	341	341	516263	1209.45	0	7.69
n12k9i1	281	281	264178	491.95	0	5.10
n12k9i2	281	281	173396	425.34	0	7.01
n12k9i3	281	281	203795	397.99	0	6.62
n12k9i4	281	281	187717	364.52	0	6.04
n12k9i5	281	281	300701	571.28	0	10.42
n12k9i6	281	281	254975	487.02	0	9.15

Cuadro B.11. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color** para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-C2 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	303.50	1207452	3600	0.49	92.77
bc-43-2-1	331	331	106078	269.39	0	92.77
bc-43-3-1	310	309	1282858	3600	0.32	93.64
bc-43-4-1	631	628.38	466139	3600	0.42	93.92
bc-43-5-1	354	354	149925	403.07	0	47.64
bc-43-6-1	401	399.50	782129	3600	0.37	93.41
bc-13-1-5	149	149	1097248	346.60	0	82.28
bc-13-2-5	148	148	125033	37.48	0	4.64
bc-13-3-5	129	127.50	6855471	3600	1.16	9.51
bc-13-4-5	55	55	907	0.31	0	11.40
bc-13-5-5	115	115	472491	203.05	0	80.41
bc-13-6-5	119	119	4228111	1968.80	0	10
bc-12-1-9	398	394.50	1913653	3600	0.88	37.96
bc-12-2-9	387	383.75	2196282	3600	0.84	82.36
bc-12-3-9	387	384.06	2225449	3600	0.76	12.41
bc-12-4-9	387	384.25	2319773	3600	0.71	10.60
bc-12-5-9	374	374	757288	831.55	0	80.60
bc-12-6-9	375	375	1829541	2022.45	0	82.76
inst_7_5	53	53	14283	1.94	0	14.29
inst_8_6	82	82	248894	49.67	0	17.20
inst_9_7	124	120.62	6166137	3600	2.72	9.77
inst_10_8	176	170.30	3546401	3600.05	3.24	8.70
kinst-4-033-0	183	183	750407	3067.87	0	92.13
kinst-4-033-1	183	183	750407	3085.29	0	92.13
kinst-4-033-2	183	181.00	784600	3600	1.10	92.25
kinst-4-033-3	183	183	591594	2375.70	0	92.19
kinst-4-033-4	183	183	738798	3009.56	0	91.94
kinst-4-034-0	188	188	381384	1592.45	0	92.41
kinst-4-034-1	188	188	381384	1595.73	0	92.41
kinst-4-034-2	188	188	420851	1850.42	0	91.86
kinst-4-034-3	188	188	741017	2861.79	0	92.73
kinst-4-034-4	188	188	289955	1199.55	0	92.87
nn16k7i1	235	235	59926	111.48	0	85.50
nn16k7i2	235	235	102888	185.88	0	83.09
nn16k7i3	235	235	44315	81.19	0	12.64
nn16k7i4	235	235	99949	168.27	0	86.27
nn16k7i5	235	235	49443	86.74	0	12.64
nn16k7i6	235	235	83821	148.87	0	86.84
nn16k8i1	299	299	116676	266.23	0	84.96
nn16k8i2	300	300	376550	851.58	0	87.11
nn16k8i3	300	300	315473	895.78	0	84.59
nn16k8i4	300	300	800429	1943.06	0	87.38
nn16k8i5	300	300	262116	648	0	87.49
nn16k8i6	300	300	154042	355.47	0	17.05
n12k10i1	341	341	493798	824.88	0	82.34
n12k10i2	341	341	645274	1064.23	0	82.61
n12k10i3	341	341	366655	570.34	0	82.57
n12k10i4	341	341	481461	764.59	0	6.20
n12k10i5	341	341	247404	439.75	0	83.64
n12k10i6	341	341	360462	645.07	0	11.67
n12k9i1	281	281	285737	437.07	0	81.98
n12k9i2	281	281	284331	392.81	0	81.75
n12k9i3	281	281	296887	381.25	0	81.24
n12k9i4	281	281	273514	375.81	0	81.31
n12k9i5	281	281	434979	566.70	0	38.24
n12k9i6	281	281	337532	424.83	0	4.55

Cuadro B.12. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **(d-1)-Color** para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-C1C2					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	304	1277133	3600	0.33	7.95
bc-43-2-1	331	331	9089	34.57	0	6.14
bc-43-3-1	310	310	712919	1840.11	0	5.72
bc-43-4-1	631	628.50	389946	3600	0.40	94.33
bc-43-5-1	354	354	135545	390.71	0	2.06
bc-43-6-1	401	399.50	694521	3600	0.37	6.09
bc-13-1-5	149	149	713389	238.52	0	5.36
bc-13-2-5	148	148	106715	39.48	0	5.09
bc-13-3-5	129	129	6690155	2887.16	0	6.41
bc-13-4-5	55	55	204	0.14	0	25.70
bc-13-5-5	115	115	318153	144.08	0	16.62
bc-13-6-5	119	119	5316960	2417.70	0	6.65
bc-12-1-9	398	394.50	1336664	3600	0.88	17.19
bc-12-2-9	387	384.25	1659745	3600	0.71	5.85
bc-12-3-9	387	384.25	1506240	3600	0.71	83.05
bc-12-4-9	387	384.38	1586367	3600	0.68	11.02
bc-12-5-9	374	374	130613	194.92	0	3.48
bc-12-6-9	375	375	239752	422.54	0	9.25
inst_7_5	53	53	9870	1.51	0	8.88
inst_8_6	82	82	11040	3.24	0	69.57
inst_9_7	124	122	7458847	3600	1.61	9.37
inst_10_8	176	172.67	3692425	3600	1.89	20.42
kinst-4-033-0	183	183	237321	1163.86	0	92.40
kinst-4-033-1	183	183	237321	1193.48	0	92.40
kinst-4-033-2	183	183	168001	774.49	0	92.07
kinst-4-033-3	183	183	262262	1232.24	0	91.37
kinst-4-033-4	183	183	140208	640.54	0	92.62
kinst-4-034-0	188	188	175525	810.73	0	19.25
kinst-4-034-1	188	188	175525	809.81	0	19.25
kinst-4-034-2	188	188	65677	337.18	0	92.70
kinst-4-034-3	188	188	203402	1000.34	0	91.22
kinst-4-034-4	188	188	59987	306.18	0	92.03
nn16k7i1	235	235	20419	74.02	0	11.53
nn16k7i2	235	235	31089	98.65	0	10.88
nn16k7i3	235	235	24338	79.98	0	85.76
nn16k7i4	235	235	56812	168.19	0	22.65
nn16k7i5	235	235	17621	62.05	0	8.63
nn16k7i6	235	235	29011	103.84	0	86.25
nn16k8i1	299	299	48159	196.53	0	11.36
nn16k8i2	300	300	173004	605.78	0	86.54
nn16k8i3	300	300	212511	608.31	0	8.29
nn16k8i4	300	300	158075	497.88	0	6.32
nn16k8i5	300	300	121009	469.02	0	84.61
nn16k8i6	300	300	78301	298.27	0	7.52
n12k10i1	341	341	135654	394.16	0	16.53
n12k10i2	341	341	138037	391.92	0	5.40
n12k10i3	341	341	193831	440.11	0	81.71
n12k10i4	341	341	408643	891.79	0	41.03
n12k10i5	341	341	390843	875.64	0	28.74
n12k10i6	341	341	562601	1362.11	0	7.69
n12k9i1	281	281	285079	582.76	0	5.10
n12k9i2	281	281	203649	413.81	0	7.01
n12k9i3	281	281	232692	487.52	0	6.62
n12k9i4	281	281	201573	380.06	0	6.04
n12k9i5	281	281	321632	621.42	0	10.42
n12k9i6	281	281	362544	680.30	0	9.15

Cuadro B.13. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color** y **(d-1)-Color** para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	1036680	3136.77	0	5.33
bc-43-2-1	331	331	2193	12.20	0	24.77
bc-43-3-1	310	310	36050	110.99	0	4.69
bc-43-4-1	631	629.50	344676	3600	0.24	7.46
bc-43-5-1	354	354	25176	108.79	0	7.45
bc-43-6-1	401	400	737583	3600	0.25	5.52
bc-13-1-5	149	149	106	0.34	0	2.15
bc-13-2-5	148	148	52	0.29	0	1.67
bc-13-3-5	129	129	68	0.40	0	1.15
bc-13-4-5	55	55	33	0.66	0	4.85
bc-13-5-5	115	115	19947	9.63	0	3.60
bc-13-6-5	119	119	26858	14.40	0	11.36
bc-12-1-9	398	395.25	1305900	3600	0.69	6.63
bc-12-2-9	387	384.50	1486209	3600	0.65	7.27
bc-12-3-9	387	381.46	1669079	3600	1.43	12.93
bc-12-4-9	387	384.31	1481900	3600	0.69	10.43
bc-12-5-9	374	374	215724	369.76	0	10.24
bc-12-6-9	375	375	1914893	3592.75	0	7.73
inst_7_5	53	53	0	0.18	0	0
inst_8_6	82	82	29812	6.50	0	1.83
inst_9_7	124	124	350	0.68	0	4.33
inst_10_8	176	176	14322	7.44	0	3.19
kinst-4-033-0	183	183	10215	69.48	0	91.27
kinst-4-033-1	183	183	10215	67.80	0	91.27
kinst-4-033-2	183	183	24334	122.90	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	17493	116.16	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	10363	65.13	0	91.44
kinst-4-034-0	188	188	101767	523.24	0	12.09
kinst-4-034-1	188	188	101767	519.11	0	12.09
kinst-4-034-2	188	188	50258	270.51	0	91.82
kinst-4-034-3	188	188	137972	749.36	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	79168	399.94	0	93.27
nn16k7i1	235	235	21337	73.11	0	85.57
nn16k7i2	235	235	19408	72.47	0	84.79
nn16k7i3	235	235	14015	58.90	0	13.81
nn16k7i4	235	235	17273	62.06	0	10.70
nn16k7i5	235	235	12248	41.82	0	8.30
nn16k7i6	235	235	7537	39.76	0	8.71
nn16k8i1	299	299	10822	70.10	0	5.86
nn16k8i2	300	300	133262	478.57	0	14.24
nn16k8i3	300	300	60097	252.60	0	87.21
nn16k8i4	300	300	141709	526.41	0	17.60
nn16k8i5	300	300	74035	321.06	0	12.77
nn16k8i6	300	300	136029	523.58	0	13.56
n12k10i1	341	338.17	1052800	3600	0.83	7.32
n12k10i2	341	341	69756	188.34	0	7.63
n12k10i3	341	341	40594	128.69	0	9.80
n12k10i4	341	341	39270	116.63	0	10.12
n12k10i5	341	341	243756	637.01	0	12.60
n12k10i6	341	341	172461	521.52	0	34.71
n12k9i1	281	281	102529	376.17	0	81.81
n12k9i2	281	281	47305	154.11	0	13.11
n12k9i3	281	281	98968	244.06	0	11.58
n12k9i4	281	281	71039	312.36	0	82.26
n12k9i5	281	281	401357	820.20	0	13.48
n12k9i6	281	281	82050	284.71	0	16.66

Cuadro B.14. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color** y cortes CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C2					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	263377	939.31	0	10.03
bc-43-2-1	331	331	1535	8.84	0	92.41
bc-43-3-1	310	310	95723	295.38	0	5.62
bc-43-4-1	631	628.50	333195	3600	0.40	93.66
bc-43-5-1	354	354	480504	1667.63	0	92.37
bc-43-6-1	401	401	109915	401.18	0	93.66
bc-13-1-5	149	149	515	0.59	0	5.45
bc-13-2-5	148	148	92	0.33	0	2.01
bc-13-3-5	129	129	140	0.49	0	12.10
bc-13-4-5	55	55	35	0.84	0	5.41
bc-13-5-5	115	115	19618	9.30	0	11.11
bc-13-6-5	119	119	322073	158.48	0	11.13
bc-12-1-9	398	394.50	1277818	3600	0.88	9.25
bc-12-2-9	387	384.25	1490520	3600	0.71	13.02
bc-12-3-9	387	383.50	1474284	3600.03	0.90	22.70
bc-12-4-9	387	383.50	1439624	3600	0.90	9.13
bc-12-5-9	374	374	527021	739.29	0	5.64
bc-12-6-9	375	375	335976	669.71	0	10.06
inst_7_5	53	53	211	0.09	0	7.14
inst_8_6	82	82	1527	0.50	0	6.98
inst_9_7	124	124	1441	1.30	0	12.59
inst_10_8	176	176	1272178	988.05	0	4.92
kinst-4-033-0	183	183	79729	490	0	91.37
kinst-4-033-1	183	183	79729	489.48	0	91.37
kinst-4-033-2	183	183	99370	654.29	0	91.04
kinst-4-033-3	183	183	76409	424.96	0	91.28
kinst-4-033-4	183	183	614317	3138.79	0	92.70
kinst-4-034-0	188	188	223892	1347.46	0	91.99
kinst-4-034-1	188	188	223892	1346.21	0	91.99
kinst-4-034-2	188	188	117090	719.21	0	92.90
kinst-4-034-3	188	188	125120	674.61	0	91.53
kinst-4-034-4	188	188	317864	1853.19	0	92.99
nn16k7i1	235	235	19442	63.85	0	4.96
nn16k7i2	235	235	37500	119.74	0	84.29
nn16k7i3	235	235	52620	204.69	0	15.60
nn16k7i4	235	229.67	1073185	3600	2.27	10.55
nn16k7i5	235	231.72	973800	3600	1.40	11.58
nn16k7i6	235	235	61215	175.07	0	86.19
nn16k8i1	299	299	77792	316.12	0	11.56
nn16k8i2	300	300	150164	610.19	0	86.69
nn16k8i3	300	300	192618	846.52	0	86.60
nn16k8i4	300	300	74604	309.56	0	12.50
nn16k8i5	300	298.77	772139	3600	0.41	30.33
nn16k8i6	300	300	160045	646.38	0	85.20
n12k10i1	341	341	494513	1303.64	0	83.03
n12k10i2	341	341	122570	395.61	0	81.09
n12k10i3	341	341	37472	119.63	0	9.79
n12k10i4	341	341	660647	1659.39	0	8.26
n12k10i5	341	341	54340	212.14	0	12.19
n12k10i6	341	341	114026	331.72	0	9.59
n12k9i1	281	281	242347	564.85	0	17.12
n12k9i2	281	281	297771	585.21	0	6.45
n12k9i3	281	281	158950	425.03	0	75.84
n12k9i4	281	281	152577	365.75	0	8.55
n12k9i5	281	281	224332	521.13	0	9.62
n12k9i6	281	281	518940	1029.50	0	10.78

Cuadro B.15. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **(d-1)-Color** y cortes CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	304	1167926	3600	0.33	12.51
bc-43-2-1	331	331	3034	15.37	0	24.77
bc-43-3-1	310	310	685143	1917.23	0	8.99
bc-43-4-1	631	629	317969	3600	0.32	3.87
bc-43-5-1	354	354	68738	288.34	0	1.48
bc-43-6-1	401	401	375648	1442.13	0	15.25
bc-13-1-5	149	149	81	0.33	0	1.99
bc-13-2-5	148	148	70	0.34	0	5.45
bc-13-3-5	129	129	105	0.47	0	2.71
bc-13-4-5	55	55	29	0.56	0	6.55
bc-13-5-5	115	115	78127	40.57	0	3.60
bc-13-6-5	119	119	1730	1.44	0	9.13
bc-12-1-9	398	393.25	1243900	3600	1.19	11.39
bc-12-2-9	387	383.67	1393606	3600	0.86	11.53
bc-12-3-9	387	383.50	1479083	3600	0.90	11.24
bc-12-4-9	387	382.33	1497460	3600	1.21	2.56
bc-12-5-9	374	374	124141	232.38	0	13.82
bc-12-6-9	375	375	86946	180.44	0	8.02
inst_7_5	53	53	0	0.18	0	0
inst_8_6	82	82	20573	4.71	0	1.83
inst_9_7	124	124	350	0.69	0	4.33
inst_10_8	176	176	5591	3.20	0	3.19
kinst-4-033-0	183	183	10588	61.68	0	91.27
kinst-4-033-1	183	183	10588	61.52	0	91.27
kinst-4-033-2	183	183	45911	266.40	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	15917	103.07	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	9806	61.94	0	91.44
kinst-4-034-0	188	188	105387	558	0	92.65
kinst-4-034-1	188	188	105387	559.68	0	92.65
kinst-4-034-2	188	188	46917	284.29	0	91.82
kinst-4-034-3	188	188	142415	749.09	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	93400	466.47	0	93.27
nn16k7i1	235	235	7200	28.84	0	9.55
nn16k7i2	235	235	17831	65.88	0	84.70
nn16k7i3	235	235	6595	25.53	0	13.79
nn16k7i4	235	235	18316	64.31	0	19.76
nn16k7i5	235	235	70651	219.64	0	11
nn16k7i6	235	235	6835	31.57	0	12.17
nn16k8i1	299	299	13318	113.58	0	85.85
nn16k8i2	300	300	169619	620.86	0	8.67
nn16k8i3	300	300	70685	302.85	0	12.24
nn16k8i4	300	300	41567	161.38	0	87.22
nn16k8i5	300	300	37890	137.31	0	5.59
nn16k8i6	300	300	33279	141.70	0	87.01
n12k10i1	341	341	51193	153.23	0	9.84
n12k10i2	341	337.50	1103556	3600	1.03	12.37
n12k10i3	341	341	23115	85.19	0	22.16
n12k10i4	341	341	320814	875.60	0	5.74
n12k10i5	341	341	46181	164.58	0	21.53
n12k10i6	341	341	66856	212.89	0	81.89
n12k9i1	281	281	149470	632.04	0	81.81
n12k9i2	281	281	94663	329.15	0	14.93
n12k9i3	281	281	93505	248.17	0	11.58
n12k9i4	281	281	95753	340.38	0	5.88
n12k9i5	281	278.34	1597570	3600	0.95	12.10
n12k9i6	281	281	103861	335.24	0	16.66

Cuadro B.16. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color** y cortes CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1-B3					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	483915	1975.92	0	1.60
bc-43-2-1	331	331	812	6.71	0	24.77
bc-43-3-1	310	310	329162	1073.66	0	4.40
bc-43-4-1	631	628.50	235311	3600	0.40	7.46
bc-43-5-1	354	354	88099	356.75	0	7.45
bc-43-6-1	401	400	598077	3600	0.25	4.32
bc-13-1-5	149	149	205	0.42	0	2.15
bc-13-2-5	148	148	52	0.29	0	1.67
bc-13-3-5	129	129	60	0.39	0	2.65
bc-13-4-5	55	55	33	0.66	0	4.85
bc-13-5-5	115	115	52492	31.63	0	10.68
bc-13-6-5	119	119	59503	29.85	0	11.36
bc-12-1-9	398	394.75	597602	3600	0.82	6.63
bc-12-2-9	387	383.95	638026	3600	0.79	7.27
bc-12-3-9	387	381.50	1007611	3600.02	1.42	12.93
bc-12-4-9	387	383.50	621120	3600	0.90	10.43
bc-12-5-9	374	374	185197	599.39	0	10.24
bc-12-6-9	375	372	853554	3600	0.80	8.74
inst_7_5	53	53	0	0.16	0	0
inst_8_6	82	82	15393	3.68	0	1.83
inst_9_7	124	124	913	0.98	0	3.85
inst_10_8	176	176	30220	17.59	0	3.19
kinst-4-033-0	183	183	8765	53.93	0	91.27
kinst-4-033-1	183	183	8765	58.90	0	91.27
kinst-4-033-2	183	183	24598	135.08	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	14974	101.98	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	10407	71.13	0	91.44
kinst-4-034-0	188	188	93694	482.46	0	12.09
kinst-4-034-1	188	188	93694	497.43	0	12.09
kinst-4-034-2	188	188	59259	357.31	0	14.79
kinst-4-034-3	188	188	131096	707.98	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	90929	505.64	0	93.27
nn16k7i1	235	235	27971	119.04	0	86.85
nn16k7i2	235	235	16875	82.29	0	7.06
nn16k7i3	235	235	10801	43.91	0	13.81
nn16k7i4	235	235	14298	54.73	0	10.70
nn16k7i5	235	235	11750	53.81	0	8.30
nn16k7i6	235	235	6646	29.41	0	85.22
nn16k8i1	299	299	7606	65.32	0	4.72
nn16k8i2	300	300	153393	867.88	0	5.06
nn16k8i3	300	300	22796	106.31	0	85.32
nn16k8i4	300	300	35169	197.18	0	86.01
nn16k8i5	300	300	55377	305.97	0	12.72
nn16k8i6	300	300	144216	861.63	0	13.56
n12k10i1	341	337.65	569700	3600	0.98	7.32
n12k10i2	341	341	139774	656.46	0	7.63
n12k10i3	341	341	444978	2576.63	0	82.06
n12k10i4	341	341	85172	359.04	0	10.12
n12k10i5	341	341	360746	1688.80	0	12.60
n12k10i6	341	341	52898	205.78	0	80.64
n12k9i1	281	281	86391	308.96	0	12.98
n12k9i2	281	281	51047	176.11	0	9.55
n12k9i3	281	281	131027	524.66	0	17.81
n12k9i4	281	281	57516	219.25	0	9.37
n12k9i5	281	281	45128	136.11	0	13.17
n12k9i6	281	281	85345	488.34	0	82.10

Cuadro B.17. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 3 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1-B5					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	145860	1179.86	0	4.78
bc-43-2-1	331	331	732	6.61	0	1.37
bc-43-3-1	310	310	535149	2580.96	0	4.69
bc-43-4-1	631	628.79	124244	3600	0.35	7.46
bc-43-5-1	354	354	100323	647.05	0	7.45
bc-43-6-1	401	400	323000	3600	0.25	5.52
bc-13-1-5	149	149	106	0.34	0	2.15
bc-13-2-5	148	148	52	0.29	0	1.67
bc-13-3-5	129	129	30	0.45	0	5.51
bc-13-4-5	55	55	33	0.67	0	4.85
bc-13-5-5	115	115	33236	24.06	0	3.60
bc-13-6-5	119	119	100763	66.01	0	11.36
bc-12-1-9	398	394.50	478102	3600	0.88	6.63
bc-12-2-9	387	383.83	492121	3600	0.82	7.27
bc-12-3-9	387	381.50	768379	3600	1.42	12.93
bc-12-4-9	387	383.25	501800	3600	0.97	10.43
bc-12-5-9	374	374	196258	824.86	0	10.24
bc-12-6-9	375	373	556133	3600	0.53	7.73
inst_7_5	53	53	0	0.18	0	0
inst_8_6	82	82	3897	0.91	0	1.83
inst_9_7	124	124	412	0.70	0	4.33
inst_10_8	176	176	3215	2.34	0	1.55
kinst-4-033-0	183	183	10215	63.55	0	91.27
kinst-4-033-1	183	183	10215	65.31	0	91.27
kinst-4-033-2	183	183	24334	126.57	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	14548	100.61	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	10720	72.76	0	91.44
kinst-4-034-0	188	188	101164	521.55	0	12.09
kinst-4-034-1	188	188	101164	514.11	0	12.09
kinst-4-034-2	188	188	49518	275.37	0	91.82
kinst-4-034-3	188	188	141689	817.06	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	80811	446.09	0	93.27
nn16k7i1	235	235	21467	74.84	0	85.57
nn16k7i2	235	235	19859	79.07	0	84.79
nn16k7i3	235	235	22406	99.37	0	13.81
nn16k7i4	235	235	14942	53.01	0	10.70
nn16k7i5	235	235	14264	50.95	0	8.30
nn16k7i6	235	235	9210	48.16	0	8.71
nn16k8i1	299	299	19627	174.27	0	15.90
nn16k8i2	300	300	213683	1185.97	0	14.24
nn16k8i3	300	300	35405	162.02	0	87.21
nn16k8i4	300	300	156072	788.43	0	17.60
nn16k8i5	300	300	79249	366.54	0	9.56
nn16k8i6	300	300	156476	880.40	0	13.56
n12k10i1	341	337.33	444837	3600	1.08	7.32
n12k10i2	341	341	145051	761.72	0	7.63
n12k10i3	341	341	32560	118.43	0	9.80
n12k10i4	341	341	48771	143.69	0	10.12
n12k10i5	341	341	372727	2070.51	0	12.60
n12k10i6	341	341	206349	825.78	0	34.71
n12k9i1	281	281	96294	487.49	0	81.81
n12k9i2	281	281	77516	247.92	0	13.11
n12k9i3	281	281	63017	208.57	0	80.14
n12k9i4	281	281	66729	260.03	0	38.40
n12k9i5	281	281	96519	256.75	0	16.21
n12k9i6	281	281	121918	585.64	0	16.66

Cuadro B.18. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 5 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1-B solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	172413	2754.60	0	5.33
bc-43-2-1	331	331	1402	10.69	0	1.79
bc-43-3-1	310	310	20111	125.37	0	4.69
bc-43-4-1	631	628.50	68157	3600	0.40	7.46
bc-43-5-1	354	354	3838	34.44	0	7.50
bc-43-6-1	401	401	14101	122.85	0	3.50
bc-13-1-5	149	149	153	0.37	0	1.99
bc-13-2-5	148	148	40	0.25	0	3.59
bc-13-3-5	129	129	69	0.46	0	1.15
bc-13-4-5	55	55	33	0.67	0	4.85
bc-13-5-5	115	115	25837	16.01	0	7.58
bc-13-6-5	119	119	2812	1.70	0	11.36
bc-12-1-9	398	394.90	466261	3600	0.78	6.63
bc-12-2-9	387	384.10	666497	3600.02	0.75	7.27
bc-12-3-9	387	381.50	899899	3600	1.42	12.93
bc-12-4-9	387	384	660337	3600	0.78	10.43
bc-12-5-9	374	374	152703	375.60	0	10.24
bc-12-6-9	375	375	360456	977.52	0	7.73
inst_7_5	53	53	0	0.18	0	0
inst_8_6	82	82	28636	6.52	0	1.83
inst_9_7	124	124	1391	1.38	0	5.81
inst_10_8	176	176	30568	15.58	0	3.19
kinst-4-033-0	183	183	7338	51.66	0	91.24
kinst-4-033-1	183	183	7338	51.72	0	91.24
kinst-4-033-2	183	183	11822	72.61	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	16707	122.20	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	11236	69.84	0	92.63
kinst-4-034-0	188	188	103974	611.18	0	12.09
kinst-4-034-1	188	188	103974	613.89	0	12.09
kinst-4-034-2	188	188	44553	326.44	0	91.82
kinst-4-034-3	188	188	137962	887.84	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	97331	580.61	0	93.27
nn16k7i1	235	235	24256	90.62	0	85.57
nn16k7i2	235	235	15663	59.15	0	84.79
nn16k7i3	235	235	22811	86.18	0	13.81
nn16k7i4	235	235	12438	47.82	0	5.84
nn16k7i5	235	235	15163	52.71	0	8.30
nn16k7i6	235	235	23842	98.67	0	21.53
nn16k8i1	299	299	38930	214.09	0	86.08
nn16k8i2	300	300	173023	876.03	0	14.24
nn16k8i3	300	300	45613	214.86	0	87.21
nn16k8i4	300	300	117976	588.46	0	17.60
nn16k8i5	300	300	66041	330.96	0	12.77
nn16k8i6	300	300	29754	147.50	0	11.49
n12k10i1	341	337.85	525454	3600.01	0.92	7.32
n12k10i2	341	341	53273	211.93	0	7.63
n12k10i3	341	341	42549	132.32	0	9.80
n12k10i4	341	341	23073	75.66	0	10.12
n12k10i5	341	341	442467	1916.65	0	12.60
n12k10i6	341	341	202872	779.65	0	34.71
n12k9i1	281	281	98089	497.75	0	81.81
n12k9i2	281	281	46749	161.14	0	13.11
n12k9i3	281	281	69410	213.03	0	11.58
n12k9i4	281	281	75882	319.31	0	82.26
n12k9i5	281	281	597293	2519.27	0	13.48
n12k9i6	281	281	66554	275.31	0	16.66

Cuadro B.19. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2-B3					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	363868	1336.56	0	7.70
bc-43-2-1	331	331	2042	11.72	0	24.77
bc-43-3-1	310	310	70964	179.94	0	8.99
bc-43-4-1	631	629	246061	3600.01	0.32	9.73
bc-43-5-1	354	354	2681	20.07	0	1.48
bc-43-6-1	401	401	268887	1313.27	0	3.16
bc-13-1-5	149	149	81	0.33	0	1.99
bc-13-2-5	148	148	72	0.35	0	5.45
bc-13-3-5	129	129	60	0.39	0	2.65
bc-13-4-5	55	55	29	0.56	0	6.55
bc-13-5-5	115	115	6042	3.79	0	10.68
bc-13-6-5	119	119	23439	13.88	0	9.21
bc-12-1-9	398	392.41	519640	3600	1.41	11.39
bc-12-2-9	387	382.75	596311	3600.01	1.10	10.91
bc-12-3-9	387	383	662613	3600	1.03	11.24
bc-12-4-9	387	382	882513	3600	1.29	6.85
bc-12-5-9	374	373	790366	3600	0.27	13.79
bc-12-6-9	375	372.64	726970	3600	0.63	4.76
inst_7_5	53	53	0	0.16	0	0
inst_8_6	82	82	15029	3.77	0	1.83
inst_9_7	124	124	957	1.01	0	3.85
inst_10_8	176	176	14830	8.47	0	3.19
kinst-4-033-0	183	183	9717	61.17	0	91.27
kinst-4-033-1	183	183	9717	61.51	0	91.27
kinst-4-033-2	183	183	26152	144.09	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	16947	111.25	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	10163	58.80	0	91.44
kinst-4-034-0	188	188	130753	673.16	0	92.65
kinst-4-034-1	188	188	130753	672.90	0	92.65
kinst-4-034-2	188	188	128133	604.85	0	14.79
kinst-4-034-3	188	188	106524	601.79	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	110008	539.79	0	93.27
nn16k7i1	235	235	10016	40.71	0	15.48
nn16k7i2	235	235	12019	49.85	0	84.70
nn16k7i3	235	235	6126	21.18	0	6.14
nn16k7i4	235	235	57008	215.50	0	84.44
nn16k7i5	235	235	30392	140.62	0	11
nn16k7i6	235	235	10411	45.76	0	17.21
nn16k8i1	299	299	6986	58.46	0	4.72
nn16k8i2	300	300	590667	3070.03	0	3.43
nn16k8i3	300	300	51685	296.33	0	85.35
nn16k8i4	300	300	64113	330.85	0	83.25
nn16k8i5	300	300	91543	617.28	0	85.66
nn16k8i6	300	296.34	498792	3600	1.22	86.40
n12k10i1	341	341	50141	203.02	0	9.84
n12k10i2	341	341	21889	87.67	0	24.78
n12k10i3	341	341	574045	3517.68	0	82.06
n12k10i4	341	341	167101	751.19	0	81.43
n12k10i5	341	341	46484	218.11	0	21.53
n12k10i6	341	341	114643	493.91	0	82.77
n12k9i1	281	281	80835	265.48	0	9.73
n12k9i2	281	281	77297	289.44	0	51.04
n12k9i3	281	281	82867	318.74	0	17.82
n12k9i4	281	281	64734	200.15	0	15.06
n12k9i5	281	281	58127	169.06	0	10.34
n12k9i6	281	281	73050	411.70	0	82.10

Cuadro B.20. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 3 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2-B5					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	190364	1631.59	0	4.78
bc-43-2-1	331	331	4732	25.40	0	5.04
bc-43-3-1	310	310	432908	2183.59	0	8.99
bc-43-4-1	631	629	139900	3600	0.32	3.87
bc-43-5-1	354	354	26953	213.65	0	1.48
bc-43-6-1	401	399.50	268153	3600.01	0.37	15.25
bc-13-1-5	149	149	189	0.47	0	1.99
bc-13-2-5	148	148	70	0.34	0	5.45
bc-13-3-5	129	129	80	0.42	0	2.75
bc-13-4-5	55	55	29	0.56	0	6.55
bc-13-5-5	115	115	74464	56.15	0	3.60
bc-13-6-5	119	119	120437	78.65	0	9.13
bc-12-1-9	398	392.12	352014	3600	1.48	11.39
bc-12-2-9	387	382.50	447100	3600	1.16	11.53
bc-12-3-9	387	383	459115	3600	1.03	11.24
bc-12-4-9	387	382	771365	3600	1.29	2.81
bc-12-5-9	374	374	215671	1025.66	0	2.42
bc-12-6-9	375	375	72070	257.86	0	8.02
inst_7_5	53	53	0	0.18	0	0
inst_8_6	82	82	7722	1.67	0	1.83
inst_9_7	124	124	515	0.80	0	4.33
inst_10_8	176	176	6822	4.71	0	1.55
kinst-4-033-0	183	183	10891	69.61	0	91.27
kinst-4-033-1	183	183	10891	69.58	0	91.27
kinst-4-033-2	183	183	34327	198.57	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	13682	90.54	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	9806	62.54	0	91.44
kinst-4-034-0	188	188	110672	611.09	0	92.65
kinst-4-034-1	188	188	110672	614.68	0	92.65
kinst-4-034-2	188	188	46747	291.73	0	91.82
kinst-4-034-3	188	188	118490	718.95	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	120412	633.33	0	93.27
nn16k7i1	235	235	6895	29.16	0	9.55
nn16k7i2	235	235	21792	87.79	0	84.70
nn16k7i3	235	235	52412	215.95	0	13.81
nn16k7i4	235	235	18409	69.57	0	19.76
nn16k7i5	235	235	39769	186.98	0	11
nn16k7i6	235	235	13325	60.47	0	10.47
nn16k8i1	299	299	11395	63.37	0	84.99
nn16k8i2	300	300	113927	655.93	0	10.49
nn16k8i3	300	298.34	294055	3600	0.55	85.15
nn16k8i4	300	300	50234	244.09	0	87.22
nn16k8i5	300	300	35578	176.52	0	86.54
nn16k8i6	300	300	34401	179.70	0	87.01
n12k10i1	341	341	38119	148.80	0	9.84
n12k10i2	341	341	16230	53.39	0	10.61
n12k10i3	341	341	147766	924.27	0	29.85
n12k10i4	341	341	31579	109.16	0	8.83
n12k10i5	341	341	48146	345.95	0	21.53
n12k10i6	341	341	74054	347.96	0	12.57
n12k9i1	281	281	110100	722.24	0	81.81
n12k9i2	281	281	96051	385.93	0	14.93
n12k9i3	281	281	47177	130.38	0	21.19
n12k9i4	281	281	62358	214.27	0	20.09
n12k9i5	281	281	129992	458.15	0	11.59
n12k9i6	281	281	78228	373.08	0	10.42

Cuadro B.21. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 5 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2-B					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	118937	974.05	0	5.08
bc-43-2-1	331	331	1486	12.04	0	1.79
bc-43-3-1	310	310	63470	310.43	0	4.36
bc-43-4-1	631	628.78	77600	3600	0.35	13.02
bc-43-5-1	354	354	5482	40.95	0	1.48
bc-43-6-1	401	400	204000	3600	0.25	15.25
bc-13-1-5	149	149	83	0.30	0	2.63
bc-13-2-5	148	148	86	0.32	0	1.71
bc-13-3-5	129	129	120	0.50	0	2.71
bc-13-4-5	55	55	29	0.57	0	6.55
bc-13-5-5	115	115	20066	12.54	0	7.58
bc-13-6-5	119	119	17133	9.15	0	9.13
bc-12-1-9	398	393.44	446074	3600	1.14	11.39
bc-12-2-9	387	383.50	675073	3600	0.90	11.53
bc-12-3-9	387	383.50	658769	3600	0.90	11.24
bc-12-4-9	387	382.38	864964	3600	1.20	2.56
bc-12-5-9	374	374	126231	312.77	0	13.82
bc-12-6-9	375	375	88538	246.96	0	8.02
inst_7_5	53	53	0	0.18	0	0
inst_8_6	82	82	28297	6.61	0	1.83
inst_9_7	124	124	1047	1.37	0	8.33
inst_10_8	176	176	3604	2.40	0	3.19
kinst-4-033-0	183	183	7199	49.85	0	91.24
kinst-4-033-1	183	183	7199	49.70	0	91.24
kinst-4-033-2	183	183	14040	99.44	0	91.86
kinst-4-033-3	183	183	13383	94.96	0	92.54
kinst-4-033-4	183	183	11236	70.96	0	92.63
kinst-4-034-0	188	188	119091	795.14	0	92.65
kinst-4-034-1	188	188	119091	797.60	0	92.65
kinst-4-034-2	188	188	40110	275.75	0	91.82
kinst-4-034-3	188	188	104849	699.35	0	93.27
kinst-4-034-4	188	188	109702	724.34	0	93.27
nn16k7i1	235	235	9676	39.51	0	9.55
nn16k7i2	235	235	15895	63.74	0	4.08
nn16k7i3	235	235	5669	24.12	0	13.79
nn16k7i4	235	235	17257	71.05	0	19.76
nn16k7i5	235	235	76897	374.50	0	11
nn16k7i6	235	235	12473	57.09	0	11.35
nn16k8i1	299	299	8571	58.42	0	88.16
nn16k8i2	300	300	99943	517.65	0	8.67
nn16k8i3	300	300	40149	211.23	0	12.24
nn16k8i4	300	300	111487	648.23	0	84.72
nn16k8i5	300	300	62972	351.06	0	6.65
nn16k8i6	300	300	51829	271.15	0	87.01
n12k10i1	341	341	64646	290.51	0	8.86
n12k10i2	341	341	74842	268.06	0	9.54
n12k10i3	341	341	18938	80.92	0	80.83
n12k10i4	341	341	83443	360.56	0	12.14
n12k10i5	341	341	42345	184.16	0	21.53
n12k10i6	341	341	74128	299.20	0	81.89
n12k9i1	281	281	96136	473.58	0	81.81
n12k9i2	281	281	64377	376.97	0	14.93
n12k9i3	281	281	69493	228.64	0	11.58
n12k9i4	281	281	50923	264.16	0	14.51
n12k9i5	281	281	227646	771.96	0	11.25
n12k9i6	281	281	90668	334.57	0	16.66

Cuadro B.22. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2-B-NH					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	304	402032	3600	0.33	-
bc-43-2-1	331	331	213	4.37	0	-
bc-43-3-1	310	310	2770	23	0	-
bc-43-4-1	631	628.25	135343	3600	0.44	-
bc-43-5-1	354	354	44821	276.93	0	-
bc-43-6-1	401	400	227611	3600	0.25	-
bc-13-1-5	149	149	213	0.36	0	-
bc-13-2-5	148	148	31	0.23	0	-
bc-13-3-5	129	129	102	0.38	0	-
bc-13-4-5	55	55	65	0.93	0	-
bc-13-5-5	115	115	285	0.58	0	-
bc-13-6-5	119	119	36	0.33	0	-
bc-12-1-9	398	395	507880	3600	0.75	-
bc-12-2-9	387	383.50	664335	3600	0.90	-
bc-12-3-9	387	384	656715	3600	0.78	-
bc-12-4-9	387	384	591107	3600	0.78	-
bc-12-5-9	374	374	111736	290.83	0	-
bc-12-6-9	375	375	135511	350.46	0	-
inst_7_5	53	53	13	0.11	0	-
inst_8_6	82	82	2108	1.53	0	-
inst_9_7	124	124	3339	2.74	0	-
inst_10_8	176	176	4261	3.18	0	-
kinst-4-033-0	183	183	25007	133.59	0	-
kinst-4-033-1	183	183	25007	133.58	0	-
kinst-4-033-2	183	183	37520	215.46	0	-
kinst-4-033-3	183	183	31344	170.95	0	-
kinst-4-033-4	183	183	27913	145.58	0	-
kinst-4-034-0	188	188	270163	1563.01	0	-
kinst-4-034-1	188	188	270163	1571.77	0	-
kinst-4-034-2	188	188	137128	830.93	0	-
kinst-4-034-3	188	188	177202	1000.33	0	-
kinst-4-034-4	188	188	217312	1384.36	0	-
nn16k7i1	235	235	12985	63.84	0	-
nn16k7i2	235	235	33315	117.49	0	-
nn16k7i3	235	235	10775	50.26	0	-
nn16k7i4	235	235	256486	1680.46	0	-
nn16k7i5	235	232.46	429815	3600	1.08	-
nn16k7i6	235	235	18260	90.47	0	-
nn16k8i1	299	299	14561	87.30	0	-
nn16k8i2	300	300	48690	281.75	0	-
nn16k8i3	300	298	688984	3600.02	0.67	-
nn16k8i4	300	300	108819	939.93	0	-
nn16k8i5	300	300	25594	126.73	0	-
nn16k8i6	300	300	307618	1932.40	0	-
n12k10i1	341	341	118848	452.50	0	-
n12k10i2	341	341	60375	250.23	0	-
n12k10i3	341	341	39747	175.03	0	-
n12k10i4	341	341	43559	176.96	0	-
n12k10i5	341	341	34019	137.01	0	-
n12k10i6	341	341	32737	122.06	0	-
n12k9i1	281	281	122607	492.56	0	-
n12k9i2	281	281	63784	202.26	0	-
n12k9i3	281	281	119890	473.65	0	-
n12k9i4	281	281	19401	55.04	0	-
n12k9i5	281	281	68615	344.52	0	-
n12k9i6	281	281	132761	410.64	0	-

Cuadro B.23. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, sin heurística inicial ni primal para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2-B-i					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	282369	2314.39	0	2.84
bc-43-2-1	331	331	1435	11.91	0	3.75
bc-43-3-1	310	310	499639	2489.49	0	3.58
bc-43-4-1	635	628.11	63602	3600.01	0.46	2.38
bc-43-5-1	354	354	8476	60.80	0	3.06
bc-43-6-1	401	400	161771	3600	0.25	2.40
bc-13-1-5	149	149	106	0.31	0	3.27
bc-13-2-5	148	148	33	0.24	0	1.07
bc-13-3-5	129	129	46	0.33	0	0.88
bc-13-4-5	55	55	74	0.14	0	4.91
bc-13-5-5	115	115	119	0.26	0	1.84
bc-13-6-5	119	119	48	0.30	0	1.96
bc-12-1-9	398	393.04	448108	3600	1.25	2.35
bc-12-2-9	387	382.81	737749	3600	1.08	1.80
bc-12-3-9	387	381.75	708821	3600	1.36	1.81
bc-12-4-9	387	382.41	559593	3600	1.19	2.20
bc-12-5-9	374	374	175949	403.88	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	79871	169.68	0	1.53
inst_7_5	53	53	122	0.11	0	3.70
inst_8_6	82	82	110	0.67	0	1.96
inst_9_7	124	124	328	0.54	0	2.64
inst_10_8	176	176	33974	19.79	0	0.85
kinst-4-033-0	183	183	15637	87.17	0	4.97
kinst-4-033-1	183	183	15637	87.20	0	4.97
kinst-4-033-2	183	183	29453	156.56	0	4.96
kinst-4-033-3	183	183	15537	88.10	0	4.98
kinst-4-033-4	183	183	18737	110.16	0	4.95
kinst-4-034-0	188	188	106022	598.22	0	6.22
kinst-4-034-1	188	188	106022	598.88	0	6.22
kinst-4-034-2	188	188	119076	717.24	0	6.24
kinst-4-034-3	188	188	161103	975.97	0	6.73
kinst-4-034-4	188	188	102850	629.40	0	6.40
nn16k7i1	235	235	6247	29.30	0	2.73
nn16k7i2	235	235	8327	33.71	0	3.15
nn16k7i3	235	235	7388	23.46	0	2.94
nn16k7i4	235	235	10350	45.84	0	3.25
nn16k7i5	235	235	4601	19.75	0	3.34
nn16k7i6	235	235	7730	32.84	0	3.36
nn16k8i1	299	299	5427	31.89	0	2.93
nn16k8i2	300	300	71603	672.38	0	3.22
nn16k8i3	300	300	72575	390.79	0	2.39
nn16k8i4	300	300	66957	449.80	0	3.20
nn16k8i5	300	300	109075	648.76	0	2.56
nn16k8i6	300	300	47945	290.96	0	2.81
n12k10i1	341	341	26089	92.11	0	2.40
n12k10i2	341	341	29686	88.55	0	2.33
n12k10i3	341	341	21922	76.01	0	1.48
n12k10i4	341	341	96193	364.09	0	2.82
n12k10i5	341	341	335454	1461.58	0	2.61
n12k10i6	341	341	56792	221.50	0	2.44
n12k9i1	281	281	71875	242.12	0	1.78
n12k9i2	281	281	54931	199.89	0	2.39
n12k9i3	281	281	59720	190.25	0	2.77
n12k9i4	281	281	34585	80.26	0	1.78
n12k9i5	281	281	274058	1261.17	0	2.22
n12k9i6	281	281	58639	203.11	0	2.58

Cuadro B.24. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2-B-iPP					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	149687	1603.55	0	2.78
bc-43-2-1	331	331	1310	16.21	0	3.93
bc-43-3-1	310	310	45700	491.45	0	2
bc-43-4-1	632	628	62019	3600	0.48	2.41
bc-43-5-1	354	354	7875	91.91	0	3.21
bc-43-6-1	401	400	122406	3600	0.25	2.44
bc-13-1-5	149	149	135	0.34	0	3.27
bc-13-2-5	148	148	0	0.12	0	0
bc-13-3-5	129	129	228	0.41	0	0.96
bc-13-4-5	55	55	173	0.17	0	5
bc-13-5-5	115	115	67	0.29	0	1.83
bc-13-6-5	119	119	49	0.29	0	1.96
bc-12-1-9	398	393.67	417775	3600	1.09	2.44
bc-12-2-9	387	384	602722	3600	0.78	2.26
bc-12-3-9	387	380.36	657075	3600	1.72	1.81
bc-12-4-9	387	384.07	711761	3600	0.76	2.16
bc-12-5-9	374	374	398041	1187.22	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	166479	381.55	0	1.60
inst_7_5	53	53	99	0.15	0	3.70
inst_8_6	82	82	101	0.53	0	1.94
inst_9_7	124	124	498	0.74	0	2.64
inst_10_8	176	176	22701	14.97	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	22209	125.77	0	4.97
kinst-4-033-1	183	183	22209	125.46	0	4.97
kinst-4-033-2	183	183	41934	252.67	0	4.96
kinst-4-033-3	183	183	27018	163.29	0	4.98
kinst-4-033-4	183	183	46645	267.74	0	4.95
kinst-4-034-0	188	188	149859	905.06	0	6.22
kinst-4-034-1	188	188	121083	699.55	0	6.22
kinst-4-034-2	188	188	223186	1364.57	0	6.24
kinst-4-034-3	188	188	257093	1569.78	0	6.74
kinst-4-034-4	188	188	204888	1274.09	0	6.63
nn16k7i1	235	235	15678	88.33	0	3.70
nn16k7i2	235	235	16282	104.30	0	3.57
nn16k7i3	235	235	12648	67.98	0	3.44
nn16k7i4	235	235	21841	117.49	0	3.18
nn16k7i5	235	235	12142	55.30	0	3.60
nn16k7i6	235	235	19044	102.14	0	3.70
nn16k8i1	299	299	24513	179.31	0	3.53
nn16k8i2	300	300	55697	324.43	0	2.98
nn16k8i3	300	300	389142	2562.94	0	2.31
nn16k8i4	300	300	47346	223.86	0	2.86
nn16k8i5	300	300	53665	356.99	0	2.97
nn16k8i6	300	300	45735	314.48	0	3.22
n12k10i1	341	341	68744	271.24	0	2.82
n12k10i2	341	341	50392	164.13	0	2.76
n12k10i3	341	341	24524	79.67	0	1.47
n12k10i4	341	341	72664	248.07	0	2.33
n12k10i5	341	341	83559	290.54	0	2.98
n12k10i6	341	341	23168	88.01	0	1.90
n12k9i1	281	281	55984	162.96	0	2.12
n12k9i2	281	281	105842	298.20	0	2.15
n12k9i3	281	281	55754	166.37	0	2.15
n12k9i4	281	281	169032	762.65	0	2.41
n12k9i5	281	281	74174	327.66	0	2.68
n12k9i6	281	281	90361	307.70	0	2.43

Cuadro B.25. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial y primal propia para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX-C1C2-B-iPC					
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	304	378486	3600	0.33	2.11
bc-43-2-1	331	331	455	6.87	0	3.85
bc-43-3-1	310	310	23213	162.52	0	3.46
bc-43-4-1	631	628.50	118981	3600	0.40	2.41
bc-43-5-1	354	354	1391	12.45	0	1.81
bc-43-6-1	401	401	237213	3003.46	0	2.44
bc-13-1-5	149	149	196	0.41	0	3.27
bc-13-2-5	148	148	0	0.10	0	0
bc-13-3-5	129	129	12	0.30	0	1.03
bc-13-4-5	55	55	0	0.91	0	0
bc-13-5-5	115	115	59	0.29	0	1.74
bc-13-6-5	119	119	73	0.39	0	1.71
bc-12-1-9	398	394.75	457687	3600	0.82	2.44
bc-12-2-9	387	384	662552	3600	0.78	2.10
bc-12-3-9	387	380.50	821113	3600	1.68	1.81
bc-12-4-9	387	384	695349	3600	0.78	2.13
bc-12-5-9	374	374	165108	383.64	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	201368	455.02	0	1.60
inst_7_5	53	53	30	0.36	0	3.29
inst_8_6	82	82	10496	2.60	0	1.83
inst_9_7	124	124	2756	2.21	0	4.40
inst_10_8	176	176	18524	10.96	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	18661	104.73	0	5.27
kinst-4-033-1	183	183	18661	104.51	0	5.27
kinst-4-033-2	183	183	14071	93.60	0	5.38
kinst-4-033-3	183	183	11778	79.01	0	5.30
kinst-4-033-4	183	183	12974	80.79	0	5.32
kinst-4-034-0	188	188	103477	644.14	0	6.81
kinst-4-034-1	188	188	103477	643.75	0	6.81
kinst-4-034-2	188	188	95064	534.36	0	6.36
kinst-4-034-3	188	188	161211	952.33	0	6
kinst-4-034-4	188	188	83176	500.22	0	6.91
nn16k7i1	235	235	34114	114.91	0	3.36
nn16k7i2	235	235	11899	43.85	0	3.05
nn16k7i3	235	235	9071	43.37	0	3.44
nn16k7i4	235	235	6756	30.02	0	2.63
nn16k7i5	235	235	5959	24.84	0	3.17
nn16k7i6	235	235	13388	74.49	0	3.57
nn16k8i1	299	299	7383	53.27	0	3.34
nn16k8i2	300	300	45610	277.99	0	2.98
nn16k8i3	300	300	236389	1595.11	0	2.31
nn16k8i4	300	300	34986	155.22	0	2.86
nn16k8i5	300	300	38722	344.54	0	2.97
nn16k8i6	300	300	64541	526.72	0	3.22
n12k10i1	341	341	71831	262.64	0	2.59
n12k10i2	341	341	44588	144.65	0	2.58
n12k10i3	341	341	93771	294.35	0	1.55
n12k10i4	341	341	105126	417.42	0	2.33
n12k10i5	341	341	51817	179.29	0	2.77
n12k10i6	341	341	11019	37.60	0	1.82
n12k9i1	281	281	66960	167.24	0	2.12
n12k9i2	281	281	61766	157.57	0	2.07
n12k9i3	281	281	22641	58.22	0	1.77
n12k9i4	281	281	53433	175.99	0	2.16
n12k9i5	281	281	317860	1181.63	0	2.84
n12k9i6	281	281	47869	159.39	0	2.47

Cuadro B.26. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia y primal de CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	Br1 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	49050	578.38	0	2.11
bc-43-2-1	331	331	2745	20.13	0	3.85
bc-43-3-1	310	309	310400	3600	0.32	3.53
bc-43-4-1	631	628.50	109810	3600	0.40	2.45
bc-43-5-1	354	354	24833	165.53	0	1.81
bc-43-6-1	401	401	311243	3392.49	0	2.44
bc-13-1-5	149	149	128	0.37	0	3.43
bc-13-2-5	148	148	0	0.10	0	0
bc-13-3-5	129	129	29	0.28	0	1.03
bc-13-4-5	55	55	0	0.92	0	0
bc-13-5-5	115	115	65	0.26	0	1.74
bc-13-6-5	119	119	60	0.25	0	1.71
bc-12-1-9	398	395	658158	3600	0.75	2.44
bc-12-2-9	387	384.75	872369	3600	0.58	2.10
bc-12-3-9	387	384.50	745600	3600	0.65	1.81
bc-12-4-9	387	384.50	855330	3600	0.65	2.13
bc-12-5-9	374	374	97631	226.33	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	51892	116.64	0	1.60
inst_7_5	53	53	4	0.33	0	3.29
inst_8_6	82	82	334	0.29	0	1.83
inst_9_7	124	124	5331	3.88	0	4.40
inst_10_8	176	176	3395	3.23	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	16546	123.50	0	5.30
kinst-4-033-1	183	183	16546	119.34	0	5.30
kinst-4-033-2	183	183	34562	243.82	0	5.38
kinst-4-033-3	183	183	16654	107.21	0	5.30
kinst-4-033-4	183	183	13860	101.80	0	5.32
kinst-4-034-0	188	188	124223	868.58	0	6.81
kinst-4-034-1	188	188	124223	863.77	0	6.81
kinst-4-034-2	188	188	238192	1535.85	0	6.36
kinst-4-034-3	188	188	221488	1541.15	0	6
kinst-4-034-4	188	188	224146	1552.70	0	6.91
nn16k7i1	235	235	15135	48.68	0	3.36
nn16k7i2	235	235	18872	73.38	0	3.05
nn16k7i3	235	235	9042	46.79	0	3.44
nn16k7i4	235	235	13791	63.74	0	2.63
nn16k7i5	235	235	14635	61.15	0	3.17
nn16k7i6	235	235	22158	117.90	0	3.57
nn16k8i1	299	299	18340	172.43	0	3.34
nn16k8i2	300	300	65798	428.68	0	2.98
nn16k8i3	300	300	22523	126.21	0	2.31
nn16k8i4	300	300	23360	136.57	0	2.86
nn16k8i5	300	300	33470	220.94	0	2.97
nn16k8i6	300	300	68435	558.52	0	3.22
n12k10i1	341	341	43627	154.80	0	2.59
n12k10i2	341	341	58633	182.63	0	2.58
n12k10i3	341	341	21684	64.02	0	1.55
n12k10i4	341	341	43789	150.94	0	2.33
n12k10i5	341	341	35416	117.26	0	2.77
n12k10i6	341	341	9215	31.48	0	1.82
n12k9i1	281	281	47909	137.25	0	2.12
n12k9i2	281	281	44399	126.64	0	2.07
n12k9i3	281	281	18909	49.41	0	1.77
n12k9i4	281	281	54442	169.22	0	2.16
n12k9i5	281	281	117235	351.29	0	2.84
n12k9i6	281	281	66752	248.71	0	2.47

Cuadro B.27. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 1 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	Br2 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	50847	500.83	0	2.11
bc-43-2-1	331	331	970	10.89	0	3.85
bc-43-3-1	310	310	130733	886.23	0	3.53
bc-43-4-1	631	628.50	93318	3600	0.40	2.45
bc-43-5-1	354	354	1103	9.87	0	1.81
bc-43-6-1	401	401	344052	2877.22	0	2.44
bc-13-1-5	149	149	75	0.33	0	3.43
bc-13-2-5	148	148	0	0.10	0	0
bc-13-3-5	129	129	10	0.20	0	1.03
bc-13-4-5	55	55	0	0.91	0	0
bc-13-5-5	115	115	60	0.20	0	1.75
bc-13-6-5	119	119	41	0.22	0	1.75
bc-12-1-9	398	394.75	635178	3600	0.82	2.44
bc-12-2-9	387	385	867954	3600	0.52	2.10
bc-12-3-9	387	384.83	866041	3600	0.56	1.81
bc-12-4-9	387	384.92	888793	3600	0.54	2.13
bc-12-5-9	374	374	63795	135.37	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	65338	145.86	0	1.60
inst_7_5	53	53	4	0.33	0	3.29
inst_8_6	82	82	122	0.23	0	1.83
inst_9_7	124	124	1401	1.45	0	4.40
inst_10_8	176	176	303	0.64	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	11301	63.51	0	5.30
kinst-4-033-1	183	183	11301	63.51	0	5.30
kinst-4-033-2	183	183	15677	86.05	0	5.37
kinst-4-033-3	183	183	12821	72.51	0	5.30
kinst-4-033-4	183	183	12592	65.89	0	5.32
kinst-4-034-0	188	188	104519	574.97	0	6.81
kinst-4-034-1	188	188	104519	576.12	0	6.81
kinst-4-034-2	188	188	80491	441.17	0	6.36
kinst-4-034-3	188	188	163557	922.45	0	6
kinst-4-034-4	188	188	399732	2164.86	0	6.91
nn16k7i1	235	235	25113	102.85	0	3.47
nn16k7i2	235	235	26907	125.51	0	3.15
nn16k7i3	235	235	13417	68.77	0	3.45
nn16k7i4	235	235	20358	104.93	0	2.63
nn16k7i5	235	235	17071	82.09	0	3.17
nn16k7i6	235	235	22024	97.55	0	3.57
nn16k8i1	299	299	17644	130.65	0	3.34
nn16k8i2	300	300	65392	414.63	0	2.98
nn16k8i3	300	300	57349	431.06	0	2.31
nn16k8i4	300	300	74602	499.54	0	2.86
nn16k8i5	300	300	64995	452.59	0	3
nn16k8i6	300	300	86882	649.16	0	3.22
n12k10i1	341	341	70442	378.44	0	2.59
n12k10i2	341	341	64888	336.44	0	2.58
n12k10i3	341	341	54343	253.58	0	1.56
n12k10i4	341	341	57540	264.47	0	2.33
n12k10i5	341	341	70785	283.42	0	2.80
n12k10i6	341	341	49832	162.10	0	1.82
n12k9i1	281	281	76116	247.82	0	2.13
n12k9i2	281	281	73298	231.09	0	2.07
n12k9i3	281	281	61559	201.33	0	1.77
n12k9i4	281	281	85314	393.45	0	2.18
n12k9i5	281	281	87826	248.57	0	2.84
n12k9i6	281	281	73333	295.86	0	2.47

Cuadro B.28. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 2 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	Br3 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	46567	389.21	0	2.11
bc-43-2-1	331	331	841	8.62	0	3.85
bc-43-3-1	310	310	102289	754.67	0	3.53
bc-43-4-1	631	628.50	101100	3600	0.40	2.45
bc-43-5-1	354	354	20363	122.30	0	1.81
bc-43-6-1	401	400	402587	3600	0.25	2.44
bc-13-1-5	149	149	138	0.36	0	3.43
bc-13-2-5	148	148	0	0.10	0	0
bc-13-3-5	129	129	28	0.30	0	1.03
bc-13-4-5	55	55	0	0.91	0	0
bc-13-5-5	115	115	53	0.18	0	1.75
bc-13-6-5	119	119	48	0.21	0	1.75
bc-12-1-9	398	394.79	640192	3600	0.81	2.44
bc-12-2-9	387	384.75	861282	3600	0.58	2.10
bc-12-3-9	387	384.75	853354	3600	0.58	1.81
bc-12-4-9	387	384.92	890308	3600	0.54	2.13
bc-12-5-9	374	374	64895	134.52	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	66994	154.54	0	1.60
inst_7_5	53	53	4	0.32	0	3.29
inst_8_6	82	82	122	0.23	0	1.83
inst_9_7	124	124	1469	1.59	0	4.40
inst_10_8	176	176	303	0.64	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	11301	64.19	0	5.30
kinst-4-033-1	183	183	11301	63.75	0	5.30
kinst-4-033-2	183	183	15677	86.30	0	5.37
kinst-4-033-3	183	183	12821	74.07	0	5.30
kinst-4-033-4	183	183	12592	65.80	0	5.32
kinst-4-034-0	188	188	104519	578.93	0	6.81
kinst-4-034-1	188	188	104519	577.37	0	6.81
kinst-4-034-2	188	188	80491	448.19	0	6.36
kinst-4-034-3	188	188	163557	921.50	0	6
kinst-4-034-4	188	188	399732	2169.85	0	6.91
nn16k7i1	235	235	25113	103.69	0	3.47
nn16k7i2	235	235	26907	126.51	0	3.15
nn16k7i3	235	235	13417	70.75	0	3.45
nn16k7i4	235	235	20358	105.56	0	2.63
nn16k7i5	235	235	17071	82.50	0	3.17
nn16k7i6	235	235	22024	97.62	0	3.57
nn16k8i1	299	299	17644	130.80	0	3.34
nn16k8i2	300	300	65392	416.54	0	2.98
nn16k8i3	300	300	57349	432.91	0	2.31
nn16k8i4	300	300	74602	500.30	0	2.86
nn16k8i5	300	300	64995	454.17	0	3
nn16k8i6	300	300	86882	657.78	0	3.22
n12k10i1	341	341	70442	380.71	0	2.59
n12k10i2	341	341	64888	337.33	0	2.58
n12k10i3	341	341	54343	261.68	0	1.56
n12k10i4	341	341	57540	265.33	0	2.33
n12k10i5	341	341	70785	284.13	0	2.80
n12k10i6	341	341	49832	162.59	0	1.82
n12k9i1	281	281	76116	248.92	0	2.13
n12k9i2	281	281	73298	232.08	0	2.07
n12k9i3	281	281	61559	201.48	0	1.77
n12k9i4	281	281	85314	398.19	0	2.18
n12k9i5	281	281	87826	251.62	0	2.84
n12k9i6	281	281	73333	294.75	0	2.47

Cuadro B.29. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 3 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	Br4 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	46567	388.88	0	2.11
bc-43-2-1	331	331	841	8.59	0	3.85
bc-43-3-1	310	310	102289	754.55	0	3.53
bc-43-4-1	631	628.50	101100	3600	0.40	2.45
bc-43-5-1	354	354	20363	120.74	0	1.81
bc-43-6-1	401	400	402007	3600	0.25	2.44
bc-13-1-5	149	149	138	0.37	0	3.43
bc-13-2-5	148	148	0	0.10	0	0
bc-13-3-5	129	129	28	0.30	0	1.03
bc-13-4-5	55	55	0	0.91	0	0
bc-13-5-5	115	115	53	0.18	0	1.75
bc-13-6-5	119	119	48	0.21	0	1.75
bc-12-1-9	398	394.79	640800	3600	0.81	2.44
bc-12-2-9	387	384.75	860551	3600	0.58	2.10
bc-12-3-9	387	384.75	847950	3600	0.58	1.81
bc-12-4-9	387	384.92	889659	3600	0.54	2.13
bc-12-5-9	374	374	64895	134.69	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	66994	154.91	0	1.60
inst_7_5	53	53	4	0.32	0	3.29
inst_8_6	82	82	122	0.23	0	1.83
inst_9_7	124	124	1469	1.59	0	4.40
inst_10_8	176	176	303	0.64	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	11301	63.65	0	5.30
kinst-4-033-1	183	183	11301	63.79	0	5.30
kinst-4-033-2	183	183	15677	86.45	0	5.37
kinst-4-033-3	183	183	12821	72.85	0	5.30
kinst-4-033-4	183	183	12592	65.90	0	5.32
kinst-4-034-0	188	188	104519	578.72	0	6.81
kinst-4-034-1	188	188	104519	577.30	0	6.81
kinst-4-034-2	188	188	80491	442	0	6.36
kinst-4-034-3	188	188	163557	923.42	0	6
kinst-4-034-4	188	188	399732	2162.47	0	6.91
nn16k7i1	235	235	25113	103.62	0	3.47
nn16k7i2	235	235	26907	125.87	0	3.15
nn16k7i3	235	235	13417	69.04	0	3.45
nn16k7i4	235	235	20358	105.34	0	2.63
nn16k7i5	235	235	17071	82.16	0	3.17
nn16k7i6	235	235	22024	98.06	0	3.57
nn16k8i1	299	299	17644	131.82	0	3.34
nn16k8i2	300	300	65392	416.54	0	2.98
nn16k8i3	300	300	57349	429.21	0	2.31
nn16k8i4	300	300	74602	499.47	0	2.86
nn16k8i5	300	300	64995	450.82	0	3
nn16k8i6	300	300	86882	647.02	0	3.22
n12k10i1	341	341	70442	380.25	0	2.59
n12k10i2	341	341	64888	337.65	0	2.58
n12k10i3	341	341	54343	253.92	0	1.56
n12k10i4	341	341	57540	266.32	0	2.33
n12k10i5	341	341	70785	283.92	0	2.80
n12k10i6	341	341	49832	163.01	0	1.82
n12k9i1	281	281	76116	252.36	0	2.13
n12k9i2	281	281	73298	232.80	0	2.07
n12k9i3	281	281	61559	201.53	0	1.77
n12k9i4	281	281	85314	394.23	0	2.18
n12k9i5	281	281	87826	249.17	0	2.84
n12k9i6	281	281	73333	295.09	0	2.47

Cuadro B.30. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 4 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	Br5 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	46567	385.19	0	2.11
bc-43-2-1	331	331	841	8.57	0	3.85
bc-43-3-1	310	310	102289	748.01	0	3.53
bc-43-4-1	631	628.50	101233	3600	0.40	2.45
bc-43-5-1	354	354	20363	120.11	0	1.81
bc-43-6-1	401	400	403900	3600	0.25	2.44
bc-13-1-5	149	149	138	0.37	0	3.43
bc-13-2-5	148	148	0	0.10	0	0
bc-13-3-5	129	129	28	0.30	0	1.03
bc-13-4-5	55	55	0	0.91	0	0
bc-13-5-5	115	115	53	0.18	0	1.75
bc-13-6-5	119	119	48	0.21	0	1.75
bc-12-1-9	398	394.79	640764	3600	0.81	2.44
bc-12-2-9	387	384.75	863123	3600	0.58	2.10
bc-12-3-9	387	384.75	855100	3600	0.58	1.81
bc-12-4-9	387	384.93	891432	3600	0.53	2.13
bc-12-5-9	374	374	64895	135.86	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	66994	157.36	0	1.60
inst_7_5	53	53	4	0.33	0	3.29
inst_8_6	82	82	122	0.23	0	1.83
inst_9_7	124	124	1469	1.59	0	4.40
inst_10_8	176	176	303	0.64	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	11301	63.49	0	5.30
kinst-4-033-1	183	183	11301	63.69	0	5.30
kinst-4-033-2	183	183	15677	86.10	0	5.37
kinst-4-033-3	183	183	12821	72.75	0	5.30
kinst-4-033-4	183	183	12592	65.93	0	5.32
kinst-4-034-0	188	188	104519	572.59	0	6.81
kinst-4-034-1	188	188	104519	574.98	0	6.81
kinst-4-034-2	188	188	80491	440.94	0	6.36
kinst-4-034-3	188	188	163557	918.84	0	6
kinst-4-034-4	188	188	399732	2148.09	0	6.91
nn16k7i1	235	235	25113	104.07	0	3.47
nn16k7i2	235	235	26907	126.27	0	3.15
nn16k7i3	235	235	13417	69.22	0	3.45
nn16k7i4	235	235	20358	105.58	0	2.63
nn16k7i5	235	235	17071	82.93	0	3.17
nn16k7i6	235	235	22024	97.67	0	3.57
nn16k8i1	299	299	17644	131.83	0	3.34
nn16k8i2	300	300	65392	416.61	0	2.98
nn16k8i3	300	300	57349	433.12	0	2.31
nn16k8i4	300	300	74602	501	0	2.86
nn16k8i5	300	300	64995	454.57	0	3
nn16k8i6	300	300	86882	648.89	0	3.22
n12k10i1	341	341	70442	384.30	0	2.59
n12k10i2	341	341	64888	339.33	0	2.58
n12k10i3	341	341	54343	256.41	0	1.56
n12k10i4	341	341	57540	264.74	0	2.33
n12k10i5	341	341	70785	283.36	0	2.80
n12k10i6	341	341	49832	163.48	0	1.82
n12k9i1	281	281	76116	251.21	0	2.13
n12k9i2	281	281	73298	233.02	0	2.07
n12k9i3	281	281	61559	201.52	0	1.77
n12k9i4	281	281	85314	395.83	0	2.18
n12k9i5	281	281	87826	248.22	0	2.84
n12k9i6	281	281	73333	296.63	0	2.47

Cuadro B.31. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 5 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	Br6 solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	gap raíz
bc-43-1-1	305	305	50847	499.54	0	2.11
bc-43-2-1	331	331	970	10.90	0	3.85
bc-43-3-1	310	310	130733	887.96	0	3.53
bc-43-4-1	631	628.50	93600	3600.01	0.40	2.45
bc-43-5-1	354	354	1103	9.88	0	1.81
bc-43-6-1	401	401	344052	2884.37	0	2.44
bc-13-1-5	149	149	75	0.33	0	3.43
bc-13-2-5	148	148	0	0.10	0	0
bc-13-3-5	129	129	10	0.20	0	1.03
bc-13-4-5	55	55	0	0.91	0	0
bc-13-5-5	115	115	60	0.20	0	1.75
bc-13-6-5	119	119	41	0.22	0	1.75
bc-12-1-9	398	394.75	633643	3600	0.82	2.44
bc-12-2-9	387	385	869100	3600	0.52	2.10
bc-12-3-9	387	384.83	868475	3600	0.56	1.81
bc-12-4-9	387	384.92	890200	3600	0.54	2.13
bc-12-5-9	374	374	63795	135.03	0	1.87
bc-12-6-9	375	375	65338	148.57	0	1.60
inst_7_5	53	53	4	0.33	0	3.29
inst_8_6	82	82	122	0.23	0	1.83
inst_9_7	124	124	1401	1.45	0	4.40
inst_10_8	176	176	303	0.65	0	0.99
kinst-4-033-0	183	183	11301	63.50	0	5.30
kinst-4-033-1	183	183	11301	63.51	0	5.30
kinst-4-033-2	183	183	15677	85.91	0	5.37
kinst-4-033-3	183	183	12821	72.27	0	5.30
kinst-4-033-4	183	183	12592	66.80	0	5.32
kinst-4-034-0	188	188	104519	574.70	0	6.81
kinst-4-034-1	188	188	104519	575.28	0	6.81
kinst-4-034-2	188	188	80491	449.38	0	6.36
kinst-4-034-3	188	188	163557	924.58	0	6
kinst-4-034-4	188	188	399732	2167.10	0	6.91
nn16k7i1	235	235	25113	103.75	0	3.47
nn16k7i2	235	235	26907	125.84	0	3.15
nn16k7i3	235	235	13417	69.24	0	3.45
nn16k7i4	235	235	20358	106.02	0	2.63
nn16k7i5	235	235	17071	82.72	0	3.17
nn16k7i6	235	235	22024	97.72	0	3.57
nn16k8i1	299	299	17644	132.39	0	3.34
nn16k8i2	300	300	65392	414.60	0	2.98
nn16k8i3	300	300	57349	429.81	0	2.31
nn16k8i4	300	300	74602	507.26	0	2.86
nn16k8i5	300	300	64995	457.40	0	3
nn16k8i6	300	300	86882	645.15	0	3.22
n12k10i1	341	341	70442	381.25	0	2.59
n12k10i2	341	341	64888	337.46	0	2.58
n12k10i3	341	341	54343	254.91	0	1.56
n12k10i4	341	341	57540	272.47	0	2.33
n12k10i5	341	341	70785	282.45	0	2.80
n12k10i6	341	341	49832	164.90	0	1.82
n12k9i1	281	281	76116	247.48	0	2.13
n12k9i2	281	281	73298	231.23	0	2.07
n12k9i3	281	281	61559	201.69	0	1.77
n12k9i4	281	281	85314	394.42	0	2.18
n12k9i5	281	281	87826	247.87	0	2.84
n12k9i6	281	281	73333	295.16	0	2.47

Cuadro B.32. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 6 para el modelo **EXP** para **AVDSECP**

	EXP-CPX					*EXP-CPX-C1C2-B-iPC-Br2*				
	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap	solución	cota inferior	nodos	tiempo	gap
inst_13_11	420	412.78	1360495	3600	0.02	420	415	155700	3600	0.01
inst_14_12	538	536	2956916	3600	0.00	538	538	1144	9.86	0
inst_15_13	668	654.01	462864	3600	0.02	669	657.96	107600	3600	0.02
inst_16_14	830	828	2097148	3600	0.00	830	830	2450	38.09	0
inst_17_15	999	972.38	425752	3600	0.03	1000	984.28	66767	3600	0.02
inst_18_16	1212	1210	1558759	3600	0.00	1212	1212	3511	97.65	0
bc-16-10-9	749	744.25	1572600	3600	0.01	749	749	192377	1451.83	0
bc-16-17-9	840	840	402136	1523.16	0	840	840	72581	746.66	0
bc-16-25-9	830	826.75	1075598	3600	0.00	830	830	205740	1357.23	0
bc-16-8-9	801	798.50	1044887	3600	0.00	801	801	120348	873.95	0
bc-17-11-9	1014	1006.25	466664	3600	0.01	1014	1014	201922	2226.78	0
bc-17-13-9	1099	1074.01	529258	3600	0.02	1094	1093	664015	3600	0.00
bc-17-18-9	950	944.75	981896	3600	0.01	950	949	438800	3600	0.00
bc-17-20-9	926	924.25	211300	3600	0.00	926	926	64013	1289.92	0
bc-17-3-9	1058	1044	788747	3600	0.01	1058	1054	225800	3600	0.00
bc-17-7-9	937	933	869052	3600	0.00	937	937	4638	70.44	0
bc-23-1-5	665	651.25	1141878	3600	0.02	665	664	227900	3600	0.00
bc-23-2-5	975	971.95	428801	3600	0.00	976	972.50	198401	3600	0.00
bc-23-3-5	1223	1210.75	510106	3600	0.01	1222	1213.50	151250	3600	0.01
bc-23-4-5	1288	1277.62	278056	3600	0.01	1287	1287	12172	224.04	0
bc-23-5-5	1277	1266.50	331716	3600	0.01	1277	1273.50	64000	3600	0.00
bc-23-6-5	741	738.91	299300	3600	0.00	741	741	5080	76.16	0
bc-48-1-1	460	460	15199	85.27	0	460	460	360	8.75	0
bc-48-2-1	448	446.50	778766	3600	0.00	448	448	41570	918.80	0
bc-48-3-1	391	391	3914	42.03	0	391	391	2978	73.86	0
bc-48-4-1	432	432	132280	589.79	0	432	432	140315	2940.18	0
bc-48-5-1	1233	1224	146013	3600	0.01	1231	1226.25	40129	3600	0.00
bc-48-6-1	565	564	646834	3600	0.00	565	565	90758	1994.15	0
inst_11_9	243	242	2509047	3600	0.00	243	243	58192	176.41	0
inst_12_10	324	322	5235689	3600	0.01	324	324	719	2.62	0
kinst-10-021-1	616	592.42	573117	3600	0.04	610	610	5765	129.21	0
kinst-10-021-2	615	590.33	396245	3600	0.04	609	609	4040	61.56	0
kinst-10-021-3	612	603.75	824102	3600	0.01	609	609	990	22.26	0
kinst-10-021-4	609	603.35	700277	3600	0.01	609	609	1393	27.63	0
kinst-10-021-5	615	596.50	482819	3600	0.03	609	609	687	20.96	0
kinst-10-021-6	616	592.69	563094	3600	0.04	610	610	3606	94	0
kinst-14-10-1	399	395.79	1721616	3600	0.01	399	395.42	315189	3600	0.01
kinst-14-10-2	397	394.50	1403300	3600	0.01	397	397	139423	1389.70	0
kinst-14-10-3	397	397	426006	751.68	0	397	397	158301	1228.54	0
kinst-14-10-4	400	395.80	1620683	3600	0.01	400	395.60	374800	3600	0.01
kinst-14-10-5	399	396	1529800	3600	0.01	399	395.15	267126	3600	0.01
kinst-14-10-6	397	397	747583	1391.87	0	397	397	185756	2496.46	0
kinst-14-10-7	399	395.50	1843032	3600	0.01	399	395.33	323196	3600	0.01
kinst-14-10-8	400	395.75	1607100	3600	0.01	400	395.25	322346	3600	0.01
kinst-39-4-1	216	216	91772	719.04	0	216	216	128941	1040.66	0
kinst-39-4-2	216	216	225099	1513.21	0	216	216	50286	407.57	0
kinst-39-4-3	216	213.47	418300	3600	0.01	216	216	94476	684.31	0
kinst-39-4-4	216	216	73045	727.72	0	216	216	60699	492.35	0
kinst-39-4-5	216	216	83319	748.12	0	216	216	57887	409.08	0
kinst-39-4-6	216	216	82885	651.07	0	216	216	78932	562.49	0
kinst-39-4-7	216	216	72922	692.96	0	216	216	125405	1180.10	0
kinst-39-4-8	216	213.65	391600	3600	0.01	216	216	94216	806.17	0

Cuadro B.33. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX y *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 2 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** en el segundo conjunto de instancias

	POLI^r					*EXP^r*				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-43-1-1	9	3600	8	26132	1	9	3600	8	127904	1
bc-43-2-1	10	3600	9	13435	1	10	3600	9	143088	1
bc-43-3-1	9	3600	8	81500	1	9	3600	8	118075	1
bc-43-4-1	11	3600	10	10019	1	11	3600	10	43349	1
bc-43-5-1	10	3600	9	16236	1	10	3600	9	116941	1
bc-43-6-1	10	3600	9	22526	1	10	3600	9	108168	1
bc-13-1-5	9	0.23	9	0	0	9	0.03	9	0	0
bc-13-2-5	9	22.87	9	6289	0	9	374.01	9	142970	0
bc-13-3-5	7	517.41	7	43854	0	7	850.22	7	198074	0
bc-13-4-5	5	50.06	5	9680	0	5	32.96	5	23670	0
bc-13-5-5	7	120.01	7	7110	0	7	910.78	7	202938	0
bc-13-6-5	7	133.18	7	15768	0	7	561.32	7	142708	0
bc-12-1-9	13	3600	12	1403889	1	13	3600	11.50	899623	1.50
bc-12-2-9	13	3600	12	1285704	1	13	3600	11.50	918453	1.50
bc-12-3-9	13	3600	12	1691845	1	13	3600	11.50	908300	1.50
bc-12-4-9	13	3600	12	1589184	1	13	3600	11.50	870400	1.50
bc-12-5-9	12	39.89	12	4248	0	12	10.32	12	9700	0
bc-12-6-9	12	39.08	12	2020	0	12	3600	11	3565429	1
inst_7_5	7	833.96	7	2762710	0	7	1316.83	7	3362764	0
inst_8_6	8	3600	7	9350509	1	8	3600	7	3641370	1
inst_9_7	9	3600	8	4723007	1	9	3600	7.50	1628417	1.50
inst_10_8	10	3600	9	1378607	1	10	3600	8.25	769300	1.75
kinst-4-033-0	6	3600	4	6500	2	5	3600	4	46032	1
kinst-4-033-1	6	3600	4	6490	2	5	3600	4	46220	1
kinst-4-033-2	6	3600	4	6211	2	5	3600	4	53426	1
kinst-4-033-3	6	3600	4	5633	2	5	3600	4	76500	1
kinst-4-033-4	6	3600	4	7718	2	5	3600	4	32382	1
kinst-4-034-0	7	3600	4	5483	3	5	3600	4	39565	1
kinst-4-034-1	7	3600	4	5477	3	5	3600	4	39901	1
kinst-4-034-2	6	3600	4	5585	2	6	3600	4	94099	2
kinst-4-034-3	6	3600	4	4823	2	5	3600	4	86775	1
kinst-4-034-4	6	3600	4	5826	2	5	3600	4	48000	1
nn16k7i1	8	3600	7	18940	1	8	3600	7	214412	1
nn16k7i2	8	3600	7	19565	1	8	3600	7	211801	1
nn16k7i3	8	3600	7	22579	1	8	3600	7	228335	1
nn16k7i4	8	3600	7	22230	1	8	3600	7	386577	1
nn16k7i5	8	3600	7	23667	1	8	3600	7	284175	1
nn16k7i6	8	3600	7	27390	1	8	3600	7	223759	1
nn16k8i1	9	3600	8	17116	1	9	3600	8	347591	1
nn16k8i2	9	3600	8	16384	1	9	3600	8	277634	1
nn16k8i3	9	3600	8	22045	1	9	3600	8	343463	1
nn16k8i4	9	3600	8	9998	1	9	3600	8	199244	1
nn16k8i5	9	3600	8	18812	1	9	3600	8	368512	1
nn16k8i6	9	3600	8	23566	1	9	3600	8	213126	1
n12k10i1	11	783.65	11	71810	0	11	1427.79	11	221720	0
n12k10i2	12	3600	11	695424	1	11	3600	10	405306	1
n12k10i3	11	1033.47	11	68790	0	11	405.08	11	98495	0
n12k10i4	11	396.60	11	33830	0	11	1680.78	11	244816	0
n12k10i5	11	713.28	11	37520	0	11	868.07	11	246162	0
n12k10i6	11	1977.73	11	213600	0	11	375.67	11	109009	0
n12k9i1	10	1009.35	10	95070	0	10	935.78	10	144071	0
n12k9i2	10	791.36	10	49560	0	10	1834.28	10	199860	0
n12k9i3	10	199.68	10	4003	0	10	571.60	10	119655	0
n12k9i4	10	659.87	10	50933	0	10	1559.97	10	287366	0
n12k9i5	10	349.33	10	12590	0	10	3600	9	756854	1
n12k9i6	10	2539.47	10	48032	0	10	484.24	10	154537	0

Cuadro B.34. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX para los modelos $\mathbf{POLI^r}$ y $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el primer conjunto de instancias

	POLI^r					*EXP*^{r}				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-16-10-9	15	2115.10	15	62701	0	15	3600	14	504409	1
bc-16-17-9	16	795.33	16	34010	0	16	814.68	16	276538	0
bc-16-25-9	16	546.66	16	61608	0	16	144.90	16	35684	0
bc-16-8-9	16	640.70	16	102689	0	16	49.12	16	14358	0
bc-17-11-9	17	2699.59	17	172205	0	17	305.40	17	115631	0
bc-17-13-9	17	1881.04	17	34515	0	17	3600	16	1655624	1
bc-17-18-9	16	12.03	16	150	0	16	2.35	16	110	0
bc-17-20-9	16	1029.81	16	8685	0	16	3600	15	800299	1
bc-17-3-9	17	3600	16	240441	1	17	416.43	17	64348	0
bc-17-7-9	16	2066.92	16	49981	0	16	3600	15	842900	1
bc-23-1-5	14	3600	13	133786	1	14	3600.01	13	116234	1
bc-23-2-5	16	3600	15	68200	1	16	3600	15	132484	1
bc-23-3-5	18	3600	17	51100	1	18	3600	17	150885	1
bc-23-4-5	17	33.83	17	130	0	17	0.58	17	0	0
bc-23-5-5	18	3600	17	61957	1	18	3600	17	157074	1
bc-23-6-5	13	26.46	13	236	0	13	0.60	13	0	0
bc-48-1-1	11	3600	10	12568	1	11	3600	10	67245	1
bc-48-2-1	11	3600	10	28700	1	11	3600.01	10	54934	1
bc-48-3-1	10	3600	9	16334	1	10	3600.02	9	93950	1
bc-48-4-1	10	3600	9	9815	1	10	3600.01	9	33252	1
bc-48-5-1	15	254.39	15	86	0	15	4.22	15	0	0
bc-48-6-1	12	26.94	12	0	0	12	2.05	12	0	0
inst_11_9	11	3600	10	1205388	1	11	3600	9.50	662153	1.50
inst_12_10	12	3600	11	649850	1	12	3600.01	10.10	666000	1.90
kinst-10-021-1	12	3600	10	9314	2	11	3600	10	282176	1
kinst-10-021-2	11	3600	10	5082	1	11	3600	10	894546	1
kinst-10-021-3	13	3600	10	4953	3	11	3600	10	579400	1
kinst-10-021-4	11	3600	10	11372	1	11	3600	10	240081	1
kinst-10-021-5	12	3600	10	6208	2	11	3600	10	269441	1
kinst-10-021-6	12	3600	10	14670	2	11	3600	10	902646	1
kinst-14-10-1	11	3600	10	67824	1	11	3600.02	10	99075	1
kinst-14-10-2	11	1314.88	11	13261	0	11	3600	10	136911	1
kinst-14-10-3	11	2735.31	11	36172	0	11	3600.01	10	115569	1
kinst-14-10-4	11	1817.85	11	14241	0	11	3600.02	10	75008	1
kinst-14-10-5	11	2653.20	11	23667	0	11	3600.03	10	79153	1
kinst-14-10-6	11	2927.94	11	76353	0	11	3600.03	10	52015	1
kinst-14-10-7	11	2902.68	11	43192	0	11	3600.02	10	62497	1
kinst-14-10-8	11	2046.19	11	38019	0	11	3600	10	48533	1
kinst-39-4-1	6	3600.34	4	2870	2	6	3600	4	35332	2
kinst-39-4-2	7	3600	4	2125	3	5	3600	4	31473	1
kinst-39-4-3	8	3600	4	2065	4	5	3600	4	45765	1
kinst-39-4-4	6	3600.01	4	1980	2	6	3600.01	4	40525	2
kinst-39-4-5	7	3600.01	4	2077	3	6	3600.02	4	39077	2
kinst-39-4-6	6	3600.01	4	2079	2	5	3600	4	37032	1
kinst-39-4-7	6	3600.01	4	2205	2	5	3600	4	37752	1
kinst-39-4-8	6	3600	4	2948	2	5	3600	4	38059	1

Cuadro B.35. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX para los modelos **POLI**$^{\mathbf{r}}$ y **EXP**$^{\mathbf{r}}$ para el problema **AVDECP** en el segundo conjunto de instancias.

	POLI^r-Pre					*EXP^r-Pre*				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-43-1-1	9	0.04	9	0	0	9	0.02	9	0	0
bc-43-2-1	10	0.06	10	0	0	10	0.02	10	0	0
bc-43-3-1	9	0.05	9	0	0	9	0.01	9	0	0
bc-43-4-1	11	0.26	11	0	0	11	0.13	11	0	0
bc-43-5-1	10	0.04	10	0	0	10	0.01	10	0	0
bc-43-6-1	10	0.13	10	0	0	10	0.04	10	0	0
bc-13-1-5	9	0.01	9	0	0	9	0	9	0	0
bc-13-2-5	9	0.01	9	0	0	9	0.02	9	0	0
bc-13-3-5	7	0.01	7	0	0	7	0.04	7	0	0
bc-13-4-5	5	0	5	0	0	5	0.01	5	0	0
bc-13-5-5	7	0.02	7	0	0	7	0.01	7	0	0
bc-13-6-5	7	0.01	7	0	0	7	0	7	0	0
bc-12-1-9	13	3600	12	4066764	1	13	3600	12	8650991	1
bc-12-2-9	13	3600	12	1279354	1	13	3600	12	12981653	1
bc-12-3-9	13	3600	12	4603400	1	13	3600	12	9954900	1
bc-12-4-9	13	3600	12	4630064	1	13	3600	12	10873004	1
bc-12-5-9	12	0.06	12	0	0	12	0.07	12	0	0
bc-12-6-9	12	0.06	12	0	0	12	0.03	12	0	0
inst_7_5	7	0.33	7	817	0	7	0.07	7	688	0
inst_8_6	8	18.93	8	37191	0	8	5.31	8	26678	0
inst_9_7	9	343.24	9	707987	0	9	243.52	9	1258614	0
inst_10_8	10	3600	9	5339177	1	10	3600	9	10765568	1
kinst-4-033-0	5	0.07	5	0	0	5	3.01	5	5202	0
kinst-4-033-1	5	0.07	5	0	0	5	3.08	5	5202	0
kinst-4-033-2	5	0.09	5	0	0	5	15.14	5	60872	0
kinst-4-033-3	5	0.06	5	0	0	5	24.72	5	93171	0
kinst-4-033-4	5	0.09	5	0	0	5	22.78	5	97621	0
kinst-4-034-0	5	0.07	5	0	0	5	0.04	5	0	0
kinst-4-034-1	5	0.07	5	0	0	5	0.04	5	0	0
kinst-4-034-2	5	0.08	5	0	0	5	0.03	5	0	0
kinst-4-034-3	5	0.07	5	0	0	5	0.01	5	0	0
kinst-4-034-4	5	0.07	5	0	0	5	0.02	5	0	0
nn16k7i1	8	0.09	8	0	0	8	0.03	8	0	0
nn16k7i2	8	626.61	8	584696	0	8	0.29	8	140	0
nn16k7i3	8	191.60	8	152625	0	8	0.31	8	69	0
nn16k7i4	8	831.03	8	846923	0	8	0.47	8	79	0
nn16k7i5	8	3246.54	8	3916200	0	8	0.35	8	113	0
nn16k7i6	8	0.09	8	0	0	8	0.02	8	0	0
nn16k8i1	9	299.92	9	151940	0	9	0.58	9	103	0
nn16k8i2	9	432.75	9	350540	0	9	0.50	9	119	0
nn16k8i3	9	3454.04	9	3014200	0	9	0.36	9	58	0
nn16k8i4	9	1605.94	9	1595000	0	9	0.33	9	10	0
nn16k8i5	9	32.81	9	19859	0	9	0.36	9	70	0
nn16k8i6	9	10.72	9	3800	0	9	0.62	9	255	0
n12k10i1	11	0.17	11	0	0	11	0.04	11	0	0
n12k10i2	11	1163.96	11	730590	0	11	213.05	11	869870	0
n12k10i3	11	148.19	11	78490	0	11	0.82	11	1677	0
n12k10i4	12	3600	11	2767831	1	11	1.16	11	1643	0
n12k10i5	11	2198.24	11	1535840	0	11	0.47	11	231	0
n12k10i6	11	405.69	11	204710	0	11	0.68	11	286	0
n12k9i1	10	0.11	10	0	0	10	0.03	10	0	0
n12k9i2	10	662.31	10	335077	0	10	0.40	10	60	0
n12k9i3	10	0.09	10	0	0	10	0.01	10	0	0
n12k9i4	10	3262.66	10	3281900	0	10	0.29	10	116	0
n12k9i5	10	0.14	10	0	0	10	0.03	10	0	0
n12k9i6	10	3268.65	10	3204600	0	10	0.64	10	988	0

Cuadro B.36. Resultados del preprocesamiento en los modelos **POLI^r** y **EXP^r** para el problema **AVDECP** en el primer conjunto de instancias.

	POLI^r-Pre					*EXP^r-Pre*				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-16-10-9	15	0.16	15	0	0	15	0.15	15	0	0
bc-16-17-9	16	0.38	16	0	0	16	0.21	16	0	0
bc-16-25-9	16	0.16	16	0	0	16	1.25	16	143	0
bc-16-8-9	16	0.19	16	0	0	16	0.18	16	0	0
bc-17-11-9	17	0.52	17	0	0	17	0.36	17	0	0
bc-17-13-9	17	0.36	17	0	0	17	271.14	17	437067	0
bc-17-18-9	16	3.33	16	40	0	16	0.19	16	0	0
bc-17-20-9	16	0.35	16	0	0	16	0.24	16	0	0
bc-17-3-9	17	0.59	17	0	0	17	0.21	17	0	0
bc-17-7-9	16	0.21	16	0	0	16	0.26	16	0	0
bc-23-1-5	14	0.18	14	0	0	14	0.13	14	0	0
bc-23-2-5	16	0.30	16	0	0	16	0.28	16	0	0
bc-23-3-5	18	0.42	18	0	0	18	0.26	18	0	0
bc-23-4-5	17	3.93	17	0	0	17	0.27	17	0	0
bc-23-5-5	18	0.65	18	0	0	18	0.08	18	0	0
bc-23-6-5	13	0.13	13	0	0	13	0.03	13	0	0
bc-48-1-1	11	0.14	11	0	0	11	0.02	11	0	0
bc-48-2-1	11	0.10	11	0	0	11	0.02	11	0	0
bc-48-3-1	10	0.25	10	0	0	10	0.02	10	0	0
bc-48-4-1	10	0.09	10	0	0	10	0.03	10	0	0
bc-48-5-1	15	10.69	15	10	0	15	0.19	15	0	0
bc-48-6-1	12	0.02	12	0	0	12	0.01	12	0	0
inst_11_9	11	3600	10	5069247	1	11	3600	10	10291998	1
inst_12_10	12	3600	11	3137771	1	12	3600	11	6862600	1
kinst-10-021-1	11	3289.95	11	752600	0	11	1.72	11	356	0
kinst-10-021-2	11	795.16	11	151784	0	11	1.31	11	241	0
kinst-10-021-3	12	3600	11	798731	1	11	1.46	11	346	0
kinst-10-021-4	12	3600	11	1348200	1	11	22.01	11	7870	0
kinst-10-021-5	12	3600	11	534235	1	11	2.03	11	497	0
kinst-10-021-6	11	1525.09	11	290386	0	11	1.45	11	489	0
kinst-14-10-1	11	494.91	11	288559	0	11	0.58	11	149	0
kinst-14-10-2	11	1731.13	11	1128648	0	11	3383.90	11	7501000	0
kinst-14-10-3	12	3600	11	2720929	1	11	0.64	11	130	0
kinst-14-10-4	12	3600	11	2704063	1	11	0.65	11	217	0
kinst-14-10-5	11	260	11	77422	0	11	0.95	11	1066	0
kinst-14-10-6	11	3250.43	11	2218500	0	11	0.56	11	410	0
kinst-14-10-7	11	1487.46	11	906542	0	11	1.04	11	965	0
kinst-14-10-8	11	3372.05	11	2273600	0	11	1.83	11	3113	0
kinst-39-4-1	5	0.10	5	0	0	5	39	5	100626	0
kinst-39-4-2	5	0.10	5	0	0	5	83.18	5	193347	0
kinst-39-4-3	5	0.12	5	0	0	5	29.18	5	64643	0
kinst-39-4-4	5	0.12	5	0	0	5	7.18	5	11085	0
kinst-39-4-5	5	0.09	5	0	0	5	65.02	5	199690	0
kinst-39-4-6	5	0.11	5	0	0	5	101.82	5	383173	0
kinst-39-4-7	5	0.12	5	0	0	5	252.96	5	897730	0
kinst-39-4-8	5	0.12	5	0	0	5	60.37	5	196172	0

Cuadro B.37. Resultados del preprocesamiento en los modelos **POLI$^{\mathbf{r}}$** y **EXP$^{\mathbf{r}}$** para el problema **AVDECP** en el segundo conjunto de instancias.

	EXP^r-Solo Cortes					*EXP^r-Cortes-Pre*				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-43-1-1	9	2010.86	9	22021	0	9	0.02	9	0	0
bc-43-2-1	10	642.19	10	3167	0	10	0.01	10	0	0
bc-43-3-1	9	143.11	9	1496	0	9	0.02	9	0	0
bc-43-4-1	11	3600.01	10	11090	1	11	0.11	11	0	0
bc-43-5-1	10	3600	9	10610	1	10	0.01	10	0	0
bc-43-6-1	10	703.08	10	3266	0	10	0.03	10	0	0
bc-13-1-5	9	0.01	9	0	0	9	0	9	0	0
bc-13-2-5	9	9.29	9	2173	0	9	0	9	0	0
bc-13-3-5	7	3.55	7	329	0	7	0.01	7	0	0
bc-13-4-5	5	0.84	5	53	0	5	0.01	5	0	0
bc-13-5-5	7	7.82	7	700	0	7	0.01	7	0	0
bc-13-6-5	7	4.04	7	449	0	7	0.02	7	0	0
bc-12-1-9	13	3600	11.03	255892	1.97	13	3600	12	1453371	1
bc-12-2-9	13	3600	11.50	254876	1.50	13	3600	12	3252556	1
bc-12-3-9	13	3600	11.47	225400	1.53	13	3600	12	1536239	1
bc-12-4-9	13	3600.01	11.50	185923	1.50	13	3600	12	3609618	1
bc-12-5-9	12	18.44	12	1170	0	12	0.01	12	0	0
bc-12-6-9	12	9.79	12	811	0	12	0.04	12	0	0
inst_7_5	7	123.02	7	326625	0	7	0.05	7	205	0
inst_8_6	8	3600	7	2796187	1	8	1.18	8	5732	0
inst_9_7	9	3600	8	736700	1	9	14.15	9	36408	0
inst_10_8	10	3600	8.46	568706	1.54	10	267.69	10	475858	0
kinst-4-033-0	5	71.56	5	729	0	5	0.46	5	80	0
kinst-4-033-1	5	71.69	5	729	0	5	0.46	5	80	0
kinst-4-033-2	5	34.92	5	467	0	5	0.53	5	71	0
kinst-4-033-3	5	27.48	5	45	0	5	0.04	5	0	0
kinst-4-033-4	5	42.46	5	133	0	5	0.02	5	0	0
kinst-4-034-0	5	50.60	5	79	0	5	0.01	5	0	0
kinst-4-034-1	5	50.69	5	79	0	5	0.01	5	0	0
kinst-4-034-2	5	341.22	5	462	0	5	0.48	5	93	0
kinst-4-034-3	5	64.17	5	91	0	5	0.04	5	0	0
kinst-4-034-4	5	42.57	5	111	0	5	0.01	5	0	0
nn16k7i1	8	113.81	8	2122	0	8	0.04	8	0	0
nn16k7i2	8	609.27	8	10014	0	8	0.38	8	42	0
nn16k7i3	8	502.71	8	13680	0	8	0.56	8	49	0
nn16k7i4	8	735.91	8	14683	0	8	0.40	8	38	0
nn16k7i5	8	473.70	8	11833	0	8	0.54	8	59	0
nn16k7i6	8	56.94	8	653	0	8	0.02	8	0	0
nn16k8i1	9	1010.92	9	12106	0	9	0.79	9	97	0
nn16k8i2	9	904.43	9	11521	0	9	0.58	9	102	0
nn16k8i3	9	3244.14	9	30722	0	9	0.77	9	141	0
nn16k8i4	9	3600.01	8	11072	1	9	0.66	9	76	0
nn16k8i5	9	799.36	9	10801	0	9	0.90	9	134	0
nn16k8i6	9	1814.43	9	10201	0	9	0.73	9	160	0
n12k10i1	11	379.47	11	10092	0	11	0.02	11	0	0
n12k10i2	11	3600	10	42076	1	11	0.68	11	167	0
n12k10i3	11	2746.71	11	67613	0	11	0.76	11	414	0
n12k10i4	11	196.84	11	15883	0	11	0.49	11	70	0
n12k10i5	11	414.53	11	25866	0	11	0.47	11	75	0
n12k10i6	11	129.05	11	5174	0	11	0.38	11	38	0
n12k9i1	10	113.59	10	1476	0	10	0.02	10	0	0
n12k9i2	10	1909.98	10	35508	0	10	0.40	10	215	0
n12k9i3	10	113.60	10	1516	0	10	0.01	10	0	0
n12k9i4	10	2173.23	10	25002	0	10	0.58	10	222	0
n12k9i5	10	77.66	10	1429	0	10	0.02	10	0	0
n12k9i6	10	655.95	10	24342	0	10	0.67	10	751	0

Cuadro B.38. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con y sin preprocesamiento para el modelo **EXP^r** para el problema **AVDECP** en el primer conjunto de instancias.

	EXP^r-Solo Cortes					*EXP^r-Cortes-Pre*				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-16-10-9	15	1700.84	15	8923	0	15	0.16	15	0	0
bc-16-17-9	16	29.35	16	1527	0	16	0.18	16	0	0
bc-16-25-9	16	56.10	16	4239	0	16	0.19	16	0	0
bc-16-8-9	16	18.61	16	1585	0	16	0.13	16	0	0
bc-17-11-9	17	52.64	17	4428	0	17	0.17	17	0	0
bc-17-13-9	17	122.31	17	2274	0	17	0.29	17	167	0
bc-17-18-9	16	1.92	16	80	0	16	0.32	16	0	0
bc-17-20-9	16	3600.01	15	6039	1	16	0.26	16	0	0
bc-17-3-9	17	76.36	17	5117	0	17	0.24	17	0	0
bc-17-7-9	16	1709.55	16	8409	0	16	0.26	16	0	0
bc-23-1-5	14	3600	13	73244	1	14	0.20	14	0	0
bc-23-2-5	16	3600.01	15	29285	1	16	0.09	16	0	0
bc-23-3-5	18	3600	17	115743	1	18	0.27	18	0	0
bc-23-4-5	17	1.83	17	0	0	17	0.27	17	0	0
bc-23-5-5	18	3600	17	35633	1	18	0.30	18	0	0
bc-23-6-5	13	0.13	13	0	0	13	0.31	13	0	0
bc-48-1-1	11	913.47	11	7354	0	11	0.03	11	0	0
bc-48-2-1	11	1181.78	11	5793	0	11	0.03	11	0	0
bc-48-3-1	10	782.03	10	3620	0	10	0.01	10	0	0
bc-48-4-1	10	2096.62	10	8276	0	10	0.02	10	0	0
bc-48-5-1	15	13.52	15	0	0	15	0.05	15	0	0
bc-48-6-1	12	0.61	12	0	0	12	0.38	12	0	0
inst_11_9	11	3600	9.55	183514	1.45	11	0.02	11	177995	0
inst_12_10	12	3600	10.36	313766	1.64	12	164.41	11	3647490	1
kinst-10-021-1	11	3415.74	11	32458	0	11	3600	11	188	0
kinst-10-021-2	12	3600.01	10.50	48308	1.50	11	1.77	11	508	0
kinst-10-021-3	11	39.53	11	1107	0	11	3.13	11	342	0
kinst-10-021-4	11	2916.73	11	92491	0	11	2.15	11	501	0
kinst-10-021-5	11	31.72	11	3002	0	11	3.50	11	726	0
kinst-10-021-6	11	791.65	11	23942	0	11	2.76	11	185	0
kinst-14-10-1	11	3600.01	10	25280	1	11	1.79	11	112	0
kinst-14-10-2	11	3600.01	10	21144	1	11	0.85	11	390	0
kinst-14-10-3	11	3600.01	10	17928	1	11	1.01	11	685	0
kinst-14-10-4	11	3600	10	16670	1	11	1.27	11	62	0
kinst-14-10-5	11	3600.01	10	48486	1	11	0.62	11	509	0
kinst-14-10-6	11	3600.01	10	15840	1	11	0.96	11	273	0
kinst-14-10-7	11	3600.01	10	20654	1	11	0.75	11	200	0
kinst-14-10-8	11	3600.01	10	45724	1	11	0.86	11	125	0
kinst-39-4-1	5	394.52	5	2675	0	5	0.76	5	0	0
kinst-39-4-2	5	32.52	5	67	0	5	0.13	5	0	0
kinst-39-4-3	5	38.06	5	64	0	5	0.06	5	0	0
kinst-39-4-4	5	105.28	5	144	0	5	0.05	5	0	0
kinst-39-4-5	5	86.27	5	1853	0	5	0.07	5	60	0
kinst-39-4-6	5	79.44	5	100	0	5	0.64	5	0	0
kinst-39-4-7	5	67.51	5	66	0	5	0.05	5	0	0
kinst-39-4-8	5	751.25	5	6988	0	5	0.05	5	94	0

Cuadro B.39. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con y sin preprocesamiento para el modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el segundo conjunto de instancias.

	EXP-CPX-Pre-BC-S1					EXP-CPX-Pre-BC-S2				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-12-1-9	13	3600	12	1230837	1	13	3600	12	1627039	1
bc-12-2-9	13	3600	12	3309174	1	13	3600	12	3457054	1
bc-12-3-9	13	3600	12	3122104	1	13	3600	12	2871200	1
bc-12-4-9	13	3600	12	4134000	1	13	3600	12	3274661	1
inst_9_7	9	35.75	9	87970	0	9	29.96	9	73510	0
inst_10_8	10	403.35	10	839003	0	10	357.87	10	631566	0
n12k10i2	11	0.59	11	199	0	11	1.08	11	380	0
bc-17-13-9	17	0.23	17	0	0	17	0.36	17	0	0
inst_11_9	11	568.29	11	486136	0	11	652.99	11	422335	0
inst_12_10	12	3600	11	4323872	1	12	3600	11	3336831	1
kinst-14-10-2	11	0.90	11	274	0	11	1.84	11	512	0
kinst-39-4-2	5	0.05	5	0	0	5	0.05	5	0	0
kinst-39-4-5	5	0.05	5	0	0	5	0.04	5	0	0
kinst-39-4-6	5	0.04	5	0	0	5	0.05	5	0	0
kinst-39-4-7	5	0.05	5	0	0	5	0.79	5	98	0
kinst-39-4-8	5	0.04	5	0	0	5	0.05	5	0	0

Cuadro B.40. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con preprocesamiento para el modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** utilizando los criterios 1 y 2 de rompimiento de simetría.

	EXP-CPX-Pre-BC-S3				
	solucion	tiempo	cota inferior	nodos	gap
bc-12-1-9	13	3600	12	1453371	1
bc-12-2-9	13	3600	12	3252556	1
bc-12-3-9	13	3600	12	1536239	1
bc-12-4-9	13	3600	12	3609618	1
inst_9_7	9	14.15	9	36408	0
inst_10_8	10	267.69	10	475858	0
n12k10i2	11	0.68	11	167	0
bc-17-13-9	17	0.29	17	0	0
inst_11_9	11	164.41	11	177995	0
inst_12_10	12	3600	11	3647490	1
kinst-14-10-2	11	1.01	11	390	0
kinst-39-4-2	5	0.06	5	0	0
kinst-39-4-5	5	0.64	5	60	0
kinst-39-4-6	5	0.05	5	0	0
kinst-39-4-7	5	0.05	5	0	0
kinst-39-4-8	5	0.66	5	94	0

Cuadro B.41. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con preprocesamiento para el modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** utilizando el criterio 3 de rompimiento de simetría.

Bibliografía

[1] Karen Aardal, Stan Van Hoesel, Arie Koster, Carlo Mannino, and Antonio Sassano. Models and solution techniques for frequency assignment problems. *Annals of Operations Research*, 153(1):79–129, 2007.

[2] Martin Aigner and Eberhard Triesch. Irregular assignments and two problems à la Ringel. In *Topics in Combinatorics and Graph Theory*, pages 29–36, 1990.

[3] Saieed Akbari, Hoda Bidkhori, and N. Nosrati. r-strong edge colorings of graphs. *Discrete Mathematics*, 306:3005–3010, 2006.

[4] Paul Balister, Béla Bollobás, and Richard Schelp. Vertex distinguishing colorings of graphs with $\delta(g) = 2$. *Discrete Mathematics*, 252(1):17–29, 2002.

[5] Paul Balister, Ervin Gyori, Jenö Lehel, and Richard Schelp. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(1): 237–250, 2007.

[6] Amotz Bar-Noy, Mihir Bellare, Magnús M Halldórsson, Hadas Shachnai, and Tami Tamir. On chromatic sums and distributed resource allocation. *Information and Computation*, 140(2):183–202, 1998.

[7] Cristina Bazgan, Amel Harkat-Benhamdine, Hao Li, and Mariusz Woźniak. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75(2):288–301, 1999.

[8] Cristina Bazgan, Amel Harkat-Benhamdine, Hao Li, and Mariusz Woźniak. A note on the vertex-distinguishing proper coloring of graphs with large minimum degree. *Discrete Mathematics*, 236(1):37–42, 2001.

[9] Claude Berge. Two theorems in graph theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 43(9):842–844, 1957.

[10] Merve Bodur and James Luedtke. Integer programming formulations for minimum deficiency interval coloring. *Networks*, 72:249–271, 2018.

[11] Fabrizio Borghini, Isabel Méndez-Díaz, and Paula Zabala. An exact algorithm for the edge coloring by total labeling problem. *Annals of Operations Research*, 286:11–31, 2020.

[12] Daniel Brélaz. New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4):251–256, April 1979.

[13] Yuehua Bu, Ko-Wei Lih, and Weifan Wang. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of planar graphs with girth at least six. *Discussiones Mathematicae: Graph Theory*, 31(3), 2011.

[14] Anita Burris and Richard Schelp. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. *Journal of Graph Theory*, 26(2):73–82, 1997.

[15] Manoel Campêlo, Ricardo Corrêa, and Yuri Frota. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters*, 89(4):159–164, 2004.

[16] Yan Cao, Guantao Chen, Guangming Jing, Michael Stiebitz, and Bjarne Toft. Graph edge coloring: A survey. *Graphs and Combinatorics*, 35:33–66, 2019.

[17] Jean Cardinal, Vlady Ravelomanana, and Mario Valencia-Pabon. Minimum sum edge colorings of multicycles. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12): 1216–1223, 2010.

[18] Gary Chartrand, Michael S Jacobson, Jeno Lehel, Ortrud R Oellermann, Sergio Ruiz, and Farrokh Saba. Irregular networks. *Congressus Numeratium*, 64: 197–210, 1988.

[19] Meirun Chen and Xiaofeng Guo. Adjacent vertex-distinguishing edge and total chromatic numbers of hypercubes. *Information Processing Letters*, 109 (12):599–602, 2009.

[20] Edward Coffman, Michael Garey, David Johnson, and Andrea LaPaugh. Scheduling file transfers. *SIAM Journal on Computing*, 14(3):744–780, 1985.

[21] Diego Delle Donne, Fabio Furini, Enrico Malaguti, and Roberto Wolfler Calvo. A branch-and-price algorithm for the minimum sum coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 2020.

[22] Jack Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices. *Journal of research of the National Bureau of Standards B*, 69B:125–130, 1965.

[23] Keith Edwards, Mirko Horňák, and Mariusz Woźniak. On the neighbour-distinguishing index of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 22(3):341–350, 2006.

[24] Andreas Eisenblätter, Martin Grötschel, and Arie Koster. Frequency planning and ramifications of coloring. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 22 (1):51–88, 2002.

[25] Odile Favaron, Hao Li, and Richard Schelp. Strong edge colorings of graphs. *Discrete Mathematics*, 159(1):103–109, 1996.

[26] Les Foulds. The heuristic problem-solving approach. *Journal of the Operational Research Society*, 34(10):927–934, 1983.

[27] Fabio Furini, Enrico Malaguti, Sébastien Martin, and Ian-Christopher Ternier. ILP models and column generation for the minimum sum coloring problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 64:215–224, 2018.

[28] Joseph Gallian. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 5(1):43, First edition 1998, Twenty-third edition 2020.

[29] Krzysztof Giaro and Marek Kubale. Edge-chromatic sum of trees and bounded cyclicity graphs. *Information Processing Letters*, 75(1-2):65–69, 2000.

[30] Paul Gilmore and Ralph Gomory. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, 9(6):849–859, 1961.

[31] Ambros Gleixner, Gregor Hendel, Gerald Gamrath, Tobias Achterberg, Michael Bastubbe, Timo Berthold, Philipp Christopheland Kati Jarck, Thorsten Koch, Jeff Linderoth, Marco Lübbecke, Hans Mittelmann, Derya Ozyurt, Ted Ralphs, Domenico Salvagnin, and Yuji Shinano. Miplib 2017:

data-driven compilation of the 6th mixed-integer programming library. *Mathematical Programming Computation*, 2021. doi: https://doi.org/10.1007/s12532-020-00194-3.

[32] Teofilo Gonzalez and Sartaj Sahni. Open shop scheduling to minimize finish time. *Journal of ACM*, 23(4):665–679, 1976.

[33] William Hale. Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 68(12):1497–1514, 1980.

[34] Philip Hall. On representatives of subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):26–30, 1935.

[35] Magnús Halldórsson, Guy Kortsarz, and Maxim Sviridenko. Min sum edge coloring in multigraphs via configuration LP. In Andrea Lodi, Alessandro Panconesi, and Giovanni Rinaldi, editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, pages 359–373. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[36] Pierre Hansen, Martine Labbé, and David Schindl. Set covering and packing formulations of graph coloring: Algorithms and first polyhedral results. *Discrete Optimization*, 6(2):135–147, 2009.

[37] Frank Harary. *Graph theory.* Westview Press, 1969.

[38] Hamed Hatami. $\Delta+$ 300 is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 95(2): 246–256, 2005.

[39] Ian Holyer. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):718–720, 1981.

[40] Gwenaël Joret and William Lochet. Progress on the adjacent vertex distinguishing edge coloring conjecture. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34(4):2221–2238, 2020.

[41] Thorsten Koch, Tobias Achterberg, Erling Andersen, Oliver Bastert, Timo Berthold, Robert Bixby, Emilie Danna, Gerald Gamrath, Ambros Gleixner, Stefan Heinz, Andrea Lodi, Hans Mittelmann, Ted Ralphs, Domenico Salvagnin, Daniel Steffy, and Kati Wolter. MIPLIB 2010. *Mathematical Programming Computation*, 3:103–163, 06 2011.

[42] Ewa Kubicka. The chromatic sum of a graph: History and recent developments. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004(30):1563–1573, 2004.

[43] Ewa Kubicka and Allen Schwenk. An introduction to chromatic sums. In *Proceedings of the 17th conference on ACM Annual Computer Science Conference*, pages 39–45. ACM, 1989.

[44] Jon Lee and Janny Leung. A comparison of two edge-coloring formulations. *Operations Research Letters*, 13(4):215–223, 1993.

[45] László Lovász and Michael D Plummer. *Matching theory*, volume 367. American Mathematical Soc., 2009.

[46] Enrico Malaguti and Paolo Toth. A survey on vertex coloring problems. *International Transactions in Operational Research*, 17(1):1–34, 2010.

[47] Enrico Malaguti, Michele Monaci, and Paolo Toth. Models and heuristic algorithms for a weighted vertex coloring problem. *Journal of Heuristics*, 15 (5):503–526, 2009.

[48] Enrico Malaguti, Michele Monaci, and Paolo Toth. An exact approach for the vertex coloring problem. *Discrete Optimization*, 8(2):174–190, 2011.

[49] Jessica McDonald. *Edge-colourings*, page 94–113. Cambridge University Press, 2015.

[50] Anuj Mehrotra and Michael Trick. A branch-and-price approach for graph multi-coloring. In *Extending the horizons: Advances in computing, optimization, and decision technologies*, pages 15–29. Springer, 2007.

[51] Isabel Méndez-Díaz and Paula Zabala. A branch-and-cut algorithm for graph coloring. *Discrete Applied Mathematics*, 154(5):826–847, 2006.

[52] BH Metzger. Spectrum management technique. In *38th National ORSA meeting*, 1970.

[53] John Mitchem, Patrick Morriss, and Edward Schmeichel. On the cost chromatic number of outerplanar, planar, and line graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 17(2):229–241, 1997.

[54] George Nemhauser and Sungsoo Park. A polyhedral approach to edge coloring. *Operations Research Letters*, 10(6):315–322, 1991.

[55] Journal of Heuristics. *https://link.springer.com/journal/10732*. Springer.

[56] Manfred Padberg and Ram Rao. Odd minimum cut-sets and b-matchings. *Mathematics of Operations Research*, 7(1):67–80, 1982.

[57] Patros Petrosyan and Rafaye Kamalian. On sum edge-coloring of regular,bipartite and split graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 165:263–269, 2014.

[58] Alexander Rosa. *On certain valuations of the vertices of a graph*, pages 349–355. 1967.

[59] Mohammadreza Salavatipour. On sum coloring of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 127:477–488, 2003.

[60] Martin Savelsbergh. A branch-and-price algorithm for the generalized assignment problem. *Operations Research*, 45(6):831–841, 1997.

[61] Mohammed Amin Tahraoui, Eric Duchêne, and Hamamache Kheddouci. Gap vertex-distinguishing edge colorings of graphs. *Discrete Mathematics*, 312(20): 3011–3025, 2012.

[62] Shuangliang Tian and Qian Wang. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings and total-colorings of the lexicographic product of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 185:220–226, 2015.

[63] Willem-Jan van Hoeve. The alldifferent constraint: A survey. In *In Proceedings of the Sixth Annual Workshop of the ERCIM Working Group on Constraints*, 2001.

[64] Vadim Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii*, 3(7):25–30, 1964.

[65] Weifan Wang and Yiqiao Wang. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of graphs with smaller maximum average degree. *Journal of Combinatorial Optimization*, 19(4):471–485, 2010.

[66] Weifan Wang and Yiqiao Wang. Adjacent vertex-distinguishing edge colorings of K_4-minor free graphs. *Applied Mathematics Letters*, 24(12):2034–2037, 2011.

[67] Laurence Wolsey. *Integer programming*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1998. ISBN 0-471-28366-5.

[68] Zhongfu Zhang, Linzhong Liu, and Jianfang Wang. Adjacent strong edge coloring of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 15(5):623–626, 2002.

[69] Yixin Zhao, Torbjörn Larsson, and Elina Rönnberg. An integer programming column generation principle for heuristic search methods. *International Transactions in Operational Research*, 27(1):665–695, 2020.

[70] Xiao Zhou and Takao Nishizeki. Algorithm for the cost edge-coloring of trees. *Journal of Combinatorial Optimization*, 8:97–108, 2004.

Índice de figuras

2.1. Coloreos de aristas 11
2.2. El primer coloreo tiene mayor costo que el segundo que utiliza más colores 14

4.1. Histograma de la cantidad de soluciones en cada intervalo de tiempo 51
4.2. Mejora con respecto a la solución anterior durante el tiempo 52
4.3. Mejora de la solución con respecto a la primera encontrada 53

5.1. Un coloreo parcial que viola la desigualdad **d-Color** 69
5.2. Esquema de conjuntos N_1, N_2, N_3, N_4 y N_5. 72
5.3. $deg(\tilde{u}) = 2$ 79
5.4. $a_{\tilde{u}\tilde{v}k_0} = 1$ 82
5.5. $a_{\tilde{u}\tilde{v}k_1} = 1$ 82
5.6. $a_{\tilde{u}\tilde{v}k_1} = t$ 83
5.7. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$ y $v \notin N(\tilde{u}) \cup N(\tilde{v})$ 91
5.8. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \notin N(\tilde{v})$, $v \notin N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$ 92
5.9. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \notin N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$ 93
5.10. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \notin N(\tilde{v})$ 95
5.11. $k \in S'$, $u \in N(\tilde{u})$, $u \in N(\tilde{v})$, $v \in N(\tilde{u})$ y $v \in N(\tilde{v})$ 96
5.12. Coloreos 1 y 2 para **C2** 97
5.13. Coloreos 1 y 2 para **C3** 98
5.14. Coloreos 3 y 4 para **C3** 100
5.15. Coloreos 5 y 6 para **C3** 100
5.16. Coloreos 7 y 8 para **C3** 102
5.17. Coloreos 1 y 2 para **C5** 104
5.18. Coloreos 3 y 4 para **C5** 105
5.19. Coloreos 5 y 6 para **C5** 105
5.20. Un coloreo parcial que viola la desigualdad (d-1)-Color 108

5.21. Un coloreo parcial que viola la desigualdad d-Color 111
5.22. Coloreos 1 y 2 para $\tilde{C}3$ 128
5.23. Coloreos 3 y 4 para $\tilde{C}3$ 128
5.24. Coloreos 5 y 6 para $\tilde{C}3$ 129
5.25. Solución que satisface todas las desigualdades y facetas de conjuntos de colores 141
5.26. Grafo donde el conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ no define faceta blossom. 147
5.27. Ejemplo de ciclo alternado impar 152
5.28. El ciclo P_1 es una oreja cerrada respecto a G' y el camino P_2 es una oreja abierta respecto a $G' \cup P_1$. El grafo de la figura se puede descomponer como $G' \cup P_1 \cup P_2$. 153

Índice de cuadros

3.1. Instancias de prueba 20
3.2. Resultados Modelo **POLI** 22
3.3. Resultados Modelo **EXP** 24
3.4. Comparación Modelo **POLI** vs Modelo **EXP** 26

4.1. Criterios en heurística golosa: valor objetivo promedio en 60s. . . . 46
4.2. Criterios en heurística golosa: cantidad de instancias sobre el total en los que se alcanza el mejor valor. 47
4.3. Criterio 3 en heurística golosa: valor objetivo promedio en diferentes tiempos límites. 48
4.4. Criterio 3 en heurística golosa: cantidad de instancias sobre el total en que se alcanza el mejor valor en diferentes tiempos límites. . . . 48
4.5. Modelos de CP: valor objetivo promedio de las soluciones obtenidas. 49
4.6. GC: valor objetivo y tiempo promedios con tiempo límite 60s. . . . 54
4.7. GC: valor objetivo y tiempo promedios con diferentes tiempos límites para PM. 54
4.8. GC+MIP: valor objetivo promedio y tiempo promedio con diferentes tiempos límites para MIP y 60s para PM. 55
4.9. GC+MIP: valor objetivo promedio y tiempo promedio con diferentes tiempos límites para PM y MIP. 56
4.10. Heurísticas rápidas: valor objetivo promedio 57
4.11. Heurísticas lentas: valor objetivo promedio y tiempo promedio . . . 57

6.1. Resultados de la experimentación con el modelo POLI 186
6.2. Experimentación con los cortes de conjuntos de colores: *gap* nodo raíz 188
6.3. Experimentación con los cortes de conjuntos de colores: branch and cut sin cortes CPLEX 188

6.4. Experimentación con los cortes de conjuntos de colores: branch and cut con cortes CPLEX . . . 189
6.5. Experimentación con cortes *blossom* sobre *EXP-CPX-C1* . . . 192
6.6. Experimentación con cortes *blossom* sobre *EXP-CPX-C1C2* . . . 193
6.7. Experimentación con heurísticas sobre *EXP-CPX-C1C2-B* . . . 195
6.8. Experimentación con heurística inicial sobre *EXP-CPX-C1C2-B* con mayor tiempo límite . . . 197
6.9. Experimentación con *branching* sobre *EXP-CPX-C1C2-B-iPC* . . . 200
6.10. Experimentación con *branching* con mayor tiempo límite . . . 200
6.11. Nuevo conjunto de instancias de prueba . . . 202
6.12. Cplex vs nuestro algoritmo-Primer conjunto de instancias . . . 203
6.13. Cplex vs nuestro algoritmo-Segundo conjunto de instancias . . . 204

7.1. Comparación modelo **POLI$^{\mathbf{r}}$** vs **EXP$^{\mathbf{r}}$**-Primer conjunto de instancias 211
7.2. Comparación modelo **POLI$^{\mathbf{r}}$** vs **EXP$^{\mathbf{r}}$**-Segundo conjunto de instancias . . . 212
7.3. Reducción post preprocesamiento-Primer conjunto de instancias . . . 212
7.4. Reducción post preprocesamiento-Segundo conjunto de instancias . . . 213
7.5. Utilizando preprocesamiento - Primer conjunto de instancias . . . 213
7.6. Utilizando preprocesamiento - Segundo conjunto de instancias . . . 214
7.7. Agregando cortes y estrategia de *branching* . . . 216
7.8. Agregando rompiendo de simetría . . . 216
7.9. Comparación final-Primer conjunto de instancias . . . 217
7.10. Comparación final-Segundo conjunto de instancias . . . 218

B.1. Valor obtenido por la heurística constructiva con distintos criterios en 60 segundos para **AVDSECP**. . . . 234
B.2. Valor obtenido por la heurística constructiva utilizando criterio 3 con diferentes límites de tiempo (en segundos) para **AVDSECP**. . . . 235
B.3. Valor obtenido por la heurística de *Constraint Programming* con diferentes algoritmos para **AVDSECP**. . . . 236
B.4. Valor obtenido por la heurística de generación de columnas con distinta cantidad de *matchings* generados por aristas y límites de tiempo para **AVDSECP**. . . . 237
B.5. Valor obtenido por GC+MIP con distintos límites de tiempo de MIP para **AVDSECP**. . . . 238

B.6. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX en el modelo **POLI** para **AVDSECP** 239
B.7. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX en el modelo **EXP** para **AVDSECP** 240
B.8. Resultados de *Branch and Cut* con planos de corte propios para el modelo **POLI** para **AVDSECP** 241
B.9. Resultados de *Branch and Cut* con más planos de corte propios y los de conjunto de colores para el modelo **POLI** para **AVDSECP** 242
B.10. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes de conjuntos de colores para el modelo **POLI** para **AVDSECP** 243
B.11. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color** para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 244
B.12. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **(d-1)-Color** para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 245
B.13. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color** y **(d-1)-Color** para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 246
B.14. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color** y cortes CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 247
B.15. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **(d-1)-Color** y cortes CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 248
B.16. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color** y cortes CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 249
B.17. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 3 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 250
B.18. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 5 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 251
B.19. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 252
B.20. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 3 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 253
B.21. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* tamaño 5 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 254

B.22. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 255
B.23. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, sin heurística inicial ni primal para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 256
B.24. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 257
B.25. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial y primal propia para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 258
B.26. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia y primal de CPLEX para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 259
B.27. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 1 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 260
B.28. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 2 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 261
B.29. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 3 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 262
B.30. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 4 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 263
B.31. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 5 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 264

B.32. Resultados de *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 6 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** 265
B.33. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX y *Branch and Cut* con planos de cortes **d-Color**, **(d-1)-Color**, cortes CPLEX y *blossom* general, con heurística inicial propia, primal de CPLEX y estrategia de branching con criterio 2 para el modelo **EXP** para **AVDSECP** en el segundo conjunto de instancias 266
B.34. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX para los modelos $\mathbf{POLI^r}$ y $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el primer conjunto de instancias 267
B.35. Resultados de *Branch and Cut* de CPLEX para los modelos $\mathbf{POLI^r}$ y $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el segundo conjunto de instancias. 268
B.36. Resultados del preprocesamiento en los modelos $\mathbf{POLI^r}$ y $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el primer conjunto de instancias. . 269
B.37. Resultados del preprocesamiento en los modelos $\mathbf{POLI^r}$ y $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el segundo conjunto de instancias. . 270
B.38. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con y sin preprocesamiento para el modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el primer conjunto de instancias. 271
B.39. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con y sin preprocesamiento para el modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** en el segundo conjunto de instancias. 272
B.40. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con preprocesamiento para el modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** utilizando los criterios 1 y 2 de rompimiento de simetría. 273
B.41. Resultados de *Branch and Cut* con cortes, con preprocesamiento para el modelo $\mathbf{EXP^r}$ para el problema **AVDECP** utilizando el criterio 3 de rompimiento de simetría. 273