



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Campos escalares y autofuerzas en espacio-tiempos cilíndricos asociados a cáscaras delgadas

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en
el área Ciencias Físicas.

María Cecilia Tomasini

Director de tesis: Dr. Claudio Simeone

Consejero de estudios: Dr. Rafael Ferraro

Lugar de trabajo: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Buenos Aires, 20 de mayo de 2021

Campos escalares y autofuerzas en espacio-tiempos cilíndricos asociados a cáscaras delgadas

M. C. Tomasini

23 de septiembre de 2021

Resumen:

En esta tesis se calcula y analiza la autofuerza sobre partículas puntuales asociadas a campos escalares masivos y no masivos acoplados a geometrías cónicas con simetría cilíndrica. Se trabaja con topologías triviales y no triviales generadas matemáticamente mediante el pegado de dos subvariedades aplicando el formalismo de *thin-shells*. En las primeras dos secciones se explican algunos conceptos generales como la noción de autofuerza, las características de las geometrías cónicas con simetría cilíndrica, las cuerdas cósmicas y el entorno teórico en el que surgen. En las secciones 3 y 4 se analiza específicamente la autofuerza sobre campos escalares no masivos y masivos respectivamente. En cada caso se definen zonas de estabilidad donde se eviten divergencias en las soluciones, se renormaliza el campo y se analizan gráficamente los resultados. Las conclusiones se presentan en la sección 5. Se incluyen dos apéndices donde se sintetiza el formalismo de *thin-shells* y se aplica al cálculo de estabilidad de cáscaras en agujeros de gusano en teorías de gravedad más allá de la Relatividad General.

Abstract:

Scalar fields and self-forces in cylindrical space-times associated with thin shells

This thesis evaluates the self-force on point particles associated with massive and non-massive scalar fields in conical space-times with cylindrical symmetry. The space-time geometry is generated by pasting two submanifolds using the thin shell formalism. The field equations present two sources: one located in the position of the charge and another in the shell that joins the two submanifolds. The first of the sources corresponds to the point charge and its associated field is regularized by applying the Detweiler and Whiting method consisting of subtracting the singular part. The second source contains the singular Ricci scalar at the position of the shell and is treated as a boundary condition. Stability zones are defined for each case within which the choice of the coupling constant does not produce divergences in the solutions. Analysis indicates that the sign of the self-force is reversed if the coupling constant is $\xi = 1/4$. Comparisons are made with the electromagnetic case, finding different results under equal conditions. In the massive case the intensity is attenuated by a factor $\sim e^{-mr}$.

Índice

1. Introducción.	5
2. Cuerdas cósmicas.	10
2.1. Entorno teórico.	11
3. Estudio de autofuerzas sobre una partícula acoplada a un campo escalar no masivo.	18
3.1. Consideraciones geométricas.	18
3.2. La ecuación de campo para una partícula acoplada a un campo escalar estático no masivo.	21
3.3. Condiciones de contorno sobre la función $\chi_n(k, r)$	24
3.3.1. Condiciones de contorno sobre la derivada normal de la función $\chi_n(k, r)$ en la posición de la carga y en la cáscara.	25
3.3.2. Condiciones de contorno sobre la derivada normal de la función radial en la posición de la carga y en la cáscara para el caso particular de las métricas Tipo I y II.	27
3.3.3. Otras condiciones de contorno sobre la función radial	28
3.3.4. Aplicación de las condiciones de contorno y cálculo de los coeficientes	29
3.3.5. Geometrías Tipo I con la carga en la región interior.	30
3.3.6. Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior.	33
3.3.7. Geometrías Tipo II: agujeros de gusano del tipo <i>thin-shell</i>	35
3.4. Configuraciones de resonancia	37
3.5. Renormalización	40
3.6. Cálculo de la autofuerza	45
3.7. Análisis de los resultados.	47
3.8. Conclusión de la primera parte y comentarios.	64
4. Estudio de autofuerzas sobre una partícula acoplada a un campo escalar masivo.	67
4.1. Ecuación de campo para el campo escalar masivo acoplado a la curvatura:	68
4.2. Condiciones de contorno sobre la función radial en la posición de la carga y en la cáscara.	71
4.3. Aplicación de las condiciones de contorno y cálculo de los coeficientes.	73
4.3.1. Geometrías Tipo I con la carga en la región interior.	73
4.3.2. Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior.	74
4.3.3. Geometrías Tipo II: agujeros de gusano de tipo <i>thin-shell</i>	74
4.4. Regiones de estabilidad y configuraciones de resonancia	76
4.5. Renormalización	80
4.5.1. La función de Green de la cuerda cósmica para el caso de un campo escalar masivo: forma integral.	82
4.5.2. Funciones de Green regular y singular para la cuerda cósmica	84
4.5.3. Cálculo del campo en la posición de la carga para las geometrías Tipo I y II.	86
4.6. Cálculo de la autofuerza.	89
4.7. Análisis de los resultados	92

4.8. Conclusiones de los gráficos para el caso del campo escalar masivo y comparación entre los casos masivo y no masivo.	97
5. Conclusiones y comentarios.	100
6. Apéndice I: El formalismo de <i>thin-shells</i>.	104
6.1. Introducción	104
6.2. Cálculo de la Primera Condición de Juntura y del salto en la curvatura extrínseca para las geometrías Tipo I y Tipo II	106
7. Apéndice II: Análisis de estabilidad de agujeros de gusano en teorías de gravedad más allá de la Relatividad General.	112
7.1. Introducción	112
7.2. Agujeros de gusano dilatónicos en 3+1 dimensiones	112
7.3. Agujeros de gusano de Einstein–Gauss–Bonnet en 4+1 dimensiones . . .	114
7.4. Los términos de Gauss–Bonnet como un $T_{\mu\nu}$ efectivo.	115
7.5. Los términos de Gauss–Bonnet como objeto geométrico	117
7.6. Resumen	119

Capítulo 1

1. Introducción.

En esta tesis se calcula y analiza la autofuerza sobre partículas de prueba puntuales en espacio-tiempos con topologías triviales y no triviales. Específicamente, se analiza la autofuerza asociada con campos escalares masivos y no masivos acoplados a geometrías cónicas con simetría cilíndrica generadas matemáticamente mediante el pegado de dos sub-variedades aplicando el formalismo de *thin-shells*.

Se denomina **autofuerza** a la fuerza que experimenta una partícula de prueba colocada en un espacio-tiempo que no es globalmente plano. Una geometría que no es globalmente plana actúa sobre el campo de la partícula modificándolo. Como consecuencia de esta acción, la trayectoria de la partícula se verá modificada de tal manera que ya no se moverá como una partícula libre sobre una geodésica del espacio-tiempo de fondo. El análisis de autofuerzas permite distinguir el tipo de objeto central que genera una determinada geometría ya que diferencia entre geometrías que son localmente idénticas pero globalmente distintas [23]. También se ha aplicado para investigar la composición y la estructura interna de objetos astrofísicos [47]. Asimismo, podría aplicarse al cálculo de las fuerzas que operan sobre objetos compactos orbitando alrededor de agujeros negros, lo que a su vez ayudaría a elaborar modelos para la forma de las ondas gravitacionales emitidas por este tipo de sistemas [14] [15].

El presente trabajo se refiere a autofuerzas sobre partículas que generan **campos escalares**. Los campos escalares son de sumo interés en cosmología ya que varios modelos propuestos hasta el momento se basan en la Relatividad General (o sus extensiones) como teoría del espacio-tiempo, y suponen que el Universo sufrió un proceso de expansión acelerada o inflación. En estos modelos la energía que impulsa la inflación surge de ciertas transiciones de fase que sufriría la materia primordial [40] [57] [58] [2] [59] [63]. Si la energía de vacío que da origen a la inflación surge de una transición de fase, ésta debe involucrar partículas de spin cero de modo que no haya una dirección privilegiada en el espacio. Clásicamente estas partículas están representadas por campos escalares [8] [13] [18] [37] [46] [91].

El ejemplo más importante de campo escalar en el marco de la cosmología y de la teoría de partículas es el campo de Higgs. Es costumbre describir su evolución a partir de un potencial suave con un mínimo profundo como muestra la figura 1. En la sección 2 haremos una breve reseña de los principales conceptos relacionados con este tema.

Si bien no hay pruebas directas que permitan afirmar que el Universo efectivamente atravesó un período inflacionario, las anisotropías en la temperatura del fondo de microondas descubiertas por el satélite COBE y posteriormente analizadas por WMAP y PLANCK apoyan la hipótesis de la formación de estructuras primordiales en términos de las fluctuaciones de un campo escalar, tal como predicen los modelos inflacionarios. Este hecho constituye un motivo suficiente para estudiar el comportamiento del campo escalar en diferentes situaciones y acoplado con diversas geometrías.

Existen varios trabajos en los cuales se analiza la autofuerza sobre partículas asociadas a campos escalares en geometrías con simetría esférica [9] [53] [83] [108]. En esta tesis analizaremos la autofuerza sobre partículas escalares en espacio-tiempos con **geometría cónica y con simetría cilíndrica**. Una variedad cónica se caracteriza por su defecto de ángulo que se define mediante la cantidad $\delta = 2\pi(1-\omega)$ con $0 < \omega < 1$. Esta cantidad denota la diferencia entre el valor $2\pi r$ de la circunferencia en un espacio tiempo plano en el que vale la geometría de Euclides, y el valor $(2\pi - \delta)r = 2\pi\omega r$ de la circunferencia en un espacio tiempo cónico. Es decir que el defecto de ángulo es la diferencia entre el valor del ángulo completo en el espacio-tiempo de Minkowski y el valor del ángulo completo en la variedad cónica.

En este trabajo la geometría del espacio-tiempo en el que se aloja la carga de prueba se construye pegando dos sub-variedades cónicas mediante el formalismo de *thin-shells*. Este formalismo considera la *thin-shell* (cáscara de materia infinitamente delgada) como una sub-variedad inmersa en un espacio-tiempo de mayor número de dimensiones y relaciona su tensor energía-momento superficial con la discontinuidad en la curvatura extrínseca. Históricamente, el desarrollo de este formalismo se inició con Lanczos [54][55] y Sen [102] y culminó con los trabajos de Israel [48], Taub [107], Barrabès [4] y Barrabès e Israel [5]. Los conceptos principales del formalismo se encuentran resumidos en el Apéndice I de la tesis (sección 6). En el presente trabajo las dos sub-variedades que se pegan en la *thin-shell* pueden tener igual o diferente defecto de ángulo y se unen de tal forma que dan por resultado un espacio-tiempo con una o con dos regiones exteriores asintóticamente planas (localmente). Como veremos un poco más adelante, en el último caso el espacio-tiempo resultante es un agujero de gusano del tipo *thin-shell*.

Las geometrías cónicas se asocian a ciertos objetos como las cuerdas cósmicas o los agujeros de gusano cilíndricos. En la década del '70 T. Kibble [49] propuso que en las etapas iniciales de formación del Universo, durante su expansión y enfriamiento, podrían haberse formado defectos lineales en el fluido primordial. Parte de la energía del campo de Higgs podría haber quedado atrapada en estos finos tubos, a los que se denominó **cuerdas cósmicas**. La trama del espacio-tiempo en el entorno de una cuerda cósmica adoptaría una forma cónica similar a la que adquiere la superficie de un fluido en torno a un vórtice. Posteriormente, en los '80, Y. Zel'dovich [128] y A. Vilenkin [116] mostraron de forma independiente que las perturbaciones en la densidad generadas por tales cuerdas en el medio protogaláctico podrían haber sido suficientemente grandes como para explicar la formación de galaxias. Si bien actualmente se cree que, en caso de existir, las cuerdas cósmicas serían reponsables, a lo sumo, del 10 por ciento de las fluctuaciones [21] [76], su estudio es interesante puesto que se trata de posibles inhomogeneidades en el Universo primordial [43] [115] [122]; además, podrían actuar como lentes gravitacionales cuyos efectos observables serían muy diferentes a los generados por agujeros negros [117] [119]. En este trabajo nos referiremos exclusivamente a cuerdas cósmicas "locales" o "de gauge".¹ Como veremos más adelante, el espesor de estas cuerdas es del orden de 10^{-31} cm [3]. Dado que esta distancia es muy inferior a cualquier dimensión de interés cosmológico o astrofísico, normalmente se considera que su espesor es nulo. En la sección 2 se incluye una breve descripción de las cuerdas locales y del

¹En este contexto el término "local" se refiere al tipo de simetría cuya ruptura da origen a la cuerda.

marco teórico en el que éstas surgen.

La métrica de una cuerda cósmica “local” es localmente idéntica a la métrica de un agujero de gusano cilíndrico que conecta dos geometrías cónicas. Un **agujero de gusano** es una anomalía, una deformación o un pliegue en la trama del espacio-tiempo que podría conectar dos regiones que estuviesen muy alejadas espacial y/o temporalmente entre sí. Se los denomina lorentzianos si residen en una variedad lorentziana o pseudo-riemanniana caracterizada por la signatura $(-, +, +, +)$. El lugar del agujero de gusano en el que se conectan las dos partes del espacio-tiempo se denomina *garganta*. Hasta el momento no existen evidencias concretas de la existencia de tales objetos. Sin embargo, se cree que podrían haberse formado en zonas donde hubiesen existido campos gravitacionales muy intensos, capaces de curvar el espacio-tiempo de tal manera de generar topologías no triviales. En la literatura científica estos objetos fueron mencionados por primera vez en un paper publicado en el año 1935 por Einstein y Rosen [24]. Los autores centraron su discusión en ciertos puentes, hoy conocidos como *Puentes de Einstein-Rosen*, que comunicaban dos hojas del espacio-tiempo. Posteriormente el tema fue abandonado durante un par de décadas hasta que fue abordado nuevamente por Wheeler quien, hacia 1955, se interesó por los aspectos topológicos de la Teoría de la Relatividad General [125]. En el año 1962 Misner y Wheeler [67] se concentraron en el estudio de ciertas topologías no triviales y dieron a estos objetos, por primera vez, el nombre de agujeros de gusano. El interés en este tema se renovó a partir del estudio realizado por Morris y Thorne en el año 1988 [70], según el cual sería posible la existencia de agujeros de gusano atravesables; esto es, agujeros de gusano tales que un ser humano podría viajar a través de ellos de forma segura.² Hasta el momento no hay evidencia que pueda probar de manera concluyente la existencia de los agujeros de gusano, pero su estudio podría aportar datos sumamente interesantes en otras áreas de la física.

Dado que, como ya hemos dicho, la métrica de una cuerda cósmica “local” es localmente indistinguible de la métrica de un *wormhole* cilíndrico que conecta dos sub-variedades cónicas, en esta tesis analizaremos también la autofuerza sobre partículas escalares en el espacio-tiempo de estos objetos. Pero trabajaremos con un tipo particular de agujeros de gusano, matemáticamente diseñados: los **agujeros de gusano del tipo *thin-shell***.³ En $(3 + 1)$ dimensiones, un agujero de gusano de *thin-shell* se construye uniendo dos regiones del espacio-tiempo por medio de una hipersuperficie tri-dimensional. El espacio-tiempo resultante es una variedad bien comportada, es decir, geodésicamente completa. La hipersuperficie de juntura en la cual se identifican las dos

²Para que un agujero de gusano pueda ser atravesado debe carecer de horizonte y no debe tener ningún tipo de singularidad en la curvatura. Estas condiciones se cumplen si la distribución de energía en las proximidades de la garganta responde a ciertas características peculiares, muy diferentes de las que presenta la materia conocida. En pocas palabras, la materia en el entorno de la garganta debe tener densidad de energía negativa, por lo que se la ha denominado *materia exótica*.

³En el caso de *wormholes* del tipo *thin-shell* la posibilidad de que sean “efectivamente atravesables para un viajero” se relaciona con las tensiones o presiones (fuerzas de marea) que puedan aparecer al atravesar la garganta: el *wormhole* sería atravesable si la aceleración relativa entre dos puntos de un objeto, situados uno a cada lado de la garganta, es “tolerable” para el objeto. Si el *wormhole* conecta dos sub-variedades cónicas, como éstas son localmente planas en cada una de ellas no hay aceleración y, en consecuencia, la aceleración relativa entre dos puntos es nula y no existen las fuerzas de marea, de modo que este tipo de agujero de gusano sí sería atravesable.

regiones originales es la garganta del agujero de gusano. En virtud de su construcción, el espacio-tiempo resultante puede ser vacío en todas partes salvo en la garganta. En otras palabras, el tensor-energía momento de la materia que genera tal geometría se encuentra concentrado en la garganta del *wormhole*, donde existe una singularidad tipo delta de Dirac.

Una de las aplicaciones importantes del formalismo de *thin-shells* es el análisis de estabilidad en agujeros de gusano dinámicos. En un agujero de gusano dinámico la garganta puede dilatarse o comprimirse de modo que el radio a de la misma es una función $a(\tau)$, donde τ es el tiempo propio medido por un observador comoviente ubicado en la garganta. En el Apéndice II de la tesis (sección 7) se desarrolla un ejemplo de análisis de estabilidad para un agujero de gusano dilatónico con simetría esférica en $(3 + 1)$ dimensiones y para un agujero de gusano, también esférico, en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet en $(4 + 1)$ dimensiones. Dicho análisis fue realizado como parte de esta tesis con la finalidad de adquirir las herramientas necesarias para el manejo del formalismo de *thin-shells* y de sus aplicaciones. Los resultados fueron publicados en [96]. Dado que el tema de este análisis se aparta de la estructura central de la tesis, se lo ha incluido como un Apéndice.

En esta tesis hemos analizado la autofuerza sobre cargas puntuales. Si la carga de prueba es un cuerpo puntual, el campo es divergente sobre su línea de universo. En ese caso se debe obtener alguna expresión para el campo que sea regular sobre la línea de universo de la partícula. El proceso que conduce a la obtención del campo regular se denomina **renormalización** y debe ser tal que no afecte la autofuerza. Para renormalizar debemos restarle al campo total su parte singular. Puede demostrarse que si se realiza esta operación se obtiene un campo regular sin que la autofuerza se modifique, ya que la parte regular es la única responsable de la autofuerza mientras que la parte singular sólo contribuye a la inercia de la partícula [22] [77]. Existen varios métodos de regularización. En este trabajo nos valdremos de los resultados de B. Linet [61] para renormalizar el campo en el caso de una carga asociada a un campo escalar sin masa, y de las deducciones de M. Guimarães y B. Linet [39] para el caso del campo escalar masivo. En [61] B. Linet halló la expresión cerrada para el campo renormalizado de la cuerda cósmica y calculó la autofuerza sobre una carga eléctrica en esa configuración. Como se verá más adelante, la autofuerza sobre una partícula asociada a un campo escalar sin masa en una variedad cónica coincide localmente con la autofuerza que experimenta una carga eléctrica en el espacio-tiempo de una cuerda cósmica, de manera que los resultados encontrados por B. Linet son aplicables a los casos que se analizan en la sección 3 de la presente tesis. Por otra parte, en [39] se calcula la función de Green regular para un campo escalar masivo interactuando con el flujo magnético que circula a través de una singularidad lineal en una variedad cónica. Estos desarrollos serán también de utilidad haciendo los cambios pertinentes para ajustarlos al caso que se aborda en la sección 4.

La tesis se estructura como sigue: en la sección 2 se describen brevemente la geometría y las propiedades de las cuerdas cósmicas locales y se explica el marco teórico en el que se originan. En la sección 3 se analiza la autofuerza sobre cargas asociadas a un campo

escalar sin masa y en la sección 4 se hace lo propio para el caso de un campo escalar masivo; los resultados de estas dos investigaciones fueron publicados respectivamente en [112] y [113]. Al final de la sección 3 se incluye una comparación con los resultados obtenidos en el análisis de autofuerzas en geometrías cónicas, pero aplicado al caso de campos electromagnéticos [92]. La comparación resulta de gran interés ya que el campo escalar y el campo electromagnético se acoplan de diferente manera a la curvatura. Finalmente, en la sección 5 se presenta un breve resumen de los desarrollos y algunos comentarios.

La tesis consta, además, de dos apéndices; en el primero (sección 6) se describe concisamente el formalismo de *thin-shells* y en el segundo (sección 7) se aplica este formalismo al análisis de estabilidad de agujeros de gusano en teorías de gravedad más allá de la Relatividad General. Este último análisis constituye una contribución original publicada en [96]. La sección 7.6 incluye la bibliografía consultada.

En las secciones 3 y 4 se utiliza el sistema de unidades geometrizadas donde $c = G = 1$ y la signatura $(-, +, +, +)$. Trabajaremos en todo momento dentro del marco de la Relatividad clásica, sin involucrar efectos cuánticos.

Capítulo 2

2. Cuerdas cósmicas.

En esta sección reseñaremos algunos conceptos vinculados a las cuerdas cósmicas y al entorno teórico en el que estos objetos surgen [3] [21] [74] [75] [119] [120] [122].

Como veremos enseguida, las cuerdas son defectos topológicos que podrían formarse como consecuencia de las transiciones de fase en el Universo temprano.^{4 5} En esta tesis nos referiremos exclusivamente a *cuerdas locales*, las cuales son extremadamente delgadas pero pueden ser muy masivas. Típicamente una cuerda de este tipo generada en una transición GUT tendría una densidad lineal de masa $\sim 10^{21} \text{ kg/m}$, de modo que si su longitud fuese igual al diámetro del Sol ($\sim 10^9 \text{ m}$) sería aproximadamente tan masiva como el mismo Sol ($\sim 10^{30} \text{ kg}$).

Los defectos topológicos son una consecuencia inevitable de la ruptura de simetrías dentro de las teorías de unificación [128] [117]. De entre todos los defectos topológicos, las cuerdas cósmicas son los más interesantes en cuanto a la formación de estructuras. Efectivamente, los modelos cosmológicos que involucran otros defectos, como paredes de dominio y monopolos, contradicen todas las observaciones del Universo mientras que las cuerdas se consideran actualmente como “semillas” secundarias en el proceso de formación de las estructuras a gran escala observadas hoy en día.

Uno de los problemas fundamentales de la cosmología actual es comprender la formación de grandes estructuras en el Universo. Se supone que las galaxias y clusters de galaxias han evolucionado por inestabilidad gravitacional a partir de pequeñas fluctuaciones en la densidad. Sin embargo se desconoce el origen de estas fluctuaciones. Como veremos más adelante, las cuerdas cósmicas pueden transportar enormes cantidades de energía. Cuando estos objetos evolucionan desde pequeñas escalas a escalas mayores como consecuencia de la expansión del Universo, generan perturbaciones en la densidad de materia-energía que podrían dar lugar a la formación de estructuras.

Los efectos gravitacionales de una cuerda están gobernados por el parámetro adimensional $G\vartheta/c^4$ donde G es la constante de Newton, c es la velocidad de la luz y ϑ es la energía por unidad de longitud de la cuerda. En particular, las cuerdas en el Universo primordial generarían perturbaciones tales que las fluctuaciones en la densidad serían del orden

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{G\vartheta}{c^4}$$

Para una cuerda GUT este valor corresponde aproximadamente a $10^{-6} - 10^{-7}$. Éste es justamente el orden de magnitud necesario para la formación de galaxias. Por este

⁴En este contexto la palabra “topológico” se refiere a la configuración del campo y no a la geometría del espacio-tiempo.

⁵Este tipo de defecto se produce también en algunos sistemas de materia condensada que sufren transiciones de fase a bajas temperaturas. Por ejemplo, se forman vórtices en He superfluido, tubos de flujo magnético en algunos superconductores y defectos lineales en ciertos tipos de cristales líquidos.

motivo en la década del '80 las cuerdas cósmicas fueron seriamente consideradas como posible origen de las inhomogeneidades en la densidad a partir de las cuales se formaron las galaxias. Sin embargo, esta hipótesis no pudo ser comprobada en las simulaciones. Por otra parte el escenario de cuerdas cósmicas no puede explicar los picos acústicos observados por COBE y WMAP en el Fondo Cósmico de Radiación de Microondas. Por esa razón, actualmente las cuerdas han sido relegadas a un segundo plano en cuanto a la generación de las galaxias y serían responsables, a lo sumo, de no más del 10 por ciento de las perturbaciones [21] [76].

No obstante, la investigación en torno a los potenciales efectos cosmológicos de las cuerdas continúa ya que se trata de fuentes localizadas de masa y energía en el Universo primordial que, de otro modo, sería completamente homogéneo. Por otra parte, estos objetos podrían producir efectos observables sumamente interesantes como la formación de imágenes dobles de galaxias o quasars [38] [69] [100] [101] [117] [119] [118]. La observación de tales fenómenos ayudará a confirmar o a rechazar el modelo de cuerdas cósmicas. Cabe mencionar que recientemente se ha renovado el interés en estos defectos dentro del marco de la teoría de supercuerdas y de la teoría M [36] [97].

2.1. Entorno teórico.

El Modelo Cosmológico Standard supone que el Universo comienza en un estado de equilibrio térmico local a muy altas temperaturas y que posteriormente se enfría en el transcurso de la expansión. También se asume que el Universo es isotrópico, homogéneo y muy aproximadamente plano, de modo que es adecuadamente descripto por la métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

El Modelo Standard presenta varias dificultades como el problema del horizonte, la chatura y la edad del Universo, el problema de la singularidad primordial, etc. Una solución muy atractiva para muchos de estos problemas es el escenario inflacionario propuesto por Guth en 1981 [40] y por Linde en 1982 [57]. Según este modelo, en las etapas iniciales de su evolución el Universo habría experimentado una expansión exponencial (*inflación*) en el transcurso de la cual su temperatura habría descendido. La expansión solucionaría, entre otros, el problema de la edad y de la chatura del Universo al reducir su curvatura o el problema del horizonte ya que expandiría regiones del espacio que podrían haber estado causalmente conectadas en un pasado remoto.

El escenario inflacionario aparece naturalmente en una amplia gama de teorías de partículas. Las Teorías de Gran Unificación predicen que en el proceso de enfriamiento experimentado durante la inflación un *campo escalar clásico* ϕ , que inicialmente se encontraba en un estado inestable, sufre una *transición de fase* que lo lleva a un nuevo estado estable. El estado inicial del campo escalar es un estado de gran densidad de energía conocido como “falso vacío”. El estado final suele denominarse “vacío verdadero”. Durante la transición la energía del “falso vacío” se transforma en calor, de modo que una vez culminado el proceso inflacionario, durante el cual la temperatura de Universo desciende, éste se recalienta (*termalización*) y su entropía aumenta considerablemente. A partir de entonces su evolución es similar a la descrita en el Modelo

Cosmológico Standard.

Existen varias transiciones de fase de potencial importancia para la cosmología, las cuales pudieron haber dejado rastros observables hoy en día. En orden decreciente de energía estas transiciones son las siguientes:

Transición GUT, $\sim 10^{15}$ **GeV**. Por debajo de esta temperatura la interacción fuerte se separaría de la electrodébil.

Transición electrodébil, $\sim 10^2 - 10^3$ **GeV**. A estas energías las fuerzas electromagnética y nuclear débil se separan.

Transición quark-hadron, $\sim 0,2$ **GeV**. Por debajo de esta temperatura los quarks no pueden existir de forma aislada sino que se encuentran “encerrados” dentro de los nucleones.

Según el Modelo Standard de Partículas, los cambios de fase ocurridos en el Universo primordial se asocian a la **ruptura de alguna simetría**: a muy altas temperaturas y energías el campo escalar ϕ se encontraría en el estado **simétrico** de “falso vacío” y durante el proceso de enfriamiento asociado a la inflación transitaría hacia el estado **no simétrico** de “vacío verdadero”. El pasaje del estado simétrico al estado de simetría rota ocurriría a cierta temperatura crítica característica de cada transición. La ruptura de simetrías podría dejar rastros o “reliquias”, algunas de las cuales podrían ser semillas para la formación de galaxias.

La figura 1 corresponde al potencial característico de este tipo de fenómenos. Este potencial se conoce como “sombrero mejicano” y su expresión analítica se formulará más adelante. Inicialmente el campo ϕ se encuentra en el centro del diagrama, su estado es $\langle|\phi|\rangle = 0$ y el “sistema” presenta simetría por rotaciones en torno al eje vertical. Sin embargo, el sistema se encontrará en un estado inestable de modo que al descender la temperatura buscará una configuración más estable rodando hacia el mínimo absoluto y asentándose en algún lugar del anillo de radio $|\phi| = \eta$. Cuando el campo pasa del estado simétrico de falso vacío $\langle|\phi|\rangle = 0$ a un nuevo estado $\langle|\phi|\rangle = \eta e^{i\theta}$, la fase θ queda determinada en un único valor; en el gráfico de la figura 1 esta transición equivale a que el campo “caiga” en un punto determinado del círculo de radio $|\phi| = \eta$, de modo que la simetría original del sistema se rompe.

Cuando un sistema extenso sufre este tipo de transición de fase cada parte del mismo puede “caer” hacia un estado fundamental diferente; en otras palabras, cada parte del sistema puede adoptar una fase θ distinta. Como resultado, la fase θ no será la misma en todas partes. La fase angular tenderá a uniformarse a medida que el sistema se enfría, pero este proceso podría no completarse de modo que, finalmente, habría partes del sistema con fases diferentes. Esta no uniformidad conduciría a la formación de **defectos topológicos** en los límites entre regiones que presentan diferentes fases angulares. El fenómeno es análogo al que se verifica en los materiales ferromagnéticos: por encima de la temperatura de Curie el material se encuentra en estado de simetría restaurada con los dipolos alineados al azar, pero al descender la temperatura la simetría se rompe y

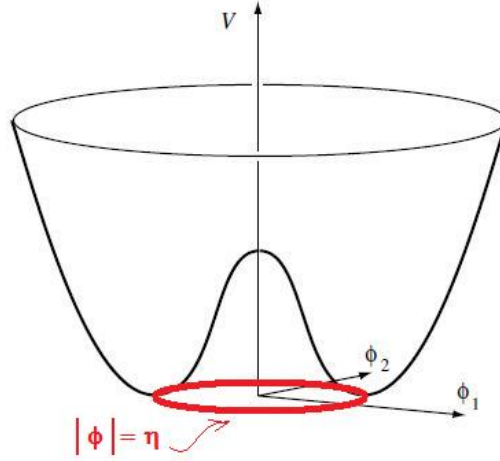


Figura 1: Una bola colocada en el centro del “sombbrero mejicano” se encontrará en un estado inestable y rodará hacia el mínimo absoluto asentándose en algún lugar del anillo. Pero la rodadura ocurrirá en cualquier dirección al azar. El “radio” $|\phi| = \eta$ en el cual cae la bola puede predecirse, pero no así el ángulo azimutal. Esto implica una pérdida de simetría: la posición final de la bola luego de caer viola la simetría rotacional que presentaba el sistema originalmente, cuando el estado del campo era $\langle |\phi| \rangle = 0$.

los dipolos se alinean formando “dominios”.

Los defectos topológicos que pueden originarse en las transiciones de fase se clasifican según sus dimensiones en paredes de dominio, cuerdas, monopolos y texturas. Las paredes de dominio son defectos bidimensionales que se forman cuando el campo tiene sólo una componente; las cuerdas son defectos unidimensionales correspondientes a campos con dos componentes y los monopolos son defectos puntuales asociados a campos con tres componentes (figura 2). Las texturas son defectos topológicos no localizados que se generan cuando se rompen grupos más grandes y complicados de simetrías y se asocian a campos con cuatro componentes. La primera clasificación de los defectos topológicos y la primera descripción de su evolución fue dada por Kibble en 1976 [49].

Mientras que las paredes de dominio y los monopolos resultan ser desastrosos para los modelos cosmológicos, las cuerdas cósmicas son los defectos topológicos de mayor interés en cosmología ya que podrían dar lugar a efectos sumamente interesantes. En particular, como se ha adelantado, podrían generar fluctuaciones en la densidad de energía suficientes como para explicar la formación de galaxias y grandes estructuras [49] [51] [104] [114] [117] [121] [128] [129] y podrían producir ciertos fenómenos observables como la formación de imágenes dobles de objetos celestes [38] [69] [99] [100] [101] [117] [119] [118] (figura 3).

Las cuerdas cósmicas son de dos tipos, dependiendo de la naturaleza de la simetría que se rompa: locales (también llamadas cuerdas de gauge) y globales. El modelo más simple corresponde a las **cuerdas locales**. En este caso el lagrangiano es ⁶ [21] [73]

⁶Se utilizan las siguientes convenciones y unidades: Masa de Planck: $m_p = 2,2 \times 10^{-5} gr = 1,2 \times 10^{19}$ GeV; Tiempo de Planck: $t_p = 5,3 \times 10^{-44} seg$; Sistema de unidades $\hbar = c = 1 \Rightarrow t_p = m_p$ y $G = m_p^{-2}$

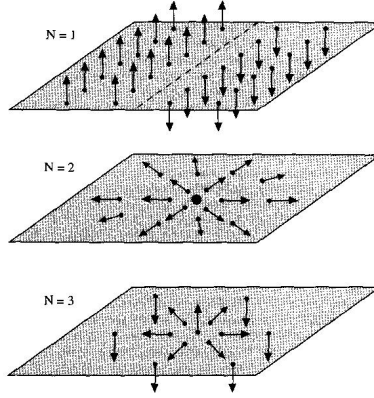


Figura 2: Defectos topológicos. La figura superior corresponde a la formación de defectos asociados a campos con una sola componente cuyas posibilidades de orientación son sólo dos; el espacio se divide en dos regiones, cada una asociada a un estado diferente del campo; entre ambas regiones se forma un defecto bidimensional o *pared de dominio*. La figura central muestra la formación de defectos asociados con campos de dos componentes o campos complejos, los cuales pueden completar una vuelta completa en el plano; en ese caso se forma un defecto lineal o *cuerda cósmica*. La figura inferior ilustra la formación de defectos cuando el campo tiene tres componentes; estos campos pueden orientarse en dos direcciones y también completar una vuelta completa en el plano; los defectos resultantes son puntuales y se denominan *monopolos*. Extraído de [74].

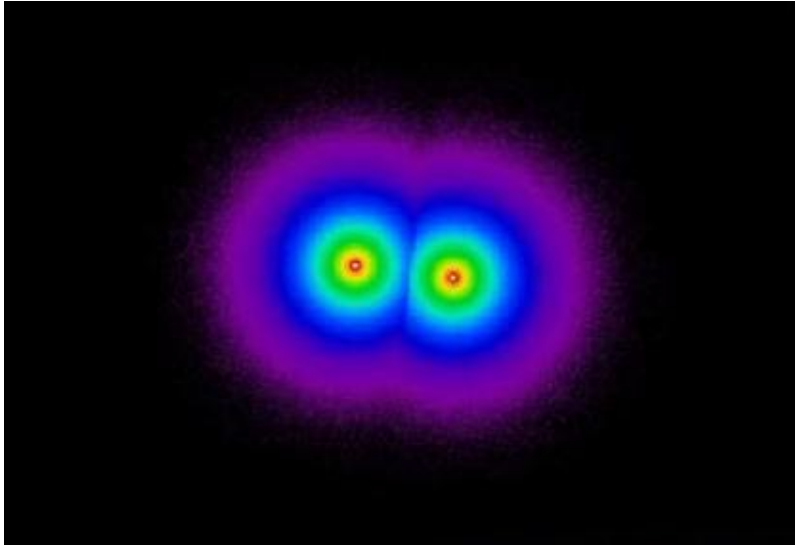


Figura 3: Simulación numérica de la imagen de una única galaxia tal como se vería si estuviese modificada por la presencia de una cuerda cósmica que actuase como lente gravitacional. Adaptado de [99].

[116]

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda (|\phi|^2 - \eta^2)^2 \quad (1)$$

donde

$$D_\mu = \partial_\mu + ihA_\mu; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

y donde A_μ es el campo de gauge, h es el acoplamiento con el campo de gauge y η es una constante. Una de las posibles soluciones de las ecuaciones de campo asociadas con el lagrangiano (1) corresponde a una configuración en la cual la energía queda encerrada dentro de un radio determinado por las siguientes distancias características

$$\delta_\phi \approx \frac{1}{\eta\sqrt{\lambda}} \quad (2)$$

$$\delta_A = \frac{1}{h\eta} \quad (3)$$

La expresión (2) mide la distancia necesaria para que el campo ϕ alcance su valor en el estado de vacío verdadero $\langle |\phi| \rangle = \eta$; y la expresión (3) mide la región en la cual el factor $H \propto \frac{d}{dr}(r|A|)$ es apreciablemente distinto de cero. Si las distancias δ_ϕ y δ_A son del mismo orden, entonces la cuerda está bien definida y su extensión radial es $\delta_\phi \approx \delta_A$.

La presencia del término $F_{\mu\nu}$ en el lagrangiano es crucial para que la densidad de energía tenga una distribución finita. Si el campo de gauge A_μ se encuentra presente, entonces su contribución $\propto H^2$ a la energía compensa el crecimiento de $|\phi|$ de modo que éste se hace constante rápidamente. Como resultado, la densidad de energía, que es proporcional a la derivada de $|\phi|$, se anula de inmediato dando por resultado una configuración en la cual la densidad de energía queda confinada dentro del radio de la cuerda (figura 4).

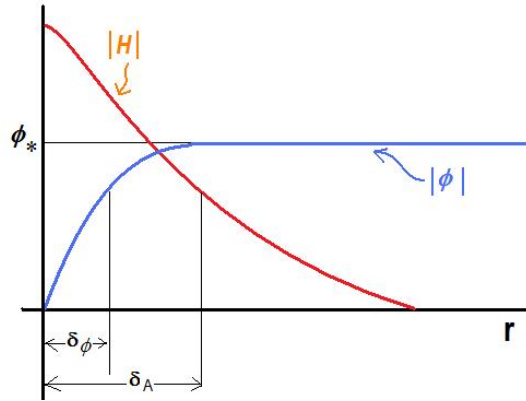


Figura 4: En la gráfica se muestra el comportamiento de las contribuciones a la energía del campo de gauge A_μ (representada en la curva $|H|$) y del campo $|\phi|$. La presencia del campo de gauge compensa el crecimiento de $|\phi|$, el cual se hace rápidamente constante de modo que la densidad de energía se anula fuera del radio de la cuerda. Adaptado de [73].

El lagrangiano de una *cuerda global* se escribe

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \lambda (|\phi|^2 - \eta^2)^2$$

En este lagrangiano el termino de gauge está ausente. Por lo tanto el crecimiento de $|\phi|$ no se encuentra compensado. Como resultado, la energía no decae sino que se extiende indefinidamente. Desde el punto de vista de la gravedad las cuerdas locales y las globales son muy diferentes. En las cuerdas locales la energía se encuentra concentrada en un pequeño radio; por lo tanto, como veremos enseguida, la geometría fuera de la cuerda es una solución de vacío con defecto de ángulo. En cambio, en las cuerdas globales la geometría es mucho más complicada porque el tensor $T_{\mu\nu}$ no esta localizado [17].

El potencial

$$V = \frac{1}{2}\lambda(|\phi|^2 - \eta^2)^2$$

es la expresión analítica del denominado “potencial del sombrero” que se muestra en la figura 1. Como hemos visto, el estado fundamental no se encuentra en $\langle|\phi|\rangle = 0$ sino que abarca el círculo completo cuyo radio en el plano complejo es igual a $|\phi| = \eta$ y el mínimo de energía es un estado degenerado $\langle|\phi|\rangle = \eta e^{i\theta}$ que ocupa todo este “anillo”.

Las **cuerdas cósmicas** son defectos lineales alrededor de los cuales la fase angular puede variar en 2π o en un múltiplo de 2π (figura 5):

$$\Delta\theta = 2\pi n$$

donde n es un número entero. Tal configuración contiene un tubo a lo largo del cual la fase es indefinida, ya que de otro modo el camino podría ser encogido constantemente hacia un punto sobre el cual el cambio de fase es cero, lo que resulta imposible puesto que la fase no puede cambiar de manera continua desde 0 a 2π . A lo largo del tubo la fase sólo puede ser indefinida si $\phi = 0$, es decir que esta configuración contiene tubos de “falso vacío”. En otras palabras, en el interior de la cuerda queda retenido el “falso vacío”, con su correspondiente energía potencial. Por lo tanto las cuerdas representan enormes densidades de energía atrapadas. El centro de la cuerda puede ser entendido, entonces, como una reliquia de las primeras etapas a muy altas temperaturas del Universo ya que la densidad de energía en el interior de las cuerdas es similar a la que existía en el Universo primordial antes de las transiciones de fase.

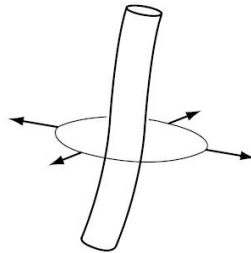


Figura 5: Cuerda cósmica. Las direcciones de las flechas indican los valores que puede adoptar la fase θ . El campo ϕ se anula en el interior de la cuerda.

Las cuerdas de mayor interés cosmológico son las cuerdas locales. El espesor de una cuerda local GUT se estima en $\sim 10^{-29}$ cm [3]. Como esta distancia es muy inferior a las

distancias de interés en astrofísica y cosmología, usualmente se considera que las cuerdas locales tienen espesor nulo. En ese caso el tensor energía-momento se escribe [119]

$$\bar{T}_\nu^\mu = -\vartheta \text{diag}(1, 0, 0, 1)\delta(x)\delta(y) \quad (4)$$

donde ϑ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. La tensión a lo largo de la cuerda es igual a su densidad de energía $T \sim \vartheta$.⁷

En las cuerdas la curvatura del espacio-tiempo se encuentra confinada dentro del núcleo mientras que el espacio subtendido a su alrededor es localmente plano. Esta propiedad puede verse de inmediato analizando la métrica de la cuerda [117]. La solución de las ecuaciones de Einstein para el tensor de materia (4) conduce a la siguiente métrica para el espacio-tiempo alrededor de una cuerda alineada con el eje z y fuera de ella:

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + (1 - 4G\vartheta)^2 r^2 d\phi^2 \quad (5)$$

donde r y ϕ son las coordenadas polares en el plano xy , ϑ es la tensión en la cuerda y el parámetro $G\vartheta$ es pequeño. Un cambio de coordenadas

$$\phi' = (1 - 4\pi G\vartheta)\phi$$

transforma la métrica (5) en una métrica localmente minkowskiana:

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi'^2$$

donde ahora el ángulo ϕ' varía en el rango

$$0 \leq \phi' \leq (1 - 4\pi G\vartheta)2\pi$$

La métrica (5) describe un “espacio cónico”; es decir, un espacio plano con una “cuña” de apertura angular igual a $8\pi G\vartheta$ tal que ambos lados de la cuña se identifican, como muestra la figura 6.

Para concluir esta sección, consideraremos algunos datos numéricos [3]. Una cuerda generada en una transición GUT tendría una masa por unidad de longitud $\vartheta \sim 10^{19} - 10^{21} \text{ kg/m}$; su espesor se estima $10^{-32} - 10^{-31} \text{ m}$. Una cuerda GUT cuya longitud fuese aproximadamente igual al diámetro de la Vía Láctea ($\sim 10^{21} - 10^{23} \text{ m}$) tendría aproximadamente su masa ($\sim 10^{40} - 10^{42} \text{ kg}$, o en unidades de masa solar $\sim 10^{10} - 10^{12} M_\odot$). Una cuerda producida durante una transición electrodébil tendría una masa por unidad de longitud $\vartheta \sim 10^{-7} \text{ kg/m}$ y un espesor 10^{-18} m , que es tres órdenes de magnitud inferior al radio de un electrón. De lo anterior se desprende que los efectos gravitacionales de una cuerda GUT deberían ser suficientemente importantes como para tener consecuencias a nivel cosmológico. Por el contrario, los efectos gravitacionales de una cuerda electrodébil no serían importantes a este nivel.

⁷La tensión de la cuerda puede entenderse como el trabajo realizado por unidad de aumento en su longitud. Dado que ϑ es la energía por unidad de longitud de la cuerda, la tensión resulta ser $T = \vartheta$.

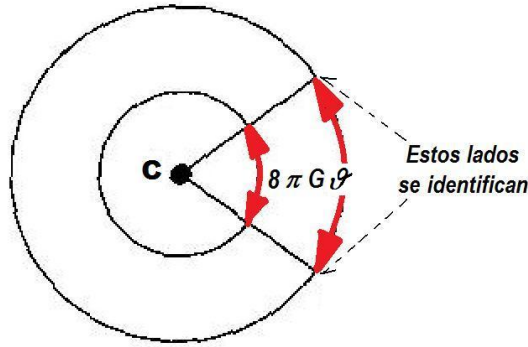


Figura 6: La métrica (5) describe un espacio plano con una cuña de apertura angular igual a $8\pi G\vartheta$ tal que ambos lados de la cuña se identifican. En otros términos, el espacio tiempo de una cuerda puede obtenerse a partir de un plano, cortando una cuña de amplitud angular $8\pi G\vartheta$ y uniendo sus lados. Adaptado de [74].

Capítulo 3

3. Estudio de autofuerzas sobre una partícula acoplada a un campo escalar no masivo.

En esta sección analizaremos la autofuerza sobre una partícula que actúa como fuente de un campo escalar sin masa, acoplado a su vez a geometrías cónicas con una o dos regiones asintóticas generadas pegando dos métricas mediante el formalismo de *thin-shells*. Analizaremos casos en los que las dos métricas tienen igual o diferente defecto de ángulo. Resolveremos las ecuaciones para un caso estático y para una métrica cilíndrica diagonal general. Por tratarse de resultados generales, algunas de estas ecuaciones nos serán útiles tanto en la presente sección como en la sección 4, donde haremos los cambios correspondientes para tratar el caso de campos escalares masivos. En adelante usaremos el sistema de unidades geometrizadas: $c = G = 1$.

3.1. Consideraciones geométricas.

El elemento de línea que describe un espacio-tiempo cónico es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \rho^2(r) d\phi^2 + dz^2 \quad (6)$$

En la expresión anterior la coordenada z se encuentra comprendida en $-\infty < z < \infty$, la coordenada radial r varía en el rango $0 < r < \infty$, y la coordenada angular ϕ lo hace en $0 < \phi < 2\pi$. El factor $\rho = \rho(r) = \omega r$ se denomina **función perfil**. El parámetro ω varía en el intervalo $0 < \omega \leq 1$ y es el que define el **defecto de ángulo** $\delta = 2\pi(1-\omega)$ de la variedad cónica.⁸

⁸El perímetro de la circunferencia se define como $2\pi\omega r$. Para una variedad plana es $\omega = 1$ de modo que el perímetro de la circunferencia mide $2\pi r$. Para cualquier otra variedad cónica es $0 < \omega < 1$ de modo que el perímetro es menor que $2\pi r$.

En este trabajo abordaremos el caso de campos escalares no masivos acoplados a dos geometrías diferentes. Llamaremos geometría Tipo I a la generada mediante el pegado de dos soluciones, una interior y otra exterior, con diferente defecto de ángulo ω_i y ω_e respectivamente. Esta geometría se representa esquemáticamente en las figuras 7 y 8. La geometría Tipo II se obtiene pegando dos soluciones exteriores con defecto de ángulo ω_- y ω_+ ; se representa en la figura 9.

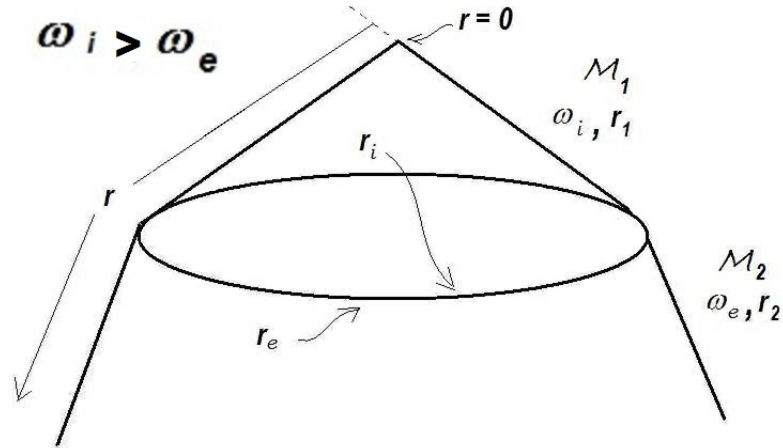


Figura 7: Dos soluciones cónicas, una interior y otra exterior tales que $\omega_i > \omega_e$, se pegan en una hipersuperficie o *thin shell*. En este diagrama y en los siguientes no aparecen representadas la coordenada temporal t ni la coordenada espacial z , de modo que el espacio-tiempo de 4 dimensiones se representa como una superficie cónica de 2 dimensiones y la *shell*, que tiene una dimensión menos, se representa como un anillo circular. En tres dimensiones la *shell* es un cilindro infinitamente largo.

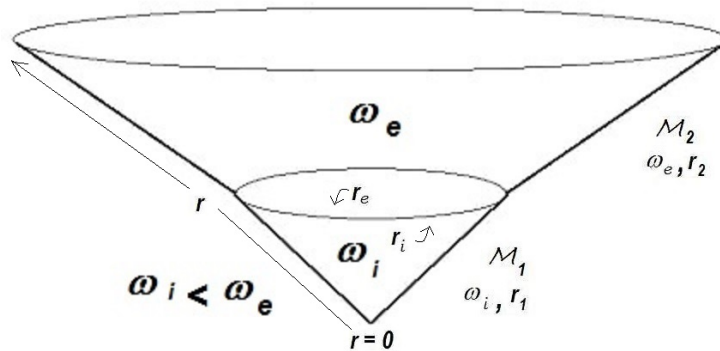


Figura 8: Dos soluciones cónicas, una interior y otra exterior tales que $\omega_i < \omega_e$, se pegan en una hipersuperficie o *thin shell*.

La función perfil ρ adopta diferentes valores según el problema a resolver. La geometría Tipo I se caracteriza por una función perfil

$$\rho(r) = \begin{cases} \omega_i r & \text{en } \mathcal{M}_1 = \{0 < r \leq r_i\} \\ \omega_e r & \text{en } \mathcal{M}_2 = \{r_e \leq r < \infty\} \end{cases} \quad (7)$$

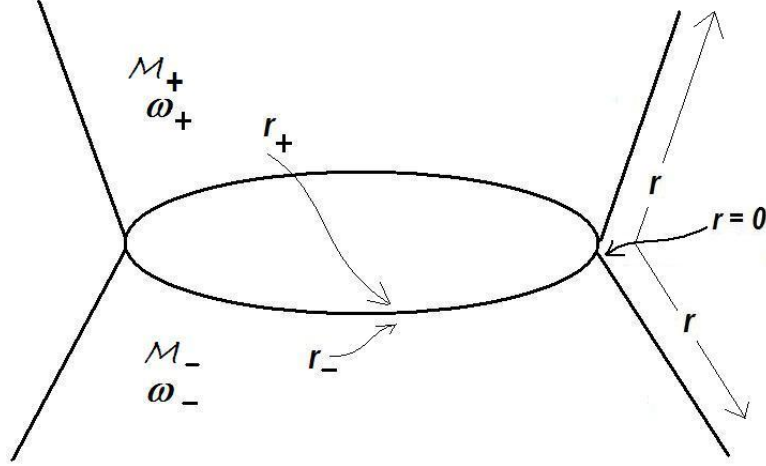


Figura 9: Dos soluciones exteriores con diferente defecto de ángulo que se pegan en una hipersuperficie, la cual forma la garganta de un agujero de gusano del tipo *thin-shell*.

En esta geometría la coordenada radial r es única y recorre ambas sub-variedades iniciándose en el vértice de la métrica interior. Las sub-variedades correspondientes a la región interior \mathcal{M}_1 , con defecto de ángulo $2\pi(1 - \omega_i)$, y a la región exterior \mathcal{M}_2 , cuyo defecto de ángulo es $2\pi(1 - \omega_e)$, se unen en la hipersuperficie ubicada en $r = r_i$. Sobre esta hipersuperficie no se cumple la **segunda condición de juntura**, de modo que las dos sub-variedades se pegan en una *thin-shell*.⁹ En la sub-variedad interior la *thin-shell* se localiza en $r = r_i$ mientras que en la región exterior se ubica en $r = r_e$. Estos dos radios se encuentran relacionados por medio de la **primera condición de juntura** aplicada sobre la hipersuperficie donde se pegan las soluciones:

$$\rho(r_i) = r_i \omega_i = r_e \omega_e \quad (8)$$

Para la geometría Tipo II la función perfil adopta la forma

$$\rho(r) = \begin{cases} (r_- - r) \omega_- & \text{en } \mathcal{M}_- = \{-\infty < r \leq 0\} \\ (r_+ + r) \omega_+ & \text{en } \mathcal{M}_+ = \{0 \leq r < +\infty\} \end{cases} \quad (9)$$

En la última expresión las dos regiones asintóticas \mathcal{M}_- y \mathcal{M}_+ están caracterizadas, respectivamente, por los parámetros ω_- y ω_+ que definen el defecto de ángulo. Estas dos regiones se pegan en la hipersuperficie de una garganta infinitamente delgada mediante la condición

$$\rho(0) = r_- \omega_- = r_+ \omega_+ \quad (10)$$

que se deriva de la **primera condición de juntura**. Del mismo modo que en el caso anterior, la segunda condición de juntura no se cumple de modo que la hipersuperficie de pegado forma la delgada garganta de un agujero de gusano del tipo *thin-shell*.

La geometría Tipo I es localmente plana en todas partes excepto en $r = 0$ y en la hipersuperficie de la cáscara mientras que la geometría Tipo II es localmente plana

⁹Para las siguientes deducciones véase el Apéndice I, sección 6.

siempre salvo en la *thin-shell*.¹⁰ Por lo tanto en ambos casos el escalar de Ricci es nulo en la cáscara donde se cumple

$$R(r) = -2\kappa \delta(r - r_s) \quad (11)$$

donde r_s es la posición radial de la cáscara y κ es la traza en el salto del tensor de curvatura extrínseca K_{ab}^\pm sobre la *thin-shell*:

$$\kappa_{ab} = \langle K_{ab} \rangle = K_{ab}^+ \Big|_{r=r_s} - K_{ab}^- \Big|_{r=r_s}$$

Para el caso particular de la métrica (6) la traza adopta los valores

$$\kappa = \begin{cases} \frac{\omega_e - \omega_i}{\rho(r_s)}; & r_s = r_i \quad \text{para las geometrías Tipo I} \\ \frac{\omega_+ + \omega_-}{\rho(r_s)}; & r_s = 0 \quad \text{para las geometrías Tipo II} \end{cases} \quad (12)$$

Los tensores energía-momento superficial para las geometrías Tipo I y Tipo II son respectivamente

$$S_{ab}^{(I)} = \begin{pmatrix} -(\omega_e - \omega_i)(\omega_e r_e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_e - \omega_i)(\omega_e r_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$S_{ab}^{(II)} = \begin{pmatrix} -(\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ r_+) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ r_+) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

3.2. La ecuación de campo para una partícula acoplada a un campo escalar estático no masivo.

Supongamos una partícula puntual con carga q que se mueve a lo largo de una línea de universo γ en un espacio-tiempo curvo caracterizado por una métrica $g_{\mu\nu}$. La partícula genera un campo escalar Φ cuyo gradiente $\Phi_{,\mu} = \nabla_\mu \Phi$ determina la fuerza. La dinámica del sistema se rige por la acción $S = S_\Phi + S_{m_0} + S_q$ donde S_Φ es la acción del campo escalar libre sin masa, S_{m_0} es la acción de la partícula libre y S_q es la acción que tiene en cuenta la interacción entre la carga q y su campo.

¹⁰ En las geometrías Tipo I el origen de coordenadas se encuentra sobre el eje de simetría tal como muestran las figuras 7 y 8. En estos casos, dado que existe también una singularidad en $r = 0$, el escalar de Ricci es nulo en todas partes salvo en la cáscara y en el origen; en este último punto adopta la forma $R(r) \sim \delta(r)/r$. En las geometrías Tipo II el origen de coordenadas no se encuentra sobre el eje de simetría sino que coincide con la ubicación de la cáscara, como se ve en la figura 9. En estas últimas geometrías el eje de simetría es inaccesible.

La acción del campo escalar libre y sin masa se escribe: ¹¹

$$S_{\Phi} = -\frac{1}{8\pi} \int (g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + \xi R \Phi^2) \sqrt{-g} d^4x \quad (15)$$

En esta expresión la integral se extiende a todo el espacio-tiempo caracterizado por la métrica $g_{\mu\nu}$ cuyo determinante es g , y ξ es el acoplamiento arbitrario entre el campo y el escalar de curvatura R .

La acción de la partícula es ^{12 13}

$$S_{m_0} = -m_0 \int_{\gamma} d\tau \quad (16)$$

donde γ es la línea de universo de la partícula escalar, m_0 es su “masa desnuda” y $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} dt$ es el diferencial de tiempo propio a lo largo de la línea de universo. El punto indica derivación respecto de un parámetro que, en este caso, es el tiempo t .

El término de interacción es

$$S_q = q \int_{\gamma} \Phi(y(\tau)) d\tau = q \int \sqrt{-g} d^4x \int_{\gamma} \Phi(x) \delta^{(4)}(x, y(\tau)) d\tau \quad (17)$$

donde $y(\tau)$ son las coordenadas de la línea de universo. Solicitando que la acción total sea estacionaria ante una variación $\delta\Phi(x)$ del campo se obtiene la siguiente ecuación de campo para la carga q en reposo:

$$(\square - \xi R)\Phi = -4\pi q \frac{\delta^{(3)}(\vec{x} - (\vec{x})')}{\sqrt{g^{(3)}}} \quad (18)$$

¹¹ Observamos que definiendo $M^2 = \xi R$ la acción es formalmente idéntica a la de un campo escalar de masa M en el espacio-tiempo plano

$$S_{campo} = -\frac{1}{8\pi} \int (g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + M^2 \Phi^2) \sqrt{-g} d^4x$$

donde $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Para que este sistema tenga sentido físico debe ser $M^2 \geq 0$ pues de lo contrario admitiríamos una masa imaginaria. La analogía formal sugeriría que nuestro problema sólo tiene sentido físico si se cumple la condición

$$\xi R \geq 0$$

lo que, de acuerdo a la ecuación (11), implica a su vez que debe cumplirse la condición $\xi\kappa \leq 0$. Como veremos más adelante (secciones 3.4 y 4.4) en el caso de campos escalares en variedades cónicas asociadas a cáscaras de materia esta condición se reflejará en las restricciones que debe cumplir la constante de acoplamiento para evitar que aparezcan divergencias en los coeficientes de los desarrollos en serie.

¹²Los parámetros que aparecen en el Lagrangiano, tales como la masa, la carga o las diferentes constantes de acoplamiento, carecen de sentido físico y no son experimentalmente medibles. En Teoría de Campos estos parámetros se denominan “parámetros desnudos”. En general difieren de las cantidades físicamente medidas a partir de alguna interacción.

¹³La masa m_0 no debe ser confundida con la masa del campo m ; por ejemplo, la masa del campo puede ser nula si se considera, como en el caso presente, un campo escalar sin masa, mientras que la masa m_0 de una partícula puntual es siempre diferente de cero.

donde \square es el D'Alembertiano, $\vec{x} = (x_j)$; $j = 1, 2, 3$; $(\vec{x})'$ es la localización espacial de la carga y $\sqrt{g^{(3)}} = \sqrt{\det g_{ij}}$ es la raíz del determinante de la parte espacial de la métrica. Definiendo la densidad de carga $\mu(\vec{x})$ como

$$\mu(\vec{x}) = q \frac{\delta^{(3)}(\vec{x} - (\vec{x})')}{\sqrt{g^{(3)}}} \quad (19)$$

podemos escribir la ecuación de campo (18) como

$$(\square - \xi R)\Phi = -4\pi\mu(\vec{x}) \quad (20)$$

Como veremos más adelante, la ecuación de Poisson para un campo escalar acoplado a la curvatura introduce fuentes adicionales. Esta situación no ocurre en el caso electrostático [92] [93] [94] ya que las derivadas covariantes producen singularidades a ambos lados de la ecuación que se compensan mutuamente. En el caso de campos escalares, las derivadas covariantes se reducen a derivadas ordinarias. En consecuencia se generan singularidades que no son compensadas y que operan como una fuente adicional que se suma a la carga en la ecuación de campo. En la sección 3.8 discutiremos este tema y estableceremos comparaciones con el caso electrostático.

Considerando una métrica diagonal general en coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = -g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{zz} dz^2$$

el D'Alembertiano para el caso estático es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r) + \partial_\phi (\sqrt{-g} g^{\phi\phi} \partial_\phi) + \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z) \right\} \Phi \quad (21)$$

Combinando la última expresión con la ecuación (18), y teniendo en cuenta que $\sqrt{-g} = \sqrt{-g_{tt}} \sqrt{g^{(3)}}$, obtenemos:

$$\left\{ \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r) + \partial_\phi (\sqrt{-g} g^{\phi\phi} \partial_\phi) + \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z) \right\} \Phi = -4\pi q \delta(\vec{x} - (\vec{x})') \sqrt{-g_{tt}} + \xi R \Phi \sqrt{-g} \quad (22)$$

La última expresión es una ecuación diferencial con dos fuentes:

$$-4\pi q \delta(\vec{x} - (\vec{x})') \sqrt{-g_{tt}} \quad ; \quad \xi R \Phi \sqrt{-g}$$

Las dos expresiones anteriores contienen singularidades tipo delta de Dirac. La primera corresponde a la singularidad generada por la presencia de la carga puntual. En la segunda expresión la delta de Dirac está contenida en el escalar de curvatura (11) y corresponde a una singularidad en la posición de la *thin shell*.

Desarrollamos la solución de la ecuación (22) en funciones cilíndricas ortonormales:

$$\Phi = q \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \sum_0^\infty a_n \cos[n(\phi - \phi')] \chi_n(k, r) \quad (23)$$

donde $\chi_n(k, r)$ es la parte radial de la solución para el modo n con autovalor k , y donde a_n engloba todas las constantes. Del mismo modo, desarrollamos también la $\delta(\vec{x} - (\vec{x}')')$ en funciones cilíndricas ortonormales:

$$\delta(\vec{x} - (\vec{x}')') = \delta(r - r') \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty b_n \cos[n(\phi - \phi')] \quad (24)$$

En las expresiones anteriores $x' = (r', \phi', z')$ es la posición de la carga y

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (25)$$

Introduciendo estos desarrollos en la ecuación (22) obtenemos

$$a_n = \begin{cases} 2/\pi & \text{si } n = 0 \\ 4/\pi & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (26)$$

lo que nos permite escribir (23) como

$$\Phi = q \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos[n(\phi - \phi')]}{(1 + \delta_{0,n})} \int_0^{+\infty} dk \chi_n(k, r) \cos[k(z - z')] \quad (27)$$

donde la Delta de Kronecker $\delta_{0,n}$ tiene en cuenta el factor de normalización 1/2 para el modo cero respecto de las otras funciones de la base en la coordenada angular ϕ . Finalmente, haciendo algunas simplificaciones, encontramos que la ecuación para el campo escalar se reduce a su parte radial

$$\left\{ \left[\partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r) \right] - \sqrt{-g} \left[g^{\phi\phi} n^2 + g^{zz} k^2 \right] \right\} \chi_n(k, r) = -\sqrt{-g_{tt}} \delta(r - r') + (\xi R \sqrt{-g}) \chi_n(k, r) \quad (28)$$

donde r' es la posición de la carga. La última expresión es la parte radial de la ecuación de campo para un campo escalar sin masa acoplado a un espacio-tiempo caracterizado por una métrica cilíndrica estática y diagonal general. Para el caso particular de la métrica (6) la ecuación radial se escribe

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho(r) \frac{\partial}{\partial r} \right] - \rho(r) \left[\left(\frac{n}{\rho(r)} \right)^2 + k^2 \right] \right\} \chi_n(k, r) = -\delta(r - r') + \rho(r) \xi R(r) \chi_n(k, r) \quad (29)$$

La última es una ecuación homogénea en todas partes salvo en la posición de la carga $r = r'$ y en la posición de la *thin-shell* $r = r_s$.

3.3. Condiciones de contorno sobre la función $\chi_n(k, r)$

A continuación expresaremos las dos singularidades (fuentes) del lado derecho de la ecuación diferencial (28) como condiciones de contorno en la posición de la carga y de la *shell*. En la sección 3.3.1 lo haremos de manera general y en la sección 3.3.2 lo aplicaremos al caso particular de la métrica (6).

3.3.1. Condiciones de contorno sobre la derivada normal de la función $\chi_n(k, r)$ en la posición de la carga y en la cáscara.

En primer lugar, llamaremos r_0 al valor de la coordenada radial en el que se encuentra la singularidad (figuras 10 y 11); esto es:

- $r_0 = r_s$ es la posición de la *shell* donde se pegan ambas sub-variedades en las geometría Tipo I o la posición de la garganta del *wormhole* para la geometría Tipo II.
- $r_0 = r'$ es la posición de la carga en las geometrías Tipo I o II.

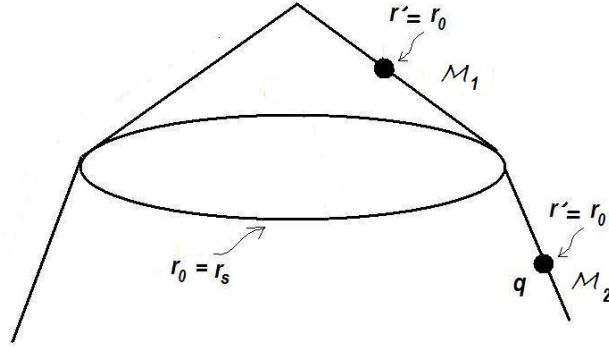


Figura 10: Ubicación de la carga y de la *thin shell* donde se pegan las dos sub-variedades en la geometría Tipo I.

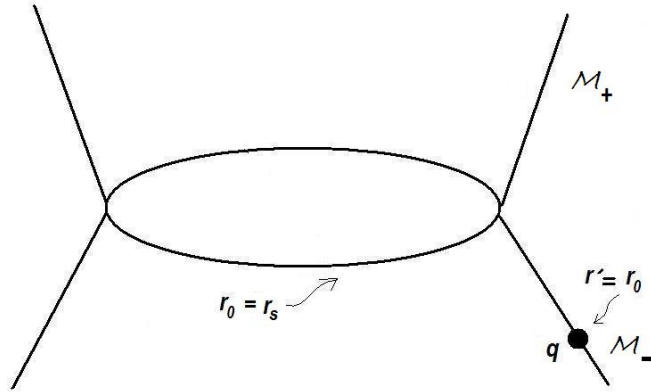


Figura 11: Ubicación de la carga y de la garganta en la geometría Tipo II. Si se considera un *wormhole* simétrico respecto de la cáscara la carga puede ubicarse en la sub-variedad superior o inferior indistintamente sin que se afecten los resultados del problema.

Integramos m.a.m. la expresión (28) sobre una intervalo infinitesimal en torno a la ubicación de la singularidad. Para el lado izquierdo tenemos:

$$\int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} [\partial_r(\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r)] \chi_n(k, r) dr - \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \sqrt{-g} [g^{\phi\phi} n^2 + g^{zz} k^2] \chi_n(k, r) dr \quad (30)$$

Evaluando la primera de las integrales para $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} [\partial_r(\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r)] \chi_n(k, r) dr \\ &= \sqrt{-g(r_0^+)} g^{rr}(r_0^+) \left[\frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r_0^+} - \sqrt{-g(r_0^-)} g^{rr}(r_0^-) \left[\frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r_0^-} \end{aligned} \quad (31)$$

Para evaluar la segunda integral de (30) tenemos en cuenta que las componentes $g^{\phi\phi}$ y g^{zz} son ambas funciones continuas de r en todas partes, incluso sobre la *thin shell*.¹⁴ El determinante de la métrica $\sqrt{-g}$ es también continuo. Las cantidades n y k son constantes, y χ debe ser una función continua en todas partes. En conclusión, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ el segundo término de la ecuación (30) es la integral de una función continua en r sobre un intervalo nulo; por lo tanto vale cero. Finalmente, la integral del lado izquierdo de (28) se reduce a la expresión (31).

Integramos ahora el lado derecho de la ecuación (28):

$$-\sqrt{-g_{tt}} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r - r') dr + \xi \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} R\sqrt{-g} \chi_n(k, r) dr \quad (32)$$

Para el primer término tenemos

$$-\sqrt{-g_{tt}} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r - r') dr = \begin{cases} 0 & \text{si } r_0 \neq r' \\ -\sqrt{-g_{tt}} & \text{si } r_0 = r' \end{cases} \quad (33)$$

Este término es no nulo únicamente en la posición de la carga r' . El segundo término contiene al escalar de curvatura R que, como se ha visto en la expresión (11), introduce una singularidad tipo Delta de Dirac en la *thin shell* donde se pegan las dos sub-variedades. Como consecuencia, el segundo término de (32) es diferente de cero únicamente en el lugar donde se pegan las dos soluciones (esto es, en $r_0 = r_s$) de modo que el segundo miembro de la expresión (28) se anula en todas partes salvo en la posición de la carga o en la *thin shell*.

Combinando estos resultados obtenemos

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g(r_0^+)} g^{rr}(r_0^+) \left[\frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r_0^+} - \sqrt{-g(r_0^-)} g^{rr}(r_0^-) \left[\frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r_0^-} \\ &= -\sqrt{-g_{tt}} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r - r') dr + \xi \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} R\sqrt{-g} \chi_n(k, r) dr \end{aligned} \quad (34)$$

- Al evaluar la expresión (34) en la posición de la carga $r_0 = r'$ sólo sobrevive el primer término de (32) y vale $-\sqrt{g_{tt}}(r')$. Suponiendo que tanto $\sqrt{-g(r)}$ como g^{rr} son continuas en ese punto se obtiene la siguiente **condición de contorno general para la derivada normal de la función radial en la posición de la carga**:

¹⁴ La continuidad de la métrica al atravesar la *thin shell* implica que $g_{\alpha\beta}^+|_{r=r_s} = g_{\alpha\beta}^-|_{r=r_s}$. Es decir que las **primeras formas fundamentales** son idénticas a ambos lados de la *thin shell*. Para el caso particular de la métrica (6) esta condición se reduce a las expresiones (8) y (10). Ver Apéndice I.

$$\left. \frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right|_{r=r'^-}^{r=r'^+} = - \frac{\sqrt{g_{tt}(r')}}{\sqrt{-g(r') g^{rr}(r')}} \quad (35)$$

- Al evaluar la expresión (34) en la cáscara donde se pegan ambas soluciones $r_0 = r_s$ sólo sobrevive el segundo término de (32). La expresión (34) se reduce a

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{-g(r)} g^{rr}(r) \frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r_s^+} - \left[\sqrt{-g(r)} g^{rr}(r) \frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r_s^-} \\ & = -2\xi \int_{r_s-\varepsilon}^{r_s+\varepsilon} \kappa(r) \delta(r - r_s) \sqrt{-g(r)} \chi_n(k, r) dr \quad (36) \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta el valor del escalar de curvatura (11). El término $\kappa(r)$ en la integral es continuo sobre la cáscara; por lo tanto no ofrece problemas. La función $\chi_n(k, r)$ y el término $\sqrt{-g(r)}$ tampoco presentan problemas siempre que sean continuos sobre la cáscara. Teniendo en cuenta estas suposiciones y simplificando términos semejantes obtenemos finalmente la siguiente **condición de contorno general para la derivada normal de la función radial en la posición de la cáscara**:

$$\left. \frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right|_{r=r_s^-}^{r=r_s^+} = \frac{-2\xi \kappa(r_s)}{g^{rr}(r_s)} \chi_n(k, r) \Big|_{r=r_s} \quad (37)$$

donde hemos considerado la continuidad de $\chi_n(k, r)$ en $r = r_s$.

3.3.2. Condiciones de contorno sobre la derivada normal de la función radial en la posición de la carga y en la cáscara para el caso particular de las métricas Tipo I y II.

Aplicaremos los resultados obtenidos en la sección anterior al caso particular de la métrica (6). Para esta métrica la ecuación (35) se reduce a

$$\left[\frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r'^-}^{r=r'^+} = - \frac{1}{\rho(r')} \quad (38)$$

donde r' es la coordenada radial de la carga, mientras que la condición (37) se expresa

$$\left[\frac{\partial \chi_{n,k}(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r_s^-}^{r=r_s^+} = -2\xi \kappa \chi_n(k, r) \Big|_{r=r_s} \quad (39)$$

siendo r_s la coordenada radial de la *shell*. Estas expresiones son válidas para las geometrías Tipo I y II, teniendo en cuenta los valores de ρ y de κ dados en (7), (9) y (12). La carga puede encontrarse en cualquiera de las posiciones indicadas en las figuras 10 y 11.

3.3.3. Otras condiciones de contorno sobre la función radial

Además de las condiciones (38) y (39) solicitamos también la ***continuidad del campo escalar sobre la thin shell***:

$$\chi_n(k, r_s) = \begin{cases} \chi_n^{(i)}(k, r_i) = \chi_n^{(e)}(k, r_e) & \text{para las geometrías Tipo I} \\ \chi_n^{(-)}(k, r_-) = \chi_n^{(+)}(k, r_+) & \text{para las geometrías Tipo II} \end{cases} \quad (40)$$

donde $\chi_n^{(i)}(k, r)$ y $\chi_n^{(e)}(k, r)$ son, respectivamente, las soluciones radiales para las sub-variedades \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 en las geometrías Tipo I, y $\chi_n^{(+)}(k, r)$ y $\chi_n^{(-)}(k, r)$ son las correspondientes soluciones para las sub-variedades \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- en las geometrías Tipo II (ver figuras 7 y 9).

En cuanto a la ***continuidad del campo escalar en la posición de la carga***, se presentan cuatro posibilidades que serán analizadas más adelante:

1. - Geometrías Tipo I con la carga en la región interior \mathcal{M}_1
2. - Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior \mathcal{M}_2
3. - Geometrías Tipo II con la carga en la región superior \mathcal{M}_+
4. - Geometrías Tipo II con la carga en la región inferior \mathcal{M}_-

En el caso de agujeros de gusano simétricos respecto de la *thin shell* las dos últimas posibilidades se reducen a una sola.

Solicitamos también la ***no divergencia del campo*** en $\pm\infty$ y, en el caso de las geometrías Tipo I, también en $r = 0$.¹⁵ Estas condiciones se reducen a condiciones de no divergencia sobre la función radial $\chi_n(k, r)$. Para analizar este punto observamos que la ecuación (29) en una variedad cónica sin *shell* se reduce a la ecuación inhomogénea de Bessel de orden n :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{v^2}{r^2} \right) \right] \chi^\omega = -\frac{\delta(r - r')}{\omega r} \quad (41)$$

donde $v = n/\omega$ para cada n y k . Estudiamos entonces el comportamiento de las funciones modificadas de Bessel para grandes y pequeños argumentos [1].

Para grandes argumentos estas funciones toman las formas límite

$$I_\nu(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right] \text{ para } x \gg 1$$

¹⁵Véase nota 10. En el caso de *wormholes* el origen de coordenadas $r = 0$ coincide con la ubicación de la cáscara; por ese motivo no se solicita la no divergencia en ese punto para estas geometrías.

$$K_\nu(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right] \text{ para } x \gg 1$$

Se observa que la función $K_\nu(x)$ es finita si $x \rightarrow \infty$ mientras que la función $I_\nu(x)$ es divergente y debe ser descartada si se solicita la no divergencia en el infinito.

Para pequeños argumentos las funciones modificadas de Bessel tienen la forma

$$I_\nu(x) \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu ; \quad x \ll 1$$

$$K_\nu(x) \longrightarrow - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5772\dots \right]; \quad x \ll 1 ; \quad \nu = 0$$

$$K_\nu(x) \longrightarrow \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu ; \quad x \ll 1 ; \quad \nu \neq 0$$

donde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = k^z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-kt} dt$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_C (-t)^{-z} e^{-t} dt$$

Para $x \rightarrow 0$ la función $I_\nu(x)$ no diverge, pero la función $K_\nu(x)$ diverge para cualquier valor de ν . Por lo tanto si se solicita la no divergencia de la función radial en el origen debe descartarse la función K_ν .

En conclusión, al imponer las condiciones de no divergencia la función radial χ^ω adoptará diferentes formas en distintas regiones del espacio tiempo. En general, podemos decir que la solución radial será una combinación de las funciones modificadas de Bessel de orden $\nu = n/\omega$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$K_\nu(kr_>) \quad \text{y} \quad I_\nu(kr_<)$$

las cuales son dos soluciones independientes de la versión homogénea de (41), y donde $r_< = \min\{r; r'\}$ y $r_> = \max\{r; r'\}$.

3.3.4. Aplicación de las condiciones de contorno y cálculo de los coeficientes

En esta sección aplicaremos las condiciones desarrolladas en las secciones anteriores, con la finalidad de hallar los coeficientes que multiplican a las funciones $K_\nu(kr)$ y $I_\nu(kr)$ en la solución radial. Analizamos caso por caso.

- Geometrías Tipo I:

Comenzamos por definir una coordenada radial r_1 para la sub-variedad interior \mathcal{M}_1 :

$$r_1 = r; \quad 0 < r < r_i$$

y una coordenada radial r_2 para la sub-variedad exterior \mathcal{M}_2 :¹⁶

$$r_2 = r - r_i + r_e; \quad r_i < r < \infty$$

de tal manera que la solución radial se expresará como

$$\chi_n(k, r) = \begin{cases} \chi^i(r_1) & \text{para } \mathcal{M}_1 \\ \chi^e(r_2) & \text{para } \mathcal{M}_2 \end{cases} \quad (42)$$

La ecuación (41) correspondiente a cada sub-variedad es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} - \left(k^2 + \frac{\lambda^2}{r_1^2} \right) \right] \chi^i = \begin{cases} -\frac{\delta(r_1 - r'_1)}{\omega_i r_1} & \text{si } x' \text{ se encuentra en } \mathcal{M}_1 \\ 0 & \text{si } x' \text{ se encuentra en } \mathcal{M}_2 \end{cases} \quad (43)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{r_2^2} \right) \right] \chi^e = \begin{cases} 0 & \text{si } x' \text{ se encuentra en } \mathcal{M}_1 \\ -\frac{\delta(r_2 - r'_2)}{\omega_e r_e} & \text{si } x' \text{ se encuentra en } \mathcal{M}_2 \end{cases} \quad (44)$$

donde

$$\lambda = \frac{n}{\omega_i}; \quad \nu = \frac{n}{\omega_e} \quad (45)$$

3.3.5. Geometrías Tipo I con la carga en la región interior.

Dividimos el espacio tiempo en tres regiones como indica la figura 12, y en cada caso solicitamos que la solución sea finita en $r \rightarrow \infty$ y en $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} \chi^i \neq \infty; \quad \lim_{r_2 \rightarrow +\infty} \chi^e = 0; \quad (46)$$

- En la región exterior, entre la *thin shell* y el infinito, descartamos la función $I_\nu(x)$ por ser divergente en el infinito, de modo que

$$\chi^e \sim K_\nu(k r_2); \quad \nu = \frac{n}{\omega_e}$$

- En la región interior intermedia, entre la *thin shell* y la carga, ninguna de las dos funciones de Bessel diverge, por lo tanto

$$\chi^{\omega_i} \sim K_\lambda(k r_{1>}) I_\lambda(k r_{1<}); \quad \lambda = \frac{n}{\omega_i} \quad (47)$$

$$r_{1<} = \text{mín}\{r_1; r'_1\}; \quad r_{1>} = \text{máx}\{r_1; r'_1\}$$

- En la región interior, entre el origen y la carga, descartamos la función $K_\nu(x)$ por ser divergente en el origen; en consecuencia

¹⁶ Esta expresión se obtiene solicitando que las coordenadas $r_2(r)$ y r satisfagan una relación lineal: $r_2(r) = r + b$. Además se debe cumplir que cuando $r = r_1 = r_i$ debe ser $r_2 = r_e$. Por lo tanto $b = r_e - r_i$ y $r_2(r) = r + r_e - r_i$.

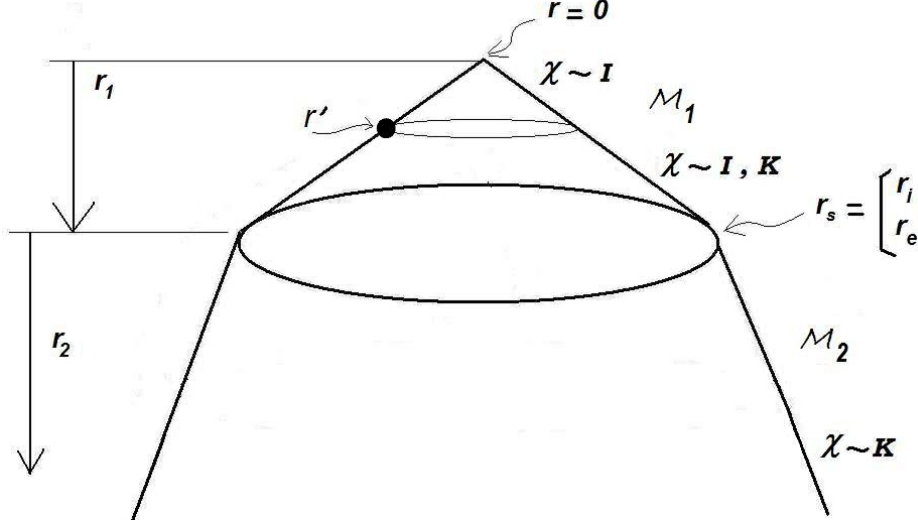


Figura 12: Geometrías Tipo I con la carga en la región interior; comportamiento de la función radial en cada región.

$$\chi^i \sim I_\lambda(k r_1); \quad \lambda = \frac{n}{\omega_i}$$

Explícitamente, la función radial en las tres regiones es

$$\chi_n^i(k, r_1) = \begin{cases} \frac{B_n(k)}{\omega_i} I_\lambda(k r_1) & \text{si } 0 \leq r_1 < r'_1 \\ \frac{A_n(k)}{\omega_i} I_\lambda(k r_1) + \frac{D_n(k)}{\omega_i} K_\lambda(k r_1) & \text{si } r'_1 < r_1 < r_i \end{cases} \quad (48)$$

$$\chi_n^e(k, r_2) = \frac{1}{\omega_i} C_n(k) K_\nu(k r_2); \quad r_e < r_2 \quad (49)$$

Los cuatro coeficientes $A_n(k)$, $B_n(k)$, $C_n(k)$ y $D_n(k)$ se determinan imponiendo cuatro condiciones: la condición (40) de continuidad de la función radial en la *shell*, la condición de continuidad de la función radial en la posición de la carga, la condición (39) de discontinuidad de su derivada normal en la *shell* y la condición (38) de discontinuidad de su derivada normal en la posición de la carga.

La continuidad de la función radial en la *thin shell*

$$\chi_n^i(k, r_i) = \chi_n^e(k, r_e)$$

implica

$$A_n(k) I_\lambda(k r_i) + D_n(k) K_\lambda(k r_i) = C_n(k) K_\nu(k r_e) \quad (50)$$

La continuidad de la función radial en la posición de la carga

$$\chi_n^i(k, r'_1^-) = \chi_n^i(k, r'_1^+)$$

conduce a

$$B_n(k) I_\lambda(k r'_1) = A_n(k) I_\lambda(k r'_1) + D_n(k) K_\lambda(k r'_1) \quad (51)$$

La discontinuidad en la derivada normal de la función radial en la *shell*

$$\frac{\partial \chi_n^e(k, r_2)}{\partial r_2} \Big|_{r_2=r_e} - \frac{\partial \chi_n^i(k, r_1)}{\partial r_1} \Big|_{r_1=r_i} = -2 \xi \kappa \chi_n(k, r_s)$$

se expresa como

$$\frac{\partial [C_n(k) K_\nu(k r_2)]}{\partial r_2} \Big|_{r_2=r_e} - \frac{\partial [A_n(k) I_\lambda(k r_1) + D_n(k) K_\lambda(k r_1)]}{\partial r_1} \Big|_{r_1=r_i} = -2 \xi \kappa \chi_n(k, r_s) \quad (52)$$

donde $\chi_n(k, r_s) = \chi_n^i(k, r_i) = \chi_n^e(k, r_e)$ por continuidad de la función en la *thin shell*. Finalmente, la discontinuidad de la derivada normal de la función radial en la posición de la carga

$$\frac{\partial \chi_n^i(k, r_1)}{\partial r_1} \Big|_{r_1^+} - \frac{\partial \chi_n^i(k, r_1)}{\partial r_1} \Big|_{r_1^-} = -\frac{1}{\omega_i r'_1}$$

se escribe como

$$\frac{\partial [A_n(k) I_\lambda(k r_1) + D_n(k) K_\lambda(k r_1)]}{\partial r_1} \Big|_{r_1=r'_1} - \frac{\partial [B_n(k) I_\lambda(k r_1)]}{\partial r_1} \Big|_{r_1=r'_1} = -\frac{1}{\omega_i r'_1} \quad (53)$$

De las expresiones (50), (51), (52) y (53) obtenemos los siguientes valores para los cuatro coeficientes:

$$A_n(k) = -I_\lambda(k r'_1) \times \frac{\{K_\lambda(k r_i) K'_\nu(k r_e) - K_\nu(k r_e) K'_\lambda(k r_i) + 2 \xi \kappa K_\lambda(k r_i) K_\nu(k r_e)\}}{\{I_\lambda(k r_i) K'_\nu(k r_e) - K_\nu(k r_e) I'_\lambda(k r_i) + 2 \xi \kappa I_\lambda(k r_i) K_\nu(k r_e)\}} \quad (54)$$

$$B_n(k) = K_\lambda(k r'_1) - I_\lambda(k r'_1)$$

$$\times \frac{\{K_\lambda(k r_i) K'_\nu(k r_e) - K_\nu(k r_e) K'_\lambda(k r_i) + 2 \xi \kappa K_\lambda(k r_i) K_\nu(k r_e)\}}{\{I_\lambda(k r_i) K'_\nu(k r_e) - K_\nu(k r_e) I'_\lambda(k r_i) + 2 \xi \kappa I_\lambda(k r_i) K_\nu(k r_e)\}} \quad (55)$$

$$C_n(k) = \frac{I_\lambda(k r'_1)}{K_\nu(k r_e)}$$

$$\times \left\{ -I_\lambda(k r_i) \frac{[K_\lambda(k r_i) K'_\nu(k r_e) - K_\nu(k r_e) K'_\lambda(k r_i) + 2 \xi \kappa K_\lambda(k r_i) K_\nu(k r_e)]}{[I_\lambda(k r_i) K'_\nu(k r_e) - K_\nu(k r_e) I'_\lambda(k r_i) + 2 \xi \kappa I_\lambda(k r_i) K_\nu(k r_e)]} + K_\lambda(k r_i) \right\} \quad (56)$$

$$D_n(k) = I_\lambda(k r'_1) \quad (57)$$

En las expresiones anteriores r'_1 hace referencia a la posición de la carga, mientras que I' o K' indica la derivada de estas funciones respecto de la coordenada radial.

3.3.6. Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior.

Dividimos el espacio tiempo en tres regiones como indica la figura 13. Como antes, solicitamos que la solución sea finita en $r \rightarrow 0$ y en $r \rightarrow \infty$ (ec. (46)). La función radial adoptara la siguiente forma en las tres regiones:

- entre la *thin shell* y el origen

$$\chi^i \sim I_\lambda(k r_1); \quad \lambda = \frac{n}{\omega_i}$$

- entre la *thin-shell* y la carga

$$\chi^{\omega_e} \sim K_\nu(k r_{2>}) I_\nu(k r_{2<}); \quad \nu = \frac{n}{\omega_e} \quad (58)$$

donde

$$r_{2<} = \min\{r_2, r'_2\}; \quad r_{2>} = \max\{r_2, r'_2\}$$

- entre entre la carga y el infinito

$$\chi^e \sim K_\nu(k r_2); \quad \nu = \frac{n}{\omega_e}$$

Explícitamente:

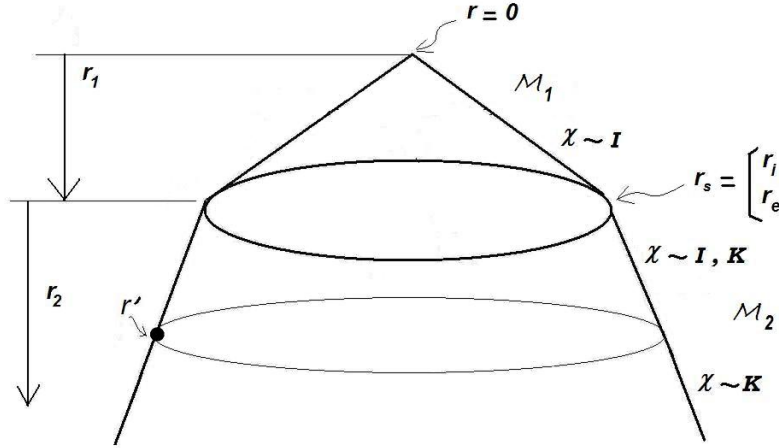


Figura 13: Geometría Tipo I con la carga en la región exterior; comportamiento de la función radial en cada región.

$$\chi_n^e(k, r_2) = \begin{cases} \frac{A_n^*(k)}{\omega_e} I_\nu(k r_2) + \frac{B_n^*(k)}{\omega_e} K_\nu(k r_2) & \text{si } r_e < r_2 < r'_2 \\ \frac{C_n^*(k)}{\omega_e} K_\nu(k r_2) & \text{si } r_2 > r'_2 \end{cases} \quad (59)$$

$$\chi_n^i(k, r_1) = \frac{D_n^*(k)}{\omega_e} I_\lambda(k r_1); \quad 0 < r_1 < r_i \quad (60)$$

Las condiciones de continuidad de la función radial y de discontinuidad de su derivada normal

$$\chi_n^i(k, r_i) = \chi_n^e(k, r_e); \quad \chi_n^e(k, r_2'^-) = \chi_n^e(k, r_2'^+)$$

$$\left. \frac{\partial \chi_n^e(k, r_2)}{\partial r_2} \right|_{r_2=r_e} - \left. \frac{\partial \chi_n^i(k, r_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=r_i} = -2 \xi \kappa \chi_n(k, r_s)$$

$$\left. \frac{\partial \chi_n^e(k, r_2)}{\partial r_2} \right|_{r_2'^+} - \left. \frac{\partial \chi_n^e(k, r_2)}{\partial r_2} \right|_{r_2'^-} = -\frac{1}{\omega_e r_2'}$$

en este caso se escriben respectivamente como

$$D_n^*(k) I_\lambda(k r_i) = A_n^*(k) I_\nu(k r_e) + B_n^*(k) K_\nu(k r_e) \quad (61)$$

$$C_n^*(k) K_\nu(k r_2') = A_n^*(k) I_\nu(k r_2') + B_n^*(k) K_\nu(k r_2') \quad (62)$$

$$\left. \frac{\partial [A_n^*(k) I_\nu(k r_2) + B_n^*(k) K_\nu(k r_2)]}{\partial r_2} \right|_{r_2=r_e} - \left. \frac{\partial [D_n^*(k) I_\lambda(k r_1)]}{\partial r_1} \right|_{r_1=r_i} = -2 \xi \kappa \chi_n(k, r_s) \quad (63)$$

donde $\chi_n(k, r_s) = \chi_n^i(k, r_i) = \chi_n^e(k, r_e)$ por continuidad de la función en la *thin shell*, y

$$\left. \frac{\partial [C_n^*(k) K_\nu(k r_2)]}{\partial r_2} \right|_{r_2=r_2'} - \left. \frac{\partial [A_n^*(k) I_\nu(k r_2) + B_n^*(k) K_\nu(k r_2)]}{\partial r_2} \right|_{r_2=r_2'} = -\frac{1}{\omega_e r_2'} \quad (64)$$

Estas relaciones conducen a las siguientes expresiones para los coeficientes:

$$A_n^*(k) = K_\nu(k r_2') \quad (65)$$

$$B_n^* = -K_\nu(k r_2') \times \left\{ \frac{I_\lambda(k r_i) I_\nu'(k r_e) - I_\nu(k r_e) I_\lambda'(k r_i) + 2\xi \kappa I_\nu(k r_e) I_\lambda(k r_i)}{I_\lambda(k r_i) K_\nu'(k r_e) - K_\nu(k r_e) I_\lambda'(k r_i) + 2\xi \kappa K_\nu(k r_e) I_\lambda(k r_i)} \right\} \quad (66)$$

$$C_n^* = I_\nu(k r_2') - K_\nu(k r_2') \times \left\{ \frac{I_\lambda(k r_i) [I_\nu'(k r_e) + 2\xi \kappa I_\nu(k r_e)] - I_\nu(k r_e) I_\lambda'(k r_i)}{I_\lambda(k r_i) [K_\nu'(k r_e) + 2\xi \kappa K_\nu(k r_e)] - K_\nu(k r_e) I_\lambda'(k r_i)} \right\} \quad (67)$$

$$D_n^*(k) = -K_\nu(k r_2') \times \left\{ \frac{I_\nu'(k r_e) K_\nu(k r_e) - I_\nu(k r_e) K_\nu'(k r_e)}{I_\lambda(k r_i) K_\nu'(k r_e) + 2\xi \kappa I_\lambda(k r_i) K_\nu(k r_e) - K_\nu(k r_e) I_\lambda'(k r_i)} \right\} \quad (68)$$

$$\Rightarrow D_n^*(k) = \frac{I_\nu(k r_e) K_\nu(k r_2') + B_n^*(k) K_\nu(k r_e)}{I_\lambda(k r_i)} \quad (69)$$

Como ya hemos señalado, r_2' hace referencia a la posición de la carga mientras que I' o K' indica la derivada de estas funciones respecto de la coordenada radial.

3.3.7. Geometrías Tipo II: agujeros de gusano del tipo *thin-shell*.

Estas geometrías corresponden a agujeros de gusano con dos regiones asintóticas. Para encontrar la solución definimos las coordenadas radiales ¹⁷

$$\begin{aligned} r_1(r) &= r_- - r; \quad r < 0; \quad \text{para la región } \mathcal{M}_- \text{ con parámetro } \omega_- \\ r_2(r) &= r + r_+; \quad r > 0; \quad \text{para la región } \mathcal{M}_+ \text{ con parámetro } \omega_+ \end{aligned}$$

En función de estas coordenadas la solución radial se expresa

$$\chi_n(k, r) = \begin{cases} \chi^-(r_1) & \text{para } \mathcal{M}_- \\ \chi^+(r_2) & \text{para } \mathcal{M}_+ \end{cases} \quad (70)$$

Consideramos el caso de una carga ubicada en la región \mathcal{M}_+ tal que $r'_2 > r_+$. La correspondiente ecuación (41) es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} - \left(k^2 + \frac{\lambda^2}{r_1^2} \right) \right] \chi^- = 0 \quad (71)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{r_2^2} \right) \right] \chi^+ = -\frac{\delta(r_2 - r'_2)}{\omega_+ r_+} \quad (72)$$

donde

$$\lambda = \frac{n}{\omega_-}; \quad \nu = \frac{n}{\omega_+}; \quad (73)$$

Dividimos el espacio tiempo en tres regiones como indica la figura 14.

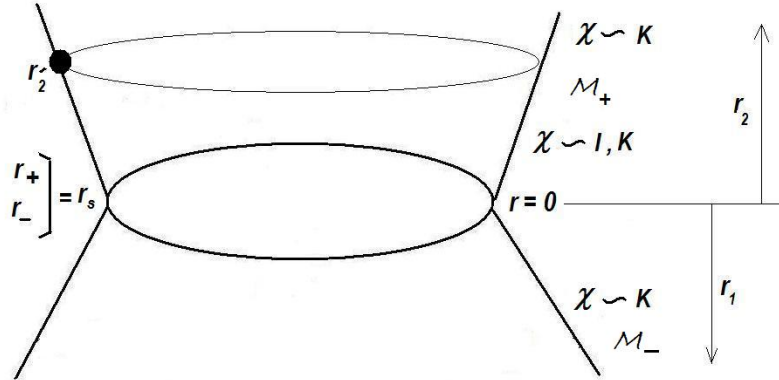


Figura 14: Geometrías Tipo II con la carga en la región \mathcal{M}_+ ; comportamiento de la función radial en cada región.

- En la región \mathcal{M}_- descartamos la función $I_\lambda(x)$ por ser divergente en el infinito, de modo que

¹⁷ Las coordenadas r_1 y r_2 se definen tal como se explicó en la nota 16 pero teniendo en cuenta que en este caso el origen de coordenadas se ubica en $r = 0$. Solicitamos entonces que $r_2(r) = r + b$; además cuando $r = 0$ debe ser $r_2 = r_+$ de modo que $b = r_+$ y $r_2 = r + r_+$. Del mismo modo pedimos que la coordenada negativa r_1 cumpla con $-r_1(r) = r + a$; cuando $r = 0$ debe ser $r_1 = r_-$ de modo que $a = -r_-$ y $-r_1(r) = r - r_- \Rightarrow r_1 = r_- - r$.

$$\chi^- \sim K_\lambda(k r_1); \quad \lambda = \frac{n}{\omega_-}$$

- En la región \mathcal{M}_+ , entre la *thin shell* y la carga, ninguna de las dos funciones de Bessel diverge, por lo tanto

$$\chi^{\omega+} \sim K_\nu(k r_{2>}) I_\nu(k r_{2<}) \quad (74)$$

$$r_{2<} = \min\{r_2, r'_2\}; \quad r_{2>} = \max\{r_2, r'_2\}; \quad \nu = \frac{n}{\omega_+}$$

- En la región \mathcal{M}_+ , entre la carga y el infinito, descartamos la función $I_\nu(x)$ por ser divergente en el infinito; en consecuencia

$$\chi^+ \sim K_\nu(k r_2); \quad \nu = \frac{n}{\omega_+}$$

Explícitamente

$$\chi_n^+(k, r_2) = \begin{cases} \frac{H_n(k)}{\omega_+} K_\nu(k r_2) & \text{si } r_2 > r'_2 \\ \frac{P_n(k)}{\omega_+} I_\nu(k r_2) + \frac{W_n(k)}{\omega_+} K_\nu(k r_2) & \text{si } r_+ < r_2 < r'_2 \end{cases} \quad (75)$$

$$\chi_n^-(k, r_1) = \frac{E_n(k)}{\omega_+} K_\lambda(k r_1); \quad r_- < r_1 \quad (76)$$

Seguimos el procedimiento habitual para despejar los cuatro coeficientes:

- Continuidad del campo en la *thin shell*:

$$\begin{aligned} \chi_n^+(k, r_2) \Big|_{r_2=r_+} &= \chi_n^-(k, r_1) \Big|_{r_1=r_-} \\ \Rightarrow P_n(k) I_\nu(k r_+) + W_n(k) K_\nu(k r_+) &= E_n(k) K_\lambda(k r_-) \end{aligned} \quad (77)$$

- Continuidad del campo en la posición de la carga:

$$\begin{aligned} \chi_n^+(k r_2) \Big|_{r_2'^+} &= \chi_n^+(k r_2) \Big|_{r_2'^-} \\ \Rightarrow H_n(k) K_\nu(k r_2') &= P_n(k) I_\nu(k r_2') + W_n(k) K_\nu(k r_2') \end{aligned} \quad (78)$$

- Discontinuidad en la derivada normal de la función radial en la *thin shell*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_n^+(k r_2)}{\partial r_2} \Big|_{r_2=r_+} - \left[-\frac{\partial \chi_n^-(k r_1)}{\partial r_1} \right] \Big|_{r_1=r_-} &= -2 \xi \kappa \chi_n(k r_s) \\ \Rightarrow \frac{\partial [P_n(k) I_\nu(k r_2) + W_n(k) K_\nu(k r_2)]}{\partial r_2} \Big|_{r_2=r_+} &+ \frac{\partial [E_n(k) K_\lambda(k r_1)]}{\partial r_1} \Big|_{r_1=r_-} = 2 \xi \kappa \chi_{n,k}(k, r_s) \end{aligned} \quad (79)$$

siendo $\chi_n(k, r_s) = \chi_n^+(k, r_2) \Big|_{r_2=r_+} = \chi_n^-(k, r_1) \Big|_{r_1=r_-}$ por continuidad del campo en la *thin shell*.

- Discontinuidad en la derivada normal de la función radial en la posición de la carga:

$$\frac{\partial \chi_n^+(k, r_2)}{\partial r_2} \Big|_{r_2'^+} - \frac{\partial \chi_n^+(k, r_2)}{\partial r_2} \Big|_{r_2'^-} = -\frac{1}{\omega_+ r_2'}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial [H_n(k) K_\nu(kr_2)]}{\partial r_2} \Big|_{r_2=r_2'} - \frac{\partial [P_n(k) I_\nu(kr_2) + W_n(k) K_\nu(kr_2)]}{\partial r_2} \Big|_{r_2=r_2'} = -\frac{1}{\omega_+ r_2'} \quad (80)$$

Se obtienen los siguientes valores para los coeficientes:

$$P_n(k) = K_\nu(k r_2') \quad (81)$$

$$H_n(k) = I_\nu(kr_2') - K_\nu(kr_2')$$

$$\times \left\{ \frac{I_\nu(kr_+) K'_\lambda(kr_-) + I'_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-) + 2\xi\kappa I_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-)}{K'_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-) + K_\nu(kr_+) K'_\lambda(kr_-) + 2\xi\kappa K_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-)} \right\} \quad (82)$$

$$W_n(k) = -K_\nu(kr_2') \times \left\{ \frac{I_\nu(kr_+) K'_\lambda(kr_-) + I'_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-) + 2\xi\kappa I_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-)}{K'_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-) + K_\nu(kr_+) K'_\lambda(kr_-) + 2\xi\kappa K_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-)} \right\} \quad (83)$$

$$E_n(k) = K_\nu(kr_2')$$

$$\times \left\{ \frac{I_\nu(kr_+)}{K_\lambda(kr_-)} - \frac{K_\nu(kr_+)}{K_\lambda(kr_-)} \frac{\{I'_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-) + I_\nu(kr_+) [K'_\lambda(kr_-) + 2\xi\kappa K_\lambda(kr_-)]\}}{\{K'_\nu(kr_+) K_\lambda(kr_-) + K_\nu(kr_+) [K'_\lambda(kr_-) + 2\xi\kappa K_\lambda(kr_-)]\}} \right\}$$

$$\Rightarrow E_n(k) = \frac{I_\nu(kr_+) K_\nu(kr_2') + W_n(k) K_\nu(kr_+)}{K_\lambda(kr_-)} \quad (84)$$

Como ya hemos señalado, r_2' hace referencia a la posición de la carga mientras que I' o K' indica la derivada de estas funciones respecto de la coordenada radial. Debido a la simetría del problema, los resultados anteriores son válidos también para el caso de una carga colocada en la región \mathcal{M}_- haciendo los siguientes cambios:

$$\nu \rightarrow \lambda; \quad \lambda \rightarrow \nu; \quad r_2' \rightarrow r_1'; \quad r_+ \rightarrow r_-; \quad r_- \rightarrow r_+;$$

3.4. Configuraciones de resonancia

Los denominadores de los coeficientes hallados en la sección anterior podrían anularse para ciertos valores de la constante de acoplamiento ξ . Si eso ocurriese, el campo (27) se haría divergente para esos valores particulares de ξ a los que llamaremos valores críticos ξ_c .

Para que los denominadores no se anulen el producto $\kappa\xi$ debe ser negativo. En el caso de los coeficientes (54) a (69) correspondientes a las Geometrías Tipo I, esto se cumple siempre que κ sea negativa y ξ positiva o, inversamente, si κ es positiva y ξ es negativa. Para los coeficientes (81) a (84) correspondientes a las Geometrías Tipo II el valor de κ es siempre positivo, por lo que un valor $\xi < 0$ garantiza que no se anule el denominador. Para cualquiera de las dos geometrías, si el producto $\kappa\xi$ es positivo, existe la posibilidad de encontrar valores de $k = k_p$ para los cuales el campo diverge.

Si el integrando de alguno de los modos presenta un polo en $k_p > 0$ esta divergencia puede ser evitada cortando la integral en $(k_p \pm \epsilon)$ con $\epsilon \rightarrow 0$ ya que se cancelan las contribuciones a ambos lados de este límite. Sin embargo, si el denominador en el coeficiente se hace cero para $k = 0$ entonces, inevitablemente, tenemos un modo divergente. Para encontrar estas últimas divergencias podemos examinar directamente el integrando para cada modo en el límite $k \rightarrow 0^+$. Por ejemplo, para las Geometrías Tipo I con la partícula en un punto $r_1 = r'_1$ de la región interior (figura 12) tenemos una solución interior y otra exterior dadas por las ecuaciones (48) y (49). De estas expresiones podemos ver que

$$\begin{aligned} \chi_n^i(k, r_1) \Big|_{k \rightarrow 0^+} &\longrightarrow \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{r_{1<}}{r_{1>}} \right)^{n/\omega_i} - \frac{\xi}{(\xi - \xi_c)} \left(\frac{r_1 r'_1}{r_i^2} \right)^{n/\omega_i} \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[1 - \frac{\xi}{(\xi - \xi_c)} \left(\frac{r_{1>}}{r_i} \right)^{2n/\omega_i} \right] \left(\frac{r_{1<}}{r_{1>}} \right)^{n/\omega_i} \end{aligned}$$

para la solución interior y

$$\chi_n^e(k, r_2) \Big|_{k \rightarrow 0^+} \longrightarrow -\frac{1}{2(\xi - \xi_c)(\omega_e - \omega_i)} \left(\frac{r'_1}{r_i} \right)^{n/\omega_i} \left(\frac{r_e}{r_2} \right)^{n/\omega_e}$$

para la solución exterior, donde el valor crítico de la constante de acoplamiento para las Geometrías Tipo I con carga en la región interior viene dado por la expresión

$$\xi_c = \frac{n}{\kappa\omega_i r_i} = \frac{n}{\rho(r_i)\kappa} = \frac{n}{\omega_e - \omega_i}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (85)$$

Del mismo modo, para las Geometrías Tipo I pero con la partícula en un punto $r_2 = r'_2$ de la región exterior (figura 13) tenemos las soluciones (59) y (60). De estas soluciones vemos que en el límite para $k \rightarrow 0^+$ se verifica

$$\begin{aligned} \chi_n^e(k, r_2) \Big|_{k \rightarrow 0^+} &\longrightarrow \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{r_{2<}}{r_{2>}} \right)^{n/\omega_e} - \frac{\xi}{(\xi - \xi_c)} \left(\frac{r_2 r'_2}{r_e^2} \right)^{-n/\omega_e} \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[1 - \frac{\xi}{(\xi - \xi_c)} \left(\frac{r_e}{r_{2<}} \right)^{2n/\omega_e} \right] \left(\frac{r_{2<}}{r_{2>}} \right)^{n/\omega_e} \end{aligned}$$

para la solución exterior y

$$\chi_n^i \Big|_{k \rightarrow 0^+} \longrightarrow -\frac{1}{2(\xi - \xi_c)(\omega_e - \omega_i)} \left(\frac{r_1}{r_i} \right)^{n/\omega_i} \left(\frac{r_e}{r'_2} \right)^{n/\omega_e}$$

para la interior. Estos límites muestran que existe una divergencia insoslayable para los modos $n \geq 1$ si la constante de acoplamiento adopta el valor

$$\xi = \xi_c = \frac{n}{\omega_e - \omega_i}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (86)$$

De (85) y (86) obtenemos el valor de la constante de acoplamiento que corresponde a una configuración de resonancia para el modo n del campo escalar en las Geometrías Tipo I. Para el modo $n = 0$ no existen valores de resonancia para la constante de acoplamiento ξ ya que el denominador de los coeficientes no se anula para $k = 0$.

En términos de la traza de la curvatura extrínseca, para $\kappa < 0$ (cáscara de materia ordinaria) se evitan los modos resonantes si la constante de acoplamiento toma valores $\xi > \xi_c^{(n=1)} = 1/(\kappa\omega_i r_i)$. Por ejemplo, supongamos un interior de Minkowski ($\omega_i = 1$) y un exterior conico ($\omega_e = 0,5$); de (12) y (7) obtenemos

$$\xi_c^{(n=1)} = \frac{1}{\kappa\omega_i r_i} = \frac{\rho(r_i)}{\omega_e - \omega_i} = \frac{1}{\omega_e - \omega_i} = -2 \Rightarrow \xi > -2 \quad (87)$$

Si $\kappa > 0$ (cáscara de materia exótica) los acoplamientos $\xi < \xi_c^{(n=1)} = 1/(\kappa\omega_i r_i)$ aseguran que no se produzca un modo resonante. Por ejemplo, si $\omega_i = 0,5$ y $\omega_e = 1$ se obtiene

$$\xi_c^{(n=1)} = \frac{1}{\kappa\omega_i r_i} = \frac{1}{\omega_e - \omega_i} = 2 \Rightarrow \xi < 2 \quad (88)$$

Para el caso de un *wormhole* del tipo *thin shell* obteníamos las soluciones radiales (75) y (76). Tomando el límite para $k \rightarrow 0^+$ en estas expresiones encontramos

$$\begin{aligned} \chi_n^+(k, r_2) \Big|_{k \rightarrow 0^+} &\longrightarrow \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{r_{2<}}{r_{2>}} \right)^{n/\omega_+} - \frac{\xi}{(\xi - \xi_c)} \left(\frac{r_2 r_2'}{(r_+)^2} \right)^{-n/\omega_+} \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[1 - \frac{\xi}{(\xi - \xi_c)} \left(\frac{r_+}{r_{2<}} \right)^{2n/\omega_+} \right] \left(\frac{r_{2<}}{r_{2>}} \right)^{n/\omega_+} \\ \chi_n^-(k, r_1) \Big|_{k \rightarrow 0^+} &\longrightarrow -\frac{1}{2(\xi - \xi_c)(\omega_+ + \omega_-)} \left(\frac{r_-}{r_1} \right)^{n/\omega_-} \left(\frac{r_+}{r_2'} \right)^{n/\omega_+} \end{aligned}$$

donde

$$\xi_c = \frac{n}{\kappa\omega_+ r_+} = \frac{n}{\rho(0)\kappa} = \frac{n}{\omega_+ + \omega_-}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (89)$$

Entonces hallamos modos resonantes para $n \geq 1$ si la constante de acoplamiento adopta los valores (89). Para evitar las divergencias la constante de acoplamiento debe tomar valores $\xi < \xi_c^{(n=1)} = 1/\kappa\omega_+ r_+$. Por ejemplo, de (12) y (10), si $\omega_+ = \omega_- = 1$

$$\xi_c^{(n=1)} = \frac{1}{\kappa\omega_+ r_+} = \frac{1}{\omega_+ + \omega_-} = 0,5 \Rightarrow \xi < 0,5 \quad (90)$$

3.5. Renormalización

Por simplicidad supondremos que el cuerpo de prueba es una partícula puntual. Esta suposición implica una complicación adicional ya que una carga puntual produce un campo que diverge -es singular- sobre la línea de universo de la partícula. Se hace necesario entonces encontrar una expresión para el campo que sea regular en la posición de la carga pero que no modifique las condiciones físicas sobre la misma.

Existen varios métodos de regularización. El que ha recibido la mejor justificación física y matemática, y el más frecuentemente utilizado, es el presentado por Detweiler y Whiting [22]. Consiste en descomponer el campo real Φ en sus partes regular y singular, y sustraer la parte singular Φ^S en el límite de coincidencia en el que x tiende a x' :

$$\Phi^R = \lim_{x \rightarrow x'} (\Phi - \Phi^S)$$

El campo regular satisface la ecuación de campo homogénea y es continuo y diferenciable en la posición de la partícula. Una geometría que no es globalmente plana actúa sobre la parte regular del campo de la partícula modificándola. Esta parte regular modificada por la geometría es la que da origen a la autofuerza. Dicho de otro modo, la autofuerza es generada exclusivamente por la parte regular del campo, mientras que el único efecto de la parte singular es contribuir a la inercia de la partícula. La autofuerza renormalizada se obtiene a partir del campo regular como [16] [77]

$$f_\alpha = q \lim_{x \rightarrow x'} \nabla_\alpha (\Phi - \Phi^S)$$

Antes de efectuar los cálculos que nos conducen a la expresión del campo renormalizado explicaré brevemente el procedimiento a seguir. En primer lugar observamos que la parte del campo que tiene en cuenta el acoplamiento con el escalar de curvatura, a la que denominaremos Φ_ξ , es regular en la posición de la carga ya que la singularidad de R está concentrada en la cáscara. Por otro lado, dado que el escalar de curvatura (11) es nulo en todas partes salvo sobre la *thin-shell*,¹⁸ la ecuación de campo (18) en la localización de la partícula de prueba se reduce a

$$\square \Phi = -4\pi q \frac{\delta(\vec{x} - (\vec{x})')}{\sqrt{g^{(3)}}} \quad (91)$$

Esta ecuación debe resolverse para la métrica (6). Pero **localmente** esta métrica es idéntica a la métrica de una cuerda cósmica recta infinitamente delgada. Por lo tanto, **localmente** la solución que buscamos es idéntica a la solución de la ec. (91) en la métrica de la cuerda cósmica (dejando por el momento de lado la parte de la solución Φ_ξ que corresponde a la *shell*). Esta solución, en su forma cerrada, ha sido formulada por S. A. Fulling et al. [32] y la llamaremos Φ_ω .

Como el campo escalar Φ_ω es irregular en la posición de la carga, debemos renormalizarlo. Para eso recordamos que en el entorno de la carga siempre es posible escribir el campo como la suma del campo irregular más un segundo término que es la solución

¹⁸Ver nota 10

de la ecuación de campo homogénea. En particular, en el caso que estamos tratando podemos escribir:

$$\Phi_\omega = \Phi_\omega^{IR} + \Phi_\omega^H$$

donde, por ser solución de una ecuación homogénea, Φ_ω^H es regular en la posición de la carga. De modo que para hallar una solución -sin incluir la *thin-shell* por ahora- que sea regular en la posición x' de la carga basta con hacer la siguiente cuenta:

$$\Phi_\omega^H \Big|_{x \rightarrow x'} = \lim_{x \rightarrow x'} [\Phi_\omega - \Phi_\omega^{IR}]$$

donde la operación se realiza en el límite de coincidencia en el que $x \rightarrow x'$ a lo largo de la geodésica más corta que une ambos puntos. Como la métrica (6) es localmente plana, salvo sobre la *thin-shell*, Φ_ω^{IR} en la localización de la carga es el campo singular en el espacio-tiempo de Minkowski, al que llamaremos Φ_{Mink} [3] [61]. Entonces podemos escribir la última expresión como

$$\Phi_\omega^H \Big|_{x \rightarrow x'} = \lim_{x \rightarrow x'} [\Phi_\omega - \Phi_{Mink}]$$

Esta solución fue hallada por Linet [61]:

$$\Phi_\omega^{ren} = \lim_{x \rightarrow x'} [\Phi_\omega - \Phi_{Mink}] = \Phi_\omega^{Linet} \quad (92)$$

La expresión (92) nos da el campo renormalizado en la posición de la carga pero sin tener en cuenta aún los efectos de la *thin-shell*.¹⁹ Finalmente, para construir el campo regular total en la posición de la carga debemos agregar la solución Φ_ξ que tiene en cuenta estos efectos.

Como hemos adelantado, la solución de la ecuación (91) en la variedad cónica de una cuerda recta infinitamente delgada, sin *thin-shell*, fue formulada por Fulling et al. [32] y puede escribirse en forma cerrada como

$$\Phi_\omega = 4\pi q G_\omega^{(m=0)}$$

donde $G_\omega^{(m=0)}$ es la función de Green para un campo escalar sin masa ($m = 0$) en la variedad de una cuerda cósmica infinitamente delgada²⁰

$$G_\omega^{(m=0)} = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{2rr'}} \times \int_u^{+\infty} \frac{\sinh(\zeta/\omega) \omega^{-1} d\zeta}{[\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\theta - \theta')] (\cosh \zeta - \cosh u)^{1/2}} \quad (93)$$

de modo que

$$\Phi_\omega = \frac{q}{\pi \sqrt{2rr'}} \int_u^{+\infty} \frac{\sinh(\zeta/\omega) \omega^{-1} d\zeta}{[\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\theta - \theta')] (\cosh \zeta - \cosh u)^{1/2}} \quad (94)$$

¹⁹Veremos más adelante que podemos obtener la solución de Minkowski Φ_{Mink} haciendo $\omega = 1$ en Φ_ω ya que si hacemos $\omega = 1$ en la métrica de la cuerda cósmica obtenemos la métrica de Minkowski.

²⁰Señalamos la función de Green en el caso del campo escalar sin masa con el superíndice $m = 0$ para diferenciarla de la correspondiente función de Green para el campo escalar masivo, ec. (176), que se verá en la segunda parte de la tesis.

donde

$$\cosh u = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'}; \quad u \geq 0 \quad (95)$$

Para hallar la solución regular en la localización de la carga debemos restarle el campo singular. Para una partícula estática en un espacio-tiempo estático este campo se construye con la función de Green singular de Detweiler-Whiting en tres dimensiones y en un entorno normal convexo de x' [22]: ²¹

$$\Phi^S = 4\pi q G_{DW}(x, x')$$

que puede ser evaluada como [16] [77]

$$G_{DW}(x, x') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\Delta}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{1}{2} \int_{\tau_{ret}}^{\tau_{adv}} V(x, x'(\tau)) d\tau \right\}$$

En la expresión anterior $\sigma(x, x')$ es la función del Universo de Synge, que es igual a la mitad del cuadrado de la distancia geodésica entre x y x' medida, en este caso, sobre una geodésica tipo espacio. $V(x, x')$ es una función de dos puntos y τ es el tiempo propio, siendo $\{\tau_{adv}, \tau_{ret}\}$ los tiempos propios dentro del entorno normal convexo de x que se unen a x mediante rayos de luz. La integral es

$$\int_{\tau_{ret}}^{\tau_{adv}} V(x, x'(\tau)) d\tau = \sqrt{2\sigma} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + \mathcal{O}(\sigma)$$

El término Δ es el determinante de Van-Vleck Morette y puede desarrollarse como

$$\Delta^{1/2} = 1 + \frac{1}{12} R_{\alpha\beta} \sigma^{;\alpha} \sigma^{;\beta} + \mathcal{O}(\sigma^{3/2})$$

En las expresiones anteriores los términos $\mathcal{O}(\sigma)\sqrt{2\sigma} \sim \mathcal{O}(\sigma^{3/2})$ son irrelevantes para la renormalización ya que se anulan en el límite de coincidencia. Finalmente, a orden $\sqrt{\sigma}$ se obtiene la siguiente expresión para la función de Green singular en tres dimensiones

$$G_3^S(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha'} a^{\alpha'} + \mathcal{O}(s^2) \right)$$

siendo a^α la tetra-aceleración y s la distancia geodésica tal que $s^2 = 2\sigma(x, x')$. En función de la métrica

$$G_3^S(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{g_{t't',j'}}{g_{t't'}} + \mathcal{O}(s^2) \right); \quad j = 1, 2, 3$$

donde $g_{t't',j'} = \partial g_{t't'} / \partial x^{j'}$ y j hace referencia a las componentes espaciales. Para la métrica de Minkowski, la cuerda cósmica o el *wormhole* cilíndrico, esta función “local” se reduce a

$$G_3^S(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\sigma(x, x')}}$$

²¹El entorno normal convexo de x' es el conjunto de puntos que se relacionan con x' por medio de una única geodésica [77].

que en coordenadas cilíndricas coincide con la función de Green singular del electromagnetismo:

$$G_3^S(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r - r'|}$$

de modo que el campo singular se expresa

$$\Phi^S = 4\pi q G_3^S(x, x') = \frac{q}{\sqrt{2\sigma}}$$

La forma cerrada de esta función se obtiene inmediatamente teniendo en cuenta que si hacemos $\omega = 1$ en la métrica de la cuerda cósmica obtenemos la métrica de Minkowski. Por lo tanto la forma cerrada del campo singular puede obtenerse haciendo $\omega = 1$ en la expresión (94):

$$\Phi^S \equiv \Phi_{Mink} = \Phi_{\omega=1} = \frac{q}{\pi\sqrt{2rr'}} \int_u^{+\infty} \frac{\sinh(\zeta) d\zeta}{[\cosh(\zeta) - \cos(\theta - \theta')] (\cosh \zeta - \cosh u)^{1/2}} \quad (96)$$

Para restar el campo singular en el límite de coincidencia calculamos el límite para $x \rightarrow x'$ en las expresiones (94), (95) y (96) y obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow x'} \cosh u = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x'} \Phi_\omega = \frac{q}{\pi r' \sqrt{2}} \int_u^{+\infty} \frac{\sinh(\zeta/\omega) d\zeta}{\omega [\cosh(\zeta/\omega) - 1] (\cosh \zeta - 1)^{1/2}} \quad (97)$$

y también

$$\lim_{x \rightarrow x'} \Phi_{Mink} = \frac{q}{\pi r' \sqrt{2}} \int_u^{+\infty} \frac{\sinh(\zeta) d\zeta}{[\cosh(\zeta) - 1] (\cosh \zeta - 1)^{1/2}} \quad (98)$$

Introduciendo (97) y (98) en (92) obtenemos la expresión del campo renormalizado sin *thin-shell* hallada por Linet [61]:

$$\Phi_\omega^{Linnet}(x') = \frac{q}{2\pi r'} \int_u^{+\infty} \left\{ \frac{\sinh(\zeta/\omega)}{\omega [\cosh(\zeta/\omega) - 1]} \frac{\sinh \zeta}{[\cosh \zeta - 1]} \right\} \frac{d\zeta}{(\sinh(\zeta/2))} \quad (99)$$

Llamando

$$L_\omega = \int_0^\infty \left[\frac{\sinh(\zeta/\omega)}{\omega [\cosh(\zeta/\omega) - 1]} - \frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta - 1} \right] \frac{d\zeta}{\sinh(\zeta/2)} \quad (100)$$

podemos escribir el campo renormalizado como:

$$\Phi_\omega^{ren} = \Phi_\omega^{Linnet} = \frac{q}{2\pi} \frac{L_\omega}{r'} \quad (101)$$

Observamos que la autoenergía $U = \frac{q}{2} \Phi_\omega^{ren}$ para una partícula escalar en una variedad cónica coincide con la de la carga eléctrica [92] [94].

A continuación calcularemos el campo de la cáscara Φ_ξ para cada uno de los casos que hemos distinguido arriba. Más adelante lo sumaremos al campo renormalizado de

Linnet para encontrar el campo regular completo en la posición de la carga.

- **Geometrías Tipo I con la carga en la región interior \mathcal{M}_i** (figura 12):

Para la región interior $0 < r_1 < r_i$ donde se encuentra la carga, la expresión (23) se escribe

$$\Phi^i(r_1) = q \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \sum_0^\infty a_n \cos[n(\phi - \phi')] \chi_n^i(k, r_1)$$

donde a_n viene dado por la expresión (26) y donde, de (48), (54), (55) y (57), obtenemos

$$\chi_n^i(k, r_1) = \begin{cases} \frac{A_n(k)}{\omega_i} I_\lambda(k r_1) + \frac{1}{\omega_i} I_\lambda(k r_1) K_\lambda(k r'_1) & \text{si } 0 < r_1 < r'_1 \\ \frac{A_n(k)}{\omega_i} I_\lambda(k r_1) + \frac{1}{\omega_i} I_\lambda(k r'_1) K_\lambda(k r_1) & \text{si } r'_1 < r_1 < r_i \end{cases} \quad (102)$$

En la región donde se encuentra la carga separamos la solución en sus partes correspondientes a la cuerda cósmica y a la cáscara:

$$\chi^i = \chi^{\omega_i} + \chi^\xi$$

Como el acoplamiento con la curvatura en la cáscara está contenida en los coeficientes que hemos calculado en las secciones 3.3.5 a 3.3.7, el término que contiene los efectos de la *thin-shell* es

$$[\chi_n^\xi(k, r_1)]_{(I)} = \frac{A_n(k)}{\omega_i} I_\lambda(k r_1); \quad 0 < r_1 < r_i \quad (103)$$

y la parte del campo que corresponde a la *thin-shell* es entonces

$$\Phi_I^\xi(r_1) = \frac{4q}{\pi\omega_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] A_n(k) I_\lambda(k r_1) \quad (104)$$

que es regular en la posición de la carga $x = x'$. La parte correspondiente a la cuerda cósmica es la que se caracteriza por la relación

$$\chi^{\omega_i} = \frac{1}{\omega_i} I_\lambda(k r_{1<}) K_\lambda(k r_{1>}); \quad \lambda = \frac{n}{\omega_i}$$

siendo $r_<$ ($r_>$) el menor (mayor) entre r_1 y r'_1 .

- **Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior \mathcal{M}_e** (figura 13):

En la región exterior $r_e < r_2 < \infty$ donde se encuentra la carga, la expresión (23) se escribe

$$\Phi^e(r_2) = q \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \sum_0^\infty a_n \cos[n(\phi - \phi')] \chi_n^e(k, r_2)$$

De (59), (65), (66) y (67) obtenemos

$$\chi_n^{(e)}(k, r_2) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_e} [I_\nu(k r_2) K_\nu(k r'_2) + B_n^* K_\nu(k r_2)] & \text{si } r_e < r_2 < r'_2 \\ \frac{1}{\omega_e} [I_\nu(k r'_2) K_\nu(k r_2) + B_n^* K_\nu(k r_2)] & \text{si } r'_2 < r_2 < \infty \end{cases} \quad (105)$$

Por lo tanto la parte que contiene los efectos de la *thin-shell* es

$$[\chi_n^\xi(k, r_2)]_{(I)} = \frac{1}{\omega_e} B_n^* K_\nu(k r_2); r_e < r_2 < \infty \quad (106)$$

de modo que

$$\Phi_I^\xi(r_2) = \frac{4q}{\pi\omega_e} \sum_0^\infty \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] B_n^*(k) K_\nu(k r_2) \quad (107)$$

que es regular en la posición de la carga.

- **Geometrías Tipo II con la carga en la región \mathcal{M}_+** (figura 14):

En la región $r_+ < r_2 < +\infty$ donde se encuentra la carga, de (23) tenemos

$$\Phi^+(r_2) = q \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \sum_0^\infty a_n \cos[n(\phi - \phi')] \chi_n^+(k, r_2)$$

donde de (75), (81), (82) y (83) encontramos

$$\chi_n^+(k, r_2) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_+} [I_\nu(k r_2) K_\nu(k r'_2) + W_n(k) K_\nu(k r_2)] & \text{si } r_+ < r_2 < r'_2 \\ \frac{1}{\omega_+} [I_\nu(k r'_2) K_\nu(k r_2) + W_n(k) K_\nu(k r_2)] & \text{si } r'_2 < r_2 < \infty \end{cases} \quad (108)$$

La parte que contiene los efectos de la *thin-shell* es

$$[\chi_n^\xi(k, r_2)]_{(II)} = \frac{1}{\omega_+} W_n(k) K_\nu(k r_2); 0 < r_2 < \infty \quad (109)$$

y el campo correspondiente queda

$$\Phi_{II}^\xi(r_2) = \frac{4q}{\pi\omega_+} \sum_0^\infty \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] W_n(k) K_\nu(k r_2) \quad (110)$$

3.6. Cálculo de la autofuerza

Una partícula de prueba que se mueve libremente en un espacio-tiempo curvo sigue una trayectoria geodésica. Sin embargo, si la partícula transporta carga (escalar o eléctrica), una geometría que no sea globalmente plana actuará sobre su campo produciendo una deformación de sus líneas de fuerza. Dicho de otro modo, la curvatura modificará las líneas de fuerza del cuerpo cargado de tal manera que éstas ya no se distribuirán simétricamente a su alrededor. Como consecuencia el cuerpo experimentará una fuerza neta que modificará su trayectoria: ya no se moverá como una partícula libre sobre una geodésica del espacio-tiempo de fondo. Este efecto se denomina **autofuerza** ya que las modificaciones en la trayectoria del cuerpo son resultado de la “deformación” experimentada por

el propio campo al situarse en un entorno que no es globalmente plano.^{22 23}

La autoenergía es

$$U_{self} = \frac{q}{2} \Phi^R \Big|_{r=r'}$$

donde

$$\Phi^R = \Phi_\omega^R + \Phi_\xi$$

es el campo regular completo, Φ_ξ es la parte del campo que tiene en cuenta el acoplamiento entre el campo y la curvatura y Φ_ω^R es el campo regularizado de la carga en el espacio tiempo de una cuerda cósmica infinitamente delgada. Como ya hemos adelantado, la autofuerza radial se obtiene al derivar Φ^R en la posición r' de la carga:

$$f = q(\partial_r \Phi^R) \Big|_{r'}$$

De las expresiones (101), (104), (107) y (110) obtenemos las siguientes expresiones para el campo regular completo y para la autofuerza:

- **Geometrías Tipo I con la carga en la región interior \mathcal{M}_i**

$$\Phi_{(I,i)}^R(r, r') = \frac{q}{4\pi} \frac{L_{\omega_i}}{r'} \left(2 - \ln \frac{r}{r'} \right) + \frac{4q}{\pi\omega_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk A_n(k) I_\lambda(k r); \quad r' < r_i \quad (111)$$

$$f_{(I,i)} = -\frac{q^2}{4\pi} \frac{L_{\omega_i}}{r'^2} + \frac{4q^2}{\pi\omega_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk A_n(k) I'_\lambda(k r'); \quad r' < r_i \quad (112)$$

donde $r = r_1(r)$ y donde I' denota la derivada radial de la función I mientras que r' es la posición de la carga de prueba.

- **Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior \mathcal{M}_e**

$$\Phi_{(I,e)}^R(r_2, r'_2) = \frac{q}{4\pi} \frac{L_{\omega_e}}{r'_2} \left(2 - \ln \frac{r_2(r)}{r'_2} \right) + \frac{4q}{\pi\omega_e} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk B_n^*(k) K_\nu(k r_2(r)); \quad r' > r_i \quad (113)$$

²²El efecto es análogo a lo que ocurre cuando una carga eléctrica es colocada en las proximidades de una placa metálica plana infinita y descargada. Las líneas de fuerza de la carga original se modifican por acción de la placa de tal manera que la carga experimenta una fuerza electrostática similar a la que causaría una carga gemela ubicada simétricamente respecto de la placa. Este fenómeno es la base del método de las imágenes utilizado para calcular la carga inducida sobre una placa en electromagnetismo y la fuerza sobre una carga colocada frente a la misma. Esta analogía puede ir aún más lejos, lo que nos ayudará a comprender el procedimiento aplicado en la sección 3.5. Si se aplica el método de las imágenes para determinar la fuerza sobre una carga colocada frente a una placa descargada, plana e infinita, dicha fuerza se obtiene multiplicando únicamente el campo de la carga imagen por la carga real. En otras palabras, del campo total en la posición de la carga sólo se considera lo que resta al excluir el campo de la propia carga, el cual es divergente en ese punto. Este procedimiento es similar al utilizado en este trabajo donde hemos excluido el campo singular en la posición de la carga.

²³En nuestro caso, por tratarse de una métrica cónica que es localmente plana, una carga de prueba inicialmente en reposo no experimentará aceleración debida al campo gravitatorio, de modo que este posible efecto no interfiere en los cálculos.

$$f_{(I,e)} = -\frac{q^2}{4\pi} \frac{L_{\omega_e}}{[r_2(r')]^2} + \frac{4q^2}{\pi\omega_e} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk B_n^*(k) K'_\nu(k r_2(r')); \quad r' > r_i \quad (114)$$

donde $r_2(r) = r - r_i + r_e$ y donde K' denota la derivada radial de la función K .²⁴

- Geometrías Tipo II con la carga en la región \mathcal{M}_+

$$\Phi_{(II)}^R(r, r') = \frac{q}{4\pi} \frac{L_{\omega_+}}{r_2'} \left(2 - \ln \frac{r_2(r)}{r_2'} \right) + \frac{4q}{\pi\omega_+} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk W_n(k) K_\nu(k r_2(r)) \quad (115)$$

$$f_{(II)} = -\frac{q^2}{4\pi} \frac{L_{\omega_+}}{[r' + r_+]^2} + \frac{4q^2}{\pi\omega_+} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk W_n(k) K'_\nu(k (r' + r_+)) \quad (116)$$

donde $r_2(r) = r + r_+$ y $r_2' = r' + r_+$.²⁵

3.7. Análisis de los resultados.

Se utilizó el programa MATHEMATICA para graficar la autofuerza sobre la partícula de prueba. Se analizaron tanto casos en los que la constante de acoplamiento ξ es positiva como negativa, ya que ambas situaciones presentan interés en el estudio de modelos cosmológicos inflacionarios y también en modelos que intentan explicar la expansión acelerada del Universo en teorías de gravedad más allá de la Relatividad General [10] [30] [45]. Los valores elegidos para la constante de acoplamiento se ajustan a las conclusiones de la sección 3.4. Algunos de los resultados expuestos en esta sección fueron publicados en [112]. En la sección 3.8 compararemos los ejemplos analizados aquí con el caso electrostático y con los resultados obtenidos en otros trabajos.

GEOMETRÍAS TIPO I.

La autofuerza sobre la partícula de prueba se graficó como $\frac{\pi r_i^2}{4q^2} f$ versus la posición adimensional de la carga r/r_i , para diferentes valores de la constante de acoplamiento ξ . En todos los casos el valor $r/r_i = 1$ corresponde a la ubicación de la *thin-shell* y el centro de la sub-variedad interior se encuentra en $r = 0$. Se graficó la autofuerza para *thin-shells* de materia ordinaria ($\kappa < 0$) y de materia exótica ($\kappa > 0$). El lado izquierdo del gráfico ($r/r_i < 1$) muestra la autofuerza sobre una carga de prueba ubicada en la región interior \mathcal{M}_i , mientras que el lado derecho ($r/r_i > 1$) corresponde a una partícula ubicada en la región exterior \mathcal{M}_e . Sobre el lado derecho (izquierdo) del gráfico los valores positivos (negativos) de las curvas próximas a la *shell* representan autofuerzas que tienden a alejar a la partícula de la cáscara mientras que valores negativos (positivos)

²⁴Para la definición de las coordenadas ver nota 16.

²⁵Para la definición de las coordenadas ver nota 17. En este caso trabajamos con agujeros de gusano simétricos, de modo que sólo tenemos en cuenta una de las dos regiones exteriores asintóticamente planas.

corresponden a autofuerzas que tienden a acercarla.²⁶ Sobre el lado izquierdo las curvas negativas próximas a $r = 0$ indican una autofuerza que acerca la partícula hacia el origen.

Acoplamiento mínimo $\xi = 0$.

Para comprobar que el programa arroja el resultado correcto en ausencia de agentes que generen autofuerza se graficó el caso correspondiente al espacio-tiempo plano ($\omega_i = \omega_e = 1$) sin acoplamiento ($\xi = 0$). Como era de esperar, el gráfico correspondiente no indicó autofuerza alguna en ninguna de las dos sub-variedades ya que estamos frente a una geometría que es **globalmente** plana (figura 15). La comparación de este ejemplo con cualquiera de los analizados más adelante, en los cuales las geometrías son **localmente** planas pero no lo son globalmente ya que una o ambas sub-variedades presentan defecto de ángulo, ilustra la capacidad de la autofuerza de distinguir entre geometrías que son localmente idénticas pero globalmente diferentes.

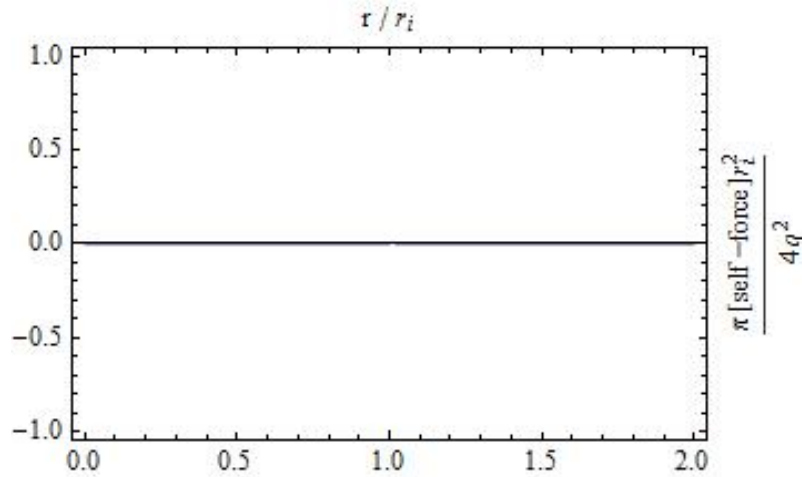


Figura 15: Geometrías tipo I, interior y exterior de Minkowski ($\omega_i = \omega_e = 1$) y acoplamiento mínimo $\xi = 0$. En una geometría que es globalmente plana no se registra autofuerza alguna ni en la región interior ni en la exterior.

A continuación se analizaron casos en los que la sub-variedad interior \mathcal{M}_i es plana ($\omega_i = 1$) y la exterior \mathcal{M}_e es cónica ($\omega_e < 1$). Estos casos corresponden a una **shell de materia ordinaria** caracterizada por un valor $\kappa < 0$ (figura 16 y figura 17, izquierda). En todos los casos se observa que la autofuerza se anula cuando $r \rightarrow 0$ como era de esperar dada la simetría de la geometría. Desde el punto de vista de las ecuaciones, la anulación de la autofuerza se debe a que en una variedad minkowskiana el término (100) se anula; por lo tanto el primer término en las expresiones (112) o (114) es cero. Además, la autofuerza resulta ser atractiva hacia la *shell* localizada en $r/r_i = 1$, tanto si la carga de prueba se ubica en la sub-variedad interior como en la exterior. La autofuerza atractiva es causada por el efecto de la “conicidad” de la sub-variedad exterior

²⁶ En adelante llamaremos *repulsivas* a las autofuerzas que tienden a alejar a la partícula de la *shell* o de la singularidad en el origen, y *atractivas* a las autofuerzas que tienen el efecto contrario, aunque el movimiento de la carga no es el resultado de fuerzas originadas en esos puntos.

sobre el campo y se intensifica a medida que aumenta el defecto de ángulo (disminuye ω_e), como puede apreciarse a partir del cambio de escala. En la sub-variedad exterior y en las proximidades de la *shell* la autofuerza es también divergente y atractiva. Es interesante observar que una carga de prueba colocada en la región interior plana experimentará igualmente una autofuerza que crecerá desde cero en $r = 0$ hasta hacerse divergente y atractiva cuando $r \rightarrow r_i^-$; es decir que la carga ubicada en la región interior plana experimentará los efectos de la “conicidad” de la región exterior y sus líneas de fuerza se deformarán al cambiar el defecto de ángulo entre las dos sub-variedades. Estos hechos ilustran la posibilidad de discernir las propiedades **globales** de la geometría a partir de la autofuerza que experimenta la partícula de prueba.

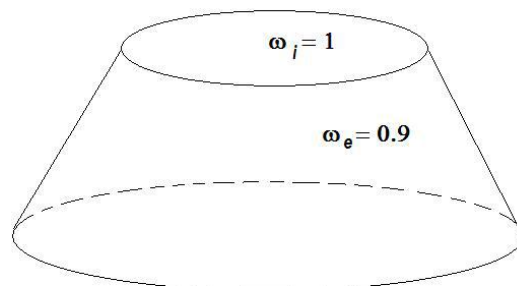


Figura 16: Geometría Tipo I correspondiente a un interior de Minkowski ($\omega_i = 1$) y un exterior cónico ($\omega_e = 0,9$). La conicidad de la sub-variedad exterior se ha exagerado.

La figura 17, derecha, muestra gráficos correspondientes a una **cáscara de materia ordinaria** donde ambas sub-variedades son cónicas ($\omega_i = 0,9$; $\omega_e < 1$; $\omega_i > \omega_e$; $\kappa < 0$). En el interior se observa atracción tanto hacia la cáscara como hacia el origen $r = 0$. Este último efecto es producido por la conicidad de la sub-variedad \mathcal{M}_i . A medida que aumenta el defecto de ángulo exterior manteniendo constante el interior se observa que el punto de equilibrio entre la atracción hacia la cáscara y hacia el origen se desplaza hacia $r = 0$; esto indica que el efecto atractivo hacia la cáscara aumenta debido al incremento en el defecto de ángulo exterior. En la sub-variedad exterior la autofuerza presenta cualitativamente el mismo comportamiento que en el caso anterior, pero aumenta la intensidad cerca de la *shell* debido al efecto combinado de los defectos de ángulo exterior e interior.

Invirtiendo los valores de ω , se analizaron casos en los que el exterior es plano ($\omega_e = 1$) mientras que el interior es cónico ($\omega_i < 1$) correspondientes a una **cáscara de materia exótica** ($\kappa > 0$) (figura 18 y figura 19 izquierda). Tanto en la sub-variedad interior como en la exterior se aprecia una autofuerza repulsiva y divergente desde la cáscara. En la sub-variedad interior la autofuerza es negativa en toda la la región indicando una atracción hacia la singularidad localizada en el eje del cono $r = 0$. Según se aprecia en el cambio de la escala, la intensidad de la autofuerza aumenta a medida que aumenta el defecto de ángulo en la sub-variedad interior. En las situaciones correspondientes a cáscaras de materia exótica en las que ambas sub-variedades presentan defecto de ángulo (figura 19, derecha) los resultados observados son muy parecidos, aunque la autofuerza

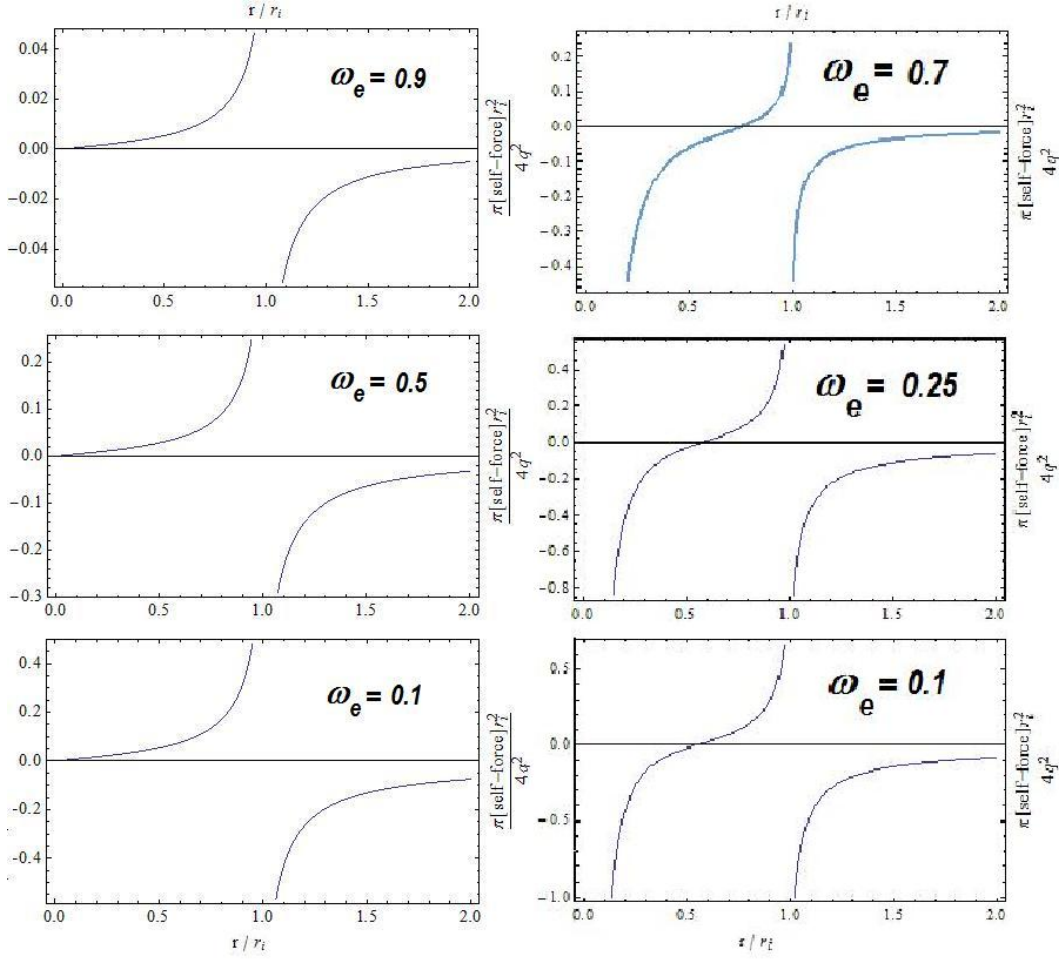


Figura 17: Geometrías tipo I con acoplamiento mínimo $\xi = 0$ correspondientes a una cáscara de materia ordinaria caracterizada por $\kappa < 0$. Izquierda: Sub-variedad interior \mathcal{M}_i minkowskiana ($\omega_i = 1$) y sub-variedad exterior \mathcal{M}_e cónica ($\omega_e < 1$); tanto en el interior como en el exterior la autofuerza es atractiva hacia la *shell* localizada en $r/r_i = 1$ y se intensifica a medida que aumenta el defecto de ángulo, como puede apreciarse a partir del cambio de escala. Derecha: Sub-variedades interior y exterior cónicas; el valor de $\omega_i = 0,9$ se mantiene constante mientras que ω_e se hace decreciente; en la sub-variedad interior se observa atracción tanto hacia la *shell* como hacia el origen ($r = 0$); a medida que aumenta el defecto de ángulo en la región exterior el punto de equilibrio entre la atracción hacia la cáscara y hacia el origen se desplaza hacia $r = 0$, señalando que el “alcance” de la fuerza atractiva hacia la *shell* es mayor.

es ligeramente más intensa.

En conclusión cuando $\xi = 0$ el término de acoplamiento $\xi R\Phi$ en el lagrangiano (15) es nulo; por lo tanto el campo no se acopla a la curvatura localizada en la *shell*. En este caso la autofuerza se debe exclusivamente a la acción de la conicidad de la geometría sobre el campo. Cuando ambas sub-variedades tienen diferente defecto de ángulo la conicidad cambia a la altura de la *shell*, y este cambio introduce una deformación adicional en las líneas de fuerza. En el caso de una cáscara de materia ordinaria se genera una autofuerza “atractiva” que se hace divergente cuando $r \rightarrow r_i$, mientras que en el caso de

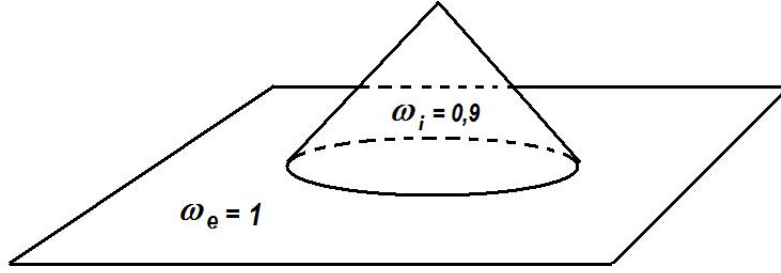


Figura 18: Geometría Tipo I correspondiente a un interior cónico ($\omega_e = 0,9$) y un exterior de Minkowski ($\omega_i = 1$). La conicidad de la sub-variedad interior se ha exagerado.

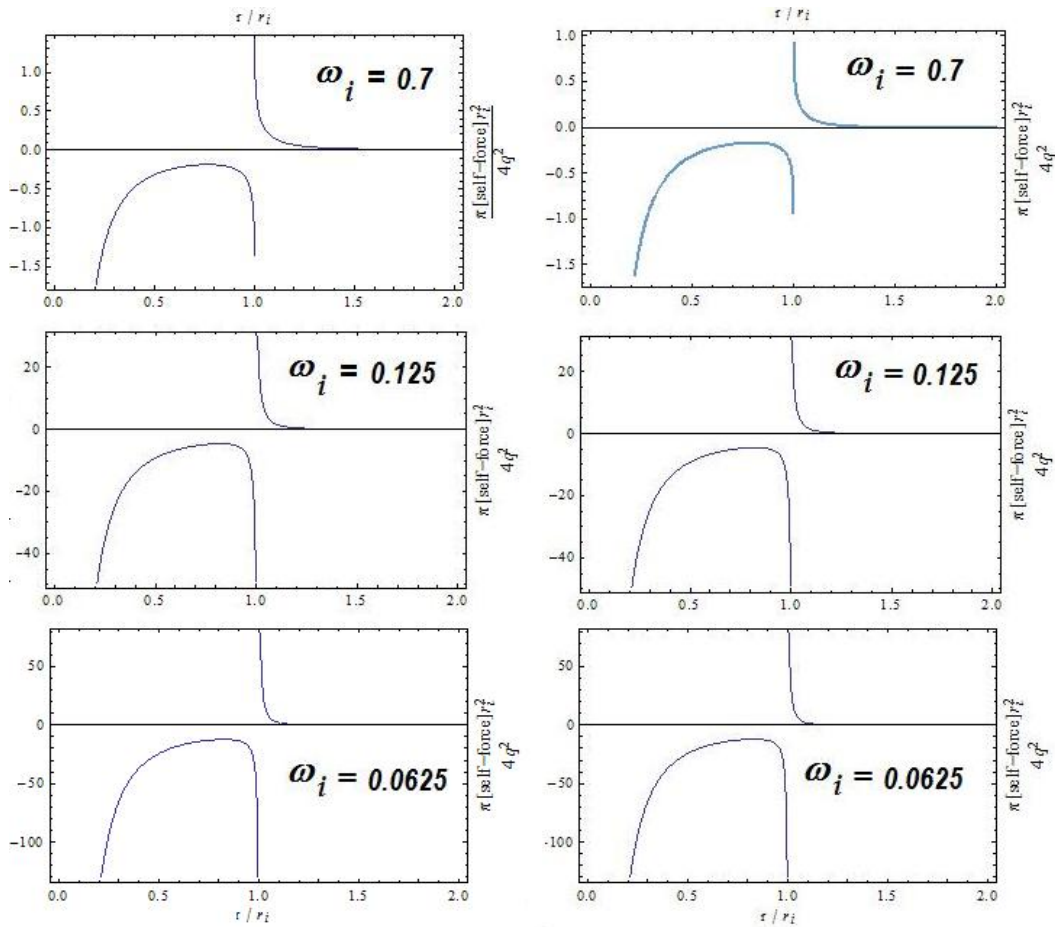


Figura 19: Geometrías tipo I con acoplamiento mínimo $\xi = 0$ y cáscara de materia exótica $\kappa > 0$. Izquierda: sub-variedad interior cónica ($\omega_i < 1$) y exterior minkowskiano ($\omega_e = 1$); tanto en el interior como en el exterior se observa una autofuerza repulsiva y divergente desde la cáscara; en la sub-variedad interior la autofuerza es negativa en toda la región indicando una atracción hacia la singularidad localizada en $r = 0$; según se aprecia en el cambio de escala, la intensidad de la autofuerza aumenta al aumentar el defecto de ángulo interior. Derecha: sub-variedades exterior e interior cónicas; el valor de $\omega_e = 0,9$ se mantiene constante; los resultados son similares al caso graficado a la izquierda, aunque la autofuerza es ligeramente más intensa.

una *thin-shell* de materia exótica se genera una autofuerza también divergente pero “repulsiva” desde la *shell*. Cuando el interior es cónico se observa además una “atracción” hacia la singularidad en $r = 0$. En todos los casos la autofuerza se hace más intensa a medida que aumenta el valor del defecto de ángulo.

Acoplamiento no mínimo $\xi \neq 0$

En todos los casos los valores de la constante de acoplamiento fueron elegidos dentro del dominio de estabilidad (ver sección 3.4). Como antes, para comprobar que el programa arroja el resultado correcto en ausencia de agentes que generen autofuerza, se lo corrió para el caso $\omega_i = \omega_e = 1$ obteniéndose una autofuerza nula para cualquier valor de ξ .²⁷

En la figura 20 se presentan ejemplos en los que el interior es minkowskiano ($\omega_i = 1$) y el exterior es cónico ($\omega_e = 0,5$), correspondientes a una **cáscara de materia ordinaria** ($\kappa < 0$). Para este caso las constantes de acoplamiento elegidas satisfacen la condición $\xi > \xi_c^{(n=1)} = -2$ (ver ecuación (87)). Como ya hemos visto, dado que el término (100) es nulo en una variedad minkowskiana, entonces la autofuerza se anula para $r \rightarrow 0$ en todos los casos. En las proximidades de la *shell*, tanto en el interior como en el exterior, la autofuerza es siempre divergente, siendo atractiva o repulsiva según cuál sea el valor de la constante de acoplamiento: la fuerza inicialmente atractiva hacia la cáscara disminuye a medida que ξ crece; cuando $\xi = 1/4$ el signo de la autofuerza se invierte, haciéndose repulsiva desde la cáscara. Este efecto se verifica tanto en el interior como en el exterior y la fuerza repulsiva se hace más intensa al aumentar ξ . En el exterior (figura inferior) la autofuerza es asintóticamente atractiva para cualquier valor de la constante de acoplamiento, debido al término dominante $\sim L_{\omega_e} r^{-2}$ en la ecuación (114).

Cuando la cáscara es de **materia ordinaria** ($\kappa < 0$) pero tanto el interior como el exterior presentan defecto de ángulo ($\omega_i < 1; \omega_e < 1$) aparece en el interior una autofuerza atractiva hacia la singularidad ubicada en $r = 0$. Para cualquier valor de la constante de acoplamiento $\xi < 1/4$, incluyendo valores negativos, se verifica además una autofuerza atractiva hacia la cáscara en el interior y en el exterior, que se transforma en repulsiva cuando $\xi \geq 1/4$. La intensidad de la autofuerza repulsiva crece al aumentar el valor de la constante de acoplamiento. En el exterior y a grandes distancias de la cáscara la autofuerza es atractiva. (Figura 21).²⁸

La figura 22 muestra los gráficos obtenidos para una sub-variedad exterior minkowskiana ($\omega_e = 1$) y una interior con defecto de ángulo $\omega_i = 0,5$ correspondiente a una **cáscara de materia exótica** ($\kappa > 0$). Los valores de la constante de acoplamiento se encuentran dentro de la zona de estabilidad $\xi < \xi_c^{(n=1)} = 2$ (ver ecuación (88)). En la región interior, para $r \rightarrow 0$, la autofuerza es divergente y atractiva hacia la singularidad. En las proximidades de la *shell* la autofuerza es siempre divergente, pero su comportamiento depende del valor de la constante de acoplamiento. Para valores $\xi < 1/4$

²⁷En este caso si bien $\xi \neq 0$ el escalar de Ricci es nulo ya que $\kappa = 0$.

²⁸Los valores de la constante de acoplamiento de la figura 21 se ajustan a lo estipulado en la sección 3.4: $\xi > \xi_c^{(n=1)} = 1/(\kappa\omega_i r_i) = 1/(\omega_e - \omega_i) \Rightarrow \xi > -2,5$.

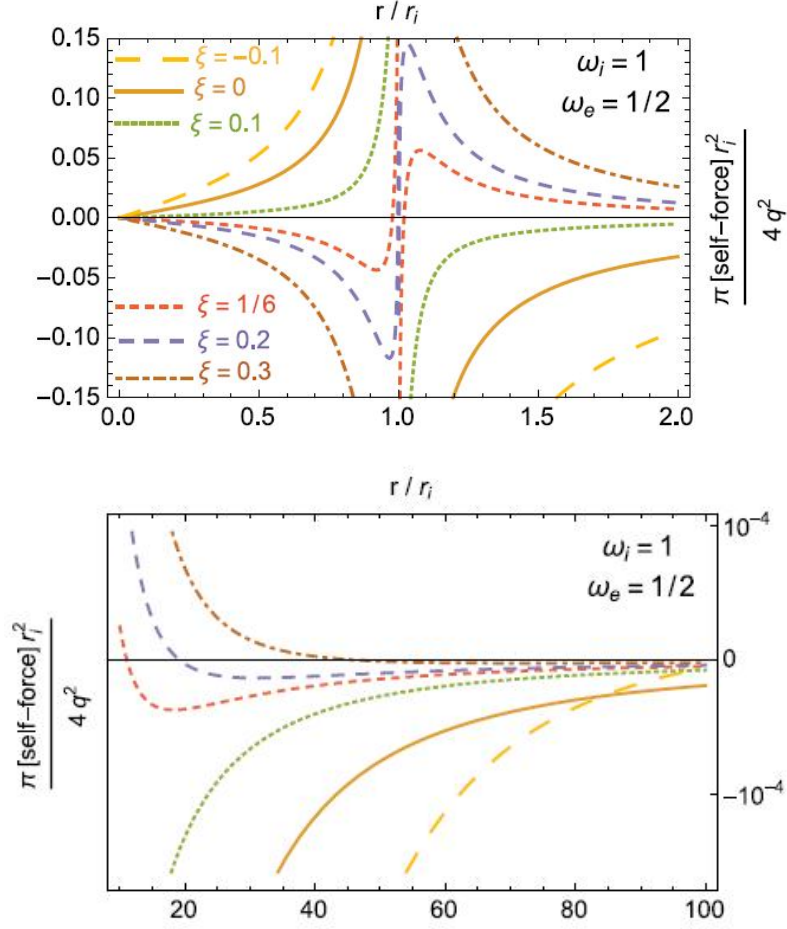


Figura 20: Geometrías tipo I; interior de Minkowski $\omega_i = 1$; exterior con defecto de ángulo $\omega_e = 1/2$; cáscara de materia ordinaria $\kappa < 0$. Figura superior: en todos los casos la autofuerza se anula cuando $r \rightarrow 0$; en las proximidades de la *shell* la autofuerza es divergente e invierte su signo cuando $\xi = 1/4$. Figura inferior: el comportamiento asintótico de la autofuerza es siempre atractivo independientemente del valor de la constante de acoplamiento.

y suficientemente cerca de la *shell* la autofuerza es repulsiva y divergente tanto en la región interior como en la exterior. Para $\xi > 1/4$ y en las cercanías de la cáscara la autofuerza es atractiva. En la región exterior minkowskiana la expresión (100) se anula; suficientemente lejos de la *shell* la autofuerza se hace repulsiva para cualquier valor de ξ (figura 22 inferior). Para una cáscara de materia exótica y en el caso en el que ambas sub-variedades son cónicas los resultados son muy parecidos con la salvedad de que asintóticamente la autofuerza es atractiva en el exterior (figura 23).²⁹

Según se desprende de los ejemplos que acabamos de analizar, la constante de acoplamiento actúa cambiando el signo de la autofuerza en las proximidades de la cáscara ubicada en $r/r_i = 1$, pero no afecta el signo de la autofuerza desde la singularidad

²⁹Los valores de la constante de acoplamiento de la figura 23 se ajustan a lo estipulado en la sección 3.4: $\xi < \xi_c^{(n=1)} = 1/(\kappa\omega_i r_i) = 1/(\omega_e - \omega_i) \Rightarrow \xi < 5$.

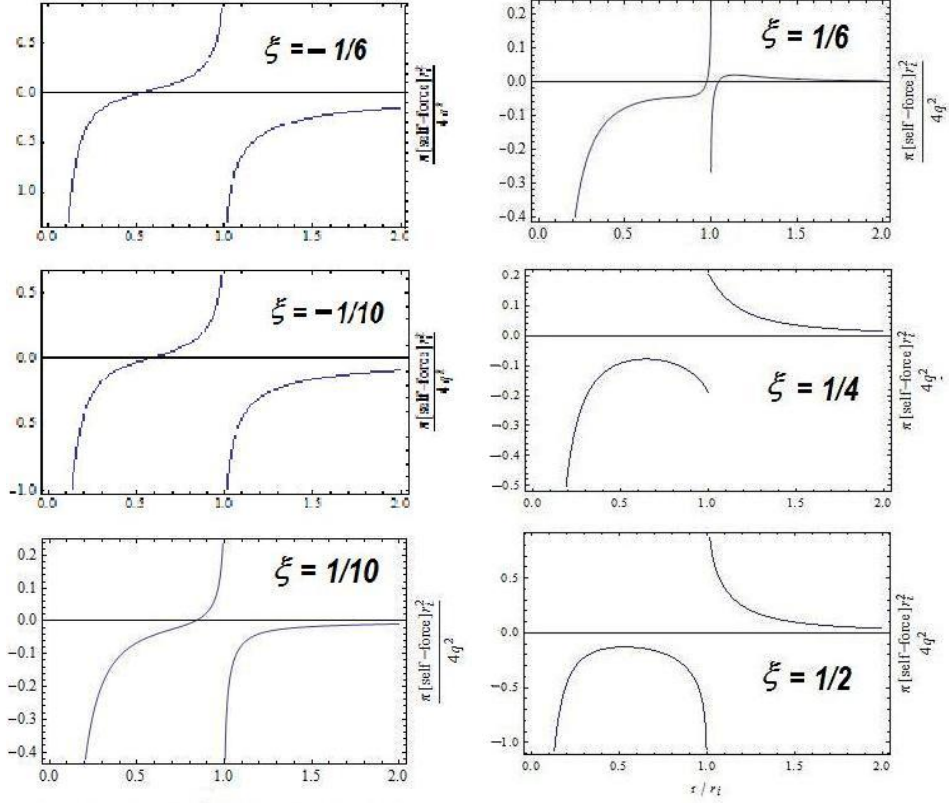


Figura 21: Geometrías tipo I; interior y exterior con defecto de ángulo: $\omega_i = 9/10$; $\omega_e = 1/2$; cáscara de materia ordinaria $\kappa < 0$. En la región interior la autofuerza es siempre atractiva hacia la singularidad ubicada en $r = 0$; para valores de la constante de acoplamiento $\xi < 1/4$ se verifica además una autofuerza atractiva hacia la cáscara en el interior y en el exterior, que se transforma en repulsiva cuando $\xi \geq 1/4$. El comportamiento asintótico de la autofuerza en la región exterior es atractivo; no se muestra en los gráficos.

ubicada en $r = 0$. La cantidad $\xi = 1/4$ puede entenderse entonces como el valor de la constante de acoplamiento que cancela el efecto atractivo (repulsivo) de la *thin-shell* de materia ordinaria (exótica). En cuanto al comportamiento asintótico de la autofuerza, resulta ser independiente del valor que adopta ξ dependiendo exclusivamente de la co-nicidad de las sub-variedades interior y exterior: en las sub-variedades minkowskianas la fuerza es asitóticamente repulsiva mientras que en las sub-variedades con defecto de ángulo es asintóticamente atractiva.

GEOMETRÍAS TIPO II.

La autofuerza sobre la partícula de prueba se graficó como $\frac{\pi r_0^2}{4q^2} f$ versus la posición adimensional de la carga r/r_0 . En todos los casos el valor $r = 0$ corresponde al origen de coordenadas donde se ubica la garganta infinitamente delgada de radio $r_0 = r_+ = r_-$, como indican las figuras 9 y 14. El lado izquierdo del gráfico ($r/r_0 < 0$) muestra la autofuerza sobre una carga de prueba ubicada en la región \mathcal{M}_- , mientras que el lado derecho ($r/r_0 > 0$) corresponde a una partícula ubicada en la región \mathcal{M}_+ . Sobre el lado derecho (izquierdo) del gráfico los valores positivos (negativos) de las curvas representan

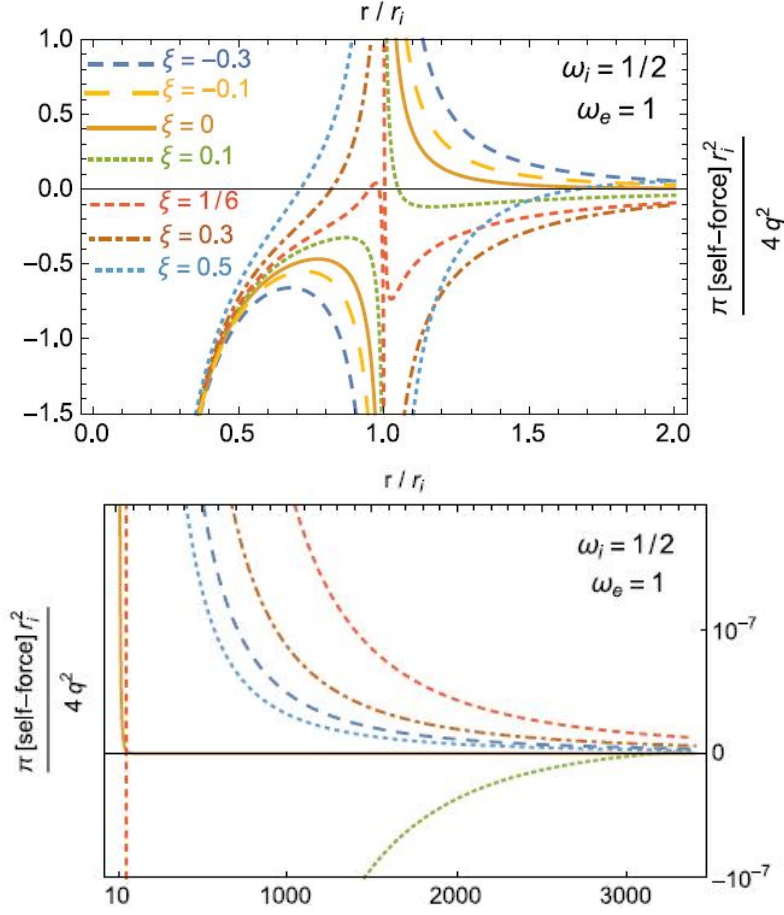


Figura 22: Geometrías tipo I; interior con defecto de ángulo $\omega_e = 1/2$ y exterior de Minkowski $\omega_i = 1$; cáscara de materia exótica $\kappa > 0$. Figura superior: para $r \rightarrow 0$ la autofuerza es divergente y atractiva hacia la singularidad; para valores $\xi < 1/4$ y suficientemente cerca de la *shell* la autofuerza es repulsiva y divergente mientras que para $\xi > 1/4$ y en las cercanías de la cáscara es atractiva. La figura inferior muestra el comportamiento asintótico de la autofuerza; ésta es siempre repulsiva independientemente del valor de ξ .

autofuerzas repulsivas mientras que valores negativos (positivos) corresponden a autofuerzas atractivas. En el caso de *wormholes* simétricos respecto de la garganta sólo se graficó la región $r/r_0 > 0$ correspondiente a una partícula ubicada en la región \mathcal{M}_+ .

Acoplamiento mínimo $\xi = 0$.

En primer lugar se analizó la autofuerza para una geometría Tipo II sin defecto de ángulo ($\omega_+ = \omega_- = 1$). Este ejemplo corresponde a un agujero de gusano simétrico tal que en la garganta se unen dos sub-variedades minkowskianas. Para este tipo de geometría la expresión (100) se anula de modo que el primer término en (116) es cero. Como consecuencia, aparecerá una fuerza repulsiva desde la garganta de materia exótica para cualquier valor de la constante de acoplamiento ξ .³⁰

³⁰ En toda geometría de agujero de gusano la *shell* es de materia exótica. En particular en este

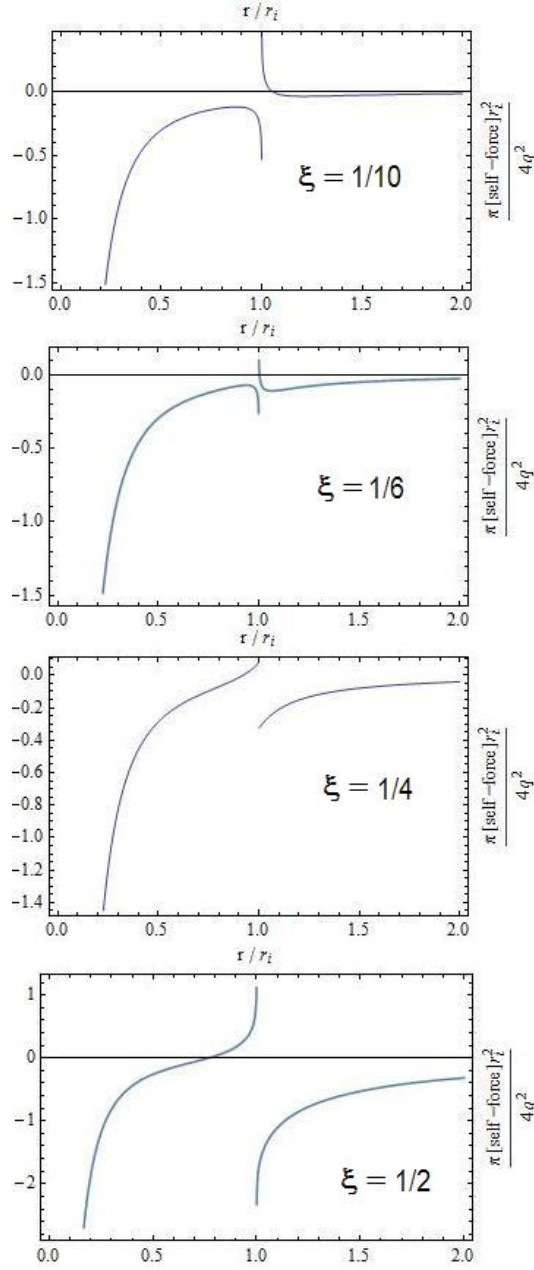


Figura 23: Geometrías Tipo I, cáscara de materia exótica $\kappa > 0$. Exterior e interior con defecto de ángulo: $\omega_e = 9/10; \omega_i = 7/10$. Para valores $\xi < 1/4$ y suficientemente cerca de la *shell* la autofuerza es repulsiva y divergente mientras que para $\xi > 1/4$ es atractiva. Independientemente del valor de ξ asintóticamente la autofuerza es siempre atractiva en la región exterior.

En particular, el caso $\xi = 0$ es un ejemplo interesante ya que permite comprender los efectos que genera la presencia de la garganta sobre la carga de prueba. Como se observa

caso el *wormhole* conecta dos espacio-tiempos de Minkowski, de modo que la traza del salto del tensor $K_{\alpha\beta}^{\pm}$ sobre la *shell* es positiva: $\kappa > 0$; esto corresponde a una cáscara de materia exótica con densidad superficial $\sigma < 0$.

en la figura 24, en las proximidades de la garganta la autofuerza es repulsiva, y diverge cuando $r \rightarrow 0$ en ambas regiones. Es decir que la topología no trivial del espacio tiempo genera una autofuerza sobre la carga aunque no exista ningún otro agente.³¹ Resulta instructivo compararlo con el caso análogo para las geometrías tipo I (figura 15) donde, al no haber una garganta, la carga no experimenta autofuerza alguna.

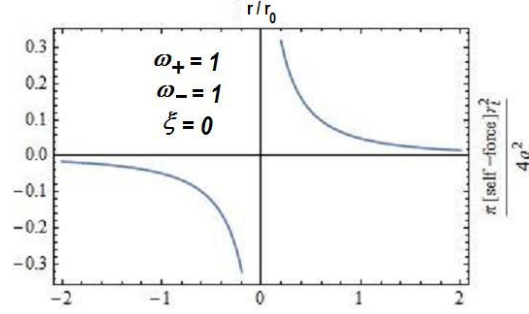


Figura 24: Geometrías tipo II, espacio tiempo de Minkowski a ambos lados de la garganta: $\omega_- = \omega_+ = 1$. Acoplamiento mínimo $\xi = 0$. Comparar con el caso análogo para las geometrías tipo I presentado en la figura 15.

A continuación se estudiaron casos en los que no hay acoplamiento ($\xi = 0$) y una de las dos variedades es minkowskiana mientras que se aumenta el defecto de ángulo en la otra. En este caso la autofuerza es producto de dos efectos combinados de la geometría sobre el campo: por un lado el efecto de la topología no trivial de la garganta, que causa repulsión desde la misma; y por el otro, la acción de la “conicidad” (defecto de ángulo) en una de las dos variedades, lo que genera una autofuerza asintóticamente atractiva. En la figura 25 el lado izquierdo corresponde a una sub-variedad minkowskiana mientras que el lado derecho se refiere a una sub-variedad en la que se aumenta progresivamente el defecto de ángulo. En las proximidades de la garganta la fuerza es siempre repulsiva y diverge cuando $r \rightarrow 0$. En la sub-variedad de la derecha y suficientemente lejos de la garganta prevalece el efecto de la “conicidad” de modo que la autofuerza se hace atractiva. Como era de esperar, el punto de equilibrio entre la atracción asintótica y la repulsión desde la garganta se desplaza hacia $r=0$ al aumentar el defecto de ángulo, indicando que la atracción se hace más intensa y, por lo tanto, neutraliza la repulsión más cerca de la garganta. La sub-variedad de la izquierda, aún siendo un espacio-tiempo plano, recibe la influencia de la región \mathcal{M}_+ ; la autofuerza es repulsiva en todo el espacio-tiempo pero al aumentar el defecto de ángulo en \mathcal{M}_+ la repulsión disminuye progresivamente su alcance de modo que la curva tiende a cero más rápidamente.

La situación correspondiente a un agujero de gusano asimétrico formado por dos

³¹Este fenómeno se puede entender a partir de la configuración geométrica de las líneas de fuerza que parten de la carga. Si el espacio-tiempo es globalmente plano las líneas de fuerza tienen una distribución simétrica en torno a la carga. Pero si el espacio-tiempo es localmente plano pero no lo es globalmente, como en el caso presente, entonces las líneas de fuerza no tienen una distribución simétrica ya que algunas de ellas son “tragadas” por la garganta del *wormhole*. El efecto es mucho más notable cerca de la garganta que lejos de ella, puesto que en las proximidades de la garganta es mayor la cantidad de líneas que se ven afectadas.

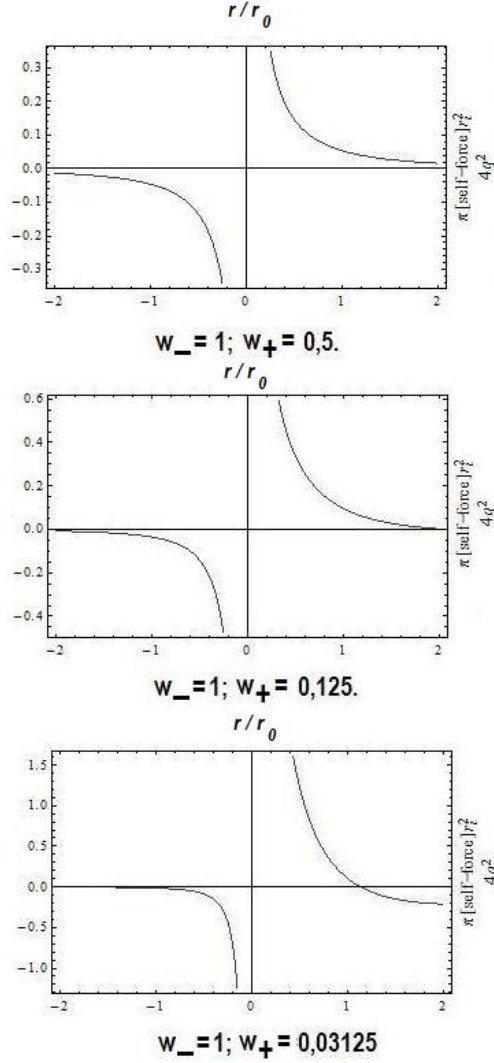


Figura 25: Geometrías Tipo II, acoplamiento mínimo $\xi = 0$. En los tres gráficos a la izquierda de la garganta se representa una sub-variedad minkowskiana $\omega_- = 1$. En la sub-variedad a la derecha de la garganta el defecto de ángulo aumenta progresivamente. En las proximidades de la garganta la fuerza es siempre repulsiva y diverge cuando $r \rightarrow 0$. En la sub-variedad de la derecha y suficientemente lejos de la garganta prevalece el efecto de la “conicidad” de modo que la autofuerza se hace atractiva. El punto de equilibrio entre la atracción asintótica y la repulsión desde la garganta se desplaza hacia $r=0$ al aumentar el defecto de ángulo, lo que indica que el efecto repulsivo es neutralizado más cerca de la garganta.

regiones con diferente defecto de ángulo se analiza en la figura 26. En el ejemplo se mantuvo constante el valor del defecto de ángulo en la sub-variedad a la derecha de la garganta, mientras que se fue aumentando en la sub-variedad a la izquierda. Como resultado, en la región a la derecha la autofuerza atractiva aumenta su rango de acción de tal manera que el punto de equilibrio entre la fuerza asintóticamente atractiva y la fuerza repulsiva se va acercando progresivamente a la garganta. La autofuerza asintóticamente atractiva es más marcada en la sub-variedad que presenta mayor defecto de ángulo.

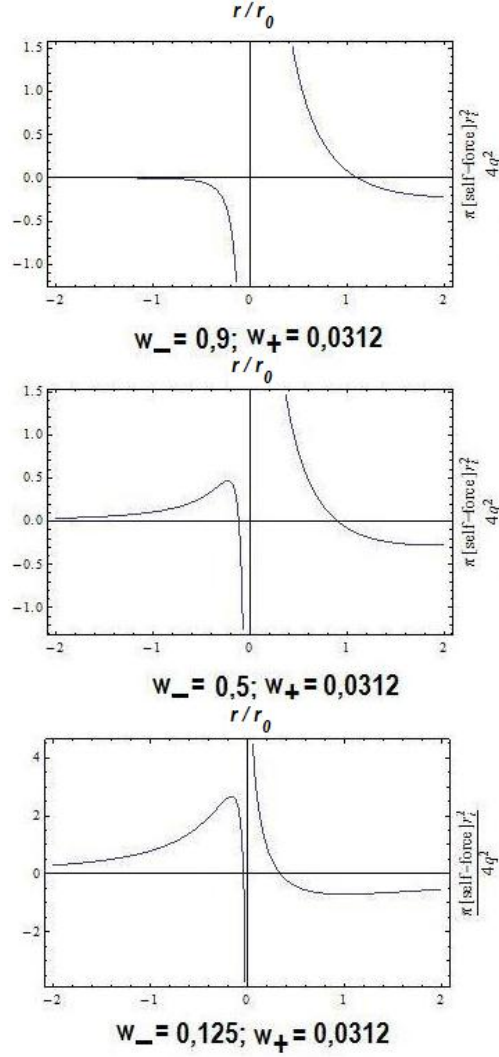


Figura 26: Geometrías Tipo II, acoplamiento mínimo $\xi = 0$. En la sub-variedad a la derecha de la garganta el defecto de ángulo se mantiene constante ($\omega_+ = 0,03125$) mientras que aumenta progresivamente en la sub-variedad a la izquierda de la garganta. En la sub-variedad a la derecha la autofuerza atractiva aumenta su rango de acción de tal manera que el punto de equilibrio entre la fuerza asintóticamente atractiva y la fuerza repulsiva se va acercando progresivamente a la garganta.

Acoplamiento no mínimo $\xi \neq 0$.

En la figura 27 se muestra el comportamiento de la autofuerza en el caso de un agujero de gusano cilíndrico simétrico de Minkowski ($\omega_+ = \omega_- = 1$) para diferentes valores de la constante de acoplamiento. Para esta geometría el primer término de la expresión (116) es cero. Por lo tanto la autofuerza en ambas sub-variedades se debe a dos efectos combinados: la acción de la topología no trivial de la garganta sobre el campo y el acoplamiento con el escalar de curvatura.

Como hemos visto en la sección 3.4, en el caso de un agujero de gusano cilíndrico y simétrico de Minkowski aparecen configuraciones críticas cuando el acoplamiento adopta

los valores $\xi_c^{(n)} = n/(\omega_+ + \omega_-) = n/2$, $n \in \mathbb{N}$. En particular, para el modo $n = 1$ la autofuerza se hace divergente si $\xi_c^{(1)} = 1/2$. Dentro del dominio de estabilidad $\xi < 1/2$ (ecuación (90)), la autofuerza varía suavemente salvo para el valor $\xi = 1/4$ donde se produce un cambio cualitativo. Las inestabilidades se repiten para $\xi_c^{(n)} = n/2$, mientras que dentro de los intervalos sucesivos $n/2 < \xi < (n+1)/2$ el comportamiento cualitativo de la autofuerza es similar al que presenta cuando ξ cae en el rango $1/4 < \xi < 1/2$. El gráfico inferior de la figura 27 muestra los resultados para acoplamientos dentro de este rango y también para el siguiente intervalo, $1/2 < \xi < 1$.

Según se observa en el gráfico superior, para $\xi < 0$ el comportamiento es similar al observado en ausencia de acoplamiento (figura 24) y la repulsión aumenta con valores decrecientes de ξ . Para acoplamientos en el rango $0 < \xi < 1/4$ la autofuerza es repulsiva en las proximidades de la garganta; luego se hace atractiva dentro de un rango finito de distancias, pero se hace nuevamente repulsiva a grandes distancias.

Inversamente, para acoplamientos $\xi > 1/4$ el comportamiento en las proximidades de la garganta se invierte de modo que la partícula es atraída hacia la *shell* haciéndose divergente en el límite $r \rightarrow 0$, como se observa en la gráfica inferior de la figura 27. Más allá del comportamiento diferente cerca de la garganta, para $\xi > 1/4$ la autofuerza es asintóticamente repulsiva. Esta repulsión está asociada al salto positivo $\kappa > 0$ en el tensor de curvatura extrínseca y a la topología no trivial en este espacio-tiempo.

En las figuras 28 y 29 se analizan los tres efectos combinados: la acción que la topología no trivial de la garganta y las sub-variedades con defecto de ángulo ejercen sobre el campo a lo que se suma el acoplamiento con el escalar de Ricci. Como hemos visto, el efecto de la topología es una repulsión pura desde la garganta del *wormhole* mientras que el acoplamiento no nulo causa una autofuerza atractiva en sus proximidades. El efecto de la “conicidad” es una autofuerza atractiva que opera a grandes distancias de la garganta pero se manifiesta cada vez más cerca de ella al aumentar el defecto de ángulo. La autofuerza resultante cambia de signo en las proximidades de la *shell* para el valor $\xi = 1/4$ de la constante de acoplamiento.

La figura 28 corresponde a un *wormhole* simétrico con defecto de ángulo $\omega_+ = \omega_- = 2/3$. Se grafica la autofuerza únicamente para valores de la constante de acoplamiento inferiores a $\xi = 1/4$. En todos los casos en las proximidades de la *shell* predomina la repulsión desde la garganta, pero un poco más lejos es apantallada por efecto del acoplamiento, tornándose atractiva. Asintóticamente la autofuerza es siempre atractiva.

En la figura 29 se grafica la autofuerza para un agujero de gusano no simétrico en el que la sub-variedad de la izquierda (parte inferior en cada gráfico) es siempre un espacio-tiempo de Minkowski ($\omega_- = 1$) mientras que el defecto de ángulo en la sub-variedad a la derecha (parte superior de cada gráfico) varía. Los valores de la constante de acoplamiento se ajustan a las conclusiones de la sección 3.4. Tal como puede apreciarse a partir del cambio de escala, para un valor dado de la constante de acoplamiento el aumento progresivo del defecto de ángulo incrementa la intensidad de la autofuerza sobre la variedad minkowskiana, cualquiera sea su signo. Para un valor determinado de

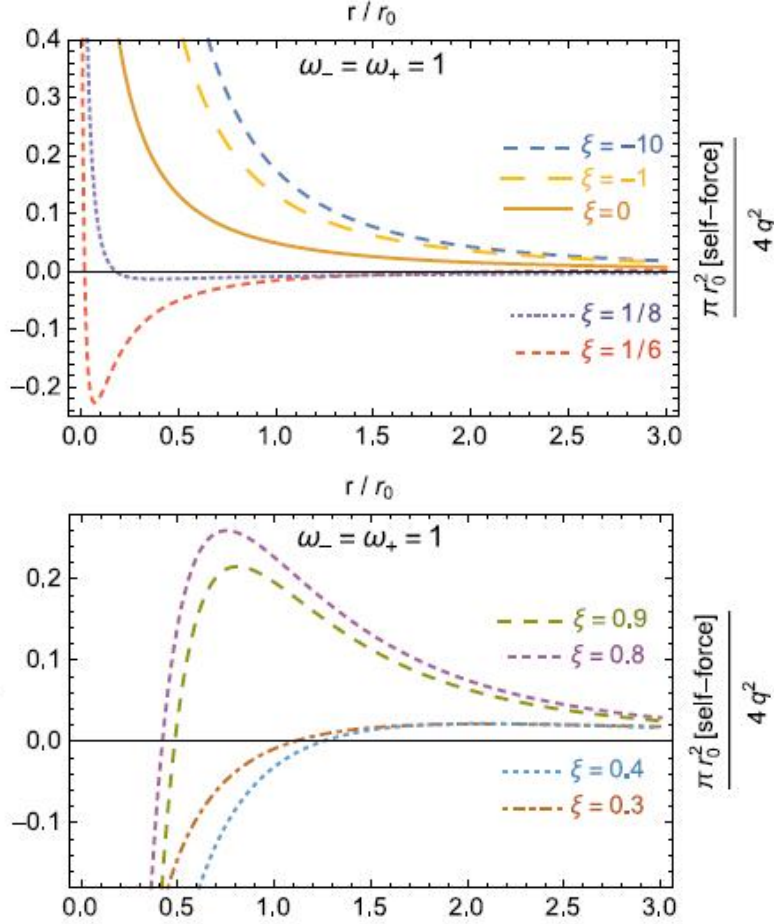


Figura 27: Autofuerza en geometrías Tipo II con acoplamiento no nulo correspondientes a un *wormhole* simétrico de Minkowski. Gráfico superior: acoplamientos $\xi < 1/4$; para $\xi < 0$ el comportamiento es similar al de la figura 24; para $0 < \xi < 1/4$ la autofuerza es repulsiva en las proximidades de la garganta, luego se hace atractiva y a grandes distancias es nuevamente repulsiva. Gráfico inferior: acoplamientos en los intervalos $1/4 < \xi < 1/2$ y $1/2 < \xi < 1$; para $\xi > 1/4$ la partícula es atraída hacia la *shell* en sus proximidades, pero la autofuerza es asintóticamente repulsiva. Observar que la autofuerza es siempre asintóticamente repulsiva independientemente del valor de ξ .

ω_+ y para valores $\xi < 1/4$ el incremento en la constante de acoplamiento apantalla la repulsión desde la garganta generando una fuerza atractiva a cortas distancias. El apantallamiento se verifica cada vez más cerca de la garganta a medida que aumenta el valor de ξ . En torno al valor $\xi = 1/4$ y cerca de la garganta la autofuerza invierte su signo en ambas sub-variedades. En la sub-variedad de la derecha la autofuerza es atractiva cerca de la cáscara, se torna repulsiva en la región intermedia, y se hace asintóticamente atractiva debido al defecto de ángulo de esta sub-variedad; efecto que, como era de esperar, se hace más notable al aumentar el valor de ω .

CONCLUSIONES DE LOS GRÁFICOS

En cualquiera de los ejemplos estudiados se observan cambios suaves en los gráficos

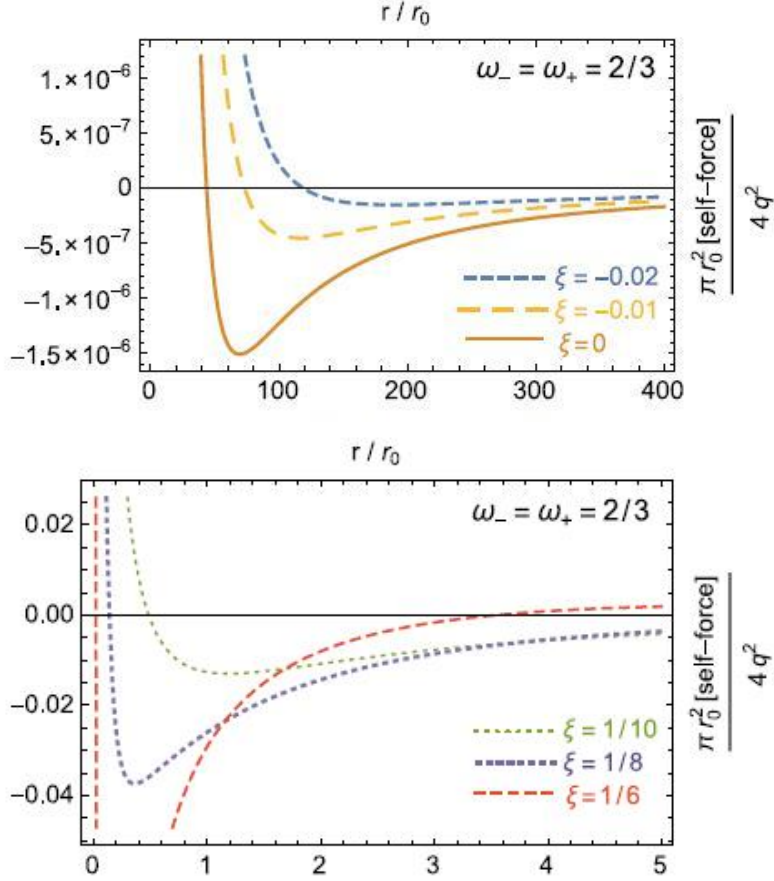


Figura 28: Gráficos de autofuerza para geometrías Tipo II, con acoplamiento no nulo, correspondientes a un agujero de gusano simétrico tal que $\omega_+ = \omega_- = 2/3$. El gráfico superior corresponde a valores de la constante de acoplamiento $\xi \leq 0$; el inferior, a constantes de acoplamiento en el rango $0 < \xi < 1/4$. Asintóticamente la autofuerza es atractiva.

de autofuerza siempre que la constante de acoplamiento adopte valores dentro del correspondiente dominio de estabilidad, con excepción del cambio observado para $\xi = 1/4$.

En las *geometrías Tipo I*, si el interior es minkowskiano no se manifiesta fuerza alguna hacia el origen $r \rightarrow 0$. Esto puede entenderse desde la ecuaciones como debido a la ausencia del término (100) en (112) o (114). Desde un punto de vista más intuitivo, puede entenderse como la ausencia de una “punta de cono” (singularidad en $r = 0$) que distorsione las líneas de fuerza en la variedad interior. Pero si el interior presenta defecto de ángulo entonces siempre aparece una fuerza atractiva hacia el origen.

Según se trate de una cáscara de materia ordinaria o exótica, la partícula experimentará una autofuerza que, respectivamente, la acercará o la alejará de la *shell*. Pero la constante de acoplamiento actuará invirtiendo el signo de esta autofuerza en las proximidades de la *shell* cuando $\xi = 1/4$.

Si bien la constante de acoplamiento actúa invirtiendo el signo de la autofuerza desde o hacia la *shell*, no afecta el signo de la autofuerza hacia $r = 0$ que es siempre atractiva cuando la variedad interior es cónica. Tampoco afecta el comportamiento asintótico de

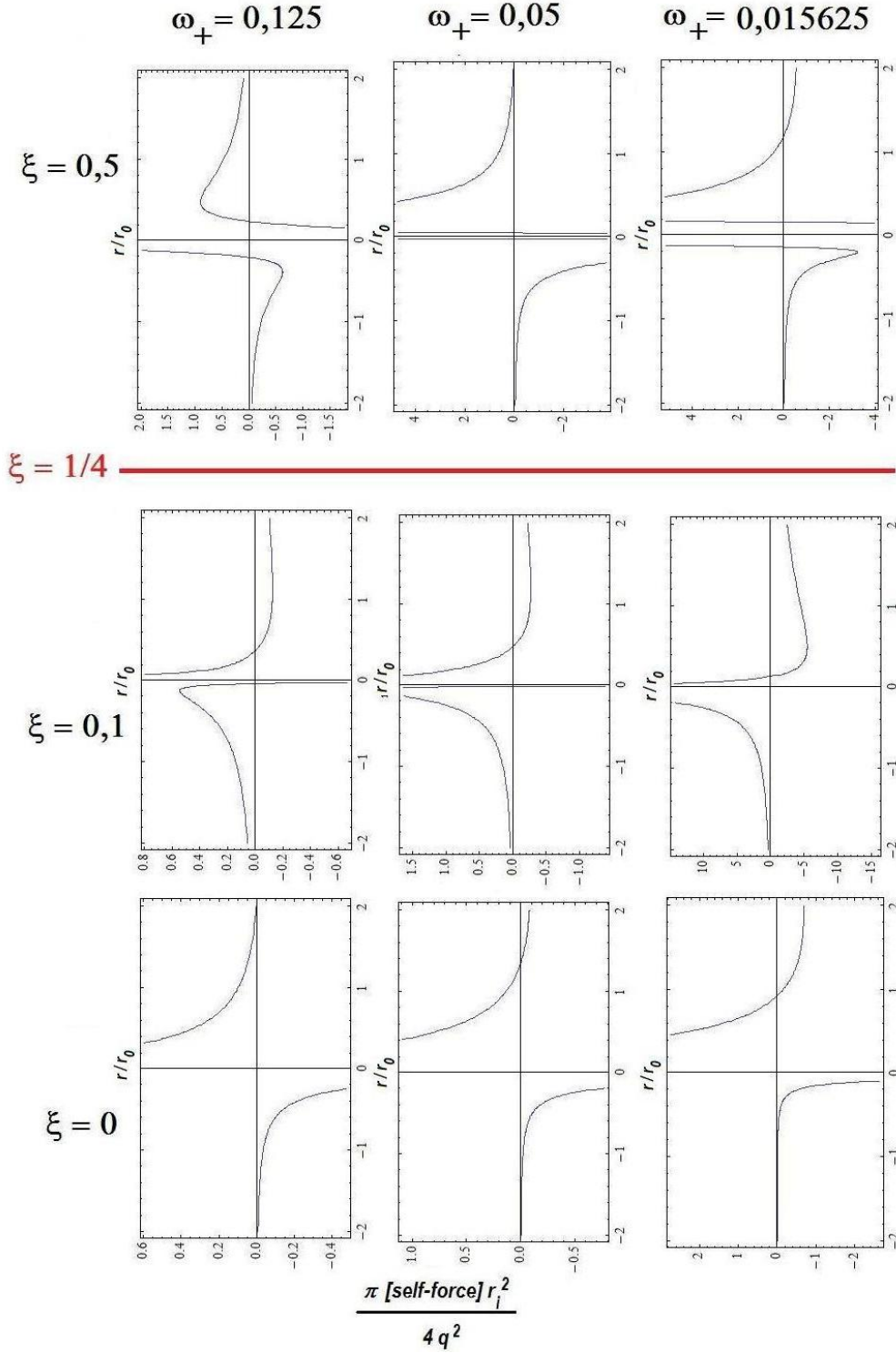


Figura 29: Gráficos de autofuerza para geometrías Tipo II con acoplamiento no nulo. En cada gráfico la sub-variedad de la izquierda (parte inferior de cada gráfico) es minkowskiana ($\omega_- = 1$) y la sub-variedad de la derecha (parte superior de cada gráfico) tiene defecto de ángulo. El defecto de ángulo y la escala crecen hacia la derecha de la figura mientras que el valor de la constante de acoplamiento crece hacia la parte superior. Para $\xi = 1/4$ la autofuerza se anula y cambia de signo.

la autofuerza en la región exterior, el cual depende exclusivamente de la “conicidad” de esta sub-variedad: si se trata de una sub-variedad cónica la autofuerza es asintóticamente atractiva mientras que si la región exterior es minkowskiana la autofuerza a grandes distancias es repulsiva.

Cualquiera sea su signo, la intensidad de la autofuerza aumenta cuando aumenta el defecto de ángulo y cuando aumenta el valor de la constante de acoplamiento.

En las *geometrías Tipo II*, si ambas variedades son minkowskianas y el acoplamiento es mínimo encontramos que la topología no trivial de la geometría global induce una autofuerza en una partícula ubicada en una región localmente plana. Esta autofuerza tiende a alejar a la partícula de la garganta, actuando como una fuerza repulsiva desde $r = 0$. Podemos entender esta autofuerza como consecuencia de la deformación de las líneas de fuerza que atraviesan la garganta del *wormhole*.

En el caso de sub-variedades no minkowskianas, el efecto de la “conicidad” se suma al de la topología no trivial generando una autofuerza atractiva que se manifiesta cada vez más cerca de la garganta a medida que aumenta el defecto de ángulo.

Del mismo modo que ocurre en las geometrías Tipo I, la constante de acoplamiento actúa invirtiendo el signo de la autofuerza en las cercanías de la garganta cuando $\xi = 1/4$ mientras que el comportamiento asintótico depende de la conicidad y es independiente del valor que adopte ξ . La intensidad de la autofuerza aumenta cuando aumenta el defecto de ángulo y cuando aumenta el valor de ξ .

3.8. Conclusión de la primera parte y comentarios.

Hemos analizado la autofuerza que aparece cuando un campo escalar sin masa generado por una partícula puntual es modificado por la geometría del espacio-tiempo en el que la partícula se localiza. Hemos trabajado con dos tipos diferentes de geometría, ambas construidas uniendo dos sub-variedades cónicas mediante el formalismo de *thin-shells*. Una de estas geometrías, a la que hemos llamado Tipo I, posee una sola región asintótica y un interior centrado en una singularidad. La otra geometría, denominada aquí como Tipo II, posee dos regiones asintóticas y corresponde a un agujero de gusano de *thin-shell*. Para hallar la autofuerza hemos resuelto la ecuación de campo en ambas geometrías para el caso de un campo estático y tratando a la singularidad que conecta las dos sub-variedades como una condición de contorno en el sitio de unión. Hemos considerado diferentes ubicaciones posibles de la partícula respecto de esta singularidad. Solicitando la continuidad del campo en la posición de la cáscara y de la partícula y su no divergencia en el origen y en el infinito se han impuesto, además, ciertas restricciones sobre las funciones de Bessel. El procedimiento nos ha conducido a la obtención de una serie de coeficientes dentro de los cuales se encuentra contenido el acoplamiento entre el campo y la curvatura. Para estos coeficientes hemos hallado modos de resonancia, lo que nos ha llevado a determinar zonas de estabilidad dentro de las cuales estos coeficientes no producen divergencias. Por tratarse de una carga puntual, hemos debido renormalizar el campo para extraer su parte singular aplicando el método de Detweiler y Whiting. Finalmente hemos graficado los resultados para poder estudiar el comportamiento de la autofuerza.

Antes de cerrar esta primera parte incluiremos algunos comentarios y algunas comparaciones con otros trabajos.

Los resultados obtenidos para el caso de un campo escalar sin masa son diferentes a los que se han encontrado en el caso de cargas eléctricas ubicadas en estas mismas geometrías [92] [93] [94]. En la figura 30 se comparan los gráficos de autofuerza para un campo escalar con acoplamiento mínimo (izquierda) y un campo electrostático (derecha) en el caso de geometrías Tipo I y para los mismos valores de ω_i y ω_e . En todos los casos la autofuerza para el campo escalar presenta exactamente el signo contrario de la autofuerza para el campo electrostático. En la figura 31 se establece la misma comparación en el caso de las geometrías Tipo II. Para agujeros de gusano simétricos con $\omega = 0,5$, en el caso del campo escalar la autofuerza es repulsiva cerca de la cáscara y se torna atractiva un poco más lejos mientras que en el caso electrostático la autofuerza que es atractiva en las proximidades de la garganta se hace repulsiva a cierta distancia de ésta. Para $\omega = 0,75$ se observa un comportamiento similar al anterior en el caso del campo electrostático pero la autofuerza es siempre repulsiva en el caso del campo escalar. Para agujeros de gusano planos la autofuerza es siempre repulsiva en el caso escalar y siempre atractiva en el caso electrostático. Por otra parte, el término ξR opera como una “fuente adicional” en la ecuación de Poisson:

$$(\square - \xi R)\Phi = -4\pi\mu \quad \Rightarrow \quad \square\Phi = -4\pi\mu + \xi R\Phi$$

Estas “fuentes adicionales” que aparecen en el caso del campo escalar están ausentes en el caso electrostático, de modo que no se verifica el efecto de inversión del signo de las fuerzas atractivas o repulsivas hacia o desde la cáscara que aparece en el caso del campo escalar.

Otro aspecto a tener en cuenta es el hecho de que aparecen ciertos valores de la constante de acoplamiento para los cuales la solución se hace divergente. Algunos autores que han estudiado el comportamiento de la autofuerza para campos escalares no masivos han encontrado resultados parecidos. Por ejemplo Bezerra y Khusnutdinov [9] hallaron que la autofuerza diverge para ciertos valores críticos $\xi = n/4$ para $n \in N$ de la constante de acoplamiento en el caso de agujeros de gusano de *thin-shell* de garganta infinitamente corta con simetría esférica. Del mismo modo, Taylor [108] halló que las soluciones de la ecuación de campo escalar producidas por una carga puntual eran inestables en el agujero de gusano de Ellis para un conjunto discreto de acoplamientos $\xi = n^2/2$. Este comportamiento anómalo de la solución fue removido restringiendo las constantes de acoplamiento a un dominio de estabilidad donde no se encontraron polos [109] [110]. En el presente trabajo nos hemos enfrentado a problemas similares pero para el caso de agujeros de gusano con simetría cilíndrica (geometrías Tipo II) y hemos extendido el análisis al caso de topologías triviales (geometrías Tipo I).

También hemos hallado diferencias en el valor de la constante de acoplamiento que invierte el signo de la autofuerza desde o hacia la garganta del *wormhole*. En el caso de agujeros de gusano de *thin-shell* con simetría esférica y para campos escalares no masivos la autofuerza cambia su signo cuando $\xi = 1/8$ [9]. Este valor corresponde a la constante de acoplamiento conformemente plana en tres dimensiones, ya que la variedad estudiada en [9] es la sección a $t = cte$ del espacio-tiempo del *wormhole*. En el caso de las geometrías que hemos analizado en el presente trabajo el signo de la autofuerza se invierte para

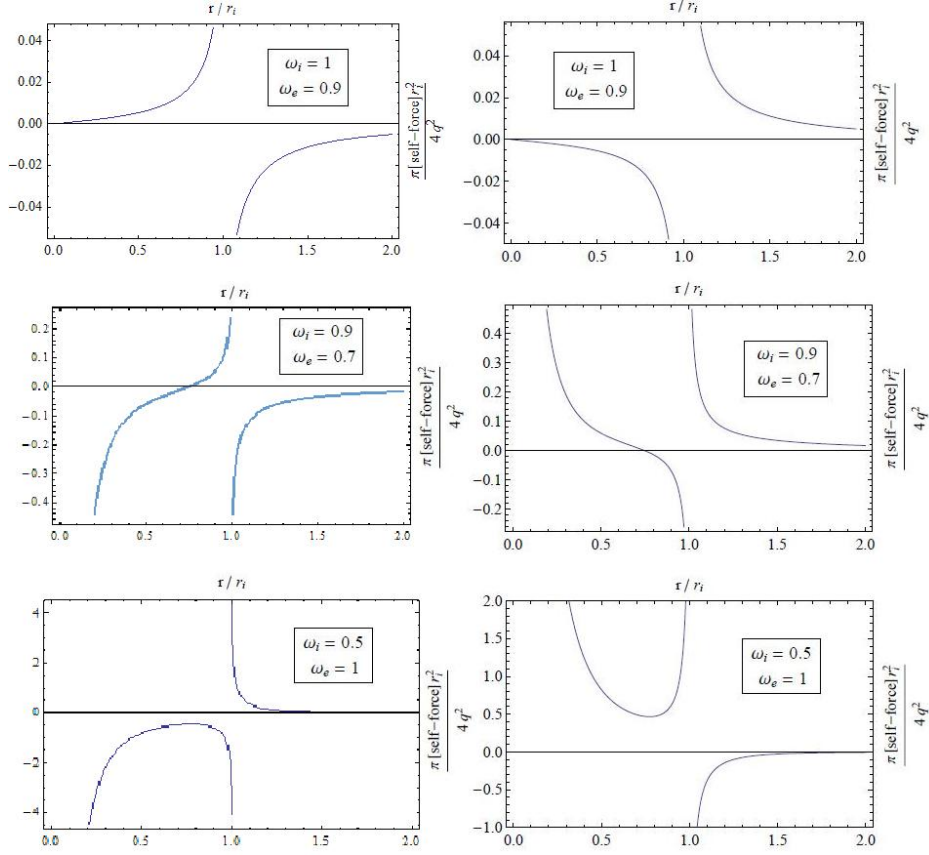


Figura 30: Gráficos comparativos de la autofuerza sobre una carga asociada a un campo escalar (izquierda) y sobre una carga electrostática (derecha) para geometrías Tipo I y para los mismos valores de ω_i y ω_e . En el caso del campo escalar sólo se han considerado casos donde el acoplamiento es mínimo. El rango de las escalas es diferente en algunos de los gráficos ya que la comparación es meramente cualitativa. Los gráficos de la derecha han sido extraídos de [94].

$\xi = 1/4$ pero el comportamiento asintótico de la autofuerza depende de que exista o no un defecto de ángulo en las sub-variedades involucradas. Si las regiones asintóticas son cónicas, entonces aparece una fuerza atractiva a grandes distancias (figura 28) mientras que si se trata de sub-variedades minkowskianas la autofuerza a grandes distancias es repulsiva (figura 27). En ambos casos el comportamiento asintótico es independiente del valor de ξ . Similares resultados se han observado para las geometrías Tipo I (figuras 20 y 22).

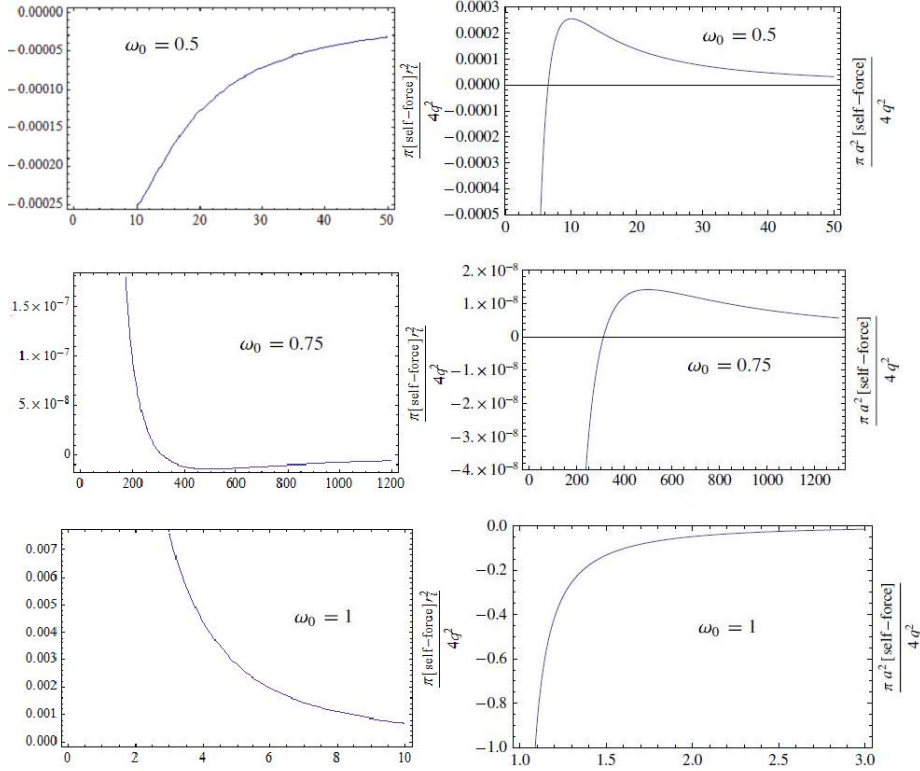


Figura 31: Gráficos comparativos de la autofuerza sobre una carga asociada a un campo escalar (izquierda) y sobre una carga electrostática (derecha) para geometrías Tipo II para el caso de un *wormhole* simétrico y para los mismos valores de ω . En el caso del campo escalar sólo se han considerado casos donde el acoplamiento es mínimo. El rango de las escalas es diferente en algunos de los gráficos ya que la comparación es meramente cualitativa. Para el campo escalar y para $\omega = 0, 5$ la curva que indica repulsión corre muy próxima a la garganta y muy empinada; por ese motivo no se visualiza claramente en la figura. Los gráficos de la derecha han sido extraídos de [94].

Capítulo 4

4. Estudio de autofuerzas sobre una partícula acoplada a un campo escalar masivo.

En esta sección analizaremos la autofuerza sobre un campo escalar masivo acoplado a las mismas geometrías que hemos considerado en la primera parte: geometrías Tipo I (figuras 7 y 8) y geometrías Tipo II (figura 9).

Por tratarse de las mismas geometrías el elemento de línea, la función perfil, el escalar de Ricci, la traza del salto en el tensor de curvatura y el tensor energía-momento superficial responden a las mismas expresiones (6) a (14) enumeradas al inicio de la sección 3. Por comodidad, las repetimos a continuación:

$$\text{Métrica: } ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \rho^2(r) d\phi^2 + dz^2$$

Función perfil para las geometrías Tipo I:

$$\rho(r) = \begin{cases} \omega_i r & \text{en } \mathcal{M}_1 = \{0 < r \leq r_i\} \\ \omega_e r & \text{en } \mathcal{M}_2 = \{r_e \leq r < \infty\} \end{cases}$$

Primera forma fundamental, geometrías Tipo I: $\rho(r_i) = r_i \omega_i = r_e \omega_e$

Función perfil para las geometrías Tipo II:

$$\rho(r) = \begin{cases} (r_- - r) \omega_- & \text{en } \mathcal{M}_- = \{-\infty < r \leq 0\} \\ (r_+ + r) \omega_+ & \text{en } \mathcal{M}_+ = \{0 \leq r < +\infty\} \end{cases}$$

Primera forma fundamental, geometrías Tipo II: $\rho(0) = r_- \omega_- = r_+ \omega_+$

Escalar de curvatura: $R(r) = -2\kappa \delta(r - r_s)$

Salto en la traza del tensor de curvatura:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{\omega_e - \omega_i}{\rho(r_s)}; & r_s = r_i & \text{para las geometrías Tipo I} \\ \frac{\omega_+ + \omega_-}{\rho(r_s)}; & r_s = 0 & \text{para las geometrías Tipo II} \end{cases}$$

Tensor energía-momento superficial para las geometrías Tipo I:

$$S_{ab}^{(I)} = \begin{pmatrix} -(\omega_e - \omega_i)(\omega_e r_e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_e - \omega_i)(\omega_e r_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor energía-momento superficial para las geometrías Tipo II:

$$S_{ab}^{(II)} = \begin{pmatrix} -(\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ r_+) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ r_+) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1. Ecuación de campo para el campo escalar masivo acoplado a la curvatura:

Del mismo modo que hemos hecho en el caso del campo escalar sin masa, obtendremos la ecuación de campo escalar a partir de un principio variacional [77]. Como antes, supondremos una partícula puntual que transporta una carga q moviéndose a lo largo de una línea de universo γ descrita por la relación $x^\mu(t)$ donde t es un parámetro. La partícula genera un campo escalar $\Phi(x)$ cuyo gradiente $\Phi_{,\alpha}(x) = \nabla_\alpha(x)$ determina la fuerza. La dinámica del sistema es gobernada por la acción

$$S = S_{campo} + S_{part} + S_{int}$$

En esta expresión S_{part} es la acción de una partícula libre moviéndose a lo largo de la línea de universo γ en la métrica $g_{\alpha\beta}$:

$$S_{part} = -m_0 \int_{\gamma} d\tau$$

donde la integral se extiende a la línea de universo γ de la partícula, m_0 es la *masa desnuda* de la partícula, $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$ es el diferencial de tiempo propio a lo largo de la línea de universo y el punto indica derivación respecto del tiempo.

El término de interacción S_{int} entre la partícula y el campo es:

$$S_{int} = q \int_{\gamma} \Phi(z) d\tau = q \int \Phi(x) \delta_4(x, z) \sqrt{-g} d^4x d\tau$$

En este caso en lugar de la acción del campo (15) tenemos una acción S_{campo} que incluye un término que tiene en cuenta su masa m :³²

$$S_{campo} = -\frac{1}{8\pi} \int (g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + \xi R \Phi^2 + m^2 \Phi^2) \sqrt{-g} d^4x \quad (117)$$

donde la integral se extiende a todo el espacio, el campo se acopla a la curvatura (escalar de Ricci) mediante un parámetro constante arbitrario ξ y, por tratarse de un campo escalar, $\Phi_{,\mu}$ es la derivada (ordinaria) del campo Φ respecto de la coordenada x^μ .

Para hallar la ecuación de campo solicitamos que la acción total sea estacionaria por variaciones $\delta\Phi(x)$ del campo. Obtenemos la siguiente ecuación para el campo escalar masivo acoplado a la curvatura:

$$\{\square - \xi R - m^2\} \Phi = -4\pi\mu(x) \quad (118)$$

donde ξ es la constante de acoplamiento entre el campo escalar Φ y la curvatura del espacio tiempo R , m es la masa del campo escalar, y donde

$$\mu(x) = q \frac{\delta^3(\vec{x} - (\vec{x})')}{\sqrt{g^{(3)}}} \int \frac{\delta(t - t')}{\sqrt{g_{tt}}} d\tau$$

siendo $\delta^3(\vec{x} - (\vec{x})')$ la distribución espacial de Dirac y x' la posición de la carga de prueba. Para el caso estático la ecuación de campo (118) se reduce a

$$\{\square - \xi R - m^2\} \Phi = -4\pi q \frac{\delta^3(\vec{x} - (\vec{x})')}{\dot{x}^0 \sqrt{g^{(3)}}} \quad (119)$$

donde $\dot{x}^0 = dt/d\tau$. El D'Alembertiano \square para una métrica diagonal y estática general en coordenadas cilíndricas ya ha sido evaluado en la sección 3.2 donde obtuvimos la expresión (21) que repetimos a continuación:

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r) + \partial_\phi (\sqrt{-g} g^{\phi\phi} \partial_\phi) + \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z) \right\} \Phi$$

³²Ver nota 11. Un argumento análogo conduciría a la condición $\xi R + m^2 \geq 0$.

Introduciendo esta última expresión en (119) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r) + \partial_\phi (\sqrt{-g} g^{\phi\phi} \partial_\phi) + \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z) \right\} \Phi \\ = -4\pi q \frac{\delta(\vec{x} - (\vec{x})')}{\sqrt{g^{(3)}}} + (\xi R + m^2) \Phi \end{aligned}$$

Desarrollando el campo Φ y la función $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ en funciones cilíndricas ortonormales obtenemos para el lado derecho de la ecuación:

$$\begin{aligned} -q \sqrt{-g_{tt}} \delta(r - r') \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \sum_0^\infty a_n \cos[n(\phi - \phi')] \\ + (\xi R + m^2) q \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \sum_0^\infty a_n \cos[n(\phi - \phi')] \chi_n(k, r) \sqrt{-g} \end{aligned}$$

En la última expresión el valor de a_n viene dado por la expresión (26):

$$a_n = \begin{cases} 2/\pi & \text{if } n = 0 \\ 4/\pi & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$

Simplificando términos semejantes encontramos que la ecuación de campo se reduce a su parte radial:

$$\begin{aligned} \left\{ [\partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r)] - \sqrt{-g} [g^{\phi\phi} n^2 + g^{zz} k^2] \right\} \chi_n(k, r) \\ = -\sqrt{-g_{tt}} \delta(r - r') + [(\xi R + m^2) \sqrt{-g}] \chi_n(k, r) \end{aligned} \quad (120)$$

donde r' es la posición radial de la carga. La última es una ecuación general para cualquier métrica cilíndrica, estática y diagonal. Para el caso particular de la métrica (6) se escribe:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho(r) \frac{\partial}{\partial r} \right] - \rho(r) \left[\left(\frac{n}{\rho(r)} \right)^2 + k^2 + m^2 \right] \right\} \chi_n(k, r) = -\delta(r - r') + \rho(r) \xi R(r) \chi_n(k, r) \quad (121)$$

o bien

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho(r) \frac{\partial}{\partial r} \right] - \rho(r) \left[\left(\frac{n}{\rho(r)} \right)^2 + \eta^2 \right] \right\} \chi_n(\eta, r) = -\delta(r - r') + \rho(r) \xi R(r) \chi_n(\eta, r) \quad (122)$$

donde

$$\eta = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (123)$$

La ecuación (122) es idéntica a la ecuación (29) de la primera parte, con la salvedad de que el término η contiene a la masa del campo escalar y las funciones χ dependen de η . Se trata de una ecuación homogénea en todas partes salvo en la posición de la carga $r = r'$ y en la posición de la shell $r = r_s$.³³

³³En el caso de las geometrías Tipo I existe también una singularidad en $r = 0$. Ver nota 10.

4.2. Condiciones de contorno sobre la función radial en la posición de la carga y en la cáscara.

Procedemos como hemos hecho para el caso del campo escalar no masivo (ver sección 3.3):

- Integramos m.a.m. la expresión (120) en un entorno $r_0 \pm \varepsilon$ con $\varepsilon \rightarrow 0$ para un punto genérico r_0 que puede ser
 - $r_0 = r_s$: la posición de la *thin shell* donde se pegan las dos soluciones (que en el caso de un *wormhole* coincide con la posición de su garganta)
 - $r_0 = r'$: la posición de la carga.

- Para evaluar el segundo término del lado izquierdo tenemos en cuenta que las componentes $g^{\phi\phi}$ y g^{zz} son funciones continuas de r en todas partes, incluso sobre la *thin shell*. Esta propiedad se deriva de la primera condición de juntura de Israel que nos garantiza la continuidad de la métrica inducida sobre la cáscara a ambos lados de la misma.³⁴ Por lo tanto el segundo término del lado izquierdo de (120) es la integral de una función continua en un intervalo nulo y vale cero.

- El primer término del lado izquierdo de (120) es idéntico al obtenido en la ecuación (28) para el caso no masivo, de manera que podemos usar los resultados obtenidos en la sección 3.3.

- Con estas simplificaciones la integral del lado izquierdo de (120) se reduce a la siguiente expresión:

$$\sqrt{-g(r_0^+)} g^{rr}(r_0^+) \left[\frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r_0^+} - \sqrt{-g(r_0^-)} g^{rr}(r_0^-) \left[\frac{\partial \chi_n(k, r)}{\partial r} \right]_{r_0^-} \quad (124)$$

El lado derecho de (120) va a cambiar respecto de su análogo (28) para el campo no masivo debido a la presencia de la masa m del campo. Integramos m.a.m.:

$$-\sqrt{-g_{tt}} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r - r') dr + \xi \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} R \sqrt{-g} \chi_n(k, r) dr + m^2 \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \sqrt{-g} \chi_n(k, r) dr$$

Tal como en el caso del campo escalar sin masa, el primer término es

$$-\sqrt{-g_{tt}} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r - r') dr = \begin{cases} 0 & \text{si } r_0 \neq r' \\ -\sqrt{-g_{tt}} & \text{si } r_0 = r' \end{cases}$$

que es nulo en todas partes salvo en la posición de la carga r' . El segundo término contiene al escalar de curvatura (11). En virtud de la función δ este segundo término se anula en todas partes salvo en la posición de la cáscara. En el caso presente hay además un tercer término que contiene a la masa m del campo escalar. En este término la masa m es constante. Suponiendo que el determinante de la métrica $\sqrt{-g}$ es continuo y que

³⁴Ver nota 14 y Apéndice I.

la función χ es también continua en todas partes, entonces este último término es nuevamente la integral de una función continua sobre un intervalo nulo y vale cero.

Finalmente, combinando estos resultados obtenemos una expresión análoga a la ecuación (34) obtenida para el acoplamiento con un campo escalar no masivo:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g(r_0^+)} g^{rr}(r_0^+) \left[\frac{\partial \chi_n(\eta, r)}{\partial r} \right]_{r_0^+} - \sqrt{-g(r_0^-)} g^{rr}(r_0^-) \left[\frac{\partial \chi_n(\eta, r)}{\partial r} \right]_{r_0^-} \\ &= -\sqrt{-g_{tt}} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r-r') dr + \xi \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} R \sqrt{-g} \chi_n(\eta, r) dr \end{aligned} \quad (125)$$

donde recordamos que $\eta = \sqrt{k^2 + m^2}$. Evaluando la ecuación en la posición de la carga y en la posición de la cáscara se obtienen nuevamente las condiciones de discontinuidad de la derivada radial en estos puntos:

- en la posición de la carga $r_0 = r'$

$$\left. \frac{\partial \chi_n(\eta, r)}{\partial r} \right|_{r'^-}^{r'^+} = -\frac{\sqrt{g_{tt}(r')}}{\sqrt{-g(r')} g^{rr}(r')} \quad (126)$$

- en la posición de la cáscara $r_0 = r_s$

$$\left. \frac{\partial \chi_n(\eta, r)}{\partial r} \right|_{r_s^-}^{r_s^+} = \frac{-2 \xi \kappa(r_s)}{g^{rr}(r_s)} \chi_n(\eta, r) \Big|_{r=r_s} \quad (127)$$

Para el caso particular de la métrica (6) estas últimas expresiones se reducen a condiciones análogas a las ecuaciones (38) y (39) que ya hemos hallado en la primera parte:

- **en la posición de la carga** $r_0 = r'$

$$\left[\frac{\partial \chi_n(\eta, r)}{\partial r} \right]_{r=r'^-}^{r=r'^+} = -\frac{1}{\rho(r')} \quad (128)$$

- **en la posición de la cáscara** $r_0 = r_s$

$$\left[\frac{\partial \chi_n(\eta, r)}{\partial r} \right]_{r=r_s^-}^{r=r_s^+} = -2 \xi \kappa \chi_n(\eta, r) \Big|_{r=r_s} \quad (129)$$

Solicitamos también la continuidad de la solución en la posición de la *shell*:

$$\chi_n(\eta, r_s) = \begin{cases} \chi_n^{(i)}(\eta, r_i) = \chi_n^{(e)}(\eta, r_e) & \text{para las geometrías Tipo I} \\ \chi_n^{(-)}(\eta, r_-) = \chi_n^{(+)}(\eta, r_+) & \text{para las geometrías Tipo II} \end{cases} \quad (130)$$

Como antes, $\chi_n^{(i)}(\eta, r)$ y $\chi_n^{(e)}(\eta, r)$ son, respectivamente, las soluciones radiales para el campo escalar masivo en las sub-variedades \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 de las geometrías Tipo I; y

$\chi_n^{(+)}(\eta, r)$ y $\chi_n^{(-)}(\eta, r)$ son, respectivamente, las soluciones radiales para las sub-variedades \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- de las geometrías Tipo II. Las condiciones de continuidad para la solución radial en la posición de la carga se verán más adelante.

Se solicita también la no divergencia asintótica y en el origen de la solución. Como resultado de esta restricción, la solución radial será una combinación de las funciones modificadas de Bessel de orden $v = n/\omega$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$K_v(\eta r_>) \text{ y } I_v(\eta r_<); \quad \text{donde } r_> = \max\{r; r'\}; r_< = \min\{r; r'\}$$

4.3. Aplicación de las condiciones de contorno y cálculo de los coeficientes.

Para las geometrías Tipo I definimos las funciones interior y exterior como

$$\chi_n(\eta, r) = \begin{cases} \chi^i(r_1) & \text{para } \mathcal{M}_1 \\ \chi^e(r_2) & \text{para } \mathcal{M}_2 \end{cases} \quad (131)$$

donde

$$r = \begin{cases} r_1; & 0 < r < r_i & \text{para } \mathcal{M}_1 \\ r_2 + r_i - r_e; & r_i < r < \infty & \text{para } \mathcal{M}_2 \end{cases} \quad (132)$$

4.3.1. Geometrías Tipo I con la carga en la región interior.

La ubicación de la carga corresponde a la figura 12 y las funciones radiales son:

$$\chi_n^{(i)}(\eta, r_1) = \begin{cases} \frac{D_n(\eta)}{\omega_i} I_\lambda(\eta r_1) & \text{si } 0 \leq r_1 < r'_1 \\ \frac{A_n(\eta)}{\omega_i} I_\lambda(\eta r_1) + \frac{B_n(\eta)}{\omega_i} K_\lambda(\eta r_1) & \text{si } r'_1 < r_1 < r_i \end{cases} \quad (133)$$

$$\chi_n^{(e)}(\eta, r_2) = \frac{C_n(\eta)}{\omega_i} K_\nu(\eta r_2); \quad r_e < r_2 \quad (134)$$

donde

$$\lambda = \frac{n}{\omega_i}; \quad \nu = \frac{n}{\omega_e}; \quad \eta = \sqrt{k^2 + m^2}; \quad (135)$$

Imponiendo las condiciones (128) a (130) se obtienen los siguientes coeficientes:

$$A_n(\eta) = -I_\lambda(\eta r'_1)$$

$$\times \frac{\{K_\lambda(\eta r_i) K'_\nu(\eta r_e) - K_\nu(\eta r_e) K'_\lambda(\eta r_i) + 2 \xi \kappa K_\nu(\eta r_e) K_\lambda(\eta r_i)\}}{\{I_\lambda(\eta r_i) K'_\nu(\eta r_e) - K_\nu(\eta r_e) I'_\lambda(\eta r_i) + 2 \xi \kappa K_\nu(\eta r_e) I_\lambda(\eta r_i)\}} \quad (136)$$

$$B_n(\eta) = I_\lambda(\eta r'_1) \quad (137)$$

$$C_n(\eta) = \frac{I_\lambda(\eta r_i) A_n(\eta) + I_\lambda(\eta r'_1) K_\lambda(\eta r_i)}{K_\nu(\eta r_e)} \quad (138)$$

$$D_n(\eta) = \frac{A_n(\eta) I_\lambda(\eta r'_1) + B_n(\eta) K_\lambda(\eta r'_1)}{I_\lambda(\eta r'_1)} \quad (139)$$

En las expresiones anteriores r' es la posición de la carga; y K' y I' son las derivadas de las funciones de Bessel K, I respecto de su argumento.

4.3.2. Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior.

En este caso la carga se ubica como indica la figura 13. Las correspondientes funciones radiales son:

$$\chi_n^{(i)}(\eta, r_1) = \frac{D_n^*(\eta)}{\omega_e} I_\lambda(\eta r_1); \quad 0 < r_1 < r_i \quad (140)$$

$$\chi_n^{(e)}(\eta, r_2) = \begin{cases} \frac{A_n^*(\eta)}{\omega_e} I_\nu(\eta r_2) + \frac{B_n^*(\eta)}{\omega_e} K_\nu(\eta r_2) & \text{si } r_e < r_2 < r'_2 \\ \frac{C_n^*(\eta)}{\omega_e} K_\nu(\eta r_2) & \text{si } r_2 > r'_2 \end{cases} \quad (141)$$

donde λ, ν y η se enumeran en (135) y $r'_2 = r' - r_i + r_e$. Imponiendo las condiciones (128) a (130) se obtienen los siguientes coeficientes:

$$A_n^*(\eta) = K_\nu(\eta r'_2) \quad (142)$$

$$B_n^*(\eta) = -K_\nu(\eta r'_2) \times \frac{\{I_\lambda(\eta r_i)[I'_\nu(\eta r_e) + 2 \xi \kappa(r_s) I_\nu(\eta r_e)] - I_\nu(\eta r_e) I'_\lambda(\eta r_i)\}}{\{I_\lambda(\eta r_i)[K'_\nu(\eta r_e) + 2 \xi \kappa(r_s) K_\nu(\eta r_e)] - K_\nu(\eta r_e) I'_\lambda(\eta r_i)\}} \quad (143)$$

$$C_n^*(\eta) = \frac{A_n^*(\eta) I_\nu(\eta r'_2) + B_n^*(\eta) K_\nu(\eta r'_2)}{K_\nu(\eta r'_2)} \quad (144)$$

$$D_n^*(\eta) = \frac{K_\nu(\eta r'_2) I_\nu(\eta r_e) + B_n^*(\eta) K_\nu(\eta r_e)}{I_\lambda(\eta r_i)} \quad (145)$$

Como antes, r' es la posición de la carga y K' y I' son las derivadas de las funciones de Bessel K, I respecto de su argumento.

4.3.3. Geometrías Tipo II: agujeros de gusano de tipo *thin-shell*.

Por simplicidad consideraremos únicamente agujeros de gusano simétricos respecto de la garganta. La ubicación de la carga y de la garganta se indican en la figura 14. Definimos las funciones como

$$\chi_n(\eta, r) = \begin{cases} \chi^-(r_1) & \text{para } \mathcal{M}_- \\ \chi^+(r_2) & \text{para } \mathcal{M}_+ \end{cases} \quad (146)$$

donde

$$r = \begin{cases} r_- - r_1 & \text{para } \mathcal{M}_- \text{ con parámetro } \omega_- \\ r_2 - r_+ & \text{para } \mathcal{M}_+ \text{ con parámetro } \omega_+ \end{cases} \quad (147)$$

Las funciones radiales para este caso son

$$\chi_n^{(-)}(\eta, r_1) = \frac{E_n(\eta)}{\omega_+} K_\lambda(\eta r_1); \quad r_- < r_1 \quad (148)$$

$$\chi_n^{(+)}(\eta, r_2) = \begin{cases} \frac{H_n(\eta)}{\omega_+} K_\nu(\eta r_2) & \text{si } r_2 > r'_2 \\ \frac{P_n(\eta)}{\omega_+} I_\nu(\eta r_2) + \frac{W_n(\eta)}{\omega_+} K_\nu(\eta r_2) & \text{si } r_+ < r_2 < r'_2 \end{cases} \quad (149)$$

donde

$$\lambda = \frac{n}{\omega_-}; \quad \nu = \frac{n}{\omega_+}; \quad \eta = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (150)$$

Imponiendo las condiciones de continuidad en la posición de la carga y en la *shell*, y el salto en la derivada normal se obtienen los siguientes coeficientes:

$$E_n(\eta) = \frac{I_\nu(\eta r_+) K_\nu(\eta r'_2) + W_n(\eta) K_\nu(\eta r_+)}{K_\lambda(\eta r_-)} \quad (151)$$

$$H_n(\eta) = \frac{P_n(\eta) I_\nu(\eta r'_2) + W_n(\eta) K_\nu(\eta r'_2)}{K_\nu(\eta r'_2)} \quad (152)$$

$$P_n(\eta) = K_\nu(\eta r'_2) \quad (153)$$

$$W_n(\eta) = -K_\nu(\eta r'_2)$$

$$\times \left\{ \frac{I'_\nu(\eta r_+) K_\lambda(\eta r_-) + I_\nu(\eta r_+) K'_\lambda(\eta r_-) + 2 \xi \kappa I_\nu(\eta r_+) K_\lambda(\eta r_-)}{K'_\nu(\eta r_+) K_\lambda(\eta r_-) + K_\nu(\eta r_+) K'_\lambda(\eta r_-) + 2 \xi \kappa K_\nu(\eta r_+) K_\lambda(\eta r_-)} \right\} \quad (154)$$

En las expresiones anteriores r' denota la posición de la carga; r_+ es la posición de la *shell* para la sub-variedad \mathcal{M}_+ ; r_- es la posición de la *shell* para la sub-variedad \mathcal{M}_- ; K' e I' indican las derivadas de las funciones de Bessel respecto de su argumento.

4.4. Regiones de estabilidad y configuraciones de resonancia

Como hemos visto en la sección 3.4, las soluciones de la ecuación de campo pueden volverse inestables si se incluye un campo escalar acoplado a la gravedad con una constante de acoplamiento distinta de cero. Por esa razón se hace necesario encontrar las divergencias y definir zonas de estabilidad para la solución. Según veremos enseguida, debido a la presencia de la masa las regiones de estabilidad son diferentes a las halladas en el caso no masivo.

La ecuación de campo (118) para la función de Green estática y escalar en tres dimensiones se escribe

$$(\square - \xi R - m^2)G = -\frac{\delta^3(\vec{x} - (\vec{x}')}{\sqrt{-g}} \quad (155)$$

donde ³⁵

$$G = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos[n(\theta - \theta')]}{1 + \delta_{0,n}} \int_0^{+\infty} dk \cos[k(z - z')] \chi_n(\eta, r) \quad (156)$$

y donde la dependencia respecto del autovalor k aparece en $\eta = \sqrt{k^2 + m^2}$. La solución radial $\chi_n(\eta, r)$ se encuentra expresada en términos de los coeficientes (136) - (139), (142) - (145) y (151) - (154) que hemos hallado en la sección anterior. Para algunos valores específicos $\xi_p^{(n)}$ de la constante de acoplamiento estos coeficientes pueden hacerse divergentes en el autovalor $k = k_p$. En ese caso la integral (156) presentará un polo en $k = k_p$ para el modo n -ésimo.

Para hallar $\xi_p^{(n)}$ en las geometrías Tipo I igualamos a cero el denominador de las expresiones (136) y (143) obteniendo en ambos casos el siguiente resultado:

$$\xi_p^{(n)} = \left. \frac{K_\nu(\eta r_e) I'_\lambda(\eta r_i) - I_\lambda(\eta r_i) K'_\nu(\eta r_e)}{2 \kappa K_\nu(\eta r_e) I_\lambda(\eta r_i)} \right|_{k=k_p} \quad (157)$$

Para las geometrías Tipo II, el valor de $\xi_p^{(n)}$ se obtiene de (154):

$$\xi_p^{(n)} = - \left. \frac{K'_\nu(\eta r_+) K_\lambda(\eta r_-) + K_\nu(\eta r_+) K'_\lambda(\eta r_-)}{2 \kappa(r_s) K_\nu(\eta r_+) K_\lambda(\eta r_-)} \right|_{k=k_p} \quad (158)$$

Del mismo modo que en el caso no masivo, existen dos posibilidades. Si el polo se presenta para $k = k_p > 0$ la integral puede resolverse cortándola en $k \pm \varepsilon$ con $\varepsilon \rightarrow 0$ y cancelando las contribuciones a ambos lados de este límite. Pero también puede aparecer un modo resonante si existe algún valor de la constante de acoplamiento tal que el n -ésimo coeficiente se hace divergente para $k = 0$. El acoplamiento crítico $\xi_c^{(n)} = \xi_p^{(n)}|_{k=0}$ que genera un modo n -ésimo resonante se obtiene haciendo $k = 0$ en (157) y (158):

- para las geometrías Tipo I:

$$\xi_c^{(n)} = \frac{K_\nu(m r_e) I'_\lambda(m r_i) - I_\lambda(m r_i) K'_\nu(m r_e)}{2 \kappa K_\nu(m r_e) I_\lambda(m r_i)} \quad (159)$$

³⁵La delta de Kronecker $\delta_{0,n}$ tiene en cuenta el factor de normalización 1/2 del modo cero respecto a las otras funciones en la coordenada angular θ .

- para las geometrías Tipo II:

$$\xi_c^{(n)} = -\frac{K'_\nu(m r_+) K_\lambda(m r_-) + K_\nu(m r_+) K'_\lambda(m r_-)}{2 \kappa(r_s) K_\nu(m r_+) K_\lambda(m r_-)} \quad (160)$$

Para estudiar la autofuerza del campo escalar resulta conveniente trabajar con soluciones que no presenten polos ni configuraciones resonantes. Para eso debemos hallar los rangos de ξ para los cuales no surgen estos problemas.

Las figuras 32 y 33 muestran gráfico de $\xi_p^{(n)}$ versus $r_i \eta$ para geometrías Tipo I. Cada punto en una curva $\xi_p^{(n)}$ representa una divergencia en el n -ésimo coeficiente para los correspondientes valores de ξ y $r_i \eta$ y para un determinado autovalor k . Para analizar una configuración particular debemos fijar el producto $m r_i$. La intersección de las curvas con la línea vertical $r_i \eta|_{k=0} = m r_i$ representa los valores críticos (159) de la constante de acoplamiento. A la derecha de esta línea las curvas representan valores de la constante de acoplamiento (157) para los cuales aparecen polos para algún valor de $k > 0$.

La figura 32 corresponde a una geometría Tipo I caracterizada por $\omega_i = 1$, $\omega_e = 0,9$ ($\kappa < 0$) y $m r_i = 1$. Para esta configuración el valor $\xi_c^{(0)}|_{m r_i=1} \simeq -9,2$ es el mayor acoplamiento crítico para el cual se producen divergencias; por lo tanto aquellos valores de la constante de acoplamiento tales que $\xi > \xi_c^{(0)}|_{m r_i=1}$ no generan configuraciones de resonancia. Esto permite definir una zona de seguridad, que en el gráfico se ha coloreado de gris. No existen curvas $\xi_p^{(n)}$ que intersecten con el área gris lo que garantiza que al aumentar el autovalor k manteniendo fijo el producto $m r_i = 1$ no aparecerán polos para ningún coeficiente n en la región de seguridad. La figura 33 muestra, también en gris, el dominio de seguridad para una geometría Tipo I tal que $\omega_i = 0,9$, $\omega_e = 1$ ($\kappa > 0$) y $m r_i = 1$. En este caso $\xi_c^{(0)}|_{m r_i=1} \simeq 8,6$ es el valor crítico más pequeño de la constante de acoplamiento, de modo que los valores $\xi < \xi_c^{(0)}|_{m r_i=1}$ caen dentro de la región estable para estas configuraciones.

Análogamente, para geometrías Tipo II con parámetros ω_\pm y radio de garganta r_0 se grafica $\xi_p^{(n)}$ versus $r_0 \eta$. En la figura 34 se representan dos casos, correspondientes a un *wormhole* simétrico de Minkowski ($\omega_\pm = 1$) y a un *wormhole* simétrico cónico ($\omega_\pm = 0,9$), siendo $r_0 = (r_- + r_+)/2 = r_\mp$. El dominio seguro, sombreado en gris, es válido para ambas configuraciones y para $m r_0 = 1$. Los valores de la constante de acoplamiento $\xi < \xi_c^{(0)}|_{m r_0=1} \simeq 0,7$ no generan configuraciones inestables.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, el valor $\xi_c^{(0)}$ es siempre el menor (mayor) acoplamiento crítico para $\kappa < 0$ ($\kappa > 0$). En consecuencia, determina el límite de estabilidad de las soluciones. Por otra parte, para los casos $\kappa < 0$ no existe un límite superior para los valores de ξ mientras que para los casos $\kappa > 0$ no hay un límite inferior. Esto implica que al imponer la restricción $\xi > \xi_c^{(0)}$ para geometrías con cáscaras de materia ordinaria, o el límite $\xi < \xi_c^{(0)}$ para las de materia exótica, las respectivas configuraciones son estables. Por otra parte, tanto para las geometrías Tipo I como para las Tipo II el rango de estabilidad para ξ aumenta a medida que el producto $m r_i$ o $m r_0$ crece. Esto último puede apreciarse en las figuras 32, 33 y 34. Por ejemplo, si en la figura 32 elegimos un valor $m r_i = 2$, el límite inferior de la zona de estabilidad se desplaza hacia abajo de modo que todos aquellos valores de la constante de acoplamiento tales

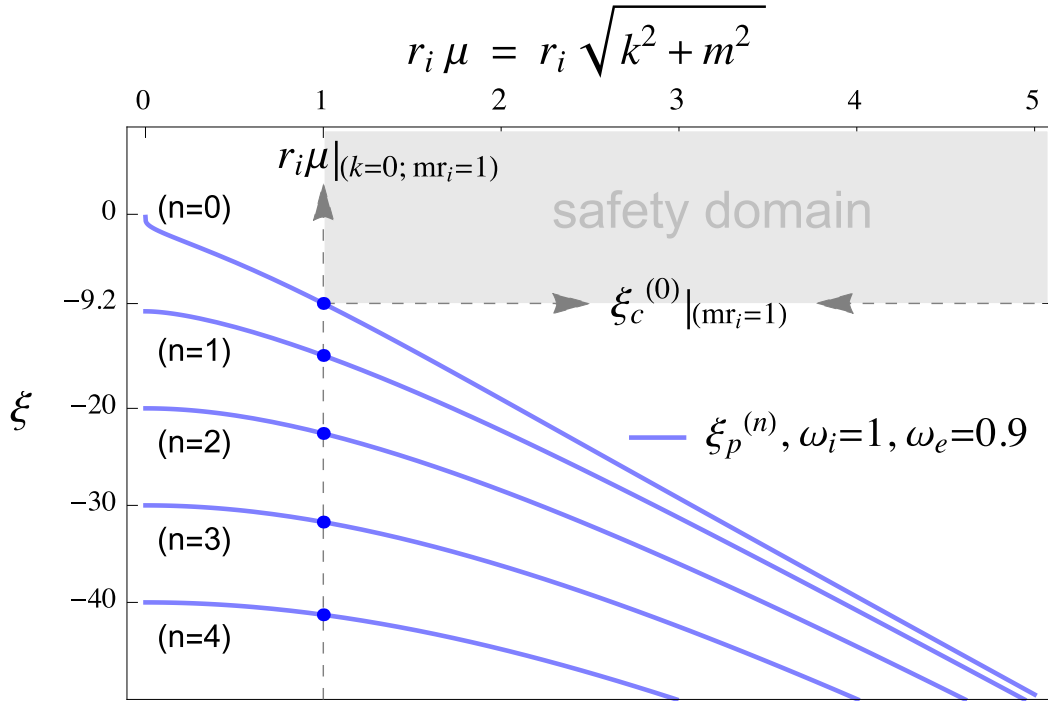


Figura 32: Valores de la constante de acoplamiento ξ para geometrías Tipo I correspondientes a una *shell* de materia ordinaria ($\omega_i = 1; \omega_e = 0,9; \kappa < 0$). La elección de una constante de acoplamiento dentro del dominio seguro garantiza que no aparecerán polos en los coeficientes.

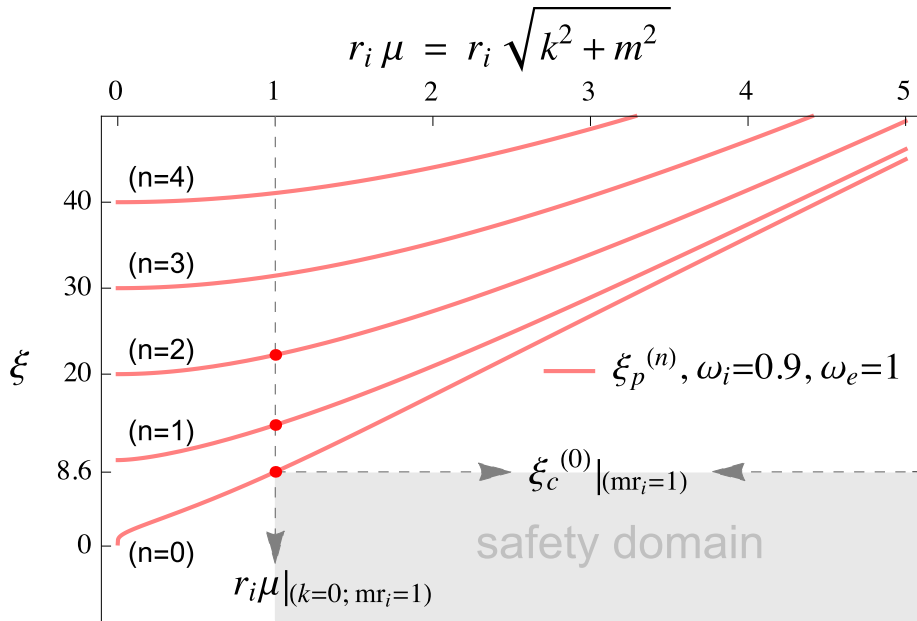


Figura 33: Valores de la constante de acoplamiento ξ para geometrías Tipo I correspondientes a una *shell* de materia exótica ($\omega_i = 0,9; \omega_e = 1; \kappa > 0$). La elección de una constante de acoplamiento dentro del dominio seguro garantiza que no aparecerán polos en los coeficientes.

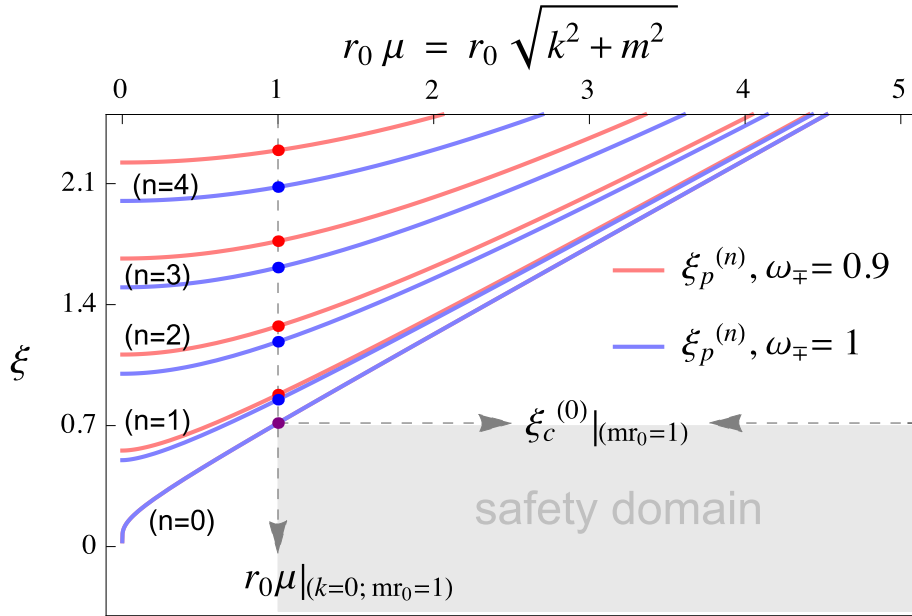


Figura 34: Valores de la constante de acoplamiento ξ para geometrías Tipo II correspondientes a agujeros de gusano simétricos para $mr_0 = 1$. La elección de una constante de acoplamiento dentro del dominio seguro garantiza que no aparecerán polos en los coeficientes.

que $\xi > \xi_c^{(0)}|_{mr_i=2}$ permiten obtener configuraciones estables (figura 35).

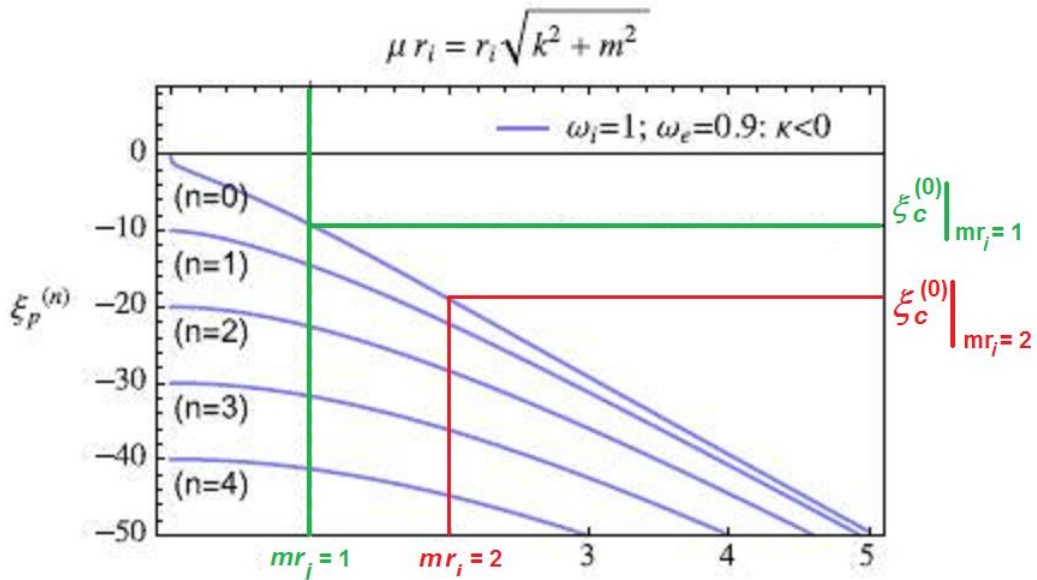


Figura 35: Valores de la constante de acoplamiento ξ para geometrías Tipo I caracterizadas por los parámetros $\omega_i = 1$ y $\omega_e = 0,9$ ($\kappa < 0$). Al aumentar el valor de mr_i el limite inferior de la zona de estabilidad se desplaza hacia abajo ampliando las posibilidades de elegir valores de ξ que no generen configuraciones inestables.

Los siguientes desarrollos

$$\xi_p^{(n)} \simeq \frac{\omega_i}{\omega_e - \omega_i} \eta r_i + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta r_i}\right) \approx \frac{\eta}{\kappa}; \quad \eta \gg r_i^{-1}; \quad \text{Tipo I}$$

$$\xi_p^{(n)} \sim \frac{2\omega_- \omega_+}{(\omega_+ + \omega_-)^2} \eta r_0 + \frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta r_0}\right) \approx \frac{\eta}{\kappa}; \quad \eta \gg r_0^{-1}; \quad \text{Tipo II}$$

también permiten apreciar que el rango de estabilidad de la constante de acoplamiento aumenta al aumentar el producto mr_i o mr_0 , ya que si se mantienen fijos los parámetros $\omega_{i,e}$, ω_{\pm} y $r_{i,0}$ el valor absoluto $|\xi_p^{(n)}|$ crece al incrementarse la masa del campo escalar. Inversamente, el rango de los acoplamientos que producen configuraciones estables decrece si la masa del campo escalar es pequeña en comparación con el recíproco del radio de la cáscara:

$$\xi_c^{(n)} \approx \frac{n}{\kappa \rho(r_s)}; \quad m \ll r_i^{-1} \quad \text{ó} \quad m \ll r_0^{-1}.$$

Observamos que para $\eta \ll 1$:

$$\xi_p^{(n)} \sim \frac{n}{\omega_2 \pm \omega_1} + \mathcal{O}(\eta).$$

Haciendo $\eta \rightarrow 0$ en la última expresión se recupera el acoplamiento crítico $\xi_c^{(n)} = n/(\omega_2 \pm \omega_1)$ para el caso de un campo escalar sin masa acoplado a una variedad cónica de *thin shell*, ecuaciones (85) a (89).

4.5. Renormalizacion

En este caso, para renormalizar la solución correspondiente al campo escalar masivo, aplicaremos los resultados de M. E. X. Guimaraes y B. Linet [39]. A continuación explicaremos el procedimiento a seguir.

En el entorno de la carga, la solución puede escribirse como

$$\Phi|_{r'} = \Phi_{\omega}|_{r'} + \Phi_{\xi} \tag{161}$$

donde r' es la posición radial de la carga. En la expresión anterior Φ_{ξ} tiene en cuenta el acoplamiento entre el campo y el escalar de curvatura y es regular en $x' = (r', \theta', z')$. El otro término, Φ_{ω} , es el campo escalar; contiene una parte que es singular y otra que es regular:

$$\Phi_{\omega}|_{r'} = \Phi_{\omega}^{Sing}|_{r'} + \Phi_{\omega}^{reg}|_{r'} \tag{162}$$

Introduciendo (162) en (161) podemos escribir el campo como

$$\Phi|_{r'} = \Phi_{\omega}^{Sing}|_{r'} + \Phi_{\omega}^{reg}|_{r'} + \Phi_{\xi} \tag{163}$$

donde la parte singular del campo es $\Phi_{\omega}^{Sing}|_{r'}$ y la parte regular es:

$$\Phi^{reg}|_{r'} = \Phi_{\omega}^{reg}|_{r'} + \Phi_{\xi} \tag{164}$$

Podemos reescribir esta última expresión usando la ecuación (162):

$$\Phi^{reg}|_{r'} = (\Phi_\omega|_{r'} + \Phi_\xi) - \Phi_\omega^{Sing}|_{r'}$$

de modo que para obtener la solución regular debemos restar la parte singular del campo de la carga. Esta operación debe hacerse en el límite de coincidencia que aproxima la coordenada del punto x a la posición de la carga x' a lo largo de la geodésica más corta que conecta ambos puntos:

$$\Phi^{reg}|_{x \rightarrow x'} = \lim_{x \rightarrow x'} [\Phi_\omega - \Phi_\omega^{Sing} + \Phi_\xi] = \lim_{x \rightarrow x'} [\Phi_\omega^{reg} + \Phi_\xi] \quad (165)$$

Escribimos la parte regular del campo de la carga en términos de la función de Green regular:

$$\Phi_\omega^{reg}|_{x \rightarrow x'} = 4\pi q G_\omega^{reg}|_{x \rightarrow x'} \quad (166)$$

donde

$$G_\omega^{reg}|_{x \rightarrow x'} = \lim_{x \rightarrow x'} [G_\omega - G_\omega^{Sing}] \quad (167)$$

En la última expresión G_ω es la función de Green correspondiente a la cuerda cósmica infinitamente delgada en tres dimensiones espaciales para el caso de un campo escalar masivo y G_ω^{Sing} es la correspondiente función de Green para el campo singular. Como localmente la métrica de la cuerda cósmica es idéntica a la métrica con la que estamos trabajando, podemos utilizar $G_\omega^{reg}|_{x \rightarrow x'}$ para renormalizar el campo en la posición de la carga. Reemplazando estos resultados en la ecuación (165) obtenemos la expresión para el campo regular en la posición de la carga:

$$\Phi^{reg}|_{x=x'} = \{\Phi_\omega^{reg}|_{x=x'}\} + \Phi_\xi = \{4\pi q G_\omega^{reg}|_{x \rightarrow x'}\} + \Phi_\xi \quad (168)$$

Teniendo en cuenta estas cuestiones el proceso a seguir para la renormalización será el siguiente:

- **a)** En primer lugar necesitamos la **función de Green de la cuerda cósmica G_ω para el caso de un campo escalar masivo**. Esta función ya ha sido calculada por Guimaraes y Linet [39]. Comprobaremos que estos resultados pueden aplicarse a nuestro análisis verificando que cuando $m = 0$ los resultados hallados en [39] se reducen a nuestra ecuación (93), que es la función de Green de la cuerda cósmica para el caso no masivo. Esta comprobación la haremos en la sección 4.5.1.

- **b)** Una vez hallada la función de Green de la cuerda cósmica G_ω deberíamos restarle la función de Green singular G_ω^{Sing} en el límite de coincidencia para obtener la **función de Green regular G_ω^{reg}** , tal como se indica en la ecuación (167). Sin embargo, como esta operación también se encuentra resuelta en [39], podríamos aplicar estos resultados a nuestro trabajo. Para eso debemos demostrar que la función de Green singular evaluada en [39] corresponde, efectivamente, al caso que estamos analizando. Haremos esta verificación en la sección 4.5.2. Una vez hecho esto estaremos habilitados para utilizar la función de Green regular G_ω^{reg} derivada en [39] y calcular Φ_ω^{reg} de acuerdo a (166).

- **c)** Finalmente, en la sección 4.5.3, calcularemos el campo Φ_ξ de la *thin shell* en la posición de la carga para cada uno de los casos analizados y se lo sumaremos al resultado obtenido en el punto **b)**.

4.5.1. La función de Green de la cuerda cósmica para el caso de un campo escalar masivo: forma integral.

Como hemos adelantado, usaremos los conceptos de Guimaraes y Linet [39]. En este trabajo se deriva una expresión integral para la función de Green de la cuerda cósmica correspondiente al caso de un campo escalar masivo en una variedad cónica. Analizaremos si es posible utilizar esta función en nuestro caso. ³⁶

La expresión integral y cerrada de la función de Green que es solución de la ecuación covariante de Laplace para un campo escalar masivo en el espacio tiempo de una cuerda cósmica y en tres dimensiones es la siguiente:

$$G_\gamma^{(3)} = \frac{1}{4\pi^2 B (2\rho\rho_0)^{1/2}} \times \int_{\varsigma_3}^{\infty} \frac{\cos[m(2\rho\rho_0)^{1/2}(\cosh y - \cosh \varsigma_3)^{1/2}]}{(\cosh y - \cosh \varsigma_3)^{1/2}} g_\gamma^{(2)}(y, \varphi - \varphi_0) dy \quad (169)$$

La constante B viene dada por la relación

$$B = 1 - \frac{4G}{c^2} \vartheta$$

donde ϑ es la densidad lineal de masa de la cuerda cósmica. En unidades naturales $G = c = 1$ queda

$$B = 1 - 4\vartheta = \omega$$

siendo ω el defecto de ángulo. Debe tenerse en cuenta que los resultados de [39] son válidos siempre que $B > 1/2 \Rightarrow \omega > 1/2$. La cantidad ς_3 en (169) se define por la relación

$$\cosh \varsigma_3 = \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (x^1 - x_0^1)^2}{2\rho\rho_0} \quad (170)$$

y el término $g_\gamma^{(2)}(y, \psi)$ es

$$g_\gamma^{(2)}(y, \psi) = \frac{e^{i\psi\gamma} \sinh[y(1-\gamma)/B] + e^{-i\psi(1-\gamma)} \sinh[y\gamma/B]}{\cosh(y/B) - \cos\psi} \quad (171)$$

Haciendo los siguientes cambios en las ecuaciones anteriores:

$$y \rightarrow \zeta; \quad \rho \rightarrow r; \quad \rho_0 \rightarrow r'; \quad x^1 \rightarrow z; \quad x_0^1 \rightarrow z'; \quad (172)$$

$$B \rightarrow \omega; \quad \varsigma_3 \rightarrow u; \quad \varphi \rightarrow \theta; \quad \varphi_0 \rightarrow \theta';$$

obtenemos

$$G_\gamma^{(3)} = \frac{1}{4\pi^2 \omega (2rr')^{1/2}} \times \int_u^\infty \frac{\cos[m(2rr')^{1/2}(\cosh \zeta - \cosh u)^{1/2}]}{(\cosh \zeta - \cosh u)^{1/2}} g_\gamma^{(2)}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \quad (173)$$

³⁶En rigor, en [39] se trabaja con una singularidad lineal de tipo cónico que transporta un flujo magnético; es decir que se trata de un campo escalar masivo interactuando con un flujo magnético Ψ . En nuestro caso no hay flujo magnético de modo que $\Psi = 0$. Como los resultados de [39] siguen siendo válidos para $\Psi = 0$, podemos aplicarlos a nuestro ejemplo.

$$\cosh u = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'} \quad (174)$$

$$g_\gamma^{(2)}(\zeta, \psi) = \frac{e^{i\psi\gamma} \sinh[\zeta(1-\gamma)/\omega] + e^{-i\psi(1-\gamma)} \sinh[\zeta\gamma/\omega]}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos\psi} \quad (175)$$

El valor de γ se define como $\gamma = \Psi/\Psi_0$ donde Ψ es el flujo magnético. En nuestro caso no hay flujo magnético de modo que $\gamma = 0$. Introduciendo este valor y haciendo $\psi \rightarrow (\theta - \theta')$ en la última expresión obtenemos

$$g_0^{(2)}(\zeta, \theta - \theta') = \frac{\sinh[\zeta/\omega]}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\theta - \theta')}$$

Reemplazando en (173) encontramos la **forma integral de la función de Green para la cuerda cósmica en tres dimensiones espaciales**, a la que llamaremos G_ω :

$$G_\omega = \frac{1}{4\pi^2\omega(2rr')^{1/2}} \times \int_u^\infty \frac{\cos[m(2rr')^{1/2}(\cosh\zeta - \cosh u)^{1/2}]}{(\cosh\zeta - \cosh u)^{1/2}} \frac{\sinh[\zeta/\omega]}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\theta - \theta')} d\zeta \quad (176)$$

Haciendo $m = 0$ la última expresión se reduce a:

$$G_\omega^{(m=0)} = \frac{1}{4\pi^2(2rr')^{1/2}} \int_u^\infty \frac{\sinh[\zeta/\omega] d\zeta}{\omega[\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\theta - \theta')](\cosh\zeta - \cosh u)^{1/2}}$$

Esta ecuación coincide con la expresión (93) hallada en la primera parte de la tesis, que es la función de Green para un campo escalar sin masa en la variedad cónica de una cuerda cósmica recta infinitamente delgada.

Los pasos anteriores indican que los resultados de [39] son aplicables al ejemplo que estamos tratando. Por lo tanto escribimos el campo de una carga en la variedad de una cuerda cósmica infinitamente delgada para el caso de un campo escalar masivo como:

$$\Phi_\omega(r) = 4\pi q G_\omega$$

$$\Rightarrow \Phi_\omega(r) = \frac{q}{\pi\sqrt{2rr'}} \times \int_u^\infty \frac{\cos[m(2rr')^{1/2}(\cosh\zeta - \cosh u)^{1/2}]}{[\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\theta - \theta')]} \frac{\sinh(\zeta/\omega)/\omega d\zeta}{(\cosh\zeta - \cosh u)^{1/2}} \quad (177)$$

donde G_ω y $\cosh u$ vienen dados respectivamente por (176) y (174).

4.5.2. Funciones de Green regular y singular para la cuerda cósmica

Como hemos visto, para encontrar la función de Green regular debemos restarle a G_ω la función de Green singular G^{Sing} . Esta última puede deducirse de la siguiente expresión para la función de Green singular correspondiente a una carga puntual en reposo asociada a un campo escalar en una métrica estática [82]:

$$\begin{aligned}
G_S = & \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2\sigma}} - 2m + \frac{1}{m} \left[- \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R(x_0) \right] \right. \\
& + m^2 \sqrt{2\sigma} + \left[- \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R(x_0) \right] \sqrt{2\sigma} + \left(\frac{R_{ij}(x_0)}{6} \right) \frac{\sigma^i \sigma^j}{\sqrt{2\sigma}} \\
& \left. + O \left(\frac{1}{m^2 L^3} \right) + O \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{m L^3} \right) + O \left(\frac{\sigma}{L^3} \right) + O \left(\frac{m \sigma^{3/2}}{L^3} \right) \right\}
\end{aligned}$$

donde $\sigma(x, x')$ es la función del Universo de Synge, que es igual a la mitad del cuadrado de la distancia geodésica entre x y x' medida, en este caso, sobre una geodésica tipo espacio. Su valor para una métrica cilíndrica y estática es

$$\sigma = \frac{1}{s} (\Delta s)^2 = \frac{1}{2} d^2$$

donde

$$d = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2} \quad (178)$$

es la distancia euclídea y donde se han tenido en cuenta los cambios enumerados en (172).

En el límite de coincidencia, donde $z \rightarrow z'$ y $\theta \rightarrow \theta'$, los términos de orden $O(d)$ y superior tienden a cero, $\sigma^i \sigma^j = (d)^2$ y el escalar de curvatura se anula, de modo que G_S se reduce a

$$G_S = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{d} - m \right) + O(d) \quad (179)$$

A continuación compararemos esta expresión para la función de Green singular con la obtenida en Guimaraes y Linet [39] a fin de poder utilizar directamente la expresión de la función de Green regular que se deriva en ese trabajo.

La forma local de la función de Green en n dimensiones hallada en [39] es

$$\begin{aligned}
G_\gamma^{(n)} = & \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{m^{n/2-1}}{r_n^{n/2-1}} K_{n/2-1}(mr_n) \\
& + \frac{m^{n/2-1}}{(2\pi)^{n/2+1} B} \int_0^\infty \frac{K_{n/2-1}[mR_n(y)]}{[R_n(y)]^{n/2-1}} F_B^{(\gamma)}(y, \varphi - \varphi_0) dy
\end{aligned}$$

donde K_η es la función modificada de Bessel de segundo orden,

$$R_n(y) = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \dots + \rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cosh y}$$

y para $\gamma = 0$ es

$$F_B^{(\gamma=0)}(y, \psi) = - \frac{\sin(\psi + \pi/B)}{\cosh(y/B) - \cos(\psi + \pi/B)} + \frac{\sin(\psi - \pi/B)}{\cosh(y/B) - \cos(\psi - \pi/B)}$$

Por último r_n es la distancia euclídea en n dimensiones entre los puntos x y x' :

$$r_n = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_0^2 - 2\varrho\varrho_0\cos(\theta - \theta_0) + (x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^{n-2} - x_0^{n-2})^2}$$

que en tres dimensiones y teniendo en cuenta los cambios indicados en (172) se reduce a la expresión (178). Con estos mismos cambios la función de Green local para la cuerda cósmica en tres dimensiones se escribe:

$$G_\omega = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{d}\right)^{1/2} K_{1/2}(md) + \frac{m^{1/2}}{(2\pi)^{5/2}\omega} \int_0^\infty \frac{K_{1/2}[mD(\zeta)]}{[D(\zeta)]^{1/2}} F_\omega(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \quad (180)$$

donde

$$D(\zeta) = \sqrt{(z - z')^2 + r^2 + r'^2 + 2rr' \cosh \zeta} \quad (181)$$

$$F_\omega(\zeta, \psi) = - \frac{\sin(\psi + \pi/\omega)}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\psi + \pi/\omega)} + \frac{\sin(\psi - \pi/\omega)}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\psi - \pi/\omega)} \quad (182)$$

La expresión (180) puede escribirse como

$$G_\omega = G^{Sing} + G_\omega^{reg}$$

donde

$$G_\omega^{reg} = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{5/2}\omega} \int_0^\infty \frac{K_{1/2}[mD(\zeta)]}{[D(\zeta)]^{1/2}} F_\omega(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \quad (183)$$

y donde la función de Green singular es

$$G^{Sing} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{d}} K_{1/2}(md) \quad (184)$$

Compararemos esta expresión con la que hemos calculado en (179). Para eso usaremos la siguiente identidad [1]:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \frac{\pi}{z}} K_{1/2}(z) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{z} e^{-z} \quad (185)$$

Desarrollando en serie de Taylor el termino e^{-z} para $z = md$ obtenemos

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{d}} K_{1/2}(md) = \frac{1}{4\pi d} - \frac{m}{4\pi} + O[(d)]$$

Reemplazando en (184) obtenemos

$$\Rightarrow G^{Sing} = \frac{1}{4\pi d} - \frac{m}{4\pi} + O[(d)] \quad (186)$$

que coincide con (179) hasta orden d . Por lo tanto la expresión para la función de Green singular derivada en [39] es efectivamente la función de Green singular que corresponde al caso que estamos analizando.

En consecuencia, podemos usar la expresión (183) para la función de Green regular, lo que nos permite escribir el campo regular de la cuerda cósmica en la posición de la carga como

$$\Phi_{\omega}^{reg} \Big|_{x \rightarrow x'} = \lim_{x \rightarrow x'} 4\pi q \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{5/2}\omega} \int_0^{\infty} \frac{K_{1/2}[mD(\zeta)]}{[D(\zeta)]^{1/2}} F_{\omega}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \quad (187)$$

4.5.3. Cálculo del campo en la posición de la carga para las geometrías Tipo I y II.

A continuación, calcularemos el campo Φ_{ξ} de la *thin shell* en la posición de la carga para cada caso y se lo sumaremos al resultado obtenido en la sección anterior para encontrar la expresión del campo adecuada a cada tipo de geometría analizada.

- Geometrías Tipo I con la carga en la región interior \mathcal{M}_i (figura 12):

En la región interior $0 < r_1 < r_i$ donde se aloja la carga el campo de la *shell* puede escribirse como:

$$\Phi_{\xi}^{(i)}(r_1) = q \int_0^{\infty} dk \cos[k(z - z')] \sum_0^{\infty} a_n \cos[n(\phi - \phi')] \chi_n^{(\xi)}(\eta, r_1) \quad (188)$$

donde $\chi_n^{(\xi)}(\eta, r_1)$ es la parte de la solución radial que contiene los efectos de la cáscara. De las expresiones (133), (137) y (139) obtenemos:

$$\chi_n^{(i)}(\eta, r_1) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_i} \{A_n(\eta) I_{\lambda}(\eta r_1) + K_{\lambda}(\eta r'_1) I_{\lambda}(\eta r_1)\} & \text{if } 0 \leq r_1 < r'_1 \\ \frac{1}{\omega_i} \{A_n(\eta) I_{\lambda}(\eta r_1) + I_{\lambda}(\eta r'_1) K_{\lambda}(\eta r_1)\} & \text{if } r'_1 < r_1 < r_i \end{cases}$$

La parte

$$\chi^{\omega_i}(\eta, r_1) = \frac{1}{\omega_i} I_{\lambda}(\eta r_{<}) K_{\lambda}(\eta r_{>}); \quad r_{<} = \min\{r, r'\}; \quad r_{>} = \max\{r, r'\}$$

es la que contiene la inhomogeneidad en la región interior, mientras que

$$\chi_n^{(\xi)}(\eta, r_1) = \frac{1}{\omega_i} A_n(\eta) I_{\lambda}(\eta r_1); \quad 0 < r_1 < r_i$$

es la parte de la solución radial que tiene en cuenta los efectos de la *shell*. Reemplazando en (188) y teniendo en cuenta el valor de la constante a_n obtenemos la expresión para el campo de la *shell* en la región interior:

$$\Phi_{\xi}^{(i)}(r_1) = \frac{4q}{\pi\omega_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z')] \cos[n(\phi-\phi')] A_n(\eta) I_{\lambda}(\eta r_1) \quad (189)$$

- Geometrías Tipo I con la carga en la región exterior \mathcal{M}_e (figura 13):

En la region exterior $r_e < r_2 < \infty$ encontramos

$$\Phi_{\xi}^{(e)}(r_2) = q \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z')] \sum_0^{\infty} a_n \cos[n(\phi-\phi')] \chi_n^{(\xi)}(\eta, r_2) \quad (190)$$

siendo $\chi_n^{(\xi)}(\eta, r_2)$ la parte de la solución radial que contiene los efectos de la *shell*. De (141), (142), (143) y (144) obtenemos:

$$\chi_n^{(e)}(\eta, r_2) = \begin{cases} \frac{K_{\nu}(\eta r'_2) I_{\nu}(\eta r_2)}{\omega_e} + \frac{B_n^*(\eta)}{\omega_e} K_{\nu}(\eta r_2) & \text{if } r_e < r_2 < r'_2 \\ \frac{K_{\nu}(\eta r_2) I_{\nu}(\eta r'_2)}{\omega_e} + \frac{B_n^*(\eta)}{\omega_e} K_{\nu}(\eta r_2) & \text{if } r_2 > r'_2 \end{cases}$$

donde la inhomogeneidad está contenida en

$$\chi^{\omega_e}(\eta, r_2) = \frac{1}{\omega_e} I_{\lambda}(\eta r_{<}) K_{\lambda}(\eta r_{>}); \quad r_{<} = \min\{r, r'\}; \quad r_{>} = \max\{r, r'\}$$

de manera que la parte de la solución radial correspondiente a la *shell* es

$$\chi_n^{(\xi)}(\eta, r_2) = \frac{1}{\omega_e} B_n^*(\eta) K_{\nu}(\eta r_2); \quad r_e < r_2 < \infty$$

Reemplazando en (190) encontramos la parte del campo que contiene los efectos de la cáscara en la región exterior ($r_e < r_2 < \infty$):

$$\Phi_{\xi}^{(e)}(r_2) = \frac{4q}{\pi\omega_e} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z')] \cos[n(\phi-\phi')] B_n^*(\eta) K_{\nu}(\eta r_2) \quad (191)$$

- Geometrías Tipo II con la carga en la región \mathcal{M}_+ (figura 14):

En la región $r_+ < r_2 < +\infty$ encontramos

$$\Phi_{\xi}^{(+)}(r_2) = q \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z')] \sum_0^{\infty} a_n \cos[n(\phi-\phi')] \chi_n^{(\xi,+)}(\eta, r_2) \quad (192)$$

De (149), (152) y (153):

$$\chi_n^{(+)}(\eta, r_2) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_+} \{ K_\nu(\eta r_2) I_\nu(\eta r'_2) + W_n(\eta) K_\nu(\eta r_2) \} & \text{if } r_2 > r'_2 \\ \frac{1}{\omega_+} \{ K_\nu(\eta r'_2) I_\nu(\eta r_2) + W_n(\eta) K_\nu(\eta r_2) \} & \text{if } r_+ < r_2 < r'_2 \end{cases}$$

donde

$$\lambda = \frac{n}{\omega_-}; \quad \nu = \frac{n}{\omega_+};$$

Como antes, identificamos la parte de la solución que contiene la inhomogeneidad:

$$\chi^{\omega_+}(\eta, r_2) = \frac{1}{\omega_+} I_\nu(k' r_<) K_\nu(k' r_>); \quad r_> = \text{máx}\{r, r'\}$$

de modo que los efectos de la *shell* se encuentran contenidos en

$$\chi_n^{(\xi,+)}(\eta, r_2) = \frac{1}{\omega_+} W_n(\eta) K_\nu(\eta r_2); \quad r_+ < r_2 < \infty$$

Reemplazando en (192):

$$\Phi_\xi^{(+)}(r_2) = \frac{4q}{\pi\omega_+} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] W_n(\eta) K_\nu(\eta r_2) \quad (193)$$

Habiendo obtenido las expresiones para el campo que contiene los efectos del acoplamiento con la curvatura en la posición de la cáscara estamos en condiciones de escribir la forma completa (168) del campo para cada uno de los tres casos estudiados:

- **Para las geometrías Tipo I con la carga en la región interior**, de (187) y (189):

$$\begin{aligned} \Phi^{reg} \Big|_{x \rightarrow x'} &= \left\{ 4\pi q \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{5/2} \omega_i} \int_0^\infty \frac{K_{1/2}[mD(\zeta)]}{[D(\zeta)]^{1/2}} F_{\omega_i}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \right\}_{x \rightarrow x'} \\ &+ \left\{ \frac{4q}{\pi\omega_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] A_n(\eta) I_\lambda(\eta r_1) \right\}_{x \rightarrow x'} \end{aligned} \quad (194)$$

o bien, teniendo en cuenta la identidad (185):

$$\begin{aligned} \Phi^{reg} \Big|_{x \rightarrow x'} &= \left\{ \frac{q}{16\pi^4 \omega_i} \int_0^\infty \frac{e^{-mD(\zeta)}}{D(\zeta)} F_{\omega_i}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \right\}_{x \rightarrow x'} \\ &+ \left\{ \frac{4q}{\pi\omega_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] A_n(\eta) I_\lambda(\eta r_1) \right\}_{x \rightarrow x'} \end{aligned} \quad (195)$$

- Para las geometrias Tipo I con la carga en la región exterior, de (187) y (191):

$$\begin{aligned} \Phi^{reg} \Big|_{x \rightarrow x'} &= \left\{ 4\pi q \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{5/2} \omega_e} \int_0^\infty \frac{K_{1/2}[mD(\zeta)]}{[D(\zeta)]^{1/2}} F_{\omega_e}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \right\}_{x \rightarrow x'} \\ &+ \left\{ \frac{4q}{\pi \omega_e} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] B_n^*(\eta) K_\nu(\eta r_2) \right\}_{x \rightarrow x'} \end{aligned} \quad (196)$$

o bien

$$\begin{aligned} \Phi^{reg} \Big|_{x \rightarrow x'} &= \left\{ \frac{q}{16\pi^4 \omega_e} \int_0^\infty \frac{e^{-mD(\zeta)}}{D(\zeta)} F_{\omega_e}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \right\}_{x \rightarrow x'} \\ &+ \left\{ \frac{4q}{\pi \omega_e} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] B_n^*(\eta) K_\nu(\eta r_2) \right\}_{x \rightarrow x'} \end{aligned} \quad (197)$$

- Para las geometrias Tipo II con la carga en la región superior (187) y (193):

$$\begin{aligned} \Phi^{reg} \Big|_{x \rightarrow x'} &= \left\{ 4\pi q \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{5/2} \omega_+} \int_0^\infty \frac{K_{1/2}[mD(\zeta)]}{[D(\zeta)]^{1/2}} F_{\omega_+}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \right\}_{x \rightarrow x'} \\ &+ \left\{ \frac{4q}{\pi \omega_+} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] W_n(\eta) K_\nu(\eta r_2) \right\}_{x \rightarrow x'} \end{aligned} \quad (198)$$

o bien

$$\begin{aligned} \Phi^{reg} \Big|_{x \rightarrow x'} &= \left\{ \frac{q}{16\pi^4 \omega_+} \int_0^\infty \frac{e^{-mD(\zeta)}}{D(\zeta)} F_{\omega_+}(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \right\}_{x \rightarrow x'} \\ &+ \left\{ \frac{4q}{\pi \omega_+} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')] \cos[n(\phi - \phi')] W_n(\eta) K_\nu(\eta r_2) \right\}_{x \rightarrow x'} \end{aligned} \quad (199)$$

Los coeficientes $A_n(\eta)$, $B_n^*(\eta)$ y $W_n(\eta)$ están dados respectivamente por las expresiones (136), (143) y (154).

4.6. Cálculo de la autofuerza.

En todos los casos la autofuerza radial f se obtiene derivando el campo regular en la posición de la carga:

$$f = f_\omega + f_\xi$$

donde

$$f_\omega = q \frac{\partial \Phi_\omega^{reg}}{\partial r} \Big|_{x'} = 4\pi q^2 \frac{\partial G_\omega^{reg}}{\partial r} \Big|_{x'} \quad (200)$$

$$f_\xi = q \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial r} \Big|_{x'} \quad (201)$$

Comenzaremos por calcular la derivada de la función de Green regular en el límite de coincidencia a partir de la ecuación (183), que escribimos de la siguiente manera usando la identidad (185):

$$G_\omega^{reg} = \frac{1}{2^3 \pi^2 \omega} \int_0^\infty \frac{e^{-mD}}{[D(\zeta)]} F_\omega(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \quad (202)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} G_\omega^{reg} \Big|_{x=x'} = \frac{1}{2^3 \pi^2 \omega} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{e^{-mD}}{[D(\zeta)]} \right\} F_\omega(\zeta, \theta - \theta') d\zeta \Big|_{x=x'} \quad (203)$$

Derivamos el factor que depende de r usando la expresión (181):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{e^{-mD}}{[D(\zeta)]} \right\} = -\frac{e^{-mD}}{2D^3} [mD + 1] (2r + 2r' \cosh \zeta) \quad (204)$$

Calculando el valor de $D(\zeta)$ en el límite de coincidencia $r \rightarrow r'$ y usando las relaciones trigonométricas entre funciones hiperbólicas obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow x'} D(\zeta) = 2r' \cosh(\zeta/2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{e^{-mD}}{[D(\zeta)]} \right\} \Big|_{r=r'} = -\frac{e^{-2mr' \cosh(\zeta/2)}}{4(r')^2 (\cosh(\zeta/2))} [1 + 2mr' \cosh(\zeta/2)]$$

Evaluamos el factor $F_\omega(\zeta, \theta - \theta')$ en el límite de coincidencia (ver ec.(182)):

$$\lim_{x \rightarrow x'} F_\omega(\zeta, \theta - \theta') = -2 \frac{\sin(\pi/\omega)}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\pi/\omega)}$$

Reemplazando estos resultados en (203)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} G_\omega^{reg} \Big|_{x=x'} &= \frac{1}{2^4 \pi^2 r'^2 \omega} \\ &\times \int_0^\infty \frac{e^{-2mr' \cosh(\zeta/2)}}{\cosh(\zeta/2)} [1 + 2mr' \cosh(\zeta/2)] \frac{\sin(\pi/\omega)}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\pi/\omega)} d\zeta \quad (205) \end{aligned}$$

Llamamos

$$\alpha(\zeta) = 2m \frac{\rho(r')}{\omega} \cosh \frac{\zeta}{2} \quad (206)$$

donde $\rho(r') = \omega r'$ es la función perfil (ec. (7) y (9)); entonces escribimos

$$\frac{\partial}{\partial r} G_\omega^{reg} \Big|_{x=x'} = \frac{1}{2^4 \pi^2 r'^2 \omega} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(\zeta)}}{\cosh(\zeta/2)} [1 + \alpha(\zeta)] \frac{\sin(\pi/\omega)}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\pi/\omega)} d\zeta \quad (207)$$

Finalmente para la parte f_ω de la autofuerza obtenemos la siguiente expresión:

$$f_\omega = 4\pi q^2 \frac{\partial}{\partial r} G_\omega^{reg} \Big|_{x=x'} = \frac{q^2 \sin(\pi/\omega)}{4\pi r'^2 \omega} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(\zeta)}}{\cosh(\zeta/2)} \frac{[1 + \alpha(\zeta)]}{\cosh(\zeta/\omega) - \cos(\pi/\omega)} d\zeta \quad (208)$$

donde

$$\omega = \begin{cases} \omega_e & \text{para Tipo I con carga en } \mathcal{M}_e \\ \omega_i & \text{para Tipo I con carga en } \mathcal{M}_i \\ \omega_+ & \text{para Tipo II con carga en } \mathcal{M}_+ \end{cases}$$

La parte $f_\xi = q \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial r} \Big|_{x'}$ correspondiente a cada caso es ³⁷

- **Geometrías tipo I con la carga en la región interior \mathcal{M}_i :** ³⁸

$$f_\xi = \frac{4q^2}{\pi \omega_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + \delta_{n,0}} \int_0^\infty dk I'_\lambda(\eta r'_1) A_n(\eta); \quad r'_1 = r' < r_i \quad (209)$$

donde la Delta de Kronecker $\delta_{n,0}$ tiene en cuenta el factor de normalización para el modo cero respecto a las otras funciones de la base en la coordenada angular θ .

- **Geometrías tipo I con la carga en la región exterior \mathcal{M}_e :**

$$f_\xi = \frac{4q^2}{\pi \omega_e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + \delta_{n,0}} \int_0^\infty dk K'_\nu(\eta r'_2) B_n^*(\eta); \quad r'_2 = r' + r_e - r_i; \quad r' > r_i \quad (210)$$

- **Geometrías tipo II con la carga en la región \mathcal{M}_+ :** ³⁹

$$f_\xi = \frac{4q^2}{\pi \omega_+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + \delta_{n,0}} \int_0^\infty dk W_n(\eta) K'_\nu(r'_2); \quad r'_2 = r' + r_+; \quad (211)$$

³⁷Recordamos que los coeficientes $A_n(\eta)$, $B_n^*(\eta)$ y $W_n(\eta)$ están dados respectivamente por las expresiones (136), (143) y (154)

³⁸Ver ecuación (132).

³⁹Ver ecuación (147).

4.7. Análisis de los resultados

La autofuerza sobre la partícula de prueba se graficó para diferentes situaciones con ayuda del programa MATHEMATICA. Los valores de la constante de acoplamiento fueron elegidos de acuerdo a los resultados de la sección 4.4. Los resultados de la presente sección fueron publicados en [113].

Geometrías Tipo I

En primer lugar se estudiaron casos en los cuales la sub-variedad interior es plana ($\omega_i = 1$) y la sub-variedad exterior es cónica ($\omega_e = 0,9$). Esta situación corresponde a una **cáscara de materia ordinaria** ($\kappa < 0$) y se encuentra representada en la figura 36.

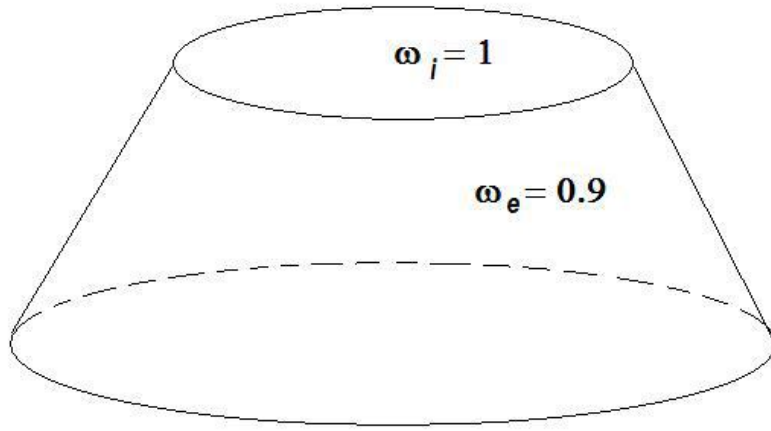


Figura 36: Geometría Tipo I correspondiente a un interior de Minkowski ($\omega_i = 1$) y un exterior cónico ($\omega_e = 0,9$). La conicidad de la sub-variedad exterior se ha exagerado.

En la figura 37 se grafica la autofuerza adimensionalizada $f\pi r_i^2/4q^2$ versus la distancia a la *thin shell* donde se pegan ambas sub-variedades. La distancia también está adimensionalizada como r/r_i , de manera que el valor $r/r_i = 1$ corresponde a la ubicación de la *thin shell*. Los valores de la constante de acoplamiento ξ y de mr_i se han elegido dentro del rango de estabilidad de acuerdo a los datos de la figura 32. Del lado derecho del gráfico las curvas positivas indican una autofuerza repulsiva desde la *shell* mientras que las curvas negativas representan autofuerzas atractivas. Del lado izquierdo la relación se invierte; por lo tanto las curvas positivas indican atracción hacia la *shell* y viceversa.

En todos los casos la autofuerza se hace tanto más divergente cuanto más nos aproximamos a la *thin shell* (es decir cuando $r \rightarrow r_i$) y, en virtud de la simetría de la geometría, tiende a cero cuando $r \rightarrow 0$. En ausencia de acoplamiento ($\xi = 0$) la autofuerza generada corresponde exclusivamente a los efectos de la conicidad de la sub-variedad exterior y es atractiva hacia la *shell*. Para valores negativos de ξ la atracción hacia la cáscara aumenta. Cuando $0 < \xi < 1/4$ la fuerza atractiva se debilita progresivamente. A partir de $\xi > 1/4$ la fuerza dominante es de carácter netamente repulsivo. Como hemos visto

en la sección 3.7, este último valor ha sido identificado como el acoplamiento que cancela el efecto atractivo de la *shell* de materia ordinaria. A partir de este valor la intensidad de la autofuerza aumenta a medida que aumenta ξ .

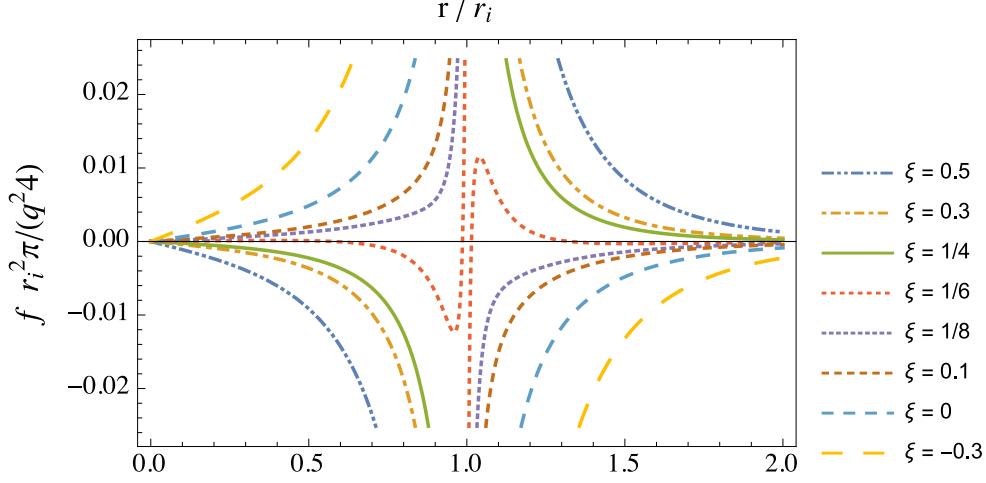


Figura 37: Gráfico de la autofuerza para las geometrías Tipo I con un interior minkowskiano ($\omega_i = 1$) y un exterior cónico ($\omega_e = 0,9$), que corresponde a una *shell* de materia ordinaria ($\kappa < 0$). La distancia está adimensionalizada como r/r_i ; el valor $r/r_i = 1$ corresponde a la ubicación de la *thin shell*. En todos los casos la autofuerza tiende a cero si $r \rightarrow 0$ como consecuencia de la simetría de la geometría. En ausencia de acoplamiento la autofuerza es atractiva hacia la cáscara y es provocada por la acción de la conicidad de la variedad exterior sobre el campo. Para $\xi < 0$ la atracción es mayor lo que se manifiesta en un mayor “alcance”, pero a medida que ξ crece la atracción se debilita progresivamente. Para valores $\xi > 1/4$ la autofuerza es netamente repulsiva.

En las figuras 38 y 39 se grafica la dependencia de la autofuerza respecto de la masa, para diferentes valores del producto $r_i m$. El valor de la distancia r_i se mantiene constante pero aumenta progresivamente el valor de la masa m del campo escalar. Los dos valores elegidos para la constante de acoplamiento se encuentran comprendidos en el rango de la figura 32. Para $\xi = 0$ (figura 38) la autofuerza es atractiva mientras que para $\xi = 0,3$ (figura 39) es repulsiva. En ambos casos disminuye la intensidad a medida que aumenta la masa del campo escalar. Esta atenuación es causada por el factor de decaimiento exponencial e^{-mr}/r que aparece en las expresiones (195), (197) y (199). Debemos tener en cuenta que si bien el término singular (184) - (185) se resta durante la regularización, se encuentran trazas de la dependencia respecto del factor e^{-mr}/r en la función de Green regular, tal como puede apreciarse en (202).

En la figura 41 se grafica la autofuerza adimensionalizada en función de la distancia adimensionalizada para una geometría Tipo I correspondiente a una cáscara de materia exótica ($\kappa > 0$) tal que la sub-variedad interior es cónica ($\omega_i = 0,9$) y la exterior es plana ($\omega_e = 1$). La correspondiente configuración se representa en la figura 40. Los valores de la constante de acoplamiento han sido elegidos dentro del rango de estabilidad (ver figura 33). En la región interior la partícula es atraída hacia la singularidad en el origen $r = 0$. Para valores de la constante de acoplamiento $\xi < 1/4$, incluyendo el acoplamiento

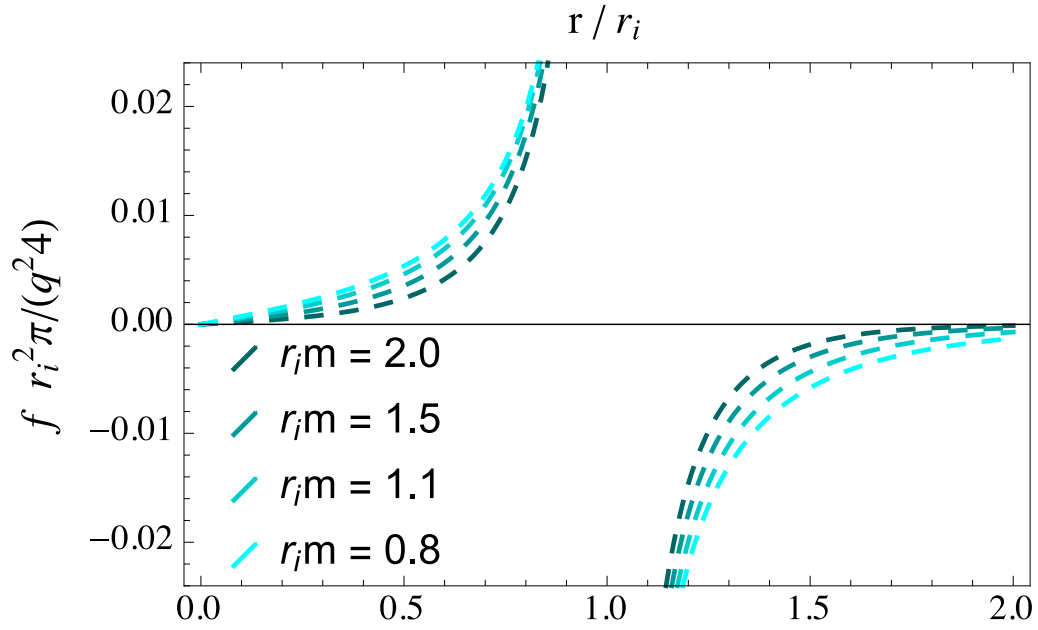


Figura 38: El gráfico muestra la dependencia de la autofuerza respecto de la masa del campo escalar para $\xi = 0$. A medida que la masa aumenta la intensidad de la autofuerza disminuye.

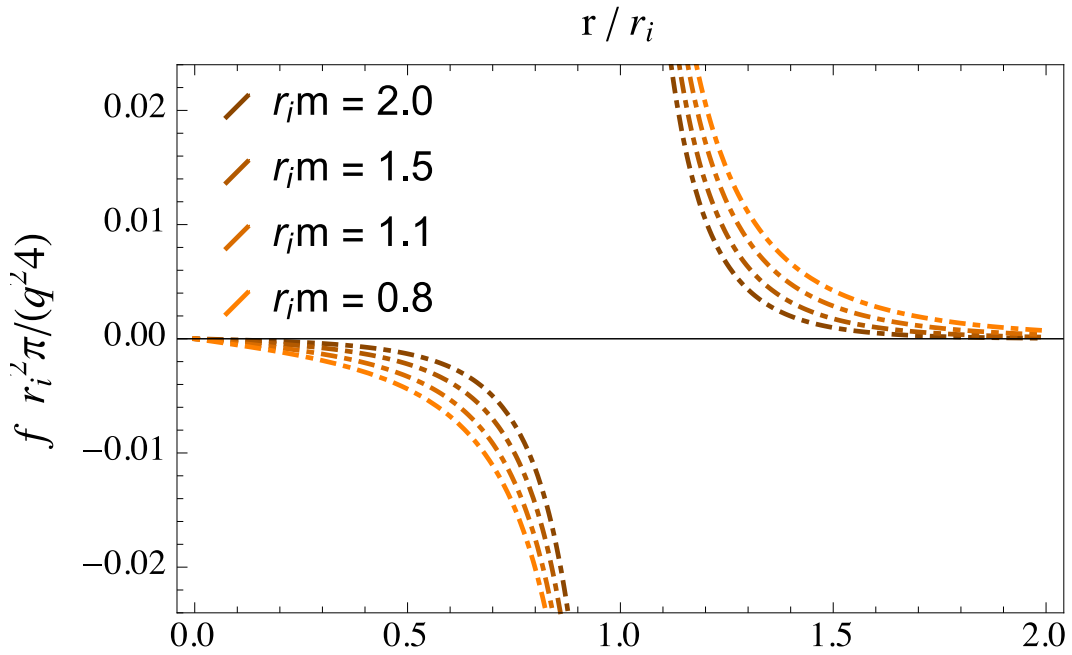


Figura 39: El gráfico muestra la dependencia de la autofuerza respecto de la masa del campo escalar para una constante de acoplamiento $\xi = 0,3$. A medida que la masa aumenta la intensidad de la autofuerza disminuye.

mínimo, la autofuerza es repulsiva desde la *shell* tanto en el interior como en el exterior. El comportamiento se revierte en $\xi = 1/4$. Este valor de la constante de acoplamiento cancela el efecto repulsivo de la cáscara de materia exótica de modo que por encima de

este valor la autofuerza se vuelve atractiva.

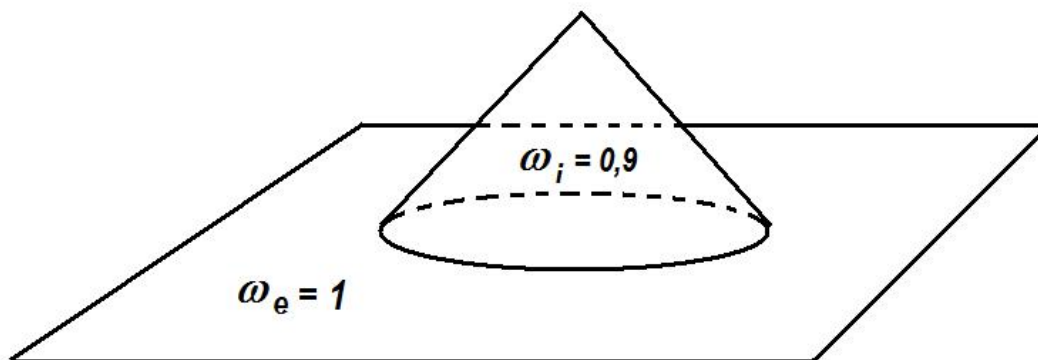


Figura 40: Geometría Tipo I correspondiente a un interior cónico ($\omega_e = 0,9$) y un exterior de Minkowski ($\omega_i = 1$). La conicidad de la sub-variedad interior se ha exagerado.

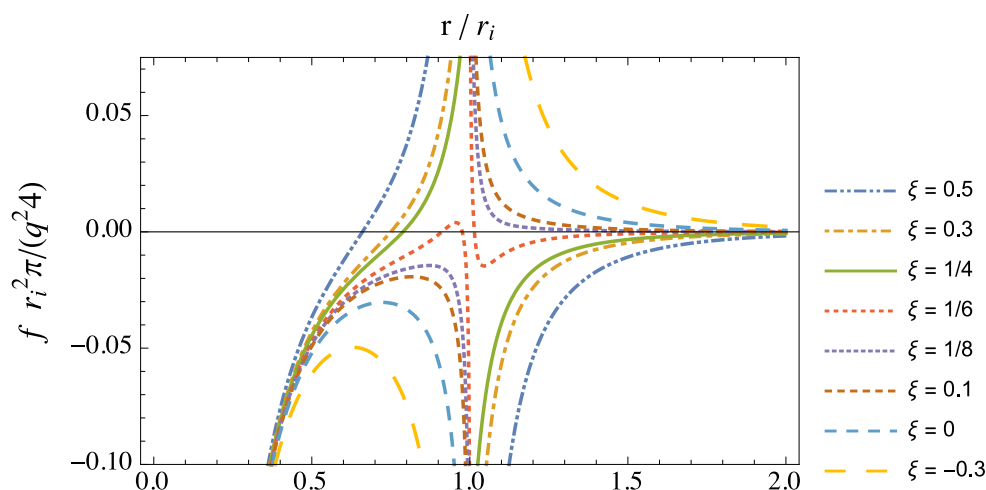


Figura 41: Gráfico de la autofuerza para las geometrías Tipo I con un interior cónico ($\omega_i = 0,9$) y un exterior minkowskiano ($\omega_e = 1$), correspondiente a una *shell* de materia exótica ($\kappa > 0$). En la región interior (izquierda) la partícula de prueba es atraída hacia la singularidad ubicada en $r = 0$. Para valores $\xi < 1/4$ la autofuerza es repulsiva desde la *shell* mientras que para valores $\xi > 1/4$ es atractiva.

También en este caso se verifica una disminución de la intensidad de la autofuerza con el aumento de la masa del campo escalar. En la hilera de la izquierda de la figura 42 se ha graficado la autofuerza para $\xi < 1/4$ y para valores crecientes de la masa del campo escalar. De arriba hacia abajo la disminución en la escala indica que la autofuerza se debilita a medida que la masa se incrementa. El mismo resultado se observa en la hilera de la derecha donde el valor de la constante de acoplamiento es $\xi > 1/4$.

Geometrías Tipo II

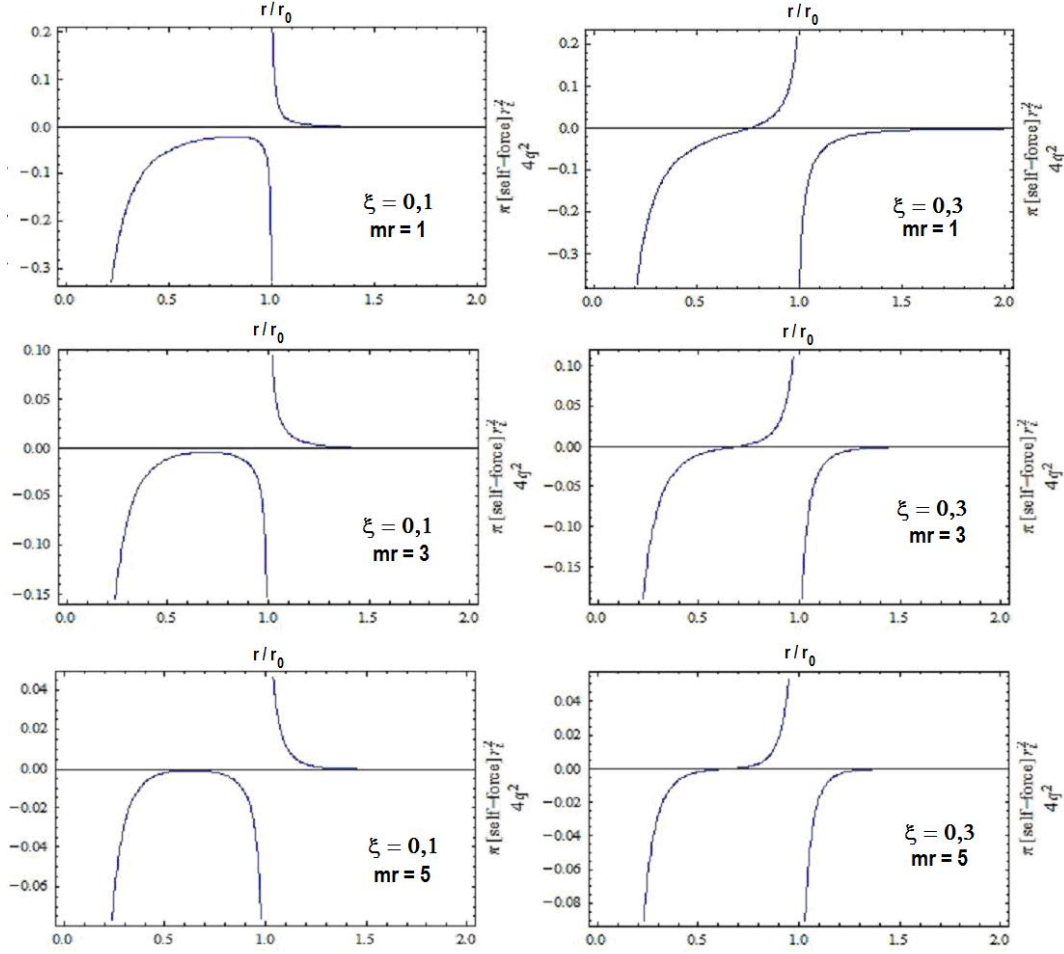


Figura 42: Gráfico de la autofuerza para una geometría Tipo I con parámetros $\omega_i = 0,9$ y $\omega_e = 1$ (cáscara de materia exótica, $\kappa > 0$). En la hilera de la izquierda es $\xi = 0,1$ y en la derecha es $\xi = 0,3$. De arriba hacia abajo: $rm = 1$, $rm = 3$ y $rm = 5$ (el valor de r se ha mantenido constante). La disminución de la escala hacia abajo indica una disminución en la intensidad de la autofuerza a medida que aumenta la masa.

Por simplicidad en esta sección consideraremos agujeros de gusano simétricos respecto de la garganta, tales que $\omega_- = \omega_+ = \omega$ y para los cuales el radio de la garganta es $r_0 = r_- = r_+$.

En la figura 43 se grafica la autofuerza adimensional $(\pi r_0^2 / 4q^2) f$ en función de la distancia adimensional a la garganta r/r_0 . Los valores de la constante de acoplamiento fueron seleccionados dentro de la región de estabilidad (ver figura 34). Se presentan ejemplos correspondientes a un agujero de gusano plano donde $r_0 m = 1$. Del mismo modo que en el caso no masivo, la acción de la topología no trivial sobre el campo induce una autofuerza repulsiva desde la garganta de materia exótica $\kappa > 0$ aún en ausencia de acoplamiento $\xi = 0$.⁴⁰ También se verifica el cambio de signo en la autofuerza cuando $\xi = 1/4$ de tal modo que para valores de la constante de acoplamiento $\xi < 1/4$ es repul-

⁴⁰Como en toda geometría de agujero de gusano la *shell* es de materia exótica. Ver nota 30.

siva en el entorno de la garganta mientras que para $\xi > 1/4$ es atractiva.

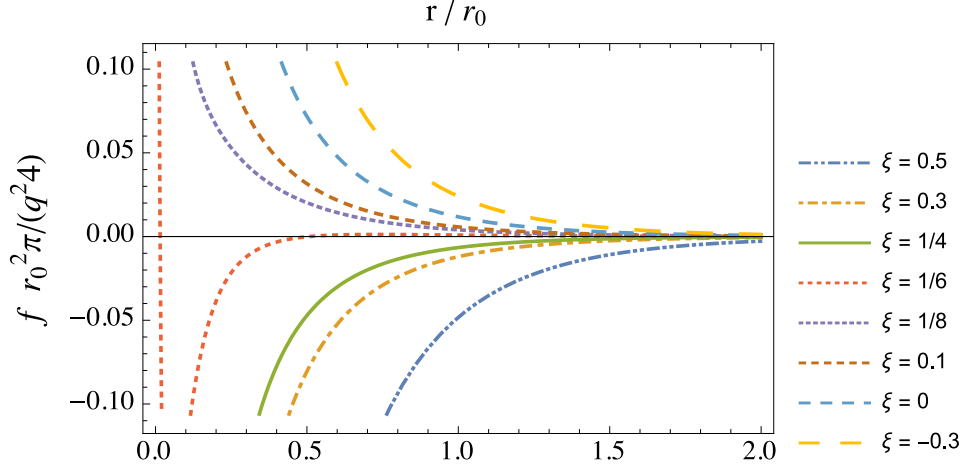


Figura 43: Gráfico de la autofuerza sobre una partícula asociada a un campo escalar masivo para diferentes valores de la constante de acoplamiento ξ y para $r_0m = 1$, en el caso de un *wormhole* simétrico plano caracterizado por el parámetro $\omega_+ = \omega_- = 1$. La autofuerza es repulsiva desde la garganta si $\xi < 1/4$ y es atractiva si $\xi > 1/4$. En ausencia de acoplamiento existe igualmente una autofuerza repulsiva desde la garganta, causada por la acción de la topología no trivial del espacio-tiempo sobre el campo.

La figura 44 muestra el comportamiento de la autofuerza para diferentes valores del parámetro ω , donde $r_0m = 0, 1$ y $\xi = 0, 1$ son valores fijos. En todos los casos la autofuerza es repulsiva en las proximidades de la garganta, pero a medida que ω disminuye los efectos asintóticamente atractivos aumentan al aumentar la conicidad (hacerse más cerrados los conos) de las sub-variedades a ambos lados de la garganta.

En las figuras 45 y 46 se grafica la autofuerza para dos diferentes valores de la constante de acoplamiento, elegidos de acuerdo a los datos de la figura 34. Se ha fijado el valor de la distancia r_0 pero se aumenta progresivamente el valor de la masa m del campo escalar. Para $\xi = 0$ la autofuerza es repulsiva desde la garganta mientras que para $\xi = 0,3$ es atractiva. Pero para ambos valores de la constante acoplamiento la intensidad de la autofuerza disminuye a medida que la masa del campo escalar aumenta, tal como ocurre para las geometrías Tipo I.

4.8. Conclusiones de los gráficos para el caso del campo escalar masivo y comparación entre los casos masivo y no masivo.

El análisis de los gráficos arroja resultados similares a los hallados para el caso no masivo con la salvedad de que el factor e^{-mr}/r actúa atenuando la autofuerza, cualquiera sea su signo. En las geometrías **Tipo I**, para el caso minkowskiano y en ausencia de acoplamiento no hay autofuerza mientras que en las geometrías **Tipo II**, y para un *wormhole* simétrico minkowskiano, la acción de la topología no trivial de la garganta

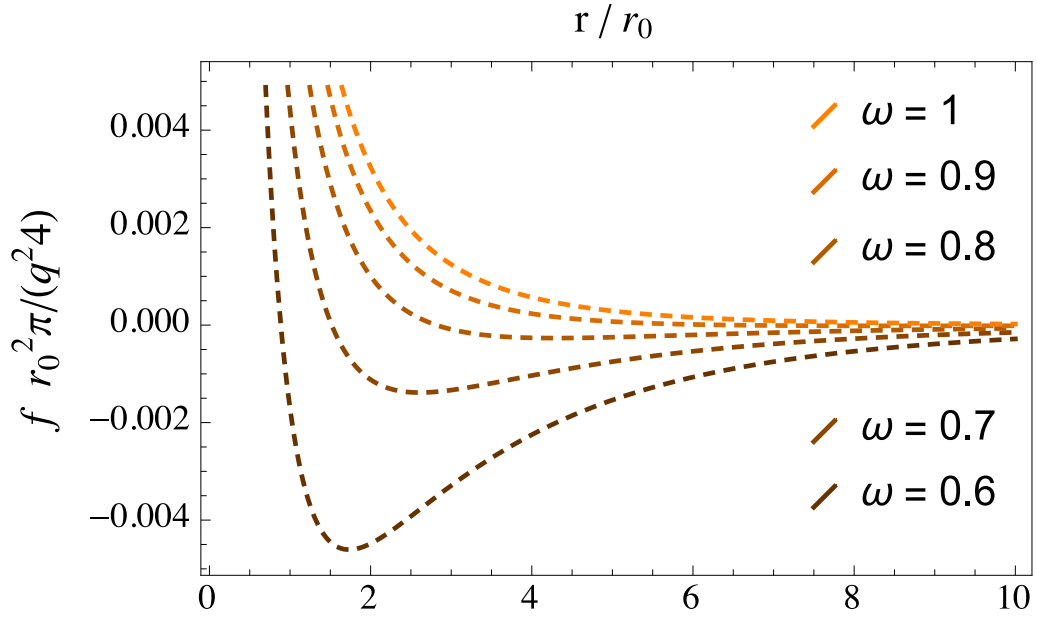


Figura 44: Gráfico de la autofuerza sobre una partícula asociada a un campo escalar masivo para el caso de agujeros de gusano simétricos caracterizados por diferentes valores del parámetro ω . El valor de la constante de acoplamiento se mantiene fijo en $\xi = 0,1$ y $r_0 m = 1$. En las proximidades de la garganta ubicada en $r = 0$ la autofuerza es repulsiva pero se hace asintóticamente atractiva para $\omega < 1$ aumentando la intensidad a medida que disminuye ω .

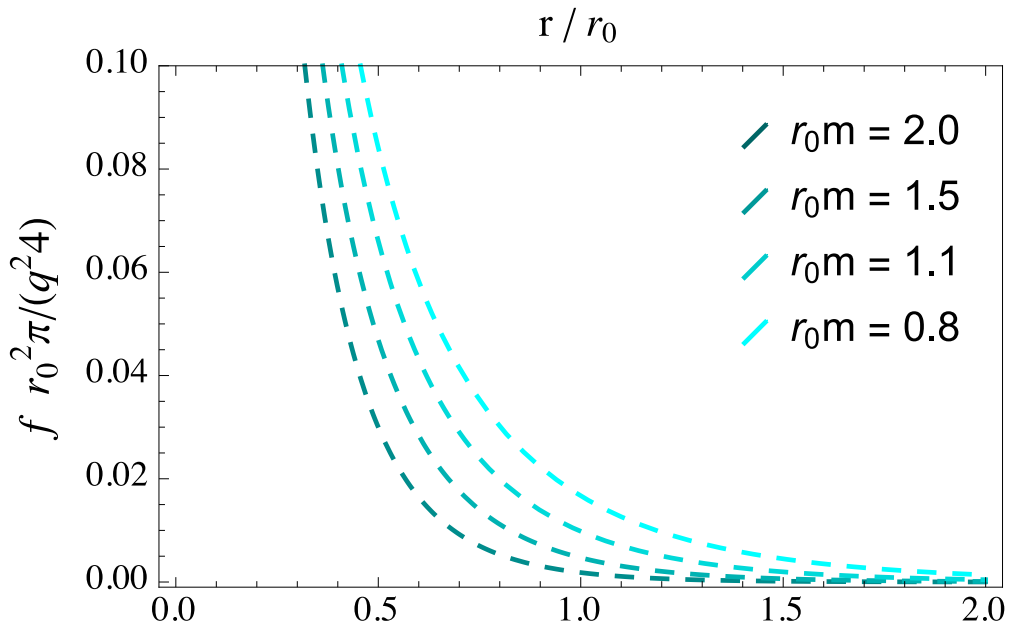


Figura 45: Gráfico de la autofuerza para diferentes valores de la masa. El valor de la constante de acoplamiento es $\xi = 0$. La intensidad de la autofuerza disminuye a medida que aumenta el valor de la masa.

sobre el campo induce una autofuerza repulsiva desde la *shell* de materia exótica. Para

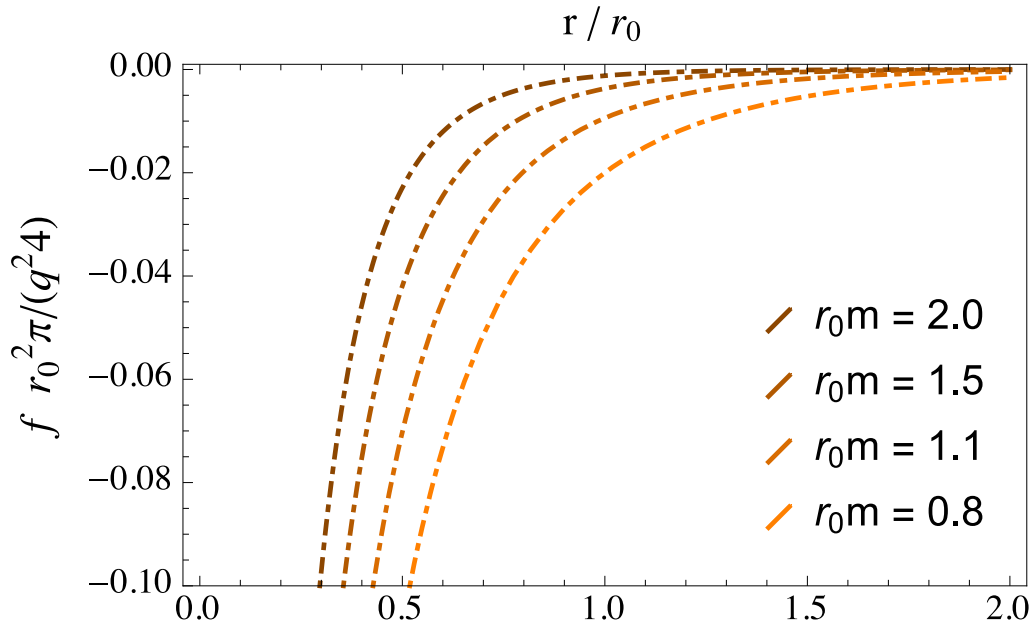


Figura 46: Gráfico de la autofuerza para diferentes valores de la masa. El valor de la constante de acoplamiento es $\xi = 0,3$. La intensidad de la autofuerza disminuye a medida que aumenta el valor de la masa.

valores de la constante de acoplamiento dentro del dominio de estabilidad los cambios en la autofuerza son suaves y progresivos y para el valor $\xi = 1/4$ la autofuerza cambia de signo.

Como hemos dicho, al aumentar la masa del campo escalar disminuye la intensidad de la autofuerza, cualquiera que sea su signo. En otras palabras, para idénticos valores del defecto de ángulo y de la constante de acoplamiento la autofuerza será más intensa en el caso del campo escalar sin masa. Los gráficos comparativos de las figuras 47 a 49 corroboran esta afirmación. En todos los casos se contrasta la autofuerza del campo escalar no masivo con la correspondiente para un campo tal que $mr = 5$. Resultados análogos se han observado en el caso de autofuerzas sobre partículas escalares en reposo en el espacio tiempo de agujeros de gusano esféricamente simétricos [9].

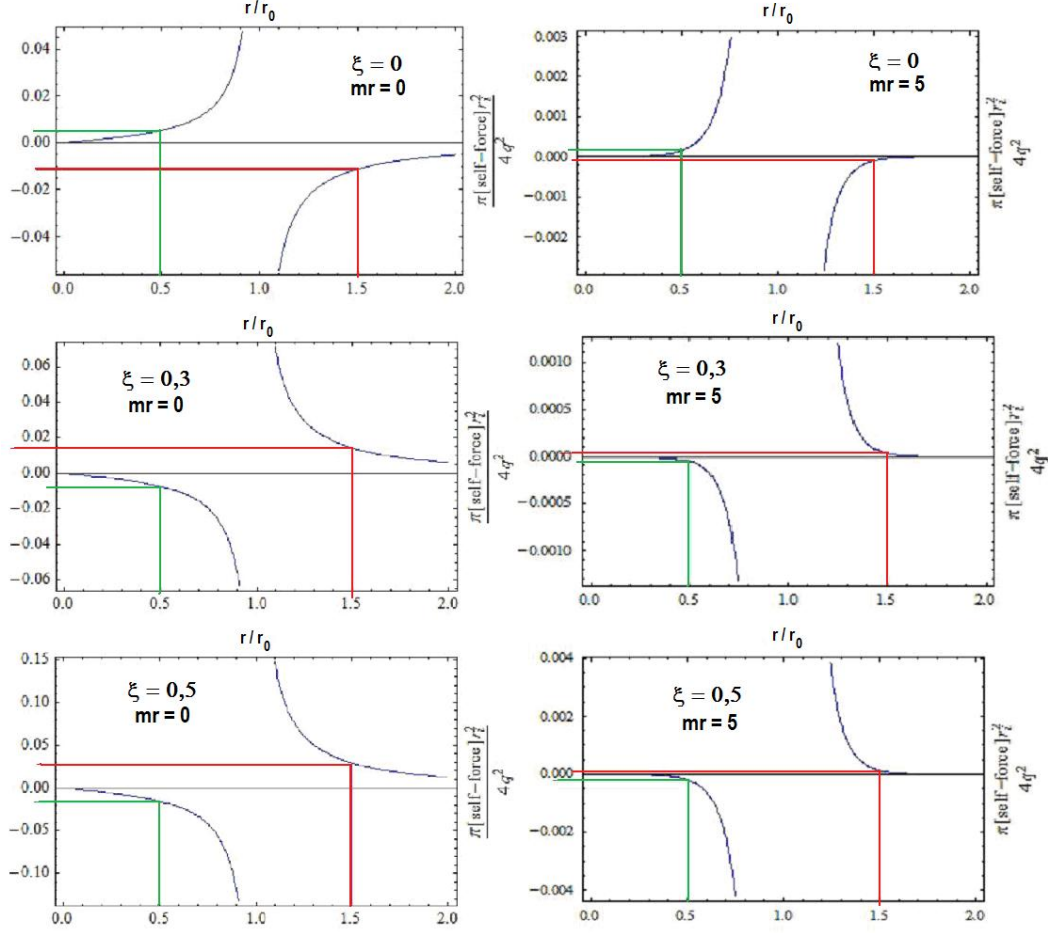


Figura 47: Gráficos comparativos, geometrías Tipo I, $\omega_i = 1$, $\omega_e = 0,9$, $\kappa < 0$. Los graficos de la izquierda corresponden al caso del campo escalar sin masa y los de la derecha al caso del campo escalar masivo. La disminución de la escala en los gráficos de la derecha respecto de los de la izquierda indica que la autofuerza es más débil en el caso del campo escalar masivo.

Capítulo 5

5. Conclusiones y comentarios.

En esta tesis hemos evaluado y estudiado la autofuerza sobre partículas puntuales asociadas a campos escalares masivos y no masivos en espacio-tiempos cónicos con simetría cilíndrica. Esta simetría se asocia a cuerdas cósmicas y a agujeros de gusano cilíndricos. La geometría del espacio-tiempo ha sido generada pegando dos sub-variedades mediante el formalismo de *thin shells*. La presencia de campos escalares ha dado origen a ecuaciones de campo con dos fuentes: una de ellas localizada en la posición de la carga puntual y la otra en la cáscara que une a las dos sub-variedades. La segunda de estas fuentes contiene el acoplamiento con la curvatura dada por el escalar de Ricci no nulo (singular) en la posición de la cáscara. Esta última singularidad ha sido tratada como una condición de contorno en ese punto. La primera de las fuentes corresponde a la carga puntual y por ese motivo requiere de la renormalización del campo. Si bien para regularizar el campo

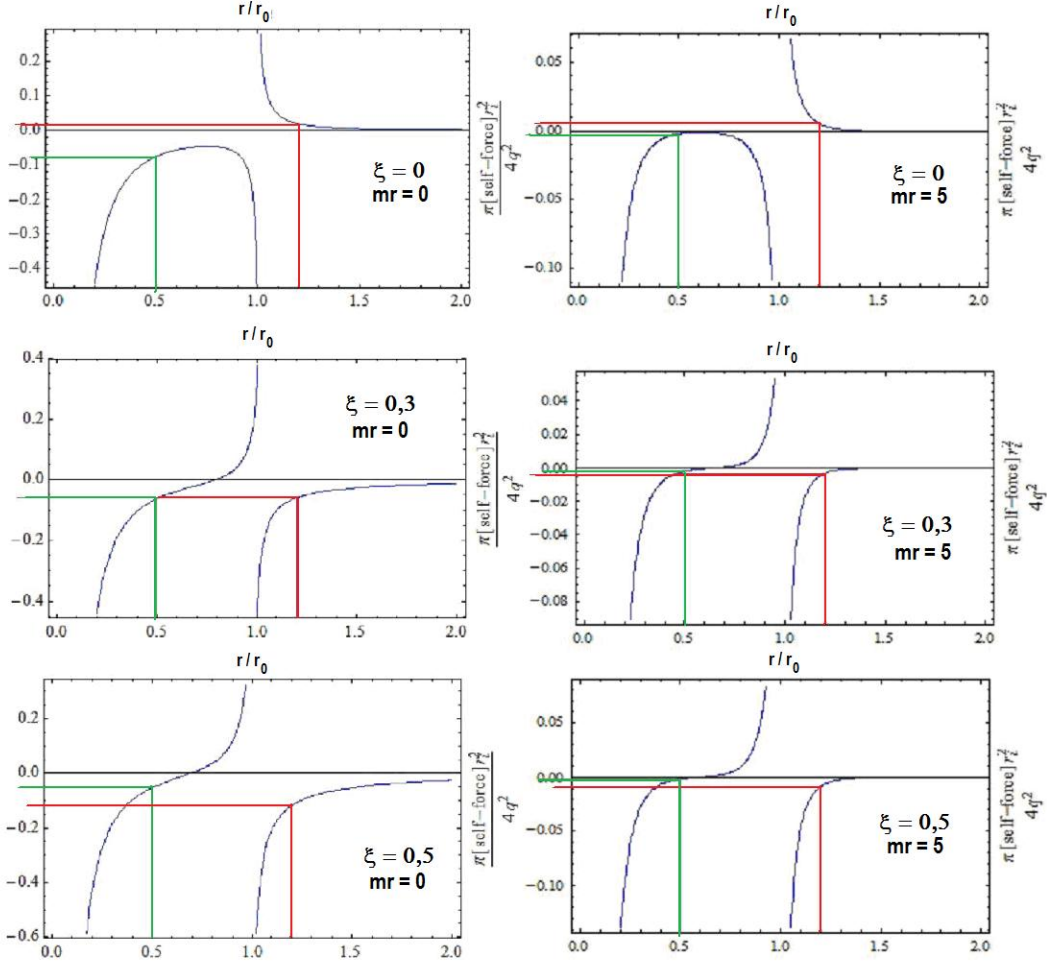


Figura 48: Gráficos comparativos, geometrías Tipo I, $\omega_i = 0,9$, $\omega_e = 1$, $\kappa > 0$. Los gráficos a la izquierda corresponden al caso del campo escalar sin masa. La disminución de la escala en los gráficos de la derecha indica que la autofuerza es más débil en el caso del campo escalar masivo.

hemos seguido el método de Detweiler y Whiting, consistente en restar la parte singular, hemos tenido que aplicar diferentes procedimientos en el caso masivo y en el caso no masivo. En el transcurso del trabajo nos hemos encontrado, además, con divergencias en los coeficientes de los desarrollos, lo que condujo a la necesidad de definir zonas dentro de las cuales la elección de la constante de acoplamiento no produjese inestabilidades en las soluciones de la ecuación de campo. Estas zonas fueron definidas tanto para cáscaras de materia ordinaria como de materia exótica y para diferentes valores de los defectos de ángulo de las sub-variedades en juego. Obviamente las regiones de estabilidad halladas fueron diferentes en el caso masivo y en el caso no masivo.

Una vez solucionadas estas dificultades hemos procedido a evaluar y analizar la autofuerza. Hemos hallado que el signo de la autofuerza se invierte para determinados valores de la constante de acoplamiento tanto en el caso de campos escalares masivos como no masivos. En los casos estudiados ese valor es $\xi = 1/4$. En el caso del campo escalar sin masa hemos establecido comparaciones con los resultados obtenidos, en igualdad de

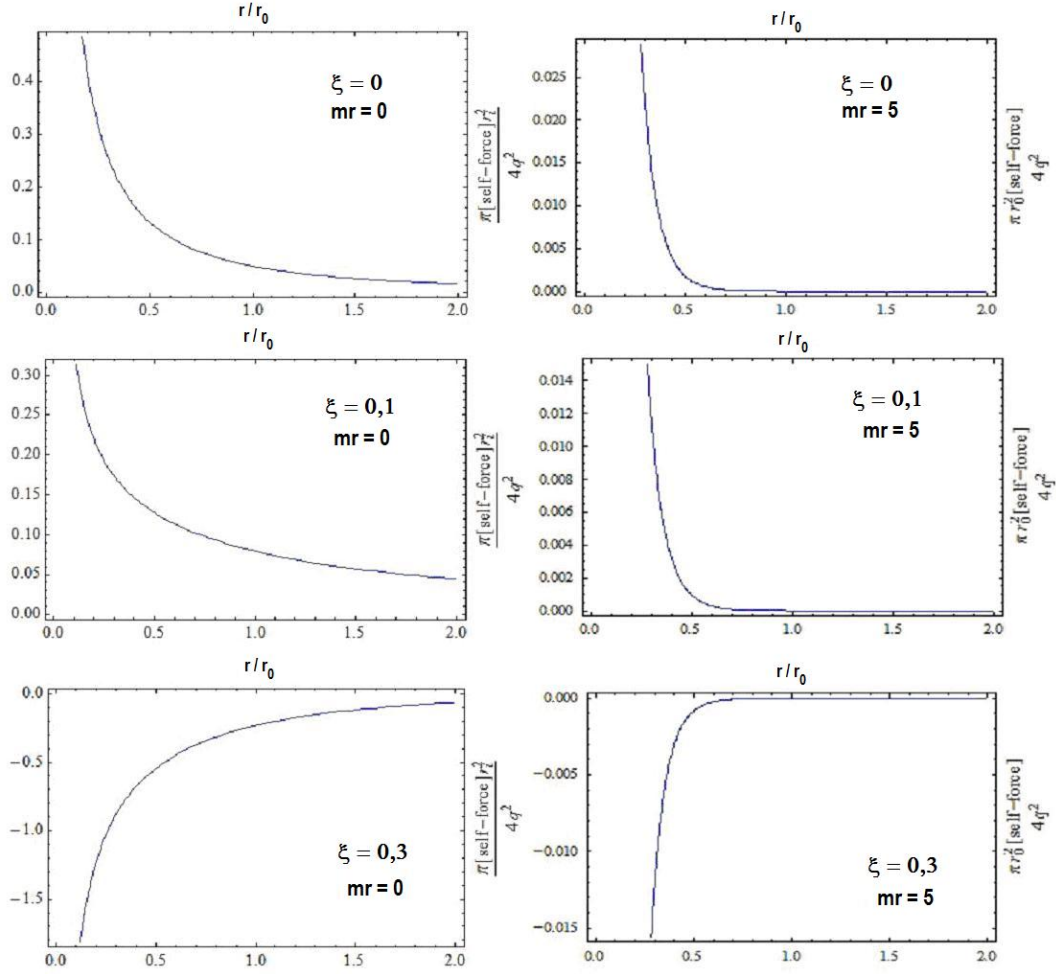


Figura 49: Gráficos comparativos, geometrías Tipo II, $\omega_+ = \omega_- = 1$. Los gráficos a la izquierda corresponden al caso del campo escalar sin masa. La disminución de la escala en los gráficos de la derecha indica que la autofuerza es más débil en el caso del campo escalar masivo.

condiciones, para el campo electromagnético. Hemos observado que si el acoplamiento es mínimo, la autofuerza presenta exactamente el signo contrario, mientras que si el acoplamiento no es mínimo aparece un efecto de inversión del signo de la autofuerza que está ausente en el caso electromagnético. También hemos encontrado que en el caso masivo la intensidad se ve atenuada por un factor $\sim e^{-mr}$.

Antes de concluir agregaremos un par de comentarios que pueden ayudar a comprender mejor la fenomenología de las situaciones analizadas. Como hemos visto, en todos los casos estudiados se observa que el efecto de la constante de acoplamiento es atenuar, anular y finalmente contrarrestar la intensidad de la autofuerza. Este efecto puede interpretarse de la siguiente manera: en la ecuación de campo la constante de acoplamiento está multiplicada por el escalar de Ricci; como este escalar es nulo en todas partes menos sobre la cáscara, entonces la constante de acoplamiento puede actuar únicamente si existe una cáscara. El término $\xi R\Phi$ en las ecuaciones de campo (18) y (118) podría entenderse, por lo tanto, como una “densidad superficial de carga inducida

sobre la cáscara”; es decir, como una fuente localizada en la cáscara. Basándonos en esta interpretación podríamos suponer que la fuerza sobre la carga de prueba surge como consecuencia de dos contribuciones: la contribución de la geometría en la cual ésta se encuentra situada y la contribución de la “carga superficial” inducida sobre la cáscara. Como ya hemos visto, la parte de la autofuerza asociada a la geometría puede entenderse, a su vez, como consecuencia de la deformación que experimentan las líneas de fuerza del campo en una geometría cónica ya que en tal geometría estas líneas no se distribuyen simétricamente alrededor de la carga. Por consiguiente, en una variedad cónica siempre debería haber autofuerza, haya o no cáscara y haya o no constante de acoplamiento. Esta última afirmación ha sido comprobada en el cuerpo de la tesis, al analizar los casos en los que $\xi = 0$. Además, en este último caso la autofuerza debería coincidir con la autofuerza en el caso electromagnético, salvo la diferencia de signo, lo que también se ha comprobado para el caso no masivo en la sección 3.8. Cuando al efecto de la geometría se le suma el efecto de la “carga superficial inducida”, esta última contribución actúa compensando a la anterior hasta que finalmente, por encima de $\xi = 1/4$, pasa a ser el factor dominante revirtiendo el signo de la fuerza debida a la geometría.

M.C. Tomasini

M. C. Tomasini

C.M. Simeone

C. M. Simeone

Apéndices

6. Apéndice I: El formalismo de *thin-shells*.

6.1. Introducción

En esta sección consideraremos un espacio-tiempo de 4 dimensiones dividido en dos regiones por una hipersuperficie tridimensional y supondremos que cada región tiene una métrica diferente. El formalismo de *thin-shells* es un desarrollo destinado a obtener soluciones válidas de las ecuaciones de Einstein cuando se hace necesario unir ambas métricas [72] [79] [124]. Fue desarrollado por Lanczos [54] [55], Darmois [19] e Israel [48]. En este apéndice resumiremos algunos conceptos del formalismo y los aplicaremos al cálculo de las cantidades (8),(10) y (12). Usaremos subíndices griegos para indicar cantidades en el espacio de 4 dimensiones, y subíndices latinos para las cantidades sobre la hipersuperficie Σ . La notación “ ; ” indica la derivada covariante.

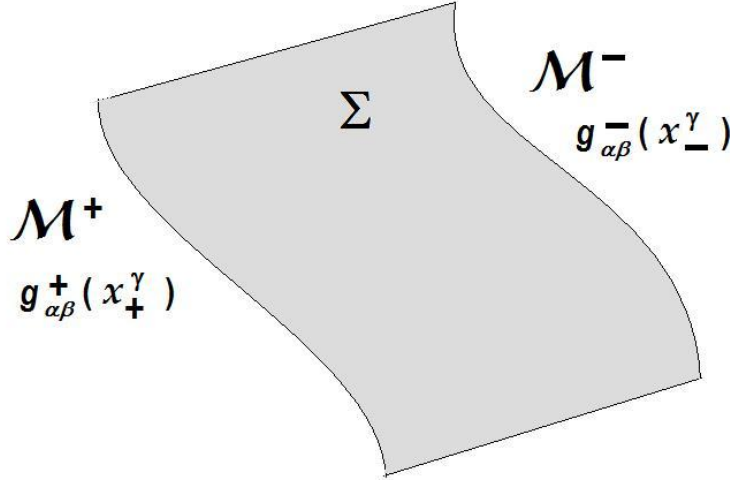


Figura 50: La hipersuperficie Σ divide el espacio-tiempo en dos regiones \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- con diferentes métricas.

Supongamos el espacio-tiempo de cuatro dimensiones dividido en dos regiones \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- mediante una hipersuperficie Σ . Cada una de estas regiones tiene diferente métrica $g_{\alpha\beta}^+$ y $g_{\alpha\beta}^-$ y diferentes coordenadas x_+^α y x_-^α como indica la figura 50. La hipersuperficie Σ puede definirse a partir de un conjunto de ecuaciones paramétricas $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ donde $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $a = 1, 2, 3$ y donde y^a son las coordenadas sobre la hipersuperficie Σ . Definimos un vector normal a la hipersuperficie Σ tal que

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo espacio} \\ 1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo tiempo} \end{cases} \quad (212)$$

Los vectores

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \quad (213)$$

son tangentes a las curvas subtendidas sobre la hipersuperficie Σ . Por lo tanto, para una hipersuperficie no nula se cumple $e_a^\alpha n_\alpha = 0$. En el caso de una cáscara móvil el vector normal debe ser, además, ortogonal a la tetravelocidad U^α :

$$n_\alpha U^\alpha = 0$$

Haciendo uso de las expresiones (213) podemos escribir el elemento de línea $ds_\Sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ sobre Σ como

$$ds_\Sigma^2 = h_{ab} dy^a dy^b$$

donde

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (214)$$

es la métrica tridimensional inducida sobre la hipersuperficie Σ o **primera forma fundamental** de la hipersuperficie Σ . El 3-tensor

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (215)$$

se denomina curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ o **segunda forma fundamental**. Se trata de un 3-tensor simétrico ($K_{ab} = K_{ba}$) que cumple con la relación

$$K = h^{ab} K_{ab} = n^\alpha{}_{;\alpha} \quad (216)$$

Esta última relación implica que la hipersuperficie es convexa si $K > 0$ y cóncava si $K < 0$. La cantidad h_{ab} se relaciona con características puramente intrínsecas de la hipersuperficie mientras que K_{ab} lo hace con aspectos extrínsecos; es decir que considera a la hipersuperficie Σ como inmersa en el espacio-tiempo de 4 dimensiones.

Buscamos las condiciones de juntura que deben satisfacerse para que la unión de las métricas $g_{\alpha\beta}^+$ y $g_{\alpha\beta}^-$ sea una solución válida de las ecuaciones de Einstein. La primera de estas condiciones nos dice que la métrica inducida sobre la hipersuperficie Σ debe ser idéntica a ambos lados de la hipersuperficie. De no ser así, la hipersuperficie no tendría una métrica intrínseca bien definida. Esta **primera condición de juntura** se expresa

$$\langle h_{ab} \rangle = 0 \quad (217)$$

donde $\langle A \rangle = A(\mathcal{M}^+)|_\Sigma - A(\mathcal{M}^-)|_\Sigma$ denota el “salto” de cualquier cantidad A a través de la hipersuperficie Σ .

El escalar de Ricci se escribe

$$R = -2\kappa\delta(\eta) + \Theta(\eta)R^+ + \Theta(-\eta)R^- \quad (218)$$

donde R^\pm se refiere al escalar de Ricci en las sub-variedades \mathcal{M}^\pm , η denota la distancia propia a lo largo de las geodésicas que intersectan normalmente a la shell, $\delta(\eta)$ es la distribución de Dirac y $\Theta(\eta)$ es la distribución de Heaviside. La función δ en (218) representa una singularidad sobre la hipersuperficie Σ .

Para que la transición sea “suave” debe cumplirse además la **segunda condición de juntura** que solicita que la curvatura extrínseca sea la misma a ambos lados de la hipersuperficie:

$$\kappa_{ab} = \langle K_{ab} \rangle = 0 \quad (219)$$

Si la condición (219) no se cumple, la singularidad que presenta el escalar de Ricci (218) sobre la hipersuperficie Σ no se elimina, de modo que el espacio-tiempo es singular en la hipersuperficie. En ese caso la función $\delta(\eta)$ se asocia a una distribución de materia infinitamente delgada o *thin-shell* en la hipersuperficie, cuyo tensor superficial de energía-momento es

$$S_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi}(\langle K_{ab} \rangle - \langle K \rangle h_{ab}) = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\langle K_{ab} - Kh_{ab} \rangle \quad (220)$$

A partir de las expresiones diagonalizadas ⁴¹

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (221)$$

$$\kappa_{ab} = \begin{pmatrix} \kappa_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (222)$$

donde σ es la densidad superficial de energía y ϑ_1 y ϑ_2 son las tensiones superficiales, podemos calcular la densidad superficial de energía

$$\sigma = -\frac{1}{8\pi G}\{\kappa_{11} + \kappa_{22}\} \quad (223)$$

y la presión

$$p_1 = -\vartheta_1 = \frac{1}{8\pi G}\{\kappa_{22} - \kappa_{00}\} \quad (224)$$

$$p_2 = -\vartheta_2 = \frac{1}{8\pi G}\{\kappa_{11} - \kappa_{00}\} \quad (225)$$

6.2. Cálculo de la Primera Condición de Juntura y del salto en la curvatura extrínseca para las geometrías Tipo I y Tipo II

Tanto para las geometrías Tipo I como para las geometrías Tipo II se trabaja con *thin shells* de tres dimensiones (t, ϕ, z) en un espacio tiempo de cuatro dimensiones con simetría cilíndrica (t, r, ϕ, z) (figuras 51, 52 y 53). Por lo tanto las coordenadas en el espacio-tiempo de 4 dimensiones son $x^\alpha = (t, r, \phi, z)$, las coordenadas sobre la hipersuperficie son $y^a = (t, \phi, z)$ y supondremos que las coordenadas x^α son continuas en el entorno de la hipersuperficie. En el caso de las geometrías Tipo I el espacio tiempo es dividido por la hipersuperficie en dos regiones \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 . En el caso de las geometrías Tipo II, las dos regiones son \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- .

Definimos el vector normal n^α a la hipersuperficie Σ . Como la hipersuperficie está definida en (t, ϕ, z) el vector normal apunta en dirección r . Teniendo en cuenta la relación (212) obtenemos

$$n_\alpha^+ = n_\alpha^I = (0, 1, 0, 0); \quad y \quad n_\alpha^- = (0, -1, 0, 0) \quad (226)$$

⁴¹En (221) y (222) las coordenadas espaciales sobre la superficie son la 1 y la 2 (respectivamente ϕ y z en geometrías con simetría cilíndrica) mientras que la coordenada 3 corresponde a la coordenada radial r ; dado que la cáscara tiene espesor nulo, la tensión en r es nula.

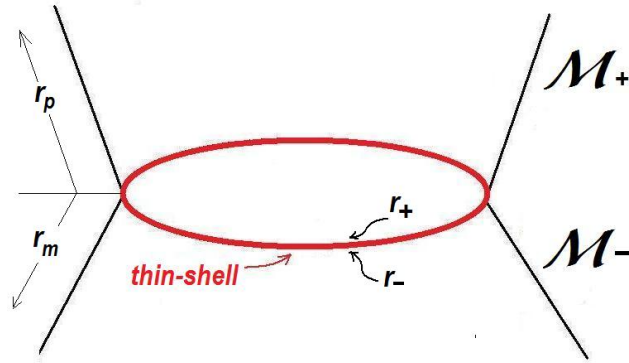


Figura 51: El gráfico muestra la ubicación de la *thin-shell* para las geometrías Tipo II. Observar que en los diagramas el espacio-tiempo de 4 dimensiones se representa como una superficie cónica de dos dimensiones; por lo tanto la *thin-shell*, que tiene una dimensión menos, se representa como una línea que une las dos superficies cónicas. En estos diagramas no se han representado ni la coordenada temporal t ni la coordenada espacial z .

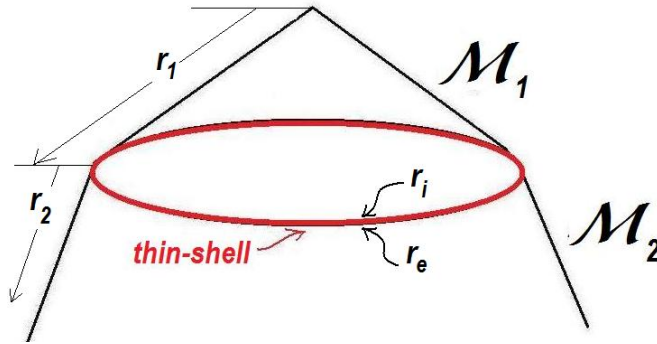


Figura 52: El gráfico muestra la ubicación de la *thin-shell* para las geometrías Tipo I correspondientes a una cáscara de materia ordinaria ($\kappa < 0$).

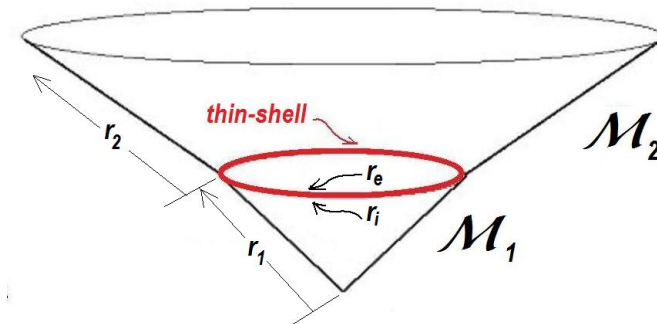


Figura 53: El gráfico muestra la ubicación de la *thin-shell* para las geometrías Tipo I correspondientes a una cáscara de materia exótica $\kappa > 0$.

donde n_{α}^{+} y n_{α}^{-} son los vectores normales correspondientes a las regiones \mathcal{M}_{+} y \mathcal{M}_{-}

respectivamente en las geometrías Tipo II, y n_α^I es el vector normal correspondiente a cualquiera de las dos regiones en las geometrías Tipo I. En el caso de las geometrías Tipo II uno de los dos vectores normales debe llevar signo negativo ya que las coordenadas arrancan en la garganta $r = 0$ y crecen hacia $\pm\infty$; por convención elegimos como positivo el vector que apunta hacia arriba en las figuras 9 o 51 de modo que la normal en la parte inferior de la garganta del *wormhole* es negativa. Para las geometrías Tipo I este problema no se presenta ya que las coordenadas nacen en el vértice del cono interior y crecen en el mismo sentido tanto en la métrica interior como en la exterior.

Los vectores e_a^α no nulos son

$$e_t^t = \frac{\partial t}{\partial t} = 1; \quad e_\phi^\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \phi} = 1; \quad e_z^z = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Calculamos la derivada covariante del vector normal $n_{\alpha;\beta}$. Dado que en cualquier caso es $n_{\alpha,\beta} = 0$, la derivada covariante del vector normal se reduce a

$$n_{\alpha;\beta}^\pm = -\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma^\pm$$

para las geometrías Tipo II y

$$n_{\alpha;\beta}^I = -\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma^I$$

para las geometrías Tipo I, donde los Γ corresponden al espacio-tiempo de cuatro dimensiones y se evalúan en las regiones \mathcal{M}_+ , \mathcal{M}_- , \mathcal{M}_1 o \mathcal{M}_2 , según corresponda. Teniendo en cuenta los vectores (226) las expresiones anteriores se simplifican a

$$n_{\alpha;\beta}^+ = -\Gamma_{\alpha\beta}^r(1); \quad n_{\alpha;\beta}^- = -\Gamma_{\alpha\beta}^r(-1); \quad n_{\alpha;\beta}^I = -\Gamma_{\alpha\beta}^r(1)$$

La métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \rho^2(r) d\phi^2 + dz^2 \quad (227)$$

donde, en el caso de las geometrías tipo I la función perfil es

$$\rho(r) = \begin{cases} r_1 \omega_i & \text{en } \mathcal{M}_1 = \{0 < r_1 \leq r_i\} \\ r_2 \omega_e & \text{en } \mathcal{M}_2 = \{r_e \leq r_2 < \infty\} \end{cases} \quad (228)$$

y en el caso de las geometrías tipo II es

$$\rho(r) = \begin{cases} r_m \omega_- & \text{en } \mathcal{M}_- = \{-\infty < r_m \leq 0\} \\ r_p \omega_+ & \text{en } \mathcal{M}_+ = \{0 \leq r_p < +\infty\} \end{cases} \quad (229)$$

donde, por comodidad, hemos denominado r_1 y r_2 a las coordenadas radiales en las sub-variedades \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 , y r_m y r_p a las correspondientes coordenadas radiales para las sub-variedades \mathcal{M}_- y \mathcal{M}_+ (figuras 51 a 53). Para estas métricas hay un único coeficiente $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ no nulo que es $\Gamma_{\phi\phi}^r = -(\omega_*)^2 r_*$ donde

$$(\omega_*)^2 r_* = \begin{cases} (\omega_i)^2 r_1 & \text{para las geometrías Tipo I en } \mathcal{M}_1 \\ (\omega_e)^2 r_2 & \text{para las geometrías Tipo I en } \mathcal{M}_2 \\ (\omega_+)^2 r_p & \text{para las geometrías Tipo II en } \mathcal{M}_+ \\ (\omega_-)^2 r_m & \text{para las geometrías Tipo II en } \mathcal{M}_- \end{cases}$$

En estas condiciones los $n_{\alpha;\beta}$ se reducen a los $n_{\phi;\phi}$:

$$n_{\phi;\phi}^{I,1} = \omega_i^2 r_1; \quad n_{\phi;\phi}^{I,2} = \omega_e^2 r_2$$

para las geometrías Tipo I, y

$$n_{\phi;\phi}^- = -(\omega_-)^2 r_m; \quad n_{\phi;\phi}^+ = (\omega_+)^2 r_p$$

para las geometrías Tipo II.

Evaluamos la **segunda forma fundamental** a partir de la ec. (215) para los casos que estamos analizando. Las únicas componentes no nulas de este 3-tensor son:

$$K_{\phi\phi}^{(1)} = (\omega_i)^2 r_1; \quad K_{\phi\phi}^{(2)} = (\omega_e)^2 r_2$$

para las geometrías Tipo I, y

$$K_{\phi\phi}^+ = (\omega_+)^2 r_p; \quad K_{\phi\phi}^- = -(\omega_-)^2 r_m$$

para las geometrías Tipo II.

Calculamos ahora la discontinuidad o **salto** en la curvatura extrínseca. Para las geometrías Tipo I las cantidades:

$$\kappa_{ab}^I = \langle K_{ab} \rangle = K_{ab}^{(2)} - K_{ab}^{(1)}$$

se reducen también a una única componente

$$\kappa_{\phi\phi}^{(I)} = K_{\phi\phi}^{(2)} - K_{\phi\phi}^{(1)} = (\omega_e)^2 r_2 - (\omega_i)^2 r_1 \quad (230)$$

o bien escrito en la forma (222):

$$\kappa_{ab}^{(I)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\phi\phi}^{(I)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (231)$$

Del mismo modo, para las geometrías Tipo II calculamos

$$\kappa_{ab}^{(II)} = K_{ab}^+ - K_{ab}^-$$

que se reducen también a una única componente:

$$\kappa_{\phi\phi}^{(II)} = K_{\phi\phi}^+ - K_{\phi\phi}^- = (\omega_+)^2 r_p + (\omega_-)^2 r_m \quad (232)$$

$$\Rightarrow \kappa_{ab}^{(II)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\phi\phi}^{(II)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (233)$$

A continuación evaluamos la traza del salto en la curvatura extrínseca $\kappa = \kappa_a^a$. Para las geometrías Tipo I:

$$\kappa^{(I)} = \kappa^{(I)\phi}{}_{\phi} = h_{(I)\phi\phi}^{\phi\phi} \kappa_{\phi\phi}^{(I)}$$

donde $h_{(I)}^{\phi\phi}$ es la componente $\{\phi\phi\}$ de la métrica inducida sobre la *thin shell* para las geometrías Tipo I, cuyo elemento de línea es

$$ds_{\Sigma,I}^2 = -dt^2 + h_{\phi\phi}^{(I)} d\phi^2 + dz^2 = \begin{cases} -dt^2 + (\omega_i)^2 r_1^2 d\phi^2 + dz^2 & \text{en } \mathcal{M}_1 \\ -dt^2 + (\omega_e)^2 r_2^2 d\phi^2 + dz^2 & \text{en } \mathcal{M}_2 \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que

$$h_{\phi\phi}^{(I)} = \begin{cases} (\omega_i)^2 r_1^2 & \text{en } \mathcal{M}_1 \\ (\omega_e)^2 r_2^2 & \text{en } \mathcal{M}_2 \end{cases}$$

Además, la **primera condicion de juntura**, ecuación (217), implica que

$$h_{\phi\phi}^{(I,1)}|_{\Sigma} = h_{\phi\phi}^{(I,2)}|_{\Sigma} \Rightarrow \omega_e r_2|_{r_e} = \omega_i r_1|_{r_i} \Rightarrow \omega_e r_e = \omega_i r_i$$

que coincide con la expresión (8), de modo que la traza es

$$\kappa^{(I)} = \frac{1}{\omega_e^2 r_e^2} (\omega_e^2 r_e - \omega_i^2 r_i) = \frac{(\omega_e - \omega_i)}{\omega_e r_e}$$

que concuerda con la relación (12).

Del mismo modo, el elemento de línea para las geometrías tipo II es

$$ds_{\Sigma,II}^2 = -dt^2 + h_{\phi\phi}^{(II)} d\phi^2 + dz^2 = \begin{cases} -dt^2 + (\omega_+)^2 r_p^2 d\phi^2 + dz^2 & \text{en } \mathcal{M}_+ \\ -dt^2 + (\omega_-)^2 r_m^2 d\phi^2 + dz^2 & \text{en } \mathcal{M}_- \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_{\phi\phi}^{(II)} = \begin{cases} (\omega_+)^2 r_p^2 & \text{en } \mathcal{M}_+ \\ (\omega_-)^2 r_m^2 & \text{en } \mathcal{M}_- \end{cases}$$

La **primera condicion de juntura** conduce a

$$h_{\phi\phi}^{(II,+)}|_{\Sigma} = h_{\phi\phi}^{(II,-)}|_{\Sigma} \Rightarrow \omega_+ r_p|_{r_+} = \omega_- r_m|_{r_-} \Rightarrow \omega_+ r_+ = \omega_- r_-$$

que es la ecuación (10). Por lo tanto, el salto en la curvatura extrínseca es

$$\kappa^{(II)} = \frac{(\omega_+ + \omega_-)}{\omega_+ r_+}$$

que coincide también con la relación (12).

Dado que las geometrías Tipo I y II son localmente planas en todas partes salvo en la *shell*, entonces es $R^+ = R^- = 0$ en la ecuación (218) de modo que el escalar de Ricci para estas configuraciones se reduce a

$$R(r) = -2\kappa\delta(r - r_s)$$

donde $r = r_s$ es la localización de la *thin-shell* en cualquiera de las dos geometrías.

Usando las expresiones (221) a (225), (230) y (232) evaluamos el tensor energía-momento superficial para las geometrías Tipo I y Tipo II:

$$S_{ab}^{(I)} = \begin{pmatrix} -\kappa_{\phi\phi}^{(I)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\phi\phi}^{(I)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (234)$$

$$S_{ab}^{(II)} = \begin{pmatrix} -\kappa_{\phi\phi}^{(II)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\phi\phi}^{(II)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (235)$$

Usando la primera condición de juntura podemos escribir estas últimas expresiones como:

$$S_{ab}^{(I)} = \begin{pmatrix} -(\omega_e - \omega_i)(\omega_e r_e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_e - \omega_i)(\omega_e r_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (236)$$

$$S_{ab}^{(II)} = \begin{pmatrix} -(\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ r_+) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ r_+) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (237)$$

Observar que al pegar geometrías cónicas se obtienen tensores de energía-momento superficiales con el mismo tipo de ecuación de estado de las cuerdas cósmicas locales [29]; es decir que tenemos $p_r = p_\phi = 0$ y $p_z = -\sigma$.

7. Apéndice II: Análisis de estabilidad de agujeros de gusano en teorías de gravedad más allá de la Relatividad General.

Como parte del aprendizaje del formalismo de *thin-shells*, y dentro del marco del plan de tesis se realizó el análisis de estabilidad de cáscaras en teorías de gravedad más allá de la Relatividad General. Los resultados fueron publicados en [96] y se resumen en el presente apéndice.

7.1. Introducción

Los análisis usuales de estabilidad de agujeros de gusano del tipo *thin-shell* suponen cáscaras con ecuaciones de estado aproximadas por una relación lineal entre la presión y la densidad de energía. Vease por ejemplo [12, 80] o estudios más recientes en [89, 28, 29] y las referencias allí citadas. A diferencia de este punto de vista, en una serie de artículos que continúan el enfoque presentado en [25], se estudia la dinámica de cáscaras asumiendo que la ecuación de estado válida para una *shell* estática vale también para la evolución que experimenta la cáscara luego de una perturbación suave [6, 90, 27]. Los resultados obtenidos dentro de esta aproximación difieren significativamente de los obtenidos dentro del tratamiento linealizado. En el presente trabajo se extiende el análisis introducido en [25] y discutido en profundidad en [95] a teorías de gravedad más allá de la Relatividad General; en particular se analiza la estabilidad de cáscaras en agujeros de gusano de *thin-shell* dentro del marco de la gravedad dilatónica y de la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet. Usaremos unidades naturales, esto es $c = G_n = 1$, donde G_n es la constante gravitacional en n dimensiones.

7.2. Agujeros de gusano dilatónicos en 3+1 dimensiones

En la teoría de cuerdas bosónicas cerradas [81] con adición de un campo electromagnético, la acción S para $D = 4$ escrita en el marco relativista tiene la forma [33]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (-R + 2(\nabla\phi)^2 + e^{-2b\phi} F^2) \quad (238)$$

donde R es el escalar de Ricci para la métrica $g_{\mu\nu}$, ϕ es el campo del dilatón, $F^{\mu\nu}$ es el campo electromagnético y b ($0 \leq b \leq 1$) determina el acoplamiento entre estos dos campos. El principio variacional $\delta S = 0$ conduce a

$$\nabla_\mu (e^{-2b\phi} F^{\mu\nu}) = 0 \quad (239)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{b}{2} e^{-2b\phi} F^2 = 0 \quad (240)$$

$$R_{\mu\nu} = 2\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + 2e^{-2b\phi} (F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2). \quad (241)$$

Las expresiones (239) y (240) son las ecuaciones para el campo del dilatón y el campo electromagnético; y (241) corresponde a las ecuaciones de Einstein con estos campos

como fuente. Estas últimas admiten soluciones esféricamente simétricas con una métrica de la forma [34, 44, 35]

$$ds_{\pm}^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (242)$$

donde

$$f(r) = \left(1 - \frac{A}{r}\right) \left(1 - \frac{B}{r}\right)^{(1-b^2)/(1+b^2)}$$

$$h(r) = r^2 \left(1 - \frac{B}{r}\right)^{2b^2/(1+b^2)}$$

Las constantes A y B corresponden a los horizontes interior y exterior en la geometría del agujero negro, y se relacionan con la masa M y con la carga electromagnética Q mediante las expresiones

$$A = M + \sqrt{M^2 - (1 - b^2)Q^2}, \quad B = \frac{(1 + b^2)Q^2}{M + \sqrt{M^2 - (1 - b^2)Q^2}}$$

Consideraremos una cáscara ubicada en un radio a fuera del horizonte exterior. La cáscara se define mediante el formalismo de *thin-shells* presentado en el Apéndice I, pegando dos copias idénticas de la parte exterior (esto es, más allá del radio del horizonte exterior) de la geometría (242). La geometría completa resultante es la de un agujero de gusano simétrico respecto de la garganta, la cual es una superficie de área mínima. La materia de la *shell* se relaciona con la geometría a cada lado mediante las ecuaciones de Lanczos (220) [102, 55, 19, 72]

$$\langle K_{ij} - K h_{ij} \rangle = -8\pi S_{ij} \quad (243)$$

donde S_{ij} es el tensor energía-momento superficial, K_{ij}^{\pm} es la curvatura extrínseca a cada lado de la cáscara, dada por la expresión (215)

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} \quad (244)$$

K es la correspondiente traza y $\langle \cdot \rangle$ es el salto de una cierta cantidad a través de la superficie $r = a$; n_{α}^{\pm} son las componentes de las normales unitarias a cada lado de la cáscara, definidas en (212). Tal como se indicó en el Apéndice I, los índices griegos corresponden a las coordenadas de la geometría (242) y los índices latinos corresponden a las coordenadas sobre la superficie $r = a$. La densidad de energía y la presión resultantes se obtienen aplicando las expresiones (223) a (225) del Apéndice I:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{h'(a)}{h(a)} \sqrt{f(a) + \dot{a}^2} \quad (245)$$

$$p = \frac{1}{8\pi} \sqrt{f(a) + \dot{a}^2} \left[\frac{2\ddot{a} + f'(a)}{f(a) + \dot{a}^2} + \frac{h'(a)}{h(a)} \right] \quad (246)$$

donde el punto indica la derivada respecto del tiempo propio sobre la cáscara, y la prima denota la derivada respecto de la coordenada radial r . Para una configuración estática las dos expresiones anteriores se reducen a

$$\sigma_0 = -\frac{\sqrt{f(a_0)} h'(a_0)}{4\pi h(a_0)} \quad (247)$$

$$p_0 = \frac{\sqrt{f(a_0)}}{8\pi} \left[\frac{f'(a_0)}{f(a_0)} + \frac{h'(a_0)}{h(a_0)} \right] \quad (248)$$

Partiendo de estos resultados, se han encontrado soluciones estáticas estables para una ecuación de estado linealizada [26] y también para una ecuación de estado de Chaplygin generalizada [7]. En este trabajo se sigue un camino alternativo introducido en [25] y recientemente analizado en [95]. A partir de las ecuaciones (245) y (246) hallamos la relación existente entre la densidad superficial de energía y la presión para el caso de una *shell* que evoluciona en el tiempo:

$$p = Y\sigma, \quad Y = -\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{2\ddot{a} + f'(a)}{f(a) + \dot{a}^2} \right) \frac{h(a)}{h'(a)} \right] \quad (249)$$

y la relación analoga para una *shell* estática:

$$p_0 = X_0\sigma_0, \quad X_0 = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{f'(a_0)h(a_0)}{f(a_0)h'(a_0)} \right] \quad (250)$$

Siguiendo el tratamiento perturbativo introducido en [25], solicitamos que la forma de la ecuación de estado válida para la configuración estática siga siendo válida para una *shell* que experimenta una evolución suave imponiendo la condición

$$Y = X, \quad X = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{f'(a)h(a)}{f(a)h'(a)} \right] \quad (251)$$

A partir de esta condición se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para el radio de la cáscara:

$$2\ddot{a}f(a) = \dot{a}^2 f'(a) \quad (252)$$

que tiene por solución

$$\dot{a}(\tau) = \dot{a}_0 \sqrt{\frac{f(a(\tau))}{f(a_0)}} \quad (253)$$

Este tipo de solución excluye cualquier movimiento oscilatorio ya que el signo de la velocidad de la *shell* queda determinado por las condiciones iniciales. Por lo tanto sólo es posible un movimiento monótono. En general, dado que dentro del rango $0 \leq b \leq 1$ la función $f(r)$ crece con r , tendríamos una expansión acelerada después de una perturbación hacia afuera, y una contracción desacelerada luego de una perturbación hacia adentro.

7.3. Agujeros de gusano de Einstein–Gauss–Bonnet en 4+1 dimensiones

La teoría de gravedad más general que conduce a ecuaciones de movimiento de segundo orden es la gravedad en cinco dimensiones asociada a la acción de Einstein más los términos de Gauss–Bonnet [62]. La geometría del agujero negro en este marco teórico fue hallada por Boulware y Deser [11] y posteriormente ampliada al caso electrodinámico por Wiltshire [126, 127]. La acción de la teoría, incluyendo un campo electromagnético y una constante cosmológica no nula Λ , es [11, 126, 127]

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \alpha (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2) \right] \quad (254)$$

donde α es una constante con dimensiones (longitud)². El valor de esta constante determina cuánto se aparta esta teoría de la Relatividad pura, la que corresponde al valor $\alpha = 0$. En este trabajo supondremos $\alpha > 0$ que es lo que se requiere para que, en ausencia del término de Einstein, el signo relativo entre la acción gravitatoria y la electromagnética sea el correcto.

El principio variacional aplicado a la acción (254) conduce a ecuaciones de campo que admiten una solución esféricamente simétrica y estática que corresponde a la geometría del agujero negro

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\chi^2 + \sin^2\theta \sin^2\chi d\varphi^2) \quad (255)$$

donde la función métrica $f(r)$ admite dos ramas:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \mp \frac{r^2}{4\alpha} \sqrt{1 + \frac{16\alpha M}{\pi r^4} + \frac{8\alpha Q^2}{3r^6} + \frac{4\alpha\Lambda}{3}} \quad (256)$$

La rama asociada al signo menos es la rama estándar que presenta horizontes, mientras que la rama ligada al signo más es una “rama exótica” que incluye una singularidad desnuda. Sin embargo, tanto la singularidad como los horizontes son removidos al construir matemáticamente un agujero de gusano mediante el procedimiento presentado en el Apéndice I, siempre que se coloque la garganta del *wormhole* en un radio mayor que el radio del horizonte más grande. Entonces, no hay necesidad de excluir la rama exótica dentro de este marco. Esta rama tiene la virtud de permitir configuraciones simples de agujeros de gusano sostenidos por materia ordinaria (esto es, materia que satisface las condiciones de energía) aún si algunos parámetros se anulan.

7.4. Los términos de Gauss–Bonnet como un $T_{\mu\nu}$ efectivo.

El principio variacional $\delta S = 0$ conduce a ecuaciones de campo que pueden ser entendidas de dos maneras. En la primera, la contribución de Gauss–Bonnet se considera como parte de un tensor energía-momento efectivo, de modo que recuperamos las ecuaciones de Einstein con una fuente adicional:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[T_{\mu\nu}^{EM} + T_{\mu\nu}^{GB}] \quad (257)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{EM} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta},$$

y

$$T_{\mu\nu}^{GB} = \alpha [8R_{\alpha\beta}R^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} - 4R_{\mu\alpha\beta\gamma}R^{\alpha\beta\gamma}{}_{\nu} + 8R_{\mu\alpha}R^{\alpha}{}_{\nu} - 4RR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2)]$$

En este caso las condiciones de juntura sobre la superficie de unión de las dos métricas son justamente las de la Relatividad General

$$\langle K_{ij} - K h_{ij} \rangle = -8\pi S_{ij}$$

donde ahora el tensor energía-momento superficial incluye la contribución de Gauss–Bonnet. Si la superficie une dos copias idénticas de la parte exterior de una geometría

esféricamente simétrica y estática, la geometría completa resultante es la de un agujero de gusano cuyo radio de garganta es a . La densidad de energía y la presión de la materia que constituye la cáscara vienen dadas por

$$\sigma = -\frac{3}{4\pi a} \sqrt{f(a) + \dot{a}^2} \quad (258)$$

$$p = -\frac{2}{3}\sigma + \frac{1}{8\pi} \frac{2\ddot{a} + f'(a)}{\sqrt{f(a) + \dot{a}^2}} \quad (259)$$

El signo menos en la ecuación (259) indica que, si los términos de Gauss–Bonnet se interpretan como formando parte del tensor energía-momento efectivo, no puede evitarse la materia exótica en la construcción del agujero de gusano de *thin-shell*. Para una configuración estática ($a = a_0$) tenemos

$$\sigma_0 = -\frac{3\sqrt{f(a_0)}}{4\pi a_0} \quad (260)$$

$$p_0 = -\frac{2}{3}\sigma_0 + \frac{1}{8\pi} \frac{f'(a_0)}{\sqrt{f(a_0)}} \quad (261)$$

A partir de estos resultados, en [111] se encontraron configuraciones estáticas estables bajo perturbaciones que preserven la simetría siguiendo la aproximación linealizada. En su lugar, en el presente análisis seguiremos el procedimiento de la sección precedente. La relación entre la densidad de energía estática y la presión es

$$p_0 = X_0\sigma_0, \quad X_0 = -\frac{1}{3} \left(2 + \frac{a_0 f'(a_0)}{2f(a_0)} \right) \quad (262)$$

Por otra parte, para el caso general de una *shell* en movimiento tenemos

$$p = Y\sigma, \quad Y = -\frac{1}{3} \left[2 + \frac{2a\ddot{a} + af'(a)}{2f(a) + 2\dot{a}^2} \right]. \quad (263)$$

Si solicitamos que la forma de la ecuación de estado para el caso estático sea preservada durante una evolución suave de la *shell*, imponemos la siguiente aproximación

$$p = X\sigma, \quad X = -\frac{1}{3} \left[2 + \frac{af'(a)}{2f(a)} \right]. \quad (264)$$

A partir de (263) y (264) inmediatamente obtenemos la condición

$$f'(a)\dot{a}^2 = 2f(a)\ddot{a} \quad (265)$$

que es la ecuación de movimiento para la *shell* situada en la garganta del *wormhole*. Como antes, la solución de esta ecuación adquiere la forma

$$\dot{a}(\tau) = \dot{a}_0 \sqrt{\frac{f(a(\tau))}{f(a_0)}} \quad (266)$$

lo que implica, nuevamente, una evolución monótona: una expansión si la velocidad inicial apunta hacia afuera, y una contracción si apunta hacia adentro. El carácter acelerado o desacelerado del movimiento será determinado, en cada caso, por la dependencia

de la función métrica $f(r)$ respecto de la coordenada radial. Por ejemplo, consideremos un caso simple en el que la carga y la constante cosmológicas son nulas, y supongamos un pequeño apartamiento $\alpha \ll a^2$ respecto de la Relatividad General. En ese caso, de (256) tendríamos $f(r) \simeq 1 - 2M/(\pi r^2)$ para la rama estándar de la métrica, y $f(r) \simeq 1 + 2M/(\pi r^2) + r^2/(2\alpha)$ para la rama exótica. En el primer caso la *shell* sufriría una expansión acelerada con aceleración decreciente luego de una perturbación hacia afuera, y una contracción desacelerada luego de una perturbación hacia adentro. En el segundo caso, en cambio, aparece una suerte de constante cosmológica efectiva $\Lambda_{Eff} \sim \alpha^{-1}$ que promovería una expansión hacia afuera con aceleración creciente. Esto último acabaría por invalidar el tratamiento perturbativo, el cual descansa sobre la hipótesis de un movimiento suave de la *shell*.

7.5. Los términos de Gauss–Bonnet como objeto geométrico

Los términos de Gauss–Bonnet en las ecuaciones de la teoría pueden asociarse a la geometría en lugar de hacerlo al tensor energía-momento efectivo. Además de otras ventajas, este punto de vista permite una comprensión más satisfactoria del carácter de la materia que compone la *shell* que une ambas sub-variedades. En este enfoque las condiciones de juntura se generalizan para incluir la contribución de Gauss–Bonnet, y esto tiene dos consecuencias positivas:

- en primer lugar, para determinados valores de los parámetros, los agujeros de gusano de *thin-shell* pueden ser sustentados por materia que satisface las condiciones de energía [88, 64, 41, 105]; más aún, cuando se asocian a la rama exótica de la solución de Wiltshire, los *wormholes* son sustentados por materia normal, incluso en el caso de una constante de Gauss–Bonnet relativamente pequeña y positiva, y para una carga y una constante cosmológica nulas [105].

- en segundo lugar, como este enfoque cambia sustancialmente la forma de la densidad de energía superficial y de la presión sobre la *shell*, podría permitir, en principio, algún tipo diferente de movimiento.

Para este tratamiento de los términos de Gauss–Bonnet las ecuaciones de movimiento son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} + 2\alpha H_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (267)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha}R_{\nu}^{\alpha} - 2R^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &+ R_{\mu}^{\alpha\beta\gamma}R_{\nu\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(R^2 - 4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}). \end{aligned}$$

Las condiciones de juntura que relacionan la métrica a ambos lados de la superficie con el carácter de la materia sobre esta superficie vienen dadas por las condiciones de Darmois–Israel (217) y (219) generalizadas a la gravedad de Einstein–Gauss–Bonnet. Estas condiciones fueron obtenidas en [20] (véase también [65]), y se escriben

$$\langle K_{ij} - Kh_{ij} \rangle + 2\alpha \langle 3J_{ij} - Jh_{ij} + 2P_{iklj}K^{kl} \rangle = -8\pi S_{ij} \quad (268)$$

donde los índices latinos señalan las coordenadas sobre la superficie de junta. En la última expresión P_{ijkl} denota la parte del tensor de Riemann libre de singularidades sobre la superficie:

$$P_{ijkl} = R_{ijkl} + (R_{jk}h_{li} - R_{jl}h_{ki}) - (R_{ik}h_{lj} - R_{il}h_{kj}) + \frac{1}{2}R(h_{ik}h_{lj} - h_{il}h_{kj}),$$

mientras que el tensor J_{ij} se define como

$$J_{ij} = \frac{1}{3}[2KK_{ik}K_j^k + K_{kl}K^{kl}K_{ij} - 2K_{ik}K^{kl}K_{lj} - K^2K_{ij}].$$

En [41, 52] se estudió la posibilidad de construir agujeros de gusano de *thin-shell* estables que conecten dos geometrías de la forma (255) dentro de esta interpretación de los términos de Gauss–Bonnet y para valores adecuados de los parámetros, pero con una aproximación de estabilidad linearizada. En su lugar, nosotros seguiremos el procedimiento de las secciones precedentes para llevar a cabo el análisis perturbativo. A partir de las condiciones de junta (268) encontramos las expresiones para la densidad de energía y la presión sobre la *shell* que conecta las dos geometrías exteriores:

$$\sigma = -\frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{6\Delta}{a} - \frac{2\alpha}{a^3} [4\Delta^3 - 12\Delta(1 + \dot{a}^2)] \right\} \quad (269)$$

$$p = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{4\Delta}{a} + 2\frac{\ell}{\Delta} - \frac{8\alpha}{a^2} [\ell\Delta - \frac{\ell}{\Delta}(1 + \dot{a}^2) - 2\Delta\ddot{a}] \right\} \quad (270)$$

donde hemos introducido

$$\Delta = \sqrt{f(a) + \dot{a}^2}, \quad \ell = \frac{f'(a)}{2} + \ddot{a}.$$

Las correspondientes expresiones para el caso estático son

$$\sigma_0 = -\frac{\sqrt{f(a_0)}}{8\pi a_0} \left\{ 6 - \frac{4\alpha}{a_0^2} [2f(a_0) - 6] \right\} \quad (271)$$

$$p_0 = \frac{\sqrt{f(a_0)}}{8\pi a_0} \left\{ 4 + \frac{a_0 f'(a_0)}{f(a_0)} - 4\alpha \frac{f'(a_0)}{a_0} \left[\frac{f(a_0) - 1}{f(a_0)} \right] \right\} \quad (272)$$

de modo que vale la siguiente ecuación de estado que relaciona la densidad de energía y la presión:

$$p_0 = X_0 \sigma_0, \quad X_0 = \frac{a_0 \{4a_0 f(a_0) + a_0^2 f'(a_0) - 4\alpha f'(a_0) [f(a_0) - 1]\}}{f(a_0) \{8\alpha [f(a_0) - 3] - 6a_0^2\}} \quad (273)$$

En el caso de una cáscara móvil la correspondiente relación es

$$p = Y\sigma, \quad Y = \frac{2\Delta a + \ell a^2 \Delta^{-1} - 4\alpha \{ \ell \Delta - \ell \Delta^{-1} (1 + \dot{a}^2) - 2\Delta \ddot{a} \}}{-3\Delta a + \alpha a^{-1} [4\Delta^3 - 12(1 + \dot{a}^2)\Delta]} \quad (274)$$

Si suponemos que la forma de la ecuación de estado para la configuración estática es una buena aproximación para la *shell* móvil, entonces

$$Y = X, \quad X = \frac{a \{4a f(a) + a^2 f'(a) - 4\alpha f'(a) [f(a) - 1]\}}{f(a) [8\alpha (f(a) - 3) - 6a^2]} \quad (275)$$

A diferencia de los casos estudiados antes, esta condición no conduce de modo directo a una ecuación de movimiento simple para la *shell*. Sin embargo, si estamos interesados en una evolución oscilatoria, la cual puede asociarse a cierto tipo de equilibrio estable, podemos buscar puntos de retorno; es decir, valores del radio de la cáscara para los cuales se verifique $\dot{a} = 0$ y $\ddot{a} \neq 0$. En estas posiciones de la *shell*, y bajo la aproximación adoptada, debería cumplirse que $X(a) = Y(a, \dot{a} = 0, \ddot{a})$. Un cálculo directo conduce a la siguiente condición:

$$\ddot{a} [a^2 + 4\alpha(1 + f(a))] = 0 \quad (276)$$

Dado que el radio de la garganta del *wormhole* es mayor que el radio del horizonte exterior en la geometría original el agujero negro, entonces $f(a) > 0$; para $\alpha > 0$ esta condición puede ser satisfecha solamente si

$$\ddot{a} = 0,$$

lo cual contradice la existencia de un punto de retorno. Por lo tanto, más allá de la complejidad considerablemente mayor que encontramos en las ecuaciones de movimiento asociando la contribución de Gauss–Bonnet a la geometría, la conclusión es análoga a la que se obtiene mediante la aproximación más sencilla de la sección 7.4: bajo las hipótesis adoptadas no puede tener lugar una evolución de tipo oscilatorio.

7.6. Resumen

En esta parte de la tesis hemos extendido la aproximación adoptada en [25] y analizada en detalle en [95], a dos ejemplos diferentes asociados a teorías de gravedad más allá de la Relatividad General: la gravedad dilatónica y dos diferentes enfoques dentro de la gravedad de Einstein–Gauss–Bonnet. Los resultados difieren de los obtenidos usando el procedimiento de estabilidad linealizada. En efecto, suponer que la ecuación de estado para una *shell* estática sigue siendo válida para la misma *shell* cuando experimenta una perturbación simétrica suave podría significar una fuerte restricción a la evolución de la cáscara, excluyendo la posibilidad de movimientos oscilatorios y limitándola a una evolución monótona.

BIBLIOGRAFÍA

Referencias

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (ed.). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, NY, USA (1972).
- [2] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. *Phys. Rev. Lett.* 48, 1220–1223 (1982).
- [3] M. R. Anderson. *The Mathematical Theory of Cosmic Strings. Cosmic Strings in the Wire Approximation*. IOP, Bristol, UK (2003).

- [4] C. Barrabès. *Class. Quant. Grav.* 6, 581-588 (1989).
- [5] C. Barrabès and W. Israel. *Phys. Rev. D* 43, 1129-1142 (1991).
- [6] C. Bejarano, E. F. Eiroa and C. Simeone, *Phys. Rev. D* 75, 027501 (2007). arXiv:gr-qc/0610123v2.
- [7] C. Bejarano and E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* 84, 064043 (2011). arXiv:1106.6340v3[gr-qc]
- [8] L. Bergström and A. Goobar. *Cosmology and Particle Astrophysics*. Springer and Praxis Publishing Ltd., Chichester, UK (2006).
- [9] V. B. Bezerra and N. R. Khusnutdinov, *Phys. Rev. D* 79, 064012 (2009). arXiv:0901.0480v3[gr-qc].
- [10] J. B. Binder and G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.* 38, 857-870 (2006). arXiv:gr-qc/0601105v1.
- [11] D.G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* 55, 2656 (1985).
- [12] P. R. Brady, J. Louko and E. Poisson, *Phys. Rev. D* 44, 1891 (1991).
- [13] R. H. Brandenberger. *Beyond Standard Inflationary Cosmology* (2018). arXiv:1809.04926v1 [hep-th].
- [14] L. M. Burko, Y. T. Liu and Y. Soen. *Phys. Rev. D* 63, 024015 (2001). arXiv:gr-qc/0008065v1.
- [15] L. M. Burko. *Class. Quant. Grav.* 17, 227 - 250 (2000). arXiv:gr-qc/9911042.
- [16] M. Casals, E. Poisson and I. Vega, *Phys. Rev. D* 86, 064033 (2012). arXiv:1206.3772v1[gr-qc].
- [17] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, *Phys. Let. B*, 215, 1, 67 - 72 (1988).
- [18] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. John Wiley and Sons, Chichester, UK (2002).
- [19] G. Darmois, *Mémoires de Sciences Mathématiques*, XXV (1927).
- [20] S. C. Davis, *Phys. Rev. D* 67, 024030 (2003). arXiv:hep-th/0208205v3.
- [21] A. C. Davies and T. W. B. Kibble, *Contemp. Phys.* 46, 313 - 322 (2005). arXiv:hep-th/0505050v1.
- [22] S. Detweiler and B. F. Whiting. *Phys. Rev. D* 67, 024025 (2003). arXiv:gr-qc/0202086v3.
- [23] T. D. Drivas and S. E. Gralla. *Class. Quant. Grav.* 28, 145025 (2011). arXiv:1009.0504v2 [gr-qc].
- [24] A. Einstein and N. Rosen. *Phys.Rev.* 48, 73-77 (1935).

- [25] E. F. Eiroa and C. Simeone, *Phys. Rev. D* 70, 044008 (2004). arXiv:gr-qc/0404050v1.
- [26] E. F. Eiroa and C. Simeone, *Phys. Rev. D* 71, 127501 (2005). arXiv:gr-qc/0502073v2.
- [27] E. F. Eiroa and C. Simeone, *Phys. Rev. D* 81, 084022 (2010). arXiv:0912.5496v4[gr-qc].
- [28] E. F. Eiroa and C. Simeone, *Int. J. Mod. Phys. D* 21, 1250033 (2012). arXiv:1202.5009v2[gr-qc].
- [29] E. F. Eiroa, E. Rubín de Celis and C. Simeone, *Eur. Phys. J. C* 76, 546 (2016). arXiv:1608.04729v2[gr-qc].
- [30] V. Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Springer Science + Business Media Dordrecht, Holanda (2004).
- [31] V. P. Frolov and I. D. Novikov. *Phys. Rev. D* 48, 4545 (1993). arXiv:gr-qc/9309001v2.
- [32] S. A. Fulling, C. S. Trendafilova, P. N. Truong and J. A. Wagner. *J. Phys. A: Math. Theor.* 45, 374018 (2012). arXiv:1205.1818v1[math-ph] [Erratum: *J. Phys. A* 46, 349501 (2013)].
- [33] M. Gasperini, in I. Ciufolini, V. Gorini, U. Moschella and P. Fré (eds.), *Gravitational Waves*, 280-337. IOP Publishing, Bristol, UK (2001). arXiv:hep-th/9907067.
- [34] D. Garfinkle, G. T. Horowitz and A. Strominger, *Phys. Rev. D* 43, 3140 (1991); *ibid.* 45, 3888(E) (1992).
- [35] G. W. Gibbons and K. Maeda, *Nucl. Phys. B* 298, 741 (1988).
- [36] M. B. Green, in A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibble and B. Zegarlinski (eds.), *Mathematical Physics 2000*, 59–86. Imperial College Press. London, UK (2000).
- [37] A. Ghribi (ed.). *Advances in Modern Cosmology*. InTech, Rijeka, Croacia (2011).
- [38] J. R. Gott III, *Astrophys. J.* 288, 422 (1985).
- [39] M. E. X. Guimarães and B. Linet. *Commun. Math. Phys* 165, 297-310 (1994).
- [40] A. H. Guth. *Phys. Rev. D* 23, 347–356 (1981).
- [41] S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy and Z. Amirabi, *Phys. Rev. D* 81, 04002 (2010).
- [42] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1973).
- [43] W. A. Hiscock, *Phys. Rev. D* 31, 3288 (1985).
- [44] J. H. Horne and G. T. Horowitz, *Phys. Rev. D* 46, 1340 (1992). arXiv:hep-th/9203083v2.

- [45] O. Hrycyna and M. Szydlowski, *JCAP* 04, 026 (2009). arXiv:0812.5096v2[hep-th].
- [46] J. N. Islam. *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (2004).
- [47] S. Isoyama and E. Poisson. *Class. Quant. Grav.* 29, 155012 (2012). arXiv:1205.1236v2 [gr-qc].
- [48] W. Israel. *Nuovo Cimento* 44B, 1, 1966; *ibid.* 48B, 463 (1966).
- [49] T. W. B. Kibble. *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 9, No. 8. 1387-1398 (1976).
- [50] T.W.B. Kibble. *Physica C* 369, 87–92 (2002). arXiv:cond-mat/0111082.
- [51] T. W. B. Kibble. *Phys. Reports* 67, 183 (1980).
- [52] T. Kokubu, H. Maeda and T. Harada, *Class. Quant. Grav.* 32, 23, 235021 (2015). arXiv:1506.08550v1[gr-qc].
- [53] N. Khusnutdinov. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Series* 3, 354–363 (2011). arXiv:1402.2534v1[gr-qc].
- [54] C. Lanczos. *Phys. Zeits.* 23, 539 (1922).
- [55] C. Lanczos. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 74, 518-540 (1924).
- [56] W. Lima, R. Mendes, G. Matsas and D. Vanzella. *Phys. Rev. D* 87, 104039 (2013). arXiv:1304.0582v2[gr-qc].
- [57] A. D. Linde. *Phys. Lett. B* 108, 389–393 (1982).
- [58] A. D. Linde. *Phys. Lett. B* 116, 335–339 (1982).
- [59] A. D. Linde. *Phys. Lett. B* 129, 177–181 (1983).
- [60] B. Linet. *Gen. Rel. Grav.* 17, 1109 (1985).
- [61] B. Linet. *Phys. Rev. D* 33, 1833 (1986).
- [62] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* 12, 498 (1971).
- [63] F. Lucchin F and S. Matarrese. *Phys. Lett. B* 164, 282–286 (1985).
- [64] H. Maeda and M. Nozawa. *Phys. Rev. D* 78, 024005 (2008). arXiv:0803.1704v4[gr-qc].
- [65] H. Maeda, V. Sahni and Y. Shtanov. *Phys. Rev. D* 76, 104028 (2007). *Phys. Rev. D* 80, 089902(E) (2009). arXiv:0708.3237v4[gr-qc].
- [66] R. Mendes, G. Matsas and D. Vanzella. *Phys. Rev. D* 89, 047503 (2014). arXiv:1310.2185v2[gr-qc].
- [67] C. W. Misner and J. A. Wheeler. *Ann. Phys.*, 2, 525-603, 1957. Reprinted in J. A. Wheeler, *Geometrodynamics*, Academics, NY, USA (1962).

- [68] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Freeman and Company, San Francisco, USA (1973).
- [69] E. Morganson, P. Marshall, T. Treu, T. Schrabback and R. D. Blandford. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 000, 1–20 (2007). arXiv: 0908.0602v1[astro-ph.CO].
- [70] M. S. Morris and K. S. Thorne. *Am. J. Phys.* 56, 395-412 (1988).
- [71] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever. *Phys. Rev. Lett.* 61, 1446-1449 (1988).
- [72] P. Musgrave and K Lake. *Class. Quant. Grav.* 13, 1885 - 1900 (1996). arXiv: gr-qc/9510052v3.
- [73] H. B. Nielsen and P. Olesen. *Nuclear Phys. B* 61, 45 - 61 (1973).
- [74] J. Peacock, *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1998).
- [75] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, Princeton, USA (1993).
- [76] L. Pogosian, , S. Tye, I. Wasserman and M. Wyman. *Phys. Rev. D.* 68, 023506 (2003). arXiv: hep-th/0304188.
- [77] E. Poisson, A. Pound and I. Vega. *Living Rev. Relativity*, 14, (2011), 7. arXiv:1102.0529v3[gr-qc].
- [78] E. Poisson. *Fundam. Theor. Phys.* 162, 309 - 325 (2011). arXiv:0909.2994v1[gr-qc].
- [79] E. Poisson, *A relativist's toolkit. The Mathematics of Black Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (2004).
- [80] E. Poisson and M. Visser, *Phys. Rev. D* 52, 7318 (1995). arXiv:gr-qc/9506083v1.
- [81] J. Polchinski, *String Theory I. An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1998).
- [82] A. A. Popov. *Phys. Rev. D* 84, 064009 (2011). arXiv:1111.3438v1[gr-qc].
- [83] A. A. Popov. *Phys. Lett. B* 693 (2010). arXiv:1111.6286v1[gr-qc].
- [84] J. P. Preskill, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1365 (1979).
- [85] D. Raine and E. Thomas, *An Introduction to the Science of Cosmology*. IOP, Bristol, UK (2001).
- [86] D. Raine and E. Thomas, *Black Holes. An Introduction*. Imperial College Press, London, UK (2010).
- [87] M. Rainer. *Int. J. Mod. Phys. D* 4, 397 - 416 (1995). arXiv:gr-qc/9404033v2.
- [88] M. G. Richarte and C. Simeone. *Phys. Rev. D* 76, 087502 (2007). Erratum: *Phys. Rev. D* 77, 089903 (2008). arXiv:0710.2041v3[gr-qc].

- [89] M. G. Richarte and C. Simeone. *Int. J. Mod. Phys. D* 17, 1179 (2008). arXiv:0711.229v1[gr-qc].
- [90] M. Richarte and C. Simeone. *Phys. Rev. D* 80, 104033 (2009). arXiv:2006.12272v1[gr-qc].
- [91] M. Roos, *Introduction to Cosmology*. John Wiley and Sons, Chichester, UK (2003).
- [92] E. Rubín de Celis, O. P. Santillán and C. Simeone. *Phys. Rev. D* 86, 124009 (2012). arXiv:1210.4149[gr-qc].
- [93] E. Rubín de Celis, O. P. Santillán and C. Simeone. *Phys. Rev. D* 88, 124012 (2013). arXiv:1309.7533[gr-qc].
- [94] E. Rubín de Celis. *Eur. Phys. J. C* 76, 92 (2016). arXiv: 1507.08310[gr-qc].
- [95] E. Rubín de Celis and C. Simeone. *Eur. Phys. J. Plus* 132, 3, 124 (2017). arXiv:1702.04027v1[gr-qc].
- [96] E. Rubín de Celis, C. Tomasini and C. Simeone. *Int. J. Mod. Phys. D* 27, 1, 1750171 (2017). arXiv: 1708.09019[gr-qc].
- [97] M. Sakellariadou. *Lect. Notes Phys.* 718, 247 - 288 (2007). arXiv:hep-th/0602276v2.
- [98] J. Santiago, A. Landulfo, W. Lima, G. Matsas, R. Mendes and D. Vanzella. *Phys. Rev. D* 93, 024043 (2016). arXiv:1512.02120v2[gr-qc].
- [99] M. V. Sazhin, M. Capaccioli, G. Longo, M. Paolillo, O. S. Khovanskaya, N. A. Grogin, E. J. Schreier and G. Covone. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 000, 1–6 (2005). arXiv:astro-ph/0601494v2.
- [100] M. V. Sazhin, O. S. Khovanskaya, M. Capaccioli, G. Longo, M. Paolillo, G. Covone, N. A. Grogin and E. J. Schreier. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 376, 1731–1739 (2007). arXiv:astro-ph/0611744v2.
- [101] M. V. Sazhin, O. S. Sazhina, M. Capaccioli, G. Longo, M. Paolillo and G. Riccio. *The Open Astronomy Journal*, 3, 200-206 (2010).
- [102] N. Sen. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 73, 365-396 (1924).
- [103] Q. Shafi and A. Vilenkin. *Phys. Rev. D* 29, 1870 (1984).
- [104] J. Silk and A. Vilenkin. *Phys. Rev. Lett.* 53, 1700 (1984).
- [105] C. Simeone, *Phys. Rev. D* 83, 087503 (2011). arXiv:1203.3755[gr-qc].
- [106] A. Staruszkiewicz. *Acta Phys. Polon.* 24, 735 (1963).
- [107] A. H. Taub. *J. Math. Phys.* 21, 1423-1431 (1970).
- [108] P. Taylor. *Phys. Rev. D* 87, 2 (2013). arXiv:1209.6088v2[gr-qc].
- [109] P. Taylor. *Phys. Rev. D* 90, 024057 (2014). arXiv:1404.7210v3[gr-qc].

- [110] P. Taylor, *Phys. Rev. D* 95, 10, 109904(E) (2017). arXiv:1404.7210v3[gr-qc].
- [111] M. Thibeault, C. Simeone and E. F. Eiroa, *Gen. Rel. Grav.* 38, 1593 (2006). arXiv:gr-qc/0512029v2.
- [112] C. Tomasini, E. Rubín de Celis and C. Simeone. *Eur. Phys. J. C* 78, 2, 149 (2018). arXiv: 1712.09329[gr-qc].
- [113] C. Tomasini, E. Rubín de Celis and C. Simeone. *Eur. Phys. J. C* 79, 206 (2019). arXiv: 1901.07524[gr-qc].
- [114] N. Turok. *Phys. Rev. Lett.* 55, 1801 (1985).
- [115] T. Vachaspati and A. Vilenkin. *Phys. Rev. Lett.* 67, 1057 (1991).
- [116] A. Vilenkin. *Phys. Rev. D* 23, 852 (1981).
- [117] A. Vilenkin. *Phys. Rev. Lett.* 46, 1169 (1981).
- [118] A. Vilenkin. *The Astrophysical Journal* 282, 51 - 53 (1984).
- [119] A. Vilenkin. *Physics Report* 121, 5 (1985).
- [120] A. Vilenkin, in H. Suzuki, J. Yokoyama, y. Suto and K. Sato (eds.) *Inflating Horizons of Particle Astrophysics and Cosmology*, Universal Academy Press, Tokyo (2006). arXiv:hep-th/0508135v2.
- [121] A. Vilenkin and Q. Shafi. *Phys. Rev. Lett.* 51, 1716 (1983).
- [122] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1994).
- [123] M. Visser. *Phys. Rev. D* 39, 3182-3184 (1989).
- [124] M. Visser, *Lorentzian Wormholes. From Einstein to Hawking*. Springer-Verlag. NY, USA (1996).
- [125] J. A. Wheeler. *Phys. Rev.* 97, 511-536 (1955).
- [126] D. L. Wiltshire. *Phys. Lett. B* 169, 36 (1986).
- [127] D. L. Wiltshire. *Phys. Rev. D* 38, 2445 (1988).
- [128] Y. B. Zel'dovich. *MNRAS* 192, 663 (1980).
- [129] Ya. B. Zel'dovich, I. Yu. Kobzarev and L. B. Okun. *Zh. E. T. F.* 67, 3; *Soviet Phys. JEPT* 40, 1 (1974).

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, Dr. Claudio Simeone, a Mariano Mayocchi, a mi esposo y familia, y muy especialmente al Dr. Emilio Rubín de Celis por la importante y desinteresada ayuda que me ha brindado.
