UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Polinomios aleatorios en espacios de Banach y aplicaciones a series de Dirichlet

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Marceca, Felipe

Director de tesis: Dr. Daniel Carando

Consejero de estudios: Dr. Gabriel Acosta

Buenos Aires, 2020

Polinomios aleatorios en espacios de Banach y aplicaciones a series de Dirichlet

Resumen

Esta tesis estudia polinomios a valores vectoriales en varias variables aleatorias y aplicaciones a series de Dirichlet vectoriales. Hacer análisis en espacios de Banach requiere trasladar resultados del contexto escalar al vectorial. La validez de estos resultados generalizados depende de la estructura geométrica del espacio, que usualmente se describe en términos de objetos lineales. Los polinomios vectoriales se pueden usar para cerrar la brecha entre lo lineal y lo no lineal permitiendo así llevar a cabo este proceso de generalización que va de propiedades geométricas del espacio de Banach a resultados analíticos para funciones vectoriales.

Usamos esta estrategia para obtener desigualdades del tipo Hausdorff-Young para series de Dirichlet vectoriales, relacionando la norma de una serie con la de sus coeficientes. Para lograr esto, probamos que los reconocidos conceptos de tipo y cotipo tienen una reformulación polinomial equivalente. Este resultado es de interés en sí mismo y es la contribución principal de esta tesis. Las versiones polinomiales de tipo y cotipo comparan la norma de un polinomio en varias variables aleatorias con la norma de sus coeficientes. Esta comparación se extiende a funciones vectoriales en infinitas variables y es aplicada a series de Dirichlet.

Las desigualdades de *decoupling* desentraman estructuras de dependencia complejas de objetos aleatorios para que puedan ser analizados mediante técnicas clásicas de la teoría de variables aleatorias independientes. Para obtener versiones polinomiales de tipo y cotipo, brindamos desigualdades de *decoupling* para polinomios tetraedrales homogéneos. En este contexto, los polinomios se comparan con operadores multilineales asociados. Esto permite trasladar las nociones de tipo y cotipo, que son de índole lineal, al ámbito multilineal y, consecuentemente, al polinomial.

Bajo condiciones geométricas más fuertes, también obtenemos desigualdades de *decoupling* entre polinomios aleatorios y sumas aleatorias completamente independientes de sus coeficientes. Estos resultados son llevados al contexto de series de Dirichlet y aplicados al estudio de regiones de convergencia de series de Dirichlet generales.

Finalmente, el estudio del tipo y cotipo polinomiales llevó a obtener un resultado técnico de análisis asintótico. Comparamos las normas supremos de polinomios homogéneos multivariados con una versión no simétrica de la forma multilineal asociada usual.

Palabras clave: polinomios aleatorios vectoriales - desigualdades de *decoupling* - tipo y cotipo - series de Dirichlet vectoriales

Random polynomials on Banach spaces and applications to Dirichlet series

Abstract

This thesis studies vector-valued polynomials in several random variables and applications to vector-valued Dirichlet series. Doing analysis on Banach spaces requires to translate results from the scalar to the vector-valued setting. The validity of these generalized results depends on the geometric structure of the Banach space which is usually described in terms of linear objects. Vector-valued polynomials can be used to close the gap between the linear and the nonlinear setting allowing to carry out this generalization procedure going from geometric properties of the Banach space to analytic results on vector-valued functions.

We use this strategy to obtain Hausdorff-Young type inequalities for vector-valued Dirichlet series relating the norm of a series with the norm of its coefficients. To achieve this we show that the well-known concepts of type and cotype have an equivalent polynomial reformulation. This result is interesting on its own and is the main contribution of this thesis. The polynomial versions of type and cotype compare the norm of a polynomial in several random variables with the norm of its coefficients. This comparison is extended to vector-valued functions in infinitely many variables and applied to Dirichlet series.

Decoupling inequalities disentangle complex dependence structures of random objects so that they can be analyzed by means of standard tools from the theory of independent random variables. In order to obtain the polynomial versions of type and cotype we provide decoupling inequalities for tetrahedral homogeneous polynomials. In this context, polynomials are compared with associated multilinear operators. This allows to translate the notions of type and cotype, which are linear in nature, to the multilinear and consequently the polynomial setting.

Under stronger geometric assumptions we also obtain decoupling inequalities between random polynomials and fully independent random sums of its coefficients. This results are carried to the context of Dirichlet series and applied to study regions of convergence of general Dirichlet series.

Finally, the study of polynomial type and cotype lead to a technical result in asymptotic analysis comparing the supremum norms of homogeneous multivariate polynomials and a non-symmetric version of the usual associated multilinear form.

Keywords: vector-valued random polynomials - decoupling inequalities - type and cotype of Banach spaces - vector-valued Dirichlet series

Agradecimientos

A mi director Daniel por todo lo que me enseñó, por su mente brillante, por su don ilusionista para hacer parecer simples las cosas más complejas, por siempre tener un camino alternativo bajo la manga. Por ser una gran persona y director.

Al jurado, profesores Victoria Paternostro, Eduardo Chiumiento y Mieczysław Mastyło por su trabajo y dedicación en la evaluación de esta tesis.

A la Educación Pública, en especial a la FCEN y al DM.

Al CONICET por darme la oportunidad de hacer un doctorado.

Al grupo de análisis funcional por su entusiasmo por la matemática, su apoyo y calidez. Por los seminarios, las discusiones matemáticas, los viajes y las bondiolas funcionales.

A Meli mi hermana doctoral por las tardes de laburo en (las mesas de) el DM, por sacarme la ficha en dos minutos y por alegrarme con un nestea.

A Pablo Sevilla-Peris por compartir su sabiduría custodiada por humildad, por cuidar de la matemática y por todos los buenos momentos.

A Andreas Defant e Ingo Schoolmann, Pedro Tradacete y Frédéric Bayart por su cálida bienvenida en mis visitas de investigación, por ayudarme a ampliar el panorama y compartir su profundo conocimiento e inventiva.

A José Luis Romero por confiar en mí para un nuevo proyecto.

A mi consejero Gabriel por su ayuda y buena onda.

A mis docentes en esta etapa por todo lo que me enseñaron.

A la bella comunidad del DM e IMAS que esconde mentores de matemática y de vida, viejas y nuevas amistades, y navegantes de las misteriosas aguas de la burocracia.

A mis viejos Adali y Ernesto porque desde que aprendí a caminar aspiré a seguir sus pasos, por darme todo y ayudarme a crecer a donde fuera. Porque cuando me fui extrañé.

A la abuela Beatriz y al abuelo José por confiar siempre que llegaría hasta acá, por regalarme el lápiz del abuelo con el que escribiré mi fututro.

A la abuela Yolanda y el abuelo Negro porque me hicieron falta en esta etapa.

A los tíos y los primos por su apoyo incondicional, los asados en Cañuelas y los conciertos musicales.

A los tíos postizos por inculcarme el amor por la ciencia, por regalarme su cariño y sabias enseñanzas.

A Catalina, Gaby y Mauro por su ayuda y aliento, por rescatarnos cuando nos quedamos encerrados (y viceversa).

A mis amigos por encontrarnos en una plaza, en una casa o en la montaña, por los viajes, por el Möbius tubes, el señor oscuro y demás disparates. Por dejarme entrar.

Al hotel de Hilbert y a la oficina 2103, porque se almuerza a las 12:30, por el after lunch, por el enigma del havannet y porque siempre hay lugar para uno más.

A Chechu por ser genuina, por ver conmigo el sur, por saber de antemano el final de la película, por la fruta de la verdad, porque al despertar vamos a desayunar, porque si falta algo vamos juntos a buscar. Porque a veces me olvido que somos dos.

Índice

Introducción

A comienzos del siglo 20 H. Bohr introdujo en [9] una idea simple pero poderosa, relacionando series de Dirichlet con series de potencias formales en infinitas variables. Su objetivo era estudiar distintos modos de convergencia de series de Dirichlet y mediante este vínculo logró aplicar herramientas de la teoría de holomorfía en infinitas dimensiones que había tomado forma recientemente (ver [35]). Su trabajo fue complementado con contribuciones de Toeplitz [79] y Bohnenblust y Hille [8]. Sin embargo, algunas herramientas fundamentales para desarrollar esta teoría no estaban presentes en ese entonces y el descubrimiento de su verdadero alcance debió esperar. Después de todo, los espacios de Banach no fueron introducidos hasta 1920 en la tesis de Banach. Técnicas modernas combinando análisis funcional y armónico llevaron a nuevos desarrollos como la teoría de espacios de Hardy de series de Dirichlet (ver [43, 3, 23]) que abordamos en esta tesis. Hoy en día, la idea de Bohr provee un puente entre series de Dirichlet, holomorfía en infinitas dimensiones y análisis armónico, mientras que toma herramientas de análisis funcional, teoría de probabilidades y teoría analítica de números.

Las series de Dirichlet son series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ donde los coeficientes a_n son números complejos y s es una variable compleja. Son una herramienta fundamental en la teoría analítica de números, siendo su ejemplo más famoso, la función zeta de Riemann. El descubrimiento de Bohr provee una conexión profunda relacionando series de Dirichlet con series de potencias formales en infinitas variables. Describamos los conceptos principales. Por la descomposición en números primos, dado $n \in \mathbb{N}$ existen únicos exponentes α_k para cada primo p_k tales que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots =: p^{\alpha}$. Más aún, la aplicación $n \to \alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que a cada número natural le asigna los exponentes de su descomposición en números primos es una biyección. La transformada de Bohr es la correspondencia formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \longleftrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots, \quad \text{donde } c_\alpha = a_{p^\alpha}.$$

Más allá de lo formal, la transformada de Bohr se nutre de que en varios aspectos $p_1^{-s}, p_2^{-s}, \ldots$ se comportan como variables independientes justificando la identificación

$$n^{-s} = \left(p_1^{-s}\right)^{\alpha_1} \left(p_2^{-s}\right)^{\alpha_2} \ldots \longleftrightarrow z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots.$$

Este punto de vista permitió que el estudio de polinomios multivariados entrara en escena desde temprano, abordando problemas de regiones de convergencia de series de Dirichlet: los polinomios multivariados son una herramienta clave en el estudio de holomorfía en infinitas dimensiones y, en consecuencia, de series de Dirichlet. En particular, los polinomios homogéneos aparecen naturalmente en el desarrollo de Taylor de funciones holomorfas en varias variables. Más aún, los polinomios homogéneos están íntimamente relacionados con el estudio de operadores multilineales. Teniendo esto en cuenta, uno puede abordar problemas sobre series de Dirichlet reduciéndolos primero a un problema polinomial y luego a un problema lineal o multilineal.

Vale la pena mencionar que el vínculo entre series de Dirichlet y de potencias no es unidireccional. El estudio de series de Dirichlet inspiró resultados profundos para polinomios y series de potencia en cuanto a convergencia (monomial) de series de potencias, la desigualdad de Bohnenblust-Hille y el radio de Bohr (ver [23]).

Otra impactante aplicación fue la introducción del espacio de Hardy $\mathcal{H}_2$ de series de Dirichlet con coeficientes cuadrado sumables en [43], que fue usado para abordar un problema clásico de Beurling: caracterizar cuándo las dilataciones $\{\varphi(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de una función $\varphi \in L^2(0,1)$ forman una base de Riesz (una versión más débil de base ortonormal). Más tarde en [3], Bayart extendió la noción de espacios de Hardy de series de Dirichlet $\mathcal{H}_p$ más allá de $p = 2$ allanando el camino para una teoría completa.

Las series de Dirichlet vectoriales tienen coeficientes a_n en algún espacio de Banach X. Su estudio está motivado por problemas escalares multivariados así como contextos donde los coeficientes son variables aleatorias (por ejemplo, elegir el signo del coeficiente $\pm a_n$ al azar). Como en el contexto escalar, surgen problemas naturales como: regiones de convergencia; la relación entre la norma de una serie de Dirichlet en $\mathcal{H}_p(X)$ (la versión vectorial de $\mathcal{H}_p$) y la norma de sus coeficientes; el operador suma parcial; etc (ver [22, 13, 30, 23]).

Los resultados escalares no siempre se generalizan fácilmente al caso vectorial. De hecho, su validez depende de la geometría del espacio de Banach en el que se esté trabajando. Más precisamente, la estructura de un espacio de Banach X necesaria para asegurar una versión vectorial de un resultado escalar, suele ser una condición geométrica sobre los subespacios de dimensión finita de X. La teoría que estudia este tipo de condiciones se conoce como *teoría local de espacios de Banach* y es muy cercana a la teoría de probabilidad en espacios de Banach. Esencialmente, la geometría local de un espacio de Banach se puede estudiar según el comportamiento de variables aleatorias a valores vectoriales. Una vez más, los polinomios juegan un rol importante en cerrar la brecha entre objetos aleatorios lineales que describen la geometría de un espacio de Banach y series de Dirichlet vectoriales. Esto suele requerir un punto de vista probabilístico, analizando polinomios evaluados en variables aleatorias adecuadas conocidos como polinomios aleatorios o caos polinomial (ver [52, 20]).

Partir de una propiedad geométrica, construir un resultado para polinomios aleatorios y finalmente obtener conclusiones para series de Dirichlet vectoriales es la estrategia troncal de esta tesis. Realizamos esta travesía para las nociones de tipo y cotipo, probando reformulaciones polinomiales equivalentes y deduciendo desigualdades de Hausdorff-Young para series de Dirichlet. En el camino, nos iremos ramificando para obtener otros resultados que nos parecen de interés.

Las contribuciones originales de esta tesis son las siguientes. El Capítulo 2 describe lo realizado en [16]. Los resultados de los Capítulos 3 y 4 se pueden encontrar en [17]. El Capítulo 5 elabora la parte de [12] que es más cercana a nuestro enfoque y el Capítulo 6 cubre [56].

A continuación describimos cada capítulo.

Capítulo 1

Este capítulo brinda los conocimientos previos necesarios para el resto de la tesis. En la Sección 1.2 introducimos las nociones de tipo y cotipo (de Rademacher). Estas propiedades geométricas proveen una escala que mide hasta qué punto valen versiones más débiles de la regla del paralelogramo para espacios de Banach. Informalmente, tipo y cotipo cuantifican qué tan lejos se encuentra un espacio de Banach de ser un espacio de Hilbert. Desde un punto de vista probabilístico, estas propiedades comparan la norma promedio de una suma aleatoria con la suma de las normas de cada término.

En la Sección 1.3 presentamos polinomios vectoriales multivariados, nuestro objeto principal de estudio. En particular, nos enfocamos en polinomios de Steinhaus que son polinomios evaluados en variables aleatorias *iid* uniformemente distribuidas en el toro $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y polinomios de Walsh que están evaluados en variables de Bernoulli (o de Rademacher) independientes.

Capítulo 2

Mostramos desigualdades de *decoupling* para polinomios aleatorios que son homogéneos (cada monomio tiene el mismo grado) y tetraedrales (cada variable aparece con exponente 0 o 1). Los polinomios multivariados evaluados en variables aleatorias tienen, a primera vista, una estructura altamente dependiente, ya que cada variable aleatoria aparece en varios monomios. Las desigualdades de *decoupling* desentraman una estructura compleja introduciendo suficiente independencia para utilizar herramientas de la teoría de variables aleatorias independientes (ver [20]).

Introducimos una nueva descomposición para polinomios tetraedrales homogéneos en términos de un promedio de operadores multilineales y su correspondiente desigualdad de *decoupling* (Teorema 2.1.4). Como consecuencia, en la Sección 2.2 probamos que para espacios con cotipo no trivial, se puede cambiar la variable aleatoria del polinomio sin perder control sobre su norma. Como los polinomios en variables gaussianas satisfacen buenas desigualdades de *decoupling* clásicas, trasladamos este resultado a otras variables aleatorias en el Corolario 2.1.6 mejorando estimaciones de [49, Teorema 2]. El radio de Bohr y la desigualdad de Bohnenblust-Hille fueron recientemente estudiados en el contexto del cubo Booleano $\{-1,1\}^n$ en [27, 28]. Allí se probó un intrigante vínculo entre la desigualdad de Bohnenblust-Hille y la teoría de información cuántica. El enfoque de *decoupling* podría tener más aplicaciones en este escenario (ver [62]).

En la Sección 2.3 estudiamos desigualdades de *decoupling* de una sola entrada que esencialmente agregan solo un grado de libertad. Finalmente, bajo condiciones geométricas mucho más fuertes, en la Sección 2.4 obtenemos desigualdades de *decoupling* entre polinomios y sumas de sus coeficientes completamente independientes.

Capítulo 3

Probamos una reformulación polinomial equivalente de tipo y cotipo. Más precisamente, en el Teorema 3.1.2 mostramos que el cotipo es equivalente a la noción de *cotipo homogéneo hipercontractivo* definida en [14] (ver Sección 3.1 para la definición), respondiendo positivamente a una pregunta que estuvo abierta unos años. A su vez, el Teorema 3.1.3 prueba los resultados correspondientes para tipo y su versión polinomial. Creemos que estos resultados junto con las técnicas introducidas pueden encontrar futuras aplicaciones en la teoría local de espacios de Banach.

Si bien los conceptos de tipo y cotipo se traducen fácilmente al contexto multilineal, el contexto polinomial es más desafiante cuando se buscan estimaciones razonables. En la Sección 3.2 usamos la descomposición del Capítulo 2 para obtener una versión equivalente de tipo y cotipo para polinomios tetraedrales (con buenas constantes). Pasar del caso tetraedral al general es tal vez la parte más técnica de esta tesis y es desarrollada en la Sección 3.3. El argumento se basa en una descripción algo compleja de un polinomio según la paridad de los exponentes en cada monomio. Creemos que esta metodología (que reduce una desigualdad para polinomios generales a una desigualdad para polinomios tetraedrales) podría ser útil en distintas circunstancias y es, entonces, interesante en sí misma.

En [24] se prueban variantes con operadores de la desigualdad de Bonhenblust-Hille para retículos de Banach con cotipo no trivial. En [14], se presentan resultados sobre conjuntos de convergencia monomial y multiplicadores en espacios de Hardy para espacios de Banach con cotipo no trivial y estructura incondicional local o con cotipo de Fourier. Como se menciona en la Observación 3.1.5, gracias al Teorema 3.1.2 todos estos resultados se extienden a espacios de Banach con cotipo no trivial.

Capítulo 4

Traducimos nuestros resultados del capítulo anterior de polinomios a series de potencias y, consecuentemente, a series de Dirichlet vía la transformada de Bohr. Obtenemos desigualdades de Hausdorff-Young para series de Dirichlet vectoriales. El espacio de Hardy de series de Dirichlet $\mathcal{H}_2$ es un espacio de Hilbert donde la norma de una serie de Dirichlet coincide con la norma 2 de sus coeficientes. A diferencia del caso $p = 2$, no existe una regla general para decidir si una serie de Dirichlet pertenece o no al espacio de Hardy $\mathcal{H}_p$ mirando únicamente el tamaño de sus coeficientes. La desigualdad de Haussdorff-Young es una herramienta útil para este propósito. Un cálculo estándar (usando un argumento de interpolación) muestra que

$$\Big\| \sum a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_{p'}} \leq C \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \Big)^{1/p} \tag{1}$$

para todo $1 \leq p \leq 2$ y

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \Big)^{1/q} \leq C \Big\| \sum a_n n^{-s} \Big\|_{\mathcal{H}_{q'}} \tag{2}$$

para todo $2 \leq q \leq \infty$ (aquí $1/r + 1/r' = 1$).

Para espacios de Hardy vectoriales $\mathcal{H}_p(X)$ el problema se vuelve más complejo. El tipo y cotipo de Fourier son las propiedades geométricas adecuadas que permiten obtener desigualdades de Haussdorff-Young vectoriales. Para espacios con estas propiedades (ver Sección 1.2 para una definición), se obtienen fácilmente en las Proposiciones 4.1.1 y 4.1.2 desigualdades análogas a (1) y (2). Sin embargo, estas propiedades son muy estrictas, en el sentido de que un espacio de Banach tiene tipo/cotipo de Fourier con exponentes p o q que son en general peores que los exponentes para tipo y cotipo usuales. Más aún, los valores exactos de p y q suelen ser desconocidos.

En los Teoremas 4.2.1 y 4.2.3 probamos que los espacios de Banach con cotipo q (respectivamente tipo p) satisfacen variantes de las desigualdades de Hausdorff-Young que relacionan la norma de una serie de Dirichlet con una norma pesada en ℓ_q de sus coeficientes (respectivamente, una norma pesada en ℓ_p). Obtenemos también desigualdades análogas para funciones en el politoro infinito $\mathbb{T}^\infty$ y funciones de Walsh (esto es, funciones en el cubo Booleano infinito). Finalmente, en la Sección 4.3 probamos estimaciones similares para espacios de Banach que satisfacen nociones de convexidad y suavidad íntimamente relacionadas con tipo y cotipo.

Capítulo 5

Traducimos las desigualdades de *decoupling* entre polinomios y sumas independientes de coeficientes de la Sección 2.4 para series de Dirichlet. En la Sección 5.1 comparamos series de Dirichlet con series aleatorias completamente independientes.

La teoría de series de Dirichlet generales provee un marco mucho más amplio reemplazando $n^{-s} = e^{-\log n s}$ por una frecuencia distinta $e^{-\lambda_n s}$. Contiene tanto la teoría de series de Fourier como la de series de Dirichlet (ordinarias) y fue estudiada por Bohr, Besicovitch, Hardy, Landau, Perron, M. Riesz y Neder entre otros. Recientemente en [32] Defant y Schoolmann construyeron una teoría de espacios de Hardy para series de Dirichlet generales que no sólo generaliza sino también profundiza la comprensión del contexto ordinario, pues aísla los fenómenos generales de aquellos que dependen de la frecuencia. En la Sección 5.2 usamos la misma estrategia de *decoupling* de la Sección 2.4 para series de Dirichlet generales.

Finalmente aplicamos estas estimaciones para estudiar regiones de convergencia de series de Dirichlet generales conocidas como bandas de Bohr. La convergencia de series de Dirichlet, ya sea puntual o absoluta, ocurre esencialmente en semiplanos en $\mathbb{C}$ de la forma $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ para algún $\sigma \in \mathbb{R}$. Las bandas de Bohr son las regiones donde un tipo de convergencia se da mientras que otro falla. El problema original que llevó a Bohr a descubrir la conexión entre series de Dirichlet (ordinarias) y series de potencias, consistía en determinar la brecha más grande posible entre convergencia absoluta y uniforme. En otras palabras, Bohr buscaba el ancho máximo de la banda donde hay convergencia uniforme pero no absoluta. Esto fue resuelto más tarde por Bohnenblust y Hille en [8] mostrando que el ancho de esta banda es $1/2$. En el contexto vectorial, este valor depende del cotipo del espacio de Banach subyacente como se probó en [22, Teorema 1]. En cuanto a series de Dirichlet generales (escalares), el problema se complica (ver [61]) y sólo pareciera tener sentido trabajar con familias concretas de frecuencias. Para el caso general vectorial (en infinitas dimensiones), calculamos el ancho de la banda en la Proposición 5.3.5 para espacios de tipo 2 y en la Proposición 5.3.7 para espacios con la propiedad de promedios gaussianos (GAP) y una clase especial de frecuencias.

Capítulo 6

El último capítulo trata sobre un resultado de análisis asintótico que fue motivado por el estudio del tipo y cotipo polinomiales. Estudiamos una forma multilineal no simétrica L_P asociada a un polinomio homogéneo (escalar) P que fue introducida por Defant y Schlüters en [31]. A diferencia de la forma multilineal simétrica asociada usual, debido a la falta de simetría, la norma de L_P se comporta distinto de la norma de P y las estimaciones pueden incluso depender del número de variables como mostramos en el Teorema 6.1.4. Acotamos la norma supremo de L_P por la norma de P mediante un proceso de simetrización basado en un algoritmo de mezcla de cartas. Este procedimiento junto con el argumento de Defant y Schlüters mejora sus estimaciones. El mal comportamiento de L_P parece provenir de la asimetría de la proyección triangular principal (el operador que dada una matriz, pone ceros debajo de la diagonal), dado que tanto las cotas superiores e inferiores que damos dependen de la norma de este operador.

Nota: El Teorema 5.1.1, así como las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.2 que llevaron a él, fueron obtenidos en [15]. En particular, se desarrollaron en colaboración con la Lic. Melisa Scotti y no deben considerarse un aporte original de esta tesis, ya que serán presentados próximamente en [77].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo brindamos los conocimientos previos necesarios para el resto de la tesis. Primero, introducimos cuestiones básicas de integración en espacios vectoriales y estudiamos nociones geométricas como tipo y cotipo, que surgen del comportamiento de variables aleatorias en espacios de Banach. A continuación, describimos los polinomios a valores vectoriales, nuestro objeto de estudio. Finalmente, presentamos la teoría de espacios de Hardy de series de Dirichlet, donde más tarde aplicaremos nuestros resultados.

1.1 Integración vectorial

Esta sección contiene las definiciones y propiedades básicas de las integrales de funciones a valores vectoriales con respecto a medidas escalares conocidas como integrales de Bochner. También extendemos la noción de esperanza condicional a este contexto dando pie al uso de argumentos probabilísticos.

Empezamos generalizando la noción de medibilidad a funciones vectoriales. Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y X un espacio de Banach. Tal como en el caso escalar una función $f : \Omega \to X$ se dice *simple* si existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ tales que

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j}.$$

Aquí, por un pequeño abuso de notación, escribimos intencionalmente $x_j \chi_{E_j}$ en vez de la notación usual de escalar por vector $\chi_{E_j} x_j$ para enfatizar las similitudes estructurales entre funciones escalares y vectoriales. Una función $f : \Omega \to X$ se dice *medible* (también conocido como fuertemente μ-medible) si es un límite μ-casi seguro de funciones simples.

Notemos que si f es medible, entonces $\|f\|$ también es un límite (escalar) de funciones simples y por lo tanto, es medible en el sentido usual. Esto nos permite definir integrabilidad. Una función medible $f : \Omega \to X$ es *Bochner integrable* si existe una sucesión de funciones simples tales que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f_n - f\| = 0.$$

Por supuesto, las funciones simples son integrables y definimos su integral de la forma obvia:

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{n} |E_j| x_j.$$

Dada una función integrable $f : \Omega \to X$, su integral está dada por

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n,$$

para alguna sucesión de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en la definición de integrabilidad (este valor no depende de la elección de la sucesión).

Una función medible $f : \Omega \to X$ es Bochner integrable si y sólo si su norma $\|f\|$ es integrable en el sentido usual. Más aún, las propiedades básicas de integración, así como el teorema de convergencia mayorada se extienden rápidamente a este contexto. Usaremos estos hechos naturalmente y recomendamos [34, Capítulo 2] para mayores detalles.

Vale la pena mencionar que no todo se traslada sin problemas al caso vectorial. El obstáculo principal es la validez de un resultado análogo al teorema de Radon-Nikodým que depende de la geometría del espacio de Banach. Esto determina si la igualdad $L^p(\mu)^* = L^q(\mu)$ donde $1/p + 1/q = 1$ se extiende a los espacios L^p vectoriales que introducimos a continuación.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y X un espacio de Banach. Como en el caso escalar, si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(\mu, X)$ consiste de todas las (clases de equivalencia de) funciones integrables $f : \Omega \to X$ tales que

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p d\omega\Big)^{1/p} < \infty.$$

Mediante una cuenta directa, se ve que $L^p(\mu, X)$ es un espacio de Banach y las funciones simples son densas para todo $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$ obtenemos el espacio de Banach $L^\infty(\mu, X)$ reemplazando las normas anteriores por

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|f(\omega)\|_X.$$

En cuanto a dualidad, si $1 \leq p < \infty$ el candidato natural para $L^p(\mu, X)^*$ es $L^q(\mu, X^*)$ que está isométricamente incluido en $L^p(\mu, X)^*$. La igualdad entre estos espacios depende de la geometría del espacio de Banach. Esencialmente, se necesita un resultado análogo al teorema de Radon-Nikodým para X^* (ver [34, Capítulo 4]). Sin embargo, el siguiente resultado clásico muestra que $B_{L^q(\mu,X^*)}$ es un conjunto normante de $L^p(\mu, X)$, lo cual bastará para nuestra exposición.

Proposición 1.1.1. *Sean* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finita y* X *un espacio de Banach. Dados* $1 \leq p < \infty$ *y* $f \in L^p(\mu, X)$ *se tiene que*

$$\|f\|_p = \sup_{g \in B_{L^q(\mu, X^*)}} \Big| \int_\Omega \langle g(\omega), f(\omega) \rangle d\omega \Big|. \tag{1.1}$$

Demostración. En primer lugar, notemos que si $f \in L^p(\mu, X)$ y $g, g_n \in L^q(\mu, X^*)$ donde las g_n son funciones simples convergiendo a g en casi todo punto, entonces $\langle g_n, f \rangle$ es medible y converge en casi todo punto a $\langle g, f \rangle$. Luego, $\langle g, f \rangle$ es medible y además, resulta integrable dado que usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\int_\Omega |\langle g, f \rangle| \leq \int_\Omega \|g\| \|f\| \leq \|g\|_q \|f\|_p.$$

Esto quiere decir que la integral en (1.1) está bien definida y que el supremo es menor o igual que $\|f\|_p$.

En segundo lugar, para la otra desigualdad asumimos que f es simple dado que las funciones simples son densas en $L^p(\mu, X)$. En ese caso, podemos escribir a f como

$$f = \sum_{j=1}^n x_j \chi_{E_j},$$

donde los conjuntos E_j son disjuntos. Luego, tenemos que

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega \Big\| \sum_{j=1}^n x_j \chi_{E_j} \Big\|^p = \int_\Omega \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p |E_j|.$$

Ahora bien, fijemos $\varepsilon > 0$ y para todo $1 \leq j \leq n$ elijamos $x_j^* \in X^*$ tal que $\|x_j^*\| = 1$ y $|\langle x_j^*, x_j \rangle| \geq (1 - \varepsilon)\|x_j\|$. Definimos $g : \Omega \to X^*$ por

$$g = \|f\|_p^{1-p} \sum_{j=1}^n \|x_j\|^{p-1} x_j^* \chi_{E_j}.$$

Es fácil ver que $\|g\|_q = 1$. Más aún nos queda

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega \langle g(\omega), f(\omega) \rangle d\omega \Big| &= \|f\|_p^{1-p} \sum_{j=1}^n \|x_j\|^{p-1} |\langle x_j^*, x_j \rangle| |E_j| \\ &\geq (1 - \varepsilon) \|f\|_p^{1-p} \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p |E_j| = (1 - \varepsilon)\|f\|_p. \end{aligned}$$

El resultados se sigue acotando el lado izquierdo por el supremo sobre $g \in B_{L^q(\mu, X^*)}$ y haciendo tender ε a 0. $\square$

Concluimos esta sección extendiendo el concepto de esperanza condicional a espacios de Banach. Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y X un espacio de Banach. Fijemos una sub-σ-álgebra B de Σ y $f \in L^1(\mu, X)$. Un elemento $g \in L^1(\mu, X)$ se dice una *esperanza condicional* de f con respecto a B si g es B-medible y para todo $E \in B$ se tiene que

$$\mathbb{E}[g\chi_E] = \mathbb{E}[f\chi_E].$$

Es sencillo corroborar que de existir tal g, debe ser única (salvo medida cero) por lo que la denotamos $\mathbb{E}[f|B]$. Más aún, en [34, Teorema 5.1.4] se muestra que $\mathbb{E}[f|B]$ existe para toda $f \in L^1(\mu, X)$ y es una contracción lineal en $L^p(\mu, X)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Usualmente, consideramos la esperanza condicional con respecto a una variable aleatoria escalar ξ. La definimos como la esperanza condicional con respecto a la preimagen de los borelianos por ξ y la denotamos por $\mathbb{E}[f|\xi]$.

Generalmente trabajaremos con espacios de probabilidad por lo que escribiremos frecuentemente $\mathbb{E}f$ en vez de $\int f$. El uso de esperanzas por sobre integrales no será una mera preferencia notacional sino una forma de indicar qué punto de vista (probabilístico o analítico) se adecúa mejor a los argumentos que se estén llevando a cabo. Más aún, la esperanza condicional será una herramienta fundamental que nos permitirá encontrar relaciones entre objetos, permitiéndonos describir algunos como un promedio cuidadosamente confeccionado de los otros.

1.2 Tipo y cotipo

En esta sección introducimos los conceptos de tipo y cotipo de un espacio de Banach. Estas propiedades geométricas brindan una escala que mide hasta qué punto valen versiones más débiles de la regla del paralelogramo para espacios de Banach dados. Informalmente hablando, el tipo y el cotipo cuantifican qué tan lejos está un espacio de Banach de ser un espacio de Hilbert.

Recordemos que un espacio de Banach X es un espacio de Hilbert si y sólo si satisface la regla del paralelogramo, que afirma que para todo $x, y \in X$ se tiene que

$$\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{1.2}$$

Pensando en el paralelogramo de vértices $0, x, y$ y $x+y$, la igualdad anterior quiere decir que el promedio de la longitud (al cuadrado) de las diagonales es igual a la suma de las longitudes (al cuadrado) de los lados. Más aún, desde una perspectiva probabilística estamos comparando la longitud de los lados con la longitud esperada de una diagonal elegida al azar. Teniendo esto en cuenta, podemos reescribir (1.2) como

$$\mathbb{E}\|x + \varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

donde ε es una variable aleatoria de Bernoulli que toma los valores ± 1 con probabilidad $1/2$. Notemos que si X es un espacio de Hilbert, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$

son variables de Bernoulli *iid*, nos queda

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_j]\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2. \tag{1.3}$$

Aquí, la variable ε_1 es superflua y la incluimos para que la expresión sea simétrica. La igualdad anterior se puede interpretar geométricamente como la comparación análoga de lados y diagonales para un paralelepípedo n-dimensional (si la variable ε_1 está presente, la longitud de cada diagonal simplemente aparece dos veces en el promedio). Separando esta igualdad en dos desigualdades y cambiando las normas 2 por normas p adecuadas, da origen a las nociones de tipo y cotipo.

Decimos que un espacio de Banach X tiene *tipo* $1 \leq p \leq 2$ si existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq C\Big(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\Big)^{1/p}. \tag{1.4}$$

Denotamos la mejor constante posible C por $T_p(X)$. Análogamente, decimos que X tiene *cotipo* $2 \leq q \leq \infty$ si existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q\Big)^{1/q} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\Big\|^q\Big)^{1/q},$$

donde para cotipo ∞ reemplazamos las normas q por supremos. Denotamos la mejor constante posible C por $C_q(X)$. En la literatura, las definiciones de tipo y cotipo a veces se dan en términos de funciones de Rademacher que tienen la misma distribución que variables de Bernoulli *iid*, por lo que estas nociones suelen ser llamadas tipo y cotipo de Rademacher.

Veamos por qué sólo consideramos tipo p para valores de p entre 1 y 2, y cotipo q para valores de q entre 2 e ∞. En primer lugar, notemos que todo espacio de Banach tiene tipo 1 con constante $C = 1$ debido a la desigualdad triangular. Similarmente, todo espacio de Banach tiene cotipo ∞ con constante $C = 1$ dado que para todo $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$\|x_i\| \leq \frac{1}{2}\Big\|\sum_{j=1}^{n}x_j\Big\| + \frac{1}{2}\Big\|x_i - \sum_{j\neq i}x_j\Big\| \leq \sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\Big\|.$$

En segundo lugar, a medida que p y q se acercan a 2 estas propiedades se vuelven más restrictivas. Más precisamente, si un espacio de Banach X tiene tipo p, tiene tipo r para todo $1 \leq r \leq p$. A su vez, si tiene cotipo q, tiene cotipo s para todo $q \leq s \leq \infty$. Esto es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Jensen y del hecho de que las normas ℓ_p son decrecientes. Más aún, 2 es el tipo más grande posible y el cotipo más chico posible que un espacio de Banach distinto de $\{0\}$ puede alcanzar. Para corroborar esto, necesitamos la desigualdad de Kahane-Khintchine (ver por ejemplo [1, Teorema 6.2.5])

Teorema 1.2.1. *Para cada $1 \leq p < \infty$ existe una constante $C_p \geq 1$ tal que para todo espacio de Banach X y vectores $x_1, \ldots, x_n \in X$ se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\Big\| \leq \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq C_p \mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\Big\|.$$

Teniendo esto en cuenta, vemos que los exponentes de estas normas se pueden elegir arbitrariamente en las definiciones de tipo y cotipo. En particular, en la definición de tipo p podemos reemplazar (1.4) por

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\Big(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\Big)^{1/p}.$$

Ahora bien, si $X \neq \{0\}$ eligiendo $x_1 = \ldots = x_n$ de norma 1 y usando (1.3) para el cuerpo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) nos queda

$$\sqrt{n} = \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\Big|^2\Big)^{1/2} \leq C n^{1/p}.$$

Luego, deducimos que $p \leq 2$. Un argumento análogo prueba que $2 \leq q$ en el caso de cotipo.

Es claro que los espacios de Hilbert tienen tipo y cotipo 2. Sin embargo, los espacios de Banach con tipo y cotipo 2 no necesariamente satisfacen la regla del paralelogramo debido a las constantes involucradas en la definición de tipo y cotipo. Lo mejor que uno puede esperar es que un espacio de tipo y cotipo 2 sea isomorfo a un espacio de Hilbert, un resultado fundamental probado en [48] (ver también [33, Corolario 12.20]).

En cuanto a espacios específicos, mencionamos que $L^p(\mu)$ tiene tipo p y cotipo 2 para $1 \leq p \leq 2$ y $L^q(\mu)$ tiene tipo 2 y cotipo q para $2 \leq q < \infty$ (ver por ejemplo [1, Teorema 6.2.14]). Más aún, estos valores son óptimos cuando estos espacios tienen dimensión infinita, esto es, cuando μ no tiene soporte finito. Por otro lado, para este tipo de medida μ, el espacio $L^\infty(\mu)$ no tiene ningún tipo o cotipo no trivial. En [80] se prueba que las clases de Schatten S_p se comportan de la misma forma que los espacios L^p de dimensión infinita.

Veamos una formulación equivalente de tipo y cotipo donde el promedio se realiza sobre signos complejos en vez de signos ± 1.

Definición 1.2.2. Una *variable de Steinhaus* z es una variable aleatoria compleja uniformemente distribuida en el toro $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Por un pequeño abuso de notación, escribimos z tanto para variables de Steinhaus como para números complejos fijos para incentivar interpretaciones probabilísticas de expresiones analíticas. Más aún, los *vectores de Steinhaus*, que son vectores aleatorios con coordenadas de Steinhaus *iid*, también serán descriptos como $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Necesitamos el clásico principio de contracción (ver [33, Teorema 12.2] y [78, Corolario 4]).

Teorema 1.2.3 (Principio de contracción)**.** *Sea X un espacio de Banach y fijemos $1 \leq p < \infty$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$ y toda elección de vectores $\{x_j\}_{j=1}^n \subseteq X$ se tiene que*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \lambda_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq \|\lambda\|_\infty \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p}.$$

Similarmente, si $\lambda \in \mathbb{C}^n$ (y X es un espacio de Banach complejo) se cumple que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \lambda_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq \frac{\pi}{2}\|\lambda\|_\infty \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p}.$$

Corolario 1.2.4. *Sea X un espacio de Banach (complejo). Para todo $1 \leq p < \infty$ y toda elección de vectores $\{x_j\}_{j=1}^n \subseteq X$ se tiene que*

$$\frac{2}{\pi}\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n z_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq \frac{\pi}{2}\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p\Big)^{1/p},$$

donde $z_1, \ldots, z_n$ son variables de Steinhaus iid.

Demostración. Para un $z \in \mathbb{T}^n$ fijo, usando el principio de contracción dos veces obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p &= \mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \overline{z_j} z_j x_j\Big\|^p \\ &\leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^p \mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j z_j x_j\Big\|^p \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p} \mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p.\end{aligned}$$

Promediando en $z \in \mathbb{T}^n$ nos queda

$$\mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^p \mathbb{E}_{\varepsilon,z}\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j z_j x_j\Big\|^p \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p} \mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|^p.$$

El resultado se sigue notando que $\varepsilon_j z_j \sim z_j$ y reacomodando la última expresión. □

Como promediar signos complejos o reales es comparable, podemos reemplazar las variables de Bernoulli por variables de Steinhaus en las definiciones de tipo y cotipo. Usaremos ambas formulaciones según nos convenga.

Concluimos esta sección introduciendo una versión más fuerte de tipo/cotipo conocida como tipo/cotipo de Fourier. Esencialmente, estas nociones relacionan la norma de una serie de Fourier con la norma de sus coeficientes. En la Sección 4.1 veremos que son una versión vectorial de la reconocida desigualdad de Hausdorff-Young y por lo tanto tienen un aspecto más analítico que el tipo y cotipo usuales.

Existen varias definiciones equivalentes de tipo y cotipo de Fourier (ver [37]). Veamos las versiones más adecuadas para nuestro contexto. Dado $1 \leq p \leq 2$, decimos que X tiene *tipo de Fourier* p si existe una constante $C > 0$ tal que para toda elección de finitos vectores $x_0, \ldots, x_N \in X$ se tiene que

$$\Big(\int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=0}^{N} x_n z^n \Big\|^{p'} dz \Big)^{1/p'} \leq C \Big(\sum_{n=0}^{N} \|x_n\|^p \Big)^{1/p}.$$

Aquí p' cumple que $1/p + 1/p' = 1$. Notemos que, a diferencia de la definición de tipo, sólo hay una variable de Steinhaus involucrada y la suma aleatoria ya no es independiente. Dado $2 \leq q < \infty$, un espacio de Banach X tiene *cotipo de Fourier* q si existe una constante $C > 0$ tal que para toda elección de vectores $x_0, \ldots, x_N \in X$ se tiene que

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} \|x_n\|^q \Big)^{1/q} \leq C \Big(\int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=0}^{N} x_n z^n \Big\|^{q'} dz \Big)^{1/q'}. \tag{1.5}$$

El tipo y el cotipo de Fourier se pueden ver como un casos particulares en la teoría más general de tipo de Fourier con respecto a grupos (ver [37]). En este contexto, [37, Teorema 6.6] implica que X tiene tipo de Fourier p si y sólo si tiene cotipo de Fourier p', y por lo tanto, ambos conceptos son equivalentes. Sin embargo, preferimos trabajar con ambos conceptos por separado para poder compararlos más fácilmente con las nociones de tipo y cotipo usuales (que no son equivalentes entre sí). Otra razón es que existen aplicaciones sin una reformulación dual que sólo usan estimaciones de índole tipo o sólo usan estimaciones de índole cotipo. Por ejemplo, las desigualdades de cotipo suelen ser útiles para estimar coeficientes de alguna serie o los valores de cierta función en algunos puntos y controlar estas magnitudes por la norma de la serie o de la función respectivamente (ver [57, 22, 14]).

Como mencionamos antes, el tipo/cotipo de Fourier es más fuerte que el tipo/cotipo usual. Para ver esto, supongamos que X tiene tipo de Fourier p y sean $x_0, \ldots, x_N \in X$. Para un $w \in \mathbb{T}$ fijo, por invariancia de las rotaciones tenemos que $z \sim zw^n$ para z una variable de Steinhaus. Luego,

$$\int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n z_n \Big\|^{p'} dz = \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n z_n w^n \Big\|^{p'} dz.$$

Promediando en w y usando la desigualdad de tipo de Fourier nos queda

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n z_n \Big\|^{p'} dz &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n z_n w^n \Big\|^{p'} dz\, dw = \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n z_n w^n \Big\|^{p'} dw\, dz \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} C^{p'} \Big(\sum_{n=1}^{N} \|x_n z_n\|^p \Big)^{p'/p} dz = C^{p'} \Big(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^p \Big)^{p'/p}. \end{aligned}$$

Elevando al exponente $1/p'$ obtenemos una desigualdad de tipo p para variables de Steinhaus en vez de Bernoulli y con promedios p' a la izquierda. Sin embargo, del Corolario 1.2.4 y del Teorema 1.2.1 se sigue que las variables de Steinhaus y Bernoulli son intercambiables y que los exponentes de estos promedios se pueden elegir de forma arbitraria. Por lo tanto, X tiene tipo p. El hecho de que cotipo de Fourier implica cotipo es análogo.

De hecho, las versiones de Fourier de tipo y cotipo son mucho más restrictivas que sus contrapartes. Por ejemplo, si bien $L^p(\mu)$ tiene tipo $\min\{p, 2\}$ y cotipo $\max\{p, 2\}$, sólo tiene tipo de Fourier $\min\{p, p'\}$ y por lo tanto cotipo de Fourier $\max\{p, p'\}$ (ver [37, Proposición 4.4]). En particular, esto significa que $L^1(\mu)$ tiene el mejor cotipo posible mientras que no tiene ningún cotipo de Fourier no trivial.

1.3 Polinomios vectoriales

Esta sección trata de polinomios vectoriales multivariados. Comenzamos dando varias notaciones útiles para indexar estos objetos. A continuación, introducimos el operador multilineal simétrico asociado a un polinomio homogéneo, una herramienta poderosa para traducir cuestiones polinomiales al ámbito lineal. Finalmente, discutimos algunas propiedades básicas de polinomios de Steinhaus y Walsh que usamos a lo largo de esta tesis.

Notación

Un *polinomio* de n variables a valores en un espacio de Banach X es una función $P : \mathbb{C}^n \to X$ dada por una suma finita

$$P(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda \subseteq \mathbb{N}_0^n} x_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n},$$

donde $x_\alpha \in X$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Como mencionamos en la Sección 1.1 escribimos intencionalmente vector por escalar en vez de escalar por vector para enfatizar la estructura polinomial. Además, escribimos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$.

El *grado* de un polinomio es el máximo de la suma $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ recorriendo los $\alpha \in \Lambda$ tales que $x_\alpha \neq 0$. Decimos que P es *m-homogéneo* si $|\alpha| = m$ para todo $\alpha \in \Lambda$ con $x_\alpha \neq 0$. Siempre que el número de variables n esté implícito escribiremos a los polinomios m-homogéneos como

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=m} x_\alpha z^\alpha,$$

permitiendo que algunos coeficientes x_α se anulen.

También trabajaremos con polinomios *tetraedrales* que se definen como polinomios donde cada variable aparece con exponente a lo sumo 1. En otras palabras, los monomios de un polinomio tetraedral de n variables se pueden indexar por $\alpha \in \{0,1\}^n$ y por lo tanto escribimos

$$P(z) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} x_\alpha z^\alpha.$$

A continuación, introducimos notaciones especiales para polinomios tetraedrales y homogéneos que usamos frecuentemente. Estas notaciones corresponderan a cambiar la forma de rotular los monomios mediante una biyección entre conjuntos de índices. En cuanto a polinomios tetraedrales, podemos identificar $\alpha \in \{0,1\}^n$ con el conjunto $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ que indica qué elementos $1 \leq k \leq n$ satisfacen que $\alpha_k = 1$. Más precisamente, tenemos que $\alpha = \chi_A$. Esta correspondencia biunívoca nos permite indexar a los polinomios tetraedrales usando subconjuntos de $\{1,\dots,n\}$. Denotemos $[n] = \{1,\dots,n\}$. Por un pequeño abuso de notación, escribiendo x_A en vez de x_α siempre que $\alpha = \chi_A$, nos queda

$$P(z) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} x_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} x_\alpha \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \alpha_k = 1}} z_k = \sum_{A \subseteq [n]} x_A \prod_{k \in A} z_k.$$

Notando $z_A = \prod_{k \in A} z_k$ obtenemos la nueva notación para polinomios tetraedrales:

$$P(z) = \sum_{A \subseteq [n]} x_A z_A.$$

Para polinomios tetraedrales m-homogéneos escribimos

$$P(z) = \sum_{|A| = m} x_A z_A,$$

donde $|A|$ es el cardinal de A.

La siguiente notación para polinomios homogéneos (no necesariamente tetraedrales) también será de utilidad. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(m,n) &= [n]^m, \quad \text{y} \\ \mathcal{J}(m,n) &= \{j \in \mathcal{I}(m,n) : \ 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_m \leq n\}. \end{aligned}$$

Para cada índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| = m$ podemos construir un índice $j \in \mathcal{J}(m,n)$ repitiendo para $1 \leq k \leq n$ el número k exactamente α_k veces. Observemos que j es creciente y tiene $|\alpha| = m$ coordenadas por lo que pertenece a $\mathcal{J}(m,n)$. Por ejemplo si $n = 5$, $m = 7$ y $\alpha = (2,0,1,3,1)$, nos queda $j = (1,1,3,4,4,4,5)$. Es fácil ver que esto es de hecho una biyección entre $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m\}$ y $\mathcal{J}(m,n)$. Denotando $z_j = z_{j_1} \ldots z_{j_m}$ y nuevamente por el pequeño abuso de notación $x_\alpha \sim x_j$, para un polinomio m-homogéneo de n variables P nos queda

$$P(z) = \sum_{|\alpha| = m} x_\alpha z^\alpha = \sum_{|\alpha| = m} x_\alpha \underbrace{z_1 \ldots z_1}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{z_n \ldots z_n}_{\alpha_n} = \sum_{j \in \mathcal{J}(m,n)} x_j z_j.$$

Esto se refleja en nuestro ejemplo anterior como

$$z^\alpha = z_1^2 z_2^0 z_3^1 z_4^3 z_5^1 = z_1 z_1 z_3 z_4 z_4 z_4 z_5 = z_j.$$

Operador multilineal asociado y polarización

Los polinomios homogéneos son útiles para estudiar funciones multivariadas ya que podemos separarlas en sus partes homogéneas. Más aún, existe un operador multilineal simétrico asociado a cada uno de ellos. Este operador que introducimos a continuación permite trasladar problemas del contexto polinomial al lineal.

En primer lugar, definamos la relación de equivalencia que surge de reordenar las coordenadas de un elemento en $\mathcal{I}(m,n)$. Más precisamente, dados $i, i' \in \mathcal{I}(m,n)$ decimos que $i \sim i'$ si y sólo si existe una permutación $\sigma : [m] \to [m]$ tal que

$$i' = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(m)}).$$

Denotamos la clase de equivalencia de un elemento $i \in \mathcal{I}(m,n)$ por $[i]$. Notemos que el conjunto de índices $\mathcal{J}(m,n)$ definido anteriormente es un conjunto de representantes para esta relación dado que estamos eligiendo un orden específico para los índices. Ahora bien, para un polinomio m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to X$ dado por

$$P(z) = \sum_{j \in \mathcal{J}(m,n)} x_j z_j,$$

tomemos $x_i = x_j$ para todo $i \in [j]$ y todo $j \in \mathcal{J}(m,n)$. Sea $M : (\mathbb{C}^n)^m \to X$ el operador m-lineal simétrico dado por

$$M(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} \frac{x_i}{|[i]|} z^{(1)}_{i_1} \dots z^{(m)}_{i_m}.$$

Para todo $z \in \mathbb{C}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned} M(z, \dots, z) &= \sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} \frac{x_i}{|[i]|} z_i = \sum_{j \in \mathcal{J}(m,n)} \sum_{i \in [j]} \frac{x_i}{|[i]|} z_i \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}(m,n)} \sum_{i \in [j]} \frac{x_j}{|[j]|} z_j = \sum_{j \in \mathcal{J}(m,n)} x_j z_j = P(z). \end{aligned}$$

Como M es el único operador m-lineal simétrico que satisface $M(z, \dots, z) = P(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ (ver [23, Teorema 2.31]), lo llamamos el *operador m-lineal simétrico asociado a P*. El operador M también se puede obtener a partir de P mediante una identidad conocida como la fórmula de polarización. Para todo $z^{(1)}, \dots, z^{(m)} \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$M\left(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}\right) = \frac{1}{m!} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m P\left(\varepsilon_1 z^{(1)} + \dots + \varepsilon_m z^{(m)}\right)\right],$$

donde, como es usual, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ son variables de Bernoulli independientes (ver [35, Corolario 1.6]). Esta identidad permite relacionar la norma de un polinomio homogéneo con la de su operador multilineal asociado.

Proposición 1.3.1. *Para todo espacio de Banach X, todo polinomio m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to X$ y toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^n$ se tiene que*

$$\sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\|_X \leq \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} \left\|M(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})\right\|_X \leq e^m \sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\|_X.$$

Estudiamos problemas similares en los Capítulos 2 y 6.

Demostración. La primera desigualdad se deduce de que $M(z, \ldots, z) = P(z)$. Para la segunda desigualdad usamos la fórmula de polarización para obtener

$$\begin{aligned}\sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} \left\|M(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})\right\|_X &\leq \frac{1}{m!}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} \left\|\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 z^{(1)} + \ldots + \varepsilon_m z^{(m)})\right\|_X \\ &= \frac{m^m}{m!}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} \left\|P\Big(\frac{\varepsilon_1 z^{(1)} + \ldots + \varepsilon_m z^{(m)}}{m}\Big)\right\|_X.\end{aligned}$$

Dado que para cualquier elección de signos $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ tenemos que

$$\left\|\frac{\varepsilon_1 z^{(1)} + \ldots + \varepsilon_m z^{(m)}}{m}\right\| \leq 1,$$

resulta que

$$\sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} \left\|M(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})\right\|_X \leq \frac{m^m}{m!} \sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\|_X.$$

El resultado se sigue aplicando la fórmula de Stirling. □

Observación 1.3.2. A primera vista la cota e^m de la proposición anterior puede parecer bastante grande. Sin embargo, las estimaciones del tipo C^m aparecen naturalmente al trabajar con polinomios m-homogéneos. Más aún, estas estimaciones pueden ser compensadas contrayendo los polinomios ya que dado un polinomio m-homogéneo P tenemos que $P(rz) = r^m P(z)$. Tener este tipo de control también nos permitirá trasladar resultados del ámbito polinomial al de funciones vectoriales. Intuitivamente, contraer una función por algún factor r achica sus partes homogéneas por un factor r^m dejando un margen para compensar la aparición de constantes C^m. Como un ejemplo inocente de este fenómeno, notemos que si $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ y $|a_m| \leq C^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ entonces la serie

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m z^m,$$

converge en un entorno de 0. Un crecimiento de los coeficientes mayor a C^m, como por ejemplo del orden de m^m, habría significado que la serie diverge para todo $z \neq 0$. Teniendo esto en cuenta, usualmente buscamos cotas del estilo C^m y escribimos $a \simeq_{C^m} b$ siempre que $C^{-m}a \leq b \leq C^m a$.

Polinomios de Steinhaus

A continuación, nos dedicamos a estudiar polinomios en $\mathbb{T}^n$ (recordemos que $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$). Desde un punto de vista probabilístico, podemos interpretarlos como polinomios evaluados en variables de Steinhaus independientes (ver la Definición 1.2.2), por lo cual los llamamos *polinomios de Steinhaus*. Para fijar un espacio de probabilidad que permita trabajar con una cantidad arbitraria de variables de Steinhaus independientes consideramos el politoro infinito $\mathbb{T}^\infty = \prod_{n=1}^\infty \mathbb{T}$. En adelante, también escribiremos $z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{T}^\infty$ y denotaremos por dz a la medida producto de la medida de longitud de arco normalizada en $\mathbb{T}$. Notemos que $\mathbb{T}^\infty$ es un grupo compacto y dz es de hecho su medida de Haar por lo que resulta invariante por rotaciones.

Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots) \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ (todas las sucesiones finitas en $\mathbb{Z}$), el coeficiente de Fourier α-ésimo $\widehat{f}(\alpha)$ de $f \in L^1(\mathbb{T}^\infty, X)$ está dado por

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(z) z^{-\alpha} dz.$$

Los coeficientes de Fourier $\widehat{P}(\alpha)$ de un polinomio $P = \sum x_\alpha z^\alpha$ son exactamente los coeficientes x_α y se anulan en el resto de los índices. Esto se debe a que dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ tenemos que $\alpha_k = \beta_k = 0$ para todo k mayor que cierto $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} z^\alpha \overline{z^\beta} dz = \int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha \overline{z^\beta} dz = \delta_{\alpha,\beta},$$

donde δ es la delta de Kronecker. Dado $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Hardy de $\mathbb{T}^\infty$ a valores en X es el subespacio de $L^p(\mathbb{T}^\infty, X)$ dado por

$$H_p(\mathbb{T}^\infty, X) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}^\infty, X) : \ \widehat{f}(\alpha) = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \setminus \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \right\},$$

donde $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ denota el conjunto de los α en $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ con $\alpha_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Veamos algunas propiedades de estos espacios. Los polinomios de Steinhaus son densos en $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ para $1 \leq p < \infty$ y una función en $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ está unívocamente determinada por sus coeficientes de Fourier (ver [23, Proposición 24.6]). En cuanto a inclusiones, por la desigualdad de Jensen tenemos que $H_p(\mathbb{T}^\infty, X) \subseteq H_q(\mathbb{T}^\infty, X)$ si $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Más aún, veremos que es posible ir en la otra dirección. Para llegar a esto mencionamos la siguiente propiedad. Dada una función $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ y $0 \leq t \leq 1$ tenemos que

$$\Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}} t^{|\alpha|} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \Big\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}. \tag{1.6}$$

Más precisamente, existe una contracción $\mathcal{P}_t : H_p(\mathbb{T}^\infty, X) \to H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ tal que $\mathcal{P}_t(f)$ tiene coeficientes de Fourier $\widehat{\mathcal{P}_t(f)}(\alpha) = t^{|\alpha|} \widehat{f}(\alpha)$. Notemos que dado un polinomio P tenemos que $\mathcal{P}_t(P)(z) = P(tz)$ y por lo tanto $\mathcal{P}_t(P) = t^m P$ si P es m-homogéneo. Para funciones en finitas variables $f \in H_p(\mathbb{T}^n, X) \subseteq H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$, el lado izquierdo de la desigualdad anterior se puede obtener mediante una convolución con un núcleo de Poisson adecuado (ver [23, Sección 24.1]). Esta contracción de hecho mejora a la función. Lo siguiente se probó en [3, Teorema 9] para el caso escalar y en [14, Lema 1.3] para el caso general.

Teorema 1.3.3. *Para todo espacio de Banach X, todo $1 \leq p \leq q < \infty$ y toda función $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ se tiene que*

$$\Big\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}} \sqrt{p/q}^{|\alpha|} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \Big\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

Como consecuencia de esto, obtenemos una versión polinomial de la desigualdad de Kahane-Khintchine para polinomios de Steinhaus.

Proposición 1.3.4. *Para todo espacio de Banach X, todo $1 \leq p \leq q < \infty$ y todo polinomio P de grado m se tiene que*

$$\|P\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq \|P\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{2}} \|P\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

Esto se prueba en [14, Proposición 1.2] para polinomios m-homogéneos (ver también [3, 25] para el caso escalar). Para polinomios no necesariamente homogéneos, esto es una consecuencia inmediata del Teorema 1.3.3 y el siguiente lema.

Lema 1.3.5. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Para todo $t \geq 0$ y todo polinomio $P : \mathbb{C}^n \to X$ de grado m se tiene que*

$$\|P(tz)\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq \max(1, t)^m \|P(z)\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

Demostración. Para $t \leq 1$, esto es (1.6) para polinomios. Asumamos ahora que $t > 1$ y sea $Q : \mathbb{C}^{n+1} \to X$ el polinomio m-homogéneo dado por

$$Q(z, w) = w^m P(zw^{-1}) = \sum_{|\alpha| \leq m} x_\alpha z^\alpha w^{m-|\alpha|},$$

donde $z \in \mathbb{C}^n$ y $w \in \mathbb{C}$. Por la invariancia por rotaciones, la homogeneidad de Q y (1.6) aplicado (para z fijo) a Q como polinomio en w, nos queda

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} \|P(tz)\|^p dz &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^n} \|Q(tz, w)\|^p dz\, dw = t^{pm} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}} \|Q(z, t^{-1}w)\|^p dw\, dz \\ &\leq t^{pm} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}} \|Q(z, w)\|^p dw\, dz.\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la invariancia por rotaciones llegamos al resultado. □

Teniendo en cuenta la Observación 1.3.2 definimos la proyección m-homogénea en $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$. Dada $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$ definimos su *proyección m-homogénea* $f_m \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ por

$$f_m(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z\overline{w}) w^m dw,$$

donde $z\overline{w} = (z_1\overline{w}, z_2\overline{w}, \ldots)$. Como se muestra en [13, Proposición 2.5], por la desigualdad integral de Minkowski y la invariancia por rotaciones, para todo $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que

$$\|f_m\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

En particular, esto vale para polinomios donde, si $P = \sum x_\alpha z^\alpha$, tenemos que

$$P_m = \sum_{|\alpha|=m} x_\alpha z^\alpha.$$

El hecho de que las proyecciones homogéneas son contractivas permitirá reducir problemas al contexto homogéneo y eventualmente, al contexto lineal mediante la comparación de polinomios homogéneos con operadores multilineales asociados como hicimos en la sección previa.

Polinomios de Walsh

A continuación, nos enfocamos en polinomios evaluados en variables de Bernoulli independientes, conocidos como polinomios de Walsh. Tal como hicimos para polinomios de Steinhaus y siguiendo [69, Sección 5.4] (ver también [33, Capítulo 13]), fijamos un espacio de probabilidad que admita un número arbitrario de variables de Bernoulli, explícitamente, $\{-1, 1\}^\infty$ con la medida producto que surge de la medida de equiprobabilidad $(\delta_1 + \delta_{-1})/2$ en $\{-1, 1\}$. Una vez más, esto es un grupo abeliano compacto junto con su medida de Haar que es invariante bajo la acción del grupo. Mencionamos que este espacio de probabilidad se puede identificar con $[0, 1]$ junto con la medida de Lebesgue expresando los elementos de $[0, 1]$ en binario (ver [39, Capítulo 1]).

Un *polinomio de Walsh* es una variable aleatoria $P(\varepsilon)$ donde $P : \mathbb{C}^n \to X$ es un polinomio y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ son variables de Bernoulli *iid*. Como dada una variable de Bernoulli ε_0 tenemos que $\varepsilon_0^2 = 1$, los polinomios de Walsh siempre se pueden escribir como $P(\varepsilon)$ donde P es un polinomio tetraedral. Por lo tanto, usamos la notación tetraedral introducida al comienzo de esta sección y escribimos

$$P(\varepsilon) = \sum_{A \subseteq [n]} x_A \varepsilon_A.$$

Llamamos *funciones de Walsh* a las funciones del espacio $L^p(\{-1, 1\}^\infty, X)$. Para cualquier conjunto finito $A \subseteq \mathbb{N}$ el coeficiente de Walsh-Fourier $\widehat{f}(A)$ de una función $f \in L^1(\{-1, 1\}^\infty, X)$ está dado por

$$\widehat{f}(A) = \mathbb{E}[f(\varepsilon)\varepsilon_A].$$

Como antes, los coeficientes de Walsh-Fourier $\widehat{P}(A)$ de un polinomio $P = \sum x_A \varepsilon_A$ son exactamente sus coeficientes x_A. Como los monomios de Walsh ε_A son tetraedrales, no hay una noción de espacio de Hardy en este contexto.

Para toda función de Walsh $f \in L^1(\{-1,1\}^\infty, X)$ y $n \in \mathbb{N}$ notemos que $\mathbb{E}[f|\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$ es el polinomio de Walsh dado por

$$\mathbb{E}[f|\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n] = \sum_{A \subseteq [n]} \widehat{f}(A)\varepsilon_A.$$

Si identificamos (formalmente) a la función f con su serie de Walsh-Fourier

$$\sum_{A \subseteq \mathbb{N} \text{ finito}} \widehat{f}(A)\varepsilon_A,$$

vemos que el polinomio $\mathbb{E}[f|\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$ mantiene los monomios que sólo involucran a las variables de Bernoulli $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Remarcamos que esto no es una proyección homogénea de f, sino una aproximación de f cuando se conocen sus primeras n entradas.

Como tomar esperanza condicional es una contracción en $L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ para todo $1 \le p \le \infty$ se tiene que

$$\|\mathbb{E}[f|\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\|_p \le \|f\|_p.$$

El siguiente resultado prueba la densidad de los polinomios en $L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ para todo $1 \le p < \infty$ (ver [39, par. 2.6.4] para el caso escalar, el caso vectorial es análogo).

Proposición 1.3.6. *Sea X un espacio de Banach. Para todo $1 \le p < \infty$ y toda $f \in L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ se tiene que*

$$\mathbb{E}[f|\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n] \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} f.$$

Por la desigualdad de Jensen tenemos que $L^p(\{-1,1\}^\infty, X) \subseteq L^q(\{-1,1\}^\infty, X)$ si $1 \le p \le q \le \infty$. A su vez, como se prueba en [20, Lema 3.2.3], dada una función de Walsh $f \in L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ y $0 \le t \le 1$ se tiene la siguiente desigualdad análoga a (1.6):

$$\Big\| \sum_{\substack{A \subseteq \mathbb{N} \\ \text{finito}}} t^{|A|} \widehat{f}(A)\varepsilon_A \Big\|_p \le \|f\|_p. \tag{1.7}$$

Más aún, el siguiente resultado es análogo al Teorema 1.3.3 (ver [20, Teorema 3.2.1] y también [51, Teorema 2.2] para un resultado general para variables aleatorias simétricas arbitrarias).

Teorema 1.3.7. *Para todo espacio de Banach X, todo $1 < p \le q < \infty$ y toda función $f \in L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ se tiene que*

$$\Big\| \sum_{\substack{A \subseteq \mathbb{N} \\ \textit{finito}}} \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}^{\,|A|} \widehat{f}(A)\varepsilon_A \Big\|_q \le \|f\|_p.$$

Una diferencia fundamental entre polinomios de Steinhaus y de Walsh es que la proyección homogénea no es necesariamente acotada para estos últimos. La siguiente proposición estima la norma de la proyección homogénea de un polinomio y puede encontrarse en [49, Lema 2] (ver también [20, Lema 3.2.4]). Incluimos una prueba dado que la constante no se calcula explícitamente allí, y necesitamos que crezca exponencialmente en el grado del polinomio (esto es, que sea de la forma C^m para algún $C \geq 1$) por las razones dadas en la Observación 1.3.2. Además, daremos el argumento para variables aleatorias simétricas arbitrarias en vez de variables de Bernoulli, ya que usaremos este hecho en su versión general más adelante.

Proposición 1.3.8. *Sea X un espacio de Banach. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p < \infty$, todo vector aleatorio simétrico ξ con coordenadas iid y todo polinomio tetraedral P a valores en X de grado m, la proyección k-homogenénea P_k satisface que*

$$(\mathbb{E}\|P_k(\xi)\|^p)^{1/p} \leq C^m (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p}.$$

Demostración. Dado m consideramos las funciones $\{1, t, \ldots, t^m\}$ en $L^2(0,1)$. Veamos que hay polinomios $\{p_1^{(m)}, \ldots, p_{m+1}^{(m)}\}$ de grado a lo sumo m tales que

$$\int_0^1 t^{i-1} p_j^{(m)}(t)\, dt = \delta_{ij}, \tag{1.8}$$

para todo $1 \leq i, j \leq m+1$. Escribiendo $p_j^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{m+1} a_{kj}^{(m)} t^{k-1}$ nos queda que

$$\delta_{ij} = \int_0^1 t^{i-1} p_j^{(m)}(t) dt = \sum_{k=1}^{m+1} a_{kj}^{(m)} \int_0^1 t^{i+k-2} dt = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{i+k-1} a_{kj}^{(m)},$$

para todo $1 \leq i, j \leq m+1$. En otras palabras, obtenemos la identidad matricial

$$I = HA,$$

donde H es la reconocida matriz de Hilbert y A es la matriz definida por los coeficientes $a_{ij}^{(m)}$. Luego, tenemos que $A = H^{-1}$, que da una fórmula específica para los polinomios $p_j^{(m)}$. Notemos que $|a_{ij}^{(m)}|$ puede ser acotado fácilmente por el número de condición de H, que es menor que C^m para algún $C > 1$ (ver [83, Ecuación 3.35]). Alternativamente, usando la fórmula explícita de [74] para los elementos de H^{-1}, es sencillo verificar que existe una constante $C > 1$ tal que $\sup_{i,j} |a_{ij}^{(m)}| \leq C^m$. Por lo tanto, tomando $B = 2C$ nos queda

$$\sup_{0<t<1} |p_j^{(m)}(t)| \leq (m+1) C^m \leq B^m .$$

Como consecuencia de (1.8), si P es un polinomio de grado m, su proyección k-homogénea satisface que

$$P_k(\xi) = \int_0^1 P(t\xi) p_{k+1}^{(m)}(t) dt,$$

para todo $0 \leq k \leq m$. Obtenemos

$$(\mathbb{E}\|P_k(\xi)\|^p)^{1/p} \leq \int_0^1 (\mathbb{E}\|P(t\xi)p_{k+1}^{(m)}(t)\|^p)^{1/p} dt \leq B^m \int_0^1 (\mathbb{E}\|P(t\xi)\|^p)^{1/p} dt.$$

Ahora bien, la simetría de ξ y (1.7) nos permiten concluir que

$$(\mathbb{E}\|P(t\xi)\|^p)^{1/p} = (\mathbb{E}_{\varepsilon,\xi}\|P(t\varepsilon\xi)\|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}_{\varepsilon,\xi}\|P(\varepsilon\xi)\|^p)^{1/p} = (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p},$$

para todo $0 \leq t \leq 1$, lo cual completa la prueba. □

Para algunos espacios de Banach, la proyección homogénea de polinomios de Walsh es acotada. Esto lleva a la noción de K-convexidad que está íntimamente relacionada con los conceptos de tipo y cotipo. Un espacio de Banach X se dice *K-convexo* si la proyección 1-homogénea está acotada $L^2(\{-1,1\}^\infty, X)$. Más precisamente, La aplicación definida en polinomios de Walsh por

$$R_1\Big(\sum_A x_A\varepsilon_A\Big) = \sum_{|A|=1} x_A\varepsilon_A,$$

se extiende a un operador acotado $R_1 : L^2(\{-1,1\}^\infty, X) \to L^2(\{-1,1\}^\infty, X)$ (conocido como la proyección de Rademacher). Un argumento de dualidad usando la Proposición 1.1.1 muestra que X es K-convexo si y sólo si X^* es K-convexo. Además, la K-convexidad es equivalente a que la proyección R_1 esté acotada en $L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ para algún (todo) $1 < p < \infty$ (ver [44, Lema 7.4.3]). En este caso, notamos la norma de R_1 por $K_p(X)$. Un resultado muy importante afirma que un espacio de Banach es K-convexo si y sólo si tiene tipo no trivial (ver por ejemplo [33, Teorema 13.3]).

Si X es K-convexo, la proyección m-homogénea que en polinomios de Walsh está dada por

$$R_m\Big(\sum_A x_A\varepsilon_A\Big) = \sum_{|A|=m} x_A\varepsilon_A,$$

también se extiende a $R_m : L^2(\{-1,1\}^\infty, X) \to L^2(\{-1,1\}^\infty, X)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Más aún, por [67, Teorema 2.1] o [33, Teorema 13.16], existe $C \geq 1$ tal que para todo m se tiene que

$$\|R_m\| \leq C^m. \tag{1.9}$$

Vale la pena mencionar que si bien lo parecen, el tipo y el cotipo no son propiedades completamente duales entre sí. Por ejemplo, si X tiene tipo p, entonces X^* tiene cotipo p' (ver [1, Proposición 6.2.12]). Sin embargo, ℓ_1 tiene cotipo 2 y ℓ_∞ no tiene un tipo que no sea el trivial. Para espacios K-convexos, la dualidad funciona bien. Más precisamente, si X es K-convexo, entonces X tiene tipo p si y sólo si X^* tiene cotipo p' y X tiene cotipo q si y sólo si X^* tiene tipo q' (ver [81, Proposición 12.8]). En particular, como la K-convexidad es autodual, tener tipo no trivial implica tener cotipo no trivial. Más aún, un resultado fundamental de Bourgain muestra que tener tipo no trivial implica tener tipo/cotipo de Fourier no trivial (ver [11]).

Análisis de Fourier en grupos

Tanto los polinomios de Steinhaus como los de Walsh pueden ser estudiados en el contexto de análisis de Fourier en grupos. Por simplicidad, solo describimos algunas propiedades básicas. Todo lo que mencionamos se puede encontrar en [72] para el caso escalar (el caso vectorial es análogo).

Sea G be un grupo abeliano compacto y $d\omega$ su medida de Haar, que es la única medida de probabilidad invariante por traslaciones (multiplicaciones por elementos de G). Un homomorphismo continuo $\gamma : G \to \mathbb{T}$ se dice un *caracter*. Por ejemplo, el mapa $\gamma_\alpha : \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}$ dado por

$$\gamma_\alpha(z) = z^\alpha,$$

para algún $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ es un caracter en $\mathbb{T}^\infty$. Lo mismo sucede para el grupo $\{-1,1\}^\infty$ y $\gamma_A : \{-1,1\}^\infty \to \mathbb{T}$ dado por

$$\gamma_A(\varepsilon) = \varepsilon_A,$$

para algún conjunto finito $A \subseteq \mathbb{N}$. El conjunto de caracteres de G es también un grupo $\widehat{G}$ conocido como el *grupo dual* de G. Como antes, dados $f \in L_1(G,X)$ y $\gamma \in \widehat{G}$ definimos

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(\omega)\overline{\gamma(\omega)}d\omega.$$

Si G es compacto, entonces $\widehat{G}$ es discreto y una función $f \in L_1(G,X)$ está unívocamente determinada por su serie de Fourier

$$\sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(\omega).$$

Algunos comentarios referirán a este punto de vista, pero no usaremos esto de forma exhaustiva salvo por las Secciones 5.2 y 5.3.

El siguiente teorema de Pełczyński será una herramienta fundamental para comparar polinomios de Steinhaus y de Walsh así como otros objetos relacionados. Denotemos por $C(G)$ al conjunto de funciones continuas $f : G \to \mathbb{C}$.

Teorema 1.3.9 ([64, Teorema 1])**.** *Para un conjunto de índices a lo sumo numerable J, sean $(a_j)_{j\in J}$ y $(b_j)_{j\in J}$ sucesiones de caracteres en los grupos abelianos compactos S y T respectivamente. Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \geq 1$ tales que*

$$\frac{1}{c_1}\Big\|\sum_{j\in J}\lambda_j a_j\Big\|_{C(S)} \leq \Big\|\sum_{j\in J}\lambda_j b_j\Big\|_{C(T)} \leq c_2\Big\|\sum_{j\in J}\lambda_j a_j\Big\|_{C(S)}, \tag{1.10}$$

para toda sucesión $(\lambda_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{C}$ con finitos términos no nulos. Entonces, para todo espacio de Banach X, todo $1 \leq p \leq \infty$ y toda sucesión de vectores $(x_j)_{j\in J} \subseteq X$ tenemos que

$$\frac{1}{c_1c_2}\Big\|\sum_{j\in J}x_j a_j(s)\Big\|_{L_p(S,X)} \leq \Big\|\sum_{j\in J}x_j b_j(t)\Big\|_{L_p(T,X)} \leq c_1c_2\Big\|\sum_{j\in J}x_j a_j(s)\Big\|_{L_p(S,X)}.$$

1.4 Espacios de Hardy de series de Dirichlet

En esta sección introducimos los espacios de Hardy de series de Dirichlet. En el centro de esta teoría yace la transformada de Bohr, que relaciona series de Dirichlet y series de potencias en infinitas variables y nos permite hacer análisis armónico en series de Dirichlet. A través de este puente, los polinomios multivariados se tornan una herramienta crucial para la solución de una variedad de problemas.

Una *serie de Dirichlet* es una serie formal de la forma

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde s es una variable compleja y los coeficientes a_n pertenecen a un espacio de Banach. La convergencia de series de Dirichlet ocurre esencialmente en semiplanos en $\mathbb{C}$ de la forma $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ para algún $\sigma \in \mathbb{R}$ (ver [41, Sección II.2]). En cierto modo, los semiplanos juegan el mismo rol que tienen los discos para series de potencias de la forma $\sum a_n z^n$ si bien, como mencionamos en la Sección 5.3, el caso de series de Dirichlet es mucho más sutil. Teniendo esto en cuenta, si estamos buscando una definición para espacios de Hardy de funciones p-integrables en algún borde, tiene sentido considerar algún stipo de norma p en la línea imaginaria que es el borde del semiplano canónico $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > 0\}$ (no confundir con espacios de Hardy en el semiplano). Llegar a esta definición requerirá trabajo.

Comenzamos identificando series de Dirichlet con series de potencias en infinitas variables. Por el teorema fundamental de la aritmética, dado $n \in \mathbb{N}$ existen únicos exponentes α_k para cada primo p_k tales que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots =: p^{\alpha}.$$

Más aún, la aplicación $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ que a cada número natural $n = p^{\alpha}$ le asigna los exponentes $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de su descomposición en números primos es una biyección. La *transformada de Bohr* es la correspondencia formal entre series de Dirichlet y series de potencias dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \longleftrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} x_\alpha z^\alpha,$$

donde $x_\alpha = a_{p^\alpha}$.

Esto nos permite trasladar la estructura de los espacios de Hardy en el politoro infinito al contexto de series de Dirichlet. Dados un espacio de Banach X y $1 \le p \le \infty$, el espacio de Hardy $\mathcal{H}_p(X)$ de series de Dirichlet en X es, informalmente hablando, la preimagen de $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ vía la transformada de Bohr. Más precisamente, se define como el espacio de series de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ tales que existe $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ con coeficientes de Fourier $\widehat{f}(\alpha) = a_n$ con $n = p^\alpha$. Este espacio vectorial de series de Dirichlet junto con la norma

$$\|D\|_{\mathcal{H}_p(X)} = \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}, \tag{1.11}$$

resulta un espacio de Banach. En otras palabras, la transformada de Bohr establece la identificación isométrica

$$\mathcal{H}_p(X) = H_p(\mathbb{T}^\infty, X).$$

Una exposición detallada de este tema se puede encontrar en [23] o [71].

La transformada de Bohr no es de ninguna manera un dispositivo artificial. Al contrario, esta definición lleva a una definición intrínseca y sumamente sensata de la norma p de una serie de Dirichlet. Definamos un *polinomio de Dirichlet* como una serie de Dirichlet con finitos coeficientes no nulos. Notemos que los polinomios de Dirichlet son densos en $\mathcal{H}_p(X)$ para $1 \leq p < \infty$ dado que los polinomios (de Steinhaus) usuales son densos en $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$. En [3] (ver también [23, Teorema 11.9]) se prueba que

$$\|D\|_p = \lim_{T\to+\infty} \Big(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \Big\|_X^p dt \Big)^{1/p}.$$

Esto brinda una definición intrínseca de la norma p para polinomios de Dirichlet y, por lo tanto, para $\mathcal{H}_p(X)$ como la completación de los polinomios de Dirichlet con esta norma. A su vez, esta fórmula puede verse como el sustituto adecuado de la norma p en $\mathbb{T}$ para los espacios de Hardy ordinarios $H_p(\mathbb{T})$. Sin embargo, a diferencia de las series de Fourier clásicas en el toro, las series de Dirichlet no son funciones periódicas. Los polinomios de Dirichlet son, de hecho la suma de funciones periódicas con diferentes períodos. En la igualdad anterior, promediar la norma del polinomio de Dirichlet en intervalos cada vez más grandes permite tratar con todos los períodos simultáneamente y que la expresión converja a un resultado significativo. Mencionamos que esto se puede estudiar en el contexto más amplio de las funciones casi periódicas (ver [5]).

Capítulo 2

Decoupling de polinomios tetraedrales homogéneos

En este capítulo estudiamos el principio de *decoupling* (desacoplamiento) que consiste en introducir suficiente independencia para que un problema complejo se vuelva más manejable. Más precisamente, las desigualdades de *decoupling* comparan objetos que involucran variables aleatorias fuertemente dependientes con estructuras más simples donde la dependencia es menor. Obtenemos desigualdades de *decoupling* para polinomios tetraedrales homogéneos y comparamos normas de polinomios evaluados en distintas variables aleatorias. También estudiamos desigualdades donde se desacopla una sola entrada. Finalmente, bajo condiciones geométricas más estrictas para el espacio de Banach, brindamos estimaciones que relacionan polinomios con sumas de variables completamente independientes.

2.1 *Decoupling*

Estamos interesados en estudiar polinomios a valores vectoriales. Recordemos que si P es un polinomio vectorial m-homogéneo y M es su operador simétrico m-lineal asociado, para todo $z \in \mathbb{C}^n$ se tiene que

$$P(z) = M(z, \ldots, z).$$

Desde un punto de vista probabilístico, la variable aleatoria $M(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})$, donde las variables $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ son copias *iid* de un vector aleatorio de Steinhaus z (es decir, z está equidistribuido en $\mathbb{T}^n$), es una versión desacoplada de $P(z)$. Heurísticamente, las variables que aparecen en los monomios de M están menos entrelazadas lo cual lleva a una interdependencia más débil. Más aún, fijando cada variable excepto $z^{(k)}$, la estructura multilineal de M nos permite escribir a $M(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})$ como una suma de variables aleatorias independientes:

$$M(z^{(1)},\dots,z^{(m)})=\sum_{j=1}^{n}M(z^{(1)},\dots,z^{(k-1)},e_j,z^{(k+1)},\dots,z^{(m)})z_j^{(k)}. \tag{2.1}$$

Vale la pena mencionar que es fácil realizar argumentos inductivos gracias a esta estructura. Esto motiva ir del ámbito polinomial al multilineal a través de desigualdades de decoupling.

En [49, Teorema 2] (ver también [53, Teorema 6.4.1]) se prueba la siguiente desigualdad de *decoupling* (el resultado se enuncia para el caso real pero el caso complejo es análogo).

Teorema 2.1.1 (Kwapień)**.** *Sean $P:\mathbb{C}^n\to X$ un polinomio tetraedral m-homogéneo, M su operador m-lineal asociado y $\Phi: X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ una función convexa tal que $\Phi(x)=\Phi(-x)$ para todo $x\in X$. Si $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ es un vector aleatorio con coordenadas independientes y $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(m)}$ son copias iid de ξ se tiene que*

$$\mathbb{E}\Phi(m^{-m}P(\xi))\leq\mathbb{E}\Phi(M(\xi^{(1)},\dots,\xi^{(m)}))\leq\mathbb{E}\Phi(m^m/m!P(\xi)). \tag{2.2}$$

Trabajaremos con variables normales complejas estándar (es decir, que su parte real e imaginaria son independientes y con distribución $\mathcal{N}(0,1/2)$). Las denotaremos como γ_j y las llamaremos *variables gaussianas.* En [49, Observación 1] (ver también [53, Observación 6.4.1]) se menciona que con el mismo argumento con el que se prueba el teorema anterior se obtienen mejores estimaciones para variables gaussianas. Esbozaremos la prueba para mayor completitud.

Observación 2.1.2. Bajo las condiciones del teorema anterior, si $\gamma,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(m)}$ son vectores gaussianos independientes, se tiene que

$$\mathbb{E}\Phi(m^{-m/2}P(\gamma))\leq\mathbb{E}\Phi(M(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(m)}))\leq\mathbb{E}\Phi(m^{m/2}/m!P(\gamma)). \tag{2.3}$$

Demostración. Para la primer desigualdad, notemos que podemos tomar $\gamma=1/\sqrt{m}\sum_{k=1}^{m}\gamma^{(k)}$ que resulta nuevamente una variable gaussiana. Tomando la esperanza condicional de M dado γ obtenemos que

$$\mathbb{E}[M(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(m)})|\gamma]=\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)}c_i\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{m}\gamma_{i_k}^{(k)}|\gamma\Big]. \tag{2.4}$$

Como P es tetraedral, los índices i_k son distintos dos a dos si $c_i\neq 0$ por lo cual resulta que

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{m}\gamma_{i_k}^{(k)}|\gamma\Big]=\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{m}\gamma_{i_k}^{(k)}|\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_m}\Big]=\prod_{k=1}^{m}\mathbb{E}[\gamma_{i_k}^{(k)}|\gamma_{i_k}]. \tag{2.5}$$

Ahora bien, para todo $1\leq i\leq n$ se tiene que

$$\gamma_i=\mathbb{E}[\gamma_i|\gamma_i]=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}\mathbb{E}[\gamma_i^{(k)}|\gamma_i].$$

Por un argumento de simetría, todas las esperanzas condicionales del lado derecho coinciden. Luego, para todo $1 \leq k \leq m$ nos queda

$$\mathbb{E}[\gamma_i^{(k)}|\gamma_i] = \frac{\gamma_i}{\sqrt{m}}.$$

Juntando esto con (2.4) y (2.5) obtenemos que

$$\mathbb{E}[M(\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(m)})|\gamma] = \sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} c_i \prod_{k=1}^{m} \frac{\gamma_{i_k}}{\sqrt{m}} = m^{-m/2} P(\gamma).$$

Aplicando la desigualdad de Jensen, el resultado se sigue.

Para la segunda desigualdad, usamos la fórmula de polarización. Nuevamente por la desigualdad de Jensen nos queda

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\gamma \Phi(M(\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(m)})) &= \mathbb{E}_\gamma \Phi(1/m! \mathbb{E}_\varepsilon[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 \gamma^{(1)} + \ldots + \varepsilon_m \gamma^{(m)})]) \\ &\leq \mathbb{E}_\varepsilon \mathbb{E}_\gamma \Phi(1/m! P(\varepsilon_1 \gamma^{(1)} + \ldots + \varepsilon_m \gamma^{(m)})).\end{aligned}$$

Dado que para ε fijo tenemos que $\varepsilon_1 \gamma^{(1)} + \ldots + \varepsilon_m \gamma^{(m)} \sim \sqrt{m}\gamma$ obtenemos que

$$\mathbb{E}_\gamma \Phi(M(\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(m)})) \leq \mathbb{E}_\gamma \Phi(1/m! P(\sqrt{m}\gamma)) = \mathbb{E}_\gamma \Phi(m^{m/2}/m! P(\gamma)),$$

lo cual completa la prueba. □

Notemos que, al comparar las magnitudes $m^{-m/2}$ y $m^{m/2}/m!$ de (2.3) usando la fórmula de Stirling, resulta que

$$m^{-m/2} \simeq_{C^m} m^{m/2}/m!.$$

Como mencionamos en la Observación 1.3.2, al trabajar con polinomios de grado m es usual que surjan cotas del orden de C^m y, más aún, suelen ser manejables. Luego, si bien en estos contextos podemos usar (2.3) para variables gaussianas, para otras variables aleatorias simétricas la estimación (2.2) deja una brecha de magnitud m^m que puede ser muy grande.

Para afrontar este problema proponemos un método de *decoupling* alternativo que a cada polinomio tetraedral m-homogéneo le asocia una familia de operadores m-lineales. Este método está inspirado en una identidad combinatoria de [73] que se discute en la Sección 2.3.

Sea $P(z) = \sum x_A z_A$ un polinomio tetraedral m-homogéneo de n variables. Sin pérdida de generalidad asumimos que $n = km$ para algún $k \in \mathbb{N}$ agrandando n de ser necesario. Recordemos que notamos $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Dada una partición ordenada $\pi = (B_1, \ldots, B_m)$ de $[n]$ en m conjuntos de k elementos cada uno, definimos

$$L_\pi(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = \sum_{i_1 \in B_1} \cdots \sum_{i_m \in B_m} x_{\{i_1, \ldots, i_m\}} z_{i_1}^{(1)} \ldots z_{i_m}^{(m)}. \tag{2.6}$$

Observemos que $L_\pi(z,\dots,z)$ se puede obtener de $P(z)$ conservando únicamente los monomios cuyo índice A tiene exactamente un elemento en cada conjunto B_l de la partición. Más precisamente, consideremos la transformación lineal $T_\pi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ dada por

$$T_\pi(e_l) = \sum_{j\in B_l} e_j.$$

Si $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ es un vector aleatorio de variables de Bernoulli independientes, tenemos que

$$L_\pi(z,\dots,z) = \mathbb{E}_\varepsilon[\varepsilon_1\dots\varepsilon_m P(T_\pi(\varepsilon)z)], \tag{2.7}$$

donde $T_\pi(\varepsilon)z$ denota el producto coordenada a coordenada entre ambos vectores. En efecto, podemos escribir

$$\mathbb{E}_\varepsilon[\varepsilon_1\dots\varepsilon_m P(T_\pi(\varepsilon)z)] = \sum_{|A|=m} x_A \mathbb{E}_\varepsilon\Big[\varepsilon_1\dots\varepsilon_m \prod_{i\in A} T_\pi(\varepsilon)_i\Big] z_A.$$

Para un índice A fijo, la esperanza de la derecha es 1 si A tiene exactamente un elemento en cada conjunto B_l de la partición y 0 si no. En consecuencia, vale (2.7).

Ahora bien, sea $\Pi_{k,m}$ la familia de todas las particiones ordenadas π de $[n]$ en m conjuntos de k elementos. Explícitamente, definamos

$$\Pi_{k,m} = \Big\{\pi = (B_1,\dots,B_m) \in \mathcal{P}([n])^m : \bigcup_{l=1}^m B_l = [n] \text{ y } |B_1| = \ldots = |B_m| = k\Big\}. \tag{2.8}$$

Notemos que los conjuntos B_l son disjuntos dado que todos tienen k elementos y $n = km$. Por un argumento de simetría observemos que

$$\sum_{\pi\in\Pi_{k,m}} L_\pi(z,\dots,z) = N(k,m)P(z),$$

para algún $N(k,m)\in\mathbb{N}$ cada monomio aparece el mismo número $N(k,m)$ de veces. Como mostramos en (2.11), el número $N(k,m)$ es similar (salvo constante C^m) a $|\Pi_{k,m}|$ por lo que $P(z)$ es casi un promedio de los operadores $L_\pi(z,\dots,z)$. Este es un hecho crucial que hace útil a la descomposición (ver la Proposición 2.2.3 y el Lema 3.2.3) y es consecuencia de la siguiente identidad combinatoria.

Lema 2.1.3. *Sea V un espacio vectorial y consideremos $n = km$ con $k,m\in\mathbb{N}$. Dada una familia $\{v_A\colon A\subseteq[n],\, |A| = m\}\subseteq V$ se tiene que*

$$\sum_{|A|=m} v_A = \frac{1}{k^m}\binom{km}{m}\frac{1}{|\Pi_{k,m}|}\sum_{\pi\in\Pi_{k,m}}\sum_{i_1\in B_1}\cdots\sum_{i_m\in B_m} v_{\{i_1,\dots,i_m\}}. \tag{2.9}$$

Además, se tiene que

$$1 \le \frac{1}{k^m}\binom{km}{m} \le e^m.$$

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi\in\Pi_{k,m}}\sum_{i_1\in B_1}\cdots\sum_{i_m\in B_m} v_{\{i_1,\ldots,i_m\}} &= \sum_{|A|=m}\Big(\sum_{\substack{\pi\in\Pi_{k,m}\\ |A\cap B_l|=1,\ \forall l}} 1\Big) v_A \\
&= \sum_{|A|=m} \underbrace{m}_{\substack{\text{elegimos}\\ A\cap B_1}} \underbrace{\binom{(k-1)m}{k-1}}_{\substack{\text{elegimos}\\ A^c\cap B_1}} \underbrace{(m-1)}_{\substack{\text{elegimos}\\ A\cap B_2}} \underbrace{\binom{(k-1)(m-1)}{k-1}}_{\substack{\text{elegimos}\\ A^c\cap B_2}} \ldots 1\binom{k-1}{k-1} v_A \\
&= m!\prod_{l=1}^{m}\binom{(k-1)l}{k-1}\sum_{|A|=m} v_A. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\Pi_{k,m}| = \prod_{l=1}^{m}\binom{kl}{k} &= \frac{1}{k^m}\prod_{l=1}^{m}\binom{(k-1)l}{k-1}\frac{(k-1)(l-1)!}{(k-1)l!}\frac{kl!}{k(l-1)!} \\
&= \frac{1}{k^m}\prod_{l=1}^{m}\frac{(k-1)(l-1)!}{(k-1)l!}\prod_{l=1}^{m}\frac{kl!}{k(l-1)!}\prod_{l=1}^{m}\binom{(k-1)l}{k-1} \\
&= \frac{1}{k^m}\frac{km!}{(k-1)m!}\prod_{l=1}^{m}\binom{(k-1)l}{k-1} = \frac{1}{k^m}\binom{km}{m}m!\prod_{l=1}^{m}\binom{(k-1)l}{k-1}.
\end{aligned}$$

Juntando esto con (2.10) obtenemos (2.9).

Finalmente, veamos que

$$1 \le \frac{1}{k^m}\binom{km}{m} \le e^m.$$

Esto es obvio para $k=1$. Si $k\ge 2$, aplicando la fórmula de Stirling nos queda

$$\frac{1}{k^m}\binom{km}{m} \le \frac{e}{2\pi\sqrt{m}}\sqrt{\frac{k}{k-1}}\Big(\frac{k}{k-1}\Big)^{(k-1)m} \le \frac{e}{2\pi\sqrt{m}}\sqrt{2}e^m \le e^m,$$

La cota inferior se deduce de forma análoga. □

Notemos que para un polinomio tetraedral m-homogéneo $P(z)=\sum x_A z_A$, si tomamos $v_A = x_A z_A$ en la identidad combinatoria anterior y usamos (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
P(z) = \sum_{|A|=m} x_A z_A &= \frac{1}{k^m}\binom{km}{m}\frac{1}{|\Pi_{k,m}|}\sum_{\pi\in\Pi_{k,m}}\sum_{i_1\in B_1}\cdots\sum_{i_m\in B_m} x_{\{i_1,\ldots,i_m\}} z_{i_1}\ldots z_{i_m} \\
&= \frac{1}{k^m}\binom{km}{m}\frac{1}{|\Pi_{k,m}|}\sum_{\pi\in\Pi_{k,m}} L_\pi(z,\ldots,z). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

En otras palabras, el polinomio P puede escribirse como (casi) un promedio de esta familia de operadores multilineales L_π evaluados en $(z,\ldots,z)$. Usando esto, obtenemos la siguiente desigualdad de decoupling.

Teorema 2.1.4. *Sean $P : \mathbb{C}^n \to X$ un polinomio tetraedral m-homogéneo y $\Phi : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función convexa tal que $\Phi(x) = \Phi(-x)$ para todo $x \in X$. Si $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es un vector aleatorio con coordenadas independientes y $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}$ son copias iid de ξ se tiene que*

$$\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{k^m}{\binom{km}{m}} P(\xi)\Big) \leq \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \mathbb{E}\Phi(L_\pi(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})) \leq \mathbb{E}\Phi(P(\xi)).$$

Además, para $p \geq 1$ se tiene que

$$e^{-m}(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \leq \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} (\mathbb{E}\|L_\pi(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})\|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p}.$$

Demostración. Usaremos la desigualdad de Jensen varias veces. Usando (2.11) tenemos que

$$\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{k^m}{\binom{km}{m}} P(\xi)\Big) \leq \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \mathbb{E}\Phi(L_\pi(\xi, \ldots, \xi)).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (2.7), para cada $\pi \in \Pi_{k,m}$ obtenemos

$$\mathbb{E}_\xi\Phi(L_\pi(\xi, \ldots, \xi)) \leq \mathbb{E}_{\varepsilon,\xi}\Phi(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P(T_\pi(\varepsilon)\xi)) = \mathbb{E}_\xi\Phi(P(\xi)),$$

donde la última igualdad se sigue de que $\Phi(x) = \Phi(-x)$ y $T_\pi(\varepsilon)\xi \sim \xi$ (como ξ es simétrico, cambiar el signo de cada coordenada no afecta su distribución). Luego, tenemos que

$$\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{k^m}{\binom{km}{m}} P(\xi)\Big) \leq \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \mathbb{E}\Phi(L_\pi(\xi, \ldots, \xi)) \leq \mathbb{E}\Phi(P(\xi)).$$

Ahora bien, sean $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}$ copias *iid* de ξ. En cierta forma, $L_\pi(\xi, \ldots, \xi)$ ya está desacoplado por su estructura algebraica dado que los conjuntos de índices $B_1, \ldots, B_m$ no se intersecan. De hecho, notemos que reemplazando cada coordenada ξ_i por $\xi_i^{(l)}$ siempre que $i \in B_l$ nos queda

$$\mathbb{E}\Phi(L_\pi(\xi, \ldots, \xi)) = \mathbb{E}\Phi(L_\pi(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})),$$

por lo que se deduce la primera afirmación.

Si bien no podemos deducir la segunda afirmación de la primera dado que los exponentes $1/p$ quedarían afuera del promedio sobre las particiones $\pi \in \Pi_{k,m}$, un argumento análogo al anterior resulta en que

$$\frac{k^m}{\binom{km}{m}}(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \leq \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} (\mathbb{E}\|L_\pi(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})\|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p}.$$

Finalmente, dado que $\frac{1}{k^m}\binom{km}{m} \leq e^m$ como se muestra en el lema anterior, el resultado se sigue. $\square$

El teorema anterior nos permite traducir problemas sobre polinomios tetraedrales m-homogéneos a problemas sobre operadores m-lineales con cotas del orden de C^m y sin pasar por (2.2). Más aún, el ámbito multilineal permite argumentos inductivos sencillos usando (2.1).

A continuación, volvemos a las desigualdades clásicas de *decoupling* que involucran al operador simétrico m-lineal asociado M. Notemos que si $\Phi = \| \cdot \|_X^p$ para algún $1 \leq p < \infty$, usando la estimación para variables gaussianas (2.3) y la fórmula de Stirling, obtenemos que

$$(\mathbb{E}\|P(\gamma)\|^p)^{1/p} \simeq_{C^m} m^{m/2} (\mathbb{E}\|M(\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(m)})\|^p)^{1/p}. \tag{2.12}$$

En otras palabras, la norma p de un polinomio gaussiano se puede estimar salvo constante C^m calculando la norma p de su operador m-lineal asociado. Por otro lado, comenzando con (2.2) y haciendo lo mismo para un vector aleatorio simétrico arbitrario ξ nos queda

$$m^{-m} (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}\|M(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})\|^p)^{1/p} \leq e^m (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p}.$$

Es decir, queda una brecha de magnitud m^m que puede ser demasiado grande para ciertas aplicaciones.

Sin embargo, como consecuencia del Teorema 2.1.4 mostramos que las normas p de polinomios tetraedrales m-homogéneos se mantienen cercanas (salvo constante C^m) para espacios de cotipo finito sin importar la variable aleatoria en la que evaluemos. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema cuya prueba posponemos para la siguiente sección.

Teorema 2.1.5. *Sea X un espacio de Banach de cotipo finito q y sea ξ_0 una variable aleatoria simétrica no trivial con norma s finita para algún $s > q$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p < s$ y todo polinomio tetraedral $P : \mathbb{C}^n \to X$ de grado m se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \simeq_{C^m} (\mathbb{E}\|P(\gamma)\|^p)^{1/p}, \tag{2.13}$$

donde las coordenadas de ξ son copias iid de ξ_0.

Notemos que el operador m-lineal M asociado a un polinomio de n variables también puede ser visto como un polinomio tetraedral m-homogéneo de nm variables. Luego, podemos aplicar el Teorema 2.1.5 tanto a polinomios tetraedrales m-homogéneos como a sus respectivos operadores multilineales asociados. Esto nos permite traducir el resultado de *decoupling* (2.12) de variables gaussianas a variables aleatorias simétricas con norma s finita.

Corolario 2.1.6. *Sea X un espacio de Banach de cotipo finito q y sea ξ_0 una variable aleatoria simétrica no trivial con norma s finita para algún $s > q$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p < s$ y todo polinomio tetraedral m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to X$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \simeq_{C^m} m^{m/2} (\mathbb{E}\|M(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})\|^p)^{1/p}, \tag{2.14}$$

donde las coordenadas de $\xi, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}$ son copias iid de ξ_0.

Observación 2.1.7. La hipótesis de que P sea tetraedral es necesaria tanto para el Teorema 2.1.5 como para el Corolario 2.1.6. Por ejemplo, tomemos $P(z) = z^m$. Para variables aleatorias de Steinhaus, obtenemos

$$\mathbb{E}|P(z)|^p = \mathbb{E}|z^m|^p = 1.$$

Por otro lado, como $2|\gamma|^2$ tiene una distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad, un cálculo sencillo muestra que para todo $q > 0$ tenemos

$$\mathbb{E}|\gamma|^q = \Gamma\Big(\frac{q}{2} + 1\Big).$$

Usando la fórmula de Stirling nos queda

$$\mathbb{E}|P(\gamma)|^p = \mathbb{E}|\gamma|^{pm} = \Gamma\Big(\frac{pm}{2} + 1\Big) \simeq_{C^m} m^{pm/2},$$

por lo que no se satisface (2.13).

Análogamente, (2.14) también falla. Tenemos que $M(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = z^{(1)} \dots z^{(m)}$. Luego, nos queda

$$\mathbb{E}|M(z^{(1)}, \dots, z^{(m)})|^p = \mathbb{E}|z^{(1)} \dots z^{(m)}|^p = 1 = \mathbb{E}|P(z)|^p.$$

La hipótesis de cotipo finito también es necesaria para ambos resultados. En [54, p. 253] se prueba que el Teorema 2.1.5 falla para espacios de cotipo trivial incluso para $m = 1$. En cuanto al Corolario 2.1.6, veremos la necesidad de la condición de cotipo finito en la Observación 2.2.5.

2.2 Comparación de polinomios aleatorios

El objetivo principal de esta sección es comparar las normas p de un polinomio tetraedral m-homogéneo evaluado en distintos vectores aleatorios. En particular, probaremos que para espacios de cotipo finito, el vector aleatorio es esencialmente intercambiable por cualquier otro (ver Teorema 2.1.5). Para ello, necesitaremos algunos resultados previos.

En primer lugar, veamos que los polinomios de Walsh y de Steinhaus tienen normas p equivalentes aun sin asumir homogeneidad del polinomio o condiciones geométricas sobre el espacio de Banach. El argumento consiste en traducir resultados escalares al contexto vectorial usando un teorema de Pełczyński de [64]. Este resultado también se puede obtener usando [53, Proposición 6.3.1] y corroborando las hipótesis a mano.

Lema 2.2.1. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Para todo polinomio tetraedral P de grado m y de n variables se tiene que*

$$\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^m \left(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p\right)^{1/p} \leq \left(\mathbb{E}\|P(z)\|^p\right)^{1/p} \leq (1+\sqrt{2})^m \left(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p\right)^{1/p}. \tag{2.15}$$

Demostración. En [46, p. 2764] se prueba que para todo polinomio $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ de grado m, se tiene que

$$\sup_{z\in\mathbb{T}^n} |Q(z)| \leq (1+\sqrt{2})^m \sup_{x\in[-1,1]^n} |Q(x)|.$$

Si asumimos que Q es tetraedral, observamos como en [28] que

$$\sup_{x\in[-1,1]^n} |Q(x)| = \sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} |Q(\varepsilon)|,$$

dado que Q es afín en cada coordenada. Luego,

$$\sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} |Q(\varepsilon)| \leq \sup_{z\in\mathbb{T}^n} |Q(z)| \leq (1+\sqrt{2})^m \sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} |Q(\varepsilon)|.$$

Equivalentemente, para cada elección de escalares $\{c_A\}_{|A|\leq m} \subseteq \mathbb{C}$ tenemos que

$$\sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \Big|\sum_{|A|\leq m} c_A\varepsilon_A\Big| \leq \sup_{z\in\mathbb{T}^n} \Big|\sum_{|A|\leq m} c_A z_A\Big| \leq (1+\sqrt{2})^m \sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \Big|\sum_{|A|\leq m} c_A\varepsilon_A\Big|. \quad (2.16)$$

Consideremos los conjuntos de caracteres $\{\varepsilon_A\}_{|A|\leq m}$ y $\{z_A\}_{|A|\leq m}$ en los grupos abelianos compactos $\{-1,1\}^n$ y $\mathbb{T}^n$ respectivamente. Como estos conjuntos satisfacen (2.16), se cumplen las condiciones del Teorema 1.3.9 (de [64, Teorema 1]). Luego, nos queda

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{-m}\Big\|\sum_{|A|\leq m} x_A\varepsilon_A\Big\|_{L^p(\{-1,1\}^n,X)} &\leq \Big\|\sum_{|A|\leq m} x_A z_A\Big\|_{L^p(\mathbb{T}^n,X)} \\ &\leq (1+\sqrt{2})^m\Big\|\sum_{|A|\leq m} x_A\varepsilon_A\Big\|_{L^p(\{-1,1\}^n,X)},\end{aligned}$$

para toda elección de vectores $\{x_A\}_{|A|\leq m} \subseteq X$.

Esto ya muestra que los polinomios de Walsh y Steinhaus tienen normas p equivalentes salvo una constante C^m. Sin embargo, el siguiente argumento permite mejorar la cota inferior y obtener $(2/\pi)^m$ como se enuncia en (2.15). Notemos que para $1 \leq j \leq n$ tenemos que $\delta_j = \operatorname{sg}(\operatorname{Re}(z_j)) \sim \operatorname{Be}(1/2)$. Más aún, un cálculo sencillo prueba que

$$\mathbb{E}[z_j|\delta_j] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta\ \delta_j = \frac{2}{\pi}\delta_j.$$

Como P es tetraedral cada monomio es un producto de variables independientes. Luego, nos queda

$$\mathbb{E}\Big[P\Big(\frac{\pi}{2}z\Big)\Big|\delta\Big] = P(\delta).$$

Aplicando la desigualdad de Jensen y el Lema 1.3.5 concluimos que

$$(\mathbb{E}\|P(\delta)\|^p)^{1/p} \leq \Big(\mathbb{E}\Big\|\mathbb{E}\Big[P\Big(\frac{\pi}{2}z\Big)\Big|\delta\Big]\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m (\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p}. \qquad \square$$

A continuación, veamos que los polinomios de Steinhaus (o Walsh) tienen la menor norma p (salvo constante C^m) comparados con polinomios evaluados en otras variables aleatorias.

Lema 2.2.2. *Sean $P : \mathbb{C}^n \to X$ un polinomio tetraedral m-homogéneo y ξ un vector aleatorio simétrico no trivial con coordenadas iid. Se tiene que*

$$\Big(\frac{\mathbb{E}|\xi_1|}{1+\sqrt{2}}\Big)^m (\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p}.$$

Más aún, existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo polinomio tetraedral (no necesariamente homogéneo) $P : \mathbb{C}^n \to X$ de grado m se tiene que

$$(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p} \leq C^m (\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p}.$$

Demostración. Sea $P(z) = \sum_{|A|=m} x_A z_A$. Como P es tetraedral cada monomio es un producto de variables independientes. Como además las variables ξ_i son *iid*, tenemos

$$(\mathbb{E}_\xi|\xi_1|)^m z_A = \prod_{i\in A} \mathbb{E}_\xi|\xi_i|z_i = \mathbb{E}_\xi \prod_{i\in A} |\xi_i|z_i = \mathbb{E}_\xi(|\xi|z)_A.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}_\xi|\xi_1|)^{pm}\mathbb{E}_z\|P(z)\|^p &= \mathbb{E}_z\Big\| \sum_{|A|=m} x_A(\mathbb{E}_\xi|\xi_1|)^m z_A\Big\|^p \\
&= \mathbb{E}_z\Big\| \sum_{|A|=m} x_A\mathbb{E}_\xi(|\xi|z)_A\Big\|^p = \mathbb{E}_z\|\mathbb{E}_\xi P(|\xi|z)\|^p \\
&\leq \mathbb{E}_\xi\mathbb{E}_z\|P(|\xi|z)\|^p = \mathbb{E}_\xi\mathbb{E}_z\|P(\xi z)\|^p,
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos la invariancia por rotaciones de z. Usando el Lema 2.2.1 podemos reemplazar las variables de Steinhaus por variables de Bernoulli. Obtenemos

$$(\mathbb{E}_\xi|\xi_1|)^{pm}\mathbb{E}_z\|P(z)\|^p \leq (1+\sqrt{2})^{pm}\mathbb{E}_\xi\mathbb{E}_\varepsilon\|P(\xi\varepsilon)\|^p.$$

Como ξ es simétrico tenemos que $\xi\varepsilon \sim \xi$, lo cual prueba la primera afirmación.

En cuanto a polinomios no homogéneos, damos un argumento directo. Separando el polinomio en sus componentes homogéneas y aplicando la Proposición 1.3.8, concluimos que

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p} &\leq \sum_{k=0}^m (\mathbb{E}\|P_k(z)\|^p)^{1/p} \leq \sum_{k=0}^m C^k(\mathbb{E}\|P_k(\xi)\|^p)^{1/p} \\
&\leq \widetilde{C}^m \sum_{k=0}^m C^k(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \leq (2C\widetilde{C})^m(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

□

El último ingrediente necesario para la prueba del Teorema 2.1.5 es una vuelta parcial del Lema 2.2.2.

Proposición 2.2.3. *Sean X un espacio de Banach de cotipo q y ξ_0 una variable aleatoria simétrica con norma s finita para algún $s > q$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p < s$ y todo polinomio tetraedral $P : \mathbb{C}^n \to X$ de grado m se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \leq C^m (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p},$$

donde las coordenadas de ξ son copias iid de ξ_0.

Demostración. En primer lugar, consideremos el caso m-homogéneo. Apelando al Teorema 2.1.4, basta verificar que para todo operador m-lineal $L : (\mathbb{C}^n)^m \to X$ se tiene que

$$(\mathbb{E}\|L(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})\|^p)^{1/p} \leq C^m (\mathbb{E}\|L(\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(m)})\|^p)^{1/p}.$$

Notemos que el caso $m = 1$ es esencialmente [68, Proposición 3.2] (ver también [54, Proposición 9.14]). Allí se prueba que si ξ es real (además de tener norma s finita), para toda elección de vectores $\{x_j\}_{j=1}^n \subseteq X$ tenemos que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n x_j \xi_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j\Big\|^p\Big)^{1/p}.$$

Sin embargo, esto se generaliza de forma inmediata para vectores aleatorios complejos separando a ξ en su parte real e imaginaria y usando la desigualdad triangular. Luego, el caso $m = 1$. El resto se sigue de un argumento inductivo en m.

En cuanto al caso no homogéneo, procedemos separando al polinomio en sus componentes no homogéneas y aplicando la Proposición 1.3.8. Concluimos que

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} &\leq \sum_{k=0}^m (\mathbb{E}\|P_k(\xi)\|^p)^{1/p} \leq \sum_{k=0}^m C^k (\mathbb{E}\|P_k(\varepsilon)\|^p)^{1/p} \\ &\leq \widetilde{C}^m \sum_{k=0}^m C^k (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p} \leq (2C\widetilde{C})^m (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p}. \qquad \square\end{aligned}$$

Estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 2.1.5. Sea ξ_0 en las condiciones del teorema. Por el Lema 2.2.1 sabemos que los polinomios de Walsh y Steinhaus son intercambiables. Usando esto junto con el Lema 2.2.2 y la Proposición 2.2.3 deducimos que existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p < s$ y todo polinomio tetraedral m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to X$ se tiene que

$$(\mathbb{E}\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \simeq_{C^m} (\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p}$$

Notemos que las variables gaussianas también satisfacen esto para una constante suficientemente grande, dado que tienen norma s finita para todo s. Luego, tanto $P(\xi)$ como $P(\gamma)$ se pueden comparar con $P(z)$, lo cual concluye la prueba. $\square$

A continuación, estudiamos la validez de la desigualdad de *decoupling* (2.14) para variables de Steinhaus (o equivalentemente, de Bernoulli) cuando X tiene cotipo trivial. Para ello, comparamos un polinomio homogéneo con su operador multilineal asociado desde un punto de vista levemente distinto. Una mirada cuidadosa de la prueba del Teorema 2.1.1 (probado en [49, Teorema 2]) muestra que para todo polinomio tetraedral m-homogéneo P y toda función convexa simétrica $\Phi : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\Phi\Big(m^{-m}P\Big(\sum_{l=1}^{m}\xi^{(l)}\Big)\Big) \leq \mathbb{E}\Phi(M(\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(m)})) \leq \mathbb{E}\Phi\Big(1/m!P\Big(\sum_{l=1}^{m}\xi^{(l)}\Big)\Big).$$

En particular, si $\Phi = \|\cdot\|^p$, usando la fórmula de Stirling obtenemos

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|P\Big(\sum_{l=1}^{m}\xi^{(l)}\Big)\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq m^m(\mathbb{E}\|M(\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(m)})\|^p)^{1/p} \leq e^m\Big(\mathbb{E}\Big\|P\Big(\sum_{l=1}^{m}\xi^{(l)}\Big)\Big\|^p\Big)^{1/p}. \tag{2.17}$$

Esto quiere decir que la norma de M se puede estimar (salvo constante C^m) por la norma de P evaluado en una suma de m copias de la variable aleatoria original. Esencialmente, obtener una desigualdad de *decoupling* entre P y M es lo mismo que comparar los momentos del polinomio evaluado en ξ y $\sum_{l=1}^{m}\xi^{(l)}$. Para variables de Steinhaus esto nos permite mostrar que el lado izquierdo de (2.14) vale aun para espacios con cotipo trivial, mientras que el lado derecho puede fallar.

Proposición 2.2.4. *Sea X un espacio de Banach. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p < \infty$ y todo polinomio tetraedral m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to X$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p} \leq C^m m^{m/2}(\mathbb{E}\|M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})\|^p)^{1/p}.$$

Demostración. Sea P un polinomio tetraedral m-homogéneo. Aplicando el Lema 2.2.2 para la variable aleatoria $\sum_{l=1}^{m} z^{(l)}$ y (2.17) nos queda

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{m} z_1^{(l)}\right|}{1+\sqrt{2}}\right)^m (\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p} &\leq \Big(\mathbb{E}\Big\|P\Big(\sum_{l=1}^{m}z^{(l)}\Big)\Big\|^p\Big)^{1/p}\\ &\leq m^m(\mathbb{E}\|M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})\|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Khintchine tenemos que

$$\sqrt{m} = \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{l=1}^{m}z_1^{(l)}\Big|^2\Big)^{1/2} \leq \sqrt{2}\mathbb{E}\Big|\sum_{l=1}^{m}z_1^{(l)}\Big|.$$

Juntando ambas desigualdades concluimos que

$$(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p} \leq (\sqrt{2}+2)^m m^{m/2}(\mathbb{E}\|M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})\|^p)^{1/p}.$$ □

Notemos que podemos reemplazar las variables de Steinhaus por variables de Bernoulli apelando al Lema 2.2.1. Por otro lado, aunque la constante en la proposición anterior es independiente de p, no tiene sentido trasladar este resultado a la norma supremo, pues la estimación es mucho peor que la de la Proposición 1.3.1.

Finalmente, nos concentramos en el lado derecho de (2.14). El siguiente contraejemplo para variables de Bernoulli prueba que la condición de cotipo finito es necesaria para el Corolario 2.1.6.

Observación 2.2.5. Denotemos $\mathcal{P}_m[n] = \{A \subseteq [n] : \ |A| = m\}$ y sea $\ell_\infty(\mathcal{P}_m[n])$ el espacio normado $(\mathbb{C}^{\binom{n}{m}}, \|\cdot\|_\infty)$ cuyas coordenadas son indexadas por conjuntos $A \in \mathcal{P}_m[n]$ en vez de números naturales. Además, escribamos su base canónica como $\{e_A\}_{|A|=m}$. Consideremos el polinomio de Walsh m-homogéneo $P : \{-1,1\}^n \to \ell_\infty(\mathcal{P}_m[n])$ dado por

$$P(\varepsilon) = \sum_{|A|=m} e_A \varepsilon_A.$$

Este polinomio simplemente coloca cada monomio en una coordenada distinta. Notemos que para todo $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$ tenemos que

$$\|P(\varepsilon)\|_{\ell_\infty(\mathcal{P}_m[n])} = \sup_{|A|=m} |\varepsilon_A| = 1.$$

Luego, nos queda

$$(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p} = 1.$$

Sin embargo, para una suma de m copias independientes de ε obtenemos

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|P\Big(\sum_{l=1}^{m} \varepsilon^{(l)}\Big)\Big\|^p\Big)^{1/p} = \Big(\mathbb{E} \sup_{|A|=m} \prod_{i \in A} \Big|\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_i^{(l)}\Big|^p\Big)^{1/p}.$$

Reemplazando todas las variables de Bernoulli por 1 , observamos que esta expresión es a lo sumo m^m. Para obtener una cota inferior, apelamos a un argumento del estilo del teorema del mono infinito. Pensemos a las variables de Bernoulli distribuidas en una matriz $(\varepsilon_i^{(l)})_{i,l}$ de $n \times m$. Si hay (al menos) m filas donde todas las entradas son 1, podemos elegir A para que indexe esas filas. Luego, nos quedaría

$$\sup_{|A|=m} \prod_{i \in A} \Big|\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_i^{(l)}\Big| = m^m.$$

Haciendo n tender a infinito, la probabilidad de hallar m filas de unos tiende a 1. Esto quiere decir que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|P\Big(\sum_{l=1}^{m} \varepsilon^{(l)}\Big)\Big\|^p\Big)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} m^m.$$

Finalmente, por (2.17) resulta que

$$(\mathbb{E}\|M(\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(m)})\|^p)^{1/p} \simeq_{C^m} 1 = (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p},$$

por lo que no se satisface (2.14).

2.3 *Decoupling* de una variable

En esta sección estudiamos *decoupling* de una variable de polinomios tetraedrales m-homogéneos. En vez de comparar $P(z) = M(z, \dots, z)$ con su versión completamente desacoplada $M(z^{(1)}, \dots, z^{(m)})$, reemplazaremos z por una copia *iid* z' en una sola entrada para obtener $M(z', z, \dots, z)$. Por supuesto, en este contexto nos proponemos comparar las normas p de ambos objetos mediante constantes C absolutas, es decir, independientes de m. Por esta razón, los resultados anteriores no nos servirán en este contexto.

Comenzamos probando una versión de una variable de (2.3).

Proposición 2.3.1. *Sea $P : \mathbb{C}^n \to X$ un polinomio tetraedral m-homogéneo. Para todo $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$\frac{1}{\sqrt{e}}(\mathbb{E}\|P(\gamma)\|^p)^{1/p} \leq \sqrt{m}(\mathbb{E}\|M(\gamma', \gamma, \dots, \gamma)\|^p)^{1/p} \leq \sqrt{e}(\mathbb{E}\|P(\gamma)\|^p)^{1/p}.$$

Demostración. Para la primera desigualdad, consideremos la variable gaussiana

$$\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{m}}\gamma' + \sqrt{\frac{m-1}{m}}\gamma \sim \gamma.$$

Un cálculo sencillo muestra que para todo $1 \leq i \leq n$ tenemos

$$\mathbb{E}[\gamma_i'|\gamma''] = \frac{1}{\sqrt{m}}\gamma_i'' \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[\gamma_i|\gamma''] = \sqrt{\frac{m-1}{m}}\gamma_i''.$$

Luego, como P es tetraedral nos queda

$$\mathbb{E}[M(\gamma', \gamma, \dots, \gamma)|\gamma''] = \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{m-1}{m}}^{m-1} P(\gamma'').$$

Usando la desigualdad de Jensen, obtenemos

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\|P(\gamma'')\|^p)^{1/p} &\leq \Big(1 + \frac{1}{m-1}\Big)^{(m-1)/2}\sqrt{m}(\mathbb{E}\|M(\gamma', \gamma, \dots, \gamma)\|^p)^{1/p} \\ &\leq \sqrt{em}(\mathbb{E}\|M(\gamma', \gamma, \dots, \gamma)\|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Como $\gamma'' \sim \gamma$, esto prueba la primera desigualdad.

En cuanto a la segunda, notemos que para w equidistribuido en $\mathbb{T}$ tenemos que

$$\mathbb{E}_w\Big[P\Big(\frac{w}{\sqrt{m-1}}\gamma' + \gamma\Big)\overline{w}\Big] = mM\Big(\frac{1}{\sqrt{m-1}}\gamma', \gamma, \dots, \gamma\Big).$$

Nuevamente, por la desigualdad de Jensen resulta que

$$\sqrt{m}(\mathbb{E}\|M(\gamma', \gamma, \dots, \gamma)\|^p)^{1/p} \leq \sqrt{\frac{m-1}{m}}\mathbb{E}_w\Big(\mathbb{E}_{\gamma,\gamma'}\Big\|P\Big(\frac{w}{\sqrt{m-1}}\gamma' + \gamma\Big)\Big\|^p\Big)^{1/p}.$$

Como antes, para $w \in \mathbb{T}$ fijo sabemos que

$$\frac{w}{\sqrt{m-1}}\gamma' + \gamma \sim \sqrt{\frac{m}{m-1}}\gamma.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{m}(\mathbb{E}\|M(\gamma',\gamma,\dots,\gamma)\|^p)^{1/p} &\leq \sqrt{\frac{m-1}{m}}\Big(\mathbb{E}_\gamma\Big\|P\Big(\sqrt{\frac{m}{m-1}}\gamma\Big)\Big\|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Big(1+\frac{1}{m-1}\Big)^{(m-1)/2}(\mathbb{E}\|P(\gamma)\|^p)^{1/p} \\
&\leq \sqrt{e}(\mathbb{E}\|P(\gamma)\|^p)^{1/p}. \qquad \square
\end{aligned}$$

A diferencia de la sección anterior, no es posible trasladar el resultado previo a otras variables aleatorias dado que nuestras estimaciones (tales como el Teorema 2.1.5) involucran constantes de la forma C^m. Sin embargo, podemos probar una desigualdad de *decoupling* análoga para polinomios de Steinhaus asumiendo que el espacio de Banach es K-convexo. Recordemos que para espacios K-convexos, la constante $K_p(X)$ denota la norma de la proyección 1-homogénea en $L_p(\{-1,1\}^\infty, X)$.

Teorema 2.3.2. *Sea $P : \mathbb{C}^n \to X$ un polinomio tetraedral m-homogéneo. Para todo $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p} \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{em}(\mathbb{E}\|M(z',z,\dots,z)\|^p)^{1/p}. \tag{2.18}$$

Si el espacio de Banach X es K-convexo y $p > 1$, entonces también se tiene que

$$\sqrt{m}(\mathbb{E}\|M(z',z,\dots,z)\|^p)^{1/p} \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{e}K_p(X)(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p}.$$

Observación 2.3.3. Un hecho fundamental en la prueba de la Proposición 2.3.1 es que para variables gaussianas $a\gamma + b\gamma' \sim \sqrt{|a|^2+|b|^2}\gamma''$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$. Esto no es cierto para otras variables aleatorias como variables de Steinhaus. Para obtener un comportamiento similar podemos aprovechar la geometría de $\mathbb{C}$ y usar que las variables z y $i\varepsilon z$ (donde z y ε son variables de Steinhaus y Bernoulli respectivamente) siempre se mantienen ortogonales entre sí. Notemos que en este caso, para $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos que $az + bi\varepsilon z \sim \sqrt{a^2+b^2}z$. Esto explica la hipótesis de K-convexidad que surge de la necesidad de estimar la norma de proyecciones homogéneas que involucran variables de Bernoulli ε. Nos vemos obligados a usar dichas variables para mantener la ortogonalidad entre z y $i\varepsilon z$. No sabemos si la hipótesis de K-convexidad es necesaria o es un aspecto técnico de la prueba. Vale la pena mencionar que podemos recuperar las desigualdades de *decoupling* (2.14) para variables de Steinhaus partiendo del resultado anterior y haciendo inducción. Por lo tanto, relajar la hipótesis de K-convexidad y asumir sólo cotipo finito daría una nueva prueba del Corolario 2.1.6 para variables de Steinhaus y posiblemente arrojaría mejores cotas.

Comenzamos mostrando un resultado un poco más general que (2.18) que luego nos permitirá dar una aplicación interesante.

Lema 2.3.4. *Sean $P : \mathbb{C}^n \to X$ un polinomio tetraedral m-homogéneo y $b \in \mathbb{C}^n$. Para todo $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}_z \|M(bz, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p} \leq \sqrt{em}(\mathbb{E}_{\varepsilon,z} \|M(b\varepsilon z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p}.$$

Demostración. Análogamente a lo realizado durante la prueba de la Proposición 2.3.1, para $1 \leq j \leq n$ consideremos las variables aleatorias

$$z'_j = \frac{\sqrt{m-1} + i\varepsilon_j}{\sqrt{m}} z_j.$$

Un cálculo sencillo usando invariancia por rotaciones muestra que $z' \sim z$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z_j|z'] &= \mathbb{E}\Big[\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}+i} z'_j \chi_{\{\varepsilon_j=1\}} + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}-i} z'_j \chi_{\{\varepsilon_j=-1\}} \Big| z'\Big] \\
&= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}+i} z'_j \mathbb{P}(\varepsilon_j = 1|z') + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}-i} z'_j \mathbb{P}(\varepsilon_j = -1|z') \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{m-1}+i} + \frac{1}{\sqrt{m-1}-i}\Big)\sqrt{m} z'_j = \sqrt{\frac{m-1}{m}} z'_j.
\end{aligned}$$

Luego, también resulta

$$\mathbb{E}[i\varepsilon_j z_j|z'] = \mathbb{E}[\sqrt{m} z'_j - \sqrt{m-1} z_j|z'] = \sqrt{m} z'_j - \frac{m-1}{\sqrt{m}} z'_j = \frac{1}{\sqrt{m}} z'_j.$$

Procedemos como en la Proposición 2.3.1. Como P es tetraedral tenemos que

$$\mathbb{E}[M(bi\varepsilon z, z, \ldots, z)|z'] = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{m-1}{m}}^{m-1} M(bz', z', \ldots, z').$$

Usando la desigualdad de Jensen deducimos que

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}_z \|M(bz, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p} &= (\mathbb{E}_{z'} \|M(bz', z', \ldots, z')\|^p)^{1/p} \\
&\leq \Big(1 + \frac{1}{m-1}\Big)^{(m-1)/2} \sqrt{m}(\mathbb{E}_{\varepsilon,z} \|M(bi\varepsilon z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Finalmente, como M es multilineal podemos sacar i de la primer coordenada completando la demostración. $\square$

Demostración del Teorema 2.3.2. Aplicando el lema anterior para $b = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$ y el Corolario 1.2.4 obtenemos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}_z \|P(z)\|^p)^{1/p} &\leq \sqrt{em}(\mathbb{E}_{\varepsilon,z} \|M(\varepsilon z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p} \\
&= \sqrt{em}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,z} \Big\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j z_j M(e_j, z, \ldots, z)\Big\|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \frac{\pi}{2}\sqrt{em}\Big(\mathbb{E}_{z,z'} \Big\| \sum_{j=1}^n z'_j z_j M(e_j, z, \ldots, z)\Big\|^p\Big)^{1/p} \\
&= \frac{\pi}{2}\sqrt{em}(\mathbb{E}_{z,z'} \|M(z'z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Usando la invariancia por rotaciones podemos reemplazar $z'z$ por z' lo cual da (2.3.2).

Supongamos ahora que X es K-convexo y $p > 1$. Apelando nuevamente a la invariancia por rotaciones y al Corolario 1.2.4 nos queda

$$(\mathbb{E}_{z,z'}\|M(z', z, \ldots, z)\|^p)^{1/p} \leq \frac{\pi}{2}(\mathbb{E}_{\varepsilon,z}\|M(\varepsilon z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p}. \tag{2.19}$$

Tal como en la prueba del lema anterior, consideremos las variables de Steinhaus

$$z'_j = \frac{\sqrt{m-1} + i\varepsilon_j}{\sqrt{m}} z_j.$$

Dado $z \in \mathbb{T}$ fijo podemos interpretar a $P(\sqrt{m-1}z + i\varepsilon z)$ como un polinomio de Walsh en ε. Notemos que su proyección 1-homogénea se puede escribir como $mM(i\varepsilon z, \sqrt{m-1}z, \ldots, \sqrt{m-1}z)$. Como X es K-convexo, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}_{\varepsilon,z}\|mM(i\varepsilon z, \sqrt{m-1}z, \ldots, \sqrt{m-1}z)\|^p)^{1/p} &\leq K_p(X)(\mathbb{E}\|P(\sqrt{m-1}z + i\varepsilon z)\|^p)^{1/p} \\ &= \sqrt{m}^m K_p(X)(\mathbb{E}_{z'}\|P(z')\|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Luego, nos queda

$$\begin{aligned}\sqrt{m}(\mathbb{E}_{\varepsilon,z}\|M(\varepsilon z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{m-1}^{m-1}}(\mathbb{E}_{\varepsilon,z}\|mM(i\varepsilon z, \sqrt{m-1}z, \ldots, \sqrt{m-1}z)\|^p)^{1/p} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{(m-1)/2} K_p(X)(\mathbb{E}_{z'}\|P(z')\|^p)^{1/p} \\ &= \sqrt{e}K_p(X)(\mathbb{E}_z\|P(z)\|^p)^{1/p},\end{aligned} \tag{2.20}$$

El teorema se sigue juntando esto con (2.19). ☐

Como aplicación de los resultados previos tenemos el siguiente corolario (ver [42, 26] para desigualdades similares y sus aplicaciones).

Corolario 2.3.5. *Sea X un espacio K-convexo, $P : \mathbb{C}^n \to X$ un polinomio tetraedral m-homogéneo. Para todo $1 \leq p < \infty$ y todo $b \in \mathbb{C}^n$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|\langle \nabla P(z), bz\rangle\|^p)^{1/p} \leq \frac{\pi e}{2} K_p(X) m \|b\|_\infty (\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p}.$$

Demostración. Notemos que si $P(z) = \sum_A x_A z_A$ podemos reescribir

$$\langle \nabla P(z), bz\rangle = \sum_{j=1}^n b_j z_j \sum_{A/j\in A} x_A z_{A-\{j\}} = \sum_A \sum_{j\in A} b_j x_A z_A = mM(bz, z, \ldots, z).$$

Aplicando el Lema 2.3.4 y el principio de contracción (Teorema 1.2.3) nos queda

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\|\langle \nabla P(z), bz\rangle\|^p)^{1/p} &\leq \sqrt{e} m^{3/2} (\mathbb{E}_{\varepsilon,z}\|M(b\varepsilon z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p} \\ &\leq \frac{\pi}{2}\sqrt{e} m^{3/2} \|b\|_\infty (\mathbb{E}_{\varepsilon,z}\|M(\varepsilon z, z, \ldots, z)\|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Usando (2.20) del teorema previo, llegamos a la conclusión. ☐

Para ilustrar cómo podemos utilizar el último corolario, supongamos que para una pequeña perturbación $w \in \mathbb{T}^n$ con todas sus coordenadas cercanas a 1, queremos estimar $\mathbb{E}_z\|P(wz) - P(z)\|^p$. Para todo $1 \leq j \leq n$, podemos escribir $w_j = e^{i\theta_j}$ y considerar la función $f_z(t) = P(e^{i\theta t}z)$. Observemos que

$$f_z'(t) = \langle \nabla P(e^{i\theta t}z), i\theta e^{i\theta t}z\rangle.$$

Luego, bajo las hipótesis del Corolario 2.3.5, nos queda

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}_z\|P(wz) - P(z)\|^p)^{1/p} &= (\mathbb{E}_z\|f_z(1) - f_z(0)\|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}_z\|f_z'(t_0)\|^p)^{1/p}\\ &= (\mathbb{E}\|\langle \nabla P(z), i\theta z\rangle\|^p)^{1/p} \leq \frac{\pi e}{2}K_p(X)m\|\theta\|_\infty(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Por supuesto, esta estimación sólo es de utilidad si $\|\theta\|_\infty$ es menor que $1/m$. Sino, la desigualdad triangular junto con la invariancia por rotaciones ya asegura que

$$(\mathbb{E}_z\|P(wz) - P(z)\|^p)^{1/p} \leq 2(\mathbb{E}\|P(z)\|^p)^{1/p}.$$

Desafortunadamente, no conocemos estimaciones de *decoupling* de una variable con cotas independientes de m para otras variables aleatorias. A continuación, discutimos algunos resultados parciales para polinomios de Walsh.

Una desigualdad famosa de Pisier (ver [68, Lema 7.3]) afirma que para toda función $f : \{-1,1\}^n \to X$ y $1 \leq p < \infty$ se tiene que

$$(\mathbb{E}_\varepsilon\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}f\|^p)^{1/p} \leq 2e\log n(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\|\langle \nabla f(\varepsilon), \varepsilon'\rangle\|^p)^{1/p}. \tag{2.21}$$

Esto fue usado por Pisier para estudiar una versión no lineal de tipo para espacios métricos conocida como tipo de Enflo. Pisier probó que para espacios de Banach ambas nociones casi coinciden. Más precisamente, es fácil ver que tipo de Enflo p implica tipo p para espacios de Banach (ver por ejemplo [60]). Recíprocamente, en [68, Teorema 7.5] se prueba que los espacios de Banach con tipo $p > 1$ tienen tipo de Enflo r para todo $1 \leq r < p$. El término $\log n$ en (2.21) es la razón por la cual sólo se podía deducir tipo de Enflo r en vez de tipo de Enflo p. Por esta razón la pregunta sobre si el factor $\log n$ se podía quitar para espacios de Banach con tipo no trivial (espacios K-convexos) se transformó en un problema abierto de larga duración. Recientemente, en [45] se probó que esto es cierto incluso para espacios de cotipo finito y la coincidencia entre tipo y tipo de Enflo para espacios de Banach fue saldada.

En el caso de polinomios m-homogéneos probamos que para espacios X con cotipo $q < \infty$ y para $1 \leq p \leq q$ se tiene que

$$(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p} \leq Cm^{-1/q}(\mathbb{E}\|\langle \nabla P(\varepsilon), \varepsilon'\rangle\|^p)^{1/p}.$$

Notemos que como P es m-homogéneo tiene promedio $\mathbb{E}P = 0$. Luego, esta desigualdad es una variante de (2.21) para polinomios m-homogéneos. A su vez, un cálculo sencillo muestra que

$$\langle \nabla P(\varepsilon), \varepsilon'\rangle = mM(\varepsilon', \varepsilon, \ldots, \varepsilon). \tag{2.22}$$

Con nuestra notación, la desigualdad anterior puede reescribirse de la siguiente forma.

Proposición 2.3.6. *Sea X un espacio de Banach de cotipo finito q y sea $1 \leq p \leq q$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo polinomio m-homogéneo $P : \{1,1\}^n \to X$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p} \leq C m^{1-1/q} (\mathbb{E}\|M(\varepsilon', \varepsilon, \ldots, \varepsilon)\|^p)^{1/p}.$$

Desafortunadamente, esta desigualdad sólo brinda una afirmación análoga a (2.18) para espacios de cotipo 2 donde $m^{1-1/q}$ da $\sqrt{m}$. Cabe mencionar que para $X = L^q(\mu)$ y $p = q$ es fácil ver que el resultado anterior vale reemplazando $m^{1-1/q}$ por $\sqrt{m}$. Esto sugiere que $\sqrt{m}$ podría ser la cota adecuada sin importar el cotipo de X.

Una forma de probar la Proposición 2.3.6 es reemplazar la integral de 0 a ∞ en [45, Teorema 1.4] por una integral de 0 a $1/m$ y seguir cuidadosamente la prueba de este resultado así como la prueba de [45, Proposición 4.2]. Sin embargo, daremos una demostración más directa usando una identidad combinatoria de Rzeszut y Wojciechowski que es usada en las ecuaciones (3.13) a (3.16) de [73]. Esta identidad inspiró nuestro Lema 2.1.3 y puede ser vista como una versión de una variable del lema. Dados un espacio vectorial V, una familia $\{v_A \colon A \subseteq [n],\, |A| = m\} \subseteq V$ (donde $n, m \in \mathbb{N}$) y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k}} \sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}} \sum_{\substack{A_2\subseteq B^c\\|A_2|=m-1}} v_{A_1\cup A_2} &= \sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k}} \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=m\\|A\cap B|=1}} v_A = \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=m}} \sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k\\|A\cap B|=1}} v_A \\ &= \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=m}} \big|\{B \subseteq [n] : \ |B| = k, \ |A \cap B| = 1\}\big| v_A = m\binom{n-m}{k-1} \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=m}} v_A.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Notemos que si $n = km$, entonces $\binom{n-m}{k-1} = \binom{(k-1)m}{k-1}$. Tal como hicimos en la Sección 2.1, aplicando la fórmula de Stirling obtenemos

$$\frac{\binom{n}{k}}{m\binom{n-m}{k-1}} \leq 4.$$

La idea es que en este caso podemos comparar

$$\sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=m}} v_A \quad \text{vs.} \quad \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k}} \sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}} \sum_{\substack{A_2\subseteq B^c\\|A_2|=m-1}} v_{A_1\cup A_2}.$$

Mientras que el lado izquierdo es nuestro objeto de estudio, el derecho es un promedio (sobre todos los subconjuntos B) de una expresión con una estructura desacoplada. Esto se debe a que fijado B, los índices A se dividen en A_1 y A_2 de manera tal que A_1 siempre contiene 1 elemento, A_2 siempre contiene $m-1$ elementos y estos nunca se mezclan pues $A_1 \subseteq B$ y $A_2 \subseteq B^c$.

Demostración de la Proposición 2.3.6. Sea $\{x_A\colon A \subseteq [n], |A| = m\}$ una familia de vectores en X. Tomando n más grande de ser necesario, podemos suponer que $n = km$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y así tener que

$$\frac{1}{m\binom{n-m}{k-1}} \leq \frac{4}{\binom{n}{k}}.$$

Usando (2.23) para $v_A = x_A\varepsilon_A$ nos queda

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{|A|=m} x_A\varepsilon_A\Big\|^p\Big)^{1/p} &= \frac{1}{m\binom{n-m}{k-1}}\Big(\mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k}}\sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}}\sum_{\substack{A_2\subseteq B^c\\|A_2|=m-1}} x_{A_1\cup A_2}\varepsilon_{A_1\cup A_2}\Big\|^p\Big)^{1/p}\\ &\leq \frac{4}{\binom{n}{k}}\sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k}}\Big(\mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}}\varepsilon_{A_1}\sum_{\substack{A_2\subseteq B^c\\|A_2|=m-1}} x_{A_1\cup A_2}\varepsilon_{A_2}\Big\|^p\Big)^{1/p}. \quad (2.24)\end{aligned}$$

Ahora bien, como $A_1 \subseteq B$ y $A_2 \subseteq B^c$, estos índices no se solapan. Luego, para B fijo resulta que

$$\mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}}\varepsilon_{A_1}\sum_{\substack{A_2\subseteq B^c\\|A_2|=m-1}} x_{A_1\cup A_2}\varepsilon_{A_2}\Big\|^p = \mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}}\varepsilon'_{A_1}\sum_{\substack{A_2\subseteq B^c\\|A_2|=m-1}} x_{A_1\cup A_2}\varepsilon_{A_2}\Big\|^p. \quad (2.25)$$

Denotemos $\partial_j P = \frac{\partial P}{\partial z_j}$ y observemos que

$$\partial_j P(\varepsilon) = \sum_{\substack{A\subseteq[n]-\{j\}\\|A|=m-1}} x_{\{j\}\cup A}\varepsilon_A.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\varepsilon_i/i\in B}\Big[\sum_{j\in B}\varepsilon'_j\partial_j P(\varepsilon)\Big] &= \mathbb{E}_{\varepsilon_i/i\in B}\Big[\sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}}\varepsilon'_{A_1}\sum_{\substack{A_2\subseteq A_1^c\\|A_2|=m-1}} x_{A_1\cup A_2}\varepsilon_{A_2}\Big]\\ &= \sum_{\substack{A_1\subseteq B\\|A_1|=1}}\varepsilon'_{A_1}\sum_{\substack{A_2\subseteq B^c\\|A_2|=m-1}} x_{A_1\cup A_2}\varepsilon_{A_2}. \quad (2.26)\end{aligned}$$

Juntando (2.24), (2.25), (2.26) y usando la desigualdad de Jensen, nos queda

$$\Big(\mathbb{E}_\varepsilon\Big\|\sum_{|A|=m} x_A\varepsilon_A\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq \frac{4}{\binom{n}{k}}\sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k}}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\sum_{j\in B}\varepsilon'_j\partial_j P(\varepsilon)\Big\|^p\Big)^{1/p}. \quad (2.27)$$

Sabemos que $n = km$ y recordemos el conjunto $\Pi_{k,m}$ definido en (2.8) como la familia de todas las particiones ordenadas $\pi = (B_1, \dots, B_m)$ de $[n]$ en m conjuntos B_l de k elementos. Por un argumento de simetría observemos que

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{\substack{B\subseteq[n]\\|B|=k}}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\sum_{j\in B}\varepsilon'_j\partial_j P(\varepsilon)\Big\|^p\Big)^{1/p} = \frac{1}{m|\Pi_{k,m}|}\sum_{\pi\in\Pi_{k,m}}\sum_{l=1}^{m}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\sum_{j\in B_l}\varepsilon'_j\partial_j P(\varepsilon)\Big\|^p\Big)^{1/p}. \quad (2.28)$$

Usando las desigualdades de Hölder, Minkowski y cotipo q obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{m}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\sum_{j\in B_l}\varepsilon_j'\partial_j P(\varepsilon)\Big\|^p\Big)^{1/p} &\leq m^{1/q'}\Big(\sum_{l=1}^{m}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\sum_{j\in B_l}\varepsilon_j'\partial_j P(\varepsilon)\Big\|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}\\ &\leq m^{1/q'}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big(\sum_{l=1}^{m}\Big\|\sum_{j\in B_l}\varepsilon_j'\partial_j P(\varepsilon)\Big\|^q\Big)^{p/q}\Big)^{1/p}\\ &\leq m^{1/q'}C_{q,p}(X)\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon',\delta}\Big\|\sum_{l=1}^{m}\delta_l\sum_{j\in B_l}\varepsilon_j'\partial_j P(\varepsilon)\Big\|^p\Big)^{1/p}\\ &= m^{1/q'}C_{q,p}(X)\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\langle\nabla P(\varepsilon),\varepsilon'\rangle\Big\|^p\Big)^{1/p},\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $\delta_l\varepsilon_j' \sim \varepsilon_j'$ y $C_{q,p}(X)$ denota la mejor constantte en la desigualdad de cotipo q con una norma p en el lado derecho. Combinando esto con (2.27) y (2.28) deducimos que

$$\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon}\Big\|\sum_{|A|=m}x_A\varepsilon_A\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq 4C_{q,p}(X)m^{-1/q}\Big(\mathbb{E}_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big\|\langle\nabla P(\varepsilon),\varepsilon'\rangle\Big\|^p\Big)^{1/p}.$$

El resultado se sigue de (2.22). □

2.4 Condiciones geométricas para total independencia

En esta sección brindamos condiciones geométricas sobre el espacio de Banach que permiten comparar nuestros objetos de interés con sumas de variables aleatorias independientes.

Los dos resultados siguientes fueron probados en [15, Teorema 4.1] (aunque son enunciados para sucesiones ortonormales específicas) y son esencialmente una consecuencia de [81, Teorema 12.2]. Como serán presentados en [77] no deberían ser considerados como una contribución original de esta tesis.

Proposición 2.4.1. *Sea X un espacio de Banach de tipo 2. Existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión ortonormal de variables aleatorias no necesariamente independientes $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\mu)$ y toda elección de finitos $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i\Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Para probar este hecho necesitamos el concepto de operador p-sumante. Para $1 \leq p \leq \infty$ un operador $T : X \to Y$ se dice *p-sumante* si existe una constante $C \geq 0$ tal que para toda elección de vectores $x_1, \dots x_n \in X$ se tiene que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|_Y^p \Big)^{1/p} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p \Big)^{1/p}.$$

Llamamos $\pi_p(T)$ a la constante C más chica posible. Los operadores p-sumantes forman un ideal de operadores por lo que dados operadores $R : W \to X$, $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ se tiene que

$$\pi_p(STR) \leq \|S\| \pi_p(T) \|R\|. \tag{2.29}$$

Para una exposición detallada, sugerimos consultar [33, Capítulo 2] y [81, Capítulo 2].

Demostración de la Proposición 2.4.1. Sea $T : \ell_2^n \to X$ el operador dado por $T(e_i) = x_i$. Notemos que combinando los Lemas 2.2.1 y 2.2.2 obtenemos

$$\Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \Big\|^2 \Big)^{1/2} \leq C \Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i \Big\|^2 \Big)^{1/2}. \tag{2.30}$$

En [81, Teorema 12.2] se prueba que si X tiene tipo 2, entonces

$$\Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i \Big\|^2 \Big)^{1/2} \leq \widetilde{C} \pi_2(T^*). \tag{2.31}$$

Ahora bien, para todo $x^* \in X^*$ observemos que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x^*(x_i) \Big\|_{L^2(\mu)} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^2 \Big)^{1/2} = \|(x^*(x_i))_{i=1}^n\|_{\ell_2^n} = \|T^*(x^*)\|_{\ell_2^n}.$$

Luego, dada una colección finita de vectores $x_k^* \in X^*$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_k \|T^*(x_k^*)\|_{\ell_2^m}^2 &= \sum_k \Big\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_k^*(x_i) \Big\|_{L^2(\mu)}^2 = \mathbb{E} \Big[\sum_k \Big| x_k^* \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \Big) \Big|^2 \Big] \\ &\leq \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \Big\|^2 \sup_{x^{**} \in B_{X^{**}}} \sum_k |x^{**}(x_k^*)|^2. \end{aligned}$$

Por la definición de norma 2-sumante resulta

$$\pi_2(T^*) \leq \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \Big\|^2.$$

Juntando esto con (2.30) y (2.31) concluye el argumento. $\square$

Análogamente, obtenemos el siguiente resultado dual para cotipo.

Proposición 2.4.2. *Sea X un espacio de Banach de cotipo 2. Existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión ortonormal de variables aleatorias no necesariamente independientes $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\mu)$ y toda elección de finitos $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Demostración. Como antes, sea $T : \ell_2^n \to X$ el operador dado por $T(e_i) = x_i$. Como X tiene cotipo 2, usando nuevamente [81, Teorema 12.2] y la Proposición 2.2.3 (o más precisamente, [33, Teorema 12.27]), deducimos

$$\pi_2(T) \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq \widetilde{C}\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Definamos el operador $S : X^* \to L^2(\mu)$ dado por

$$S(x^*) = \sum_{i=1}^n \xi_i x^*(x_i).$$

Luego, por [47, Teorema 2] (ver también [66, Proposición 1.1] y [33, Corolario 5.21]) tenemos que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq \pi_2(S^*).$$

Por lo tanto, basta ver que $\pi_2(S^*)$ se puede acotar por $\pi_2(T)$. Notemos que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L^2(\mu) \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, "q"'] & X^{**} \\ \ell_2^n \arrow[r, "T"] & X \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

donde $q : L^2(\mu) \to \ell_2^n$ es la proyección dada por $q(f) = (\langle f, \xi_i\rangle)_{i=1}^n$ para todo $f \in L^2(\mu)$ e $i : X \hookrightarrow X^{**}$ es la inclusión natural. Luego, de (2.29) obtenemos

$$\pi_2(S^*) = \pi_2(iTq) \leq \|i\|\pi_2(T)\|q\|.$$

Notando que $\|i\| = \|q\| = 1$ llegamos al resultado buscado. $\square$

Observemos que los monomios de un polinomio tetraedral evaluados en variables aleatorias simétricas forman una sucesión ortogonal en $L^2(\mu)$. Por lo tanto, la condición de ortonormalidad de las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.2 se puede conseguir normalizando. Más precisamente, tomando la sucesión ortonormal $\xi_A/\|\xi_A\|_2$ y notando que

$$\|\xi_A\|_2 = \Big(\mathbb{E}\Big|\prod_{i\in A}\xi_i\Big|^2\Big)^{1/2} = \|\xi_0\|_2^{|A|},$$

deducimos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.3. *Sea X un espacio de Banach de tipo 2. Existe una constante $C > 0$ tal que para toda variable aleatoria simétrica no trivial $\xi_0 \in L^2(\mu)$ y toda elección de vectores $\{x_A\}_{|A|\leq m}$ se tiene que*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} \varepsilon_{i_A} \|\xi_0\|_2^{|A|} x_A \Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} x_A \xi_A \Big\|^2\Big)^{1/2}, \tag{2.32}$$

donde ε_{i_A} son variables de Bernoulli independientes (no confundir con los monomios de Walsh ε_A).

Análogamente, si X tiene cotipo 2 existe una constante $C > 0$ tal que para toda variable aleatoria simétrica no trivial $\xi_0 \in L^2(\mu)$ y toda elección de vectores $\{x_A\}_{|A|\leq m}$ se tiene que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} x_A \xi_A \Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} \varepsilon_{i_A} \|\xi_0\|_2^{|A|} x_A \Big\|^2\Big)^{1/2}. \tag{2.33}$$

Notemos que aplicando el principio de contracción (Teorema 1.2.3) en (2.32) y (2.33) obtenemos

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} \varepsilon_{i_A} x_A \Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C \max\{1, \|\xi_0\|_2^{-m}\}\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} x_A \xi_A \Big\|^2\Big)^{1/2},$$

y

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} x_A \xi_A \Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C \max\{1, \|\xi_0\|_2^{m}\}\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} \varepsilon_{i_A} x_A \Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Si bien el caso no tetraedral es más complejo, para variables de Steinhaus podemos aplicar las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.2 directamente. En efecto, los monomios de Steinhaus $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \subseteq L^2(\mathbb{T}^n)$ forman una sucesión ortonormal dado que tienen módulo 1. Como mencionaremos en la Sección 5.2, lo mismo sucede para cualquier sucesión de caracteres en el contexto de análisis de Fourier en grupos.

A continuación, presentamos resultados para espacios con la propiedad de promedios gaussianos introducida en [18] para reemplazar las hipótesis de tipo/cotipo 2 que son condiciones geométricas bastante restrictivas. Estos resultados siguen la línea de [66, Teorema 1.1] (ver también [14, Lema 2.2]).

Un espacio de Banach X tiene la *propiedad de promedios gaussianos* (GAP por sus siglas en inglés) si existe una constante $C \geq 1$ tal que para toda elección finita $x_1, \ldots, x_n \in X$, el operador $T : \ell_2^n \to X^*$ dado por $T(e_i) = x_i$ satisface

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i \Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\pi_1(T^*). \tag{2.34}$$

Describamos brevemente cómo se relaciona GAP con otras propiedades geométricas. En primer lugar, por [18, Teorema 1.4] los espacios de Banach con tipo 2 y los retículos de Banach con cotipo finito tienen GAP. Además, los espacios con GAP tienen cotipo finito (ver [18, Teorema 1.3]). Finalmente, mencionamos que GAP está muy relacionado con la propiedad de Gordon-Lewis y el concepto de estructura incondicional local.

Nuestro objetivo es mostrar una versión del Corolario 2.4.3 suponiendo GAP en vez de tipo 2. Para ello, notemos que (2.34) es similar a (2.31) que era el paso clave en la prueba de la Proposición 2.4.1. Sin embargo, como (2.34) involucra la norma 1-sumante en vez de la 2-sumante de (2.31) necesitamos algún tipo de desigualdad de Khintchine. Afortunadamente, contamos con el Teorema 1.3.3.

Proposición 2.4.4. *Si un espacio de Banach X tiene GAP, entonces existe una constante $C \geq 1$ tal que para toda elección de vectores $\{x_\alpha\}_{|\alpha|\leq m}$ se tiene que*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} \varepsilon_{i_\alpha} x_\alpha\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\mathbb{E}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} \sqrt{2}^{|\alpha|} x_\alpha z^\alpha\Big\|, \tag{2.35}$$

donde ε_{i_α} son variables de Bernoulli independientes.

Más aún, para toda elección de vectores $\{x_A\}_{|A|\leq m}$ y toda variable aleatoria simétrica no trivial ξ_0 se tiene que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{|A|\leq m} \varepsilon_{i_A} x_A\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C^m\mathbb{E}\Big\|\sum_{|A|\leq m} x_A \xi_A\Big\|.$$

Demostración. La prueba es similar a la de la Proposición 2.4.1. Como antes, sea $T : \ell_2(\Lambda) \to X$ el operador dado por $T(e_\alpha) = x_\alpha$ donde $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \ |\alpha| \leq m\}$. Notemos que combinando los Lemas 2.2.1 y 2.2.2 nos queda

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} \varepsilon_{i_\alpha} x_\alpha\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} \gamma_{i_\alpha} x_\alpha\Big\|^2\Big)^{1/2}. \tag{2.36}$$

Luego, por la desigualdad de GAP tenemos que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} \gamma_{i_\alpha} x_\alpha\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq \widetilde{C}\pi_1(T^*). \tag{2.37}$$

Ahora bien, para todo $x^* \in X^*$ observemos que

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{|\alpha|\leq m} x^*(x_\alpha) z^\alpha\Big|^2\Big)^{1/2} &= \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} |x^*(x_\alpha)|^2\Big)^{1/2} = \|(x^*(x_\alpha))_{|\alpha|\leq m}\|_{\ell_2(\Lambda)}\\ &= \|T^*(x^*)\|_{\ell_2(\Lambda)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, dada una colección finita de vectores $x_i^* \in X^*$ resulta que

$$\sum_{i=1}^N \|T^*(x_i^*)\|_{\ell_2(\Lambda)} = \sum_{i=1}^N \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{|\alpha|\leq m} x_i^*(x_\alpha) z^\alpha\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

Aplicando el Teorema 1.3.3 tenemos que

$$\sum_{i=1}^N \|T^*(x_i^*)\|_{\ell_2(\Lambda)} \leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big| \sum_{|\alpha|\leq m} \sqrt{2}^{|\alpha|} x_i^*(x_\alpha) z^\alpha \Big| = \mathbb{E} \sum_{i=1}^N \Big| \sum_{|\alpha|\leq m} \sqrt{2}^{|\alpha|} x_i^*(x_\alpha) z^\alpha \Big|$$

$$\leq \mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \sqrt{2}^{|\alpha|} x_\alpha z^\alpha \Big\| \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \sum_{i=1}^N |x^{**}(x_i^*)|.$$

Por la definición de norma 1-sumante deducimos

$$\pi_1(T^*) \leq \mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \sqrt{2}^{|\alpha|} x_\alpha z^\alpha \Big\|.$$

Juntando esto con (2.36) y (2.37) obtenemos la primera afirmación.

Finalmente, usando el Lema 1.3.5 en (2.35) nos queda

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \varepsilon_{i_\alpha} x_\alpha \Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\sqrt{2}^m \mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha \Big\|.$$

Combinar esto con el Lema 2.2.2 prueba la segunda afirmación. □

Concluimos esta sección con una versión dual del resultado anterior. Denotemos $\cot(X) = \inf\{q : X \text{ tiene cotipo } q\}$.

Proposición 2.4.5. *Sea X un espacio de Banach de cotipo finito tal que X^* tiene GAP y fijemos $q > \cot(X)$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para toda elección de vectores $\{x_\alpha\}_{|\alpha|\leq m}$ se tiene que*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha \Big\|^q\Big)^{1/q} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \varepsilon_{i_\alpha} \sqrt{\frac{q}{2}}^{|\alpha|} x_\alpha \Big\|^2\Big)^{1/2}. \tag{2.38}$$

Además, sea ξ_0 una variable aleatoria simétrica con norma s finita para algún $s > \cot(X)$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p < s$ y toda elección de vectores $\{x_A\}_{|A|\leq m}$ se tiene que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} x_A \xi_A \Big\|^p\Big)^{1/p} \leq C^m \Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|A|\leq m} \varepsilon_{i_A} x_A \Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Para probar esto, necesitamos el concepto de operador p-factorable. Dado $1 \leq p \leq \infty$, un operador $T : X \to Y$ se dice *p-factorable* si existe un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y operadores $A : L^p(\mu) \to Y^{**}$ y $B : X \to L^p(\mu)$ tales que $iT = AB$ donde $i : Y \hookrightarrow Y^{**}$ es la inclusión natural. En otras palabras, iT se factoriza a través de $L^p(\mu)$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "B"'] & Y \arrow[r, "i"] & Y^{**} \\ & L^p(\mu) \arrow[ur, "A"'] & \end{tikzcd}.$$

Notamos

$$\gamma_p(T) = \inf \|A\|\|B\|,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles factorizaciones. Los operadores p-factorables forman un ideal de operadores, por lo cual, para operadores $R : W \to X$, $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ se tiene que

$$\gamma_p(STR) \leq \|S\|\gamma_p(T)\|R\|. \tag{2.39}$$

Para una exposición detallada de este tema recomendamos [33, Capítulo 7 y 9].

En [18, Teorema 1.7] se muestra que un espacio de Banach X tiene cotipo finito y su dual tiene GAP si y sólo si X es K-convexo y existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $T : \ell_2^n \to X$ dado por $T(e_i) = x_i$ se tiene que

$$C^{-1}\gamma_\infty(T) \leq \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\gamma_i\Big\|^2\right)^{1/2} \leq C\gamma_\infty(T). \tag{2.40}$$

Demostración de la Proposición 2.4.5. Análogamente a lo realizado durante la prueba de la Proposición 2.4.2, definamos el operador $S : X^* \to L^q(\mathbb{T}^n)$ por

$$S(x^*) = \sum_{|\alpha|\leq m} x^*(x_\alpha)z^\alpha.$$

Notemos que por [47, Teorema 2] (ver también [66, Proposición 1.1] y [33, Corolario 5.21]) tenemos que

$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha\Big\|^q\right)^{1/q} \leq \pi_q(S^*). \tag{2.41}$$

De hecho, la imagen de S^* está incluida en X y es fácil ver que la norma π_q se mantiene igual al restringir el codominio a X. Por [58, Proposición 1.4] (ver también [33, Teorema 11.14]) deducimos que existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $A : L^\infty(\mu) \to X^{**}$ tenemos que

$$\pi_q(A) \leq C\|A\|.$$

Aquí estamos usando que X y X^{**} comparten el mismo cotipo por el principio de reflexividad local (ver [1, Teorema 11.2.4]). Esto implica que $\pi_q(S^*) \leq \gamma_\infty(S^*)$ dado que, para toda factorización $S^* = AB$ a través de algún $L^\infty(\mu)$, usando (2.29) nos queda

$$\pi_q(S^*) = \pi_q(AB) \leq \pi_q(A)\|B\| \leq C\|A\|\|B\|.$$

Ahora bien, sean $R : L^{q^*}(\mathbb{T}^n) \to \ell_2(\Lambda)$ y $T : \ell_2(\Lambda) \to X$ operadores dados por $R(f) = (\sqrt{2/q}^{|\alpha|}\widehat{f}(\alpha))_\alpha$ y $T(e_\alpha) = \sqrt{q/2}^{|\alpha|}x_\alpha$ respectivamente. Se satisface el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L^{q^*}(\mu) \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, "R"'] & X^{**} \\
\ell_2(\Lambda) \arrow[r, "T"] & X \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Luego, por (2.39) obtenemos que

$$\pi_q(S^*) \leq \gamma_\infty(S^*) = \gamma_\infty(iTR) \leq \gamma_\infty(T)\|R\|. \tag{2.42}$$

Notemos que aplicando (2.40) y la Proposición 2.2.3 (o más precisamente, [33, Teorema 12.27]) resulta que

$$\gamma_\infty(T) \leq \widetilde{C}\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \gamma_{i_\alpha} \sqrt{\frac{q}{2}}^{|\alpha|} x_\alpha \Big\|^2\Big)^{1/2} \leq \widetilde{C}\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \varepsilon_{i_\alpha} \sqrt{\frac{q}{2}}^{|\alpha|} x_\alpha \Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Basta ver que R es una contracción dado que, junto con (2.41), (2.42) y la desigualdad anterior, esto prueba la primera afirmación. En efecto, para $f \in L^{q^*}(\mathbb{T}^n)$ nos queda

$$\begin{aligned}
\|R(f)\|^2_{\ell_2(\Lambda)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \Big(\frac{2}{q}\Big)^{|\alpha|} |\widehat{f}(\alpha)|^2 = \mathbb{E}\Big[f(z) \sum_{|\alpha|\leq m} \Big(\frac{2}{q}\Big)^{|\alpha|} \overline{\widehat{f}(\alpha)\overline{z}^\alpha}\Big] \\
&\leq \|f\|_{q^*} \Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \Big(\frac{2}{q}\Big)^{|\alpha|} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \Big\|_q.
\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 1.3.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
\|R(f)\|^2_{\ell_2(\Lambda)} &\leq \|f\|_{q^*} \Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \sqrt{\frac{2}{q}}^{|\alpha|} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \Big\|_2 \\
&= \|f\|_{q^*} \|R(f)\|_{\ell_2(\Lambda)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, R es una contracción y se satisface la primera afirmación. En particular, usando el principio de contracción en (2.38) resulta

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha \Big\|^q\Big)^{1/q} \leq C \sqrt{\frac{q}{2}}^m \Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} \varepsilon_{i_\alpha} x_\alpha \Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Aplicando la Proposición 2.2.3 y el Lema 2.2.1 obtenemos la segunda afirmación. □

Notemos que para espacios X tales que X y X^* tienen GAP (ver [18, Teorema 1.7] para una caracterización) podemos unir las Proposiciones 2.4.4 y 2.4.5 para obtener cotas por arriba y por abajo comparando la norma de un polinomio de Steinhaus con la norma de una suma aleatoria (independiente) de sus coeficientes. En particular, esto vale para retículos de Banach K-convexos dado que tanto estos como sus duales son retículos de cotipo finito y por lo tano tienen GAP.

Capítulo 3

Tipo y cotipo polinomiales

En este capítulo presentamos una reformulación polinomial de las nociones de tipo y cotipo junto con algunas aplicaciones. Más precisamente, probamos que cotipo es equivalente a la noción de cotipo homogéneo hipercontractivo definida en [14] y que una caracterización análoga vale para tipo. Si bien se pueden obtener fácilmente reformulaciones multilineales de tipo y cotipo, usualmente las versiones polinomiales, por el contrario, arrojan malas constantes (ver los comentarios que siguen al Lema 3.2.2). En la Sección 3.2 usamos la teoría de *decoupling* del capítulo anterior para probar desigualdades de tipo y cotipo para polinomios tetraedrales homogéneos con buenas constantes. También se brindan desigualdades análogas para polinomios de Walsh. Finalmente, en la Sección 3.3 pasamos del caso tetraedral al general.

3.1 Tipo y cotipo polinomiales

Estamos interesados en una versión polinomial de tipo y cotipo. Estudiaremos el caso de cotipo en detalle que fue abordado en [14]. En cuanto a tipo, los resultados serán enunciados generalmente sin prueba dado que suelen ser análogas al caso de cotipo.

Recordemos que un espacio de Banach tiene cotipo $2 \leq q < \infty$ si existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \Big)^{1/q} \leq C \Big(\int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \Big\|^q dz \Big)^{1/q}.$$

Si intentamos deliberadamente interpretar la desigualdad de cotipo en términos de polinomios, podemos ver que el lado derecho de la desigualdad es la norma en $L^q(\mathbb{T}^n, X)$ del polinomio 1-homogéneo dado por $P(z) = \sum x_i z_i$ y el lado izquierdo es la norma en $\ell_q(X)$ de sus coeficientes. Luego, podríamos decir que un espacio de Banach X satisface una versión polinomial de cotipo si existe una constante $C \geq 1$

tal que para todo polinomio $P(z) = \sum_\alpha x_\alpha z^\alpha$ se tiene que

$$\Big(\sum_\alpha \|x_\alpha\|^q\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|^q dz\Big)^{1/q}. \tag{3.1}$$

De hecho, una desigualdad más fuerte vale para los espacios con cotipo de Fourier. En [14, Proposición 2.4] se probó que un espacio de Banach tiene cotipo de Fourier q si y sólo si existe $C \geq 1$ tal que para todo polinomio $P(z) = \sum_\alpha x_\alpha z^\alpha$ se tiene que

$$\Big(\sum_\alpha \|x_\alpha\|^q\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|^{q'} dz\Big)^{1/q'}.$$

Sin embargo, como mencionamos en la Sección 1.2, el cotipo de Fourier es una propiedad geométrica muy restrictiva. Por ejemplo el espacio $L^1(\mu)$ tiene cotipo 2 (el mejor posible) mientras que no tiene ningún cotipo de Fourier no trivial. Por ello, tomamos un enfoque distinto, a saber, buscar la mejor desigualdad polinomial que podemos obtener para espacios con cotipo (usual).

Ejemplo 3.1.1. Analicemos el caso de $L^1(\mu)$ en mayor detalle. Notemos que para un polinomio $P(z) = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha$ de grado m con coeficientes $f_\alpha \in L^1(\mu)$, aplicando la desigualdad integral de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned}\Big(\sum_\alpha \|f_\alpha\|^2_{L^1(\mu)}\Big)^{1/2} &= \Big(\sum_\alpha \Big(\int_\Omega |f_\alpha(\omega)| d\mu\Big)^2\Big)^{1/2} \leq \int_\Omega \Big(\sum_\alpha |f_\alpha(\omega)|^2\Big)^{1/2} d\mu \\ &= \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{T}^n} |\sum_\alpha f_\alpha(\omega) z^\alpha|^2 dz\Big)^{1/2} d\mu. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Usando la Proposición 1.3.4 para $X = \mathbb{C}$ en la integral en $\mathbb{T}^n$, para todo $\omega \in \Omega$ nos queda

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^n} |\sum_\alpha f_\alpha(\omega) z^\alpha|^2 dz\Big)^{1/2} \leq \sqrt{2}^m \int_{\mathbb{T}^n} |\sum_\alpha f_\alpha(\omega) z^\alpha| dz.$$

Juntando esto con (3.2) y utilizando la desigualdad de Hölder resulta

$$\begin{aligned}\Big(\sum_\alpha \|f_\alpha\|^2\Big)^{1/2} &\leq \sqrt{2}^m \int_\Omega \int_{\mathbb{T}^n} |\sum_\alpha f_\alpha(\omega) z^\alpha| dz d\mu = \sqrt{2}^m \int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|_{L^1(\mu)} dz \\ &\leq \sqrt{2}^m \Big(\int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|^2_{L^1(\mu)} dz\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Luego, obtuvimos (3.1) pero con una constante dependiendo exponencialmente del grado m del polinomio. Un ejemplo sencillo muestra que esta dependencia es necesaria.

Supongamos que existe una constante $C_m \geq 1$ tal que para todo polinomio $P : \mathbb{C}^n \to L^1(\mathbb{T}^n)$ de grado m dado por $P(z) = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha$ se tiene que

$$\Big(\sum_\alpha \|f_\alpha\|^2\Big)^{1/2} \leq C_m\Big(\int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|^2 dz\Big)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Siguiendo las ideas de [29], para $n \in \mathbb{N}$ definamos $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ por

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Sea $P : \mathbb{C}^n \to L^1(\mathbb{T}^n)$ el polinomio m-homogéneo dado por

$$\begin{array}{rccc} P(z): & \mathbb{T}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \mapsto & Q(zw)^m. \end{array}$$

Notemos que

$$P(z)(w) = \frac{1}{\sqrt{n}^m}(w_1 z_1 + \ldots + w_n z_n)^m = \frac{1}{\sqrt{n}^m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = m}} \binom{m}{\alpha} w^\alpha z^\alpha.$$

En otras palabras, $\frac{1}{\sqrt{n}^m}\binom{m}{\alpha} w^\alpha$ son los coeficientes de P. Luego, nos queda

$$\sum_\alpha \Big\| \frac{1}{\sqrt{n}^m} \binom{m}{\alpha} w^\alpha \Big\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}^2 = \sum_\alpha \frac{1}{n^m} \binom{m}{\alpha}^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |Q(w)|^{2m} dw.$$

Por otro lado, usando la invariancia por rotaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}^2 dz &= \int_{\mathbb{T}^n} \Big(\int_{\mathbb{T}^n} |Q(zw)|^m dw \Big)^2 dz \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}^n} |Q(w)|^m dw \Big)^2. \end{aligned}$$

Juntando esto con (3.3) resulta

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^n} |Q(w)|^{2m} dw \Big)^{1/2} \leq C_m \int_{\mathbb{T}^n} |Q(w)|^m dw.$$

Ahora bien, haciendo tender n a infinito, por el teorema del límite central llegamos a que

$$(\mathbb{E}|\gamma|^{2m})^{1/2} \leq C_m \mathbb{E}|\gamma|^m,$$

donde γ es una variable gaussiana. Como mencionamos en la Observación 2.1.7, $2|\gamma|^2$ tiene una distribución chi-cuadrado con dos grados de libretad y un argumento sencillo muestra que

$$\mathbb{E}|\gamma|^q = \Gamma\Big(\frac{q}{2} + 1\Big).$$

Usando la fórmula de Stirling tenemos que

$$C_m \geq \frac{\sqrt{\Gamma(m+1)}}{\Gamma\Big(\frac{m}{2} + 1\Big)} \simeq m^{-1/4} \sqrt{2}^m.$$

En conclusión, una dependencia exponencial en el grado m del polinomio es de esperar cuando buscamos una desigualdad polinomial como (3.1) sin asumir que el espacio tiene cotipo de Fourier.

Teniendo esto en cuenta, en [14] se introdujo la noción de cotipo homogéneo hipercontractivo, como una extensión del cotipo. Un espacio de Banach X tiene *cotipo homogéneo hipercontractivo* q si existe $C \geq 1$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda familia finita $(x_\alpha)_{|\alpha|=m}$ se tiene que

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|x_\alpha\|^q \Big)^{1/q} \leq C^m \Big(\int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{|\alpha|=m} x_\alpha z^\alpha \Big\|^2 dz \Big)^{1/2}. \tag{3.4}$$

Diferentes condiciones fueron presentadas en [14] asegurando que un espacio de Banach X tenga la propiedad. Como consecuencia del Teorema 3.1.2 (y la Observación 3.1.4) a continuación vemos que, de hecho, todo espacio de Banach con cotipo q tiene cotipo homogéneo hipercontractivo q.

Teorema 3.1.2. *Para un espacio de Banach X y $2 \leq q < \infty$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X tiene cotipo q;

(b) existe $C \geq 1$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda familia finita $(x_\alpha)_{|\alpha|\leq m}$ se tiene que

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|x_\alpha\|^q \Big)^{1/q} \leq C^m \Big(\int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha \Big\|^q dz \Big)^{1/q}; \tag{3.5}$$

(c) existe $C \geq 1$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda familia finita $\{x_A \colon |A| \leq m\} \subset X$ se tiene que

$$\Big(\sum_{A} \|x_A\|^q \Big)^{1/q} \leq C^m \Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_{A} x_A \varepsilon_A \Big\|^q \Big)^{1/q}. \tag{3.6}$$

La prueba de este teorema es bastante técnica y será llevada a cabo en las próximas dos secciones. Si bien no se hizo en [14], es natural considerar la versión polinomial análoga para tipo. Esto también resulta equivalente al concepto usual de tipo como muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. *Para un espacio de Banach X y $1 \leq p \leq 2$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X tiene tipo p;

(b) existe $C \geq 1$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda familia finita $(x_\alpha)_{|\alpha|\leq m}$ se tiene que

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha \Big\|^p dz \Big)^{1/p} \leq C^m \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|x_\alpha\|^p \Big)^{1/p}; \tag{3.7}$$

(c) existe $C \geq 1$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda familia finita $\{x_A \colon |A| \leq m\} \subset X$ se tiene que

$$\Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_{A} x_A \varepsilon_A \Big\|^p \Big)^{1/p} \leq C^m \Big(\sum_{A} \|x_A\|^p \Big)^{1/p}. \tag{3.8}$$

La prueba sigue la misma línea que la del Teorema 3.1.2, por lo que sólo se esbozará en la Sección 3.3.

Observación 3.1.4. Usando la Proposición 1.3.4, la norma L^2 en (3.4), la norma L^q en (3.5) y la norma L^p en (3.7) se pueden reemplazar por cualquier otra norma L^r (ajustando las constantes, pero siempre con crecimiento exponencial en m). Análogamente, los exponentes de los momentos en (3.6) y (3.8) también se pueden cambiar aplicando el Teorema 1.3.7.

Antes de abordar la prueba del Teorema 3.1.2 que se desarrolla en detalle en las siguientes secciones, ilustremos las ideas principales.

Estructura de la prueba. Notemos que por el Lema 2.2.1 las variables de Bernoulli y Steinhaus son intercambiables. Luego, tenemos que (b) $\Rightarrow$ (c) y tomando $m = 1$ en (c) también nos queda (c) $\Rightarrow$ (a). Sin embargo, (c) $\Rightarrow$ (b) no es inmediato dado que (c) sólo cubre el caso tetraedral. Por lo tanto, daremos la prueba del Teorema 3.1.2 en dos pasos que serán desarrollados en las Secciones 3.2 y 3.3 respectivamente.

El primer paso consiste en mostrar una desigualdad polinomial de cotipo para polinomios tetraedrales que muestre que (a) $\Rightarrow$ (c). Esto se puede deducir con un argumento de *decoupling* usando la descomposición multilineal presentada en la Sección 2.1.

El segundo paso consiste en pasar del caso tetraedral al general para probar (c) $\Rightarrow$ (b). Para un polinomio de Steinhaus $P(z)$ no necesariamente tetraedral estudiamos el polinomio tetraedral de Walsh subyacente $P(\varepsilon z)$ pensado como una función de ε. Esto no sólo provee un puente entre al caso tetraedral y el general, sino que también codifica información estructural valiosa de P. Como $\varepsilon_i^2 = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, este procedimiento clasifica a los monomios de $P(z)$ según la paridad de los exponentes α_i de las variables z_i involucradas. Esto permite partir el polinomio de manera tal que cada parte es esencialmente un polinomio de la forma $Q(z^2)$. Como $z^2 \sim z$ podemos reducir el exponente m a la mitad, lo cual es crucial para que el argumento inductivo de la prueba funcione.

Si bien todo esto se realiza en el contexto m-homogéneo, un procedimiento estándar de homogeneización para variables de Steinhaus concluye la prueba.

Finalizamos esta sección mencionando dos resultados para cotipo homogéneo hipercontractivo que gracias al Teorema 3.1.2 valen para cotipo.

Observación 3.1.5. En primer lugar, siguiendo los mismos argumentos que en [24, Teorema 5.3] (ver también [23, Proposición 25.29]) se puede probar que si Y tiene cotipo q y $v : X \to Y$ es un operador $(r, 1)$-sumante, entonces existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\Big(\sum_{\alpha} \|v(x_\alpha)\|_Y^{\frac{qrm}{q+(m-1)r}} \Big)^{\frac{q+(m-1)r}{qrm}} \leq C^m \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \|P(z)\|_X$$

para todo polinomio $P(z) = \sum_\alpha x_\alpha z^\alpha$ a valores en X de n variables y de grado m. Con esto en mente, las estimaciones de [24, Teorema 1.6–(2) y Teorema 5.4–(2)] valen para espacios de Banach con cotipo q.

En segundo lugar, recordemos que toda $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ define una serie de potencias formal en infinitas variables $\sum_\alpha \widehat{f}(\alpha) z^\alpha$. El conjunto de z's para el cual la serie de toda f en $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ converge se conoce como el conjunto de convergencia monomial:

$$\operatorname{mon} H_p(\mathbb{T}^\infty, X) = \Big\{ z \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \colon \sum_\alpha \|\widehat{f}(\alpha) z^\alpha\|_X < \infty \text{ para toda } f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X) \Big\}.$$

La equivalencia entre cotipo y cotipo polinomial del Teorema 3.1.2 combinada con [14, (16)] muestra que, si denotamos $\cot(X) = \inf\{q \colon X \text{ tiene cotipo } q\}$, entonces

$$\ell_{\cot(X)'} \cap B_{c_0} \subseteq \operatorname{mon} H_p(\mathbb{T}^\infty, X) \subseteq \ell_{\cot(X)'+\varepsilon} \cap B_{c_0}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Si X alcanza su cotipo óptimo (es decir, si X tiene cotipo $\cot(X)$), entonces [14, Teorema 3.1] implica que

$$\operatorname{mon} H_p(\mathbb{T}^\infty, X) = \ell_{\cot(X)'} \cap B_{c_0}\,. \tag{3.9}$$

Además, decimos que una suceción $b = (b_n)_n$ es un ℓ_1-multiplicador de $\mathcal{H}_p(X)$ si satisface que $\sum_{n=1}^\infty \|a_n\|_X |b_n| < \infty$ para todo $\sum a_n n^{-s}$ en $\mathcal{H}_p(X)$. Como consecuencia inmediata de (3.9) (ver [14, Teorema 4.3]) tenemos que si X tiene cotipo $\cot(X)$, entonces una sucesión completamente multiplicativa b (esto es, $b_{mn} = b_n b_m$ para todo m, n) es un ℓ_1-multiplicador de $\mathcal{H}_p(X)$ si y sólo si $b \in \ell_{\cot(X)'}$.

3.2 Caso tetraedral

Los resultados de esta sección se enuncian para polinomios de Walsh ya que tienen una estructura inherentemente tetraedral. Los mismos argumentos aplican para polinomios de Steinhaus tetraedrales.

Antes de obtener una desigualdad polinomial de cotipo es conveniente analizar el caso multilineal que es bastante más sencillo. De hecho, una versión multilineal de cotipo se deduce de forma natural para espacios con cotipo usando un argumento inductivo. En [70] (ver también [23, Lema 25.3]) se muestra el siguiente resultado que probamos para mayor claridad. Recordemos que llamamos $C_q(X)$ a la mejor constante en la desigualdad de cotipo y que notamos $\mathcal{I}(m,n) = \{1, \dots, n\}^m$.

Lema 3.2.1 ([70, Lema 3]). *Sea X un espacio de Banach con cotipo $2 \le q < \infty$. Para todo operador m-lineal $L : (\mathbb{C}^n)^m \to X$ con coeficientes $(x_i)_{i \in \mathcal{I}(m,n)}$ se tiene que*

$$\Big(\sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} \|x_i\|^q \Big)^{1/q} \le C_q(X)^m (\mathbb{E}\|L(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)})\|^q)^{1/q}. \tag{3.10}$$

Demostración. Probaremos esto por inducción en m. El caso $m = 1$ es simplemente la definición de cotipo q. Asumamos que la afirmación vale para $m - 1$ y fijemos un operador m-lineal $L : \mathbb{C}^n \to X$ con coeficientes $(x_i)_{i\in\mathcal{I}(m,n)}$. Por la hipótesis inductiva tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \|x_i\|^q &= \sum_{i_m=1}^{n} \sum_{i\in\mathcal{I}(m-1,n)} \|x_{i,i_m}\|^q \\ &\leq C_q(X)^{q(m-1)} \sum_{i_m=1}^{n} \mathbb{E}\Big\| \sum_{i\in\mathcal{I}(m-1,n)} x_{i,i_m}\varepsilon_{i_1}^{(1)} \dots \varepsilon_{i_{m-1}}^{(m-1)}\Big\|^q.\end{aligned}$$

Cambiando el orden entre la esperanza y la suma y aplicando la desigualdad de cotipo nos queda

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \|x_i\|^q &\leq C_q(X)^{qm}\mathbb{E}\Big\| \sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} x_i\varepsilon_{i_1}^{(1)} \dots \varepsilon_{i_m}^{(m)}\Big\|^q \\ &= C_q(X)^{qm}\mathbb{E}\|L(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)})\|^q,\end{aligned}$$

lo cual completa la inducción. □

Con la misma prueba se deduce un resultado análogo para tipo.

Lema 3.2.2. *Sea X un espacio de Banach con tipo $1 \leq p \leq 2$. Para todo operador m-lineal $L : \mathbb{C}^n \to X$ con coeficientes $(x_i)_{i\in\mathcal{I}(m,n)}$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|L(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)})\|^p)^{1/p} \leq T_p(X)^m \Big(\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \|x_i\|^p \Big)^{1/p}.$$

Teniendo la versión multilineal de cotipo, un argumento de *decoupling* adecuado nos permitirá pasar al caso polinomial.

Lo más natural sería comparar un polinomio m-homogéneo P con su operador m-lineal asociado M (esto fue realizado en [13, Proposición 2.1] para polinomios de Steinhaus no necesariamente tetraedrales). Sin embargo, en [14] (ver también [23, Teorema 25.5]) se muestra que la norma q de los coeficientes de P y M puede diferir por un factor de magnitud $m!^{1/q'}$. Usando esa estimación no obtendríamos una dependencia exponencial en m como en (3.4). Aun usando nuestra equivalencia del Corolario 2.1.6 no es suficiente a menos que $q = 2$.

Para remediar esto usamos el método de *decoupling* alternativo propuesto en la Sección 2.1. Recordemos de (2.11) que podemos escribir a un polinomio tetraedral m-homogéneo P como (casi) un promedio de operadores m-lineales L_π evaluados en $(z, \dots, z)$. Esto permite comparar no sólo las normas L^q de P y de los operadores L_π como se probó en el Teorema 2.1.4 sino también las normas q de sus coeficientes usando el Lema 2.1.3. Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado que prueba la implicación (a) ⇒ (c) del Teorema 3.1.2.

Proposición 3.2.3. *Sea X un espacio de Banach de cotipo $2 \leq q < \infty$. Para todo polinomio de Walsh m-homogéneo P con coeficientes $\{x_A\}_{|A|=m} \subseteq X$ se tiene que*

$$\Big(\sum_A \|x_A\|^q\Big)^{1/q} \leq (e^{1/q} C_q(X))^m (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^q)^{1/q}. \tag{3.11}$$

Más aún, existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo polinomio de Walsh P de grado m con coeficientes $\{x_A\}_{|A|\leq m} \subseteq X$ se tiene que

$$\Big(\sum_A \|x_A\|^q\Big)^{1/q} \leq C^m (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^q)^{1/q}.$$

Demostración. Apliquemos el Lema 2.1.3. Usando la misma notación del lema y tomando $v_A = \|x_A\|^q$ nos queda

$$\sum_A \|x_A\|^q \leq e^m \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \sum_{i_1 \in B_1} \cdots \sum_{i_m \in B_m} \|x_{\{i_1,\ldots,i_m\}}\|^q.$$

Notemos que $\{x_{\{i_1,\ldots,i_m\}} \ : \ i_l \in B_l \text{ for } 1 \leq l \leq m\}$ son los coeficientes del operador multilineal L_π definido en (2.6). Luego, del Lema 3.2.1 tenemos que

$$\sum_{i_1 \in B_1} \cdots \sum_{i_m \in B_m} \|x_{\{i_1,\ldots,i_m\}}\|^q \leq C_q(X)^{qm} \mathbb{E}\|L_\pi(\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(m)})\|^q.$$

Juntando estas dos desigualdades y aplicando el Teorema 2.1.4 obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_A \|x_A\|^q &\leq e^m C_q(X)^{qm} \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \mathbb{E}\|L_\pi(\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(m)})\|^q \\ &\leq e^m C_q(X)^{qm} \mathbb{E}\left\|P(\varepsilon)\right\|^q.\end{aligned}$$

En cuanto al caso no homogéneo, separamos al polinomio en sus componentes homogéneas. Utilizando la Proposición 1.3.8 resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{|A|\leq m} \|x_A\|^q &= \sum_{k=0}^m \sum_{|A|=k} \|x_A\|^q \leq \sum_{k=0}^m e^k C_q(X)^{qk} (\mathbb{E}\|P_k(\varepsilon)\|^q)^{1/q} \\ &\leq C^m \sum_{k=0}^m e^k C_q(X)^{qk} (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^q)^{1/q} \leq (2eC_q(X)^q C)^m (\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^q)^{1/q}.\end{aligned}$$

Esto completa el argumento. □

En cuanto a tipo, tenemos el siguiente resultado análogo.

Proposición 3.2.4. *Sea X un espacio de Banach de tipo $1 \leq p \leq 2$. Para todo polinomio de Walsh m-homogéneo P con coeficientes $\{x_A\}_{|A|=m} \subseteq X$ se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p} \leq (eT_p(X))^m \Big(\sum_A \|x_A\|^p\Big)^{1/p}.$$

Más aún, existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo polinomio de Walsh P de grado m con coeficientes $\{x_A\}_{|A| \leq m} \subseteq X$ se tiene que

$$(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p} \leq C^m \Big(\sum_A \|x_A\|^p \Big)^{1/p}.$$

Idea de la prueba. Procedemos en dirección opuesta a la Proposición 3.2.3. Para el caso m-homogéneo, aplicando el Teorema 2.1.4 y el Lema 3.2.2 nos queda

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p)^{1/p} &\leq e^m \frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} (\mathbb{E}\|L_\pi(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)})\|^p)^{1/p} \\ &\leq e^m \Big(\frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \mathbb{E}\|L_\pi(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)})\|^p \Big)^{1/p} \\ &\leq (eT_p(X))^m \Big(\frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \sum_{i_1 \in B_1} \cdots \sum_{i_m \in B_m} \|x_{\{i_1, \dots, i_m\}}\|^p \Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Finalmente, por el Lema 2.9 tenemos que

$$\frac{1}{|\Pi_{k,m}|} \sum_{\pi \in \Pi_{k,m}} \sum_{i_1 \in B_1} \cdots \sum_{i_m \in B_m} \|x_{\{i_1, \dots, i_m\}}\|^p \leq \sum_A \|x_A\|^p.$$

Juntando esto con la desigualdad anterior se obtiene el caso m-homogéneo. El resultado general se sigue separando en componentes homogéneas y usando la desigualdad triangular. $\square$

Observación 3.2.5. Observemos que la Proposición 3.2.3 vale para variables aleatorias simétricas (no triviales) ξ dado que los Lemas 2.2.1 y 2.2.2 permiten reemplazar las variables de Bernoulli por ξ. En cuanto a la Proposición 3.2.4, si ξ es simétrica (de manera tal que $\xi \sim \varepsilon\xi$) tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}_\xi\|P(\xi)\|^p)^{1/p} = (\mathbb{E}_{\xi,\varepsilon}\|P(\varepsilon\xi)\|^p)^{1/p} &\leq (eT_p(X))^m \Big(\mathbb{E}_\xi \sum_A \|x_A \xi_A\|^p \Big)^{1/p} \\ &= (eT_p(X))^m \Big(\sum_A \|x_A\|^p \mathbb{E}_\xi |\xi_A|^p \Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\mathbb{E}_\xi |\xi_A|^p = \mathbb{E}\Big[\prod_{i \in A} |\xi_i|^p \Big] = \prod_{i \in A} \mathbb{E}_\xi |\xi_i|^p = \Big(\mathbb{E}_\xi |\xi_0|^p \Big)^m = (\|\xi_0\|_p)^{pm}.$$

Luego, nos queda

$$(\mathbb{E}_\xi\|P(\xi)\|^p)^{1/p} \leq (eT_p(X)\|\xi_0\|_p)^m \Big(\sum_A \|x_A\|^p \Big)^{1/p}.$$

Alternativamente, podemos empezar por una desigualdad de tipo/cotipo para ξ y repetir los argumentos de las Proposiciones 3.2.3 y 3.2.4 para obtener una versión polinomial de forma directa. Esencialmente, distintas variantes de tipo/cotipo se trasladan del caso lineal al tetraedral sin importar la variable aleatoria que involucren. En particular, esto vale para polinomios de Steinhaus tetraedrales.

Concluimos esta sección con una consecuencia curiosa de las Proposiciones 3.2.3 y 3.2.4. Como mencionamos anteriormente, no es posible obtener las proposiciones anteriores mediante desigualdades clásicas de *decoupling* que comparan un polinomio m-homogéneo con su operador m-lineal asociado. De hecho, (3.10) resulta ser una mala estimación cuando el operador m-lineal involucrado es el operador simétrico asociado a un polinomio tetraedral. En este caso particular se tiene el siguiente resultado más fuerte que el Lema 3.2.1.

Corolario 3.2.6. *Sea X un espacio de Banach de cotipo $2 \leq q < \infty$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo operador m-lineal M asociado a un polinomio tetraedral m-homogéneo P, se tiene que*

$$\Big(\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\frac{C}{m^{1/2-1/q}}\Big)^m (\mathbb{E}\|M(\varepsilon^{(1)},\ldots,\varepsilon^{(m)})\|^q)^{1/q}, \tag{3.12}$$

donde $(x_i)_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \subseteq X$ son los coeficientes de M.

En primer lugar notemos que si $q > 2$, la constante en (3.12) tiende a cero cuando m tiende a infinito. En cierto modo, esto muestra que para operadores m-lineales la norma q de los coeficientes no siempre es una cota inferior adecuada para la norma L^q del operador.

En segundo lugar, observemos que no todo operador m-lineal simétrico L proviene de un polinomio tetraedral m-homogéneo dado que $L(z,\ldots,z)$ podría no ser tetraedral.

Demostración del Corolario 3.2.6. Recordemos que $\mathcal{J}(m,n)$ es el conjunto de índices $j = (j_1,\ldots,j_m)$ tal que $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_m \leq n$. Como P es tetraedral tenemos que su coeficiente j-ésimo es $m!x_j$ para todo $j \in \mathcal{J}(m,n)$. Aplicando la Proposición 3.2.3 y el Corolario 2.1.6 nos queda

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} \|m!x_j\|^q\Big)^{1/q} &\leq (e^{1/q}C_q(X))^m(\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^q)^{1/q}\\ &\leq C^m m^{m/2}(\mathbb{E}\|M(\varepsilon^{(1)},\ldots,\varepsilon^{(m)})\|^q)^{1/q}.\end{aligned}$$

Cambiando los índices $\mathcal{J}(m,n)$ por $\mathcal{I}(m,n)$ y usando la simetría de los coeficientes x_i en el lado izquierdo tenemos que

$$\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} \|m!x_j\|^q\Big)^{1/q} = \Big(\frac{1}{m!}\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \|m!x_i\|^q\Big)^{1/q} = m!^{1-1/q}\Big(\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \|x_i\|^q\Big)^{1/q}.$$

La conclusión se sigue de la fórmula de Stirling. □

Vale un resultado análogo para tipo. Omitimos la prueba dado que es idéntica.

Corolario 3.2.7. *Sea X un espacio de Banach de tipo $1 \leq p \leq 2$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo operador m-lineal M asociado a un polinomio tetraedral m-homogéneo, se tiene que*

$$(\mathbb{E}\|M(\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(m)})\|^p)^{1/p} \leq \Big(\frac{C}{m^{1/p-1/2}}\Big)^m \Big(\sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} \|x_i\|^p\Big)^{1/p},$$

donde $(x_i)_{i \in \mathcal{I}(m,n)} \subseteq X$ son los coeficientes de M.

3.3 Caso general

El último ingrediente en la prueba del Teorema 3.1.2 es un procedimiento para trasladar nuestros resultados para polinomios tetraedrales al caso general. Necesitamos una descripción algo enrevesada de un polinomio en términos de la paridad de los exponentes de las variables involucradas. Como mencionamos anteriormente, esta descripción tiene dos ventajas. En primer lugar, la información sobre la paridad de exponentes se codifica usando el polinomio tetraedral $P(\varepsilon z)$ visto como una función de ε. Esto permite aplicar los resultados de la sección anterior. En segundo lugar, tener un control sobre la paridad de los exponentes permite a fines prácticos reducir el grado del polinomio a la mitad, lo cual es crucial para el argumento inductivo que presentamos.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y un número par $m \in \mathbb{N}$. Dado $A \subseteq [n]$ definimos

$$\Lambda_A = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \ |\alpha| = m, \alpha_i \text{ es impar si y sólo si } i \in A\}.$$

Como m es par, es claro que $\Lambda_A \neq \varnothing$ si y sólo si A tiene cardinal par entre 0 y m. En el resto de la discusión consideraremos únicamente conjuntos A con $\Lambda_A \neq \varnothing$. Notemos que para todo $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ y $z \in \mathbb{T}^n$, tenemos que

$$(\varepsilon z)^\alpha = \varepsilon_A z^\alpha$$

para todo $\alpha \in \Lambda_A$, donde, como siempre, $\varepsilon_A = \prod_{i \in A} \varepsilon_i$.

Ahora bien, para un polinomio m-homogéneo de n variables $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} x_\alpha z^\alpha$ escribimos

$$P_A(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda_A} x_\alpha z^\alpha.$$

Notemos que los conjuntos Λ_A son mutuamente disjuntos y cubren cualquier posible exponente α. Luego, con esta notación, tenemos que

$$P(\varepsilon z) = \sum_{A \subseteq [n]} \varepsilon_A P_A(z).$$

Como se puede ver en esta expresión, $P(\varepsilon z)$ visto como un polinomio en ε es tetraedral. Además, podemos escribir $P(\varepsilon z)$ como la suma de sus componentes homogéneas (como función de ε). Como ya mencionamos, cada A considerado tiene cardinal par entre 0 y m. Luego, si definimos

$$\mathcal{A}_k = \{A \subseteq [n] : \ |A| = 2k\},$$

podemos escribir

$$P(\varepsilon z) = \sum_{k=0}^{m/2} \sum_{A \in \mathcal{A}_k} \varepsilon_A P_A(z). \tag{3.13}$$

Notemos que, siempre que i pertenece a cierto A, los exponentes de z_i son impares para todo monomio en $P_A(z)$. Además, como m es par, dado $\alpha \in \Lambda_A$, tenemos que $\sum_{i \in A} \alpha_i$ debe ser par y, mayor o igual que $|A| = 2k$. Definimos entonces,

$$\Lambda_{A,l} = \{\alpha \in \Lambda_A : \ \sum_{i \in A} \alpha_i = 2l\},$$

que nos permite escribir, para $A \in \mathcal{A}_k$,

$$P_A(z) = \sum_{l=k}^{m/2} \sum_{\alpha \in \Lambda_{A,l}} x_\alpha z^\alpha = \sum_{l=k}^{m/2} P_{A,l}(z). \tag{3.14}$$

Notemos que $P_{A,l}(z)$ es la componente $2l$-homogénea del polinomio $P_A(z)$ visto como una función de las variables z_i con $i \in A$ (esto es, de las variables con exponente impar). En otras palabras, el polinomio $P_{A,l}(z)$ consiste de los monomios $x_\alpha z^\alpha$ de $P_A(z)$ cuyos exponentes impares suman $2l$.

Para concluir nuestra descripción de P, para $\alpha \in \Lambda_A$ definimos exponentes β, γ y 1_A por

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in A \\ \frac{\alpha_i}{2} & \text{si } i \in A^c \end{cases}, \quad \gamma_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i - 1}{2} & \text{si } i \in A \\ 0 & \text{si } i \in A^c \end{cases} \quad \text{y} \quad 1_{A,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A \\ 0 & \text{si } i \in A^c \end{cases},$$

para todo $1 \le i \le n$. Notemos que $\alpha = 2\beta + 2\gamma + 1_A$ donde $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ está soportado en A^c y $\gamma, 1_A \in \mathbb{N}_0^n$ están soportados en A. Más aún, para $\alpha \in \Lambda_{A,l}$ tenemos que

$$|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i \in A^c} \frac{\alpha_i}{2} = \frac{|\alpha|}{2} - \sum_{i \in A} \frac{\alpha_i}{2} = \frac{m}{2} - l,$$

y

$$|\gamma| = \sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{i \in A} \frac{\alpha_i - 1}{2} = \frac{2l - |A|}{2} = l - k.$$

Llamemos $B_{A,l}$ al conjunto de todos los exponentes β soportados en A^c tales que $|\beta| = m/2 - l$. Análogamente, llamemos $\Gamma_{A,l}$ al conjunto de todos los exponentes γ soportados en A tales que $|\gamma| = l - k$. Nos queda

$$\begin{aligned} P_{A,l}(z) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_{A,l}} x_\alpha z^\alpha = \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^{2\beta+2\gamma+1_A} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \Big(\sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^{2\beta} \Big) z^{2\gamma+1_A}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Juntando (3.13), (3.14) y (3.15) obtenemos la descripción completa de $P(\varepsilon z)$ probando así el siguiente lema.

Lema 3.3.1. *Dado un número par $m \in \mathbb{N}$, un polinomio m-homogéneo en n variables*

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=m} x_\alpha z^\alpha,$$

y $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, se tiene que

$$P(\varepsilon z) = \sum_{k=0}^{m/2} \sum_{A\in\mathcal{A}_k} \sum_{l=k}^{m/2} \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} \varepsilon_A z^{2\beta+2\gamma+1_A}.$$

Con el mismo argumento podemos deducir una fórmula similar para m impar. Para todo polinomio m-homogéneoen n variables P y $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, obtenemos

$$P(\varepsilon z) = \sum_{k=0}^{(m-1)/2} \sum_{A\in\mathcal{A}'_k} \sum_{l=k}^{(m-1)/2} \sum_{\gamma\in\Gamma'_{A,l}} \sum_{\beta\in B'_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} \varepsilon_A z^{2\beta+2\gamma+1_A},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_k &= \{A \subseteq [n] : \ |A| = 2k+1\}, \\ \Gamma'_{A,l} &= \Big\{\gamma \in \mathbb{N}_0^n : \sum_{i\in A} \gamma_i = l-k \ \text{ y } \gamma_i = 0 \text{ for } i \in A^c\Big\}, \text{ y} \\ B'_{A,l} &= \Big\{\beta \in \mathbb{N}_0^n : \sum_{i\in A} \beta_i = (m-1)/2 - l \ \text{ y } \beta_i = 0 \text{ for } i \in A\Big\}. \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de probar el Teorema 3.1.2.

Demostración del Teorema 3.1.2. Primero notemos que la Proposición 3.2.3 prueba que (a) $\Rightarrow$ (c) y que el hecho de que tanto (b) como (c) implican (a) se deduce inmediatamente tomando $m = 1$ en (b) o (c) respectivamente.

Sólo resta mostrar que (c) $\Rightarrow$ (b). Como primer paso vemos que la desigualdad vale para polinomios homogéneos. Sea C_ε la constante de (c) y B la constante de la Proposición 1.3.8. Nuestro objetivo es probar que si $C = \max\{C_\varepsilon^2, B^4\}$, entonces

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|x_\alpha\|^q \Big)^{1/q} \leq C^m \Big(\int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|^q dz \Big)^{1/q} \tag{3.16}$$

para todo polinomio m-homogéneo $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} x_\alpha z^\alpha$ de n variables. Procedemos por inducción en m. El caso $m = 1$ es simplemente la desigualdad de cotipo q y ya probamos que (a) and (c) son equivalentes. Luego, fijemos $m \geq 2$ y supongamos que (3.16) vale para todo polinomio k-homogéneo con $k < m$. Podemos asumir también que m es par (el caso m impar es análogo). Fijemos un polinomio m-homogéneo en n variables

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=m} x_\alpha z^\alpha.$$

Como nuestro objetivo involucra estimar la integral de $P(z)$, aprovechamos la invariancia por rotaciones y trabajamos con $P(\varepsilon z)$, aunque esto requiere un poco de preparación. Dados $1 \leq k \leq m/2$ y $A \subseteq [n]$ con $|A| = 2k$, tomamos $k \leq l \leq m/2$ y definimos P_A y $P_{A,l}$ como en (3.14). Intuitivamente, $P_{A,l}$ separa los z_i's con exponente impar de los z_i's con exponente par. Esto nos permite usar la hipótesis inductiva dos veces (una para la parte impar y otra para la par) para ensamblar los polinomios $P_{A,l}$. Llamemos $\mathbb{T}^{A^c}$ a las $|A^c|$ copias del toro indexadas en A^c. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \sum_{\beta\in B_{A,l}} \|x_{2\beta+2\gamma+1_A}\|^q &\leq \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} C^{q(m/2-l)} \int_{\mathbb{T}^{A^c}} \Big\| \sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^\beta \Big\|^q dz \\
&\leq C^{q(m/2-l)} \int_{\mathbb{T}^{A^c}} \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \Big\| \sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^\beta \Big\|^q dz \\
&= C^{q(m/2-l)} \int_{\mathbb{T}^{A^c}} \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \Big\| \sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^{2\beta} \Big\|^q dz,
\end{aligned}$$

donde el último paso se obtiene de un cambio de variables. Como β está soportado en A^c, las variables z_i con $i \in A$ no aparecen en la expresión anterior. Luego, aún podemos introducirlas aplicando nuevamente la hipótesis inductiva. Obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \sum_{\beta\in B_{A,l}} \|x_{2\beta+2\gamma+1_A}\|^q \\
&\qquad\leq C^{q(m/2-l)} C^{q(l-k)} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \Big(\sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^{2\beta} \Big) z^\gamma \Big\|^q dz \\
&\qquad= C^{q(m/2-k)} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \Big(\sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^{2\beta} \Big) z^{2\gamma} \Big\|^q dz \qquad (3.17) \\
&\qquad= C^{q(m/2-k)} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| z^{1_A} \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \Big(\sum_{\beta\in B_{A,l}} x_{2\beta+2\gamma+1_A} z^{2\beta} \Big) z^{2\gamma} \Big\|^q dz \\
&\qquad= C^{q(m/2-k)} \int_{\mathbb{T}^n} \|P_{A,l}(z)\|^q dz,
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos (3.15). Como $P_{A,l}$ es la componente $2l$-homogénea de P_A visto como una función dependiente sólo de las variables z_i con $i \in A$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \|P_{A,l}(z)\|^q dz \leq \int_{\mathbb{T}^n} \|P_A(z)\|^q dz. \tag{3.18}$$

De (3.17) y (3.18), deducimos

$$\begin{aligned}\sum_{l=k}^{m/2} \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \sum_{\beta\in B_{A,l}} \|x_{2\beta+2\gamma+1_A}\|^q &\leq \left(\frac{m}{2}-k\right) C^{q(m/2-k)} \int_{\mathbb{T}^n} \|P_{A,l}(z)\|^q dz \\ &\leq mC^{q(m/2-k)} \int_{\mathbb{T}^n} \|P_A(z)\|^q dz.\end{aligned}$$

Finalmente, estudiamos $P(\varepsilon z)$ usando (3.16) y (3.13). Tomando en cuenta el Lema 3.3.1 (y la definición de C) nos queda

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m} \|x_\alpha\|^q &= \sum_{k=1}^{m/2} \sum_{A\in\mathcal{A}_k} \sum_{l=k}^{m/2} \sum_{\gamma\in\Gamma_{A,l}} \sum_{\beta\in B_{A,l}} \|x_{2\beta+2\gamma+1_A}\|^q \\ &\leq m \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k=1}^{m/2} C^{q(m/2-k)} \sum_{A\in\mathcal{A}_k} \|P_A(z)\|^q dz \\ &\leq m \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k=1}^{m/2} C^{q(m/2-k)} C_\varepsilon^{2qk} \mathbb{E}\Big\| \sum_{A\in\mathcal{A}_k} \varepsilon_A P_A(z)\Big\|^q dz \\ &\leq mC^{qm/2} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k=1}^{m/2} \mathbb{E}\Big\| \sum_{A\in\mathcal{A}_k} \varepsilon_A P_A(z)\Big\|^q dz.\end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 1.3.8, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m} \|x_\alpha\|^q &\leq mC^{qm/2} B^{qm} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k=1}^{m/2} \mathbb{E}\|P(\varepsilon z)\|^q dz \\ &\leq m^2 C^{qm/2} B^{qm} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^n} \|P(\varepsilon z)\|^q dz \leq C^{qm} \int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|^q dz,\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $m^2 \leq B^{qm}$ para todo m, dado que $B > 2$.

Por lo tanto, se satisface (3.16) (y luego (3.5)) para todo polinomio m-homogéneo. Para terminar la demostración procedemos como en el Lema 1.3.5. Tomemos un polinomio arbitrario de grado m

$$P(z) = \sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha.$$

Sea $Q : \mathbb{C}^{n+1} \to X$ el polinomio m-homogéneo dado por

$$Q(z,w) = w^m P(zw^{-1}) = \sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha w^{m-|\alpha|}.$$

Usando la invariancia por rotaciones

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\leq m}\|x_\alpha\|^q &\leq C^{qm}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}^n}\|Q(z,w)\|^q dzdw = C^{qm}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}^n}\|w^m P(z\overline{w})\|^q dzdw\\ &= C^{qm}\int_{\mathbb{T}^n}\|P(z)\|^q dz.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

En cuanto a la demostración del Teorema 3.1.3 notemos que para obtener el Teorema 3.1.2 usamos tanto la descomposición del Lema 3.3.1 como las Proposiciones 1.3.8 y 3.2.3. Para la prueba del Teorema 3.1.3 debemos esencialmente invertir todas las desigualdades involucradas. Usamos el Lema 3.3.1 de la misma manera que antes, mientras que la Proposición 1.3.8 es reemplazada por la desigualdad triangular. En cuanto a la Proposición 3.2.3, la reemplazamos con la Proposición 3.2.4.

Observación 3.3.2. Los espacios con tipo/cotipo también cumplen versiones polinomiales para variables aleatorias ξ_0 tales que $\xi_0 \sim \xi_0 z_0$. El mismo argumento que en la Observación 3.2.5 muestra que si X tiene tipo p, entonces

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{E}_\xi\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m}x_\alpha\xi^\alpha\Big\|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\mathbb{E}_{\xi z}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m}x_\alpha\xi^\alpha z^\alpha\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq C^m\Big(\mathbb{E}_\xi\sum_{|\alpha|\leq m}\|\xi^\alpha x_\alpha\|^p\Big)^{1/p}\\ &= C^m\Big(\sum_{|\alpha|\leq m}\|x_\alpha\|^p\mathbb{E}_\xi|\xi^\alpha|^p\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Notemos que por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\mathbb{E}_\xi|\xi^\alpha|^p = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_\xi|\xi_i|^{p\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n (\mathbb{E}_\xi|\xi_i|^{pm})^{\alpha_i/m} = \mathbb{E}_\xi|\xi_0|^{pm} = \|\xi_0\|_{pm}^{pm}.$$

Luego, nos queda

$$\Big(\mathbb{E}_\xi\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m}x_\alpha\xi^\alpha\Big\|^p\Big)^{1/p} \leq (C\|\xi_0\|_{pm})^m\Big(\sum_{|\alpha|\leq m}\|x_\alpha\|^p\Big)^{1/p}.$$

Análogamente, si X tiene cotipo q obtenemos

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq m}\|x_\alpha\|^q\mathbb{E}_\xi|\xi^\alpha|^q\Big)^{1/q} \leq C^m\Big(\mathbb{E}_\xi\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m}x_\alpha\xi^\alpha\Big\|^q\Big)^{1/q}.$$

Observando que

$$(\mathbb{E}_\xi|\xi_0|^q)^m = \prod_{i=1}^n (\mathbb{E}_\xi|\xi_i|^q)^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_\xi|\xi_i|^{q\alpha_i} = \mathbb{E}_\xi|\xi^\alpha|^q,$$

concluimos que

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq m}\|x_\alpha\|^q\Big)^{1/q} \leq C^m\|\xi_0\|_q^{-m}\Big(\mathbb{E}_\xi\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m}x_\alpha\xi^\alpha\Big\|^q\Big)^{1/q}.$$

Finalizamos este capítulo con una versión no tetraedral de los Corolarios 3.2.6 y 3.2.7. Recordemos la definición de $\mathcal{I}(m,n)$ y $[i]$ para algún $i \in \mathcal{I}(m,n)$ de la Sección 1.3.

Corolario 3.3.3. *Sea X un espacio de Banach de cotipo $2 \leq q < \infty$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo operador m-lineal simétrico M con coeficientes $(x_i)_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \subseteq X$ se tiene que*

$$\Big(\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} |[i]|^{q/2-1}\|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leq C^m\Big(\int_{\mathbb{T}^{nm}} \|M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})\|^q dz^{(1)}\ldots dz^{(m)}\Big)^{1/q}.$$

Notemos que si M es el operador m-lineal asociado a un polinomio tetraedral P, entonces $|[i]| = m!$ para todo $i \in \mathcal{I}(m,n)$ y recuperamos la cota (3.12).

Demostración del Corolario 3.3.3. Fijemos $z^{(1)},\ldots,z^{(m)} \in \mathbb{T}^n$ y consideremos el polinomio P dado por

$$\begin{aligned} P(z) = M(zz^{(1)},\ldots,zz^{(m)}) &= \sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} x_i z_{i_1} z_{i_1}^{(1)}\ldots z_{i_m} z_{i_m}^{(m)} \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} x_j\Big(\sum_{i\in[j]} z_{i_1}^{(1)}\ldots z_{i_m}^{(m)}\Big) z_j. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad polinomial de cotipo (3.5) a P nos queda

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} \|x_j\|^q\Big|\sum_{i\in[j]} z_{i_1}^{(1)}\ldots z_{i_m}^{(m)}\Big|^q &\leq C^{qm}\int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\|^q dz \\ &= C^{qm}\int_{\mathbb{T}^n} \|M(zz^{(1)},\ldots,zz^{(m)})\|^q dz. \end{aligned}$$

Promediando en $z^{(1)},\ldots,z^{(m)} \in \mathbb{T}^n$ y usando la invariancia por rotaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} \|x_j\|^q \int_{\mathbb{T}^{nm}} \Big|\sum_{i\in[j]} z_{i_1}^{(1)}\ldots z_{i_m}^{(m)}\Big|^q dz^{(1)}\ldots dz^{(m)} & \\ \leq C^{qm}\int_{\mathbb{T}^{nm}} \|M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})\|^q dz^{(1)}\ldots dz^{(m)}. & \qquad (3.19) \end{aligned}$$

Notemos que por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} |[j]|^{1/2} &= \Big(\int_{\mathbb{T}^{nm}} \Big|\sum_{i\in[j]} z_{i_1}^{(1)}\ldots z_{i_m}^{(m)}\Big|^2 dz^{(1)}\ldots dz^{(m)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{T}^{nm}} \Big|\sum_{i\in[j]} z_{i_1}^{(1)}\ldots z_{i_m}^{(m)}\Big|^q dz^{(1)}\ldots dz^{(m)}\Big)^{1/q}. \end{aligned}$$

De hecho, esto es una equivalencia salvo constante C^m debido a la Proposición 1.3.4. Luego, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} |[i]|^{q/2-1}\|x_i\|^q &\leq \sum_{j\in\mathcal{I}(m,n)} |[j]|^{q/2}\|x_j\|^q \\ &\leq \sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} \|x_j\|^q \int_{\mathbb{T}^{nm}} \Big|\sum_{i\in[j]} z_{i_1}^{(1)}\ldots z_{i_m}^{(m)}\Big|^q dz^{(1)}\ldots dz^{(m)}.\end{aligned}$$

Juntando esto con (3.19) concluye el argumento. □

En cuanto a tipo, tenemos el siguiente resultado análogo.

Corolario 3.3.4. *Sea X un espacio de Banach de tipo $1 \leq p \leq 2$. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo operador m-lineal simétrico M con coeficientes $(x_i)_{i\in\mathcal{I}(m,n)} \subseteq X$ se tiene que*

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^{nm}} \|M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})\|^p dz^{(1)}\ldots dz^{(m)}\Big)^{1/p} \leq C^m\Big(\sum_{i\in\mathcal{I}(m,n)} |[i]|^{p/2-1}\|x_i\|^p\Big)^{1/p}.$$

Capítulo 4

Desigualdades de Hausdorff-Young para series de Dirichlet vectoriales

En este capítulo estudiamos desigualdades de Hausdorff-Young para series de Dirichlet vectoriales que nos permiten comparar la norma de una serie de Dirichlet en el espacio de Hardy $\mathcal{H}_p(X)$ con la norma q de sus coeficientes. Para obtener desigualdades completamente análogas al caso escalar, un espacio de Banach debe satisfacer la noción (bastante restrictiva) de tipo/cotipo de Fourier. Veremos variantes de estas desigualdades en el contexto más amplio de espacios con tipo/cotipo usando sus versiones polinomiales del capítulo anterior. Además, presentamos resultados similares asumiendo propiedades de convexidad y suavidad.

4.1 Desigualdades de Hausdorff-Young vectoriales

Recordemos la desigualdad de Hausdorff-Young clásica que afirma que para todo $1 \leq p \leq 2$ y toda función $f \in L^p(\mathbb{T})$ se tiene que

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^{p'} \Big)^{1/p'} \leq \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p dz \Big)^{1/p}. \tag{4.1}$$

Notemos que el caso $p = 2$ se sigue de la identidad de Parseval mientras que el caso $p = 1$ se obtiene acotando la norma de los coeficientes de Fourier por la norma 1 de la función. Los casos intermedios se deducen del teorema de interpolación de Riesz-Thorin.

En particular, para un polinomio $P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ (y cambiando la notación tomando $q = p'$) nos queda

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} |c_n|^q \Big)^{1/q} \leq \Big(\int_{\mathbb{T}} |P(z)|^{q'} dz \Big)^{1/q'}.$$

Estamos buscando espacios de Banach para los cuales se satisfaga una versión vectorial de esta desigualdad. Estos son los espacios con cotipo de Fourier q que por definición cumplen (1.5) que recordamos aquí:

$$\Big(\sum_{n=0}^{N}\|x_n\|^q\Big)^{1/q}\leq C\Big(\int_{\mathbb{T}}\Big\|\sum_{n=0}^{N}x_nz^n\Big\|^{q'}dz\Big)^{1/q'}.$$

Un argumento estándar de densidad muestra que esto se extiende a una versión vectorial de (4.1). En cuanto a series de Dirichlet vectoriales, podemos generalizar (1.5) a varias variables y aplicar la transformada de Bohr. En efecto, se probó en [14, Proposición 2.4] que un espacio de Banach X tiene cotipo de Fourier q si y sólo si existe $C\geq 1$ tal que para toda familia finita $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}\subseteq X$ se tiene que

$$\Big(\sum_{\alpha}\|x_\alpha\|^q\Big)^{1/q}\leq C\Big(\int_{\mathbb{T}^n}\Big\|\sum_{\alpha}x_\alpha z^\alpha\Big\|^{q'}dz\Big)^{\frac{1}{q'}}. \tag{4.2}$$

La prueba de [14, Proposición 2.4] también funciona para mostrar que X tiene tipo de Fourier $1\leq p\leq 2$ si y sólo si existe $C\geq 1$ tal que para toda familia finita $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ se tiene que

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^n}\Big\|\sum_{\alpha}x_\alpha z^\alpha\Big\|^{p'}dz\Big)^{\frac{1}{p'}}\leq C\Big(\sum_{\alpha}\|x_\alpha\|^p\Big)^{1/p}. \tag{4.3}$$

En cuanto a series de Dirichlet, la transformada de Bohr (ver (1.11)) permite reformular (4.2) y (4.3) como

$$\Big(\sum_{n=1}^{N}\|a_n\|_X^q\Big)^{1/q}\leq C\Big\|\sum_{n=1}^{N}a_nn^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_{q'}(X)} \tag{4.4}$$

y

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N}a_nn^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_{p'}(X)}\leq C\Big(\sum_{n=1}^{N}\|a_n\|_X^p\Big)^{1/p}, \tag{4.5}$$

respectivamente, para todo polinomio de Dirichlet $\sum_{n=1}^{N}a_nn^{-s}$ con coeficientes en X. Notemos que (4.5) y la densidad de las sucesiones finitas en $\ell_p(X)$ muestra que el operador $\ell_p(X)\to\mathcal{H}_{p'}(X)$ dado por $(a_n)_n\mapsto\sum a_nn^{-s}$ es continuo. Análogamente, por (4.4) y la densidad de los polinomios de Dirichlet en $\mathcal{H}_{q'}(X)$ (ver [23, 24.2.1e]), el operador $\mathcal{H}_{q'}(X)\to\ell_q(X)$ dado por $\sum a_nn^{-s}\mapsto(a_n)_n$ también es continuo. Esto brinda las equivalencias entre la primera y la segunda afirmación de cada uno de los siguientes dos resultados. Los mismos argumentos de densidad junto con (4.2) o (4.3) prueban la equivalencia entre la primera y la tercera afirmación de cada enunciado respectivamente. Alternativamente, es claro que las segundas y las terceras afirmaciones son equivalentes como consecuencia directa de la definición del espacio de Hardy de series de Dirichlet.

Proposición 4.1.1. *Sea X un espacio de Banach. Dados $2 \leq q < \infty$ y $C \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X tiene cotipo de Fourier q con constante C;

(b) toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_{q'}(X)$ satisface que

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_X^q \Big)^{1/q} \leq C \|D\|_{\mathcal{H}_{q'}(X)};$$

(c) toda $f \in H_{q'}(\mathbb{T}^\infty, X)$ satisface que

$$\Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \|\widehat{f}(\alpha)\|_X^q \Big)^{1/q} \leq C \|f\|_{H_{q'}(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

Proposición 4.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Dados $1 \leq p \leq 2$ y $C \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X tiene tipo de Fourier p con constante C;

(b) para todo $(a_n)_n \in \ell_p(X)$ la serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ converge en $\mathcal{H}_{p'}(X)$ y satisface que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_{p'}(X)} \leq C \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_X^p \Big)^{1/p};$$

(c) para todo $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \in \ell_p(X)$ existe una función $f \in H_{p'}(\mathbb{T}^\infty, X)$ tal que $\widehat{f}(\alpha) = x_\alpha$ para todo α y tal que

$$\|f\|_{H_{p'}(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq C \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \|\widehat{f}(\alpha)\|_X^p \Big)^{1/p}.$$

Tipo y cotipo de Fourier se pueden ver como casos particulares de la teoría más general de tipo de Fourier respecto a grupos (ver [37]). Este punto de vista más abstracto permite probar las Proposiciones 4.1.1 y 4.1.2 apelando a resultados conocidos sobre tipo de Fourier en grupos. Esbozamos brevemente estos argumentos. En cuanto a la Proposición 4.1.1, notemos que la afirmación (c) coincide con la noción de tipo de Fourier q' con respecto al grupo $\mathbb{T}^\infty$. Luego, la equivalencia entre (a) y (c) se sigue de [37, Teorema 6.14]. El argumento para la Proposición 4.1.2 es un poco más largo. En primer lugar X tiene tipo de Fourier p si y sólo si X^* tiene tipo de Fourier p con respecto a $\mathbb{T}$ [37, Teorema 6.3], y esto sucede si y sólo si X^* tiene tipo de Fourier p con respecto a $\mathbb{T}^\infty$ por [37, Teorema 6.14]. Nuevamente por [37, Teorema 6.3], esto equivale a que X tenga tipo de Fourier p con respecto al grupo dual de $\mathbb{T}^\infty$, que es $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, y esto es la afirmación (c) de la Proposición 4.1.2.

Versiones análogas de la desigualdad de Hausdorff-Young para funciones de Walsh surgen de las nociones de tipo y cotipo de Walsh. Un espacio de Banach X tiene *tipo de Walsh* p si existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo n y toda familia $\{x_A \colon A \subseteq [n]\} \subset X$ (recordemos que $[n] = \{1, \ldots, n\}$) se tiene que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_A x_A \varepsilon_A \Big\|^{p'}\Big)^{1/p'} \leq C\Big(\sum_A \|x_A\|^p\Big)^{1/p},$$

y tiene *cotipo de Walsh* q si existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo n y toda familia $\{x_A \colon A \subseteq [n]\} \subset X$ se tiene que

$$\Big(\sum_A \|x_A\|^q\Big)^{1/q} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_A x_A \varepsilon_A \Big\|^{q'}\Big)^{1/q'}.$$

Una vez más, estas nociones de tipo/cotipo se pueden estudiar en el contexto más general de tipo de Fourier con respecto a grupos (ver [37]). Tal como sucede para tipo y cotipo de Fourier, los conceptos de tipo de Walsh p y cotipo de Walsh p' coinciden (ver [37, Teorema 7.14]). No es sabido si son equivalentes las nociones de Walsh y Fourier ya sea en el caso de tipo como en el de cotipo.

Podemos reformular las desigualdades de tipo de Walsh p y cotipo de Walsh q para obtener resultados análogos a las Proposiciones 4.1.2 y 4.1.1 usando argumentos estándar de densidad. En efecto, X tiene tipo de Walsh p si y sólo si existe $C \geq 1$ tal que

$$\|f\|_{L^{p'}(\{-1,1\}^\infty, X)} \leq C\Big(\sum_{\substack{A \subset \mathbb{N} \\ A \text{ finito}}} \|\widehat{f}(A)\|^p\Big)^{1/p}. \tag{4.6}$$

Análogamente, si X tiene cotipo de Walsh q, tenemos que

$$\Big(\sum_{\substack{A \subset \mathbb{N} \\ A \text{ finito}}} \|\widehat{f}(A)\|^q\Big)^{1/q} \leq C\|f\|_{L^{q'}(\{-1,1\}^\infty, X)}. \tag{4.7}$$

Las Proposiciones 4.1.1 y 4.1.2 brindan desigualdades de Hausdorff-Young para series de Dirichlet vectoriales que son análogas a las desigualdades originales. Sin embargo, como mencionamos anteriormente, tipo de Fourier (o cotipo) es una propiedad geométrica muy restrictiva para un espacio de Banach. Trabajaremos con las nociones bastante más débiles de tipo y cotipo. Por ejemplo, recordemos que si bien $L^p(\mu)$ tiene tipo $\min\{p, 2\}$ y cotipo $\max\{p, 2\}$ sólo tiene tipo de Fourier $\min\{p, p'\}$ y por lo tanto cotipo de Fourier $\max\{p, p'\}$ (ver [37, Proposición 4.4]). En particular, esto significa que $L^1(\mu)$ tiene el mejor cotipo posible mientras que no tiene ningún cotipo de Fourier no trivial.

4.2 Resultados para tipo y cotipo

Notemos que la noción de cotipo de Fourier, como fue formulada en (4.2), implica (3.5) con una constante universal independiente de m. Asumiendo sólo cotipo, la dependencia exponencial en m (como C^m) del Teorema 3.1.2 aún permite trasladar las estimaciones del caso polinomial al contexto de series de Dirichlet pagando un precio razonable. Se da una situación análoga para espacios de Banach con tipo p. Obtenemos desigualdades, no sólo para series de Dirichlet, sino también para funciones definidas en $\mathbb{T}^\infty$ o $\{-1,1\}^\infty$, tal como en la Proposición 4.1.1 o en (4.7). Comparando lo obtenido en esas desigualdades, vemos que el factor r del siguiente teorema es el precio que pagamos por relajar la hipótesis de cotipo de Fourier o Walsh a cotipo (usual). Recordemos que el número de divisores primos de $n \in \mathbb{N}$, contados con multiplicidad se nota $\Omega(n)$.

Teorema 4.2.1. *Dados un espacio de Banach X y $2 \leq q < \infty$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X tiene cotipo q;

(b) para algún (todo) $1 \leq p < \infty$, existen constantes $C \geq 1$ y $0 < r < 1$ tales que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ satisface que

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r^{\Omega(n)} \|a_n\|^q \Big)^{1/q} \leq C \|D\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

(c) para algún (todo) $1 \leq p < \infty$, existen constantes $C \geq 1$ y $0 < r < 1$ tales que toda función $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ satisface que

$$\Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} r^{|\alpha|} \|\widehat{f}(\alpha)\|^q \Big)^{1/q} \leq C \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)};$$

Además, la siguiente afirmación (d) implica (a),(c) y (b) y son todas equivalentes si X es K-convexo:

(d) para algún (todo) $1 < p < \infty$, existen constantes $C \geq 1$ y $0 < r < 1$ tales que toda función $f \in L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ satisface que

$$\Big(\sum_{\substack{A \subset \mathbb{N} \\ A \text{ finito}}} r^{|A|} \|\widehat{f}(A)\|^q \Big)^{1/q} \leq C \|f\|_{L^p(\{-1,1\}^\infty, X)}.$$

Demostración. Observemos que (b) y (c) son equivalentes vía la transformada de Bohr. El hecho de que (c) $\Rightarrow$ (a) se obtiene de que, dados $x_1, \ldots, x_N \in X$ y definiendo $P(z) = \sum_{n=1}^N x_n z_n$, la suma del lado izquierdo nos queda $r^{1/q} \big(\sum \|x_n\|^q \big)^{1/q}$. El mismo argumento muestra que (d) $\Rightarrow$ (a).

Veamos que (a) $\Rightarrow$ (c). Sea $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ y para todo $m \in \mathbb{N}$ consideremos f_m su proyección m-homogénea (ver Sección 1.3 o [13, Proposición 2.5]). Por el

Teorema 3.1.2, existe una constante $c \geq 1$ tal que para todo polinomio m-homogéneo $P = \sum x_\alpha z^\alpha$ se tiene que

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|x_\alpha\|^q \Big)^{1/q} \leq c^m \|P\|_p.$$

Como los polinomios son densos en $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ y la proyección m-homogénea es una contracción, un argumento sencillo de densidad nos da

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\widehat{f}(\alpha)\|^q \Big)^{1/q} \leq c^m \|f_m\|_p \leq c^m \|f\|_p. \tag{4.8}$$

Tomando $r < 1/c^q$ nos queda

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} r^{|\alpha|} \|\widehat{f}(\alpha)\|^q \Big)^{1/q} &= \Big(\sum_{m=1}^\infty r^m \sum_{|\alpha|=m} \|\widehat{f}(\alpha)\|^q \Big)^{1/q} \\ &\leq \Big(\sum_{m=1}^\infty (rc^q)^m \Big)^{1/q} \|f\|_p \leq C \|f\|_p, \end{aligned}$$

que prueba la implicación.

Finalmente, veamos que (a) $\Rightarrow$ (d) para espacios K-convexos. Primero supongamos que $p = 2$. En este caso (1.9) nos da una constante $c \geq 1$ tal que

$$\|f_m\|_2 \leq c^m \|f\|_2 \tag{4.9}$$

para toda $f \in L^2(\{-1,1\}^\infty, X)$. Esto nos permite proceder exactamente como en (4.8) para obtener el resultado deseado. Para el caso general $1 < p < \infty$, basta ver que se satisface una desigualdad análoga a (4.9). Por un lado, si $2 \leq p < \infty$ usando el Teorema 1.3.7 para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|\mathbb{E}[f_m|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]\|_p \leq C^m \|\mathbb{E}[f_m|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]\|_2 \leq C^m \|f_m\|_2.$$

Aplicando la Proposición 1.3.6 y haciendo tender n a infinito, obtenemos

$$\|f_m\|_p \leq C^m \|f_m\|_2.$$

Juntando esto con (4.9) resulta

$$\|f_m\|_p \leq C^m \|f_m\|_2 \leq (cC)^m \|f\|_2 \leq (cC)^m \|f\|_p.$$

Por otro lado, recordemos que si X es K-convexo, también lo es X^*. Por lo tanto, dado $1 < p \leq 2$ y teniendo en cuenta la Proposición 1.1.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \|f_m\|_p = \sup_{\substack{g \in L^{p'}(X^*) \\ \|g\|_{p'}=1}} \mathbb{E}[g(\varepsilon)(f_m(\varepsilon))] &= \sup_{\substack{g \in L^{p'}(X^*) \\ \|g\|_{p'}=1}} \mathbb{E}[g_m(\varepsilon)(f(\varepsilon))] \\ \leq \sup_{\substack{g \in L^{p'}(X^*) \\ \|g\|_{p'}=1}} \|g_m\|_{p'} \|f\|_p &\leq \sup_{\substack{g \in L^{p'}(X^*) \\ \|g\|_{p'}=1}} \widetilde{C}^m \|g\|_{p'} \|f\|_p \leq \widetilde{C}^m \|f\|_p, \end{aligned}$$

para alguna constante $\widetilde{C} \geq 1$. □

Para espacios con cotipo finito, trasladando [13, Teorema 1.1] a nuestro contexto se tiene una cota inferior de la norma de una serie de Dirichlet en términos de sus coeficientes. Más precisamente, dados un espacio de Banach X con cotipo q, $\sigma > 1/q'$ y $1 \leq p \leq \infty$ existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n\|_X}{n^\sigma} \leq C\|D\|_{\mathcal{H}_p(X)}, \tag{4.10}$$

para todo $D \in \mathcal{H}_p(X)$. Como consecuencia del Teorema 4.2.1 obtenemos el siguiente resultado más fuerte.

Corolario 4.2.2. *Sea X un espacio de Banach con cotipo q y sea $1 \leq p \leq \infty$. Para todo $\delta > 0$ existe una constante $C \geq 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ satisface que*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n\|^q}{n^\delta}\Big)^{1/q} \leq C\|D\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

Antes de dar la prueba, notemos que la desigualdad anterior implica (4.10) dado que, tomando $\delta = \sigma - 1/q'$ y aplicando la desigualdad de Hölder al lado izquierdo de (4.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n\|_X}{n^\sigma} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n\|_X}{n^{\delta/q}} \frac{1}{n^{(\delta+1)/q'}} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n\|_X^q}{n^\delta}\Big)^{1/q} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta+1}}\Big)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq C\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n\|_X^q}{n^\delta}\Big)^{1/q}. \end{aligned}$$

Como estas magnitudes no son equivalentes, el Corolario 4.2.2 es un poco más fuerte que (4.10).

Demostración del Corolario 4.2.2. Por el Teorema 4.2.1 sabemos que existen constantes $C \geq 1$ y $0 < r < 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ satisface

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r^{\Omega(n)} \|a_n\|^q\Big)^{1/q} \leq C\|D\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

Fijemos $\delta > 0$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/p_k^\delta \leq r$ donde p_k denota el k-ésimo primo. Notemos que si $p_k = 2$ el resultado se sigue ya que $1/n^\delta \leq r^{\Omega(n)}$. Sin embargo, si $p_k > 2$ debemos controlar los primeros k primos donde la estimación por r falla. Este procedimiento es análogo a [22, Lema 2] por lo que sólo esbozamos la prueba. Fijemos $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ y consideremos su correspondiente $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ vía la transformada de Bohr. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$f_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(z) = \int_{\mathbb{T}^k} f(\omega_1, \ldots, \omega_k, z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots)\omega_1^{-\alpha_1} \ldots \omega_k^{-\alpha_k} d\omega.$$

Un cálculo sencillo muestra que $f_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ y $\|f_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\|_p \leq \|f\|_p$. Más aún, dado $\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ tenemos que

$$\widehat{f}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(\beta) = \begin{cases} \widehat{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots) & \text{si } \beta = (0, \ldots, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots) \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Aplicando (c) del Teorema 4.2.1 a $f_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ obtenemos que

$$\Big(\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} r^{|\beta|} \|\widehat{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta)\|^q \Big)^{1/q} \leq C \|f\|_p.$$

Luego, deducimos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n\|^q}{n^\delta} &\leq \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \geq 0} p_1^{-\alpha_1 \delta} \ldots p_k^{-\alpha_k \delta} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} r^{|\beta|} \|\widehat{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta)\|^q \\ &\leq C^q \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \geq 0} p_1^{-\alpha_1 \delta} \ldots p_k^{-\alpha_k \delta} \|f\|_p^q = C^q \Big(\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - 1/p_j^\delta} \Big) \|f\|_p^q, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. □

Nos enfocamos ahora en el resultado análogo al Teorema 4.2.1 para tipo (comparar también con la Proposición 4.1.2 y con (4.6)). La demostración sigue esencialmente los mismos pasos que la del Teorema 4.2.1 por lo que la esbozamos indicando las principales diferencias.

Teorema 4.2.3. *Dados un espacio de Banach X y $1 \leq p \leq 2$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X tiene tipo p;

(b) para algún (todo) $1 \leq q < \infty$ existen constantes $R, C \geq 1$ tales que toda serie de Dirichlet vectorial $D = \sum a_n n^{-s}$ satisface que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_q(X)} \leq C \Big(\sum_{n=1}^{\infty} R^{\Omega(n)} \|a_n\|^p \Big)^{1/p};$$

(c) para algún (todo) $1 \leq q < \infty$ existen constantes $C, R \geq 1$ tales que toda función $f \in H_1(\mathbb{T}^\infty, X)$ satisface que

$$\|f\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty, X)} \leq C \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} R^{|\alpha|} \|\widehat{f}(\alpha)\|^p \Big)^{1/p};$$

(d) para algún (todo) $1 \leq q < \infty$ existen constantes $C, R \geq 1$ tales que toda función $f \in L^1(\{-1,1\}^\infty, X)$ satisface que

$$\|f\|_{L^q(\{-1,1\}^\infty,X)} \leq C\Big(\sum_{\substack{A\subset\mathbb{N} \\ A \text{ finito}}} R^{|A|}\|\widehat{f}(A)\|^p\Big)^{1/p}.$$

Las desigualdades anteriores deberían interpretarse de la siguiente forma: si la suma del lado derecho es finita, entonces la serie de Dirichlet (o función) pertenece al espacio y su norma está controlada por esa suma. Sin embargo, si la suma es infinita, no podemos afirmar nada.

Demostración. Las implicaciones (b) $\Leftrightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (a) y (d) $\Rightarrow$ (a) se obtienen como en el Teorema 4.2.1.

En cuanto a (a) $\Rightarrow$ (c) notemos que para $f \in H_1(\mathbb{T}^\infty, X)$ tenemos que

$$\|f\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty,X)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty,X)}.$$

Por el Teorema 3.1.3 y un argumento de densidad como en Teorema 4.2.1, nos queda

$$\|f\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty,X)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} C^m\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\widehat{f}(\alpha)\|^p\Big)^{1/p}.$$

Tomando $R > C^p$ y aplicando la desigualdad de Hölder resulta

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty,X)} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{C}{R^{1/p}}\Big)^m \Big(R^m \sum_{|\alpha|=m} \|\widehat{f}(\alpha)\|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{C}{R^{1/p}}\Big)^{p'm}\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} R^m \sum_{|\alpha|=m} \|\widehat{f}(\alpha)\|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \widetilde{C}\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} R^{|\alpha|}\|\widehat{f}(\alpha)\|^p\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

La implicación (a) $\Rightarrow$ (d) se deduce de la misma manera. □

4.3 Resultados para convexidad y suavidad

En esta sección presentamos desigualdades de Hausdorff-Young para espacios que satisfacen nociones de convexidad o suavidad que son más fuertes que cotipo y tipo respectivamente. Esencialmente, estas propiedades permiten tomar $C = 1$ en los Teoremas 4.2.1 y 4.2.3.

Un espacio de Banach X es *p-uniformemente suave* para $1 \leq p \leq 2$ si existe $\lambda \geq 1$ tal que

$$\mathbb{E}\|x + \varepsilon y\|^p \leq \|x\|^p + \lambda\|y\|^p.$$

Análogamente, un espacio de Banach X es *q-uniformemente convexo* para $q \geq 2$ si existe $\eta > 0$ tal que

$$\|x\|^q + \eta\|y\|^q \leq \mathbb{E}\|x + \varepsilon y\|^q.$$

Veamos brevemente algunas características de estas propiedades (ver [55, Sección 1.e] y [84, Capítulo 3] para una exposición detallada). Como sucede para tipo y cotipo, es fácil ver que todo espacio de Banach es 1-uniformemente suave y ∞-uniformemente convexo, y estas propiedades son más fuertes a medida que p y q se acercan a 2. Además p-uniforme suavidad y q-uniforme convexidad implican tipo p y cotipo q respectivamente y coinciden con estas propiedades para espacios L^r con $r > 1$. Sin embargo, si bien los espacios L^1 tienen cotipo 2, no tienen q-uniforme convexidad no trivial dado que q-uniforme convexidad y p-uniforme suavidad son propiedades duales.

Un argumento inductivo sencillo en el número de variables permite extender las desigualdades anteriores para obtener desigualdades de Hausdorff-Young para funciones de Walsh, análogas a las obtenidas en los Teoremas 4.2.1 (d) y 4.2.3 (d).

Proposición 4.3.1. *Un espacio de Banach X es p-uniformemente suave si y sólo si para algún (todo) $1 < q < \infty$ existe $\lambda \geq 1$ tal que para toda función de Walsh $f \in L^q(\{-1,1\}^\infty, X)$, se tiene que*

$$\|f\|_{L^q(\{-1,1\}^\infty,X)} \leq \Big(\sum_{\substack{A\subset\mathbb{N} \\ A \text{ finito}}} \lambda^{|A|}\|\widehat{f}(A)\|^p\Big)^{1/p}. \tag{4.11}$$

Análogamente, un espacio de Banach X es q-uniformemente convexo si y sólo si para algún (todo) $1 < p < \infty$ existe $\eta > 0$ tal que para toda función de Walsh $f \in L^p(\{-1,1\}^\infty, X)$ se tiene que

$$\Big(\sum_{\substack{A\subset\mathbb{N} \\ A \text{ finito}}} \eta^{|A|}\|\widehat{f}(A)\|^q\Big)^{1/q} \leq \|f\|_{L^p(\{-1,1\}^\infty,X)}.$$

Demostración. Por un argumento de densidad usando la Proposición 1.3.6 podemos restringirnos al caso de polinomios de Walsh. Además, el parámetro q se puede cambiar apelando al Teorema 1.3.7 (ver [20, Teorema 3.2.1]) y cambiando λ, por lo que asumimos que $q = p$. Supongamos que X es p-uniformemente suave con constante $\lambda \geq 1$. Dado un polinomio de Walsh P con coeficientes $\{x_A\}_{A\subseteq[n]} \subseteq X$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p &= \mathbb{E}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}}\mathbb{E}_{\varepsilon_n}\Big\| \sum_{A\subseteq[n-1]} x_A\varepsilon_A + \varepsilon_n \sum_{A\subseteq[n-1]} x_{A\cup\{n\}}\varepsilon_A\Big\|^p \\
&\leq \mathbb{E}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}}\Big[\Big\| \sum_{A\subseteq[n-1]} x_A\varepsilon_A\Big\|^p + \lambda\Big\| \sum_{A\subseteq[n-1]} x_{A\cup\{n\}}\varepsilon_A\Big\|^p\Big] \\
&\leq \mathbb{E}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}}\Big\| \sum_{A\subseteq[n-1]} x_A\varepsilon_A\Big\|^p + \lambda\mathbb{E}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}}\Big\| \sum_{A\subseteq[n-1]} x_{A\cup\{n\}}\varepsilon_A\Big\|^p.
\end{aligned}$$

Por un argumento inductivo en n nos queda

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|P(\varepsilon)\|^p &\leq \sum_{A\subseteq[n-1]} \lambda^{|A|}\|x_A\|^p + \lambda \sum_{A\subseteq[n-1]} \lambda^{|A|}\|x_{A\cup\{n\}}\|^p \\
&= \sum_{A\subseteq[n]} \lambda^{|A|}\|x_A\|^p.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si (4.11) vale para $q = p$ podemos recuperar p-suavidad tomando funciones $f(\varepsilon) = x+\varepsilon y$ para $x, y \in X$. Omitimos la prueba de la segunda afirmación ya que es completamente análoga. □

En cuanto a la constante C en las afirmaciones (b) y (c) del Teorema 4.2.1, mostramos que puede ser reemplazada por 1 asumiendo una versión analítica más débil de uniforme convexidad. Un espacio de Banach X es *q-uniformemente $\mathbb{C}$-convexo* [38] (para $q \geq 2$) si existe $\eta > 0$ tal que

$$\big(\|x\|^q + \eta\|y\|^q\big)^{1/q} \leq \max_{z\in\mathbb{T}} \|x + zy\|,$$

para todo $x, y \in X$, y *q-uniformemente PL-convexo* (ver [19] o [69, Capítulo 11]) si

$$\|x\|^q + \eta\|y\|^q \leq \int_{\mathbb{T}} \|x + zy\|^q dz, \tag{4.12}$$

para todo $x, y \in X$. Estos conceptos son equivalentes (ver [63]) y proveen una versión analítica de la noción más conocida de q-uniforme convexidad. Es fácil ver que q-uniforme convexidad implica q-uniforme PL-convexidad que, a su vez, implica cotipo q. Cabe mencionar que los espacios L^1 son 2-uniformemente $\mathbb{C}$-convexos si bien no tienen ningún tipo de uniforme convexidad que no sea la trivial (ver [19, Teorema 4.1]).

En [7, Proposición 2.1] se prueba que q-uniforme $\mathbb{C}$-convexidad es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

(a) existe $\eta > 0$ tal que para toda función analítica $f : \mathbb{D} \to X$ se tiene que

$$\|f(0)\|^q + \eta\|f'(0)\|^q \leq \sup_{|z|<1} \|f(z)\|^q. \tag{4.13}$$

(b) existe $\eta > 0$ tal que para toda función analítica $f : \mathbb{D} \to X$ se tiene que

$$\|f(0)\|^q + \eta\|f'(0)\|^q \leq \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} \|f(rz)\|^q dz. \tag{4.14}$$

Notemos que para toda función de estas características, la aplicación $r \in [0,1) \mapsto \|f(r\bullet)\|_{H_q(\mathbb{T},X)}$ es creciente y, entonces, el supremo del lado derecho de (4.14) es de hecho un límite para $r \to 1^-$. Teniendo esto en cuenta, si $f : \mathbb{C} \to X$ es entera, entonces

$$\|f(0)\|^q + \eta\|f'(0)\|^q \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(z)\|^q dz. \tag{4.15}$$

Recíprocamente, tomando $f(z) = x + zy$ para x e y dados, obtenemos (4.12), por lo que (4.15) también es equivalente a q-uniforme $\mathbb{C}$-convexidad.

Usando (4.13) Blasco probó en [6, Teorema 2.4] que los espacios q-uniformemente $\mathbb{C}$-convexos tienen q-radio de Bohr positivo. Esto es, existe $r > 0$ tal que

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^q r^n\Big)^{1/q} \leq \sup_{|z|<1} \|f(z)\|,$$

para toda función analítica $f = \sum_n x_n z^n$ en $\mathbb{D}$. Reemplazando (4.13) con (4.15) en su argumento, deducimos que para espacios q-uniformemente $\mathbb{C}$-convexos existe $r > 0$ tal que

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^q r^n\Big)^{1/q} \leq \Big(\int_{\mathbb{T}} \|f(z)\|^q dz\Big)^{1/q}, \tag{4.16}$$

para toda función entera $f = \sum_n x_n z^n$. El siguiente teorema extiende este hecho a varias variables.

Teorema 4.3.2. *Dados un espacio de Banach X y $2 \leq q < \infty$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es q-uniformemente $\mathbb{C}$-convexo;

(b) para algún (todo) $1 \leq p < \infty$, existe una constante $0 < r < 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_p(X)$ satisface que

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r^{\Omega(n)} \|a_n\|^q\Big)^{1/q} \leq \|D\|_{\mathcal{H}_p(X)}.$$

(c) para algún (todo) $1 \leq p < \infty$, existe una constante $0 < r < 1$ tal que toda función $f \in H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ satisface que

$$\Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} r^{|\alpha|} \|\widehat{f}(\alpha)\|^q\Big)^{1/q} \leq \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^\infty, X)}.$$

Demostración. Observemos que (b) y (c) son equivalentes vía la transformada de Bohr. Además, notmeos que (c) $\Rightarrow$ (a) se obtiene tomando $f(z) = x + zy$ para $x, y \in X$ y acotando la norma p de f por su supremo en el toro.

Basta ver que (a) $\Rightarrow$ (c). Por el Teorema 1.3.3 podemos suponer que $q = p$. Alcanza con ver que (c) vale para polinomios de Steinhaus dado que el resultado general se sigue de un argumento de densidad. Probamos esto por inducción en n, el número de variables del polinomio. El caso $n = 1$ es precisamente (4.16).

Supongamos que el resultado vale para $n - 1$ y tomemos un polinomio

$$P(z) = \sum_{\alpha \in F} x_\alpha z^\alpha,$$

para $z \in \mathbb{C}^n$ (donde $F \subseteq \mathbb{N}_0^n$ es finito). Luego, podemos escribir

$$\sum_\alpha \|x_\alpha\|^q r^{|\alpha|} = \sum_{k=0}^N r^k \sum_{\substack{\alpha \in F \\ \alpha_n = k}} \|x_\alpha\|^q r^{|\alpha| - \alpha_n}.$$

Aplicando la hipótesis inductiva a cada polinomio

$$z \in \mathbb{C}^{n-1} \mapsto \sum_{\substack{\alpha \in F \\ \alpha_n = k}} x_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

tenemos que

$$\sum_\alpha \|x_\alpha\|^q r^{|\alpha|} \leq \sum_{k=0}^N r^k \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \Big\| \sum_{\substack{\alpha \in F \\ \alpha_n = k}} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Big\|^q d(z_1, \ldots, z_{n-1})$$

$$= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \sum_{k=0}^N \Big\| \sum_{\substack{\alpha \in F \\ \alpha_n = k}} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Big\|^q r^k d(z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

Finalmente, para cada $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{T}^{n-1}$ fijo podemos considerar el polinomio de $\mathbb{C}$ a X dado por

$$z \mapsto \sum_{k=0}^n \Big(\sum_{\substack{\alpha \in F \\ \alpha_n = k}} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Big) z^k$$

para luego usar el caso $n = 1$ de la inducción y concluir que

$$\sum_{k=0}^N \Big\| \sum_{\substack{\alpha \in F \\ \alpha_n = k}} x_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Big\|^q r^k \leq \int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{k=0}^N \Big(\sum_{\substack{\alpha \in F \\ \alpha_n = k}} x_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Big) z_n^k \Big\|^q dz_n$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{\alpha \in F} x_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} z_n^{\alpha_n} \Big\|^q dz_n.$$

El resultado se sigue reordenando las integrales. $\square$

Notemos que por el Teorema 4.3.2 tenemos que

$$\Big(\sum_{n\leq x}\|a_n\|^q r^{\Omega(n)}\Big)^{1/q} \leq \Big\|\sum_{n\leq x} a_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_q(X)} \leq \Big\|\sum_{n\leq x} a_n n^{-s}\Big\|_{\mathcal{H}_\infty(X)},$$

para todo polinomio de Dirichlet. Esto brinda una versión del q-radio de Bohr para series de Dirichlet vectoriales.

Concluimos esta sección con una versión dual del Teorema 4.3.2. Uno podría preguntarse si existe una noción dual a uniforme $\mathbb{C}$-convexidad que sea más débil que uniforme suavidad. Sin embargo, esto no sucede. El enfoque más directo sería invertir la desigualdad (4.12) y decir que un espacio de Banach X es p-uniformemente $\mathbb{C}$-suave (para $1 < p \leq 2$) si existe $\lambda \geq 1$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}} \|x + zy\|^p dz \leq \|x\|^p + \lambda\|y\|^p. \tag{4.17}$$

Esto no funciona dado que esta noción resulta equivalente a p-uniforme suavidad. Este fenómeno fue notado por Xu en [85] donde se prueba que una propiedad conocida como cotipo de Lusin (que es equivalente a que un espacio tenga una renormalización p-uniformemente suave) no admite una versión analítica.

Observación 4.3.3. Dado un espacio de Banach X, p-uniforme suavidad y p-uniforme $\mathbb{C}$-suavidad son equivalentes. Primero supongamos que X es p-uniformemente suave. Dados $x, y \in X$ y $z \in \mathbb{T}$ tenemos que

$$\mathbb{E}\|x + \varepsilon zy\|^p \leq \|x\|^p + \lambda\|zy\|^p = \|x\|^p + \lambda\|y\|^p,$$

para alguna constante $\lambda \geq 1$. Promediando en $\mathbb{T}$, nos queda

$$\int_{\mathbb{T}} \|x + zy\|^p dz = \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}\|x + \varepsilon zy\|^p dz \leq \|x\|^p + \lambda\|y\|^p,$$

por lo que X es p-uniformemente $\mathbb{C}$-suave.

Recíprocamente, procediendo como en el Lema 2.2.1 notemos que

$$\mathbb{E}[z|\varepsilon] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta\ \varepsilon = \frac{2}{\pi}\varepsilon.$$

Usando esto y asumiendo (4.17) obtenemos

$$\mathbb{E}\|x + \varepsilon y\|^p \leq \int_{\mathbb{T}} \Big\|x + z\frac{\pi}{2}y\Big\|^p dz \leq \|x\|^p + \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^p \lambda\|y\|^p,$$

por lo que X es p-uniformemente suave.

Teniendo esto en mente, veamos que vale una versión dual del Teorema 4.3.2 para uniforme suavidad. Junto con la Proposición 4.3.1, este resultado completa el panorama de desigualdades de Hausdorff-Young para espacios p-uniformemente suaves.

Teorema 4.3.4. *Dados un espacio de Banach X y for $1 \leq p \leq 2$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es p-uniformemente suave;

(b) para algún (todo) $1 \leq q < \infty$ existe una constante $R \geq 1$ tal que toda serie de Dirichlet vectorial $D = \sum a_n n^{-s}$ satisface que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_q(X)} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} R^{\Omega(n)} \|a_n\|^p \Big)^{1/p};$$

(c) para algún (todo) $1 \leq q < \infty$ existe una constante $R \geq 1$ tal que toda función $f \in H_1(\mathbb{T}^\infty, X)$ satisface que

$$\|f\|_{H_q(\mathbb{T}^\infty,X)} \leq \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} R^{|\alpha|} \|\widehat{f}(\alpha)\|^p \Big)^{1/p}.$$

Demostración. Como antes, observemos que (b) y (c) son equivalentes vía la transformada de Bohr. Por el Teorema 1.3.3 podemos suponer que $q = p$. Luego, el hecho de que (c) $\Rightarrow$ (a) se obtiene tomando $f(z) = x + zy$ para $x, y \in X$ y aplicando la Observación 4.3.3.

Basta ver que (a) $\Rightarrow$ (c). La prueba de este hecho es análoga a la del Teorema 4.3.2. El único ingrediente que nos falta es una versión dual de (4.16). Para obtenerla, usamos [84, Teorema 3.2.1] (probado originalmente en [2], ver también [65, Proposición 2.4]) que en particular muestra que si X es p-uniformemente suave, entonces existe una constante $R \geq 1$ tal que para todo $x \in X$ y toda variable aleatoria $\xi \in L^p(\mu, X)$ con promedio cero se tiene que

$$\mathbb{E}\|x + \xi\|^p \leq \|x\|^p + R\mathbb{E}\|\xi\|^p.$$

Luego, fijemos $x_0, \dots, x_N \in X$ y consideremos el polinomio

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} x_n z^n.$$

Aplicando la desigualdad anterior inductivamente obtenemos

$$\begin{aligned} \int \|P(z)\|^p dz &= \int \Big\| x_0 + \sum_{n=1}^{N} x_n z^n \Big\|^p dz \leq \|x_0\|^p + R \int \Big\| \sum_{n=2}^{N} x_n z^n \Big\|^p dz \\ &= \|x_0\|^p + R \int \Big\| x_1 + \sum_{n=2}^{N} x_n z^{n-1} \Big\|^p dz \leq \ldots \leq \sum_{n=0}^{N} R^n \|x_n\|^p. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdad en (4.16) y procediendo como en el Teorema 4.3.2 llegamos a la conclusión. $\square$

Capítulo 5

Series de Dirichlet vs. sumas de variables independientes

En este capítulo brindamos condiciones para poder comparar normas p de series de Dirichlet con normas p de sumas de Bernoulli. Esencialmente traducimos los resultados de la Sección 2.4 al ámbito de series de Dirichlet. Además, estudiamos el mismo problema para series de Dirichlet generales, un contexto mucho más amplio que contiene tanto la teoría de series de Fourier como la de series de Dirichlet (ordinarias). Finalmente aplicamos estas estimaciones para estudiar regiones de convergencia de series de Dirichlet conocidas como bandas de Bohr.

5.1 Series de Dirichlet vs. sumas de variables independientes

Recordemos de la Sección 2.4 que, bajo condiciones geométricas adecuadas, podemos comparar polinomios aleatorios con una suma completamente independiente de sus coeficientes. Como es usual, trasladamos estos resultados al contexto de series de Dirichlet vía la transformada de Bohr.

Para poder trabajar con sumas infinitas de variables de Bernoulli independientes, introducimos dos espacios de sucesiones. Dado un espacio de Banach X definimos

$$\mathrm{RAD}(X) = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X : \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \Big\|_{L^2(\{-1,1\}^\infty, X)} < \infty \Big\},$$

y

$$\mathrm{Rad}(X) = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X : \sum \varepsilon_n x_n \text{ converge en } X \text{ c.t.p. en } \{-1,1\}^\infty \Big\}.$$

Una cuenta sencilla muestra que $\mathrm{RAD}(X)$ es un espacio de Banach bajo la norma provista en su definición. Por otro lado, en [82, Teorema 3.1 (b)] se prueba que

$\mathrm{Rad}(X)$ puede ser identificado con la clausura en $L^2(\{-1,1\}^\infty, X)$ de

$$\operatorname{span}\Big\{\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n : \ N \in \mathbb{N},\ x_n \in X\Big\}.$$

Esto dota a $\mathrm{Rad}(X)$ de una estructura de espacio de Banach.

Notemos que por el principio de contracción (Teorema 1.2.3) dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ que se anula para $n > N$ tenemos que

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{Rad}(X)} = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{RAD}(X)} = \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

Por simplicidad identificamos $(x_n)_{n=1}^N$ con la sucesión completa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y escribimos $\|(x_n)_{n=1}^N\|_{\mathrm{Rad}(X)} = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{Rad}(X)}$. También por el principio de contracción, toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Rad}(X)$ satisface que

$$\|(x_n)_{n=1}^N\|_{\mathrm{Rad}(X)} \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{Rad}(X)}.$$

Tomando supremo en N vemos que $\mathrm{Rad}(X) \subseteq \mathrm{RAD}(X)$ isométricamente. Como consecuencia de [82, Teorema 6.1], sabemos que $\mathrm{Rad}(X) = \mathrm{RAD}(X)$ si y sólo si c_0 no es isomorfo a un subespacio de X (en el Teorema 6.1 (a) de [82], tomar $\xi_k : \{-1,1\}^\infty \to L^2(\{-1,1\}^\infty, X)$ dada por $\xi_k(\delta) = \delta_k(\varepsilon_k x_k)$). En nuestro contexto, siempre tendremos $\mathrm{Rad}(X) = \mathrm{RAD}(X)$ dado que X tendrá cotipo finito.

El siguiente resultado de [15, Teorema 4.1] es en parte consecuencia de las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.2. Nuevamente, como será presentado en [77] no debería ser considerado como una contribución original de esta tesis.

Teorema 5.1.1. *Dado un espacio de Banach X valen las siguientes afirmaciones:*

(i) X tiene tipo 2 si y sólo si existe una constante $C \geq 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_2(X)$ satisface que

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{Rad}(X)} \leq C\|D\|_{\mathcal{H}_2(X)}; \tag{5.1}$$

(ii) X tiene cotipo 2 si y sólo si existe una constante $C \geq 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ a valores en X satisface que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_2(X)} \leq C\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{RAD}(X)}.$$

Para mayor claridad, probamos que tipo 2 y cotipo 2 son condiciones suficitentes en ambas afirmaciones respectivamente ya que estas son las implicaciones que necesitamos.

Idea de la demostración. Probemos que si X tiene tipo 2, vale (5.1). Como mencionamos en la Sección 2.4, los monomios de Steinhaus $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \subseteq L^2(\mathbb{T}^n)$ forman una sucesión ortonormal. Aplicando la Proposición 2.4.1, existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo elección (finita) de vectores $\{x_\alpha\}_{|\alpha|\leq m}$ tenemos que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} \varepsilon_{i_\alpha} x_\alpha\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\Big(\int_{\mathbb{T}^n}\Big\|\sum_{|\alpha|\leq m} x_\alpha z^\alpha\Big\|^2 dz\Big)^{1/2}.$$

Equivalentemente, por la transformada de Bohr, para todo polinomio de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^N a_n n^{-s}$ a valores en X nos queda

$$\|(a_n)_{n=1}^N\|_{\mathrm{Rad}(X)} \leq C\|D\|_{\mathcal{H}_2(X)}.$$

Como las sucesiones finitas son densas en $\mathrm{Rad}(X)$ y los polinomios de Dirichlet son densos en $\mathcal{H}_2(X)$, deducimos (5.1) por un argumento de densidad.

Análogamente, asumiendo que X tiene cotipo 2 y aplicando la Proposición 2.4.2, obtenemos una constante $C \geq 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ a valores en X satisface que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_2(X)} \leq C\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{Rad}(X)}.$$

Ahora bien, como X tiene cotipo finito, no contiene una copia de c_0. Luego, sabemos que $\mathrm{Rad}(X) = \mathrm{RAD}(X)$ y podemos reemplazar la norma del lado derecho completando la prueba. $\square$

Procediendo de la misma manera podemos transferir nuestros resultados para espacios con GAP de la Sección 2.4 al contexto de series de Dirichlet.

Teorema 5.1.2. *Dado un espacio de Banach X valen las siguientes afirmaciones:*

(i) si X tiene GAP, entonces existe una constante $C \geq 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_1(X)$ satisface que

$$\|(\sqrt{2}^{-\Omega(n)} a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{Rad}(X)} \leq C\|D\|_{\mathcal{H}_1(X)};$$

(ii) si X tiene cotipo finito, X^* tiene GAP y $q > \mathrm{cot}(X)$, entonces existe una constante $C \geq 1$ tal que toda serie de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ a valores en X satisface que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_q(X)} \leq C\|(\sqrt{q/2}^{\Omega(n)} a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{RAD}(X)}.$$

Omitimos la prueba de este teorema dado que se obtiene de las Proposiciones 2.4.4 y 2.4.5 procediendo de la misma forma que en el Teorema 5.1.1.

Observación 5.1.3. Notemos que bajo las hipótesis del teorema anterior y combinándolo con las desigualdades de Hausdorff-Young del capítulo anterior, podemos estimar la norma de una serie de Dirichlet con expresiones de la forma

$$c\|(r^{\Omega(n)}a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{Rad}(X)} \leq \|D\|_{\mathcal{H}_s(X)} \leq C\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} R^{\Omega(n)}\|a_n\|^p\Big)^{1/p},$$

cuando X tiene GAP y tipo p, y

$$c\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} r^{\Omega(n)}\|a_n\|^q\Big)^{1/q} \leq \|D\|_{\mathcal{H}_s(X)} \leq C\|(R^{\Omega(n)}a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathrm{RAD}(X)},$$

cuando X^* tiene GAP y X tiene cotipo q. Aquí podemos elegir s ajustando las constantes c, C, r y R de forma acorde. Informalmente hablando, esto se ve como intercalar la norma de D en la desigualdad de tipo (o cotipo).

5.2 Series de Dirichlet generales

En esta sección traducimos los resultados de la Sección 2.4 al contexto de series de Dirichlet generales. Una *serie de Dirichlet general* D es una suma formal

$$D = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\lambda_n s},$$

donde $s \in \mathbb{C}$ es una variable compleja, $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una sucesión creciente que tiende a infinito llamada *frecuencia* y los $a_n \in \mathbb{C}$ o, más generalmente, pertenecientes a un espacio de Banach X, son los coeficientes de la serie.

Notemos que dada una serie de Dirichlet ordinaria D podemos manipular formalmente su expresión para obtener:

$$D = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n^{-s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\log n s}.$$

Luego, una serie de Dirichlet se puede interpretar como una serie de Dirichlet general con frecuencia $\lambda = (\log n)_{n\in\mathbb{N}}$. Otro ejemplo de series de Dirichlet generales son las series de potencias. Fijando $z = e^{-s}$ nos queda

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-ns},$$

una serie de Dirichlet general con frecuencia $\lambda = (n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Las series de Dirichlet generales fueron extensamente estudiadas a principios del siglo 20 por Bohr, Besicovitch, Hardy, Landau, Perron, M. Riesz y Neder entre otros. Varios años más tarde, el trabajo de Hendenmalm, Lindqvist y Seip [43] despertó un nuevo interés en series de Dirichlet ordinarias. La aplicación de técnicas modernas combinando análisis funcional y armónico trajeron nuevos avances como la teoría de espacios de Hardy de series de Dirichlet (ver [43, 3, 23]). Recientemente, en [32] (ver también [75]) Defant y Schoolmann construyeron una teoría de espacios de Hardy para series de Dirichlet generales que no sólo generaliza pero también profundiza la comprensión del contexto ordinario, ya que aisla los fenómenos de índole general de los que dependen de la frecuencia λ. Echemos un breve vistazo de esta teoría para poder discutir algunas aplicaciones de las desigualdades de *decoupling* desarrolladas en la Sección 2.4.

Comenzamos dando una definición de norma p de una serie de Dirichlet general que extiende el caso ordinario presentado en la Sección 1.4. Recordemos que hay dos formas de calcular la norma p de un polinomio de Dirichlet (ordinario). Dado un polinomio de Dirichlet D con coeficientes $a_1, \dots, a_N$ en un espacio de Banach X y dado $1 \leq p < \infty$ tenemos que

$$\|D\|_p = \lim_{T\to+\infty} \Big(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \Big\|_X^p dt\Big)^{1/p} = \Big(\int_{\mathbb{T}^\infty} \Big\| \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^\infty \\ 1\leq p^\alpha\leq N}} a_{p^\alpha} z^\alpha \Big\|_X^p dt\Big)^{1/p}. \tag{5.2}$$

Mientras que la primera forma es intrínseca y puede extenderse fácilmente al caso general, la segunda, obtenida vía la transformada de Bohr, requiere más trabajo.

Diremos λ-*serie de Dirichlet* al referirnos a una serie de Dirichlet general con una frecuencia frecuencia específica λ. Además, llamaremos λ-*polinomio de Dirichlet* a una λ-serie de Dirichlet con finitos coeficientes no nulos. Como en el caso ordinario, podemos definir la norma p de un λ-polinomio de Dirichlet intrínsecamente. Dado un λ-polinomio de Dirichlet D con coeficientes $a_1, \dots, a_N$ en un espacio de Banach X y dado $1 \leq p < \infty$ definimos

$$\|D\|_p = \lim_{T\to+\infty} \Big(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n it} \Big\|_X^p dt\Big)^{1/p}. \tag{5.3}$$

Sin embargo, necesitamos una expresión análoga al lado derecho de (5.2) para aplicar herramientas del análisis funcional y armónico. Una idea clave de Defant y Schoolmann fue notar que la razón subyacente por la que vale (5.2) es que la función $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^\infty$ dada por

$$\beta(t) = (p^{-it})_{p \text{ primo}},$$

es un homomorfismo continuo con rango denso. De hecho, en [32, Proposición 3.10] prueban el siguiente resultado.

Proposición 5.2.1. *Sea G un grupo abeliano compacto y $\beta : \mathbb{R} \to G$ un homomorfismo continuo con rango denso. Para toda función $f \in C(G)$ se tiene que*

$$\int_G f(\omega)d\omega = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\circ\beta(t)dt.$$

Con este resultado, podemos recuperar (5.2) tomando $f \in C(\mathbb{T}^\infty)$ dada por

$$f(z) = \Big\| \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^\infty \\ 1 \le p^\alpha \le N}} a_{p^\alpha} z^\alpha \Big\|_X^p,$$

y notando que

$$\beta(t)^\alpha = (p^{-it})^\alpha = (p^\alpha)^{-it} = n^{-it}.$$

Este hecho motiva la siguiente definición de [32].

Definición 5.2.2. Decimos que un par (G, β) es un *grupo de Dirichlet* si G es un grupo abeliano compacto y $\beta : \mathbb{R} \to G$ es un homomorfismo continuo con rango denso.

Notemos que si (G, β) es un grupo de Dirichlet y $h : G \to \mathbb{T}$ es un caracter, entonces $h \circ \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ es un caracter de $\mathbb{R}$. Luego, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $h \circ \beta(t) = e^{-xit}$. Más aún, como β tiene rango denso, la aplicación dual $\widehat{\beta} : \widehat{G} \to \widehat{\mathbb{R}}$ dada por $\widehat{\beta}(h) = h \circ \beta$ es inyectiva (recordar que $\widehat{G}$ es el grupo dual de G, ver también [72, Sección 1.2]).

Un grupo de Dirichlet (G, β) se dice un λ-*grupo de Dirichlet* para alguna frecuencia λ si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un caracter $h_n : G \to \mathbb{T}$ tal que $h_n \circ \beta(t) = e^{-\lambda_n it}$. Equivalentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h_n"] & \mathbb{T}. \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "e^{-\lambda_n it}"'] & \end{tikzcd}$$

Teniendo esto en cuenta, dado un espacio de Banach X y un λ-grupo de Dirichlet (G, β) definimos el espacio de Hardy $H_p^\lambda(G, X) \subseteq L^p(G, X)$ como el espacio de todas las funciones $f \in L^p(G, X)$ con transformada de Fourier soportada en $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Es fácil verificar que este resulta un espacio de Banach que de hecho constituye el sustituto correcto de $H_p(\mathbb{T}^\infty, X)$ para series de Dirichlet generales.

Para completar el panorama, en [32] se prueba que toda frecuencia λ admite un λ-grupo de Dirichlet. Si bien la elección del λ-grupo de Dirichlet no es única, los respectivos espacios de Hardy resultan isométricamente isomorfos (ver [32, Teorema 3.24] para una versión escalar que se extiende al caso vectorial sin ninguna modificación). Esto nos permite definir los espacios de espacio de Hardy para series de Dirichlet que no dependen de la elección del grupo de Dirichlet.

Definición 5.2.3. Dado un espacio de Banach X, una frecuencia λ y $1 \le p \le \infty$ definimos el *espacio de Hardy de λ-series de Dirichlet* $\mathcal{H}_p(\lambda, X)$ como el espacio de λ-series de Dirichlet

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{-\lambda_n s},$$

tales que existe $f \in H_p^\lambda(G, X)$ para algún λ-grupo de Dirichlet (G, β) con coeficientes de Fourier $\widehat{f}(h_n) = a_n$. Además, definimos $\|D\|_p = \|f\|_{H_p^\lambda(G,X)}$.

Como mencionamos anteriormente, esta definición no depende de la elección del grupo de Dirichlet. Más aún, $\mathcal{H}_p(\lambda, X)$ es por definición un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $H_p^\lambda(G, X)$. Finalmente, usando la Proposición 5.2.1 y procediendo de la misma manera que en el caso ordinario, obtenemos que esta definición de norma p coincide con la que dimos en (5.3) para polinomios de Dirichlet. Esto se prueba en [32] para el caso escalar (el caso vectorial es idéntico) y extiende (5.2) a series de Dirichlet generales.

Estamos listos para trasladar algunos resultados de la Sección 2.4 a este contexto. Primero notemos que para un λ-grupo de Dirichlet (G, β), el conjunto de caracters $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(G)$ forma una sucesión ortonormal. Por lo tanto, aplicando la Proposición 2.4.1, dado un espacio de Banach X de tipo 2, existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo λ-polinomio de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s}$ se tiene que

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq C\Big\|\sum_{n=1}^N a_n h_n\Big\|_{H_2^\lambda(G,X)} = C\Big\|\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s}\Big\|_2 = C\|D\|_2. \quad (5.4)$$

Análogamente, usando la Proposición 2.4.2 obtenemos la afirmación dual. Dado un espacio de Banach X de cotipo 2, existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo λ-polinomio de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s}$ se tiene que

$$\|D\|_2 \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n\Big\|^2\Big)^{1/2}.$$

En cuanto a resultados para espacios con GAP, todo se vuelve más complejo dado que necesitamos algún tipo de desigualdad de Khintchine (ver por ejemplo la prueba de la Proposición 2.4.4). Para sortear esta dificultad, nos restringimos a un caso especial de frecuencias conocido como conjuntos de Sidon algebraicos o conjuntos B_2. Cabe destacar que cualquier familia de frecuencias donde valga una desigualdad de Khintchine de 2 a 1 sirve (estas a veces se conocen como conjuntos $\Lambda(2)$, ver [40]). Presentamos los resultados para conjuntos B_2 dado que se definen por una propiedad algebraica fácil de constatar.

Decimos que una frecuencia λ es un *conjunto* B_2 si para toda elección de $j, k, r, s \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lambda_j + \lambda_k = \lambda_r + \lambda_s \implies \begin{cases} j = r \text{ y } k = s \\ \text{o} \\ j = s \text{ y } k = r \end{cases}.$$

Podemos interpretar geométricamente esta condición reordenando la expresión como $\lambda_j - \lambda_r = \lambda_s - \lambda_k$. Desde este punto de vista, una frecuencia λ es un conjunto B_2 si las distancias entre elementos de λ son siempre distintas. Para este tipo de frecuencias vale una desigualdad de Khintchine (ver [40, Proposición 6.3.11]). Incluimos una prueba para mayor claridad.

Lema 5.2.4. *Si λ es un conjunto B_2 y (G,β) es un λ-grupo de Dirichlet, entonces para toda elección de finitos $a_1,\dots,a_N \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\int_G \Big|\sum_{n=1}^N a_n h_n(\omega)\Big|^2 d\omega \le \sqrt{2}\int_G \Big|\sum_{n=1}^N a_n h_n(\omega)\Big| d\omega.$$

Demostración. Recordemos que por invariancia por traslaciones, el único caracter con integral no nula en G es 1. Luego, si $j,k,r,s \in \mathbb{N}$ satisfacen que

$$\int_G h_j(\omega)\overline{h_r(\omega)}h_k(\omega)\overline{h_s(\omega)}d\omega \neq 0,$$

entonces necesariamente

$$h_j\overline{h_r}h_k\overline{h_s} = 1.$$

Evaluando en $\beta(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ nos queda

$$1 = e^{-\lambda_j it}\overline{e^{-\lambda_r it}}e^{-\lambda_k it}\overline{e^{-\lambda_s it}} = e^{-(\lambda_j-\lambda_r+\lambda_k-\lambda_s)it}.$$

Por lo tanto, resulta que

$$\lambda_j + \lambda_k = \lambda_r + \lambda_s.$$

Como λ es un conjunto B_2 concluimos que $j=r$ y $k=s$, o bien, $j=s$ y $k=r$. En ambos casos obtenemos

$$\int_G h_j(\omega)\overline{h_r(\omega)}h_k(\omega)\overline{h_s(\omega)}d\omega = \int_G |h_j(\omega)h_k(\omega)|^2 d\omega = 1.$$

Teniendo esto en cuenta, podemos estimar la norma 4 por la norma 2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\int_G \Big|\sum_{n=1}^N a_n h_n(\omega)\Big|^4 d\omega &= \sum_{j,k,r,s=1}^N a_j\overline{a_r}a_k\overline{a_s}\int_G h_j(\omega)\overline{h_r(\omega)}h_k(\omega)\overline{h_s(\omega)}d\omega \\ &= 2\sum_{j\neq k}^N |a_j a_k|^2 + \sum_{j=1}^N |a_j|^4 \le 2\sum_{j,k=1}^N |a_j a_k|^2 \\ &= 2\Big(\int_G \Big|\sum_{n=1}^N a_n h_n(\omega)\Big|^2 d\omega\Big)^2.\end{aligned}$$

Llamando $f = \sum_{n=1}^N a_n h_n$ nos queda

$$\|f\|_4 \le 2^{1/4}\|f\|_2.$$

Ahora usamos el conocido argumento 4/3 de Littlewood. Escribiendo $f^2 = f^{2/3}f^{4/3}$ y usando la desigualdad de Hölder para $p=3/2$ (y $q=3$) tenemos que

$$\|f\|_2 \le \|f\|_1^{1/3}\|f\|_4^{2/3} \le 2^{1/6}\|f\|_1^{1/3}\|f\|_2^{2/3}.$$

Reagrupando la última desigualdad llegamos a

$$\|f\|_2 \le \sqrt{2}\|f\|_1.$$

□

Notemos que, de hecho, podemos estimar la norma 4 por la norma 1 para conjuntos B_2. Estamos en posición de probar el resultado análogo a la Proposición 2.4.4.

Proposición 5.2.5. *Sean X un espacio de Banach con GAP, λ un conjunto B_2 y (G, β) un λ-grupo de Dirichlet. Entonces, existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo λ-polinomio de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}$ se tiene que*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n \Big\|_X^2\Big)^{1/2} \leq C \int_G \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n h_n(\omega) \Big\|_X d\omega = C\|D\|_1.$$

Demostración. Notemos $f = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n$ y sea $T : \ell_2^N \to X$ el operador dado por $T(e_n) = a_n$. Como X tiene GAP, por (2.34) y procediendo como en la Proposición 2.4.4 obtenemos

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n \Big\|_X^2\Big)^{1/2} \leq C_1 \Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^{N} \gamma_n a_n \Big\|_X^2\Big)^{1/2} \leq C_2 \pi_1(T^*), \tag{5.5}$$

para ciertas constantes $C_1, C_2 \geq 1$. Para todo $x^* \in X^*$ observemos que

$$\|x^*(f)\|_{L^2(G)} = \|(x^*(a_n))_{n=1}^N\|_{\ell_2^N} = \|T^*(x^*)\|_{\ell_2^N}.$$

Por lo tanto, dada una colección finita de vectores $x_k^* \in X^*$ y usando el lema previo para $x_k^*(f)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_k \|T^*(x_k^*)\|_{\ell_2^N} &= \sum_k \|x_k^*(f)\|_2 \leq \sqrt{2} \sum_k \|x_k^*(f)\|_1 \\
&= \sqrt{2} \int_G \sum_k |x_k^*(f(\omega))| d\omega \\
&\leq \sqrt{2} \int_G \|f(\omega)\|_X \sup_{x^{**} \in B_{X^{**}}} \sum_k |x^{**}(x_k^*)| d\omega \\
&= \sqrt{2} \|f\|_{L^1(G,X)} \sup_{x^{**} \in B_{X^{**}}} \sum_k |x^{**}(x_k^*)|.
\end{aligned}$$

Por la definición de norma 1-sumante deducimos que $\pi_1(T^*) \leq \sqrt{2}\|f\|_{L^1(G,X)}$ que, junto con (5.5), concluye la prueba. $\square$

5.3 Bandas de Bohr

En esta sección estudiamos algunos fenómenos clásicos de convergencia de series de Dirichlet en el contexto general vectorial. Distintos tipos de convergencia, como convergencia puntual o absoluta, esencialmente ocurren en semiplanos en $\mathbb{C}$ de la forma $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \sigma\}$ para algún $\sigma \in \mathbb{R}$ (ver [41, Sección II.2]). La región donde algún tipo de convergencia se da mientras que otro falla constituye una banda vertical. El ancho máximo de estas bandas fue intensamente estudiado dado que codifica qué tan lejos yace un tipo de convergencia respecto de otro. Resumimos brevemente este tema y recomendamos [23, Capítulos 1 y 26] para más detalles en el caso ordinario (escalar y vectorial) y [32, 75] para el caso general escalar.

Comencemos con el ejemplo más sencillo de serie de Dirichlet general, a saber, series de potencias. Recordemos que las series de potencias se pueden ver como λ-series de Dirichlet para la frecuencia $\lambda = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ por el cambio de variables $z = e^{-s}$ que nos da

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-ns}.$$

Para series de potencias, la convergencia está esencialmente determinada por el radio de convergencia. Este radio es el mismo tanto para convergencia puntual como absoluta. Más aún, es el R más grande para el cual la serie converge uniformemente en todo disco de radio $R - \varepsilon$. Para traducir esto al contexto de series de Dirichlet notemos que

$$|z| = |e^{-s}| = e^{-\operatorname{Re} s}.$$

Luego, obtenemos que $|z| < R$ si y sólo si $\operatorname{Re} s > \sigma$ para algún $\sigma \in \mathbb{R}$. Desde este punto de vista, existe un único semiplano en $\mathbb{C}$ que describe la convergencia puntual, uniforme y absoluta de una serie de Dirichlet con frecuencia $\lambda = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto quiere decir que el fenómeno de las bandas está ausente en este caso.

Para series de Dirichlet generales la situación cambia. Notemos $[\operatorname{Re} s > \sigma]$ al semiplano de todos los $s \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{Re} s > \sigma$. Dada una λ-serie de Dirichlet vectorial D definimos las siguientes abscisas de convergencia:

$$\begin{aligned}
\sigma_c(D) &= \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \ D \text{ converge en } [\operatorname{Re} s > \sigma]\}\,;\\
\sigma_u(D) &= \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \ D \text{ converge uniformemente en } [\operatorname{Re} s > \sigma]\}\,;\\
\sigma_a(D) &= \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \ D \text{ converges absolutamente en } [\operatorname{Re} s > \sigma]\}\,.
\end{aligned}$$

Estos números determinan los mayores semiplanos para los que vale algún tipo de convergencia en D. Notemos que convergencia absoluta para algún $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$ implica convergencia uniforme en el semiplano $[\operatorname{Re} s \geq \sigma_0]$ dado que podemos estimar uniformemente la cola de la serie por

$$\Big\| \sum_{n\geq N} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\| \leq \sum_{n\geq N} \|a_n\| e^{-\lambda_n \sigma_0}.$$

Como convergencia uniforme implica trivialmente convergencia puntual, nos queda

$$-\infty \leq \sigma_c(D) \leq \sigma_u(D) \leq \sigma_a(D) \leq \infty.$$

Lo interesante es determinar qué tan lejos pueden estar estas magnitudes. Es decir, determinar el ancho máximo de las bandas donde vale una convergencia mientras que otra falla.

En cuanto a series de Dirichlet ordinarias, la brecha entre $\sigma_c(D)$ y $\sigma_a(D)$ puede estimarse fácilmente. Supongamos que $D = \sum a_n n^{-s}$ converge en $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Entonces, necesariamente $(\|a_n\| n^{-\sigma_0})_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y para todo $\varepsilon > 0$ nos queda

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| n^{-(\sigma_0+1+\varepsilon)} < \infty.$$

Luego, deducimos

$$\sigma_u(D) - \sigma_c(D) \leq \sigma_a(D) - \sigma_c(D) \leq 1.$$

Más aún, esta cota es óptima en el caso escalar y, por lo tanto, en el vectorial. Por ejemplo en [23, Proposición 1.5] se prueba que para $D = \sum (-1)^k {p_k}^{-s}$ donde $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de números primos, tenemos que $\sigma_c(D) = 0$ y $\sigma_u(D) = \sigma_a(D) = 1$. Luego, nos queda

$$\sup(\sigma_a(D) - \sigma_c(D)) = \sup(\sigma_u(D) - \sigma_c(D)) = 1, \tag{5.6}$$

donde los supremos se toman sobre todas las series de Dirichlet D. Hallar una estimación similar relacionando $\sigma_u(D)$ y $\sigma_a(D)$ resultó ser un problema mucho más complejo. En [9] Bohr probó que

$$S = \sup\{\sigma_a(D) - \sigma_u(D) : \ D \text{ serie de Dirichlet}\} \leq \frac{1}{2},$$

y arguyó que hallar el valor exacto de este supremo requería una comprensión más profunda de holomorfía en dimensión infinita. Este problema pasó a llamarse problema de convergencia absoluta de Bohr y tomó varios años en ser resuelto por Bohnenblust y Hille. En [8, Sección 5] probaron que

$$S = \frac{1}{2}.$$

Mientras que (5.6) vale para cualquier serie de Dirichlet vectorial (ordinaria), el problema de convergencia absoluta adquiere una nueva dimensión (o más bien varias) en el caso vectorial ya que depende de la geometría del espacio de Banach X. Dados un espacio de Banach X y una frecuencia λ definimos

$$S(\lambda, X) = \sup(\sigma_a(D) - \sigma_u(D)),$$

donde el supremo se toma sobre todas las λ-series de Dirichlet a valores en X. Siempre que $X = \mathbb{C}$ (caso escalar) o $\lambda = (\log n)_{n\in\mathbb{N}}$ (caso ordinario) los omitiremos de la notación y escribiremos $S(\lambda)$ o $S(X)$ respectivamente. Recordemos la notación $\cot(X) = \inf\{q : \ X \text{ tiene cotipo } q\}$. En [22, Teorema 1] se prueba que dado un espacio de Banach X se tiene que

$$S(X) = 1 - \frac{1}{\cot(X)}. \tag{5.7}$$

Para ganar un mayor entendimiento del rol que juega el cotipo y cómo se relaciona el trabajo hecho en capítulos anteriores con este tema, introducimos otras bandas de interés. Dada una λ-serie de Dirichlet $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ a valores en X y $\sigma \in \mathbb{R}$ sea D_σ su traslación horizontal dada por

$$D_\sigma = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}.$$

Vale la pena mencionar que D_σ se puede interpretar como la convolución de D con un núcleo de Poisson (ver [32, Lema 3.12]). Más precisamente, para todo $\sigma > 0$ definimos $P_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$P_\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2 + t^2}.$$

Notemos que $P_\sigma \geq 0$ y $\|P_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ para todo $\sigma > 0$. Ahora bien, sea (G, β) un λ-grupo de Dirichlet y dado $1 \leq p \leq \infty$ sea $f \in H_p^\lambda(G, X)$ la función correspondiente a alguna $D \in \mathcal{H}_p(\lambda, X)$. Definamos $f_\sigma : G \to X$ por

$$f_\sigma(\omega) = \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t) f\big(\omega\overline{\beta(t)}\big) dt. \tag{5.8}$$

Por la desigualdad de Minkowski y la invariancia por traslaciones para todo $1 \leq p \leq \infty$ nos queda

$$\|f_\sigma\|_p \leq \|f\|_p \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t) dt = \|f\|_p.$$

Además, para todo caracter $h : G \to \mathbb{T}$ sea $x \in \mathbb{R}$ el único número tal que $h \circ \beta(t) = e^{-ixt}$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f_\sigma}(h) &= \int_G \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t) f\big(\omega\overline{\beta(t)}\big) dt\, \overline{h(\omega)} d\omega = \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t) \int_G f\big(\omega\overline{\beta(t)}\big)\overline{h(\omega)} d\omega\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t) \int_G f(\omega)\overline{h(\omega\beta(t))} d\omega\, dt = \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t)\overline{h\circ\beta(t)} dt\, \widehat{f}(h) \\
&= \widehat{P_\sigma}(x)\widehat{f}(h) = e^{-\sigma|x|}\widehat{f}(h).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $f_\sigma \in H_p^\lambda(G, X)$ y su serie de Dirichlet asociada es D_σ, dado que

$$\widehat{f_\sigma}(h) = \begin{cases} e^{-\lambda_n\sigma} a_n & \text{si } h = h_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}.$$

En consecuencia, nos queda que $\|D_\sigma\|_p \leq \|D\|_p$ para todo $\sigma \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ y $D \in \mathcal{H}_p(\lambda, X)$. Luego, para $1 \leq p \leq \infty$ es natural definir

$$\sigma_p(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \ D_\sigma \in \mathcal{H}_p(\lambda, X)\}.$$

Notemos que por la desigualdad triangular vale que $\sigma_p(D) \leq \sigma_a(D)$, pues

$$\|D_\sigma\|_p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| e^{-\lambda_n\sigma}.$$

Para codificar qué tan lejos está la pertenencia de una serie a $\mathcal{H}_p(\lambda, X)$ de su convergencia absoluta, consideramos las bandas

$$S_p(\lambda, X) = \sup\{\sigma_a(D) - \sigma_p(D) : \ D \text{ serie de Dirichlet}\} = \sup_{D \in \mathcal{H}_p(\lambda, X)} \sigma_a(D),$$

donde la última igualdad se sigue de un argumento de traslación. Como para $p \leq q$ tenemos que $\mathcal{H}_q(\lambda, X) \subseteq \mathcal{H}_p(\lambda, X)$ por la desigualdad de Jensen, es claro que

$$S_q(\lambda, X) \leq S_p(\lambda, X). \tag{5.9}$$

Lema 5.3.1. *Sea X un espacio de Banach y λ una frecuencia. Para toda λ-serie de Dirichlet D a valores en X se tiene que*

$$\sigma_\infty(D) \leq \sigma_u(D).$$

En particular, obtenemos

$$S(\lambda, X) \leq S_\infty(\lambda, X).$$

Antes de dar la prueba notemos que para series de Dirichlet vectoriales ordinarias, una mirada cuidadosa de (4.10) muestra que para todo $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que

$$S_p(X) \leq 1 - \frac{1}{\cot(X)},$$

donde como antes, escribimos $S_p(X)$ en vez de $S_p((\log n)_{n\in\mathbb{N}}, X)$. Esto se usó en [13] junto con (5.7) para obtener que

$$1 - \frac{1}{\cot(X)} = S(X) = S_p(X).$$

Demostración del Lema 5.3.1. Fijemos una λ-serie de Dirichlet $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ y $\sigma > \sigma_u(D)$. Sea (G, β) un λ-grupo de Dirichlet. Notemos que

$$D_\sigma(it) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n it} = D(\sigma + it).$$

Luego, $D_\sigma(it)$ converge uniformemente en t. Denotemos al espacio de Banach de funciones continuas de G a X junto con la norma supremo por $C(G, X)$. Como β tiene rango denso nos queda

$$\Big\| \sum_{n=N}^{M} a_n e^{-\lambda_n \sigma} h_n \Big\|_{C(G,X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| \sum_{n=N}^{M} a_n e^{-\lambda_n \sigma} e^{-i\lambda_n t} \Big| \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0.$$

Luego, resulta que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\lambda_n \sigma} h_n \in C(G, X) \subseteq H_\infty^\lambda(G, X),$$

y por lo tanto $D_\sigma \in \mathcal{H}_\infty(\lambda, X)$. Deducimos que $\sigma_\infty(D) \leq \sigma$ y la conclusión se sigue tomando ínfimo sobre σ. $\square$

A continuación, nos enfocamos en bandas para frecuencias más allá de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\log n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado un espacio de Banach X y una frecuencia λ definimos

$$L(\lambda, X) = \sup(\sigma_a(D) - \sigma_c(D)),$$

donde el supremo se toma sobre todas las series de Dirichlet D. Veamos que este número no depende del espacio de Banach X. Como antes, supongamos que $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ converge en $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Luego, necesariamente $(\|a_n\| e^{-\lambda_n \sigma_0})_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado y para todo $\sigma > \sigma_a(\sum e^{-\lambda_n s})$ tenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| e^{-\lambda_n(\sigma_0+\sigma)} \leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n \sigma} < \infty.$$

Escribiendo $L(\lambda) = L(\lambda, \mathbb{C})$ nos queda

$$L(\lambda) \leq L(\lambda, X) \leq \sigma_a\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n s}\Big). \tag{5.10}$$

Por otro lado, para todo $\sigma > 0$ tenemos que $e^{-\lambda_n \sigma}$ decrece a 0 cuando $n \to \infty$ por lo que la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n e^{-\lambda_n \sigma},$$

converge. Además está claro que la serie diverge para $\sigma \leq 0$ dado que en este caso $(-1)^n e^{-\lambda_n \sigma} \not\to 0$. Juntando esto con [41, Teorema 1], que afirma que la convergencia en $\sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$ implica la convergencia en el semiplano $[\operatorname{Re} s > \sigma_0]$, prueba que

$$\sigma_c\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n e^{-\lambda_n s}\Big) = 0.$$

Luego, obtenemos

$$\sigma_a\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n s}\Big) = \sigma_a\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n e^{-\lambda_n s}\Big) - \sigma_c\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n e^{-\lambda_n s}\Big) \leq L(\lambda).$$

Combinando esto con (5.10) concluimos que

$$L(\lambda) = L(\lambda, X) = \sigma_a\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n s}\Big). \tag{5.11}$$

Más aún, en [10, Hilfssatz 3] se prueba que

$$L(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n}.$$

Por lo tanto, la banda entre convergencia absoluta y puntual puede ser calculada según la velocidad con la que λ_n tiende a infinito y es independiente del espacio de Banach X. Estudiemos ahora $S(\lambda, X)$ que sí depende de la geometría, como muestra (5.7).

Empezamos calculando el valor de una banda más simple para trabajar, a saber $S_2(\lambda)$. Notemos que $\mathcal{H}_2(\lambda)$ es isométricamente isomorfo a ℓ_2. Más aún, dada $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{H}_2(\lambda)$ sea $f \in H_2^\lambda(G)$ su función asociada para cierto λ-grupo de Dirichlet (G, β). Como $f = \sum a_n h_n$ y los caracteres $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forman una base ortonormal tenemos que

$$\|D\|_{\mathcal{H}_2(\lambda)} = \|f\|_{H_2^\lambda(G)} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Luego, para $\sigma > L(\lambda)/2$ nos queda

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n 2\sigma}\Big)^{1/2} = \|D\|_{\mathcal{H}_2(\lambda)} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n 2\sigma}\Big)^{1/2} < \infty,$$

donde en el último paso usamos (5.11) y el hecho de que $2\sigma > L(\lambda)$. Esto prueba que $S_2(\lambda) \leq L(\lambda)/2$. Una cuenta sencilla para la serie $D = \sum e^{-\lambda_n \sigma} e^{-\lambda_n s}$ con σ arbitrariamente cercano a $L(\lambda)/2$ muestra que esto es de hecho una igualdad. En particular, combinando esto con el Lema 5.3.1 y (5.9) resulta que

$$S(\lambda) \leq S_\infty(\lambda) \leq S_2(\lambda) \leq \frac{L(\lambda)}{2}.$$

Sin embargo, la estimación $S(\lambda) \leq L(\lambda)/2$ está lejos de ser una igualdad. Un resultado de Neder en [61] muestra que para todo $x > 0$ y $0 \leq y \leq \frac{x}{2}$ existe una frecuencia λ tal que $S(\lambda) = y$ y $L(\lambda) = x$. En cuanto al caso $x = \infty$, en [76, Teorema 4.7] se prueba que para frecuencias λ tales que $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$, se tiene que $S(\lambda) = 0$. Si además elegimos λ para que crezca más lento que $\log n$, nos queda $L(\lambda) = \infty$. Por lo tanto, pareciera que para series de Dirichlet escalares generales sólo tiene sentido preguntarse por el valor exacto de $S(\lambda)$ para familias particulares de frecuencias. Este fenómeno parece cambiar drásticamente si consideramos λ-series de Dirichlet en un espacio de Banach de dimensión infinita.

Proposición 5.3.2. *Dados un espacio de Banach X de dimensión infinita y una frecuencia arbitraria λ se tiene que*

$$L(\lambda)\big(1 - \frac{1}{\cot(X)}\big) \leq S_\infty(\lambda, X).$$

Observación 5.3.3. Como se mencionó durante una comunicación personal, usando un argumento de estilo *gliding hump* Bayart probó un resultado más fuerte. Para un espacio de Banach X de dimensión infinita y una frecuencia arbitraria λ se tiene que

$$L(\lambda)\big(1 - \frac{1}{\cot(X)}\big) \leq S(\lambda, X). \tag{5.12}$$

Como un primer paso hacia la prueba de la Proposición 5.3.2, reducimos el problema a estudiar λ-polinomios de Dirichlet en vez de series.

Lema 5.3.4. *Sean X un espacio de Banach, λ una frecuencia y $1 \leq p \leq \infty$. La banda $S_p(\lambda, X)$ es el ínfimo sobre todos los $\sigma \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una constante $C_\sigma \geq 1$ tal que para todo λ-polinomio de Dirichlet se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{N} \|a_n\| e^{-\lambda_n \sigma} \leq C_\sigma \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_p.$$

Demostración. Denotemos el ínfimo del enunciado por A. Empezamos usando un argumento de gráfico cerrado para probar que $A \leq S_p(\lambda, X)$. Fijemos $\sigma > S_p(\lambda, X)$ y definamos el operador $T_\sigma : \mathcal{H}_p(\lambda, X) \to \ell_1(X)$ por

$$T_\sigma\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\lambda_n s}\Big) = (a_n e^{-\lambda_n \sigma})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Como $\sigma > S_p(\lambda, X)$, el operador T_σ está bien definido. Tomemos $D_k = \sum a_{n,k} e^{-\lambda_n s}$ en $\mathcal{H}_p(\lambda, X)$ tal que $D_k \to D = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ en $\mathcal{H}_p(\lambda, X)$ y $T_\sigma(D_k) \to c$ en $\ell_1(X)$ para $k \to \infty$. Por el teorema del gráfico cerrado, basta ver que $T_\sigma(D) = c$. Fijemos un λ-grupo de Dirichlet (G, β) y sean $f_k, f \in H_p^\lambda(G, X)$ las funciones asociadas a D_k y D. Tenemos que $f_k \to f$ en $H_p^\lambda(G, X)$ y, luego, $\widehat{f_k}(h_n) \to \widehat{f}(h_n)$ en X para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$a_{n,k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_n.$$

Por otro lado, como $T_\sigma(D_k) \to c$ en $\ell_1(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ nos queda

$$a_{n,k} e^{-\lambda_n \sigma} \xrightarrow[k\to\infty]{} c_n.$$

Por lo tanto, $c_n = a_n e^{-\lambda_n \sigma}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual prueba que $T_\sigma(D) = c$. Esto muestra que T_σ es continuo y $A \leq \sigma$ ya que, para todo λ-polinomio de Dirichlet, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} \|a_n\| e^{-\lambda_n \sigma} \leq \|T_\sigma\| \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_p.$$

Como $\sigma > S_p(\lambda, X)$ era arbitrario, concluimos que $A \leq S_p(\lambda, X)$.

Para ver que $S_p(\lambda, X) \leq A$, necesitamos definir una convolución con un núcleo de Fejér de forma análoga a lo realizado en (5.8) para el núcleo de Poisson. Para todo $x > 0$ definimos $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F_x(t) = x\Big(\frac{\sin(\pi x t)}{\pi x t}\Big)^2.$$

Notemos que $F_x \geq 0$ y $\|F_x\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. Sea (G, β) un λ-grupo de Dirichlet y dado $1 \leq p \leq \infty$, fijemos $f \in H_p^\lambda(G, X)$. Definimos $R_x f : G \to X$ por

$$R_x f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} F_x(t) f\big(\omega\overline{\beta(t)}\big) dt.$$

Por la desigualdad de Minkowski y la invariancia por traslaciones, para todo $1 \leq p \leq \infty$ nos queda

$$\|R_x f\|_p \leq \|f\|_p \int_{\mathbb{R}} F_x(t)dt = \|f\|_p.$$

Para todo caracter $h : G \to \mathbb{T}$ sea $y \in \mathbb{R}$ el único número tal que $h \circ \beta(t) = e^{-iyt}$. Como hicimos para el núcleo de Poisson, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{R_x f}(h) = \widehat{F_x}(y)\widehat{f}(h) &= \widehat{\Big[\Big(\frac{\sin(\pi x t)}{\pi\sqrt{x}t}\Big)^2\Big]}(y)\widehat{f}(h) \\
&= \chi_{(-x/2,x/2)} * \chi_{(-x/2,x/2)}(y)\widehat{f}(h) \\
&= \big(1 - \frac{|y|}{x}\big)\chi_{(-x,x)}(y)\widehat{f}(h).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos que

$$\widehat{R_x f}(h) = \begin{cases} \big(1 - \frac{\lambda_n}{x}\big)a_n & \text{if } h = h_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ y } \lambda_n < x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Esto prueba que R_x define una contracción de $H_p^\lambda(G,X)$ en $H_p^\lambda(G,X)$ para todo $x > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$. Por supuesto, también podemos ver a R_x como una contracción en $\mathcal{H}_p(\lambda, X)$.

Teniendo esto en cuenta, fijemos $\sigma > A$ y $D = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \in \mathcal{H}_p(\lambda, X)$. Dado $x > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_n \leq x} \|a_n\| e^{-\lambda_n \sigma} &\leq \sum_{\lambda_n \leq x} \|a_n\| e^{-\lambda_n \sigma} + 2 \sum_{x < \lambda_n \leq 2x} (1 - \frac{\lambda_n}{2x})\|a_n\| e^{-\lambda_n \sigma} \\
&\leq C_\sigma \Big\| \sum_{\lambda_n \leq x} a_n e^{-\lambda_n s} + 2 \sum_{x < \lambda_n \leq 2x} (1 - \frac{\lambda_n}{2x}) a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_p \\
&= C_\sigma \Big\| 2 \sum_{\lambda_n \leq 2x} (1 - \frac{\lambda_n}{2x}) a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_{\lambda_n \leq x} (1 - \frac{\lambda_n}{x}) a_n e^{-\lambda_n s} \Big\|_p \\
&= C_\sigma \|2R_{2x}(D) - R_x(D)\|_1 \leq 3C_\sigma \|D\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\sigma > S_p(\lambda, X)$. □

Mencionamos que el uso de $2R_{2x} - R_x$ en la demostración anterior, que surge del núcleo de de la Vallée Poussin, es crucial para el desarrollo del argumento ya que nos permitió truncar la serie con un buen control de la norma y dejando los primeros coeficientes intactos. Usando esta caracterización de $S_\infty(\lambda, X)$ estamos en condiciones de probar la Proposición 5.3.2.

Demostración de la Proposición 5.3.2. Escribamos

$$\frac{1}{\cot(X)'} = 1 - \frac{1}{\cot(X)}.$$

Luego, una cuenta directa usando (5.11) muestra que

$$L(\lambda)\Big(1-\frac{1}{\cot(X)}\Big)=L\Big(\cot(X)'\lambda\Big)=\inf\big\{\sigma\in\mathbb{R}\colon (e^{-\lambda_n\sigma})\in\ell_{\cot(X)'}\big\}=: B\,.$$

Veamos que $B\le S_\infty(\lambda,X)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $S_\infty(\lambda,X)$ es finito y tomemos algún $\sigma>S_\infty(\lambda,X)$. Por el lema anterior, existe $C_\sigma\ge 1$ tal que para todo N y toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^N \|a_n\|_X e^{-\lambda_n\sigma}\le C_\sigma\Big\|\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s}\Big\|_{\mathcal{H}_\infty(\lambda,X)}. \tag{5.13}$$

Fijemos un λ-grupo de Dirichlet (G,β) y recordemos que $C(G,X)$ es el espacio de Banach de funciones continuas de G en X. Notando que $\sum_{n=1}^N a_nh_n$ es continuo y β tiene rango denso, obtenemos

$$\Big\|\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s}\Big\|_{\mathcal{H}_\infty(\lambda,X)}=\Big\|\sum_{n=1}^N a_nh_n\Big\|_{C(G,X)}=\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big\|\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n it}\Big\|_X. \tag{5.14}$$

Veamos que $(e^{-\lambda_n\sigma})_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_{\cot(X)'}$, esto es, $B\le\sigma$. Como X tiene dimensión infinita, sabemos de [58] (ver también [33, Teorema 14.5]) que existen $x_1,\dots,x_N\in X$ tales que para todo $u=(u_1,\dots,u_N)\in\mathbb{C}^N$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\|u\|_{\ell_\infty}\le\Big\|\sum_{n=1}^N x_nu_n\Big\|_X\le\|u\|_{\ell_{\cot(X)}}. \tag{5.15}$$

Ahora bien, sean $w_1,\dots,w_N\in\mathbb{C}$ arbitrarios. Aplicando (5.13), (5.14) y (5.15) para $a_n=x_nw_n$, por la elección de σ obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N|e^{-\lambda_n\sigma}w_n|&\le 2\sum_{n=1}^N\|x_nw_n\|_Xe^{-\lambda_n\sigma}\le 2C_\sigma\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big\|\sum_{n=1}^N x_nw_ne^{-\lambda_n it}\Big\|_X\\ &\le 2C_\sigma\Big(\sum_{n=1}^N|w_ne^{-i\lambda_n t}|^{\cot(X)}\Big)^{1/\cot(X)}=2C_\sigma\Big(\sum_{n=1}^N|w_n|^{\cot(X)}\Big)^{1/\cot(X)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por dualidad nos queda que $(e^{-\lambda_n\sigma})\in\ell_{\cot(X)'}$, lo cual implica que $B\le S_\infty(\lambda,X)$. □

Concluimos esta sección aplicando nuestros resultados de *decoupling* para dar condiciones suficientes para que (5.12) sea una igualdad como en el caso particular (5.7).

Proposición 5.3.5. *Dados un espacio de Banach X de tipo 2 y una frecuencia λ, se tiene que*

$$S_2(\lambda,X)\le L(\lambda)\Big(1-\frac{1}{\cot(X)}\Big).$$

Si, además, X tiene dimensión infinita, para todo $2\le q\le\infty$ se cumple que

$$S(\lambda,X)=S_q(\lambda,X)=L(\lambda)\Big(1-\frac{1}{\cot(X)}\Big).$$

Como ℓ_q tiene tipo $\min\{2, q\}$ para todo $1 \leq q \leq \infty$, obtenemos la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 5.3.6. *Para toda frecuencia λ y para todo $2 \leq q < \infty$, se tiene que*

$$S(\lambda, \ell_q) = L(\lambda)\Big(1 - \frac{1}{q}\Big).$$

Demostración de la Proposición 5.3.5. Fijemos un λ-grupo de Dirichlet (G, β). Como X tiene tipo 2, tenemos que $\cot(X) < \infty$. Luego, para todo $q > \cot(X)$, todo $\varepsilon > 0$, toda sucesión (a_n) en X y todo $x > 0$ tenemos que

$$\sum_{\lambda_n \leq x} \|a_n\| e^{-\frac{L(\lambda)+\varepsilon}{q'}\lambda_n} \leq \Big(\sum_{\lambda_n \leq x} e^{-\big(L(\lambda)+\varepsilon\big)\lambda_n}\Big)^{1/q'} \Big(\sum_{\lambda_n \leq x} \|a_n\|^q\Big)^{1/q}.$$

Aplicando (5.4) y el hecho de que X tiene cotipo q, nos queda

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_n \leq x} \|a_n\| e^{-\frac{L(\lambda)+\varepsilon}{q'}\lambda_n} &\leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{\lambda_n \leq x} \varepsilon_n a_n\Big\|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq C\Big(\int_G \|\sum_{\lambda_n \leq x} a_n h_{\lambda_n}(\omega)\|^2 d\omega\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$ y todo $q > \cot(X)$, por el Lema 5.3.4 resulta que

$$S_2(\lambda, X) \leq L(\lambda)\left(1 - \frac{1}{\cot(X)}\right).$$

Por la Proposición 5.3.2 deducimos que si X tiene dimensión infinita, entonces para todo $2 \leq q \leq \infty$ tenemos que

$$S_q(\lambda, X) = L(\lambda)\Big(1 - \frac{1}{\cot(X)}\Big).$$

La igualdad con $S(\lambda, X)$ se sigue de la Observación 5.3.3. $\square$

Mediante una prueba análoga reemplazando (5.4) por la Proposición 5.2.5 y recordando que los espacios con GAP tienen cotipo finito, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 5.3.7. *Dados un espacio de Banach X with GAP y un conjunto B_2 λ, se tiene que*

$$S_1(\lambda, X) \leq L(\lambda)\left(1 - \frac{1}{\cot(X)}\right).$$

Si, además, X tiene dimensión infinita, para todo $1 \leq p \leq \infty$ se cumple que

$$S(\lambda, X) = S_p(\lambda, X) = L(\lambda)\Big(1 - \frac{1}{\cot(X)}\Big).$$

Capítulo 6

Polarización no simétrica

En este capítulo estudiamos una forma m-lineal no simétrica L_P asociada a un polinomio (escalar) m-homogéneo P que fue introducida por Defant y Schlüters en [31]. A diferencia de la forma m-lineal simétrica M, debido a la falta de simetría, la norma de L_P se comporta de forma distinta a la norma de P, y las estimaciones pueden incluso depender del número de variables n. Sin embargo, trabajar con L_P fue motivado por el estudio del tipo y cotipo polinomiales, dado que tiene la ventaja de tener (esencialmente) los mismos coeficientes que P (ver Observación 6.1.3). Empezamos dando la definición formal de L_P y presentando algunos resultados previos donde la norma supremo de L_P está acotada por una constante $C(n,m)$ por la norma supremo de P. Luego, realizamos un procedimiento de simetrización basado en un algoritmo de mezcla de cartas que junto con el argumento de Defant y Schlüters, mejora sus estimaciones. Finalmente damos cotas inferiores para $C(n,m)$ probando que la dependencia en n no puede removerse.

6.1 Polarización no simétrica

Sea $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polinomio m-homogéneo y sea $M : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ la única forma m-lineal simétrica tal que $M(z,\ldots,z) = P(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Recordemos que por la fórmula de polarización, para todo $z^{(1)},\ldots,z^{(m)} \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)}) = \frac{1}{m!}\mathbb{E}_\varepsilon[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m P(\varepsilon_1 z^{(1)} + \ldots + \varepsilon_m z^{(m)})].$$

Como vimos en la Proposición 1.3.1, de esta igualdad se deduce que

$$\sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |M(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})| \leq e^m \sup_{\|z\|\leq 1} |P(z)|, \tag{6.1}$$

para toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^n$.

En [31], Defant y Schlüters definieron una forma m-lineal no simétrica L_P asociada a un polinomio m-homogéneo P. Más precisamente, para un polinomio m-homogéneo

$P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ dado por

$$P(z) = \sum_{1 \le j_1 \le \ldots \le j_m \le n} c_{j_1 \ldots j_m} z_{j_1} \ldots z_{j_m},$$

definimos la forma m-lineal asociada $L_P : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ por

$$L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = \sum_{1 \le j_1 \le \ldots \le j_m \le n} c_{j_1 \ldots j_m} z^{(1)}_{j_1} \ldots z^{(m)}_{j_m}.$$

Es claro que $L_P(z, \ldots, z) = P(z)$. Sin embargo, a diferencia de M, el operador L_P no es simétrico en general. Si bien la falta de simetría puede hacer que sea más difícil trabajar con L_P que con M, el primero surge naturalmente al estudiar normas de coeficientes dado que los coeficientes de P y L_P coinciden.

Asumiendo la incondicionalidad de la norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^n$, Defant y Schlüters hallaron una estimación como en (6.1) reemplazando M por L_P. Antes de dar más detalles introducimos la siguiente definición *ad hoc*:

Definición 6.1.1. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definimos $C(m, n)$ como el ínfimo de todas las constantes $C \ge 1$ tales que para todo polinomio m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ y toda norma 1-incondicional $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^n$ (esto es, si $z, w \in \mathbb{C}^n$ y $|z_k| \le |w_k|$ para todo k, entonces $\|z\| \le \|w\|$), se tiene que

$$\sup_{\|z^{(k)}\| \le 1} |L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| \le C \sup_{\|z\| \le 1} |P(z)|.$$

Similarmente, dado $1 \le p < 2$, tomamos $C_p(m, n)$ como el ínfimo de todas las constantes $C \ge 1$ tales que para todo polinomio m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sup_{\|z^{(k)}\|_p \le 1} |L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| \le C \sup_{\|z\|_p \le 1} |P(z)|.$$

Podemos enunciar el resultado principal de [31] en términos de la definición anterior.

Teorema 6.1.2 ([31, Teorema 1.1])**.** *Existe una constante universal $c_1 \ge 1$ tal que*

$$C(m, n) \le (c_1 \log n)^{m^2}.$$

Más aún, dado $1 \le p < 2$, existe una constante $c_2 = c_2(p) \ge 1$ que cumple que

$$C_p(m, n) \le c_2^{m^2}.$$

Observación 6.1.3. Originalmente, este resultado despertó nuestro interés cuando intentábamos probar el Teorema 3.1.2. Notemos que si X tiene cotipo q y procediendo inductivamente como en el Lema 3.2.1 tenemos que

$$\sum_{j \in \mathcal{J}(m,n)} \|x_j\|^q \le C^m \int_{\mathbb{T}^{nm}} \Big\| \sum_{j \in \mathcal{J}(m,n)} x_j z^{(1)}_{j_1} \ldots z^{(m)}_{j_m} \Big\|^q dz,$$

para toda elección de vectores $(x_j)_{j\in\mathcal{J}(m,n)} \subseteq X$. Luego, la prueba de (a) $\Rightarrow$ (b) en el Teorema 3.1.2 se podría lograr probando la siguiente desigualdad:

$$\int_{\mathbb{T}^{nm}} \Big\| \sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} x_j z^{(1)}_{j_1} \dots z^{(m)}_{j_m} \Big\|^q dz \leq C^m \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{j\in\mathcal{J}(m,n)} x_j z_j \Big\|^q dz, \tag{6.2}$$

para alguna constante C y toda elección de vectores $(x_j)_{j\in\mathcal{J}(m,n)} \subseteq X$. Si fuese cierto que $C(m,n) \leq C^m$ podríamos usar el teorema de Pełczyński's (Teorema 1.3.9 probado en [64, Teorema 1]) para obtener (6.2) y, por lo tanto, (a) $\Rightarrow$ (b) en el Teorema 3.1.2. Desafortunadamente, este no es el caso y así lo muestra la cota inferior del Teorema 6.1.4. Sin embargo, la desigualdad (6.2) aún podría ser cierta al menos para espacios con cotipo finito, brindando una prueba alternativa del Teorema 3.1.2.

Notemos que por unicidad de la forma m-lineal simétrica M tenemos que

$$M(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma\in\Sigma_m} L_P(z^{\sigma(1)}, \dots, z^{\sigma(m)}), \tag{6.3}$$

donde Σ_m es el grupo de permutaciones de m elementos. La prueba del Teorema 6.1.2 consiste en acotar la norma de L_P mediante simetrizaciones parciales sucesivas partiendo de L_P y terminando en la forma completamente simétrica M. Finalmente, aplicando (6.1) se obtiene el resultado. Cambiando únicamente la forma en que esta simetrización es llevada a cabo y usando los mismos argumentos que en [31], obtenemos una mejora en las estimaciones de $C(m,n)$ y $C_p(m,n)$. Además, probamos cotas inferiores para estas constantes. El resultado principal de este capítulo es el siguiente.

Teorema 6.1.4. *Existe una constante universal $c_1 \geq 1$ tal que*

$$\left(\frac{\log\left(\frac{2n}{m}\right) - \pi}{\pi} \right)^{m/2} \leq C(m,n) \leq c_1^m m^m (\log n)^{m-1}.$$

Más aún, dado $1 \leq p < 2$, existe una constante $c_2 = c_2(p) \geq 1$ que cumple que

$$m^{\frac{m}{p}} \leq C_p(m,n) \leq c_2^m m^m.$$

Observación 6.1.5. Como se nos mencionó durante una comunicación personal, Defant y Schlüters consiguieron cotas superiores similares refinando sus cuentas originales de [31].

Observación 6.1.6. Lamentablemente, como vimos en la Observación 6.1.3, las cotas inferiores muestran que no se puede esperar una estimación de la forma C^m como en (6.1). Más aún, incluso la dependencia en n no se puede quitar de $C(m,n)$. Un análisis detallado de la prueba del teorema sugiere que la razón subyacente que determina la magnitud de las constantes $C(m,n)$ y $C_p(m,n)$ es el comportamiento del operador conocido como la proyección triangular principal (*main triangle projection*). En pocas palabras, la proyección triangular principal es el operador que, dada una matriz en $\mathbb{C}^{n\times n}$, devuelve la misma matriz con ceros debajo de la diagonal. Cada norma en $\mathbb{C}^n$ induce una norma de operadores en $\mathbb{C}^{n\times n}$ y a su vez, esto induce una norma para la proyección triangular principal. Las estimaciones de esta última norma son las que moldean las cotas inferiores y superiores de $C(m,n)$ y $C_p(m,n)$ que obtenemos.

6.2 Simetrización

En esta sección brindamos un procedimiento de simetrización para ir de L_P a M, basado en un algoritmo de mezcla de cartas. Esto será usado para obtener las cotas superiores del Teorema 6.1.4.

Notemos que lo siguiente se puede deducir de (6.3):

$$\begin{aligned}
M(z^{(1)},\dots,z^{(m)}) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\Sigma_m} L_P(z^{\sigma(1)},\dots,z^{\sigma(m)}) \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\Sigma_m}\sum_{1\le j_1\le\ldots\le j_m\le n} c_{j_1\ldots j_m} z_{j_1}^{\sigma(1)}\ldots z_{j_m}^{\sigma(m)} \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\Sigma_m}\sum_{1\le j_1\le\ldots\le j_m\le n} c_{j_1\ldots j_m} z_{j_{\sigma^{-1}(1)}}^{(1)}\ldots z_{j_{\sigma^{-1}(m)}}^{(m)} \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{\tau\in\Sigma_m}\sum_{1\le j_1\le\ldots\le j_m\le n} c_{j_1\ldots j_m} z_{j_{\tau(1)}}^{(1)}\ldots z_{j_{\tau(m)}}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Desde un punto de vista probabilístico, esto se puede reformular como

$$M(z^{(1)},\dots,z^{(m)}) = E\Big[\sum_{1\le j_1\le\ldots\le j_m\le n} c_{j_1\ldots j_m} z_{j_{\sigma(1)}}^{(1)}\ldots z_{j_{\sigma(m)}}^{(m)}\Big], \tag{6.4}$$

donde la esperanza se toma sobre $\sigma\in\Sigma_m$ y Σ_m está provisto de la medida de equiprobabilidad. En otras palabras, M es el valor esperado de L_P cuando el orden de los subíndices de los monomios es una variable aleatoria equidistribuida. Luego, un procedimiento de mezcla de cartas aplicado al orden de los subíndices resultará en un procedimiento de simetrización para L_P tomando esperanza. Usaremos el algoritmo de mezcla Fischer-Yates en su versión original que se puede encontrar en [36]. El algoritmo funciona de la siguiente forma. Elegimos una carta al azar de un mazo ordenado y la dejamos arriba de todo. Luego, elegimos una carta al azar entre el segundo y el último lugar y la dejamos en el segundo lugar. Continuamos de esa forma. En el último paso, elegimos entre las últimas dos cartas cual irá en el anteúltimo lugar. Luego de aplicar este procedimiento, un mazo ordenado quedará completamente mezclado, esto es, cualquier arreglo de cartas será igualmente probable.

Observación 6.2.1. Notemos que en cualquier paso, digamos el k-ésimo, las primeras $k-1$ cartas (que fueron seleccionadas en pasos anteriores) están equidistribuidas, mientras que las últimas cartas se mantienen completamente ordenadas. Esta estructura especial será de vital importancia en la prueba del Teorema 6.1.4.

A continuación, introducimos el procedimiento de simetrización que surge de la mezcla Fischer-Yates. Para todo $1 \leq k \leq m-1$ sea $\mathbb{P}_k$ la distribución de probabilidad en Σ_m asociada a llevar a cabo los primeros k pasos del algoritmo de mezcla. Definimos la k-ésima mezcla S_k de una m-forma $L : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ por

$$S_k L(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = E\Big[\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} c_{i_1\ldots i_m} z^{(1)}_{i_{\sigma(1)}} \ldots z^{(m)}_{i_{\sigma(m)}} \Big],$$

donde $\sigma \sim \mathbb{P}_k$.

En particular, de (6.4) y el hecho de que el $(m-1)$-ésimo paso de la mezcla logra la equidistribución, tenemos que

$$M = S_{m-1} L_P.$$

Sin embargo, cabe mencionar que las mezclas intermedias no son simetrizaciones parciales dado que estamos simetrizando los subíndices de los monomios en vez de las variables.

Para estudiar la estructura de S_k, definimos el k-ésimo paso de la mezcla T_k de una m-forma $L : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} &T_k L(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) \\ &\qquad = \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} L(z^{(1)}, \ldots, z^{(k-1)}, z^{(k+1)}, \ldots, z^{(l)}, z^{(k)}, z^{(l+1)}, \ldots, z^{(m)}). \end{aligned}$$

Lema 6.2.2. *Para todo $1 \leq k \leq m-1$ tenemos que $S_k = T_k \ldots T_1$.*

Demostración. Como T_k y S_k son lineales para todo $1 \leq k \leq m-1$, basta ver que la igualdad vale para monomios. Fijado $1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n$, debemos ver que

$$S_k(z^{(1)}_{i_1} \ldots z^{(m)}_{i_m}) = T_k \ldots T_1(z^{(1)}_{i_1} \ldots z^{(m)}_{i_m}).$$

Procedemos por inducción en k. Si $k = 1$, la permutación aleatoria σ es un ciclo en Σ_m. Más precisamente, usando la notación de ciclos en Σ_m tenemos que σ toma el valor $(l\ l-1\ \ldots\ 1)$ para algún $1 \leq l \leq m$ con probabilidad $1/m$. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} S_1(z^{(1)}_{i_1} \ldots z^{(m)}_{i_m}) = E[z^{(1)}_{i_{\sigma(1)}} \ldots z^{(m)}_{i_{\sigma(m)}}] &= \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} z^{(1)}_{i_l} z^{(2)}_{i_1} \ldots z^{(l)}_{i_{l-1}} z^{(l+1)}_{i_{l+1}} \ldots z^{(m)}_{i_m} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} z^{(2)}_{i_1} \ldots z^{(l)}_{i_{l-1}} z^{(1)}_{i_l} z^{(l+1)}_{i_{l+1}} \ldots z^{(m)}_{i_m} = T_1(z^{(1)}_{i_1} \ldots z^{(m)}_{i_m}). \end{aligned}$$

Resta ver el paso inductivo. Sea $2 \leq k \leq m-1$ y supongamos que vale el lema para $k-1$. Por la definición de la mezcla Fischer-Yates deducimos que una permutación aleatoria con distribución de probabilidad $\mathbb{P}_k$ puede ser escrita como la composición de dos permutaciones aleatorias independientes τ y σ donde $\sigma \sim \mathbb{P}_{k-1}$ y τ toma el valor $\tau_l = (l\ l-1\ \dots\ k)$ para algún $k \leq l \leq m$ con probabilidad $1/(m-k+1)$. Para un τ fijo, podemos definir nuevos índices $j_1, \dots, j_m$ tales que $j_k = i_{\tau(k)}$ para todo $1 \leq k \leq m$. Luego, concluimos

$$\begin{aligned}
S_k(z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)}) &= E_{\tau,\sigma}[z_{i_{\tau\sigma(1)}}^{(1)} \dots z_{i_{\tau\sigma(m)}}^{(m)}] = E_\tau[E_\sigma[z_{j_{\sigma(1)}}^{(1)} \dots z_{j_{\sigma(m)}}^{(m)}]] \\
&= E_\tau[S_{k-1}(z_{j_1}^{(1)} \dots z_{j_m}^{(m)})] = E_\tau[S_{k-1}(z_{i_{\tau(1)}}^{(1)} \dots z_{i_{\tau(m)}}^{(m)})] \\
&= \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} S_{k-1}(z_{i_{\tau_l(1)}}^{(1)} \dots z_{i_{\tau_l(m)}}^{(m)}) \\
&= \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} S_{k-1}(z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_{k-1}}^{(k-1)} z_{i_l}^{(k)} z_{i_k}^{(k+1)} \dots z_{i_{l-1}}^{(l)} z_{i_{l+1}}^{(l+1)} \dots z_{i_m}^{(m)}) \\
&= \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} S_{k-1}(z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_{k-1}}^{(k-1)} z_{i_k}^{(k+1)} \dots z_{i_{l-1}}^{(l)} z_{i_l}^{(k)} z_{i_{l+1}}^{(l+1)} \dots z_{i_m}^{(m)}) \\
&= T_k S_{k-1}(z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)}).
\end{aligned}$$

□

Siguiendo a [31], nos enfocamos ahora en estudiar cómo cambian los coeficientes de sucesivas mezclas de L_P. Sea $L : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ una forma m-lineal dada por

$$L(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} c_i z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

donde como siempre $\mathcal{I}(m,n) = \{1, \dots, n\}^m$. Denotaremos sus coeficientes por $c_i(L) = c_i$.

Lema 6.2.3. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m-1$, $i \in \mathcal{I}(m,n)$ y un polinomio m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, se tiene que*

$$c_i\left(S_{k-1}L_P\right) = \begin{cases} (m-k+1)\left(1 + \sum_{u=1}^{m-k} \delta_{i_k, i_{k+u}} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u}\right)\right) c_i\left(S_k L_P\right) & \textit{si } i_k \leq i_{k+1} \\ 0 & \textit{sino} \end{cases},$$

donde δ es la delta de Kronecker y tomamos $S_0 L_P = L_P$.

Demostración. Comenzamos calculando los coeficientes $c_i\left(S_k L_P\right)$ en términos de los coeficientes $c_i\left(S_{k-1} L_P\right)$. Observemos que para una forma m-lineal $L : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&T_k L(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) \\
&= \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} L(z^{(1)}, \ldots, z^{(k-1)}, z^{(k+1)}, \ldots, z^{(l)}, z^{(k)}, z^{(l+1)}, \ldots, z^{(m)}) \\
&= \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} \sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} c_i(L) z_{i_1}^{(1)} \ldots z_{i_{k-1}}^{(k-1)} z_{i_k}^{(k+1)} \ldots z_{i_{l-1}}^{(l)} z_{i_l}^{(k)} z_{i_{l+1}}^{(l+1)} \ldots z_{i_m}^{(m)} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} c_i(L) z_{i_1}^{(1)} \ldots z_{i_{k-1}}^{(k-1)} z_{i_l}^{(k)} z_{i_k}^{(k+1)} \ldots z_{i_{l-1}}^{(l)} z_{i_{l+1}}^{(l+1)} \ldots z_{i_m}^{(m)} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}(m,n)} \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} c_{(i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_l,i_k,i_{l+1},\ldots,i_m)}(L) z_{i_1}^{(1)} \ldots z_{i_m}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Luego, como $S_k = T_k S_{k-1}$, obtenemos la fórmula

$$c_i\left(S_k L_P\right) = \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} c_{(i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_l,i_k,i_{l+1},\ldots,i_m)}\left(S_{k-1} L_P\right). \tag{6.5}$$

Por la definición de L_P, si un coeficiente $c_i\left(L_P\right)$ no es cero, entonces el índice i debe cumplir que $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n$. Probaremos inductivamente que dado $0 \leq k \leq m-1$, si el coeficiente $c_i\left(S_k L_P\right)$ no es cero, entonces el índice i debe satisfacer que $1 \leq i_{k+1} \leq \ldots \leq i_m \leq n$.

Como $S_0 L_P = L_P$, el caso $k = 0$ ya está probado. Supongamos ahora que la afirmación vale para $0 \leq k-1 \leq m-1$ y fijemos $i \in \mathcal{I}(m,n)$ tal que $i_s > i_{s+1}$ para algún $k+1 \leq s \leq m-1$. Aplicando la hipótesis inductiva, tenemos que

$$c_{(i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_l,i_k,i_{l+1},\ldots,i_m)}\left(S_{k-1} L_P\right) = 0,$$

para todo $k \leq l \leq m$. Por lo tanto, usando (6.5) nos queda que $c_i\left(S_k L_P\right) = 0$ probando así el paso inductivo. En particular, vimos que $c_i\left(S_{k-1} L_P\right) = 0$ si $i_k > i_{k+1}$.

Supongamos ahora que $i_k \leq i_{k+1}$. Si para algún $k+1 \leq s \leq m-1$ tenemos que $i_s > i_{s+1}$, entonces por el argumento previo tenemos que $c_i\left(S_{k-1} L_P\right) = c_i\left(S_k L_P\right) = 0$. En conclusión, basta chequear el caso en que $1 \leq i_k \leq \ldots \leq i_m \leq n$. Definamos $s = \sup\{k \leq u \leq m \ : i_u = i_k\}$ y notemos que

$$c_{(i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_l,i_k,i_{l+1},\ldots,i_m)}\left(S_{k-1} L_P\right) = \begin{cases} c_i\left(S_{k-1} L_P\right) & \text{if } k \leq l \leq s \\ 0 & \text{if } s < l \leq m \end{cases}.$$

Podemos entonces avanzar en (6.5) para obtener

$$\begin{aligned}
c_i\left(S_k L_P\right) &= \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{m} c_{(i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_l,i_k,i_{l+1},\ldots,i_m)}\left(S_{k-1} L_P\right) \\
&= \frac{1}{m-k+1} \sum_{l=k}^{s} c_i\left(S_{k-1} L_P\right) = \frac{s-k+1}{m-k+1} c_i\left(S_{k-1} L_P\right).
\end{aligned}$$

Como $s \geq k$, tenemos que $s-k+1 \neq 0$. Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned} c_i\left(S_{k-1}L_P\right) &= \frac{m-k+1}{s-k+1} c_i\left(S_k L_P\right) \\ &= (m-k+1)\Big(1+\sum_{u=1}^{s-k}\Big(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\Big)\Big) c_i\left(S_k L_P\right) \\ &= (m-k+1)\Big(1+\sum_{u=1}^{m-k}\delta_{i_k,i_{k+u}}\Big(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\Big)\Big) c_i\left(S_k L_P\right). \qquad \square \end{aligned}$$

Como en [31], reescribiremos el lema anterior en términos de productos de Schur. Dadas matrices (de m índices) $A, B \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}$, el producto de Schur $A * B$ está dado por

$$c_i(A * B) = c_i(A)c_i(B),$$

donde $c_i(\cdot)$ denota la i-ésima entrada de la matriz. Identificando una forma m-lineal con sus coeficientes, podemos calcular el producto entre una matriz y una m-forma. Más precisamente, para $A \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}$ y una forma m-lineal $L : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ definimos $A * L : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ por

$$c_i(A * L) = c_i(A)c_i(L).$$

Con esta notación, el Lema 6.2.3 prueba la fórmula

$$S_{k-1}L_P = R_k * S_k L_P, \tag{6.6}$$

donde $R_k \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}$ está dado por

$$c_i\left(R_k\right) = \begin{cases} (m-k+1)\left(1+\sum_{u=1}^{m-k}\delta_{i_k,i_{k+u}}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\right)\right) & \text{si } i_k \leq i_{k+1} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}.$$

La matriz $R_k \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}$ se descompone en sumas y productos de matrices más simples. Dados $u, v \in \{1, \dots, m\}$, sean $D^{u,v}, T^{u,v} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}$ tales que para todo $i \in \mathcal{I}(m,n)$ se tiene que

$$c_i\left(D^{u,v}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_u = i_v \\ 0 & \text{sino} \end{cases},$$

$$c_i\left(T^{u,v}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_u \leq i_v \\ 0 & \text{sino} \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta la Observación 6.1.6, notemos que $T^{u,v}$ está íntimamente relacionada con la proyección triangular principal $T : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$. En efecto, tenemos que $c_i(T^{u,v}) = c_{i_u,i_v}(T)$ para todo $i \in \mathcal{I}(m,n)$.

Lema 6.2.4. *Dado $1 \leq k \leq m-1$, se tiene que*

$$R_k = (m-k+1)T^{k,k+1} * \Big(1+\sum_{u=1}^{m-k} D^{k,k+u}\Big(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\Big)\Big).$$

Demostración. Dado $i \in \mathcal{I}(m,n)$ notemos que

$$
\begin{aligned}
c_i\Big((m-k+1)T^{k,k+1} * \Big(1+\sum_{u=1}^{m-k} D^{k,k+u}\Big(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\Big)\Big)\Big) = \\
&= (m-k+1)c_i\left(T^{k,k+1}\right)\left(1+\sum_{u=1}^{m-k} c_i\left(D^{k,k+u}\right)\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\right)\right) \\
&= c_i\left(T^{k,k+1}\right)(m-k+1)\Big(1+\sum_{u=1}^{m-k}\delta_{i_k,i_{k+u}}\Big(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\Big)\Big) \\
&= c_i\left(R_k\right).
\end{aligned}
$$

□

6.3 Cotas superiores

En esta sección probaremos las cotas superiores del Teorema 6.1.4. Sea $\|\cdot\|$ un norma en $\mathbb{C}^n$. Dada $A \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}$, definimos $\mu_{\|\cdot\|}(A)$ como el ínfimo de las constantes $C \geq 1$ tales que para toda forma m-lineal $L : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ se tiene que

$$
\sup_{\|x^{(k)}\|\leq 1} |A * L(x^{(1)},\dots,x^{(m)})| \leq C \sup_{\|x^{(k)}\|\leq 1} |L(x^{(1)},\dots,x^{(m)})|.
$$

Notemos que $\left(\mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}, \mu_{\|\cdot\|}\right)$ es un álgebra de Banach.

Usaremos el siguiente lema de Defant y Schlüters.

Lema 6.3.1 ([31, Lema 3.2])**.** *Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, todo $u, v \in \{1,\dots,m\}$ y toda norma 1-incondicional $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^n$, se tiene que*

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\|\cdot\|}\left(D^{u,v}\right) = 1, \\
&\mu_{\|\cdot\|}\left(T^{u,v}\right) \leq \log_2(2n).
\end{aligned}
$$

Más aún, para todo $1 \leq p < 2$, existe una constante $c = c(p)$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$
\mu_{\|\cdot\|_p}\left(T^{u,v}\right) \leq c.
$$

Como mencionamos en la Observación 6.1.6, las estimaciones para $T^{u,v}$ se basan en cotas para la norma de la proyección triangular principal obtenidas por Kwapień y Pełczyński en [50] y Bennett en [4].

Corolario 6.3.2. *Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, todo $1 \leq k \leq m-1$ y toda norma 1-incondicional $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^n$, se tiene que*

$$
\mu_{\|\cdot\|}\left(R_k\right) \leq 2(m-k+1)\mu_{\|\cdot\|}\left(T^{k,k+1}\right).
$$

Demostración. Por el lema anterior sabemos que $\mu_{\|\cdot\|}\left(D^{u,v}\right) = 1$ para todo $u, v \in \{1, \ldots, m\}$. Como $\left(\mathbb{C}^{\mathcal{I}(m,n)}, \mu_{\|\cdot\|}\right)$ es un álgebra de Banach, aplicando el Lema 6.2.4 nos queda

$$\begin{aligned}
\mu_{\|\cdot\|}\left(R_k\right) &= \mu_{\|\cdot\|}\Big((m-k+1)T^{k,k+1} * \Big(1 + \sum_{u=1}^{m-k} D^{k,k+u}\Big(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u}\Big)\Big)\Big) \\
&\leq (m-k+1)\mu_{\|\cdot\|}\left(T^{k,k+1}\right)\Big(1 + \sum_{u=1}^{m-k} \mu_{\|\cdot\|}\left(D^{k,k+u}\right)\Big|\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u}\Big|\Big) \\
&\leq (m-k+1)\Big(1 + \sum_{u=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\Big)\Big)\mu_{\|\cdot\|}\left(T^{k,k+1}\right) \\
&= 2(m-k+1)\mu_{\|\cdot\|}\left(T^{k,k+1}\right).
\end{aligned}$$

□

Estamos en posición de probar las cotas superiores del Teorema 6.1.4.

Teorema 6.3.3. *Existe una constante universal $c_1 \geq 1$ tal que*

$$C(m,n) \leq c_1^m m^m (\log n)^{m-1}.$$

Más aún, dado $1 \leq p < 2$, existe una constante $c_2 = c_2(p) \geq 1$ que cumple que

$$C_p(m,n) \leq c_2^m m^m.$$

Demostración. Usando (6.6), la definición de $\mu_{\|\cdot\|}$ y el corolario anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |S_{k-1}L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| &= \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |R_k * S_k L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| \\
&\leq \mu_{\|\cdot\|}\left(R_k\right) \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |S_k L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| \\
&\leq 2(m-k+1)\mu_{\|\cdot\|}\left(T^{k,k+1}\right) \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |S_k L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})|,
\end{aligned}$$

para todo $1 \leq k \leq m-1$. Tomando $\mu = \sup_{1\leq k\leq m-1} \mu_{\|\cdot\|}\left(T^{k,k+1}\right)$ y juntando las desigualdades anteriores, resulta que

$$\begin{aligned}
\sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| &\leq 2m\mu \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |S_1 L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| \\
&\leq 2^2 m(m-1)\mu^2 \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |S_2 L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| \\
&\leq \ldots \leq 2^{m-1} m! \mu^{m-1} \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |S_{m-1} L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})|.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando $S_{m-1}L_P = M$ y aplicando (6.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| &\leq 2^{m-1} m! \mu^{m-1} \sup_{\|z^{(k)}\|\leq 1} |M(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})| \\
&\leq 2^{m-1} e^m m! \mu^{m-1} \sup_{\|z\|\leq 1} |P(z)|.
\end{aligned}$$

El teorema se sigue aplicando la fórmula de Stirling para estimar $m!$ y el Lema 6.3.1 para estimar μ. □

6.4 Cotas inferiores

En esta sección probamos las cotas inferiores del Teorema 6.1.4. Empezamos estimando $C_p(m,n)$ por debajo.

Lema 6.4.1. *Para todo $n \geq m$ y todo $1 \leq p < 2$, se tiene que $C_p(m,n) \geq m^{\frac{m}{p}}$.*

Demostración. Sea $P : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ el polinomio m-homogéneo dado por

$$P(z) = z_1 \dots z_m.$$

Luego, su forma m-lineal asociada $L_P : (\mathbb{C}^m)^m \to \mathbb{C}$ está dada por

$$L_P(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = z_1^{(1)} \dots z_m^{(m)}.$$

Observemos que

$$\sup_{\|z^{(k)}\|_p \leq 1} |L_P(z^{(1)}, \dots, z^{(m)})| = \sup_{\|z^{(k)}\|_p \leq 1} |z_1^{(1)} \dots z_m^{(m)}| = 1. \tag{6.7}$$

donde la igualdad se alcanza tomando $z^{(i)}$ como el i-ésimo vector canónico de ℓ_p^m. Por otro lado, una cuenta sencilla usando multiplicadores de Lagrange nos da

$$\sup_{\|z\|_p \leq 1} |P(z)| = |P(m^{-1/p}, \dots, m^{-1/p})| = m^{-\frac{m}{p}}. \tag{6.8}$$

Aplicando (6.7) y (6.8) junto con la definición de $C_p(m,n)$ concluimos

$$1 = \sup_{\|z^{(k)}\|_p \leq 1} |L_P(z^{(1)}, \dots, z^{(m)})| \leq C_p(m,n) \sup_{\|z\|_p \leq 1} |P(z)| = m^{-\frac{m}{p}} C_p(m,n). \qquad \square$$

Resta estimar $C(m,n)$ por debajo.

Lema 6.4.2. *Dados $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\log\left(\frac{2n}{m}\right) \geq 2\pi$, se tiene que*

$$C(m,n) \geq \left(\frac{\log\left(\frac{2n}{m}\right) - \pi}{\pi} \right)^{m/2}.$$

Demostración. Consideramos la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{C}^n$. Como $P(z) = L_P(z, \dots, z)$, tenemos que

$$\sup_{\|z\|_\infty \leq 1} |P(z)| \leq \sup_{\|z^{(k)}\|_\infty \leq 1} |L_P(z^{(1)}, \dots, z^{(m)})| \leq C(m,n) \sup_{\|z\|_\infty \leq 1} |P(z)|,$$

para todo polinomio m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Equivalentemente, por el principio del módulo máximo, nos queda

$$\sup_{z \in \mathbb{T}^n} |P(z)| \leq \sup_{z^{(k)} \in \mathbb{T}^n} |L_P(z^{(1)}, \dots, z^{(m)})| \leq C(m,n) \sup_{z \in \mathbb{T}^n} |P(z)|. \tag{6.9}$$

Luego, se cumplen las condiciones del teorema de Pełczyński's (Teorema 1.3.9 probado en [64, Teorema 1]). En efecto, denotemos a los grupos abelianos compactos $\mathbb{T}^n$ y $(\mathbb{T}^n)^m$ por S y T respectivamente y recordemos el conjunto de índices $J = \{j \in \mathcal{I}(m,n) \ : \ 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_m \leq n\}$. Para todo $j \in J$, consideramos los caracteres $a_j : S \to \mathbb{T}$ y $b_j : T \to \mathbb{T}$ dados por

$$a_j(z) = z_{j_1} \ldots z_{j_m} \quad \text{y} \quad b_j(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = z_{j_1}^{(1)} \ldots z_{j_m}^{(m)}.$$

Si reescribimos (6.9) con esta notación, obtenemos (1.10) con $c_1 = 1$ y $c_2 = C(m,n)$. Por lo tanto, deducimos del teorema de Pełczyński's que

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(m,n)} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{j \in J} x_j z_{j_1} \ldots z_{j_m} \Big\|_X dz &\leq \int_{(\mathbb{T}^n)^m} \Big\| \sum_{j \in J} x_j z_{j_1}^{(1)} \ldots z_{j_m}^{(m)} \Big\|_X dz^{(1)} \ldots dz^{(m)} \\ &\leq C(m,n) \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{j \in J} x_j z_{j_1} \ldots z_{j_m} \Big\|_X dz. \quad (6.10)\end{aligned}$$

para todo espacio de Banach X y toda elección de vectores $(x_j)_{j \in J} \subseteq X$. Eligiendo el espacio X y los vectores $(x_j)_{j \in J} \subseteq X$ adecuadamente, obtendremos nuestra estimación.

Nos basaremos en un ejemplo de Bourgain (no publicado) incluido en el trabajo de McConnell y Taqqu [59, Ejemplo 4.1] (ver también [53, Sección 6.9]). Consideremos el espacio de Banach de operadores acotados en ℓ_2 que notamos $Y = \mathcal{L}(\ell_2)$. Para todo $1 \leq i \neq j \leq n$, definimos los vectores $x_{ij} \in Y$ por

$$x_{ij} = \frac{1}{i-j} e_i \otimes e_j + \frac{1}{j-i} e_j \otimes e_i.$$

Usando variables de Steinhaus en vez de variables de Bernoulli y procediendo como en [53] obtenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} z_i z_j \Big\| dz \leq \pi \qquad \text{y} \tag{6.11}$$

$$\int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} z_i^{(1)} z_j^{(2)} \Big\| dz^{(1)} dz^{(2)} \geq \log n - \pi. \tag{6.12}$$

Notemos que estas estimaciones prueban la cota deseada para $m = 2$ dado que

$$\begin{aligned}\log n - \pi &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} z_i^{(1)} z_j^{(2)} \Big\| dz^{(1)} dz^{(2)} \\ &\leq C(2,n) \int_{\mathbb{T}^n} \Big\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} z_i z_j \Big\| dz \leq C(2,n)\pi.\end{aligned}$$

Más aún, esto junto con el Teorema 6.3.3 muestra que el comportamiento asintótico de $C(2,n)$ es logarítmico.

Para concluir nuestro argumento, resta extender este ejemplo 2-homogéneo a un ejemplo m-homogéneo. Usamos productos tensoriales proyectivos que son una forma (una de muchas) de darle una norma a un producto tensorial y (completando) una estructura de espacio de Banach. Para no excedernos demasiado, referimos a [21] para una exposición detallada y usamos únicamente que $\|x_1 \otimes \ldots \otimes x_k\| = \|x_1\| \ldots \|x_k\|$ para concatenar $m/2$ copias de la construcción anterior. Asumamos que m es par y sea $X = \bigotimes_{k=1}^{m/2} Y$ el producto tensorial proyectivo de $m/2$ copias de Y. Consideremos el polinomio vectorial m-homogéneo $P : \mathbb{C}^n \to X$ dado por

$$P(z) = \sum_{\substack{\frac{2n}{m}(k-1) < j_{2k-1} < j_{2k} \leq \frac{2n}{m}k \\ 1 \leq k \leq \frac{m}{2}}} x_j z_j, \quad \text{donde } x_j = x_{j_1 j_2} \otimes x_{j_3 j_4} \otimes \ldots \otimes x_{j_{m-1} j_m}.$$

Notemos que

$$P(z) = \otimes_{k=1}^{m/2} \sum_{\frac{2n}{m}(k-1) < j_{2k-1} < j_{2k} \leq \frac{2n}{m}k} x_{j_{2k-1} j_{2k}} z_{j_{2k-1}} z_{j_{2k}}.$$

Aplicando (6.11) nos queda

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} \|P(z)\| \, dz &= \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{k=1}^{m/2} \Bigg\| \sum_{\frac{2n}{m}(k-1) < j_{2k-1} < j_{2k} \leq \frac{2n}{m}k} x_{j_{2k-1} j_{2k}} z_{j_{2k-1}} z_{j_{2k}} \Bigg\| dz \\
&= \prod_{k=1}^{m/2} \int_{\mathbb{T}^n} \Bigg\| \sum_{\frac{2n}{m}(k-1) < j_{2k-1} < j_{2k} \leq \frac{2n}{m}k} x_{j_{2k-1} j_{2k}} z_{j_{2k-1}} z_{j_{2k}} \Bigg\| dz \\
&\leq \prod_{k=1}^{m/2} \pi = \pi^{m/2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (6.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^n} \cdots \int_{\mathbb{T}^n} \|L_P(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})\| dz^{(1)} \ldots dz^{(m)} = \\
&\quad = \int_{\mathbb{T}^n} \cdots \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{k=1}^{m/2} \Bigg\| \sum_{\frac{2n}{m}(k-1) < j_{2k-1} < j_{2k} \leq \frac{2n}{m}k} x_{j_{2k-1} j_{2k}} z^{(2k-1)}_{j_{2k-1}} z^{(2k)}_{j_{2k}} \Bigg\| dz^{(1)} \ldots dz^{(m)} \\
&\quad = \prod_{k=1}^{m/2} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \Bigg\| \sum_{\frac{2n}{m}(k-1) < j_{2k-1} < j_{2k} \leq \frac{2n}{m}k} x_{j_{2k-1} j_{2k}} z^{(2k-1)}_{j_{2k-1}} z^{(2k)}_{j_{2k}} \Bigg\| dz^{(2k-1)} dz^{(2k)} \\
&\quad \geq \prod_{k=1}^{m/2} \left(\log\left(\frac{2n}{m}\right) - \pi \right) = \left(\log\left(\frac{2n}{m}\right) - \pi \right)^{m/2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando (6.10) junto con estas estimaciones concluimos que

$$C(n, m) \geq \left(\frac{\log\left(\frac{2n}{m}\right) - \pi}{\pi} \right)^{m/2}. \qquad \square$$

Los Lemas 6.4.1 y 6.4.2 junto con el Teorema 6.3.3 prueban el Teorema 6.1.4.

Observación 6.4.3. Rastreando el argumento para obtener (6.12), encontramos que el ejemplo de Bourgain está basado en una cota inferior de la norma de la proyección triangular principal en $\mathcal{L}(\ell_2)$. En otras palabras, la cota inferior de $C(m, n)$ fue obtenida estudiando el comportamiento de la proyección triangular principal como mencionamos en la Observación 6.1.6. Si bien $C(m, n)$ y $C_p(m, n)$ no fueron completamente caracterizadas, pareciera que la proyección triangular principal juega un rol crucial en su comportamiento asintótico.

Bibliografía

[1] F. Albiac and N. J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, [Cham], second edition, 2016.

[2] P. Assouad. Martingales et réarrangements dans les espaces uniformément lisses et uniformément convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280:Aiii, A813–A816, 1975.

[3] F. Bayart. Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators. *Monatsh. Math.*, 136(3):203–236, 2002.

[4] G. Bennett. Unconditional convergence and almost everywhere convergence. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 34 (2): 135–155, 1976.

[5] A. S. Besicovitch. *Almost periodic functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[6] O. Blasco. The p-Bohr radius of a Banach space. *Collectanea Mathematica*, 68(1):87–100, 2017.

[7] O. Blasco and M. Pavlović. Complex convexity and vector-valued Littlewood-Paley inequalities. *Bull. London Math. Soc.*, 35(6):749–758, 2003.

[8] H. F. Bohnenblust and E. Hille. On the absolute convergence of Dirichlet series. *Ann. of Math. (2)*, 32(3):600–622, 1931.

[9] H. Bohr. Ueber die bedeutung der potenzreihen unendlich vieler variablen in der theorie der dirichletschen reihe .... *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:441–488, 1913.

[10] H. Bohr. Einige bemerkungen über das konvergenzproblem dirichletscher reihen. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 37:1–16, 1914.

[11] J. Bourgain. A Hausdorff-Young inequality for B-convex Banach spaces. *Pacific J. Math.*, 101(2):255–262, 1982.

[12] D. Carando, A. Defant, F. Marceca, and I. Schoolmann. Vector-valued general dirichlet series. *Studia Math.*, in press, 2020.

[13] D. Carando, A. Defant, and P. Sevilla-Peris. Bohr's absolute convergence problem for $\mathcal{H}_p$-Dirichlet series in Banach spaces. *Anal. PDE*, 7(2):513–527, 2014.

[14] D. Carando, A. Defant, and P. Sevilla-Peris. Some polynomial versions of cotype and applications. *J. Funct. Anal.*, 270(1):68–87, 2016.

[15] D. Carando, F. Marceca, M. Scotti, and P. Tradacete. Random unconditional convergence of vector-valued Dirichlet series. *J. Funct. Anal.*, 277(9):3156–3178, 2019.

[16] D. Carando, F. Marceca, and P. Sevilla-Peris. Decoupling inequalities with exponential constants, 2020. preprint: arXiv:2012.15293.

[17] D. Carando, F. Marceca, and P. Sevilla-Peris. Hausdorff–Young-type inequalities for vector-valued Dirichlet series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(8):5627–5652, 2020.

[18] P. G. Casazza and N. J. Nielsen. A Gaussian average property of Banach spaces. *Illinois J. Math.*, 41(4):559–576, 1997.

[19] W. J. Davis, D. J. H. Garling, and N. Tomczak-Jaegermann. The complex convexity of quasinormed linear spaces. *J. Funct. Anal.*, 55(1):110–150, 1984.

[20] V. De la Peña and E. Giné. *Decoupling: from dependence to independence.* Springer-Verlag, 1999.

[21] A. Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176 of *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[22] A. Defant, D. García, M. Maestre, and D. Pérez-García. Bohr's strip for vector valued Dirichlet series. *Math. Ann.*, 342(3):533–555, 2008.

[23] A. Defant, D. García, M. Maestre, and P. Sevilla-Peris. *Dirichlet Series and Holomorphic Functions in High Dimensions*, volume 37 of *New Mathematical Monographs.* Cambridge University Press, 2019.

[24] A. Defant, M. Maestre, and U. Schwarting. Bohr radii of vector valued holomorphic functions. *Adv. Math.*, 231(5):2837–2857, 2012.

[25] A. Defant and M. Mastyło. L^p-norms and Mahler's measure of polynomials on the n-dimensional torus. *Constr. Approx.*, 44(1):87–101, 2016.

[26] A. Defant and M. Mastyło. Subgaussian kahane-salem-zygmund inequalities in banach spaces, 2020. preprint: arXiv 2008.04429.

[27] A. Defant, M. Mastyło, and A. Pérez. Bohr's phenomenon for functions on the Boolean cube. *J. Funct. Anal.*, 275(11):3115–3147, 2018.

[28] A. Defant, M. Mastyło, and A. Pérez. On the Fourier spectrum of functions on Boolean cubes. *Math. Ann.*, 374(1-2):653–680, 2019.

[29] A. Defant and A. Pérez. Optimal comparison of the p-norms of Dirichlet polynomials. *Israel J. Math.*, 221(2):837–852, 2017.

[30] A. Defant and A. Pérez. Hardy spaces of vector-valued Dirichlet series. *Studia Math.*, 243(1):53–78, 2018.

[31] A. Defant and S. Schlüters. Non-symmetric polarization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 445 (2): 1291–1299, 2017.

[32] A. Defant and I. Schoolmann. $\mathcal{H}_p$-theory of general Dirichlet series. *J. Fourier Anal. Appl.*, 25(6):3220–3258, 2019.

[33] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge. *Absolutely summing operators*, volume 43 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[34] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr. *Vector measures*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[35] S. Dineen. *Complex analysis on infinite-dimensional spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.

[36] R. Fisher and F. Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1938.

[37] J. García-Cuerva, K. S. Kazaryan, V. I. Kolyada, and J. L. Torrea. The Hausdorff-Young inequality with vector-valued coefficients and applications. *Uspekhi Mat. Nauk*, 53(3(321)):3–84, 1998.

[38] J. Globevnik. On complex strict and uniform convexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47:175–178, 1975.

[39] B. Golubov, A. Efimov, and V. Skvortsov. *Walsh series and transforms: Theory and Applications*, volume 64 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[40] C. C. Graham and K. E. Hare. *Interpolation and Sidon sets for compact groups*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2013.

[41] G. H. Hardy and M. Riesz. *The general theory of Dirichlet's series*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964.

[42] L. A. Harris. A Bernstein-Markov theorem for normed spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 208(2):476–486, 1997.

[43] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, and K. Seip. A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$. *Duke Math. J.*, 86(1):1–37, 1997.

[44] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. *Analysis in Banach spaces. Vol. II: Probabilistic methods and operator theory*, volume 67 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Springer, Cham, 2017.

[45] P. Ivanisvili, R. van Handel, and A. Volberg. Rademacher type and Enflo type coincide. *Ann. of Math. (2)*, 192(2):665–678, 2020.

[46] M. Klimek. Metrics associated with extremal plurisubharmonic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(9):2763–2770, 1995.

[47] S. Kwapień. On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators. *Studia Math.*, 38:193–201. (errata insert), 1970.

[48] S. Kwapień. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.*, 44:583–595, 1972.

[49] S. Kwapień. Decoupling inequalities for polynomial chaos. *Ann. Probab.*, 15(3):1062–1071, 1987.

[50] S. Kwapień and A. Pełczyński. The main triangle projection in matrix spaces and its applications. *Studia Mathematica*, 34 (1): 43–67, 1970.

[51] S. Kwapień and J. Szulga. Hypercontraction methods in moment inequalities for series of independent random variables in normed spaces. *Ann. Probab.*, 19(1):369–379, 1991.

[52] S. Kwapień and W. A. Woyczyński. *Random series and stochastic integrals: single and multiple.* Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[53] S. Kwapień and W. A. Woyczyński. *Random series and stochastic integrals: single and multiple*, volume 1991 of *Probability and Its Applications.* Birkhäuser, 1992.

[54] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach spaces: Isoperimetry and processes.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[55] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. II: Function spaces*, volume 97 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[56] F. Marceca. Some remarks on non-symmetric polarization. *J. Math. Anal. Appl.*, 466(2):1486–1498, 2018.

[57] M. Mastyło. On interpolation of bilinear operators. *J. Funct. Anal.*, 214(2):260–283, 2004.

[58] B. Maurey and G. Pisier. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. *Studia Math.*, 58(1):45–90, 1976.

[59] T. McConnell and M. Taqqu. Decoupling of Banach-valued multilinear forms in independent symmetric Banach-valued random variables. *Probability Theory and Related Fields*, 75 (4): 499–507, 1987.

[60] A. Naor. An introduction to the ribe program. *Japanese Journal of Mathematics*, 7(2): 167–233, 2012.

[61] L. Neder. Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen beschränkter Funktionen. *Math. Z.*, 14(1):149–158, 1922.

[62] R. O'Donnell and Y. Zhao. Polynomial bounds for decoupling, with applications. In *31st Conference on Computational Complexity*, volume 50 of *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, pages Art. No. 24, 18. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2016.

[63] M. Pavlović. On the complex uniform convexity of quasi-normed spaces. *Math. Balkanica (N.S.)*, 5(2):92–98, 1991.

[64] A. Pełczyński. Commensurate sequences of characters. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 104(2):525–531, 1988.

[65] G. Pisier. Martingales with values in uniformly convex spaces. *Israel J. Math.*, 20(3-4):326–350, 1975.

[66] G. Pisier. Some results on Banach spaces without local unconditional structure. *Compositio Math.*, 37(1):3–19, 1978.

[67] G. Pisier. Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces. *Annals of Mathematics*, 115(2):375–392, 1982.

[68] G. Pisier. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. In *Probability and Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 1986.

[69] G. Pisier. *Martingales in Banach spaces*, volume 155 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[70] D. Popa. Reverse inclusions for multiple summing operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 350(1):360–368, 2009.

[71] H. Queffélec and M. Queffélec. *Diophantine approximation and Dirichlet series*, volume 2 of *Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2013.

[72] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Wiley Classics Library. 1990.

[73] M. Rzeszut and M. Wojciechowski. Hoeffding Decomposition in H^1 spaces, 2019. preprint: arXiv 1906.01405.

[74] R. Savage and E. Lukacs. Tables of inverses of finite segments of the Hilbert matrix. In *Contributions to the solution of systems of linear equations and the determination of eigenvalues*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 39, pages 105–108. U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1954.

[75] I. Schoolmann. *Hardy spaces of general Dirichlet series and their maximal inequalities.* PhD thesis, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2020.

[76] I. Schoolmann. On bohr's theorem for general dirichlet series. *Mathematische Nachrichten*, 293(8):1591–1612, 2020.

[77] M. Scotti. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, en preparación.

[78] J. A. Seigner. Rademacher variables in connection with complex scalars. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 66(2):329–336, 1997.

[79] O. Toeplitz. Ueber eine bei den dirichletschen reihen auftretende aufgabe aus der theorie der potenzreihen von unendlich vielen veränderlichen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:417–432, 1913.

[80] N. Tomczak-Jaegermann. The moduli of smoothness and convexity and the Rademacher averages of trace classes $S_p(1 \leq p < \infty)$. *Studia Math.*, 50:163–182, 1974.

[81] N. Tomczak-Jaegermann. *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, volume 38 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[82] N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze, and S. A. Chobanyan. *Probability distributions on Banach spaces*, volume 14 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[83] H. S. Wilf. *Finite sections of some classical inequalities.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 52. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[84] W. A. Woyczyński. *Geometry and martingales in Banach spaces.* CRC Press, Boca Raton, FL, 2019.

[85] Q. Xu. Littlewood-Paley theory for functions with values in uniformly convex spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 504:195–226, 1998.