UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Límite fluido para la fase de agrupación del proceso zero-range con condensación

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Lic. Daniela Sabrina Cuesta

Directora de tesis: Dra. Inés Armendáriz
Consejero de estudios: Dr. Pablo Groisman

Buenos Aires, 2021
Fecha de defensa: 30 de septiembre de 2021

Límite fluido para la fase de agrupación del proceso zero-range con condensación

Resumen

El proceso zero range (ZRP) es un modelo clásico de sistemas de partículas, en el cual las partículas saltan entre los sitios de un conjunto V con tasas que sólo dependen del número de partículas en el sitio de salida y de las tasas de un paseo aleatorio. Este modelo, introducido en [19], ha generado gran interés en la comunidad tanto matemática como física, debido a que permite modelar variados procesos en las ciencias aplicadas, tales como sistemas granulares, crecimientos de interfase, dinámica de polímeros y procesos de transporte.

En esta tesis abordamos el problema de encontrar el límite fluido al proceso zero range con condensación cuando el número de sitios permanece fijo, el tiempo es escalado en forma lineal respecto al número de partículas N, y a tiempo inicial todos los sitios se encuentran macroscópicamente ocupados.

Estudiando un problema de martingala probamos que cuando N tiende a infinito, existe el proceso límite $(\zeta_t)_{t\geq 0}$, el cual resulta determinístico y sólo depende del límite de las distribuciones a tiempo inicial de las partículas y de las tasas del paseo aleatorio.

Utilizando procesos traza, caracterizamos explícitamente a toda la trayectoria $(\zeta_t)_{t\geq 0}$. Mostramos que a nivel macroscópico, cada vez que un sitio se vacía, no vuelve a recuperar masa, y que existe un tiempo $T_0 > 0$ tal que a partir de ese momento la trayectoria límite permanece constante. Además, mostramos que los sitios que permanecen macroscópicamente ocupados a partir de T_0 son exactamente los sitios cuya distribución invariante asociada al paseo aleatorio es maximal.

Por otro lado, partiendo de que un sistema de colas conocido como Jackson network cerrada coincide con el proceso zero range para una elección específica de tasas de salto, hemos extendido nuestros resultados, obteniendo un límite fluido para las Jackson networks generalizadas (cerradas y abiertas), en donde la tasa a la que trabaja cada servidor puede depender del número de tareas que tiene ese servidor. Si bien dicho límite se conocía para el caso de la Jackson network con tasas constantes (es decir, que no dependen del número de tareas en cada servidor), ningún resultado había sido probado para el caso en el que hay dependencia.

Los resultados sobre el proceso zero range abordados en esta tesis forman parte de un trabajo en proceso, en colaboración con Inés Armendáriz, Johel Beltrán y Milton Jara. Y los resultados sobre la Jackson network forman parte de otro trabajo en proceso, en colaboración con Inés Armendáriz y Matthieu Jonckheere.

Palabras clave: Sistemas de Partículas, Proceso Zero Range, Límite Fluido, Problema de Martingala, Proceso Traza, Jackson Network.

Fluid limit for the coarsening phase of the condensing zero-range process

Abstract

The zero range process (ZRP) is a classical model in particle systems. In this model, the particles jump between the sites of a set V with rates that depend only on the number of particles in the departure site and the rates of a random walk. This model, introduced in [19], has generated huge interest among mathematicians and physicists. This is because it allows modeling a lot of processes in applied sciences such as granular systems, vehicular traffic, interface growing and polymer dynamics.

This thesis analyses the problem of finding the fluid limit for the condensing zero range process when the number of sites is fixed, the time is linearly scaled with respect to the total number of particles N, and at initial time all the sites are macroscopically occupied.

On the one hand, studying a martingale problem, we prove that when N tends to infinity, there exists the limit process $(\zeta_t)_{t\geq 0}$. This limit process is deterministic. Furthermore it only depends on the limit of the initial distributions of particles at initial time and the rates of the random walk.

Using trace processes, we characterize all the trajectory $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ explicitly. We show that at macroscopically level, when a site empties out in the limit process, it remains empty forever, and there exists a time $T_0 > 0$ such that after this time the limit process remains constant. We also show that the sites which remain macroscopically occupied after time T_0 are exactly the sites whose invariant distribution associated to the random walk is maximal.

On the other hand, since a queueing system called closed Jackson network coincides with the zero range process for a specific choice of rates, we have extended our results. Indeed, we obtain a fluid limit for generalized Jackson networks (closed and open) where the rate at which a server works can depend on the number of jobs that the server has. Although this limit was knowing for the Jackson network with constant rates (this means, rates such that they do not depend on the number of jobs at each server), there were no results for the case where there is dependency.

The results of this thesis about the zero range process are part of a work in progress, in collaboration with Inés Armendáriz, Johel Beltrán and Milton Jara. And the results about the Jackson networks are part of another work in progress, in collaboration with Inés Armendáriz and Matthieu Jonckheere.

Keywords: Particle Systems, Zero Range Process, Fluid Limit, Martingale Problem, Trace Process, Jackson Network.

Agradecimientos

A mi directora Inés, por todo el tiempo dedicado, por las discusiones matemáticas, por sus enseñanzas y por todas las oportunidades que me dio. Por los viejos sábados de running y por su amistad.

A Pablo Amster, Eda Cesaratto y Joaquín Fontbona, por haber aceptado ser jurados de esta tesis, por haber dedicado tiempo a leerla y por los comentarios que me hicieron.

A todo el grupo de probabilidad. Fue muy lindo transitar el doctorado formando parte de este grupo. Gracias por los momentos compartidos, las ideas, viajes, congresos, seminarios, y todo lo que me enseñaron. Gracias en particular a Pablo, Patu y Matt.

A Johel Beltrán, Eric Cator y Milton Jara. Muchas gracias por permitirme aprender y hacer matemática con ustedes, tanto en sus visitas a Argentina, como en otras partes del mundo. Gracias a toda la gente de la PUCP en Perú, de Radboud University en Holanda y del IMPA en Brasil.

A Santi Saglietti, por toda su ayuda y sus consejos. También por sus clases de Teoría de Proba y, junto con Maru, las de Proba M, que fueron muy valiosas para mí.

A Manu Sáenz, por todas las tardes estudiando grafos aleatorios con el libro de Remco, por su entusiasmo y compañerismo.

A Monia y Zoraida, por escuchar, con toda la paciencia y bondad que las caracteriza, mis preocupaciones y dudas probabilísticas, y por su apoyo.

A la Universidad de Buenos Aires, por toda la formación que recibí. A CONICET, por otorgarme la beca para hacer el doctorado. A todos los organismos que aportaron financiamiento para mis viajes a congresos y estadías académicas.

A los profesores que tuve durante estos años. A mis compañeros de docencia en Exactas y también a mis alumnos. A las personas que forman parte del DM y del IMAS, al Hotel de Hilbert y la oficina 2103.

A la Universidad Torcuato Di Tella, en especial a Andrea Rotnitzky.

A la Olimpíada Matemática Argentina. Fue muy importante para mi vida, en muchos aspectos, el haber formado (y formar) parte. Gracias a Gaby Estrany, por sus clases y amistad. Y al colegio Jacarandá, particularmente a Alicia, Cristina y Jorge.

A todas mis amigas y amigos, por su afecto. Por todos los momentos y experiencias compartidas. Por los aprendizajes, las charlas, las reuniones y las videollamadas. Por abrirme la puerta de sus hogares. Por las palabras de aliento y los consejos.

A toda mi familia, por su cariño, apoyo y confianza. Sobre todo a mi mamá y mi papá, Rosa y Néstor, por todo su amor, por siempre estar a mi lado y apoyarme. Por todas las oportunidades que me dieron y por enseñar con el ejemplo a ser buenas personas.

A Lucas, por haberme apoyado y ayudado tanto para hacer el doctorado, por toda la paciencia y confianza. Por ser tan compañero y alegrarse tanto con mis logros. Por ayudarme a mejorar en el pensamiento matemático y a crecer como persona. Por todas las aventuras, sueños y proyectos compartidos, y por todo su amor.

Índice

Capítulo 1

Introducción

El proceso zero range (ZRP) es un modelo clásico de sistemas de partículas, en el cual las partículas saltan de un sitio a otro con tasas que sólo dependen del número de partículas en el sitio de salida, y que siguen las tasas de un paseo aleatorio.

Para definir el modelo consideremos un conjunto finito de sitios V y un paseo aleatorio irreducible en dicho espacio, con tasas de salto $\{r(i,j); i,j \in V\}$. Sea $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(0) = 0 \;\text{ y }\; g(n) = 1 + \frac{\alpha}{n} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \text{ con } \alpha \geq 0. \tag{1.1}$$

En el ZRP, una partícula salta del sitio $i \in V$ al sitio $j \in V$ con tasa

$$g(\eta(i))r(i,j),$$

siendo $\eta(i)$ el número de partículas que hay en el sitio i.

Notemos que esta dinámica es "atractiva", en el sentido de que las partículas que se encuentran en sitios muy ocupados salen de ellos con una tasa menor que las partículas que se encuentran en sitios casi vacíos.

Ha sido probado que el ZRP tiene una familia de medidas estacionarias (indexadas por un parámetro ρ) que son medidas producto ([1]), y que en el estado estacionario, cuando N tiende a infinito, todas las partículas salvo un número finito se acumulan en un único sitio, el cual se llama condensado ([13]). Este fenónemo es una de las razones por las cuales el modelo ha generado gran interés.

Se han probado resultados para la situación en la que el número de sitios y el número de partículas N convergen a infinito ([2],[3]). En esta tesis nos concentramos en el caso en que el número de sitios permanece fijo, mientras que el número de partículas N tiende a infinito.

En [5] los autores analizan cómo el condensado se va formando. Consideran el proceso

$$\xi_t^N(j) = \frac{\eta_{tN^2}(j)}{N},\ j \in V,$$

donde $\eta_{tN^2}(j)$ representa la cantidad de partículas en el sitio j a tiempo tN^2, y examinan cómo las partículas se acumulan en un único sitio, el cual satisface la siguiente propiedad: si μ es la (única) distribución invariante del paseo aleatorio con tasas $\{r(i,j) : i, j \in V\}$, el sitio que concentra al condensado pertenece a

$$\mathcal{M} = \{i \in V : \mu(i) = \max_{j \in V} \mu(j)\}. \tag{1.2}$$

Este escalamiento se conoce como "etapa de nucleación del ZRP".

En [7] prueban que si $\alpha > 1$, al reescalar el tiempo por $N^{\alpha+1}$ y considerar el proceso

$$\psi_t^N(j) = \frac{\eta_{tN^{\alpha+1}}(j)}{N},\ j \in V,$$

el condensado va saltando entre los sitios de $\mathcal{M}$, siguiendo las tasas de un nuevo paseo aleatorio. Esta etapa se conoce como "etapa de metaestabilidad del ZRP".

En esta tesis abordamos la dinámica del ZRP con condensación en una nueva escala, la escala lineal, que es conocida como "etapa de agrupación del ZRP". Más precisamente, estudiamos el límite cuando N tiende a infinito de

$$\zeta_t^N(j) = \frac{\eta_{tN}(j)}{N},\ j \in V.$$

Como hipótesis, asumimos que el límite a tiempo inicial $t = 0$ existe y es positivo para cada sitio, es decir,

$$\zeta_0(i) = \lim_{N\to\infty} \zeta_0^N(i) > 0\ \forall i \in V.$$

La demostración, que se basa en un problema de martingala, es la misma tanto para la función g dada en (1.1) como para cualquier g tal que

$$g(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(n) = 1,$$

y más aún, es análogo a pensar que tenemos una función g_i para cada sitio $i \in V$, con

$$g_i(0) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} g_i(n) = c_i \ \text{ y } \ c_i > 0\ \forall i \in V.$$

Mostramos que cuando N tiende a infinito, existe el proceso límite

$$\zeta_t(i) = \lim_{N\to\infty} \zeta_t^N(i)\ \forall i \in V,\ \forall t \geq 0,$$

el cual resulta determinístico y sólo depende de la distribución inicial ζ_0 y de las tasas $\{r(i,j); i,j \in V\}$ del paseo aleatorio. Además, usando el proceso traza, probamos que cada vez que un sitio se vacía en el proceso límite, el mismo va a quedar vacío por siempre, y que existe un $T_0 > 0$ tal que a partir de ese momento, el proceso límite permanece constante (i.e., $\zeta_t(i) = \zeta_{T_0}(i)$ para todo $t \geq T_0$ y para todo $i \in V$).

También caracterizamos a los sitios que en el proceso límite permanecen con una proporción positiva de partículas. Estos sitios son exactamente los sitios de $\mathcal{M}$, el conjunto de los sitios con distribución invariante maximal definido en (1.2).

Por otro lado, hemos extendido los resultados probados para el ZRP para un sistema de colas conocido como Jackson network.

La Jackson network (Markoviana) es un proceso formado por un conjunto finito de servidores V en el cual:

- Los clientes (también llamados tareas o trabajos) ingresan desde afuera del sistema al servidor i siguiendo un proceso de Poisson con una cierta tasa μ_i;
- Cada servidor tiene un servicio exponencial de parámetro λ_i;
- Una vez que un cliente es atendido en el servidor i, este cliente salta a otro servidor j con probabilidad $p(i,j)$, o se va del sistema con probabilidad $1 - \sum_{j \in V} p(i,j)$;
- Tanto los tiempos de servicio como los procesos de llegada de los clientes son independientes.

Llamamos a este modelo Jackson network tradicional (o Jackson network con tasas tradicionales o constantes).

Notemos que si el sistema es cerrado, es decir, no ingresan ni salen tareas del sistema, el proceso coincide con el proceso zero range cuando la función g vale $g(0) = 0$ y $g(n) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

En esta tesis, además de estudiar un límite fluido para el caso de la Jackson network tradicional tanto cerrada como abierta, lo haremos para un caso más general: la Jackson network generalizada. En este sistema, las tasas de servicio pueden depender, de forma apropiada, del número de clientes que hay en el servidor al momento del servicio.

En el caso de la Jackson network abierta (la cerrada coincide exactamente con el proceso zero range), ya no será siempre cierto que los servidores maximales son los que permanecen macroscópicamente ocupados. Podría ocurrir que a nivel macroscópico el sistema se vacíe; que a partir de un momento el sistema quede constante; o que el sistema crezca indefinidamente.

Organización de la tesis:

- En el Capítulo 2 introducimos brevemente definiciones y resultados generales de probabilidad que utilizaremos a lo largo de la tesis, tales como procesos de Markov, martingalas, sistemas de colas, etc.

- En el Capítulo 3 presentamos la descripción del problema que estudiamos, junto con los resultados principales que obtuvimos.

- En el Capítulo 4 damos la demostración de dos proposiciones enunciadas en el capítulo anterior, y presentamos algunos cálculos auxiliares.

- En los Capítulos 5 y 6 probamos que en el proceso límite, los sitios que se vacían quedarán vacíos; y que los sitios que permanecerán ocupados indefinidamente son exactamente los sitios cuya distribución invariante asociada al paseo aleatorio es maximal.

- En el Capítulo 7 extendemos los resultados probados en los capítulos anteriores al modelo de Jackson network generalizado.

- En el Capítulo 8 analizamos el límite fluido para el escalamiento lineal del proceso zero range y de la Jackson network cuando a tiempo inicial tenemos algunos sitios (servidores) macroscópicamente vacíos y las tasas de salto (de servicio) son constantes.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introducimos algunas definiciones y resultados clásicos que utilizaremos a lo largo del presente trabajo.

2.1 Cadenas de Markov a tiempo discreto

Toda esta sección se basa en el libro Markov Chains de Norris [17].

Comencemos dando la definición de una cadena de Markov. Asumiremos que estamos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, siendo $\mathcal{F}$ una sigma álgebra de Ω y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad, y que el espacio de estados E es finito o numerable. Denotaremos con $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 2.1.1. *Dada una matriz estocástica P en $[0, \infty)^{E \times E}$ (es decir, una matriz con entradas no negativas tal que los valores de cada fila suman 1) y una distribución λ en E, decimos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto con distribución inicial λ y matriz de transición P si se cumplen las siguientes condiciones:*

- *X_0 tiene distribución λ, es decir:*
$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda(i) \ \forall i \in E;$$
- *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, condicionado a $X_n = i$, la variable aleatoria X_{n+1} tiene distribución $(P_{ij} : j \in E)$ y es independiente de $X_0, \ldots, X_n$, es decir:*
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = P_{i_n i_{n+1}} \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \forall i_0, \ldots, i_{n+1} \in E.$$

Observación 2.1.2. *Notemos que de la Definición 2.1.1 se deduce que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una cadena de Markov con distribución inicial λ y matriz de transición P si y sólo si*

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = \lambda(i_0) P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} i_n} \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \forall i_0, \ldots, i_n \in E.$$

Una frase característica de los procesos de Markov es la siguiente:

"Dado el presente, el pasado y el futuro son independientes".

Esto se debe a los siguientes resultados, llamados Propiedad de Markov y Propiedad de Markov Fuerte.

Teorema 2.1.3. (Propiedad de Markov, Teorema 1.1.2 en [17])
Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con matriz de transición P, y sean $m \in \mathbb{N}$, $i \in E$. Condicionado a $X_m = i$, $(X_{m+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ resulta una cadena de Markov con matriz de transición P y distribución inicial δ_i (delta de Dirac concentrada en $\{i\}$), independiente de $X_0, \ldots, X_m$.

Veamos ahora cómo generalizar el resultado anterior cuando reemplazamos el tiempo determinístico $m \in \mathbb{N}$ por un tiempo aleatorio T. Para eso, necesitamos introducir la definición de tiempo de parada.

Definición 2.1.4. *Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de variables aleatorias, decimos que $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ es un tiempo de parada de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ si*

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, \ldots, X_n) \; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Dos ejemplos típicos de tiempos de parada son los llamados "hitting time" y "return time". Dado A un boreliano de $\mathbb{R}$, definimos el hitting time al conjunto A como

$$T_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\},$$

y el return time a A como

$$T_A^+ = \inf\{n > 0 : X_n \in A\}.$$

Teorema 2.1.5. (Propiedad de Markov Fuerte, Teorema 1.4.2 en [17])
Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con matriz de transición P y sea T un tiempo de parada de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Entonces, condicionado a $T < \infty$ y $X_T = i$ con $i \in E$, $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una cadena de Markov con matriz de transición P y distribución inicial δ_i, independiente de $X_0, \ldots, X_T$.

Veamos ahora algunas definiciones y propiedades.

Definición 2.1.6. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con matriz de transición P. Decimos que la cadena (o que la matriz) es irreducible si para todo par de estados $i, j \in E$,*

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0 \textit{ para algún } n \in \mathbb{N}_0.$$

Observación 2.1.7. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov. Condicionado a $X_0 = i$, la distribución de X_n viene dada por $((P^n)_{ij} : j \in E)$, siendo P^n la matriz P elevada a la n (ver Teorema 1.1.3 en [17]). Por lo tanto, que P sea irreducible es equivalente a que, para todo par de estados i, j, exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $(P^n)_{ij} > 0$.*

Definición 2.1.8. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con matriz de transición P y sea μ una distribución. Decimos que μ es una distribución invariante si $\mu = \mu P$, lo que es equivalente a pedir que*

$$\sum_{j\in E} \mu(i)P_{ij} = \sum_{j\in E} \mu(j)P_{ji} \ \forall i \in E.$$

Observación 2.1.9. *Notemos que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una cadena de Markov con matriz de transición P y distribución inicial μ, con μ invariante, entonces para todo $m \in \mathbb{N}_0$ $(X_{m+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ resulta una cadena de Markov con matriz de transición P y distribución inicial μ.*

El siguiente resultado nos será de gran utilidad.

Lema 2.1.10. (Corolario del Teorema 1.7.7 en [17])
Si E es finito y la cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es irreducible, entonces existe una única distribución invariante.

Veamos ahora dos resultados relacionados con el comportamiento asintótico de una cadena de Markov. Necesitamos primero la definición de aperiodicidad.

Definición 2.1.11. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con matriz de transición P. Decimos que la cadena (o que la matriz) es aperiódica si para cada $i \in E$, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que*

$$(P^n)_{ii} = \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) > 0 \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Observación 2.1.12. *Que una matriz sea aperiódica equivale a que para todo $i \in E$, el máximo común divisor del conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : (P^n)_{ii} > 0\}$$

es igual 1.

Teorema 2.1.13. (Convergencia al equilibrio, Teorema 1.8.3 en [17])
Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con matriz de transición P, irreducible y aperiódica, con distribución invariante μ. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \mu(i) \ \forall i \in \mathbb{N},$$

sin importar la distribución inicial de la cadena.

Teorema 2.1.14. (Teorema Ergódico, Teorema 1.10.2 en [17])
Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con matriz de transición P irreducible, y para cada estado $i \in E$ sea

$$V_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}$$

el número de visitas a i antes de tiempo n. Entonces

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{m_i} \Big) = 1,$$

con $m_i = \mathbb{E}(T_i^+)$ el tiempo medio de retorno al estado i.

2.2 Procesos de Markov a tiempo continuo

En esta sección nos basaremos en [8] y en [17]. Asumiremos que el espacio de estados E es finito o numerable.

Definición 2.2.1. *Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ que toma valores en E es un proceso de Markov a tiempo continuo si para todos $i_1, \ldots, i_n \in E$ y $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ vale que*

$$\mathbb{P}\big(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1\big) = \mathbb{P}\big(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\big).$$

Definición 2.2.2. *Si para todos $i, j \in E$ y $s, t \geq 0$ se verifica que*

$$\mathbb{P}\big(X_{t+s} = j | X_s = i\big) = \mathbb{P}\big(X_t = j | X_0 = i\big),$$

decimos que el proceso es homogéneo en el tiempo. En ese caso, escribimos

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}\big(X_t = j | X_0 = i\big) = \mathbb{P}_i\big(X_t = j\big).$$

La familia $(P_t)_{t\geq 0}$ definida como $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in E}$, llamadas probabilidades de transición, forman un semigrupo, que satisface

- *$P(0) = I$;*
- *$P(t)$ es una matriz estocástica para todo $t \geq 0$;*
- *(Ecuaciones Chapman-Kolmogorov) $P(t + s) = P(t)P(s)$ para todos $s, t \geq 0$:*

$$p_{ij}(t + s) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s).$$

2.2.1 Construcción en base a una cadena discreta

Comencemos dando la definición de Q-matriz.

Definición 2.2.3. *Una Q-matriz en E es una matriz en $\mathbb{R}^{E\times E}$ tal que*

- $0 \leq -Q_{ii} < \infty \ \forall i \in E$;
- $Q_{ij} \geq 0 \ \forall i \neq j \in E$;
- $\sum\limits_{j\in E} Q_{ij} = 0 \ \forall i \in E$.

Observación 2.2.4. *Dada una Q-matriz Q en E, denotemos*

$$Q(i) = -Q_{ii} \ \forall i \in E$$

y consideremos P la matriz de salto asociada definida del siguiente modo:

Si $Q(i) \neq 0$, se define

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{Q_{ij}}{Q(i)}, \ j \in E \setminus \{i\}, \\ P_{ii} &= 0. \end{aligned}$$

Si $Q(i) = 0$, se define

$$\begin{aligned} P_{ij} &= 0, \ j \in E \setminus \{i\}, \\ P_{ii} &= 1. \end{aligned}$$

La matriz P resulta estocástica.

Veamos ahora cómo construir un proceso de Markov a tiempo continuo con Q-matriz Q y distribución inicial λ a partir de la matriz de salto P y de los tiempos de espera en cada estado. Nos basaremos en la Sección 2.6 de [17].

Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov a tiempo discreto con matriz de transición P y distribución inicial λ, y sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro 1, independientes de $(Y_n)_{n\geq 0}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$S_n = \frac{T_n}{Q(Y_{n-1})},$$

que tiene distribución exponencial de parámetro $Q(Y_{n-1})$; sea $J_n = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ y $J_0 = 0$. Para cada $t \geq 0$ definimos X_t del siguiente modo:

$$X_t = \begin{cases} Y_n & \text{si } J_n \leq t < J_{n+1} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0, \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ resulta un proceso de Markov a tiempo continuo.

Una forma de reinterpretar la construcción anterior sería la siguiente. Cada estado $i \in E$ tiene asignado un reloj que suena con distribución exponencial de parámetro $Q(i)$, todos independientes entre sí (asumimos, sin pérdida de generalidad, que $Q(i) > 0$ para todo $i \in E$). A tiempo inicial el proceso se distribuye bajo la medida λ. Cada vez que el proceso está en un estado $i \in E$, espera que el reloj asociado a ese estado suene, y en el momento en que el reloj suena, el proceso elige un estado $j \in E \setminus \{i\}$ siguiendo las probabilidades $\frac{Q_{ij}}{Q(i)}$ para cada $j \in E \setminus \{i\}$, y salta a ese estado.

Análogamente, podríamos pensar que cada vez que el proceso se encuentra en el estado i, relojes exponenciales independientes de parámetros Q_{ij}, con $j \in E \setminus \{i\}$, comienzan a competir. En el momento en que suena alguno de esos relojes, el proceso pasa del estado i a j, donde j es el estado asociado al reloj que sonó. Ambas interpretaciones son equivalentes debido al siguiente resultado.

Lema 2.2.5. (Teorema 2.3.3 en [17])
Sea $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, donde W_i tiene distribución exponencial de parámetro λ_i para todo $i \in \mathbb{N}$, y $\lambda = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i < \infty$. Entonces,

$$Y = \min_{i\in\mathbb{N}} W_i$$

tiene distribución exponencial de parámetro λ. Además, $\operatorname{argmin}_{i\in\mathbb{N}} W_i$ es independiente de Y.

Observemos que si Q es la Q-matriz asociada a un proceso de Markov a tiempo continuo, para todo par de estados $i \neq j \in E$, Q_{ij} nos indica la tasa de salto del sitio i al sitio j, mientras que $Q(i) = -Q_{ii}$ nos indica la tasa de salida de un estado i. Por lo tanto, también llamaremos tasas o tasas de salto a $\{Q_{ij}; i, j \in E\}$.

Consideremos una Q-matriz Q en E. Sea $\mathbb{R}^E$ el conjunto de funciones $F : E \to \mathbb{R}$ y sea $\mathscr{L} : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^E$ el operador definido por

$$(\mathscr{L}F)(i) = \sum_{j\in E} Q_{ij}(F(j) - F(i)),\ i \in E. \tag{2.1}$$

A este operador lo llamaremos el generador del proceso de Markov con tasas $\{Q_{ij}; i, j \in E\}$.

2.2.2 Propiedades

Para las propiedades que siguen asumiremos que la Q-matriz Q satisface que

$$\sup_{i\in E} Q(i) < \infty,$$

que es lo que cumplen todos los procesos de Markov involucrados en esta tesis. Pediremos esa hipótesis para que el proceso no sea explosivo. (Ver Teorema 2.7.1 en [17]). Esencialmente, que un proceso de Markov sea explosivo significa que en un período finito de tiempo ocurren infinitos saltos: si llamamos J_n al instante en el que se produce el n-ésimo salto, que el proceso sea explosivo equivale a que

$$\mathbb{P}_i\big(\sup_{n\in\mathbb{N}} J_n < \infty\big) > 0$$

para algún $i \in E$.

Teorema 2.2.6. (Propiedad de Markov, Corolario del Teorema 2.8.1 en [17])
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo con Q-matriz Q y distribución inicial λ, y sea $s > 0$. Entonces, condicional a X_s, el proceso $(X_{t+s})_{t\geq 0}$ resulta un proceso de Markov con Q-matriz Q, independiente de $(X_u)_{u\leq s}$.

Definición 2.2.7. *Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso a tiempo continuo, decimos que $T : \Omega \to [0, \infty]$ es un tiempo de parada de $(X_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\{T \leq t\} \in \sigma(X_s : s \leq t) \ \forall t \geq 0.$$

Teorema 2.2.8. (Propiedad de Markov Fuerte, Teorema 2.8.1 en [17])
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo con Q-matriz Q y distribución inicial λ, y sea T un tiempo de parada de $(X_t)_{t\geq 0}$. Entonces, condicional a $T < \infty$ y a X_T, el proceso $(X_{T+t})_{t\geq 0}$ resulta un proceso de Markov con Q-matriz Q, independiente de $(X_u)_{u\leq T}$.

Veamos ahora las definiciones de distribución invariante para el caso continuo.

Definición 2.2.9. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo con Q-matriz Q y sea λ una distribución en E. Decimos que λ es invariante si*

$$\lambda Q = 0.$$

Observación 2.2.10. *Notemos que, como*

$$Q_{ii} = -\sum_{j\in V\setminus\{i\}} Q_{ij}, \ i \in V,$$

que una medida λ sea invariante para el proceso de Markov con matriz de tasas Q es equivalente a pedir que

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} \lambda(i)Q_{ij} = \sum_{j\in V\setminus\{i\}} \lambda(j)Q_{ji} \ \forall i \in E,$$

o que

$$\sum_{j\in V} \lambda(i)Q_{ij} = \sum_{j\in V} \lambda(j)Q_{ji} \ \forall i \in E.$$

Lema 2.2.11. (Teorema 3.5.1 en [17])
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo con Q-matriz Q y matriz de salto P. Son equivalentes:

- λ es una distribución invariante para el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ $(\lambda Q = 0)$;
- μ definida por $\mu_i = \lambda_i Q(i)$ es una distribución invariante para la cadena de Markov a tiempo discreto con matriz de transición P $(\mu P = \mu)$.

Definición 2.2.12. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo. Decimos que $(X_t)_{t\geq 0}$ es irreducible si para todo par de estados $i, j \in E$, existe $t \geq 0$ tal que*

$$P(X_t = j | X_0 = i) > 0.$$

Observación 2.2.13. *Que un proceso de Markov a tiempo continuo con Q-matriz Q sea irreducible es equivalente a que la cadena de Markov a tiempo discreto con matriz de salto P sea irreducible.*

En particular, la observación anterior junto con los Lemas 2.1.10 y 2.2.11 implican que si el proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ es irreducible, entonces existe una única distribución invariante.

Veamos ahora la definición de reversibilidad y balance detallado.

Definición 2.2.14. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo con matriz de tasas Q y sea λ una distribución. Decimos que Q y λ están en balance detallado si*

$$\mu(i)Q_{ij} = \mu(j)Q_{ji} \ \forall i, j \in E.$$

Observación 2.2.15. *Notemos que si Q y λ están en balance detallado, entonces λ es una distribución invariante.*

Definición 2.2.16. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo con distribución inicial λ y matriz de tasas Q. Decimos que el proceso es reversible si para todo $T > 0$, $(X_{T-t})_{0\leq t\leq T}$ también es un proceso de Markov con distribución inicial λ y matriz de tasas Q.*

El siguiente lema establece una biyección entre los procesos reversibles y las medidas que cumplen balance detallado. Es por eso que si una distribución cumple la condición de balance detallado con la matriz Q, también la llamaremos reversible.

Lema 2.2.17. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov con espacio de estado finito E, irreducible, con distribución inicial λ y matriz de tasas Q. Son equivalentes:*

- *$(X_t)_{t\geq 0}$ es reversible;*
- *Q y λ están en balance detallado.*

2.2.3 Proceso traza

Esta sección está basada en [6] y en la Sección 2.2 de [16].

Consideremos un proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ con espacio de estados E y sea $\mathcal{A}$ un subconjunto no vacío de E. Denotemos con $r(i,j)$, $i \neq j \in E$, a las tasas de salto, y sea $\gamma(i) = \sum_{j\in E} r(i,j)$ la tasa a la cual el proceso sale del estado i.

Denotamos con $\mathcal{D}([0,\infty), E)$ el espacio de trayectorias $\omega : [0,\infty) \to E$ continuas a derecha con límite por izquierda (trayectorias càdlàg) con la topología de Skorohod (en la Sección 2.4.2 detallamos explícitamente esta topología). Denotamos con $\mathbb{P}_i$ a la medida de probabilidad en $\mathcal{D}([0,\infty), E)$ inducida por el proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ comenzado en $\{i\}$. La esperanza respecto a la medida $\mathbb{P}_i$ será denotada con $\mathbb{E}_i$.

Sea $\mathcal{T}^{\mathcal{A}}(t)$ el tiempo total que el proceso pasa en $\mathcal{A}$ en el intervalo de tiempo $[0,t]$:

$$\mathcal{T}^{\mathcal{A}}(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(X_s)ds,$$

donde $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ es la función indicadora del conjunto $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}(t)$ a la inversa generalizada de $\mathcal{T}^{\mathcal{A}}(t)$:

$$\mathcal{S}^{\mathcal{A}}(t) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{T}^{\mathcal{A}}(s) \leq t\}.$$

Notemos que

$$\mathcal{S}^{\mathcal{A}}(t) < \infty \ \forall t \geq 0 \ \text{ si y sólo si } \lim_{t\to\infty} \mathcal{T}^{\mathcal{A}}(t) = \infty.$$

En particular, si E es finito y el proceso es irreducible, entonces $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}(t) < \infty$ para todo $t \geq 0$. Nos concentraremos en este caso.

El proceso traza asociada al proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ y al conjunto $\mathcal{A}$ se define como

$$Y_t^{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{S}^{\mathcal{A}}(t)}, \ t \geq 0.$$

Ha sido probado en [6] que $(Y_t^{\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov a tiempo continuo, con espacio de estados $\mathcal{A}$, irreducible, cuyas tasas de transición vienen dadas por

$$r^{\mathcal{A}}(i,j) = \gamma(i)\mathbb{P}_i(T_{\mathcal{A}}^+ = T_j), \ i,j \in \mathcal{A}, \ i \neq j,$$

siendo T_j el hitting time a $\{j\}$ y $T_{\mathcal{A}}^+$ el return time a $\mathcal{A}$.

Además, si μ es la distribución invariante del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, entonces la distribución invariante del proceso $(Y_t^{\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ viene dada por

$$\mu^{\mathcal{A}}(i) = \frac{\mu(i)}{\sum_{j\in\mathcal{A}} \mu(j)}, \ i \in \mathcal{A}.$$

Y en el caso en el que μ sea reversible, $\mu^{\mathcal{A}}$ también resulta reversible.

2.2.4 Paseo aleatorio irreducible y proceso traza asociado

Dado que en la tesis trabajaremos con el proceso traza asociado a un paseo aleatorio irreducible a tiempo continuo en un espacio de estados finitos, veamos cómo son las tasas en este caso específico.

Consideremos un conjunto finito de sitios V y sean

$$\boldsymbol{r} = \{r(i,j); i,j \in V\}$$

las tasas de un paseo aleatorio a tiempo continuo en V. Sin pérdida de generalidad asumimos $r(i,i) = 0$ para todo $i \in V$. La dinámica del proceso la podemos interpretar del siguiente modo. Tenemos una partícula que va saltando entre los sitios de V. La variable aleatoria X_t representa la posición a tiempo t. Cada vez que la partícula llega a un sitio i, espera que un reloj con distribución exponencial de parámetro

$$\gamma(i) = \sum_{k \in V} r(i,k)$$

suene. Una vez que suena, elige saltar al sitio j con probabilidad $\frac{r(i,j)}{\gamma(i)}$.

Debido al Lema 2.2.5, sería equivalente pensar que cada vez que la partícula llega al sitio i, relojes exponenciales de tasas $r(i,j)$ comienzan a competir. En el momento en que suena alguno de esos relojes, la partícula salta del sitio i al sitio j, donde j es el sitio asociado al reloj que sonó.

El generador de este paseo aleatorio viene dado por

$$L^{RW} f(i) = \sum_{j \in V} r(i,j)\big(f(j) - f(i)\big), \tag{2.2}$$

con $f : V \to \mathbb{R}$.

Fijemos A un subconjunto no vacío de V. Para cada $i \in A$, sea $h_i^A : V \to [0,1]$ la solución de

$$\begin{cases} L^{RW} h(j) & = 0 \quad \text{si } j \notin A, \\ \quad h(j) & = 0 \quad \text{si } j \in A \setminus \{i\}, \\ \quad h(i) & = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Este sistema tiene una única solución $h_i^A(j) = \mathbb{P}_j^{RW}(T_A = T_i)$, donde T_A y T_i son los hitting times en A y en $\{i\}$ respectivamente para el paseo aleatorio con generador L^{RW}, y $\mathbb{P}_j^{RW}$ se refiere a la medida de probabilidad en el espacio $\mathcal{D}([0,\infty), V)$ comenzado en $\{j\}$.

El proceso traza asociado al paseo aleatorio con generador L^{RW} y al subconjunto A es un proceso de Markov a tiempo continuo en A con tasas de transición

$$\boldsymbol{r^A} = \{r^A(i,j); i,j \in A\}$$

dadas por

$$r^A(i,j) = \begin{cases} \sum\limits_{k\in V} r(i,k)h_j^A(k) & \text{if } \ i \neq j, \ i,j \in A, \\ 0 & \text{if } \ i = j, \ i,j \in A. \end{cases} \tag{2.4}$$

Este proceso tiene una única distribución invariante $\boldsymbol{\mu^A} = \{\mu^A(i); i \in A\}$,

$$\mu^A(i) = \frac{\mu(i)}{\sum\limits_{j\in A} \mu(j)}, \ i \in A.$$

Notemos que para todo $i, j \in A, \ i \neq j$,

$$r^A(i,j) = \mathbb{P}_i^{RW}(T_j = T_A^+) \sum_{k\in V} r(i,k),$$

donde T_A^+ es el return time al conjunto A. Además, para todo $i, j \in A, \ i \neq j$, también vale que las tasas del proceso traza se pueden reescribir como

$$r^A(i,j) = L^{RW} h_j^A(i).$$

2.3 Martingalas

En esta sección presentamos la definición de martingalas a tiempo continuo y mostramos una martingala que nos será de gran utilidad: la martingala de Dynkin.

Definición 2.3.1. (Martingala a tiempo continuo)
Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad con $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración contenida en $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para todo $s < t$. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una colección de variables aleatorias (proceso aleatorio). Decimos que $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si valen las siguientes condiciones:

- $X_t \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0$ (el proceso es adaptado a la filtración);
- $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty \ \forall t \geq 0$ (X_t está en $L^1(\Omega, \mathbb{P})$);
- $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \ \forall 0 \leq s \leq t$.

Observación 2.3.2. *Dado $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso aleatorio, para cada $t \geq 0$ podemos definir $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$, obteniendo una filtración que verifica que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptado. A esta filtración se la llama "filtración natural".*

Definición 2.3.3. *Dado* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *una filtración, decimos que la variable aleatoria* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *es un tiempo de parada si vale que*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

En particular, si tenemos una sucesión de variables aleatorias $(X_t)_{t\geq 0}$ *y consideramos la filtración natural, recuperamos la definición de tiempo de parada dada en Definición 2.2.7*

El siguiente resultado nos será de gran utilidad.

Teorema 2.3.4. (Martingala de Dynkin, Teorema 17.21 en [14])
Consideremos $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo que toma valores en E, con matriz de tasas Q. Sea $\mathscr{L}$ su generador definido en (2.1) y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función. Para cada $t \geq 0$ definimos

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(X_s) ds.$$

Entonces el proceso $(M_t^f)_{t\geq 0}$ resulta una martingala con respecto a la filtración natural.

2.4 Convergencia débil

Esta sección está basada en [9] y en [15]. Denotemos con S a un espacio métrico y con $\mathcal{S}$ a la sigma álgebra de Borel en S. Además, dada $\mathbb{P}_n$ una probabilidad en $(S, \mathcal{S})$, $\mathbb{E}_n$ refiere a la esperanza respecto de la medida $\mathbb{P}_n$.

Comencemos con la definición de convergencia de una sucesión de medidas.

Definición 2.4.1. *Consideremos en* $(S, \mathcal{S})$ *una sucesión de medidas de probabilidad* $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y una medida de probabilidad* $\mathbb{P}$*. Decimos que* $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente a* $\mathbb{P}$ *si para toda función* $f : S \to \mathbb{R}$ *continua y acotada vale que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[f] = \mathbb{E}[f].$$

El siguiente resultado muestra definiciones equivalentes a la de convergencia débil.

Teorema 2.4.2. (Teorema de Portmanteau, Teorema 2.1 en [9])
Consideremos $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathbb{P}$ medidas en $(S, \mathcal{S})$. Son equivalentes:

- $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $\mathbb{P}$;
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[f] = \mathbb{E}[f]$ para toda función acotada y uniformemente continua;

- $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$ para todo F cerrado;

- $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ para todo G abierto;

- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$ para todo A tal que $P(\partial A) = 0$.

Extendamos ahora la noción de convergencia débil a elementos aleatorios.

Definición 2.4.3. *Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, llamamos elementos aleatorio en $(S, \mathcal{S})$ a las funciones $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$.*

Definición 2.4.4. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios en $(S, \mathcal{S})$ que pueden estar definidos en distintos espacios de probabilidad $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$, y sea X otro elemento aleatorio en $(S, \mathcal{S})$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Decimos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a X si la sucesión de distribuciones de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a la distribución de X, es decir, si $(\mathbb{P}_n \circ X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $\mathbb{P} \circ X$. Equivalentemente, si para toda función $f : S \to \mathbb{R}$ continua y acotada vale que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

2.4.1 Teorema de Prohorov

Definición 2.4.5. *Decimos que una familia de medidas $(\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en $(S, \mathcal{S})$ es rígida (tight) si vale que para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subseteq S$ tal que*

$$\mathbb{P}_\alpha(K) > 1 - \varepsilon \ \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Definición 2.4.6. *Decimos que una familia de medidas $(\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en $(S, \mathcal{S})$ es relativamente compacta si para cada sucesión de medidas $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la familia existe una subsucesión $(\mathbb{P}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(S, \mathcal{S})$ tal que $(\mathbb{P}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $\mathbb{P}$.*

Teorema 2.4.7. (Teorema de Prohorov, Teoremas 5.1 y 5.2 en [9])
Sea $(\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vale lo siguiente:

1. Si $(\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es rígida, entonces es relativamente compacta.

2. Si además S es un espacio métrico completo y separable (conocido como espacio polaco), entonces $(\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es relativamente compacta si y sólo si es rígida.

2.4.2 Espacios càdlàg y topología de Skorohod

Consideremos E un espacio métrico completo y separable con métrica $\delta(\cdot,\cdot)$ y sea $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathcal{D}([0,T],E)$, el espacio de trayectorias $\omega:[0,T]\to E$ continuas a derecha con límite por izquierda (càdlàg). Consideremos Λ al conjunto de funciones λ de $[0,T]$ a $[0,T]$ que son continuas y estrictamente crecientes. Definimos

$$\|\lambda\| = \sup_{s\neq t}\left| log\left(\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right)\right|$$

y para cada par $\mu,\nu\in\mathcal{D}([0,T],E)$ definimos

$$d(\mu,\nu) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\max\Big\{\|\lambda\|, \sup_{0\leq t\leq T}\delta(\mu_t,\nu_{\lambda(t)})\Big\}. \tag{2.5}$$

Proposición 2.4.8. (Proposición 1.1 en [15])
El espacio $\mathcal{D}([0,T],E)$ dotado con la métrica d definida en (2.5) es un espacio métrico completo y separable. A esta métrica la llamamos topología de Skorohod.

Veamos ahora un resultado muy útil para probar que una sucesión de medidas es precompacta. Para eso, necesitamos introducir el llamado módulo uniforme de continuidad:

$$\omega'_\mu(\gamma) = \inf_{\{t_i\}_{0\leq i\leq r}}\max_{0\leq i<r}\sup_{t_i\leq s<t<t_{i+1}}\delta(\mu_s,\mu_t),$$

donde el primer ínfimo es tomado sobre todas las particiones $\{t_i,\ 0\leq i\leq r\}$ del intervalo $[0,T]$ tal que

$$\begin{cases} 0=t_0<t_1<\cdots<t_r=T \\ t_i-t_{i-1}>\gamma \quad i=1,\dots,r. \end{cases}$$

Teorema 2.4.9. (Teorema 1.3 en [15])
Sea $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathcal{D}([0,T],E)$. La sucesión es relativamente compacta si y sólo si

1. Para todo $t\in[0,T]$ y todo $\varepsilon>0$, existe un compacto $K(t,\varepsilon)$ contenido en E tal que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_n[\mu_t\notin K(t,\varepsilon)]\leq\varepsilon.$$
2. Para todo $\varepsilon>0$,
$$\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}_n[\mu:\omega'_\mu(\gamma)>\varepsilon]=0.$$

Observación 2.4.10. (Observaciones 1.4 y 1.5 en [15])
Definiendo

$$\omega_\mu(\gamma) = \sup_{|t-s|\leq\gamma}\delta(\mu_s,\mu_t),$$

la condición 2 del resultado anterior se puede reemplazar por la siguiente:

$$\lim_{\gamma \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}_n[\mu : \omega_\mu(\gamma) > \varepsilon] = 0 \ \forall \varepsilon > 0. \tag{2.6}$$

Además, vale que todos los puntos límites de una sucesión de medidas $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisface (2.6) están concentrados en trayectorias continuas.

Observación 2.4.11. (Ver Sección 12 en [9])
Sea E un espacio métrico completo y separable. Sea $\mathcal{D}([0,\infty), E)$ el espacio de trayectorias $\omega : [0,\infty) \to E$ continuas a derecha con límite por izquierda, y sea $\mathcal{C}([0,\infty), E)$ el subespacio de trayectorias $\omega : [0,\infty) \to E$ continuas. La topología de Skorohod relativizada a $\mathcal{C}([0,\infty), E)$ coincide con la topología uniforme.

2.5 Sistemas de colas

Los sistemas de colas constituyen una familia muy grande de modelos. Esencialmente podemos pensar en un proceso en donde tenemos "servidores" que atienden "clientes", y en los servidores se van formando "colas" de clientes que esperan ser atendidos. Una vez que un cliente es atendido, puede dirigirse a otro servidor o puede irse del sistema.

Diferentes "políticas de atendimiento" pueden ser implementadas, tales como "primer cliente en llegar, primero en ser atendido" (conocido como FIFO); "primer cliente en llegar, último en ser atendido" (conocido como LIFO); etc. Tanto la dinámica de llegada de los clientes como los tiempos de servicios pueden variar de sistema a sistema ([10]).

Una pregunta de gran interés en estos modelos es si el sistema es estable o no. Si el proceso asociado fuese un proceso de Markov irreducible con espacio de estados finito o numerable, ser estable es equivalente a ser recurrente positivo. Entonces, el hecho de que una red sea estable, esencialmente, se refiere a que el sistema "no colapse". El estudio de límites fluidos puede brindar herramientas para probar la estabilidad o no de la red.

En la tesis trabajaremos con un sistema de colas llamado Jackson network. Este sistema se vincula directamente con el proceso zero range, ya que es un caso específico del mismo.

Antes de introducir la Jackson network, recordemos la definición de un proceso de Poisson, y presentemos a uno de los sistemas de colas más sencillos, la "M/M/1".

2.5.1 Procesos de Poisson

Definición 2.5.1. *Un proceso de Poisson $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, distribución inicial δ_0 y Q-matriz dada* *por*

$$Qij = \begin{cases} \lambda & si\ j = i+1,\ i \in \mathbb{N}_0, \\ -\lambda & si\ j = i,\ i \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Una forma de construir un proceso de Poisson es la siguiente. Consideremos $(S_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ. Sea $J_0 = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$J_n = \sum_{j=1}^{n} S_j.$$

Para cada $t \geq 0$ definimos

$$X_t = n \text{ si } J_n \leq t < J_{n+1}.$$

Entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ resulta un proceso de Poisson de tasa λ.

El siguiente resultado nos da definiciones alternativas de un proceso de Poisson.

Teorema 2.5.2. (Teorema 2.4.3 en [17])
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso no decreciente, continuo a derecha con límite por izquierda, con valores en $\mathbb{N}_0$. Son equivalentes:

- Si consideramos la sucesión de tiempos $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

  $$S_1 = \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\},$$
  $$S_{j+1} = \inf\{t > S_j : X_t \neq X_{S_j}\} - S_j,$$

  $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ y además, $X_{S_n} = n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes y estacionarios, y para todo $t > 0$, X_t tiene distribución Poisson de parámetro λt.

- $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes y además,

  $$P(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h),$$
  $$P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h),$$

  con $o(h)$ una función que converge a 0 cuando h tiende a 0.

2.5.2 M/M/1

Uno de los sistemas de colas más simples es el llamado M/M/1. En este modelo hay un único servidor, los clientes llegan al sistema siguiendo un proceso de Poisson de tasa λ, y los tiempos de servicio (independientes entre sí e independientes a los tiempos de arribos) tienen distribución exponencial de parámetro μ.

Denotamos con X_t al número de clientes que hay en el servidor a tiempo t. Entonces $(X_t)_{t\geq}$ es un proceso de Markov a tiempo continuo con Q-matriz dada por

$$Qij = \begin{cases} \lambda & \text{si } j = i+1,\ i \in \mathbb{N}_0, \\ \mu & \text{si } j = i-1,\ i \in \mathbb{N}, \\ -(\lambda+\mu) & \text{si } j = i,\ i \in \mathbb{N}, \\ -\lambda & \text{si } j = i = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El nombre M/M/1 se debe a que hay un único servidor, y que tanto los tiempos entre arribos consecutivos de clientes como los tiempos de servicio tienen distribución exponencial, la cual tiene la propiedad de falta de memoria ("memoryless").

2.5.3 Jackson networks

Esta sección está basada en [18] y en [12].

Comencemos describiendo la Jackson network abierta, en donde los clientes pueden ingresar y también salir del sistema. Llamaremos a este modelo Jackson network tradicional (o con tasas constantes).

La Jackson network se puede pensar como una extensión de la M/M/1. En vez de tener un único servidor, tenemos un conjunto finito de servidores V. Para cada servidor $i \in V$, los clientes llegan a i siguiendo un proceso de Poisson de tasa λ_i, y los tiempos de servicio de i son distribuciones exponenciales de parámetro μ_i. Todos los tiempos tanto de arribos como de servicios son independientes entre sí. Una vez que un cliente es atendido en el servidor i, este cliente salta a otro servidor j con probabilidad $p(i,j)$, o se va del sistema con probabilidad $1 - \sum_{j\in V} p(i,j)$.

Si consideramos $X_t = \{X_t(i) : i \in V\}$ a la cantidad de clientes en cada servidor, $(X_t)_{t\geq 0}$ resulta un proceso de Markov con espacio de estados $\mathbb{N}_0^V$. Denotando $(e_i)_{i\in V}$ a los vectores canónicos, m a un vector en $\mathbb{N}_0^V$ y

$$p(i,*) = 1 - \sum_{j\in V} p(i,j),$$

tenemos que las tasas de transición de un estado a otro vienen dadas por:

$$\begin{aligned} Q_{m,m-e_i+e_j} &= \mu_i p(i,j) \;\text{ si } m_i > 0,\; i \neq j \in V; \\ Q_{m,m-e_i} &= \mu_i p(i,*) \;\text{ si } m_i > 0,\; i \in V; \\ Q_{m,m+e_i} &= \lambda_i, \;\text{ si } i \in V. \end{aligned}$$

En el caso en el que no se permita el ingreso ni la salida de clientes del sistema (lo que ocurre cuando la matriz de probabilidades de transición P es estocástica), el número total de clientes permanece constante. Llamaremos a este modelo Jackson network cerrada.

También existe el modelo de Jackson network semi abierto, que es una combinación entre el modelo cerrado y el abierto. En éste la dinámica es análoga a las descriptas anteriormente, con la diferencia de que la suma total de clientes en todos los servidores no puede superar un número prefijado K, que representa la capacidad del sistema. Si el sistema alcanza dicho límite, se cierra temporalmente, no permitiendo el ingreso de nuevos clientes. Permanece cerrado hasta que alguno de los clientes que ya estaban se retira y libera espacio, permitiendo que el sistema reabra y acepte nuevos clientes. Este modelo también se puede interpretar como un caso particular del modelo cerrado (ver Sección 2.3 de [12]).

Notemos que la Jackson network cerrada coincide con el proceso zero range cuando la función g vale $g(0) = 0$ y $g(n) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Un modelo más general de Jackson network se da cuando los tiempos de servicios no sólo dependen del servidor, sino también del estado en el que se encuentra el proceso (es decir, del número de clientes en cada servidor).

En esta tesis, además de estudiar un límite fluido para el proceso zero range (y por ende, para la Jackson network cerrada), lo haremos también para la Jackson network abierta. Tanto para el caso de tasas constantes como para un caso más general, en donde las tasas de servicio pueden depender, de una forma apropiada, del número de clientes que hay en el servidor al momento del servicio.

2.5.4 Problema de Skorohod

Un método que ha sido utilizado para probar la existencia y la unicidad de límites fluidos para ciertos sistemas de colas es el llamado Problema de Skorohod. En particular, este resultado se aplica para probar la existencia y la unicidad del límite fluido para la Jackson network tradicional, aunque no se muestre explícitamente toda la trayectoria límite. (Ver Sección 9.4.2 en [18] y Capítulo 7 en [12]).

Usaremos el Problema de Skorohod junto a otros resultados probados en la tesis en la Sección 8.2. Cabe destacar que no es posible aplicar directamente el Problema de

Skorohod al modelo de la Jackson network cuando las tasas dependen del número de trabajos en cada servidor.

Teorema 2.5.3. (Problema de Skorohod, Teorema D.3 en [18] y Teorema 7.30 en [12]) Sea $(Y(t))_{t\geq 0}$ un proceso a tiempo continuo a valores en $\mathbb{R}^d$, con trayectorias càdlàg, con $Y_i(0) \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq d$. Sea $P = \left(p_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $p_{ij} \geq 0$ una matriz subestocástica. Denotamos con P' a la matriz transpuesta de P. Entonces existe un único par de procesos $(X(t), R(t))_{t\geq 0}$, ambos con trayectorias càdlàg a valores en $\mathbb{R}^d$, que verifican:

- $X(t) = Y(t) + (I - P^{'})R(t)\ \forall t \geq 0$,
- $X_i(t) \geq 0$, $\forall 1 \leq i \leq d$, $\forall t \geq 0$,
- $R_i(0) = 0$, R_i es no decreciente y

$$\int_0^\infty X_i(t)dR_i(s) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq d$.

Además, si consideramos $\Psi, \Phi : \mathcal{D}([0, +\infty), \mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$ las aplicaciones definidas por

$$\Psi[(Y(t))_{t\geq 0}] = (X(t))_{t\geq 0}, \quad \Phi[(Y(t))_{t\geq 0}] = (R(t))_{t\geq 0},$$

ambas resultan funciones continuas.

Capítulo 3

El proceso zero range - resultados principales

3.1 Descripción del modelo

Comencemos este capítulo con la descripción del proceso zero range.

Sea V un conjunto finito. Haciendo abuso de notación, denotamos también con V al cardinal de dicho conjunto. Sea $\boldsymbol{r} = \{r(i,j); i,j \in V\}$ las tasas de transición de un paseo aleatorio irreducible en V, con $r(i,i) = 0\ \forall i \in V$. Sea $\boldsymbol{\mu} = \{\mu(i); i \in V\}$ la única distribución invariante de este paseo aleatorio, la cual satisface que para todo $i \in V$, $\mu(i) > 0$ y

$$\sum_{j\in V} \mu(i) r(i,j) = \sum_{j \in V} \mu(j) r(j,i).$$

Sea $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Para cada par $i,j \in V,\ i \neq j$ y $\eta \in \mathbb{N}_0^V$ tal que $\eta(i) > 0$, denotemos por $\eta^{i,j} \in \mathbb{N}_0^V$ a la configuración obtenida de η luego de mover una partícula desde i a j:

$$\eta^{i,j}(l) = \begin{cases} \eta(i) - 1 & \text{si } \ l = i, \\ \eta(j) + 1 & \text{si } \ l = j, \\ \eta(l) & \text{si } \ l \neq i,j. \end{cases}$$

Consideremos una función $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(0) = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} g(n) \in (0, \infty).$$

Sin pérdida de generalidad asumimos $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = 1$.

Para cada $f : \mathbb{N}_0^V \to \mathbb{R}$ y $\eta \in \mathbb{N}_0^V$ definimos $Lf : \mathbb{N}_0^V \to \mathbb{R}$ como

$$Lf(\eta) = \sum_{i,j \in V} r(i,j) g(\eta(i)) [f(\eta^{i,j}) - f(\eta)].$$

El operador L es el generador de un proceso de Markov $\{\eta_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados $\mathbb{N}_0^V$ llamado proceso zero range (con tasas de transición $\boldsymbol{r}$ y tasa de interacción g). En este proceso, una partícula salta del sitio i al sitio j con tasa $g(\eta(i))r(i,j)$. Notar que si el sitio i está vacío, la tasa de salida desde i es igual a 0.

Sea $\{\eta_{tN} : t \geq 0\}$ el proceso acelerado con configuración inicial η_0, con $\sum\limits_{i\in V} \eta_0(i) = N$. Consideremos el conjunto

$$\Sigma = \{\zeta \in [0,1]^V : \sum_{i\in V} \zeta(i) = 1\},$$

y definamos el proceso $\{\zeta_t^N : t \geq 0\}$ como

$$\zeta_t^N(i) = \frac{\eta_{tN}(i)}{N},\ i \in V.$$

Debido a que en el sistema el número total de partículas se conserva y el proceso $\{\eta_{tN} : t \geq 0\}$ comienza con exactamente N partículas, el proceso $\{\zeta_t^N : t \geq 0\}$ es Markoviano con valores en

$$\Sigma_N = \{\zeta \in \Sigma : N\zeta(i) \in \mathbb{N}_0\ \forall i \in V\}.$$

Su generador $\mathscr{L}_N$ actúa sobre funciones $F : \Sigma_N \to \mathbb{R}$ como

$$(\mathscr{L}_N F)(\zeta) = N \sum_{i,j\in V} r(i,j) g(N\zeta(i))[F(\zeta + \frac{e_j - e_i}{N}) - F(\zeta)],\ \zeta \in \Sigma_N,$$

con $(e_k)_{k\in V}$ los vectores canónicos en $\mathbb{R}^V$.

Denotamos con $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \Sigma_N)$ al espacio de trayectorias con valores en Σ_N que son continuas por derecha con límite por izquierda, con la topología de Skorohod. Y con $\mathbb{P}_\zeta^N$, $\zeta \in \Sigma_N$, denotamos a la medida de probabilidad en el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \Sigma_N)$ inducido por $\mathscr{L}_N$ que comienza en ζ.

Nuestro objetivo es obtener un límite de escala para la sucesión de procesos

$$\{\zeta_t^N : t \geq 0\}_{N\in\mathbb{N}}$$

cuando N tiene a infinito, y como condición inicial, es necesario que las configuraciones a tiempo 0 converjan. Por lo tanto, de ahora en adelante, asumiremos que la sucesión de medidas de probabilidad $(\mathbb{P}_{\zeta_N}^N)_{N\in\mathbb{N}}$ satisface que las configuraciones iniciales $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$, con $\zeta_N \in \Sigma_N\ \forall N \in \mathbb{N}$, convergen a algún $\zeta_0 \in \Sigma$.

Como hipótesis adicional, pediremos que en el límite todos los sitios estén ocupados, es decir, pediremos que las configuraciones iniciales $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converjan a algún $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$, donde

$$\dot{\Sigma} = \{\zeta \in \Sigma : \zeta(i) > 0\ \forall i \in V\} = \{\zeta \in (0,1)^V : \sum_{i\in V} \zeta(i) = 1\}.$$

3.2 Primera descripción del proceso límite

En esta sección construimos un operador junto con su dominio, que nos permitirán caracterizar al proceso límite.

Consideremos L^{RW} el generador del paseo aleatorio en V con tasas

$$\boldsymbol{r} = \{r(i,j); i,j \in V\}$$

definido en (2.2) como

$$L^{RW} f(i) = \sum_{j \in V} r(i,j)\big(f(j) - f(i)\big), \tag{3.1}$$

con $f : V \to \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad asumimos $r(i,i) = 0$, $i \in V$.

Para todo $i \in V$ definimos

$$\lambda(i) = \sum_{j \in V} [r(i,j) - r(j,i)],$$

y sea $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^V$el vector tal que $\boldsymbol{\lambda}(i) = \lambda(i)$ $\forall i \in V$.

Además consideremos los siguientes vectores en $\mathbb{R}^V$:

$$\boldsymbol{v_i} = \sum_{j \in V} r(i,j)(e_j - e_i) \ \forall i \in V. \tag{3.2}$$

Notemos que $\boldsymbol{\lambda} = -\sum_{i \in V} \boldsymbol{v_i}$ y $\sum_{i \in V} \lambda(i) = 0$.

Comencemos construyendo el conjunto de funciones en el cual actuará el operador. Para cada $j \in V$ denotamos con $\partial_j F$ a la derivada parcial de la función F respecto de ζ_j, es decir, $\partial_j F = \partial_{\zeta_j} F$. Sea

$$\mathcal{D}_i = \{F \in \mathcal{C}^2(\Sigma) : \mathbf{1}_{\{\zeta(i)=0\}} \langle \boldsymbol{v_i}, \nabla F(\zeta) \rangle = 0\},$$

y para cada subconjunto A de V sea

$$\mathcal{D}_A = \bigcap_{i \in A} \mathcal{D}_i,$$

siendo $\mathcal{D}_\emptyset = \mathcal{C}^2(\Sigma)$.

Ahora sí definamos $\mathscr{L}$. El operador $\mathscr{L}$ es un operador que actúa en funciones de $\mathcal{D}_V$ del siguiente modo:

$$(\mathscr{L}F)(\zeta) = -\langle \boldsymbol{\lambda}, \nabla F(\zeta) \rangle = -\sum_{j \in V} \lambda(j) \partial_j F(\zeta), \ \zeta \in \Sigma.$$

Notar que

$$(\mathscr{L}F)(\zeta) = \sum_{i \in V} \langle \boldsymbol{v_i}, \nabla F(\zeta) \rangle$$

Denotamos con $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ al espacio de trayectorias continuas $\omega : \mathbb{R}_+ \to \Sigma$ con la topología uniforme en intervalos acotados, y con $\zeta_t : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma) \to \Sigma$, $t \geq 0$, la aplicación coordenadas.

Definición 3.2.1. *Decimos que una medida $\mathbb{P}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ es solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala si para toda $F \in \mathcal{D}_V$,*

$$F(\zeta_t) - F(\zeta_0) - \int_0^t (\mathscr{L}F)(\zeta_s) ds$$

es una $\mathbb{P}$-martingala con respecto a la filtración natural $\mathcal{F}_t = \sigma(\zeta_s : s \leq t),\ t \geq 0$.

Los primeros dos resultados de la tesis, cuyas demostraciones daremos en el Capítulo 4, son sobre la rigidez de la sucesión $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N \in \mathbb{N}}$ y sobre la relación entre los puntos límites de $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N \in \mathbb{N}}$ y el $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala.

Proposición 3.2.2. *Sea $(\zeta_N)_{N \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\zeta_0 \in \Sigma$. La sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N \in \mathbb{N}}$ es rígida (tight). Más aún, todo punto límite está concentrado en trayectorias continuas.*

Proposición 3.2.3. *Sea $(\zeta_N)_{N \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\zeta_0 \in \Sigma$ y sea $\mathbb{P}$ un punto límite de $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N \in \mathbb{N}}$. Entonces la medida $\mathbb{P}$ es una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala.*

3.3 Operador asociado al proceso traza

Comencemos recordando la definición del proceso traza presentada en 2.2.3 e introduzcamos algunas configuraciones especiales relacionadas con dicho proceso, que nos serán de gran utilidad. Estas configuraciones son análogas a las proyecciones Υ^B presentadas en la Sección 3.4 en [5].

Consideremos nuevamente el generador L^{RW} del paseo aleatorio en V con tasas

$$\boldsymbol{r} = \{r(i,j); i, j \in V\}$$

definido en (2.2) y sea A un subconjunto no vacío de V. Para cada $i \in A$, sea $h_i^A : V \to [0,1]$ la solución de

$$\begin{cases} L^{RW} h(j) & = 0 \ \text{ si } j \notin A, \\ h(j) & = 0 \ \text{ si } j \in A \setminus \{i\} \\ h(i) & = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Como hemos mencionado en la Sección 2.2.4, este sistema tiene una única solución $h_i^A(j) = \mathbb{P}_j^{RW}(T_A = T_i)$, donde T_A y T_i son los tiempos de parada en A y en $\{i\}$ respectivamente para el paseo aleatorio con generador L^{RW}, y $\mathbb{P}_j^{RW}$ se refiere a la medida de probabilidad en el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, V)$ comenzado en $\{j\}$.

Sea

$$\Sigma_A = \{\zeta \in [0,1]^A : \sum_{j\in A} \zeta(j) = 1\}.$$

Definimos la configuración $\zeta^A \in \Sigma_A$ como

$$\zeta^A(i) = \sum_{j\in V} \zeta(j) h_i^A(j), \ i \in A. \tag{3.4}$$

Para el proceso con generador L^{RW} y para cada subconjunto no vacío A de V consideremos el proceso traza en A dado por (2.4), es decir, el proceso de Markov a tiempo continuo en A con tasas de transición $\boldsymbol{r^A} = \{r^A(i,j); i,j \in A\}$, siendo

$$r^A(i,j) = \begin{cases} \sum\limits_{k\in V} r(i,k) h_j^A(k) & \text{if } \ i \neq j, \ i,j \in A, \\ 0 & \text{if } \ i = j, \ i,j \in A. \end{cases} \tag{3.5}$$

Además definimos las constantes

$$\lambda^A(i) = \sum_{j\in A} r^A(i,j) - \sum_{j\in A} r^A(j,i), \ i \in A, \tag{3.6}$$

y el vector $\boldsymbol{\lambda}^A = (\lambda^A(i))_{i\in A} \in \mathbb{R}^A$. Notar que $\boldsymbol{\lambda}^V(i) = \lambda(i) \ \forall i \in V$. Estas constantes serán claves para la descripción del proceso límite.

Usando las tasas de transición del proceso traza definimos el operador $\mathscr{L}_A$ sobre las funciones $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma_A)$ como

$$(\mathscr{L}_A f)(\zeta) = -\langle \boldsymbol{\lambda}^A, \nabla f(\zeta)\rangle = -\sum_{j\in A} \lambda^A(j)\partial_j f(\zeta), \ \zeta \in \Sigma_A.$$

3.4 Resultados

En las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 hemos visto que si la sucesión de configuraciones iniciales converge a algún $\zeta_0 \in \Sigma$, entonces la sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ es rígida y todo punto límite $\mathbb{P}$ es una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala. Luego, por el Teorema de Prohorov (ver Sección 2.4.1), para probar la convergencia del proceso $\{\zeta_t^N : t \geq 0\}_{N\in\mathbb{N}}$ cuando las configuraciones iniciales convergen a un $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$ (es decir, cuando todos los sitios están macroscópicamente ocupados), alcanzará con probar que hay una única solución al $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala empezado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$. Esto es lo que se presenta en el Teorema 3.4.2.

La demostración de dicho resultado se basa en la siguiente propiedad crucial. Si $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ es una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala con $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$, entonces $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ es una medida delta de Dirac que satisface que bajo esta medida, cuando un sitio de V se vacía, todos los sitios quedan vacíos. A este tipo de medidas las llamaremos "medidas absorbentes".

En lo que sigue del trabajo, abreviaremos con "*c.s.*" a "casi seguramente".

Definición 3.4.1. *Decimos que una distribución $\mathbb{P}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ es absorbente si vale que para todo $0 \leq s < t$,*

$$\{i \in V : \zeta_s(i) = 0\} \subseteq \{i \in V : \zeta_t(i) = 0\} \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Si $\mathbb{P}$ es una medida de Dirac concentrada en la trayectoria $\boldsymbol{\zeta}_\cdot$, decimos que $\mathbb{P}$ es absorbente si la trayectoria $\boldsymbol{\zeta}_\cdot$ satisface que para todo $0 \leq s < t$ y para todo $i \in V$, $\boldsymbol{\zeta_s}(i) = 0$ implica $\boldsymbol{\zeta_t}(i) = 0$.

Teorema 3.4.2. *Para cada $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$, existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ la cual es solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala y comienza en ζ_0. Además, $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ es una medida absorbente de Dirac.*

Por lo explicado al comienzo de esta sección, de las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 y del Teorema 3.4.2 obtenemos que, si las configuraciones iniciales $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ convergen a algún $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$, entonces la sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a la única solución $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala comenzado en ζ_0. Además, por el Teorema 3.4.2 sabemos que esta solución es una medida absorbente de Dirac, de lo cual, como primera observación, se deduce que el límite del proceso $\{\zeta_t^N : t \geq 0\}_{N\in\mathbb{N}}$ cuando las configuraciones iniciales convergen a un $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$, es determinístico. Para explicar el comportamiento de $\mathbb{P}_{\zeta_0}$, presentaremos a continuación una descripción precisa de la trayectoria asociada.

Al inicio, comenzamos con cada sitio $i \in V$ ocupado por una masa positiva $\zeta_0(i)$. La masa total del sistema (que suma 1, ya que es conservativo), se distribuye entre todos los sitios de acuerdo al vector $\boldsymbol{\lambda}$ hasta que alguno de los sitios se vacía. Con esto queremos decir que la masa que hay en cada sitio $i \in V$ se mueve linealmente con un drift igual a $\lambda(i)$ hasta el tiempo

$$\begin{aligned} T_1 &= \min_{i\in V:\lambda(i)>0} \frac{\zeta_0(i)}{\lambda(i)} \\ &= \inf\{t > 0 : \zeta_0(i) - \lambda(i)t = 0 \text{ para algún } i \in V\} \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$. En el caso $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, todos los sitios permanecen ocupados por siempre y la trayectoria es constantemente igual a ζ_0.

Ahora asumimos $T_1 < \infty$, y llamamos

$$A_1 = \{i \in V : \zeta_{T_1}(i) > 0\}.$$

La masa de todo el sistema se distribuye entre los sitios de A_1, mientras los sitios en $V \setminus A_1$ permanecerán vacíos por siempre. Más específicamente, consideremos el vector $\boldsymbol{\lambda}^{A_1}$ definido por (3.6), el cual está asociado al proceso traza del paseo aleatorio con tasas $\boldsymbol{r}$ en el conjunto A_1. Después de T_1, la masa en cada sitio $i \in A_1$ varía linealmente de acuerdo al drift $\lambda^{A_1}(i)$, hasta la primera vez que algún sitio de A_1 se vacía. Este tiempo es

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + \min_{i \in A_1 : \lambda^{A_1}(i) > 0} \frac{\zeta_{T_1}(i)}{\lambda^{A_1}(i)} \\ &= \inf\{t > T_1 : \zeta_{T_1}(i) - \lambda^{A_1}(i)(t - T_1) = 0 \text{ para algún } i \in A_1\} \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{\lambda}^{A_1} \neq \mathbf{0}$. Pero si $\boldsymbol{\lambda}^{A_1} = \mathbf{0}$, la trayectoria después de T_1 permanece constantemente igual a ζ_{T_1}.

Este comportamiento, de ser absorbido en la frontera y moverse acorde al vector $\boldsymbol{\lambda}^A$ con A los sitios ocupados a cada momento, se repite hasta la primera vez que el conjunto A satisface $\boldsymbol{\lambda}^A = \mathbf{0}$. Después de este tiempo, denotado por T, la trayectoria permanece constantemente igual a ζ_T. Además, este conjunto final A de los sitios que permanecen ocupados coincide con el conjunto

$$\mathcal{M}_\mu = \{i \in V : \mu(i) = \max_{j \in V} \mu(j)\}, \tag{3.7}$$

lo cual implica que el sistema llega al equilibrio cuando todos los sitios que no tienen medida invariante maximal se vacían.

Procedemos ahora a construir de forma recursiva la trayectoria descripta, la cual es determinística.

Sea $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$. Sean $T_0 = 0$, $A_0 = V$, y dados T_n, A_n, definimos

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \begin{cases} T_n + \min\limits_{i \in A_n : \lambda^{A_n}(i) > 0} \frac{\zeta_{T_n}(i)}{\lambda^{A_n}(i)} & \text{si } \boldsymbol{\lambda}^{A_n} \neq \mathbf{0} \\ \infty & \text{si } \boldsymbol{\lambda}^{A_n} = \mathbf{0}, \end{cases} \\ \text{si } {\scriptstyle T_n < \infty \text{ y } T_n \le t < T_{n+1}},\ \zeta_t(i) &= \begin{cases} \zeta_{T_n}(i) - \lambda^{A_n}(i)(t - T_n) & \text{si } i \in A_n,\ T_{n+1} < \infty, \\ \zeta_{T_n}(i) & \text{si } i \in A_n,\ T_{n+1} = \infty, \\ 0 & \text{si } i \notin A_n, \end{cases} \\ A_{n+1} &= \begin{cases} \{i \in A_n : \zeta_{T_{n+1}}(i) > 0\} & \text{si } T_{n+1} < \infty, \\ A_n & \text{si } T_{n+1} = \infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Además definimos

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n < \infty\} \ \text{ y } \ \bar{T} = T_{n_0}.$$

Denotaremos con $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot$ a la trayectoria continua definida en (3.8). Notemos que esta trayectoria sólo depende de $\boldsymbol{r}$ y ζ_0, y satisface que si $\bar{\zeta}_s(i) = 0$ para algún $i \in V$ y $s \geq 0$, entonces $\bar{\zeta}_t(i) = 0$ para todo $t \geq s$. Además, $0 \leq n_0 \leq V - 1$ y para todo $t \geq \bar{T}$,

$$\bar{\zeta}_t(j) = \bar{\zeta}_{\bar{T}}(j) \ \forall j \in V, \quad \{j \in V : \bar{\zeta}_t(j) > 0\} = A_{n_0} \ \text{ y } \ \boldsymbol{\lambda}^{A_{n_0}} = \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes de esta tesis; formaliza lo que hemos presentado en esta sección. Esencialmente nos dice que la sucesión de procesos zero range reescalada de forma lineal converge (débilmente) a la trayectoria determinística dada en (3.8).

Teorema 3.4.3. *Sea $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a algún $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$. Entonces, la sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a la medida absorbente de Dirac concentrada en la trayectoria determinística $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot$ dada en (3.8).*

Para concluir este apartado presentamos el siguiente resultado, que dice que existe un tiempo a partir del cual la evolución del sistema se detiene. Además, da una caracterización del conjunto de sitios que concentra toda la masa del sistema a partir de ese momento.

Proposición 3.4.4. *Sea $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$ y sea $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot$ la trayectoria definida en (3.8). Entonces, existe un tiempo $\bar{T} \geq 0$ que sólo depende de $\boldsymbol{r}$ y ζ_0 tal que*

$$\zeta_t(i) = \zeta_{\bar{T}}(i) \ \forall i \in V, \ \forall t \geq \bar{T}.$$

Además,

$$\{i \in V : \zeta_{\bar{T}}(i) > 0\} = \mathcal{M}_\mu,$$

donde $\mathcal{M}_\mu$ es el conjunto de los sitios con distribución invariante maximal definido en (3.7).

Los resultados enunciados en esta sección serán demostrados en el Capítulo 6.

Capítulo 4

Convergencia, rigidez y propiedades de soluciones

En este capítulo presentamos las demostraciones de la Proposición 3.2.2 y de la Proposición 3.2.3. Recordemos sus enunciados.

Proposición 3.2.2. *Sea $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\zeta_0 \in \Sigma$. La sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ es rígida (tight). Más aún, todo punto límite está concentrado en trayectorias continuas.*

Proposición 3.2.3. *Sea $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\zeta_0 \in \Sigma$ y sea $\mathbb{P}$ un punto límite de $(\mathbb{P}_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$. Entonces la medida $\mathbb{P}$ es una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala.*

4.1 Rigidez - demostración de la Proposición 3.2.2.

Demostración de la Proposición 3.2.2. Por el Teorema 1.3 y la Observación 1.5 en [15] (que los hemos enunciamos en la Sección 2.4.2), como Σ es compacto y Σ_N es un subconjunto de Σ para todo $N \in \mathbb{N}$, para probar que la sucesión $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ es rígida y que todo punto límite está concentrado en trayectorias continuas, basta ver que para todo $\varepsilon > 0$ y $T > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}^N_{\zeta_N}\Big[\sup_{\substack{s,t<T,\\ |s-t|<\delta}} \|\zeta_t - \zeta_s\| > \varepsilon \Big] = 0. \tag{4.1}$$

Por la fórmula de Dynkin aplicada al generador $\mathscr{L}_N$ y a la función $F(\zeta) = \zeta(j)$ con $j \in V$,

$$\zeta^N_t(j) = \zeta_N(j) + \int_0^t \mathscr{L}_N(\zeta_r(j))dr + M^N_t(j) \;\; \forall t > 0, \; j \in V,$$

con $(M_t^N(j))_{t\geq 0}$ una martingala. Entonces, la probabilidad que aparece en (4.1) está acotada superiormente por

$$\sum_{j\in V}\mathbb{P}^N_{\zeta_N}\big[\sup_{\substack{s,t<T,\\ |s-t|<\delta}}\big|\int_s^t \mathscr{L}_N(\zeta_r(j))dr\big|\geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{V}}\big]+\sum_{j\in V}\mathbb{P}^N_{\zeta_N}\big[\sup_{0\leq r\leq T}|M_r^N(j)|\geq\frac{\varepsilon}{4\sqrt{V}}\big]. \quad (4.2)$$

Por un lado, como $|t-s|\leq\delta$ y

$$\mathscr{L}_N(\zeta(j))=N\sum_{i\in V}[g(N\zeta(i))r(i,j)\frac{1}{N}-g(N\zeta(j))r(j,i)\frac{1}{N}]\leq C$$

para alguna constante positiva C, el primer término en (4.2) converge a 0 cuando $\delta\to 0$. Por otro lado, por las desigualdades de Markov y Doob, el segundo término de (4.2) está acotado superiormente por

$$\frac{16V}{\varepsilon^2}\mathbb{E}^N_{\zeta_N}\big[(M_T^N(j))^2\big],$$

lo cual, usando variación cuadrática, coincide con

$$\frac{16V}{\varepsilon^2}\mathbb{E}^N_{\zeta_N}\big[\int_0^T[\mathscr{L}_N(\zeta_r(j))^2-2\zeta_r(j)\mathscr{L}_N(\zeta_r(j))]dr\big].$$

Como

$$[\mathscr{L}_N(\zeta(j))^2-2\zeta(j)\mathscr{L}_N(\zeta(j))]\leq\frac{C_1}{N}\ \forall\zeta\in\Sigma_N,$$

con C_1 otra constante positiva, el segundo término en (4.2) también converge a 0 cuando $N\to\infty$, lo que concluye la demostración. □

4.2 Convergencia - demostración de la Proposición 3.2.3

Para simplificar notación definimos $\tilde{g}:\mathbb{N}_0\to[0,\infty)$ como

$$\tilde{g}(0)=0 \text{ y } \tilde{g}(k)=g(k)-1\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

En particular, si

$$g(k)=\big(1+\frac{\alpha}{k}\big)\mathbf{1}_{\{k>0\}},\ k\in\mathbb{N}_0,$$

para algún $\alpha\geq 0$, entonces

$$\tilde{g}(k)=\frac{\alpha}{k}\mathbf{1}_{\{k>0\}},\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Además, para cada $j\in V$, denotaremos con v_j a los vectores $\boldsymbol{v_j}$ definidos en (3.2).

El siguiente lema es análogo al Lema 7.1 in [5].

Lema 4.2.1. *Si* $F \in \mathcal{D}_V$,

$$\lim_{N\to\infty} \max_{\zeta\in\Sigma_N} \left|(\mathscr{L}_N F)(\zeta) - (\mathscr{L} F)(\zeta) - \sum_{j\in V} \tilde{g}(N\zeta(j))\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle\right| = 0.$$

Demostración. Sea $F \in \mathcal{D}_V$. Por la fórmula de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_N F)(\zeta) &= N \sum_{j,k\in V} g(N\zeta(j))r(j,k)\big[\big\langle \nabla F(\zeta), \frac{e_k - e_j}{N}\big\rangle + R^N_{j,k}\big] \\ &= \sum_{j\in V} g(N\zeta(j))\big\langle \underbrace{\sum_{k\in V} r(j,k)(e_k - e_j)}_{v_j}, \nabla F(\zeta)\big\rangle + \tilde{R}^N \\ &= \sum_{j\in V} \langle g(N\zeta(j))v_j, \nabla F(\zeta)\rangle + \tilde{R}^N, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $\tilde{R}^N = N \sum_{j,k\in V} g(N\zeta(j))r(j,k)R^N_{j,k}$ es el error de Taylor.

Por definición de $\mathcal{D}_V$,

$$\mathbf{1}_{\{\zeta(j)=0\}}\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle = 0.$$

Entonces

$$\langle \mathbf{1}_{\{\zeta(j)>0\}} v_j, \nabla F(\zeta)\rangle = \langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle. \tag{4.4}$$

De (4.3) y (4.4) se sigue que

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_N F)(\zeta) &= \sum_{j\in V} \big\langle [1 + \tilde{g}(N\zeta(j))]\mathbf{1}_{\{\zeta(j)>0\}} v_j, \nabla F(\zeta)\big\rangle + \tilde{R}^N \\ &= \big\langle \underbrace{\sum_{j\in V} v_j}_{-\boldsymbol{\lambda}}, \nabla F(\zeta)\big\rangle + \sum_{j\in V} \langle \tilde{g}(N\zeta(j))\mathbf{1}_{\{\zeta(j)>0\}} v_j, \nabla F(\zeta)\rangle + \tilde{R}^N \\ &= \mathscr{L} F(\zeta) + \sum_{j\in V} \tilde{g}(N\zeta(j))\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle + \tilde{R}^N.\end{aligned}$$

Como $\Sigma_N \subseteq \Sigma$ $\forall N \in \mathbb{N}$ con Σ compacto y $F \in \mathcal{C}^2$ para toda $F \in \mathcal{D}_V$, entonces $\lim_{N\to\infty} \max_{\zeta\in\Sigma_N} \tilde{R}^N = 0$, lo que concluye la demostración. □

Lema 4.2.2. *Si* $F \in \mathcal{D}_V$,

$$\lim_{N\to\infty} \max_{\zeta\in\Sigma_N} \Big|\sum_{j\in V} \tilde{g}(N\zeta(j))\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle\Big| = 0. \tag{4.5}$$

Demostración. Fijemos $F \in \mathcal{D}_V$ y $j \in V$. Como $\Sigma_N \subseteq \Sigma\ \forall N \in \mathbb{N}$, Σ es compacto y $\zeta \to \langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle$ es continua, la función es uniformemente continua y está acotada por una constante que no depende de N.

Por un lado, por la continuidad uniforme de $\zeta \to \langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle$ y el hecho que $\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle = 0$ si $\zeta(j) = 0$, se sigue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que no depende de N) tal que

$$|\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle| < \varepsilon \text{ si } \zeta(j) < \delta.$$

Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} \tilde{g}(n) = 0$ sabemos que dado $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe N_0 tal que $|\tilde{g}(N\kappa)| < \varepsilon$ para todo $N \geq N_0$, para todo $\kappa \geq \delta$. Además $\tilde{g}$ es acotada por una constante $C_3 \geq 0$.

Por lo tanto para todo $N \geq N_0$,

$$\left|\tilde{g}(N\zeta(j))\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle \mathbf{1}_{\{\zeta(j)\geq\delta\}}\right| \leq \varepsilon C_2$$

y

$$\left|\tilde{g}(N\zeta(j))\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle \mathbf{1}_{\{0<\zeta(j)<\delta\}}\right| \leq \varepsilon C_3,$$

para todo $\zeta \in \Sigma_N$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario y las constantes C_2 y C_3 no dependen de N, obtenemos (4.5). $\square$

Corolario 4.2.3. *Si $F \in \mathcal{D}_V$,*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{\zeta\in\Sigma_N} \left|(\mathscr{L}_N F)(\zeta) - (\mathscr{L} F)(\zeta)\right| = 0.$$

Demostración. Se sigue de los Lemas 4.2.1 y 4.2.2. $\square$

Veamos cómo demostrar la Proposición 3.2.3.

Demostración de la Proposición 3.2.3. Fijemos $F \in \mathcal{D}_V$. Consideremos $M \in \mathbb{N}$, $G : \Sigma^M \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y sean $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_M \leq t_1, t_2$.

Definimos

$$G(\zeta) = G(\zeta_{s_1}, \ldots, \zeta_{s_M}) \text{ y } \Psi_{t_1,t_2} = F(\zeta_{t_2}) - F(\zeta_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} (\mathscr{L} F)(\zeta_r) dr.$$

Como es usual, denotamos por $\mathbb{E}^N_{\zeta_N}$ y $\mathbb{E}$ las esperanzas con respecto a $\mathbb{P}^N_{\zeta_N}$ y $\mathbb{P}$ respectivamente. Queremos probar que $\mathbb{E}\Big[G(\zeta)\Psi_{t_1,t_2}\Big] = 0$.

Sin pérdida de generalidad asumimos que $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge to $\mathbb{P}$. Entonces

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}^N_{\zeta_N}\Big[G(\zeta)\Psi_{t_1,t_2}\Big] = \mathbb{E}\Big[G(\zeta)\Psi_{t_1,t_2}\Big]. \tag{4.6}$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$, como $G(\zeta)$ es $\mathcal{F}_{t_1}$-medible y $F(\zeta_t) - \int_0^t (\mathscr{L}_N F)(\zeta_r)dr$ es una $\mathbb{P}^N_{\zeta_N}$-martingala por la fórmula de Dynkin (ver Teorema 2.3.4), tenemos

$$\mathbb{E}^N_{\zeta_N}\Big[G(\zeta)\Big\{F(\zeta_{t_2}) - F(\zeta_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} (\mathscr{L}_N F)(\zeta_r)dr\Big\}\Big] = 0,$$

de donde se sigue que

$$\mathbb{E}^N_{\zeta_N}\Big[G(\zeta)\Psi_{t_1,t_2}\Big] + \mathbb{E}^N_{\zeta_N}\Big[G(\zeta)\Big\{\int_{t_1}^{t_2} [(\mathscr{L} F)(\zeta_r) - (\mathscr{L}_N F)(\zeta_r)]dr\Big\}\Big] = 0. \tag{4.7}$$

Como G es acotada, por el corolario 4.2.3, el segundo término en (4.7) converge a 0 cuando $N \to \infty$. Por lo tanto, por (4.6) y (4.7) concluimos que

$$\mathbb{E}\Big[G(\zeta)\Psi_{t_1,t_2}\Big] = 0,$$

como queríamos probar. □

4.3 Cálculos auxiliares

4.3.1 Algunas propiedades de λ^A

En esta sección probaremos algunas propiedades de las constantes λ^A definidas en (3.6), que nos serán muy útiles para demostrar algunos resultados de la tesis. Recordemos la definición de la función $h_i^A : V \to [0,1],\ i \in A$, definida en (2.3).

Lema 4.3.1. *Sea $i \in A \subseteq V$. Entonces*

$$\lambda^A(i) = \sum_{k\in V} \lambda(k) h_i^A(k) = \lambda(i) + \sum_{k \notin A} \lambda(k) \mathbb{P}_k^{RW}(T_A = T_i).$$

Demostración. Fijemos $i \in A$. De (3.5) tenemos

$$r^A(i,j) = \sum_{k\in V} r(i,k) h_j^A(k),\ i,j \in A,\ i \neq j.$$

Además,

$$\sum_{j\in A} h_j^A(k) = \sum_{j\in A} \mathbb{P}_k^{RW}(T_A = T_j) = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lambda^A(i) &= \sum_{j\in A}\Big[r^A(i,j) - r^A(j,i)\Big] = \sum_{j\in A, k\in V}\Big[r(i,k)h_j^A(k) - r(j,k)h_i^A(k)\Big] \\ &= \sum_{k\in V} r(i,k) \ - \sum_{j,k\in V} r(j,k)h_i^A(k) \ + \sum_{j\notin A, k\in V} r(j,k)h_i^A(k) \\ &= \sum_{k\in V} r(i,k) \ - \sum_{j,k\in V} r(j,k)h_i^A(k) \ + \sum_{j\notin A, k\in V} r(j,k)h_i^A(j), \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde en la última línea usamos $L^{RW}(h_i^A)(j) = 0,\ j \notin A$.

Como $h_i^A(j) = 0$ para cada $j \in A \setminus \{i\}$ y $h_i^A(i) = 1$, tenemos

$$\sum_{j \in A, k \in V} r(j,k) h_i^A(j) = \sum_{k \in V} r(i,k). \tag{4.9}$$

De (4.8) y (4.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda^A(i) &= \sum_{j \in A, k \in V} r(j,k) h_i^A(j) \ - \sum_{j,k \in V} r(j,k) h_i^A(k) \ + \sum_{j \notin A, k \in V} r(j,k) h_i^A(j) \\
&= \sum_{j \in V, k \in V} r(j,k) h_i^A(j) \ - \sum_{j,k \in V} r(j,k) h_i^A(k) \\
&= \sum_{k \in V} \lambda(k) h_i^A(k),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Lema 4.3.2. *Sea $i \in A \subseteq \tilde{A} \subseteq V$ y sean $\lambda^A(i)$ y $\lambda^{\tilde{A}}(i)$ definidas como (3.6). Entonces*

$$\lambda^A(i) = \sum_{j \in \tilde{A}} \lambda^{\tilde{A}}(j) h_i^A(j) = \lambda^{\tilde{A}}(i) + \sum_{j \in \tilde{A} \setminus A} \lambda^{\tilde{A}}(j) \mathbb{P}_j^{RW}(T_A = T_i).$$

Demostración. Fijemos $i \in A$. Por el Lema 4.3.1, es suficiente mostrar que

$$\sum_{k \in V} \lambda(k) h_i^A(k) = \sum_{j \in \tilde{A}} \lambda^{\tilde{A}}(j) h_i^A(j). \tag{4.10}$$

Del Lema 4.3.1 tenemos que

$$\lambda^{\tilde{A}}(j) = \sum_{k \in V} \lambda(k) h_j^{\tilde{A}}(k) \ \forall j \in \tilde{A}. \tag{4.11}$$

Y por la Propiedad de Markov sabemos que para todo $k \in V$,

$$\mathbb{P}_k^{RW}(T_A = T_i) = \sum_{j \in \tilde{A}} \mathbb{P}_k^{RW}(T_{\tilde{A}} = T_j) \mathbb{P}_j^{RW}(T_A = T_i),$$

lo cual es equivalente a

$$h_i^A(k) = \sum_{j \in \tilde{A}} h_j^{\tilde{A}}(k) h_i^A(j). \tag{4.12}$$

De (4.11) y (4.12) se sigue (4.10), lo que concluye la demostración. □

Proposición 4.3.3. *Sea A un subconjunto no vacío de V tal que*

$$\lambda(j) > 0 \ \forall j \notin A. \tag{4.13}$$

Entonces $\lambda^{A\cup\{j\}}(j) > 0 \ \forall j \notin A$.

Demostración. Sea $j \notin A$. Del Lema 4.3.1 sabemos que

$$\lambda^{A\cup\{j\}}(j) = \lambda(j) + \sum_{k\notin A} \lambda(k) h_j^{A\cup\{j\}}(k), \ j \in A.$$

Usando que

$$\lambda(k) > 0 \ \forall k \notin A$$

y que

$$h_j^{A\cup\{j\}}(k) \geq 0 \ \forall j \in A, \ \forall k \notin A,$$

se sigue el resultado. $\square$

Proposición 4.3.4. *Sea $\emptyset \neq A \subsetneq \tilde{A} \subsetneq V$ tal que*

$$\lambda^{\tilde{A}\cup\{l\}}(l) > 0 \ \forall l \notin \tilde{A} \ \text{ y } \ \lambda^{\tilde{A}}(l) > 0 \ \forall l \in \tilde{A} \setminus A. \tag{4.14}$$

Entonces $\lambda^{A\cup\{j\}}(j) > 0 \ \forall j \notin A$.

Demostración. Sea $j \in \tilde{A} \setminus A$. Como $j \in A \cup \{j\} \subseteq \tilde{A} \subseteq V$, por el Lema 4.3.2 tenemos

$$\lambda^{A\cup\{j\}}(j) = \lambda^{\tilde{A}}(j) + \sum_{l\in\tilde{A}\setminus(A\cup\{j\})} \lambda^{\tilde{A}}(l) h_j^{A\cup\{j\}}(l),$$

con

$$h_j^{A\cup\{j\}}(l) \geq 0 \ \forall l \in \tilde{A} \setminus (A \cup \{j\}).$$

El argumento se sigue de que $\lambda^{\tilde{A}}(l) > 0 \ \forall l \in \tilde{A} \setminus A$.

Asumamos ahora $j \notin \tilde{A}$. Usando el Lema 4.3.2 con $j \in A \cup \{j\} \subseteq \tilde{A} \cup \{j\} \subseteq V$, tenemos

$$\lambda^{A\cup\{j\}}(j) = \lambda^{\tilde{A}\cup\{j\}}(j) + \sum_{l\in\tilde{A}\setminus A} \lambda^{\tilde{A}\cup\{j\}}(l) h_j^{A\cup\{j\}}(l). \tag{4.15}$$

Además, para todo $l \in \tilde{A}\setminus A$, usando nuevamente el Lema 4.3.2 con $l \in \tilde{A} \subseteq \tilde{A}\cup\{j\} \subseteq V$,

$$\lambda^{\tilde{A}}(l) = \lambda^{\tilde{A}\cup\{j\}}(l) + \lambda^{\tilde{A}\cup\{j\}}(j) h_l^{\tilde{A}}(j). \tag{4.16}$$

De (4.15) y (4.16) se sigue que

$$\lambda^{A\cup\{j\}}(j) = \lambda^{\tilde{A}\cup\{j\}}(j)\underbrace{\Big[1 - \sum_{l\in\tilde{A}\setminus A} h_j^{A\cup\{j\}}(l)h_l^{\tilde{A}}(j)\Big]}_{(I)} + \sum_{l\in\tilde{A}\setminus A}\lambda^{\tilde{A}}(l)h_j^{A\cup\{j\}}(l). \tag{4.17}$$

Notar que

$$(I) \leq \sum_{l\in\tilde{A}\setminus A} h_l^{\tilde{A}}(j) \leq \sum_{l\in\tilde{A}} h_l^{\tilde{A}}(j) = 1. \tag{4.18}$$

De (4.14), (4.17) y (4.18) obtenemos que

$$\lambda^{A\cup\{j\}}(j) \geq 0 \ \forall j \notin \tilde{A}. \tag{4.19}$$

Además, observemos que

$$\lambda^{A\cup\{j\}}(j) = 0 \text{ si y sólo si } (I) = 1 \text{ y } h_j^{A\cup\{j\}}(l) = 0 \ \forall l \in \tilde{A}\setminus A. \tag{4.20}$$

Como $h_j^{A\cup\{j\}}(l) = 0 \ \forall l \in \tilde{A}\setminus A$ implica que $(I) = 0$, de (4.19) y (4.20) concluimos que

$$\lambda^{A\cup\{j\}}(j) > 0 \ \forall j \notin \tilde{A},$$

como queríamos demostrar. □

4.3.2 Funciones armónicas y martingalas

Denotamos con A a un subconjunto no vacío de V. Para presentar los siguientes resultados recordemos que

$$\Sigma_A = \{\zeta \in [0,1]^A : \sum_{j\in A}\zeta(j) = 1\}$$

y $\zeta^A \in \Sigma_A$ es la configuración definida en (3.4) como

$$\zeta^A(i) = \sum_{j\in V}\zeta(j)h_i^A(j) \ \forall i \in A,$$

con $h_i^A(j) = \mathbb{P}_j^{RW}(T_A = T_i)$. Además denotamos con ζ_A la proyección de $\zeta \in \Sigma$ en Σ_A, es decir,

$$\zeta_A(i) = \zeta(i) \ \forall i \in A,$$

y definimos

$$\dot{\Sigma}_{A,0} = \{\zeta \in \Sigma : \zeta(i) > 0 \ \forall i \in A, \ \zeta(j) = 0 \ \forall j \notin A\}.$$

En particular,

$$\zeta^V(i) = \zeta(i), \ \lambda^V(i) = \lambda(i) \ \forall i \in V \text{ y } \dot{\Sigma}_{V,0} = \dot{\Sigma}.$$

El siguiente Lema es consecuencia del Lema 6.7 en [4].

Lema 4.3.5. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala y sea $F \in \mathcal{D}_V$. Entonces*

$$F(\zeta_t) - F(\zeta_0) - \int_0^t (\mathscr{L}F)(\zeta_s)ds = 0, \ t \geq 0, \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Demostración. Sea

$$M_t^F = F(\zeta_t) - F(\zeta_0) - \int_0^t (\mathscr{L}F)(\zeta_s)ds, \ t \geq 0.$$

Por la definición de $\mathcal{D}_V$ sabemos que si $F \in \mathcal{D}_V$, entonces $F^2 \in \mathcal{D}_V$. Por lo tanto, si consideramos el *carré du champ*

$$\Gamma(F) = \mathscr{L}(F^2) - 2F\mathscr{L}(F),$$

por el Lema 6.7 de [4] se sigue que

$$(M_t^F)^2 - \int_0^t \Gamma(F)(\zeta_s)ds \tag{4.21}$$

es una $\mathbb{P}$-martingala.

Además, como para todo $F \in \mathcal{D}_V$, $\zeta \in \Sigma$,

$$(\mathscr{L}F)(\zeta) = -\langle \boldsymbol{\lambda}, \nabla F(\zeta) \rangle$$

y

$$\nabla(F^2)(\zeta) = 2F(\zeta)\nabla F(\zeta),$$

resulta

$$\Gamma(F) = 0 \ \forall F \in \mathcal{D}_V. \tag{4.22}$$

De (4.21) y (4.22) obtenemos que $\{(M_t^F)^2 : t \geq 0\}$ es una martingala. Como $(M_t^F)^2$ es una variable aleatoria no negativa con $(M_0^F)^2 = 0$, concluimos que $M_t^F = 0 \ \forall t \geq 0$, como queríamos ver. $\square$

El siguiente resultado, que es análogo al Lema 3.1 en [5], nos será de gran utilidad.

Lema 4.3.6. *Sea A un subconjunto no vacío de V. Dada $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma_A)$, sea $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida como $F(\zeta) = f(\zeta^A)$. Entonces $F \in \mathcal{D}_B$ con $B = V \setminus A$ y $\mathscr{L}F(\zeta) = \mathscr{L}_A f(\zeta^A)$.*

Demostración. Sea $j \in B$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle &= \sum_{k\in V} r(j,k)\Big[\sum_{i\in A} h_i^A(k)\partial_i f(\zeta^A) - \sum_{i\in A} h_i^A(j)\partial_i f(\zeta^A)\Big] \\
&= \sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) \sum_{k\in V} r(j,k)\big[h_i^A(k) - h_i^A(j)\big] \\
&= \sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) L^{RW}(h_i^A)(j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos $L^{RW}(h_i^A)(j) = 0 \ \forall j \notin A$. Por lo tanto $F \in \mathcal{D}_B$.

Veamos ahora que $\mathscr{L}F(\zeta) = \mathscr{L}_A f(\zeta^A)$. Por el Lema 4.3.1, $\lambda^A(i) = \sum_{j\in V} \lambda(j) h_i^A(j)$ para todo $i \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}F(\zeta) &= -\sum_{j\in V} \lambda(j)\partial_j F(\zeta) = -\sum_{j\in V} \lambda(j) \sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) h_i^A(j) \\
&= -\sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) \sum_{j\in V} \lambda(j) h_i^A(j) = -\sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A)\lambda^A(i) \\
&= \mathscr{L}_A f(\zeta^A),
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

4.3.3 Funciones en $\mathcal{D}_V$

El siguiente lema, el cual es análogo al Lema 4.4 en [5], muestra cómo extender las funciones en $\mathcal{D}_B$, con $\emptyset \subseteq B \subsetneq V$, a funciones en $\mathcal{D}_V$ conservando algunas propiedades que necesitamos.

Para cada subconjunto no vacío A de V y para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{\zeta \in \Sigma : \min_{i\in A} \zeta(i) \geq \varepsilon\}.$$

Lema 4.3.7. *Sea A un subconjunto no vacío de V, $B = V \setminus A$, y sea $F \in \mathcal{D}_B$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $H^\varepsilon \in \mathcal{D}_V$ tal que*

$$F(\zeta) = H^\varepsilon(\zeta) \ \text{ y } \ (\mathscr{L}F)(\zeta) = (\mathscr{L}H^\varepsilon)(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Lambda_\varepsilon(A).$$

La demostración del Lema 4.3.7 sigue el mismo argumento usado en la demostración del Lema 4.4 en [5]. Necesitamos el siguiente resultado, el cual es una consecuencia inmediata del Lema 4.1 de [5].

Lema 4.3.8. *Sea A un subconjunto propio de V. Existe una función no negativa, suave $I_A : \Sigma \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{D}_A$, y constantes $0 < c_1 < C_1 < \infty$ tales que para todo $\zeta \in \Sigma$,*

$$c_1^2 \|\zeta\|_A^2 \leq I_A(\zeta) \leq C_1^2 \|\zeta\|_A^2, \tag{4.23}$$

donde $\|\zeta\|_A^2 = \sum_{j \in A} \zeta(j)^2$.

Demostración del Lema 4.3.7. En primer lugar, consideremos una función $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ suave (en $\mathcal{C}^\infty$) tal que

$$\Phi(r) = 0 \text{ para } r \leq 0 \text{ y } \Phi(r) = 1 \text{ para } r \geq 3,$$

y sea $\alpha = \frac{c_1}{4C_1}$, con c_1, C_1 las constantes dadas en (4.23).

Fijemos $\varepsilon > 0$ y para cada $k \in A$, consideremos la función

$$G_k = \prod_{\emptyset \subseteq D \subseteq B} \phi_{k,D}(\zeta),$$

donde

$$\phi_{k,D}(\zeta) = \Phi\Big(\frac{9\alpha^{2|D|} I_{D \cup \{k\}}(\zeta)}{\varepsilon^2} - 1\Big), \quad \text{para cada } \emptyset \subseteq D \subseteq B.$$

Sea

$$G = \prod_{k \in A} G_k.$$

Probemos que $H = FG$ pertenece a $\mathcal{D}_V$ y satisface que

$$F(\zeta) = H(\zeta) \text{ y } (\mathscr{L}F)(\zeta) = (\mathscr{L}H)(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Lambda_{\varepsilon'}(A), \tag{4.24}$$

con $\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{c_1 \alpha^{|B|}}$.

Sea $\zeta \in \Sigma$ tal que $\zeta(k) > \frac{\varepsilon'}{2} = \frac{\varepsilon}{c_1 \alpha^{|B|}}$ $\forall k \in A$. Del Lema 4.3.8 se sigue que

$$I_{D \cup \{k\}}(\zeta) > \frac{\varepsilon^2}{\alpha^{2|B|}} \quad \text{para cada } \emptyset \subseteq D \subseteq B,\ k \in A.$$

Usando que $\alpha < 1$ y $\Phi(r) = 1$ para $r \geq 3$ deducimos que $G(\zeta) = 1$, lo cual implica (4.24).

Fijemos $k \in A$. Notemos que si $\zeta(k) < \frac{\varepsilon}{3C1}$, por el Lema 4.3.8 y el hecho de que $\Phi(r) = 0$ para $r \leq 0$ se sigue que $\phi_{k,\emptyset}(\zeta) = 0$ y por lo tanto $\nabla \phi_{k,\emptyset}(\zeta) = 0$. Como

$$\big\langle v_k, \nabla H(\zeta) \big\rangle = \phi_{k,\emptyset}(\zeta) \big\langle v_k, \nabla \Big(\frac{H}{\phi_{k,\emptyset}}\Big)(\zeta) \big\rangle + \Big(\frac{H}{\phi_{k,\emptyset}}\Big)(\zeta) \big\langle v_k, \nabla \phi_{k,\emptyset}(\zeta) \big\rangle,$$

se sigue que

$$\big\langle v_k, \nabla H(\zeta) \big\rangle = 0 \text{ si } \zeta(k) = 0.$$

Por lo tanto, $H \in \mathcal{D}_A$.

Probemos ahora que $H \in \mathcal{D}_B$. Fijemos $j \in B$ y reescribamos a G como el producto de las funciones G_1 y G_2, donde

$$G_1 = \prod_{k \in A} \prod_{\emptyset \subseteq D \subseteq B : j \in D} \phi_{k,D}(\zeta)$$
$$G_2 = \prod_{k \in A} \prod_{\emptyset \subseteq D \subseteq B : j \notin D} \phi_{k,D}(\zeta).$$

Es claro que si F_1 y F_2 pertenecen a $\mathcal{D}_j$ y $\Xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suave, entonces $F_1 F_2$ y $\Xi(F_1)$ pertenecen a $\mathcal{D}_j$. Por lo tanto, como F e I_C pertenecen a $\mathcal{D}_j$ si el conjunto C contiene a j, para ver que H está en $\mathcal{D}_j$ es necesario probar que

$$(FG_1)(\zeta)\big\langle v_j, \nabla G_2(\zeta)\big\rangle = 0 \text{ si } \zeta(j) = 0. \tag{4.25}$$

Y para esto es suficiente mostrar que para cada $k \in A$ y $\emptyset \subseteq D \subseteq B$ tal que $j \notin D$,

$$\phi_{k,D\cup\{j\}}(\zeta)\big\langle v_j, \nabla \phi_{k,D}(\zeta)\big\rangle = 0 \text{ si } \zeta(j) = 0. \tag{4.26}$$

Fijemos $k \in A$ y $\emptyset \subseteq D \subseteq B$ tal que $j \notin D$. Usando nuevamente el Lema 4.3.8 y las propiedades de la función Φ deducimos que

$$\begin{aligned} \phi_{k,D\cup\{j\}}(\zeta) = 0 \;\text{ si } \|\zeta\|_{D\cup\{k,j\}} < \frac{\varepsilon}{3C_1\alpha^{|D|+1}}, \\ \phi_{k,D}(\zeta) = 1 \;\text{ si } \|\zeta\|_{D\cup\{k\}} > \frac{\varepsilon}{c_1\alpha^{|D|}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Como $\alpha = \frac{c_1}{4C_1}$ y

$$\|\zeta\|_{D\cup\{k,j\}}(\zeta) = \|\zeta\|_{D\cup\{k\}}(\zeta) \;\forall \zeta \in \Sigma \text{ tal que } \zeta(j) = 0,$$

de (4.27) se sigue (4.26), como queríamos probar. $\square$

4.3.4 Propiedades de soluciones del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-p.m.

Ahora que ya hemos probado el Lema 4.3.7, que nos permite reemplazar una función por otra que se encuentre en el dominio del operador $\mathscr{L}$ respetando ciertas propiedades, veamos los siguientes dos lemas, que son sobre el comportamiento de las soluciones del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala cuando todos los sitios están ocupados.

Tengamos presente (por la Proposición 3.2.2), que si $\mathbb{P}$ es un punto límite de $(\mathbb{P}^N)_{N\in\mathbb{N}}$, entonces $\mathbb{P}$ está concentrado en trayectorias continuas.

Lema 4.3.9. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala. Sea A un subconjunto no vacío de V y sean $0 \leq t_1 < t_2$ tales que*

$$\zeta_t(i) > 0 \ \forall i \in A, \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Entonces

$$\zeta_t^A(i) = \zeta_{t_1}^A(i) - \lambda^A(i)(t - t_1) \ \forall i \in A, \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Demostración. Sea

$$\varepsilon = \min_{i \in A} \min_{t \in [t_1, t_2]} \zeta_t(i).$$

Como $[t_1, t_2]$ es compacto y $t \to \zeta_t(\omega)$ es continua para cada trayectoria $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma)$, entonces ε (que es una variable aleatoria) está bien definida y es estrictamente positiva. Además, por cómo definimos ε tenemos que

$$\zeta_t \in \Lambda_\varepsilon(A) \ \ \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{4.28}$$

Fijemos $i \in A$ y consideremos la función $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $F(\zeta) = \zeta^A(i)$. Por el Lema 4.3.6,

$$F \in \mathcal{D}_B \text{ y } (\mathscr{L}F)(\zeta) = -\lambda^A(i),$$

con $B = V \setminus A$. (Recordemos que $\lambda^V(i) = \lambda(i)$ y $\mathcal{D}_\emptyset = \mathcal{C}^2(\Sigma)$).

Por el Lema 4.3.7, existe una función $H^\varepsilon \in \mathcal{D}_V$ tal que

$$H^\varepsilon(\zeta) = \zeta^A(i) \text{ y } (\mathscr{L}H^\varepsilon)(\zeta) = -\lambda^A(i) \ \ \forall \zeta \in \Lambda_\varepsilon(A). \tag{4.29}$$

Como $H^\varepsilon \in \mathcal{D}_V$, del Lema 4.3.5 se sigue que

$$H^\varepsilon(\zeta_t) - H^\varepsilon(\zeta_{t_1}) - \int_{t_1}^{t} (\mathscr{L}H^\varepsilon)(\zeta_s) ds = 0, \ t \in [t_1, t_2].$$

De la ecuación de arriba junto con (4.28) y (4.29) concluimos que

$$\zeta_t^A(i) = \zeta_{t_1}^A(i) - \lambda^A(i)(t - t_1) \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

como queríamos probar. $\square$

Corolario 4.3.10. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala. Sea A un subconjunto no vacío de V y sea $0 \leq t_1 \leq t_2$ tal que*

$$\zeta_t \in \dot{\Sigma}_{A,0} \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Entonces

$$\zeta_t(i) = \zeta_{t_1}(i) - \lambda^A(i)(t - t_1) \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Demostración. Se sigue directamente del Lema 4.3.9 y del hecho de que

$$\zeta^A(i) = \zeta(i) \ \forall i \in A, \ \forall \zeta \in \dot{\Sigma}_{A,0}.$$ $\square$

Capítulo 5

Absorción en las fronteras

Como ya hemos comentado, uno de los resultados más importantes probados en esta tesis es el Teorema 3.4.2, que establece la unicidad del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala cuando a tiempo inicial todos los sitios se encuentran macroscópicamente ocupados. Es decir, cuando el límite de las configuraciones iniciales, denotado por ζ_0, pertenece al conjunto

$$\dot{\Sigma} = \{\zeta \in \Sigma : \zeta(j) > 0 \ \forall j \in V\}.$$

En esta sección probamos dicho teorema. Un resultado que necesitamos será el Teorema 5.0.1. Esencialmente, este resultado dice que si un sitio se vacía, éste permanecerá vacío hasta la primera vez que alguno de los sitios ocupados se vacíe. Antes de enunciarlo, introduzcamos las siguientes definiciones.

Consideremos $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala y sea $t \geq 0$. Usando la notación $\inf \emptyset = \infty$, definimos

$$\begin{aligned} A_t &= \{i \in V : \zeta_t(i) > 0\}, \\ B_t &= V \setminus A_t, \\ \tau_t &= \inf\{s \geq t : \prod_{i \in A_t} \zeta_s(i) = 0\}. \end{aligned}$$

Teorema 5.0.1. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala. Supongamos que existe $t_1 \geq 0$ tal que A_{t_1} es un subconjunto propio de V y*

$$\lambda^{A_{t_1} \cup \{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in B_{t_1}.$$

Entonces,

$$\zeta_s(i) = 0 \ \forall i \in B_{t_1}, \ \forall s \in [t_1, \tau_{t_1}) \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Daremos dos demostraciones de el Teorema 5.0.1. Una basada en encontrar una función del tipo Lyapunov, que sólo sirve para el caso en que el paseo aleatorio con tasas $\boldsymbol{r}$ es reversible, y otra que sirve para el caso general. Dividiremos lo que sigue del capítulo en dos secciones, una para cada demostración.

5.1 Demostración del Teorema 5.0.1, caso general

Comencemos con algo de notación y con dos lemas preliminares.

Consideremos A un subconjunto propio de V y sea $B = V \setminus A$. Además denotamos con B al cardinal del conjunto B y con $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Para cada $i \in B$ sea

$$c(i) = \sum_{j \in B} h_i^{A \cup \{i\}}(j), \tag{5.1}$$

y sea $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_+^{B \times 1}$ el vector tal que $\boldsymbol{c}(i) = c(i)\ \forall i \in B$. Notemos que, como

$$h_i^{A \cup \{i\}}(i) = 1\ \forall i \in B,$$

tenemos que

$$c(i) \geq 1\ \forall i \in B.$$

Además denotemos por $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\zeta_t}$ y $\boldsymbol{\zeta_t^{\bar{A}}}$ a los vectores en $\mathbb{R}_+^{B \times 1}$ dados por

$$\mathbf{1}(i) = 1,\ \boldsymbol{\zeta_t}(i) = \zeta_t(i) \text{ y } \boldsymbol{\zeta_t^{\bar{A}}}(i) = \zeta_t^{A \cup \{i\}}(i)\ \forall i \in B.$$

Definamos las matrices $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{R}$ en $\mathbb{R}^{B \times B}$ como sigue. Para $i, j \in B$ sea

$$\boldsymbol{H}_{ij} = h_i^{A \cup \{i\}}(j)$$

y

$$\boldsymbol{R}_{ij} = \begin{cases} \gamma(j) & \text{si } i = j, \\ -r(j,i) & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

con $\gamma(j) = \sum_{k \in V} r(j,k)$.

De (3.4) y (5.1),

$$\zeta^{A \cup \{i\}}(i) = \sum_{j \in B} \boldsymbol{H}_{ij} \zeta(j) \text{ y } c(i) = \sum_{j \in B} \boldsymbol{H}_{ij}\ \forall i \in B. \tag{5.2}$$

Usando notación matricial en la ecuación de arriba tenemos que

$$\boldsymbol{\zeta^{\bar{A}}} = \boldsymbol{H\zeta} \text{ y } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{H1}. \tag{5.3}$$

Por otro lado, como $h_i^{A \cup \{i\}}(k) = 0\ \forall k \in A$ y $r(j,j) = 0\ \forall j \in B$, resulta

$$(\boldsymbol{HR})_{ij} = -L^{RW}\left(h_i^{A \cup \{i\}}\right)(j)\ \forall i, j \in B. \tag{5.4}$$

Notemos que, debido a (5.4) y a la irreducibilidad de las tasas $\boldsymbol{r}$,

$$(\boldsymbol{HR})_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } (\boldsymbol{HR})_{ii} > 0\ \forall i \in B.$$

Luego, si definimos $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{B\times B}$ como

$$\boldsymbol{L}_{ij} = \begin{cases} \left[- L^{RW}\left(h_i^{A\cup\{i\}}\right)(i)\right]^{-1} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

resulta que la matriz $\boldsymbol{H}$ es inversible, con inversa $\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{L}$. Por lo tanto, de (5.3) tenemos que

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\zeta}^{\bar{\boldsymbol{A}}} \;\text{ y }\; \mathbf{1} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{c}. \tag{5.5}$$

Lema 5.1.1. *Sea $\mathbb{P}$ una solución al $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala. Sea A un subconjunto propio de V y $B = V \setminus A$ tal que*

$$\lambda^{A\cup\{i\}}(i) \geq 0 \;\forall i \in B \quad y \quad \zeta_t(j) > 0 \;\forall j \in A, \;\; \forall t \in [t_1, t_2] \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Supongamos que existen $i_0 \in B$ y $[s_0, s_1] \subseteq [t_1, t_2]$ tales que $\zeta_t(i_0) > 0$ $\forall t \in [s_0, s_1]$ $\mathbb{P}$-c.s. Entonces

$$\zeta_{s_1}^{A\cup\{i_0\}}(i_0) \leq \zeta_{s_0}^{A\cup\{i_0\}}(i_0) \;\mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Demostración. Del Lema 4.3.9 tenemos que

$$\zeta_t^{A\cup\{i_0\}}(i_0) = \zeta_{s_0}^{A\cup\{i_0\}}(i_0) - \lambda^{A\cup\{i_0\}}(i_0)(t - s_0) \;\forall i \in A, \;\forall t \in [s_0, s_1] \;\mathbb{P}\text{-c.s.}$$

El resultado se sigue de que $\lambda^{A\cup\{i_0\}}(i_0) \geq 0$. □

Lema 5.1.2. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala y sea A un subconjunto propio de V y $B = V \setminus A$. Supongamos que existen $i_0 \in B$ y $t \geq 0$ tales que para algún $\delta > 0$*

$$\zeta_t^{A\cup\{i_0\}}(i_0) \geq \delta c(i_0) \quad y \quad \zeta_t^{A\cup\{i\}}(i) \leq \delta c(i) \;\forall i \in B \setminus i_0 \;\mathbb{P}\text{-c.s.},$$

siendo $(c(i))_{i\in B}$ las constantes definidas en (5.1). Entonces

$$\zeta_t(i_0) \geq \delta \;\mathbb{P}\text{-c.s.} \tag{5.6}$$

Demostración. De (5.5) y el hecho de que $\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{L}$ con $\boldsymbol{L}$ una matriz diagonal con entradas no negativas y $\boldsymbol{R}_{ii} > 0$ $\forall i \in B$ tenemos que

$$\begin{aligned} \zeta_t(i_0) &= \sum_{j\in B} (\boldsymbol{R}\boldsymbol{L})_{i_0 j}\zeta_t^{A\cup\{j\}}(j) = \sum_{j\in B} \boldsymbol{R}_{i_0 j}\boldsymbol{L}_{jj}\zeta_t^{A\cup\{j\}}(j) \\ &= \boldsymbol{R}_{i_0 i_0}\boldsymbol{L}_{i_0 i_0}\zeta_t^{A\cup\{i_0\}}(i_0) - \sum_{j\in B\setminus\{i_0\}} r(j, i_0)\boldsymbol{L}_{jj}\zeta_t^{A\cup\{j\}}(j) \\ &\geq \boldsymbol{R}_{i_0 i_0}\boldsymbol{L}_{i_0 i_0}\delta c(i_0) - \sum_{j\in B\setminus\{i_0\}} r(j, i_0)\boldsymbol{L}_{jj}\delta c(j) \\ &= \sum_{j\in B} (\boldsymbol{R}\boldsymbol{L})_{i_0 j}\delta c(j) = \delta(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{c})(i_0) \\ &= \delta, \end{aligned}$$

lo cual implica (5.6). □

Ya estamos en condiciones de probar el Teorema 5.0.1.

Demostración del Teorema 5.0.1. Para simplificar notación denotamos con A y B los conjuntos A_{t_1} y B_{t_1} respectivamente. Fijemos $t_2 \in (t_1, \tau_{t_1})$. Como

$$\zeta^{A\cup\{i\}}(i) \geq \zeta(i) \ \forall i \in B,$$

es suficiente mostrar que

$$\zeta_t^{A\cup\{i\}}(i) = 0 \ \forall i \in B, \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{5.7}$$

Se sigue por contradicción. Supongamos que (5.7) es falso. Entonces, como $c(i) > 0$ para todo $i \in B$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\{t \in [t_1, t_2] : \zeta_t^{A\cup\{i\}}(i) \geq c(i)\delta \text{ para algún } i \in B\} \neq \emptyset. \tag{5.8}$$

Fijemos $\delta > 0$ como en (5.8) y sea

$$s_1 = \inf\{t > t_1 : \zeta_t^{A\cup\{i\}}(i) \geq c(i)\delta \text{ para algún } i \in B\}.$$

Como

$$\zeta_{t_1}^{A\cup\{i\}}(i) = 0 \ \forall i \in B, \tag{5.9}$$

de (5.8) y de la continuidad de $t \to \zeta_t$ tenemos que $s_1 \in (t_1, t_2)$.

Llamemos i_0 a un sitio en B tal que

$$\zeta_{s_1}^{A\cup\{i_0\}}(i_0) \geq c(i_0)\delta. \tag{5.10}$$

De la definición de s_1 y de (5.9) obtenemos

$$\zeta_{s_1}^{A\cup\{i_0\}}(i_0) \geq c(i_0)\delta \text{ y } \zeta_{s_1}^{A\cup\{i\}}(i) \leq c(i)\delta \ \forall i \in B \setminus \{i_0\} \tag{5.11}$$

y

$$\zeta_t^{A\cup\{i_0\}}(i_0) < c(i_0)\delta \ \forall t \in [t_1, s_1). \tag{5.12}$$

De (5.11) y del Lema 5.1.2 se sigue que $\zeta_{s_1}(i_0) > \delta > 0$. Luego, usando la continuidad de la función $t \to \zeta_t$ deducimos que existe s_0 con $t_1 < s_0 < s_1$ tal que

$$\zeta_t(i_0) > 0 \ \forall t \in [s_0, s_1].$$

Del Lema 5.1.1 se sigue

$$\zeta_{s_1}^{A\cup\{i_0\}}(i_0) \leq \zeta_{s_0}^{A\cup\{i_0\}}(i_0),$$

pero esta desigualdad junto con (5.10) contradice (5.12), lo que concluye la demostración. □

5.2 Demostración alternativa del Teorema 5.0.1, caso reversible

En esta sección presentamos una demostración alternativa para el Teorema 5.0.1 que usa una función del tipo Lyapunov. Para esta demostración asumiremos que el paseo aleatorio con tasas $\boldsymbol{r}$ es reversible.

Sea A un subconjunto propio de V y sea $B = V \setminus A$. Recordemos que para cada par $i, j \in B$,

$$h_i^{A\cup\{i\}}(j) = \mathbb{P}_j^{RW}[T_{A\cup\{i\}} = T_i] = \mathbb{P}_j^{RW}[T_i < T_A].$$

Para simplificar notación, $h_i^{A\cup\{i\}}(j)$ será denotado con $h_i(j)$.

Lema 5.2.1. *Sean $(a_i)_{i\in B}$ números no negativos tales que*

$$a_i h_i(j) = a_j h_j(i) \quad \forall i, j \in B. \tag{5.13}$$

Supongamos que $\lambda^{A\cup\{i\}}(i) \geq 0$ $\forall i \in B$. Entonces la función $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\zeta) = \sum_{i,j\in B} a_i h_i(j)\zeta(i)\zeta(j)$$

está bien definida y satisface que

$$F(\zeta) \geq 0 \ \forall \zeta \in \Sigma, \quad F \in \mathcal{D}_B \quad y \quad \mathscr{L}F(\zeta) \leq 0 \ \forall \zeta \in \Sigma.$$

Demostración. De (5.13) se sigue que F está bien definida. Como a_i, $h_i(j)$ y $\zeta(i)$ son no negativos para todo $i, j \in B$, entonces $F(\zeta) \geq 0$ $\forall \zeta \in \Sigma$. Además $F \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$.

Para probar las últimas dos afirmaciones, comencemos calculando $\nabla F(\zeta)$. Si $j \in A$, $\partial_j F(\zeta) = 0$. Si $j \in B$, de (5.13) tenemos que

$$\partial_j F(\zeta) = \sum_{i\in B} 2a_i h_i(j)\zeta(i). \tag{5.14}$$

Por hipótesis, $\lambda^{A\cup\{i\}}(i) \geq 0$ $\forall i \in B$, y del Lema 4.3.1,

$$\lambda^{A\cup\{i\}}(i) = \sum_{j\in B} \lambda(j)h_i(j) \ \forall i \in B.$$

Por lo tanto

$$\mathscr{L}F(\zeta) = -\langle \boldsymbol{\lambda}, \nabla F(\zeta)\rangle = -\sum_{i\in B} 2a_i\zeta(i)\sum_{j\in B}\lambda(j)h_i(j) = -\sum_{i\in B} 2a_i\zeta(i)\lambda^{A\cup\{i\}}(i) \leq 0.$$

Probemos ahora que $F \in \mathcal{D}_B$. Fijemos $j \in B$ y asumamos $\zeta(j) = 0$. Debemos probar que $\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle = 0$. De (5.14) y del hecho que $\partial_k F(\zeta) = 0$ y $h_i(k) = 0$ para todo $k \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle v_j, \nabla F(\zeta)\rangle &= \sum_{k\in B} r(j,k)\partial_k F(\zeta) - \sum_{k\in V} r(j,k)\partial_j F(\zeta) \\
&= \sum_{i\in B} 2a_i\zeta(i)\Big[\sum_{k\in B} r(j,k)h_i(k) - \sum_{k\in V} r(j,k)h_i(j)\Big] \\
&= \sum_{i\in B} 2a_i\zeta(i)\sum_{k\in V} r(j,k)[h_i(k) - h_i(j)] \\
&= \sum_{i\in B\setminus\{j\}} 2a_i\zeta(i)L^{RW}(h_i)(j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde en las últimas dos igualdades usamos que $\zeta(j) = 0$ y que

$$L^{RW}(h_i)(j) = 0 \ \ \forall i, j \in B, \ i \neq j$$

respectivamente. □

Veamos cómo construir una sucesión de números $(a_i)_{i\in B}$ que cumpla la propiedad (5.13).

Consideremos la relación $\sim$ definida en el conjunto B del siguiente modo:

$$i \sim j \ \text{ si y sólo si } \ h_i(j) > 0. \tag{5.15}$$

Observemos que si el paseo aleatorio en V con tasas $\boldsymbol{r}$ es reversible, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.

Lema 5.2.2. *Asumamos que el paseo aleatorio en V con tasas $\boldsymbol{r}$ es reversible. Sea $\hat{B} \subseteq B$ una clase de equivalencia $\sim$ definida por (5.15) y fijemos $j_0 \in \hat{B}$. Para todo $i \in B$ definimos*

$$a_i^{\hat{B}} = \begin{cases} \frac{h_{j_0}(i)}{h_i(j_0)} & si\ i \in \hat{B}, \\ 0 & si\ i \notin \hat{B}. \end{cases}$$

Entonces la sucesión $(a_i^{\hat{B}})_{i\in B}$ está bien definida y satisface la propiedad (5.13).

Demostración. Si i y j_0 están en la misma clase de equivalencia, $h_i(j_0) > 0$. Por lo tanto, la sucesión $(a_i^{\hat{B}})_{i\in B}$ está bien definida. Veamos ahora que la propiedad (5.13) se cumple.

Fijemos $i, j \in B$, queremos probar que

$$a_i^{\hat{B}} h_i(j) = a_j^{\hat{B}} h_j(i). \tag{5.16}$$

Si i o j no están en $\hat{B}$, ambos miembros de (5.16) son iguales a cero. Por lo tanto, asumimos que $i, j \in \hat{B}$. Para este caso es suficiente mostrar que

$$h_i(j) h_j(j_0) h_{j_0}(i) = h_j(i) h_{j_0}(j) h_i(j_0). \tag{5.17}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que i, j y j_0 son diferentes sitios de B (de lo contrario, (5.17) se satisface directamente). Consideremos el proceso traza definido por (3.5) en el conjunto $\tilde{A} = A \cup \{i, j, j_0\}$ con tasas $\boldsymbol{r}^{\tilde{\boldsymbol{A}}}$. Denotamos por $\tilde{\mathbb{P}}_j^{RW}$ la medida de probabilidad en el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \tilde{A})$ inducida por el proceso comenzado en j, por $\tilde{T}_A$ y $\tilde{T}_i$ los hitting times a los conjuntos A e $\{i\}$ respectivamente y por

$$p^{\tilde{A}}(i, j) = \frac{1}{\sum\limits_{l \in \tilde{A}} r^{\tilde{A}}(i, l)} r^{\tilde{A}}(i, j)$$

a la probabilidad de salto del sitio i al sitio j en el proceso traza.

De la Sección 6.1 de [6],

$$\mathbb{P}_j^{RW}[T_i < T_A] = \tilde{\mathbb{P}}_j^{RW}[\tilde{T}_i < \tilde{T}_A]. \tag{5.18}$$

Condicionando al primer salto y usando la propiedad de Markov

$$\tilde{\mathbb{P}}_j^{RW}[\tilde{T}_i < \tilde{T}_A] = \frac{p^{\tilde{A}}(j, i) + p^{\tilde{A}}(j, j_0) p^{\tilde{A}}(j_0, i)}{1 - p^{\tilde{A}}(j, j_0) p^{\tilde{A}}(j_0, j)}. \tag{5.19}$$

De (5.18) y (5.19),

$$h_i(j) = \frac{p^{\tilde{A}}(j, i) + p^{\tilde{A}}(j, j_0) p^{\tilde{A}}(j_0, i)}{1 - p^{\tilde{A}}(j, j_0) p^{\tilde{A}}(j_0, j)}.$$

Análogamente podemos calcular cada término de (5.17), obteniendo que (5.17) vale si y sólo si

$$\begin{aligned} &\left[p^{\tilde{A}}(j, i) + p^{\tilde{A}}(j, j_0) p^{\tilde{A}}(j_0, i)\right] \left[p^{\tilde{A}}(j_0, j) + p^{\tilde{A}}(j_0, i) p^{\tilde{A}}(i, j)\right] \left[p^{\tilde{A}}(i, j_0) + p^{\tilde{A}}(i, j) p^{\tilde{A}}(j, j_0)\right] \\ = &\left[p^{\tilde{A}}(i, j) + p^{\tilde{A}}(i, j_0) p^{\tilde{A}}(j_0, j)\right] \left[p^{\tilde{A}}(j, j_0) + p^{\tilde{A}}(j, i) p^{\tilde{A}}(i, j_0)\right] \left[p^{\tilde{A}}(j_0, i) + p^{\tilde{A}}(j_0, j) p^{\tilde{A}}(j, i)\right]. \end{aligned}$$

Y esta igualdad se sigue del hecho de que el paseo aleatorio en V con tasas $\boldsymbol{r}$ es reversible, y por ende, su proceso traza en $\tilde{A}$ con tasas $\boldsymbol{r}^{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ también es reversible. $\square$

Estamos listos para probar el Teorema 5.0.1 para el caso $\boldsymbol{r}$ reversible.

Demostración del Teorema 5.0.1. Denotamos con A y B a los conjuntos A_{t_1} y B_{t_1} respectivamente. Fijemos $t_2 \in (t_1, \tau_{t_1})$. Probemos que $\zeta_{t_2}(i) = 0\ \forall i \in B$ $\mathbb{P}$-*c.s.*

Consideremos la relación de equivalencia en el conjunto B dada por (5.15), y denotemos con C_B al conjunto de clases de equivalencia. Para cada $\hat{B} \in C_B$ sea $F^{\hat{B}} : \Sigma \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F^{\hat{B}}(\zeta) = \sum_{i,j \in B} a_i^{\hat{B}} h_i(j)\zeta(i)\zeta(j),$$

donde $(a_i^{\hat{B}})_{i\in B}$ es una sucesión construida como en el Lema 5.2.2.

Del Lema 5.2.1 se sigue que

$$F^{\hat{B}} \in \mathcal{D}_B,\ F^{\hat{B}}(\zeta) \geq 0 \text{ y } \mathscr{L}F^{\hat{B}}(\zeta) \leq 0\ \forall \zeta \in \Sigma,\ \forall \hat{B} \in C_B.$$

Por lo tanto, la función $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\zeta) = \sum_{\hat{B} \in C_B} F^{\hat{B}}(\zeta)$$

también satisface que

$$F \in \mathcal{D}_B,\ F(\zeta) \geq 0 \text{ y } \mathscr{L}F(\zeta) \leq 0\ \forall \zeta \in \Sigma.$$

Por hipótesis,

$$\prod_{i\in A} \zeta_s(i) > 0\ \forall s \in [t_1, t_2].$$

Por lo tanto, si consideramos

$$\varepsilon = \min_{i\in A} \min_{t\in[t_1,t_2]} \zeta_t(i),$$

que es estrictamente positivo, tenemos que

$$\zeta_t \in \Lambda_\varepsilon(A)\ \ \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{5.20}$$

De los Lemas 4.3.5 y 4.3.7 se sigue que existe una función $H^\varepsilon \in \mathcal{D}_V$ tal que

$$F(\zeta) = H^\varepsilon(\zeta) \text{ y } (\mathscr{L}F)(\zeta) = (\mathscr{L}H^\varepsilon)(\zeta)\ \ \forall \zeta \in \Lambda_\varepsilon(A) \tag{5.21}$$

y

$$H^\varepsilon(\zeta_{t_2}) - H^\varepsilon(\zeta_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} (\mathscr{L}H^\varepsilon)(\zeta_s)ds = 0\ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{5.22}$$

De (5.20), (5.21) y (5.22) junto con el hecho de que

$$F(\zeta_{t_1}) = 0 \text{ y } \mathscr{L}F(\zeta) \leq 0 \ \forall \zeta \in \Sigma$$

se sigue que

$$F(\zeta_{t_2}) = \int_{t_1}^{t_2} (\mathscr{L}F)(\zeta_s)ds \leq 0 \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Como

$$F(\zeta) \geq \sum_{i \in B} b_i \zeta(i)^2 \quad \text{con} \quad b_i = \sum_{\hat{B} \in C_B} a_i^{\hat{B}} > 0 \quad \forall i \in B$$

obtenemos $\zeta_{t_2}(i) = 0 \ \forall i \in B$ $\mathbb{P}$-c.s., como queríamos probar. $\square$

Observación 5.2.3. *Notemos que, aunque el paseo aleatorio en V con tasas $\boldsymbol{r}$ es reversible (respecto a la distribución μ) y por ende*

$$\mu(i)r(i,j) = \mu(j)r(j,i) \ \forall i,j \in V,$$

esto no implica que

$$\mu(i)h_j(i) = \mu(j)h_i(j) \ \forall i,j \in V. \tag{5.23}$$

Si $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ es una trayectoria que comienza en j tal que los hitting times a los conjuntos $A \cup \{i\}$ e $\{i\}$ satisfacen

$$T_{A\cup\{i\}}(\omega) = T_i(\omega) = t_0,$$

no necesariamente vale que la trayectoria reversa $\omega'_t = \omega_{t_0 - t}$ que comienza en i satisface que

$$T_{A\cup\{j\}}(\omega') = T_j(\omega') = t_0.$$

Mostremos un contraejemplo de (5.23). Supongamos que $|V \setminus A| = 3$, digamos

$$V \setminus A = \{i,j,k\},$$

y que $\gamma(s) = \sum_{l \in V} r(s,l) = 1 \ \forall s \in V$, con lo cual, para cada par $i \neq j$, la tasa de salto $r(i,j)$ coincide con la probablidad de salto de i a j.

En este caso concreto, como $h_i^{A\cup\{i\}}(j) = h_i(j) = \mathbb{P}_j(T_i < T_A)$, condicionando al primer salto y usando la Propiedad de Markov tenemos que

$$h_i(j) = r(j,i) + r(j,k)h_i(k) = r(j,i) + r(j,k)[r(k,i) + r(k,j)h_i(j)].$$

Despejando queda

$$h_i(j) = \frac{r(j,i) + r(j,k)r(k,i)}{1 - r(j,k)r(k,j)},$$

donde el denominador es no nulo ya que el paseo aleatorio con tasas $\boldsymbol{r}$ *es irreducible.*

Análogamente,

$$h_j(i) = \frac{r(i,j) + r(i,k)r(k,j)}{1 - r(i,k)r(k,i)}.$$

Entonces, eligiendo $a_i = \frac{1}{\mu(i)}$*, la condición* (5.13) *es equivalente a*

$$\frac{\mu(j)[r(j,i) + r(j,k)r(k,i)]}{1 - r(j,k)r(k,j)} = \frac{\mu(i)[r(i,j) + r(i,k)r(k,j)]}{1 - r(i,k)r(k,i)}$$

Si bien, por la propiedad de reversibilidad, los numeradores en ambos miembros son iguales, los denominadores no lo son.

Capítulo 6

Proceso límite

6.1 Demostraciones de los Teoremas 3.4.2 y 3.4.3

Definamos recursivamente una sucesión de variables aleatorias $(\mathcal{A}_n, \tau_n)_{n\geq 0}$ como sigue, en donde también usamos la convención $\inf \emptyset = \infty$.

Sea $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$. Sean $\tau_0 = 0,\ \mathcal{A}_0 = V$, y dados $\tau_n,\ \mathcal{A}_n$, definimos

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \inf\{t \geq \tau_n : \prod_{i\in\mathcal{A}_n} \zeta_t(i) = 0\}, \\ \mathcal{A}_{n+1} &= \begin{cases} \{i \in V : \zeta_{\tau_{n+1}}(i) > 0\} & \text{si } \tau_{n+1} < \infty, \\ \mathcal{A}_n & \text{si } \tau_{n+1} = \infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Probaremos que para toda solución $\mathbb{P}$ del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$,

$$\mathcal{A}_n = A_n,\ \tau_n = T_n\ \forall n \geq 0\ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

y

$$\zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_t\ \forall t \geq 0\ \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

con $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot$, $(A_n)_{n\geq 0}$ y $(T_n)_{n\geq 0}$ definidas en (3.8).

Comencemos con la siguiente observación, la cual nos será de utilidad.

Observación 6.1.1. *De la definición de la trayectoria $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot$ dada en (3.8) se sigue que que*

$$A_n \setminus A_{n+1} \subseteq \{i \in A_n : \lambda^{A_n}(i) > 0\}\ \forall n \geq 0.$$

Lema 6.1.2. *La trayectoria $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot$ dada por (3.8) satisface que*

$$\lambda^{A_n\cup\{i\}}(i) > 0\quad \forall i \notin A_n,\ \forall n \geq 1.$$

Demostración. Haremos inducción en n.

El caso $n = 1$ se sigue de la Observación 6.1.1 y de la Proposición 4.3.3, ya que las mismas implican que

$$\lambda(i) > 0 \ \forall i \notin A_1,$$

y

$$\lambda^{A_1 \cup \{i\}}(i) > 0 \ \ \forall i \notin A_1$$

respectivamente.

Veamos el paso inductivo. Asumimos

$$\lambda^{A_{n-1} \cup \{i\}}(i) > 0 \ \ \forall i \notin A_{n-1}, \tag{6.2}$$

con $n \geq 2$. De la Observación 6.1.1,

$$\lambda^{A_{n-1}}(i) > 0 \ \ \forall i \in A_{n-1} \setminus A_n. \tag{6.3}$$

De (6.2), (6.3) y de la Proposición 4.3.4 se sigue que

$$\lambda^{A_n \cup \{i\}}(i) > 0 \ \ \forall i \notin A_n,$$

como queríamos probar. $\square$

Proposición 6.1.3. *Sea $\mathbb{P}$ una solución al $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$ y sean $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot, A_1, T_1$ definidos en (3.8). Entonces*

$$\tau_1 = T_1, \ \mathcal{A}_1 = A_1 \ y \ \zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}} \ \forall t \in [0, T_1) \ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{6.4}$$

Demostración. Fijemos $s_1 \in [0, \tau_1)$. Aplicando el Lema 4.3.9 para $A = V$, como $\lambda^V(i) = \lambda(i) \ \forall i \in V$, tenemos que

$$\zeta_t(i) = \zeta_0(i) - \lambda(i)t \ \ \forall i \in V, \ \forall t \in [0, s_1], \ \mathbb{P}\text{-c.s.} \tag{6.5}$$

Como vale para todo $s_1 < \tau_1$, de la definición de τ_1 dada en (6.1) se sigue que

$$\tau_1 = \inf \Big\{ t \geq 0 : \prod_{i \in V} \big[\zeta_0(i) - \lambda(i)t\big] = 0 \Big\} \ \mathbb{P}\text{-c.s.}, \tag{6.6}$$

la cual coincide con T_1. De (6.5) y (6.6) se sigue (6.4), como queríamos probar. $\square$

Proposición 6.1.4. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$ y sean $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_\cdot, A_k, T_k, \ k \geq 0$ definidos en (3.8). Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que para todo $1 \leq k \leq n$,*

$$\tau_k = T_k, \ \mathcal{A}_k = A_k \ y \ \zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}} \ \forall t \in [0, T_k) \ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{6.7}$$

Entonces

$$\tau_{n+1} = T_{n+1}, \ \mathcal{A}_{n+1} = A_{n+1} \ y \ \zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}} \ \forall t \in [0, T_{n+1}) \ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{6.8}$$

Demostración. Comencemos observando que si $\tau_n = \infty$ el enunciado se sigue directo. Por lo tanto, asumimos $\tau_n < \infty$. En este caso, de (6.7) y el hecho de que la medida $\mathbb{P}$ está concentrada en trayectorias continuas tenemos que

$$\zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}} \ \forall t \in [0, T_n] \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Fijemos $s_n \in [T_n, \tau_{n+1})$. Como

$$\mathcal{A}_n = A_n = \{i \in V : \zeta_{T_n}(i) > 0\},$$

$$\zeta_t(i) > 0 \ \forall i \in A_n, \ \ \forall t \in [T_n, s_n] \ \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

y del Lema 6.1.2,

$$\lambda^{A_n \cup \{i\}}(i) > 0 \ \ \forall i \notin A_n,$$

usando el Teorema 5.0.1 obtenemos

$$\zeta_t \in \dot{\Sigma}_{A_n,0} \ \forall t \in [T_n, s_n] \ \mathbb{P}\text{-c.s.} \tag{6.9}$$

De (6.9) y del Corolario 4.3.10 deducimos que

$$\zeta_t(i) = \zeta_{T_n}(i) - \lambda^{A_n}(i)(t - T_n) \ \forall t \in [T_n, s_n] \ \mathbb{P}\text{-c.s.} \tag{6.10}$$

Como esto vale para todo $s_n \in [T_n, \tau_{n+1})$, de la definición de τ_{n+1} en (6.1) se sigue que

$$\tau_{n+1} = \inf\{t \geq T_n : \prod_{i \in A_n} \left[\zeta_{T_n}(i) - \lambda^{A_n}(i)(t - T_n)\right] = 0\} \ \mathbb{P}\text{-c.s.}, \tag{6.11}$$

la cual coincide con T_{n+1}. De (6.10) y (6.11) se sigue (6.8), como queríamos probar. □

Ahora sí, veamos cómo demostrar el Teorema 3.4.2 y el Teorema 3.4.3.

Demostración del Teorema 3.4.2. Sea $\mathbb{P}$ una solución al $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$ y sea $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ la trayectoria definida en (3.8), la cual satisface que si $\bar{\zeta}_s(i) = 0$ para algún $i \in V$ y $s \geq 0$, entonces $\bar{\zeta}_t(i) = 0$ para todo $t \geq s$.

Es suficiente probar que

$$\zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}} \ \forall t \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

lo que se sigue directamente de la Proposición 6.1.3 y la Proposición 6.1.4 por un argumento inductivo. □

Demostración del Teorema 3.4.3. De las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 sabemos que la sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N \in \mathbb{N}}$ es rígida y todos los puntos límites son soluciones del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala, y por el Teorema de Prohorov (ver Teorema 2.4.7), $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N \in \mathbb{N}}$ es relativamente compacta. Y de la demostración del Teorema 3.4.2 sabemos que el $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$ tiene una única solución, la cual es una medida delta de Dirac absorbente concentrada en la trayectoria definida en (3.8). Esto concluye la demostración. □

6.2 Caracterización de los sitios macroscópicamente llenos

En esta sección probamos la Proposición 3.4.4.

Recordemos que $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu^A}$ son las distribuciones invariantes de los paseos aleatorios con tasas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r^A}$ respectivamente, con

$$\mu^A(i) = \frac{\mu(i)}{\sum\limits_{j \in A} \mu(j)} \;\forall i \in A. \tag{6.12}$$

También recordemos la definición del subconjunto $\mathcal{M}_\mu$ de V dado en (3.7) por

$$\mathcal{M}_\mu = \{i \in V : \mu(i) = \max_{j \in V} \mu(j)\}. \tag{6.13}$$

Observación 6.2.1. *Como $\boldsymbol{\mu^A}$ es la distribución invariante para el proceso con tasas $\boldsymbol{r^A}$, se sigue que para todo $i \in A$,*

$$\sum_{j \in A} \frac{\mu(j)}{\mu(i)} r^A(j,i) = \sum_{j \in A} \frac{\mu^A(j)}{\mu^A(i)} r^A(j,i) = \sum_{j \in A} r^A(i,j). \tag{6.14}$$

Luego, de (6.14) junto con (3.6) tenemos

$$\lambda^A(i) = \sum_{j \in A} r^A(i,j) - \sum_{j \in A} r^A(j,i) = \sum_{j \in A} \Big[\frac{\mu(j)}{\mu(i)} - 1\Big] r^A(j,i). \tag{6.15}$$

Lema 6.2.2. *Sea $i \in \mathcal{M}_\mu$ y sea $A \subseteq V$ tal que $i \in A$. Entonces $\lambda^A(i) \leq 0$. En particular $\lambda(i) \leq 0 \;\forall i \in \mathcal{M}_\mu$.*

Demostración. Sea $i \in \mathcal{M}_\mu$ y $A \subseteq V$ con $i \in A$. Por (6.15) y dado que

$$\frac{\mu(j)}{\mu(i)} \leq 1 \;\forall j \in A,$$

obtenemos

$$\lambda^A(i) = \sum_{j \in A} \Big[\frac{\mu(j)}{\mu(i)} - 1\Big] r^A(j,i) \leq 0.$$

El caso $\lambda(i) \leq 0 \;\forall i \in \mathcal{M}_\mu$ se sigue de elegir $A = V$. □

Lema 6.2.3. *Sea $\emptyset \neq A \subseteq V$ tal que $\lambda^A(i) = 0 \;\forall i \in A$. Entonces*

$$\mu(i) = \mu(j) \;\forall i,j \in A.$$

Demostración. Sea D el subconjunto de A definido por

$$D = \{j \in A : \mu(j) < \max_{k \in A} \mu(k)\}.$$

Es suficiente mostrar que $D = \emptyset$.

Sea $i \in A \setminus D$. De (6.15) tenemos

$$0 = \lambda^A(i) = \sum_{j \in A} \left[\frac{\mu(j)}{\mu(i)} - 1\right] r^A(j,i). \tag{6.16}$$

Dado que

$$\mu(k) = \mu(i) \ \forall k \in A \setminus D \text{ y } \mu(j) < \mu(i) \ \forall j \in D,$$

de (6.16) deducimos que

$$r^A(j,i) = 0 \ \forall j \in D. \tag{6.17}$$

Como (6.17) vale para todo $i \in A \setminus D$ y el proceso con tasas $\boldsymbol{r^A}$ es irreducible, concluimos que $D = \emptyset$, como queruíamos probar. □

Observación 6.2.4. *Notemos que, como* $\sum_{i \in A} \lambda^A(i) = 0$, *la condición*

$$\lambda^A(i) = 0 \ \forall i \in A$$

del Lema 6.2.3 puede ser reemplazada por

$$\lambda^A(i) \leq 0 \ \forall i \in A.$$

Demostración de la Proposición 3.4.4. La primera afirmación del teorema se sigue de (3.9). Veamos la segunda afirmación. Por la observación 6.1.1 tenemos que

$$\{i \in V : \zeta_{\bar{T}}(i) = 0\} \subseteq \bigcup_{0 \leq n < n_0} \{i \in V : \lambda^{A_n}(i) > 0\}.$$

Por lo tanto, el conjunto $A_{n_0} = \{i \in V : \zeta_{\bar{T}}(i) > 0\}$ satisface que

$$\{i \in V : \lambda^A(i) \leq 0 \ \forall A \subseteq V, \ i \in A\} \subseteq A_{n_0}. \tag{6.18}$$

De (6.18) y el Lema 6.2.2 se sigue que

$$\mathcal{M}_\mu \subseteq A_{n_0}. \tag{6.19}$$

Y por el hecho de que $\boldsymbol{\lambda^{A_{n_0}}} = \mathbf{0}$, del Lema 6.2.3 junto con (6.19) obtenemos

$$\mathcal{M}_\mu = A_{n_0},$$

como queríamos probar. □

Capítulo 7

Jackson network generalizada

Es conocido que el ZRP con $\alpha = 0$ coincide con la Jackson network cerrada. En este capítulo abordamos el problema de encontrar un límite fluido para el escalamiento lineal de la Jackson network abierta, tanto para el caso de las tasas de servicio tradicionales, como para una generalización de la misma, en donde las tasas de servicio pueden depender del número de trabajos que hay en dicho servidor en el momento del servicio. Para este último caso, que llamaremos Jackson network con tasas generales, asumiremos que a tiempo inicial todos los servidores se encuentran macroscópicamente ocupados. Para el caso de las tasas tradicionales, esta hipótesis no será necesaria.

Adaptaremos los resultados que obtuvimos sobre el ZRP para probar los resultados sobre la Jackson network. Analizaremos sólo el caso de la Jackson network abierta, ya que el sistema cerrado coincide exactamente con el ZRP con $\alpha = 0$, y como hemos explicado en la Sección 2.5.3, el sistema semi-abierto es un caso particular del sistema cerrado.

Como primera observación, notemos que en el caso en que el sistema sea abierto, el número total de tareas deja de ser constante. Por lo tanto, la masa total del sistema no se conserva. Debido a este hecho, a diferencia de lo que ocurría para el ZRP, ya no será siempre cierto que los servidores que permanecen macroscópicamente ocupados son exactamente aquellos que tienen distribución invariante maximal. Podría ocurrir alguna de las siguientes tres situaciones: que a nivel macroscópico (es decir, pensando en el proceso límite), el sistema se vacíe; que a partir de un momento el sistema quede constante; o que el sistema crezca indefinidamente. Veremos bajo qué condiciones ocurre cada situación.

La demostración, que en gran medida es una adaptación de lo que hemos hecho para el ZRP, está basada en el problema de martingala, y para el caso en que todos los servidores se encuentren macroscópicamente ocupados, no usaremos el Problema de Skorohod (ver Sección 2.5.4). Recordemos que este resultado es el que se usa para estudiar el límite fluido para el escalamiento lineal de la Jackson network tradicional (ver [11], [12], [18]), pero que, en principio, no puede ser adaptado para el caso de tasas generales que dependan del número de tareas. Cabe destacar que no hemos encontrado en la literatura relacionada ningún resultado sobre límite fluido para el escalamiento lineal para el caso de la Jackson network con tasas que dependen del número de tareas.

Notemos que en el ZRP, el espacio de configuraciones

$$\Sigma = \{\zeta \in [0,1]^V : \sum_{i\in V} \zeta(i) = 1\}$$

era compacto. En el caso de la Jackson network abierta, al permitir que al sistema ingrese cualquier cantidad de tareas, perdemos la compacidad. El nuevo espacio de configuraciones (del proceso límte) pasará a ser $[0,\infty)^V$, que no es acotado, lo que va a generar algunas dificultades técnicas adicionales.

Excepto que se indique lo contrario, con Jackson network nos referiremos a Jackson network abierta con tasas generales.

7.1 Definiciones básicas de la Jackson network

Comencemos por presentar toda la notación y los resultados que hemos probado para el caso de la Jackson network.

Sea V un conjunto finito (y también sea V el cardinal de dicho conjunto). Para definir el proceso, vamos a considerar el conjunto V junto con un elemento más, que denotaremos por $*$. Mientras que V representa el conjunto de servidores en nuestro sistema, $*$ representa el "exterior".

Denotamos $V^* = V\cup\{*\}$. Sean $\{r(i,j); i,j \in V^*\}$ las tasas de transición de un paseo aleatorio continuo e irreducible en V^* con $r(i,i) = 0\ \forall i \in V^*$. Y sea $\mu = \{\mu(i); i \in V^*\}$ la única distribución invariante, que satisface que para todo $i \in V^*$, $\mu(i) > 0$ y

$$\sum_{j\in V^*} \mu(i)r(i,j) = \sum_{j\in V^*} \mu(j)r(j,i).$$

Podemos pensar que la Jackson network es un conjunto de V colas que trabajan del siguiente modo: para cada $i \in V$, la i-ésima cola tiene un servicio exponencial de tasa

$$\gamma(i) = \sum_{l\in V^*} r(i,l),$$

y el proceso de llegada de los clientes del exterior a la cola i sigue un proceso de Poisson con parámetro $r(*,i)$ (todos independientes entre sí, e independientes a los tiempos de servicios). Después de ser atendido por la cola i, un cliente va a la cola j con probabilidad

$$p(i,j) = \frac{r(i,j)}{\gamma(i)},$$

y se va del sistema con probabilidad

$$p(i,*) = \frac{r(i,*)}{\gamma(i)}.$$

Equivalentemente, si el servidor i está ocupado, un trabajo va del servidor i al j con tasa $r(i,j)$ (con $r(i,i) = 0$), y se va del sistema con tasa $r(i,*)$. Si el servidor i está vacío, la tasa de salida es 0.

En esta tesis, además de estudiar este proceso, que es la Jackson network con tasas tradicionales, analizaremos un caso más general. Permitiremos que las tasas de servicios dependan del número de clientes que hay en el servidor en el momento del servicio.

Denotamos por

$$\eta = (\eta(i))_{i\in V} \in \mathbb{N}_0^V$$

el número de clientes en cada servidor. Para cada par $i,j \in V$, $i \neq j$, y $\eta \in \mathbb{N}_0^V$ tal que $\eta(i) > 0$, denotamos $\eta^{i,j} \in \mathbb{N}_0^V$ a la configuración obtenida de η cuando un cliente se mueve del servidor i al servidor j:

$$\eta^{i,j}(l) = \begin{cases} \eta(i) - 1 & \text{si} \;\; l = i, \\ \eta(j) + 1 & \text{si} \;\; l = j, \\ \eta(l) & \text{si} \;\; l \in V \setminus \{i,j\}. \end{cases}$$

Además denotamos por $\eta^{i,+}$ y $\eta^{i,-}$, $i \in V$, a las configuraciones en $\mathbb{N}_0^V$ que se obtienen a partir de η cuando un cliente entra al sistema por el servidor i, y cuando sale del sistema desde el servidor i respectivamente:

$$\eta^{i,+}(l) = \begin{cases} \eta(i) + 1 & \text{si } l = i, \\ \eta(l) & \text{si } l \in V \setminus \{i\}, \end{cases} \qquad \eta^{i,-}(l) = \begin{cases} \eta(i) - 1 & \text{si } l = i, \\ \eta(l) & \text{si } l \in V \setminus \{i\}. \end{cases}$$

Consideremos una función $g : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ tal que $g(0) = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} g(n) \in (0,\infty).$$

Sin pérdida de generalidad asumimos que $\lim_{n\to\infty} g(n) = 1$. (En el caso $g(n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ recuperamos la Jackson network tradicional). Al igual que para el ZRP, la demostración es análoga si en vez de haber una única función g, cada sitio tiene asociada una función g_i con

$$g_i(0) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} g_i(n) = c_i \;\; \text{y} \;\; c_i > 0 \; \forall i \in V.$$

Para toda $f : \mathbb{N}_0^V \to \mathbb{R}$ y $\eta \in \mathbb{N}_0^V$ definimos $Lf : \mathbb{N}_0^V \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} Lf(\eta) = & \sum_{i,j \in V} r(i,j) g(\eta(i))[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)] \\ & + \sum_{i \in V} r(i,*) g(\eta(i))[f(\eta^{i,-}) - f(\eta)] \\ & + \sum_{i \in V} r(*,i)[f(\eta^{i,+}) - f(\eta)]. \end{aligned}$$

El operador L es el generador del proceso $\{\eta_t; t \geq 0\}$ con espacio de estados $\mathbb{N}_0^V$, Sea $\{\eta_{tN}; t \geq 0\}$ el proceso acelerado con configuración inicial η_0, $\sum_{i \in V} \eta_0(i) = N$.

Al igual que antes, denotamos $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, pero ahora, como el espacio de configuraciones cambió, llamaremos Σ^* a $\mathbb{R}_+^V$.

Definimos el proceso $\{\zeta_t^N; t \geq 0\}$ como

$$\zeta_t^N(i) = \frac{\eta_{tN}(i)}{N}, \ i \in V.$$

Este proceso es Markoviano, con espacio de estados

$$\Sigma_N^* = \{\zeta \in \mathbb{R}_+^V : N\zeta(j) \in \mathbb{N}_0 \ \forall j \in V\},$$

y su generador $\mathscr{L}_N^*$ actúa en funciones $F : \Sigma_N^* \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$(\mathscr{L}_N^* F)(\zeta) = N \sum_{i,j \in V} r(i,j) g(N\zeta(i))[F(\zeta + \frac{e_j - e_i}{N}) - F(\zeta)] \tag{7.1}$$

$$+ N \sum_{i \in V} r(i,*) g(N\zeta(i))[F(\zeta - \frac{e_i}{N}) - F(\zeta)] \tag{7.2}$$

$$+ N \sum_{i \in V} r(*,i)[F(\zeta + \frac{e_i}{N}) - F(\zeta)], \tag{7.3}$$

para todo $\zeta \in \Sigma_N^*$, con $(e_k)_{k \in V}$ los vectores canónicos.

Sea $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \Sigma_N^*) = \{\omega : \mathbb{R}_+ \to \Sigma_N^*$ trayectorias càdlàg$\}$ con la topología de Skorohod, y sea $\mathbb{P}_\zeta^N$ la medida de probabilidad en el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \Sigma_N^*)$ inducido por $\mathscr{L}_N^*$ comenzado en $\zeta \in \Sigma_N^*$.

Al igual que para el ZRP, queremos encontrar el límite de $\{\zeta_t^N; t \geq 0\}_{N \in \mathbb{N}}$ cuando N tiende a ∞. Asumiremos que la sucesión de configuraciones a tiempo inicial converge a una configuración $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}^* = (0, \infty)^V$. Es decir, asumiremos que a nivel macroscópico, todos los servidores se encuentran ocupados a tiempo inicial.

Observemos que en el ZRP, el número total de partículas se mantiene constante. Por lo tanto, si pensamos que N es el número total de partículas, $\zeta^N(i)$ representa la proporción de partículas en el sitio i, o sea que la sucesión de procesos $\{\zeta_t^N; t \geq 0\}_{N\in\mathbb{N}}$ indexada por N representa cómo evoluciona, bajo el escalamiento lineal, la proporción de partículas que hay en cada sitio. En el caso de la Jackson network abierta, donde el número total de trabajos no se mantiene constante, $\zeta^N(i)$ ya no representa la proporción de trabajos que hay en el servidor i. De todos modos, tomaremos como N a la cantidad inicial de trabajos que hay en el sistema. Por lo tanto, la configuración límite a tiempo inicial ζ_0 pertenece a

$$\dot{\Sigma} = \{\zeta \in (0,\infty)^V : \sum_{i\in V} \zeta(i) = 1\}.$$

7.2 Construcción del operador del proceso límite

Comencemos esta sección reescribiendo para la Jackson network las definiciones que hemos dado en el caso del ZRP.

Sea L^{RW_*} el generador del paseo aleatorio irreducible en V^* con tasas

$$\{r(i,j); i,j \in V^*\}$$

definido por

$$L^{RW_*} f(i) = \sum_{j\in V^*} r(i,j)\big(f(j) - f(i)\big) \tag{7.4}$$

para toda $f : V^* \to \mathbb{R}$, con $r(i,i) = 0$ $\forall i \in V^*$. Para todo $i \in V^*$ sea

$$\lambda(i) = \sum_{j\in V^*} [r(i,j) - r(j,i)]. \tag{7.5}$$

Consideremos los siguientes vectores en $\mathbb{R}^V$:

$$v_i^* = \sum_{j\in V} r(i,j)e_j - \sum_{j\in V^*} r(i,j)e_i \;\; \forall i \in V \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda(i))_{i\in V}.$$

Notar que en la definición de v_i^*, la primer sumatoria es sobre el conjunto V, mientras que la segunda es sobre V^*. (Recordemos que $\sum_{j\in V^*} r(i,j)$ representa la tasa con la que una tarea sale del servidor i). Observemos también que $\sum_{i\in V^*} \lambda(i) = 0$.

Al igual que antes, sea $\partial_i F$ la derivada parcial de F respecto a ζ_i, y sea

$$\mathcal{D}_i = \{F \in \mathcal{C}^2(\Sigma^*) : \; \mathbf{1}_{\{\zeta(i)=0\}} \langle v_i^*, \nabla F(\zeta)\rangle = 0\}.$$

Para cada subconjunto A de V denotamos

$$\mathcal{D}_A = \bigcap_{i\in A} \mathcal{D}_i,$$

con $\mathcal{D}_\emptyset = \mathcal{C}^2(\Sigma^*)$.

Como ahora el dominio no es compacto, nos restringiremos al conjunto de funciones que tienen soporte compacto. Es por eso que definimos

$$\mathcal{D}_A^* = \{F \in \mathcal{D}_A : F \text{ tiene soporte compacto}\},\ A \subseteq V.$$

Luego, el dominio de funciones en el que actuará el operador $\mathscr{L}^*$ será $\mathcal{D}_V^*$. El operador $\mathscr{L}^*$ lo definimos del siguiente modo:

$$(\mathscr{L}^* F)(\zeta) = -\langle \boldsymbol{\lambda}, \nabla F(\zeta)\rangle = -\sum_{j\in V} \lambda(j)\partial_j F(\zeta),\ \zeta \in \Sigma^*.$$

Definición 7.2.1. *Decimos que una medida $\mathbb{P}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma^*)$ es solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala si para toda $F \in \mathcal{D}_V^*$,*

$$F(\zeta_t) - F(\zeta_0) - \int_0^t (\mathscr{L}^* F)(\zeta_s)ds$$

es una $\mathbb{P}$-martingala con respecto a la filtración natural $\mathcal{F}_t = \sigma(\zeta_s : s \leq t),\ t \geq 0$.

Definición 7.2.2. *Decimos que una distribución $\mathbb{P}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma^*)$ es absorbente si vale que para todo $0 \leq s < t$,*

$$\{i \in V : \zeta_s(i) = 0\} \subseteq \{i \in V : \zeta_t(i) = 0\}\ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Si $\mathbb{P}$ es una medida de Dirac concentrada en la trayectoria $\boldsymbol{\zeta}_.$, decimos que $\mathbb{P}$ es absorbente si la trayectoria $\boldsymbol{\zeta}_.$ satisface que para todo $0 \leq s < t$ y para todo $i \in V$, $\boldsymbol{\zeta_s}(i) = 0$ implica $\boldsymbol{\zeta_t}(i) = 0$.

7.3 Proceso traza

Al igual que para el ZRP, el proceso traza será clave en la descripción del proceso límite. De ahora en adelante denotamos con A un subconjunto no vacío de V.

Para cada A, vamos a considerar el proceso traza asociado al paseo aleatorio en V^* con tasas $\{r(i,j); i,j \in V^*\}$ sobre el conjunto $A^* = A \cup \{*\}$. Las tasas de este nuevo proceso son las siguientes:

$$r^{A^*}(i,j) = \begin{cases} \sum_{k\in V^*} r(i,k)h_j^{A^*}(k) & \text{si} \quad i \neq j,\ i,j \in A^*, \\ 0 & \text{si} \quad i = j,\ i,j \in A^*, \end{cases} \tag{7.6}$$

donde, al igual que antes, para cada $i \in A^*$ y $j \in V^*$,

$$h_i^{A^*}(j) = \mathbb{P}_j^{RW_*}(T_{A^*} = T_i). \tag{7.7}$$

En (7.7), T_{A^*} y T_i son los hitting times en A^* y en $\{i\}$ respectivamente para el paseo aleatorio con generador L^{RW_*} definido en (7.4), y $\mathbb{P}_j^{RW_*}$ se refiere a la medida de probabilidad en el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, V^*)$ comenzado en $\{j\}$.

Para cada $i \in A$ consideramos

$$\lambda^{A^*}(i) = \sum_{j \in A^*} r^{A^*}(i,j) - \sum_{j \in A^*} r^{A^*}(j,i) \tag{7.8}$$

y $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{A^*}} = (\lambda^{A^*}(i))_{i \in A}$. Notar que $\lambda^{V^*}(i) = \lambda(i)\ \forall i \in V$.

Para cada A subconjunto no vacío de V, sea $\Sigma_A^* = \mathbb{R}_+^A$ y sea $\zeta^A \in \Sigma_A^*$ definida por

$$\zeta^A(i) = \sum_{j \in V} \zeta(j) h_i^{A^*}(j) = \zeta(i) + \sum_{j \in V \setminus A} \zeta(j) h_i^{A^*}(j), \quad i \in A. \tag{7.9}$$

Usando al proceso traza definimos los operadores $\mathscr{L}_A^*$ sobre las funciones $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma_A^*)$ como

$$(\mathscr{L}_A^* f)(\zeta) = -\langle \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{A^*}}, \nabla f(\zeta) \rangle = -\sum_{j \in A} \lambda^{A^*}(j) \partial_j f(\zeta),\ \zeta \in \Sigma_A^*.$$

7.4 Resultados obtenidos para la Jackson network

Al igual que lo hemos hecho para el ZRP, probaremos que el límite de la Jackson network reescalada de forma lineal es determinístico. Veremos a continuación una descripción precisa de esa trayectoria.

Notemos que si bien los servidores en V interactúan con el exterior $*$, ya que pueden ingresan o salir tareas, queremos estudiar lo que ocurre dentro del sistema, es decir, en V. Es por eso que daremos una descripción del proceso límite $(\zeta_t(i))_{t \geq 0}$ para cada $i \in V$. Ahora los "drifts" que van a determinar la evolución de la trayectoria límite son los λ^{A^*}, que son las constantes asociadas al proceso traza sobre los conjuntos $A^* = A \cup \{*\}$, con $A \subseteq V$. (Recordemos que $\lambda(i) = \lambda^{V^*}(i)$, y que $\sum_{i \in V} \lambda(i) = -\lambda(*)$).

Al inicio comenzamos con $\zeta_0(i) > 0\ \forall i \in V$. Es decir, a tiempo inicial todos los servidores se encuentran macroscópicamente ocupados. Luego, ζ_t se empieza a mover linealmente de acuerdo al vector $\boldsymbol{\lambda}$ hasta que alguno de los servidores se vacía; es decir, para cualquier servidor $i \in V$ tendremos que

$$\zeta_t(i) = \zeta_0(i) - \lambda(i)t$$

hasta el tiempo

$$\begin{aligned} T_1 &= \min_{i \in V : \lambda(i) > 0} \frac{\zeta_0(i)}{\lambda(i)} \\ &= \inf\{t > 0 : \zeta_0(i) - \lambda(i)t = 0 \text{ para algún } i \in V\} \end{aligned}$$

si $\lambda(i) > 0$ para algún $i \in V$.

En el caso en que no haya ningún $i \in V$ con $\lambda(i) > 0$, a T_1 lo definimos como ∞ (recordemos que estamos usando que $\inf \emptyset = \infty$), y tendremos que para todo $i \in V$ y para todo $t \geq 0$,

$$\zeta_t(i) = \zeta_0(i) - \lambda(i)t.$$

Notemos que cuando $T_1 = \infty$ hay dos comportamientos diferentes. Si $\lambda(i) = 0 \; \forall \; i \in V$, entonces la trayectoria quedará constantemente igual a ζ_0, con lo cual podemos pensar que el sistema entra en equilibrio. Y si $\lambda(i) < 0$ para algún $i \in V$, tendremos por lo menos un servidor que crecerá indefinidamente (de forma lineal).

Ahora asumimos $T_1 < \infty$ y llamamos

$$A_1 = \{i \in V : \zeta_{T_1}(i) > 0\}.$$

A partir de T_1, en los servidores de A_1 el sistema evoluciona de forma lineal siguiendo las tasas $\lambda^{A_1^*}(i)$ con $i \in A_1$, hasta la primera vez que alguno de los servidores en A_1 se vacía; mientras que los servidores en $V \setminus A_1$ permanecerán vacíos por siempre. Más específicamente, la trayectoria a partir de T_1 será igual a 0 en $V \setminus A_1$, y en A_1 será igual a

$$\zeta_t(i) = \zeta_{T_1}(i) - \lambda^{A_1^*}(i)(t - T_1)$$

hasta el tiempo

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + \min_{i \in A_1 : \lambda^{A_1^*}(i) > 0} \frac{\zeta_{T_1}(i)}{\lambda^{A_1^*}(i)} \\ &= \inf\{t > T_1 : \zeta_{T_1}(i) - \lambda^{A_1^*}(i)(t - T_1) = 0 \text{ para algún } i \in A_1\}. \end{aligned}$$

el cual lo definimos como ∞ si $\lambda^{A_1^*}(i) \leq 0 \; \forall i \in A_1$.

Notemos que, al igual que lo que ocurría con T_1, si $T_2 = \infty$ hay dos comportamientos posibles: que el sistema se "detenga" y quede constantemente igual a $\zeta_{T_1}(i)$, o que crezca indefinidamente, de forma lineal, en alguno de los sitios de A_1.

Este comportamiento, de ser absorbido en la frontera y moverse acorde al vector $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{A^*}}$ con A los servidores ocupados a cada momento, se repite hasta la primera vez que el conjunto A satisface $\lambda^{A^*}(i) \leq 0 \; \forall i \in A$ (o hasta que el conjunto de los servidores ocupados sea el conjunto vacío). Después de este tiempo, denotado por T, la trayectoria será igual a

$$\zeta_t(i) = \zeta_T(i) - \lambda^{A^*}(i)(t - T)$$

en los servidores $i \in A$ y será 0 en los servidores $i \in V \setminus A$.

En particular, a partir del tiempo T_1 la trayectoria permanecerá constante en el caso en que $\lambda^{A^*}(i) = 0 \; \forall i \in A$ o en el que $A = \emptyset$, mientras que crecerá indefinidamente en al menos un sitio de A si es que $\lambda^{A^*}(i) < 0$ para algún $i \in A$.

Procedemos ahora a construir de forma recursiva la trayectoria descripta, la cual es determinística.

Sea $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}^*$. Sean $T_0 = 0,\ A_0 = V$, y dados $T_n,\ A_n$, definimos

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + \min\limits_{i \in A_n : \lambda^{A_n^*}(i) > 0} \frac{\zeta_{T_n}(i)}{\lambda^{A_n^*}(i)} & \text{si } \lambda^{A_n^*}(i) > 0 \text{ para algún } i \in A_n, \\ \infty & \text{si } \lambda^{A_n^*}(i) \leq 0\ \forall i \in A_n \text{ o } A_n = \emptyset, \end{cases}$$
$$\text{si } {\scriptstyle T_n < \infty \text{ y } T_n \leq t < T_{n+1}},\ \zeta_t(i) = \begin{cases} \zeta_{T_n}(i) - \lambda^{A_n^*}(i)(t - T_n) & \text{si } i \in A_n, \\ 0 & \text{si } i \in V \setminus A_n, \end{cases} \tag{7.10}$$
$$A_{n+1} = \begin{cases} \{i \in A_n : \zeta_{T_{n+1}}(i) > 0\} & \text{si } T_{n+1} < \infty, \\ A_n & \text{si } T_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

Además definimos

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n < \infty\} \ \text{ y } \ T = T_{n_0}.$$

Denotamos $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ a la trayectoria definida en (7.10). Notemos que esta trayectoria es continua, sólo depende de $\boldsymbol{r}$ y ζ_0, y satisface que si $\bar{\zeta}_s(i) = 0$ para algún $i \in V$ y $s \geq 0$, entonces $\bar{\zeta}_t(i) = 0$ para todo $t \geq s$. Además, $0 \leq n_0 \leq V$.

Presentamos, a continuación, un resultado análogo al Teorema 3.4.3.

Teorema 7.4.1. *Sea $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ (con $\zeta_N \in \Sigma_N^*\ \forall N \in \mathbb{N}$), una sucesión convergente a algún $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$. Entonces, la sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a la medida de Dirac absorbente concentrada en la trayectoria determinística $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ definida en (7.10).*

En otras palabras, el teorema anterior nos dice que el límite fluido de la Jackson network reescalada de forma lineal converge débilmente a la trayectoria continua $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ descripta en (7.10), la cual es determinística.

Notemos que, a diferencia del ZRP en donde la trayectoria límite a partir de un momento se volvía constante, ahora tenemos diferentes alternativas. Existe algún tiempo T (determinísico) tal que a partir de ese tiempo:

- el sistema se vacía;
- el sistema llega a un equilibrio, permaneciendo constante;
- el sistema crece indefinidamente.

La siguiente proposición especifica en qué caso ocurre cada comportamiento.

Proposición 7.4.2. *Asumimos $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}^*$, y sea $\mathcal{M}_\mu$ el conjunto de los sitios en V^* tales que la distribución invariante asociada al paseo aleatorio con tasas $\{r(i,j): \ i,j \in V^*\}$, es maximal, es decir,*

$$\mathcal{M}_\mu = \{j \in V^* : \mu(j) = \max_{i \in V^*} \mu(i)\}.$$

Entonces existe un tiempo determinístico $T \geq 0$, el cual sólo depende de la configuración inicial ζ_0 y de las tasas $\{r(i,j): \ i,j \in V^*\}$, tal que:

i. si $\{*\} = \mathcal{M}_\mu$, entonces $\zeta_t(i) = 0$ $\forall i \in V$, $\forall t \geq T$ (el sistema se vacía);

ii. si $\{*\} \subsetneq \mathcal{M}_\mu$, entonces $\zeta_t(i) = \zeta_T(i)$ $\forall i \in V$, $\forall t \geq T$ (el sistema llega al equilibrio);

iii. si $* \notin \mathcal{M}_\mu$, entonces existe $i \in V$ y existe $C < 0$ tal que

$$\zeta_t(i) = \zeta_T(i) - C(t - T) \ \forall t \geq T$$

(el sistema crece indefinidamente).

7.5 Convergencia y rigidez - Jackson network

En esta sección presentamos los resultados análogos a las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 para el caso de la Jackson network (abierta).

Proposición 7.5.1. *Sea $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\zeta_0 \in \Sigma^*$. La sucesión de medidas $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ es rígida (tight). Más aún, todo punto límite está concentrado en trayectorias continuas.*

Proposición 7.5.2. *Sea $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\zeta_0 \in \Sigma^*$ y sea $\mathbb{P}$ un punto límite de $(\mathbb{P}_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$. Entonces la medida $\mathbb{P}$ es una solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}^*_V)$-problema de martingala.*

Demostración de 7.5.1. Por el Teorema 1.3 y la Observación 1.5 en [15] (que hemos enunciado en la Seccion 2.4.2), como $\Sigma^*_N \subseteq \Sigma^*$ $\forall N \in \mathbb{N}$, para probar que la sucesión $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$ es rígida y todo punto límite está concentrado en trayectorias continuas basta ver que para todo $\varepsilon > 0$, $T > 0$ y $t \in [0,T]$,

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}^N_{\zeta_N}\Big[\sup_{\substack{s,t<T,\\ |s-t|<\delta}} \|\zeta_t - \zeta_s\| > \varepsilon\Big] = 0 \tag{7.11}$$

y

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^N_{\zeta_N}[\zeta_t(j) > C_{\epsilon,t} \text{ para algún } j \in V] < \epsilon \tag{7.12}$$

para alguna constante positiva $C_{\epsilon,t}$. Notemos que en el ZRP, la condición (7.12) no hacía falta analizarla, ya que en ese caso el espacio de configuraciones estaba contenido dentro del compacto $[0,1]^V$.

Comencemos probando (7.11). Por la fórmula de Dynkin aplicada al generador $\mathscr{L}_N^*$,

$$\zeta_t^N(j) = \zeta_0^N(j) + \int_0^t \mathscr{L}_N^*(\zeta_r(j))dr + M_t^N(j) \quad \forall t > 0,\ j \in V, \tag{7.13}$$

con $(M_t^N(j))_{t\geq 0}$ una martingala. Luego, la probabilidad que aparece en (7.11) está acotada superiormente por

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in V} \mathbb{P}_{\zeta_N}^N \Big[\sup_{\substack{s,t<T,\\ |s-t|<\delta}} \Big| \int_s^t \mathscr{L}_N^*(\zeta_r(j))dr \Big| \geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|V|}} \Big] \\ &+ \sum_{j\in V} \mathbb{P}_{\zeta_N}^N \Big[\sup_{0\leq r\leq T} |M_r^N(j)| \geq \frac{\varepsilon}{4\sqrt{|V|}} \Big]. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Por un lado, como

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_N^*(\zeta(j)) =& \sum_{i\in V} \big[g(N\zeta(i)) r(i,j) - g(N\zeta(j)) r(j,i) \big] \\ &+ [r(*,j) - g(N\zeta(i)) r(j,*)] \\ \leq& C \end{aligned} \tag{7.15}$$

para alguna $C > 0$ y $|t-s| \leq \delta$, el primer término en (7.14) converge a 0 si $\delta \to 0$.

Por otro lado, por las desigualdades de Doob y Markov, el segundo término está acotado por

$$\frac{16|V|}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\zeta_N}^N \big[(M_T^N(j))^2 \big] = \frac{16|V|}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\zeta_N}^N \Big[\int_0^T [\mathscr{L}_{N(k)}^*(\zeta_r(j))^2 - 2\zeta_r(j) \mathscr{L}_{N(k)}^*(\zeta_r(j))] dr \Big]. \tag{7.16}$$

Para este nuevo generador $\mathscr{L}_N^*$, al igual que para $\mathscr{L}_N$ en el caso del ZRP, sigue valiendo que

$$[\mathscr{L}_N^*(\zeta(j))^2 - 2\zeta(j)\mathscr{L}_N^*(\zeta(j))] \leq \frac{C_1}{N} \ \forall \zeta \in \Sigma_N^*, \tag{7.17}$$

para alguna constante positiva C_1. Por lo tanto, el segundo término en (7.14) converge a 0 cuando $N \to \infty$, lo que implica (7.11).

Ahora probemos (7.12). Por la desigualdad de Markov, para $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{\zeta_N}^N [\zeta_t(j) > C_{\epsilon,t} \text{ para algún } j \in V] \leq \frac{1}{C_{\epsilon,t}} \sum_{j\in V} \mathbb{E}_{\zeta_N}^N [\zeta_t(j)]. \tag{7.18}$$

Como $\mathbb{E}^N_{\zeta_N}[M^N_t(j)] = 0$ por ser $(M^N_t(j))_{t\geq 0}$ una martingala con $M^N_0(j) = 0$, de (7.13), (7.15) y del hecho de que

$$\sum_{j\in V} \zeta^N_0(j) = 1$$

tenemos que

$$\sum_{j\in V} \mathbb{E}^N_{\zeta_N}[\zeta_t(j)] \leq 1 + t|V|C. \tag{7.19}$$

Eligiendo

$$C_{\epsilon,t} = \frac{1+t|V|C}{\epsilon},$$

de (7.18) y (7.19) se sigue (7.12), lo que concluye la demostración. □

Pasemos ahora a la demostración de la Proposición 7.5.2.

Al igual que antes, sea $\tilde{g} : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ la función definida como $\tilde{g}(0) = 0$ y $\tilde{g}(k) = g(k) - 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Lema 7.5.3. *Si $F \in \mathcal{D}^*_V$,*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{\zeta\in\Sigma^*_N} \Big|(\mathscr{L}^*_N F)(\zeta) - (\mathscr{L}^* F)(\zeta) - \sum_{j\in V} \tilde{g}(N\zeta(j))\langle v^*_j, \nabla F(\zeta)\rangle\Big| = 0.$$

Demostración. Sea $F \in \mathcal{D}^*_V$. Por el Teorema de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}^*_N F)(\zeta) &\simeq \sum_{j,k\in V} g(N\zeta(j)) r(j,k)\langle \nabla F(\zeta), e_k - e_j\rangle \\ &\quad + \sum_{j\in V}[r(*,j) - g(N\zeta(j))r(j,*)]\langle \nabla F(\zeta), e_j\rangle \\ &= \sum_{j\in V} g(N\zeta(j))\Big\langle \underbrace{\sum_{k\in V} r(j,k)e_k - \sum_{k\in V*} r(j,k)e_j}_{v^*_j}, \nabla F(\zeta)\Big\rangle + \sum_{j\in V} r(*,j)\partial_j F(\zeta) \\ &= \sum_{j\in V}\langle g(N\zeta(j))v^*_j, \nabla F(\zeta)\rangle + \sum_{j\in V} r(*,j)\partial_j F(\zeta) \end{aligned} \tag{7.20}$$

más un término $\tilde{R}^N(\zeta)$ que es el error de Taylor.

Por definición de $\mathcal{D}^*_V$,

$$\mathbf{1}_{\{\zeta(j)=0\}}\langle v^*_j, \nabla F(\zeta)\rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$\langle \mathbf{1}_{\{\zeta(j)>0\}} v^*_j, \nabla F(\zeta)\rangle = \langle v^*_j, \nabla F(\zeta)\rangle. \tag{7.21}$$

De (7.20) y (7.21) se sigue

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{L}_N^* F)(\zeta) &= \sum_{j\in V}\langle (1+\tilde g(N\zeta(j))\mathbf{1}_{\{\zeta(j)>0\}} v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle + \sum_{j\in V} r(*,j)\partial_j F(\zeta) + \tilde R^N \\
&= \langle \sum_{j\in V} v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle + \sum_{j\in V}\langle \tilde g(N\zeta(j))\mathbf{1}_{\{\zeta(j)>0\}} v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle \\
&\quad + \sum_{j\in V} r(*,j)\partial_j F(\zeta) + \tilde R^N \\
&= \mathscr{L}^* F(\zeta) + \sum_{j\in V} \tilde g(N\zeta(j))\langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle + \tilde R^N,
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad usamos

$$
\mathscr{L}^* F(\zeta) = \langle \sum_{j\in V} v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle + \sum_{j\in V} r(*,j)\partial_j F(\zeta).
$$

La afirmación se sigue del hecho de que $\lim_{N\to\infty}\max_{\zeta\in\Sigma_N^*} \tilde R^N = 0$. □

Lema 7.5.4. *Si $F \in \mathcal{D}_V^*$,*

$$
\lim_{N\to\infty}\max_{\zeta\in\Sigma_N^*} \Big| \sum_{j\in V} \tilde g(N\zeta(j))\langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle \Big| = 0. \tag{7.22}
$$

Demostración. Sea $F \in \mathcal{D}_V^*$ y $j \in V$. Como $\Sigma_N^* \subseteq \Sigma^*\ \forall\ N \in \mathbb{N}$ y ∇F es de soporte compacto (ya que F lo es), de la continuidad uniforme de $\zeta \in \Sigma^* \to \langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle$ y de que

$$
\langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle = 0 \text{ si } \zeta(j) = 0,
$$

se sigue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que no depende de N) tal que

$$
|\langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle| < \varepsilon \text{ si } \zeta(j) < \delta.
$$

Por otro lado, usando que $\lim_{n\to\infty} \tilde g(n) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe N_0 tal que para todo $\kappa \geq \delta$.

$$
|\tilde g(N\kappa)| < \varepsilon \quad \forall N \geq N_0.
$$

Además $\tilde g$ es acotada por una constante $C_3 \geq 0$, y usando nuevamente que ∇F es de soporte compacto, la función $\zeta \in \Sigma^* \to \langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle$ es acotada por alguna constante positiva C_2, la cual no depende de N.

Por lo tanto, para todo $N \geq N_0$,

$$
\left| \tilde g(N\zeta(j))\langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle \mathbf{1}_{\{\zeta(j)>\delta\}} \right| \leq \varepsilon C_2
$$

y

$$\left|\tilde{g}(N\zeta(j))\langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle \mathbf{1}_{\{0<\zeta(j)<\delta\}}\right| \leq \varepsilon C_3.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario y las cotas C_2 y C_3 no dependen de N, obtenemos (7.22). □

Corolario 7.5.5. *Si $F \in \mathcal{D}_V^*$,*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{\zeta\in\Sigma_N^*} \left|(\mathscr{L}_N^* F)(\zeta) - (\mathscr{L}^* F)(\zeta)\right| = 0.$$

Demostración. Se sigue del Lema 7.5.3 y Lema 7.5.4. □

Demostración de la Proposición 7.5.2. La demostración es análoga a la demostración de la Proposición 3.2.3, reemplazando el resultado probado en el Corolario 4.2.3 por el del Corolario 7.5.5. □

7.6 Cálculos auxiliares - Jackson network

7.6.1 Algunas propiedades de λ^{A*}

Extendamos los resultados probados en los Lemas 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4 a las constantes λ^{A^*}. Las demostraciones son completamente análogas, reemplazando los conjuntos A, $\tilde{A}$ y V por A^*, $\tilde{A}^*$ y V^* respectivamente, y usando que

$$h_i^{A^*}(*) = 0 \ \forall i \in A \subseteq V.$$

Recordemos que

$$\lambda^{A^*}(i) = \sum_{j\in A^*} r^{A^*}(i,j) - \sum_{j\in A^*} r^{A^*}(j,i), \ i \in A \subseteq V$$

y en particular,

$$\lambda^{V^*}(i) = \lambda(i), \ i \in V.$$

Lema 7.6.1. *Sea $i \in A \subseteq V$. Entonces*

$$\lambda^{A^*}(i) = \sum_{k\in V} \lambda(k) h_i^{A^*}(k) = \lambda(i) + \sum_{k\in V\setminus A} \mathbb{P}_k^{RW_*}(T_{A^*} = T_i)\lambda(k).$$

Lema 7.6.2. *Sea $i \in A \subseteq \tilde{A} \subseteq V$. Entonces*

$$\lambda^{A^*}(i) = \sum_{k\in\tilde{A}} \lambda^{\tilde{A}^*}(k) h_i^{A^*}(k) = \lambda^{\tilde{A}^*}(i) + \sum_{k\in\tilde{A}\setminus A} \mathbb{P}_k^{RW_*}(T_{A^*} = T_i)\lambda^{\tilde{A}^*}(k). \tag{7.23}$$

Proposición 7.6.3. *Sea $A \subseteq V$ tal que*

$$\lambda(j) > 0 \ \forall j \in V \setminus A. \tag{7.24}$$

Entonces $\lambda^{A^* \cup \{j\}}(j) > 0 \ \forall j \in V \setminus A$.

Lema 7.6.4. *Sea $A \subsetneq \tilde{A} \subsetneq V$ tal que*

$$\lambda^{\tilde{A}^* \cup \{l\}}(l) > 0 \ \forall l \in V \setminus \tilde{A} \ y \ \lambda^{\tilde{A}^*}(l) > 0 \ \forall l \in \tilde{A} \setminus A. \tag{7.25}$$

Entonces $\lambda^{A^* \cup \{j\}}(j) > 0 \ \forall j \in V \setminus A$.

7.6.2 Funciones armónicas y martingalas

Presentemos ahora los resultados análogos a los Lemas 4.3.5 y 4.3.6. Al igual que en la sección anterior, denotemos con A a un subconjunto no vacío de V. Recordemos que $\zeta^A \in \Sigma_A^*$ es la configuración definida en (7.9) por

$$\zeta^A(i) = \sum_{j \in V} \zeta(j) h_i^{A^*}(j) \ \forall i \in A,$$

con $h_i^{A^*}(j) = \mathbb{P}_j^{RW_*}(T_{A^*} = T_i)$. Denotemos por ζ_A la proyección de $\zeta \in \Sigma^*$ en Σ_A^*, es decir $\zeta_A(i) = \zeta(i) \ \forall i \in A$, y definimos $\dot{\Sigma}_{A,0}^* = \{\zeta \in \mathbb{R}_+^V : \zeta(j) > 0 \ \forall j \in A, \ \zeta(j) = 0 \ \forall j \notin A\}$.

Lema 7.6.5. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala y sea $F \in \mathcal{D}_V^*$. Entonces*

$$F(\zeta_t) - F(\zeta_0) - \int_0^t (\mathscr{L}^* F)(\zeta_s) ds = 0, \ t \geq 0, \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Demostración. Dado que, si $F \in \mathcal{D}_V^*$ entonces $F^2 \in \mathcal{D}_V^*$, y el *carré du champ*

$$\Gamma(F) = \mathscr{L}^*(F^2) - 2F\mathscr{L}^*(F)$$

sigue siendo igual a 0, la demostración es igual a la del Lema 4.3.5. □

Lema 7.6.6. *Dada $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma_A^*)$, sea $F : \Sigma^* \to \mathbb{R}$ definida por $F(\zeta) = f(\zeta^A)$. Entonces $F \in \mathcal{D}_B$ con $B = V \setminus A$ y $\mathscr{L}^* F(\zeta) = \mathscr{L}_A^* f(\zeta^A)$, donde*

$$\mathscr{L}^* F(\zeta) = -\sum_{j \in V} \lambda(j) \partial_j F(\zeta) \quad y \quad \mathscr{L}_A^* f(\zeta^A) = -\sum_{i \in A} \lambda^{A^*}(i) \partial_i f(\zeta^A).$$

Demostración. Fijemos $j \in B$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle v_j^*, \nabla F(\zeta)\rangle &= \sum_{k\in V} r(j,k) \sum_{i\in A} h_i^{A^*}(k)\partial_i f(\zeta^A) - \sum_{k\in V^*} r(j,k) \sum_{i\in A} h_i^{A^*}(j)\partial_i f(\zeta^A) \\
&= \sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A)\Big[\sum_{k\in V} r(j,k)h_i^{A^*}(k) - \sum_{k\in V^*} r(j,k)h_i^{A^*}(j)\Big] \\
&= \sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) \sum_{k\in V^*} r(j,k)\Big[h_i^{A^*}(k) - h_i^{A^*}(j)\Big] \\
&= \sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) L^{RW_*}(h_i^{A^*})(j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde en los dos últimos pasos usamos que $h_i^{A^*}(*) = 0 \ \forall i \in A$ y que

$$L^{RW_*}(h_i^{A^*})(j) = 0 \quad \forall i \in A, \ \forall j \notin A^*$$

respectivamente. Por lo tanto, $F \in \mathcal{D}_B$.

Mostremos que $\mathscr{L}^* F(\zeta) = \mathscr{L}_A^* f(\zeta^A)$. Por el Lema 7.6.1,

$$\lambda^{A^*}(i) = \sum_{j\in V} \lambda(j) h_i^{A^*}(j).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^* F(\zeta) &= -\sum_{j\in V} \lambda(j)\partial_j F(\zeta) = -\sum_{j\in V} \lambda(j) \sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) h_i^{A^*}(j) \\
&= -\sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A) \sum_{j\in V} \lambda(j) h_i^{A^*}(j) = -\sum_{i\in A} \partial_i f(\zeta^A)\lambda^{A^*}(i) \\
&= \mathscr{L}_A^* f(\zeta^A),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

7.6.3 Extensión de funciones al dominio apropiado

En esta sección nuestro objetivo es, dada una función en $\mathcal{D}_B$ con $B \subsetneq V$, tratar de encontrar otra función que esté en $\mathcal{D}_V^*$ que respete ciertas propiedades. Al no ser Σ^* compacto, no es posible aplicar la misma demostración que usamos en el Lema 4.3.7 en el caso del ZRP (la cual se basaba fuertemente en la demostración del Lema 4.4 en [5]). Necesitamos encontrar funciones en $\mathcal{D}_V^*$, y no sólo en $\mathcal{D}_V$.

Por otro lado, la técnica de transformar directamente a una función en una de soporte compacto usando "mollifiers" por sí sola no nos va a servir, ya que si bien eso solucionaría el problema de la compacidad del soporte, generaría un nuevo problema, que es que la función deja de estar en $\mathcal{D}_B$.

Recordemos que, para cada $i \in A \subseteq V$,

$$\mathcal{D}_i = \{F \in \mathcal{C}^2(\Sigma^*) : \ \mathbf{1}_{\{\zeta(i)=0\}} \langle v_i^*, \nabla F(\zeta)\rangle = 0\}, \quad \mathcal{D}_A = \bigcap_{i\in A} \mathcal{D}_i.$$
$$\text{y} \quad \mathcal{D}_A^* = \{F \in \mathcal{D}_A : \ F \text{ tiene soporte compacto}\}.$$

Además, para cada $M > \varepsilon > 0$, consideramos los siguientes conjuntos de configuraciones:

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{\zeta \in \Sigma^* : \min_{i\in A} \zeta(i) \geq \varepsilon\};$$
$$\Lambda^M = \{\zeta \in \Sigma^* : \max_{i\in V} \zeta(i) \leq M\};$$
$$\Lambda_\varepsilon^M(A) = \Lambda_\varepsilon(A) \cap \Lambda^M.$$

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 7.6.7. *Sea A un subconjunto no vacío de V, $B = V \setminus A$. Sea $F \in \mathcal{D}_B$. Entonces, para todo $M > \varepsilon > 0$, existe una función $H \in \mathcal{D}_V^*$ tal que*

$$F(\zeta) = H(\zeta) \ y \ (\mathscr{L}^* F)(\zeta) = (\mathscr{L}^* H)(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Lambda_\varepsilon^M(A).$$

La demostración de la Proposición 7.6.7 se seguirá de argumentos similares a los utilizados en el Lema 4.4 in [5]. Necesitamos los siguientes resultados.

Lema 7.6.8. *Sea A un subconjunto no vacío de V. Existe una función no negativa, suave, $I_A : \Sigma^* \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{D}_A$, y constantes $0 < c_1 < C_1 < \infty$ tales que para todo $\zeta \in \Sigma^*$,*

$$c_1^2 \|\zeta\|_A^2 \leq I_A(\zeta) \leq C_1^2 \|\zeta\|_A^2, \tag{7.26}$$

donde $\|\zeta\|_A^2 = \sum_{j\in A} \zeta(j)^2$.

Lema 7.6.9. *Dado un subconjunto $\emptyset \subsetneq A \subseteq V$, $B = V \setminus A$ y $\varepsilon > 0$, existe una función $G \in \mathcal{D}_V$ tal que*

$$G(\zeta) = 1 \ \forall \zeta \in \Lambda_\varepsilon(A)$$

y tal que para todo $F \in \mathcal{C}^2(\Sigma^*)$, la función FG pertenece a $\mathcal{D}_A$.

Demostración. La función G que cumple todas las condiciones del enunciado es la función G construida en la demostración del Lema 4.3.7. □

Lema 7.6.10. *Dado un subconjunto $\emptyset \subsetneq A \subseteq V$, $B = V \setminus A$ y $M > 0$, existe una función $T \in \mathcal{D}_B^*$ tal que*

$$T(\zeta) = 1 \ \forall \zeta \in \Lambda^M. \tag{7.27}$$

Demostración. Primero, consideremos una función $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $\Phi(r) = 0$ para $r \leq 0$, y $\Phi(r) = 1$ con $r \geq 3$, y sea $\beta = \frac{4C_1}{c_1}$, con c_1, C_1 las constantes dadas en (7.26). Sea

$$T = \prod_{k \in A} \prod_{\emptyset \subseteq D \subseteq B} \tilde{\phi}_{k,D}(\zeta), \tag{7.28}$$

donde

$$\tilde{\phi}_{k,D}(\zeta) = 1 - \Phi\Big(\frac{4\beta^{2|D|} I_{D \cup \{k\}}}{M^2} - 1\Big). \tag{7.29}$$

Sea $\zeta \in \Sigma^*$ tal que $\zeta(k) \leq \frac{M}{2C_1\beta^{|B|}\sqrt{|V|}}$ $\forall k \in V$. Por el Lema 7.6.8 se sigue que

$$I_{D\cup\{k\}}(\zeta) \leq C_1^2 \|\zeta\|^2_{D \cup \{k\}} \leq C_1^2 \|\zeta\|^2_V \leq \frac{M^2}{4\beta^{2|B|}} \text{ para todo } \emptyset \subseteq D \subseteq B,\ k \in A.$$

Usando que $\beta > 1$ y $\Phi(r) = 0$ para $r \leq 0$ deducimos que $\tilde{\phi}_{k,D}(\zeta) = 1$ para todo $\emptyset \subseteq D \subseteq B,\ k \in A$, lo cual implica $T = 1$ $\forall \zeta \in \Sigma^*$ tal que $\max_{i \in V} \zeta(i) \leq \frac{M}{2C_1\beta^{|B|}\sqrt{|V|}}$. Como M es arbitrario obtenemos (7.27).

Veamos ahora que T tiene soporte compacto. Sea $\zeta \in \Sigma^*$ tal que $\zeta(k) > \frac{M}{c_1}$ para algún $k \in A$. Por el Lema 7.6.8 y el hecho de que $\Phi(r) = 1$ para $r \geq 3$ se sigue $\tilde{\phi}_{k,\emptyset}(\zeta) = 0$, lo cual implica $T = 0$.

Análogamente, sea $\zeta \in \Sigma^*$ tal que $\zeta(j) > \frac{M}{c_1}$ para algún $j \in B$. Fijemos $k \in A$. Por el Lema 7.6.8 y el hecho de que $\beta > 1$ tenemos

$$I_{\{k\}\cup\{j\}}(\zeta)^2 > c_1^2 \|\zeta\|^2_{\{k,j\}} \geq c_1^2 \zeta(j)^2 > M^2.$$

Como $\beta > 1$ y $\Phi(r) = 1$ para $r \geq 3$ se sigue que $\tilde{\phi}_{k,\{j\}}(\zeta) = 0$, lo que implica $T = 0$. Por lo tanto concluimos que T tiene soporte compacto.

Probemos ahora que $T \in \mathcal{D}_B$. Sea $j \in B$ y reescribamos a T como el producto de las funciones T_1 y T_2, donde

$$T_1 = \prod_{k \in A} \prod_{\emptyset \subseteq D \subseteq B : j \in D} \tilde{\phi}_{k,D}(\zeta)$$
$$T_2 = \prod_{k \in A} \prod_{\emptyset \subseteq D \subseteq B : j \notin D} \tilde{\phi}_{k,D}(\zeta).$$

Es claro que si F_1 y F_2 pertenecen a $\mathcal{D}_j$ y $\Xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suave, entonces $F_1 + F_2$, F_1F_2 y $\Xi(F_1)$ pertenece a $\mathcal{D}_j$. Además, si C es un subconjunto de V que contiene a j, del Lema 7.6.8 se sigue que I_C pertence a $\mathcal{D}_j$, de donde se deduce que $T_1 \in \mathcal{D}_j$. Por lo tanto, para probar que T pertenece a $\mathcal{D}_j$ es necesario probar que

$$T_1(\zeta)\big\langle v_j^*, \nabla T_2(\zeta)\big\rangle = 0 \text{ si } \zeta(j) = 0. \tag{7.30}$$

Y para demostrar (7.30) es suficiente ver que para todo $k \in A$ y todo $\emptyset \subseteq D \subseteq B$ tal que $j \notin D$, vale que

$$\tilde{\phi}_{k,D\cup\{j\}}(\zeta)\big\langle v_j^*, \nabla\tilde{\phi}_{k,D}(\zeta)\big\rangle = 0 \text{ si } \zeta(j) = 0. \tag{7.31}$$

Fijemos $k \in A$ y $\emptyset \subseteq D \subseteq B$ tal que $j \notin D$. Usando nuevamente el Lema 7.6.8 deducimos que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{k,D\cup\{j\}}(\zeta) = 0 \ \text{ si } \|\zeta\|_{D\cup\{k,j\}} > \frac{M}{c_1\beta^{|D|+1}}, \\ \tilde{\phi}_{k,D}(\zeta) = 1 \ \text{ si } \|\zeta\|_{D\cup\{k\}} < \frac{M}{2C_1\beta^{|D|}}. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Como $\beta = \frac{4C_1}{c_1}$ y

$$\|\zeta\|_{D\cup\{k,j\}}(\zeta) = \|\zeta\|_{D\cup\{k\}}(\zeta) \ \forall\zeta \in \Sigma^* \text{ con } \zeta(j) = 0,$$

toda configuración $\zeta \in \Sigma^*$ tal que $\zeta(j) = 0$ debe satisfacer alguna de las dos desigualdades de (7.32). De aquí se sigue que si $\zeta \in \Sigma^*$ con $\zeta(j) = 0$, entonces

$$\tilde{\phi}_{k,D\cup\{j\}}(\zeta) = 0 \ \text{ o } \ \nabla\tilde{\phi}_{k,D}(\zeta) \ \text{ si } \zeta(j) = 0,$$

lo que implica (7.31), como queríamos probar. □

Demostración de la Proposición 7.6.7. Dada una función $F \in \mathcal{D}_B$, consideramos la función $H = FGT$, donde G y T son las funciones construidas en el Lema 7.6.9 eligiendo $\frac{\varepsilon}{2}$ y en el Lema 7.6.10 eligiendo $2M$ respectivamente. Mostremos que H satisface todas las propiedades requeridas.

- La función T tiene soporte compacto, entonces H también lo tiene.
- La función G satisface que para todo $L \in \mathcal{C}^2(\Sigma^*)$, la función $GL \in \mathcal{D}_A$. Por lo tanto, $H \in \mathcal{D}_A$.
- Dado que F, G y T pertenecen a $\mathcal{D}_B$, la función H pertenece a D_B.
- Como

  $$G(\zeta) = 1 \ \forall\zeta \in \Lambda_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)$$

  y

  $$T(\zeta) = 1 \ \forall\zeta \in \Lambda^{2M},$$

  se sigue que

  $$H(\zeta) = F(\zeta) \ \forall\zeta \in \Lambda_{\frac{\varepsilon}{2}}^{2M}(A),$$

  y por lo tanto

  $$F(\zeta) = H(\zeta) \text{ y } (\mathscr{L}^*F)(\zeta) = (\mathscr{L}^*H)(\zeta) \ \ \forall\zeta \in \Lambda_{\varepsilon}^{M}(A),$$

como queríamos probar. □

7.6.4 Propiedades de soluciones del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-p.m.

Veamos ahora cómo adaptar el Lema 4.3.9 y el Corolario 4.3.10 para el caso de la Jackson network.

Lema 7.6.11. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala. Sea A un subconjunto no vacío de V y sean $0 \leq t_1 < t_2$ tales que*

$$\zeta_t(i) > 0 \ \forall i \in A, \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Entonces

$$\zeta_t^A(i) = \zeta_{t_1}^A(i) - \lambda^{A^*}(i)(t - t_1) \ \forall i \in A, \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \min_{i \in A} \min_{t \in [t_1, t_2]} \zeta_t(i) \\ \text{y } M &= \max_{i \in V} \max_{t \in [t_1, t_2]} \zeta_t(i). \end{aligned} \tag{7.33}$$

Como $[t_1, t_2]$ es compacto y $t \to \zeta_t(\omega)$ es continua para toda trayectoria $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma^*)$, entonces ε y M son variables aleatorias bien definidas, con $M > \varepsilon > 0$ (si $M = \varepsilon$ elijo $M = 2\varepsilon$). Además, por cómo definimos ε y M tenemos que

$$\zeta_t \in \Lambda_\varepsilon^M(A) \ \ \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{7.34}$$

Fijemos $i \in A$ y consideremos la función $F : \Sigma^* \to \mathbb{R}$ dada por $F(\zeta) = \zeta^A(i)$. Por el Lema 7.6.6,

$$F \in \mathcal{D}_B \text{ y } (\mathscr{L}^* F)(\zeta) = -\lambda^{A^*}(i),$$

con $B = V \setminus A$. Y por el Lema 7.6.7, existe una función $H^{\varepsilon,M} \in \mathcal{D}_V$ tal que

$$H^{\varepsilon,M}(\zeta) = \zeta^A(i) \text{ y } (\mathscr{L}^* H^{\varepsilon,M})(\zeta) = -\lambda^{A^*}(i) \ \ \forall \zeta \in \Lambda_\varepsilon^M(A). \tag{7.35}$$

Como $H^{\varepsilon,M} \in \mathcal{D}_V^*$, del Lema 7.6.5 se sigue que

$$H^{\varepsilon,M}(\zeta_t) - H^{\varepsilon,M}(\zeta_{t_1}) - \int_{t_1}^{t} (\mathscr{L}^* H^{\varepsilon,M})(\zeta_s) ds = 0, \ t \in [t_1, t_2].$$

De la ecuación de arriba junto con (7.34) y (7.35) concluimos que

$$\zeta_t^A(i) = \zeta_{t_1}^A(i) - \lambda^{A^*}(i)(t - t_1) \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

como queríamos probar. $\square$

Corolario 7.6.12. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala. Sea A un subconjunto no vacío de V y sean $0 \le t_1 \le t_2$ tales que $\forall t \in [t_1, t_2]$,*

$$\zeta_t \in \dot{\Sigma}^*_{A,0} = \{\zeta \in \Sigma^* : \zeta(i) > 0 \ \forall i \in A, \ \zeta(j) = 0 \ \forall j \in V \setminus A\} \ \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Entonces

$$\zeta_t(i) = \zeta_{t_1}(i) - \lambda^{A^*}(i)(t - t_1) \ \forall t \in [t_1, t_2] \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Demostración. Se sigue directamente del Lema 7.6.11 y del hecho de que

$$\zeta^A(i) = \zeta(i) \ \forall i \in A, \ \forall \zeta \in \dot{\Sigma}^*_{A,0}. \qquad \square$$

7.7 Absorción - Jackson network

En esta sección enunciaremos los resultados para la Jackson network que son análogos a los resultados del ZRP establecidos en los Capítulos 5 y 6. Dado que las demostraciones son análogas, no las incluiremos en esta sección.

El siguiente resultado es el que establece la unicidad de solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala cuando a tiempo inicial todos los servidores se encuentran macroscópicamente ocupados. Es decir, cuando la configuración inicial ζ_0 satisface que $\zeta_0(i) > 0 \ \forall i \in V$.

Teorema 7.7.1. *Para cada $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}^*$, existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \Sigma^*)$ la cual es solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala y comienza en ζ_0. Además, $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ es una medida absorbente de Dirac.*

La demostración del teorema anterior es análoga a la del Teorema 3.4.2, reemplazando el resultado obtenido en el Teorema 5.0.1 por el del Teorema 7.7.2, que presentamos a continuación.

Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala y sea $t \ge 0$. Usando la notación $\inf \emptyset = \infty$, definimos

$$\begin{aligned} A_t &= \{i \in V : \zeta_t(i) > 0\}, \\ B_t &= V \setminus A_t, \\ \tau_t &= \inf\{s \ge t : \prod_{i \in A_t} \zeta_s(i) = 0\}. \end{aligned}$$

Teorema 7.7.2. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala. Supongamos que existe $t_1 \ge 0$ tal que A_{t_1} es un subconjunto de V con $A_{t_1} \ne V$ y*

$$\lambda^{A^*_{t_1} \cup \{i\}}(i) \ge 0 \ \forall i \in B_{t_1}.$$

Entonces,

$$\zeta_s(i) = 0 \ \forall i \in B_{t_1}, \ \forall s \in [t_1, \tau_{t_1}) \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Recordemos la definición de la trayectoria $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ y la sucesión $(A_n, T_n)_{n\geq 0}$ construida en (7.10).

Definamos recursivamente una sucesión de variables aleatorias $(\mathcal{A}_n, \tau_n)_{n\geq 0}$ como sigue.

Fijemos $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}$. Sea $\tau_0 = 0,\ \mathcal{A}_0 = V$, y dados $\tau_n,\ \mathcal{A}_n$, sean

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \inf\{t \geq \tau_n : \prod_{i\in\mathcal{A}_n} \zeta_t(i) = 0\}, \\ \mathcal{A}_{n+1} &= \begin{cases} \{i \in V : \zeta_{\tau_{n+1}}(i) > 0\} & \text{si } \tau_{n+1} < \infty, \\ \mathcal{A}_n & \text{si } \tau_{n+1} = \infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.36}$$

Tendremos que para toda solución $\mathbb{P}$ del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}^*$,

$$\mathcal{A}_n = A_n,\ \tau_n = T_n\ \forall n \geq 0\ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

y

$$\zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}}\ \forall t \geq 0\ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Observación 7.7.3. *De la definición de la trayectoria $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ dada en* (7.10) *es claro que*

$$A_n \setminus A_{n+1} \subseteq \{i \in A_n : \lambda^{A_n^*}(i) > 0\}\ \forall n \geq 0.$$

Lema 7.7.4. *La trayectoria $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ dada por* (7.10) *satisface que*

$$\lambda^{A_n^*\cup\{i\}}(i) > 0 \quad \forall i \in V \setminus A_n,\ \forall n \geq 1.$$

Proposición 7.7.5. *Sea $\mathbb{P}$ una solución al $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}^*$ y sea $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}, A_1, T_1$ definida en* (7.10)*. Entonces*

$$\tau_1 = T_1,\ \mathcal{A}_1 = A_1 \ y\ \zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}}\ \forall t \in [0, T_1)\ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{7.37}$$

Proposición 7.7.6. *Sea $\mathbb{P}$ una solución del $(\mathscr{L}^*, \mathcal{D}_V^*)$-problema de martingala comenzado en $\zeta_0 \in \dot{\Sigma}^*$ y sea $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}, A_k, T_k,\ k \geq 0$ definida por* (7.10)*. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que para todo $1 \leq k \leq n$,*

$$\tau_k = T_k,\ \mathcal{A}_k = A_k \ y\ \zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}}\ \forall t \in [0, T_k)\ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{7.38}$$

Entonces

$$\tau_{n+1} = T_{n+1},\ \mathcal{A}_{n+1} = A_{n+1} \ y\ \zeta_t = \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\boldsymbol{t}}\ \forall t \in [0, T_{n+1})\ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{7.39}$$

7.8 Demostración de la Proposición 7.4.2

En esta sección probaremos la Proposición 7.4.2. Al igual que para el caso del ZRP, nos serán de utilidad los siguientes dos resultados, que relacionan las constantes λ^{A^*} con el conjunto de servidores cuya distribución invariante es maximal:

$$\mathcal{M}_\mu = \{j \in V^* : \mu(j) = \max_{i \in V^*} \mu(i)\},$$

y que son análogos (tanto los enunciados como las demostraciones) a los Lemas 6.2.2 y 6.2.3.

Lema 7.8.1. *Sea A un subconjunto no vacío de V y sea $i \in \mathcal{M}_\mu \cap A$. Entonces $\lambda^{A^*}(i) \leq 0$. En particular $\lambda(i) \leq 0$ $\forall i \in \mathcal{M}_\mu \cap V$.*

Lema 7.8.2. *Sea A un subconjunto no vacío de V tal que $\lambda^{A^*}(i) = 0$ $\forall i \in A^*$. Entonces μ es constante en A^*.*

Demostración de la Proposición 7.4.2. Por el Teorema 7.4.1 sabemos que existe un subconjunto determinístico $A_{n_0} \subseteq V$ y un tiempo determinístico $T = \tau_{n_0}$ tal que para todo $t \geq T$,

$$A_{n_0} = \{j \in V : \zeta_t(j) > 0\},$$
$$\zeta_t(j) = \zeta_T(j) - \lambda^{A^*_{n_0}}(j)(t-T) \ \forall j \in A_{n_0} \tag{7.40}$$

y

$$\lambda^{A^*_{n_0}}(j) \leq 0 \ \forall j \in A_{n_0}. \tag{7.41}$$

Además, el Lema 7.8.1 implica que

$$\mathcal{M}_\mu \cap V \subseteq A_{n_0}, \tag{7.42}$$

y por definición de las constantes λ^{A^*} asociadas al proceso traza sabemos que

$$\sum_{j \in A^*_{n_0}} \lambda^{A^*_{n_0}}(j) = 0. \tag{7.43}$$

Comencemos asumiendo que $* \in \mathcal{M}_\mu$. Por el Lema 7.8.1, $\lambda^{A^*_{n_0}}(*) \leq 0$. Esta ecuación junto con (7.41) y (7.43) implican $\lambda^{A^*_{n_0}}(j) = 0$ para todo $j \in A^*_{n_0}$. Por el Lema 7.8.2 y (7.42) obtenemos $\mathcal{M}_\mu = A^*_{n_0}$. Por lo tanto, $\{*\} = \mathcal{M}_\mu$ si y sólo si $A_{n_0} = \emptyset$, lo que demuestra las afirmaciones *i* y *ii*.

Veamos ahora *iii*. Como $* \notin \mathcal{M}_\mu$, por (7.42) tenemos que $\mathcal{M}_\mu \subseteq A_{n_0}$, lo que en particular implica que A_{n_0} no es el conjunto vacío. Veamos que existe $i \in A_{n_0}$ tal que $\lambda^{A^*_{n_0}}(i) < 0$. Supongamos que no. Entonces, por (7.41),

$$\lambda^{A^*_{n_0}}(j) = 0 \ \forall j \in A_{n_0},$$

y por (7.43) tenemos que

$$\lambda^{A^*_{n_0}}(j) = 0 \ \forall j \in A^*_{n_0}. \tag{7.44}$$

De (7.44) junto con el Lema 7.8.2 obtenemos que μ es constante en $A^*_{n_0}$, y como $\mathcal{M}_\mu \subseteq A^*_{n_0}$, se sigue que $\mathcal{M}_\mu = A^*_{n_0}$, lo que resulta una contradicción, ya que $* \notin \mathcal{M}_\mu$. Por lo tanto, existe $i \in A_{n_0}$ tal que $\lambda^{A^*_{n_0}}(i) < 0$, lo que concluye la demostración. $\square$

Capítulo 8

Sitios vacíos a tiempo inicial para tasas de salto constantes

En este último capítulo analizaremos el caso de la Jackson network tradicional, es decir, el sistema de colas Markoviano con tasas constantes descripto en la sección 2.5.3, cuando a tiempo inicial tenemos algunos servidores macroscópicamente vacíos. Lo haremos tanto para el caso de la Jackson network abierta como cerrada (que sería el proceso de zero range) cuando las tasas sólo dependen de si el servidor de salida se encuentra vacío u ocupado. Es decir, la función $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ que aparece en las tasas de salto es igual a

$$g(n) = \mathbf{1}_{\{n>0\}}.$$

Notemos que, a diferencia de lo que hemos hecho en los capítulos anteriores, ahora permitiremos comenzar con sitios macroscópicamente vacíos.

Como hemos mencionado en el Capítulo 1, ya ha sido probado por Chen y Mandelbaum en [11] que para la Jackson network tradicional existe el límite fluido cuando el escalamiento es lineal (ver Teorema 7.4 en [12]), aunque no han sido probados resultados para el caso de tasas generales, que puedan depender del número de tareas.

En ese teorema se prueba que la trayectoria límite satisface que existe un tiempo determinístico T tal que a partir de este tiempo algunos servidores quedan macroscópicamente vacíos (a estos servidores los llaman "non-bottlenecks"), y otros permanecen constantes o crecen linealmente siguiendo unas velocidades específicas (los "bottlenecks"). Para encontrar estos conjuntos, plantean un algoritmo; y para encontrar las velocidades con las cuales los bottlenecks crecen, plantean un sistema de ecuaciones (ver [11] o Sección 7.3 en [12]).

Con lo que hemos obtenido en los capítulos anteriores junto con el Problema de Skorohod, mostraremos explícitamente cuál es la trayectoria límite. Esto, en particular, implica el resultado que mencionamos en el párrafo anterior (para el caso donde el proceso es Markoviano), probado en [11] por Chen y Mandelbaum.

8.1 Trayectoria límite

Nos concentraremos en el caso de la Jackson network cerrada (es decir, en el proceso zero range), ya que si el sistema fuese abierto, las cuentas serían análogas a las que haremos a continuación.

Sea $(\zeta_N)_{\mathbb{N}}$ una sucesión de configuraciones iniciales, con $\zeta_N \in \Sigma_N$, que converge a ζ_0, con

$$\zeta_0 \in \Sigma \setminus \dot{\Sigma} = \{\zeta \in \Sigma : \zeta_0(i) = 0 \text{ para algún } i \in V\}.$$

Queremos encontrar el límite de la sucesión de medidas $(\mathbb{P}_{\zeta_N})_{\mathbb{N}}$. La idea será usar que ya conocemos la trayectoria límite cuando a tiempo inicial todos los sitios están macroscópicamente ocupados, junto con la existencia, unicidad y continuidad que nos da el Problema de Skorohod (ver Sección 2.5.4).

Sea $\zeta_0 \in \Sigma \setminus \dot{\Sigma}$. Sean

$$A = \{i \in V : \zeta_0(i) > 0\} \neq V,$$
$$B = \{i \in V : \zeta_0(i) = 0\} = V \setminus A \neq \emptyset.$$

Como ζ_0 es límite de una sucesión de configuraciones iniciales, entonces A y B representan el conjunto de los sitios macroscópicamente ocupados y macroscópicamente vacíos respectivamente.

Cuando comenzamos con algunos sitios macroscópicamente vacíos (es decir, $B \neq \emptyset$), podría ocurrir que en el instante siguiente, algunos sitios de B comiencen a crecer, y otros queden vacíos. Lo que haremos a continuación será caracterizar a ese conjunto de sitios.

Observemos que no será siempre cierto que los sitios que crecen instantáneamente luego del tiempo 0 son los que cumplen que $\lambda(i) < 0$. Supongamos que esto ocurre. Entonces, en el instante ε con ε suficientemente chico, para ver cómo son los drifts ahora tendremos que ver el conjunto de los sitios que se encuentran llenos a tiempo ε. Y podría ocurrir que algunos de los sitios que tenían $\lambda(i)$ negativo, es decir, que crecían a tiempo inicial, ahora tengan el $\lambda^A(i)$ positivo a tiempo ε, siendo A el conjunto de sitios llenos en ese instante. Lo cual diría que a tiempo inicial hay sitios que están intentando crecer, y a tiempo ε, con ε suficientemente chico, están intentando decrecer.

8.2 Sitios vacíos que crecen instantáneamente

Al igual que en la sección anterior, sea $\zeta_0 \in \Sigma \setminus \dot{\Sigma}$ y sean A y B los conjuntos

$$A = \{i \in V : \zeta_0(i) > 0\} \neq V,$$
$$B = \{i \in V : \zeta_0(i) = 0\} = V \setminus A \neq \emptyset.$$

Supongamos que existe un conjunto C contenido en $V \setminus A$ tal que si definimos $\tilde{A}$ como $A \cup C$, entonces se satisfacen las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned} \lambda^{\tilde{A}}(i) < 0 \ \forall i \in C \\ \lambda^{\tilde{A}\cup\{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

(Si el sistema fuese abierto entonces $\lambda^{\tilde{A}}(i)$ representa $\lambda^{\tilde{A}^*}(i)$).

Veremos que C coincide con el conjunto de sitios inicialmente vacíos que crecen instantáneamente. Si C fuese el conjunto vacío, lo que en (8.1) equivale a que

$$\lambda^{A\cup\{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus A,$$

entonces a tiempo inicial ningún sitio crecerá.

Por la unicidad que nos da el Problema de Skorohod, tendremos que existe un único conjunto $C \subseteq V \setminus A$ que satisface (8.1).

Para cada $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \frac{\zeta_0(i)}{\lambda^{\tilde{A}}(i)} \ \forall i \in A \text{ con } \lambda^{\tilde{A}}(i) > 0, \tag{8.2}$$

definamos $\zeta_0^\delta(i)$ como

$$\zeta_0^\delta(i) = \begin{cases} \zeta_0(i) - \lambda^{\tilde{A}}(i)\delta & \text{si } \ i \in \tilde{A}, \\ 0 & \text{si } \ i \in V \setminus \tilde{A}. \end{cases} \tag{8.3}$$

Notemos que si el sistema es cerrado, como $\sum_{i\in\tilde{A}} \lambda^{\tilde{A}}(i) = 0$, entonces

$$\sum_{i\in V} \zeta_0^\delta(i) = \sum_{i\in V} \zeta_0(i) = 1,$$

y si el sistema es abierto (recordar que en ese caso denotamos con $\lambda^{\tilde{A}}(i)$ a $\lambda^{\tilde{A}^*}(i)$), entonces

$$\sum_{i\in V} \zeta_0^\delta(i) = \sum_{i\in V} \zeta_0(i) - \delta \sum_{i\in\tilde{A}} \lambda^{\tilde{A}^*}(i) = 1 + \delta\lambda^{\tilde{A}^*}(*).$$

Además, de (8.2) y de que

$$\zeta_0(i) > 0 \ \forall i \in A \text{ y } \lambda^{\tilde{A}}(i) < 0 \ \forall i \in C,$$

se sigue que ζ_0^δ satisface

$$\zeta_0^\delta(i) > 0 \ \forall i \in \tilde{A} \ \text{ y } \ \zeta_0^\delta(i) = 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A}. \tag{8.4}$$

En el Teorema 3.2.3 probamos que si $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de configuraciones que converge a algún $\zeta_0 \in \Sigma$ y $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ es un punto límite de la sucesión $(\mathbb{P}^N_{\zeta_N})_{N\in\mathbb{N}}$, entonces $\mathbb{P}_{\zeta_0}$ es solución del $(\mathscr{L}, \mathcal{D}_V)$-problema de martingala, y por el Lema 4.3.5 sabemos que las martingalas asociadas son siempre iguales a 0. Además, por el Teorema 5.0.1 sabemos que bajo la medida $\mathbb{P}_{\zeta_0}$, si $t_0 \geq 0$ y $\tilde{A}$ es un subconjunto de V que satisface

$$\lambda^{\tilde{A}\cup\{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A},$$

$$\zeta_{t_0}(i) > 0 \ \forall i \in \tilde{A} \text{ y } \zeta_{t_0}(i) = 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A},$$

entonces,

$$\zeta_s(i) = 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A}, \ \forall t_0 \leq s < \tau_1 = \inf\{t > t_0 : \zeta_t(i) = 0 \text{ para algún } i \in \tilde{A}\}.$$

En particular, aplicando esto a la configuración inicial ζ_0^δ (que cumple, por (8.4), las condiciones requeridas), bajo $\mathbb{P}_{\zeta_0^\delta}$ tenemos que hasta tiempo

$$\tau_1^\delta = \inf\{t > 0 : \zeta_t^\delta(i) = 0 \text{ para algún } i \in \tilde{A}\},$$

los sitios que comienzan vacíos ($V \setminus \tilde{A}$) quedan vacíos, y los que comienzan llenos ($\tilde{A}$) cambian siguiendo el drift $\lambda^{\tilde{A}}(i)$. O sea,

$$\begin{aligned} \zeta_t^\delta(i) &= \begin{cases} \zeta_0^\delta(i) - \lambda^{\tilde{A}}(i)t & \text{si } \ i \in \tilde{A}, \\ 0 & \text{si } \ i \in V \setminus \tilde{A} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \zeta_0(i) - \lambda^{\tilde{A}}(i)(t+\delta) & \text{si } \ i \in \tilde{A}, \\ 0 & \text{si } \ i \in V \setminus \tilde{A}. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Por otro lado, si definimos

$$\tilde{T}_1 = \min_{i\in\tilde{A}:\lambda^{\tilde{A}}(i)>0} \Big\{\frac{\zeta_0(i)}{\lambda^{\tilde{A}}(i)}\Big\},$$

con la convención de que el mínimo sobre un conjunto vacío es ∞, entonces a τ_1^δ lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \tau_1^\delta &= \begin{cases} \min\limits_{i\in\tilde{A}:\lambda^{\tilde{A}}(i)>0} \big\{\frac{\zeta_0(i)}{\lambda^{\tilde{A}}(i)}\big\} - \delta & \text{si } \ \lambda^{\tilde{A}}(i) > 0 \text{ para algún } i \in \tilde{A}, \\ \infty & \text{si } \ \lambda^{\tilde{A}}(i) \leq 0 \ \forall i \in \tilde{A}. \end{cases} \\ &= \tilde{T}_1 - \delta. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Notemos también que si $\tau_1^\delta < \infty$, lo que vale si y sólo si $\tilde{T}_1 < \infty$, para todo $i \in \tilde{A}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \zeta^\delta_{\tau_1^\delta}(i) &= \zeta_0^\delta(i) - \lambda^{\tilde{A}}(i)\tau_1^\delta \\ &= [\zeta_0(i) - \lambda^{\tilde{A}}(i)\delta] - \lambda^{\tilde{A}}(i)[\tilde{T}_1 - \delta] \\ &= \zeta_0(i) - \lambda^{\tilde{A}}(i)\tilde{T}_1, \end{aligned} \tag{8.7}$$

mientras que $\zeta^{\delta}_{\tau_1^{\delta}}(i) = 0$ para todo $i \in V \setminus \tilde{A}$.

La ecuación (8.7) implica que $\zeta^{\delta}_{\tau_1^{\delta}}(i)$ no depende de δ. Este hecho junto con (8.5) y (8.6) motivan el Lema 8.2.1, que nos dice cómo es la trayectoria límite. Antes de enunciar dicho lema, daremos primero la construcción de la trayectoria.

Sea $\zeta_0 \in \Sigma$ con

$$A = \{i \in V : \zeta_0(i) > 0\} \neq V.$$

Supongamos que existe un conjunto C contenido en $V \setminus A$ tal que si $\tilde{A} = A \cup C$, entonces se satisfacen las condiciones de (8.1).

Definimos $\tilde{\zeta}_0 = \zeta_0$, $\tilde{T}_0 = 0$, $\tilde{A}_0 = \tilde{A}$, y dados $\tilde{T}_n$, $\tilde{A}_n$, $(\tilde{\zeta}_t)_{t \leq \tilde{T}_n}$, definimos

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{n+1} &= \begin{cases} \tilde{T}_n + \min\limits_{i \in \tilde{A}_n : \lambda^{\tilde{A}_n}(i) > 0} \frac{\tilde{\zeta}_{\tilde{T}_n}(i)}{\lambda^{\tilde{A}_n}(i)} & \text{si } \exists i \in \tilde{A}_n : \lambda^{\tilde{A}_n}(i) > 0, \\ \infty & \text{si } \lambda^{\tilde{A}_n}(i) \leq 0 \ \forall i \in \tilde{A}_n, \end{cases} \\
\text{si } {\scriptstyle \tilde{T}_n < \infty \text{ y } \tilde{T}_n \leq t < \tilde{T}_{n+1}},\ \tilde{\zeta}_t(i) &= \begin{cases} \tilde{\zeta}_{\tilde{T}_n}(i) - \lambda^{\tilde{A}_n}(i)(t - \tilde{T}_n) & \text{si } i \in \tilde{A}_n \\ 0 & \text{si } i \notin \tilde{A}_n, \end{cases} \\
\tilde{A}_{n+1} &= \begin{cases} \{i \in \tilde{A}_n : \tilde{\zeta}_{\tilde{T}_{n+1}}(i) > 0\} & \text{si } \tilde{T}_{n+1} < \infty, \\ \tilde{A}_n & \text{si } \tilde{T}_{n+1} = \infty. \end{cases}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Denotamos con $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ a la trayectoria construida de forma recursiva en (8.8).

Lema 8.2.1. *Sea $\zeta_0 \in \Sigma \setminus \dot{\Sigma}$. Sean*

$$\begin{aligned} A &= \{i \in V : \zeta_0(i) > 0\} \neq V, \\ B &= \{i \in V : \zeta_0(i) = 0\} = V \setminus A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Supongamos que existe un conjunto C contenido en $V \setminus A$ tal que si definimos $\tilde{A}$ como $A \cup C$, se satisfacen las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned} \lambda^{\tilde{A}}(i) &< 0 \ \forall i \in C \\ \lambda^{\tilde{A} \cup \{i\}}(i) &\geq 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Entonces, la trayectoria asociada al proceso límite con configuración inicial ζ_0 es la trayectoria $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ descripta en (8.8).

Demostración. Dada ζ_0 con

$$A = \{i \in V : \zeta_0(i) > 0\} \neq V,$$

consideremos un conjunto C que cumple las condiciones de (8.9). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $C \neq \emptyset$, ya que el caso $C = \emptyset$ coincide con lo ya analizado en los capítulos anteriores.

Consideremos la configuración ζ_0^δ definida en (8.3). De (8.7) se sigue que la evolución a partir del tiempo τ_1^δ de la trayectoria empezada en ζ_0^δ será igual a la evolución a partir de $\tilde{T}_1$ de la trayectoria empezada en ζ_0 construida en (8.8). Es decir,

$$\zeta^\delta_{t+\tau_1^\delta} = \tilde{\zeta}_{t+\tilde{T}_1} \ \forall t \geq 0. \tag{8.10}$$

Y como por (8.6) tenemos que para δ suficientemente chico,

$$\tau_1^\delta = \tilde{T}_1 - \delta,$$

resulta

$$\zeta^\delta_{t+\tau_1^\delta} = \tilde{\zeta}_{t+\delta+\tau_1^\delta} \ \forall t \geq 0. \tag{8.11}$$

Además, de (8.5) sabemos que

$$\zeta_t^\delta(i) = \zeta_0^\delta(i) - \lambda^{\tilde{A}}(i)t = \zeta_0 - \lambda^{\tilde{A}}(i)(t+\delta) = \tilde{\zeta}_{t+\delta}(i) \ \forall t < \tau_1^\delta, \ \forall i \in V. \tag{8.12}$$

Por lo tanto, de (8.11) y (8.12) se sigue que

$$\zeta_t^\delta = \tilde{\zeta}_{t+\delta} \ \forall t \geq 0. \tag{8.13}$$

Y esto vale para todo $\delta < \tilde{T}_1$ (es decir, para todo δ que satisface (8.2)).

Fijemos $0 < \delta < \tilde{T}_1$. A la trayectoria $(\zeta_t^\delta)_{t\geq 0}$ la conocemos completa, ya que la configuración inicial ζ_0^δ satisface que

$$\lambda^{\tilde{A}\cup\{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A},$$

con $\tilde{A} = \{i \in V : \zeta_0^\delta(i) > 0\}$. Denotamos $\mathcal{Z}^\delta$ a esta configuración, y a la trayectoria definida en (8.8) que habíamos llamado $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ la denotamos con $\tilde{\mathcal{Z}}$.

Sea $\|\|$ la norma en la topología uniforme en el espacio $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{R}_+)$. Para cada $T > 0$,

$$\|\mathcal{Z}^\delta - \tilde{\mathcal{Z}}\|_T = \sup_{0\leq t\leq T} \|\mathcal{Z}_t^\delta - \tilde{\mathcal{Z}}_t\| = \sup_{0\leq t\leq T} \|\tilde{\mathcal{Z}}_{t+\delta} - \tilde{\mathcal{Z}}_t\| \leq \sup_{0\leq t<\infty} \|\tilde{\mathcal{Z}}_{t+\delta} - \tilde{\mathcal{Z}}_t\|. \tag{8.14}$$

Como $t \to \tilde{\mathcal{Z}}_t$ en cada coordenada es lineal a trozos (con finitos cambios), esta función es Lipschitz, donde la constante sólo depende de las tasas $\{r(i,j); i,j \in V\}$ (más precisamente, depende de las constantes λ^A para diversos subconjuntos A de V). Por lo tanto, existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\|\tilde{\mathcal{Z}}_{t_1} - \tilde{\mathcal{Z}}_{t_2}\| \leq \theta|t_1 - t_2|,$$

con lo cual

$$\|\tilde{\mathcal{Z}}_{t+\delta} - \tilde{\mathcal{Z}}_t\| < \delta\theta \ \forall t \geq 0.$$

De esto se deduce que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\mathcal{Z}^\delta - \tilde{\mathcal{Z}}\|_T < \varepsilon \ \ \forall \delta < \delta_0, \ \forall T > 0. \tag{8.15}$$

Notemos que $\mathcal{Z}^\delta$ es la primer coordenada de la solución del problema de Skorohod asociado a $\mathcal{X}^\delta$ y a la matriz $(I - P^t)$, donde $\mathcal{X}^\delta$ está definido como

$$\mathcal{X}^\delta(i) = \zeta_0^\delta(i) - \lambda(i)t \ \ \forall i \in V.$$

Para ver eso, fijado δ, consideramos una sucesión $(\zeta_0^{N,\delta})_{N\in\mathbb{N}}$ convergente a ζ_0^δ. (Por ejemplo, en el sitio $i \in V$ a tiempo inicial colocamos $N\zeta_0^\delta(i)$ partículas, haciendo que $\zeta_0^{N,\delta} = \zeta_0^\delta$ para todo $N \in \mathbb{N}$). Como $(\zeta_0^{N,\delta})_{N\in\mathbb{N}}$ converge a ζ_0^δ, que es una configuración que satisface que si $\tilde{A} = \{i \in V : \zeta_0^\delta(i) > 0\}$ entonces

$$\lambda^{\tilde{A}\cup\{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A},$$

por una demostración análoga a la del Teorema 7.4.1 sabemos que el proceso $\{\zeta_t^{N,\delta}; t \geq 0\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a la trayectoria $\mathcal{Z}^\delta$.

Además, si denotamos $\Psi(\iota)$ a la primer coordenada del Problema de Skorohod asociado a la trayectoria ι y a la matriz $(I - P^t)$, por la Proposición 9.5 de [18], tenemos que

$$(\zeta_t^{N,\delta})_{t\geq 0} = \Psi(\zeta_0^{N,\delta} - \lambda t + \mathcal{M}_t^{N,\delta})_{t\geq 0} \ \forall N \in \mathbb{N},$$

donde $(\mathcal{M}_t^{N,\delta})_{t\geq 0}$ es una martingala que converge a 0. Y como la trayectoria

$$(\zeta_0^{N,\delta} - \lambda t + \mathcal{M}_t^{N,\delta})_{t\geq 0} \tag{8.16}$$

converge a

$$(\zeta_0^\delta - \lambda t)_{t\geq 0} = \mathcal{X}^\delta$$

cuando N tiende a ∞, por la continuidad del Problema de Skorohod tenemos que $(\zeta_t^{N,\delta})_{t\geq 0}$ converge a $\Psi(\mathcal{X}^\delta)$ cuando N tiende a ∞. De la unicidad del Problema de Skorohod y de la unicidad de los límites se deduce que

$$\mathcal{Z}^\delta = \Psi(\mathcal{X}^\delta). \tag{8.17}$$

Consideremos, por último, una sucesión de trayectorias $(\mathcal{Z}^{\frac{1}{m}})_{m\in\mathbb{N}}$, la cual se obtiene de reemplazar a δ por $\frac{1}{m}$. De (8.15) sabemos que $(\mathcal{Z}^{\frac{1}{m}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $\tilde{\mathcal{Z}}$, y de (8.17) tenemos que $\mathcal{Z}^{\frac{1}{m}} = \Psi(\mathcal{X}^{\frac{1}{m}})$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $(\mathcal{X}^{\frac{1}{m}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a la trayectoria $(\zeta_0 - \lambda t)_{t\geq 0}$ cuando m tiende a ∞, de la continuidad de la función Ψ concluimos que

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \Psi((\zeta_0 - \lambda t)_{t\geq 0}). \tag{8.18}$$

De (8.18) se sigue que la trayectoria asociada al proceso límite con configuración inicial ζ_0 es la trayectoria $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\cdot}$ descripta en (8.8), como queríamos probar. $\square$

8.3 Determinación del conjunto C que satisface (8.9)

Hemos detallado cómo sería la trayectoria límite bajo la suposición de que existe un conjunto C que satisface (8.9). Debemos probar su existencia.

Usaremos los siguientes dos resultados, cuyas demostraciones se siguen directamente de las demostraciones de las Proposiciones 4.3.3 y 4.3.4.

Proposición 8.3.1. *Sea A un subconjunto no vacío de V tal que*

$$\lambda(j) \geq 0 \ \forall j \in V \setminus A. \tag{8.19}$$

Entonces $\lambda^{A\cup\{j\}}(j) \geq 0 \ \forall j \in V \setminus A$.

Proposición 8.3.2. *Sea $\emptyset \neq A \subsetneq \tilde{A} \subsetneq V$ tal que*

$$\lambda^{\tilde{A}\cup\{l\}}(l) \geq 0 \ \forall l \in V \setminus \tilde{A} \quad y \quad \lambda^{\tilde{A}}(l) \geq 0 \ \forall l \in \tilde{A} \setminus A.$$

Entonces $\lambda^{A\cup\{j\}}(j) \geq 0 \ \forall j \in V \setminus A$.

Mostremos la existencia del conjunto C. Sea

$$A = \{i \in V : \zeta_0(i) > 0\} \neq V.$$

Definimos recursivamente los conjuntos C_n y B_n del siguiente modo: sea

$$C_0 = V \setminus A,$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$\begin{aligned} B_n &= \{i \in C_{n-1} : \lambda^{A\cup C_{n-1}}(i) \geq 0\}, \\ C_n &= C_{n-1} \setminus B_n. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Como V es finito, existe

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : C_n = C_{n+1}\}.$$

Llamamos

$$C = C_{n_0} \tag{8.21}$$

(el cual podría ser el conjunto vacío). Veamos que este conjunto C satisface las dos condiciones de (8.9).

Proposición 8.3.3. *El conjunto C definido en (8.21) satisface que si $\tilde{A} = A \cup C$, entonces*

$$\begin{aligned} \lambda^{\tilde{A}}(i) < 0 \ \forall i \in C \\ \lambda^{\tilde{A} \cup \{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus \tilde{A}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Demostración. Por definición de n_0 y de B_{n_0+1} tenemos que $B_{n_0+1} = \emptyset$, lo cual implica que

$$\lambda^{A \cup C}(i) < 0 \ \forall i \in C$$

si $C \neq \emptyset$. (En el caso en que $C = \emptyset$ sólo debemos probar la segunda condición de (8.22)).

Veamos por inducción en n que

$$\lambda^{A \cup C_n \cup \{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus (A \cup C_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $C = C_{n_0}$ satisface la segunda de (8.22).

Notemos que si $B_1 = \emptyset$, entonces $C = V \setminus A$ y no debemos probar la segunda condición de (8.22). Por lo tanto, asumamos $B_1 \neq \emptyset$.

Caso $n = 1$: Como

$$B_1 = \{i \in V \setminus A : \lambda(i) \geq 0\} \ \text{ y } \ C_1 = V \setminus (A \cup B_1),$$

de la Proposición 8.3.1 se sigue que

$$\lambda^{A \cup C_1 \cup \{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus (A \cup C_1).$$

Paso inductivo: Supongamos que

$$\lambda^{A \cup C_n \cup \{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus (A \cup C_n)$$

con $n \in \mathbb{N}$. Como

$$B_{n+1} = \{i \in C_n : \lambda^{A \cup C_n}(i) \geq 0\} \ \text{ y } \ C_{n+1} = C_n \setminus B_n,$$

de la Proposición 8.3.2 se sigue que

$$\lambda^{A \cup C_{n+1} \cup \{i\}}(i) \geq 0 \ \forall i \in V \setminus (A \cup C_{n+1}),$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Apéndice A

“Bottlenecks” y “effective inflow rate”

En este apéndice reescribiremos en términos del proceso traza y de la distribución invariante del paseo aleatorio algunos resultados sobre la Jackson network abierta (con tasas constantes) probados por Chen y Mandelbaum en [11]. Al igual que en el Capítulo 8, asumiremos que la función $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ que aparece en las tasas de salto es

$$g(n) = \mathbf{1}_{\{n>0\}}.$$

Comencemos considerando las definiciones de la página 171 de [12]. Ahí se denota con P a la matriz de transición entre los servidores. La tasa a la cual el servidor j trabaja es denotada con μ_j, pero para evitar confusiones de notación, la denotaremos con γ_j. La tasa con la que ingresan tareas desde el exterior al servidor j es α_j. Además, a y b denotan subconjuntos de V, típicamente $a = V \setminus b$. Con P_b se denota a la submatriz P_{bb} y P' es la matriz transpuesta de P.

Para cada $i, j \in V^*$, $i \neq j$, definimos

$$\begin{aligned} r(i,j) &= \gamma_i P_{ij} \quad \text{si } i,j \in V, \\ r(*,j) &= \alpha_j \quad \text{si } j \in V, \\ r(i,*) &= \gamma_i \big(1 - \sum_{j\in V} P_{ij}\big) \quad \text{si } i \in V. \end{aligned}$$

Luego, $\{r(i,j); i,j \in V^*\}$ denotan las tasas de un paseo aleatorio en V^*. Sin pérdida de generalidad asumimos que es irreducible, con $r(i,i) = 0$ $\forall i \in V^*$. Sea $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_i; i \in V^*\}$ su distribución invariante.

Como hemos comentado al comienzo del Capítulo 8, para el caso de la Jackson network abierta, en el Teorema 7.4 de [12] se establece que el límite fluido para el escalamiento lineal es determinístico y que existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^V$, un conjunto b

("bottlenecks") y un tiempo τ tal que a partir de τ, la trayectoria límite $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ satisface que para todo $t \geq \tau$,

$$\zeta_t(j) = 0 \ \forall j \notin b,$$
$$\zeta_t(j) = \zeta_\tau(j) - (\lambda_j - \gamma_j)(t-\tau) \ \forall j \in b,$$

donde γ_j es la tasa de servicio del servidor j.

El vector λ, llamado "effective inflow rate", se define como la única solución de

$$\lambda = \alpha + P'(\lambda \wedge \gamma), \tag{A.1}$$

es decir, del sistema de ecuaciones

$$\lambda_j = \alpha_j + \sum_{i\in V}(\lambda_i \wedge \gamma_i)P_{ij} \ \forall j \in V,$$

con $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Al conjunto de los servidores bottlenecks se lo define como

$$\{i \in V : \lambda_i \geq \gamma_i\} = \{i \in V : \lambda_i \wedge \gamma_i = \gamma_i\}. \tag{A.2}$$

En el Teorema 7.3 de [12] prueban que la solución de (A.1) es única, y la reescriben del siguiente modo:

$$\begin{cases} \lambda_b & = \alpha_b + P'_{ab}(I - P'_a)^{-1}\alpha_a + [P_b + P_{ba}(I - P_a)^{-1}P_{ab}]'\gamma_b, \\ \lambda_a & = \alpha_a + P'_a\lambda_a + P'_{ba}\gamma_b, \end{cases} \tag{A.3}$$

donde b es el conjunto de bottlenecks, $a = V \setminus b$, y λ_a y λ_b denotan subvectores de λ, aunque no dan explícitamente la solución. Veremos en el Lema A.0.3 cómo expresar a la effective inflow rate λ en términos de las tasas del proceso traza. En el caso en el que el exterior "$*$" sea maximal respecto de la distribución invariante $\boldsymbol{\mu}$, el vector λ también podrá ser descripto en términos de esa distribución.

Lema A.0.1. *Consideremos las siguiente definiciones de la página 171 de [12]:*

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_b & = \alpha_b + P'_{ab}(I - P'_a)^{-1}\alpha_a, \\ \hat{P}'_b & = P_b + P_{ba}(I - P'_a)^{-1}P_{ab} \\ \hat{\theta}_b & = \hat{\alpha}_b - (I - \hat{P}'_b)\gamma_b. \end{cases} \tag{A.4}$$

Entonces, vale que

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_b(i) & = r^{B^*}(*, i) \ \forall i \in b, \\ \hat{P}_b(i,j) & = \frac{1}{\gamma_i} r^{b^*}(i,j) \ \forall i, j \in b, \ i \neq j, \\ \hat{\theta}_b(i) & = -\lambda^{b^*}(i) \ \forall i \in b, \end{cases} \tag{A.5}$$

donde $\{r^{b^*}(i,j); i, j \in b^*\}$ denotan las tasas del proceso traza asociado al paseo aleatorio irreducible $\{r(i,j); i, j \in V^*\}$ sobre el conjunto b^*, y

$$\lambda^{b^*} = \sum_{j\in b^*} r^{b^*}(i,j) - \sum_{j\in b^*} r^{b^*}(j,i).$$

Antes de dar la demostración, veamos la siguiente observación.

Observación A.0.2. *Sean H la matriz en $\mathbb{R}^{a\times a}$ definida por*

$$H_{ij} = h_i^{b^*\cup\{i\}}(j)\ \forall i,j \in a.$$

Notemos que la matriz $H(I-P'_a)$ es una matriz diagonal, con

$$H_{ii} = -\frac{1}{\gamma_i}L^{RW}(h_i^{b^*\cup\{i\}})(i)\ \forall i \in a.$$

Luego, si definimos $L \in \mathbb{R}^{a\times a}$ como la matriz diagonal con

$$L_{ii} = \frac{-\gamma_i}{L^{RW}(h_i^{b^*\cup\{i\}})(i)}\ \forall i \in a, \tag{A.6}$$

(el denominador en (A.6) es no nulo), obtenemos que

$$(I-P'_a)^{-1} = LH \text{ y } (I-P_a)^{-1} = H'L. \tag{A.7}$$

Por otro lado, si consideramos la matriz $S \in \mathbb{R}^{a\times b}$ definida por

$$S_{ij} = h_j^{b^*}(i)\ \forall i \in a,\ j \in b$$

resulta

$$P_{ab} = (I-P_a)S,$$

de donde se sigue que

$$(I-P_a)^{-1}P_{ab} = S \quad y \quad P'_{ab}(I-P'_a)^{-1} = S'.$$

Demostración del Lema A.0.1. Comencemos viendo la primera igualdad de (A.5). De (A.4) y de que $\alpha(i) = r(*,i)\ \forall i \in V$ se sigue que

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_b(i) &= \alpha_b(i) + (S'\alpha_a)(i) = \alpha_b(i) + \sum_{j\in a} S_{ji}\alpha_a(j)\\ &= r(*,i) + \sum_{j\in a} h_i^{b^*}(j) r(*,j) = \sum_{j\in V^*} r(*,j)h_i^{b^*}(j)\\ &= r^{b^*}(*,j).\end{aligned}$$

Pasemos a la segunda igualdad de (A.5). Sean $i,j \in b$, con $i \neq j$.

$$\begin{aligned}(\hat{P}_b)_{ij} &= (P_b)_{ij} + (P_{ba}S)_{ij} = P_{ij} + \sum_{k\in a} P_{ik}S_{kj}\\ &= P_{ij} + \sum_{k\in a} P_{ik}h_j^{b^*}(k) = \sum_{l\in V^*} P_{il}h_j^{b^*}(l) = \mathbb{P}_i^{RW}[T_{b^*}^+ = T_j]\\ &= \frac{1}{\gamma_i} r^{b^*}(i,j).\end{aligned}$$

Además, para todo $i \in b$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
(\hat{P}_b)_{ii} &= (P_b)_{ii} + (P_{ba}S)_{ij} = P_{ii} + \sum_{k\in a} P_{ik} h_i^{b^*}(k) = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{k\in a} r(i,k) h_i^{b^*}(k) \\
&= \frac{1}{\gamma_i} \sum_{k\in V^*} r(i,k)[h_i^{b^*}(k) - h_i^{b^*}(i)] \ + \sum_{k\in V^*} P_{ik} \\
&= \frac{1}{\gamma_i}[L^{RW}(h_i^{b^*})(i)] + 1.
\end{aligned}
$$

Veamos por último la tercera igualdad de (A.5). Usaremos que

$$
\sum_{j\in b^*\setminus\{i\}} r^{b^*}(i,j) = -L^{RW}(h_i^{b^*})(i) \ \forall i \in b,
$$

lo que se sigue de las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in b^*\setminus\{i\}} r^{b^*}(i,j) &= \sum_{j\in b^*\setminus\{i\}} \sum_{k\in V^*} r(i,k) h_j^{b^*}(k) \\
&= \sum_{k\in V^*} r(i,k) \sum_{j\in b^*\setminus\{i\}} h_j^{b^*}(k) \\
&= -\sum_{k\in V^*} r(i,k)[h_i^{b^*}(k) - h_i^{b^*}(i)] \\
&= -L^{RW}(h_i^{b^*})(i).
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

Sea $i \in b$. Debemos probar que $\hat{\theta}_b(i) = -\lambda^{b^*}(i)$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_b(i) &= \hat{\alpha}_b(i) - \sum_{j\in b} (I - \hat{P}'_b)_{ij} \gamma_b(j) \\
&= r(*,i) + \Big[\sum_{j\in b\setminus\{i\}} (\hat{P}'_b)_{ij}\gamma_j \Big] - [1 - (\hat{P}'_b)_{ii}]\gamma_i \\
&= r(*,i) + \sum_{j\in b\setminus\{i\}} [r^{b^*}(j,i)] - \gamma_i + (\hat{P}'_b)_{ii}\gamma_i \\
&= \sum_{j\in b^*\setminus\{i\}} [r^{b^*}(j,i)] + L^{RW}(h_i^{b^*})(i) \\
&= -\Big[\sum_{j\in b^*} r^{b^*}(i,j) - \sum_{j\in b^*} r^{b^*}(j,i) \Big] \\
&= -\lambda^{b^*}(i),
\end{aligned}
$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Lema A.0.3. *Sea b el conjunto de los servidores bottlenecks definido en (A.2). Entonces, la effective inflow rate $\lambda = (\lambda_b, \lambda_a)$ definida en (A.1) coincide con*

$$\begin{cases} \lambda_b(i) &= -\lambda^{b^*}(i) + \gamma_i \ \forall i \in b \\ \lambda_a(i) &= \gamma_i \frac{\sum\limits_{k \in b^*} r^{b^*}(k,i)}{\sum\limits_{k \in b^*} r^{b^*}(i,k)}. \end{cases} \tag{A.9}$$

Demostración. Por definición de $\hat{\alpha}_b$, $\hat{P}'_b$ y $\hat{\theta}_b$ dadas en (A.4) y por (A.3) tenemos que

$$\lambda_b = \hat{\alpha}_b + \hat{P}'_b \gamma_b = \hat{\alpha}_b - (I - \hat{P}'_b)\gamma_b = \hat{\theta}_b + \gamma_b.$$

Luego, por la tercera igualdad de (A.5) se sigue que para todo $i \in b$,

$$\lambda_b(i) = -\lambda^{b^*}(i) + \gamma_i. \tag{A.10}$$

Veamos ahora la segunda igualdad de (A.9). Como

$$\lambda_a = \alpha_a + P'_a \lambda_a + P'_{ba}\gamma_b$$

y, por (A.7),

$$(I - P'_a)^{-1} = LH,$$

deducimos

$$\lambda_a = (I - P'_a)^{-1}[\alpha_a + P'_{ba}\gamma_b] = LH[\alpha_a + P'_{ba}\gamma_b].$$

Luego, de la ecuación anterior junto con (A.6) y (A.8) se sigue que para todo $i \in a$,

$$\begin{aligned} \lambda_a(i) &= \sum_{j \in a} L_{ii} H_{ij} [\alpha_a(j) + (P'_{ba}\gamma_b)_j] = \sum_{j \in a} L_{ii} H_{ij} [r(*, j) + \sum_{k \in b} r(k, j)] \\ &= L_{ii} \sum_{j \in a} H_{ij} \sum_{k \in b^*} r(k, j) = L_{ii} \sum_{k \in b^*} \sum_{j \in a} r(k, j) h_i^{b^* \cup \{i\}}(j) \\ &= L_{ii} \sum_{k \in b^*} r^{b^* \cup \{i\}}(k, i) = \frac{-\gamma_i}{L^{RW}(h_i^{b^* \cup \{i\}})(i)} \sum_{k \in b^*} r^{b^* \cup \{i\}}(k, i) \\ &= \frac{\gamma_i}{\sum\limits_{j \in b^*} r^{b^* \cup \{i\}}(i, j)} \sum_{k \in b^*} r^{b^* \cup \{i\}}(k, i) = \gamma_i \frac{\sum\limits_{k \in b^*} r^{b^* \cup \{i\}}(k, i)}{\sum\limits_{k \in b^*} r^{b^* \cup \{i\}}(i, k)}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Observación A.0.4. *Supongamos que $*$ es maximal respecto de la distribución invariante μ, es decir,*

$$* \in \{i \in V^* : \mu_i = \max_{j \in V^*} \mu_j\}.$$

Entonces la effective inflow rate viene dada por

$$\lambda(i) = \frac{\mu_i}{\mu_*}\gamma_i \ \forall i \in V.$$

Esto se debe a que, por la propiedad de la distribución invariante,

$$\mu_i\gamma_i = \mu_i \sum_{j\in V^*} r(i,j) = \sum_{j\in V^*} \mu_j r(j,i) = \mu_* r(*,i) + \sum_{j\in V} \mu_j r(j,i) = \mu_*\alpha_i + \sum_{j\in V} \mu_j\gamma_j P_{ji}.$$

Dividiendo por μ_* se obtiene

$$\frac{\mu_i}{\mu_*}\gamma_i = \alpha_i + \sum_{j\in V} \frac{\mu_j}{\mu_*}\gamma_j P_{ji} \ \forall i \in V.$$

Por lo tanto, llamando $\tilde{\lambda}(i)$ a $\frac{\mu_i}{\mu_*}\gamma_i$ para cada $i \in V$, se sigue que

$$\tilde{\lambda}(i) = \alpha_i + \sum_{j\in V} \tilde{\lambda}(j) P_{ji} \ \forall i \in V.$$

Como $*$ es maximal, $\tilde{\lambda}(i) \le \gamma_i \ \forall i \in V$. Por lo tanto tenemos que

$$\tilde{\lambda}(i) = \alpha_i + \sum_{j\in V} (\tilde{\lambda}(j) \wedge \gamma_j) P_{ji} \ \forall i \in V$$

o equivalentemente,

$$\tilde{\lambda} = \alpha + P'(\tilde{\lambda} \wedge \gamma). \tag{A.11}$$

De (A.11) se sigue que $\tilde{\lambda}$ es solución de la ecuación (A.1), y por la unicidad, es la única solución. En particular, esto implica que el conjunto b de servidores llamados bottlenecks coincide con el conjunto de los servidores de V que tienen distribución invariante maximal, pues

$$b = \{i \in V : \lambda(i) \ge \gamma_i\} = \{i \in V : \mu_i \ge \mu_*\} = \{i \in V : \mu_i = \mu_*\} = \mathcal{M} \cap V.$$

Por lo tanto, junto con el Teorema 7.4 de [12] o de lo que hemos probado en el Capítulo 8, obtenemos que si $*$ es el único sitio que tiene distribución invariante maximal, entonces existe un tiempo determinístico τ a partir del cual el sistema se vacía. Mientras que, si además de $*$ hay otros servidores maximales, se tiene que a partir de τ la trayectoria queda constante. Esto se debe a que los servidores no maximales se vacían, y los servidores maximales satisfacen que

$$\lambda(i) - \gamma_i = \frac{\mu_i}{\mu_*}\gamma_i - \gamma_i = 0 \ \forall i \in \mathcal{M},$$

con lo cual

$$\zeta_t(i) = \zeta_\tau(i) + (\lambda(i) - \gamma_i)(t - \tau) = \zeta_\tau(i) \ \forall t \ge \tau.$$

Observación A.0.5. *En el caso en el que la red sea cerrada, la effective inflow rate se la define como la solución maximal del sistema de ecuaciones dado por*

$$\lambda = P'(\lambda \wedge \gamma). \tag{A.12}$$

Si nuevamente denotamos con μ a la distribución invariante, tenemos que

$$\tilde{\lambda}(i) = \mu_i \gamma_i \; \forall j \in V$$

es solución de (A.12) pues:

$$\mu_i \gamma_i = \mu_i \sum_{j \in V} r(i,j) = \sum_{j \in V} \mu_j r(j,i) = \sum_{j \in V} \mu_j \gamma_j P_{ji},$$

con lo cual,

$$\tilde{\lambda}(i) = \sum_{j \in V} P_{ji} \tilde{\lambda}(j).$$

Como μ es una distribución, $\mu_j \leq 1$ para todo $j \in V$ y por lo tanto $\tilde{\lambda} \wedge \gamma = \tilde{\lambda}$, de donde se sigue que $\tilde{\lambda}$ es solución de (A.12). De hecho, multiplicando a $\tilde{\lambda}$ por una constante c, con $0 < c \leq \frac{1}{\max_{i \in V} \mu_i}$, se obtienen infinitas soluciones de (A.7).

Observación A.0.6. *Si bien en [12] al conjunto de los bottlenecks se lo define por (A.2), en la página 171 plantean un algoritmo para encontrar a ese conjunto. Debido al Lema A.0.1 que probamos, ese algoritmo se puede reescribir en términos del proceso traza. Y por las Proposiciones 4.3.3 y 4.3.4 se deduce que si el sistema es abierto, el conjunto b de los servidores bottlenecks satiface que*

$$\lambda^{b^*}(i) \leq 0 \; \forall i \in b, \; y \; \lambda^{b^* \cup \{i\}}(i) \geq 0 \; \forall i \in a.$$

Luego, como $\lambda^{b^*}(i) \leq 0$ para todo $i \in b$, de (A.10) se sigue que

$$\lambda(i) \wedge \gamma_i = \gamma_i \; \forall i \in b.$$

Y como

$$\lambda^{b^* \cup \{i\}}(i) \geq 0 \; \forall i \in a$$

y

$$\lambda^{b^* \cup \{i\}}(i) = \sum_{k \in b^*} r^{b^* \cup \{i\}}(i,k) - \sum_{k \in b^{b^* \cup \{i\}}} r^{b^*}(k,i),$$

de (A.9) se sigue que

$$\lambda(i) \wedge \gamma_i = \lambda(i) \; \forall i \in a.$$

Referencias

[1] E. Andjel. Invariant measures for the zero range processes. *Ann. Probab.*, 128(10(3)):525–547, 1982.

[2] I. Armendáriz, S. Grosskinsky, and M. Loulakis. Metastability in a condensing zero-range process in the thermodynamic limit. *Probab. Theory Related Fields*, 169(1-2):105–175, 2017.

[3] I. Armendáriz and M. Loulakis. Thermodynamic limit for the invariant measures in supercritical zero range processes. *Probab. Theory Related Fields*, 145(1-2):175–188, 2009.

[4] J. Beltrán, E. Chavez, and C. Landim. From coalescing random walks on a torus to Kingman's coalescent. *J. Stat. Phys.*, 177(6):1172–1206, 2019.

[5] J. Beltrán, M. Jara, and C. Landim. A martingale problem for an absorbed diffusion: the nucleation phase of condensing zero range processes. *Probab. Theory Related Fields*, 169(3-4):1169–1220, 2017.

[6] J. Beltrán and C. Landim. Tunneling and metastability of continuous time Markov chains. *J. Stat. Phys.*, 140(6):1065–1114, 2010.

[7] J. Beltrán and C. Landim. Tunneling and metastability of continuous time Markov chains II, the nonreversible case. *J. Stat. Phys.*, 149(4):598–618, 2012.

[8] N. Berestycki and P. Sousi. *Applied probability, lecture notes. http://www.statslab.cam.ac.uk/ ps422/notes-new.pdf.* 2017.

[9] P. Billingsley. *Probability and measure.* John Wiley and Sons, second edition, 1986.

[10] M. Bramson. Stability of queueing networks. *Probab. Surv.*, 5:169–345, 2008.

[11] H. Chen and A. Mandelbaum. Discrete flow networks: bottleneck analysis and fluid approximations. *Math. Oper. Res.*, 16(2):408–446, 1991.

[12] H. Chen and D. Yao. *Fundamentals of queueing networks*, volume 46 of *Applications of Mathematics (New York)*.

[13] P. A. Ferrari, C. Landim, and V. Sisko. Condensation for a fixed number of independent random variables. *J. Stat. Phys.*, 128(5):1153–1158, 2007.

[14] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*, volume 99 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*. Springer, Cham, third edition, 2021.

[15] C. Kipnis and C. Landim. *Scaling limits of interacting particle systems*, volume 320 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[16] C. Landim. Metastable Markov chains. *Probability Surveys*, 16:143 – 227, 2019.

[17] J. Norris. *Markov Chains*. Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics. 1998.

[18] P. Robert. *Stochastic networks and queues*, volume 52 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, french edition, 2003. Stochastic Modelling and Applied Probability.

[19] F. Spitzer. Interaction of Markov processes. *Advances in Math.*, 5:246–290 (1970), 1970.