UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Certificados polinomiales de no negatividad sobre conjuntos semialgebraicos cilíndricos

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Paula Micaela Escorcielo

Director de tesis: Daniel Perrucci
Consejero de estudios: Daniel Perrucci

Fecha de defensa: 5 de noviembre de 2020
Lugar de trabajo: IMAS - CONICET

Certificados polinomiales de no negatividad sobre conjuntos semialgebraicos cilíndricos

Resumen

Dados $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $S \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto semialgebraico cerrado básico definido por

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\}$$

y $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ un polinomio que resulta no negativo en S, un problema clásico es buscar una igualdad algebraica que ponga en evidencia ese hecho. Dicha igualdad se denomina certificado de no negatividad de f en S. En esta tesis estudiamos certificados de no negatividad sobre conjuntos semialgebraicos cilíndricos no compactos.

En la primera parte, consideramos conjuntos de la forma $S \times \mathbb{R}$ con $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraico cerrado básico y demostramos que el Putinar Positivstellensatz puede extenderse, bajo una hipótesis adicional, a conjuntos de la forma $S \times \mathbb{R}$. Además, presentamos una cota para el grado de cada término de la representación obtenida.

En la segunda parte, consideramos el caso de polinomios no negativos sobre una franja de $\mathbb{R}^2$. Dado $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ no negativo en el conjunto semialgebraico $[0, 1] \times \mathbb{R}$ (definido por la desigualdad $X(1-X) \geq 0$), se sabe que f se puede reescribir como $f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1 - X)$ con $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X, Y]^2$. En este trabajo estudiamos la existencia de cotas de grado para cada término de dicha reescritura en los casos $\deg_Y f \leq 2$ y f positivo en $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Para este último caso, presentamos un método constructivo para obtener dicha reescritura, que puede extenderse al caso f no negativo en $[0, 1] \times \mathbb{R}$, pero con finitos ceros *simples* y todos en el borde.

Palabras clave: certificados de no negatividad, sumas de cuadrados, Positivstellensatz, cotas de grado.

Non-negativity Polynomial Certificates over Cylindrical Semialgebraic Sets

Abstract

Given $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $S \subset \mathbb{R}^n$ the basic closed semialgebraic set defined by

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\}$$

and a polynomial $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ which is non-negative on S, a classical problem is to look for an algebraic identity which makes evident this fact. Such an identity is called a certificate of non-negativity of f over S. In this thesis we study certificates of non-negativity over semialgebraic non-compact cylindrical sets.

In the first part, we consider sets of type $S \times \mathbb{R}$ with $S \subset \mathbb{R}^n$ a basic closed semialgebraic set and we prove, under an additional hypothesis, that Putinar Positivstellensatz can be extended to sets of type $S \times \mathbb{R}$. In addition, we present a degree bound for the terms in the representation.

In the second part, we consider the case of polynomials non-negative on a strip in $\mathbb{R}^2$. Given $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ non negative on the semialgebraic set $[0, 1] \times \mathbb{R}$ (defined by the inequality $X(1 - X) \geq 0$), it is known that f can be written as $f(X, Y) = \sigma_0 + \sigma_1 X(1 - X)$ with σ_0, $\sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X, Y]^2$. In this work, we study the existence of degree bounds for each term in this representation in the cases $\deg_Y f \leq 2$ and f positive on $[0, 1] \times \mathbb{R}$. For this last case, we present a constructive method to obtain this representation, which can be extended to the case of f non-negative on $[0, 1] \times \mathbb{R}$, with at most a finite number of *simple* zeros, all of them lying on the boundary.

Keywords: non-negativity certificates, sums of squares, Positivstellensatz, degree bounds.

Índice

Introducción

El marco general en el que se desarrolla esta tesis son los certificados de no negatividad. Un certificado de no negatividad es una igualdad algebraica que pone en evidencia la no negatividad de un polinomio en un determinado conjunto de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, escribir a un polinomio como una suma de cuadrados de polinomios es un certificado de la no negatividad del polinomio en todo $\mathbb{R}^n$. Uno de los orígenes de estos certificados se remonta al Problema 17 de Hilbert, que plantea si es cierto que todo polinomio no negativo en $\mathbb{R}^n$ puede necesariamente reescribirse como una suma de cuadrados de funciones racionales. Es claro que esta reescritura constituye un certificado de dicha no negatividad. Hilbert sabía que si se consideraban únicamente polinomios en vez de funciones racionales el resultado no era cierto, aunque no tenía un contraejemplo sino una demostración teórica. El primer ejemplo explícito fue encontrado por Motzkin en el año 1966 y es el siguiente:

$$M(X_1, X_2) = X_1^4X_2^2 + X_1^2X_2^4 + 1 - 3X_1^2X_2^2 \in \mathbb{R}[X_1, X_2].$$

Para ver que es no negativo basta aplicar, para $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica a la 3-upla $(x_1^4x_2^2, x_1^2x_2^4, 1)$. Por otro lado, para ver que no se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios se procede por el absurdo: suponiendo que existe dicha escritura e igualando coeficiente a coeficiente se obtiene que -3 debe ser una suma de números al cuadrado.

Otro contraejemplo conocido es el polinomio de Choi-Lam definido como

$$CL(X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2 + 1 - 4X_1X_2X_3 \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3].$$

Procediendo de manera similiar al ejemplo anterior se puede ver que es no negativo en $\mathbb{R}^3$ y que no se puede reescribir como suma de cuadrados de polinomios.

La respuesta afirmativa al Problema 17 de Hilbert fue dada por Emil Artin en los años '20 ([1]), dando un gran impulso inicial a la teoría que actualmente se conoce como geometría algebraica real, que abarca el estudio de los certificados en cuestión, de las propiedades topológicas de los conjuntos semialgebraicos (es decir, conjuntos definidos por ecuaciones e inecuaciones polinomiales sobre $\mathbb{R}$) y de la resolución algorítmica de sistemas de ecuaciones e inecuaciones polinomiales sobre $\mathbb{R}$, entre otras cosas.

En el Capítulo 1 de esta tesis presentamos de forma rigurosa definiciones, notaciones y resultados importantes del área que utilizaremos en los capítulos siguientes.

Dos de los teoremas más relevantes del área son el Schmüdgen y el Putinar Positivstellensätze. Dados $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, consideremos $S \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto semialgebraico cerrado básico definido por

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \ldots, g_s(\bar{x}) \geq 0\}$$

y los siguientes conjuntos en el anillo de polinomios $\mathbb{R}[\bar{X}]$:

- $T(g_1, \ldots, g_s)$, el preordering generado por $g_1, \ldots, g_s$, que es el menor conjunto cerrado para la suma y para el producto que contiene a todos los cuadrados y a $g_1, \ldots, g_s$,
- $M(g_1, \ldots, g_s)$, el módulo cuadrático generado por $g_1, \ldots, g_s$, que es el menor conjunto cerrado para la suma y para el producto por cuadrados que contiene a $1, g_1, \ldots, g_s$.

Es fácil ver que todo $f \in T(g_1, \ldots, g_s)$ se puede reescribir como

$$f = \sum_{I \subset \{1, \ldots, s\}} \sigma_I \prod_{i \in I} g_i \qquad \text{con } \sigma_I \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \text{ para todo } I \subset \{1, \ldots, s\},$$

y todo $f \in M(g_1, \ldots, g_s)$ se puede reescribir como

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \qquad \text{con } \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2.$$

Cualquiera de estas dos reescrituras constituye un certificado de no negatividad de f en S.

El Schmüdgen Positivstellensatz ([20]) prueba que si S es compacto, entonces, todo polinomio f positivo en S pertenece a $T(g_1, \ldots, g_s)$.

A su vez, el Putinar Positivstellensatz ([16]) prueba que si $M(g_1, \ldots, g_s)$ es arquimediano, entonces, todo polinomio f positivo en S pertenece a $M(g_1, \ldots, g_s)$.

Se puede ver que si el módulo cuadrático generado por $g_1, \ldots, g_s$ es arquimediano, entonces S es compacto. Como $T(g_1, \ldots, g_s) \subset M(g_1, \ldots, g_s)$, la situación puede resumirse en que el Putinar Positivstellensatz provee un resultado más fuerte, bajo hipótesis a su vez más fuertes que el Schmüdgen Positivstellensatz.

Una pregunta natural es si el Schmüdgen y el Putinar Positivstellensätze pueden extenderse a conjuntos no compactos. Este problema fue estudiado para el caso de cilindros con secciones compactas en [5], [6] y [14]. En [5], los autores prueban que si $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y]$ es un polinomio no negativo en un cilindro de la forma $S \times \mathbb{R}$ con S semialgebraico compacto definido por

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \ldots, g_s(\bar{x}) \geq 0\},$$

entonces, existe un polinomio q perteneciente al preordering generado por $g_1, \ldots, g_s$ en $\mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ de manera que, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $f + \epsilon q$ también pertenece al preordering generado por $g_1, \ldots, g_s$ en $\mathbb{R}[\bar{X}, Y]$. En [14], la autora demuestra, baja una hipótesis técnica adicional, que el Schm̈udgen Positivstellensatz puede extenderse a conjuntos de la forma $S \times F$, con S semialgebraico compacto y F semialgebraico cerrado no acotado. Dicha hipótesis técnica hace referencia a que el polinimo

$f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ verifique que para todo $x \in S$ el polinomio $f(x, Y) \in \mathbb{R}[Y]$ tiene grado $m = \deg_Y f$, en este caso se dice que f es fully m-ic en S.

En [6], los autores prueban una versión para módulos cuadráticos del resultado presentado en [5] que vale, bajo ciertas hipótesis extra, para conjuntos semialgebraicos contenidos en cilindros de la forma $S \times \mathbb{R}$ con S semialgebraico compacto.

En el Capítulo 2 presentamos, bajo la misma hipótesis adicional que en ([14]), nuestro aporte a este problema: demostramos una versión del Putinar Positivstellensatz para cilindros de la forma $S \times \mathbb{R}$ con S un conjunto semialgebraico, que incluye una cota de grado para cada término de la representación obtenida, y extendemos dicho resultado a otros conjuntos cilindrícos no compactos.

Más concretamente, en la Sección 2.1, probamos que si $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ tales que

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset (-1, 1)^n$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ es arquimediano, entonces, existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ positivo en $S \times \mathbb{R}$ con $d = \deg_{\bar{X}} f$, $m = \deg_Y f$ y fully m-ic en S, f se puede escribir como

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X}, Y]}(g_1, \dots, g_s)$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y]^2$ y

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \dots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c(m+1) 2^{\frac{m}{2}} \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1) d^2 (3n)^d}{f^\bullet}\right)^c}$$

donde $f^\bullet$ es el mínimo de $\bar{f} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y, Z]$, la homogeinización de f respecto de la variable Y usando una nueva variable Z, en el conjunto compacto $S \times \{y^2 + z^2 = 1\}$ y $\|f\|_\bullet$ es la norma de f definida en la Sección 2.1.

En el Ejemplo 2.20 mostramos que esta hipótesis (o alguna otra hipótesis adicional) es necesaria para poder extender el Putinar Positivstellensatz a cilindros de la forma $S \times \mathbb{R}$.

En la Sección 2.2 extendemos el resultado al caso de polinomios positivos en $S \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ y en la Sección 2.3 a conjuntos de la forma $S \times \mathbb{R}^r$, para ciertas estructuras particulares de grado.

Por otro lado, como se muestra en el Ejemplo 1.2, ni el Schmüdgen y ni el Putinar Positivstellensätze valen si se reemplaza la hipótesis f positivo en S por f no negativo en S. Más aún, en [18] se prueba que si $\dim S \geq 3$ o si $n = 2$ y S contiene un cono afín de dimensión 2, existen polinomios no negativos en S que no pertenecen al preordering generado por $g_1, \dots, g_s$. Luego de conocerse estos resultados, el foco paso a estar en los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que no contienen conos afines, en particular, el caso de una franja fue el más estudiado. En el año 2010, Murray Marshall prueba que todo polinomio $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ no negativo en el conjunto semialgebraico $[0, 1] \times \mathbb{R}$ (definido por la desigualdad $X(1 - X) \geq 0$) se puede escribir como

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1 - X) \tag{1}$$

con $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X, Y]^2$ ([9, Theorem 1.1]), en otras palabras, que todo polinomio no negativo en la franja $[0, 1] \times \mathbb{R}$ pertenece al módulo cuadrático $M(X(1 - X))$. Este resultado fue extendido posteriormente a otros conjuntos semialgebraicos de dimensión 2 en [10] y [19].

En el Capítulo 3 estudiamos la existencia de cotas de grado para cada término de la escritura (1) en algunos casos particulares. En la Sección 3.1, bajo la hipótesis $\deg_Y f \leq 2$, utilizamos la estrategia de caracterizar los rayos extremos de un cono adecuado para conseguir una cota de grado para cada término de la representación (1). En la Sección 3.2 continuamos estudiando el problema de acotar el grado de cada término de la representación (1) pero desde un enfoque similar al del Capítulo 2. En la Sección 3.2.1 mostramos un método para obtener dicha representación y damos condiciones necesarias para que se puede aplicar. En la Sección 3.2.2 mostramos que este método se puede utilizar en el caso de f positivo en $[0,1] \times \mathbb{R}$ y fully m-ic en $[0,1]$ con $m = \deg_Y f$ y luego acotamos el grado de cada término de la representación obtenida. La cota obtenida con este método mejora en este caso particular a la cota que se obtiene aplicando la versión del Putinar Positivstellensatz probada en el capítulo anterior. En la Sección 3.2.3 mostramos que el mismo método se puede utilizar en el caso de f no negativo en $[0,1] \times \mathbb{R}$ y fully m-ic en $[0,1]$, pero con un número finitos de ceros *simples* en la franja y todos en el borde.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos de forma rigurosa definiciones y notaciones que usaremos a lo largo de toda la tesis y enunciamos los resultados más importantes en torno a certificados de no negatividad, algunos de los cuales fueron incluidos en la introducción.
Notaremos con $\mathbb{R}[\bar{X}] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ al anillo de polinomios en n variables con coeficientes reales y con $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ al subconjunto de sumas de cuadrados

1.1 Sumas de cuadrados

En la introducción mencionamos que no es cierto que todo polinomio no negativo en $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios (en general, es necesario pasar al cuerpo de funciones racionales). Sin embargo, hay algunos casos que veremos a continuación en los que sí es posible conseguir esa escritura ([3, Section 6.3], [8, Section 1.2]). Es fácil ver que tanto si un polinomio es no negativo en $\mathbb{R}^n$ como si se puede reescribir como una suma se cuadrados, necesariamente el grado del polinomio debe ser par. Luego, los polinomios de grado impar quedan excluídos del problema en cuestión.
Si $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ es no negativo en $\mathbb{R}^n$ y $d = \deg f$, entonces, f se puede reescribir como suma de cuadrados de polinomios en los siguientes casos:

- $n = 1$,
- $d = 2$,
- $n = 2$ y $d = 4$.

Además, en dicha reescritura el grado de cada cuadrado está acotado por d.
En todos los demás casos es posible construir, a partir de los polinomios de Motzkin y Choi-Lam, polinomios no negativos en todo $\mathbb{R}^n$ que no se pueden reescribir como suma de cuadrados de polinomios.
Por otro lado, si $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ es homogéneo, no negativo en $\mathbb{R}^n$ y $d = \deg f$, f se puede reescribir como suma de cuadrados de polinomios en los siguientes casos:

- $n = 2$,
- $d = 2$,
- $n = 3$ y $d = 4$.

Nuevamente, en dicha reescritura el grado de cada cuadrado está acotado por d.

Finalmente, para polinomios bihomogéneos hay un caso adicional en el que se puede asegurar que existe esta reescritura: en [4, Proposition 7] se prueba que si $n \geq 3$, $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ es bihomogéneo en (X_1, X_2) y $(X_3, \ldots, X_n)$, no negativo en $\mathbb{R}^n$, $d = \deg_{X_1} f$ y $\deg_{(X_3,\ldots,X_n)} f = 2$, entonces, f se puede reescribir como suma de cuadrados de polinomios con el grado de cada cuadrado acotado por $d+2$. A partir de este resultado se puede deducir lo siguiente para el caso no homogéneo: si $n \geq 2$, $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ es no negativo en $\mathbb{R}^n$, $d = \deg_{X_1} f$ y $\deg_{(X_2,\ldots,X_n)} f = 2$, entonces, f se puede reescribir como suma de cuadrados de polinomios con el grado de cada cuadrado acotado por $d + 2$.

1.2 Schmüdgen y Putinar Positivstellensätze

Dados $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $S \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto semialgebraico cerrado básico definido por

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \ldots, g_s(\bar{x}) \geq 0\}$$

y $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f \geq 0$ en S, un problema clásico es buscar un certificado de dicha no negatividad.

Hay dos objetos algebraicos relacionados con este problema.

Definición 1.1 *Un conjunto $T \subset \mathbb{R}[\bar{X}]$ es un preordering si*

- $\mathbb{R}[\bar{X}]^2 \subset T$,
- $T + T \subset T$,
- $TT \subset T$.

El conjunto $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ es el preordering más pequeño de $\mathbb{R}[\bar{X}]$.

Definición 1.2 *Un conjunto $M \subset \mathbb{R}[\bar{X}]$ es un módulo cuadrático si*

- $1 \in M$,
- $M + M \subset M$,
- $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 M \subset M$.

Nuevamente, $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ es el módulo cuadrático más pequeño de $\mathbb{R}[\bar{X}]$.

Dados $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, definimos $T(g_1, \dots, g_s)$ el preordering generado por $g_1, \dots, g_s$ en $\mathbb{R}[\bar{X}]$ como

$$T(g_1, \dots, g_s) = \Big\{ \sum_{I \subset \{1, \dots, s\}} \sigma_I \prod_{i \in I} g_i \mid \sigma_I \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \text{ para todo } I \subset \{1, \dots, s\} \Big\}$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ el módulo cuadrático generado por $g_1, \dots, g_s$ en $\mathbb{R}[\bar{X}]$ como

$$M(g_1, \dots, g_s) = \Big\{ \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \mid \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \Big\}.$$

Notemos que $T(g_1, \dots, g_s)$ es el preordering más pequeño que contiene a $g_1, \dots, g_s$ y $M(g_1, \dots, g_s)$ es el módulo cuadrático más pequeño que contiene a $g_1, \dots, g_s$.

Observación 1.3 *Dados $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, se tiene que $M(g_1, \dots, g_s) \subset T(g_1, \dots, g_s)$. La igualdad vale en algunos casos particulares, por ejemplo, cuando $s = 1$.*

Observación 1.4 *No todo preordering es el generado por una cantidad finita de polinomios en $\mathbb{R}[\bar{X}]$. En efecto, consideremos*

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n+1]$$

y

$$T = \{g \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid g \geq 0 \text{ en } S\}.$$

Es fácil ver que T es un preordering. Sin embargo, no existen $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ tal que $T = T(g_1, \dots, g_s)$. Si así fuera, como para todo $x \notin S$ existe un polinomio $g \in T$ (por ejemplo, cuadrático) tal que $g(x) < 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0 \text{ para todo } g \in T\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0 \text{ para todo } g \in T(g_1, \dots, g_s)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_s(x) \geq 0\}, \end{aligned}$$

lo cual es un absurdo, ya que S tiene infinitas componentes conexas pero lo conjuntos semialgebraicos tienen finitas componentes conexas ([3, Theorem 2.4.4]).

El mismo ejemplo sirve para mostrar que tampoco es cierto que todo módulo cuadrático es el generado por una cantidad finita de polinomios en $\mathbb{R}[\bar{X}]$.

Es claro que todos los elementos de $M(g_1, \dots, g_s)$ y de $T(g_1, \dots, g_s)$ son no negativos en S pero la recíproca no es cierta en general, como veremos en el siguiente ejemplo extraído de [22].

Ejemplo 1.5 *Consideremos $g = (1 - X^2)^3 \in \mathbb{R}[X]$,*

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\} = [-1, 1]$$

y $f = 1 - X^2 \in \mathbb{R}[X]$. *Observemos que* $f \geq 0$ *en* S. *Sin embargo,* f *no pertenece a* $M(g) = T(g)$. *En efecto, si* $f \in M(g)$, *se tiene que*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1(1 - X^2)^3 \tag{1.1}$$

con $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X]^2$. *Especializando (1.1) en* $X = 1$ *y recordando que* $\sigma_0 \geq 0$ *en* $\mathbb{R}$, *obtenemos que* $X = 1$ *es raíz de* σ_0 *con multiplicidad al menos* 2. *Finalmente, mirando el lado derecho de (1.1), concluimos que la multiplicidad de* $X = 1$ *como raíz de* f *es al menos* 2, *lo cual es absurdo.*

El Schmüdgen Positivstellensatz ([20]) y el Putinar Positivstellensatz ([16]) son dos de los resultados más importantes en torno al problema de buscar certificados de no negatividad. A continuación se enuncian las versiones clásicas de dichos resultados.

Teorema 1.6 (Schmüdgen Positivstellensatz) *Si* S *es compacto y* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f > 0$ *en* S, *entonces,* $f \in T(g_1, \dots, g_s)$.

Para enunciar el Putinar Positivstellensatz necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.7 *Un módulo cuadrático* M *se dice arquimediano si existe* $N \in \mathbb{R}_{>0}$ *tal que*

$$N - X_1^2 - \cdots - X_n^2 \in M.$$

Observemos que si $M(g_1, \dots, g_s)$ es arquimediano, S resulta compacto, pues, para todo $\bar{x} \in S$, $\|\bar{x}\|_2 \leq \sqrt{N}$. La recíproca de esta implicación no es cierta en general, como muestra el siguiente ejemplo extraído de [8, Example 7.3.1].

Observación 1.8 *Sean* g_1, g_2, $g_3 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ *definidos por*

$$g_1 = X_1 - \frac{1}{2}, \quad g_2 = X_2 - \frac{1}{2}, \quad g_3 = 1 - X_1X_2.$$

Es claro que S *es compacto y se puede ver que* $M(g_1, g_2, g_3)$ *no es arquimediano.*

Teorema 1.9 (Putinar Positivstellensatz) *Si* $M(g_1, \dots, g_s)$ *es arquimediano y* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f > 0$ *en* S, *entonces,* $f \in M(g_1, \dots, g_s)$.

Como $M(g_1, \dots, g_s) \subset T(g_1, \dots, g_s)$, la situación puede resumirse en que el Putinar Positivstellensatz provee un resultado más fuerte, bajo hipótesis a su vez más fuertes que el Schmüdgen Positivstellensatz.

En ninguno de los dos resultados es posible relajar la hipótesis de f positivo en S a f no negativo en S. Para ver esto, basta considerar el Ejemplo 1.5 y observar que $S = [-1, 1]$ es compacto y, más aún, $M((1 - X^2)^3)$ es arquimediano pues

$$\frac{4}{3} - X^2 = \frac{4}{3}X^2\Big(X^2 - \frac{3}{2}\Big)^2 + \frac{4}{3}\Big(1 - X^2\Big)^3 \in M((1 - X^2)^3).$$

Luego, se verifican las hipótesis de ambos teoremas, pero, como vimos antes, $f = 1 - X^2$ no pertenece a $M((1-X^2)^3) = T((1-X^2)^3)$.

Para ambos resultados existen cotas para el grado de cada término de las representaciones obtenidas. En el caso del Schmüdgen Positivstellensatz dicha cota fue probada por Schweighofer en [21], mientras que para el Putinar Positivstellensatz, fue probada por Nie y Schweighofer en [11]. Para poder enunciar estos resultados es necesario dar la siguiente definición.

Definición 1.10 *Sea*

$$f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} a_\alpha \bar{X}^\alpha \in \mathbb{R}[\bar{X}]$$

consideramos la norma de f definida por

$$\|f\| = \max\{|a_\alpha| \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq d\};$$

donde, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \qquad y \qquad \binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}.$$

Esta norma fue utilizada previamente en [11], [14], [15] y [21]. La misma da una medida del tamaño de los coeficientes de un polinomio y tiene propiedades convenientes como las que se enuncian en el Lema 2.11 y en la siguiente observación.

Observación 1.11 *Para todo $d \in \mathbb{N}$, como*

$$(X_1 + \cdots + X_n)^d = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = d}} \frac{d!}{\alpha_1! \ldots \alpha_d!} \bar{X}^\alpha$$

se tiene que $\|(X_1 + \cdots + X_n)^d\| = 1$.

Teorema 1.12 (Schmüdgen Positivstellensatz con cota de grado) *Sean $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \ldots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset (-1,1)^n.$$

Entonces, existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ positivo en S, f se puede escribir como

$$f = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,s\}} \sigma_I \prod_{i \in I} g_i \in T(g_1, \ldots, g_s)$$

con $\sigma_I \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ y

$$\deg\left(\sigma_I \prod_{i \in I} g_i\right) \leq c d^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{||f||}{f^*}\right)^c\right)$$

para todo $I \subseteq \{1, \ldots, s\}$, donde $d = \deg f$ y $f^* = \min\{f(\bar{x}) \,|\, \bar{x} \in S\} > 0$.

Teorema 1.13 (Putinar Positivstellensatz con cota de grado) *Sean $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset (-1,1)^n$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ es arquimediano. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ positivo en S, f se puede escribir como

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \in M(g_1, \dots, g_s)$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ y

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \dots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c\, \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\| d^2 n^d}{f^*}\right)^c},$$

donde $d = \deg f$ y $f^* = \min\{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in S\} > 0$.

Notemos que la hipótesis $S \subset (-1,1)^n$ se agrega únicamente por simplicidad ya que si S es compacto, en particular, es acotado, luego, componiendo $g_1, \dots, g_s$ con un cambio afín de variables, se puede trasladar S al $(-1,1)^n$. Entonces, para aplicar el resultado es necesario componer f con el mismo cambio afín de variables. Al hacer esto no se modifica el grado pero sí los coeficientes y, por lo tanto, su norma (ver, por ejemplo, la demostracion del Teorema 2.18).

1.3 Teorema de Polya

Otro de los resultados más importantes del área es el Teorema de Polya ([13]). Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el simplex estándar $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\Delta_n = \left\{ (x_0, \bar{x}) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \text{ y } x_i \geq 0 \textit{ para todo } 0 \leq i \leq n \right\}.$$

Teorema 1.14 (Teorema de Polya) *Sea $f \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}] = \mathbb{R}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ homogéneo y positivo en Δ_n, entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N f$$

tiene todos sus coeficientes positivos.

Observemos que el resultado provee un certificado de la positividad de f en Δ_n. Más aún, como f es homogéneo, dicha escritura es un certificado de positividad en $\mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} - \{0\}$.
Nuevamente, existe una versión del teorema con cota para N, probada por Powers y Reznick en [15].

Teorema 1.15 (Teorema de Polya con cota) *Sea $f \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}]$ homogéneo y positivo en Δ_n con $d = \deg f$ y $f^* = \min\{f(x_0, \bar{x}) \mid (x_0, \bar{x}) \in \Delta_n\}$. Entonces, si*

$$N > \frac{d(d-1)\|f\|}{2f^*} - d,$$

$(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N f$ tiene todos sus coeficientes positivos.

1.4 Convexidad

En esta sección presentaremos algunas nociones básicas de convexidad que usaremos en la Sección 3.1. Comenzamos con algunas definiciones.

Definición 1.16 *Un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es un cono si*

- $0 \in \mathcal{C}$,
- $\mathcal{C} + \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$,
- $\mathbb{R}_{\geq 0}\, \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$.

Definición 1.17 *Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un cono. Un subconjunto $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ es una cara si*

- *$\mathcal{C}'$ es una cono,*
- *si $v_1, v_2 \in \mathcal{C}$ verifican $\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \in \mathcal{C}'$ para algún $\alpha \in (0,1)$, entonces, $v_1, v_2 \in \mathcal{C}'$.*

Definición 1.18 *Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un cono. Una cara $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ es un rayo extremo de $\mathcal{C}$ si*

$$\mathcal{C}' = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

para algún $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. En este caso, decimos que v es un generador de $\mathcal{C}'$.

A continuación enunciamos un resultado muy importante de la teoría de convexidad que se puede encontrar en [17, Section 18].

Teorema 1.19 *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono cerrado que no contiene rectas, entonces, todo elemento de $\mathcal{C}$ se puede escribir como una suma de elementos pertenecientes a los rayos extremos de $\mathcal{C}$.*

Capítulo 2

Una versión del Putinar Positivstellensatz para cilindros

Una pregunta natural es si el Schmüdgen y el Putinar Positivstellensätze pueden extenderse a conjuntos no compactos. Este problema fue estudiado para el caso de cilindros con secciones compactas en [5], [6] y [14].

En [5], los autores prueban que si $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y]$ es un polinomio no negativo en un cilindro de la forma $S \times \mathbb{R}$ con S semialgebraico compacto definido por

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\},$$

entonces, existe un polinomio q perteneciente al preordering generado por $g_1, \dots, g_s$ en $\mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ de manera que, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $f + \epsilon q$ también pertenece al preordering generado por $g_1, \dots, g_s$ en $\mathbb{R}[\bar{X}, Y]$.

En [14], la autora demuestra, bajo una hipótesis técnica adicional, que el Schm̈udgen Positivstellensatz puede extenderse a conjuntos de la forma $S \times F$, con S semialgebraico compacto y F semialgebraico cerrado no acotado.

En [6], los autores prueban una versión para módulos cuadráticos del resultado presentado en [5] que vale, bajo ciertas hipótesis extra, para conjuntos semialgebraicos contenidos en cilindros de la forma $S \times \mathbb{R}$ con S semialgebraico compacto.

En este capítulo presentamos algunos resultados en torno a polinomios positivos sobre conjuntos cilíndricos no acotados. En la Sección 2.1, bajo la misma hipótesis técnica que en [14], extendemos el Putinar Positivstellensatz a cilindros de la forma $S \times \mathbb{R}$. En la Sección 2.2 generalizamos dicho resultado a cilindros de la forma $S \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ y en la Sección 2.3 a conjuntos de la forma $S \times \mathbb{R}^r$, para ciertas estructuras particulares de grado.

2.1 El caso $S \times \mathbb{R}$

En esta sección consideraremos el anillo de polinomios $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y]$ ya que será de utilidad distinguir la variable que se mueve en la dirección no acotada del cilindro.

El principal resultado de la sección es el Teorema 2.18. Sin embargo, a fin de demostrar este resultado, es necesario primero demostrar un resultado auxiliar (Proposición 2.15). El Teorema 2.18 se deduce de dicho resultado componiendo con un cambio afín de variables.

En la demostración de la Proposición 2.15 utilizamos técnicas desarrolladas en [11], [14] y [21]. Más precisamente, en [11] se prueba una cota de grado para el Putinar Positivstellensatz. En dicha demostración, se utiliza la cota de grado para el Schmüdgen Positivstellensatz ([21]). Por otro lado, en [14] se prueba una versión del Schmüdgen Positivstellensatz para cilindros.

En esta sección tomamos estas ideas y las reorganizamos para obtener una versión del Putinar Positivstellensatz para cilindros con una cota para el grado de cada término de la representación obtenida. Más concretamente, consideramos la variable Y como un parámetro y obtuvimos una versión uniforme del Teorema 1.13. Para este paso fue necesario reemplazar el Schmüdgen Positivstellensatz con cota de grado por el Teorema de Polya con cota (ver Sección 1.3) que vale para polinomios positivos en el simplex estándar Δ_n. Es por eso que en la Proposición 2.15 suponemos que $S \subseteq \widetilde{\Delta}_n^\circ$ y luego, en el Teorema 2.18, probamos el resultado para $S \subset (-1,1)^n$ vía un cambio de variables.

Comencemos dando la definición de la hipótesis adicional a considerar.

Definición 2.1 *Sea $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$, $m = \deg_Y f$ y $S \subset \mathbb{R}^n$. El polinomio f se dice* fully m-ic *en S si, para todo $\bar{x} \in S$, $f(\bar{x}, Y) \in \mathbb{R}[Y]$ tiene grado m.*

En otras palabras, f es fully m-ic en S si cuando lo miramos como polinomio en Y, el coeficiente principal (que es un polinomio en $\mathbb{R}[\bar{X}]$) no se anula en S.

Utilizaremos la siguiente notación.

Notación 2.2 *Para*

$$f = \sum_{0 \le i \le m} f_i(\bar{X}) Y^i \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y],$$

con $f_m \neq 0$ notamos con

$$\bar{f} = \sum_{0 \le i \le m} f_i(\bar{X}) Y^i Z^{m-i} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y, Z],$$

a la homogeneización de f con respecto a la variable Y.

Sean $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ y $S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \ge 0, \ldots, g_s(\bar{x}) \ge 0\}$. Consideremos $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ con $m = \deg_Y f$ y $f > 0$ en $S \times \mathbb{R}$ y supongamos S compacto. Si f es fully m-ic en S, se tiene que m es par y $f_m > 0$ en S. Más aún,

$$\bar{f} > 0 \text{ en } S \times C$$

con $C = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 = 1\}$. En efecto, sea $(\bar{x}, y, z) \in S \times C$, si $z \neq 0$,

$$\bar{f}(\bar{x}, y, z) = z^m f\left(\bar{x}, \frac{y}{z}\right) > 0,$$

y si $z = 0$,

$$\bar{f}(\bar{x}, \pm 1, 0) = f_m(\bar{x})(\pm 1)^m > 0.$$

Notaremos

$$f^{\bullet} = \min\{\bar{f}(\bar{x}, y, z) \mid (\bar{x}, y, z) \in S \times C\} > 0.$$

Consideraremos otra norma en el anillo de polinomios $\mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ definida de la siguiente manera.

Definición 2.3 *Sea*

$$f = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} a_{\alpha,i} \bar{X}^{\alpha} Y^i \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$$

consideramos otra norma para f definida por

$$\|f\|_{\bullet} = \max\{|a_{\alpha,i}| \mid 0 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq d\}.$$

La diferencia entre esta norma y la de la Definición 1.10 es que, en este caso, para normalizar cada coeficiente se tiene en cuenta únicamente el grado en $\bar{X}$ del monomio correspondiente.
A continuación, extendemos la Definición 2.3 a polinomios en $\mathbb{R}[\bar{X}, Y, Z]$ homogéneos en (Y, Z).

Definición 2.4 *Sea*

$$h = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} a_{\alpha,i} \bar{X}^{\alpha} Y^i Z^{m-i} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y, Z]$$

definimos

$$\|h\|_{\bullet} = \max\{|a_{\alpha,i}| \mid 0 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq d\}.$$

Observemos que $\|\bar{f}\|_{\bullet} = \|f\|_{\bullet}$, para todo $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$.
En lo que sigue veremos algunos lemas técnicos que se utilizan en la demostración de la Proposición 2.15.

Notación 2.5 *Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos con $\widetilde{\Delta}_n$ al simplex*

$$\widetilde{\Delta}_n = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \text{ y } x_i \geq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Observemos que $\widetilde{\Delta}_n$ es la proyección del simplex estándar Δ_n sobre el plano $X_0 = 0$.

Lema 2.6 *Sea* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$ *y* $m = \deg_Y f$*, entonces,*

$$|\bar{f}(\bar{x}, y, z)| \leq \|f\|_\bullet (m+1)(d+1)$$

para todo $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n$ *e* $(y, z) \in C$*.*

Demostración: Sean $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n$ e $(y, z) \in C$, entonces,

$$\begin{aligned}
|\bar{f}(\bar{x}, y, z)| &\leq \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} |a_{\alpha,i}| \bar{x}^\alpha |y|^i |z|^{m-i} \\
&\leq \|f\|_\bullet \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} \bar{x}^\alpha \\
&= \|f\|_\bullet \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq h \leq d} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = h}} \binom{|\alpha|}{\alpha} \bar{x}^\alpha \\
&= \|f\|_\bullet \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq h \leq d} (x_1 + \cdots + x_n)^h \\
&\leq \|f\|_\bullet \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq h \leq d} 1 \\
&= \|f\|_\bullet (m+1)(d+1).
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.7 *Sea* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$ *y* $m = \deg_Y f$*, entonces,*

$$|\bar{f}(\bar{x}_1, y, z) - \bar{f}(\bar{x}_2, y, z)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n} \|f\|_\bullet (m+1) d(d+1) \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$$

para todo $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \widetilde{\Delta}_n$ *e* $(y, z) \in C$*.*

Demostración: Sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \widetilde{\Delta}_n$ e $(y, z) \in C$. Por Teorema del valor medio, existe $\bar{x}_3 \in \widetilde{\Delta}_n$ tal que

$$|\bar{f}(\bar{x}_1, y, z) - \bar{f}(\bar{x}_2, y, z)| \leq \|D_{\bar{X}} \bar{f}(\bar{x}_3, y, z)\| \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|. \tag{2.1}$$

Por otro lado, para $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n$ y $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial X_j}(\bar{x}, y, z) \right| &\leq \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq h \leq d} \sum_{\substack{|\alpha| = h \\ \alpha_j \neq 0}} \binom{|\alpha|}{\alpha} |a_{\alpha,i}| \alpha_j \bar{x}^{\alpha - e_j} |y|^i |z|^{m-i} \\
&\leq \|f\|_{\bullet} \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq h \leq d} \sum_{\substack{|\alpha| = h \\ \alpha_j \neq 0}} \binom{|\alpha|}{\alpha} \alpha_j \bar{x}^{\alpha - e_j} \\
&= \|f\|_{\bullet} \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq h \leq d} \sum_{\substack{|\alpha| = h \\ \alpha_j \neq 0}} h \binom{|\alpha - e_j|}{\alpha - e_j} \bar{x}^{\alpha - e_j} \\
&= \|f\|_{\bullet} \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq h \leq d} h (x_1 + \cdots + x_n)^{h-1} \\
&\leq \|f\|_{\bullet} \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq h \leq d} h \\
&= \frac{1}{2} \|f\|_{\bullet} (m+1) d (d+1).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|D_{\bar{X}} f(\bar{x}_3, y, z)\| \leq \frac{1}{2} \sqrt{n} \|f\|_{\bullet} (m+1) d (d+1). \tag{2.2}$$

Juntando (2.1) y (2.2) se tiene el resultado. □

Otra de las herramientas a considerar es la Desigualdad de Łojasiewicz (ver, por ejemplo, [3, Corolario 2.6.7]), que enunciamos a continuación. De hecho, vamos a utilizar dicho resultado en un caso particular que enunciamos en la Observación 2.9.

Lema 2.8 (Desigualdad de Łojasiewicz) *Sean A un conjunto semialgebraico compacto y $p, q : A \to \mathbb{R}$ funciones semialgebraicas continuas tales que $p^{-1}(0) \subset q^{-1}(0)$. Entonces, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que*

$$|q(\bar{x})|^{c_1} \leq c_2 |p(\bar{x})|$$

para todo $\bar{x} \in A$.

Observación 2.9 *Sean $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset \widetilde{\Delta}_n.$$

Sean $p, q : \widetilde{\Delta}_n \to \mathbb{R}$ definidas por

$$p(\bar{x}) = \min\{g_1(\bar{x}), \dots, g_s(\bar{x}), 0\} \text{ y } q(\bar{x}) = \operatorname{dist}(\bar{x}, S).$$

Notemos que $p^{-1}(0) = q^{-1}(0) = S$, luego, por la desigualdad de Łojasiewicz existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$\operatorname{dist}(\bar{x}, S)^{c_1} \leq -c_2 \min\{g_1(\bar{x}), \dots, g_s(\bar{x}), 0\}$$

para todo $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n$.
En particular, para $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n \setminus S$, *existe* $1 \le i_0 \le s$ *(dependiente de* $\bar{x}$*) tal que* $g_{i_0}(\bar{x}) < 0$ *y*

$$\operatorname{dist}(\bar{x}, S)^{c_1} \le -c_2 g_{i_0}(\bar{x}). \tag{2.3}$$

Como mencionamos previamente, en la Proposición 2.15 probamos un resultado auxiliar en el cual suponemos $S \subset \widetilde{\Delta}_n^\circ$ a fin de poder aplicar el Teorema de Polya. Más concretamente, dado $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ positivo en $S \times \mathbb{R}$, primero perturbamos f de manera que dicha perturbación h resulte positiva en el simplex $\widetilde{\Delta}_n$. Luego, introducimos una nueva variable X_0 y homogeneizamos h utilizando $X_0 + X_1 + \cdots + X_n$, a fin de que dicha homogeneización resulte positiva en el simplex estándar $\Delta_n \times C$ y se pueda aplicar el Teorema de Polya. Luego de aplicar dicho teorema, reemplazamos la variable X_0 por $1 - X_1 - \cdots - X_n$ y obtenemos una escritura para $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ que involucra a potencias de $X_1, \dots, X_n$ y $1 - X_1 - \cdots - X_n$. Extrayendo cuadrados, esta escritura se expresa en función de polinomios de la forma

$$(1 - X_1 - \cdots - X_n)^{v_0} \bar{X}^{\bar{v}},$$

con $v = (v_0, \bar{v}) \in \{0,1\}^{n+1}$, que son independientes de la variable Y y, como $S \subset \widetilde{\Delta}_n^\circ$, positivos en S. Por lo tanto, si $M(g_1, \dots, g_s)$ es arquimediano, podemos usar la versión clásica del Putinar Positivstellensatz, que afirma que existe una escritura para estos polinomios como elementos de $M(g_1, \dots, g_s)$. Es importante remarcar que dicha escritura depende únicamente de los polinomios $g_1, \dots, g_s$ y no de f. En la siguiente observación explicitamos esta idea.

Observación 2.10 *Sean* $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ *tal que*

$$\emptyset \ne S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \ge 0, \dots, g_s(\bar{x}) \ge 0\} \subset \widetilde{\Delta}_n^\circ$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ *es arquimediano. Para* $v = (v_0, \bar{v}) \in \{0,1\}^{n+1}$, *tenemos que*

$$(1 - X_1 - \cdots - X_n)^{v_0} \bar{X}^{\bar{v}} > 0 \text{ en } S.$$

Luego, por el Putinar Postivistellensatz ([16]), existe una escritura

$$(1 - X_1 - \cdots - X_n)^{v_0} \bar{X}^{\bar{v}} = \sigma_{v0} + \sigma_{v1} g_1 + \cdots + \sigma_{vs} g_s \tag{2.4}$$

con $\sigma_{vi} \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ *para* $1 \le i \le s$.

A continuación incluimos algunas propiedades de la norma de la Definición 1.10. Las demostraciones se pueden encontrar en [11, Proposition 14] y [21, Lemma 8].

Lema 2.11 *Sea* $s \in \mathbb{N}$ *y sean* $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}] - \{0\}$. *Entonces,*

$$\|g_1 \dots g_s\| \le (\deg g_1 + 1) \dots (\deg g_s + 1) \|g_1\| \dots \|g_s\|.$$

Más aún, si $g_1, \dots, g_s$ *son homogéneos,*

$$\|g_1 \dots g_s\| \le \|g_1\| \dots \|g_s\|.$$

El siguiente lema técnico es similar a [11, Lemma 15]. Lo utilizaremos para definir la constante que aparece en la cota de grado de la representación obtenida.

Lema 2.12 *Dado* $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^6_{\geq 0}$*, existe una constante positiva* c *tal que, para todo* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*,*

$$c_1 r^{c_2} \leq c\,\mathrm{e}^{r^c} \qquad y \qquad c_3 r^{c_4} \mathrm{e}^{c_5 r^{c_6}} \leq c\,\mathrm{e}^{r^c}.$$

Demostración: Como $[0, 2]$ es compacto, existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$c_1 r^{c_2} \leq c \qquad \text{y} \qquad c_3 r^{c_4}\, \mathrm{e}^{c_5 r^{c_6}} \leq c$$

para $0 \leq r \leq 2$. Agrandando c si es necesario podemos suponer también que

$$c \geq c_1,\ c \geq c_2,\ c \geq c_3,\ c - 1 \geq c_4,\ 2^{\frac{c-1}{2}} \geq c_5 \text{ y } \frac{c-1}{2} \geq c_6.$$

Luego, para $0 \leq r \leq 2$,

$$c_1 r^{c_2} \leq c \leq c\,\mathrm{e}^{r^c} \qquad \text{y} \qquad c_3 r^{c_4}\, \mathrm{e}^{c_5 r^{c_6}} \leq c \leq c\,\mathrm{e}^{r^c}$$

y para $r \geq 2$, por un lado tenemos que

$$c_1 r^{c_2} < c_1\, \mathrm{e}^{r^{c_2}} \leq c\,\mathrm{e}^{r^c}$$

y por otro lado tenemos que

$$c_3 r^{c_4}\, \mathrm{e}^{c_5 r^{c_6}} \leq c_3\, \mathrm{e}^{r^{c_4} + c_5 r^{c_6}} \leq c_3\, \mathrm{e}^{r^{c-1} + 2^{\frac{c-1}{2}} r^{\frac{c-1}{2}}} \leq c_3\, \mathrm{e}^{2r^{c-1}} \leq c\,\mathrm{e}^{r^c}.$$

□

La siguiente desigualdad será de utilidad en la demostración de la Proposición 2.15. Se desprende fácilmente del análisis de la función $f(t) = t(t-1)^{2k}$ en el intervalo $[0, 1]$.

Observación 2.13 *Para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $t \in [0, 1]$*, se tiene que*

$$t(t-1)^{2k} < \frac{1}{2k+1}.$$

A continuación enunciamos y demostramos la Proposición 2.15, para la cual utilizaremos la siguiente notación.

Notación 2.14 *Para* $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$*, notamos*

$$M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y]}(g_1, \ldots, g_s) = \left\{ \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \,|\, \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y]^2 \right\}$$

al módulo cuadrático generado por $g_1, \ldots, g_s$ *en* $\mathbb{R}[\bar{X}, Y]$*.*

A fin de no recargar la notación, al módulo cuadrático generado por $g_1, \dots, g_s$ en $\mathbb{R}[\bar{X}]$ lo continuaremos notando con $M(g_1, \dots, g_s)$.

Proposición 2.15 *Sean $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset \widetilde{\Delta}_n^\circ$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ es arquimediano. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ positivo en $S \times \mathbb{R}$ con $d = \deg_{\bar{X}} f$, $m = \deg_Y f$ y f fully m-ic en S, f se puede escribir como

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y]}(g_1, \dots, g_s)$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y]^2$ y

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \dots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c(m+1) 2^{\frac{m}{2}} \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1) d^2}{f^\bullet}\right)^c}.$$

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $\deg g_i \geq 1$ y $|g_i| \leq 1$ en $\widetilde{\Delta}_n$ para todo $1 \leq i \leq s$. En efecto, si $\deg g_i = 0$, la condición $g_i \geq 0$ resulta vacua y, por lo tanto, se puede eliminar y si no es cierto que $|g_i| \leq 1$ en $\widetilde{\Delta}_n$, como $\widetilde{\Delta}_n$ es compacto, se puede cambiar g_i por un múltiplo por un escalar positivo de manera que dicho múltiplo resulte de módulo menor o igual a 1 en $\widetilde{\Delta}_n$.
Para probar el resultado vamos a considerar $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ como en el enunciado y mostrar que podemos encontrar una constante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ independiente de f. Si $d = 0$, $f \in \mathbb{R}[Y]$ es positivo en $\mathbb{R}$ y en este caso f se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios con el grado de cada término acotado por m (Sección 1.1). Luego, la cota de grado vale para cualquier $c \geq 1$. A partir de ahora suponemos $d \geq 1$. Si la constante c encontrada resulta ser menor a 1 la reemplazamos por el resultado de aplicar el Lema 2.12 a la 6-upla $(1, 0, c, 0, 1, c)$.
El primer paso es encontrar $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$h = \bar{f} - \lambda (Y^2 + Z^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{1 \leq i \leq s} g_i (g_i - 1)^{2k} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y, Z]$$

verifique $h \geq \frac{1}{2} f^\bullet$ en $\widetilde{\Delta}_n \times C$.
Para $(y, z) \in C$ fijo consideramos

$$A_{y,z} = \left\{ \bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n \mid \bar{f}(\bar{x}, y, z) \leq \frac{3}{4} f^\bullet \right\}.$$

Notemos que $A_{y,z} \cap S = \emptyset$.
Para determinar las condiciones que deben cumplir λ y k consideraremos los casos $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n - A_{y,z}$ y $\bar{x} \in A_{y,z}$ por separado.
Si $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n - A_{y,z}$, usando la Observación 2.13,

$$\begin{aligned} h(\bar{x}, y, z) &= \bar{f}(\bar{x}, y, z) - \lambda (y^2 + z^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{1 \leq i \leq s} g_i(\bar{x})(g_i(\bar{x}) - 1)^{2k} \\ &> \frac{3}{4} f^\bullet - \lambda \sum_{1 \leq i \leq s} g_i(\bar{x})(g_i(\bar{x}) - 1)^{2k} \\ &> \frac{3}{4} f^\bullet - \frac{\lambda s}{2k+1}. \end{aligned}$$

Luego, $h(\bar{x}, y, z) \geq \frac{1}{2} f^{\bullet}$ si

$$2k + 1 \geq \frac{4\lambda s}{f^{\bullet}}. \tag{2.5}$$

Si $\bar{x} \in A_{y,z}$, aplicando el Lema 2.7, se tiene que

$$\frac{f^{\bullet}}{4} \leq \bar{f}(\bar{x}_0, y, z) - \bar{f}(\bar{x}, y, z) \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}(m+1)d(d+1)\|f\|_{\bullet}\|\bar{x}_0 - \bar{x}\|$$

para todo $\bar{x}_0 \in S$. Luego,

$$\frac{f^{\bullet}}{2\sqrt{n}(m+1)d(d+1)\|f\|_{\bullet}} \leq \|\bar{x}_0 - \bar{x}\|.$$

para todo $\bar{x}_0 \in S$ y, por lo tanto,

$$\frac{f^{\bullet}}{2\sqrt{n}(m+1)d(d+1)\|f\|_{\bullet}} \leq \operatorname{dist}(\bar{x}, S). \tag{2.6}$$

Por la Observación 2.9, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ y $1 \leq i_0 \leq s$ tal que $g_{i_0}(\bar{x}) < 0$ y

$$\operatorname{dist}(\bar{x}, S)^{c_1} \leq -c_2 g_{i_0}(\bar{x}). \tag{2.7}$$

Por (2.6) y (2.7), tenemos que

$$g_{i_0}(\bar{x}) \leq -\delta. \tag{2.8}$$

con

$$\delta = \frac{1}{c_2}\left(\frac{f^{\bullet}}{2\sqrt{n}(m+1)d(d+1)\|f\|_{\bullet}}\right)^{c_1} > 0.$$

Por otro lado, si $f^{\bullet}_{y,z} = \min_S \bar{f}(\bar{X}, y, z)$, nuevamente por el Lema 2.7, tenemos que

$$|\bar{f}(\bar{x}, y, z) - f^{\bullet}_{y,z}| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}\|f\|_{\bullet}(m+1)d(d+1)\operatorname{diám}(\widetilde{\Delta}_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\|f\|_{\bullet}(m+1)d(d+1). \tag{2.9}$$

Entonces, por la Observación 2.13 y utilizando (2.8) y (2.9), se tiene que

$$\begin{aligned} h(\bar{x}, y, z) &> \bar{f}(\bar{x}, y, z) - \lambda(y^2 + z^2)^{\frac{m}{2}} g_{i_0}(\bar{x})(g_{i_0}(\bar{x}) - 1)^{2k} - \frac{\lambda(s-1)}{2k+1} \\ &\geq \bar{f}(\bar{x}, y, z) - f^{\bullet}_{y,z} + f^{\bullet}_{y,z} + \lambda\delta - \frac{\lambda(s-1)}{2k+1} \\ &\geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}(m+1)d(d+1)\|f\|_{\bullet} + f^{\bullet} + \lambda\delta - \frac{\lambda(s-1)}{2k+1}. \end{aligned}$$

Luego, $h(\bar{x}, y, z) \geq \frac{1}{2} f^{\bullet}$ si

$$\lambda \geq \frac{\sqrt{n}\|f\|_{\bullet}(m+1)d(d+1)}{\sqrt{2}\delta} = \frac{c_2 2^{c_1}(\sqrt{n}\|f\|_{\bullet}(m+1)d(d+1))^{c_1+1}}{\sqrt{2} f^{\bullet c_1}} \tag{2.10}$$

y

$$2k + 1 \geq \frac{2\lambda(s-1)}{f^{\bullet}}. \tag{2.11}$$

Como (2.5) implica (2.11), alcanza con asegurar (2.5) y (2.10). Luego, tomamos

$$\lambda = \frac{c_2 2^{c_1}(\sqrt{n}\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1))^{c_1+1}}{\sqrt{2}f^{\bullet c_1}} = c_3\frac{(\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1))^{c_1+1}}{f^{\bullet c_1}} > 0$$

con $c_3 = \frac{c_2 2^{c_1}\sqrt{n}^{c_1+1}}{\sqrt{2}}$ y

$$k = \left\lceil \frac{1}{2}\left(\frac{4\lambda s}{f^\bullet} - 1\right)\right\rceil \in \mathbb{N}_0.$$

Observemos que, por el Lema 2.6,

$$\frac{\|f\|_\bullet(m+1)(d+1)}{f^\bullet} \geq 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} k &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{4\lambda s}{f^\bullet} - 1\right) + 1 \\ &= 2c_3 s\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} + \frac{1}{2} \\ &\leq c_4\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} \end{aligned} \tag{2.12}$$

con $c_4 = 2c_3 s + 1$.

Además, si $\ell = \deg_{\bar{X}} h$, tenemos

$$\begin{aligned} \ell &\leq \max\{d, (2k+1)\max_{1\leq i\leq s}\deg g_i\} \\ &\leq \max\left\{d, \left(2c_4\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} + 1\right)\max_{1\leq i\leq s}\deg g_i\right\} \\ &\leq c_5\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} \end{aligned} \tag{2.13}$$

con $c_5 = (2c_4+1)\max_{1\leq i\leq s}\deg g_i$.

Por otro lado, por el Lema 2.11,

$$\begin{aligned} \|h\|_\bullet &\leq \|f\|_\bullet + \lambda s 2^{\frac{m}{2}}\max_{1\leq i\leq s}\{(\deg g_i + 1)(\|g_i\|+1)\}^{2k+1} \\ &= \|f\|_\bullet + c_3 s 2^{\frac{m}{2}}\frac{(\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1))^{c_1+1}}{f^{\bullet c_1}}\max_{1\leq i\leq s}\{(\deg g_i+1)(\|g_i\|+1)\}^{2k+1} \\ &\leq c_6 2^{\frac{m}{2}}\frac{(\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1))^{c_1+1}}{f^{\bullet c_1}}\mathrm{e}^{c_7\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}} \end{aligned} \tag{2.14}$$

con $c_6 = (c_3 s + 1)\max_{1\leq i\leq s}\{(\deg g_i+1)(\|g_i\|+1)\}$ y $\mathrm{e}^{c_7} = \max_{1\leq i\leq s}\{(\deg g_i+1)(\|g_i\|+1)\}^{2c_4}$.

Ahora, introducimos una nueva variable X_0 para homogeneizar con respecto a $\bar{X}$ y poder usar el Teorema de Polya. Escribimos

$$h = \sum_{0\le i\le m} \sum_{0\le j\le \ell} h_{ij}(\bar{X}) Y^i Z^{m-i}$$

con $h_{ij} \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ igual a cero u homogéneo de grado j para $0 \le i \le m$ y $0 \le j \le \ell$. Definimos

$$H = \sum_{0\le i\le m} \sum_{0\le j\le \ell} h_{ij}(\bar{X})(X_0 + X_1 \cdots + X_n)^{\ell-j} Y^i Z^{m-i} \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}, Y, Z]$$

bihomogéneo en $(X_0, \bar{X})$ e (Y, Z).

Como $H(x_0, \bar{x}, y, z) = h(\bar{x}, y, z)$ para $(x_0, \bar{x}, y, z) \in \Delta_n \times C$, se tiene que $H \ge \frac{1}{2} f^\bullet$ en $\Delta_n \times C$.

Por otro lado, para cada $(y, z) \in C$, consideramos $H(X_0, \bar{X}, y, z) \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}]$. Usando el Lema 2.11, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|H(X_0, \bar{X}, y, z)\| &\le \sum_{0\le i\le m} \sum_{0\le j\le \ell} \|h_{ij}(\bar{X})(X_0 + \cdots + X_n)^{\ell-j} y^i z^{m-i}\| \\
&\le \sum_{0\le i\le m} \sum_{0\le j\le \ell} \|h_{ij}(\bar{X})(X_0 + \cdots + X_n)^{\ell-j}\| \\
&\le \sum_{0\le i\le m} \sum_{0\le j\le \ell} \|h_{ij}(\bar{X})\| \\
&\le (m+1)(\ell+1)\|h\|_\bullet.
\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 1.15, si

$$N = \left\lfloor \frac{(m+1)(\ell+1)\ell(\ell-1)\|h\|_\bullet}{f^\bullet} - \ell \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N},$$

para cada $(y, z) \in C$ se tiene que $H\big(X_0, \bar{X}, y, z\big)\,(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}]$ es un polinomio homogéneo con todos sus coeficientes positivos.

Más precisamente, si escribimos

$$H\big(X_0, \bar{X}, Y, Z\big)\,(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\bar{\alpha})\in\mathbb{N}_0^{n+1} \\ |\alpha|=N+\ell}} b_\alpha(Y, Z) X_0^{\alpha_0} \bar{X}^{\bar{\alpha}} \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}, Y, Z] \quad (2.15)$$

con $b_\alpha \in \mathbb{R}[Y, Z]$ homogéneo de grado m, se tiene que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ con $|\alpha| = N + \ell$, b_α es positivo en C y, por lo tanto, no negativo en $\mathbb{R}^2$.

A continuación, acotamos $N + \ell$ usando (2.13) y (2.14).

$$
\begin{aligned}
N+\ell &\leq \frac{(m+1)(\ell+1)\ell(\ell-1)\|h\|_\bullet}{f^\bullet}+1 \\
&\leq \frac{(m+1)\ell^3\|h\|_\bullet}{f^\bullet}+1 \\
&\leq c_5^3 c_6 (m+1) 2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_7\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}}+1 \\
&\leq c_8 (m+1) 2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_7\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

con $c_8 = c_5^3 c_6 + 1$.

Evaluando la igualdad (2.15) en $X_0 = 1 - X_1 - \cdots - X_n$ y $Z = 1$ tenemos que

$$
f = \lambda\big(Y^2+1\big)^{\frac{m}{2}} \sum_{1\leq i\leq s} g_i(g_i-1)^{2k} + \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\bar{\alpha})\in\mathbb{N}_0^{n+1}\\ |\alpha|=N+\ell}} b_\alpha(Y,1)(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}} \in \mathbb{R}[\bar{X},Y]. \tag{2.17}
$$

De (2.17) queremos concluir que f es un elemento de $M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y]}(g_1,\ldots,g_s)$ y encontrar la constante c.

Es claro que el primer término del lado derecho de la igualdad (2.17) es un elemento de $M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y]}(g_1,\ldots,g_s)$. Además,

$$
\deg\Big(\big(Y^2+1\big)^{\frac{m}{2}} g_i(g_i-1)^{2k}\Big) = m + (2k+1)\deg g_i, \tag{2.18}
$$

para $1 \leq i \leq s$.

Ahora nos enfocamos en el segundo término que es a su vez una suma. Fijemos $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ con $|\alpha| = N+\ell$. Como $b_\alpha(Y,1) \geq 0$ en $\mathbb{R}$, nuevamente por lo visto en la Sección 1.1, $b_\alpha(Y,1)$ se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios con el grado de cada término acotado por m. Por otro lado, sea $v(\alpha) = (v_0,\bar{v}) \in \{0,1\}^{n+1}$ tal que $\alpha_i \equiv v_i \pmod 2$ para $0 \leq i \leq n$. Notando $g_0 = 1 \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, por la Observación 2.10, tenemos que

$$
(1-X_1-\cdots-X_n)^{v_0}\bar{X}^{\bar{v}} = \sum_{0\leq i\leq s} \sigma_{v(\alpha)i}\, g_i,
$$

con $\sigma_{v(\alpha)i} \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ para $0 \leq i \leq s$, y por lo tanto

$$
(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}} = (1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}-\bar{v}} \sum_{0\leq i\leq s} \sigma_{v(\alpha)i}\, g_i
$$

pertenece a $M(g_1,\ldots,g_s)$ pues $(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}-\bar{v}} \in \mathbb{R}[\bar{X}]^2$. De esta manera concluimos que cada término de la suma pertenece a $M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y]}(g_1,\ldots,g_s)$. Además, para $0 \leq i \leq s$, tenemos que

$$
\deg b_\alpha(Y,1)(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}-\bar{v}}\sigma_{v(\alpha)i}\, g_i \leq m + N + \ell + c_9 \tag{2.19}
$$

con $c_9 = \max\{\deg \sigma_{vi} g_i \mid v \in \{0,1\}^{n+1}, 0 \leq i \leq s\}$.

Para terminar, resta acotar simultaneamente (2.18) y (2.19).

Por un lado, usando (2.12),

$$m + (2k+1)\max_{1\le i\le s}\deg g_i \le m + \left(2c_4\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} + 1\right)\max_{1\le i\le s}\deg g_i$$
$$\le c_{10}(m+1)\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d^2}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}$$

con $c_{10} = (2c_4+1)2^{c_1+1}\max\limits_{1\le i\le s}\deg g_i$.

Por otro lado, usando (2.16),

$$m + N + \ell + c_9 \le m + c_8(m+1)2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_7\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}} + c_9$$
$$\le c_{11}(m+1)2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d^2}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_{12}\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d^2}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}}$$

con $c_{11} = (1+c_8+c_9)2^{4(c_1+1)}$ and $c_{12} = c_7 2^{c_1+1}$.

Finalmente, tomamos c como la constante positiva que sale de aplicar el Lema 2.12 a la 6-upla (c_{10}, c_1+1, $c_{11}, 4(c_1+1), c_{12}, c_1+1$). $\square$

Observación 2.16 *Sea $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ (es decir, $m=0$) positivo en S. Observemos que en este caso $\|f\|_\bullet = \|f\|$ y $f^\bullet = f^*$. Bajo la hipótesis adicional $S \subset \widetilde{\Delta}_n^\circ$, aplicando la Proposición 2.15, tenemos que la cota de grado que se obtiene para cada término de la representación de f como elemento de $M(g_1,\dots,g_s)$ es*

$$c\mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|d^2}{f^*}\right)^c},$$

que es simplemente exponencial en d.

Notemos que, bajo esta hipótesis adicional, se obtiene una mejora en la cota dada en el Teorema 1.13, que es doblemente exponencial en d, aunque la del Teorema 1.13 vale solamente suponiendo $S \subset (-1,1)^n$.

En lo que sigue demostramos el principal resultado de esta sección. Necesitaremos el siguiente lema técnico.

Lema 2.17 *Sean $j, d \in \mathbb{N}_0$ con $j \le d$. Entonces,*

$$2^j\binom{d+1}{j+1} \le 3^d.$$

Demostración: Procedemos por inducción en d. Si $d=0$, es claro que la desigualdad se verifica para $j=0$. Supongamos $d \ge 1$. Si $j=0$ o $j=d$, nuevamente es claro que la desigualdad se verifica. Si $1 \le j \le d-1$ tenemos que

$$2^j\binom{d+1}{j+1} = 22^{j-1}\binom{d}{j} + 2^j\binom{d}{j+1} \le 23^{d-1} + 3^{d-1} = 3^d.$$

$\square$

Teorema 2.18 *Sean* $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ *tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset (-1,1)^n$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ *es arquimediano. Entonces, existe* $c \in \mathbb{R}_{>0}$ *tal que para todo* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ *positivo en* $S \times \mathbb{R}$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$, $m = \deg_Y f$ *y fully m-ic en* S, f *se puede escribir como*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \dots + \sigma_s g_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y]}(g_1, \dots, g_s)$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y]^2$ *y*

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \dots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c(m+1)2^{\frac{m}{2}} \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1) d^2 (3n)^d}{f^\bullet}\right)^c}.$$

Observación 2.19 *Observemos que si* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ *(es decir, si* $m = 0$*) es positivo en* S*, la cota que se obtiene es la misma que en el Teorema 1.13 excepto por un factor* 3^d*. Si* $n \geq 2$*, dicho factor se puede esconder en la constante* c *de la siguiente manera. Si* $d = 0$*, como mencionamos anteriormente, cualquier constante* $c \geq 1$ *verifica la cota. Si* $d \geq 1$*,*

$$\frac{\|f\|_\bullet (m+1) d^2 (3n)^d}{f^\bullet} \leq \frac{\|f\|_\bullet (m+1) d(d+1) (3n)^d}{f^\bullet} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1) d(d+1) n^d}{f^\bullet}\right)^3 \leq 8 \left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1) d^2 n^d}{f^\bullet}\right)^3.$$

Luego, reemplazamos c *por el resultado de aplicar el Lemma 2.12 a la* 6*-upla* $(1, 0, c, 0, 8^c, 3c)$*.*

Demostración del Teorema 2.18: Consideramos el cambio afín de variables $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\ell(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{X_1 + 1}{2n}, \dots, \frac{X_n + 1}{2n}\right)$$

con $\ell^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\ell^{-1}(X_1, \dots, X_n) = (2nX_1 - 1, \dots, 2nX_n - 1).$$

Para $0 \leq i \leq s$, definimos $\tilde{g}_i(\bar{X}) = g_i(\ell^{-1}(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ y

$$\widetilde{S} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{g}_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, \tilde{g}_s(\bar{x}) \geq 0\}.$$

Es fácil ver que

$$\emptyset \neq \widetilde{S} = \ell(S) \subseteq \widetilde{\Delta}_n^\circ.$$

Más aún, como $M(g_1, \dots, g_n)$ es arquimediano, $M(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_s)$ también resulta arquimediano.

En efecto, sea $N \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$N - X_1^2 - \dots - X_n^2 \in M(g_1, \dots, g_n),$$

escribiendo

$$-(X_i+1)^2 = (X_i-1)^2 - 2X_i^2 - 2$$

para $1 \leq i \leq n$, se tiene que

$$\frac{N}{2n^2} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{X_1+1}{2n}\right)^2 - \dots - \left(\frac{X_n+1}{2n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left(N - X_1^2 - \dots - X_n^2\right) + \frac{1}{4n^2}\left((X_1-1)^2 + \dots + (X_n-1)^2\right) \in M(g_1, \dots, g_n)$$

y, componiendo con ℓ^{-1}, se tiene que

$$\frac{N}{2n^2} + \frac{1}{2n} - X_1^2 - \dots - X_n^2 \in M(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n).$$

Sea $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ como en el enunciado y $\tilde{f} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ definido por $\tilde{f}(\bar{X}, Y) = f(\ell^{-1}(\bar{X}), Y) \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$. Es fácil ver que $\tilde{f}$ es positivo en $\tilde{S} \times \mathbb{R}$, $\deg_{\bar{X}} \tilde{f} = \deg_{\bar{X}} f = d$, $\deg_Y \tilde{f} = \deg_Y f = m$, $\tilde{f}$ es fully m-ic en $\widetilde{S}$ y

$$\min\{\bar{\tilde{f}}(\bar{x}, y, z) \mid \bar{x} \in \widetilde{S}, (y,z) \in C\} = \min\{\bar{f}(\bar{x}, y, z) \mid \bar{x} \in S, (y,z) \in C\} = f^{\bullet} > 0,$$

A continuación acotamos $\|\tilde{f}\|_{\bullet}$. Si escribimos

$$f = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} a_{\alpha,i} \bar{X}^{\alpha} Y^i.$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{f} &= \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} a_{\alpha,i} (2nX_1 - 1, \dots, 2nX_n - 1)^{\alpha} Y^i \\
&= \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} a_{\alpha,i} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta \preceq \alpha}} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} (2n)^{|\beta|} (-1)^{|\alpha|-|\beta|} \bar{X}^{\beta} Y^i \\
&= \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta| \leq d}} (2n)^{|\beta|} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta \preceq \alpha,\, |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} a_{\alpha,i} (-1)^{|\alpha|-|\beta|} \bar{X}^{\beta} Y^i \\
&= \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta| \leq d}} \binom{|\beta|}{\beta} (2n)^{|\beta|} \frac{1}{|\beta|!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta \preceq \alpha,\, |\alpha| \leq d}} \frac{|\alpha|!}{(\alpha_1 - \beta_1)! \dots (\alpha_n - \beta_n)!} a_{\alpha,i} (-1)^{|\alpha|-|\beta|} \bar{X}^{\beta} Y^i.
\end{aligned}$$

Para $0 \leq i \leq m$ y $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\beta| \leq d$ definimos

$$b_{\beta,i} = (2n)^{|\beta|} \frac{1}{|\beta|!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta \preceq \alpha,\, |\alpha| \leq d}} \frac{|\alpha|!}{(\alpha_1 - \beta_1)! \dots (\alpha_n - \beta_n)!} a_{\alpha,i} (-1)^{|\alpha|-|\beta|} \in \mathbb{R}.$$

Entonces, usando el Lema 2.17, se tiene que

$$\begin{aligned}
|b_{\beta,i}| &\leq \|f\|_\bullet (2n)^{|\beta|} \frac{1}{|\beta|!} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ \beta\preceq\alpha,\, |\alpha|\leq d}} \frac{|\alpha|!}{(\alpha_1-\beta_1)!\dots(\alpha_n-\beta_n)!} \\
&= \|f\|_\bullet (2n)^{|\beta|} \frac{1}{|\beta|!} \sum_{|\beta|\leq h\leq d} h! \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ \beta\preceq\alpha,\, |\alpha|=h}} \frac{1}{(\alpha_1-\beta_1)!\dots(\alpha_n-\beta_n)!} \\
&= \|f\|_\bullet (2n)^{|\beta|} \frac{1}{|\beta|!} \sum_{|\beta|\leq h\leq d} \frac{h!}{(h-|\beta|)!} \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^n \\ |\gamma|=h-|\beta|}} \binom{|\gamma|}{\gamma} \\
&= \|f\|_\bullet (2n)^{|\beta|} \sum_{|\beta|\leq h\leq d} \binom{h}{|\beta|} n^{h-|\beta|} \\
&\leq \|f\|_\bullet 2^{|\beta|} n^d \sum_{|\beta|\leq h\leq d} \binom{h}{|\beta|} \\
&= \|f\|_\bullet 2^{|\beta|} n^d \binom{d+1}{|\beta|+1} \\
&\leq \|f\|_\bullet (3n)^d.
\end{aligned}$$

Luego,$\|\tilde{f}\|_\bullet \leq \|f\|_\bullet (3n)^d$.

Si tomamos c la constante positiva que sale de la Proposición 2.15 aplicada a $\tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_s$ tenemos que $\tilde{f}$ se puede escribir como

$$\tilde{f} = \tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1\tilde{g}_1 + \cdots + \tilde{\sigma}_s\tilde{g}_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y]}(\tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_s) \tag{2.20}$$

con $\tilde{\sigma}_0,\tilde{\sigma}_1,\dots,\tilde{\sigma}_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X},Y]^2$ y

$$\deg(\tilde{\sigma}_0), \deg(\tilde{\sigma}_1\tilde{g}_1),\dots,\deg(\tilde{\sigma}_s\tilde{g}_s) \leq c(m+1)2^{\frac{m}{2}} \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)d^2(3n)^d}{f^\bullet}\right)^c}.$$

Finalmente, componiendo con ℓ en la igualdad (2.20), se obtiene la representación buscada para f. $\square$

En el siguiente ejemplo mostramos que la hipótesis f fully m-ic en S (o alguna hipótesis adicional) es necesaria para poder extender el Putinar Positivstellensatz a cilindros de la forma $S\times\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.20 *Consideremos $g=(1-X^2)^3\in\mathbb{R}[X]$, entonces, como vimos en la Sección 1.2,*

$$S=\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)\geq 0\} = [-1,1]\subset\mathbb{R}$$

y $M(g)$ es arquimediano. Sea $f(X,Y)=(1-X^2)Y^2+1\in\mathbb{R}[X,Y]$. Es claro que $f>0$ en $S\times\mathbb{R}$ pero f no es fully 2-ic en S. Si $f\in M_{\mathbb{R}[X,Y]}(g)$, tenemos que

$$(1-X^2)Y^2+1 = \sum_{1\leq j\leq s_1}\Big(\sum_{0\leq i\leq m'} p_{ji}(X)Y^i\Big)^2 + \sum_{1\leq j\leq s_2}\Big(\sum_{0\leq i\leq m'} q_{ji}(X)Y^i\Big)^2\big(1-X^2\big)^3 \tag{2.21}$$

con al menos uno de $p_{1m'}, \dots, p_{s_1m'}, q_{1m'}, \dots, q_{s_2m'}$ *no identicamente cero. Mirando el grado en* Y *a ambos lados de la igualdad (2.21), tenemos que* $m' \geq 1$*. Si* $m' \geq 2$*, mirando los términos de grado* $2m'$ *en* Y *a ambos lados de la igualdad (2.21) tenemos que*

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq s_1} p_{jm'}(X)^2 + \sum_{1 \leq j \leq s_2} q_{jm'}(X)^2 \big(1 - X^2\big)^3$$

y esto no es posible ya que el polinomio del lado derecho es positivo en $[-1, 1]$ *salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Si* $m' = 1$*, mirando los términos de grado* 2 *en* Y *a ambos lados de (2.21) tenemos que*

$$1 - X^2 = \sum_{1 \leq j \leq s_1} p_{j1}(X)^2 + \sum_{1 \leq j \leq s_2} q_{j1}(X)^2 \big(1 - X^2\big)^3 \in M(g_1)$$

y en el Ejemplo 1.5 vimos que esto no es posible.

2.2 El caso $S \times \mathbb{R}_{\geq 0}$

En esta sección extendemos el Teorema 2.18 a cilindros de la forma $S \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ siguiendo los argumentos utilizados en [5, Corollary 5.4] y [10, Theorem 4], donde los autores prueban un certificado de no negatividad para polinomios no negativos en una media franja de $\mathbb{R}^2$.

Consideremos $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ con $m = \deg_Y f$ y $f > 0$ en $S \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si f es fully m-ic en S, se tiene que m es par y $f_m > 0$ en S. Más aún,

$$\bar{f} > 0 \text{ en } S \times \Delta_1.$$

En efecto, sea $(\bar{x}, y, z) \in S \times \Delta_1$, si $z \neq 0$,

$$\bar{f}(\bar{x}, y, z) = z^m f\left(\bar{x}, \frac{y}{z}\right) > 0,$$

y si $z = 0$,

$$\bar{f}(\bar{x}, 1, 0) = f_m(\bar{x}) > 0.$$

Notaremos

$$f^{\bullet\bullet} = \min\{\bar{f}(\bar{x}, y, z) \mid (\bar{x}, y, z) \in S \times \Delta_1\}.$$

La razón por la cual consideramos dicho mínimo se verá en la demostración del Teorema 2.21.

Teorema 2.21 *Sean* $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ *tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset (-1, 1)^n$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ *es arquimediano. Entonces, existe* $c \in \mathbb{R}_{>0}$ *tal que para todo* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ *positivo en* $S \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$*,* $m = \deg_Y f$ *y fully* m*-ic en* S*,* f *se puede escribir como*

$$f = \rho_0 + \rho_1 g_1 + \cdots + \rho_s g_s + \tau_0 Y + \tau_1 Y g_1 + \cdots + \tau_s Y g_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X}, Y]}(g_1, \dots, g_s, Y, Y g_1, \dots, Y g_s)$$

con $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_s, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y]^2$ *y*

$$\deg(\rho_0), \deg(\rho_1 g_1), \dots, \deg(\rho_s g_s), \deg(\tau_0 Y), \deg(\tau_1 Y g_1), \dots, \deg(\tau_s Y g_s)$$
$$\leq c(2m+1)2^m \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet (2m+1) d^2 (3n)^d}{f^{\bullet\bullet}}\right)^c}.$$

Demostración: Sea $c \in \mathbb{R}_{>0}$ la constante dada por el Teorema 2.18. Dada $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ como en el enunciado, consideremos

$$h(\bar{X}, Y) = f(\bar{X}, Y^2) \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]. \tag{2.22}$$

Entonces, como $h > 0$ en $S \times \mathbb{R}$, $2m = \deg_Y h$ y h es fully $2m$-ic en S, se tiene que

$$h = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \tag{2.23}$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y]^2$ y

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \dots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c(2m+1)2^m \mathrm{e}^{\left(\frac{\|h\|_\bullet (2m+1) d^2 (3n)^d}{h^\bullet}\right)^c}. \tag{2.24}$$

Observemos que $\|h\|_\bullet = \|f\|_\bullet$. Además, $h^\bullet = f^{\bullet\bullet}$; en efecto, basta observar que, para $(\bar{x}, y, z) \in S \times C$, $\bar{h}(\bar{x}, y, z) = \bar{f}(\bar{x}, y^2, z^2)$ y la aplicación

$$\begin{aligned} C &\to \Delta_1 \\ (y, z) &\mapsto (y^2, z^2) \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

A continuación buscamos la representación para f. Usando (2.22) y (2.23) y notando $g_0 = 1$, tenemos que

$$f(\bar{X}, Y^2) = \frac{1}{2} f(\bar{X}, Y^2) + \frac{1}{2} f(\bar{X}, (-Y)^2) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq s} \left(\sigma_i(\bar{X}, Y) + \sigma_i(\bar{X}, -Y)\right) g_i. \tag{2.25}$$

Para $0 \leq i \leq s$, escribimos

$$\sigma_i = \sum_{1 \leq j \leq r} h_{ij}^2$$

y, para $1 \leq j \leq r$,

$$h_{ij} = \sum_{0 \leq k \leq \ell} a_{ijk}(\bar{X}) Y^k \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(h_{ij}(\bar{X},Y)^2 + h_{ij}(\bar{X},-Y)^2\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{0\le k\le \ell} a_{ijk}(\bar{X})Y^k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{0\le k\le \ell} a_{ijk}(\bar{X})(-Y)^k\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{\substack{0\le k\le \ell\\ k \text{ par}}} a_{ijk}(\bar{X})Y^k\right) + \left(\sum_{\substack{0\le k\le \ell\\ k \text{ impar}}} a_{ijk}(\bar{X})Y^{k-1}\right)Y\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{\substack{0\le k\le \ell\\ k \text{ par}}} a_{ijk}(\bar{X})Y^k\right) - \left(\sum_{\substack{0\le k\le \ell\\ k \text{ impar}}} a_{ijk}(\bar{X})Y^{k-1}\right)Y\right)^2 \\
&= \left(\sum_{0\le k'\le \lfloor \frac{\ell}{2}\rfloor} a_{ij(2k')}(\bar{X})Y^{2k'}\right)^2 + \left(\sum_{0\le k'\le \lfloor \frac{\ell-1}{2}\rfloor} a_{ij(2k'+1)}(\bar{X})Y^{2k'}\right)^2 Y^2.
\end{aligned}$$

Para $0 \le i \le s$, llamemos

$$\rho_i(X,Y) = \sum_{1\le j\le r}\left(\sum_{0\le k'\le \lfloor \frac{\ell}{2}\rfloor} a_{ij(2k')}(\bar{X})Y^{k'}\right)^2,\ \tau_i(X,Y) = \sum_{1\le j\le r}\left(\sum_{0\le k'\le \lfloor \frac{\ell-1}{2}\rfloor} a_{ij(2k'+1)}(\bar{X})Y^{k'}\right)^2.$$

Observemos que $\rho_i, \tau_i \in \sum \mathbb{R}[\bar{X},Y]^2$ y

$$\deg(\rho_i), \deg(\tau_i Y) \le \deg(\sigma_i). \tag{2.26}$$

Además, se tiene que

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_i(\bar{X},Y) + \sigma_i(\bar{X},-Y)\right) = \rho_i(\bar{X},Y^2) + \tau_i(\bar{X},Y^2)Y^2. \tag{2.27}$$

Luego, juntando (2.25) y (2.27), se tiene que

$$f(\bar{X},Y^2) = \frac{1}{2}\sum_{0\le i\le s}\rho_i(\bar{X},Y^2)g_i + \sum_{0\le i\le s}\tau_i(\bar{X},Y^2)Y^2 g_i$$

y, por lo tanto,

$$f(\bar{X},Y) = \frac{1}{2}\sum_{0\le i\le s}\rho_i(\bar{X},Y)g_i + \sum_{0\le i\le s}\tau_i(\bar{X},Y)Y g_i.$$

Por último, usando las cotas (2.24) y (2.26) se tiene la cota para cada término de la representación.
□

2.3 Los casos $S \times \mathbb{R}^r$

En esta sección mostraremos que el Teorema 2.18 se puede extender, bajo las hipótesis adecuadas, al caso de polinomios positivos en $S \times \mathbb{R}^r$ para ciertas estructuras particulares de grado. Más precisamente, uno de los pasos de dicha demostración consiste en usar que un polinomio no negativo en $\mathbb{R}$ se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios, entonces, la idea es que en todos los casos en los que valga ese resultado (ver Sección 1.1), se pueden repetir los mismos argumentos.

Utilizaremos la siguiente notación.

Notación 2.22 *Para $r \in \mathbb{N}$, notaremos*

$$C_{r-1} = \{y_1^2 + \cdots + y_r^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^r.$$

Extendemos la definición de norma al anillo de polinomios $\mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$ de la siguiente manera.

Definición 2.23 *Sea*

$$f = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta| \leq m}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} \binom{|\alpha|}{\alpha} a_{\alpha,\beta} \bar{X}^\alpha \bar{Y}^\beta \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$$

definimos

$$\|f\|_\bullet = \max\{|a_{\alpha,\beta}| \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq d, |\beta| \leq m\}.$$

2.3.1 El caso $r = 2$, $\deg_{\bar{Y}} f = 4$

A lo largo de esta sección consideraremos el anillo de polinomios $\mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, Y_2]$ y polinomios $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$ con $\deg_{\bar{Y}} f = 4$. Para un tal f, continuaremos notando con $\bar{f}$ a la homogeneización de f con respecto a las variables $\bar{Y}$, es decir,

$$\bar{f} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^2 \\ |\beta| \leq 4}} f_\beta(\bar{X}) \bar{Y}^\beta Z^{4-|\beta|} \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}, Z].$$

A continuación introducimos la hipótesis adicional a considerar en este caso. Para

$$f = \sum_{0 \leq i \leq 4} f^{[i]}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{0 \leq i \leq 4} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^2 \\ |\beta| = i}} f_\beta(\bar{X}) \bar{Y}^\beta \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$$

con $f^{[4]} \neq 0$, supongamos que

$$(\dagger) \text{ para todo } \bar{x} \in S,\ f^{[4]}(\bar{x}, \bar{Y}) \in \mathbb{R}[\bar{Y}] \text{ es definido positivo.}$$

Dado $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$ positivo en $S \times \mathbb{R}^2$ y tal que satisface $(\dagger)$, se tiene que $\bar{f} > 0$ en $S \times C_2$. En efecto, sea $(\bar{x}, \bar{y}, z) \in S \times C_2$, si $z \neq 0$,

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, z) = z^4 f\left(\bar{x}, \frac{\bar{y}}{z}\right) > 0,$$

y si $z = 0$, entonces, $\bar{y} \neq 0$ y luego

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, 0) = f^{[4]}(\bar{x}, \bar{y}) > 0.$$

Notaremos

$$f^{\bullet} = \min\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, z) \mid (\bar{x}, \bar{y}, z) \in S \times C_2\} > 0.$$

Observación 2.24 *Notemos que la hipótesis (†) es análoga a la hipótesis f fully m-ic en S para el caso $r = 1$. Más precisamente, si $r = 1$ y $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ es positivo en $S \times \mathbb{R}$ y fully m-ic en S (con $m = \deg_Y f$), se tiene que $f_m(\bar{x}) > 0$ para todo $\bar{x} \in S$. Luego, para todo $\bar{x} \in S$,*

$$f^{[m]}(\bar{x}, Y) = f_m(\bar{x}) Y^m \in \mathbb{R}[Y]$$

es definido positivo.

A continuación enunciamos generalizaciónes de los Lemas 2.6 y 2.7. Omitimos las demostraciones ya que son análogas a las hechas anteriormente.

Lema 2.25 *Sea $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$ con $d = \deg_{\bar{X}} f$ y $\deg_{\bar{Y}} f = 4$, entonces,*

$$|\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, z)| \leq 15 \|f\|_{\bullet}(d+1)$$

para todo $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n$ e $(\bar{y}, z) \in C_2$.

Lema 2.26 *Sea $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$ con $d = \deg_{\bar{X}} f$ y $\deg_{\bar{Y}} f = 4$, entonces,*

$$|\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{y}, z) - \bar{f}(\bar{x}_2, \bar{y}, z)| \leq \frac{15}{2} \sqrt{n} \|f\|_{\bullet} d(d+1) \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$$

para todo $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \widetilde{\Delta}_n$ e $(\bar{y}, z) \in C_2$.

Al igual que en la Sección 2.1, primero probaremos un resultado auxiliar suponiendo $S \subset \widetilde{\Delta}_n^{\circ}$ (Proposición 2.27). Dado que la demostración es análoga a la de la Proposición 2.15, omitiremos algunos pasos.

Proposición 2.27 *Sean $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset \widetilde{\Delta}_n^{\circ}$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ es arquimediano. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, Y_2]$ positivo en $S \times \mathbb{R}^2$ con $d = \deg_{\bar{X}} f$, $\deg_{\bar{Y}} f = 4$ y que verifique la condición (†), f se puede escribir como

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \dots + \sigma_s g_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]}(g_1, \dots, g_s)$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]^2$ y

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \dots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c e^{\left(\frac{\|f\|_{\bullet} d^2}{f^{\bullet}}\right)^c}.$$

Demostración: Nuevamente, podemos suponer sin pérdida de generalidad $\deg g_i \geq 1$ y $|g_i| \leq 1$ en $\widetilde{\Delta}_n$ para todo $1 \leq i \leq s$.

Sea $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}]$. Si $d = 0$, por lo visto en la Sección 1.1, cualquier $c \geq 4$ sirve, luego, si la constante c encontrada es menor que 4 la reemplazamos por el resultado de aplicar el Lema 2.12 a la 6-upla $(4, 0, c, 0, 1, c)$. A partir de ahora suponemos $d \geq 1$.

Para

$$h = \bar{f} - \lambda(Y_1^2 + Y_2^2 + Z^2)^2 \sum_{1 \leq i \leq s} g_i(g_i - 1)^{2k} \in \mathbb{R}[\bar{X}, \bar{Y}, Z],$$

buscamos $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $h \geq \frac{1}{2} f^\bullet$ en $\widetilde{\Delta}_n \times C_2$.

Para $(\bar{y}, z) \in C_2$ fijo consideramos

$$A_{\bar{y},z} = \left\{ \bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n \mid \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, z) \leq \frac{3}{4} f^\bullet \right\}.$$

Notemos que $A_{\bar{y},z} \cap S = \emptyset$.

Para determinar las condiciones que deben cumplir λ y k consideraremos los casos $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n - A_{\bar{y},z}$ y $\bar{x} \in A_{\bar{y},z}$ por separado. En ambos casos se procede de manera análoga a la Proposición 2.15.

Si $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n - A_{\bar{y},z}$, basta pedir

$$2k + 1 \geq \frac{4\lambda s}{f^\bullet} \tag{2.28}$$

y si $\bar{x} \in A_{\bar{y},z}$, basta pedir

$$\lambda \geq \frac{c_2 2^{c_1} (15\sqrt{n} \|f\|_\bullet d(d+1))^{c_1+1}}{\sqrt{2} f^{\bullet c_1}} \tag{2.29}$$

y

$$2k + 1 \geq \frac{2\lambda(s-1)}{f^\bullet} \tag{2.30}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son las constantes de la Observación 2.9.

Luego, tomamos

$$\lambda = \frac{c_2 2^{c_1} (15\sqrt{n} \|f\|_\bullet d(d+1))^{c_1+1}}{\sqrt{2} f^{\bullet c_1}} = c_3 \frac{(15 \|f\|_\bullet d(d+1))^{c_1+1}}{f^{\bullet c_1}} > 0$$

con $c_3 = \frac{c_2 2^{c_1} \sqrt{n}^{c_1+1}}{\sqrt{2}}$ y

$$k = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{4\lambda s}{f^\bullet} - 1 \right) \right\rceil \in \mathbb{N}_0.$$

Por el Lema 2.25,

$$\frac{15 \|f\|_\bullet (d+1)}{f^\bullet} \geq 1,$$

y, por lo tanto,

$$k \leq c_4 \left(\frac{15 \|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet} \right)^{c_1+1} \tag{2.31}$$

con $c_4 = 2c_3 s + 1$.

Además, si $\ell = \deg_{\bar{X}} h$, tenemos que

$$\ell \leq c_5 \left(\frac{15\|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet} \right)^{c_1+1} \tag{2.32}$$

con $c_5 = (2c_4 + 1) \max\limits_{1 \leq i \leq s} \deg g_i$.

Por otro lado, usando el Lema 2.11, tenemos que

$$\|h\|_\bullet \leq c_6 \frac{(15\|f\|_\bullet d(d+1))^{c_1+1}}{f^{\bullet c_1}} \mathrm{e}^{c_7 \left(\frac{15\|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet} \right)^{c_1+1}} \tag{2.33}$$

con $c_6 = (2c_3 s + 1) \max\limits_{1 \leq i \leq s} \{(\deg g_i + 1)(\|g_i\| + 1)\}$ y $\mathrm{e}^{c_7} = \max\limits_{1 \leq i \leq s} \{(\deg g_i + 1)(\|g_i\| + 1)\}^{2c_4}$.

Ahora, introducimos una nueva variable X_0 para homogeneizar con respecto a $\bar{X}$ y poder usar el Teorema de Polya. Escribimos

$$h = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^2 \\ |\beta| \leq 4}} \sum_{0 \leq j \leq \ell} h_{\beta j}(\bar{X}) \bar{Y}^\beta Z^{4-|\beta|}$$

con $h_{\beta j} \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ igual a cero u homogéneo de grado j para $\beta \in \mathbb{N}_0^2$, $|\beta| \leq 4$ y $0 \leq j \leq \ell$. Definimos

$$H = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^2 \\ |\beta| \leq 4}} \sum_{0 \leq j \leq \ell} h_{\beta j}(\bar{X})(X_0 + X_1 \cdots + X_n)^{\ell - j} \bar{Y}^\beta Z^{4-|\beta|} \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}, \bar{Y}, Z]$$

bihomogéneo en $(X_0, \bar{X})$ e $(\bar{Y}, Z)$. Luego, se tiene que $H \geq \frac{1}{2} f^\bullet$ en $\Delta_n \times C_2$.

Además, para $(\bar{y}, z) \in C_2$, $\|H(X_0, \bar{X}, \bar{y}, z)\| \leq 15(\ell + 1)\|h\|_\bullet$.

Entonces, por el Teorema 1.15, si

$$N = \left\lfloor \frac{15(\ell+1)\ell(\ell-1)\|h\|_\bullet}{f^\bullet} - \ell \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N},$$

para cada $(\bar{y}, z) \in C_2$ se tiene que $H\big(X_0, \bar{X}, \bar{y}, z\big)\,(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}]$ es un polinomio homogéneo con todos sus coeficientes positivos.

Más precisamente, si escribimos

$$H\big(X_0, \bar{X}, \bar{Y}, Z\big)\,(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \bar{\alpha}) \in \mathbb{N}_0^{n+1} \\ |\alpha| = N + \ell}} b_\alpha(\bar{Y}, Z) X_0^{\alpha_0} \bar{X}^{\bar{\alpha}} \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}, \bar{Y}, Z] \tag{2.34}$$

con $b_\alpha \in \mathbb{R}[\bar{Y}, Z]$ homogéneo de grado 4, se tiene que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ con $|\alpha| = N + \ell$, b_α es positivo en C_2 y, por lo tanto, no negativo en $\mathbb{R}^3$.

A continuación, acotamos $N + \ell$ usando (2.32) y (2.33).

$$N + \ell \leq c_8 \left(\frac{15\|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet} \right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_7 \left(\frac{15\|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet} \right)^{c_1+1}} \tag{2.35}$$

con $c_8 = 15c_5^3 c_6 + 1$.

Evaluando la igualdad (2.34) en $X_0 = 1 - X_1 - \cdots - X_n$ y $Z = 1$ tenemos que

$$f = \lambda\big(Y_1^2+Y_2^2+1\big)^2 \sum_{1\leq i\leq s} g_i(g_i-1)^{2k} + \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\bar\alpha)\in\mathbb{N}_0^{n+1}\\ |\alpha|=N+\ell}} b_\alpha(\bar Y,1)(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0}\bar X^{\bar\alpha} \in \mathbb{R}[\bar X,\bar Y]. \tag{2.36}$$

Es claro que el primer término del lado derecho de la igualdad (2.36) es un elemento de $M_{\mathbb{R}[\bar X,\bar Y]}(g_1,\ldots,g_s)$. Además,

$$\deg \big(Y_1^2+Y_2^2+1\big)^2 g_i(g_i-1)^{2k} \leq 4 + (2k+1)\deg g_i, \tag{2.37}$$

para $1 \leq i \leq s$.

Ahora nos enfocamos en el segundo término que es a su vez una suma. Fijemos $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ con $|\alpha| = N+\ell$. Como $b_\alpha(\bar Y,1) \geq 0$ en $\mathbb{R}^2$, nuevamente por lo visto en la Sección 1.1, $b_\alpha(\bar Y,1)$ se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios con el grado de cada término acotado por 4. Por otro lado, sea $v(\alpha) = (v_0,\bar v) \in \{0,1\}^{n+1}$ tal que $\alpha_i \equiv v_i \pmod 2$ para $0 \leq i \leq n$. Notando $g_0 = 1 \in \mathbb{R}[\bar X]$, por la Observación 2.10, tenemos que

$$(1 - X_1 - \cdots - X_n)^{v_0}\bar X^{\bar v} = \sum_{0\leq i\leq s} \sigma_{v(\alpha)i} g_i,$$

con $\sigma_{v(\alpha)i} \in \sum \mathbb{R}[\bar X]^2$ para $0 \leq i \leq s$, y por lo tanto

$$(1 - X_1 - \cdots - X_n)^{\alpha_0}\bar X^{\bar\alpha} = (1 - X_1 - \cdots - X_n)^{\alpha_0 - v_0}\bar X^{\bar\alpha-\bar v} \sum_{0\leq i\leq s} \sigma_{v(\alpha)i} g_i$$

pertenece a $M(g_1,\ldots,g_s)$ pues $(1 - X_1 - \cdots - X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar X^{\bar\alpha-\bar v} \in \mathbb{R}[\bar X]^2$. De esta manera concluimos que cada término de la suma pertenece a $M_{\mathbb{R}[\bar X,\bar Y]}(g_1,\ldots,g_s)$. Además, para $0 \leq i \leq s$, tenemos que

$$\deg b_\alpha(\bar Y,1)(1 - X_1 - \cdots - X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar X^{\bar\alpha-\bar v}\sigma_{v(\alpha)i} g_i \leq 4 + N + \ell + c_9 \tag{2.38}$$

con $c_9 = \max\{\deg \sigma_{vi} g_i \mid v \in \{0,1\}^{n+1}, 0 \leq i \leq s\}$.

Para terminar, resta acotar simultaneamente (2.37) y (2.38).

Por un lado, usando (2.31),

$$\begin{aligned} 4 + (2k+1)\max_{1\leq i\leq s}\deg g_i &\leq 4 + \left(2c_4\left(\frac{15\|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} + 1\right)\max_{1\leq i\leq s}\deg g_i \\ &\leq c_{10}\left(\frac{\|f\|_\bullet d^2}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} \end{aligned}$$

con $c_{10} = (2c_4+5)30^{c_1+1}\max\limits_{1\leq i\leq s}\deg g_i$.

Por otro lado, usando (2.35),

$$4+N+\ell+c_9 \leq 4+c_8\left(\frac{15\|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_7\left(\frac{15\|f\|_\bullet d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}}+c_9$$
$$\leq c_{11}\left(\frac{\|f\|_\bullet d^2}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_{12}\left(\frac{\|f\|_\bullet d^2}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}}$$

con $c_{11}=(4+c_8+c_9)30^{4(c_1+1)}$ and $c_{12}=c_7 30^{c_1+1}$.

Finalmente, tomamos c como la constante positiva que sale de aplicar el Lema 2.12 a la 6-upla (c_{10}, c_1+1, $c_{11}, 4(c_1+1), c_{12}, c_1+1$). $\square$

A continuación enunciamos el principal resultado de la sección. Omitiremos la demostración ya que se procede de manera similar a la del Teorema 2.18: componiendo con el cambio afín de variables $\ell:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definido por

$$\ell(X_1,\dots,X_n)=\left(\frac{X_1+1}{2n},\dots,\frac{X_n+1}{2n}\right)$$

y utilizando la Proposición 2.27.

Teorema 2.28 *Sean $g_1,\dots,g_s\in\mathbb{R}[\bar{X}]$ tales que*

$$\emptyset\neq S=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x})\geq 0,\dots,g_s(\bar{x})\geq 0\}\subset(-1,1)^n$$

y $M(g_1,\dots,g_s)$ es arquimediano. Entonces, existe $c\in\mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $f\in\mathbb{R}[\bar{X},\bar{Y}]=\mathbb{R}[\bar{X},Y_1,Y_2]$ positivo en $S\times\mathbb{R}^2$ con $d=\deg_{\bar{X}} f$, $\deg_{\bar{Y}} f=4$ y que verifique la condición (†), f se puede escribir como

$$f=\sigma_0+\sigma_1 g_1+\cdots+\sigma_s g_s\in M_{\mathbb{R}[\bar{X},\bar{Y}]}(g_1,\dots,g_s)$$

con $\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_s\in\sum\mathbb{R}[\bar{X},\bar{Y}]^2$ y

$$\deg(\sigma_0),\deg(\sigma_1 g_1),\dots,\deg(\sigma_s g_s)\leq c\mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet d^2(3n)^d}{f^\bullet}\right)^c}.$$

2.3.2 El caso $\deg_{(Y_2,\dots,Y_r)} f=2$

A lo largo de esta sección supondremos $r\geq 2$ y, dado que resultará necesario distinguir la variable Y_1, notaremos $\bar{Y}=(Y_2,\dots,Y_r)$. Consideraremos el anillo de polinomios $\mathbb{R}[\bar{X},Y_1,\bar{Y}]=\mathbb{R}[\bar{X},Y_1,Y_2,\dots,Y_r]$ y polinomios $f\in\mathbb{R}[\bar{X},Y_1,\bar{Y}]$ con $\deg_{\bar{Y}} f=2$.

En este caso, necesitaremos homogeneizar por separado respecto de la variable Y_1 y de las variables $\bar{Y}$. Entonces, para

$$f=\sum_{0\leq i\leq m}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^{r-1}\\|\beta|\leq 2}} f_{i\beta}(\bar{X})Y_1^i\bar{Y}^\beta\in\mathbb{R}[\bar{X},Y_1,\bar{Y}]$$

con $m = \deg_{Y_1} f$ y $\deg_{\bar{Y}} f = 2$ notamos con

$$\bar{f} = \sum_{0 \le i \le m} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^{r-1} \\ |\beta| \le 2}} f_{i\beta}(\bar{X}) Y_1^i Z_1^{m-i} \bar{Y}^\beta Z_2^{2-|\beta|} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, Z_1, \bar{Y}, Z_2].$$

Por otro lado, para $0 \le i \le m$ y $0 \le j \le 2$ notamos con $f^{[i,j]}$ a la componente bihomogénea en $(Y_1, \bar{Y})$ de bigrado (i, j) de f, es decir,

$$f^{[i,j]}(\bar{X}, Y_1, \bar{Y}) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^{r-1} \\ |\beta| = j}} f_{i\beta}(\bar{X}) Y_1^i \bar{Y}^\beta.$$

Diremos que f verifica la condición (‡) si

$$\text{para todo } \bar{x} \in S, \ f^{[m,2]}(\bar{x}, Y_1, \bar{Y}) \in \mathbb{R}[Y_1, \bar{Y}] \text{ es definido positivo,}$$

$$\text{para todo } \bar{x} \in S \text{ e } \bar{y} \in \mathbb{R}^{r-1}, \ \sum_{0 \le j \le 2} f^{[m,j]}(\bar{x}, Y_1, \bar{y}) \in \mathbb{R}[Y_1] \text{ es definido positivo y}$$

$$\text{para todo } \bar{x} \in S \text{ e } y_1 \in \mathbb{R}, \ \sum_{0 \le i \le m} f^{[i,2]}(\bar{x}, y_1, \bar{Y}) \in \mathbb{R}[\bar{Y}] \text{ es definido positivo,}$$

donde entendemos que un polinomio bihomogéneo $g \in \mathbb{R}[Y_1, \bar{Y}]$ es definido positivo si para todo $(y_1, \bar{y}) \in \mathbb{R}^r$ con $y_1, \bar{y} \neq 0$, $g(y_1, \bar{y}) > 0$.
Consideremos $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]$ con $m = \deg_{Y_1} f$, $\deg_{\bar{Y}} f = 2$ y $f > 0$ en $S \times \mathbb{R}^r$. Si f cumple la condición (‡), entonces, m es par y

$$\bar{f} > 0 \text{ en } S \times C_1 \times C_{r-1}.$$

En efecto, sea $(\bar{x}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2) \in S \times C_1 \times C_{r-1}$, si $z_1, z_2 \neq 0$,

$$\bar{f}(\bar{x}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2) = z_1^m z_2^2 f\left(\bar{x}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{\bar{y}}{z_2}\right) > 0,$$

si $z_1 = 0$ y $z_2 \neq 0$,

$$\bar{f}(\bar{x}, \pm 1, 0, \bar{y}, z_2) = z_2^2 \sum_{0 \le j \le 2} f^{[m,j]}\left(\bar{x}, \pm 1, \frac{\bar{y}}{z_2}\right) > 0,$$

si $z_1 \neq 0$ y $z_2 = 0$, entonces, $\bar{y} \neq 0$ y luego

$$\bar{f}(\bar{x}, y_1, z_1, \bar{y}, 0) = z_1^m \sum_{0 \le i \le m} f^{[i,2]}\left(\bar{x}, \frac{y_1}{z_1}, \bar{y}\right) > 0$$

y si $z_1, z_2 = 0$, entonces, $\bar{y} \neq 0$ y luego

$$\bar{f}(\bar{x}, \pm 1, 0, \bar{y}, 0) = f^{[m,2]}(\bar{x}, \pm 1, \bar{y}) > 0.$$

Notaremos

$$f^\bullet = \min\left\{\bar{f}(\bar{x}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2) \mid (\bar{x}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2) \in S \times C_1 \times C_{r-1}\right\}.$$

A continuación enunciamos generalizaciónes de los Lemas 2.6 y 2.7. Omitimos las demostraciones ya que son análogas a las hechas anteriormente.

Lema 2.29 *Sea* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$*,* $m = \deg_{Y_1} f$ *y* $\deg_{\bar{Y}} f = 2$*, entonces,*

$$|\bar{f}(\bar{x}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_\bullet (m+1)r(r+1)(d+1)$$

para todo $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n$*,* $(y_1, z_1) \in C_1$ *e* $(\bar{y}, z_2) \in C_{r-1}$*.*

Lema 2.30 *Sea* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$*,* $m = \deg_{Y_1} f$ *y* $\deg_{\bar{Y}} f = 2$*, entonces,*

$$|\bar{f}(\bar{x}_1, y_1, z_1, \bar{y}, z_2) - \bar{f}(\bar{x}_2, y_1, z_1, \bar{y}, z_2)| \leq \frac{1}{4}\sqrt{n}\|f\|_\bullet (m+1)r(r+1)d(d+1)\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$$

para todo $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \widetilde{\Delta}_n$ *e* $(y_1, z_1) \in C_1$ *e* $(\bar{y}, z_2) \in C_{r-1}$*.*

Estamos en condiciones de demostrar el resultado auxiliar para este caso. Nuevamente, dado que la demostración es análoga a la de la Proposición 2.15, omitiremos algunos pasos de la misma.

Proposición 2.31 *Sean* $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ *tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \ldots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset \widetilde{\Delta}_n^\circ$$

y $M(g_1, \ldots, g_s)$ *es arquimediano. Entonces, existe* $c \in \mathbb{R}_{>0}$ *tal que para todo* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]$ *positivo en* $S \times \mathbb{R}^r$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$*,* $m = \deg_{Y_1} f$*,* $\deg_{\bar{Y}} f = 2$ *y que verifique la condición* (‡)*,* f *se puede escribir como*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]}(g_1, \ldots, g_s)$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]^2$ *y*

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \ldots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c(m+1)2^{\frac{m}{2}} r^2 \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1) r^2 d^2}{f^\bullet}\right)^c}.$$

Demostración: Nuevamente, podemos suponer sin pérdida de generalidad $\deg g_i \geq 1$ y $|g_i| \leq 1$ en $\widetilde{\Delta}_n$ para todo $1 \leq i \leq s$.

Sea $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]$. Si $d = 0$, por lo visto en la Sección 1.1, cualquier $c \geq 1$ sirve, luego, si la constante c encontrada es menor que 1 la reemplazamos por el resultado de aplicar el Lema 2.12 a la 6-upla $(1, 0, c, 0, 1, c)$. A partir de ahora suponemos $d \geq 1$.

Para

$$h = \bar{f} - \lambda(Y_1^2 + Z_1^2)^{\frac{m}{2}}(Y_2^2 + \cdots + Y_r^2 + Z_2^2) \sum_{1 \leq i \leq s} g_i (g_i - 1)^{2k} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, Z_1, \bar{Y}, Z_2],$$

buscamos $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $h \geq \frac{1}{2} f^\bullet$ en $\widetilde{\Delta}_n \times C_1 \times C_{r-1}$.

Para $(y_1, z_1, \bar{y}, z_2) \in C_1 \times C_{r-1}$ fijo consideramos

$$A_{y_1, z_1, \bar{y}, z_2} = \left\{\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n \mid \bar{f}(\bar{x}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2) \leq \frac{3}{4} f^\bullet\right\}.$$

Notemos que $A_{y_1, z_1, \bar{y}, z_2} \cap S = \emptyset$.

Para determinar las condiciones que deben cumplir λ y k consideraremos los casos $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n - A_{y_1,z_1,\bar{y},z_2}$ y $\bar{x} \in A_{y_1,z_1,\bar{y},z_2}$ por separado. En ambos casos se procede de manera análoga a la Proposición 2.15.

Si $\bar{x} \in \widetilde{\Delta}_n - A_{y_1,z_1,\bar{y},z_2}$, basta pedir

$$2k+1 \geq \frac{4\lambda s}{f^\bullet} \tag{2.39}$$

y si $\bar{x} \in A_{y_1,z_1,\bar{y},z_2}$, basta pedir

$$\lambda \geq \frac{c_2(\sqrt{n}\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1))^{c_1+1}}{2\sqrt{2}f^{\bullet c_1}} \tag{2.40}$$

y

$$2k+1 \geq \frac{2\lambda(s-1)}{f^\bullet} \tag{2.41}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son las constantes de la Observación 2.9.

Luego, basta tomar

$$\lambda = \frac{c_2(\sqrt{n}\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1))^{c_1+1}}{2\sqrt{2}f^{\bullet c_1}} = c_3\frac{(\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1))^{c_1+1}}{f^{\bullet c_1}} > 0$$

con $c_3 = \frac{c_2\sqrt{n}^{c_1+1}}{2\sqrt{2}}$ y

$$k = \left\lceil \frac{1}{2}\left(\frac{4\lambda s}{f^\bullet} - 1\right)\right\rceil \in \mathbb{N}_0.$$

Por el Lema 2.29,

$$\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)(d+1)}{2f^\bullet} \geq 1,$$

y, por lo tanto,

$$k \leq c_4\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} \tag{2.42}$$

con $c_4 = 2c_3 s + 1$.

Además, si $\ell = \deg_{\bar{X}} h$, tenemos que

$$\ell \leq c_5\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} \tag{2.43}$$

con $c_5 = (2c_4+1)\max\limits_{1\leq i\leq s} \deg g_i$.

Por otro lado, usando el Lema 2.11, tenemos que

$$\|h\|_\bullet \leq c_6 2^{\frac{m}{2}}\frac{(\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1))^{c_1+1}}{f^{\bullet c_1}}\mathrm{e}^{c_7\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}} \tag{2.44}$$

con $c_6 = (c_3 s+1)\max\limits_{1\leq i\leq s}\{(\deg g_i+1)(\|g_i\|+1)\}$ y $\mathrm{e}^{c_7} = \max\limits_{1\leq i\leq s}\{(\deg g_i+1)(\|g_i\|+1)\}^{2c_4}$.

Ahora, introducimos una nueva variable X_0 para homogeneizar con respecto a $\bar{X}$ y poder usar el Teorema de Polya. Escribimos

$$h = \sum_{0\le i\le m} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^{r-1}\\|\beta|\le 2}} \sum_{0\le j\le \ell} h_{i\beta j}(\bar{X}) Y_1^i Z_1^{m-i} \bar{Y}^\beta Z_2^{2-|\beta|}$$

con $h_{i\beta j} \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ igual a cero u homogéneo de grado j para $0 \le i \le m$, $\beta \in \mathbb{N}_0^{r-1}$, $|\beta| \le 2$ y $0 \le j \le \ell$. Definimos

$$H = \sum_{0\le i\le m} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^{r-1}\\|\beta|\le 2}} \sum_{0\le j\le \ell} h_{i\beta j}(\bar{X})(X_0 + X_1 \cdots + X_n)^{\ell-j} Y_1^i Z_1^{m-i} \bar{Y}^\beta Z_2^{2-|\beta|} \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}, Y_1, Z_1, \bar{Y}, Z_2]$$

multihomogéneo en $(X_0, \bar{X})$, (Y_1, Z_1) e $(\bar{Y}, Z_2)$. Luego, se tiene que $H \ge \frac{1}{2} f^\bullet$ en $\Delta_n \times C_1 \times C_{r-1}$. Además, para $(y_1, z_1, \bar{y}, z_2) \in C_1 \times C_{r-1}$, $\|H(X_0, \bar{X}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2)\| \le \frac{1}{2}(m+1)r(r+1)(\ell+1)\|h\|_\bullet$. Entonces, por el Teorema 1.15, si

$$N = \left\lfloor \frac{(m+1)r(r+1)(\ell+1)\ell(\ell-1)\|h\|_\bullet}{2f^\bullet} - \ell \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N},$$

para cada $(y_1, z_1, \bar{y}, z_2) \in C_1 \times C_{r-1}$ se tiene que $H\big(X_0, \bar{X}, y_1, z_1, \bar{y}, z_2\big)\,(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N \in \mathbb{R}[X_0, \bar{X}]$ es un polinomio homogéneo con todos sus coeficientes positivos.

Más precisamente, si escribimos

$$H\big(X_0, \bar{X}, Y_1, Z_1, \bar{Y}, Z_2\big)\,(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)^N = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\bar{\alpha})\in\mathbb{N}_0^{n+1}\\|\alpha|=N+\ell}} b_\alpha(Y_1, Z_1, \bar{Y}, Z_2) X_0^{\alpha_0} \bar{X}^{\bar{\alpha}} \tag{2.45}$$

con $b_\alpha \in \mathbb{R}[Y_1, Z_1, \bar{Y}, Z_2]$ bihomogéneo en (Y_1, Z_1) y $(\bar{Y}, Z_2)$ de grado m y 2 respectivamente, se tiene que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ con $|\alpha| = N + \ell$, b_α es positivo en $C_1 \times C_{r-1}$ y, por lo tanto, no negativo en $\mathbb{R}^{r+2}$.

A continuación, acotamos $N + \ell$ usando (2.43) y (2.44).

$$N + \ell \le c_8(m+1)r(r+1)2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet} \right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_7\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet} \right)^{c_1+1}} \tag{2.46}$$

con $c_8 = \frac{1}{2} c_5^3 c_6 + 1$.

Evaluando la igualdad (2.45) en $X_0 = 1 - X_1 - \cdots - X_n$, $Z_1 = 1$ y $Z_2 = 1$ tenemos que

$$f = \lambda(Y_1^2+1)^{\frac{m}{2}}(Y_2^2+\cdots+Y_r^2+1) \sum_{1\le i\le s} g_i(g_i-1)^{2k} + \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\bar{\alpha})\in\mathbb{N}_0^{n+1}\\|\alpha|=N+\ell}} b_\alpha(Y_1, 1, \bar{Y}, 1)(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0} \bar{X}^{\bar{\alpha}}. \tag{2.47}$$

Es claro que el primer término del lado derecho de la igualdad (2.47) es un elemento de $M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y_1,\bar{Y}]}(g_1,\dots,g_s)$. Además,

$$\deg(Y_1^2+1)^{\frac{m}{2}}(Y_2^2+\cdots+Y_r^2+1)g_i(g_i-1)^{2k} \le m+2+(2k+1)\deg g_i, \tag{2.48}$$

para $1 \le i \le s$.

Ahora nos enfocamos en el segundo término que es a su vez una suma. Fijemos $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ con $|\alpha| = N+\ell$. Como $b_\alpha(Y_1,1,\bar{Y},1) \ge 0$ en $\mathbb{R}^r$, nuevamente por lo visto en la Sección 1.1, $b_\alpha(Y_1,1,\bar{Y},1)$ se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios con el grado de cada término acotado por $m+2$. Por otro lado, sea $v(\alpha) = (v_0,\bar{v}) \in \{0,1\}^{n+1}$ tal que $\alpha_i \equiv v_i \pmod 2$ para $0 \le i \le n$. Notando $g_0 = 1 \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, por la Observación 2.10, tenemos que

$$(1-X_1-\cdots-X_n)^{v_0}\bar{X}^{\bar{v}} = \sum_{0\le i\le s} \sigma_{v(\alpha)i}g_i,$$

con $\sigma_{v(\alpha)i} \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ para $0 \le i \le s$, y por lo tanto

$$(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}} = (1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}-\bar{v}} \sum_{0\le i\le s} \sigma_{v(\alpha)i}g_i$$

pertenece a $M(g_1,\dots,g_s)$ pues $(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}-\bar{v}} \in \mathbb{R}[\bar{X}]^2$. De esta manera concluimos que cada término de la suma pertenece a $M_{\mathbb{R}[\bar{X},Y_1,\bar{Y}]}(g_1,\dots,g_s)$. Además, para $0 \le i \le s$, tenemos que

$$\deg b_\alpha(Y_1,1,\bar{Y},1)(1-X_1-\cdots-X_n)^{\alpha_0-v_0}\bar{X}^{\bar{\alpha}-\bar{v}}\sigma_{v(\alpha)i}g_i \le m+2+N+\ell+c_9 \tag{2.49}$$

con $c_9 = \max\{\deg \sigma_{vi}g_i \mid v \in \{0,1\}^{n+1}, 0 \le i \le s\}$.

Para terminar, resta acotar simultaneamente (2.48) y (2.49).

Por un lado, usando (2.42),

$$\begin{aligned} m+2+(2k+1)\max_{1\le i\le s}\deg g_i &\le m+2+\left(2c_4\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}+1\right)\max_{1\le i\le s}\deg g_i \\ &\le c_{10}(m+1)\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r^2d^2}{f^\bullet}\right)^{c_1+1} \end{aligned}$$

con $c_{10} = (2c_4+3)4^{c_1+1}\max\limits_{1\le i\le s}\deg g_i$.

Por otro lado, usando (2.46),

$$\begin{aligned} &m+2+N+\ell+c_9 \\ &\le m+2+c_8(m+1)r(r+1)2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_7\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r(r+1)d(d+1)}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}}+c_9 \\ &\le c_{11}(m+1)2^{\frac{m}{2}}r^2\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r^2d^2}{f^\bullet}\right)^{4(c_1+1)} \mathrm{e}^{c_{12}\left(\frac{\|f\|_\bullet(m+1)r^2d^2}{f^\bullet}\right)^{c_1+1}} \end{aligned}$$

con $c_{11} = (2+2c_8+c_9)4^{4(c_1+1)}$ and $c_{12} = c_7 4^{c_1+1}$. Finalmente, tomamos c como la constante positiva que sale de aplicar el Lema 2.12 a la 6-upla $(c_{10},\, c_1+1,\, c_{11}, 4(c_1+1), c_{12}, c_1+1)$. $\square$

Por último, enunciamos el resultado para $S \subset (-1,1)^n$. Nuevamente, omitimos la demostración por ser similar a la del Teorema 2.18.

Teorema 2.32 *Sean* $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ *tales que*

$$\emptyset \neq S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}) \geq 0\} \subset (-1,1)^n$$

y $M(g_1, \dots, g_s)$ *es arquimediano. Entonces, existe* $c \in \mathbb{R}_{>0}$ *tal que para todo* $f \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]$ *positivo en* $S \times \mathbb{R}^r$ *con* $d = \deg_{\bar{X}} f$, $m = \deg_{Y_1} f$, $\deg_{\bar{Y}} f = 2$ *y que verifique la condición* (‡), f *se puede escribir como*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s \in M_{\mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]}(g_1, \dots, g_s)$$

con $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y_1, \bar{Y}]^2$ *y*

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 g_1), \dots, \deg(\sigma_s g_s) \leq c(m+1)2^{\frac{m}{2}} r^2 \mathrm{e}^{\left(\frac{\|f\|_\bullet (m+1) r^2 d^2 (3n)^d}{f^\bullet}\right)^c}.$$

Capítulo 3

Polinomios no negativos en una franja de $\mathbb{R}^2$

En el Capítulo 1 mencionamos que ni el Schmüdgen ni el Putinar Positivstellensätze valen si se reemplaza la hipótesis f positivo en S por f no negativo en S con

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\bar{x}) \geq 0, \ldots, g_s(\bar{x}) \geq 0\}$$

y $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. Más aún, en [18] se prueba que si $\dim S \geq 3$ o si $n = 2$ y S contiene un cono afín de dimensión 2, existen polinomios no negativos en S que no pertenecen al preordering generado por $g_1, \ldots, g_s$. Luego de conocerse estos resultados, el foco pasó a estar en los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que no contienen conos afines, en particular, el caso de una franja fue el más estudiado. En el año 2010, Murray Marshall prueba que todo polinomio $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ no negativo en el conjunto semialgebraico $[0, 1] \times \mathbb{R}$ (definido por la desigualdad $X(1 - X) \geq 0$) se puede escribir como

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1 - X) \tag{3.1}$$

con $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X, Y]^2$ ([9, Theorem 1.1]), en otras palabras, que todo polinomio no negativo en la franja $[0, 1] \times \mathbb{R}$ pertenece al módulo cuadrático $M(X(1 - X))$. Este resultado fue extendido posteriormente a otros conjuntos semialgebraicos de dimensión dos en [10] y [19].

En este capítulo presentamos resultados en torno a dicha representación en algunos casos particulares. En la Sección 3.1, bajo la hipótesis $\deg_Y f \leq 2$, utilizamos la estrategia de caracterizar los rayos extremos de un cono adecuado para conseguir una cota de grado para cada término de la representación (3.1). En la Sección 3.2 continuamos estudiando el problema de acotar el grado de cada término de la representación (3.1) pero desde un enfoque similar al del capítulo anterior. En la Sección 3.2.1 mostramos un método para obtener dicha representación y damos condiciones necesarias para que se puede aplicar. En la Sección 3.2.2 mostramos que este método se puede utilizar en el caso de f positivo en $[0, 1] \times \mathbb{R}$ y fully m-ic en $[0, 1]$ con $m = \deg_Y f$ y luego acotamos el grado de cada término de la representación obtenida. En la Sección 3.2.3 mostramos que el mismo método se puede utilizar en el caso de f no negativo en $[0, 1] \times \mathbb{R}$ y fully m-ic en $[0, 1]$, pero con un número finitos de ceros en la franja, todos en el borde y tales que $\frac{\partial f}{\partial X}$ no se anula en ninguno de ellos.

3.1 El caso $\deg_Y f \leq 2$

En esta sección vamos a considerar $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ no negativo en $[0, 1] \times \mathbb{R}$ con $\deg_Y f \leq 2$.

Comencemos considerando el caso $\deg_Y f = 0$, es decir, $f \in \mathbb{R}[X]$ no negativo en $[0, 1]$. En este caso, para encontrar la representación de f como un elemento de $M(X(1 - X))$ basta considerar la factorización de f en $\mathbb{R}[X]$ y reescribir cada factor de manera conveniente. Más precisamente, un tal f se puede factorizar en $\mathbb{R}[X]$ de la siguiente manera

$$f = c \prod_{i=1}^{\ell_1} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=\ell_1+1}^{\ell_2} (X - \alpha_i)^{2m_i} \prod_{i=\ell_2+1}^{\ell_3} (\alpha_i - X)^{m_i} \prod_{i=1}^{k} \left((X - a_i)^2 + b_i^2\right)$$

con $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $m_i \in \mathbb{N}$ para $1 \leq i \leq \ell_3$, $\alpha_i \leq 0$ para $1 \leq i \leq \ell_1$, $0 < \alpha_i < 1$ para $\ell_1 + 1 \leq i \leq \ell_2$, $\alpha_i \geq 1$ para $\ell_2 + 1 \leq i \leq \ell_3$ y $b_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq k$.

Luego, para $1 \leq i \leq \ell_1$, escribimos

$$X - \alpha_i = X + (-\alpha_i) \in T(X, 1 - X),$$

para $\ell_1 + 1 \leq i \leq \ell_2$, tenemos que $(X - \alpha_i)^{2m_i} \in \sum \mathbb{R}[X]^2 \subset T(X, 1 - X)$, para $\ell_2 + 1 \leq i \leq \ell_3$, escribimos

$$\alpha_i - X = (\alpha_i - 1) + (1 - X) \in T(X, 1 - X),$$

y, para $1 \leq i \leq k$, tenemos que $(X - a_i)^2 + b_i^2 \in \sum \mathbb{R}[X]^2 \subset T(X, 1 - X)$.

Entonces, luego de reescribir cada factor de f de la manera indicada, multiplicar y desarrollar, tenemos que

$$f = t + uX + v(1 - X) + wX(1 - X)$$

con $t, u, v, w \in \sum \mathbb{R}[X]^2$ y $\deg t, \deg uX, \deg v(1 - X), \deg wX(1 - X) \leq \deg f$. Por último, utilizando las identidades

$$X = X^2 + X(1 - X) \qquad \text{y} \qquad 1 - X = (1 - X)^2 + X(1 - X)$$

se tiene que

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1 - X) \in M(X(1 - X))$$

con

$$\sigma_0 = t + uX^2 + v(1 - X)^2 \quad \text{y} \quad \sigma_1 = u + v + w.$$

Es claro que $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X]^2$. Además, los grados de σ_0 y $\sigma_1 X(1 - X)$ están acotados por $\deg f + 1$.

Consideremos ahora el caso general dentro de la suposición $\deg_Y f \leq 2$, es decir,

$$f = f_2(X)Y^2 + f_1(X)Y + f_0(X)$$

con $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{R}[X]$. Notemos que necesariamente f_0 y f_2 son no negativos en $[0, 1]$. Más aún, si $x_0 \in (0, 1)$ y $X - x_0 \mid f_2$, entonces, $(X - x_0)^2 \mid f_2$. Similarmente, si $x_0 \in (0, 1)$ y $X - x_0 \mid f_0$, entonces,

$(X - x_0)^2 \mid f_0$. Además, si $x_0 \in [0, 1]$ y $X - x_0 \mid f_2$, entonces, $X - x_0 \mid f_1$. Similarmente, si $x_0 \in [0, 1]$ y $X - x_0 \mid f_0$, entonces, $X - x_0 \mid f_1$.

Nuevamente, resultará de utilidad trabajar con la homogeneización de f con respecto a la variable Y. Continuaremos notando con $\bar{f}$ a dicha homogeneización, es decir,

$$\bar{f} = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + f_0(X)Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z].$$

Notemos que *homogeneizamos a grado* 2 incluso si $\deg_Y f = 0$.

Consideremos

$$\mathcal{S} = [0, 1] \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Es fácil ver que si f es no negativo en $[0, 1] \times \mathbb{R}$, $\bar{f}$ es no negativo en $\mathcal{S}$. Además, como

$$f(X, Y) = \bar{f}(X, Y, 1),$$

la idea es trabajar con $\bar{f}$ y luego, especializando en $Z = 1$, obtener la representación para f.

Consideraremos los siguientes conjuntos.

Definición 3.1 *Dados $d, e \in \mathbb{N}_0$, definimos*

$$\mathcal{C}_{d,e} = \Big\{ \bar{f} = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + f_0(X)Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z] \mid$$

$$\bar{f} \geq 0 \text{ en } \mathcal{S},\ \deg f_2 \leq d,\ \deg f_1 \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(d + e) \right\rfloor,\ \deg f_0 \leq e \Big\}.$$

Para $d, e \in \mathbb{N}_0$ podemos pensar $\mathcal{C}_{d,e}$ incluido en $\mathbb{R}^N$ con $N = d + \lfloor \frac{1}{2}(d + e) \rfloor + e + 3$, identificando cada $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$ con su tira de coeficientes en algún orden prefijado. Por lo tanto, a lo largo de toda la sección suponemos directamente $\mathcal{C}_{d,e} \subset \mathbb{R}^N$. Es fácil ver que bajo dicha identificación, $\mathcal{C}_{d,e}$ es un cono (ver Sección 1.4). Más aún, en el siguiente lema veremos que es cerrado y no contiene rectas. Luego, la estrategia será, para cada f no negativo en $[0, 1] \times \mathbb{R}$, tomar $d, e \in \mathbb{N}_0$ tales que $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$, caracterizar los rayos extremos de $\mathcal{C}_{d,e}$, descomponer $\bar{f}$ como una suma de elementos petenecientes a los rayos extremos (Teorema 1.19) y, a partir de la caracterización obtenida, dar una representación para $\bar{f}$. Una estrategia similiar se utiliza, por ejemplo, en [3, Proposition 6.3.4] para probar que todo polinomio homogéneo de grado 4 no negativo en $\mathbb{R}^3$ es una suma de cuadrados.

Lema 3.2 *Para todo $d, e \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{C}_{d,e}$ es un cono cerrado que no contiene rectas.*

Demostración: Fijemos $d, e \in N_0$. Para ver que $\mathcal{C}_{d,e}$ es cerrado consideremos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_{d,e}$ y $a \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos $\bar{f}_n \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ al polinomio asociado a a_n y $\bar{f} \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ al polinomio asociado a a. Por definición, $\bar{f}$ verifica las cotas de grado. Además, para cada $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, $\bar{f}_n(x, y, z) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\bar{f}_n(x, y, z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{f}(x, y, z),$$

por lo tanto, $\bar{f} \geq 0$ en $\mathcal{S}$.
Para ver que $\mathcal{C}_{d,e}$ no contiene rectas procedemos por el absurdo. Supongamos que existen $v, p \in \mathbb{R}^N$, $v \neq 0$ tales que $tv + p \in \mathcal{C}_{d,e}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $v \neq 0$, $\bar{f}_v$, el polinomio asociado a v, no es identicamente cero. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ tal que $\bar{f}_v(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$0 \leq \bar{f}_{tv+p}(x_0, y_0, z_0) = t\bar{f}_v(x_0, y_0, z_0) + \bar{f}_p(x_0, y_0, z_0)$$

donde $\bar{f}_{tv+p}$y $\bar{f}_p$ son los polinomios asociados a $tv + p$ y p respectivamente. Luego, haciendo t tender a $+\infty$ o a $-\infty$ (según el signo de $\bar{f}_v(x_0, y_0, z_0)$), se tiene un absurdo. □

A continuación exhibimos una caracterización de los generadores de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ que será de utilidad a lo largo de toda la sección.

Lema 3.3 *Para $d, e \in \mathbb{N}_0$, $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ si y sólo si cada vez que $g \in \mathcal{C}_{d,e}$ verifica*

$$0 \leq g \leq \bar{f} \quad en \quad \mathcal{S},$$

existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $g = \lambda \bar{f}$.

Demostración: Notemos

$$\mathcal{C}' = \{\lambda \bar{f} \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Supongamos que $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y consideremos $g \in \mathcal{C}_{d,e}$ tal que $0 \leq g \leq \bar{f}$ en $\mathcal{S}$, luego

$$\frac{1}{2}\bar{f} = \frac{1}{2}(\bar{f} - g) + \frac{1}{2}g \in \mathcal{C}'.$$

Es claro que $\bar{f} - g, g \in \mathcal{C}_{d,e}$. Luego, $\bar{f} - g$, $g \in \mathcal{C}'$ y, en particular, existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $g = \lambda \bar{f}$ como queríamos.
Recíprocamente, supongamos que cada vez que $g \in \mathcal{C}_{d,e}$ y $0 \leq g \leq \bar{f}$ en $\mathcal{S}$ se tiene que $g \in \mathcal{C}'$ y tomemos $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_{d,e}$, $\alpha \in (0, 1)$ y $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que

$$\alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2 = \lambda \bar{f} \in \mathcal{C}'.$$

Si $\lambda = 0$, como $f_1, f_2 \geq 0$ en $\mathcal{S}$, tenemos que $f_1 = f_2 = 0 \in \mathcal{C}'$. Si $\lambda > 0$, llamamos $g_1 = \frac{\alpha}{\lambda} f_1$ y $g_2 = \frac{1-\alpha}{\lambda} f_2$. Luego, para $i = 1, 2$, es claro que $g_i \in \mathcal{C}_{d,e}$ y $0 \leq g_i \leq \bar{f}$ en $\mathcal{S}$, por lo tanto, $g_i \in \mathcal{C}'$ y, luego $f_i \in \mathcal{C}'$. □

Para probar el principal resultado de la sección (Teorema 3.11), la idea es proceder por inducción en una secuencia de conos ordenados de la siguiente manera. Diremos que

$$\mathcal{C}_{d_1,e_1} \leq \mathcal{C}_{d_2,e_2} \text{ si } d_1 \leq d_2 \text{ y } e_1 \leq e_2.$$

Veremos que dado $\bar{f} = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + f_0(X)Z^2 \in \mathcal{C}_{d,e}$ algunos factores de $f_2(X)$ o de $f_0(X)$ son necesariamente factores de $f_1(X)$; de esta manera, luego de eliminar estos factores, podemos pasar a un cono más chico.
En los siguientes lemas damos algunos resultados auxiliares básicos en torno a los rayos extremos de $\mathcal{C}_{d,e}$.

Lema 3.4 *Sean* $d, e \in \mathbb{N}_0$ *y* $\bar{f}$ *generador de un rayo extremo de* $\mathcal{C}_{d,e}$*. Entonces,* $\bar{f}$ *se anula en algún punto de* $\mathcal{S}$*.*

Demostración: Supongamos que $\bar{f} > 0$ en $\mathcal{S}$ y consideremos

$$c = \min\{\bar{f}(x, y, z) \,|\, x \in [0, 1],\, y^2 + z^2 = 1\} > 0.$$

Luego, cY^2, $c(Y^2 + Z^2) \in \mathcal{C}_{d,e}$ y tenemos que

$$0 \leq cY^2 \leq c(Y^2 + Z^2) \leq \bar{f} \quad \text{en } \mathcal{S}.$$

Como $\bar{f}$ genera un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$, usando el Lema 3.3, se tiene que $\bar{f}$ debe ser múltiplo escalar de cY^2 y $c(Y^2 + Z^2)$, lo cual es un absurdo. □

Lema 3.5 *Sean* $d, e \in \mathbb{N}_0$ *y* $\bar{f} = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + f_0(X)Z^2$ *generador de un rayo extremo de* $\mathcal{C}_{d,e}$*. Si* $f_2 = 0$*,* $f_1 = 0$ *o* $f_0 = 0$*, entonces,* $\bar{f}$ *es de la forma*

$$r(X)Y^2 \text{ o } r(X)Z^2.$$

Demostración: Si $f_2 = 0$, entonces, $f_1 = 0$, $\bar{f} = f_0(X)Z^2$ y tomamos $r(X) = f_0(X)$. Similarmente, si $f_0 = 0$, entonces, $f_1 = 0$, $\bar{f} = f_2(X)Y^2$ y tomamos $r(X) = f_2(X)$. Por último, si $f_1 = 0$ y $f_2, f_0 \neq 0$, entonces,

$$0 \leq f_2(X)Y^2 \leq f_2(X)Y^2 + f_0(X)Z^2 = \bar{f} \quad \text{en } \mathcal{S}$$

lo cual, procediendo de manera análoga a la demostración del Lema 3.4, es un absurdo. □

En el siguiente lema damos otras condiciones necesarias para que un elemento de $\mathcal{C}_{d,e}$ sea generador de un rayo extremo.

Lema 3.6 *Sean* $d, e \in \mathbb{N}_0$*. Si* $\bar{f} = r(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2$ *es generador de un rayo extremo de* $\mathcal{C}_{d,e}$ *con* p *y* q *no simultaneamente cero y* $(p : q) = 1$*, entonces,*

- $r \neq 0$*,* $r \geq 0$ *en* $[0, 1]$ *y* r *tiene* $\deg r$ *raíces reales en* $[0, 1]$ *(contadas con multiplicidad),*
- $2 \deg p \leq d, 2 \deg q \leq e$ *y* $\deg r = \min\{d - 2 \deg p, e - 2 \deg q\}$*.*

Demostración: Como $\bar{f} \neq 0$, $r \neq 0$ y como $\bar{f} \geq 0$ en $\mathcal{S}$, $r \geq 0$ en $[0, 1]$.

Si r tiene alguna raíz compleja no real o alguna raíz real que no pertenece al intervalo $[0, 1]$, r se puede escribir como $r = r_1 + r_2$ con $r_1, r_2 \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$, $\deg r_1, \deg r_2 \leq \deg r$, $\deg r_1 \neq \deg r_2$ y $r_1, r_2 \geq 0$ en $[0, 1]$. En efecto, si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es raíz de r, $\bar{z} = a - bi$ también lo es y

$$r = (X - z)(X - \bar{z})\tilde{r} = ((X - a)^2 + b^2)\tilde{r} = (X - a)^2\tilde{r} + b^2\tilde{r}$$

con $\tilde{r} \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$ y $\tilde{r} \geq 0$ en $[0, 1]$, luego tomamos $r_1 = (X - a)^2 \tilde{r}$ y $r_2 = b^2 \tilde{r}$. Si $\alpha \in \mathbb{R} - [0, 1]$ es raíz de r, tenemos dos casos: si $\alpha < 0$,

$$r = (X - \alpha)\tilde{r} = X\tilde{r} + (-\alpha)\tilde{r}$$

con $\tilde{r} \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$ y $\tilde{r} \geq 0$ en $[0, 1]$, luego tomamos $r_1 = X\tilde{r}$ y $r_2 = (-\alpha)\tilde{r}$ y si $\alpha > 1$

$$r = (\alpha - X)\tilde{r} = ((\alpha - 1) + (1 - X))\,\tilde{r} = (\alpha - 1)\tilde{r} + (1 - X)\tilde{r}$$

con $\tilde{r} \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$ y $\tilde{r} \geq 0$ en $[0, 1]$, luego tomamos $r_1 = (\alpha - 1)\tilde{r}$ y $r_2 = (1 - X)\tilde{r}$. En cualquier caso, si llamamos $\bar{f}_i = r_i(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2 \in \mathcal{C}_{d,e}$ para $i = 1, 2$, tenemos que

$$0 \leq \bar{f}_i \leq \bar{f} \quad \text{en } \mathcal{S},$$

pero como $\bar{f}$ genera un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$, usando el Lema 3.3, se tiene que $\bar{f}$ debe ser múltiplo escalar de $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$, lo cual es un absurdo ya que, como $\deg r_1 \neq \deg r_2$, $\deg \bar{f}_1 \neq \deg \bar{f}_2$.
Por otro lado, como

$$\bar{f} = r(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2 = r(X)p(X)^2Y^2 + 2r(X)p(X)q(X)YZ + r(X)q(X)^2Z^2 \in \mathcal{C}_{d,e}$$

tenemos que

$$\deg r + 2\deg p \leq d \quad \text{y} \quad \deg r + 2\deg q \leq e$$

y luego

$$2\deg p \leq d, \quad 2\deg q \leq e \quad \text{y} \quad \deg r \leq \min\{d - 2\deg p, e - 2\deg q\}.$$

Si $\deg r < \min\{d - 2\deg p, e - 2\deg q\}$, $X\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$ y como

$$0 \leq X\bar{f} \leq \bar{f} \quad \text{en } \mathcal{S}$$

se tiene un absurdo usando el Lema 3.3. □

En los siguientes tres lemas presentamos algunas propiedades que se obtienen a partir de componer un polinomio en $\mathcal{C}_{d,e}$ con un cambio lineal de variables y serán de utilidad en nuestra caracterización de los rayos extremos de $\mathcal{C}_{d,e}$. Dado que los demostraciones son similares, solo demostraremos el primero.

Lema 3.7 *Sean $d, e \in \mathbb{N}_0$ con $d \leq e$, $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ definido por*

$$h(X, Y, Z) = \bar{f}(X, Y + \beta Z, Z) = f_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Entonces,

- *h pertenece a $\mathcal{C}_{d,e}$.*
- *Si $\bar{f}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$, h también lo es.*
- *Si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ con $z_0 \neq 0$ y $\bar{f}(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $\beta = y_0/z_0$, entonces $h_0(x_0) = 0$.*

- *Si h se puede escribir como $r(X)(p(X)Y+q(X)Z)^2$ con p y q no simultaneamente cero y $(p:q) = 1$, entonces, $\bar{f}$ se puede escribir como*

$$r(X)(p(X)Y+(-\beta p(X)+q(X))Z)^2$$

con p y $-\beta p+q$ no simultaneamente cero y $(p:-\beta p+q)=1$.

Demostración: Para $(x,y,z)\in\mathcal{S}$ se tiene que $(x,y+\beta z,z)\in\mathcal{S}$. Luego, como $\bar{f}\geq 0$ en $\mathcal{S}$, $h\geq 0$ en $\mathcal{S}$. Más aún,

$$\begin{aligned} h(X,Y,Z) &= f_2(X)(Y+\beta Z)^2+f_1(X)(Y+\beta Z)Z+f_0(X)Z^2 \\ &= f_2(X)Y^2+(2\beta f_2(X)+f_1(X))YZ+(\beta^2 f_2(X)+\beta f_1(X)+f_0(X))Z^2 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, h verifica las cotas de grado. Luego, h pertenece a $\mathcal{C}_{d,e}$.
Supongamos que $\bar{f}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y tomemos $g\in\mathcal{C}_{d,e}$ tal que

$$0\leq g\leq h \text{ en } \mathcal{S};$$

entonces,

$$0\leq g(x,y-\beta z,z)\leq h(x,y-\beta z,z)=f(x,y,z) \quad \text{para todo} \quad (x,y,z)\in\mathcal{S}.$$

Además, de manera similar a lo hecho con h, se puede ver que $g(X,Y-\beta Z,Z)\in\mathcal{C}_{d,e}$. Luego, por el Lema 3.3, existe $\lambda\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$g(X,Y-\beta Z,Z)=\lambda f(X,Y,Z) \tag{3.2}$$

y, por lo tanto,

$$g(X,Y,Z)=\lambda f(X,Y+\beta Z,Z)=\lambda h(X,Y,Z). \tag{3.3}$$

Nuevamente por el Lema 3.3, concluimos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$.
Sea $(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{S}$ con $z_0\neq 0$, $\bar{f}(x_0,y_0,z_0)=0$ y $\beta=y_0/z_0$, luego

$$h_0(x_0)=\beta^2 f_2(x_0)+\beta f_1(x_0)+f_0(x_0)=\frac{1}{z_0^2}\bar{f}(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Finalmente, si

$$h(X,Y,Z)=r(X)(p(X)Y+q(X)Z)^2$$

con p y q no simultaneamente cero y $(p:q)=1$, se tiene que

$$f(X,Y,Z)=h(X,Y-\beta Z,Z)=r(X)(p(X)Y+(-\beta p(X)+q(X))Z)^2.$$

Es claro que p y $-\beta p+q$ no son simultaneamente cero y $(p:-\beta p+q)=1$. $\square$

Lema 3.8 *Sean $d, e \in \mathbb{N}_0$ con $d + 2 \leq e$, $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$, $\ell \in \mathbb{R}[X]$ con $\deg \ell = 1$ y $h \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ definido por*

$$h(X, Y, Z) = \bar{f}(X, Y + \ell(X)Z, Z) = f_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Entonces,

- *h pertenece a $\mathcal{C}_{d,e}$.*
- *Si $\bar{f}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$, entonces, h también lo es.*
- *Si (x_0, y_0, z_0), $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{S}$ con $x_0 \neq x_1$, $z_0, z_1 \neq 0$, $y_0/z_0 \neq y_1/z_1$ y $f(x_0, y_0, z_0) = f(x_1, y_1, z_1) = 0$ y*
$$\ell(X) = \frac{y_1/z_1 - y_0/z_0}{x_1 - x_0}(X - x_0) + y_0/z_0,$$
entonces, $h_0(x_0) = h_0(x_1) = 0$.
- *Si h se puede escribir como $r(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2$ con p y q no simultaneamente cero y $(p : q) = 1$, entonces, $\bar{f}$ se puede escribir como*
$$r(X)(p(X)Y + (-\ell(X)p(X) + q(X))Z)^2$$
con p y $-\ell p + q$ no simultaneamente cero y $(p : -\ell p + q) = 1$.

Lema 3.9 *Sean $d, e \in \mathbb{N}_0$ con $d = e$, $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$, $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ con $\beta_0 \neq \beta_1$ y $h \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ definido por*

$$h(X, Y, Z) = f(X, \beta_0 Y + \beta_1 Z, Y + Z) = h_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Entonces,

- *h pertenece a $\mathcal{C}_{d,e}$.*
- *Si $\bar{f}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$, entonces, h también lo es.*
- *Si (x_0, y_0, z_0), $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{S}$ con $z_0, z_1 \neq 0$, $y_0/z_0 \neq y_1/z_1$ y $f(x_0, y_0, z_0) = f(x_1, y_1, z_1) = 0$ y $\beta_0 = y_0/z_0$, $\beta_1 = y_1/z_1$, entonces, $h_2(x_0) = h_0(x_1) = 0$.*
- *Si h se puede escribir como $r(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2$ con p y q no simultaneamente cero y $(p : q) = 1$, entonces, $\bar{f}$ se puede escribir como*
$$\frac{1}{(\beta_0 - \beta_1)^2} r(X)((p(X) - q(X))Y + (-\beta_1 p(X) + \beta_0 q(X))Z)^2$$
con $p - q$ y $-\beta_1 p + \beta_0 q$ no simultaneamente cero y $(p - q : -\beta_1 p + \beta_0 q) = 1$.

Bajo la hipótesis adicional de que d y e tiene la misma paridad, nuestra caracterización de los rayos extremos de $\mathcal{C}_{d,e}$ es la siguiente.

Teorema 3.10 *Sean $d, e \in \mathbb{N}_0$ tales que $d \equiv e\,(2)$. Los rayos extremos de $\mathcal{C}_{d,e}$ son los generados por polinomios de la forma $r(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2$ con*

- *p y q no simultaneamente cero y $(p : q) = 1$,*
- *$r \neq 0$, $r \geq 0$ en $[0,1]$ y r tiene $\deg r$ raíces reales en $[0,1]$ (contadas con multiplicidad),*
- *$2\deg p \leq d, 2\deg q \leq e$ y $\deg r = \min\{d - 2\deg p, e - 2\deg q\}$.*

Demostración: Comencemos probando que si $\bar{f} \in \mathcal{C}_{d,e}$ es de la forma

$$\bar{f} = r(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2$$

con r, p y q como en el enunciado, entonces $\bar{f}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$. Consideremos

$$g = g_2(X)Y^2 + g_1(X)YZ + g_0(X)Z^2 \in \mathcal{C}_{d,e}$$

tal que $0 \leq g \leq \bar{f}$ en $\mathcal{S}$ y veamos que g es un múltiplo escalar de $\bar{f}$.
Si $p = 0$, como $(p : q) = 1$, tenemos que $q = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y, por lo tanto, $\deg r = e$. Además, para todo $x \in [0,1]$, $\bar{f}(x,1,0) = 0$. Luego, para todo $x \in [0,1]$, $g_2(x) = g(x,1,0) = 0$. Con lo cual, $g_2 = g_1 = 0$ y $g = g_0(X)Z^2$, pero como $0 \leq g \leq \bar{f}$ en $\mathcal{S}$, $0 \leq g_0 \leq \lambda^2 r$ en $[0,1]$. Es fácil ver que toda raíz de r es necesariamente raíz de g_0 con al menos la misma multiplicidad, luego, tenemos que $\deg r \leq \deg g_0 \leq e = \deg r$ y, por lo tanto, g_0 es un múltiplo escalar de r y g es un múltiplo escalar de $\bar{f}$.
Si $p \neq 0$, consideramos $G \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ definido por

$$G(X,Y,Z) = p(X)^2 g(X,Y,Z).$$

Si escribimos

$$G(X,Y,Z) = g_2(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2 + G_1(X)YZ + G_0(X)Z^2,$$

se tiene que $G_1 = G_0 = 0$. En efecto, sea $x_0 \in [0,1]$ tal que $p(x_0) \neq 0$. Como $\bar{f}(x_0, -q(x_0), p(x_0)) = 0$, $G(x_0, -q(x_0), p(x_0)) = 0$ y, por lo tanto,

$$-G_1(x_0)q(x_0)p(x_0) + G_0(x_0)p(x_0)^2 = 0. \tag{3.4}$$

Más aún, como $G \geq 0$ en $\mathcal{S}$,

$$\frac{\partial G}{\partial Y}(x_0, -q(x_0), p(x_0)) = G_1(x_0)p(x_0) = 0. \tag{3.5}$$

Concluimos de (3.4) y (3.5), que $G_1(x_0) = G_0(x_0) = 0$. Por continuidad, tenemos que $G_1 = G_0 = 0$ y, por lo tanto,

$$p(X)^2 g(X,Y,Z) = g_2(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2.$$

Como $(p : q) = 1$, $p^2 \,|\, g_2$ y $g = \tilde{g}_2(X)(p(X)Y + q(X)Z)^2$ con $\tilde{g}_2 = g_2/p^2 \in \mathbb{R}[X]$. Procediendo similarmente al caso $p = 0$, se puede ver que $0 \leq \tilde{g}_2 \leq r$, luego $\tilde{g}_2$ es un múltiplo escalar de r y g es un múltiplo escalar de $\bar{f}$. Usando el Lema 3.3, concluimos que $\bar{f}$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$.

Ahora probemos que si $\bar{f} = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + f_0(X)Z^2$ es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$, entonces, $\bar{f}$ se puede escribir como en el enunciado. Para esto, usaremos argumentos inductivos considerando la familia de conos con el orden definido anteriormente. Usando el Lema 3.5 y el Lema 3.6, podemos suponer $f_2, f_1, f_0 \neq 0$.

Si $(d, e) = (0, 0)$,

$$\bar{f} = f_2Y^2 + f_1YZ + f_0Z^2 = f_2\left(Y + \frac{f_1}{2f_2}Z\right)^2 + \left(f_0 - \frac{f_1^2}{4f_2}\right)Z^2$$

con $f_2, f_1, f_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como $\bar{f} \geq 0$ en $\mathcal{S}$, $f_0 - \frac{f_1^2}{4f_2} \geq 0$ pero como $\bar{f}$ se anula en algún punto de $\mathcal{S}$ (Lema 3.4), debe ser $f_0 - \frac{f_1^2}{4f_2} = 0$ y luego

$$\bar{f} = f_2\left(Y + \frac{f_1}{2f_2}Z\right)^2.$$

Luego, tomamos $r = f_2$, $p = 1$ y $q = \frac{f_1}{2f_2}$ y concluimos usando el Lema 3.6. De ahora en más, suponemos $(d, e) \neq (0, 0)$.

Comencemos probando el resultado en algunos casos particulares.

A1. Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $(X - x_0)^2 \mid f_2$ o $(X - x_0)^2 \mid f_0$:

Sin pérdida de generalidad, suponemos $(X - x_0)^2 \mid f_2$, luego $X - x_0 \mid f_1$. Luego, si consideramos $h_2 = f_2/(X - x_0)^2$, $h_1 = f_1/(X - x_0) \in \mathbb{R}[X]$ y

$$h = h_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + f_0(X)Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z],$$

tenemos que

$$h(X, (X - x_0)Y, Z) = \bar{f}(X, Y, Z) \qquad \text{y} \qquad h(X, Y, Z) = \bar{f}\left(X, \frac{Y}{X - x_0}, Z\right).$$

Observemos que $h \in \mathcal{C}_{d-2,e}$. En efecto, h verifica las cotas de grado y $h \geq 0$ en

$$\{(x, y, z) \in \mathcal{S} \mid x \neq x_0\}$$

y, por continuidad, $h \geq 0$ en $\mathcal{S}$. Para poder aplicar la hipótesis inductiva, veamos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d-2,e}$. Dado

$$g = g_2(X)Y^2 + g_1(X)YZ + g_0(X)Z^2 \in \mathcal{C}_{d-2,e}$$

tal que $0 \leq g \leq h$ en $\mathcal{S}$, consideremos

$$\tilde{g} = (X - x_0)^2g_2(X)Y^2 + (X - x_0)g_1(X)YZ + g_0(X)Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z].$$

Se tiene que $\tilde{g} \in \mathcal{C}_{d,e}$ y

$$g(X, (X - x_0)Y, Z) = \tilde{g}(X, Y, Z) \qquad \text{y} \qquad g(X, Y, Z) = \tilde{g}\left(X, \frac{Y}{X - x_0}, Z\right)$$

de lo que se deduce que $0 \le \tilde{g} \le \bar{f}$ en $\mathcal{S}$, luego $\tilde{g}$ es un múltiplo escalar de $\bar{f}$ y g es un múltiplo escalar de h.

Entonces, por la hipótesis inductiva tenemos que h es de la forma

$$h(X, Y, Z) = \tilde{r}(X)(\tilde{p}(X)Y + \tilde{q}(X)Z)^2$$

con $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ no simultaneamente cero y $(\tilde{p} : \tilde{q}) = 1$ y, por lo tanto,

$$\bar{f}(X, Y, Z) = \tilde{r}(X)((X - x_0)\tilde{p}(X)Y + \tilde{q}(X)Z)^2.$$

Si $X - x_0 \not| \tilde{q}$, tomamos $r = \tilde{r}$, $p = (X - x_0)\tilde{p}$ y $q = \tilde{q}$, y si $X - x_0 \,|\, \tilde{q}$, tomamos $r = (X - x_0)^2\tilde{r}$, $p = \tilde{p}$ y $q = \tilde{q}/(X - x_0) \in \mathbb{R}[X]$. En ambos casos, $(p : q) = 1$ y concluimos usando el Lemma 3.6.

A2. Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $X - x_0 \,|\, f_2, f_0$:

Es claro que $X - x_0 \,|\, f_1$. Si $x_0 \in (0, 1)$, es fácil ver que $(X - x_0)^2 \,|\, f_2$ y, por lo tanto, estamos en el caso A1. Luego, podemos suponer que $x_0 \in \{0, 1\}$. Sin pérdida de generalidad, suponemos $x_0 = 0$. Consideremos $h = \bar{f}/X \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$. Procediendo de manera similar al caso A1, se puede ver que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d-1,e-1}$, y, usando la hipótesis inductiva tenemos que h es de la forma

$$h(X, Y, Z) = \tilde{r}(X)(\tilde{p}(X)Y + \tilde{q}(X)Z)^2$$

con $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ no simultaneamente cero y $(\tilde{p} : \tilde{q}) = 1$. Luego, tomamos $r = X\tilde{r}$, $p = \tilde{p}$ y $q = \tilde{q}$ y concluimos usando el Lema 3.6.

Ahora consideramos una lista auxiliar de casos en los cuales probaremos el resultado reduciendolos a los casos A1 y A2.

B1. Existen $x_0 \in \{0, 1\}$ e $(y_0, z_0) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ tales que $\bar{f}(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $\bar{f}(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \neq x_0$:

Sin pérdida de generalidad, suponemos $\bar{f}(0, 1, 0) = 0$, luego $f_2(0) = 0$ y, por lo tanto, $X \,|\, f_1$. Si $X^2 \,|\, f_2$, estamos en el caso A1 y si $X \,|\, f_0$, estamos en el caso A2. Más aún, si existe $x \in (0, 1]$ con $f_2(x) = 0$, entonces, $\bar{f}(x, 1, 0) = 0$ lo cual contradice la hipótesis. Similarmente, si existe $x \in (0, 1]$ con $f_0(x) = 0$, entonces, $\bar{f}(x, 0, 1) = 0$ lo cual también contradice la hipótesis. Luego, de ahora en más, suponemos que $X^2 \nmid f_2$, $f_2 > 0$ en $(0, 1]$ y $f_0 > 0$ on $[0, 1]$.

Consideremos $g_2 = f_2/X$, $g_1 = f_1/X \in \mathbb{R}[X]$ y observemos que $g_2 > 0$ en $[0, 1]$. Como $\bar{f}(x, y, z) > 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1]$,

$$f_1(x)^2 - 4f_2(x)f_0(x) = x^2g_1^2(x) - 4xg_2(x)f_0(x) < 0,$$

para todo $x \in (0, 1]$ y, por lo tanto,

$$xg_1^2(x) - 4g_2(x)f_0(x) < 0$$

para todo $x \in (0, 1]$ pero, como $g_2(0) > 0$ y $f_0(0) > 0$, esta última desigualdad se puede extender a $x \in [0, 1]$. Luego,

$$\frac{xg_1^2(x)}{4g_2(x)} - f_0(x) < 0,$$

para todo $x \in [0, 1]$ y, como $[0, 1]$ es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{xg_1^2(x)}{4g_2(x)} - f_0(x) \leq -\varepsilon$$

para todo $x \in [0, 1]$. Por lo tanto,

$$f_1(x)^2 - 4f_2(x)(f_0(x) - \varepsilon) = x^2 g_1^2(x) - 4xg_2(x)(f_0(x) - \varepsilon) \leq 0$$

para todo $x \in [0, 1]$. Entonces, si $g \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ está definido por

$$g = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + (f_0(X) - \varepsilon)Z^2,$$

es claro que $g \in \mathcal{C}_{d,e}$. Además,

$$0 \leq g \leq g + \varepsilon Z^2 = \bar{f} \text{ en } \mathcal{S},$$

luego g es un múltiplo escalar de $\bar{f}$, lo cual es un absurdo.

B2. Existe $(y_0, z_0) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ tal que $\bar{f}(0, y_0, z_0) = \bar{f}(1, y_0, z_0) = 0$ y $\bar{f}(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1)$:

Sin pérdida de generalidad, suponemos $\bar{f}(0, 1, 0) = \bar{f}(1, 1, 0) = 0$, luego $f_2(0) = f_2(1) = 0$ y, por lo tanto, $X \mid f_1$ y $X - 1 \mid f_1$. Si $X^2 \mid f_2$ o $(X-1)^2 \mid f_2$, estamos en el caso A1 y si $X \mid f_0$ o $X - 1 \mid f_0$ estamos en el caso A2. Más aún, si existe $x \in (0, 1)$ con $f_2(x) = 0$, entonces, $\bar{f}(x, 1, 0) = 0$ lo cual contradice la hipótesis. Similarmente, si existe $x \in (0, 1)$ con $f_0(x) = 0$, entonces, $\bar{f}(x, 0, 1) = 0$ lo cual también contradice la hipótesis. Luego, de ahora en más, suponemos que $X^2 \nmid f_2$, $(X - 1)^2 \nmid f_2$, $f_2 > 0$ en $(0, 1)$ y $f_0 > 0$ on $[0, 1]$.

Consideremos $g_2 = f_2/(X(X - 1))$, $g_1 = f_1/(X(X - 1)) \in \mathbb{R}[X]$ y observemos que $g_2 < 0$ en $[0, 1]$. Como $\bar{f}(x, y, z) > 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1)$,

$$f_1(x)^2 - 4f_2(x)f_0(x) = x^2(x - 1)^2 g_1^2(x) - 4x(x - 1)g_2(x)f_0(x) < 0,$$

para todo $x \in (0, 1)$ y, por lo tanto,

$$x(x - 1)g_1^2(x) - 4g_2(x)f_0(x) > 0$$

para todo $x \in (0,1)$ pero, como $g_2(0) < 0$, $g_2(1) < 0$, $f_0(0) > 0$ y $f_0(1) > 0$, esta última desigualdad se puede extender a $x \in [0,1]$. Luego,

$$\frac{x(x-1)g_1^2(x)}{4g_2(x)} - f_0(x) < 0$$

para todo $x \in [0,1]$ y, como $[0,1]$ es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{x(x-1)g_1^2(x)}{4g_2(x)} - f_0(x) \leq -\varepsilon.$$

para todo $x \in [0,1]$. Por lo tanto,

$$f_1(x)^2 - 4f_2(x)(f_0(x) - \varepsilon) = x^2(x-1)^2 g_1^2(x) - 4x(x-1)g_2(x)(f_0(x) - \varepsilon) \leq 0,$$

para todo $x \in [0,1]$. Entonces, si $g \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ está definido por

$$g = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + (f_0(X) - \varepsilon)Z^2,$$

es claro que $g \in \mathcal{C}_{d,e}$. Además,

$$0 \leq g \leq g + \varepsilon Z^2 = \bar{f} \text{ en } \mathcal{S}$$

luego, g es un múltiplo escalar de $\bar{f}$, lo cual es un absurdo.

B3. Existen $(y_0,z_0),(y_1,z_1) \in \{(1,0),(0,1)\}$, $(y_0,z_0) \neq (y_1,z_1)$ tales que $\bar{f}(0,y_0,z_0) = \bar{f}(1,y_1,z_1) = 0$ y $\bar{f}(x,y,z) \neq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0,1)$:

Sin pérdida de generalidad, suponemos $f(0,1,0) = f(1,0,1) = 0$, luego $f_2(0) = f_0(1) = 0$ y, por lo tanto, $X \mid f_1$ y $X-1 \mid f_1$. Si $X^2 \mid f_2$ o $(X-1)^2 \mid f_0$ estamos en el caso A1 y si $X \mid f_0$ o $X-1 \mid f_2$ estamos en el caso A2. Más aún, si existe $x \in (0,1)$ con $f_2(x) = 0$, entonces, $\bar{f}(x,1,0) = 0$ lo cual contradice la hipótesis. Similarmente, si existe $x \in (0,1)$ con $f_0(x) = 0$, entonces, $\bar{f}(x,0,1) = 0$ lo cual también contradice la hipótesis. Luego, de ahora en más, suponemos $X^2 \nmid f_2$, $(X-1)^2 \nmid f_0$, $f_2 > 0$ en $(0,1]$ y $f_0 > 0$ en $[0,1)$.

Consideremos $g_2 = f_2/X$, $g_1 = f_1/(X(X-1))$, $g_0 = f_0/(X-1) \in \mathbb{R}[X]$ y observemos que $g_2 > 0$ en $[0,1]$ y $g_0 < 0$ en $[0,1]$. Como $\bar{f}(x,y,z) > 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0,1)$,

$$f_1(x)^2 - 4f_2(x)f_0(x) = x^2(x-1)^2 g_1^2(x) - 4x(x-1)g_2(x)g_0(x) < 0$$

para todo $x \in (0,1)$ y, por lo tanto,

$$x(x-1)g_1^2(x) - 4g_2(x)g_0(x) > 0$$

para todo $x \in (0,1)$ pero, como $g_2(0) > 0$, $g_2(1) > 0$, $g_0(0) < 0$ y $g_0(1) < 0$, esta última desigualdad se puede extender a $x \in [0,1]$. Luego,

$$\frac{x(x-1)g_1^2(x)}{4g_2(x)} - g_0(x) > 0$$

para todo $x \in [0,1]$ y, como $[0,1]$ es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{x(x-1)g_1^2(x)}{4g_2(x)} - g_0(x) \geq \varepsilon$$

para todo $x \in [0,1]$. Por lo tanto,

$$f_1(x)^2 - 4f_2(x)(x-1)(g_0(x)+\varepsilon) = x^2(x-1)^2 g_1^2(x) - 4x(x-1)g_2(x)(g_0(x)+\varepsilon) \leq 0$$

para todo $x \in [0,1]$. Entonces, si $g \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ está definido por

$$g = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + (X-1)(g_0(X)+\varepsilon)Z^2 \in \mathbb{R}[X,Y,Z],$$

es claro que $g \in \mathcal{C}_{d,e}$. Además,

$$0 \leq g \leq g - \varepsilon(X-1)Z^2 = \bar{f} \text{ en } \mathcal{S}$$

luego g es un múltiplo escalar de $\bar{f}$, lo cual es un absurdo.

Finalmente, probamos el caso general. Sin pérdida de generalidad, suponemos $d \leq e$. Por el Lema 3.4, $\bar{f}$ se anula en algún punto de $\mathcal{S}$, para probar el resultado consideraremos tres casos.

C1. Existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ con $x_0 \in (0,1)$ tal que $\bar{f}(x_0, y_0, z_0) = 0$:

Si $z_0 = 0$, $X - x_0 \mid f_2$, luego $(X-x_0)^2 \mid f_2$ y estamos en el caso A1. Si $z_0 \neq 0$, tomamos $\beta = y_0/z_0$ y consideramos

$$h(X,Y,Z) = \bar{f}(X, Y+\beta Z, Z) = f_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Usando el Lema 3.7, tenemos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y verifica $h_0(x_0) = 0$. Luego, $(X - x_0)^2 \mid h_0$ y por el caso A1 aplicado a h, el Lema 3.6 y el Lema 3.7 concluimos el resultado.

C2. Existen $x_0 \in \{0,1\}$ y $(y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ tales que $\bar{f}(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $\bar{f}(x,y,z) \neq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ con $x \neq x_0$:

Sin pérdida de generalidad, suponemos $x_0 = 0$. Si $z_0 = 0$, podemos suponer $y_0 = 1$ y estamos en el caso B1. Si $z_0 \neq 0$, tomamos $\beta = y_0/z_0$ y consideramos

$$h(X,Y,Z) = \bar{f}(X, Y+\beta Z, Z) = f_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Usando el Lema 3.7, tenemos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y verifica $h_0(0) = 0$, luego $h(0,0,1) = 0$. Además, $h(x,y,z) \neq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ con $x \neq 0$. Luego, por el caso B1 aplicado a h, el Lema 3.6 y el Lema 3.7 concluimos el resultado.

C3. Existen $(y_0, z_0), (y_1, z_1) \in \mathcal{S}$ tales que $\bar{f}(0, y_0, z_0) = \bar{f}(1, y_1, z_1) = 0$ y $\bar{f}(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1)$:

Si $z_0 = z_1 = 0$, podemos suponer $y_0 = y_1 = 1$ y estamos en el caso B2.

Si $z_0 \neq 0$ y $z_1 = 0$, tomamos $\beta = y_0/z_0$ y consideramos

$$h(X, Y, Z) = \bar{f}(X, Y + \beta Z, Z) = f_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Usando el Lema 3.7, tenemos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y verifica $h_0(0) = 0$, luego $h(0, 0, 1) = 0$. Por otro lado, como $\bar{f}(1, y_1, 0) = 0$, $f_2(1) = 0$ y $h(1, 1, 0) = 0$. Además, $h(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1)$. Luego, por el caso B3 aplicado a h, el Lema 3.6 y el Lema 3.7, concluimos el resultado.

Si $z_0 = 0$ y $z_1 \neq 0$ procedemos de manera similar al caso anterior.

Por último, consideramos el caso $z_0, z_1 \neq 0$, que a su vez necesitamos dividirlo en tres casos.

Si $z_0, z_1 \neq 0$ y $y_0/z_0 = y_1/z_1$, tomamos $\beta = y_0/z_0$ y consideramos

$$h(X, Y, Z) = \bar{f}(X, Y + \beta Z, Z) = f_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Usando el Lema 3.7, tenemos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y verifica $h_0(0) = h_0(1) = 0$, luego $h(0, 0, 1) = h(1, 0, 1) = 0$. Además, $h(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1)$. Luego, por el caso B2 aplicado a h, el Lema 3.6 y el Lema 3.7, concluimos el resultado.

Si $z_0, z_1 \neq 0$ con $y_0/z_0 \neq y_1/z_1$ y $d < e$, como $d \equiv e(2)$, $d + 2 \leq e$. Entonces, tomamos

$$\ell(X) = (y_1/z_1 - y_0/z_0)X + y_0/z_0$$

y consideramos

$$h(X, Y, Z) = \bar{f}(X, Y + \ell(X)Z, Z) = f_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Usando el Lema 3.8, tenemos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y verifica $h_0(0) = h_0(1) = 0$, luego $h(0, 0, 1) = h(1, 0, 1) = 0$. Además, $h(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1)$. Luego, por el caso B2 aplicado a h, el Lema 3.6 y el Lema 3.8, concluimos el resultado.

Finalmente, si $z_0, z_1 \neq 0$ con $y_0/z_0 \neq y_1/z_1$ y $d = e$, tomamos $\beta_0 = y_0/z_0$ y $\beta_1 = y_1/z_1$ y consideramos

$$h(X, Y, Z) = \bar{f}(X, \beta_0 Y + \beta_1 Z, Y + Z) = h_2(X)Y^2 + h_1(X)YZ + h_0(X)Z^2.$$

Usando el Lema 3.9, tenemos que h es generador de un rayo extremo de $\mathcal{C}_{d,e}$ y verifica $h_2(0) = h_0(1) = 0$, luego $h(0, 1, 0) = h(1, 0, 1) = 0$. Además, $h(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ con $x \in (0, 1)$. Luego, por el caso B3 aplicado a h, el Lema 3.6 y el Lema 3.9, concluimos el resultado.

$\square$

A continuación enunciamos y demostramos el principal resultado de la sección en el cual, siguiendo la estrategia comentada anteriormente, probamos para $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ no negativo en $[0,1] \times \mathbb{R}$ y con $\deg_Y f \le 2$, una cota de grado para cada término de la representación de f como elemento de $M(X(1-X))$.

Teorema 3.11 *Sea $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ con $f \ge 0$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$ y $\deg_Y f \le 2$. Entonces,*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X) \in M(X(1-X))$$

con

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \le \deg_X f + 3.$$

Demostración: Tomemos $d = e = \deg_X f$, entonces, $\bar{f} = f_2(X)Y^2 + f_1(X)YZ + f_0(X)Z^2 \in \mathcal{C}_{d,e}$ (notemos que *homogeneizamos a grado* 2 incluso si $\deg_Y f = 0$). Luego, por los Teoremas 1.19 y 3.10, tenemos que

$$\bar{f} = \sum_{1 \le i \le s} r_i (p_i Y + q_i Z)^2 \tag{3.6}$$

con $r_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}[X]$ como en el Teorema 3.10 para $1 \le i \le s$. Especializando (3.6) en $Z = 1$, tenemos que

$$f = \sum_{1 \le i \le s} r_i (p_i Y + q_i)^2.$$

Como mostramos al comienzo de la sección, la condición $r_i \ge 0$ en $[0,1]$ implica que existen $\sigma_{0,i}, \sigma_{1,i} \in \sum \mathbb{R}[X]^2$ tales que

$$r_i = \sigma_{0,i} + \sigma_{1,i} X(1-X)$$

con $\deg \sigma_{0,i}, \deg \sigma_{1,i} X(1-X) \le \deg r_i + 1$. Luego, considerando

$$\sigma_0 = \sum_{1 \le i \le s} \sigma_{0,i} (p_i Y + q_i)^2$$

y

$$\sigma_1 = \sum_{1 \le i \le s} \sigma_{1,i} (p_i Y + q_i)^2$$

tenemos que $f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X)$. Finalmente,

$$\deg(\sigma_0) \le \max_{1 \le i \le s} \deg \sigma_{0,i} (p_i Y + q_i)^2 \le \max_{1 \le i \le s} \deg r_i (p_i Y + q_i)^2 + 1 \le \deg_X f + 3$$

y

$$\deg(\sigma_1 X(1-X)) \le \max_{1 \le i \le s} \deg \sigma_{1,i} (p_i Y + q_i)^2 X(1-X) \le$$
$$\le \max_{1 \le i \le s} \deg r_i (p_i Y + q_i)^2 + 1 \le \deg_X f + 3.$$

$\square$

3.2 Un enfoque constructivo

En esta sección mostramos un método constructivo para obtener la representación de un polinomio $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ como un elemento de $M(X(1-X))$. La idea es, al igual que en la Sección 2.1, levantar el intervalo $[0,1]$ al simplex estándar de dimensión 1

$$\Delta_1 = \{(w,x) \in \mathbb{R}^2 \mid w \geq 0,\, x \geq 0,\, w + x = 1\},$$

considerar la variable Y como un parámetro y producir un certificado de no negatividad en Δ_1 de manera uniforme. Para este paso utilizamos nuevamente la versión del Teorema de Polya con cota de grado (Teorema 1.15). Una método similar para obtener esta representación fue presentado en [15, Theorem 3] bajo diferentes hipótesis.

3.2.1 Método general

Utilizaremos la siguiente notación.

Notación 3.12 *Para*

$$f = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq d} a_{ji} X^j Y^i \in \mathbb{R}[X,Y]$$

con $m = \deg_Y f$, *notamos*

$$\bar{f} = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq d} a_{ji} X^j Y^i Z^{m-i} \in \mathbb{R}[X,Y]$$

y

$$F = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq d} a_{ji} X^j (W+X)^{d-j} Y^i Z^{m-i} \in \mathbb{R}[W,X,Y,Z].$$

Para $N \in \mathbb{N}_0$ *y* $0 \leq j \leq N+d$, *definimos los polinomios* $b_j \in \mathbb{R}[Y,Z]$ *de la siguiente manera:*

$$(W+X)^N F = \sum_{0 \leq j \leq N+d} b_j(Y,Z) W^j X^{N+d-j}. \tag{3.7}$$

Observemos que $(W+X)^N F$ es homogéneo en (W,X) y en (Y,Z) de grado $N+d$ y m respectivamente. Por lo tanto, para $0 \leq j \leq N+d$, $b_j \in \mathbb{R}[Y,Z]$ es un polinomio homogéneo de grado m.

Notaremos, al igual que en capítulo anterior,

$$C = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 = 1\}.$$

Proposición 3.13 *Sea* $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ *y* $N \in \mathbb{N}_0$ *tal que para todo* $0 \leq j \leq N+d$, $b_j \geq 0$ *en* C. *Entonces,*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X) \in M(X(1-X))$$

con

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \leq N + d + m + 1.$$

Demostración: Evaluando la igualdad (3.7) en $W = 1 - X$ y $Z = 1$ tenemos que

$$f = \sum_{0 \leq j \leq N+d} b_j(Y,1)(1-X)^j X^{N+d-j}.$$

Para $0 \leq j \leq N+d$, como b_j es homogéneo y $b_j \geq 0$ en C, tenemos que $b_j(Y,1) \geq 0$ en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, $b_j(Y,1)$ se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios con el grado de cada término acotado por m (ver Sección 1.1).

Si $N+d$ es par, tomamos

$$\sigma_0 = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N+d \\ j \text{ par}}} b_j(Y,1)(1-X)^j X^{N+d-j} \in \sum \mathbb{R}[X,Y]^2$$

y

$$\sigma_1 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N+d-1 \\ j \text{ impar}}} b_j(Y,1)(1-X)^{j-1} X^{N+d-j-1} \in \sum \mathbb{R}[X,Y]^2.$$

Luego, $f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X)$. Además, es claro que

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \leq N+d+m.$$

Si $N+d$ es impar, tomamos

$$\sigma_0 = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N+d-1 \\ j \text{ par}}} b_j(Y,1)(1-X)^j X^{N+d-j+1} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N+d \\ j \text{ impar}}} b_j(Y,1)(1-X)^{j+1} X^{N+d-j} \in \sum \mathbb{R}[X,Y]^2$$

y

$$\sigma_1 = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N+d-1 \\ j \text{ par}}} b_j(Y,1)(1-X)^j X^{N+d-j-1} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N+d \\ j \text{ impar}}} b_j(Y,1)(1-X)^{j-1} X^{N+d-j} \in \sum \mathbb{R}[X,Y]^2.$$

Usando las igualdades

$$X = X^2 + X(1-X) \qquad \text{y} \qquad 1 - X = (1-X)^2 + X(1-X),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
f = & \sum_{0 \leq j \leq N+d} b_j(Y,1)(1-X)^j X^{N+d-j} \\
= & \sum_{\substack{0 \leq j \leq N+d-1 \\ j \text{ par}}} b_j(Y,1)(1-X)^j (X^{N+d-j+1} + X^{N+d-j}(1-X)) + \\
& \sum_{\substack{1 \leq j \leq N+d \\ j \text{ impar}}} b_j(Y,1)((1-X)^{j+1} + (1-X)^j X) X^{N+d-j} \\
= & \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X).
\end{aligned}$$

Además, es claro que

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \leq N+d+m+1.$$

$\square$

En las Secciones 3.2.2 y 3.2.3, bajo las hipótesis adicionales mencionadas anteriormente, probamos la existencia y encontramos una cota superior para $N \in \mathbb{N}_0$ satisfaciendo las hipótesis de la Proposición 3.13. Luego, para obtener la representación buscada procedemos de la siguiente manera. Si es posible calcular la cota superior, desarrollamos el polinomio $(W+X)^N F$ y luego calculamos la representación de $b_j(Y,1)$ como suma de cuadrados de polinomios en $\mathbb{R}[Y]$ para todo $0 \le j \le N+d$ (ver [7]). Si no es posible calcular la cota superior, elegimos un valor para N y lo vamos incrementando en uno, en cada paso chequeamos si ocurre que $b_j(Y,1)$ es no negativo en $\mathbb{R}$ para todo $0 \le j \le N+d$ (ver [2, Chapter 4] y [12]). Una vez que dicha condición se verifica, calculamos la representación para cada $b_j(Y,1)$ como suma de cuadrados de polinomios en $\mathbb{R}[Y]$ para todo $0 \le j \le N+d$.

3.2.2 El caso f positivo en la franja

En esta sección consideramos el caso f positivo en $[0,1]\times\mathbb{R}$ y fully m-ic en $[0,1]$. Mostramos que el método presentado en la sección anterior se puede aplicar (Proposición 3.14) y exhibimos una cota para el grado de cada término de la representación obtenida (Teorema 3.15).

Como mostramos en la Sección 2.1, si $f>0$ en $[0,1]\times\mathbb{R}$ y f es fully m-ic en $[0,1]$, $\bar{f}>0$ en $[0,1]\times C$ y notamos

$$f^{\bullet} = \min\{\bar{f}(x,y,z) \mid (x,y,z)\in[0,1]\times C\} > 0.$$

Utilizaremos la siguiente notación

$$\|f\|_\infty = \max\{|a_{ji}| \mid 0\le i\le m,\ 0\le j\le d\}.$$

Proposición 3.14 *Sea $f\in\mathbb{R}[X,Y]$ positivo en $[0,1]\times\mathbb{R}$ y f fully m-ic en $[0,1]$. Entonces, si*

$$N+d > \frac{(d-1)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2f^{\bullet}},$$

para todo $0\le j\le N+d$, $b_j\ge 0$ en C.

Demostración: Como para $(w,x,y,z)\in\Delta_1\times C$, $F(w,x,y,z)=\bar{f}(x,y,z)$, tenemos que $F\ge f^{\bullet}$ en $\Delta_1\times C$.

Por otro lado, usando el Lema 2.11, para $(y,z)\in C$, tenemos que

$$\|F(W,X,y,z)\| \le (d+1)(m+1)\max_{\substack{0\le i\le m\\ 0\le j\le d}}\left\{\|a_{ji}X^j(W+X)^{d-j}y^iz^{m-i}\|\right\} \le (d+1)(m+1)\|f\|_\infty.$$

Luego, por Teorema 1.15, si $N\in\mathbb{N}$ verifica

$$N+d > \frac{(d-1)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2f^{\bullet}},$$

todos los coeficientes de

$$(W+X)^N F(W,X,y,z) = \sum_{0\le j\le N+d} b_j(y,z)W^jX^{N+d-j} \in \mathbb{R}[W,X]$$

son positivos. Es decir, para todo $0\le j\le N+d$, $b_j\ge 0$ en C. □

Teorema 3.15 *Sea $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ con $f > 0$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$, f fully m-ic en $[0,1]$ y $d = \deg_X f \geq 2$. Entonces, f se puede escribir como*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X) \in M(X(1-X))$$

con $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X,Y]^2$ y

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \leq \frac{d^3(m+1)\|f\|_\infty}{f^\bullet}.$$

Demostración: Por la Proposición 3.14 si $N \in \mathbb{N}$ es el menor número natural tal que

$$N + d > \frac{(d-1)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2f^\bullet},$$

entonces, para todo $0 \leq j \leq N+d$, $b_j \geq 0$ en C. Luego, por la Proposición 3.13, tenemos que $f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X)$ con $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X,Y]^2$ con

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \leq N + d + m + 1.$$

Como

$$\|f\|_\infty \geq |a_{00}| = |f(0,0)| = f(0,0) = \bar{f}(0,0,1) \geq f^\bullet,$$

tenemos que

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \leq N+d+m+1 \leq \frac{(d-1)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2f^\bullet} + m + 2 \leq \frac{d^3(m+1)\|f\|_\infty}{f^\bullet}.$$

□

Notemos que los caso $\deg_X f = 0$ y $\deg_X f = 1$ no están cubiertos en el Teorema 3.15, pero estos casos son más fáciles de estudiar. Si $\deg_X f = 0$, $f \in \mathbb{R}[Y]$ y es no negativo en $\mathbb{R}$, como vimos en la Sección 1.1, en este caso f se puede escribir como suma de cuadrados de polinomios en $\mathbb{R}[Y]$ con el grado de cada término acotado por m. Si $\deg_X f = 1$, tenemos que

$$f(X,Y) = f(1,Y)X + f(0,Y)(1-X)$$

y, como $f(0,Y), f(1,Y) \in \mathbb{R}[Y]$ son no negativos en $\mathbb{R}$, nuevamente por lo visto en la Sección 1.1, se pueden escribir como suma de cuadrados de polinomios en $\mathbb{R}[Y]$ con el grado de cada término acotado por m luego, usando las identidades,

$$X = X^2 + X(1-X) \qquad \text{y} \qquad 1 - X = (1-X)^2 + X(1-X),$$

y tomando $\sigma_0 = f(1,Y)X^2 + f(0,Y)(1-X)^2$ y $\sigma_1 = f(1,Y) + f(0,Y)$, tenemos que $f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X)$ y además el grado de cada término está acotado por $m+2$.

Observación 3.16 *Para $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ bajo las hipótesis del Teorema 3.15, luego de un reescalamiento se puede aplicar también el Teorema 2.18. Sin embargo, la cota obtenida aplicando el Teorema 2.18 es doblemente exponencial en d, mientras que la cota obtenida aplicando el Teorema 3.15 es polinomial en d.*

3.2.3 El caso f con un número finito de ceros en el borde de la franja

En esta sección consideramos el caso $f \geq 0$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$ y fully m-ic en $[0,1]$, pero con un número finitos de ceros en la franja, todos en el borde y tales que $\frac{\partial f}{\partial X}$ no se anula en ninguno de ellos.

Mostramos que el método presentado en la Sección 3.2.1 se puede aplicar (Proposición 3.22) y probamos la existencia de una cota para el grado de cada término de la representación obtenida (Teorema 3.23).

Consideremos

$$C_+ = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Para $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ no negativo en $[0,1] \times \mathbb{R}$ y fully m-ic en $[0,1]$, es claro que m es par. Entonces, como $b_j(Y,Z) \in \mathbb{R}[Y,Z]$ es homogéneo de grado m, para probar que $b_j \geq 0$ en C, es suficiente probar que $b_j \geq 0$ en C_+. La ventaja de considerar C_+ en vez de C es simplemente que, bajo las hipótesis mencionadas, existe una biyección entre los ceros de f en $[0,1] \times \mathbb{R}$ y los ceros de F en $\Delta_1 \times C_+$ dada por

$$(x,\alpha) \mapsto (1-x, x, y_\alpha, z_\alpha) \qquad \text{con} \qquad (y_\alpha, z_\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right).$$

La idea es considerar, para cada cero (x,α) de f, el polinomio $F(W,X,y_\alpha,z_\alpha) \in \mathbb{R}[W,X]$ y encontrar $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ tal que $(W+X)^{N_\alpha} F(W,X,y_\alpha,z_\alpha)$ tiene coeficientes $b_j(y_\alpha,z_\alpha)$ no negativos. Luego, mostrar que para $(y,z) \in C_+$ cerca de (y_α,z_α), $(W+X)^{N_\alpha} F(W,X,y,z) \in \mathbb{R}[W,X]$ también tiene coeficientes $b_j(y,z)$ no negativos. Finalmente, en el resto de C_+ usamos argumentos de compacidad.

Una de las principales herramientas que utilizamos es la versión con cota del Teorema de Polya que afirma que si un polinomio $g \in \mathbb{R}[W,X]$ es positivo en Δ_1, al multiplicarlo por una potencia adecuada de $(W+X)$, todos sus coeficientes son positivos. Como necesitamos una cota inferior positiva explícita para dichos coeficientes, en el Lema 3.21 presentamos una leve modificación del Teorema 1.15.

A continuación introducimos notación y enunciamos algunos resultados auxiliares que necesitaremos en la demostración del Lema 3.21.

Notación 3.17 *Para $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$ y una variable U, notaremos*

$$(U)_t^m := U(U-t)(U-2t)\dots(U-(m-1)t) = \prod_{0 \leq i \leq m-1} (U - it) \in \mathbb{R}[U].$$

Observación 3.18 *Sea $M > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\left(\frac{k}{M}\right)_{\frac{1}{M}}^m = \begin{cases} \frac{1}{M^m}\frac{k!}{(k-m)!} & si \quad m \leq k, \\ 0 & si \quad m > k. \end{cases}$$

En el siguiente lema se enuncia la Identidad de Vandermonde-Chu. Una demostración de este resultado se puede encontrar en [15, Section 2].

Lema 3.19 (Identidad de Vandermonde-Chu) *Para $t \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = d}} \frac{d!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} (x_1)_t^{\alpha_1} \dots (x_n)_t^{\alpha_n} = (x_1 + \dots + x_n)_t^d.$$

Lema 3.20 *Sean $w_1, \dots, w_l \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq w_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq l$, entonces*

$$\prod_{1 \leq k \leq l} (1 - w_k) \geq 1 - \sum_{1 \leq k \leq l} w_k.$$

Demostración: Por inducción en $l \in \mathbb{N}$. Es claro que la desigualdad vale para $l = 1$. Consideremos $w_1, \dots, w_{l+1} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq w_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq l + 1$. Luego, utilizando la hipótesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq k \leq l+1} (1 - w_k) &\geq \left(1 - \sum_{1 \leq k \leq l} w_k \right) (1 - w_{l+1}) \\
&= 1 - \sum_{1 \leq k \leq l+1} w_k + \left(\sum_{1 \leq k \leq l} w_k \right) w_{l+1} \\
&\geq 1 - \sum_{1 \leq k \leq l+1} w_k.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.21 *Sea $g \in \mathbb{R}[W, X]$ homogéneo y positivo en Δ_1 con $d = \deg g$ y $\lambda = \min_{\Delta_1} g > 0$. Para $0 \leq \epsilon < 1$, si*

$$N \geq \frac{(d-1)d\|g\|}{2(1-\epsilon)\lambda} - d,$$

para $0 \leq j \leq N + d$ el coeficiente de $W^j X^{N+d-j}$ en $(W + X)^N g$ es mayor o igual que $\frac{N!(N+d)^d}{j!(N+d-j)!}\epsilon\lambda$.

Demostración: Para $g \in \mathbb{R}[W, X]$ como en el enunciado, escribimos

$$g = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j W^j X^{d-j}$$

y, para $N \in \mathbb{N}_0$, escribimos

$$(W + X)^N g = \sum_{0 \leq j \leq N+d} b_j W^j X^{N+d-j}.$$

Luego, usando la Observación 3.18, tenemos que, para todo $0 \leq j \leq N + d$,

$$\begin{aligned}
b_j = &\sum_{\max\{0, j-N\} \leq i \leq \min\{d, j\}} \binom{N}{j-i} a_i \\
= &\frac{N!(N+d)^d}{j!(N+d-j)!} \sum_{\max\{0, j-N\} \leq i \leq \min\{d, j\}} a_i \frac{j!}{(j-i)!(N+d)^i} \, \frac{(N+d-j)!}{(N-j+i)!(N+d)^{d-i}} \\
= &\frac{N!(N+d)^d}{j!(N+d-j)!} \sum_{0 \leq i \leq d} a_i \left(\frac{j}{N+d} \right)^i_{\frac{1}{N+d}} \left(\frac{N+d-j}{N+d} \right)^{d-i}_{\frac{1}{N+d}}.
\end{aligned}$$

Utilizando, para $t \in \mathbb{R}_{>0}$, la notación

$$g_t(W, X) = \sum_{0 \le i \le d} a_i \, (W)_t^i \, (X)_t^{d-i}$$

tenemos que, para todo $0 \le j \le N + d$,

$$b_j = \frac{N!(N+d)^d}{j!(N+d-j)!} g_{\frac{1}{N+d}} \left(\frac{j}{N+d}, \frac{N+d-j}{N+d} \right).$$

Por otro lado, usando los Lemas 3.19 y 3.20,

$$\begin{aligned}
& g_{\frac{1}{N+d}} \left(\frac{j}{N+d}, \frac{N+d-j}{N+d} \right) \\
&= g\left(\frac{j}{N+d}, \frac{N+d-j}{N+d} \right) - \sum_{0 \le i \le d} a_i \left(\left(\frac{j}{N+d} \right)^i \left(\frac{N+d-j}{N+d} \right)^{d-i} - \left(\frac{j}{N+d} \right)^i_{\frac{1}{N+d}} \left(\frac{N+d-j}{N+d} \right)^{d-i}_{\frac{1}{N+d}} \right) \\
&\ge \lambda - \|g\| \sum_{0 \le i \le d} \binom{d}{i} \left(\left(\frac{j}{N+d} \right)^i \left(\frac{N+d-j}{N+d} \right)^{d-i} - \left(\frac{j}{N+d} \right)^i_{\frac{1}{N+d}} \left(\frac{N+d-j}{N+d} \right)^{d-i}_{\frac{1}{N+d}} \right) \\
&= \lambda - \|g\| \left(1 - (1)^d_{\frac{1}{N+d}} \right) \\
&= \lambda - \|g\| \left(1 - \prod_{0 \le k \le d-1} \left(1 - \frac{k}{N+d} \right) \right) \\
&\ge \lambda - \|g\| \left(1 - \left(1 - \sum_{0 \le k \le d-1} \frac{k}{N+d} \right) \right) \\
&= \lambda - \frac{\|g\|(d-1)d}{2(N+d)}.
\end{aligned}$$

Luego, si $N \ge \frac{\|g\|(d-1)d}{2(1-\epsilon)\lambda} - d$,

$$b_j \ge \frac{N!(N+d)^d}{j!(N+d-j)!} \left(\lambda - \frac{\|g\|(d-1)d}{2(N+d)} \right) \ge \frac{N!(N+d)^d}{j!(N+d-j)!} \epsilon \lambda.$$

$\square$

A continuación mostramos que, bajo las hipótesis mencionadas anteriormente, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $b_j \ge 0$ on C para todo $0 \le j \le N + d$.

Proposición 3.22 *Sea $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ con $f \geq 0$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$, f fully m-ic en $[0,1]$ y supongamos que f tiene un número finito de ceros en $[0,1] \times \mathbb{R}$, todos en $\{0,1\} \times \mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial X}$ no se anula en ninguno de ellos. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $0 \leq j \leq N+d$, $b_j \geq 0$ en C.*

Demostración: Para $0 \leq h \leq d$, definimos los polinomios $c_h \in \mathbb{R}[Y,Z]$ de la siguiente manera:

$$F = \sum_{0 \leq h \leq d} c_h(Y,Z) W^h X^{d-h}.$$

Entonces, para $0 \leq h \leq d$,

$$c_h(Y,Z) = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq d-h} a_{ji} \binom{d-j}{h} Y^i Z^{m-i}$$

es un polinomio homogéneo en $\mathbb{R}[Y,Z]$ de grado m, y para $(y,z) \in C_+$ tenemos que

$$|c_h(y,z)| \leq (m+1)\|f\|_\infty \sum_{0 \leq j \leq d-h} \binom{d-j}{h} = (m+1)\binom{d+1}{h+1}\|f\|_\infty \tag{3.8}$$

y

$$\|F(W,X,y,z)\| \leq \max\left\{(m+1)\frac{\binom{d+1}{h+1}}{\binom{d}{h}}\|f\|_\infty \mid 0 \leq h \leq d\right\} \leq (m+1)(d+1)\|f\|_\infty. \tag{3.9}$$

Como a lo largo de la demostración consideraremos distintos valores de N, agregamos el índice N a la notación de los polinomios b_j de la siguiente manera:

$$(W+X)^N F = \sum_{0 \leq j \leq N+d} b_{j,N}(Y,Z) W^j X^{N+d-j}.$$

Luego, buscamos $N \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $0 \leq j \leq N+d$, $b_{j,N} \geq 0$ en C_+. Es claro que, fijado $(y,z) \in C_+$, si $N \in \mathbb{N}_0$ satisface que para todo $0 \leq j \leq N+d$, $b_{j,N}(y,z) \geq 0$, entonces, cualquier $N' \in \mathbb{N}_0$ con $N' \geq N$ también satisface que para todo $0 \leq j \leq N'+d$, $b_{j,N'}(y,z) \geq 0$.

Para $N \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos las siguientes identidades

$$b_{0,N}(y_\alpha, z_\alpha) = c_0(y_\alpha, z_\alpha) = F(0,1,y_\alpha,z_\alpha) = \bar{f}(1,y_\alpha,z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m} f(1,\alpha) \tag{3.10}$$

y

$$b_{N+d,N}(y_\alpha, z_\alpha) = c_d(y_\alpha, z_\alpha) = F(1,0,y_\alpha,z_\alpha) = \bar{f}(0,y_\alpha,z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m} f(0,\alpha). \tag{3.11}$$

Luego, es claro que para $N \in \mathbb{N}_0$, $b_{0,N} \geq 0$ en C_+ y $b_{N+d,N} \geq 0$ en C_+. Entonces, basta encontrar $N \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $1 \leq j \leq N+d-1$, $b_{j,N} \geq 0$ en C_+.

Notamos

$$\Pi_f = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(x,\alpha) = 0 \text{ para algún } x \in \{0,1\}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

En primer lugar, veremos que para cada $\alpha \in \Pi_f$ existe $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ tal que para $1 \leq j \leq N_\alpha + d - 1$, $b_{j,N_\alpha}(y_\alpha, z_\alpha)$ es positivo en C_+. Para esto, consideraremos tres casos:

- $f(0,\alpha)=0$ y $f(1,\alpha)\neq 0$:

  Por (3.11) tenemos que $c_d(y_\alpha,z_\alpha)=0$ y, para todo $N\in\mathbb{N}_0$, $b_{N+d,N}(y_\alpha,z_\alpha)=0$. Consideramos $\widetilde{F}_\alpha\in\mathbb{R}[W,X]$ el polinomio homogéneo de grado $d-1$ definido por

$$\widetilde{F}_\alpha(W,X)=\frac{F(W,X,y_\alpha,z_\alpha)}{X}=\sum_{0\le h\le d-1}c_h(y_\alpha,z_\alpha)W^hX^{d-h-1}.$$

Usando (3.8), tenemos que para $0\le h\le d-1$,

$$\frac{|c_h(y_\alpha,z_\alpha)|}{\binom{d-1}{h}}\le(m+1)\frac{\binom{d+1}{h+1}}{\binom{d-1}{h}}\|f\|_\infty=(m+1)\frac{(d+1)d}{(h+1)(d-h)}\|f\|_\infty\le(m+1)(d+1)\|f\|_\infty$$

y, por lo tanto, $\|\tilde{F}_\alpha\|\le(m+1)(d+1)\|f\|_\infty$. Por otro lado, para $(w,x)\in\Delta_1-\{(1,0)\}$,

$$\widetilde{F}_\alpha(w,x)=\frac{F(w,x,y_\alpha,z_\alpha)}{x}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m}\frac{f(x,\alpha)}{x}>0.$$

Además, como $f>0$ en $(0,1)\times\mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial X}(0,\alpha)\neq 0$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial X}(0,\alpha)>0$ y, por lo tanto,

$$\widetilde{F}_\alpha(1,0)=\frac{\partial F(1,0,y_\alpha,z_\alpha)}{\partial X}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m}\frac{\partial f}{\partial X}(0,\alpha)>0.$$

Luego, si notamos

$$\lambda_\alpha=\min_{\Delta_1}\widetilde{F}_\alpha,$$

tenemos que $\lambda_\alpha>0$. Por el Lema 3.21 con $\epsilon=1/2$, si $N_\alpha\in\mathbb{N}_0$ satisface

$$N_\alpha+d-1\ge\frac{(d-2)(d-1)(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{\lambda_\alpha}$$

y

$$(W+X)^{N_\alpha}\widetilde{F}_\alpha=\sum_{0\le j\le N_\alpha+d-1}c_jW^jX^{N_\alpha+d-1-j},$$

para $0\le j\le N_\alpha+d-1$ tenemos que

$$c_j\ge\frac{N_\alpha!(N_\alpha+d-1)^{d-1}}{j!(N_\alpha+d-1-j)!}\frac{\lambda_\alpha}{2}.$$

Pero como

$$\sum_{0\le j\le N_\alpha+d-1}c_jW^jX^{N_\alpha+d-j}=(W+X)^{N_\alpha}X\widetilde{F}_\alpha=$$

$$=(W+X)^{N_\alpha}F(W,X,y_\alpha,z_\alpha)=\sum_{0\le j\le N_\alpha+d-1}b_{j,N_\alpha}(y_\alpha,z_\alpha)W^jX^{N_\alpha+d-j}$$

concluimos que para $0\le j\le N_\alpha+d-1$,

$$b_{j,N_\alpha}(y_\alpha,z_\alpha)=c_j\ge\frac{N_\alpha!(N_\alpha+d-1)^{d-1}}{j!(N_\alpha+d-1-j)!}\frac{\lambda_\alpha}{2}.$$

- $f(0,\alpha) \neq 0$ y $f(1,\alpha) = 0$:

  Por (3.10) tenemos que $c_0(y_\alpha, z_\alpha) = 0$ y, para todo $N \in \mathbb{N}_0$, $b_{0,N}(y_\alpha, z_\alpha) = 0$. Consideramos $\widetilde{F}_\alpha \in \mathbb{R}[W,X]$ el polinomios homogéneo de grado $d-1$ definido por

  $$\widetilde{F}_\alpha(W,X) = \frac{F(W,X,y_\alpha,z_\alpha)}{W} = \sum_{1\leq h\leq d} c_h(y_\alpha,z_\alpha)W^{h-1}X^{d-h}.$$

  Usando (3.8), tenemos que para $1 \leq h \leq d$,

  $$\frac{|c_h(y_\alpha,z_\alpha)|}{\binom{d-1}{h-1}} \leq (m+1)\frac{\binom{d+1}{h+1}}{\binom{d-1}{h-1}}\|f\|_\infty = (m+1)\frac{(d+1)d}{(h+1)h}\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2}(m+1)(d+1)d\|f\|_\infty$$

  y, por lo tanto, $\|\tilde{F}_\alpha\| \leq \frac{1}{2}(m+1)d(d+1)\|f\|_\infty$. Por otro lado, para $(w,x) \in \Delta_1 - \{(0,1)\}$,

  $$\widetilde{F}_\alpha(w,x) = \frac{F(w,x,y_\alpha,z_\alpha)}{w} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m}\frac{f(x,\alpha)}{w} > 0.$$

  Además, como $f > 0$ en $(0,1)\times\mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial X}(1,\alpha) \neq 0$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial X}(1,\alpha) < 0$ y, por lo tanto,

  $$\widetilde{F}_\alpha(0,1) = \frac{\partial F(0,1,y_\alpha,z_\alpha)}{\partial W} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m}\frac{\partial f}{\partial X}(1,\alpha) > 0.$$

  Luego, si notamos

  $$\lambda_\alpha = \min_{\Delta_1} \widetilde{F}_\alpha,$$

  tenemos que $\lambda_\alpha > 0$. Nuevamente, usando el Lema 3.21 con $\epsilon = 1/2$, si $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ satisface

  $$N_\alpha + d - 1 \geq \frac{(d-2)(d-1)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2\lambda_\alpha},$$

  y

  $$(W+X)^{N_\alpha}\widetilde{F}_\alpha = \sum_{1\leq j\leq N_\alpha+d} c_j W^{j-1}X^{N_\alpha+d-j},$$

  para $1 \leq j \leq N_\alpha + d$ tenemos que

  $$c_j \geq \frac{N_\alpha!(N_\alpha+d-1)^{d-1}}{(j-1)!(N_\alpha+d-j)!}\frac{\lambda_\alpha}{2}.$$

  Pero como

  $$\sum_{1\leq j\leq N_\alpha+d} c_j W^j X^{N_\alpha+d-j} = (W+X)^{N_\alpha}W\widetilde{F}_\alpha =$$

  $$= (W+X)^{N_\alpha}F(W,X,y_\alpha,z_\alpha) = \sum_{1\leq j\leq N_\alpha+d} b_{j,N_\alpha}(y_\alpha,z_\alpha)W^jX^{N_\alpha+d-j}$$

  concluimos que para $1 \leq j \leq N_\alpha + d$,

  $$b_{j,N_\alpha}(y_\alpha,z_\alpha) \geq \frac{N_\alpha!(N_\alpha+d-1)^{d-1}}{(j-1)!(N_\alpha+d-j)!}\frac{\lambda_\alpha}{2}.$$

- $f(0,\alpha) = 0$ y $f(1,\alpha) = 0$:

  Por (3.10) y (3.11) tenemos que $c_0(y_\alpha, z_\alpha) = c_d(y_\alpha, z_\alpha) = 0$ y, para todo $N \in \mathbb{N}_0$, $b_{0,N}(y_\alpha, z_\alpha) = b_{N+d,N}(y_\alpha, z_\alpha) = 0$. Consideramos $\widetilde{F}_\alpha \in \mathbb{R}[W,X]$ el polinomio homogéneo de grado $d-2$ definido por

$$\widetilde{F}_\alpha(W,X) = \frac{F(W,X,y_\alpha,z_\alpha)}{WX} = \sum_{1\le h\le d-1} c_h(y_\alpha,z_\alpha)W^{h-1}X^{d-h-1}.$$

  Usando (3.8), tenemos que para $1 \le h \le d-1$,

$$\frac{|c_h(y_\alpha,z_\alpha)|}{\binom{d-2}{h-1}} \le (m+1)\frac{\binom{d+1}{h+1}}{\binom{d-2}{h-1}}\|f\|_\infty = (m+1)\frac{(d+1)d(d-1)}{(h+1)h(d-h)}\|f\|_\infty \le \frac{1}{2}(m+1)d(d+1)\|f\|_\infty$$

  y, por lo tanto, $\|\tilde{F}_\alpha\| \le \frac{1}{2}(m+1)d(d+1)\|f\|_\infty$. Por otro lado, para $(w,x) \in \Delta_1 - \{(1,0),(0,1)\}$,

$$\widetilde{F}_\alpha(w,x) = \frac{F(w,x,y_\alpha,z_\alpha)}{wx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m}\frac{f(x,\alpha)}{wx} > 0$$

  Además, como $f > 0$ en $(0,1)\times\mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial X}(0,\alpha), \frac{\partial f}{\partial X}(1,\alpha) \ne 0$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial X}(0,\alpha) > 0$ y $\frac{\partial f}{\partial X}(1,\alpha) < 0$ y, por lo tanto,

$$\widetilde{F}_\alpha(1,0) = \frac{\partial F(1,0,y_\alpha,z_\alpha)}{\partial X} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m}\frac{\partial f}{\partial X}(0,\alpha) > 0$$

  y

$$\widetilde{F}_\alpha(0,1) = \frac{\partial F(0,1,y_\alpha,z_\alpha)}{\partial W} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}^m}\frac{\partial f}{\partial X}(1,\alpha) > 0.$$

  Luego, si notamos

$$\lambda_\alpha = \min_{\Delta_1}\widetilde{F}_\alpha > 0,$$

  tenemos que $\lambda_\alpha > 0$. Nuevamente, usando el Lema 3.21 con $\epsilon = 1/2$, si $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ satisface

$$N_\alpha + d - 2 \ge \frac{(d-3)(d-2)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2\lambda_\alpha},$$

  y

$$(W+X)^{N_\alpha}\widetilde{F}_\alpha = \sum_{1\le j\le N_\alpha+d-1} c_j W^{j-1}X^{N_\alpha+d-1-j},$$

  para $1 \le j \le N_\alpha + d - 1$ tenemos que

$$c_j \ge \frac{N_\alpha!(N_\alpha+d-2)^{d-2}}{(j-1)!(N_\alpha+d-1-j)!}\frac{\lambda_\alpha}{2}.$$

  Pero como

$$\sum_{1\le j\le N_\alpha+d-1} c_j W^j X^{N_\alpha+d-j} = (W+X)^{N_\alpha}WX\widetilde{F}_\alpha =$$
$$= (W+X)^{N_\alpha}F(W,X,y_\alpha,z_\alpha) = \sum_{1\le j\le N_\alpha+d-1} b_{j,N_\alpha}(y_\alpha,z_\alpha)W^jX^{N_\alpha+d-j}$$

  concluimos que para $1 \le j \le N_\alpha + d - 1$,

$$b_{j,N_\alpha}(y_\alpha,z_\alpha) \ge \frac{N_\alpha!(N_\alpha+d-2)^{d-2}}{(j-1)!(N_\alpha+d-1-j)!}\frac{\lambda_\alpha}{2}.$$

El siguiente objetivo es encontrar radios $r_\alpha > 0$ alrededor de cada (y_α, z_α) de manera que para $(y,z) \in C_+$ con $\|(y,z) - (y_\alpha, z_\alpha)\| \leq r_\alpha$ se verifique que $b_{j,N_\alpha}(y,z) \geq 0$ para $1 \leq j \leq N_\alpha + d - 1$.

Comenzamos con algunos calculos auxiliares.

Para $0 \leq h \leq d$ y $(y,z) \in C_+$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla c_h(y,z)\| &\leq \left|\frac{\partial c_h}{\partial Y}(y,z)\right| + \left|\frac{\partial c_h}{\partial Z}(y,z)\right| \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq m}\sum_{0\leq j\leq d-h} |a_{ji}|\binom{d-j}{h} i + \sum_{0\leq i\leq m-1}\sum_{0\leq j\leq d-h} |a_{ji}|\binom{d-j}{h}(m-i) \\
&\leq m(m+1)\binom{d+1}{h+1}\|f\|_\infty \\
&\leq m(m+1)(d+1)\binom{d}{h}\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Entonces, para $(y,z) \in C_+$,

$$|c_h(y,z) - c_h(y_\alpha, z_\alpha)| \leq m(m+1)(d+1)\binom{d}{h}\|f\|_\infty \|(y,z) - (y_\alpha, z_\alpha)\|.$$

Por otro lado, usando el Lema 3.19 (Identidad de Vandermonde-Chu), para $(y,z) \in C_+$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|F_{\frac{1}{N+d}}\left(\frac{j}{N+d}, \frac{N+d-j}{N+d}, y, z\right) - F_{\frac{1}{N+d}}\left(\frac{j}{N+d}, \frac{N+d-j}{N+d}, y_\alpha, z_\alpha\right)\right| \\
&\leq \sum_{0\leq h\leq d} |c_h(y,z) - c_h(y_\alpha,z_\alpha)| \left(\frac{j}{N+d}\right)^h_{\frac{1}{N+d}} \left(\frac{N+d-j}{N+d}\right)^{d-h}_{\frac{1}{N+d}} \\
&\leq m(m+1)(d+1)\|f\|_\infty \|(y,z)-(y_\alpha,z_\alpha)\| \left(\sum_{0\leq h\leq d}\binom{d}{h}\left(\frac{j}{N+d}\right)^h_{\frac{1}{N+d}} \left(\frac{N+d-j}{N+d}\right)^{d-h}_{\frac{1}{N+d}}\right) \\
&= m(m+1)(d+1)\|f\|_\infty \|(y,z)-(y_\alpha,z_\alpha)\| (1)^d_{\frac{1}{N+d}} \\
&\leq m(m+1)(d+1)\|f\|_\infty \|(y,z)-(y_\alpha,z_\alpha)\|.
\end{aligned}$$

Como vimos en la demostración del Lema 3.21, se tiene que,

$$b_{j,N}(y,z) = \frac{N!(N+d)^d}{j!(N+d-j)!} F_{\frac{1}{N+d}}\left(\frac{j}{N+d}, \frac{N+d-j}{N+d}, y, z\right).$$

para $N \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq j \leq N+d$.

Sea $\alpha \in \Pi_f$. Si $f(0,\alpha) = 0$ y $f(1,\alpha) \neq 0$, tomamos

$$r_\alpha = \frac{\lambda_\alpha (N_\alpha + d - 1)^{d-1}}{2(N_\alpha + d)^d m(m+1)(d+1)\|f\|_\infty}.$$

Entonces, para $(y,z) \in C_+$ con $\|(y,z)-(y_\alpha,z_\alpha)\| \leq r_\alpha$ y $1 \leq j \leq N_\alpha + d - 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} b_{j,N}(y,z) &= b_{j,N}(y_\alpha,z_\alpha) + b_{j,N}(y,z) - b_{j,N}(y_\alpha,z_\alpha) \\ &\geq \frac{N_\alpha!(N_\alpha+d-1)^{d-1}}{j!(N_\alpha+d-1-j)!}\frac{\lambda_\alpha}{2} - \frac{N_\alpha!(N_\alpha+d)^d}{j!(N_\alpha+d-j)!} m(m+1)(d+1)\|f\|_\infty r_\alpha \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Si $f(0,\alpha) \neq 0$ y $f(1,\alpha) = 0$, tomamos nuevamente

$$r_\alpha = \frac{\lambda_\alpha (N_\alpha+d-1)^{d-1}}{2(N_\alpha+d)^d m(m+1)(d+1)\|f\|_\infty}$$

y si $f(0,\alpha) \neq 0$ and $f(1,\alpha) = 0$, tomamos

$$r_\alpha = \frac{\lambda_\alpha (N_\alpha+d-2)^{d-2}}{2(N_\alpha+d)^d m(m+1)(d+1)\|f\|_\infty}$$

en ambos casos, procediendo de manera similar, se puede ver que para $1 \leq j \leq N+d-1$, $b_{j,N}(y,z) \geq 0$ para $(y,z) \in C_+$ con $\|(y,z)-(y_\alpha,z_\alpha)\| \leq r_\alpha$.

Por otro lado, consideremos $K \subseteq C_+$ definido por

$$K = \{(y,z) \in C_+ : \|(y,z)-(y_\alpha,z_\alpha)\| \geq r_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Pi_f\}.$$

Como K es compacto y $\lambda_K = \min_{\Delta_1 \times K} F > 0$, por el Teorema 1.15 y usando (3.9), tenemos que si

$$N + d > \frac{(d-1)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2\lambda_K},$$

para $0 \leq j \leq N+d$, $b_{j,N}(y,z) \geq 0$ para todo $(y,z) \in K$.

Finalmente, si $N \in \mathbb{N}$,

$$N = \max\left\{ \left\lfloor \frac{(d-1)d(d+1)(m+1)\|f\|_\infty}{2\lambda_K} \right\rfloor - d + 1,\ \max\{N_\alpha \mid \alpha \in \Pi_f\} \right\},$$

tenemos que para $0 \leq j \leq N+d$, $b_{j,N} \geq 0$ en C_+. □

De la Proposición 3.13 y la Proposición 3.22 deducimos el principal resultado de esta sección.

Teorema 3.23 *Sea $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ con $f \geq 0$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$, f fully m-ic en $[0,1]$ y supongamos que f tiene un número finito de ceros en $[0,1] \times \mathbb{R}$, todos en $\{0,1\} \times \mathbb{R}$, y $\frac{\partial f}{\partial X}$ no se anula en ninguno de ellos. Entonces, para $N \in \mathbb{N}_0$ como en la Proposición 3.22,*

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X(1-X) \in M(X(1-X))$$

con $\sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[X,Y]^2$ y

$$\deg(\sigma_0), \deg(\sigma_1 X(1-X)) \leq N + d + m + 1.$$

Para terminar, exhibimos un ejemplo de un polinomio $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ con $f \geq 0$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$, f fully m-ic en $[0,1]$, con un único cero en $[0,1] \times \mathbb{R}$ perteneciente al borde pero $\frac{\partial f}{\partial X}$ se anula en él, y f no admite un valor de $N \in \mathbb{N}_0$ como en la Proposición 3.13. Notemos que en este ejemplo f es una suma de cuadrados, con lo cual la representación como elemento de $M(X(1-X))$ ya está dada. Sin embargo, lo que buscamos mostrar es que el método presentado no puede ser aplicado con toda generalidad.

Ejemplo 3.24 *Sea*

$$f(X,Y) = (Y^2 - X)^2 + X^2 = Y^4 - 2XY^2 + 2X^2.$$

Es claro que $f \geq 0$ *en* $[0,1] \times \mathbb{R}$ *y* f *es fully* 4*-ic en* $[0,1]$*. Además,*

$$f = 0 \;\Leftrightarrow\; (Y^2 - X)^2 = X^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (X,Y) = (0,0).$$

Notemos que $\frac{\partial f}{\partial X}(0,0) = 0$*. Por otro lado, tenemos que*

$$F(W,X,Y,Z) = (W+X)^2 Y^4 - 2X(W+X)Y^2Z^2 + 2X^2Z^4.$$

y, para $N \in \mathbb{N}$*,*

$$(W+X)^N F(W,X,Y,Z) = Y^4 W^{N+2} + Y^2 \left((N+2)Y^2 - 2Z^2\right) W^{N+1} X + \ldots$$

Luego,

$$b_{N+1}(Y,Z) = Y^2 \left((N+2)Y^2 - 2Z^2\right).$$

Si $b_{N+1} \geq 0$ *en* C*, entonces,*

$$(N+2)Y^2 - 2(1-Y^2) = (N+4)Y^2 - 2 \geq 0 \quad en \quad [-1,1],$$

lo cual es un absurdo.

Referencias

[1] Emil Artin. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5(1):100–115, 1927.

[2] Saugata Basu, Richard Pollack, and Marie-Françoise Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[3] Jacek Bochnak, Michel Coste, and Marie-Françoise Roy. *Real algebraic geometry*, volume 36 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.

[4] Dragomir Ž. Djoković. Hermitian matrices over polynomial rings. *J. Algebra*, 43(2):359–374, 1976.

[5] Salma Kuhlmann and Murray Marshall. Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(11):4285–4301, 2002.

[6] Salma Kuhlmann, Murray Marshall, and Niels Schwartz. Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem. II. *Adv. Geom.*, 5(4):583–606, 2005.

[7] Victor Magron, Mohab Safey El Din, and Markus Schweighofer. Algorithms for weighted sum of squares decomposition of non-negative univariate polynomials. *J. Symbolic Comput.*, 93:200–220, 2019.

[8] Murray Marshall. *Positive polynomials and sums of squares*, volume 146 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[9] Murray Marshall. Polynomials non-negative on a strip. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(5):1559–1567, 2010.

[10] Ha Nguyen and Victoria Powers. Polynomials non-negative on strips and half-strips. *J. Pure Appl. Algebra*, 216(10):2225–2232, 2012.

[11] Jiawang Nie and Markus Schweighofer. On the complexity of Putinar's Positivstellensatz. *J. Complexity*, 23(1):135–150, 2007.

[12] Daniel Perrucci and Marie-Françoise Roy. A new general formula to compute the Cauchy index with subresultants on an interval. *arXiv preprint arXiv:1812.02470*, 2018.

[13] George Pólya. Über positive darstellung von polynomen. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 73:141–145, 1928.

[14] Victoria Powers. Positive polynomials and the moment problem for cylinders with compact cross-section. *J. Pure Appl. Algebra*, 188(1-3):217–226, 2004.

[15] Victoria Powers and Bruce Reznick. A new bound for Pólya's theorem with applications to polynomials positive on polyhedra. *J. Pure Appl. Algebra*, 164(1-2):221–229, 2001. Effective methods in algebraic geometry (Bath, 2000).

[16] Mihai Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(3):969–984, 1993.

[17] Ralph Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis.* Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[18] Claus Scheiderer. Sums of squares of regular functions on real algebraic varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(3):1039–1069, 2000.

[19] Claus Scheiderer and Sebastian Wenzel. Polynomials nonnegative on the cylinder. In *Ordered algebraic structures and related topics*, volume 697 of *Contemp. Math.*, pages 291–300. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[20] Konrad Schmüdgen. The K-moment problem for compact semi-algebraic sets. *Math. Ann.*, 289(2):203–206, 1991.

[21] Markus Schweighofer. On the complexity of Schmüdgen's positivstellensatz. *J. Complexity*, 20(4):529–543, 2004.

[22] Gilbert Stengle. Complexity estimates for the Schmüdgen Positivstellensatz. *J. Complexity*, 12(2):167–174, 1996.