UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Emergentes colectivos de generalización en la entrada al álgebra

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Matemáticas

Verónica Cambriglia

Directora de tesis: Carmen Sessa

Codirectora de tesis: Patricia Sadovsky

Consejera de estudios: Diana Giuliani

Lugar de trabajo:

Instituto del Desarrollo Humano (UNGS)

Instituto de Investigaciones CeFIEC – FCEyN (UBA)

Buenos Aires, 2018

Resumen

En esta tesis estudiamos diferentes conocimientos producidos por un grupo de alumnos de primer año a raíz del tratamiento general de propiedades aritméticas en la sala de clase. Hacemos énfasis en el carácter colectivo de los procesos de elaboración de las ideas que emergen en los intercambios del aula. Nos enfocamos en fenómenos relativos a la construcción de relaciones entre lo general y lo particular que son inherentemente sociales (en el sentido de que requieren, para su emergencia, de las interacciones con los otros) y que —con frecuencia— no son plausibles de ser anticipados por tener lugar a partir del conjunto de relaciones personales que se entraman en el intercambio gestionado por el docente. Es así que consideramos las producciones individuales en este estudio en tanto modifican, transforman o redefinen la trama colectiva de producción de generalización matemática en el aula y no como producciones aisladas de su impacto social.

Abordamos el análisis de cuatro casos de estudio recuperando cómo el contenido, necesario y propio del hacer matemático a propósito de la generalización, se construye a partir del juego de intervenciones colectivas que tienen lugar y se reformula en ese mismo juego. La malla social habilita una aproximación y trabajo sobre *lo impreciso* que permite sostener y dar lugar a la ruptura que supone el paso a lo general desde lo particular.

Podemos afirmar que la entrada a la racionalidad matemática sobre la generalización —a propósito de tareas que involucran un tratamiento algebraico de lo numérico— se despliega en relaciones que se arman en la incertidumbre sostenida por la pluralidad y cercanía de racionalidades diferenciadas del grupo de alumnos moderados por un docente.

Palabras claves: Generalización matemática – Entrada al trabajo algebraico – Producción colectiva y colaborativa – Racionalidad matemática – Incertidumbre

Collective emergents of generalization in the beginning of algebraic thinking

Abstract

In this thesis, we analyse the different knowledge produced by a group of first-year students as a result of the general processing of arithmetic properties within the context of a class. We emphasize the collective character of the process of elaborating the ideas emerging from the interchange that take place during the class. We focus on the phenomena concerning the building of relationships between what is generic and what is specific, which are inherently of a social kind (since they require an interaction with another person in order to appear) and which, usually, cannot be predicted as they occur on the basis of a number of personal relations intermeshed within the exchange managed by the teacher. Thus, we consider the individual productions in this research as they modify, transform or redefine the interconnected nature of the production of mathematics generalization in class, and not so much as productions isolated from its social impact.

We analyse four study cases considering how the required and characteristic content of the mathematics work, with regard to generalization, is constructed in a game of group interventions taking place and is reformulated inside the game itself. The social network enables an approach and allows working on the uncertainty, which allows asserting and giving rise to the rupture involved in the transition from generic to specific.

It is possible to affirm that the entry into the rationality of mathematics about generalization —concerning tasks that involve algebraic processing of the numeric— is deployed in relationships built from the uncertainty supported by the plurality and proximity of different rationalities in a student's group moderated by a teacher.

Key words: Mathematical generalization – Entry to algebraic process – Collective and collaborative productions – Mathematical rationality - Uncertainty

Agradecimientos

A mis directoras, Carmen Sessa y Patricia Sadovsky, por confiar en mí, creer en el valor de mis ideas y ayudarme a desarrollarlas ofreciéndome sus conocimientos con la generosidad que las caracteriza. Por estimularme a seguir, por enseñarme tanto, por esforzarse en entender mis oraciones enrevesadas e infinitas y, por sobre todo, por la calidez y el cariño con el que siempre se dirigieron a mí.

A mis compañeros del CeFIEC por escucharme y apoyarme siempre. A Diana, Fabián y a Enrique por su compañía, su oreja y sobre todo por su cariño. A Gabriela por contenerme en cada escollo y ser tan afectuosa conmigo.

A Silvia Pérez por su apoyo, sus consejos, su generosidad, su escucha atenta y cotidiana.

Al Instituto del Desarrollo Humano (IDH), UNGS, que me amparó para poder investigar y seguir formándome. A mis colegas del IDH por su constante interés y preocupación por el desarrollo y la conclusión de esta etapa.

A los miembros de las dos Subcomisiones y a los de la Comisión de Doctorado de la FCEyN por analizar con seriedad, cuidado e interés cada una de mis presentaciones.

A mis alumnos del Profesorado de Matemática de la UNGS y de la FCEyN por hacerme cuestionar y repensar ideas a partir de cada una de sus propuestas.

A Silvia Etchegaray por su mirada, su interés y su estímulo siempre.

A Jean Philippe Drouhard —a quien extrañamos— por su siempre buena y entusiasta disposición para sostener intercambios en la oficina y ofrecer sus matices. A Mabel Panizza por su generosidad para volver inteligible para mí el alcance de sus investigaciones.

A Vale, Ceci y Mara por el empuje, por las horas de estudio como estudiantes, por las discusiones profundas que sostuvimos luego de haber egresado y por el cariño.

A Vale Borsani por haberme abierto su aula, por sus ratos de intercambio, su interés y por darme la posibilidad de aprender a partir de ver su excelente gestión en el aula. Al Colegio Paideia por haber permitido el ingreso a alguien con interés por pensar e investigar cuestiones sobre la enseñanza de la Matemática. A los alumnos del primer año de ese colegio por aceptar mi compañía en su aula para intentar entender e interpretar sus formas de hacer, sus lógicas y sus modos de interacción.

A Haydeé y a Susana por abrirme las puertas de los primeros años de la escuela Normal Superior N° 3 Bernardino Rivadavia en los que empecé a delinear mis primeras preguntas.

A mis padres, que apostaron por mi educación, me dieron las condiciones para poder estudiar y el estímulo para lograrlo. A mi madre, que es compañía siempre y que compartió muchos domingos conmigo trabajando en mi tesis. A mi papá, a quien extraño.

A mis amigos —a Gaby, Claudia, Juan, Carlos, Sergio, Marisa, Naty, Andrés y a todos los que no puedo listar— por su sostén, su compañía y su cariño.

A Florencia por su seriedad y compromiso, y por ser mi último y necesitado empuje.

A toda mi familia por el cariño y simplemente por estar.

A todos aquellos que en algún momento y de algún modo contribuyeron para que hoy pueda concluir esta etapa.

Índice

Capítulo 1. Introducción y delimitación de nuestro objeto de estudio

1.1. Un recorrido por mi historia de formación hasta la delimitación de una primera unidad de estudio

Desde mis primeras experiencias como estudiante del profesorado tuve acceso a investigaciones que planteaban las rupturas que existen entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Me acercaron a ellas docentes que luego coordinaron grupos de estudio que integré y que finalmente se convirtieron en directoras de esta tesis. La corriente francesa en Didáctica de la Matemática produjo tempranamente conocimientos sobre el pasaje de la aritmética al álgebra (Cortés, Vergnaud y Kavafian, 1990; Chevallard, 1984, 1989 y 1990) concibiendo como problemas de estudio las rupturas de tal pasaje, las diferencias de sentido existente en los símbolos que comparten el álgebra y la aritmética, el estudio de la estructura de los problemas aritméticos, el uso en ellos de los datos y eventualmente las incógnitas intermedias, etc. Asimismo, se percibía otra vía de entrada al trabajo algebraico como alternativa a la entrada por ecuaciones.

En la década de 1990 se empezaba a advertir un espacio de articulación entre las prácticas aritméticas y las prácticas algebraicas. Comenzaba a delimitarse un campo de estudio que, alojado en prácticas aritméticas, permitiese dar cabida a prácticas algebraicas. Desde la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA, un grupo avanzaba en investigaciones sobre la entrada al trabajo algebraico en la escuela media y sobre la experiencia de los alumnos con las propuestas usuales de entrada al trabajo con letras, el lugar de las incógnitas y los procedimientos en las ecuaciones. ¿Cómo se definían para los alumnos estos objetos algebraicos a partir de la interacción con el conjunto de prácticas usuales? ¿Qué concepción de ecuación adquirían? Se advertía en tales investigaciones que los alumnos accedían a la noción de ecuación como igualdad con incógnita o como igualdad entre números en la que la *x* está "tapando" a un número que interviene en la expresión, quedando de este modo asociada la ecuación a una única solución. Nociones como variable o equivalencia, propias del trabajo algebraico, carecían de sentido para los alumnos. (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996, 1999)

Posteriormente, con su mirada alojada en la escuela primaria, Sadovsky (2005) estudió las posibilidades de un espacio didáctico en el campo de la aritmética escolar que, a partir de las tareas propuestas, fomentase la articulación entre las prácticas aritméticas y las algebraicas. Ella avanzaba en su tesis en darle entrada desde el trabajo aritmético a nociones alojadas en el campo algebraico: generalización, escrituras simbólicas, dependencia, variable. Tanto ella como las modificaciones que se pergeñaban en los diseños curriculares de la escuela primaria trataban de trascender la imagen de una práctica aritmética escolar de tinte calculista para empezar a proponer una aritmética que incluyese problemas con infinitas soluciones y sus modos de expresarlas. También, se proponía ampliar el espacio escolar del trabajo aritmético para dar lugar a la reflexión sobre las operaciones y concebirlas como relaciones entre elementos de un conjunto.

Al mismo tiempo, integrantes del grupo de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Cs Exactas con otros investigadores invitados daban curso a nuevos diseños curriculares para primero y segundo año de la escuela secundaria de Ciudad de Buenos Aires y proponían una entrada al álgebra centrada en dos grandes tipos de actividades en relación con la generalización:

1. La producción de fórmulas para contar colecciones y para medir áreas.

2. El estudio de propiedades de los números en el contexto de la divisibilidad.

Casi en simultáneo se plasmaban reflexiones sobre este trabajo en diferentes dominios de la matemática en libros orientados a la formación de profesores y se conformaba un Postítulo de Especialización Matemática para la Escuela Primaria. Pude formar parte del equipo docente de este Postítulo, en cuyas reuniones me formaba respecto del tratamiento numérico en la escuela primaria que podría formar parte del espacio de articulación con el trabajo algebraico. La profesora del curso —a quien finalmente observé en primer año para esta investigación— era parte del equipo de este Postítulo junto conmigo y había sido mi compañera en el profesorado. Es decir, nuestros recorridos eran cercanos y podía involucrarme con su propuesta de trabajo.

Al mismo tiempo, participaba como integrante en diferentes proyectos que, anclados en el pasaje de la aritmética al álgebra, hacían eje en el estudio de la potencia de las interacciones en el aula.

En este juego de inquietudes orientadas a la puesta en aula de los nuevos diseños de los primeros años de la escuela media se comenzó a delimitar la problemática de estudio de esta tesis. Los diseños proponían la apertura al álgebra a partir de la generalización en vez de las ecuaciones y la apuesta fuerte a las posibilidades de producción matemática en situaciones de interacción y colaboración colectiva. Así, en este entramado de acciones y propuestas, se conforma esta tesis que se orienta inicialmente —y de forma general— al estudio de los procesos de generalización en la entrada al álgebra.

1.2. Delimitación del objeto de estudio de esta tesis

A lo largo de nuestra investigación, el objeto actual de estudio y análisis se fue delimitando y definiendo en un proceso de contacto continuo y simultáneo con la teoría y las experiencias vividas e interpretadas en el aula. A partir de ello dimos forma y figura a lo que hoy llamamos *emergentes colectivos de generalización.*

Las observaciones que efectuamos, los análisis e interpretaciones de escenas del aula y los constructos que delineamos se enmarcan en el estudio de la problemática de la generalización en la clase de matemática en momentos de ruptura con las prácticas aritméticas y de entrada al trabajo algebraico.

Entendimos —a lo largo de nuestro recorrido— que los procesos de generalización son inherentemente sociales y que las interacciones que los sujetos proponen —o que a ellos se imponen— resultan insustituibles.

Se fue definiendo para nosotros, bajo ese supuesto, la necesidad de concebir la investigación de la entrada a la generalización en las prácticas algebraicas a partir de una inserción del equipo —de modo prolongado y cuidado— en las prácticas matemáticas-culturales del grupo clase. Nos propusimos entender las interacciones en el aula como soporte a los procesos de producción de lo general, teniendo en cuenta la diferencia evidente entre la intencionalidad sistemática del docente con referencia en la disciplina y la intencionalidad —en situación— de cada alumno, condicionada por su sistema de conocimientos producto de las experiencias escolares previas.

Al comenzar este trabajo, nuestros primeros análisis consideraban como objeto el estudio de los procesos de generalización personales y el de los que se daban colectivamente, *fundamentalmente* nos interesaba estudiar el vínculo entre estos dos tipos de procesos de producción.

En ese marco nos resultaba indispensable estudiar el papel de los diferentes actores en el proceso de producción colectiva y también al docente en la gestión de las situaciones didácticas que introducen la problemática de la generalización en el aula. Asimismo, nos proponíamos identificar condiciones —tanto de las situaciones problemáticas como de las formas de organización de la clase— que permitieran sostener diferentes relaciones iniciales (de los sujetos) con lo general. Nos interesaba también comprender y significar la evolución de esas relaciones iniciales hacia relaciones matemáticas más sólidas con lo general.

La separación que establecíamos entre procesos personales y colectivos de construcción de lo general —reconocemos ahora— porta el supuesto de que cada uno de los dos es plausible de ser descrito y problematizado en sí mismo, más allá de las relaciones que se estudien para entender la trama entre ambos procesos. En el transcurso de nuestro trabajo pudimos identificar este supuesto, cuestionarlo y modificar nuestro objeto de estudio centrándonos en los procesos colectivos.

Nuestra inmersión en un aula durante varios meses y el análisis de los registros de las clases nos llevaron a relevar diferentes conocimientos en el tratamiento de lo general como proceso de elaboración colectiva[1]. Nos referimos a aquellas construcciones en el aula emergentes de la interacción y que colocan como asunto de estudio la relación entre lo particular y lo general. Nos interesamos fundamentalmente por aquellas construcciones de lo general que no son con frecuencia plausibles de ser anticipadas y que tienen lugar a partir del conjunto de relaciones personales que se entraman en el intercambio gestionado por el docente. Los aportes personales serán entonces considerados en este estudio en tanto modifican, transforman o redefinen la trama colectiva de producción de generalización matemática que tiene lugar en el aula.

A partir de los fenómenos que interpretamos en el análisis de los hechos que observamos —fenómenos que conforman cada uno de los casos de nuestro capítulo de estudio empírico—, podemos afirmar que el espacio de interacción evidencia ser un medio propicio para la elaboración de nuevos problemas en diferentes aspectos que involucran el tratamiento de lo general y, en este sentido, reconocimos diferentes dimensiones de lo general con una fuerte componente de emergencia en lo colectivo. En particular, la elaboración de conjeturas sobre regularidades numéricas, el análisis de su alcance y dominio de validez, sus formulaciones posibles y las razones que permiten avanzar y justificar esos análisis adquieren rasgos propios cuando se constituyen como trama colectiva.

En la formulación del problema que es objeto de nuestra investigación nos es necesario distinguir diferentes tipos de generalización que se juegan de manera particular en el espacio de interacción:

- las generalizaciones asociadas a la producción de un procedimiento,

- las que se dan en torno a la constitución de la racionalidad matemática de los alumnos,

---

[1] En el marco del intercambio que tiene lugar entre alumnos y docente, fundamentalmente cuando se recuperan ejercicios abordados previamente en pequeños grupos o de manera individual.

- las que enfatizan las generalizaciones de propiedades,

- las que se instalan en la producción de una ley o propiedad,

- las que se orientan fundamentalmente a la producción de un modelo en tanto herramienta que dé respuesta a un problema.

Fue durante nuestro trabajo de análisis que pudimos caracterizar estos diferentes tipos de generalización y esta separación nos permitió identificar matices de cada proceso particular de construcción de lo general. Digamos, para no dejar lugar a dudas, que en los aconteceres del aula todas estas componentes se encuentran fusionadas.

Reiteramos, a medida que avanzamos en el análisis y recorrimos nuevamente los registros de los hechos, vislumbramos nuevas marcas de producción y nos fuimos dando cuenta de que en los procesos de generalización en el aula la trama de interacciones sociales otorga un soporte necesario e indispensable para dar entrada a la discusión de algunos aspectos matemáticos de la generalización en el tratamiento algebraico.

Queremos mencionar también otros elementos para dar mayor espesor a nuestra elección de considerar los que dimos en llamar emergentes colectivos de generalización como el objeto de estudio de esta tesis.

La detección de aspectos y rasgos particulares del proceso de generalización como fenómeno colaborativo y colectivo nos ha permitido advertir que el terreno de lo social habilita una aproximación y trabajo sobre *lo impreciso* que permite sostener y dar lugar a la entrada en la ruptura que supone el paso a lo general desde lo particular. Detectamos que la entrada a lo general supone un proceso de construcción que involucra abordar lo incierto a partir del concreto particular que se conoce y que, en tal sentido, el "otro" —el sostén social— acompaña esa imprecisión de la incerteza, ya sea colaborando o neutralizando. En esta entrada a lo nuevo junto a un "otro" se hace evidente la fortaleza de un docente que toma como eje de sus clases el abordaje de la generalización y que incluye ese plus de sostén de lo que se puede o quiere gestar.

1.3. ¿Cómo organizamos esta tesis?

El desarrollo de esta investigación se organizará en esta tesis en 6 capítulos.

En este, el **Capítulo 1**, desarrollamos el contexto en el cual se origina el interés y la inquietud por abordar el estudio de la generalización en el pasaje de la aritmética al álgebra. A su vez, delimitamos los emergentes colectivos de generalización como nuestro objeto de estudio y el proceso de redefiniciones sucesivas hasta llegar a ellos.

El **Capítulo 2** corresponde al estado del arte y lo organizamos a partir de dos grandes temáticas no independientes:

1. El proceso de generalización como rasgo inherente al proceso de conceptualización,
2. La especificidad del proceso de generalización matemática.

La segunda de estas temáticas la organizamos en tres secciones:

- La naturaleza epistémica del proceso de generalización en Matemática

- El tipo de actividad matemática o de tarea alrededor de la cual se despliega el proceso de generalización

- El tipo de interacción entre sujetos como dimensión intrínseca al proceso de generalización en torno a una actividad.

El **Capítulo 3** contiene el marco teórico de esta tesis, la discusión del abordaje de la Teoría de Situaciones como teoría de la enseñanza de la matemática que nos da un marco para concebir la Matemática en el aula como acto de producción. Consideramos sus principales categorías y los aportes de otros investigadores que refuerzan el sentido de estas. También consideramos las investigaciones vinculadas a la teoría de los registros de representación semióticas de Duval, y en particular estudiamos aquellas cuestiones específicas de las escrituras que en nuestros casos parecen haber colaborado a que los alumnos conjeturen generalizaciones.

El **Capítulo 4** comporta dos cuestiones específicamente vinculadas a nuestra presencia en el aula. Por un lado, las principales decisiones metodológicas consideradas para esta tesis; por otro, un análisis de la propuesta de actividades que decidió la profesora del curso.

El **Capítulo 5** contiene los diferentes casos de estudio considerados en esta tesis, y se analizan en tanto representantes de emergentes colectivos de generalización.

El **Capítulo 6** contiene las conclusiones de esta tesis.

Finalmente, incluimos las referencias bibliográficas abordadas en los diferentes capítulos.

Capítulo 2. El estado del arte

El estudio de la temática de lo general en otras investigaciones ha nutrido la formulación y el análisis de nuestra problemática. Por un lado, nos orienta en la necesidad de abordar la discusión teórica respecto de la particularidad de los procesos de generalización en el plano de la matemática escolar; por otro, nos obliga a considerar la variedad y los tipos de actividad que aportarían al desarrollo de aspectos diversos de la generalización como así también los modos alternativos de interacción que resultan buenas condiciones para estos procesos.

A los efectos de proponer un orden, organizamos este capítulo en torno a las siguientes temáticas vinculadas al proceso de generalización[2]:

1. El proceso de generalización como rasgo inherente al proceso de conceptualización.

2. La especificidad del proceso de generalización matemática.

  2.1. La naturaleza epistémica del proceso de generalización en Matemática.

  2.2. El tipo de actividad matemática o de tarea alrededor de la cual se despliega el proceso de generalización.

  2.3. El tipo de interacción entre sujetos como dimensión intrínseca al proceso de generalización en torno a una actividad.

2.1. El proceso de generalización como rasgo inherente al proceso de conceptualización

En este apartado reseñamos los aportes de algunos estudios teóricos que nos ayudan a ubicar los procesos de generalización como inherentes a la conceptualización humana. Tomamos en primer lugar la producción de V. V. Davýdov, un autor que se ha constituido en referencia para un gran número de estudios centrados en los procesos de generalización matemática. Las nociones de generalización extensiva y constructiva en el marco de la teoría constructivista de Piaget, retomada por otros autores que se centran específicamente en lo matemático, nos han resultado nodales para comprender los procesos implicados en la emergencia de lo general en los diferentes casos analizados en esta tesis.

Davýdov (1982) emprende un estudio ambicioso de los tipos de generalización en la enseñanza, a partir de analizar las propuestas de estudio de diferentes disciplinas bajo el

[2] Cabe mencionar que las temáticas en que organizamos esta sección están correlacionadas y nuestra separación —un tanto artificial— es a los efectos del análisis del capítulo.

supuesto de que elaborar los programas docentes requiere "[…] entender a nivel de desarrollo la naturaleza psicológica de la conexión existente entre la actividad mental de los alumnos y el contenido de los conocimientos asimilables, y dominar los métodos formativos de esa actividad". (p.7)

Para este autor, en la generalización tienen lugar la búsqueda y el nombramiento mediante la palabra de un cierto *invariante* entre la diversidad de objetos y sus atributos; mediante las operaciones de identificación y formulación de los aspectos que caracterizan a una familia de objetos así como también la operación de reconocimiento de los objetos particulares como conformantes de una clase.

En su libro efectúa un seguimiento teórico del problema de la generalización en la psicología pedagógica y en la didáctica afirmando que su soporte son doctrinas teórico-cognoscitivas sobre el pensamiento y la práctica real de la enseñanza escolar. Reconoce que el término *generalización* se emplea tanto para designar múltiples aspectos del proceso asimilativo de los conocimientos por los escolares como así también para significar el resultado de dicho proceso: la facultad del niño de abstraer rasgos particulares y variables del objeto. Sobre la base de un análisis de manuales, metodologías y procedimientos de estudio de los escolares, afirma que el conocimiento de la cualidad genérica de un grupo de objetos les permite a los niños **hacer uso** de las correspondientes **normas** de acción. La facultad de usar una u otra regla presupone la separación de cierta cualidad en el objeto con la que justamente dicha regla sea correlacionable. El concepto de regla está vinculado con toda una clase de objetos o situaciones y pierde su sentido cuando se opera con un solo objeto.

Dado nuestro objeto de estudio en el que los procesos de generalización implicados abarcan aspectos normativos, nos resulta relevante el señalamiento de la relación que plantea este autor. El uso normativo que comporta la generalización en tanto producción de una clase de objetos que recupera Davýdov (1982) nos invita a repensar dicha relación para el caso de nuestro asunto de estudio, ubicada, a grandes rasgos en el pasaje de lo aritmético a lo algebraico. La generalización —en tanto proceso que incluye la posibilidad de decisión a futuro acerca de la pertenencia o no de ciertos objetos por las características que los agrupan— definiría en sí misma aspectos de control y modos de acción del orden de lo normativo. En tal sentido, el rasgo humano de generalizar supone otro aspecto del hacer humano que es la constitución de un sistema normativo de regulación.

A partir de un estudio de Krutetzki (1968), Davýdov (1982) se detiene para el caso de la matemática en procesos de generalización que denomina "de pronto" e "*in situ*", que le permiten enfatizar que dichos procesos no necesariamente provienen de un entrenamiento previo con problemas similares. Davýdov señala que repetidas veces los psicólogos han observado hechos de generalización "*in situ*" sin atribuirle la importancia teórica que se debiera dar por escapar los mismos a las concepciones aceptadas sobre los mecanismos del proceso formativo de **toda** generalización y sus condiciones **necesarias**[3]. Aunque en contextos muy diferentes, algunos hechos observados en las clases que estudiamos en los que, en el marco de discusiones colectivas, se producen generalizaciones que tienen la impronta de lo repentino nos llevan a establecer un vínculo con las ideas de generalización "de pronto" e "*in situ*" que propone este autor.

Según García (2000), Piaget considera la generalización como uno de los dos procesos constructivos elementales en la conformación de conocimiento; el segundo de ellos es la abstracción. Recuperamos, en primer lugar, algunos conceptos elementales de Piaget que retoma García como ejes elementales en la constitución de los procesos cognoscitivos para adentrarnos luego en estos dos procesos elementales que acabamos de señalar y para comprender allí la relación intrínseca del proceso de generalización en el desarrollo de los procesos cognoscitivos a partir de los cuales un sujeto logra construir significaciones en torno al mundo que lo rodea. La categoría básica inicial asumida por Piaget —señala García — es la de *acción*, y la atribuye al nacimiento mismo del ser humano como *organismo,* como totalidad biológicamente estructurada cuya perduración y conservación depende de sus interacciones con el medio. Son estas acciones elementales las que le posibilitan ubicarse en una relación con el exterior; otorgan, por ejemplo la capacidad de mirar, la prensión involuntaria o una serie de movimientos, etc.

La repetición de la acción da lugar a los llamados por Piaget *esquemas de acción*. La capacidad de ordenar paulatinamente —por ejemplo, lo caótico de los movimientos iniciales del niño, de regularizar hasta repetir de modo coordinado y con un objetivo preciso— está definida por estos esquemas de acción y —al mismo tiempo— los esquemas se constituyen a partir de este proceso. Los esquemas incluyen inicialmente componentes motores, sensoriales, perceptivos, afectivos y volitivos. Las funciones psicológicas tradicionales están presentes en ellos pero sin preeminencia de unas sobre otras; sin embargo, el esquema funciona como totalidad organizada cuyos componentes se identifican paulatinamente en sucesivas

[3] El resaltado en negrita de ciertas palabras es efectuado por el autor en su texto.

diferenciaciones e *integraciones*. La conceptualización de los esquemas según García (2000) no presupone un sujeto que actúa sobre objetos, sino un organismo que *interactúa* con algo externo a sí mismo. La reiteración de las acciones —a partir de encuentros con la realidad externa— no solo genera esquemas organizados en tanto totalidad, sino que es "organizante" en tanto que lo exterior adquiere significación ("algo" se vuelve "mirable" o "atrapable", el sujeto puede adjudicar una cualidad a lo que se presenta externamente). Todo lo mencionado está ligado a dos procesos funcionales básicos, la *asimilación* y la *acomodación.* García (2000) enfatiza:

> …que los esquemas de acción se presentan como el nexo que conjunta la triple raíz de su capacidad como órgano asimilador: la raíz biológica, puramente orgánica; la raíz que podríamos llamar "orgánico-psicológica" (las coordinaciones de las acciones), y la raíz empírica (el "mundo" en el cual se ejercen las acciones). (p.99)

Para este autor, es en estas consideraciones que se fundamenta la concepción de la construcción del conocimiento desde la perspectiva del constructivismo como una relación indisociable entre el Sujeto y el Objeto. Desde nuestra perspectiva, y en correlación estrecha con nuestro trabajo, entendemos que el Mundo —en el que se ejecutan las acciones— incluye al Otro y a los Otros, lo cual nos lleva a afirmar que la relación sujeto-objeto se define y reconfigura en el marco de las interacciones entre los sujetos que indagan una problemática común.

El progreso cognoscitivo del sujeto en el marco de los estudios de Piaget se da en el pasaje de la constatación ("empujé y se movió"), germen de lo que serán las relaciones causales, a la inferencia ("si empujo se mueve"), que supone establecer una relación entre acciones. Si bien constataciones sucesivas producen anticipaciones como formas primarias de inferencias, las constataciones van teniendo también —de modo paulatino— un origen inferencial en donde lo que se constata son anticipaciones inferidas. Anclamos las construcciones primarias de algunos alumnos, que abordaremos luego en el marco de la construcción emergente en tanto elaboración colectiva, en este tipo de constatación revestida de anticipación inferida

En este sentido, nos resulta iluminadora una de las conclusiones que Piaget extrae del Segundo Simposio del Centro Internacional de Epistemología genética realizado en 1957 y que García (2000) recupera en su texto:

> En lo que concierne a la lectura de la experiencia, los trabajos muestran que lo que se presenta como dato en la percepción tiene ya carácter de una construcción, en tanto que "la parte del dato que procede del objeto está siempre incorporada a esquemas más o menos organizados (es decir,

> ya organizados o en vías de organización) que testimonian la actividad del sujeto". Tal conclusión "conduce a afirmar que todo conocimiento, aún a nivel perceptivo, involucra una parte de organización y esquematización ya parcialmente isomorfa a la lógica" (p.101)

Como indicamos antes, para Piaget (García, 2000; Piaget, 1975 y Piaget y García, 1982) la abstracción y la generalización son los instrumentos básicos —en tanto procesos— en la construcción de conocimiento.

Dos son los tipos de abstracción distinguidas: *abstracción empírica* que es la referida a los objetos exteriores en los cuales el individuo constata ciertas propiedades, características o hechos, que son separados (abstraídos) de los otros para analizarlos independientemente. La *abstracción reflexiva* es la referida a las acciones y operaciones del sujeto. En la abstracción reflexiva, lo que es abstraído en un nivel pasa a otro (de la acción a la representación, de la representación a la conceptualización, o de allí a la operación en niveles sucesivos). En el nuevo nivel el sujeto centra su atención sobre lo que fue abstraído del nivel inferior. Por ejemplo, un sujeto que observa un conjunto de cinco objetos puede prestar atención a alguna propiedad física, como el color, y considerarla separadamente de las demás propiedades o puede contar los objetos, agregando al conjunto una propiedad que no está en los objetos y que resulta de una operación del sujeto. En el primer caso ha realizado una abstracción empírica y en el segundo reflexiva.

Estos dos tipos de abstracción se corresponden con otros dos tipos de generalización, la *generalización inductiva o extensional*, que es un proceso basado en constataciones de observables sobre objetos externos al sujeto, de donde, por abstracción empírica se extraerá la propiedad que será objeto de la extrapolación de "algunos" a "todos" (o de "hasta ahora" a "siempre"). El segundo tipo de generalización es la *generalización constructiva o completiva*, que tiene su base en la abstracción reflexiva. Consiste en un progresivo reemplazo de constataciones de hechos y de sus resultados obtenidos a través de abstracciones empíricas a partir de reconstrucciones que implican inferencias y ponen en juego nuevas formas de organización que concluyen en un conjunto de relaciones encadenadas deductivamente. Piaget caracterizó a este tipo de generalización como conducente a la producción de nuevas formas.

Con referencia a la construcción de significado en términos de conceptualización Barallobres (2007) adhiere a la idea defendida por los acercamientos socioculturales que enfatizan que la relación entre significaciones locales(o personales) y significaciones culturales no son naturales y no pueden pensarse solamente en términos de adaptación y acomodación. El autor señala que uno de los roles de la cultura en torno a la construcción de conocimiento es el de insinuar, a partir de categorías conceptuales y prácticas sociales, las trazas del desarrollo conceptual. Los procesos de internalización no son la "copia"[4] al interior de la conciencia individual. La relación entre lo interno y lo externo exige una reorganización individual que no se contiene solo en un contacto con las herramientas dadas por la cultura; es la acción concreta de los sujetos actuando sobre situaciones concretas la que genera significación interna —en el sujeto— de las construcciones culturales a partir de su utilidad como "transformadoras" de la situación sobre la que se actúa.

Autores como Harell & Tall (1989) han recuperado las nociones de abstracción empírica y reflexiva y de generalización inductiva y constructiva acuñadas por Piaget.

Estos autores refieren a los diferentes tipos de generalización enfatizando su relación con las actividades cognitivas involucradas. Llaman *generalización expansiva* a aquella que extiende la estructura cognitiva existente (esquema) sin recurrir a cambios en las ideas anteriores, es decir sin reconstruir el esquema previo. Llaman *reconstructiva* a aquella generalización que requiere reconstruir la estructura cognitiva existente para profundizar el rango de aplicabilidad. Como ejemplos de estos dos tipos de generalización, mencionan que para los estudiantes enfrentar R^n como espacio vectorial a partir de los casos estudiados de una y dos dimensiones es un tipo de generalización expansiva; sin embargo la noción general de V como R-espacio vectorial requiere de una abstracción y de una generalización reconstructiva (al alumno se le presenta una noción nueva nombrada como "espacio vectorial V"con un conjunto inicial de propiedades —los axiomas— y debe seguir un proceso sutil y difícil de construcción del significado de V y sus propiedades por deducción a partir de los axiomas, frecuentemente guiado por un experto. Este proceso requiere también una reconstrucción de las propiedades "conocidas" por el alumno sobre R^n).

A estos dos tipos de generalización los autores agregan la *generalización disyuntiva*, la cual le permite al alumno operar en un conjunto más amplio de ejemplos pero por agregado de las nuevas ideas como información adicional, sin integración de las viejas ideas. Al moverse de un contexto familiar a uno nuevo, los sujetos construyen un nuevo esquema disjunto del anterior para tratar con el nuevo contexto y agregan éste al conjunto de esquemas previos. Los estudiantes que producen generalizaciones disyuntivas por lo general fallan en considerar los ejemplos iniciales como casos especiales de estructuras más generales.

[4] Las comillas son originales del autor en su texto.

Los autores presentan otro ejemplo para entender estas categorías: suponen tres estudiantes A, B y C que pueden resolver ecuaciones en una variable. El estudiante A tiene una comprensión relacional, esto significa que entiende por qué al sumar a ambos lados de la igualdad una expresión o multiplicar a ambos lados por un valor no nulo se conserva el conjunto solución. A diferencia de otros estudiantes, B y C que saben solamente los mecanismos para llevar adelante el proceso de resolución como, por ejemplo, "colocar los términos con *x* en un lado y los números en el otro", "cambiar de signo al cambiar de lado", "sumar o restar términos semejantes". Los tres estudiantes pueden generalizar el método para resolver ecuaciones lineales en dos variables: "eliminar *x*" para obtener una ecuación lineal en *y* resoluble para luego resolverla, y a continuación, reemplazar el valor hallado para *y* de modo de lograr una ecuación resoluble en *x* y resolverla. En el ejemplo presentado, el estudiante A puede expandir y enriquecer su esquema entendiendo las relaciones que justifican estos procesos mientras que los estudiantes B y C solo incorporan nuevos mecanismos de resolución ("eliminar *x* y resolver la ecuación en *y*", "sustituir *y* y volver a encontrar *x*"). Los autores continúan suponiendo que luego los estudiantes deben enfrentar una generalización de la resolución de sistemas de ecuaciones de 2 x 2 a sistemas de ecuaciones de 3 x 3, y más aún, a sistemas de ecuaciones de *m* x *n* mediante operaciones de fila en la matriz de coeficientes. El estudiante A entiende la esencia del proceso y puede continuar enriqueciendo y ampliando su esquema al identificar los métodos anteriores de ecuaciones de una y dos variables como casos especiales del nuevo procedimiento de resolución. El estudiante B comienza a ver el significado subyacente del proceso de resolución y lucha con las nuevas ideas y logra una reconstrucción cognitiva según la cual puede ver el caso del sistema de 2 x 2 como un caso especial del procedimiento de *m* x *n*. En cambio, el alumno C solamente añade otro sistema de resolución de ecuaciones a su lista de procedimientos: la solución de *n* ecuaciones en *m* incógnitas.

Los autores identifican que la generalización disyuntiva suele resultar para un observador externo como un caso de generalización exitosa en la medida en que el sujeto observado puede operar con los nuevos ejemplos, pero esta generalización es débil en la medida en que los ejemplos iniciales no son vistos como casos particulares del procedimiento general. Esta forma de generalizar enfatiza el fracaso de los alumnos más flojos que proceden en matemática a partir de la incorporación de un número incontable de reglas aisladas.

Dörfler (1991) mencionado por Zazkis, Liljedahl y Chernoff (2008), con puntos en común pero diferenciándose de lo anterior, hace una distinción entre generalizaciones empíricas y teóricas; las primeras basadas en el reconocimiento de cualidades comunes de objetos. Según este autor, las generalizaciones empíricas sufren una alta sujeción a los ejemplos particulares y caen en ciertas fallas en el establecimiento de una meta que regule la determinación de las cualidades esenciales y relevantes para la generalización. En las generalizaciones teóricas los invariantes esenciales se identifican y se substituyen por prototipos. Esta generalización tiene lugar a partir de la abstracción de los invariantes esenciales.

La abstracción empírica suele ser contemplada por muchos investigadores como fuente de errores; sin embargo, otros —Radford (2001, 2003), entre ellos— conceptualizan las generalizaciones de tipo factual como parte de un proceso de conceptualización en torno a lo general. El avance en el terreno algebraico con soporte en lo general daría lugar a sostener en el aula un intercambio que avanza sobre lógicas aún alternativas con respecto a la generalidad en la disciplina. Haremos un mayor desarrollo con respecto a las tipificaciones que hace este autor en el apartado 2.2 de este capítulo.

2.2. Especificidad del proceso de generalización matemática

Diferentes investigadores consideran el estudio de los procesos de generalización en el ámbito de la enseñanza de la matemática. Nos interesa recuperarlos, pues pensamos que contribuyen al análisis de la particularidad de estos procesos en el marco de la especificidad del conocimiento que se produce en un aula.

Hemos organizado este apartado en tres partes: los aspectos epistémicos de la generalización en matemática, el papel de la tarea y el de las interacciones entre personas.

2.2.1. La naturaleza epistémica del proceso de generalización en matemática

Mason (1996) se centra específicamente en el estudio de la generalización en el marco de la problemática didáctica del álgebra. Considera la necesidad de sensibilizar a los alumnos respecto del tipo de generalización que supone la actividad matemática y de plantearles un juego permanente y dual, entre generalización y especialización (particularización), como uno de los objetivos centrales de la enseñanza de la matemática. En el interior del hacer matemático hay un ida y vuelta entre los ejemplos o los casos particulares y las teorías que generalizan o inscriben estos casos en un modelo más amplio, a la vez que reconoce que hay algo específico de esta disciplina dado tanto por la naturaleza de los objetos, como por la manera en que se justifica tal generalización. Según este autor, un camino para desarrollar la conciencia de la generalidad es promover la búsqueda de lo particular en lo general y de lo general en lo particular. En este sentido, propone —en un plano didáctico— considerar el papel del ejemplo en las clases de matemática y revisar el tipo de análisis que el profesor hace sobre un particular en el aula al proporcionar un ejemplo y asumir que el alumno —por sí solo— descubrirá los aspectos relevantes —para el profesor— que hay que rescatar. En su análisis reconoce la generalidad del lenguaje; el habla representa un corrimiento desde lo particular hacia lo general, que es significado y, como otros investigadores, enfatiza que la generalidad es relativa al dominio de confianza y facilidad del individuo. Lo que se manipula de manera confiable atrae la atención pero Mason (1996) —como otros autores— menciona la necesaria flexibilidad en los cambios de atención para actuar con símbolos escritos, desde percibir una expresión como valor a ver un objeto como proceso. Reutiliza la noción de ejemplo genérico acuñada por Ballachef (1987) para describir uno de los aspectos que reconoce más potentes del acto de generalizar: dominar un ejemplo pudiendo hacer hincapié en los aspectos característicos e ignorando los aspectos especiales en el particular.

Mason (1996) identifica 4 raíces de entrada al álgebra: i) Expresar generalidad; ii) Posibilidades y restricciones que soporta la conciencia de variable; iii) Reagrupar y manipular con la consideración de por qué expresiones aparentemente diferentes para un mismo problema a modelizar dan de hecho las mismas respuestas; iv) Aritmética generalizada en el sentido de letras tradicionales que ocupan lugar de números como modo de expresar las reglas de la aritmética.

Butto Zarzar y Rojano Ceballos (2010) inscriben su investigación en el marco de la entrada al pensamiento algebraico y las rupturas y continuidades con el trabajo aritmético, a la vez que posicionan su trabajo en el marco de estudios anglosajones respecto de la necesidad de un estudio temprano al álgebra. Recuperan de la didáctica francesa los clásicos trabajos de Vergnaud (1991) sobre estructuras aditivas y multiplicativas. Estos autores identifican dos enfoques en la iniciación al pensamiento algebraico:

1) El de la *pre-álgebra*, que corresponde a intervenciones de tipo transicional, que buscan aminorar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra al tiempo que asume cuidadosamente la necesidad de redefinir o aumentar el sentido de los símbolos que se utilizan en las expresiones algebraicas.

2) El del *álgebra temprana*, que reconoce lo anterior a la vez que propone intervenciones previas a la transición abordando *el estudio de la generalización* como factor inherente al pensamiento algebraico.

En su investigación, Butto Zarzar y Rojano Ceballos estudian la iniciación temprana al álgebra desde el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. Incorporan el lenguaje computacional Logo como medio para el desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico temprano y como estrategia de interacción entre los alumnos.

Estos autores sostienen la factibilidad de aprovechar tópicos de la aritmética como la variación proporcional y las potencialidades del lenguaje de programación Logo para fomentar en los alumnos procesos de generalización que evolucionen hacia un nivel simbólico-algebraico.

2.2.2. El tipo de actividad matemática o de tarea alrededor de la cual se despliega el proceso de generalización

Radford (2000, 2001, 2003) hace su análisis desde una perspectiva semiótica y socio-cultural incorporando categorías y modelos de la lingüística. Bajo este marco, interpreta los signos (letras, palabras, gestos) que los alumnos despliegan en tareas de elaboración del término general de una sucesión de figuras geométricas[5].

Radford (2003) caracteriza tres tipos de generalización: factual, contextual y simbólica[6]. Describe esas generalizaciones en términos de esquemas operacionales relacionados con los diferentes objetos, herramientas, verbalizaciones (adverbios como “siempre” o términos que

[5] El término corriente que utiliza Radford y otros investigadores para referirse a este tipo de tareas es *geometric – numeric pattern*.

[6] Radford establece esta caracterización sobre la base de una experiencia hecha con alumnos de grado 8 alrededor del problema que transcribimos aquí abajo:

La siguiente sucesión de figuras está construida con fósforos.

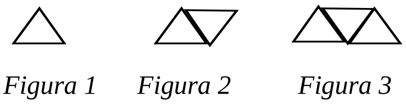

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Encontrar el número de fósforos necesarios para hacer la figura número 5 y la figura número 25.

b) Explicar cómo encontrar el número de fósforos necesarios para construir una figura dada.

c) Escribir una fórmula matemática para calcular el número de fósforos necesarios para hacer la figura número n.

indiquen posición espacial como “el siguiente”) y signos[7] que los sujetos utilizan intencionalmente durante los momentos sociales de resolución, ya sea para alcanzar alguna forma estable de conocimiento, para transmitir sus intenciones o para llevar adelante las acciones que les permitan alcanzar la finalidad buscada. Estas generalizaciones varían con relación a las diferentes tareas. Así la solicitud de pedir la cantidad de palillos que conforman una figura requiere estrategias y discursos de significación diferentes respecto de la actividad de producir una explicación de cómo calcular el número de palillos para una figura cualquiera. Finalmente, se requiere la producción de una expresión simbólica del cálculo y esta nueva tarea promueve en el aula la aparición de las generalizaciones simbólicas. El autor advierte que, dado que la tarea que propone solicita construir una expresión que involucra tomar en cuenta la posición de una figura como variable, comporta una complejidad mayor que los problemas de producción de expresiones en *pattern* elementales que no incluyen la sucesión de figuras.

Sintéticamente, una generalización factual es una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional (en sentido piagetiano). Este esquema operativo permanece ligado al nivel concreto y permite a los estudiantes abordar con éxito prácticamente cualquier caso concreto.

Una generalización contextual, como en el caso de la generalización fáctica, es también la abstracción de acciones concretas en forma de esquema operacional. Una diferencia con la generalización anterior es que el nuevo esquema no funciona en el nivel de los números concretos. En problemas de búsquedas de un patrón a partir de figuras geométricas, el autor describe, por ejemplo, cambios en la referencia que hacen los alumnos. Las nominaciones específicas como “la quinta figura” son reemplazadas por expresiones más generales como “la figura”, aun cuando esta denominación pueda comportar la ambigüedad de denominar el número de la figura o la figura geométrica.

La generalización simbólica involucra el uso y la comprensión de lenguaje algebraico. El autor se centra fundamentalmente en la forma en que los estudiantes abordan el proceso de despersonalización que impone el funcionamiento del sistema algebraico. Identifica que los signos que los estudiantes usan en sus primeras aproximaciones al lenguaje algebraico reflejan y se ciñen en torno a las acciones numéricas previas. Para los estudiantes expresiones

---

[7] Radford denomina al conjunto de objetos, herramientas, signos, verbalizaciones *semiotic means of objectification.*(2001, 2003)

como $(n + 1) + n$ y $(n + n) + 1$ son diferentes porque en el contexto de su producción objetivan dos conjuntos de acciones diferentes. En cuanto al uso de signos, señala que trae consigo las objetivaciones del discurso creado en las tareas previas. Así, en un episodio, el autor identifica que los alumnos utilizan n para reemplazar lo que en su explicación refería a "la figura" y en otro episodio que los alumnos usan en las expresiones la letra f como abreviatura de lo que en las palabras de sus explicaciones era "figura". Los paréntesis suelen ser utilizados para indicar el ritmo y movimiento de las acciones previas desplegadas por los alumnos y, con frecuencia, reflejan una pausa en sus acciones mientras que las expresiones literales conservan el orden de la secuencia de cálculos realizados.

El análisis de Radford permite pensar la génesis cultural del lenguaje algebraico imbricada con características de lenguajes contextuales y situados. Sus investigaciones advierten sobre la necesidad de analizar el juego de relaciones que se imponen entre interpretación y producción de los signos, contexto situacional y temporalidad en el accionar en el marco de una comunidad de producción.

Radford (1996) considera la compleja cuestión de abordar la validez de la generalización en su relación con la interpretación de los observables. El autor expresa que al trabajar con patrones numérico-geométricos se intenta arribar a nuevos resultados. Concebida de ese modo, la generalización no es un concepto, es un procedimiento que permite generar nuevos resultados a partir de otros resultados, en el marco de una teoría. Cobra entonces importancia la interpretación de los observables que conducen a la conclusión, proceso en el que se pone en juego el conocimiento, la conceptualización de los objetos matemáticos y las relaciones del observador en tanto intérprete. Reivindica la importancia de la naturaleza lógica que subyace a la generalización y las lógicas subyacentes que dependen de los sistemas de conocimiento de los sujetos, cuestiones que lo vuelcan a considerar la generalización como puente hacia el álgebra, en su relación con el abordaje en el aula de un tipo de trabajo que incluya a la diversidad de las lógicas.

Desde el encuadre teórico de la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, Barallobres (2007) retoma lo mencionado en Radford (2003) respecto de las expresiones simbólicas y su no independencia de la dimensión espacio-temporal del discurso en contexto. Agrega que el impedimento de realizar cálculos formales no puede atribuirse solo a esa dimensión que expresa Radford de que las expresiones hereden las acciones desplegadas por los alumnos, sino a la ausencia de una finalidad clara que oriente la actividad de realización de tales cálculos. Según Barallobres, la actividad algebraica ligada a las situaciones de tipo *pattern*, en las que se solicita la producción del término general, adquiere una función esencialmente de expresión y no hay en ellas una finalidad clara que oriente a los alumnos a la realización de transformaciones. Las expresiones $(n + 1) + n$ y $(n + n) +1$ no expresan para los alumnos una diferencia que incida numéricamente. Diremos nosotros, en otras palabras, que la diferencia entre sentido y denotación —en términos de Frege (1892)— no se pone en juego en este tipo de tareas[8]. Para este autor, el juego numérico y la exploración constituyen un medio para poner en cuestionamiento una primera lectura espacio-temporal de la fórmula y dar lugar a la transformación de una escritura en otras equivalentes.

Asimismo, de acuerdo con su análisis, el contexto de la validación de las fórmulas que modelizan ofrece un espacio didáctico en el cual la herramienta algebraica dejaría su carácter de expresión simbólica como unánime para dar lugar al análisis sintáctico. En este sentido, postula que las validaciones intelectuales —en el sentido de Ballacheff (1987)— favorecerían dicho tránsito. Este tipo de validación, separada de la acción, está comandada por el lenguaje sobre los objetos y sus propiedades (a diferencia de las validaciones pragmáticas que emergen de acciones efectivas sobre las representaciones de los objetos). El autor hace explícito el papel fundamental de los espacios didácticos como medio favorecedor de la construcción de la racionalidad en los sujetos al afirmar que es en la interacción dialéctica entre el sujeto y el entorno creado artificialmente por la escuela que los alumnos pueden acceder a la comprensión de lo que es la validación matemática. Dicho entorno sostendría el reencuentro entre las racionalidades individuales y las emergentes de confrontaciones epistemológicas al interior de las comunidades científicas (en nuestro caso, el aula). Sostiene una distinción —en términos de la producción— entre aquellas actividades de generalización en situaciones de *pattern* y aquellas en contexto numérico[9]. Las primeras centradas sobre relaciones entre términos de la

[8] Frege (1892), citado por Drouhard (1992), distingue entre sentido y denotación de las expresiones o de las expresiones algebraicas, por ejemplo, las escrituras $(x–1)^2$ y $x^2–2x+1$, denotan el mismo objeto pero, al mostrar aspectos diferentes del mismo, tienen distinto sentido. La elección de las transformaciones a realizar sobre las expresiones, en función de la tarea que debe hacerse, depende del sentido de las expresiones y no de su denotación, que no debería modificarse por la transformación.

[9] Barallobres propone a sus alumnos —en grupos de 4 o 5 alumnos— una actividad en la que solicita dar el resultado de la suma de diez números consecutivos. Va variando el número inicial hasta proponer números de más de 6 cifras. Gana el equipo que proporciona el resultado que él escribe en el pizarrón. La actividad avanza hacia el pedido de un método que agregue inmediatez a la respuesta cualquiera sean los 10 números que se

secuencia, frecuentemente consecutivos, para identificar la forma de pasar de un término al siguiente; las segundas centradas en la manera de realizar el cálculo requerido sobre relaciones numéricas que vuelvan esa acción óptima. El autor sentencia que la búsqueda de un invariante numérico, a partir de la exigencia de una fórmula, vuelve a los aspectos temporales y espaciales no predominantes; y, en tal contexto, la fórmula cobra un rol de herramienta de cálculo y no de medio de expresión simbólica. Rescatamos su posición respecto a una finalidad clara que favorezca un trabajo sintáctico sobre las expresiones. Para este autor, en la medida que el contexto de producción se muestra limitado para argumentar acerca de la pertinencia de alguna fórmula, la existencia de otra fórmula ya validada se constituye en objeto de referencia. La actividad se organiza, de este modo, en torno al análisis y la búsqueda de las relaciones —en la fórmula que se busca validar— con respecto a las relaciones que se perciben en la que ya ha sido validada.

Destacamos que Barallobres (2007) presenta un medio en el cual las interacciones generan buenas condiciones para la emergencia del análisis sintáctico. En este juego de acciones y retroacciones de la situación que él diseña se fundamentaría la posibilidad de construcción significativa de los conceptos de equivalencia y de transformación de las expresiones. El entorno que crea se apoya en la fertilidad del contexto numérico para favorecer la emergencia relacional soportada en el juego y la exploración. En este entorno, el docente juega un papel fundamental como mediador que sostiene y hace avanzar tanto la escritura simbólica de los cálculos que realizan los estudiantes como el análisis sintáctico de las mismas.

Como señalamos previamente, Radford (2003) caracteriza tipos de generalización de los alumnos en tareas de producción de *pattern*; Barallobres (2007) diseña situaciones —soportadas en la interacción— a los efectos de volver significativo para los alumnos la construcción de la necesidad de equivalencia y transformación de expresiones algebraicas. Ambos autores elaboran sus desarrollos teóricos a partir del diseño de tareas específicas que den lugar a producciones que favorezcan sus análisis. Nuestro objeto de estudio es el análisis de la producción de generalizaciones sin la ligazón de dicho producto a una tarea generada necesariamente para tal fin. En ese sentido, se diferencia de los trabajos de estos autores en la medida en que releva

---

proporcionen. Sigue en esta secuencia el pedido de la búsqueda de razones de por qué los métodos hallados funcionan para todas las series de diez números consecutivos y seguidamente se solicita una fórmula asociada al método propuesto.

aquellas generalizaciones emergentes en el espacio colectivo que no fueron planificadas ni anticipadas por el docente para darles lugar.

Panizza (2002, 2009), desde el marco de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1995), incorpora el concepto de "generalizaciones espontáneas" para referirse a aquellas generalizaciones que efectúan los estudiantes aunque la tarea no lo demande. Estudia procedimientos de estudiantes (de 17-18 años) mientras resuelven distintas tareas, por ejemplo analizar el valor de verdad de enunciados escritos en lenguaje simbólico, o determinar condiciones bajo las cuales los enunciados algebraicos resultan verdaderos. Identifica diferencias en torno a la capacidad de *reconocer* la necesidad de justificación de la generalización que formula un alumno. Su especial atención está puesta en: las descripciones verbales y simbólicas que los estudiantes producen basadas en las observaciones y descripciones que ellos hacen de los objetos de referencia de los enunciados; la influencia de estas descripciones en los procesos de reformulación de los enunciados; el tratamiento que los alumnos efectúan dentro del registro escrito algebraico y los procesos de conversión que se producen para ir desde la formulación de una sentencia en lenguaje simbólico a otra sentencia en otro registro. La autora particulariza su análisis en el control de las producciones que los alumnos desarrollan[10].

El estudio —basado en observaciones de una clase de álgebra del Ciclo Básico de la Universidad de Buenos Aires (CBC)— evidencia que con frecuencia los estudiantes generan nuevas "generalizaciones espontáneas" y que ellas se soportan en asociaciones locales con unos pocos ejemplos que no son representativos de los objetos de referencia de la sentencia. Recupera de las investigaciones de Ballachef (1987) la relación con la certeza que los alumnos establecen cuando proponen enunciados nuevos para reformular un primer enunciado sobre la base de una elección limitada de ejemplos. Si bien algunos alumnos pueden refutar un enunciado universal a partir de reconocer algún contraejemplo, pueden, a partir de unos pocos ejemplos, producir un nuevo enunciado universal sin experimentar la necesidad de estudiar su valor de verdad.

---

[10] Los términos *tratamiento* y *conversión* que considera la autora remiten a las operaciones definidas por Duval (1995). Detallamos estos constructos en el capítulo 3 en el que desarrollamos el marco teórico de esta investigación.

La autora caracteriza tres tipos de “generalizaciones espontáneas”. De acuerdo con su origen (para un sujeto particular en una situación particular), una generalización espontánea puede ser: conceptual (basada en el contenido al cual hace referencia el enunciado); lógica (basada en la comprensión inadecuada de los conectores o las reglas de razonamiento lógico) y semiótica (basada en el análisis del contenido de una representación semiótica).

El interés de Panizza en estos trabajos por estudiar la capacidad o no de los alumnos de reconocer la necesidad de validar sus “generalizaciones espontaneas”, la lleva a diferenciar la *necesidad* de asumir tal control de la *posibilidad* de efectuarlo —en caso de tener identificada la necesidad—.

Para esta autora, la necesidad de asumir el control es intrínseca a aquellas tareas que requieren realizar una generalización, el control se produciría en tanto proceso durante la misma resolución de la tarea a partir de las re-representaciones que se producen de los datos en función del objetivo. Por el contrario, en las “generalizaciones espontáneas” la necesidad de control no es intrínseca a la tarea ya que la generalización producida no está directamente relacionada con el objetivo requerido. Respecto de esta diferencia que acabamos de señalar, la autora recupera a Radford (1996) que indica que “las representaciones (en una generalización) como símbolos matemáticos no son independientes del objetivo. Ellas requieren de una cierta anticipación del objetivo”.

Si bien Panizza establece, al igual que Radford, una caracterización de un cierto tipo de generalización, lo hace con respecto a explicaciones o pruebas asociadas a actividades que no son en sí la producción de la generalización, sino el análisis de ciertos enunciados o la resolución de cierto problema. Radford (2003, 2001) analiza y caracteriza las generalizaciones orientadas a la producción de una expresión general que modelice el conteo en tareas de *pattern*. La diferencia del tipo de actividad comporta un conjunto de rasgos que definen y diferencian la clasificación de las generalizaciones en cada uno de los autores.

Panizza en estos trabajos sostiene que la posibilidad de control en escrituras del registro algebraico se dificulta ya que la retroacción del trabajo efectuado en este registro opera de modo diferente que al trabajar en el registro de las escrituras aritméticas o en el dominio de las figuras geométricas materiales. Plantea específicamente, y apoyada en ejemplos, que las escrituras del registro algebraico no proveen a los estudiantes buenos elementos de retroacción y control. Esto la lleva a formular la necesidad de definir condiciones didácticas para que los estudiantes puedan desarrollar estrategias de control dentro y fuera del registro de las escrituras algebraicas.

La noción de "generalización espontánea" elaborada por esta autora es en sí misma cercana a resultados de nuestro trabajo desde el punto de vista de que la producción que tiene lugar no puede anticiparse desde la intencionalidad inicial de la actividad propuesta. Nuestro trabajo avanza en esa dirección pero hace su centro en el proceso colectivo de gestación de una generalización. Es a partir de unas primeras formulaciones de afirmaciones generales, en un juego de acciones y reacciones donde necesariamente intervienen otros —docente y alumnos— que se llega a la formulación de una o varias sentencias generales. Nuestro objeto de análisis es el propio proceso colectivo de gestación de la generalización y en él se entraman justificaciones muchas veces parciales sobre su grado de verdad, estas últimas centrales a la problemática estudiada por Panizza.

2.2.3. La interacción entre sujetos —a propósito de una tarea— como medio intrínseco del proceso de generalización

Señalamos en párrafos anteriores que Barallobres (2007) asume la importancia de la interacción en el aula para la construcción de un medio artificial que permita el reencuentro entre conocimientos personales y saberes culturales hacia la emergencia de una racionalidad matemática.

Otros autores consideran un tipo de interacción de un sujeto con la producción escrita de otro, en el marco de un dispositivo de investigación. En continuidad con los trabajos de Mabel Panizza sobre las "generalizaciones espontáneas" y las acciones de control en álgebra mencionados en el apartado 2.2.2, Drouhard y Panizza (2002) analizan el rol de interlocutor que juega un alumno cuando analiza producciones escritas de otro supuesto alumno (personaje ficticio cuya producción se simula para esta tarea). Al alumno sujeto de la experimentación se le solicita explicar en términos matemáticos cómo el alumno ficticio puede haber procedido y emitir una opinión sobre dicha forma de proceder con relación a la solución de la tarea propuesta. Los autores inscriben sus desarrollos en el marco de una investigación más amplia sobre el lugar de la interacción en los procesos de conformación de una racionalidad matemática.

Los autores advierten —en proximidad con la distinción de Panizza (2002, 2009) entre la necesidad de asumir y la posibilidad de efectuar el control— que en el control que hace un alumno de su producción hay un posicionamiento diferente si el alumno produce lo que controla o controla un trabajo escrito que él no ha producido y debe tomar distancia de su propio trabajo para ubicarse en un rol de lector. Los autores reconocen que este posicionamiento que debe asumir el alumno de ser "lector" de su trabajo los ha llevado a advertir problemas metodológicos cercanos a los que habían advertido cuando se pensaba en el profesor como lector ideal. Estas dificultades hicieron que recurriesen a la opción metodológica de que el alumno se ubique como interlocutor de un alumno ficticio.

En sus conclusiones, afirman que los alumnos tienen dificultades para percibir la necesidad de control, y que los que sí la perciben tienen problemas para articular elementos semióticos y conceptuales como herramientas de control. Asimismo —indican—, los que permanecen en el registro de las escrituras algebraicas carecen de elementos para percibir sus propias contradicciones. Señalan entonces la necesidad de identificar condiciones didácticas para que los estudiantes puedan desplegar herramientas de control sobre sus producciones y afirman el papel fundamental de la interlocución. En ese sentido, contemplan la necesidad de complementar su investigación con otro estudio experimental que incluya observaciones de clases, la realización de debates científicos y entrevistas clínicas.

Nos interesa retener de esta investigación la explicitación de la diferencia entre la posición de producción y la de control de la producción, cuestión que los autores tratan de hacer evidente con su dispositivo. Diferenciamos asimismo el tipo de interacción que los autores proponen y que está determinada por el dispositivo que arman en el cual la interacción se da con (y contra) un sujeto ficticio. En la interacción de este dispositivo, los alumnos no tendrán respuestas a sus acciones y/o enunciaciones, ni el discurso de los otros podrá volverse complementario a ellas, a diferencia de lo que ocurre con las interacciones en el aula que observamos, interacciones sobre las que soportamos nuestro análisis.

En línea con el constructivismo social de Ernest (1991), el grupo francés CESAME desarrolla un conjunto de investigaciones que inician a fines de los años 90 sobre la construcción del conocimiento matemático a partir de la experiencia del sujeto con los otros. Las siglas que denominan a este grupo dejan traslucir su objeto de análisis; ellas corresponden a las palabras en francés "'Construction Expériencielle du Savoir' et 'Autrui' dans les Mathématiques Enseignées", la traducción que Drouhard y Panizza (2002) hacen es 'Construcción Experiencial del Saber y el rol del interlocutor en la matemática que se enseña'.

En Drouhard et al (1999) se mencionan los objetivos centrales de investigación llevados adelante por el grupo CESAME. Ellos consideran la inter-subjetividad del conocimiento y buscan proponer nuevas variables a los modelos didácticos usuales para ampliarlos contemplando el rol de los actores en la constitución del conocimiento en contextos de debate e intercambio. Reconocen la comunicación como dimensión importante en la Teoría de Situaciones de G. Brousseau, sin embargo asumen la necesidad de volver explícita la relación entre los diálogos que tienen lugar y la naturaleza (epistemológica) del propio conocimiento matemático. Bajo este objetivo incorporan —entre otros aspectos— la experiencia del sujeto y el rol del tiempo como variables esenciales para estudiar el proceso que tiene lugar en esta toma de conciencia.

Una parte importante de su problemática de estudio comporta el aprendizaje de la racionalidad matemática, la cual no puede aprenderse por imitación. ¿Cuáles son entonces los mecanismos para aprender a argumentar matemáticamente? La hipótesis básica de este grupo de investigadores es que la argumentación matemática (y la demostración) se dirige a un interlocutor, que puede ser más o menos ficticio, virtual o interiorizado. En este trabajo, bajo la asunción de que los enunciados matemáticos no son como cualquier enunciado solo verdaderos o falsos, sino necesarios[11], los autores persiguen estudiar el proceso por el cual los estudiantes toman conciencia de tal necesidad. Bajo este objetivo incorporan —entre otros aspectos— la experiencia del sujeto y el rol del tiempo como variables esenciales para estudiar el proceso que tiene lugar en esta toma de conciencia. El grupo CESAME llama a dicha necesidad “necesidad epistémica” para diferenciar la naturaleza intrínseca de los enunciados matemáticos de la noción usual —y pragmática— de necesidad.

En este trabajo, los autores, si bien no retoman especialmente la pregunta acerca de los diferentes roles que los “otros” —estudiantes, maestro, etc.— pueden desplegar en la conformación de la experiencia del sujeto[12], intentan determinar cómo inciden las construcciones del sujeto con referencia a esa experiencia en la toma de conciencia de un sujeto en relación con la *necesidad* inherente a los enunciados matemáticos. Para ello consideran la experiencia que proporcionan las discusiones matemáticas en la constitución de la necesidad de los enunciados (en términos de contradicción o tensión). Distinguen tres aspectos en el conocimiento enseñado que no podrían considerarse por separado: el contenido matemático del conocimiento (la semántica de los enunciados); el de las reglas del juego matemático —el *know-how,* como los autores mencionan—; y el de las creencias acerca de la matemática como, por

[11] Los enunciados matemáticos contienen oraciones que son necesariamente verdaderas o falsas a partir de argumentos que les dan ese carácter.

[12] Experiencia modelizada en sus trabajos anteriores por medio de una “*doublé didactic pyramid*”.

ejemplo, “la matemática es una cuestión de entendimiento” o, al contrario, “en las matemáticas no hay nada que entender” (el punto de vista que asumen es descriptivo y no prescriptivo).

Los autores consideran los trabajos de Marc Legrand sobre el debate científico como unas de las pocas investigaciones didácticas que contemplan los dos últimos aspectos. El grupo da especial relevancia al rol del docente en el juego de maniobras con la variedad de sentencias que fluyen durante los intercambios y también analiza cómo es institucionalizado el conocimiento, tomando en cuenta cada uno de los tres aspectos que definieron. Este enfoque del grupo se debe a su posición según la cual la necesidad epistémica de los enunciados es parte de lo que debe ser institucionalizado por el docente. En tal sentido, señalan una diferencia entre el aspecto ligado al contenido y los otros dos aspectos en relación con las formas en que son explicitados por el docente. Estas están inmersas tanto en las acciones efectivas del docente como en las enunciaciones y omisiones que produce sobre las acciones (y enunciaciones) que efectúan los alumnos[13].

Nos resulta importante resaltar el aspecto relacional que proponen los autores como inherente a la conformación de la racionalidad matemática de un alumno. En nuestro trabajo, el entramado relacional es generador de un producto matemático colectivo que emerge a partir de la tensión que tiene lugar en un marco de formulaciones imprecisas, gestos de diferente orden y enunciaciones parciales completadas en el propio juego de interpretaciones de los involucrados. En esta tensión, el docente tiene el papel fundamental de “pasar en limpio” y seleccionar dentro del conjunto de formulaciones que se van haciendo mientras incorpora —en negociación con los alumnos— formas parciales de representar esas formulaciones.

Para la Teoría de Situaciones, los procesos personales de aprendizaje se inscriben en una trama modelizada teóricamente por las nociones de situación adidáctica y de contrato didáctico. Desde este marco, Sadovsky y Sessa (2005) incorporan la interacción social con los compañeros —no claramente modelizada inicialmente por la teoría— a partir de una interpretación sumamente interesante de los procesos de adidacticidad en el espacio colectivo. Las autoras señalan que el hecho de intercalar en el aula un espacio de interacción con las producciones de

[13] Agregamos nosotros que las acciones y enunciaciones de los alumnos no tienen posibilidad de ser explicadas con relación a consideraciones previas que les dan lugar. Nos referimos a la imposibilidad intrínseca de una formulación de los alumnos con referencia a su sistema de conocimientos en construcción en el marco de aprendizaje de las formas de argumentación válidas en el aula de matemática.

los otros, al incorporarlas como problemas a considerar[14], es generador de un escenario que habilita la formulación de nuevas preguntas. Sadovsky y Sessa (2005) expresan:

> El trabajo del otro cumple la función de interpelar el propio. Los límites que encuentra cada alumno para validar tanto las aceptaciones como los rechazos sobre los procedimientos de los otros generan buenas condiciones para alojar nuevas preguntas. La capa de relaciones matemáticas y normas de trabajo que se pondrán en juego en el debate colectivo se ha "engrosado". En muchos casos, la formulación de nuevas preguntas es una tarea del docente que solamente puede tener lugar en el marco de los debates que se generan como resultado de la confrontación. (p.108)

En esta línea, Sadovsky (2004) asume en su tesis doctoral el análisis de las operaciones aritméticas como objeto de estudio para los alumnos de séptimo grado de una escuela primaria. Considera el proceso de construcción de uno de los sentidos internos de las operaciones aritméticas a partir de condiciones sobre los números involucrados en las relaciones. Sadovsky propone problemas que involucran varias o infinitas soluciones. Es el soporte colectivo el que permite el despliegue en la escena del aula de estas muchas soluciones y es la intencionalidad didáctica la que pone a los alumnos en la tarea de producir relaciones generalizantes —que movilizan la noción de variable— para poder dar cuenta de las soluciones producidas. En este sentido, la interacción con intención didáctica es soporte de dos procesos de construcción matemática, uno en términos del conocimiento de las operaciones aritméticas y otro en términos de la racionalidad matemática en vías de una práctica aritmética.

Yackel y Cobb (1996) recuperan de la perspectiva teórica del constructivismo (Von Glasersfeld, 1984) el interaccionismo simbólico de Blumer (1982), y de la etnometodología la intrínseca relación existente entre el desarrollo del razonamiento y los procesos de construcción de sentido de los sujetos con su participación en la constitución interactiva de significados matemáticos compartidos (*taken-as-shared*). Estos autores incorporan constructos teóricos que permiten interpretar el funcionamiento de la clase en términos de cultura y teorizan la producción de conocimiento distinguiendo en su modelización el plano de los conceptos, teoremas, propiedades, leyes, problemas, de aquel de las normas que regulan el trabajo (qué es lo que está o no permitido hacer en matemática, qué se considera suficiente para dar por válido un enunciado o un procedimiento, cuáles son los criterios que permiten establecer que una estrategia es "matemáticamente pertinente", etc.). En particular, Yackel y Cobb (1996),

[14] Las autoras hablan de interacción *adidáctica* con los procedimientos de los otros, en el sentido de la teoría.

plantean que el aprendizaje en matemática es tanto un proceso de construcción individual como un proceso de enculturación hacia las prácticas matemáticas de una sociedad más amplia. En el complejo proceso de la elaboración de normas intervienen: la experiencia de cada alumno como productor, la internalización de las cláusulas del contrato didáctico y los desequilibrios provocados por los otros cuando aparecen en el espacio colectivo diferentes puntos de vista con relación a una norma. Para dar cuenta del origen social de estas normas en el aula y de su especificidad con respecto al conocimiento matemático, Yackel y Cobb (1996) hablan de normas sociomatemáticas. Estas exceden a aquellas que configuran las prácticas de los expertos y permiten atrapar el juego de interrelaciones necesarias que regulan las construcciones en el aula de matemática. Entre estas regulaciones del trabajo, los autores inscriben aquello que permite establecer que dos procedimientos son matemáticamente diferentes, o el proceso por el cual se establece que algo es "matemáticamente elegante", o "económico". También incluyen en las normas sociomatemáticas las que permiten discernir qué se considera una explicación matemática aceptable o una justificación. Las normas sociomatemáticas evolucionan de acuerdo al avance conceptual de los implicados en su constitución, coordinados por un representante de la matemática "experta" —como es el docente—. En este sentido, el concepto de *provisoriedad* asumido por Perrin Glorian (1995) para el análisis de los procesos didácticos nos resulta una buena herramienta para explicar este proceso constitutivo. En el marco de esta tesis asumimos la constitución de las normas como proceso general que ofrece perspectiva de acción a los sujetos actuantes en la escena del aula matemática. Ellas operan directamente sobre su accionar y sobre el juego de expectativas que danzan en la interacción del aula matemática a propósito de —en nuestro caso— el análisis de relaciones numéricas de divisibilidad.

Otros investigadores incorporan desde diferentes marcos teóricos el proceso interactivo comunicacional como objeto constitutivo de relaciones generales. Trognon (1999) —a quien recupera Sadovsky (2005)— considera como objeto de análisis secuencias de conversaciones en tanto acontecimientos de orden social y cognitivo, dos aspectos que no son independientes sino que se van determinando y condicionando mutuamente. La interpretación de este rasgo de lo comunicacional queda plasmada por Trognon (1999) bajo el término *sobredeterminación* de las conversaciones. Asimismo, introduce el concepto de *localidad* como otra propiedad de las conversaciones, que permitiría dar cuenta de que las cuestiones que emergen de una conversación surgen como una composición gradual más que como un plan previamente establecido. Por último, la propiedad de *procesualidad*, sintetizaría el hecho de que el propio desarrollo de la secuencia conversacional es constitutivo de los elementos que la componen.

Nuestros análisis de fenómenos del aula en términos de procesos generales son interpretaciones que producimos a partir de las secuencias de diálogo —en el plano colectivo— entre alumnos y docente. Las nociones de localidad, sobredeterminación y procesualidad son contributivas al análisis de la trama dialógica para permitir rastrear allí el proceso constitutivo de lo general en tanto emergente de la propia trama en un marco de intencionalidad didáctica.

2.3. Cierre del capítulo

Los avances teóricos que presentamos en este capítulo se alojan en diferentes planos de discusión con respecto a particularidades de los procesos de generalización en la matemática escolar. Nos ubican en un análisis de la variedad de interacciones que favorecen los procesos de contacto con lo general y —en este sentido— amplían nuestros elementos de análisis para los casos de estudio que reconocimos. Por un lado, la variedad de tipos de actividad que los autores reconocen da lugar a diferentes interacciones de los alumnos con esas actividades y permiten abordar caracterizaciones diferenciadas de la generalización en álgebra y en construcciones de diverso orden en cuanto al hacer matemático. Por otro lado, los análisis teóricos identifican instancias diferentes en la interacción en el plano social que incluyen el rol de un docente instalado en una actitud de fomentar acercamientos de sus alumnos con los procesos de generalización matemática. Estas diferencias en el plano social fomentan avances en el hacer algebraico como, por ejemplo, el tratamiento sintáctico de las expresiones. Como vemos, se imbrican aquí cuestiones de distinto orden que son necesarias para el desarrollo autónomo del alumno en el trabajo algebraico.

Capítulo 3. Marco teórico

Recuperaremos en este capítulo aquellas nociones teóricas que configuran nuestra forma de percibir y analizar los hechos de las clases que observamos. Un juego dialéctico entre realidad y teoría da lugar a un proceso que permite sostener la investigación didáctica a partir de la continua reformulación y construcción de nuevos sentidos en cada una de ellas. Así, la realidad cambia a la luz de la teoría y la teoría adquiere espesor semántico a la luz de las interpretaciones que el investigador elabora de la realidad.

Organizamos este capítulo alrededor de dos grandes teorías de la Didáctica de la Matemática: la Teoría de Situaciones (apartado 3.1.) y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (apartado 3.2.). Estas teorías aportaron los elementos más sustanciales para objetivar e interpretar nuestras tramas de producción.

3.1. La Teoría de Situaciones en nuestro trabajo

Empezaremos esta sección mencionando ciertos elementos teóricos de la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986, 2007), que estuvieron presentes en mi formación como profesora, elementos que modelaron mi manera de ver y pensar la clase de matemática como un entramado de acciones que tiene lugar a partir de la producción matemática de los diferentes actores del aula. Elementos que —compartidos con mis directoras— configuraron también la conceptualización de la interacción como componente esencial del sostén y desarrollo de los momentos de producción que constituyen la clase de matemática.

De este modo, los ejes de esta primera parte son los elementos de la teoría que enmarcan nuestra concepción productora e interaccional del aula de matemática y que condicionaron nuestras elecciones específicas de investigación —en particular, la elección del docente— en este trabajo de tesis.

Mencionamos ya que la profesora que nos abrió su aula, quien diseñó y sostuvo el espacio de intercambio y producción que observamos, fue a su vez compañera de la tesista durante la formación en el profesorado de matemática. En tal sentido, compartían —tesista y profesora— aquellos aspectos reguladores de la clase que se enmarcan en esta teoría. Asimismo compartió, en oportunidades anteriores, —con tesista y directoras— equipos de trabajo docente y de análisis de los espacios de producción, de interacción y de los fenómenos soportados por esos espacios.

La Teoría de Situaciones provee un modelo para pensar la clase de matemática como proceso de producción, transformación y validación de los conocimientos matemáticos bajo el trasfondo de concebir a la disciplina matemática como un cuerpo organizado de saberes emergentes de la producción cultural. Brousseau (2007) describe la enseñanza de la matemática como un sistema de interacciones entre los diferentes agentes y objetos que operan mediante tensiones en la clase, afirmando que en este juego de tensiones la intención didáctica resulta fundamental para inducir en el alumno los conocimientos culturales que se desea que adquiera. La teoría modeliza la enseñanza a partir de dos tipos de interacciones básicas: la interacción entre un sujeto con un "medio" —que se opone a las acciones de este obligándolo a adaptarse—; y la interacción entre docente y alumno a propósito de la interacción del alumno con el medio.

> El alumno se adapta a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p.30)

Esa posición de adaptación esperada en el alumno bajo el objetivo de dar lugar a aprendizaje supone una intención didáctica que genere condiciones para tal adaptabilidad. El docente elegirá problemas que el alumno pueda aceptar y pasibles de ser intervenidos por la acción, reflexión, formulación y evolución del alumno mediante las relaciones que le están disponibles y de manera independiente de la explicitación docente de las nuevas relaciones que caracterizan el conocimiento al que se quiere dar lugar. La evolución de las relaciones matemáticas del alumno hacia la constitución de nuevo conocimiento se sostiene en la confianza que el alumno deposita sobre el docente, confianza que hace posible un tipo de interacción del alumno con el medio independiente de la acción directa del docente, interacción que modeliza la teoría mediante el término de *situación adidáctica*.

> (…) El alumno sabe que el problema fue elegido para hacer que adquiera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presentes razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, porque no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada *situación adidáctica*. (p.31)

De acuerdo a Brousseau (1986, 2007), la noción de adidacticidad refiere a un compromiso intelectual del alumno con un medio y no alude a una posición estática del docente frente a su accionar sino a la no explicitación de los conocimientos que la situación espera movilizar en el alumno a propósito de su interacción con el medio. El compromiso al que referimos es para la teoría responsabilidad tanto del alumno como del docente.

Para que sea posible una situación adidáctica es necesario por un lado que el alumno pueda elegir entre varias estrategias entendiendo que al elegir rechaza otras opciones; y por otro, que la situación que se le presenta al alumno tenga una finalidad que no requiera —para entenderla— del conocimiento al que se quiere dar lugar. La primera cuestión tiene que ver con la hipótesis constructivista de la teoría, por la cual un juego de anticipaciones y retroacciones provocaría la modificación y evolución de los esquemas de conocimiento de los alumnos. La existencia de una finalidad clara permite que el sujeto analice la distancia entre las decisiones asumidas y la finalidad buscada. Análisis que habilita una evaluación del alumno de las decisiones abordadas, su descarte o su aceptación, acciones que son eje de las regulaciones cognitivas del alumno con el medio.

Para la teoría son modelizados aquellos conocimientos para los cuales pueda considerarse al menos una situación que permita caracterizarlos con diferencias respecto de los otros. Asimismo, Brousseau (2007) conjetura que "…el conjunto de situaciones que caracterizan una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas *fundamentales*, a través de un juego de variantes, variables y cotas sobre esas variables." (p.32)

Este supuesto ha sido discutido ampliamente en términos de limitación al reconocer la existencia de ciertos conocimientos para los cuales las relaciones disponibles en el alumno no parecen dar respuesta a una finalidad que permita hacer presente una nueva relación característica del conocimiento a enseñar. Valoramos de esta teoría el posicionamiento que asume respecto de las posibilidades productoras de un sujeto puesto en situación de enfrentarse con una porción de la realidad a la que tiene que transformar o conocer. Sostenemos esto a pesar de interpretaciones que traslucen lecturas más rígidas y acusan a la teoría de "constructivismo excesivo" enfatizando la existencia de algunos conocimientos que quedarían fuera de esta modelización.

La concepción productora de los diferentes agentes implicados en las tensiones del aula da espesor a la teoría, que asume la posibilidad de que todo sujeto, al intervenir sobre un medio, está en condiciones de producir conocimiento matemático a partir de sus acciones en el marco de la intencionalidad didáctica. Una concepción respecto de las posibilidades de un otro, una posición asumida en el plano relacional.

El docente que comparte los supuestos de esta teoría, en el momento de elegir los problemas para su clase, asume una posición respecto de las posibilidades de producción matemática del alumno.

Es en este sentido que reiteramos la importancia que en nuestra investigación tuvo la elección de un docente formado en —y convencido de— una práctica enmarcada en las concepciones acerca de la enseñanza que derraman de esta teoría. Es decir, un docente que traza su práctica con la lumbre de una lectura profunda de la teoría y de sus supuestos, pero que a su vez no permanece ceñido a ella ciegamente, en tanto modelo aplicable. Asume él, en cambio, la teoría como conjunto de posicionamientos con respecto a la enseñanza, a la producción y a las interacciones en el aula.

Anteriormente nos referimos a aquellos conocimientos que son modelizados por la teoría; mencionamos ahora que Brousseau (2007) distingue lo que resulta de la interacción entre el sujeto y un medio resistente, que denomina *conocimiento*, de lo que considera producto cultural de una institución, denominado por él como *saber matemático*.

El sujeto produce conocimientos al interactuar con un medio que le ofrece resistencia y dichos conocimientos se refieren a un saber matemático. Ellos se gestan en un contexto particular y están en referencia con el saber disciplinar, que supone su descontextualización, no resulta una construcción natural que pueda efectuar el alumno en soledad. Esa conversión de los conocimientos en saberes requiere de un trabajo en interacción con el colectivo y con la indispensable gestión del docente. Ese trabajo necesita de la reflexión sobre las acciones tomadas en diferentes contextos específicos que se enmarcan en el conocimiento al que dieron lugar, en la identificación del dominio de validez del conocimiento desplegado, en la extensión de sus aplicaciones posibles, en la estructuración de ese conocimiento dentro del campo de otros conocimientos y en las relaciones que establece con ellos.

La noción de situación adidáctica a la que referimos oportunamente se imbrica con lo que la teoría instala como uno de los roles centrales del docente: la devolución de la responsabilidad al alumno de comprometerse con la tarea que se le propone. A su vez, la conversión de los conocimientos en saberes que indicamos en el párrafo anterior comporta otro rol del docente central para la teoría que es el de institucionalización. Sadovsky (2005) recupera en su libro la mirada de otros investigadores que hacen una lectura de estos dos roles como procesos dinámicos que se sostienen más allá de un momento puntual. Estos investigadores sostienen que la devolución es un proceso de negociación que el docente establece con el alumno para lograr su compromiso durante toda la situación adidáctica. Por ello, las intervenciones docentes durante la situación adidáctica a propósito de conocimientos disponibles en el alumno, que se espera que active a fin de alcanzar el nuevo conocimiento, son consideradas instancias de devolución del docente. Ellas facilitarían una entrada en compromiso con la situación. Marie Jean Perrin (1993) se permite pensar este proceso también a posteriori generado como un retorno reflexivo sobre las acciones desplegadas con los problemas para aquellos alumnos que no pudieron comprometerse y funcionaron de modo no matemático. El acto de institucionalizar supone un docente que trabaja para poner en relación los conocimientos desplegados por los alumnos en las situaciones/problemas con los saberes matemáticos. Sadovsky advierte que estos dos roles teóricos identificados por Brousseau no describen cuáles son los gestos que el docente puede hacer para favorecer el compromiso del alumno o el proceso de transformación de conocimientos en saberes. M. J. Perrin —señala Sadovsky— instala la idea de un proyecto de aprendizaje que le permita al alumno descontextualizar los conocimientos en vías de estructurarlos en un cuerpo de saberes. El rol del docente como colaborador en este proceso de elaboración del alumno es indispensable y es allí donde, para esta autora, devolución e institucionalización debieran pensarse como procesos contemporáneos e imbricados.

3.1.1. Medio y contrato

Nos interesa profundizar en dos nociones de la teoría, el medio y el contrato didáctico, ya que ambas se nos han hecho presentes en primer plano como herramientas de observación, identificación y análisis de los hechos del aula que configuramos como fenómenos de estudio.

La teoría postula la necesidad de un medio, pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica, que ofrezca resistencias y se oponga al alumno, con la tensión propia de la situación adidáctica que antes señalamos; la noción de contrato didáctico operaría como regulador de la interacción docente-alumno en el marco de la situación didáctica.

Recuperamos la noción de medio como herramienta que nos permite recortar y estudiar el conjunto de decisiones y regulaciones elegidas por la docente de nuestra investigación. Los conocimientos de los alumnos, constituidos a partir de prácticas aritméticas, regulan sus acciones sobre un sistema-situación propuesto por la docente y como resultado de estas acciones se producirá una reformulación y reorganización de los mismos en términos de nuevas relaciones que tienen en el horizonte la adquisición de una práctica algebraica.

Sadovsky (2005) señala un sentido dinámico de la noción de medio, incorporando las interacciones que se producen a partir de la resolución de una tarea inicial.

> El concepto de medio incluye entonces tanto una problemática matemática inicial que el sujeto enfrenta, como un conjunto de relaciones —esencialmente matemáticas también— que se van modificando en la medida que el sujeto produce conocimiento en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia la realidad con la que interactúa. (p.20).

Para nuestra docente, el sistema de retroacciones que impone a las situaciones que propone está ampliamente imbuido del aporte de la interacción social, tanto con intervenciones de los alumnos entre ellos, como de ella misma como moderadora del intercambio. Los alumnos desencadenan procesos de adaptación cognitiva —que calificamos del tipo de las que Brousseau atribuye a la interacción con un medio— por adaptarse a una interpretación de las intenciones de sus compañeros o del propio docente. En tal sentido, nos parece interesante retomar la discusión que Sadovsky (2004) desarrolla en su tesis, frente a la oposición dicotómica usual entre adaptarse a un medio y adaptarse al deseo del docente (lo que en la teoría se modela con la noción de contrato didáctico) o a las intervenciones de un compañero.

Esta autora recupera las intervenciones del docente como generadoras de posicionamientos adidácticos en los alumnos, en el sentido de generar adaptaciones cognitivas favoreciendo la evolución de las relaciones previas hacia relaciones sólidas con el nuevo conocimiento a enseñar:

> Quisiéramos retomar la oposición que hace Brousseau entre adaptarse al medio y adaptarse al deseo del maestro. Pensamos que la misma podría dar lugar a una visión según la cual se considerara como un conocimiento degradado aquello que el alumno elabora al tratar de interpretar los gestos del docente en términos de *"lo que se puede o no se puede", "lo que es o lo que no es"*, con relación a cierta cuestión matemática. Como si la interacción adidáctica garantizara una construcción genuinamente matemática y aquello que el alumno aprende interpretando lo que el maestro espera de él, tuviera un estatuto menor (…) Sin embargo, no compartimos ese modo de ver las cosas que divide aguas atribuyendo "lo genuinamente matemático" a lo a didáctico y lo "externo al saber" a lo que es de naturaleza didáctica. En primer lugar, porque como lo expresa Brousseau, el alumno no podría aprender si no se jugara la intencionalidad del docente en la relación didáctica. Por otro lado, los conocimientos que el alumno necesita sobrepasan completamente lo que pudo haber construido como producto de sus interacciones a-didácticas. Sin esa relación contractual que lo une al docente a propósito de los objetos matemáticos, la escena didáctica —que eventualmente pusiera en funcionamiento una interacción a didáctica— ni siquiera podría arrancar.

> Al analizar los registros de las clases de nuestro trabajo experimental, hemos encontrado que algunos alumnos producen cambios significativos en sus conocimientos, a partir de interpretar no tanto el contenido de una intervención docente, sino más bien la intencionalidad de la misma. (pp.22-23)

Respecto de las retroacciones de los pares, Sadovsky (2004) explicita:

> (…) los alumnos trabajan generalmente en pequeños grupos. Los aportes de unos pueden modificar el sistema de decisiones de otros. (…) Dado que el planteo de un alumno hacia la producción de otro no tiene en principio la atribución de autoridad que tiene el docente, y dado que tampoco este alumno que ha hecho alguna objeción puede tener respuestas matemáticas (en el sentido en que antes definimos las respuestas matemáticas del medio[15]) porque está elaborando junto con los otros compañeros algún conocimiento en común, nos parece que las interpretaciones que hace quien recibe las objeciones, son de tal naturaleza que no pueden asimilarse ni a las retroacciones del medio ni a las intervenciones del docente. (p.25)

Sadovsky enfatiza que por lo general las intervenciones de pares tienden a la colaboración mutua con variedad de estrategias. Frente al bloqueo de un compañero, alumnos que hayan avanzado en sus primeras aproximaciones pueden ayudar a comprender la tarea de una manera cercana a como lo hace el docente durante el proceso de devolución. También puede un alumno privilegiar el dar la solución a otro sin formular razones o bien aproximar elementos para que su compañero comprenda más profundamente. Cuando ninguno de los intervinientes está bloqueado, las estrategias responden a veces a implícitos diferentes sobre el problema, otras veces son contradictorias o colaboran en la construcción de una de ellas.

También el posicionamiento de un alumno frente a las respuestas de un compañero es variable, desde responder a su autoridad o desestimarla por no valorar el peso de su opinión por sus supuestos sobre el desempeño matemático del compañero. Como señala Sadovsky (2005), estas intervenciones parecen tener mayores puntos de contacto con la noción teórica de contrato didáctico que con adaptaciones cognitivas ligadas a las retroacciones de un medio.

Nuestros análisis de episodios colectivos han interpretado posicionamientos nuevos en los alumnos —y en el docente— que se generan a partir de interactuar con la intervención del docente o de un compañero. Los alumnos modifican sus decisiones o las adecuan en función de una colaboración comprometida en la producción colectiva de conocimiento matemático. En

[15] Sadovsky refiere a las respuestas matemáticas del medio (retroacciones) como las interpretaciones que hace un alumno del resultado de sus acciones.

algunos casos, la intervención disparadora es más firmemente propuesta por el docente; en otros, sin embargo, no hay una única intervención clara y efectista, sino más bien un conjunto de interpretaciones, e intervenciones sobre ellas, en función de la comprensión —y confección— de un producto matemático aún difuso. En el plano comunicativo, quien asume el rol de devolver y dar lugar a un asunto matemático susceptible de ser estudiado no es necesariamente el docente, puede bien ser un alumno o varios de ellos que —entre intervenciones más o menos precisas— contribuyen a delinear el asunto a tratar.

Estudiar y comprender la interacción que tiene lugar entre los alumnos y nuestra profesora nos condujo a la noción teórica de contrato didáctico, modelo de la Teoría de Situaciones que permite describir y explicar la relación didáctica que se establece en el juego de expectativas que desarrollan los integrantes que se comprometen en dicha relación. Este contrato avanza sobre las rupturas y no puede hacerlo sobre sus explicitaciones. Es esa “idea” implícita que cada uno de los integrantes de la relación didáctica elabora sobre el otro, lo que da lugar a la interpretación y a nuevas acciones en términos de intervención.

> (…) el profesor no puede decir explícitamente de antemano lo que el alumno tendrá que hacer frente a un problema, sin quitarle, al hacerlo, la posibilidad de manifestar o adquirir el conocimiento correspondiente. El profesor no puede comprometerse a “hacer comprender” un conocimiento y menos aún a hacer que se produzca: nadie sabe cómo “se hacen” matemáticas nuevas y menos aún cómo se puede “hacer hacerlas” de manera certera. De modo que la relación didáctica no puede dar lugar formalmente a un contrato, las cláusulas no pueden escribirse, las sanciones en caso de ruptura ser previstas, etc. Sin embargo la ilusión de que haya un contrato es indispensable para que la relación se dé y, eventualmente, tenga éxito. Cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro piensa…y esta idea crea las posibilidades de intervención, de *devolución* de la parte adidáctica de las situaciones y de la *institucionalización*. (Brousseau, 2007, p.70)

Si bien las intervenciones explicitadas por Brousseau son acciones didácticas que en la teoría definen lo esencial del trabajo del docente, nos interesa considerar la extensión de dicha acción docente a los alumnos. Otros investigadores han profundizado al respecto, por ejemplo Mercier (1998) propone una percepción de la clase como ámbito de producción cooperativa, identificando momentos de funcionamiento adidáctico de los alumnos en instancias de la relación didáctica. Asimismo Sadovsky (2004, 2005) y Sadovsky y Sessa (2005) incorporan la interacción con los otros como instancias de producción que dan lugar a posicionamientos adidácticos de los alumnos. ¿Por qué nos interesa ello? Fundamentalmente porque nuestros episodios han relevado situaciones de interacción en los cuales la devolución de una situación nueva —gestada en la elaboración colectiva— no es solamente ejercida por el docente sino por uno o varios alumnos. Estamos pensando en aquellas situaciones en las que la precisión de una elaboración emergente —en términos de situación nueva para el aula— instala a los integrantes de la relación didáctica en actitudes compartidas de definición, recorte y devolución de la tarea que está teniendo lugar.

Nos interesa destacar que Brousseau (2007) advierte en su libro (pp.70-71) que la modificación intencional del "receptor" no es una comunicación o una argumentación, es acción sobre el sistema enseñado. Señala él que el docente organiza esta acción regulado por ciertas condiciones que sintéticamente parafraseamos así:

- El saber comunicado no es una invención personal o arbitraria del profesor sino una producción con referencia a una institución a la que dicho saber corresponde.

- Dicho saber no es un registro de informaciones sino que corresponde a un campo, a un sistema de relaciones constituido en la superación de las respuestas iniciales del alumno que resultaban insuficientes para atender a las retroacciones que oprimía el medio.

- La acción mencionada para modificar al "receptor" debe desaparecer cuando el alumno puede tomar sus decisiones con autonomía.

Lo expuesto nos permite recuperar que la noción teórica de contrato condensa la intencionalidad didáctica que el profesor imprime, a la manera de acciones perceptibles por un observador externo, sobre el sistema de decisiones del alumno. Esta intención del docente busca recuperar los conocimientos desplegados por los alumnos frente a un sistema de restricciones también propuesto por el docente para hacer intervenir un saber cultural con referencia a una institución. Intención que requiere a su vez del despliegue de un sistema de tensiones que solo puede tener lugar si el alumno actúa comprometido con la tarea (cualquiera sea ella la propuesta).

Como fortaleza propia de la noción teórica de contrato concebimos el hecho de que comporte en sí la entidad en sus rupturas y en sus zonas inciertas. Su grado de no explícito es lo que finalmente posibilita el avance hacia el aprendizaje. Como herramienta teórica nos habilita a interpretar y analizar procesos de elaboración emergentes en donde el juego entre interpretaciones e intervenciones regula y da origen a la propia elaboración. Brousseau (2007) señala también, en las páginas 72 y 73, algunas de las zonas en donde la noción de contrato se vuelve paradojal, mencionaremos aquí algunas de ellas:

- Las cláusulas que alojan el saber a enseñar no podrían ser acordadas o formuladas entre los protagonistas de la situación didáctica. Las relaciones a construir relevantes[16] no podrían ser siquiera percibidas por el sujeto de aprendizaje —antes de pasar por las restricciones que impone la propia situación que aún no ha tenido lugar— como para ser objetivadas por él y poder participar de su negociación.

El alumno debe aceptar ignorar el proceso que hará y la propia forma en que lo transitará. La exigencia por su parte de claridad en lo que el docente quiere que haga para modificar viejos conocimientos y construir nuevos llevaría al docente a renunciar tanto a que el alumno los produzca como a su concepción de generar enseñanza. Al alumno lo llevaría a poner en peligro la propia situación de enseñanza y a dar lugar a no generar aprendizaje.

El contrato didáctico resulta un falso contrato que tiende a ser incumplido en la medida en que se lo vuelve insostenible. Cuando las expectativas cambian y los protagonistas actúan en función de ellas se quiebra la sincronía para dar lugar al espacio de construcción. Construcción que es en sí misma solamente una posibilidad, si el profesor tuviera certezas de que los alumnos no atravesarán situaciones de conflicto y contradicción, la propia actividad carecería de espesor didáctico, y docente y alumno renunciarían a sus objetivos de enseñar y aprender.

Recuperamos una frase de Brousseau (2007) que fortalece nuestra concepción de que producir supone gestionar equilibrios locales sobre un marco más amplio de incertidumbre:

> (…)Estas paradojas no son contradicciones formales. Sólo marcan el hecho de que la enseñanza y el aprendizaje se realizan a través de procesos que nunca se encuentran en equilibrio estable. Deben ser entendidas como una sucesión de "correcciones" locales que no pueden justificarse de modo aislado. (p.73)

3.1.2. La conceptualización de la acción docente desde el marco de la Teoría de Situaciones

Sensevy (2007) hace un recorrido por diferentes categorías utilizadas frecuentemente en la Didáctica de la Matemáticas a los efectos de contribuir a la producción de una teoría de la acción didáctica. En este recorrido, recontextualiza y reinterpreta categorías de la Teoría de

---

[16] Desde la concepción de aprendizaje de matemática presente en la filosofía de esta teoría.

Situaciones que hemos mencionado en párrafos precedentes y que ahora matizamos con su mirada. Retoma —asimismo— otras muchas nociones de la Didáctica Matemática, de ellas recuperamos aquí las que evidenciamos como provechosas para dotar de espesor nuestra comprensión y estudio de los fenómenos.

Desde nuestro interés por relevar emergentes colectivos de los procesos de construcción en torno a lo general, nos resulta relevante e iluminador su interpretación de la acción didáctica inmersa en un entramado comunicacional que supone la cooperación propia de la comunicación. Este autor considera que una manera productiva es contemplar las interacciones didácticas en términos de transacciones.

Sensevy en el mismo texto recupera a Vernant (1997, 2004), quien enfatiza que la dimensión interaccional y transaccional del diálogo permite caracterizarlo en dos sentidos: por un lado, como interacción lingüística en el marco de un desarrollo imprevisible resultante de una cooperación conjunta entre al menos dos interlocutores que movilizan sus modelos propios de diálogo; por otro lado, como interacción que no tiene una finalidad per se sino que es tributaria de finalidades transaccionales, intersubjectivas e intramundanas, se habla para operar sobre el mundo con la colaboración de otro o en enfrentamiento con él. Resaltamos la noción de transacción que el autor pone en escena; ella alumbra en nosotros sentidos nuevos a la conceptualización de la interacción del aula y a la propia relación que opera en términos de contrato didáctico antes señalado.

Sensevy (2007) logra hacer explícito el valor herramental de las transacciones —estructuradas por los saberes inmersos en la relación didáctica— que permitirían la lectura, interpretación y estudio de los roles de los diferentes actores implicados en la acción didáctica.

Su interpretación de la relación didáctica pone en escena el carácter conjunto de la acción bajo el término que acuña como *orgánicamente cooperativa*. Este sentido sistémico, cooperativo, complementario del acto constructivo de la acción —en torno a la transacción de un saber— nos brinda elementos teóricos para interpretar lo que nosotros hemos denominado como emergentes colectivos de producción de lo general. Las construcciones que en nuestros episodios tienen lugar, pueden serlo gracias a las tensiones que operan en la complementariedad de la relación dialéctica del espacio colectivo.

Nos parece interesante recobrar la noción de contrato didáctico de la Teoría de Situaciones en tanto modelo de la tensión propia de la interacción entre el docente y los alumnos, tensión que tiene lugar a partir del sistema de expectativas de los protagonistas que, en sus rupturas, hace avanzar la acción didáctica. En este sentido, Sensevy (2007) nos permite revisar la noción de transacción como objeto que mecaniza el despliegue de la relación "contractual" y objetivar cada una de las diferentes construcciones que interpretamos como emergentes del plano interaccional —cooperativo, sistémico, tensado— en los registros de aula.

Para este autor la noción contractual del proceso didáctico permitiría, por un lado, la comprensión de la manera en que las transacciones didácticas se sustentan en el sistema de expectativas recíprocas entre maestro y alumno. Por otro lado, otorgaría un marco de estudio genético de la constitución de las normas en la clase y de los procesos en que ellas son redefinidas o superadas en la dialéctica que entrama lo viejo y lo nuevo. Su lectura nos ayuda a reconocer en los registros que analizamos el sistema de normas que comporta el contrato, algunas perdurables y otras específicas del saber, que son redefinidas a partir de los progresos del saber que tienen lugar.

Enfatizar el carácter comunicacional y relacional del contrato en términos de transacciones nos faculta para pensar el modelo de expectativas mutuas bajo un aspecto colaboracionista de producción en simetría. Parece preciso aclarar que nuestra interpretación del carácter simétrico no se gesta en el supuesto de lugares iguales; por el contrario, admitimos la posibilidad de relación simétrica como la que se sostiene a partir de la construcción de lugares diferenciados en una reciprocidad sostenida por la explicitación de razones. Esta interpretación nos habilita a recortar construcciones en el aula que se rigen como relaciones transaccionales en una simetría de explicitación.

Sensevy (2007) recupera también de la Didáctica Francesa tres categorías que colaboran para el estudio del proceso de construcción conjunta entre el docente y los alumnos. Ellas son: *mesogénesis, cronogésis y topogénesis*. La *mesogénesis* refiere a las redefiniciones continuas —y necesarias— del contenido de la transacción didáctica en la cooperación entre alumnos y docente que tiene lugar. Es esa redefinición continua del contenido la que permite el avance de la transacción didáctica —en un marco de cooperación mutua y sostenida— en un contexto institucional. En la transacción didáctica, el contenido se constituye y reelabora de manera continua y ello preserva a la acción didáctica de su fracaso. Esta categoría —*mesogénesis*— contribuye a recortar, describir y analizar el proceso de reformulación, conjunto y continuo, del contenido.

La *cronogénesis* comporta el hecho de que el saber está dispuesto en el eje tiempo. Toda enseñanza se organiza en una progresión del proceso que estructura el saber, progresión que se sostiene en la redefinición y modificación del contenido que modeliza la *mesogénesis* bajo el supuesto de concebir el proceso de elaboración enmarcado en un eje temporal. En este sentido, las dos categorías son complementarias: la *mesogénesis* permite objetivar el proceso de reconfiguración del medio —que impone la introducción del eje tiempo— e identifica el contenido epistémico preciso de la transacción didáctica; la *cronogénesis*, en cambio, permite concentrar la mirada en la introducción de lo nuevo en el marco de lo que había e identificar la naturaleza y razones del cambio, en un determinado momento, de un contenido epistémico a otro.

La *topogénesis* permite describir el modo en que los diferentes actores comparten las responsabilidades en el marco de la transacción didáctica y recortar la fuerza de las transacciones en términos de su sustento a la actividad. Es decir, esta noción permitiría explicar la manera en que las diferentes acciones mesogenéticas o cronogenéticas son compartidas por los diferentes actores en el desarrollo de la transacción.

Estas tres categorías consideradas simultáneamente amplían y otorgan densidad a las categorías de medio y contrato que resaltamos anteriormente. Así, el contrato didáctico puede analizarse desde sus propias redefiniciones y a partir de las modificaciones en la topogénesis que se implementen, la categoría de mesogénesis habilitaría el estudio del contrato desde los modos en que el profesor regula los aprendizajes y la cronogénesis daría cuenta de las razones de los cambios mesogenéticos desde una perspectiva de progresión. Esta mirada simultánea de las tres categorías fortalecería de este modo el estudio y análisis de los procesos de interacción y construcción colectiva desde el plano transaccional que Sensevy (2007) introduce.

> Notemos que esta casi - simultaneidad de los cuestionamientos desemboca lógicamente en la voluntad de considerar las interacciones didácticas precisamente como transacciones. De esta manera, al hacer un análisis epistémico, la mesogénesis de los contenidos implicados y de las disposiciones y concepciones actualizadas, nos lleva a interrogarnos, no únicamente sobre lo que los alumnos producen *in situ*, sino también sobre las disposiciones y las concepciones del profesor que son necesarias para tales producciones.
>
> Para lograr lo anterior es indispensable contar con los medios para estudiar, superando el necesario análisis *in situ*, lo que no se evidencia. (p.22)

Según este autor la acción *in situ* requiere tener en cuenta lo que sucede en la clase pero avanzar más allá de ella. Los actores del aula se organizan y estructuran en función de un determinado conjunto de ideas —implícitas y explícitas— con relación al saber, al aprendizaje y a la enseñanza. Todos los protagonistas del momento didáctico actúan como participantes en múltiples sistemas que comportan en ellos configuraciones pasibles de ser (re)activadas en la clase con mayor o menor coherencia.

> El propósito de intentar comprender mejor el trabajo del profesor y de los alumnos implica estar en condiciones de integrar en la descripción de las acciones numerosos determinantes *sin eliminar ninguno a priori*. (…) Lo importante no es "considerar todo"; lo que pretendemos es superar los límites de orden disciplinario o metodológico que nos llevarían mecánicamente a ignorar de manera casi consciente una explicación determinada, que podría resultar pertinente, bajo el pretexto de que no entra en el sistema concebido *a priori*. Desde el momento en que se considera la complejidad de las acciones en situación de enseñanza y aprendizaje como nuestro objeto de estudio, una perspectiva de este tipo parece indispensable, dado que la acción humana está compuesta de una gran diversidad de elementos y recurre a diferentes fuentes que a menudo son muy heterogéneas. Esta heterogeneidad no debe, sin embargo, provocar la renuncia del investigador (lo inefable de la práctica, inexplicable *in fine*) ni a una descripción plana, consecuencia de una carencia en la jerarquización de los determinantes de la acción. Es necesario considerar la apertura y la variedad de los determinantes, y la ponderación de cada situación en el sistema. (Sensevy, 2007, p.23)

3.2. Aportes de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Considerar el estudio de la complejidad que encierra la necesaria ductilidad de las representaciones semióticas de la que deben disponer los participantes del intercambio en el aula nos invita a tener en cuenta la *Teoría de los Registros de Representación Semiótica* que Duval (1995) elabora, de una manera que precisaremos a continuación. Esta construcción teórica —que recupera nociones teóricas de Frege (1971)— aborda la complejidad de las representaciones semióticas no solo dentro de las escrituras simbólicas, sino también de las que se realizan en lenguaje natural, las figuras geométricas, los esquemas, los gráficos, etc.

Según Duval (2006a) muchos estudiantes perciben una distancia entre las formas del pensamiento matemático y las formas de pensar fuera de las matemáticas. A la vez, muchas actividades propuestas para las aulas no necesariamente requieren que los estudiantes se apropien de formas específicas de la actividad matemática, como por ejemplo el cambio de registro de representación. La producción matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación” y los estudiantes debieran poder reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos, saber operar en cada uno de ellos y, finalmente, saber convertir de un contexto a otro, si así lo requiere la tarea. Esta es la principal tesis del autor, quien asegura que no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación y, a su vez, que el avance en el conocimiento científico se acompaña siempre de la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos. La formación de pensamiento científico es inseparable del desarrollo de simbolismos particulares para representar objetos y sus relaciones. Duval (1995) señala que representaciones mentales y semióticas no pueden oponerse como dominios diferentes. El autor recupera a Vigotsky (1985) y Piaget (1968) para argumentar que el desarrollo de representaciones mentales se efectúa como interiorización de representaciones semióticas, y considera otros autores como Bresson (1987) para sostener que la pluralidad de sistemas semióticos permite diversificar las representaciones de un mismo objeto aumentando las capacidades cognitivas de los sujetos y con ello, sus representaciones mentales.

En síntesis, el autor sostiene que hay una implicación recíproca entre representaciones mentales y semióticas, y defiende la hipótesis de que la aprehensión conceptual de los objetos no puede darse sin la aprehensión de representaciones semióticas. En sus palabras, no hay noesis sin semiosis.

Según Duval (1995), la especificidad de las representaciones semióticas reside en que son relativas a un sistema particular de signos y que representaciones "equivalentes" en sistemas diferentes pueden tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. Asumir la noción de representación semiótica presupone considerar sistemas semióticos diferentes y la operación cognitiva de conversión de representaciones semióticas de un sistema a otro. El autor establece allí dos críticas al uso tradicional y a las investigaciones sobre la noción de representación (pp.18-19):

- La primera referida a la afirmación que establece que las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación olvidando su función primordial de tratamiento de información y de objetivación o toma de consciencia.

- La segunda a propósito de aquellos que consideran las representaciones semióticas como soporte de las representaciones mentales y estiman que se pasa directamente de la forma que representa al contenido representado. Esta concepción separa al contenido de su forma semiótica y el cambio de forma sería una operación secundaria que se da de hecho[17]. El autor

[17] "La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. Esta operación ha de ser descrita en primer lugar como un 'cambio de forma'". (Duval, 1995, p.17)

advierte que esta concepción que separa forma y contenido redundaría en considerar la operación de conversión como actividad neutra y de valor mínimo. Enfatiza que numerosas observaciones en el aprendizaje matemático han probado que cambiar la forma de la representación es para los alumnos una operación difícil y en ocasiones imposible. La comprensión del contenido para muchos alumnos queda limitada a la forma de representación utilizada. Esta consideración refuerza la hipótesis del autor sobre el papel de la semiosis en el funcionamiento del pensamiento y sobre las condiciones de diferenciación entre forma y contenido de las representaciones semióticas.

En ese mismo libro afirma que asumir la naturaleza semiótica de los contextos de representación usados en la actividad matemática implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran. Define a su vez tres tipos de actividades elementales de los registros de representación semiótica:

1. Constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado (Formulación).

2. Transformar las representaciones de acuerdo con las reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones dentro del mismo (Tratamiento).

3. Convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en representaciones en otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado (Conversión).

Duval (1995, 2006a) sostiene la tesis de que el punto fundamental en la actividad matemática no es solo la utilización necesaria de representaciones semióticas sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótica a otro registro.

> (1) Lo que importa es su propiedad de **transformación** porque *el procesamiento matemático* siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas. En matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo. Además, esta transformación **depende del sistema semiótico** de

---

"Toda representación tiene un *contenido* que explicita ciertas propiedades del objeto y no otras. La posibilidad de acceder al objeto —invariante de todas sus representaciones— reside en primer lugar en la potencia de los diferentes sistemas de representación para expresar las *diferentes* propiedades y características de un objeto. Esto es especialmente importante en el área de matemática, en la que el acceso a los objetos se realiza *exclusivamente* a través de las representaciones". (Panizza, 2015, p.70) representación dentro de las representaciones que se producen. En ese sentido no hay una "mediación semiótica" sino "mediaciones semióticas" bastante diferentes.

(2) La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), solo elijan uno según el propósito de la actividad. En otras palabras, la actividad matemática requiere una *coordinación interna*, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto. (Duval, 2006a, p.145)

Los casos de análisis que hemos recortado se centran fundamentalmente en intercambios alrededor de tratamientos sobre el registro numérico. Duval (2006b) advierte que el caso específico de los números plantea una heterogeneidad semiótica a partir de los diferentes sistemas utilizados y que esta heterogeneidad provoca una de las dificultades mayores del aprendizaje: pasar de un tipo de representación a otro. Aborda un análisis del caso numérico a partir de comparar varias representaciones, incluidas las concretas y las icónicas de unidades de marcas que se usan como pseudo objetos y que no funcionan más que como signos. El pasaje de un tipo de representación numérica a otro implica un salto semiótico no solo en el funcionamiento de la relación de referencia[18] sino sobre todo en el tipo de operación discursiva

[18] Las operaciones de función referencial:

- La operación de *designación pura*. Esta operación consiste en identificar un objeto sea mostrándolo con un gesto, sea asociándole una marca particular o una combinación particular de signos que provienen, por ejemplo, de un sistema de etiquetas. Toda apelación por atribución de un signo (letra o número) o de un nombre que le sea "propio" a un objeto, es una operación de designación pura. Utilizados por una operación de designación pura, los signos no tienen significación: se reducen a un empleo referencial. Esta operación es por sí misma suficiente para designar y para permitir identificar un objeto. Sin embargo, la introducción de una apelación requiere con frecuencia recurrir a otras operaciones de designación. Así, la doble apelación efectuada en "sea *I* la mitad del segmento *AB*…" a través de las letras I y AB no funcionaría sin una operación de categorización, marcada por el empleo de sustantivos, y sin una operación de determinación, marcada por el empleo de artículos. Por lo general, una operación de designación pura puede bastar para identificar el objeto del cual se habla en el contexto de una comunicación oral, pero no en el de una expresión escrita.

- La operación de *categorización simple*. Consiste en identificar un objeto con base en una de sus cualidades, es decir, designarlo indicando la clase "típica" a la cual pertenece. El empleo de sustantivos, a efectuar. El caso numérico que analiza el autor nos resulta de especial interés ya que ilumina nuestro análisis en esta tesis de un episodio de constitución de una regla general en el que se despliegan diferentes tipos de representación del número, entre ellas la escritura decimal y la descomposición multiplicativa.

Duval (2006b) considera el estudio de los sistemas de numeración en una cierta base como una buena ilustración de un sistema semiótico y aborda la comparación de dos tipos de representación de los números. Uno constituido a partir de marcas unitarias, que son independientes unas de otras y que no pueden ser agrupadas más que bajo la forma de una colección; el otro, un sistema semiótico en el cual las cifras son análogas a los términos de un léxico, dependientes unas de otras según dos principios de composición:

- Un *principio organizacional de posición* que permite combinar sistemáticamente las cifras entre ellas para escribir nuevos números. Cada cifra porta un valor de posición que corresponde a la elevación a una potencia.

- Un *principio de elección léxica* que corresponde a la base que determina el número de oposiciones alternativas para la elección de los signos numéricos.

A diferencia de las marcas unitarias constituidas por su sola traza material, la realidad significante de las cifras es determinado por su valor de oposición alternativa a las otras cifras y no por su traza material (en el sistema binario, el "1" no funciona como signo de un número más que por oposición al "0". Así, "1" no representa el número uno, como la marca unidad "I", más que por oposición a "0" y bajo la condición de que ocupe la primera posición desde la izquierda).

---

verbos o adjetivos calificativos proviene de una operación de categorización simple: "sea I *la mitad* del *segmento* AB…", "…se busca un *divisor* común al *numerador* y al *denominador*…". Sin embargo, esta operación nunca es suficiente por sí misma para permitir identificar un objeto. Debe estar combinada con otra operación, la de determinación.

- La operación de *determinación*. Consiste en precisar el campo de aplicación de la operación de categorización: "sea I *la* mitad del segmento…", «se busca *un* divisor común…". Los "presupuestos de existencia y de unicidad" provienen de esta operación de determinación en las lenguas naturales.

- La operación de *descripción*. Consiste en identificar un objeto cruzando los resultados de varias operaciones de categorización. Esta operación se efectúa en las lenguas naturales a través del empleo de construcciones genitivas o de proposiciones relativas: "sea I *el punto de intersección de las alturas de un triángulo*". (Duval, 1995, pp.98-99)

Al considerar el análisis de los intercambios y de las producciones en el plano colectivo, percibimos que los argumentos alrededor de la constitución de una regla —y su justificación— se imbricaban con la variedad de representaciones de los números involucrados: la representación numérica decimal y representaciones multiplicativas del número. Ello nos hizo tomar en cuenta dos cuestiones. Por un lado, la flexibilidad necesaria para poder participar del intercambio colectivo, en el que las representaciones del número juegan papeles distintos y la variedad de argumentaciones que se yuxtaponen —o podrían hacerlo— durante el intercambio a partir de ellas. Y por otro, las significaciones atribuidas a las acciones con las cifras, a partir de los algoritmos tradicionales de las operaciones, en los cuales ciertas acciones sobre las cifras permiten arribar a un resultado de una cuenta, y la posibilidad de que —en un sistema de conocimiento en construcción sobre el tratamiento algebraico— se pudiera dar lugar a la extensión del significado "actuar sobre cifras para llegar a un resultado" hacia un nuevo significado de "actuar sobre las cifras para conservar la equivalencia".

Por último, agregamos que Duval (1995) atribuye a las proposiciones un valor epistémico que distingue de su valor de verdad. El valor epistémico se define como el grado de fiabilidad que posee lo que es enunciado en la proposición. El interés de esta tesis por capturar la emergencia de la generalización en la trama social que tiene lugar nos inclina a considerar las tensiones que aporta a la interacción colectiva el grado de credibilidad sobre el contenido proposicional que los actores desarrollan. Profundizaremos sobre esta noción en la sección 5.2.1 a propósito del análisis concreto de uno de los casos de estudio.

En una perspectiva cercana a la de este autor contribuyen a nuestros análisis otras nociones que emanan de la psicología cognitiva, como ser el concepto de *tipicidad* y *prototipo* (Duval, 1995; Laguerre, 2007; Panizza, 2015; así como Rosch, 1976, 1978 y Klieber, 1990, citados por Panizza, 2015). Estos conceptos nos dan indicios para analizar las generalizaciones locales[19] en el plano colectivo e inferir mecanismos desplegados por los participantes del intercambio al percibir ciertos aspectos de las representaciones numéricas en danza como relevantes y desplegar luego una construcción general (sea ella precisa o no, y válida o no, desde el conocimiento matemático válido).

[19] *Locales* es aquí utilizado como el conjunto de significados compartidos por una o varias personas que participan del intercambio colectivo mayor; puede ser la intervención de un alumno, de un subgrupo de alumnos, incluso de un subgrupo que incluye al docente.

Según Laguerre (2007), las investigaciones de la psicología cognitiva definen la *tipicidad* como ciertos elementos que resultan mejores ejemplares que otros de su categoría de pertenencia. Este autor introduce el concepto vinculado a los esquemas cognitivos desplegados con relación a las figuras en geometría y especifica aspectos característicos de los mecanismos cognitivos que se desplegarían: “Los esquemas de reflexión, o esquemas cognitivos, serían sesgados significativamente por el hecho de que algunas propiedades no características de las figuras son privilegiadas sobre las demás, y de forma permanente, lo que engendraría errores o respuestas incompletas a algunas preguntas”.[20].(p.25)

Panizza (2015) recupera el concepto de *tipicidad* abordando el problema de la definición matemática en el ciclo superior de la escuela secundaria o en el primer año de la universidad considerando específicamente el rol del concepto de tipicidad en los procesos de reconocimiento y definición de los objetos matemáticos en el dominio numérico algebraico. Su aporte especial es el haber detectado que, en el dominio del álgebra, descripciones que para los alumnos adquieren carácter de definiciones, quedan ancladas en consideraciones de rasgos de representaciones particulares de los objetos analizados.

Si bien nuestros análisis posteriores no abordarán específicamente la consideración del concepto de tipicidad, tal constructo teórico nos ha resultado útil en la percepción de que ciertas regularidades sobre igualdades numéricas permiten a algunos de nuestros alumnos observados elaborar generalizaciones que las toman en cuenta.

Rosch y Klieber son representantes de la llamada teoría de los prototipos que incorpora formas de categorizar alejadas de las formas aristotélicas. Panizza (2015) recupera la noción de Rosch (1973, 1976) de prototipo como “el mejor representante” o “la instancia central” de una categoría. Los ejemplares reunidos en una categoría creada por medio de la noción de prototipo exigen desplegar criterios de comparación con el ejemplar típico para poder ser reunidos allí.

> Los miembros de una categoría no presentan propiedades comunes a todos (como en el modelo de condiciones necesarias y suficientes, entre otros). Lo que permite reunirlos es más bien un “parecido de familia”. (Wittgenstein, 1953; citado por Panizza, 2015, p.87)
>
> Rosch muestra que según la categorización por prototipos, no todos los ejemplares que un sujeto agrupa en una misma categoría resultan “buenos ejemplares” de esa categoría; dicho de otra manera, en las categorías existen miembros “más prototípicos” que otros. (Panizza, 2015, p.87)

---

[20] La traducción es nuestra.

Panizza (2015) identificó en sus estudios que en el ámbito matemático se despliegan formas de categorizar en términos de *instancias* típicas o *reconocimiento* y *agrupamiento* en base a rasgos prototípicos. Advertimos entonces, que siguiendo a esta autora habría cierta "arbitrariedad" en las formas de agrupar a partir de rasgos prototípicos que producen los sujetos en el ámbito matemático.

La noción de prototipo es considerada en Duval (1995) dentro de lo que él conceptualiza como definiciones características. Según este autor, las definiciones características son las definiciones que, entre las propiedades que eligen para describir un objeto, consideran la que permite la identificación de este de la forma más económica. La utilización de estas definiciones se basa en el contraste con los objetos semejantes o en criterios de alta frecuencia de la propiedad seleccionada y su validez se consolida por la rapidez de tratamiento en situaciones en que el objeto requiere reconocerse. Para este autor, clasificar a partir de prototipos se inscribe como caso de definición característica ya que, también allí, una clase se identifica por medio de un objeto particular, que resulta el representante de todos los objetos reunidos en esa clase, o por una propiedad perceptiva destacable. Las definiciones características privilegiarán propiedades particulares —o más frecuentes— de un objeto y la clase será identificada a partir de la proximidad de los objetos agrupados con relación a ese representante, o a partir de la presencia de la propiedad perceptiva que fue destacada.

Recuperando lo que mencionamos párrafos arriba, estas nociones teóricas que identifican formas de categorizar a partir de la percepción de rasgos que se privilegian como "más típicos" o "más destacables" nos permitieron cuestionarnos acerca de los rasgos destacados por los alumnos en los mecanismos desplegados —frecuentemente— en los momentos iniciales en los que se construye una conjetura general. En particular, nos permiten recortar condiciones sobre las situaciones iniciales en el terreno aritmético que podrían dar lugar a la construcción de alguna generalización conjetural por parte de los alumnos.

Como mencionamos en el Capítulo 2, referido al estado del arte, Panizza considera el estudio de las "generalizaciones espontáneas" a los efectos de establecer condiciones en el surgimiento de estrategias del razonamiento matemático en álgebra. En su trabajo de tesis, Panizza (2015) retoma estos estudios como antecedentes para orientarse en el estudio de la definición matemática —objeto de su tesis— estableciendo que es necesario "(…) identificar condiciones que permitan superar el estadio de las «generalizaciones espontáneas», e identificar variables didácticas que favorezcan la puesta en juego de las operaciones constitutivas de la definición de objetos". (p.15)

A su vez establece que el reconocimiento de estas generalizaciones efectuadas por los alumnos le permitió precisar los problemas de razonamiento en términos de capacidades discursivas y familiaridad con los objetos de referencia que integran los enunciados.

La autora sintetiza ciertos aspectos del funcionamiento cognitivo del razonamiento matemático en la dimensión de los razonamientos ligados fundamentalmente a un lenguaje; y en la de los razonamientos producidos sobre la base de los objetos de experiencia del sujeto. Recortamos específicamente algunos modos de hacer que nos resultan más íntimamente relacionados con nuestro trabajo:

- El alumno analiza la falsedad de una formulación por medio de objetos "individuales", frecuentemente recurriendo a aquellos objetos familiares para él.

- Los alumnos con frecuencia "corrigen" los enunciados a partir de "extraer" los contraejemplos de ellos. Eso puede dar lugar a enunciados falsos debido a la descripción "errónea" del conjunto de contraejemplos.

- Muchas veces, los alumnos corrigen formulaciones a partir de sustituciones de partes de un enunciado por otras y esta corrección podría traer por consecuencia el no ocuparse de la compatibilidad de las diferentes partes del enunciado desde el punto de vista del análisis de verdad o falsedad o el regirse por el valor de verdad de una expresión con independencia del contenido.

Nos resultan iluminadoras estas cuestiones que señala la autora cuando las pensamos como elementos de estudio y profundización de la trama de intervenciones que sostiene la constitución de un emergente colectivo en torno a lo general. Si bien la autora las señala con relación a las operaciones cognitivas de los alumnos frente a tareas de análisis del valor de verdad de proposiciones hechas en el registro de las escrituras algebraicas, creemos que ellas son susceptibles de ser consideradas para el análisis del proceso de constitución de formulaciones generales en el dominio aritmético. Sus análisis contribuyen a nuestra interpretación del proceso de constitución colectiva de un resultado general. Las intervenciones —parciales, imprecisas, personales— que tienen lugar durante el juego de interpretaciones recíprocas operan muchas veces por mecanismos de sustitución de ciertos rasgos típicos reconocidos por uno de los participantes que actúa interpretando la formulación emitida por otro para generar una nueva formulación, que a su vez emite en el espacio colectivo. Analizaremos en el Capítulo 5 el caso de un alumno que infiere una ley general a partir del registro escrito de una igualdad numérica particular, y cómo —sobre la base de su formulación— tanto docente como alumnos recuperan aspectos diferentes y reconstruyen nuevos enunciados con diferentes valores de verdad. Así, en el proceso de constitución colectivo de una regla o propiedad, la distancia entre los sistemas de conocimiento de los participantes del intercambio, hace que los actores pongan en juego acciones del orden de las mencionadas por la autora.

3.3. Cierre del capítulo

En este capítulo abordamos las principales nociones de la Teoría de Situaciones desarrollada por Brousseau (1986, 1997, 2007) que nos permiten pensar el aula de matemática como ámbito de producción. Incorporamos otros investigadores que han avanzado en los alcances de esta teoría. En este sentido, Sadovsky (2004, 2005), reinterpreta la categoría teórica de adidacticidad, y Sadovsky y Sessa (2005) retoman esta idea enfatizando la interacción como motor de actividad matemática. Mercier (1998), por su parte, introduce la clase como ámbito de producción cooperativa y Perrin (1993) se permite pensar los conceptos de devolución e institucionalización como procesos continuos e imbricados. Referimos uno de los apartados de este capítulo a la conceptualización de la acción didáctica desde el marco de la Teoría de Situaciones, fundamentalmente a partir de las discusiones teóricas de Sensevy (2007). Por último, consideramos los desarrollos de otras investigaciones enmarcadas en la Teoría de los Registros Semióticos de Duval (1995), específicamente mencionamos cuestiones referidas a los registros de representación semiótica y las actividades elementales entre ellos. Además, abordamos —a partir de Panizza (2015)— ciertos aspectos del funcionamiento cognitivo del razonamiento matemático y su concepto de "generalizaciones espontáneas"; así como los conceptos de "tipicidad" y "prototipo" retomados por esta autora, Duval (1995) y Laguerre (2007).

Capítulo 4. Metodología y análisis de la propuesta de la profesora

En este capítulo abordaremos fundamentalmente dos grandes secciones. En primer término, nos detendremos en el conjunto de decisiones metodológicas que organizaron y determinaron el proceso de exploración empírica que tuvo lugar en esta investigación. En segundo lugar, analizaremos en detalle la propuesta didáctica de la profesora, a fin de poder considerar la intencionalidad de los problemas como soporte para el análisis que efectuaremos en el siguiente capítulo; análisis de los procesos de construcción de lo general que denominamos como *emergentes colectivos de generalización*.

4.1. Decisiones metodológicas implicadas

Definido nuestro objeto inicial de investigación de acuerdo a como lo describimos en el capítulo 1 e interesados por abordar la generalización en términos de alguna relación dialéctica entre procesos personales y colectivos, consideramos la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau como un buen modelo para entender la clase de matemática. La teoría de Situaciones —advertimos ya— nos proporcionó fundamentalmente un modelo para interpretar y estudiar los procesos de producción matemática como procesos de adaptación cognitiva en el marco de dos tipos de interacciones básicas: la interacción alumno-medio y la interacción alumno-docente.[21]

Nos posicionamos en un uso de la teoría como elemento de interpretación e interpelación de lo real. Lejos de visibilizar como posible la identificación de la teoría en lo real, los casos que recortamos e interpretamos en el Capítulo 5 son para nosotros únicos en sí, teoremas de existencia en tanto sucesos que han tenido lugar. No esperamos recortar con cada caso considerado, "un caso" o "un ejemplo" presente previamente en la teoría ni mucho menos enunciar, a partir de ellos, términos o categorías de la teoría. La teoría nos proporciona elementos que posibilitan el recorte e interpretación de un cierto hecho, el cuál —a su vez— modificará para nosotros, en su singularidad, el sentido previo de esa categoría en la teoría.

En este sentido, nuestra metodología de trabajo comportó —lo describiremos con más detalle en la segunda parte de este capítulo— el recorte de ciertos episodios que nos permiten identificar y estudiar fenómenos didácticos con relación al despliegue de lo general. No

[21] Analizamos con mayor detalle aspectos de la Teoría de Situaciones que configuran nuestro modo de ver e interpretar los hechos del aula en el Capítulo 3, correspondiente a nuestro marco teórico.

pretendimos cuantificar las posibilidades de que dichos sucesos tengan lugar en el aula como así tampoco las conceptualizaciones didácticas que realizamos buscan un soporte cuantitativo en las reiteraciones acontecidas en los diferentes registros de observación considerados.

4.1.1. Contextualización metodológica en términos del problema planteado y las decisiones de investigación

Describiremos ahora el conjunto de decisiones que orientaron nuestro estudio influidas tanto por el recorte de la problemática como por nuestra concepción acerca del tipo de hechos de investigación que nos interesaba capturar. Recordamos que nuestro estudio se ubica en el análisis de la elaboración de conocimientos alrededor de la generalización matemática en momentos de entrada al trabajo algebraico. Este recorte temático nos imponía una primera gran decisión metodológica que comprendía analizar dichos procesos dentro de un aula en funcionamiento.

Nuestra opción consistía en capturar instancias de producción de generalizaciones en niños que están en sus primera entrada al trabajo algebraico, algunos de esos momentos no necesariamente definidos por una tarea específica destinada a su surgimiento, pero sí por un tipo de tarea —y por un tipo de gestión— que habilitara las condiciones para que estos momentos de producción tuvieran lugar.

Ello implicaba hacer dos elecciones: por un lado, elegir un docente convencido de la importancia de sostener un proyecto de generalización; y por otro, considerar las decisiones tomadas por él en la delimitación del conjunto de tareas que —desde su perspectiva— habilitarían las condiciones para dar lugar a ese proyecto.

En principio definiremos dos grandes etapas del proceso metodológico:

a) la etapa de toma de decisiones y opciones orientadas al diseño del campo de observación, y

b) la etapa de observación.

4.1.1.a. Opciones y decisiones con respecto al aula de observación

Nuestras decisiones se enmarcaban en la pregunta de cómo elegir un aula para estudiar en profundidad esos procesos a los que nos habíamos asomado en nuestra exploración inicial. Tomando como supuesto que la mejora de la enseñanza, en el sentido de ubicar a alumnos y docentes en una posición autónoma con relación al conocimiento, está en el horizonte de las investigaciones en didáctica, decidimos analizar la emergencia de lo general en un aula en la que fuera explícita por parte del docente la intención de promover un trabajo específico sobre la generalización en matemática como parte del sentido formativo para los estudiantes. Se trata de estudiar un caso, de conocer sus condiciones de posibilidad, de acceder a las complejidades que enfrenta el docente, de aproximarse a las ideas que proponen los estudiantes cuando se alienta que movilicen herramientas propias para abordar las situaciones que se les proponen, de comprender marchas, contramarchas y obstáculos que recorre el tratamiento de lo general (y los procesos de generalización). Tomamos la perspectiva de Stake (1998) sobre estudio de casos, que nos describe bien en el sentido que hemos dado:

> El cometido real del estudio de caso es la particularización, no la generalización. Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien, y no principalmente para ver en qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace. Se destaca la unicidad, y eso implica el conocimiento de los otros casos de los que el caso en cuestión se diferencia, pero la finalidad primera es la comprensión de este último. (p.20)
>
> El caso Θ, es algo especial que se ha de estudiar, un alumno, una clase, una comisión, un programa quizá, pero no un problema, una relación ni un asunto. Probablemente, el caso que se va a estudiar tendrá problemas y relaciones, y es posible que en su informe aparezcan aspectos, pero el caso es una entidad. En cierto modo, tiene una vida única. Es algo que no entendemos suficientemente, que queremos comprender y, por consiguiente, hacemos un estudio de caso. (p.114)

En igual línea recuperamos una cita de Neiman y Quaranta de un trabajo previo de este autor que distingue la importancia de la particularización en el estudio de casos: "(…) el estudio de caso consiste en el abordaje de lo particular priorizando el caso único donde la efectividad de la particularización remplaza la validez de la generalización". (Stake, 1995, citado por Neiman y Quaranta, 2006, p.219)

Es decir, la relevancia de nuestro estudio estaría dada por la posibilidad de profundizar el conocimiento de los procesos de generalización en matemática en las aulas del inicio de la escuela secundaria a partir del análisis de casos particulares que no se proponen ni como modelos a seguir, tampoco como ejemplos ni como ejemplos genéricos. En términos de Blasco, "Aquí, la elección del caso es resultado del recorte temático, y el estudio de caso es definido por el interés en él mismo, mientras que el diseño metodológico del estudio o investigación es secundario. El acento se ubica en la profundización y el conocimiento global del caso y no en la generalización de los resultados por encima de este". (Blasco, 1995, citado por Neiman y Quaranta, 2006, p.219)

A su vez entre las consideraciones en torno a las decisiones que finalmente tomamos estuvo aquella de que nuestro proyecto de investigación no comportaba la producción de situaciones de enseñanza para su posterior implementación y análisis; la naturaleza social de los procesos de producción de lo general que esperábamos capturar fundamentaba en nosotros esta toma de partido. No era nuestra intención de estudio la intervención artificial en el sistema de enseñanza, sino la comprensión de los procesos que tenían ordinariamente lugar bajo ciertas condiciones establecidas por un docente particular en una institución determinada. Pretendimos —y nos condujimos en función de ello— analizar y comprender los procesos, estudiando asimismo la propuesta del docente y la interacción de esta con el juego de relaciones que podíamos observar y develar.

En tal sentido, pretendíamos realizar una entrada a un aula que nos diese la posibilidad de entablar diálogo con el docente para acceder a sus decisiones conscientes con relación a su proyecto y para —a su vez— tener la posibilidad de intercambiar, comentar, compartir interpretaciones sobre los fenómenos ocurridos en su aula durante nuestra permanencia. Enfatizamos —como ya hemos dicho— nuestra decisión de abordar el estudio de los procesos en un marco de decisiones conscientes del docente, posición que de ninguna manera aísla nuestro interés del estudio de las decisiones abordadas en el fragor de las tensiones del aula en actividad.

Es a partir de ello que nuestro diseño de investigación, cualitativo e interpretativo, corresponde metodológicamente al estudio de casos. Más precisamente, indagamos el tipo de producción matemático-didáctica que tiene lugar en cuatro episodios de interacción docente-alumnos seleccionados dentro de todo el proceso continuo de observación de más de tres meses y que hemos organizado intencionalmente para el estudio y la definición que recupera la historia de construcción de la generalización que aconteció en ese aula de primer año de secundaria.

La decisión de adoptar metodológicamente el estudio de caso se basó en el reconocimiento de la complejidad de nuestro objeto: la producción de un grupo que incluye alumnos con trayectorias y referencias provenientes de diferentes escuelas primarias en el contexto de sostén de un docente en una institución que entiende la generalización como un objeto de estudio y análisis de los alumnos en sus clases.

Asimismo, un proceso de producción —ese es nuestro objeto de estudio— tiene una singularidad que la justifica como caso; en ese sentido buscamos indagar sobre aquello que es posible en una situación en la que se generan condiciones para que los alumnos reflexionen sobre sus prácticas durante un período prolongado, sin pensar que sería consistente una generalización inmediata de los resultados a otros casos posibles. Como señalamos ya, el interés de un caso sería el de dar cuenta de su existencia en tanto referencia para pensar la cuestión de condiciones para la producción de conocimientos acerca de la generalización matemática en un aula durante la entrada al trabajo algebraico.

Los casos que describimos y analizamos en el Capítulo 5, correspondiente al Estudio Empírico, estudian la complejidad de las acciones didácticas que tienen lugar en el aula en el marco de las intenciones de un docente de activo interés por dar lugar a la entrada y al abordaje consciente —por parte de sus alumnos— del estudio de lo general en el entorno de sus tareas de clase. Analizamos las intervenciones de cada uno de los participantes en términos de conocimientos, concibiendo su relación con la trama de relaciones conceptuales que tiene lugar en el espacio colectivo. Se trata pues de considerar el funcionamiento de un grupo de trabajo así constituido junto con la producción que tiene lugar en ese espacio.

Interpretar las acciones desplegadas en términos de conocimientos nos permite concebirlas en su relación con la enseñanza. En ello, asumimos que la enseñanza es el resultante de una trama de aproximaciones colectivas en la que cada intervención suele tener un asidero de intencionalidad que alumbra relaciones conceptuales individuales. Tales relaciones finalmente componen la trama de intercambio que se despliega.

El colectivo refuerza y sostiene el tránsito individual hacia la elaboración de la generalización matemática al modo en que el encofrado lo hace en la construcción. Al mismo tiempo, las interpretaciones particulares de los individuos condicionan la resistencia de ese armazón.

4.1.1.b. El proceso de observación

La observación es un proceso que se delinea anticipadamente pero que comienza a adquirir marcas propias y definidas, a las cuales seguir, mientras transcurre. Como señala Stake (1995):

> Durante la observación, el investigador cualitativo en estudio de casos registra bien los acontecimientos para ofrecer una *descripción* relativamente *incuestionable* para posteriores análisis y el informe final. Deja que la ocasión cuente su historia, la situación, el problema, la resolución o la irresolución del problema. A menudo parece que no hay historia, es decir, nada que guarde alguna relación con los temas, nada que permita asomarse a las profundidades del

> caso. (…) La historia suele empezar a cobrar forma durante la observación, a veces no aparece hasta el momento en que se juntan las transcripciones de diversas observaciones. (p.61)

En ese sentido, nuestro proceso de observación incluyó dos grandes momentos —con etapas incluidas en ellos— que llevamos adelante durante tres años de la investigación.

4.1.1.b.1) Observación de clases y toma de registros para definir preguntas iniciales sobre la generalización matemática en la entrada al álgebra

Se realizaron observaciones de clases y toma de notas sobre el funcionamiento de lo general en dos aulas de primer año de escuela secundaria[22] durante el primer cuatrimestre lectivo en dos años consecutivos. Intercalado entre ambos años se observaron clases también en un séptimo grado de escuela primaria —perteneciente a la escuela en la que estaban los primeros años observados— durante el segundo cuatrimestre. En esos momentos reconocimos —aún sin contornos concretos— procesos de generalización que derivaron de alguna forma en la definición de los procesos que perseguimos más concretamente en un momento posterior de investigación. Estas instancias continuas de aula posibilitaron, en principio, identificar que, aún frente a propuestas de base similar, los procesos de generalización resultaban diversos y estaban condicionados fuertemente por el lugar que tenían las propuestas de los alumnos en los espacios colectivos de producción. Nos permitieron a su vez tomar contacto con momentos muy potentes de la producción de lo general de los alumnos, fundamentalmente asociados a las maneras de explicar modos de resolución aplicables a algún tipo de problema, acción que necesariamente incorpora características de generalización en su mecanismo de descontextualización. También, con otros momentos asociados a inferencias —válidas o no— sobre regularidades de acción, y otros asociados a formas de argumentación —frecuentemente falsas— generadas por su anclaje abusivo en el contexto del problema (geométrico–numérico).

4.1.1.b.2) Configuración del campo de observación de esta tesis

En esta etapa realizamos observaciones durante tres meses en otra aula de primer año. El proceso previo de observación que relatamos en el ítem anterior había ya delineado para nosotros un interés especial por recuperar momentos de producción que, entre otros ejemplos:

---

[22] Escuela Normal Superior N° 3 “Bernardino Rivadavia” de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

- involucraran generalizaciones asociadas a la construcción de un procedimiento,

- se organizaran en torno a la constitución de la racionalidad matemática de los alumnos,

- enfatizaran generalizaciones de propiedades o se instalaran en la producción de una ley o propiedad,

- se orientaran fundamentalmente a la producción de un modelo en tanto herramienta que dé respuesta a un problema.[23]

Una constante se fundía en todos estos procesos: todos ellos resultaban representantes de aprendizajes de la generalización que los alumnos debían construir al iniciarse en el trabajo algebraico y en todos ellos podíamos vislumbrar particularidades del aporte social.

Elegimos un aula de primer año de una escuela secundaria de Ciudad de Buenos Aires[24] con una docente que conocíamos previamente, y lo hicimos por varias cuestiones:

- Conocer y compartir muchos puntos con la docente respecto a la concepción de producción matemática en el aula, ya sea por haber "crecido" juntas en nuestra formación como profesoras como por haber compartido —en momentos posteriores— espacios como formadoras de docentes integrantes de un equipo de trabajo que incluía reuniones de reflexión y teorización sobre la práctica que estaba aconteciendo.

- Conocer el tipo de trabajo que la docente estaba dispuesta a sostener.

- Conocer el tipo de decisiones de planificación de la docente.

Nuestra opción fue considerar las clases ordinarias sin intervenir en las decisiones de la profesora. A partir de reuniones informales antes del período de observación conocimos la intencionalidad que la profesora perseguía con su propuesta y también, durante el período de observación de clases, realizamos —al salir de la clase observada— intercambios verbales de modo informal en torno a ciertas situaciones emergentes que nos sorprendían o a cierto accionar de gestión. Tuvimos sí, durante el momento posterior a la transcripción de los registros, encuentros con la profesora para compartir un primer análisis de los episodios recortados; en ellos la profesora aportó su experiencia de haber conocido durante más meses a cada alumno y,

---

[23] Esta separación es a los efectos de señalar diferencias en los matices de construcción de generalizaciones que evidenciamos a partir de la experiencia en aula; en los aconteceres del aula todas estas componentes se encuentran amalgamadas.

[24] Colegio Paideia, de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

en este sentido, contribuyó a otorgar otra mirada a la interpretación que hacíamos sobre la acción desplegada en alguna producción en particular de cierto alumno.

Realizamos observaciones durante todo el período en que la profesora desarrolló las dos prácticas que definió —sin nuestra intervención— para su propuesta de enseñanza. Esta entrada al aula comportó aproximadamente tres meses de 5 módulos semanales de clases, repartidos en 3 días.

La docente diseñó las tareas en términos de una primera práctica de números naturales que se sustentaba en un trabajo algebraico sobre lo numérico. A ella seguía una segunda práctica sobre producción de fórmulas para contar. Cada una de estas prácticas definía una zona de trabajo matemático en el aula; por un lado, el estudio de propiedades de los números naturales, con la necesidad de leer información en la escritura de un cálculo, y eventualmente transformarla para leer nueva; y por otro, la producción de fórmulas para contar y la relación de equivalencia entre expresiones algebraicas. Ahora bien, la variedad y riqueza de generalizaciones que se produjeron, aún en pequeños fragmentos de interacción, hicieron que nuestra profundización del análisis a lo largo de este trabajo se concentrase en la primera de estas zonas comprendida en la primera de las prácticas mencionadas. El análisis de los registros alrededor de esta zona de trabajo con referencia a los números, sus operaciones y propiedades nos permitió recortar el lugar importante que tenían los procesos colaborativos en la emergencia de lo general, por ejemplo en la aceptación de la existencia de diferentes representaciones de las expresiones numéricas, su equivalencia y transformación y en la constitución de regularidades numéricas y sus elementos de validación.

Nos interesa agregar por qué creemos que las indagaciones y análisis de este trabajo pueden contribuir a pensar mejores condiciones de entrada a las prácticas algebraicas en la escuela. Consideramos que advertir la potencia social que acontece bajo la exigencia de ciertas tareas —planteadas con el proyecto de dar lugar al diálogo con la generalización— ubica en buena posición al docente para dar entrada a asuntos como por ejemplo argumentos de generalidad, la emergencia de conjeturas, el manejo de los números con carácter general, las transformaciones de expresiones, la denotación y el sentido de una expresión. Todas estas cuestiones necesarias para hacer un tránsito anclado en las prácticas aritméticas hacia las prácticas algebraicas, tránsito que todo alumno de ingreso a la escuela secundaria deberá realizar de acuerdo al currículum actual de la escuela secundaria de Ciudad de Buenos Aires.

4.2. Análisis de la propuesta didáctica de la profesora

En este apartado recuperaremos y analizaremos aquellos problemas de la Guía de Números Naturales de la propuesta didáctica de la profesora. La intencionalidad de su propuesta potencia la emergencia de un conjunto de relaciones que se vinculan con aquellas presentes en los procesos de construcción que recortamos como fenómenos substanciales de este trabajo. Los recuperaremos a los efectos de hacer un análisis matemático didáctico de ellos.

4.2.1. ¿Por qué el análisis didáctico?

Expresemos brevemente a qué llamamos análisis didáctico de las tareas desde nuestra perspectiva y cuál es su papel en nuestro estudio. Para nosotros, estudiar las situaciones —o problemas propuestos— supone entender las relaciones que los alumnos deberían desplegar para involucrarse matemáticamente con ellas, comporta, a su vez, reconocer la posible evolución de dichas relaciones desde las prácticas aritméticas que se anticipan, hacia un tratamiento algebraico de lo numérico que la profesora promueve. Estudiar las situaciones y entender las relaciones matemáticas comprometidas comprende abordar posibles estrategias y acciones en términos de conocimientos que explican dichas acciones. Estudiar el proyecto de la profesora incluye anticipar las posibles discusiones colectivas que los problemas secuenciados permiten sostener con referencia a las relaciones antes mencionadas; relaciones que se enmarcan en los sistemas de conocimientos que los alumnos disponen y que evolucionan en la interacción con el trabajo previsto que se anticipa. Ello nos da elementos para delinear, a partir de un análisis descriptivo y explicativo, aquellos conocimientos que se espera que se produzcan en la clase, en la interacción del sistema que se construye en virtud del grupo de alumnos, el docente y los problemas. La búsqueda de estas explicaciones desde el lado de la propuesta elaborada y sostenida por la docente nos posiciona a priori desde otro lugar para entender los procesos de generalización que luego se nos revelan, análisis que se conjuga con las intenciones que la profesora expuso brevemente en un primer encuentro informal.

Sabemos que los conocimientos que relevamos en esta tesis en torno a los procesos de generalización no se encuentran contenidos en el análisis de las situaciones que exponemos aquí. Las situaciones que la profesora proyecta enmarcan un lugar de fertilidad para la evolución hacia las prácticas algebraicas de equivalencia y transformación de expresiones o de argumentación matemática de lo general, pero el contexto social promueve un abordaje de lo matemáticamente nuevo con respecto a la generalización matemática que no está dado previamente por las tareas o las discusiones propuestas desde el proyecto didáctico. El grupo social es motor y productor de fenómenos y conocimientos que la profesora puede contener desde un proyecto que excede a su propuesta matemática puntual de esta práctica de trabajo. De todas maneras, la fertilidad de este análisis está dada por su cualidad de constituirse en la apertura matemática y didáctica que nos orienta para la identificación y recorte de los hechos de generalización que luego de las observaciones pudimos estudiar.

4.2.2. Análisis matemático didáctico de actividades de la Guía de Números Naturales

En esta guía se proponen diferentes problemas que orientan un tipo de trabajo relacional sobre lo numérico.

Problema 1

Completar los siguientes cálculos. Pensar la respuesta de dos maneras distintas:

a) 530 + … = 600

b) 720 + … = 1000

c) 45 + … = 1000

d) 890 + … = 3000

e) 600 + 800 = …

f) 1500 + 700 = …

g) 900 – 700 = …

h) 800 – 250 = …

i) 1000 – 400 = …

j) 3400 – 600 =

Este problema comporta la intención didáctica de recuperar para el aula diferentes escrituras de cálculos para un mismo resultado. Es el accionar de la gestión docente lo que permitirá esta recuperación con anclaje en los cálculos que los alumnos desplieguen. Es esa misma acción la que dará buenas condiciones para gestar un espacio de posibilidad para introducir discusiones que recuperen propiedades numéricas —como por ejemplo la propiedad conmutativa o asociativa— y establecer su vínculo con los símbolos que resultan o no necesarios —desde el punto de vista convencional— en las escrituras numéricas.

Este recuperar de las operaciones presentes en los cálculos —en su relación con aspectos sintácticos— instala en el aula la consideración de las operaciones en términos de relaciones; en este sentido, se recuperan los números y los cálculos pero su escritura en el pizarrón y la gestión docente los vuelve objeto en términos de relación numérica susceptible de su análisis relacional.

Entender la resta en tanto complemento de una suma, por ejemplo, concebir la suma de centenas como operación que solo depende de dos cifras a considerar, etc.

La solicitud del Problema 1 de "pensar las respuestas de dos maneras distintas" expresa una primera negociación necesaria de la docente con los alumnos acerca de que las partes a completar permiten no solo poner un número único sino una cuenta. Únicamente al habilitar las cuentas como un modo de completar se puede cumplir la consigna de "las dos maneras distintas". Una vez aceptado que los alumnos entienden eso, dicha solicitud debiera dar lugar al surgimiento en el aula de una gran variedad de cálculos. El soporte del pizarrón habilita la "aparición" simultánea en el aula de diferentes escrituras de esos cálculos. En tal sentido, la noción de transformación entre relaciones numéricas equivalentes toma presencia y se vuelve objeto de análisis para la clase.

Problema 7

A partir de saber que 2 x 28 = 56 y 3 x 28 = 84, ¿es posible completar la tabla sin hacer, en cada caso, toda la cuenta de multiplicar?

x 28	4	5	6	8	10	20	30	45	51	100

Este problema propone, a partir de conocer el resultado de las cuentas de multiplicar un mismo número —28— por 2 y por 3, encontrar el resultado de otras cuentas de multiplicar ese mismo número 28. Permite recuperar propiedades de la relación multiplicativa a partir del tratamiento y análisis de las cuentas "dato" y la cuenta requerida. En nuestros términos, las propiedades que se desplegarían para dar solución a lo pedido serían: a x b = c; d x b = e entonces k x a x b = k x c y ($a + d$) x b = $c + e$ con a, b, c, d, e, k números naturales.

El juego de relaciones entre las nuevas cuentas solicitadas y las que se fueron encontrando, tanto como el análisis de cuál es "más simple" conocer primero para utilizar luego como "pivote", da lugar a un entramado de relaciones numéricas que resignifican la noción de multiplicación en tanto relación general. Por ejemplo, las columnas del 4, 6, 8, 10, 20, 30, 45, 100 pueden obtenerse solo a partir de la propiedad de que la igualdad se mantiene si se multiplica a ambos lados por el mismo número.

Sin embargo, el número 51 exige desplegar otras estrategias, ya sea utilizando la suma de los resultados obtenidos en las columnas del 5, 6, 20, considerando la columna del 45 y del 6 o recurriendo a conseguir ese 1 como “un veintiocho” para combinar con el producto de 50 x 28 de algún modo (se podría, por ejemplo, obtener ese producto agregando un cero al resultado de la columna del 5 o sumar la columna de 5 y la del 45). Se imbrica aquí la relación multiplicación-división en una posible objetivación de la relación de multiplicación en términos del análisis de la escritura que la representa en esa cuenta “dato”: 2 x 28 = 56. El dato es “doble de 28” y aparece en el enunciado escrito como una cuenta de multiplicar por 2. Los alumnos hasta ahora solo operaron sumando o restando resultados de las columnas, ese 1 de la columna del 51 requiere pensar que es 1 x 28 y concluir que no se necesita que se explicite como cuenta “dato” porque se puede obtener fácilmente o recurrir a que es “la mitad de 56”.

Problema 8

A partir de saber que 7 x 37 = 259, ¿es posible completar la tabla sin hacer, en cada caso, toda la cuenta de multiplicar?

x 37	4	5	6	8	10	20	30	45	51	100

Este problema retoma estrategias del Problema 7 pero fuerza la búsqueda de otras nuevas a partir de que los números solicitados por la tabla no son múltiplos de 7. La estrategia de multiplicar el resultado de la cuenta “dato” se presenta restringida.

Se instala entonces la necesidad de recurrir a alguna estrategia similar a la narrada en el Problema 7 para reconocer ese “1 x 28”, la cual favorecería conocer inicialmente las columnas del 8 o del 6, ya sea sumando “un treinta y siete” o restándolo. Si bien una vez discutida esta estrategia podrían los alumnos recurrir a restas o sumas sucesivas para encontrar otras columnas correspondientes a números más cercanos al 6 u 8 —por ejemplo, el 4 o el 10— se abren también nuevas posibilidades ante estos números no primos que podrían dar lugar a la emergencia de una nueva propiedad (en acto) en el contexto de los números naturales: si $a \times b = c$, con a, b, c números naturales, entonces $((1/k) \times a) \times b = a \times ((1/k) \times b) = (1/k) \times c$ con k no nulo y divisor de a o de b (esta segunda aclaración la establecemos en términos de la práctica que se centra en el conjunto de los naturales; la propiedad resaltada es válida aun siendo k no divisor de a o b, por supuesto no nulo). Nos referimos, por ejemplo, a luego de haber calculado 8 x 37 = 296 deducir que ((1/2) x 8) x 37 = (1/2) x 296.

Otra estrategia sería también, por ejemplo, calcular 14 x 37 a partir de duplicar el resultado 259 y restar 10 x 37; sin embargo, esta opción requiere efectuar directamente la multiplicación de 37 por 10.

Problema 14

En la calculadora de Silvana se rompió la tecla del 2. Indicar cómo puede hacer Silvana para resolver cada uno de los siguientes cálculos con su calculadora rota:

a) 24 x 12 b) 22 x 22 c) 114 x 21 d) 32 x 24

Problema 15

Estos cálculos pueden ser escritos usando multiplicaciones de números de una sola cifra. Escribir dos formas para cada una: 18 x 12; 21 x 15; 24 x 25

Los Problemas 14 y 15 de la guía asumen la intención didáctica de poner en la escena del aula la noción de descomposición de un número en factores. Específicamente, el Problema 14 pondrá en juego en el aula el análisis de la conmutatividad del producto de los factores de cada número/factor de la cuenta producto dada inicialmente en el enunciado. Por ejemplo, el inciso b) del Problema 14 fuerza a rearmar los dos factores 2 de cada 22 en un nuevo factor 4 para responder a la consigna de no usar la tecla del 2.La discusión sobre la verdad o no de igualdades como 2 x 11 x 2 x 11 = 4 x 11 x 11 tendrá lugar necesariamente.

Durante la gestión de la discusión colectiva, el análisis de la igualdad entre descomposiciones variadas propuestas por los alumnos permitirá también considerar la conmutatividad de los diferentes factores. El docente podría —luego de discutir las cuentas señaladas en ambos enunciados— ampliar las consignas iniciales y agregar alguna cuenta que requiera la toma de posición de los alumnos respecto de números que no pueden descomponerse de acuerdo con lo que esas primeras consignas solicitaban. Por ejemplo, para el Problema 14, un producto como 22 x 13 admitiría solo por descomposiciones 2 x 11 x 13 o 26 x 11 o 2 x 143, todos ellas con un 2 presente que no puede omitirse, con lo que no podría cumplirse el requerimiento de la consigna; o también, en el Problema 15, se podría proponer un producto como 22 x 14 o cualquier otro producto que involucre a un primo de dos cifras para discutir que no se puede conseguir descomponerlo en productos de factores de una sola cifra.

Corresponde aclarar que, si bien el Problema 14 no especifica qué operaciones hacer en la calculadora en la que se rompió la tecla del 2, se deberá negociar en la clase que deben ser productos y que no se puede suplantar la falta del 2 con sumas.

Problema 16

Resolver de tres maneras diferentes cada una de las siguientes cuentas:

a) 36 x 60 b) 27 x 30 c) 45 x 40

Este problema refuerza las intenciones de los otros dos anteriores. Nuevamente, el docente deberá negociar o aclarar que se esperan cuentas de multiplicar como respuesta a cada una de las tres cuentas. El hecho de solicitar mayor cantidad de cuentas hace más necesarias algunas estrategias desplegadas previamente, como ser descomponer cada factor de la cuenta inicial en mayor cantidad de factores o conformar nuevas cuentas "mezclando" los factores de cada número propuesto inicialmente en la cuenta del problema. Al igual que en los Problemas 14 y 15, todas las cuentas pueden expresarse de tres maneras diferentes, como se solicita.

A diferencia de los dos anteriores, este enunciado solicita "Resolver de tres maneras…", por lo que la gestión de la clase será la que proponga recuperar esas "formas de resolver" en escrituras diferentes de cuentas de multiplicar.

Problema 17

Si 66 x 40 = 2640, ¿es posible decidir, sin hacer la cuenta, si 2640 es divisible por 40, 60, 33, 3, 4, 9 y 12?

Este problema propone por primera vez en la guía vincular la divisibilidad de un número por otro con sus posibles descomposiciones en factores. La relación entre multiplicación y división se coloca en primer plano y se vuelve objeto de análisis. La intencionalidad docente se orienta a instalar el conocimiento de que *la presencia de un factor B como factor de alguna descomposición multiplicativa del número A permite asegurar que A resulta divisible por ese número B.*

Asimismo, habrá que delinear estrategias para decidir cuándo un número *no* es divisible por otro. El conocimiento que aquí introduce la docente en el aula es que *si B no está en ninguna descomposición de A, entonces B no divide a A.*

Una posible estrategia sería mirar todas las descomposiciones del número *A* y comprobar que *B* no puede formarse a partir de ninguno de sus factores. Otra posible estrategia podría consistir en llegar a una descomposición "minimal"[25] de *A* y comprobar que el número *B* no puede "armarse" a partir de esos factores que aparecen.

La primera estrategia que señalamos para el caso del no ser divisible plantea la dificultad práctica de lograr atrapar todas las descomposiciones. La segunda estrategia asume, por un lado, la existencia de una descomposición "minimal" para todo número *A*, o sea una descomposición que se pueda alcanzar a partir de cualquier otra descomposición con la que se cuente inicialmente. Asume también que dicha descomposición minimal resulta representativa de cualquier otra descomposición del número *A* y que si *B* no está presente en esta representación minimal, no estará en ninguna otra descomposición del número *A*.

Entre los números para los cuales se quiere analizar si son o no divisores, él único que no lo es y que pone en escena el segundo conocimiento mencionado es el número 9.

Para determinar si el resto de los números propuestos en el enunciado son o no divisores de 2640, la complejidad varía de acuerdo a su mayor o menor "visibilidad" en la cuenta "dato" 66 x 40. De este modo, la "visibilidad" del 40 en tanto factor de la cuenta "dato" posibilita recuperar en el plano colectivo la relación entre "ser divisor de *A*" y su presencia como factor en una descomposición multiplicativa de *A*. El caso del 33 o del 3 hace necesario ver que ellos pueden obtenerse como factores de alguno de los dos factores propuestos inicialmente en la cuenta "dato". Los alumnos suelen dividir el número 66 por 2 o por 22 y multiplicar el factor 40 por el número por el que dividieron al 66.

La cuenta que estarían haciendo, quizás sin escribirla, es:

[25] Minimal en el sentido de que ninguno de sus factores pueda descomponerse.

66 x 40 = (66 / 2) x (40 x 2) = 33 x 80

o

66 x 40 = (66 / 22) x (40 x 22) = 3 x 880

Esta estrategia —que funciona ya que dividen por un número del cual 66 es múltiplo— suele plantearles un límite cuando la extienden y necesitan dividir a alguno de los factores de la cuenta “dato” por un número del cual no es múltiplo.

Sin embargo, notemos que en los casos en que A x B es efectivamente múltiplo del número C que se quiere estudiar esa estrategia seguirá siendo válida recurriendo a un procedimiento que permita —de modo auxiliar— dejar momentáneamente números que podrían ser a lo sumo racionales. Por ejemplo, para estudiar si 66 x 40 es múltiplo de 12, deberíamos dividir 66 por S = 66 / 12, y resulta que S x 40 = (66 / 12) x 40 = 220, de modo que 66 x 40 = 12 x 220.

Un análisis matemático de esta cuestión nos permite ver que al efectuar la división de A por C (con A y C enteros) resultará un número S que es racional y, dado que A / S = C, tendremos A x B = C x S x B. Se deduce que para que C divida a A x B es necesario y suficiente que S x B resulte un número entero.

Notemos que este procedimiento “extiende” a Q el procedimiento que los alumnos ponen en acto al “visualizar” el número divisor como factor de A o de B. Esto es, estamos señalando que cuando los alumnos argumentan que “66 x 40 es divisible por 3 porque 3 divide a 66” podríamos interpretar que al percibir a 66 como 3 x 22, el acto en sí es el de dividir 66 / 3 para finalmente concluir que 3 x 66/3 x 40 = 3 x (22 x 40) = 3 x 880.

Así también el análisis de la divisibilidad por 12 —y la necesidad de mostrarlo como factor de acuerdo a las maneras construidas en esa aula para dar cuenta de la divisibilidad— vuelve necesario “armar” ese 12 con factores del 66 y del 40. Se plantea aquí una nueva instancia para revisar —y dar nueva entrada— a esta estrategia desplegada ya para responder a las consignas de problemas anteriores como el 14 inciso b).

Como dijimos previamente, el análisis de la divisibilidad por 9 plantea un caso diferente y genera la necesidad de desplegar relaciones matemáticas más complejas que involucran considerar *todas* las descomposiciones posibles, o la existencia de una descomposición “minimal” de algunos de los números involucrados en el análisis.

Problema 18

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicar cómo se dieron cuenta.

a) 14 x 35 es múltiplo de 14.

b) 14 x 35 es múltiplo de 7.

c) 14 x 35 es múltiplo de 28.

d) 28 x 9 x 10 es múltiplo de 8.

e) 106 x 15 + 16 es múltiplo de 2.

f) 115 x 33 + 1 es múltiplo de 2.

g) 27 x 18 + 2 es múltiplo de 3.

h) 27 x 18 + 13 es múltiplo de 3

Este problema permite recuperar estrategias que los alumnos desplegaron en el Problema 17 e incorporar nuevas en los incisos que consideran el análisis de la divisibilidad en cuentas que incluyen sumas y productos. Introduce en el aula —a través de su consigna— un nuevo término matemático: *múltiplo*. La intención docente pretende poner en relación esta noción con la de *divisor* y *ser divisible* que aparecieron en escena a partir del problema anterior.

Los primeros cuatro incisos vuelven sobre el trabajo del problema anterior; en particular, el inciso c) permite revisar y dar una segunda oportunidad a la discusión en torno a la no divisibilidad del número 2640 por 9 del Problema 17.

Los incisos con sumas traerán a discusión propiedades en torno a la suma de los restos. Estas propiedades suelen por lo general dar lugar en el aula a inquietudes de los alumnos acerca de su extensión al producto de los restos (es decir, si el resto del producto es el producto de los restos).

4.3. Cierre del capítulo

En este capítulo analizamos cuáles fueron nuestras decisiones metodológicas, aquellas que orientaron la entrada al aula y el tipo de observación que objetivamos. A su vez, analizamos la propuesta de la profesora que, desde nuestra perspectiva, estableció un camino de práctica en el aula. Práctica que resultó soporte de los momentos de producción que constituyen los episodios que registramos y recortamos en el capítulo siguiente (Capítulo 5).

Capítulo 5. Estudio de casos

5.1. Introducción

En este capítulo recuperamos las construcciones emergentes en torno a la generalización matemática en el espacio común de la clase, aquellas que cobran existencia a partir de la tensión propia del espacio colectivo. Los hechos que hemos presenciado, registrado y analizado nos permiten afirmar que son las condiciones mismas del contexto grupal e interaccional las que crean, regulan y permiten la evolución colectiva de la temática de lo general que se asume; y son esas mismas condiciones las que, en otros casos, diluyen el avance o la asunción de esa temática.

Entender estos marcos regulatorios que acontecen nos da elementos para, por un lado, delimitar y definir diferentes casos de estudio en términos de fenómenos de la emergencia que tienen lugar; y por otro, relevar las condiciones de existencia de cada fenómeno, en vías de caracterizar el espacio en el que cada uno pueda tener ocurrencia.

En este capítulo presentaremos cuatro casos cuyo estudio constituye el cuerpo central de esta tesis. Ellos son un recorte a partir de nuestra interpretación del trabajo colectivo que observamos en un primer año de una escuela secundaria seleccionada, como indicamos previamente. Cada caso reúne relaciones y conocimientos que identificamos en la interacción social con carácter de construcción local y comporta la particularidad de ser reconocible como un proceso de generalización. Proceso que sucede en el marco de una gestión docente que habilita la entrada de nuevas problemáticas que los alumnos necesitarán aprender para poder desempeñarse como sujetos matemáticos.

La construcción de nuevas preguntas sobre el hacer matemático y los conceptos tiene lugar en el entorno de un tipo de práctica que supone la articulación entre el trabajo numérico y el algebraico en un contexto de intercambio colectivo que habilita su emergencia. Reconocemos, en cada uno de los casos, diferentes relaciones específicas del hacer algebraico que, a partir del tratamiento de expresiones numéricas, se construyen imbricadas con otras elaboraciones que resultan indispensables para que un alumno pueda disponer con funcionalidad del lenguaje algebraico.

5.2. Caso 1: La regla de Tomás

5.2.1. La gestación de un enunciado general como fenómeno colectivo

La generalización de una conjetura como la que consideraremos en esta sección se entrama en una red de pensamientos y conceptualizaciones —explicitadas por el colectivo con mayor o menor precisión— que vuelven enfática para un alumno —o grupo— un conjunto de relaciones. Las interacciones sociales matemáticas en el aula van construyendo un espacio que sostiene la formulación de esas relaciones en términos de *fibras* imprecisas, algunas de las cuales evolucionan hacia el armado de lo que llamaremos una trama de generalización.

Estas construcciones se moldean a partir del trabajo intelectual de los distintos actores, el cual se ve atravesado por sus creencias en torno a la certeza o no de lo que se está afirmando. El análisis que desarrollaremos a continuación se basa en un juego de acciones y reacciones a raíz de la validez de una regla. Más concretamente, al ver en el pizarrón la escritura de una igualdad entre dos cuentas, un alumno percibe una regularidad que enuncia de manera imprecisa; la reacción de la profesora nos hace pensar que considera que la regla es falsa y propone un contraejemplo. Otra alumna objeta el contraejemplo de la profesora, lo cual desencadena un conjunto de intervenciones que desembocan en el tratamiento de un problema para toda la clase organizado alrededor de la validez de la regla.

Entendemos que las diferentes creencias de las tres personas mencionadas constituyen un motor fundamental para instalar en el colectivo del aula el problema de la validez de la regla. Veremos a continuación, en nuestro análisis más detallado, que en el primer instante del intercambio, la profesora descree de la validez de la propiedad que el alumno Tomás está afirmando. A diferencia de Agostina, quien puede sostener y dar curso a un despliegue más prolongado porque su evaluación de las posibilidades de validez de la propiedad son positivas.

Como señalamos en el Capítulo 3, Duval (1995) atribuye a las proposiciones un valor epistémico que define como el grado de fiabilidad que posee lo que es enunciado en la proposición. Según este autor:

> En el instante mismo de su aprehensión, el contenido de una proposición puede parecer evidente, cierto o sólo verosímil, plausible o simplemente posible, imposible, o incluso absurdo.... Así, cuando un enunciado se “comprende”, lo es como el enunciado de un hecho establecido, o como una simple hipótesis, una representación puramente imaginaria, una creencia, una trivialidad, una regla, una convención, una incoherencia, una inverosimilitud, etc. (Duval,1995, pp.218-219)

Entendemos que Duval establece una caracterización del valor epistémico de una proposición como relativa a un sujeto y a un momento determinado.

En términos de este autor, podríamos decir que los diferentes valores epistémicos que la proposición tiene para estos tres sujetos del intercambio antes señalado (Tomás, Agostina y la profesora) intervienen en la posibilidad de dar curso al tratamiento de la conjetura en el aula.

Al considerar el espacio colectivo se hacen visibles en simultáneo valores epistémicos diferentes (y se puede anticipar que seguramente habrá otros más que no están aflorando). El interés de nuestra tesis nos vuelca a considerar el juego de tensiones que aporta al intercambio el grado de credibilidad sobre el contenido proposicional que los diferentes actores desarrollan en función de los sistemas de conocimientos que ponen en juego.

5.2.1.a.La tarea que dispara la formulación de una propiedad

A continuación estudiaremos hechos de la clase que se desarrollan a partir de la resolución del siguiente problema:

Problema 17

Si 66 x 40 = 2640, ¿es posible decidir, sin hacer la cuenta, si 2640 es divisible por 40, 60, 33, 3, 4, 9 y 12?[26]

Al discutir sobre esta actividad quedaron escritas en el pizarrón dos resoluciones para hacer visible que el número en cuestión es divisible por 60:

66 x 40 = 2640	66 x 40 = 2640
3 . 22 . 20 . 2 = 2640	6 . 11 . 10 . 4 = 2640
60 . 44 = 2640	60 . 44 = 2640

5.2.1.b. Las interacciones en la clase que dan lugar a la producción de una ley de existencia local

A partir de estas resoluciones escritas, Tomás plantea:

[26] El significado de la condición "sin hacer la cuenta" fue consensuado con los alumnos. Hay cuentas que sí se hacen, por lo menos mentalmente. Aunque no se impidió que los chicos hicieran la cuenta de dividir *2640* por cualquiera de los números pedidos, no se la podía usar como argumento para responder.

1) **Tomás(D)**: *Ahí cuando hacés 3 por 22 y 2 por 20 o 20 por 2, cuando vos habías dicho de hacer 6 por 11 y 10 por 4, que después queda en 44, el otro queda 60 y el otro 44 y multiplicando 60 por 44 te daría 2640, o sea que a ese 6 ponele que yo lo paso como un 4 allá asociando, explicando…*

2) **P**: *Pará, pará, pará, ¿qué 6 pasás como un 4?*

3) **Tomás(D)**: *Es que….*

4) **P**: *Vení, vení, vení…*

Tomás pasa al pizarrón.

5) **Tomás(D)**: *Este, cuando vos hacés el por 11…viste que hacés por 11 por 4 y este por 4, 40 y después le sumaste…*(señala en 6 **.** 11 **.** 10 **.** 4 = 2640)

6) **P**: *No, este por 4, no. Agarré el 10 y el 6 para formar el 60.*

7) **Tomás (D)**: *Te armaste el 60 y el 4 y el 11…*

8) **P**: *¿Sí?*

9) **Tomás (D)**: *44*

10) **P**: *Ah, ya entiendo. Vos lo que decís es si acá* (señalando la unidad en el 66) *yo pongo un 0 y acá* (señalando el 0 del 40) *pongo un 4 sería lo mismo… Sí, dudo que sea una regla general, en este pasó… No sé si por ejemplo yo agarro… Habría que pensarlo… Si por ejemplo yo agarro ponele 73 por 40, si esto es lo mismo que hacer 70 por 43.*

La profesora formula la intervención anterior de manera pausada, lo que da lugar a que más alumnos se sumen y escuchen con atención la siguiente intervención de Agostina, que desencadena un intercambio con la profesora.

11) **Agostina**: *No, pero no es lo mismo, porque en el primer número se repite el mismo número y ahí estás poniendo 73 que es diferente, allá ponés 6 y 6, que son los mismos números, y lo transformás como 4 y 4, no como 4 y 6.*

12) **P**: *Yo creo que es una particularidad de esos números.*

13) **Agostina**: *Pero en todas las cuentas… Ahí, por ejemplo, 77 por 40 es lo mismo que 70 por 44… En todas las cuentas que sea así se puede… Donde diga, por ejemplo, 77, 88 por 30 y hacés 80 por 33 y da lo mismo…*

14) **P**: *Ahhh, está buenísimo… Vamos a hacer eso de tarea. Acá están diciendo, a partir de lo que dice Tomás. Tomás hace una pregunta y dice, vieron que nosotros arrancamos de acá* (66 x 40 = 2640) *y llegamos a la conclusión de que esto era igual a esto* (60 x 44), *los tres dan lo mismo. Y Agos está diciendo que siempre va a pasar eso, siempre que tengamos un 66 un 88, 77, 33 ¿entienden? Se los pregunto. Yo la verdad que…, eso lo dijo Agos, yo no me hago cargo de lo que dice Agostina, a ver si está diciendo cualquiera…*

Con la participación de varios alumnos, la tarea queda planteada del siguiente modo en el pizarrón y en las carpetas:

¿Será cierto que pasa siempre?
44 x 40 = 40 x 44
55 x 40 = 50 x 44
33 x 40 = 30 x 44

En el siguiente parágrafo nos detendremos en un análisis del contenido matemático que nos sirve como marco para interpretar la potencia de las tensiones colectivas que se producen en torno a ese contenido. Luego de este análisis consideraremos el papel de las interacciones como generadoras de un espacio de trabajo con la generalización matemática.

5.2.2. Análisis de la propiedad tratada en términos de propiedades matemáticas, dominio de validez y formas de representación

En este plano consideraremos, en primera instancia, que todo proceso de definición de una ley o propiedad general exige transitar dos procesos de delimitación y construcción intrínsecamente relacionados:

- Delimitar la familia o conjunto sobre la cual se aplicará dicha ley, el dominio de aplicación de la ley.

- Enunciar la ley o propiedad general sobre dicha familia.

Con respecto a la delimitación del dominio de aplicación de la ley emergente en este episodio, el mismo se puede considerar como un conjunto de pares ordenados de números enteros de dos cifras con las siguientes características[27] :

- el primero de los números es un múltiplo de 11,

- el segundo de los números es un múltiplo de 10.

Estos dos componentes del par pueden también ser caracterizados a partir de su escritura decimal:

- las dos cifras del primer número son iguales,

- el segundo número termina en cero.

Cada una de estas caracterizaciones "impone" condiciones sobre el tipo de enunciación que puede darse de la ley, regla o propiedad general y —a su vez— sobre las formas plausibles de analizar y probar su validez.

Un primer nivel de formulación de la ley podría ser: "La multiplicación de dos números como los considerados es igual a **otra multiplicación** entre números ***del mismo tipo***."[28]

Para precisar este enunciado será necesario apoyarse en alguna de las dos caracterizaciones dadas anteriormente:

A. "*El producto entre un múltiplo de 11 y uno de 10 resultará igual a* ***otro*** *producto entre un múltiplo de 11 y un múltiplo de 10* ***en donde los factores que multiplican al 10 y al 11 invierten sus lugares***".

O bien,

B. "El producto entre un número con dos cifras iguales y otro número terminado en 0 será igual a **otro** producto entre un número terminado en 0 y otro de dos cifras iguales **a *partir de transformar el primer par de números de la siguiente manera: donde hay cifras repetidas,***

[27] Vale aclarar que este dominio no se define explícitamente en la formulación que queda en el aula, sino que se ponen varios ejemplos que permitirían inferir cuál es el dominio completo.

[28] Recordamos que en esta sección estamos haciendo un análisis matemático-didáctico de la formulación matemática de la ley. En el aula se da una formulación imprecisa a partir de ejemplos particulares. Distinguimos esa formulación de las formulaciones matemáticas de este análisis.

se pone un 0 en el lugar de las unidades y donde hay un cero en el lugar de las unidades, se pone una cifra repetida".

La forma A involucra características de los números con relación a propiedades ligadas a la divisibilidad, independientemente del sistema de numeración decimal y de la particularidad de representación que tal sistema impone.

La forma B toma como objeto en el proceso de formulación de la ley a las cifras que representan a los números involucrados en tanto característica específica de esos números en el sistema de representación posicional en base 10. A partir de la forma en que se caractericen los números presentes en el dominio de validez de la ley que se vuelve asunto de este aula, se puede enfatizar la divisibilidad de los números o aspectos "más visuales" de las cifras involucradas. Las características del sistema numérico —y de las familias de números que conforman el dominio de validez de la regla— hace que se necesiten solo tres signos distintos para considerar la igualdad. Con el objetivo de enfatizar la regularidad que los alumnos perciben la representamos de esta manera:

nn x $m0$ = $n0$ x mm [en notación decimal n, m números naturales ≤ 9](*).

Es la representación particular de los números en base 10 la que favorece pensar esa identidad (*) con una cierta simetría visual o como un proceso *dinámico* que transforma las cifras de los dos números del miembro izquierdo de la igualdad de una manera en cierto sentido *inversa* hacia la conformación de los dos números del miembro derecho.

En relación a la forma A, el enunciado que afirma que el producto entre un múltiplo de 11 y uno de 10 es igual a **otro** producto entre un múltiplo de 11 y un múltiplo de 10, ***en donde los factores que multiplican al 10 y al 11 invierten sus lugares*** se inscribe en otro enunciado sobre divisibilidad más general: *el producto de un múltiplo de* ***c*** *y un múltiplo de* ***d es igual a otro*** *producto entre un múltiplo de* ***c*** *y un múltiplo de* ***d***, ***en donde los factores que multiplican a c y a d invierten sus lugares*.** Cuestión que resulta cierta debido a que (*k* ***c****)* x *(h* ***d)*** resulta igual a *(k* ***d)*** x *(h.****c)*** para todo valor de *c*, *k*, *d, y h.*

Una especialización de esta ley más general en la familia de los múltiplos de 10 y de 11 sería la propiedad que discutimos anteriormente, y una especificación[29] por fuera de esta

[29] En esta tesis utilizamos el término *especialización de una ley* para referirnos a la restricción de una ley —con un cierto dominio A— en una subfamilia B de elementos que pertenecen a A. Utilizamos también el término

familia, en otros casos particulares, podría ser, por ejemplo, 24 x 35 = 21 x 40 a partir de considerar (8 . 3) x (7 . 5) = (8 . 5) x (7 . 3).

Esta ley más general no puede ser formulada en términos de las cifras en la escritura decimal de los dos factores y de pasajes de cifras de un lado a otro de la igualdad como plantea inicialmente Tomás. En el ejemplo dado, las cifras del 24 y del 35 no necesariamente revierten en cifras de los otros dos factores del miembro derecho. La particularidad de estar refiriéndonos a un múltiplo de 11 y otro de 10 es la que promueve la relación directa entre los factores que multiplican al 10 y al 11 y la posición de las cifras de los dos pares de números en cada uno de los miembros de la igualdad.

Notar que la regla —en tanto mecanismo sobre las cifras (forma B)— es plausible de ser extendida —con formulación cercana— a otros pares de números particulares con más cifras como un número de *k* cifras iguales y otro número de *k* cifras con sus últimas *k*-1 nulas; así, las igualdades serían por ejemplo:

777 x 300 = 700 x 333

O bien:

44444444 x 70000000 = 40000000 x 77777777

Estaríamos refiriéndonos a los pares de números formados por múltiplos de $\sum_{j=0}^{k} 10^j$ y de 10^k (con respecto a la otra forma de indicar los pares de números involucrados).

Esta particularidad que pretendimos evidenciar en los párrafos previos, impuesta por los números 10 y 11 sobre la escritura de los productos de cada miembro de la igualdad, nos lleva a una primera consideración que se instala en la relación sentido-denotación: ciertas representaciones numéricas —más que otras— inducen en los alumnos construcciones generales cuya prueba de validez requiere luego la migración hacia una nueva representación.

Asimismo, el hecho de que la regla inducida por Tomás se genere inicialmente con referencia a las cifras produce un marco de interacción contenido en ese soporte representacional. La puesta en análisis de esa conjetura se sostiene en un primer momento —tanto por alumnos como por profesora— desde la especialización en nuevos casos numéricos a

---

especificación de una ley para referirnos a la aplicación de la ley general en elementos particulares de su dominio. Hemos adecuado esta distinción en nuestra tesis a partir de conversaciones informales y generosas con el Dr. Jean Phillippe Drouhard.

partir de un "juego" de distintos tipos de permutaciones de las cifras de variados números de dos cifras.

La ausencia de una expresión clara del dominio numérico sobre el que "actúa" esa regla habilita tal variabilidad a modo de ejemplos-contraejemplos.

Estaríamos abriendo el análisis a la consideración del proceso general en la clase de matemática de acuerdo a su relación con las representaciones matemáticas en curso. Nos resulta, entonces, de interés discriminar las características especiales de ciertas representaciones que parecen potenciar en los actores del aula nuevas formas de percibir, formular o estudiar una propiedad general. En otros términos, nos interesa capturar la complejidad de ciertas representaciones numéricas o algebraicas como disparadoras o inhibidoras de procesos de generalización, específicamente aquellas representaciones que favorecen en los alumnos la percepción de ciertas regularidades y dan espacio en el aula a la elaboración de conjeturas.

El análisis del alcance que adquiere la propiedad de la igualdad $k\,A$ x $q\,B = q\,A$ x $k\,B$ como permutación de los factores de un producto numérico —con independencia de su relación como identidad basada en la representación decimal— nos permite pensar que un docente que se posiciona en un proceso de análisis didáctico de reflexión posterior sobre los hechos que acontecen en su aula se ubica en condiciones de ampliar su perspectiva respecto de los conocimientos que viven en ella a partir de la actividad de los alumnos. En tal sentido, el aula —con sus ambientes de producción— amplía las posibilidades de producción de los conocimientos del docente y nos habilita a considerar su inserción en el aula como sujeto potenciado de acción y con nuevos problemas de estudio.

La regla de Tomás, creada sobre la representación decimal de los números a modo de acción o mecanismo, nos lleva a considerar el proceso de inferencia ligado a la producción de la regla en ese alumno. Su relación con los algoritmos de las operaciones aritméticas nos parece un punto de contacto. Es posible que la búsqueda de regularidades pueda estar influenciada por la experiencia de los alumnos con los algoritmos de las operaciones —en los cuales se opera haciendo cuentas con las cifras de los números para acceder al resultado de una cuenta—. Pensamos que esa práctica previa podría dar lugar a que los alumnos se sientan habilitados a adaptar el "es posible hacer cuentas con las cifras para obtener el resultado de una operación" en el "es posible mover las cifras (con la coherencia interna en párrafos anteriores señalada [forma B]) para obtener el resultado de una transformación que conserve la equivalencia numérica" (66 x 40 = 6░ x 4░ = 60 x 44).

5.2.3. La inscripción de la propiedad elaborada en el marco de las transacciones de la interacción del aula

En este plano nos parece importante recobrar el carácter transaccional que detallamos al referirnos a la noción de contrato de la Teoría de Situaciones en el Capítulo 3 de nuestro marco teórico. Recuperamos el proceso de construcción social de varios aspectos que regulan la actividad matemática como conjunto de relaciones e inferencias[30] para el caso particular de la producción de una regla.

Durante el proceso de elaboración colectiva de la regla que señalamos, se instala en el aula la problemática de la condición de verdad de una aserción matemática. Es lícito preguntarse sobre qué bases o soportes del intercambio se sostiene una posible regularidad, en su carácter de conjetura, hasta que se vuelven explícitas grupalmente formulaciones que permiten argumentar la verdad de la regla enunciada. Trataremos de recuperar la forma que adquiere la construcción en el marco de la interacción, forma que se gesta en la incertidumbre y en la imprecisión.

Panizza diferencia la noción de inferencia deductiva de la de no deductiva, y esto le permite distinguir la relación entre premisa y conclusión a partir de dos tipos de análisis: uno desde el punto de vista lógico y otro desde el punto de vista de la producción de conocimiento. Nuestro caso, el proceso de producción de una conjetura matemática, nos aloja justamente en el análisis desde el punto de vista de la producción conceptual. Coincidimos con la autora en que ni los matemáticos, ni los alumnos producen razonamientos solamente motivados por la idea de demostrar, sino que razonan intentando comprender, formular hipótesis, encontrar regularidades. Estos procesos, a veces conscientes pero no explícitos y a veces no conscientes, constituyen (también) un medio por el cual un sujeto construye conocimiento nuevo. (Panizza, 2005, p. 32)

Continuamos nuestro análisis, poniendo en nuestro telón de fondo las palabras de la autora, con la intención de distinguir variantes en los posicionamientos de los participantes de

[30] Al utilizar el término *inferencias* referimos a los encadenamientos de sentencias producidas con el propósito de intentar construir una argumentación que exprese a otro participante de un intercambio el pensamiento emergente en el espacio individual. Mencionamos en el marco teórico que Panizza (2005) analiza las relaciones entre enunciados que los sujetos establecen y la distinción entre significación e inferencia que la autora recupera de otros autores.

este proceso; variantes que podemos asumir como indicadores de las convicciones que ellos portan sobre el hecho que sostienen o intentan rechazar. Hay en este intercambio tres personajes que regulan la interacción a partir de sus voces: ellos son Tomás, Agostina y la profesora. Por un lado, Tomás, es quien infiere la generalización a partir de una igualdad particular, él sabe lo que quiere decir aun cuando no sabemos si conoce —en este primer momento— el alcance de su elaboración. Su primera formulación, ajena a la consideración de otros ejemplos —en la premura de la aparición de ese cálculo escrito en el pizarrón—, adquiere para nosotros el sentido de ser una expresión oral ante los otros de una primera percepción de la representación numérica de aspecto particular, 66 x 40 = 60 x 44. Sin embargo, los otros participantes —que resultan los interlocutores de Tomás— se posicionan tanto tratando de comprender como de evaluar el grado de credibilidad de la formulación del alumno.

Agostina parece distinguir, comprender y creer válida la propiedad como par que incluye una ley y su dominio numérico sobre el que se aplica, mientras que la profesora está claramente ubicada en el lugar de no conocer la elaboración de Tomás, de anticipar otra ley definida sobre otro conjunto numérico y de tratar de rechazar por medio de un contraejemplo su interpretación de la propuesta de Tomás ante el aula.

Avancemos un poco más con esto. En la primera intervención de Tomás, cuando formula "*o sea que a ese 6 ponele que yo lo paso como un 4 allá asociando, explicando…"*, instala la pregunta respecto de la validez del mecanismo que conjetura. Inferimos que su acción, en el momento en que decide someterlo a consideración de la profesora y sus compañeros, está inmersa tanto en un deseo de dar a conocer su primera percepción como de buscar adherentes que vuelvan viable —también para él mismo— considerar su veracidad.

Insistimos en que nuestro objetivo, en todo el capítulo pero en particular en este apartado, es instalarnos en el plano de estudiar la construcción o producción de conocimiento en términos de una trama de relaciones y convicciones que movilizan a los actores y a sus interlocutores. Desde nuestra perspectiva, la actividad inferencial de un actor —como Tomás— inmerso en una red de interacción con otros actores supone, por parte de los pares interlocutores, la aceptación o consideración de viabilidad o veracidad del pensamiento del sujeto —en un cierto momento— productor. Por ello, actividad de producción, actividad de pensamiento y aceptabilidad colectiva en términos de verdad son para nosotros procesos imbricados e inseparables. Desde este posicionamiento, las representaciones consideradas por un interlocutor en su formulación se mezclan con el valor y la información que ellas porten para cada participante del intercambio, cuestión que condiciona la credibilidad de los participantes durante el proceso de construcción.

En este sentido, la decisión —por parte de los acompañantes del intercambio y en especial por parte del docente— de dar lugar a un proceso de nueva producción —aún imprecisa, con probabilidad de ser falsa, poco comprendida, poco clara— está ceñida fuertemente por la convicción que ellos asuman sobre las posibilidades de verdad del enunciado que se toma en cuenta en cada momento. Convicción atravesada por la confianza que tiene cada interlocutor sobre el valor de verdad del contenido que se expresa en cada enunciado como sobre el responsable de la formulación del mismo.

Tendrían lugar, en este caso que estudiamos aquí, diferentes actualizaciones de la regla emergente ante las intervenciones que se dan. La regla inicialmente percibida por Tomás como una relación con cierta simetría semiótica susceptible de ser sometida a una "transformación de cifras" aparece en el aula sin que se explicite el dominio numérico para su aplicación y es considerada por la profesora que parece asumirla como falsa.

Esa consideración de la profesora, inmersa en un proyecto de dar lugar a la construcción de la racionalidad de sus alumnos, deviene en un conjunto de acciones que incluyen la formulación de un ejemplo que ella asume como contradictorio a partir de su interpretación de la regla de Tomás. En esta trama de aserciones, refutaciones y actualizaciones parciales, Agostina interpreta, define y cree en la regla de Tomás, asociada a un dominio de validez que por primera vez ella hace explícito como refutación al dominio y la regla que la profesora ha asumido.

Parte de ello se explicita en el intercambio entre la profesora y Agostina a propósito de la formulación inicial de Tomás:

10) **P**: *Ah, ya entiendo. Vos lo que decís es si acá* (señalando la unidad en el 66) *yo pongo un 0 y acá* (señalando el 0 del 4) *pongo un 4 sería lo mismo… Sí, dudo que sea una regla general, en este pasó… No sé si por ejemplo yo agarro… Habría que pensarlo… Si por ejemplo yo agarro ponele 73 por 40, si esto es lo mismo que hacer 70 por 43.*

11) ***Agostina***: *No, pero no es lo mismo, porque en el primer número se repite el mismo número y ahí estás poniendo 73 que es diferente, allá ponés 6 y 6, que son los mismos números, y lo transformás como 4 y 4, no como 4 y 6.*

En la intervención 10, la profesora se pronuncia, en términos de duda, acerca de la validez de la regla que interpreta a partir de la intervención de Tomás y los intercambios anteriores. Ella se instala en la consideración de una transformación sobre las cifras e interpreta que su regla *cambia la unidad del primer factor por 0 y el 0 del segundo factor por la unidad removida.* Desde este lugar plantea, en la intervención 10, estudiar si ocurre que 73 x 40 sea igual a 70 x 43. La regla de transformación que subyace a este ejemplo tampoco responde al caso considerado por Tomás pues, "aplicando la regla de la profesora" 66 x 40 debiera ser igual a 60 x 46 y no a 60 x 44 como realmente ocurre.

La alumna Agostina refuta en 11 el ejemplo de la profesora, en una primera parte de su intervención, porque los números del ejemplo de la profesora no están en el dominio de la regla[31], dominio que hasta este momento nadie ha mencionado ni esbozado pero que Agostina parece conocer o inferir. Nos referimos a su expresión: "*No, pero no es lo mismo, porque en el primer número se repite el mismo número y ahí estás poniendo 73 que es diferente, allá ponés 6 y 6, que son los mismos números…".*

En una segunda parte de su intervención *("… y lo transformás como 4 y 4, no como 4 y 6"),* la alumna señala que tampoco la regla de transformación que propone la profesora sobre los dígitos entre los números del primer producto y los del segundo se adapta al caso considerado por Tomás (la profesora "transporta" la unidad del factor que no es múltiplo de diez como unidad del factor que sí lo es).

La profesora, al intentar buscar un ejemplo que contradiga la regla que comenzó a esbozarse con Tomás, pone en evidencia que no la comprendió: no es para esos números que propone como ejemplo, no es esa la transformación que —según Tomás, sostenida por Agostina— habría que hacer.

La regla —aparente, difusa— se arma a partir de que los participantes completan una oración incompleta que anticipa e insinúa un mecanismo sobre números no caracterizados (como la frase de Tomás). Se completa a partir del ejemplo numérico de la profesora y su no correspondencia a la regla en emergencia, no correspondencia que se hace explícita fundamentalmente por la intervención de Agostina, quien da una primera formulación del dominio de números a considerar. Como indicamos en el capítulo correspondiente al marco teórico, la *mesogénesis* se elabora como categoría conceptual que refiere y conceptualiza las

[31] Dos cifras iguales en un factor y una cifra y un 0 para el otro.

redefiniciones continuas —y necesarias— del contenido de la transacción didáctica en la cooperación entre alumnos y docente. Es en ese sentido, en este marco mesogenético, que se plasma e imbrica la regla emergente hasta admitir un grado de estabilidad suficiente que permita su planteo en la intervención 14 de la profesora con una explicitación posterior en el pizarrón —aún particularizada en los ejemplos—.

El análisis señalado renglones arriba de las intervenciones de Tomás, y especialmente de la profesora y de Agostina —intervenciones 10 y 11— creemos que expresa el proceso de actualización del contenido que, como sustancia nueva, no fue anticipado por la profesora en la planificación particular[32] de esa clase. Nuestro estudio de los procesos de generalización en la clase de matemática resalta y distingue el carácter de actualización continua del contenido —no anticipado necesariamente—, lo que constituye parte plena y necesaria para la actualización y evolución de la racionalidad del alumno con respecto a los procesos de generalización matemática.

En el Capítulo 3, mencionamos también el concepto de *topogénesis* como categoría de análisis de las responsabilidades que se despliegan y modifican durante del proceso de transacción didáctica. En el fragmento previo es sustancial la fuerza de las intervenciones 11 y 13 de Agostina como agente de devolución[33] a la profesora. Sin tener nosotros la posibilidad de precisar si dispone o no de razones más fuertes que la expresión de los números para sostener que esa identidad valdrá siempre sobre los números considerados, destacamos que es Agostina quien sostiene el problema ante la profesora hasta tanto la pregunta goza de una cierta estabilidad y precisión como para que la profesora comience a comprenderla y pueda replicar la devolución en el colectivo en términos de nueva actividad. Hay aquí una inversión de los roles tradicionales en donde el docente es quien devuelve el problema al alumno. Esto nos remite al trabajo de Mercier (1998) quien concibe la clase como un espacio de producción cooperativa en el que la intención de enseñar se extiende no solo al docente sino a los alumnos.

---

[32] Nos referimos a “la planificación particular de esa clase”, diferenciándola de la planificación global de la docente, la cual incluye —sin lugar a duda— un proyecto de abordaje y trabajo con lo general que hace que, aún sin ser anticipada esa regla específica que emerge, esté anticipada cualquier situación potencial que pueda ser capturada para promover avances y actualizaciones de la relación personal y colectiva de los alumnos con la generalización matemática.

[33] En el sentido de devolución de un problema considerado en la Teoría de Situaciones.

Este autor permite concebir ciertos espacios en el trabajo matemático del aula en donde se desdibujan momentáneamente las distancias docente–alumno.

El juego de responsabilidades respecto de la regla en construcción es la que permite, tracciona y define su emergencia. La evolución del intercambio se plasma en esos cambios de roles que permiten instalar modificaciones y complementar la producción inicial. Pero una responsabilidad que parece haber asumido la profesora es la decisión de flexibilizar el tiempo de enseñanza concibiendo el valor de esa actividad matemática —difusa aún en términos de tarea— para la clase[34]. La profesora expresó —tanto en sus entrevistas informales con el equipo como en los actos que conocíamos de su modo de desenvolverse en otras clases— una concepción de que la evolución de la racionalidad matemática, en torno de la argumentación con lo general, solo puede gestarse en el marco de una actividad social.

Nuestro análisis del intercambio[35] se ubica como ejemplo de lo señalado en el Capítulo 2, correspondiente al estado del arte respecto de la potencialidad de la interacción colectiva. Como hemos mencionado, Barallobres (2007) asume la importancia de la interacción como indispensable en la construcción de un medio artificial que favorezca el reencuentro entre conocimientos personales y saberes culturales hacia la emergencia de una racionalidad matemática. Nuestro fragmento del episodio da cuenta de un proceso de construcción en donde “el otro” se convierte en una fuente de sostén de la incertidumbre, en un elemento central para continuar frente a las vicisitudes del momento en que la duda sobrepasa a la construcción.

Desde esta perspectiva, la construcción de la conjetura se vuelve presente con aspectos propios del contexto colectivo que permiten su emergencia, fundamentalmente en el hecho de generar un andamio social para transitar la incertidumbre hacia la elaboración de una pregunta en términos matemáticos aceptables para la cultura de esa aula.

Cabe incorporar a nuestro análisis del intercambio desde el plano social que a la regla que se instala a partir de formulaciones imprecisas se agregan gestos de los dedos indicando el movimiento de intercambio de las cifras y parciales precisiones que los partícipes del

---

[34] Decimos esto por los encuentros que mantuvimos con la profesora —pre y post episodios— y por el modo en que la vimos comportarse y alterar frecuentemente sus planes del día dando lugar al avance y reflexión sobre algún proceso de producción que valorase instantáneamente como formativo para el grupo.

[35] Fundamentalmente, el fragmento con las intervenciones de Agostina y la profesora con relación a la intervención inicial de Tomás.

intercambio van exigiendo para su entendimiento. Como señalamos, el pedido de precisión no suele resultar a partir de una pregunta —formulada claramente en tanto tal— que la reclame, sino como respuesta de un interlocutor sobre la incomprensión de otro a su intervención.

Recortamos —a partir de lo planteado— el reconocimiento de dos aspectos del intercambio que fortalecen el proceso de generalización. Por un lado, el inter-juego de implícitos y explícitos imprecisos durante el intercambio contribuyen a una identificación del dominio sobre el cual se aplica la ley que se está estudiando. Por otro, el contexto social del intercambio genera una malla de sostén de la incertidumbre que permite la definición, el recorte y la formulación de la conjetura.

Asimismo, resaltamos que el planteo de los enunciados generales que se analizan —en un ambiente carente aún de letras— tiene lugar, principalmente, recurriendo a ejemplos numéricos generales[36]. También aparecen con menor frecuencia otras verbalizaciones imprecisas que pretenden capturar lo general, como es el caso de *"allí es el mismo número"*, que se apoyan en señas o gestos efectuados sobre los casos numéricos tomados en cuenta.

En tal sentido, y como es ya sabido, para la comunidad aula, la historicidad del momento y espacio de gestación de la pregunta proporciona un marco de aceptaciones que pasa a heredar la formulación que finalmente adquiere la conjetura. El espacio del aula permite aceptar estados de contextualización y particularidad en nombre de planteos descontextualizados y generales que, desde las prácticas de formulación de la disciplina, serían considerados provisorios.

Los alumnos que responden a —y rechazan— los ejemplos numéricos de la profesora, lo hacen ya desde una posición generalizadora y otorgan generalidad a los números particulares que circulan en el aula para poder dar forma a la pregunta. El rechazo instantáneo está en la no adaptación del problema general —para esos alumnos— a los ejemplos propuestos por la profesora y no en la validez o no del problema general que expresa la profesora con los nuevos números. En otras palabras, se rechaza la formulación de la regla general que pretende expresar la profesora a partir de los nuevos ejemplos y no la validez de la generalidad expresada. Bien podría esa generalidad no adaptada a la propuesta por Tomás ser válida aún sin contener en sí los ejemplos considerados inicialmente por Tomás.

[36] Tanto por los alumnos como por la profesora.

5.2.4. La validación de la propiedad gestada: un proceso social y transaccional

En la clase siguiente a la recién estudiada, la profesora aborda un trabajo de devolución a los alumnos del problema de la validez de la pregunta que quedó formulada con ejemplos en la clase anterior. Recupera la necesidad de dar argumentos sobre esa conjetura. Creemos necesario reiterar que la conjetura se define luego del intercambio analizado en el apartado anterior (5.2.3), en la inmediatez de la finalización de la clase de ese día, y la validez de la pregunta —que estudia este apartado 5.2.4— acontece en la clase del siguiente día.

15) **P**: *Este era un problema que surgió la clase pasada, no es un problema de la guía. ¿Se acuerdan? Lo planteé yo acá al costadito y lo puse como tarea. Lo que había que pensar [es] si esto iba a pasar siempre, o sea si era cierto que esto pasaba siempre, por ejemplo si yo tengo 77 por 50, por 40, perdón, si esto era lo mismo que qué.*

16) **Tomás**: *7 por 11 y 4 por 10.*

17) **P**: *¿Pero cuál era el problema?*

18) **Varios**: *70 por 44.*

19) **P**: *Si esto era lo mismo que 70 por 44, por ejemplo. Digo…,¿va a pasar siempre esto?*

20) **Varios**: *Sí.*

21) **P**: *Era un problema de tarea ¿todos hicieron la tarea?*

Murmullos, voces.

22) **Manuela**: *Yo no lo entendí.*

Murmullos.

23) **Manuela**: *Yo no lo entendí.*

24) **P**: *¿No entendiste el problema o cómo contestarlo?*

25) **Manuela**: *Como contestarlo.*

26) **P**: *A ver… pero pensaste algo, Manuela, ¿cómo fue?*

27) **Manuela**: *No, no se me ocurrió nada… No sé por qué…*

La profesora retoma la situación propuesta la clase anterior y sugiere a los alumnos la recuperación de alguna formulación. Pregunta en la intervención 15: 77 por 40,*"si esto era lo mismo que qué"*. La ambigüedad del *"qué"* o *del "esto"* lleva a Tomás a responder con una identidad —también general— pero que no plantea para los integrantes de esta aula una inquietud nueva a ser indagada (77 por 40 = 7 por 11 por 4 por 10 es una igualdad válida y aceptada por propiedades numéricas y no representa para esta aula una conjetura a ser analizada), no representa *problema*, en palabras de la profesora, que insiste hasta que otros alumnos responden 70 por 44. En este sentido, en principio es la profesora la encargada, con sus intervenciones, de monitorear, decidir y distinguir las generalidades que serán asumidas y aceptadas de aquellas que requieran una validación en la clase.

La negociación de cuáles serán certezas para la comunidad aula en acción y cuáles serán cuestiones pendientes de indagación es una negociación asimétrica en la que la profesora tracciona e impulsa con su referencia a la construcción de la racionalidad de los alumnos. En este juego de implícitos, de aceptaciones y rechazos, empieza a elaborarse en el aula un microsistema que define, en su funcionamiento, lo que podrá o no ser considerado como una problemática a estudiar.

Varios piden contestar.

28) **P**: *Vamos a Belén que fue la que primero levantó la mano.*

29) **Belén**: *Yo tomé para explicarlo un ejemplo, que era 30 por 44 y 33 por 40. Hice de 30 por 44 hice 3 por 5 por 2, o sea lo desarmé. Era 3 por 5 por 2 por 44 y después de 33 por 40 hice 11 por 3 por 4 por 5 por 2…*

30) **P**: *¿Entienden lo que hace?*

31) **Alumna**: *Sí, descompone…*

32) **P**: *Descompone… El 30 lo descompone como 3 por 10.*

33) **Denisse**: *¿No es más fácil si…?*

34) **P**: *No sé qué es más fácil. Vamos a respetar lo que hizo Belén, 3 por 10.*

35) **Alumno** (superpuesto con P): *5 por 2.*

36) **P**: *Y al 44, 11 por 4, y de este lado descompone al 33 y al 40 como 4 por 10, ¿se entiende?¿Eh?, ¿sí?¿Y cuál es la conclusión, Belén, entonces?*

37) **Belén**: *Entonces, ahí me di cuenta que son los mismos números pero cambiados de lugar.* (pausa, silencio) *O sea, el 11, el 3 un 4, el 5 y el 2… los mismos que están… estos números pero cambiados de lugar.*

38) **Denisse**: *Pero eso no puede pasar siempre porque lo podés descomponer de diferentes maneras.*

39) **Belén**: *Pero igual pasa siempre porque si vos agarrás, por ejemplo, 77 por 40 lo desarmás y desarmás los 70 por 44 y te da lo mismo, los mismos números.*

40) **Denisse**: *Igual, yo lo hice…*

41) **P**: *A ver… No, no, no… No quiero escuchar otra forma de hacer, estamos discutiendo la de Belén y a partir de la de Belén pueden ir poniendo lo que ustedes pensaron pero no otra forma, ¿está? Yo quiero traer una cosa, lo que Belén dice: "Tienen los mismos números"…,¿se acuerdan cómo se llamaban los números que están multiplicando? Tiene un nombre concreto… Es* factores. *En "tienen los mismos números" podemos poner tienen los mismos factores.*

La profesora escribe en el pizarrón:

30 . 44	y	33 . 40
3.5.2.11.4		11.3.4.5.2

Tienen los mismos factores
en distinto orden

42) **Alumno/a**: *¿Esto lo copiamos?*

43) **P**: *Dale… Pongan la fecha de hoy. ¿Se acuerdan lo que habíamos quedado? Fecha, número de hoja…*

Los alumnos copian, unos pocos preguntan qué ejercicio es. La profesora responde nuevamente que es tarea, que no estaba en la guía.

44) **P**: *Tienen los mismos factores, como dijo Belén, en distinto orden.*

45) **P**: *Yo quiero tomar un poquito… Quiero retomar un poquito lo que dijo Denisse y lo que le contestó Belén a Denisse. Lo que dice Denisse es "ah, re bonito, pero si yo descompongo de otra forma ¿por qué me van a dar iguales?". ¿Entienden lo que está diciendo Belén? Porque… No, Belén no, Denisse… Porque Belén a 30 lo puso como 3 por 10, como 3 por 5 por 2. ¿Qué pasa si al 30 lo ponía como 15 por 2?*

46) **Luciano**: *Pero tenés que buscar el número…*

47) **Belén**: *15 por 2, y a 15 lo seguís dividiendo y te da 3 por 5… pero igual sería lo mismo porque…*

48) **P**: *¿Qué le podemos contestar a Denisse?*

49) **Belén**: *Yo tengo dos respuestas que le podría dar, una es que siga descomponiendo hasta llegar al número más chiquito y ahí ya se va a dar cuenta, y otra es que si te da 15, 15 por 2 al otro número te va a quedar el 5 y el 3.*

50) **Denisse**: *Y... Pero esos números los podés seguir descomponiendo. Por ejemplo, el 4 lo podés seguir descomponiendo.*

51) **P**: *Bueno, sí, sí, pero como ella ya encontró que eran iguales no necesitó descomponer el 4.*

Durante este intercambio, la primera intervención de Belén —29: "*Yo tomé para explicarlo un ejemplo, que era 30 por 44 y 33 por 40. Hice de 30 por 44 hice 3 por 5 por 2, o sea lo desarmé. Era 3 por 5 por 2 por 44 y después de 33 por 40 hice 11 por 3 por 4 por 5 por 2…"*— empieza a describir el proceso general a partir del uso (y reconocimiento de este uso) de un caso particular (30, 44 y 33, 40). Su estrategia recurre a la descomposición de los factores de los dos productos que se intenta probar que dan iguales. Sin embargo, Belén no descompone completamente el primer producto manteniendo el 44.[37]

La profesora, en la devolución al resto de los alumnos de la descomposición de Belén, recorta y agrega nueva información sobre la incorporada por Belén. Descompone también el número 44 en 4 x 11 y enfatiza los factores 10 y 11 del primer producto —intervención 32: "*Descompone… El 30 lo descompone como 3 por 10"* e intervención 36: "*Y al 44, 11 por 4, y de este lado descompone al 33 y al 40 como 4 por 10, ¿se entiende?¿Eh?, ¿sí?¿Y cuál es la conclusión, Belén, entonces?"*— y completa con su escritura del pizarrón. El recurso de la profesora atiende a su proyecto de abordar la validez de lo general en el aula, y a su anticipación

[37] A esta altura de su escolaridad, los alumnos de primer año han tenido un acceso a lo general a partir de propiedades enunciadas generalmente sobre los números y sus operaciones o sobre objetos geométricos. Frecuentemente las letras entraron al aula como una forma de dar expresión a estas propiedades (sin realizar transformaciones sobre ellas que permitan obtener nueva información o fundamentar alguna aseveración), para representar elementos geométricos, o bien para condensar "un relato de cálculo" —mediante una fórmula— en el cálculo de áreas o perímetros. En tal sentido, la expresión de lo general en el caso aritmético se da usualmente con apoyo en números particulares y el agregado de términos importados del lenguaje coloquial como ser *siempre, acá, esto, algunos* o símbolos presentes en la comunicación cotidiana (pausas en las pronunciaciones, indicadores de recurrencia con las manos, reiteraciones como *"dos más tres, dos más tres y así..."*, entre muchos otros).

de que los múltiplos de 11 y los múltiplos de 10 son centrales para establecer una validación del enunciado cercana a los conocimientos de estos alumnos.

Belén se incorpora a esta acción de la profesora de agregar el 11 pero conserva la descomposición del factor 10 como 2 x 5. Aun así, en su formulación 37 (*"Entonces, ahí me di cuenta que son los mismos números pero cambiados de lugar*. [...] *O sea, el 11, el 3 un 4, el 5 y el 2… los mismos que están… estos números pero cambiados de lugar."*) enfatiza que su estrategia está en analizar los factores presentes en los dos productos para ver que resultan iguales y no en ese 10 y ese 11. No menciona nada en este momento de que se trata de factores primos, pero lo hará en otras intervenciones refiriéndose a ellos como *los números más chiquititos* (intervención 49[38]).

El argumento de Belén requiere movilizar centralmente dos conocimientos:

- Asumir que para cualquier número será posible hallar alguna descomposición en factores.

- Asumir que en todos los casos en que la igualdad sea válida se podrá arribar a una descomposición "común"[39] que permitirá justificar la validez de dicha identidad.

Si bien Belén asume que la descomposición será un proceso general que podrá ser aplicado a otros números —como menciona al responderle a Denisse en 39: "pero igual pasa siempre"[40]— no hace explícitas las razones del porqué siempre se encontrarán los mismos factores y permanece anclada en números particulares.

Su argumento es en cierto modo empírico, en el sentido de que exige mirar cada vez la descomposición efectuada para concluir que se encuentran los mismos factores. Diferenciamos los argumentos empíricos de los que permiten anticipar (*anticipatorios*) la validez de la igualdad para nuevos números. Cualquier argumento anticipatorio requerirá atravesar que en ambas multiplicaciones (*nn* x *m*0 y *n*0 x *mm*) hay:

---

[38] Intervención 49 de Belén: "*Yo tengo dos respuestas que le podría dar, una es que siga descomponiendo hasta llegar al número más chiquito y ahí ya se va a dar cuenta, y otra es que si te da 15, 15 por 2 al otro número te va a quedar el 5 y el 3*".

[39] Mencionamos *común* y no *única* ya que no sabemos a ciencia cierta si Belén asume la unicidad, aunque su referencia a los números "más chiquititos" a los que habría que llegar podría contener implícitamente tal supuesto.

[40] Intervención 39 de Belén a Denisse: *"Pero igual pasa siempre porque si vos agarrás, por ejemplo, 77 por 40 lo desarmás y desarmás los 70 por 44 y te da lo mismo, los mismos números*".

- un múltiplo de 10 y otro de 11, ó

- uno de 5 y otro de 11, ó

- uno de 2 y otro de11.

Y que los factores que los hacen múltiplos en cada uno de los tres casos son los mismos para ambas multiplicaciones:

- *m* y *n*, ó

- 2, *m* y *n*, ó

- 5, *m* y *n*.[41]

Otro argumento general válido, pero no esperable, sería el de la prueba exhaustiva de las 81 igualdades[42] de los números de dos cifras que responden a los pares considerados.

Un posible argumento general —adaptado a los conocimientos de esta aula y que es el que sugiere la profesora— nos lleva a considerar que en los números "de ese tipo" siempre se encuentra un factor 10 y un factor 11, y que la igualdad de los dos productos se garantiza porque las cifras de las decenas, en los factores considerados inicialmente, son las mismas en ambos productos.

Nos parece importante recortar la intervención 38 de Denisse: "*Pero eso no puede pasar siempre porque lo podés descomponer de diferentes maneras*"[43], ya que ella parece plantear que no puede aceptarse un argumento que dependa de una descomposición particular de los números iniciales, argumento que podría derrumbarse si la descomposición elegida fuese otra. Su objeción trasluce que Denisse no está convencida de que cualquiera sea la descomposición que establezca inicialmente, será posible siempre arribar a una descomposición "común" que permita concluir la identidad buscada.

---

[41] Nuevamente, esta es una cuestión particular del hecho de que el producto entre un múltiplo de *c* y un múltiplo de *d* con factores que los hacen múltiplos *h* y *k* resulta igual a otro producto entre un múltiplo de *c* y un múltiplo de *d*, si se consideran los mismos factores que los hacen múltiplos (*h* y *k*).

[42] Excluimos los pares que comprendan el 00 por no ser aceptados por los alumnos como números de dos cifras.

[43] Denisse —se verá en el apartado que sigue— , junto con su compañera de banco, Julia, monitorearon otro procedimiento diferente al de Belén, que consistió en descomponer un lado de la igualdad y reencontrar los factores del otro lado de la igualdad sin necesariamente pasar por el análisis de que la descomposición de ambos miembros debe ser la misma.

Hay un proyecto de generalidad en su planteo, relacionado con la argumentación de la verdad de una proposición: *La validez de una proposición no debiera depender de ciertas contingencias en el argumento.*

Agregamos que este primer intercambio entre Belén y Denisse que se da en 38 y 39 parece estar monitoreado por dos lógicas de pensamiento diferentes sobre la calidad del argumento. Por un lado, Denisse objeta el argumento de Belén porque asume que hay distintas descomposiciones del 30 x 44, y que Belén está argumentando sobre la base de una en particular y no porque esos dos números no puedan ser tomados de forma general —aún en su particularidad— para considerar la validez de la regla a demostrar. Implícitamente, ella parece estar discutiendo que se puede arribar a la igualdad del otro miembro con la descomposición que efectúa Belén, e indirectamente cuestionando la generalidad de su argumento, ya que parece anticipar que con ciertas descomposiciones no se puedan formar los dos factores del otro lado de la igualdad. Por otro lado, Belén le responde interpretando que la objeción se vincula a la particularidad del 30 y el 44 respecto de otros factores como 50 x 77, etc. Belén no enfatiza ni declara, como dijimos, la generalidad de su argumento para nuevos números, pero tampoco Denisse parece reclamarle esa generalidad.

Si bien no se puede asegurar con certeza —a partir de la intervención oral de Denisse— si su reclamo de generalidad está anclado en la descomposición particular del 30 y el 44 o en reclamar la validez del argumento de Belén sobre cualquier producto de un número de dos cifras iguales y otro con dos cifras terminado en 0, las intervenciones posteriores y la orientación que coordina la profesora en el fragmento del siguiente apartado parecen mostrar que su interpretación del reclamo de Denisse es por el uso de una descomposición particular del 30 x 44. Por ello creemos que ella orienta a la clase a discutir que siempre se arribará a una descomposición común a partir de los factores "más chiquititos". Hay una producción inicial y una intervención docente posterior orientada a avanzar con la racionalidad de los alumnos a partir del intercambio que se dispara con la intervención de Denisse.

5.2.4.a. El espacio colectivo como sostén de entrada a la validez de lo general a partir del uso implícito de conocimientos y propiedades generales

52) **Denisse**: *Lo más simple sería descomponer uno solo y a partir de eso ir buscando multiplicaciones entre ellos que den la otra cuenta.*

53) **P**: *Bien, eso es una estrategia. Lo que hace Belén sería… Pongámoslo acá: la estrategia de Belén (*refiere a un sector del pizarrón). *Y ahora ponemos la tuya, Denisse. ¿Entienden lo que está diciendo Denisse? Es importante. Denisse dice: "pero si a mí, yo por ahí yo descompongo de otra forma, por ahí no resultan los mismos números…". Belén a eso le contesta. Pero, ¿entienden la pregunta de Denisse, o la duda o la inquietud de Denisse?*

54) **Tomás**: *Que se puede descomponer de otra forma y no me da.*

55) **P**: *Claro, que por ahí vos decís "me dieron distintos, entonces son distintos".*

56) **Alumna**: (No se escucha, comenta algo sobre la más chiquita).

57) **P**: *Claro, eso es lo que le decía Belén: "pero agarrate la última descomposición, la más chiquitita y nos fijamos ahí qué pasa".*

58) **Manuela**: *Pero el otro día habíamos visto que por más que yo lo descomponga en distintos números… o sea, quizás no llego en la primera, pero siempre de alguna manera voy a llegar porque hay una sola forma.*

59) **P**: *Bien, ¿entienden lo que está diciendo Manuela? Dice [que] por ahí con una descomposición no tengo todo lo que yo quiero pero si sigo descomponiendo hasta lo más chiquitito todos tendríamos que llegar a la misma descomposición. ¿Eso se entiende? ¿Sí? Por ejemplo, el 70* (acompaña sus palabras con la escritura que citamos aquí abajo)*, el 70 yo lo puedo descomponer como 7 por 10. Supongamos que Javier lo descompone como 2 por 35 y él* (señalando a otro alumno) *lo descompone como 7 por 5 por 2, ¿seguimos hablando del 70 en la descomposición de él, en la de él y en la mía?*

60) **Alumnos**: *Sí.*

61) **P**: *¿Y qué pasa?, ¿son distintas descomposiciones?*

62) **Alumnos**: *Sí.*

63) **P**: *¿Qué pasa? Por ejemplo, en la del 70 que yo dije como 7 por 10, ¿qué pasa con esta descomposición?, ¿cómo la puedo seguir mirando?*

64) **Alumnos**: *7 por 5 por 2.*

65) **P**: *Y Javier dijo 2 por 35, ¿se puede descomponer?... Esto es 70 y ¿cómo se va a poder descomponer?*

Varios alumnos contestan bien.

66) **P**: *2 por 7 por 5.* Completa la escritura del pizarrón:

70

7 . 10
7 . 5. 2

2 . 35
2 . 7 . 5

67) **P**: *¿Todas estas cosas hablan del 70?* (Los alumnos responden afirmativamente). *El 70, ¿qué factores tiene adentro? Diríamos, ¿qué factores?...*

68) **Alumna**: *El 7, el 10, el 5, el 2, el 35…*

69) **P**: *Ahora todos hablamos de lo mismo, todos llegamos al fin y al cabo si seguimos, y el seguir es el… El otro día Luciano, ¿se acuerdan que Luciano planteó lo de la raya*[44] *y de seguir dividiendo? Luciano decía "tenemos que dividir por números chicos". Es que los números chicos… ¿por qué por ejemplo el 2?, ¡o por qué por ejemplo el 4?, Uno lo elegiría o no lo elegiría, y es un número chico. Tiene mucho que ver, pero el 4 tiene al 2 adentro, lo puedo seguir dividiendo por 2.*

70) **Denisse**: *O si no, también puede ser... Vos lo descomponés y vas hasta donde querés, después descomponés al otro y vas diciendo "bueno, 2 por 2 es 4", y entonces bueno, dos 2 juntos forma el 4…*

71) **P**: *Vas encontrando los factores… Exactamente, acá lo que tiene que ser importante es que dos números para ser iguales tienen que tener… No puede haber un factor de más. Por ejemplo, si yo acá pongo otro 2, ¿serían iguales estos números? Y no, porque este tendría un factor 2 de más. ¿Entienden lo que estamos diciendo? Tienen que tener los mismos factores, la misma cantidad de factores, no puede haber nada distinto.*

[44] La "raya" —así como la había nombrado Luciano en una clase anterior— refiere a la línea vertical del proceso frecuente de la escuela primaria para descomponer en factores, del lado izquierdo se anotan los cocientes que se obtiene a cada momento y del lado derecho los divisores. En aquella clase, la profesora no tomó este proceso de Luciano ya que el alumno tenía el mecanismo pero no lo utilizaba como elemento para elaborar una argumentación de la pregunta que los convocaba a la discusión.

En el segmento que recorta el siguiente fragmento —fundamentalmente en las intervenciones 52 a 68—, la profesora orienta la discusión en la clase hacia la existencia o no de una descomposición "común". Hay así dos énfasis en las voces desplegadas en las estrategias diferentes que montaron Belén por un lado, y el grupo de Julia y Denisse, por el otro. Denisse refuerza en su primera intervención (52) su proceso de descomponer el par de números que son factores de un miembro de la igualdad y reencontrar el otro par de números que son factores del otro miembro. Belén enfatiza su estrategia de descomponer cada lado de la igualdad hasta los factores primos o al menos hasta descubrir que ambos lados de la igualdad están conformados por productos entre iguales factores. Ambos modos de proceder son empíricos aunque sustentan un uso de los ejemplos particulares como representantes de otros números. La profesora trata de aclarar y hacer hincapié en que son dos estrategias de descomposición diferentes.

El hecho de que la regla de Tomás refiera a dos pares de números "factores", de los cuáles hay que argumentar la igualdad de su multiplicación corre del centro de la escena que la existencia de descomposición única refiere a una propiedad numérica de todo número entero[45]. En el aula, este conocimiento se despliega de modo implícito al hablar de la descomposición "última" o de "lo más chiquito" (intervención 59), o a partir del llegar "al número más chiquitito"(intervención 49) y muy especialmente en la voz de Manuela que recupera en la intervención 58 que "siempre" se va a llegar porque "hay una sola forma": ***"****pero el otro día habíamos visto…que por más que yo lo descomponga en distintos números o sea quizás no llego en la primera pero siempre de alguna manera voy a llegar porque hay una sola forma".*

Cabe aclarar que tanto en la estrategia inicial de Belén como en la de Denisse hay solo una preocupación por encontrar ciertos factores, aunque no sean los primos. Este modo de hacer entra en escena en la discusión colectiva cuando Denisse plantea que habría diferentes maneras de producir descomposiciones.

La profesora solo tiene —a esta altura de la escolaridad— elementos para traer la cuestión teórica de la unicidad en la descomposición en primos, a partir de recuperar el proceso de descomposición en experiencias previas de los alumnos[46]. Lo hace fuertemente en su

---

[45] En este caso, el resultado de cada multiplicación.

[46] Este proceso frecuentemente se enseña en la escuela primaria para encontrar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

intervención 59, que recupera lo antedicho por Manuela y lo continua hasta la intervención 68. Ella recurre al reconocimiento de diferentes descomposiciones de un número particular (el número 70) y a aceptar que a partir de cualquiera de esas descomposiciones puede "reencontrarse" otra que no puede seguirse descomponiendo.

En su intervención 71 ("*Vas encontrando los factores… Exactamente, acá lo que tiene que ser importante es que dos números para ser iguales tienen que tener…., no puede haber un factor de más. Por ejemplo, si yo acá pongo otro 2, ¿serían iguales estos números? Y no, porque este tendría un factor 2 de más. ¿Entienden lo que estamos diciendo? Tienen que tener los mismos factores, la misma cantidad de factores, no puede haber nada distinto"*), la profesora vuelve a destacar la propiedad de unicidad al mencionar que un mismo número no puede admitir descomposiciones "últimas", o que "no pueden seguirse"[47], que contengan diferentes factores o los mismos, pero en diferente cantidad.

5.2.4.b. La producción de una pareja de alumnas como marco para evaluar otras producciones. La estrategia de Denisse y Julia

En el fragmento que sigue, otra alumna —Julia— entra en la escena colectiva. Recupera lo que Denisse había planteado en varias oportunidades, durante la mayoría de sus intervenciones de los fragmentos anteriores, y destaca su estrategia de descomposición de un par de números de un miembro de la igualdad y la búsqueda de reencuentro de los números del otro miembro de la igualdad. Julia y Denisse habían trabajado juntas. La estrategia de estas chicas, tan empírica como la de Belén, exigiría garantizar que siempre es posible reencontrar el otro par de factores, cuestión que también depende de la consideración de los factores involucrados.

Julia expone, en un diálogo con la docente, las decisiones que implica su modo de atender al problema:

72) **Julia**: *Vale*[48]
73) **P**: *¿Sí?*

[47] Son expresiones incorporadas por nosotros.

[48] Vale es la profesora del curso.

74) **Julia**: *Además, si vos por ejemplo tenés el 33 y el 40 y lo descompones, vos ya sabés a lo que querés llegar, vos querés llegar al 44 y al 30. Entonces, antes de descomponer te vas fijando si las cosas te dan, entonces si ves que no te da, intentás a ver si es que no o si es que la cosa está mal, pero como vos ya sabés lo que en realidad te tiene que dar, antes de descomponer... O sea…*

75) **P** (superpuesta): *Empezás a unir como te conviene.*

76) **Julia**: *Claro, o si no hacés más chico o más grande según como te convenga para lo que querés.*

77) **P**: *Claro, vamos a ponerlo en concreto. Eso era lo que antes decía Denisse. ¿Me podrías decir bien, bien concreto cómo sería?, ¿de cuál arrancás?*

78) **Julia**: *Nosotros lo que hicimos fue: el 33 lo descompusimos en 11 por 3.*

79) **P**: *Arrancás del 33 por 40.*

80) **Julia**: *Ah, sí, por 40.*

81) **P**: *Entonces, fíjense lo que hacen las chicas: descomponen 3 por 11 ¿Por?*

82) **Julia**: *4 por 10.*

83) **P**: *4 por 10 es una descomposición en principio distinta.*

84) **Julia**: *Después, lo que hicimos fue... El 11 lo dejamos en 11, el 3 en 3, el 4 en 2 por 2 y el 10 en 5 por 2. Para formar el 30 juntamos 3 por 5 por 2 y para formar el 44, 11 por 2 por 2.*

85) **P**: *Bien, acá yo ya me doy… Mirá, junto este con este y me da el 30, y el 11 y el 4 me da el 44.*

86) **Julia**: *Claro, es lo mismo solo que lo hicimos un poco más chico.*

87) **P**: *Claro, ustedes hicieron más chiquititos los números y un poquito más larga la cuenta… Sería… ¿pero se ve que acá ya se ve también?*

88) **Julia**: *Claro, pero nosotras antes de eso, por ejemplo, dijimos "¿en qué descomponemos el 40?" y dijimos "en 4 por 10" porque si lo descomponemos en 4 por 10 ya sabemos que vamos a tener con qué formar los números que necesitamos.*

Tanto Denisse como Julia, como señalamos, proponen no transformar ambos estados iniciales (los cálculos 33 x 40 y 30 x 44) hasta llegar al mismo estado para ambos, sino que proponen realizar transformaciones sobre uno de los estados teniendo el otro en la mira, hasta arribar a él.

Por otro lado, la última intervención de Julia describe un proceso que llevó a cabo junto con Denisse en el que es muy importante la elección de la descomposición a considerar en función del objetivo que se proponen (*"¿en qué descomponemos el 40?")*. De algún modo, esta intervención nos da una posible explicación del cuestionamiento que Denisse hace al proceso de Belén previamente: *No sirve cualquier descomposición sino aquella que sea útil para encontrar el nuevo producto*. Este conocimiento, que en el aula no se asume como objeto de análisis, pone en relieve una cuestión metodológica interesante desde el punto de vista de la racionalidad matemática de los alumnos: en cada caso particular, la transformación de una expresión matemática está vinculada a un objetivo específico que define y justifica su importancia.

Inferimos que este modo de posicionarse de Julia y Denisse para responderse al problema original las ubica en buenas condiciones para cuestionar la validez matemática del argumento de Belén y sembrar una pregunta en el aula que trasciende la validez de *este* argumento para los números analizados. Ellas instalan la inquietud de, habiendo varias descomposiciones viables, cómo se garantiza —con generalidad— que será posible reencontrar una útil. Hay una pregunta que refiere a la validez de lo general en la disciplina y que trasciende el estudio particular de la conjetura de Tomás.

5.2.5. Breve síntesis del Caso 1

En todo el Caso 1 que tratamos, y en particular en la sección 5.2.4 referida a la gestación de la validación de la propiedad general, lo social, en un marco de entrada a la generalidad en el terreno algebraico, da elementos para sostener, sobre la base de la parcialidad aceptada, los despuntes de lo general. Ello sucede tanto en el plano del aprendizaje de qué argumentos pueden ser aceptados como válidos en la disciplina como en el plano de las propiedades, teoremas y conocimientos que esos argumentos requieran[49].

[49] Como hemos visto en este episodio, el teorema de la descomposición única en factores primos se despliega en el aula con anclaje en ejemplos particulares y experiencias previas de los alumnos.

Algunas discusiones transversales (y esenciales) respecto del hacer matemático —como en este caso la problemática de la validación de una propiedad— se construyen en, y a partir de la confrontación que tiene lugar en el aula.

Hemos abordado en todo nuestro análisis del Caso 1 dos cuestiones nodales del aula de matemática: la gestación de un enunciado general y la problemática de la validación de lo general. Ambas cuestiones consideradas con la particularidad y potencialidad de su emergencia en un terreno social.

Transitamos el proceso de conformación de una ley general desde su primera formulación incompleta hasta la delimitación de los componentes necesarios para su buena definición: su dominio de validez y su ley de aplicación. En el proceso de constitución se despliegan diferentes tipos de representación de los números naturales que en algunos casos alojan aspectos de regularidad asociada a su representación particular.

Advertimos, a su vez, la fortaleza del medio social como un espacio de sustento a la construcción de la conjetura, fundamentalmente en el alcance que permite soportar las formulaciones aún parciales e imprecisas de los alumnos. Este ámbito también ejerce de sostén de la intranquilidad que supone para ellos adentrarse en un proceso nuevo en el marco de sus sistemas de argumentación y conocimiento matemático en construcción. Allí también se invierten los roles de los integrantes del aula y se habilita a ciertos alumnos a adquirir lugares de sostén y devolución de producciones que permiten dar lugar a discusiones sobre conocimientos matemáticos específicos.

En este sentido, destacamos el espacio colectivo como malla que habilita el desarrollo de argumentos generales sobre construcciones numéricas particulares. Allí se ponen en juego — también — ciertos saberes específicos al modo de teoremas necesarios, arraigados en la acción de los alumnos para dar sustento al argumento que fundamenta cierta afirmación: nos estamos refiriendo específicamente a la descomposición única en factores primos como cualidad de cualquier número entero. El ámbito colectivo crea una trama propicia para que afloren cuestiones referidas a la generalidad necesaria de los procedimientos que se inscriben en los intentos de validación de un enunciado matemático.

Identificamos también el proceso que sostiene el docente al ubicar a los alumnos —y ubicarse él también— en el lugar de miembros de un grupo de producción como sujetos que escuchan, evalúan y contra-argumentan. En este terreno, la variedad de acciones llevadas adelante por los alumnos los ubica en buenas condiciones para analizar y desplegar cuestiones a partir de una producción particular que se discute.

5.3. Caso 2: Un argumento matemáticamente inválido

5.3.1. Vaivenes de racionalidad: la construcción colectiva de la validez matemática de un modo de razonar

El episodio que desarrollaremos tiene lugar también a propósito del problema sobre el cual se da el episodio anterior de construcción de la “regla de Tomás”. Específicamente, en el análisis de la divisibilidad de 2640 por el número 9. La profesora aborda el análisis de la divisibilidad por 9 en el espacio colectivo antes de la divisibilidad por 60 que dio lugar a la producción de la regla analizada en el caso anterior:

Si *66 x 40 = 2640,* ¿es posible decidir, sin hacer la cuenta, si *2640* es divisible por *40, 60, 33, 3, 4, 9 y 12*?

Recordamos de este problema —como dijimos en el análisis hecho en el parágrafo 4.2.2 del Capítulo 4 correspondiente al análisis matemático-didáctico de la propuesta de la profesora— -que analizar si 2640 es o no divisible por 9 —que no lo es— implicará considerar nuevamente la descomposición de los números en factores primos. Se hace aquí necesario poder argumentar que no habrá forma alguna de obtener un 9 a partir de los factores del 66 y del 40.

La pregunta respecto de la divisibilidad por 9 requiere desplegar alguna de las estrategias para decidir cuándo un número *no* es divisible por otro. La producción de argumentos que no utilicen la cuenta de dividir el 2640 por 9 requiere —ya lo dijimos— desplegar, al menos implícitamente, la relación que establece que **si un número *A* no tiene en ninguna de sus descomposiciones multiplicativas a otro número *B* en tanto factor, se puede asegurar que *A* no es divisible por *B* [**(1)]. O, como analizamos al comienzo, también se podría asegurar que ***A* no es divisible por *B* a partir de considerar una descomposición “minimal de *A*” y asegurar que *B* —en cualquiera de sus descomposiciones— no puede reencontrarse a partir de la descomposición de *A* en factores “minimales”** [(2)].

Notemos que la primera relación que señalamos [(1)] plantea la dificultad práctica de lograr atrapar a todas las descomposiciones para asegurar que *B* no es factor de ninguna de ellas. La relación explicitada en segundo lugar —[(2)]— hace necesario admitir la existencia de una descomposición “minimal” que sea representativa de cualquier otra y al mismo tiempo el hecho de que basta considerar cualquier descomposición de *B* para asegurar que ninguna "forma multiplicativa" de *B* podría hacerse presente en *A*.

En todo este problema, el número 9 es el único que no divide a 2640 y que requiere desplegar relaciones tales como las señaladas en el párrafo previo.

En el plano colectivo se vuelve compleja la situación de dar lugar al análisis de la validez de un razonamiento gestado en una racionalidad matemática aún provisoria, razonamiento que no sería válido para la disciplina.

Panizza (2005) advierte que aceptar la cuestión de distinguir razonamientos válidos e inválidos supone considerar la comunidad en la que dicho razonamiento tiene lugar. Según la autora, que parafrasea a Klimovsky (1994), "Un razonamiento es válido[50] si a partir de ciertos enunciados (las premisas) se deriva otro (la conclusión) de manera tal que siempre que las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera" (Panizza, 2005, p.24). Señala la autora en otros términos que "Un razonamiento es válido si el *condicional* que tiene como antecedente la conjunción de las premisas, y como consecuente la conclusión, es una tautología" (Panizza, 2005, p.24).

En los procesos de construcción de la racionalidad matemática y de emergencia en el aula se ponen en juego razonamientos no deductivos. Los alumnos —que no disponen aún de medios adaptados a la lógica deductiva para decidir— suelen experimentar una gran dificultad que radica en la asociación de la validez de un razonamiento con la verdad. Como describe Panizza (2005), en la lógica formal la validez se establece mediante la forma y no mediante el contenido de los enunciados considerados. Un razonamiento se asume como inválido si con un razonamiento de la misma forma podría ser que con premisas verdaderas se arribe a una conclusión falsa. Pero no es la lógica formal la que regula las acciones en el aula: los estudiantes suelen privilegiar el hecho de que la conclusión sea verdadera para aceptar un razonamiento aun cuando este sea lógicamente inválido.

En este caso 2, consideraremos un episodio en el aula en el cual la profesora toma como asunto para la clase el análisis de un razonamiento de la forma: *66 no es divisible por 9 y 40 no es divisible por 9; como 2640 es 66 x 40,* ***entonces*** *el 2640 tampoco es divisible por 9.*

[50] Válido —siguiendo la tradición matemática— es identificado con *deductivo*.

Trataremos de estudiar la tensión de racionalidades que operan cuando la profesora intenta instalar en el espacio colectivo la discusión sobre el razonamiento que subyace. Notemos que 2640 no es múltiplo de 9, lo que vuelve complejo a los alumnos aceptar que la relación utilizada —considerar como condición suficiente la no divisibilidad de los factores (66 y 40) por 9— no es válida cuando la respuesta obtenida por ese medio es verdadera.

Observemos que sobre el conjunto de los números enteros un razonamiento del tipo: *dados A, B y k enteros, si C = A x B, y k no divide ni a A ni a B, entonces k no divide a C* es inválido. Como señalamos párrafos más arriba, su invalidez radicaría en que bajo un razonamiento de la misma forma, y con premisas verdaderas, se obtendría una conclusión falsa. Tal es el caso para $C = 36$ y $k = 9$, dado que 9 no divide a 3 ni a 12 y 9 sí divide a 36. Ese es el análisis que intenta conducir la profesora en el fragmento de clase que estudiaremos, procurando evitar que sus alumnos arriben posteriormente a conclusiones falsas mediante dicha forma de razonar.

Ahora bien, si restringimos k al conjunto de los números primos, el razonamiento: *dados A, B, k enteros y k primo, si C = A x B, y k no divide ni a A ni a B, entonces k no divide a C* resulta un razonamiento válido, pues todo primo que divide a un producto divide a alguno de sus factores.

En la clase que analizamos el valor de k es siempre 9, al menos no se explícita claramente la variación. De hecho, la estructura del razonamiento que luego se pone en discusión queda arraigada a dos grupos de cuatro números que se mencionan en el fragmento que registramos a continuación (66, 40, 9, 2640) y (12, 3, 9 y 36). Para estos conjuntos de números, el 9 no se varía en el aula de manera explícita, cuestión que podría dar lugar a que —en esa aula— la discusión sobre el razonamiento inválido quede arraigada para ciertos alumnos al caso de la divisibilidad por 9, o que sea inválido también para números primos como el 5 o el 7.

5.3.2. La interacción de racionalidades en el plano colectivo

A continuación, presentamos el fragmento de la clase donde tiene lugar la discusión.

1) **P**: *¿Qué pasó con el 9? Dale, Nadia.*

2) **Nadia**: *Yo lo que puse no sé si está bien… 66, 40 no son y 2640 no.*

3) **P**: *66, 40, ¿y?*

4) **Nadia**: *66, 40 y 2640.*

5) **P**: *A ver…*

6) **Nadia**: *Está mal.*

7) **P**: *Pero quiero tomar el razonamiento. Sí, hubo un error en el razonamiento de Nadia, lo más probable es que varios hayan hecho lo mismo. Nadia dice…., a ver, lo que voy a escribir es un razonamiento. Lo único que vamos a tratar de ver es el porqué, ¿sí? ¿66 es divisible por 9?*

8) **Alumno**: *¿Por cuál?*

9) **P**: *No es divisible por 9, ¿sí?, ¿está?, ¿40 es divisible por 9?*

10) **Varios**: *No.*

11) **P**: *No es divisible por 9, ¿vamos bien? El razonamiento que usa Nadia —que, por experiencia lo digo, siempre lo corrijo, es un error muy muy muy frecuente el que está proponiendo Nadia, por eso lo vamos a escribir y lo vamos a estudiar, ¿si?— es el siguiente: como este no es divisible y este no es divisible* (señalando los números 66 y 40), *¿cuál sería la conclusión más lógica?*

12) **Alumna**: *Que el resultado no es divisible.*

13) **P**: *Va, conclusión: 2640 no es divisible. Vamos a poner así, no es divisible por 9.*

La profesora escribe en el pizarrón:

66 x 40 = 2640

div x 9 div x 9 Conclusión 2640 → ~~div 9~~

Razonamiento muy común pero erróneo

Este razonamiento es erróneo y les voy a mostrar un ejemplo muy sencillo y nos vamos a dar cuenta por qué es erróneo, ¿sí? O les muestro que es erróneo, esto es un razonamiento.

14) **Alumna**: *¿Se llama así o le está poniendo nombre?*

15) **P**: *No, se lo pusimos, razonamiento muy común, vamos a ponerle así, razonamiento muy común pero erróneo, esperame un segundo. Fíjense, les voy a hacer algo sencillito, 12 x 3, ¿cuánto es 12 x 3? Julia, ¿en qué andamos?*

16) **Julia**: *36.*

17) **P**: *Vení un poquitito, dale, 36. Les hago una pregunta ¿este es divisible por 9?*

Completa a continuación de la escritura anterior, señala el 36:

$$\begin{array}{ccccc} 12 & \times & 3 & = & 36 \\ \not\downarrow & & \not\downarrow & & \\ \text{div x 9} & & \text{div x 9} & & \text{Conclusión } 36 \rightarrow \cancel{\text{div 9}} \end{array}$$

18) **Alumna**: *No.*

19) **P**: *¿Este es divisible por 9?*

20) **Alumna**: *No.*

21) ***P***: *Siguiendo el razonamiento que proponía Nadia, ¿a qué conclusión llegaríamos?*

22) **Alumna**: *Ahhhhh que no es divisible.*

23) **P**: *A que este no es divisible por 9, pero ahora, pregunta: ¿este es divisible por 9?*

24) **Varios**: *Sí.*

25) **P**: *O sea, el razonamiento de Nadia acá no sirve. De Nadia y de varios, perdoname que ponga tu nombre, pero es un razonamiento, quiero que lo escriban y lo van a estudiar esto. O sea, si seguimos el razonamiento anterior sería… conclusión: 36 no es divisible por 9.*

26) **Alumno**: *Pero yo usé otro múltiplo…*

27) **P**: *Claro, estamos en otra cosa, estamos haciendo otra cosa, estamos viendo un razonamiento por qué está mal y lo tienen que copiar y lo tienen que estudiar, ¿sí? Vamos a escribir, según el razonamiento anterior 36 no es divisible por 9, según el razonamiento anterior, pero ahora 36, ¿es divisible por 9?*

La profesora escribe en el pizarrón a continuación de la escritura anterior:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 12 & \times & 3 & = & 36 \\ \not\downarrow & & \not\downarrow & & \\ \text{div x 9} & & \text{div x 9} & & \text{Conclusión } 36 \rightarrow \cancel{\text{div 9}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Según el razonamiento} \\ \text{anterior, 36 no es divisible} \\ \text{por 9 pero 36, ¿es divisible} \\ \text{por 9?} \end{array}$$

28) **Alumna**: *Sí.*

29) **P**: *Sí, o sea que hay algo mal en nuestro razonamiento, ¿sí? Es más, 36 es divisible por 9, o sea que este razonamiento nos falla, que este no sea divisible por 9 y este no sea*

divisible por 9 no significa que este no lo vaya a ser, ¿sí?, ¿Se entiende? (Señalando los tres números de los que habla)

30) **Manu**: *En este caso, está bien.*

31) **P**: *En este caso no, no, no, es un razonamiento erróneo.*

32) **Manu**: *O sea, NO.*

33) **P**: *¿Vos tenés otro razonamiento por el cual decís que no es divisible por 9? Bien, hay que buscarlo porque este es un razonamiento que no nos sirve, ¿se entiende?*

34) **Valentina**: *Yo lo que quería preguntar es si 2640 es divisible por 9 o…*

35) **P**: *No va a ser divisible por 9, ¿sí?, pero ¿qué pasa, Valen?, no puedo usar este razonamiento para decir que no.*

36) **Valentina**: *Claro, hay que buscar otra manera.*

37) **P**: *Hay que buscar otra vuelta, ¿sí? Con esta vuelta no sirve.*

38) **Valentina**: *Porque hay casos en que sí es divisible.*

39) **Agostina**: *¿Cómo? No entiendo cómo nos vas a tomar, si es que nos lo vas a tomar.* (Los alumnos estaban próximos a una evaluación trimestral)

40) **P**: *Te puedo agarrar y decir el siguiente razonamiento, ¿es cierto? No, por tal y tal razón, ¿sí?*

41) **Agostina**: *¿Se puede poner acá, por ejemplo, con otro número?*

42) **P**: *Mirá, el razonamiento no es válido porque en este ejemplo no funciona.*

Los alumnos preguntan por la prueba.

43) **Denisse**: *¿Este 36 tiene que ver con la lección anterior?*

44) **P**: *No, no tiene que ver con nada, lo que estoy mostrando, este, es otro ejemplo, es otro ejemplo, o sea mostré este ejemplo, Denisse, para mostrar que en algo sencillito el razonamiento de…*

45) **Denisse**: *Ah, ok, estás diciendo que no se sabe si es pero puede ser…*

46) **P**: P*uede ser o no, pero este razonamiento no lo pueden usar para saber si es o no, ¿se entiende? Si querés escribilo con tus palabras para que te quede más claro, Tomás.*

47) **Tomás**: *Pero yo pregunto si se puede saber…*

48) **P**: *Sí, pero vos preguntás si se puede saber o no. Yo digo que se puede saber, pero podría ser: Mirá, no lo puedo saber con esta consigna. ¿Sí?, sería una posible respuesta esta.*

49) **Joaco**: Y *además porque 9 x 4 es 36.*

50) **P**: *¿Y?*

51) **Alumna**: *De 9.*

52) **P**: *Claro, por eso mismo, con el razonamiento que nos propuso Nadia llegamos a algo erróneo pero bien sabemos que 36 es múltiplo de 9. ¿Estamos hasta acá?*

53) **Alumna**: *Sí.*

54) **P**: *Estudien este razonamiento, eh. Estúdienlo para no cometerlo precisamente.*

55) **Alumno**: *Pero ahí dice que 36 no es divisible por 9, ahí pusiste que 36 no es divisible por 9.*

56) **P**: *A ver… ¿sí? Esteeeee… La conclusión es con el razonamiento anterior, que era erróneo, ustedes saben que nos lleva a una conclusión falsa. ¿Se entiende? A ver, ¿es divisible por 9 o no?* (Señalando el 36)

57) **Alumna**: *Pero...*

58) **P**: *Si, es divisible por 9, ¿y por qué escribí esto? Porque según el razonamiento de Nadia yo llego a esa conclusión y está mal, ¿se entiende?*

59) **Alumna**: *Vale, pero vos nos estás diciendo que no podemos usar eso en la prueba… Pero no estamos viendo qué razonamiento es correcto.*

60) **P**: *No, todavía no, claro, todavía no llegamos a eso, claro. ¿Va? Bien. ¿Alguien sacó si es divisible por 9 o no usando este dato? Está difícil, ¿no? Vamos a ver, vamos a verlo.*

En esta clase, las componentes de este razonamiento funcionan de modo medianamente implícito y es la profesora quien los hace explícitos en términos de enunciados. Ella produce para el aula una conjunción de los enunciados a los efectos de estudiar su estructuración en términos de implicación general. Su explicitación se desarrolla en parte a modo oral entre las intervenciones 7 y 13, y se acompaña por la fuerza de un esquema en registro escrito en el pizarrón luego de la intervención 13. La conjunción que crea la profesora —primero explicitada sobre los números del problema y luego sobre un nuevo ejemplo— es del tipo: "*A* no cumple la propiedad P y *B* no cumple la propiedad P. Si *C* es *A* x *B*, entonces *C* no cumple la propiedad P" (*). La propiedad P (ser divisible por) no es explicitada más que a partir de la exposición de las dos cuaternas numéricas que antes señalamos — (66, 40, 9, 2640) y (12, 3, 9, 36) — en términos de enunciados orales y esquemas escritos en pizarrón. El hecho de que el divisor 9 no se varíe, vuelve posible que P pueda ser para la clase tanto “ser divisible por 9” como “ser divisible por *k*, *k* entero”. Ahora bien, en la primera intervención 11 de la profesora no se menciona el nueve —que sí se escribe en los esquemas— y los otros dos números permanecen bajo la forma del pronombre demostrativo “este” (“[…] *como este no es divisible y este no es divisible* [señalando los números 66 y 40], *¿cuál sería la conclusión más lógica?*”). Ello podría permitirnos pensar que la profesora discute el razonamiento dentro de su carácter más general de “ser divisible por un entero *k* cualquiera”. Aun así el resto de los registros escritos y orales de la discusión le dan permanencia al valor 9.

Como señalamos más arriba, tanto el razonamiento que considera la propiedad de “ser divisible por 9” como aquel que considera la propiedad de “ser divisible por *k*” resultan inválidos por el hecho de que cualquiera de ellos puede generar una conjunción de enunciados de la misma forma en la que con premisas verdaderas se arribe a una conclusión falsa. Ahora bien si *k* se asume en el conjunto de los números primos, tal razonamiento resulta válido.

Toda esta discusión no se desarrolla con claridad en el aula. Es probable que influya fuertemente el hecho de que es la profesora quien instala la cuestión y no es una pregunta gestada en el espacio social. A ello se suma la formulación imprecisa de la estructura en discusión —que permanece arraigada en formato de escrituras en el pizarrón y en formulaciones orales que destacan u ocultan la explicitación de algún dato variable— y la falta de consideración de los conjuntos numéricos sobre los cuales varían los números involucrados.

Hay principalmente dos objetivos perseguidos por la profesora:

- Que los estudiantes comprendan que la argumentación o el razonamiento “*si un número A no es divisible por otro k a partir de analizar si en una descomposición arbitraria del número en factores estos no son divisibles por k”* es fuente de conclusiones falsas.

- Que los estudiantes consideren la búsqueda de una descomposición de *A* que explicite a *k* como factor a partir de *combinar* factores de los números que constituyen alguna descomposición arbitraria de *A*.

Ahora bien, analicemos el juego de particulares que se despliegan en el aula con diferentes niveles de generalidad, afianzados ellos por escrituras en el pizarrón que refuerzan más o menos algún nivel.

En el aula los números permanecen —tanto en la oralidad como en la escritura— asociados a la estructura que la profesora busca instalar. La docente persigue el objetivo de instalar la discusión a partir de "eliminar" en el análisis la particularidad de los números 66, 40 y 2640, y los hace variables. No hace eso, ya lo dijimos, en la escritura con el número 9, que no lo varía. Esta particularidad (del 66, 40 y 2640) se vuelve accesoria para ella que anticipa un argumento general que puede **refutarse** desde la lógica deductiva, pero no lo es necesariamente para los chicos que solo cuentan con las acciones efectuadas sobre esos números particulares y probablemente no cuenten con una proyección de generalidad. La eliminación de lo particular le permite a la profesora darle estatuto en el aula a esa estructuración de los enunciados dando proximidad a una forma lógica de implicación. Llama a ello, con escritura en el pizarrón, "razonamiento común pero erróneo" y lo aplica a un nuevo grupo de números: 12, 3, 36 y 9 para producir enunciados equivalentes a los generados con 66, 40, 2640 y 9, y dar lugar a una **contradicción**.

Analizar qué sería refutar la validez de un argumento de ese tipo conduce a pensar el marco de la lógica en la que se analiza esa validez. En esferas de la lógica formal, dijimos ya que pensar la validez de un razonamiento comporta considerar la estructura que describe la implicación entre los enunciados "premisas" y el enunciado "conclusión", y determinar si la validez de las premisas implica la validez de la conclusión en cualquier conjunto de casos particulares del dominio en el que ese razonamiento puede aplicarse. En tal sentido, refutar correspondería a encontrar otros números que —sobre enunciados "análogos"— produzcan una conclusión falsa. Esto sería lo que antes caracterizamos como encontrar un razonamiento con la misma forma que a partir de premisas verdaderas "implique" una conclusión falsa. Es eso lo que intenta hacer la profesora al incorporar un nuevo ejemplo en la clase, en las intervenciones 15 y 17, acto que la sumerge en un terreno complejo en el ámbito colectivo, ya que algunos alumnos entienden el nuevo ejemplo como un hecho sin relación con la pregunta del problema, que incluye otros números pero conserva el 9.

15) **P**: *No, se lo pusimos, razonamiento muy común, vamos a ponerle así, razonamiento muy común pero erróneo, esperame un segundo. Fíjense, les voy a hacer algo sencillito, 12 x 3, ¿cuánto es 12 x 3? Julia, ¿en qué andamos?*

16) **Julia**: *36.*

17) **P**: *Vení un poquitito, dale, 36. Les hago una pregunta ¿este es divisible por 9?* (Completa a continuación de la escritura anterior, señala el 36:)

En este sentido, el análisis de la validez en el aula se enmarca en una yuxtaposición de ejemplos que los alumnos abordan desde una racionalidad matemática en construcción. Las intervenciones de varios alumnos muestran la complejidad de entender este juego de ejemplos que refutan la validez de **un** modo de razonar. Estas intervenciones fuerzan a que la profesora explicite el modo en que se juegan esos ejemplos y cómo la contradicción alcanzada con el número 36 refutaría la validez matemática del argumento original (la intervención 43 de Denisse ["*¿Este 36 tiene que ver con la lección anterior?"],* o la intervención 55 de otro alumno ["*Pero ahí dice que 36 no es divisible por 9, ahí pusiste que 36 no es divisible por 9*"] son ejemplos de la dificultad que envuelve el intercambio).

Al considerar lentamente el fragmento expuesto notamos que Nadia no hace explícito su razonamiento, menciona solo que los tres números implicados no son múltiplos de 9 (intervención 2) y es la profesora —preocupada por la construcción de la racionalidad matemática de sus alumnos— quien hace una inferencia de la relación que Nadia despliega: la conclusión, aun siendo verdadera, no se podría desprender de la verdad de las premisas consideradas. En ese sentido formula oralmente en las intervenciones 11 y 13 ciertos enunciados acerca de los números que Nadia menciona ("[…] *como este no es divisible y este no es divisible* [señalando los números 66 y 40], *¿cuál sería la conclusión más lógica?*" y "*conclusión: 2640 no es divisible* […]") y los articula en una "estructura" (razonamiento).

Cabe considerar que la formulación de la profesora en la intervención 11 instala una primera descontextualización del razonamiento especificado en 66 x 40 hacia su generalización —a pesar de estar acompañada del gesto de indicar los números particulares— al utilizar el pronombre "este" y señalar un lugar en el producto más allá de mencionar específicamente el valor del número ocupando ese lugar. También el hecho de que en esa intervención no explicite el divisor 9. La profesora, con su discurso, tracciona a los estudiantes hacia el proceso de generalización, en este caso de un razonamiento. La alumna, que completa su frase en la intervención 12, parece interpretar la generalidad que propone la profesora, mencionando la palabra "resultado" en vez de especificar el valor 2640.

Observamos que en el registro escrito la descontextualización es diferente a la que se sostiene en el registro oral. En el registro escrito las notaciones del pizarrón permanecen ancladas en los números 66, 40, 9 y 2640. Por ello, si bien las acciones de la profesora contienen la intención de organizar el caso de análisis en una "estructura" que articule los enunciados independientemente de los números 66, 40 y 2640[51], la coexistencia de registros y los distintos niveles de generalidad en las formas de percibir los números 66, 40 y 2640[52], hace resonar la complejidad del asunto que la profesora quiere instalar. Un ejemplo de la dificultad que supone atender a la cuestión que la profesora propone, la describe la intervención de Manu en 30 ("En este caso, está bien"). Es verdad que 2640 no es divisible por 9, aunque lo que no es cierto es que ello sea consecuencia de que 66 y 40 no sean múltiplos de 9. La frase de Manu es un ejemplo de la concepción de ciertos alumnos de que un razonamiento se vuelve válido en la medida en que es comprobable la verdad de los enunciados que constituyen las premisas y la conclusión. Reiteramos, la complejidad de esta discusión en el aula se monta sobre el hecho de que los enunciados que Nadia toma en cuenta son verdaderos, pero la estructura que los une podría generar conclusiones falsas a partir de premisas verdaderas.

Para analizar la estructuración entre los enunciados se vuelve necesario para la profesora separar la validez del razonamiento de la verdad de los enunciados considerados y considerar el modo de acceso a la conclusión más que la verdad de la respuesta final que se desprende. La intervención de Valentina en 34 respecto de la verdad de la afirmación de "si 2640 es divisible por 9" le permite a la profesora retomar que, más allá de la respuesta correcta, el resultado no podría establecerse a partir de ese razonamiento que se usó.

Luego la intervención 38 de Valentina ("[…] *hay casos en que sí es divisible*") parece mostrar que ella se ha desplazado desde su interés inicial por conocer la respuesta de si 2640 es o no divisible por 9 hacia el análisis de la validez del razonamiento utilizado.

También el siguiente intercambio entre Agostina y la profesora parece reforzar el sentido descontextualizador hacia un análisis de los criterios por los cuales se puede evaluar la viabilidad de un argumento matemático:

39) **Agostina**: *¿Cómo? No entiendo cómo nos vas a tomar, si es que nos lo vas a tomar.* (Los alumnos estaban próximos a una evaluación trimestral)

40) **P**: *Te puedo agarrar y decir el siguiente razonamiento, ¿es cierto? No, por tal y tal razón, ¿sí?*

41) **Agostina**: *¿Se puede poner acá, por ejemplo, con otro número?*

[51] A la manera en que lo mencionamos en (*).

[52] Como particular o como totalidad.

42) **P**: *Mirá, el razonamiento no es válido porque en este ejemplo no funciona.*

Si bien Agostina parece tener la intención de conocer cómo se contesta en la proximidad de una prueba (intervención 39), parece también empezar a comprender que la acción de la profesora incluye un tipo de tarea diferente a la de contestar solamente sobre la divisibilidad de 2640 por 9. La profesora enfatiza ese sentido al contestarle en la intervención 42. El estatuto de esta nueva tarea se vuelve difuso para los alumnos en parte por el hecho de que nunca queda escrito un enunciado para ella, y que la misma haya surgido al interior de la discusión sobre la manera de hacer *otra* tarea. Las intervenciones de otros alumnos vuelven a instalar la pregunta de cómo responder si 2640 es o no divisible por 9 (Tomás*: Pero yo pregunto si se puede saber…*) y sobre la relación de los nuevos números 12, 3 y 36 con el problema original. Como, por ejemplo, en el siguiente intercambio entre Denisse y la profesora (a partir de la intervención 43):

43) **Denisse**: *¿Este 36 tiene que ver con la lección anterior?*

44) **P**: *No, no tiene que ver con nada, lo que estoy mostrando, este, es otro ejemplo, es otro ejemplo, o sea mostré este ejemplo, Denisse, para mostrar que en algo sencillito el razonamiento de…*

45) **Denisse**: *Ah, ok, estás diciendo que no se sabe si es pero puede ser…*

46) **P**: P*uede ser o no, pero este razonamiento no lo pueden usar para saber si es o no, ¿se entiende? Si querés escribilo con tus palabras para que te quede más claro, Tomás.*

Respecto de la pregunta que menciona Tomás acerca de si se puede saber si 2640 es o no divisible, caben al menos dos interpretaciones:

- Es posible que una intervención por la divisibilidad de 2640 contenga la expectativa de obtener la respuesta aún con relación al análisis que está teniendo lugar en el aula y que no esté reconociendo la invalidez del razonamiento que se discute en esa aula.

- Es también probable que una intervención tal refiera a hallar alguna manera de dar respuesta, con independencia del argumento discutido pero con comprensión de la discusión en el aula que ha acontecido sobre el modo de argumentar. En otras palabras, pensamos que su frase "si se puede saber o no" puede estar referida a una inquietud sobre las posibilidades de contestar a la pregunta del problema (de acuerdo a como continúa la clase luego de descartar el razonamiento inicial).

Respecto de las preguntas por los nuevos números 36, el 12 y el 3 hay aquí diversas intencionalidades posibles en función del análisis contextualizado o descontextualizado de los alumnos respecto de la pregunta del problema.

Las intervenciones 39 y 41 de Agostina a las que referimos antes podrían anticipar un modo de tratar de entender cómo juegan los ejemplos que va cambiando la profesora a la hora de rechazar la validez de un razonamiento. Sus intervenciones son ricas desde el punto de vista del análisis de la constitución de una racionalidad en el terreno de lo deductivo. Como dijimos ya, Agostina manifiesta su ansiedad por conocer la tarea que deberán resolver en el examen ("*cómo nos vas a tomar*"), pero pregunta explícitamente por los modos de argumentar en la disciplina (intervención 41: "*¿Se puede poner acá, por ejemplo, con otro número?*"). Agostina es una alumna con elementos de fuerza para intervenir en la clase y para seguir desde un lugar de "actor evaluador" el balanceo de los intercambios como notamos en el análisis del caso 1 de la constitución de una regla.

Otras intervenciones, que se imbrican con las de Agostina, expresan la dificultad de otros alumnos para reconocer la relación entre estos nuevos números y el problema que intentaban contestar. Ellas se enmarcan en la complejidad que enfrenta la profesora al instalar un objeto de análisis que trasciende el problema y que se adentra en los mecanismos de pensamiento aceptados en el terreno de la disciplina.

En el episodio que recortamos, la profesora parece adentrarse en un análisis descontextualizado —hacia la racionalidad matemática puesta en juego— antes de despejar en los alumnos las dudas sobre el problema inicial. El curso del intercambio vuelve para nosotros interesante considerar la necesidad didáctica de tomar como objeto de análisis la discusión en el aula de la relación entre el argumento que se quiere refutar y una forma válida de argumentar que 2640 no es divisible por 9. La complejidad que expone el episodio induce a considerar la relación entre estos dos asuntos desde la lógica de la comprensión de los alumnos. En el caso 1, enfatizamos el valor del otro como elemento de sostén para la entrada en lo nuevo, aún no construido, aun no completamente preciso. En este caso, lo social opone resistencia para aceptar —en el curso de la discusión— el análisis que propone la profesora. Evaluamos que hay una distancia entre las anticipaciones que los alumnos hacen sobre la discusión que debiera tener lugar y la discusión que está teniendo lugar de manera efectiva. Para quienes analizamos los contornos en la conceptualización de un alumno que se adentra en el aprendizaje de la racionalidad matemática nos resulta importante identificar que existe una necesidad de respuesta certera a la pregunta matemática planteada para estar en condiciones de evaluar y descartar la viabilidad de un argumento.

Las intervenciones que analizamos en los párrafos anteriores sobre la entrada de los números 12, 3 y 36 con respecto a si 2640 es o no divisible tensan el intercambio y la profesora acciona en dicha tensión. Ella reitera su intención de instalar el objeto de análisis más allá del problema planteado y explicita qué lugar ocupan los números 12, 3 y 36 siempre arraigada en la divisibilidad por 9. Eso se percibe en el conjunto de intervenciones de la profesora de todo el fragmento que va desde la intervención 43 hasta la 60.

Como dijimos, la profesora intenta reconstruir en el aula un conocimiento matemático que podemos enunciar con nuestras palabras como "El razonamiento: *'En el conjunto de los números enteros, si P = A x B* y *A* y *B no son divisibles por C, entonces P no es divisible por C'* es inválido". Creemos que la profesora entiende *C* como variable, pero en la clase, como ya vimos, las intervenciones instalan la discusión especificando *C* en 9 en la enunciación anterior y nunca aparece una formulación explícita del tipo de la que establecemos aquí.

Aún con *C* asumido como 9, no todos los alumnos pueden recortar ese conocimiento en el momento del intercambio porque su abordaje está condicionado por el grado de contextualización o descontextualización que cada uno de los alumnos haya alcanzado de la pregunta inicial que buscaban con el ejercicio.

En este conjunto de afirmaciones, reiteraciones, aprobaciones y rechazos se genera un espacio propicio para la emergencia de la necesidad de construir un nuevo argumento, como lo reclama la alumna de la intervención 59: hay algo que aún no están abordando en el aula, un razonamiento correcto que permita decidir respecto de la divisibilidad de 66 x 40 por 9.

La trama que se constituye entre la lógica que promueve la profesora —y que comparten en mayor medida algunos alumnos— y las lógicas de aquellos estudiantes aún no inmersas completamente en el terreno deductivo va comunicando un modo de análisis de lo general en la disciplina, bien complejo, ya que lo que se refuta es la posibilidad de considerar ese modo de articular los enunciados, por no permitir asegurar una conclusión verdadera en **todos** los casos. La profesora intenta instalar en el aula el análisis de la validez de un argumento dentro de la disciplina, argumento que es necesariamente deductivo y que —como mencionamos— no es forzosamente el tipo de argumento al que los alumnos recurren durante sus procesos de producción de conocimiento. El objeto de estudio en torno a la validez de un razonamiento instala también en el aula la discusión más general acerca de la plausibilidad de una argumentación matemática.

Con respecto a los entramados en torno a la argumentación, la relación entre la conclusión, las premisas y la justificación (que respalda la conclusión que se alcanza a partir de las premisas) es considerada por investigaciones que se enmarcan en una coordinación de perspectivas psicológicas y sociológicas. Yackel & Cobb (1996) y Yackel (2004) consideran el interaccionismo simbólico como la lente teórica apropiada para analizar lo que ellos llaman "*inquiry mathematics classrooms*": aquellas instancias en aula en las que los estudiantes se comprometen en discusiones matemáticas genuinas con los otros y con el maestro. En Yackel (2004) se reconoce la potencialidad del interaccionismo para el estudio del proceso de construcción de significados personales de los participantes durante la negociación en curso de las normas y de las prácticas matemáticas del aula. Los significados tienen lugar a partir de la interacción social, todo significado personal de un individuo y sus alcances de comprensión se forman en —y por— los procesos de interpretación en interacción. En los términos de dicha perspectiva, la explicación y la justificación son concebidas tanto como constructos sociales como individuales.

Yackel (2004) recorta aquellos aspectos discursivos que tienen funciones comunicativas y son constituidos de modo interactivo entre alumnos y docente. Las explicaciones son proporcionadas por el docente o los alumnos para dar claridad a aspectos de su pensamiento que consideran que no son fácilmente visibles a los otros participantes del intercambio. Las justificaciones responden a cambios o violaciones de las normas de la actividad matemática. En dicha actividad, las normas relativas a la aceptabilidad de una explicación —señala Yackel (2004)— se renegocian continuamente y toda instancia de acción colectiva se constituye y formula a cada tiempo. Siguiendo a la autora, la adecuación de una explicación —considerada como noción colectiva— depende de este modo de continua renegociación y no de quien interviene en primera instancia. En definitiva, son los interlocutores que comparten esa explicación a partir de la renegociación los que definen la adecuación de la noción en términos colectivos.

En un aula coexisten creencias, conocimientos y formas más o menos aceptados. En esta clase, por ejemplo, la existencia de alguna descomposición para todo número no primo pareciera ser un significado compartido. Sin embargo, no sería tan así —en lo que refiere a la construcción compartida— respecto de la existencia de una descomposición única o minimal como veremos en la discusión que emerge en el análisis del caso que sigue.

El análisis descripto por medio de este episodio permitiría considerar que para algunos alumnos la forma del razonamiento sería correcta y su justificación se sostendría en que ni 66, ni 40 ni 2640 son divisibles por 9. La profesora otorga un nuevo ejemplo que inhabilitaría tal justificación, pero ello es solo si el razonamiento se contempla como estructura general y no particular de los números 66, 40 y 2640[53]. Es decir, la profesora tiene elementos para desestabilizar desde la lógica matemática la justificación por la que los alumnos sostienen su modo de razonar, pero esos elementos no son un significado alcanzable y compartido por todos los alumnos desde sus sistemas de creencias y conocimientos (como manifiesta Manu en su intervención 30: "*En este caso, está bien"*).

5.3.3. Cuestiones comunes y no comunes con el Caso 1

Los dos casos tratados hasta aquí nos permiten considerar que, en lo que respecta a la constitución de aspectos de la generalidad, la conducción de las explicaciones toma diferentes actores principales en pequeñas instancias temporales. El pedido de fundamentaciones y respaldos para las aseveraciones evoluciona de acuerdo a las fuerzas que imprimen algunas voces particulares y la construcción que se recrea resulta un constructo parcial sostenido en los hiatos que se remedian provisoriamente.

A partir de los análisis, esgrimimos una primera hipótesis: cuando el objeto en discusión es un constructo presente en las reglas que regulan la producción de conocimiento en la disciplina[54], la fuerza de la construcción es predominantemente gestada y conducida por el docente. Los alumnos ignoran el sistema de relaciones viables a ser aceptados en términos de comunidad matemática, lo que nos hace reforzar la idea de que no podría ser de otro modo. En estos casos, la resistencia de los alumnos a la construcción es más fuerte, los interlocutores están lejos de pensar y aceptar la viabilidad de un argumento muy alejado a sus sistemas de significados. En el caso que analizamos en esta sección es el docente el que tiene elementos para resistirse a la entrada de un argumento que no es admitido desde una racionalidad de la Matemática, pero su resistirse o no en tal confrontación depende de las intenciones que sostienen su proyecto global de enseñanza. Sin embargo, como vimos en el primero de los

---

[53] No mencionamos especialmente el divisor *9* por lo ya señalado previamente respecto de la no claridad de la extensión del razonamiento discutido efectivamente en ese episodio.

[54] Como es el caso de aspectos de la utilización de un razonamiento.

casos, la fuerza de sostén la lleva una alumna, Agostina, ante el “rechazo” parcial e inicial de la profesora. En el caso 1 —”la regla de Tomás”—, es Agostina la que tiene elementos extras para ejercer resistencia y permitir el avance de la discusión sobre la propuesta de Tomás.

Los dos casos de análisis considerados hasta aquí se organizan alrededor del “permiso” otorgado a la entrada al aula de la incertidumbre por los participantes de la comunidad aula. Lo diferente, lo nuevo, lo no previsto es susceptible de ser abandonado. Ahora bien, entender el juego de intervenciones que se someten al proceso supone entender la fuerza de las convicciones que sostienen la intervención. Esa fuerza proviene —en cada caso— de quién cree acercarse un poco más a la certeza sobre lo que aún no se conoce completamente.

En esta línea, en el caso 2 considerado, la falta de claridad para el grupo clase entre la separación del problema inicial y el asunto sobre la forma de razonar de los alumnos que pretende instalar la profesora resulta un limitante para la posibilidad de que afloren contradicciones que permitan revisar la concepción inicial de los alumnos. Respecto de ello recuperamos la posición teórica de Ballacheff (1987) en cuanto a la toma de conciencia de una contradicción. La existencia de una contradicción funciona sobre los sujetos como elemento de consideración del análisis y la reflexión de una acción o afirmación dada. Para este autor, la toma de conciencia de una contradicción conlleva como necesarias las siguientes condiciones: 1) la existencia de algo que se espera y 2) la posibilidad de construir la afirmación asociada a eso que se espera y su negación. El ejemplo que otorga la profesora en este caso 2 como disparador de análisis con los alumnos en el plano de la interacción —en nuestra formulación: “12 x 3 es 36 y 36 es divisible por 9 aunque 12 y 3 no lo son por 9”— no comporta la fuerza de una intervención que impacte sobre los alumnos a la manera de contradicción sobre algo que se espera y no sucede. No impacta de esa manera porque, como dijimos, los alumnos no ven los nuevos números (12, 3 y 36) en vínculo con los del enunciado (66, 40 y 2640). Este “no ver” se enmarca posiblemente en el hecho de que los alumnos no han construido aún el carácter anticipatorio que comporta implícitamente la discusión que la profesora sostiene. Para los alumnos, la constatación de que 2640 no es divisible por 9 funciona como elemento para la construcción de la conclusión, sin tener ella necesariamente anclaje en los datos 66 y 40. Asumir la tarea de considerar la falsedad de este argumento supone tener disponible la posibilidad de que dicha concatenación de enunciados sea confirmada, como así también la de que sea refutada. Y la concatenación lógica de los enunciados no conforma un objeto presente en los sistemas de conocimientos de los alumnos.

Desde la perspectiva del análisis de la fuerza del intercambio, volvemos sobre el primero de nuestros casos considerado: la gestación y validación de una conjetura. En él, Agostina interviene sobre la intervención de la profesora. Le devuelve que 73 x 40 y 40 x 73 no resulta un buen ejemplo que contradiga la afirmación inicial de Tomás. Su capacidad de inferir el enunciado completo de la regla (formulada escasamente por Tomás), en conjunto con su dominio de validez, le permite a Agostina proyectar una contradicción en el análisis que la profesora pretende introducir para refutar la regla de Tomás: la aplicación de que la regla de la profesora "aplicada" sobre los números de Tomás conducirían a 66 x 40 "=" 60 x 46 y no a la igualdad que Tomás levanta del pizarrón: 66 x 40 = 60 x 44.

Tratamos de destacar en los párrafos previos que el análisis de la constitución de lo general requiere considerar que las intervenciones del espacio colectivo están condicionadas por el hecho de que cierta anticipación sobre alguna cuestión se vea contradicha —o no— por un nuevo hecho que puede bien ser el contenido enunciado por otro interlocutor.

5.4. Caso 3: La divisibilidad y las descomposiciones multiplicativas como asunto para desplegar lo general

En este apartado abordamos el análisis de un episodio de clase a partir del cual recortamos dos procesos correlacionados con fuerte componente de emergencia en lo colectivo:

- el proceso de argumentación respecto de la divisibilidad de un número,

- y el vínculo entre el atributo de *ser divisible por* y la descomposición de un número en factores.

Específicamente en el aula, se está discutiendo la divisibilidad de un cierto número — representado como producto de otros dos— por diferentes números. Se pone en juego la relación entre divisibilidad de un número por otro y la expresión de una descomposición multiplicativa que permita dar argumentos respecto de la divisibilidad que se afirma. Por otro lado, emerge en la interacción el proceso de construcción de un procedimiento general, sea cual sea la descomposición inicial considerada, que favorezca mostrar si un número es divisible por otro.

Sabemos que el hecho de que un número A sea divisible por un número B —o no lo sea— no depende de una descomposición multiplicativa dada de A. Ahora bien, la necesidad de dar argumentos en el espacio colectivo pone en juego la relación propia entre denotación y sentido[55], en el marco de las expresiones numéricas. Se juega aquí el vínculo indisoluble entre la representación que proporcionan las diferentes descomposiciones numéricas y el acto de poder hacer evidente la divisibilidad que se estudia. Por un lado, no toda descomposición de un número en factores hace evidente la divisibilidad de ese número por otro. Por otro lado, una descomposición que no evidencia la divisibilidad de un número *A* por otro *B* puede transformarse en otra que sí lo haga (para el caso en que *A* sea divisible por *B*). Esta segunda cuestión resignifica el sentido matemático de la transformación en el marco de la tarea de argumentar y pone en juego la noción de equivalencia de expresiones. En este escenario adquiere importancia la existencia de una descomposición multiplicativa *minimal* (una descomposición tal que no se puede seguir descomponiendo) a los efectos de dar con una descomposición que *permita mostrar* la divisibilidad de *A* por *B.*

La tarea que se despliega en el episodio de nuestro recorte es nuevamente "*si 66 x 40 = 2640, ¿es posible decidir, sin hacer la cuenta, si 2640 es divisible por 40, 60, 33, 3, 4, 9 y 12?*", y —en nuestro fragmento— se discute la divisibilidad por 60. Las relaciones matemáticas que se despliegan en el colectivo en este Caso 3 están en estrecha relación con las que se analizaron en el marco de las estrategias desplegadas en el Caso 1, específicamente en el momento de análisis de la validez de la conjetura elaborada colectivamente; sin embargo, evidenciamos aquí un nuevo emergente de construcción.

Como venimos describiendo a partir de los diversos casos, para este ejercicio, tanto como para el conjunto de tareas propuestas en esa aula alrededor de él, se hace necesario considerar la traza de las operaciones para responder con independencia de hacer la cuenta[56]. La respuesta respecto de la divisibilidad y la certeza de la validez de la misma puede obtenerse a partir de efectuar la división por 60, pero el enunciado restringe esa acción. En la clase, la profesora necesita sostener dicha restricción y acuerda colectivamente más condiciones: "hay que utilizar

---

[55] Establecimos en el Capítulo 2 la diferencia entre sentido y denotación que recupera Drouhard (1992) de Frege (1892).

[56] Chevallard (1984) señala que un elemento importante en la ruptura del álgebra con la aritmética es el funcionamiento del álgebra como memoria que permite conservar la traza de las operaciones efectuadas, cuestión ligada a la necesidad (o posibilidad) de comunicación. Chevallard también promueve —como pionero en el estudio de la entrada al álgebra— un tratamiento algebraico de lo numérico, sustento básico de la propuesta de la profesora a partir de las tareas que soportan los episodios que luego nosotros recortamos.

el dato otorgado en el enunciado (2640 = 66 x 40)" y "no vamos a utilizar los criterios de divisibilidad[57] que no discutimos en este aula."

Como señalamos en el análisis de la propuesta en la sección 4.2.2, una intención de la profesora con el grupo de problemas del cual este forma parte fue otorgar un espacio en el aula al conocimiento de que *una forma de mostrar que un número B es divisible por A es escribirlo como una multiplicación donde un factor de B es A.* Instalar este conocimiento forma parte del proyecto de la profesora de organizar un tipo de trabajo alrededor de lo numérico que se coloque en la línea de un futuro trabajo algebraico.

En el momento en que la discusión que analizaremos tiene lugar, este conocimiento convivía con otras construcciones y criterios con cierta estabilidad entre los alumnos.[58].

De alguna manera, el conocimiento que la profesora intenta estabilizar opera en la interacción tensando la búsqueda de un criterio que no dependa de una descomposición particular. Es decir, poder "mostrar" ese factor —del cual se afirma que el número es divisible— no debiera quedar restringido por la mayor o menor "visibilidad" de dicho factor en una descomposición multiplicativa dada. En esta búsqueda para poder "hacer evidente" la divisibilidad de un número *A* por un número *B*, las estrategias a desplegar varían con relación a los diferentes valores que aparecen en el enunciado, dependiendo de cuán visible sea el número *B* a partir de los factores de la descomposición multiplicativa inicial de *A*.[59]

Los fragmentos de registro que consideraremos a continuación, y sobre los que analizamos la emergencia colectiva de la relación entre prueba de la divisibilidad y descomposición multiplicativa transcurren, como señalamos previamente, cuando se discute la divisibilidad por 60 en el problema que mencionamos en los párrafos anteriores.

---

[57] Refiere a los tradicionales criterios de divisibilidad que se enseñan en la escuela primaria, por ejemplo que "un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3."

[58] Una construcción instalada en el aula en el momento en que transcurre este fragmento de registro es que en una multiplicación *C* x *D* si "se coloca" el doble de *C*, en el lugar de *C*, se debe colocar la mitad de *D* (en el lugar de *D*) a los efectos de conservar el producto. La intervención de una alumna, con relación al "uso" del triple en lugar del doble, pareció instalar un principio de generalización con respecto a esta construcción. El ejemplo considerado en aquella clase admitía el cálculo de la mitad y el tercio del segundo factor y no se discutió en el aula que en ciertos casos esta regla podría poner en juego valores que no pertenecen al conjunto de los números enteros.

[59] Consideramos que por esta razón la profesora selecciona los números del problema en un cierto orden para el intercambio colectivo.

5.4.1. La relación sentido-denotación como gestación colectiva en el aula. La divisibilidad de un número y las descomposiciones multiplicativas que lo expresan

El episodio que sigue corresponde al desarrollo en el aula de un primer fenómeno, el del reconocimiento de que la divisibilidad de un número *A* por otro *B* no queda anclada en alguna descomposición multiplicativa particular de *A* aunque ciertas descomposiciones resulten mejor adaptadas que otras al estudio de la divisibilidad.

Antes de avanzar sobre el primer fragmento de registro relatamos el momento de la clase en el que tiene lugar la primera intervención de Agostina, una alumna con una relación fuerte con la matemática que ha tenido un protagonismo alto en el primero de los casos que analizamos en esta tesis.

Agostina interviene luego de que en la clase se ha elaborado una posible forma de argumentar que 2640 es divisible por 60 a partir de sus factores 66 y 40. Paula, inmersa en la tarea de argumentar que 2640 es divisible por 60, y conociendo que 66 x 40 es una multiplicación que da ese resultado, recupera de otro momento de la clase que 2640 es divisible por 3 y que entonces necesariamente "*hay un 3 por*"[60]. La profesora considera en el espacio colectivo su intervención y sostiene la búsqueda de un factor 20 a los efectos de "armar" el 60.

Paula aporta un modo de encontrar el 60 a partir de esa descomposición recurriendo a descomponer el 40 como 20 x 2 y el 66 como 3 x 22. Esta acción le da lugar a Agostina para plantear qué hubiese ocurrido si el 40 lo descomponían de otro modo, como 4 x 10 o como 5 x 8. Nos interesa considerar —a partir del fragmento que sigue— aspectos de la reconstrucción, reformulación y orientación de la pregunta imprecisa de Agostina que —con el sostén de la profesora— da lugar al desarrollo de una nueva cuestión en el aula: la relación entre divisibilidad de un número *A* por otro *B* y la existencia de alguna descomposición de *A* como producto de factores que "muestren más" o "escondan" la presencia del factor *B*.

Abordemos ahora el fragmento de registro que se presenta a continuación.

1) **Agostina**: *Una pregunta: no entiendo bien de dónde sacaste el 20.*

2) **P**: *A ver, preguntémosle a Pau.*

3) **Pau**: *Descomponiendo el 40.*

[60] Habían arribado en trabajo colectivo a este conocimiento que Paula recupera.

4) **Alumna1**: *Descomponés el 40 y usás el 20.*

5) **Agostina**: *Pero también puede ser 4 x 10.*

6) **Alumna2**: *Sí, claro, pero es una manera…*

7) **Alumno**: *Pero ella hizo 20 x 2.*

8) **Alumna2**: *Bueno, pero es una manera hacer 20 x 2, 20 x 2 es 40.*

9) **P**: *O sea, el 40, ¿cuántas formas hay de armarlo? También podría haber hecho 5 x 8.*

10) **Agostina**: *Y sí, pero es la mitad.*

11) **P**: *Ah, ya entiendo tu pregunta. Lo que Agos dice es… Vieron que Pau el 40 lo descompuso como 20 x 2, ¿sí? Pero a Paula, por ejemplo, se le podría haber ocurrido descomponerlo por 4 x 10, o 5 x 8, entonces lo que pregunta Agostina es: ¿y pero va a dar lo mismo?, ¿voy a poder obtener el 60? Esa es su pregunta: si yo hago 4 x 10: ¿me puedo armar el 60?*

Varios alumnos responden que no se puede armar el 60.

12) **P**: *¿Entienden lo que está diciendo Agostina? A ver si todos me escuchan, presten atención a lo que pregunta Agostina que está bueno.*

13) **Belén**: *Salvo que sean diferentes números, pero no da lo mismo…*

14) **P**: *Pero si no da lo mismo, no me va a dar 2640 y soné… Bien, está buenísimo lo que está diciendo Agos. A ver, ¿todos entendieron lo de Paula?*

Varios alumnos dicen que sí.

15) **P**: *Bueno, vamos a cambiar al problema que tiene Agostina, ¿sí? Agos dice "está bien, a este yo lo descompongo en 3 x 22", pero a este, lo que dice Agostina es "¿qué pasa si a este de acá lo descompongo, por ejemplo, como 5 x 8?, ¿me da 2640 o no me da 2640?" ¿Sí?*

La profesora escribe en el pizarrón:

$$66 \times 40 = 2640$$
$$3 \times 22 \times 5 \times 8 = 2640$$

Ahora, ¿dónde está el 60 ahí? Entonces Agostina dice: "si yo ponía esto yo iba a contestar que no era divisible por 60 porque no encontré el 60". ¿Entienden el problema de Agos? ¿Les podía haber pasado a ustedes? Sí, tranquilamente.

16) **Alumna**: *¿Y cómo vamos a hacer?*

17) **P**: *Y, no sé cómo hacemos porque… Esperá. Entonces parece como que dependiese, que te tenés que dar cuenta de cómo descomponer… Ahí Paula la sacó justito. Ahora, si yo descompongo como 5 x 8, ¿tengo otra respuesta?, ¿puede ser que obtenga que una es divisible por 60 y otra respuesta que no es divisible por 60?*

18) **Denisse**: *Sí, depende la cuenta que hagas.*

19) **Otros alumnos**: *Sí*

20) **P**: *¿Sí?, ¿a ver? A ver, Tomás quiere decir algo.*

21) **Tomás**: *Que con eso no te podés dar cuenta, te da el mismo resultado pero no te sirve como dato para averiguar el 60.*

22) **Belén**: *Igual, si lo descomponés más a…*

23) **P**: *A ver, ¿te da? A ver...*

24) **Belén**: *Si hacés 11 x 2.*

25) **P**: *A ver, voy a hacer lo que dice Belén, ¿sí? 3 x 11.*

La profesora acompaña, escribe 3 x 11, descompone el 22 como 11 x 2:.

66 x 40	= 2640
3 x 22 x 5 x 8	= 2640
3 x 11 x 2 x 5 x 8	= 2640

26) **Belén**: *3 x 11 x 2.*

27) **P**: *3 x 11 x 2.*

28) **Belén**: *Entonces hacés por 5 x 8.*

29) **P**: *Por 5 x 8, seguimos igual ahí, 2640, ¿sí? ¿Qué más?*

30) **P**: *Yo lo estoy viendo al 60.*

31) **Alumno**: *Si no está…*

32) **P**: *Puede ser, yo a veces veo cosas que no existen.*

33) **Mati**: *¿Puede ser el 8, 4 x 2?*

34) **P**: *A ver… Ah, Mati dice que este lo podemos poner como 4 x 2.* (Señala el 8 del pizarrón).

66 x 40 = 2640
3 x 22 x 5 x 8 = 2640
3 x 11 x 2 x 5 x 8 = 2640
3 x 11 x 2 x 5 x 4 x 2 = 2640

35) **Mati**: *Sí.*

36) **P**: *A ver, no sé para qué me servirá, pero yo lo pongo. ¿Para qué, Mati, dijiste eso?* (Completa en el pizarrón anterior).

37) **Mati**: *5 x 4 te da 20… y 20 x 3.*

38) **P**: *A mí se me había ocurrido otra: 3 x 2.*

La profesora acompaña este nuevo "rearmado" con indicaciones sobre la descomposición del pizarrón y los alumnos la siguen respondiendo los resultados de los productos hasta armar el 60.

39) **Valentina**: *Decime, Vale*[61]*, vos haceme creer que es y después vas a decir que haga 5 x 8 y ahora no es, ¿qué me hace pensar a mí que voy a empezar a descomponer?*

40) **P**: *Bien, bien, ¿quién le contesta a Valentina*?

En este fragmento, la profesora interpreta la intervención de Agostina en 5, que dice "*Pero también puede ser 4 x 10"*, y la reorienta hacia la posibilidad de hallar el 60 partiendo de una descomposición diferente a la de Paula[62], y las restricciones ante tal situación para conocer si 2640 es divisible por 60. Formula y devuelve al resto de los alumnos en las intervenciones 11, 14 y 15.

[61] Vale es la profesora.

[62] 40 como 20 x 2.

11) **P**: *Ah, ya entiendo tu pregunta. Lo que Agos dice es… Vieron que Pau el 40 lo descompuso como 20 x 2, ¿sí? Pero a Paula, por ejemplo, se le podría haber ocurrido descomponerlo por 4 x 10, o 5 x 8, entonces lo que pregunta Agostina es: ¿y pero va a dar lo mismo?, ¿voy a poder obtener el 60? Esa es su pregunta: si yo hago 4 x 10: ¿me puedo armar el 60?*

Varios alumnos responden que no se puede armar el 60.

12) **P**: *¿Entienden lo que está diciendo Agostina? A ver si todos me escuchan, presten atención a lo que pregunta Agostina que está bueno.*

13) **Belén**: *Salvo que sean diferentes números, pero no da lo mismo…*

14) **P**: *Pero si no da lo mismo, no me va a dar 2640 y soné… Bien, está buenísimo lo que está diciendo Agos. A ver, ¿todos entendieron lo de Paula?*

Varios alumnos dicen que sí.

15) **P**: *Bueno, vamos a cambiar al problema que tiene Agostina, ¿sí? Agos dice "está bien, a este yo lo descompongo en 3 x 22", pero a este, lo que dice Agostina es "¿qué pasa si a este de acá lo descompongo, por ejemplo, como 5 x 8?, ¿me da 2640 o no me da 2640?" ¿Sí?*

Como dijimos, la experiencia de observar a Agostina en las clases nos permite afirmar que ella se posiciona con fortaleza en los cuestionamientos sobre la disciplina. Ampliando nuestra interpretación, es posible que la pregunta de Agostina se oriente hacia "cómo se explica que es divisible por 60" si la descomposición no evidencia el factor 60, y no tanto hacia el atributo de que 2640 sea divisible por 60. Es decir, resulta interesante distinguir entre estas dos creencias posibles:

- creer que "*no existirá un factor 60"*, razón que llevaría a concluir que el número no resultará divisible por 60 ante ciertas descomposiciones;

- creer que "*en ocasiones resulta poco visible la presencia del 60"*, lo que indicaría que los modos de justificar la divisibilidad por 60 —o de decidir sobre ello— se vuelve fuertemente dependiente de la descomposición que se tenga en un cierto momento.

En la primera de dichas creencias, la que tensa la profesora en el aula al decir "yo iba a contestar que no era divisible por 60 porque no encontré el 60", la descomposición que se elige considerar define características sobre el número: la descomposición considerada repercute en una conclusión sobre *el ser divisible por*. En la segunda creencia, la descomposición que se toma en cuenta repercute en las posibilidades de justificar la divisibilidad en términos de comunicación y no en términos de atributos sobre el número.

Ambas creencias se vinculan con las posibilidades de realizar transformaciones numéricas conservando la igualdad. Estas creencias remiten directamente a la relación sentido-denotación que distingue Frege (1892) para las expresiones, ya que lo que se indaga se instala sobre las posibilidades o no de modificar el sentido conservando la denotación.

Asimismo, la primera creencia que señalamos es la que utiliza la profesora como recurso didáctico para enfrentar a la clase con una contradicción en el sentido ya mencionado del término que establece Ballachef (1987). La profesora resalta, en su intervención 17, la contradicción entre dos respuestas: "*Y, no sé cómo hacemos porque… Esperá. Entonces parece como que dependiese, que te tenés que dar cuenta de cómo descomponer… Ahí Paula la sacó justito. Ahora, si yo descompongo como 5 x 8, ¿tengo otra respuesta?, ¿puede ser que obtenga que una es divisible por 60 y otra respuesta que no es divisible por 60?* Con su accionar intenta co-construir en el aula una situación contradictoria, la de que el número *A* sea divisible por 60 y no lo sea, para dar lugar a la discusión sobre la independencia del atributo de divisibilidad de un número respecto de sus descomposiciones particulares en factores.

Frente a la tensión que genera la profesora con su pregunta, las primeras respuestas incluyen a alumnos que —como Denisse— consideran que una elección diferente en la descomposición haría responder distinto respecto de la divisibilidad por 60; y a otros que consideran la separación entre la representación que proporciona una descomposición particular del número y su cualidad de ser divisible por otro número (por ejemplo Belén y Tomás)[63]. La intervención de Belén[64] en 13 es didácticamente interesante. Ella responde a la pregunta de la profesora de si puede existir alguna descomposición que haga imposible reencontrar el 60 afirmando que el número "resultado" variaría. Su afirmación indicaría que para esta alumna toda descomposición de un determinado número debiera poder alcanzar el factor 60 y —agregamos nosotros— de cualquier otro factor presente en alguna descomposición del número en cuestión. Interpretamos que su intervención trasluce la creencia de que toda descomposición de un número debe necesariamente

[63] Todas estas intervenciones trascurren a partir de considerar la escritura en el pizarrón de *66 x 40* descompuesto como *3 x 22 x 5 x 8* y no como *3 x 22 x 20 x 2* como se observa en el registro.

[64] Esta alumna luego monitoreará una acción que permite dar un argumento respecto de esta relación descomposición-divisibilidad.

admitir la posibilidad de ser transformada en otra descomposición de él, lo que permitiría concluir que toda descomposición del número podría nuclearse en una descomposición común. Su intervención en este momento no hace referencia a la unicidad de descomposición en ciertos factores, pero sí empieza a inducir algo al respecto en su intervención 22: "*Igual, si lo descomponés más a…".*

Antes de continuar con Belén nos interesa resaltar la intervención que ya mencionamos de Tomás como representante de otras voces que afirman que el resultado —el número 2640— no puede cambiar, pero que ciertas formas de descomponer no hacen evidente el factor de divisibilidad ("*Que con eso no te podés dar cuenta, te da el mismo resultado pero no te sirve como dato para averiguar el 60"*). Dijimos ya que esta intervención se ubica en la separación que teóricamente señalan las nociones de sentido y denotación: *diferentes descomposiciones denotan al número 2640 pero no todas "muestran de la misma manera" su divisibilidad por 60.* En su formulación, Tomás utiliza las palabras "dato" y "resultado" para marcar esta separación, cuestión que trasluce una mirada gestada en el trabajo aritmético a partir de la experiencia de los alumnos de su edad: *el número 2640 permanece como invariante pero los datos que conforman las diferentes cuentas pueden cambiar y permitir o no "averiguar" el 60.*

Tomás sostiene la duda respecto de las posibilidades de poder reencontrar el 60 a partir de cualquier descomposición inicial del número 2640. No parece dudar él respecto de que 60 dividirá siempre a 2640 pero sí deja en cuestión si a partir de cualquier descomposición inicial se puede dar una respuesta.

Ante esta duda sembrada por Tomás, Belén interviene afirmando que *"Igual, si lo descomponés más a…"* y continúa otorgando una descomposición inicial del 3 x 22 en 3 x 11 x 2. La primera acción de descomponer de Belén da lugar a que, a partir de allí, otros alumnos junto con ella —y con el sostén de la profesora[65]— continúen transformando hasta poder reencontrar el factor buscado, 60.

La discusión que tiene lugar hasta la intervención 38, y que concluye en un reencuentro del 60, permanece anclada en la particularidad de la descomposición que se escribe luego de la inquietud inicial de Agostina[66], y en el juego de números particulares que se desprenden de ella.

---

[65] En la oralidad y en las representaciones escritas en el pizarrón de las expresiones formuladas oralmente por los alumnos.

[66] Ella es 3 x 22 x 5 x 8.

Ciertas afirmaciones como las de Belén o Tomás, permiten inferir que estos alumnos están considerando los números 66, 40 y 60 como ejemplos generales, y que los procesos que describen tienen carácter general. Ahora bien, la intervención casi al final del episodio de Valentina —en 39— da lugar en el aula a un tratamiento del asunto en cuestión con un nuevo matiz de generalidad. Valentina, alumna con una posición débil, captura lo que se está discutiendo, en nuestras palabras *hay respuestas que dependen de lo que se muestre,* y hace explícito un reclamo de algún criterio general que le permita decidir hacia dónde orientar su primera descomposición. Ella solicita un criterio de acción para resolver y responder, pero al mismo tiempo sumerge al aula en un planteo que deja ya de estar arraigado en los números 66, 40 y 60. Su pregunta es general y da cuenta de ello el tipo de formulaciones que aparecen en los diálogos del episodio que abordaremos a continuación. La posición de esta alumna al desear "leer" actos reproducibles en nuevas situaciones matemáticas "parecidas" otorga a la clase la oportunidad de descentrarse de la particularidad. Al mismo tiempo, vuelca al colectivo en una búsqueda de recursos conceptuales para argumentar la independencia de la cualidad de un número de ser divisible con respecto a su sentido particular adquirido a partir de alguna descomposición específica en factores.

5.4.2. La búsqueda colectiva de un procedimiento general para hacer evidente que un número es divisible por otro

Frente a la pregunta de la profesora en la intervención 40 ("*Bien, bien, ¿quién le contesta a Valentina?*"), el diálogo continua con el siguiente desarrollo:

41) **Denisse**: *Que vos tenés que seguir descomponiendo para ver si podés armarlo.*

42) **Denisse**: *Descomponiendo el número porque ahí van a salir un montón de números…*

43) **Belén**: *Tenés que seguir hasta encontrar el 2 o hasta el divisor más chico. Y llegás, como hicimos con el 9… Llegás hasta que no podés más y ya está.*

44) **P**: *¿Qué opinan de lo que dice Denisse?*

45) **Alumna**: *Está bien.*

46) **P**: *O sea, si te avivás de entrada, como se avivó Pau, bienvenido sea. Ahora, si no te avivás de entrada, como por ejemplo que yo pongo 5 x 8, lo que dice Denisse es "descompongamos al máximo y ahí tratemos de armarnos el 60". Porque, por ejemplo, con el 9, ¿qué pasó? Descompusimos al máximo y ahí nos dimos cuenta que no había un 9. ¿Nos*

dimos cuenta al principio que no había un 9? (Varios alumnos dicen no) *¿Nos dimos cuenta en la primera descomposición que no había un 9? ¿Cuándo nos dimos cuenta de que no había forma de armar un 9?*

La profesora remite a la historia de su clase, cuando estudiaron si 2640 era divisible por 9, discusión que habían tenido previamente y que nosotros analizamos como caso 2.

47) **Valentina**: *Cuando ya no había más.*

48) **P**: *Ya en la última. ¿Se entiende? Por ahí la enganchás en la primera como hizo Pau.*

49) **Valentina**: *Pero como que me queda duda, porque si yo sigo descomponiendo… Pero no sé porque yo nunca haría "ya está, me da eso y me da eso, no es múltiplo"… O sea, entonces sería que tenés que descomponer hasta llegar…*

50) **P**: ¿E*ntienden chicos la discusión que estamos manteniendo? ¿Sí? Arrancó con Agostina diciendo "si vos ponés un 5 x 8, el 60 no está" ¿Y a qué conclusión estamos llegando acá? Que 60 sí está pero…*

51) **Julia**: *Siempre tenés que descomponer hasta que no podés descomponer más porque tal vez a la primera no lo podés hacer pero después que le seguís buscando la vuelta sí… Al final es el mismo número y no se va a cambiar si es divisible o no según como vos lo descompongas.*

52) **P**: *¿Entendés lo que dijo Juli?*

53) **Valentina**: *Sí.*

54) **P**: *Que es importante mantener que siempre es el mismo número, ¿está? Eso es recontra interesante. Es decir, uno no puede cambiar el número, entonces si es divisible por 60 de una forma tiene que ser divisible por 60 de otra forma, ¿entienden?*

55) **Valentina**: *De todas las formas.*

56) **P**: *De cualquier forma que a vos se te ocurra descomponerlo, ¿sí? Llegando a la más chica, a la más larga posible… Yo sé que es un embole, Valen, pero que por ahí llegando a la más larga, da.*

57) **Valentina**: *Era porque… O sea, a mí no me gustaría que llego y digo "no da"… Ni me gasto en descomponerlo, ya está, me dio eso y me dio eso.*

58) **P**: *Bien, pero eso es lo que estamos aprendiendo, precisamente, que uno puede descomponer de distintas maneras y hasta que no lo encuentres no tenés que parar, o hasta que descompongas todos y digas y acá el 9 no me lo puedo armar.*

Este segundo fragmento deja oír diferentes voces que hacen explícitos criterios de acción para la pregunta de Valentina respecto de cómo empezar a descomponer y cómo estar seguros de por quién será divisible un número dado. Las afirmaciones de Denisse y Belén asumen o bien la existencia de que hay descomposición para un número entero, o que es posible transformar una descomposición dada en factores de un número como un producto de otros factores. Como lo hace Denisse en 41 y 42 *"Que vos tenés que seguir descomponiendo para ver si podés armarlo"; "Descomponiendo el número porque ahí van a salir un montón de números…".*

Belén asume —asimismo— la existencia de una descomposición final, una en la que "no se podrá más", que te permitirá dar respuesta —afirmativa o negativa— respecto de la divisibilidad de un número por otro. En sus palabras (43): "*Tenés que seguir hasta encontrar el 2 o hasta el divisor más chico. Y llegás, como hicimos con el 9… Llegás hasta que no podés más y ya está".*

Es decir, hay un proceso que se asume posible: el de transformar una descomposición en otra, y a la vez una existencia que se asegura: la de una descomposición que resulta final.

La profesora reformula y agrega a lo dicho por Belén y Denisse, enfatiza la existencia de una descomposición última en su formulación "descompongamos al máximo" y deja correr el hecho —ya señalado livianamente por Belén al traer a su frase el divisor 9[67]— de que esa descomposición "máxima" o "final" permitirá siempre dar lugar a una respuesta sobre el ser divisible o no de un número por otro.

"O sea, si te avivás de entrada, como se avivó Pau, bienvenido sea. Ahora, si no te avivás de entrada, como por ejemplo que yo pongo 5 x 8, lo que dice Denisse es "descompongamos al máximo y ahí tratemos de armarnos el 60". Porque, por ejemplo, con el 9, ¿qué pasó? Descompusimos al máximo y ahí nos dimos cuenta que no había un 9. ¿Nos dimos cuenta al principio que no había un 9?". (Profesora, 46)

[67] Divisor considerado en el caso 2 que analizamos previamente.

La generalidad del proceso se asume cuando los alumnos describen la posibilidad de descomponer siempre hasta una descomposición final que permita contestar, con independencia del divisor 60 y trayendo ese divisor como ejemplo particular de otros divisores considerados en el ejercicio. Las descripciones de Belén y de Denisse con relación al proceso a realizar son libres de referencia al divisor 60.

Más aún, la síntesis de Julia hace explícita las razones que aseguran que el proceso de seguir descomponiendo deberá tener un final y que no podría variar la conclusión que se obtenga, ya que "*Al final es el mismo número…*": "*Siempre tenés que descomponer hasta que no podés descomponer más porque tal vez a la primera no lo podés hacer pero después que le seguís buscando la vuelta sí… Al final es el mismo número y no se va a cambiar si es divisible o no según como vos lo descompongas"* (intervención 51).

La formulación, a la que acabamos de hacer referencia expresa generalidad; el uso del adverbio "siempre" da cuenta de que su descripción remite a un proceso general atribuible a cualquier número y a cualquier descomposición inicial. Julia admite también que el proceso de descomponer tiene un final ("*hasta que no podés más*") y —en ese sentido— es un procedimiento matemáticamente viable. La alumna anticipa también que *una* descomposición no podría ser la "responsable" de un atributo del número como es la divisibilidad ("*es el mismo número y no se va a cambiar si es divisible o no según como vos lo descompongas*"). Hay aquí una afirmación que remite directamente a la distinción entre objeto y representación, distinción que es parte del aprendizaje que está en juego y que comporta un conocimiento central para adentrarse en un tipo de trabajo algebraico.

El episodio se cierra con una síntesis de la profesora, primero aún contextualizada en la mención del 60, para luego descontextualizarla parcialmente a otro divisor considerado, el 9. Cuestión —esta última— que le permite retomar el análisis de la generalidad del proceso y su viabilidad para dar respuesta:

"Que es importante mantener que siempre es el mismo número, ¿está? Eso es recontra interesante. Es decir, uno no puede cambiar el número, entonces si es divisible por 60 de una forma tiene que ser divisible por 60 de otra forma, ¿entienden?"(intervención 54).

Luego, refiriendo a la descomposición "más chica" y "la más larga posible" (más chica remitiendo a los "divisores más chicos" a los que refirió Belén, y "más larga posible" con respecto a la cantidad de factores presentes en ella:

"*De cualquier forma que a vos se te ocurra descomponerlo, ¿sí? Llegando a la más chica, a la más larga posible… Yo sé que es un embole, Valen, pero que por ahí llegando a la más larga, da"* (intervención 56).

"*Bien, pero eso es lo que estamos aprendiendo, precisamente, que uno puede descomponer de distintas maneras y hasta que no lo encuentres no tenés que parar, o hasta que descompongas todos y digas y acá el 9 no me lo puedo armar"* (intervención 58).

Reiteramos que tanto Julia como Belén admiten que el proceso permite llegar a alguna descomposición última; sin embargo, ninguna de las dos hace explícito si consideran que —en todos los casos— se llega a una misma descomposición última. Interpretamos que es posible que las alumnas no sientan necesidad de mencionar que la descomposición final es siempre la misma ya que sus prácticas anteriores no les permiten suponer que pueda ocurrir otra cosa. Más aún, el hecho de que ambas consideren este proceso como un proceso que *siempre* permite dar una respuesta —para cualquier divisor— trae implícita la asunción de la unicidad de la descomposición final.

Describimos en este caso de estudio el proceso de construcción en el aula de *la necesidad de encontrar un procedimiento general para argumentar* respecto de la divisibilidad, un proceso que no dependa de la descomposición inicial que se conoce: *la divisibilidad y la prueba del "ser divisible por" no pueden depender de la contingencia de una descomposición que se muestra inicialmente.* Proceso que remite y conduce a asentar otra construcción ya presente en la clase a propósito de antiguas tareas de naturaleza aritmética: *la posibilidad de transformar una expresión inicial a los efectos de saber o mostrar nuevas cosas en la expresión transformada*. En el caso particular de este episodio, el interés está en poder "mostrar" el factor de divisibilidad, y se concluye que, si bien una transformación azarosa de una descomposición inicial en factores puede conducir al encuentro con el factor que se quiere hacer visible, hay un proceso que no depende del azar de elección que es el de transformar la expresión inicial hasta llegar a una descomposición minimal desde la cual pueda "rearmarse" el factor buscado.

Las nociones de equivalencia y de transformación conservando la denotación para mostrar o conocer nuevas cosas[68], solidifican sus significados a partir del juego de vaivenes de sentido que proporciona el intercambio comunicacional a propósito de una pregunta emergente en la tarea colectiva. El sentido de esas nociones se conforma de manera dual a propósito del

[68] Dos nociones nodales en el trabajo algebraico.

alcance de cada una y de su construcción colaborativa en el espacio colectivo. Nos referimos aquí a un alcance parcial en términos de las actualizaciones que sufre el sentido de cada noción en el escenario de tensión que impone cada participante del intercambio con sus inquietudes. Así, lo discursivo habilita un sostén de lo incierto en el marco del terreno de lo impreciso. La escritura supone una mayor decisión que lo verbal. Es así que, la modalidad de la profesora al sostener la escritura “negociada” de las producciones de los alumnos, soporta —y a la vez informa— formas disciplinares de escribir.

Nos interesa, a su vez, resaltar ciertos gestos que —en la interacción— operan como disparadores de los dos procesos que enfatizamos previamente. Uno es el de Agostina, alumna que con una visión de la matemática como fuente de anticipación, distanciada del azar de una primera elección en la descomposición, siembra una inquietud que permite a la profesora sostener para toda la clase el problema de si la divisibilidad de un número queda o no signada por alguna descomposición multiplicativa particular que lo denota. Otro gesto es el de Valentina, que con intención de elaborar un criterio para decidir cómo empezar en otras situaciones, da lugar a la construcción colectiva de un procedimiento general que permita acceder al factor de divisibilidad, cualquiera sea la descomposición inicial de la que se parta. Estos gestos —frecuentes en los estudiantes—, y cuyo probable origen radique en el “*¿cómo lo hago la próxima vez?”*, tienen inicialmente un interés de éxito escolar, pero al mismo tiempo tienen un valor generalizante, pues reconocen una tarea particular como parte de un grupo de tareas en donde ciertas acciones podrán repetirse. En este marco, el valor del accionar de la profesora está en considerar estos planteos, imprecisos e incompletos, como punto de partida para la construcción de un medio propicio que permita elaborar colectivamente criterios generales sobre el problema de divisibilidad que se pretende estudiar.

5.5. Caso 4: La extensión de Maia de una regla construida en el hacer de la práctica

Al finalizar el caso anterior hablamos de cómo la transformación de expresiones numéricas cobra significado a partir de las inquietudes locales que se gestan en el plano colectivo. Las preguntas que surgen a propósito de una cuestión que involucra una expresión numérica particular se reinvierten en la construcción de un sentido propio de las transformaciones. En tales términos, el sentido —con referencia a la Teoría de Situaciones— de la transformación de una expresión que es denotada se inserta en la necesidad de explicar algo nuevo sobre la expresión. En ese proceso de construcción se imbrican las transformaciones algebraicas que permiten modificar la expresión sin alterar su denotación. Consideraremos en lo que sigue un fragmento de aula en el que podemos recortar una regla de transformación y el uso que los alumnos le atribuyen en la práctica. Luego pondremos esto en conexión con la extensión generalizadora de una alumna: Maia. Analizaremos la producción de Maia buscando esbozar líneas de tensión en el intercambio que posibilitarían la emergencia de producciones generalizadoras. Esta alumna extiende un modo de hacer presente en el aula sobre los números naturales a los números racionales positivos. Veremos también lo difícil que resulta para la profesora poder interpretar y sostener para el resto de los alumnos la producción de Maia, como lo hizo en las situaciones que consideramos en los casos previos. La producción de esta alumna está muy alejada de la anticipación de la profesora.

Abordemos en primer lugar la regla que interpretamos como germen de la extensión de Maia. El problema sobre el que se soporta la construcción de este cuarto caso es el mismo que el de los casos anteriores, aquí se aborda la divisibilidad de 2640 por 33. En este momento se recupera, en el espacio colectivo, lo que los alumnos pensaron en sus casas. Se nos hace necesario mencionar que en una actividad anterior, que consistía en indicar cómo se puede hacer la multiplicación 24 x 12 en la calculadora sin usar la tecla del 2 y usando la tecla de multiplicar solamente, los alumnos habían desplegado estrategias de multiplicar y dividir obteniendo así la cuenta de multiplicar 48 x 6. Esto se había discutido en colectivo en el aula. Es eso lo que enfatizan los alumnos al decir en este problema "*lo hacés como lo hacíamos ayer*".

1) **P**: *¿Es divisible por 33?*

2) **Varios**: *Sí.*

3) **P**: *¿Por qué?*

4) **Carla**: *Porque 33 es la mitad de 66.*

5) **P**: *Esperá, esperá.*

6) **Carla**: *Entonces va a dar la mitad.*

7) **P**: *A ver, esperá. ¿Estamos de acuerdo que 33 es la mitad de 66?*

8) **Varios**: *Sí.*

9) **P**: *¿Y por qué eso garantiza de que va a ser divisible?*

10) **Carla**: *Porque está en la tabla del 66.*

11) **Alumna**: *Va a estar en la tabla del 2640.*

12) **P**: *A ver, a ver…, entiendo lo que dice Carla. Voy a tomar un poquito lo que dice Carla. Carla dice el 2640 está en la tabla del 66, ¿están de acuerdo con eso?*

13) **Varios**: *Sí.*

14) **P**: *¿66 por cuánto?*

15) **Tomás**: *44.*

16) **Alumno**: *Por 40.*

17) **P**: *Bien, por 40.*

18) **Tomás**: *Ah, perdón, pensé que era la otra* (Se refiere a la otra cuenta que habían discutido al probar previamente que 2640 era divisible por 60. Habían expresado 66 x 40 = 60 x 44).

19) **P**: *66 x 40 da esto. O sea…, está esto, está en la tabla del 66.*

20) **Alumna**: *Sí.*

21) **P**: *Carla dice que como está en la tabla del 66…*

22) **Alumna** (superpuesta)*: …también está en la del 2640.*

23) **P**: *También. Entonces, vamos a seguir la explicación de Carla: entonces también está en la tabla de…*

24) **Carla** (interrumpe)*: Pero está pero la mitad de ese número porque se parte.*

Murmullos.

25) **P**: *Ya sé, pero… A ver, ¿es cierto que si está en la tabla del 66 está en la tabla del 33?, ¿y cómo alguien me lo puede demostrar porque yo no me lo creo demasiado?*

26) **Belén**: *Sería por 80 porque está la mitad en un lado y la mitad en el otro.*

27) **P**: *A ver…*

28) **Agostina**: *Yo primero multipliqué 33 x 40 y que me dio la mitad de 2640, entonces después hice 33 por 80, que es el doble de 40, entonces me iba a dar el doble de 1320, que es 2640.*

29) **Belén**: *Que es lo que hicimos ayer, que a uno le sacás la mitad y al otro el doble.*

30) **P***: ¿Se acuerdan? Exacto, que es lo que está diciendo Agos que lo hizo en dos partes. Bien, fíjense a ver qué les parece. ¿Estamos?, ¿esto da 2680?*

31) **Alumna***: 2640.*

32) **P**: *2640. Perdón, 2640, ¿sí? Lo que vimos ayer, ¿era que si a este le saco un 2, el 66 tiene un 2 multiplicando?*

33) **Alumno**: *Sí.*

34) **P**: *Sí, ¿es 2 por cuánto?*

35) **Alumna**: *33.*

36) **P**: *2 x 33, si a ese 2 se lo doy a este, ¿se acuerdan lo de ayer?*

37) **Alumna**: *Sí.*

38) **P**: *¿Cuánto da esto?*

Hablan todos juntos.

39) **P**: *Ahí va. Ahora les hago una pregunta bien concreta, ¿el 2640 está en la tabla del 33?*

40) **Muchos alumnos**: *Sí.*

41) **P**: *¿Por qué?*

42) **Alumna***: Porque de un lado está el 80 y da lo mismo.*

43) **P**: *O sea, ¿si algo está en la tabla del 66 está en la tabla del 33? Sí, porque al 66 le saco un 2, ¿se acuerdan lo que hicimos ayer?, ¿sí? Hay que estudiar la clase de ayer, importante fue la clase de ayer.*

44) **Gracia**: *¿El 80 de dónde sale?*

45) **P**: *¿El 80 de dónde sale?*

46) **Alumna**: *El 80 sale…*

47) **Tomás B.**: *Es el doble de 40.*

48) **P**: *A ver, ¿quién puede contestar concretamente a Gracia? Tomás, dale.*

49) **Tomás B.**: *Que ahí tenés 66 x 40, entonces si vos le buscás en este caso el doble a 40, le tenés que buscar la mitad a 66.*

50) **P**: *Mirá, lo pongo un poquito como lo trabajamos ayer. ¿El 66 estás de acuerdo que es 33 x 2?*

51) **Gracia**: *Sí.*

52) **P**: *Y todavía me queda el 40, entonces lo que hago es asociar estos dos y me queda 80. Si querés lo ponemos así, así se ve bien clarito de dónde sale el 80. Bien.*

La profesora escribe:

66 x 40
33 x 2 x 40 (lo asociás)
33 x 80

La intervención de Belén en 26 (“*Sería por 80 porque está la mitad en un lado y la mitad en el otro”*) expresa una regla de acción que vivió —como mencionamos— a propósito de otras tareas. La regla indica que se debe “dividir” uno y “multiplicar” al otro.

Observamos que la intervención de Agostina en 28 difiere en parte con la de Belén porque ella opera con la mitad de un factor y afirma correctamente que el resultado es la mitad de 2640. Su intervención completa nos permite afirmar que ella anticipa que su operación —sobre uno de los factores que conforman el 2640— actúa sobre el resultado total, 2640. Agostina enfatiza al principio que al multiplicar 33 x 40 obtiene la mitad de 2640, cuestión que podría llevarnos a inferir que ella no anticipa que al dividir por 2 al factor 66 esa acción impactará sobre el resultado inicial. Sin embargo, afirmamos que ella controla que sus actos parciales sobre los factores impactan sobre el resultado 2640, por su elección de aclarar que el número 80 resulta a partir de ser *“el doble de 40”* y que, por ello, *“entonces me iba a dar el doble de 1320, que es 2640”*.

Es allí donde identificamos una sutil diferencia en la justificación de la regla de acción que tanto Belén como Agostina ejercen (acción que se muestra estable en muchos de los alumnos). Belén indica un uso presente en las formulaciones de muchos alumnos, dividir un factor y multiplicar el otro[69], enuncia la regla que vive en el aula. Agostina agrega razones, indica que la equivalencia numérica se sostiene a partir de que ese “dividir un factor y multiplicar otro” actúa dividiendo y multiplicando el resultado total por un mismo valor y, en este sentido, no lo modifica.

La profesora acompaña las intervenciones de los alumnos —referidas a multiplicar y dividir— con escrituras que refuerza con la oralidad desde el pizarrón.

[69] Belén (intervención 29): “Que es lo que hicimos ayer, que a uno le sacás la mitad y al otro el doble”.

44) **Gracia**: *¿El 80 de dónde sale?*

[…]

50) **P**: *Mirá, lo pongo un poquito como lo trabajamos ayer. ¿El 66 estás de acuerdo que es 33 x 2?*

51) **Gracia**: *Sí.*

52) **P**: *Y todavía me queda el 40, entonces lo que hago es asociar estos dos y me queda 80. Si querés lo ponemos así, así se ve bien clarito de dónde sale el 80. Bien.*

La profesora escribe:

66 x 40

33 x 2 x 40 (lo asociás)

33 x 80

Observamos que la profesora solo expresa en el pizarrón números enteros. Ello permanece implícito en el aula más allá de que la unidad de estudio que están abordando es la de "Números Naturales". Sin embargo, la acción de los alumnos es la de dividir y multiplicar, ambas operaciones válidas sobre el conjunto de los números enteros pero no cerradas sobre ese dominio numérico.

En este sentido, nada impide a Maia extenderse a los números racionales en las acciones intermedias de esta regla utilizada hasta entonces sobre los números enteros. Si bien la profesora clausura su procedimiento, probablemente por no poder comprenderla, nos parece interesante recuperar y dar análisis a lo que un alumno, habituado a un trabajo de aula que da lugar a la generalización, puede llegar a preguntarse y producir.

Veamos la producción de Maia:

53) **Maia**: *Yo hice 66 x 40. Entonces agarré el 60 y empecé 60 dividido 60, se tendría que transformar… Me daba 1,1.*

54) **P**: *66 dividido... No, 60 dividido 60 te da 1.*

55) **Maia**: *No, 66 dividido 60.*

56) **P**: *1,1.*

57) **Maia**: *1,1. Entonces, después pensé "bueno, 40 lo hago dividido 1,1".*

58) **P**: *A ver…*

59) **Maia**: *Y después agarré y me dio 44, entonces pensé "bueno, entonces…". Ah, no, ¡pará! Antes dejé 40 dividido 1,1 e hice 60 dividido 1,1. Antes hice 66 dividido 60 y me dio 1,1 y ahora hice 66 dividido 1,1, y me dio 60, entonces pensé "bueno, si lo hago al revés y me da lo que yo quería obtener, entonces ahora hago 40 dividido 1,1". Y me dio 44, entonces 44 dividido 40 me dio 1,1.*

60) **P**: *¿Y por qué?*

61) **Maia**: *Eso sería 44 por 60, que da 2640.*

62) **P**: *Me mareé, a ver... Esperá, igual, a ver...*

63) **Alumno**: *Yo no entendí.*

64) **P**: *Acuérdense el detalle de que vamos a tratar, por ejemplo, de no usar calculadora, ¿sí? Y no llegar a usar división con coma. Fíjense lo siguiente, a mí lo que me parece interesante de estos ejercicios es que podemos evitar pasar por las divisiones con comas.*

65) **Maia**: *Con números naturales.*

66) **P**: *Números naturales… Es simplemente pasar por… Fijate todos los números que hay acá, ¿se entiende? No quita que esté bien lo que están haciendo. No la quiero tomar así, por ahí no traer algo que no quiero laburar en este momento, ¿se entiende Maia? Ahora voy a relojear un cachito a ver cómo…, por ahí está buenísima pero no me quiero meter con el 1,1, ¿se entiende? ¿Sí? Bien, ¿la del 12 pudieron?¿*

67) **Maia**: *Sí.*

Miremos las primeras explicaciones que da Maia sobre su forma de proceder. Si bien ella dice que divide 60 por 60, al comienzo, luego corrige diciendo que divide 66 por 60, obteniendo 1,1. Trata luego de operar con el 40, pues ella parte del producto del enunciado, 66 x 40 y trata de hallar un factor 60 en el sentido de la práctica de fundamentación del "ser divisible por" instalada en las tareas previas del aula.

Dividiremos en dos partes su intervención 59. Al principio, Maia trata de recuperar para sí lo que hizo en su casa y resulta algo compleja su formulación, pues la alumna dice y corrige intentando recuperar: "*Y después agarré y me dio 44, entonces pensé 'bueno, entonces…'. Ah, no, ¡pará! Antes dejé 40 dividido 1,1 e hice 60 dividido 1,1. Antes hice 66 dividido 60 y me dio 1,1 y ahora hice 66 dividido 1,1, y me dio 60 (…)".*

En esta primera parte, interpretamos que Maia recupera e informa, haciendo uso de propiedades de la multiplicación a los efectos de poder reencontrar un factor 60. Obtiene el factor que llamaremos “de paso” (1,1) a partir de dividir 66 por 60, pero luego opera con la división de 66 por 1,1 para obtener el 60 que necesita —quiere, desea— escribir en la cuenta como factor. Observamos que el factor 2 —en el caso del 33 x 80 que consideramos en el primero de los fragmentos— fue hallado a partir de un cálculo mental bajo la intención —en nuestras palabras— de que “66 dividido 2 permite hallar el 33 buscado” para luego utilizar la regla que antes levantamos de las intervenciones de los alumnos (“*Que es lo que hicimos ayer, que a uno le sacás la mitad y al otro el doble”,* formulación de Belén en su intervención 29). En esta regla, el 2 es un factor “de paso” ya que queda incorporado a los factores 33 x 80 pero no permanece visible en el producto que reescribe al 2640.

En continuidad con esto, interpretamos que Maia actúa para hallar el factor “de paso”, ya que no resulta trivial que 66 / 1,1 permite obtener el 60; interpretamos ello a partir de su formulación “*Antes hice 66 dividido 60 y me dio 1,1 y ahora hice 66 dividido 1,1, y me dio 60 (...)*”. Una vez que obtiene el 60 que busca, multiplica 40 por 1,1 y obtiene 44; sin embargo, la otra parte de su intervención en el aula es también algo confusa, ya que habla de dividir cuando el proceso que parece efectuar es multiplicar por 1,1 el valor 40 (“…*entonces pensé ‘bueno, si lo hago al revés y me da lo que yo quería obtener, entonces ahora hago 40 dividido 1,1’. Y me dio 44, entonces 44 dividido 40 me dio 1,1”).*

Frente a ello, la profesora decide no adentrarse en lo que hace la alumna y, en tal sentido, tampoco en el alcance que podría tener esta estrategia; evita considerar los números decimales en el marco de sus tareas de divisibilidad sobre el conjunto de los enteros Z , y el procedimiento de Maia queda allí agotado en ese momento de la clase.

Reproducimos los cálculos que interpretamos que Maia hace como:

66 x 40 = 66 / 1,1 x 1,1 . 40 = 60 x 44

Un breve estudio matemático de la generalidad del procedimiento que aplica Maia nos hace considerar que en los casos en que *A x B* sea efectivamente divisible por *C* en el conjunto de los enteros Z con *A, B, C* números enteros, existirá *Q* número racional tal que *A* / *Q* = *C* y *Q x B* = *D,* con *D* entero.

Desarrollemos eso: como *A* x *B* es divisible por *C* en el conjunto de los enteros, existirá *H* —entero no nulo— tal que *A* x *B* = *C* x *H*; luego *A* / *(H* / *B)* = *C* y *H* / *B* x *B* = *H*. En tal sentido, *Q* resulta ser *H* / *B* y *D* es el mismo cociente entero *H*.

De este modo, el proceso efectuado por Maia es general siempre que el producto inicial A x B sea efectivamente divisible por el nuevo factor en cuestión. En caso de no ser divisible A x B por C, obviamente no podrá hallarse el factor Q “de paso”.

El caso de Maia nos resulta un ejemplo de una regla general que podría emerger a partir del soporte en otra regla —viva y utilizada— en el espacio colectivo. En su juego aritmético, la alumna “se encuentra” con la extensión de una regla, válida en los casos en que la divisibilidad por un cierto factor sea verdadera. Su regla es usada a modo aritmético a partir de un juego de cálculos al que la profesora decide no dar lugar y, en este sentido, no puede ofrecer a sus otros alumnos un acompañamiento escrito que “muestre” que sus cálculos conservan la igualdad y que de esa manera dan respuesta a lo pedido.

Las acciones de la alumna escapan al dominio numérico que la profesora espera que viva en el aula para estos ejercicios. En tal sentido, la regla de Maia —válida cuando hay divisibilidad— no puede ser asumida como un problema a tratar desde el sistema conceptual que la profesora compromete. Asimismo, tampoco otros alumnos —como ocurrió en el Caso 1— pueden entenderla como para sostenerla ante la profesora. Su producción matemática escapa a la comunidad aula y se vuelve poco visible en el colectivo.

5.6. Reflexiones generales a partir de los cuatro casos analizados

Hemos abordado el análisis de cuatro casos que enmarcan diferentes modos de alcance y despliegue de lo general en el aula. Todos desarrollan aspectos comunes con respecto a la generalidad y aspectos particulares.

Señalemos en principio —y a grandes rasgos— aquellos aspectos específicos de anclaje en lo general que recortamos en cada caso:

- Caso 1: el despliegue de un proceso de producción de una conjetura con respecto a una propiedad matemática sobre un subconjunto de los números enteros y el correspondiente proceso de análisis de su validez.

- Caso 2: la reflexión sobre la validez de un razonamiento y el uso de los ejemplos como modo para contra-argumentar la validez de una sentencia.

- Caso 3: la relación entre sentido y denotación de un número con respecto a las posibilidades —o no— de determinar si un número entero A resultará divisible por otro número

B, cuestión que implica saber si existirá algún proceso que permita establecer el sentido de *ser divisible* sin depender de la descomposición del número que se presente inicialmente.

- Caso 4: el despliegue de un alumno de un proceso que podría derivar en la extensión de una regla aplicada sobre los números enteros a los números racionales.

Avanzaremos en lo que sigue delineando aquellos aspectos comunes que interpretamos que contribuyeron al sostén de los procesos de generalización en torno a los cuatro casos mencionados. Nos proponemos rever cada caso para recortar en ellos aspectos del espacio de interacción que interpretamos que refuerzan el carácter de sostén y soporte de la producción de generalizaciones.

Observamos que en la producción de un proceso general del tipo “elaboración de una conjetura”, la producción de dicho proceso de generalización supone transitar a un espacio aún no conocido a partir de pequeños indicios que algún participante parece adquirir a propósito de lo existente y aún no general. Dijimos anteriormente que “el otro” resulta una fuente de sostén de la incertidumbre, un elemento necesario para avanzar cuando la duda sobrepasa aún la visualización de la construcción.

Tal tránsito en lo incierto se desarrolla —o no— a partir de los otros y sus evaluaciones locales y temporalmente estables. Identificamos que la relación entre la producción de una inferencia que hace un participante, inmerso en una red de interacciones con otros sujetos, y la actividad de selección, sostén o rechazo que los otros participantes desarrollan sobre esa primera elaboración, resulta determinante de las actualizaciones que, sobre la producción inicial, tengan lugar[70]. Es tal evaluación —la de algunos actores— la que despliega posibilidades de avance o no del proceso de producción, a partir de las primeras impresiones de los que inicialmente emiten un juicio de valor sobre la primera elaboración.

La construcción de la conjetura adquiere características del contexto social que —al transformarla— la sostienen y producen. El intercambio en lo oral ofrece un andamio a tal construcción que otorga posibilidades para expresar lo impreciso, con gestos que completan lo no verbalizado aún en un lenguaje matemáticamente admisible (ejemplo de ello es cuando Tomás indica el pasaje de cifras a partir de un gesto con sus dedos). Indicamos previamente que la precisión que tiene lugar después no está dada en el marco de dar precisión en tanto tal,

---

[70] Hablamos de actualizaciones en términos modificaciones de la producción inicial a propósito de retroacciones que aporta el colectivo

sino como necesidad de aclaración al otro de la formulación inicial. Hay una necesidad de construcción del diálogo que permea y dinamiza el proceso de precisión de la producción y, en este sentido, provoca la completación y adecuación del discurso desde el deseo de comprensión de los interlocutores.

Asimismo, el contexto social de la construcción ofrece un espacio fértil para asumir el estudio y despliegue del conjunto de normas y prácticas que enmarcan la construcción de una racionalidad matemática. ¿Qué fundamentación resulta aceptable dentro de la disciplina? ¿Qué conocimientos, teoremas o propiedades permiten sostener esa elaboración?

Por un lado, la acción desplegada en el discurso con otros expone el devenir de las decisiones asumidas al elaborarla, acciones probablemente enmarcadas en un conjunto de dudas. La presencia del otro oprime sobre la intervención —que expone la acción— exigiendo razones sobre el accionar, razones no producidas en el contexto de trabajo individual que afloran en el juego de tensiones de lo social. En este despliegue, lo implícito, lo no habitado, se vuelve presente, se vuelve diálogo el porqué de lo hecho y las posibilidades de aceptar ese porqué como elemento que habilite la reproducción de ese hacer en otras situaciones.

En ciertos casos, la confrontación proviene de un grupo o compañero que, durante el proceso de producción, desplegó otras estrategias. La pregunta indaga la racionalidad pero desde un marco posible de conocimientos presente en los alumnos que la profesora puede recuperar. En otros, la confrontación es instalada por la profesora, cuando el asunto —como vimos en el caso 2— es justamente un anticipo de la profesora de un modo de abordar la conformación de una racionalidad matemática. La generalidad de un razonamiento desde el punto de vista de la disciplina matemática no es pasible de ser propuesta como problemática desde el sistema de conocimientos disponible en los alumnos y es el docente el que —soportado en lógicas no enmarcadas en las formas disciplinares— puede colocar a la disciplina en vínculo con ese modo de razonar no matemático.

La variedad colectiva siembra la posibilidad de que una pregunta instalada inicialmente para resolver un hacer particular se desplace hacia la comprensión de un modo de hacer de la disciplina. El caso de Agostina al preguntar por el rol de los ejemplos en el Caso 2 ofrece esa perspectiva. Ella pregunta en su intervención 41 "*¿Se puede poner acá, por ejemplo, con otro número?*"; ella observa la acción de la profesora y produce una pregunta sobre los permisos con relación a los cambios numéricos y las conclusiones que de ellos puedan asumirse. La variedad grupal expone también intervenciones de otros alumnos que expresan no comprender el juego numérico. Sin embargo, esa tensión del intercambio otorga la posibilidad a la profesora de reiterar que la entrada de nuevos números permite considerar el razonamiento desplegado sin validez general para la matemática: no lo es por existir otros números que —conformando y haciendo verdaderas las premisas— conducirían a conclusiones falsas.

En tal sentido, los dos primeros casos que analizamos instalan en nuestro estudio que aspectos del hacer matemático específicos para el avance en la construcción de lo general adquieren formas propias —y necesarias— en un espacio de producción colectiva. En la elaboración de una conjetura, las opciones de su formulación, la necesaria definición del dominio de validez en el marco de la definición de la regla, las precisiones requeridas para dar curso a una definición entendible a la comunidad de producción, son conocimientos indispensables —en términos de generalidad— que se potencian, se forman y se conforman diferenciadamente en un trato con los otros. En este soporte colectivo, los modos en que lo impreciso puede sostenerse dan posibilidades de avance hacia el terreno no presente aún de la generalidad.

Asimismo, los aspectos relativos a los modos de argumentar la validez en la disciplina: qué tipos de enlaces de proposiciones despliegan o no razonamientos aceptados como válidos para la matemática, las formas de contradecir la validez de una proposición sostenida y el rol de los ejemplos como anclaje particular para refutar la validez general son también elaboraciones que se financian del juego dual entre lo impreciso y lo preciso que permite sostener el intercambio alrededor de una construcción.

El Caso 3 nos induce en una nueva cuestión que se adentra en la relación entre sentido y denotación de un número con respecto a las posibilidades —o no— de determinar si un número entero *A* resultará divisible por otro número *B*. Como dijimos ya, lo anterior implica saber si existirá algún proceso que permita establecer el sentido de ser divisible sin quedar anclado en la descomposición del número que se presente inicialmente. El hecho de que la pregunta se instale con la diversidad de transformaciones emergentes —sobre el número—en el hacer de los alumnos, brinda mayor solidez para hacer explícitas creencias de los alumnos. Por un lado, la creencia o no de la dependencia a una descomposición particular del ser divisible; por otro, la creencia de si existirá o no algún proceso general que, frente a una descomposición inicial, en apariencia "poco conveniente", permita transformar a otra más "conveniente". El colectivo da sostén para que la profesora pueda hacer aflorar las creencias y a la vez instalar nuevos problemas como el de "*¿cómo hacer para decidir si la descomposición inicial no nos muestra fácilmente?"*. En este vaivén de producciones, los alumnos que están entrando al trabajo algebraico abordan la potencia del concepto de transformación a propósito de su utilidad para responder sobre este asunto.

Volvamos por un instante a las creencias que afloran en el colectivo, esas formas de concebir lo que el otro cree o de juzgar un cierto modo de hacer del otro. Esas creencias se imbrican con interpretaciones que el resto de los colaboradores del intercambio asumen, las cuales definen y determinan el curso del intercambio futuro. Frente a una acción de un alumno, por ejemplo la intervención en el Caso 3: "*Pero también puede ser 4 x 10*", la profesora asume una interpretación —entre otras también admisibles— de una creencia de un alumno y orienta un intercambio posible poniendo en relación dos sistemas de conocimientos: el sistema de conocimientos desplegados por el alumno y el sistema de conocimientos admitidos por la comunidad matemática. En este nuevo espacio de reflexión sobre la interpretación hecha por la profesora se suman otros alumnos que probablemente no habían pensado inicialmente sobre ella. La profesora instala —soportada en intervenciones del espacio colectivo que le dan terreno para hacerlo— la inquietud sobre un tipo de relación existente entre los dos sistemas de conocimientos mencionados dando entrada a la generalización matemática en alguna de sus varias formas.

En el marco de este juego de interpretaciones, lo general —en dualidad con lo particular— gana un espacio para aflorar. La relación entre una representación de un objeto matemático y atributos del mismo vuelve a aparecer; como así también la cuestión de que los procedimientos no dependan de representaciones particulares del objeto para poder exponer con certeza una afirmación sobre cierto objeto matemático[71]. La duda que un alumno puede mantener , frente a la inquietud que sostiene la profesora sobre si será o no que una cierta representación determine características de divisibilidad de un número por otro, permite a otros alumnos desplegar procesos en la respuesta a ese alumno que se anclan en la existencia de una descomposición minimal común bajo cualquier proceso. La tensión del intercambio del aula como un sistema da elementos para sostener la necesidad de ciertas propiedades sobre los números naturales —que no podrían ser validados teóricamente en ese nivel escolar— que se anclan en teoremas que los alumnos han

[71] En este caso la relación de base es la de denotación y sentido de un objeto matemático en términos de Frege, como ya dijimos al desarrollar el Caso 3.

usado en las prácticas de la escuela primaria[72]. De esta forma se provoca un escenario en el que el cuerpo de conocimientos teóricos se vuelve objeto de fundamentación de la práctica en curso.

Sumamos como aspecto positivo del despliegue de lo general en el espacio colectivo la posibilidad de vida de lo general a propósito de la formulación sobre los números particulares en tanto ejemplos genéricos. El uso de adverbios que los alumnos se permiten instalar en el terreno de lo oral —como, por ejemplo, “siempre” o “a veces”— da espacio a la interpretación sobre el carácter general que se invoque sobre los particulares. En el momento de entrada al álgebra, cuando los alumnos no cuentan aún con un lenguaje abstracto para representar lo general, el modo en que un alumno se refiere a un elemento particular condiciona las posibilidades de vida de su hacer general en el espacio colectivo.

También la docente contribuye en el hacer del intercambio, por momentos, al romper absolutamente la distancia con el sistema de conocimientos de los alumnos y ubicarse en un lugar de discusión de igual a igual que no es fingido y que la involucra genuinamente como par. Entendemos que esta actitud de la profesora otorga potencia a los alumnos y los estimula a avanzar comprometidos.

Por último, el caso cuatro —el caso de Maia— nos resulta un ejemplo de una posible regla general que tiene soporte en otra regla viva y utilizada en el espacio colectivo. Lo colectivo juega un doble juego aquí. Por un lado, la acción de Maia tiene lugar a partir de un “hacer” de los alumnos que parece suficientemente asentado en tareas previas; por otro, la ruptura que Maia genera sobre el dominio de validez de ese “hacer” —al extenderlo— rompe las posibilidades de anticipación de los otros participantes —entre ellos, de la profesora—, cuestión que aleja a la construcción de la alumna de la posibilidad de instalarse y discutirse en el colectivo.

Maia se atreve en su hacer personal a resolver lo incierto, se libera y generaliza —tal vez sin tener mucha consciencia— extendiéndose a un nuevo dominio numérico. El espacio colectivo limita en parte el despliegue y el valor de ese modo de hacer como forma de resolver la pregunta de la divisibilidad de 2640 por 33. Ninguno de los otros participantes del colectivo puede advertir que esa regla será válida en los casos en que la divisibilidad por un cierto factor sea verdadera.

En síntesis, podemos identificar ciertos asuntos comunes de anclaje en lo colectivo que se enlazan con aquellos otros aspectos particulares de lo general que recortamos en cada caso:

[72] En este caso, el teorema fundamental de descomposición única en factores primos sobre el conjunto de los números enteros.

El acceso a lo incierto soportado en la provisoriedad del lenguaje oral con otros, sus adverbios, sus tiempos, sus gestos. El permiso que los alumnos se dan en un "hacer con otros" para instalar una nueva pregunta, una duda, una creencia. El permiso que los otros participantes del intercambio se dan para defender o rechazar una idea propia o ajena. El mecanismo de sostén de la profesora que acorta y dilata distancias con respecto al sistema de conocimientos de los alumnos, para —por momentos— entrar en un juego genuino de defensa de su opinión como un alumno más. La reiteración constante de la docente —y reformulación— hacia los otros alumnos de una inquietud sembrada a partir de la intervención de un alumno. La pérdida, en otros momentos, de una producción general por la fugacidad del ambiente de intercambio y la poca precisión de ciertos modos de hacer aún provisorios. En un aula generada alrededor de un trabajo con la generalización matemática ya no hay quién instale el asunto del aula, eso depende de la distancia que se plantee entre el asunto que se proponga considerar, la tarea original que dispara la problemática nueva a estudiar, y la reflexión sobre las formas aceptadas en el marco de la disciplina.

Capítulo 6. Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos abordado la hipótesis de que la articulación entre las prácticas aritméticas y algebraicas, a propósito del avance en la generalización, se conforma en un entorno de trabajo alrededor de tareas que estimulan espacios de reflexión y apertura a tramas de generalización, espacios que se fortalecen a partir de los contextos de producción que se habilitan en la interacción.

Los casos que analizamos recuperaron cómo el contenido, que es necesario y propio del hacer matemático a propósito de la generalización, se construye a partir de —y se actualiza en— el juego de intervenciones colectivas que tienen lugar. Podemos afirmar que la entrada a la racionalidad matemática sobre la generalización en el terreno algebraico se despliega en relaciones que se arman en la incertidumbre sostenida por la pluralidad de racionalidades, diferenciadas —pero cercanas— del grupo de alumnos moderados por un docente.

Las relaciones construidas y los conocimientos que fueron emergiendo tuvieron un carácter local moldeado por las particularidades de cada una de las situaciones de generalización. Asimismo, advertimos la gestión de un docente que da lugar a la apertura de voces en un espacio de tareas propuestas por él, que habilita la producción de relaciones nuevas que —sin ser anticipadas inicialmente— pueden alojarse en el terreno de producciones derivadas de la/s actividad/es propuesta/s en un comienzo.

En el aula, nociones indispensables para entrar en comunión con el tratamiento algebraico (como, por ejemplo, la transformación de expresiones algebraicas) cobran sentido en el contexto de dar respuestas a una pregunta planteada como producción colectiva. El principio de necesidad matemática de dicha noción se hace presente. Entendemos que se visibiliza entonces como recurso metodológico la recuperación de preguntas generadas por los alumnos en el espacio social.

Nos interesa recortar en estas conclusiones aquellas nociones conceptuales de la actividad matemática sustentadas en el tratamiento algebraico de lo numérico, que nos resultaron permeables a los estímulos de construcción dependientes de su inscripción en la dimensión colectiva. Es decir, qué relaciones, qué nuevas preguntas sobre el hacer matemático alrededor de lo general han podido tener lugar a partir de un tipo de práctica que asume la articulación entre el trabajo numérico y el algebraico en un contexto de interacción e intercambio colectivo que habilita su emergencia.

6.1. La producción de conocimientos en el estudio algebraico de lo numérico: un juego de elaboraciones que adquieren densidad a partir de la trama de desarrollos que habilita la dimensión colectiva

Nuestro trabajo permitió advertir diferentes relaciones específicas del hacer algebraico que se elaboran, a partir del tratamiento de expresiones numéricas, en el marco de otras construcciones que resultan determinantes para poder disponer con funcionalidad del lenguaje algebraico. Enunciaremos esas construcciones a continuación para luego hacer un desarrollo de cada una de ellas:

1. La construcción social de la conjetura y de su necesaria argumentación. La noción de dominio de validez como componente intrínseca en la conformación de una ley o propiedad general.

2. La validez matemática de una proposición.

3. Los límites de la contingencia en la producción de argumentos generales.

4. La validez de una argumentación matemática: una racionalidad en construcción.

5. El alcance de una representación particular para atrapar las cualidades de un objeto matemático: la potencia de las nociones de sentido y denotación para el análisis. La independencia de la propiedad de que un número *a* "sea divisible por" respecto de la descomposición particular en factores que represente a dicho número *a*.

6. La aceptación de extender el dominio numérico de un procedimiento para habilitar cálculos intermedios.

6.1.1. La construcción social de la conjetura y de su necesidad de argumentación. La noción de dominio de validez como componente intrínseca en la conformación de una ley o propiedad general

El medio social es un marco artificial para dar lugar a la creación de un espacio de discusión alrededor de la racionalidad matemática. Hemos reconocido, durante el análisis de uno de nuestros casos en esta tesis, que aspectos relativos a la constitución de una regularidad —del calibre de una ley o conjetura— tienen anclaje en algunas voces del colectivo que actúan como moderadores de la interacción que se da a propósito de la producción en el marco de una cierta tarea inicial. Son las condiciones de esta tarea las que habilitan, a su vez, un espacio de nuevas preguntas sobre la generalidad, en este caso sobre una identidad expresada sobre un ejemplo de números en particular. Esas voces movilizan relaciones provisorias que muchas veces tienen resonancia en alumnos más silentes, quienes luego las reiteran en el entramado colectivo. Esas relaciones matemáticas, como por ejemplo la pregunta sobre la generalidad de una ley presentada a partir de una identidad numérica particular como 66 x 40 = 60 x 44, se actualizan en términos de producción y dan lugar a otras significaciones.

En el aula se da un juego de responsabilidades y roles fluctuante que genera transacciones alrededor de modificaciones y completaciones de la producción inicial de una regularidad que no podrían tener lugar si no se constituyera esa producción como objeto colectivo. Nos referimos específicamente aquí a cuestiones como la formulación de una propiedad entendida como un binomio constituido tanto por una ley de asignación como por el dominio de validez sobre la que dicha ley se aplica. La diferenciación de estos dos componentes como específicos y necesarios a la hora de conjeturar una posible ley o regla matemática cobra una especial importancia a partir de las necesidades de precisión frente a la comunicación y la comprensión de otros interlocutores. Para los alumnos, el dominio numérico sobre el que se aplica una ley aritmética que producen no necesita ser explicitado, suelen asumir que la formulación incorpora un dominio propio que puede deducirse de la ley de asignación formulada.

A su vez, el medio colectivo resulta un espacio de sustento a la construcción de la conjetura en el sentido de que permite soportar las formulaciones aún parciales e imprecisas de los alumnos. El medio resulta también sostén de la intranquilidad que supone para los alumnos adentrarse en un proceso nuevo en el marco de sus sistemas de argumentación y conocimiento matemático en construcción.

Mencionamos antes que la interacción social da lugar a cambiar roles y responsabilidades sobre producciones y, en este sentido, ciertos alumnos se permiten tomar espacios de sostén y devolución de producciones que luego habilitan discusiones sobre conocimientos matemáticos específicos.

6.1.2. La validez matemática de una proposición

La validez de una extensión inductiva, realizada a partir de una identidad particular como 66 x 40 = 60 x 44, se pone en discusión en la trama del intercambio que permite a su vez insertarla como conjetura. La percepción de la distancia entre una generalización abusiva desde el punto de vista de la racionalidad matemática y una generalización pasible de ser validada deductivamente reposa en la constitución de elementos de racionalidad que, en su conjunto, la discusión social vuelve visibles a partir de las tensiones propias de la interacción de los diferentes sistemas de conocimiento. Por otro lado, una generalidad gestada sobre argumentos empíricos que la dejan vivir a partir de apoyos en casos particulares, sobre ejemplos formulados con carácter de generalidad, habilita en el terreno colectivo un juego de contextualizaciones y particularizaciones —con fuerte apoyo en la oralidad, los gestos y algunas escrituras soporte— que el trabajo individual, rotundamente condicionado por lo escrito, rasgaría. En este sentido, destacamos el espacio colectivo como malla que habilita el desarrollo de argumentos generales sobre construcciones numéricas particulares. En este entramado se despliegan ciertos saberes específicos a modo de teoremas necesarios arraigados en la acción de los alumnos para dar sustento al argumento que fundamenta cierta afirmación.

6.1.3. Los límites de la contingencia en la producción de argumentos generales

Los alumnos enfrentados a la situación de intercambiar colectivamente argumentos para convencer —y convencerse— introducen en las validaciones de una afirmación relaciones desplegadas en sus producciones personales. Esto los coloca con buenos elementos para evaluar el argumento ajeno y sus posibilidades de ser aceptado como válido. En más de uno de los casos que estudiamos se exponen preguntas de algunos alumnos que, al haber efectuado transformaciones diferentes de las del grupo que lleva la voz, expresan qué ocurriría si hubieran descompuesto distinto un número. En cierto modo, lo que entra en discusión es que "la validez de una proposición matemática no puede depender de contingencias internas al argumento". Se desprende, entonces, que ciertas decisiones azarosas, como ser optar por una descomposición de un número en lugar de otra, no debieran ser determinantes de la validez de una proposición.

Saberes como estos, que destacan aspectos de la racionalidad matemática en construcción, afloran en el aula gracias al despliegue de producciones variadas puestas en diálogo, que posicionan a los interlocutores en evaluadores críticos de otros argumentos. Las tensiones propias de haber abordado otros análisis en pequeños ámbitos personales instalan como asunto el carácter de rigurosidad de un argumento desde el punto de vista matemático. Nuevamente, el plano de discusión colectiva de las argumentaciones desplegadas se constituye como un espacio favorable para que emerjan estos conocimientos.

Lo expresado anuncia también otro conocimiento que vive en el aula a partir de la discusión gestada sobre las distintas producciones: este es que la transformación de una expresión matemática está vinculada a un objetivo específico que define y justifica su importancia. Se ponen en acto como elementos de discusión dos cuestiones de las expresiones matemáticas, la distinción entre sentido y denotación.

6.1.4. La validez de una argumentación matemática: una racionalidad en construcción

Es parte inherente al aprendizaje del trabajo matemático percibir que un razonamiento se compone de enunciados, unos que conforman las premisas y otro, su conclusión, y que su validez no se desprende solamente de la verdad de las premisas. Supone aprender que la validez comporta analizar la estructura que describe la implicación entre los enunciados que conforman las premisas y el enunciado que constituye la conclusión, y determinar si de la verdad de las premisas se desprende la verdad de la conclusión, concibiendo a su vez que dicho análisis no es independiente del dominio sobre el cual se aplique esa concatenación de enunciados. Por ejemplo "Si *C* no divide a *A* y *C* no divide a *B*, entonces *C* no divide a *A* x *B*" es un enunciado verdadero para *C* restringido al conjunto de los números primos y falso para *C* considerado cualquier número entero.

En esta dirección, Sadovsky (2010) plantea:

> […] el carácter de necesidad típico de una explicación matemática, no está presente en esta explicación. En otros términos, **verdad y razones de la verdad** no son aspectos necesariamente ligados y parte sustancial del trabajo en matemática es el acceso a las razones de la verdad. Se ve acá una tendencia intelectual señalada por Piaget (1924)[73] que es la de yuxtaposición, es decir **ausencia de necesidad en el pensamiento**.
>
> b) Cuando el alumno afirma que en su ejemplo el argumento es válido, está mostrando que para él la explicación no tiene por qué tener un **carácter universal**. Es decir no tiene por qué abarcar todos los casos posibles.
>
> c) La regla que está usando para comparar fracciones, no le permite anticipar cualquier comparación de fracciones[74]. En este sentido, su explicación no tiene un carácter anticipatorio, es decir, frente a otro caso, la regla no será suficiente para establecer la comparación.

---

[73] Piaget, J. (1924) *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Lugar: Delachaux et Niestlé.

[74] En este artículo, la autora analiza un registro de una producción de los alumnos en torno a los números fraccionarios.

> Estos tres componentes, el carácter **necesario, universal y anticipatorio** son elementos de una explicación matemática que los alumnos deberán ir elaborando como parte de su trabajo en la clase. (p.236) [75]

Esta complejidad pone más en evidencia el rol de los alumnos como agentes de expresión de los cambios o vaivenes en las tareas del aula y de resistencia al giro del proyecto didáctico. Hay una tarea inicial a resolver y un nuevo conocimiento a considerar —necesario para la construcción de la racionalidad— que se relaciona con esa tarea pero que no es específicamente su resolución. Los alumnos tratan de discernir el cambio, de definirlo con preguntas, ya sea por creer que esa nueva cuestión es un tipo de tarea repetible a futuro que deberán saber responder, o para conectarla de alguna forma con la tarea inicial desde la que se desprendió. Este nuevo contenido —que se propone o se impone en el aula sobre la lógica de la argumentación— plantea una dificultad de gestión ineludible que obliga al docente a sucesivas vueltas y aclaraciones a propósito de la tarea. Se desprende para nosotros un desafío de análisis de esa complejidad, lo cual supone desentrañar la acción del docente que debe dar lugar al proceso de definición y descontextualización del contenido lógico deductivo que se conformará en parte de la racionalidad matemática de los alumnos, a propósito de la primera tarea alrededor del contenido de divisibilidad. En términos generales, el nuevo contenido —necesario para el desempeño algebraico— emerge en el marco de resolución de una primera tarea pero la excede, y es esto lo que vuelve compleja —pero posible— su sobrevida en el aula.

Se plantean para nosotros dos cuestiones de la gestión y de las decisiones didácticas que de alguna manera tensionan y extienden el espesor que le dábamos al *principio de necesidad de los conocimientos*. En este caso, el conocimiento es la argumentación respecto de una respuesta dada. Se plantea entonces, por un lado, cómo darle entidad para los alumnos a un nuevo conocimiento que se aborda en el aula aunque para ellos no parezca eso dar respuesta inmediata a la tarea de origen. Por otro lado, cómo recortar un saber que no parece alojarse en una tarea en particular y lograr que los alumnos lo acepten sin entender completamente sus posibilidades de reutilización. Esta tensión que mencionamos respecto de las condiciones de surgimiento de este nuevo saber se encuentra contenida por las características del espacio colectivo que funciona como una estructura de sostén que permite alojarlo entramado en las preguntas que expresan los alumnos en torno a él. En tal sentido, la necesidad del nuevo saber para los alumnos se justifica en su contexto de emergencia en el aula a partir de la acción de

[75] Traducción proporcionada por la autora Patricia Sadovsky.

ellos mismos respecto de una primera tarea inicial. Por ello enfatizamos que lo social entrama las condiciones de emergencia del nuevo conocimiento y a su vez permite darle un sentido de adecuación en el marco del trabajo que se está desarrollando.

Asimismo, el espacio social permite albergar, como sustento de los argumentos, saberes específicos a modo de teoremas necesarios: nos estamos refiriendo fundamentalmente en nuestra tesis a la descomposición única en factores primos como cualidad de cualquier número entero. Entender que las nociones teóricas se imbrican en una red o estructura que permite fundamentar acciones, que las expresiones o las escrituras son una forma de formular y representar contribuyendo a las argumentaciones es parte de concebir este entramado en funcionamiento con relación a los problemas y a las estrategias desplegadas alrededor de ellos. Así, las nociones y los resultados teóricos adquieren sentido y relevancia no como elementos disfuncionales sino en una red o estructura de conocimientos.

6.1.5. El alcance de una representación particular para atrapar las cualidades de un objeto matemático: la potencia de las nociones de sentido y denotación para el análisis. La independencia de la propiedad de que un número *a* "sea divisible por" respecto de la descomposición particular en factores que represente a dicho número *a*

En el aula, distinguir que una descomposición multiplicativa particular de un número no define características sobre la divisibilidad del mismo es una construcción que se soporta en la diversidad de descomposiciones que los alumnos podrían proveer en el entorno de una tarea de producción de argumentos. Nuestro tercer caso de análisis nos ha permitido identificar dos procesos colectivos y dialécticos, aquel que incluye la argumentación posible a propósito de la divisibilidad de un número entero por otro y aquél que desentraña el vínculo que los alumnos asumen entre el atributo de "ser divisible por" y una descomposición particular del número en factores.

En las actividades que la profesora propone como tarea, los alumnos necesitan argumentar la divisibilidad —o no— de un entero *A* por otro *B*. Esta cuestión —ya vimos— pone en juego la relación entre sentido y denotación de una expresión numérica. Construir esta separación entre la expresión de una representación particular en factores y la cualidad numérica del número de ser divisible es parte de lo que el alumno debe aprender en su entrada al trabajo algebraico. Lo colectivo y la variedad de formas de descomponer un número expone en la discusión de la clase las concepciones más arraigadas de los alumnos, tanto la de aquellos que creen que puede haber una relación de determinación de la divisibilidad de un número a partir de la descomposición que se conozca de él, como la de aquellos que demandan un "cómo hacer para poder mostrarlo cuando la descomposición inicial no resulta de ayuda".

Vuelve aquí una construcción del hacer matemático que ya tocamos en la sección 6.1.3 y que tiene que ver con la necesidad de que un argumento no sea contingente. Fuertemente se expresa aquí la necesidad de *encontrar un procedimiento general para argumentar* respecto de la divisibilidad, un proceso que no dependa de la descomposición inicial que se conoce.

6.1.6. La aceptación de extender el dominio numérico de un procedimiento para habilitar cálculos intermedios

El cuarto caso que analizamos nos propone considerar el lugar de las reglas de acción, con diferentes niveles de justificación, que viven en el aula como elemento conductor de las estrategias de los alumnos ante nuevos problemas; y, además, el lugar que tienen dichas reglas como promotoras de un nuevo procedimiento que amplía el dominio de aplicación de la regla inicialmente dada.

Nuevamente advertimos que la complejidad que supone abrir la producción de los actores en el aula trae aparejada otra complejidad que es la que conlleva la gestión del docente y sus elementos de interpretación para poder dar lugar a la comprensión y sostén de la producción.

Es claro para nosotros que el despliegue y la creación de un alumno están en relación directa con el grado de habilitación que en el aula se dé a las nuevas preguntas y nuevas acciones. Esta aula, en la que los alumnos podían vivir la matemática como lugar de acción y reflexión, resultaba un lugar fértil para el despliegue de nuevas creaciones con respecto a la generalización. Este mismo contexto habilitaba también el ensayo sobre nuevos dominios numéricos de ciertos procesos que estaban alojados en el aula a partir de tareas previas, como es el caso de Maia.

Para un docente puede resultar desconcertante la entrada y comprensión de un nuevo procedimiento que introduce un campo numérico más amplio al considerado. Como vimos, puede ocurrir que el docente no pueda entender —en la inmediatez de la gestión del aula— la viabilidad de un proceso tan alejado de su anticipación. Advertir que un proceso alojado en un campo numérico continúa siendo válido si los cálculos auxiliares en otro campo numérico extendido se compensan es parte del análisis que amplía la concepción de validez de un procedimiento tanto para el propio docente como para los alumnos. Un estudio didáctico que describe y analiza las posibilidades de producción de un alumno inscripto en un contexto de trabajo en un aula con reglas instaladas previamente abre la perspectiva del docente y agrega chances de apertura hacia nuevas producciones que —con aspecto muy diferente de las anticipadas— puedan ser igualmente válidas.

Hay aquí una cuestión matemática importante: la extensión numérica de un campo como recurso para probar la validez de una propiedad en el campo inicial, aquel que se tenía antes de ser extendido. No es habitual poder construir este mecanismo del hacer matemático con alumnos que recién se están adentrando en el trabajo algebraico pero en el marco de este tipo de tareas resulta un hecho posible.

6.2. Gestos en la interacción

Recortamos en todo lo anterior nociones conceptuales soportadas en el tratamiento algebraico de lo numérico que en esta tesis resultaron emergentes en las contingencias que supone la dimensión colectiva. En esta última parte renovamos algunas acciones y gestos de los integrantes en la interacción, ya identificados en los análisis que efectuamos, que interpretamos como disparadores de procesos de generalización matemática en el espacio colectivo.

Identificamos que algunos alumnos comienzan a vislumbrar en el trabajo del aula el poder anticipatorio de la matemática; estos alumnos proporcionan acciones y gestos con una visión evaluadora y crítica. En ese hacer siembran inquietudes que permiten a la profesora sostener cuestiones generales de discusión para toda la clase.

Otros alumnos, con intención de elaborar un criterio para actuar en futuras situaciones, dan lugar también a construcciones colectivas, como vimos el caso de aquella alumna que pone en agenda la necesidad de crear un procedimiento general. Este segundo tipo de acción —frecuentemente asociada a encontrar una técnica que garantice el éxito futuro en nuevas tareas— tiene un valor generalizante, pues lleva a los alumnos a reconocer una tarea particular como parte de un grupo de tareas en donde ciertas acciones podrán repetirse. Nuevamente, estas construcciones solo ven la luz por la acción de la profesora, que se permite considerar planteos, imprecisos e incompletos, y organizarlos en términos de tareas de estudio alrededor de conocimientos sobre la divisibilidad y la generalización.

Señalamos también como marcas de la interacción las creencias que afloran en la trama colectiva, esas formas de concebir lo que el otro cree o de juzgar la acción ajena. Esas creencias se imbrican con interpretaciones que los otros participantes del intercambio asumen, las cuales definen y determinan el curso del intercambio futuro. En el marco de este juego de interpretaciones, lo general en trama con lo particular, gana un espacio para aflorar.

Para finalizar esta tesis resaltamos nuevamente la potencia que el apoyo en los otros aporta para acceder a lo incierto sobre la base de la provisoriedad de ciertas acciones individuales; el permiso que los alumnos se dan al "hacer con otros" para instalar nuevas preguntas, inquietudes o creencias; el permiso que los participantes del intercambio se dan para tomar posición respecto de alguna cuestión, inquietud o creencia planteada por algún miembro del grupo clase. Destacamos también los mecanismos de sostén de la profesora, que flexibiliza distancias con respecto al sistema de conocimientos de los alumnos, que reitera y reformula constantemente al resto de los alumnos las nuevas cuestiones alrededor de la generalización matemática; las no controlables pérdidas de producciones generales por la fugacidad del ambiente de intercambio y la poca precisión de ciertos modos de hacer de los alumnos en acción. Como dijimos muchas veces ya a lo largo de este trabajo de tesis, en un aula generada alrededor de un trabajo con la generalización matemática ya no hay quién instale el asunto matemático en el aula, hay un grupo colaborando a los efectos de sustanciar una tarea de producción bajo la coordinación indispensable del docente como referente del saber matemático.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Procesos de Prueba y situaciones de validación. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Barallobres, G. (2007). Introduction à l´algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés. *For the Learning of Mathematics, 27*(1), 39-44.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathémaiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 7*(2), 33-115. (Traducción en *Serie B-Trabajos de Matemática 19*, CórdobaD. Fregona y M. Aguilar)

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordrecht: Springer Science.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Butto Zarzar, C. y Rojano Ceballos, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22*(3), 55-86.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. *Petit X* (5), 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. *Petit X* (19), 43-72.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. *Petit X* (23), 5-38.

Cortés, A., Vergnaud. G y Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. En G. Booker, P. Cobb y T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference*, Vol II (pp. 27-34). Morelos: PME.

Davýdov, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Drouhard J. P. y Panizza, M. (2002). Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución. En

C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15* (pp. 207-212). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Drouhard, J. P. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algébre Elémentaire* (Tesis doctoral). Université Denis Diderot, Paris.

Drouhard, J. P., Sackur, C., Maurel, M., Paquelier, Y. y Assude, T. (1999). Necessary Mathematical Statements and Aspects of Knowledge in the Classroom. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I. Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics education* Vol. 1 (pp. 320-330). Osnabrueck: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik. Recuperado de: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/cerme1/cerme1_proceedings_part1.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. En *Annales de la didactique et de sciences cognitives 5* (pp. 37-65). Estrasburgo: IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. (Traducción para fines educativos, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, México)

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática. La habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(I), 143-168.

Duval, R. (2006b). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* Número Especial, 45-81.

Frege, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques* (C. Imbert trad.). Paris: Seuil.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción*. Barcelona: Gedisa.

Harel, G. y Tall, D. (1989). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42.

Laguerre, E. (2007). Le concept de typicalité appliqué aux registres figures et numérique-algébriques : figures archétypes, prototypes pathologiques et pathogènes, typicalité dans la résolution de tâches. En *Annales de la didactique et de sciences cognitives 12* (pp. 17-54). Estrasburgo: IREM de Strasbourg.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l´enseignement. *Recherches en Didactique des mathématique*, *18*(3), 279-310.

Neiman, G. y Quaranta G. (2006). Los estudios de caso en la investigación sociológica. En I. Vasilachis de Gialdino (Coord.), *Estrategias de investigación cualitativa.* (pp. 213-237). Barcelona: Gedisa.

Panizza, M. (2002). Generalización y control en álgebra. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15* (pp. 213-218). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Panizza, M. (2005). *Razonar y Conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Panizza, M. (2009). Generalization and control in algebra. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 589-598). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Panizza, M. (2015). *Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos* (Tesis doctoral). Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). The First Algebraic Learning: the Fallure of Succes. En L. Puig (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume IV* (pp.107-114). Valencia: PME.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(3), 453-461.

Perrin Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l´enseignement des mathématiques dans des clases ‘faibles’. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13*(1/2), 5-118.

Piaget, J. (1975). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático.* Buenos Aires: Biblioteca de Psicología Evolutiva, Paidós.

Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* México: Siglo XXI.

Piaget, J. (1982). *Psicogenesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. En N. Bernardz et al. (Ed.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 107-111). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2000). Students'processes of symbolizing in algebra: A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume IV* (pp. 81-88). Hiroshima: PME.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. En M. van den Heuvel-Panhueizen (Ed.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume IV* (pp.81-89). Utrecht: PME.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: a semiotic cultural approach to students'types of generalization, *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Sadovsky, P. (2004). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas* (Tesis doctoral). Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2010). Explicar na aula de matemática, um desafio que as crianças enfrentam com prazer. En AA.VV, *30 Olhares para o futuro. Escola da vila* (pp. 233-241). Sao Paulo: Escola da vila, Centro de Formação.

Sadovsky, P. et al. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. y Sessa, C. (2005). The adidactical interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a *milieu* for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics*, *59*. 85-112.

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. En G. Sensevy y A. Mercier (Dir.), *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp.5-34). Rennes: PUR. (Traducción autorizada por el autor, J. Duque y R. Rickenmann)

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del algebra. Orígenes y Perspectivas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Editorial Morata.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21.). Dordrecht: Springer Science.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México, Trillas.

Vytgoski, L. S. (1985). *Pensée et langage.* Paris: Editions Sociales.

Yackel, E. (2004). Theoretical perspectives for analyzing explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 8*(1), 1-18.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 390-408.

Zaskia, R., Liljedahl, P. y Chernoff , E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. ZDM. *Mathematical Education, 40*, 131-141.