Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis Doctoral

Condiciones de juntura en relatividad general y teorías F (R)

Figueroa Aguirre, Griselda V.

2018

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Figueroa Aguirre, Griselda V.. (2018). Condiciones de juntura en relatividad general y teorías F (R). Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n6546_FigueroaAguirre

Cita tipo Chicago:
Figueroa Aguirre, Griselda V.. "Condiciones de juntura en relatividad general y teorías F (R)". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2018.
http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n6546_FigueroaAguirre

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Condiciones de juntura en relatividad general y teorías F(R)

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

por la Lic. Griselda V. Figueroa Aguirre

Director de Tesis: Dr. Ernesto Eiroa
Consejero de Estudios: Dr. Rafael Ferraro
Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio
Fecha de Defensa: 14 de diciembre 2018

Condiciones de juntura en relatividad general y teorías F(R)

Resumen

Las condiciones de juntura permiten la unión de dos soluciones de las ecuaciones de la gravedad a través de una hiper-superficie y son de gran utilidad en varios contextos. El empalme de las soluciones puede ser suave o a través de una cáscara de espesor infinitesimal en la hiper-superficie de juntura. Las teorías de gravedad modificada aparecen como posibles alternativas con el fin de intentar resolver distintos problemas que surgen dentro del marco de la relatividad general. Un caso de interés son las llamadas teorías $F(R)$, en las cuales la densidad lagrangiana es una función arbitraria del escalar de curvatura. En ellas, las condiciones de juntura difieren de las correspondientes a la relatividad general (formalismo de Darmois-Israel). En la presente Tesis se construyen agujeros de gusano, burbujas y cáscaras delgadas alrededor de agujeros negros, en todos los casos uniendo dos variedades diferenciales con simetría esférica, en el contexto de las teorías $F(R)$ y utilizando las condiciones de juntura correspondientes. En los agujeros de gusano, la garganta corresponde a la superficie de juntura, en la cual hay presente una capa delgada de materia. Las burbujas consisten en una cáscara infinitesimal que rodea una región de vacío. Se estudian también cáscaras delgadas de materia por fuera del horizonte de eventos de agujeros negros. En todos los casos se buscan las soluciones estáticas posibles y se analiza su estabilidad ante perturbaciones que conservan la simetría. Se encuentra que existen soluciones estables para determinados valores de los parámetros del modelo. En particular, en gravedad $F(R)$ cuadrática es posible la presencia de una capa doble en la superficie de juntura. En este caso, se obtuvo el primer ejemplo explícito de burbujas de capa doble pura. Finalmente se discuten las diferencias con respecto a configuraciones análogas en la relatividad general.

Palabras clave: Relatividad General, Gravedad Modificada, Teorías F(R), Condiciones de Juntura.

Junction conditions in General Relativity and F(R) theories

Abstract

The junction conditions allow the union of two solutions of the equations of gravity through a hypersurface and they are very useful in many different contexts. The union of the solutions can be smooth or through a shell of infinitesimal thickness at the junction hypersurface. Modified gravity theories appear as possible alternatives in order to try to solve different problems that arise within the framework of General Relativity. A case of interest are the so-called $F(R)$ theories, in which the Lagrangian density is an arbitrary function of the curvature scalar. In them, the junction conditions differ from those in General Relativity (Darmois-Israel formalism). In the present Thesis, wormholes, bubbles, and thin shells around black holes are constructed by joining two spherically symmetric manifolds within the framework of $F(R)$ theories and using the corresponding junction conditions. In wormholes, the throat corresponds to the junction surface, where a thin shell of matter is present. The bubbles consist of an infinitesimal layer surrounding a vacuum region. Thin shells of matter outside the event horizon of black holes are also studied. In all of these cases, static solutions are sought, and their stability is analyzed under perturbations that preserve the symmetry. It is found that there exist stable solutions for given values of the parameters of the model. In particular, quadratic $F(R)$ theories allow the presence of a double layer at the junction surface. In this case, the first explicit example of pure double layer bubbles is obtained. Finally, the differences with respect to analogous configurations in General Relativity are discussed.

Keywords: General Relativity, Modified Gravity, F(R) Theories, Junction Conditions.

Agradecimientos

Principalmente a mi madre, que ha hecho más esfuerzos que nadie para darme todo lo necesario en la vida. A mi padre que no llegó a ver el fruto de estos esfuerzos. A todas mis amistades que siempre han estado presente para dar su cariño y apoyo. Y a mi director Dr. Ernesto Eiroa por su dedicada guía y su calidad profesional y humana.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Relatividad general **5**
2.1. Nociones de relatividad general 5
2.2. Agujero negro de Schwarzschild 7
2.3. Agujero negro de Reissner-Nordström 8
2.4. Agujeros de gusano 9
2.5. Condiciones de energía 13
2.6. Condiciones de juntura 15

3. Gravedad $F(R)$ **19**
3.1. Gravedad modificada: teorías $F(R)$ 19
3.2. Ecuaciones de campo 22
3.3. Equivalencia con la teoría de Brans-Dicke 25
3.4. Agujeros negros cargados en $F(R)$ 28
3.5. Condiciones de juntura en $F(R)$ 30
3.5.1. El caso general: $F'''(R) \neq 0$ 31
3.5.2. El caso cuadrático: $F'''(R) = 0$ 33
3.6. El caso sin cáscaras delgadas 36

4. Agujeros de gusano con carga en gravedad $F(R)$ **37**
4.1. Construcción de los agujeros de gusano 37
4.2. Estabilidad de las configuraciones estáticas 40
4.3. Agujeros de gusano con carga 41
4.4. Discusión 44

5. Agujeros de gusano con una capa doble en gravedad $F(R)$ **47**
5.1. Construcción 47
5.2. Estabilidad de las configuraciones estáticas 51
5.3. Agujeros de gusano cargados 52
5.4. Discusión 57

6. Burbujas con una capa doble pura en gravedad $F(R)$ **59**
6.1. Consideraciones generales 59
6.2. Cáscaras esféricas 61
6.3. Burbujas 63
6.4. Capa doble pura 65
6.5. Energía cuasi–local y el signo de M 69
6.6. Discusión 70

7. Burbujas con carga en gravedad $F(R)$ **73**
7.1. Espacio–tiempos con un escalar de curvatura constante 73
7.2. Escalares de curvatura diferentes: el caso cuadrático 76
7.3. Burbujas con carga: $R_1 = R_2 = R_0$ 78
7.4. Burbujas con carga: $R_1 \neq R_2$ 80
7.5. Discusión 83

8. Cáscaras delgadas alrededor de agujeros negros en gravedad $F(R)$ **85**
8.1. Consideraciones generales 85
8.2. Cáscaras cargadas rodeando agujeros negros: caso $R_1 = R_2 = R_0$ . . 86
8.3. Caso cuadrático con $R_1 \neq R_2$ 89
8.4. Discusión 92

9. Conclusiones **95**

A. Unidades **99**

B. Estabilidad de las soluciones estáticas **101**

C. Capa doble pura: extensión de la geometría y diagramas conformes **103**

Bibliografía **107**

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la relatividad general, enunciada por Einstein en 1915, permitió la generalización de la relatividad especial y la resolución de ciertos problemas que presentaba la teoría de Newton (por ejemplo la anomalía de la órbita de Mercurio). La relatividad general introduce una descripción de la gravedad como un elemento geométrico del espacio–tiempo. En particular, relaciona la curvatura de un espacio–tiempo con la presencia de materia y energía. Algunas de las predicciones de la relatividad general difieren significativamente de las dadas por la física newtoniana, especialmente aquellas que conciernen al tiempo, la geometría del espacio y la propagación de la luz. Se pueden enunciar ejemplos tales como la dilatación temporal gravitacional, el corrimiento al rojo gravitacional y las lentes gravitatorias, entre otros. Las predicciones de la relatividad general se han confirmado hasta el día de la fecha gracias a diferentes observaciones y experimentos. La teoría de la relatividad general tiene implicancias astrofísicas de suma importancia, ya que permite una descripción de los agujeros negros como el resultado final de la vida de las estrellas más masivas. También ha predicho, y se ha confirmado recientemente, la existencia de ondas gravitacionales que pueden ser observadas directamente.

Los agujeros negros manifiestan los efectos de la gravedad en su forma más extrema. Estos objetos se forman cuando la materia colapsa a dimensiones tales que ni siquiera la luz puede escapar de ellos. Si un cuerpo esférico tiene una tamaño menor que cierto valor llamado radio de Schwarzchild, se forma un horizonte que las partículas y la luz pueden atravesar, pero no pueden salir del mismo. Oppenheimer y Snyder en el año 1939 sugirieron que la implosión de una estrella podría dar lugar a la formación de lo que hoy se denomina agujero negro. En las décadas del ’60 y del ’70 se produjeron grandes avances en la teoría de estos objetos. Kerr encontró en 1963 una descripción matemática exacta de un agujero negro rotante. Hawking y Penrose probaron a fines de los ’60 que la teoría de Einstein lleva siempre a una singularidad y a un horizonte, independientemente de la forma en que se produzca el colapso. Así, los agujeros negros pueden ser descritos por sólo tres cantidades. su

masa, su momento angular y su carga. Todavía estos objetos compactos no pueden ser observados en forma directa, pero en las últimas décadas se han obtenido indicios sólidos de su existencia. Se han encontrado agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias y agujeros negros de pocas masas soles asociados a fuentes de rayos X. Por otra parte, recientemente se han detectado las ondas gravitacionales debidas a la colisión de agujeros negros de unas pocas decenas de masas solares.

Los agujeros de gusano atravesables, denominados así por Morris y Thorne en 1988, son soluciones de las ecuaciones de la gravedad que consisten en túneles que vinculan dos regiones del espacio–tiempo por medio de una garganta, dando lugar usualmente a una topología múltiplemente conexa. La garganta, definida como una hipersuperficie de área mínima, no está oculta por horizontes de eventos y permite el paso en ambos sentidos. En el contexto de relatividad general, en estos objetos siempre se violan las condiciones de energía en la región de la garganta, dando lugar a la presencia de materia denominada exótica.

A partir de los trabajos de Darmois e Israel en los cuales se introdujo el formalismo para las superficies de juntura en el marco de la relatividad general, el estudio de las cáscaras delgadas recibió una gran atención. Las ecuaciones de Lanczos que relacionan el tensor de energía–momento superficial de una cáscara con la geometría a ambos lados de la misma (o, más precisamente, con el salto del tensor de curvatura extrínseca a través de ella) han sido ampliamente utilizadas en diferentes contextos. Este formalismo se ha transformado en una herramienta central en la caracterización y en el estudio de la dinámica de superficies en situaciones con gran simetría, lo que facilita también los posibles estudios de estabilidad. Este método se aplica a cáscaras alrededor de vacío (también denominadas burbujas), cáscaras alrededor de estrellas o de agujeros negros, cosmologías denominadas *mundos brana*, y en la construcción teórica de agujeros de gusano de tipo cáscara delgada. Estos últimos se construyen "cortando y pegando" dos variedades diferenciales, para formar una nueva con la garganta (usualmente de forma esférica, plana o cilíndrica) situada en la unión de ambas. Una ventaja notable de los agujeros de gusano del tipo cáscara delgada es que en ellos la materia exótica se encuentra localizada en una región de espesor infinitesimal. Por otro lado, los objetos denominados *gravastars* (*gravitational vacuum condensate stars*) están también asociados a cáscaras delgadas; los mismos se caracterizan por tener una transición de fase en (o cerca) de donde se espera la formación de horizonte, y el interior de lo que hubiese sido un agujero negro es reemplazado por una parte adecuada del espacio de de Sitter.

En los últimos años, las teorías alternativas a la gravedad de Einstein han retomado un renovado interés debido a diferentes razones, algunas de las cuales proviene de la cosmología y otras de la física de altas energías. Una motivación importante para estos desarrollos teóricos es el poder explicar la expansión acelerada del Universo, que surge de la observación de las supernovas de tipo Ia. En el marco de la relatividad general, estas observaciones han sido interpretadas como evidencia de que la

expansión actual del universo es acelerada por una componente que genéricamente se ha denominado "energía oscura". En el modelo de la concordancia o ΛCDM aproximadamente el 5 % de la densidad del Universo lo constituye la materia bariónica conocida, el 25 % es materia oscura y alrededor del 70 % sería energía oscura en forma de una constante cosmológica. A pesar de que la constante cosmológica parece ser la explicación más simple y más favorecida observacionalmente para el fenómeno de la aceleración, otros escenarios se han estado desarrollando desde su hallazgo. No hay un consenso acerca del posible origen físico de la energía oscura, de modo que se busca poder dar una explicación a las observaciones de supernovas Ia y a la aceleración del Universo sin invocar ningún tipo de energía oscura. Entre los modelos que permiten una explicación alternativa a la expansión acelerada del Universo están las denominadas teorías $F(R)$, propuestas por primera vez por Buchdahl en 1970. Constituyen las modificaciones más simples de la relatividad general, las cuales incluyen en la acción correspondiente a la gravitación términos de orden superior del escalar de curvatura R, de modo que la densidad lagrangiana $F(R)$ es una función arbitraria de R. Modelos basados en este tipo de teorías son capaces de dar explicación alternativa a la expansión acelerada actual del Universo. También aparecen en ellas soluciones nuevas que representan agujeros negros, agujeros de gusano, etc, que difieren de las correspondientes a la relatividad general. Las condiciones de juntura en gravedad $F(R)$ han sido obtenidas recientemente y están comenzando a ser aplicadas en distintos contextos.

A lo largo de esta Tesis se estudian las condiciones de juntura en relatividad general y en las teorías $F(R)$. En particular, dentro del marco de gravedad $F(R)$ se analiza la construcción de agujeros de gusano en los cuales la cáscara corresponde a la garganta, cáscaras alrededor de vacío (burbujas) y también cáscaras alrededor de agujeros negros. Para el análisis de las cáscaras delgadas, se utiliza el formalismo para condiciones de juntura en las teorías $F(R)$, del cual resultan las ecuaciones sobre la cáscara que determinan la densidad de energía y la presión para la materia en la misma. Se trabaja con casos esféricamente simétricos y se estudia la estabilidad de las configuraciones ante perturbaciones que preservan la simetría. Finalmente se comparan los resultados con trabajos previos en relatividad general. Esta Tesis se organiza de la siguiente forma

- Capítulo 2: Se presentan nociones generales de relatividad general, de agujeros negros de Schwarzschild y de Reissner-Nordström, y también de agujeros de gusano. Se introducen las condiciones de energía y las condiciones de juntura en relatividad general.

- Capítulo 3: Se motiva el uso de teorías de gravedad modificada, especialmente las teorías $F(R)$; se detalla las ecuaciones de campo y sus equivalencias con otras teorías ampliamente estudiadas, como la de Brans-Dicke. Se analiza el ca-

so de la métrica del agujero negro cargado en gravedad $F(R)$ y las condiciones de juntura para estas teorías.

- Capítulo 4: Se construyen agujeros de gusano con carga en teorías $F(R)$, y se estudia la estabilidad de sus configuraciones estáticas para el caso de escalares de curvatura constantes e iguales a ambos lados de la garganta.

- Capítulo 5: Se consideran agujeros de gusano con una capa doble en teorías $F(R)$ cuadráticas y se analiza la estabilidad de las configuraciones estáticas para el caso de escalares de curvatura constantes y diferentes a ambos lados de la garganta.

- Capítulo 6: Se obtienen burbujas con una capa doble pura en teorías $F(R)$. Se estudian las condiciones necesarias para que se garantice la presencia de una capa doble pura, la energía que la conforma, y la interpretación física de las mismas. Se presenta el primer ejemplo explícito de dicha configuración.

- Capítulo 7: Se hace un estudio de burbujas con carga en teorías $F(R)$, y se analiza la estabilidad de las configuraciones estáticas, tanto para el caso de escalares de curvatura iguales o como aquel en el cual son diferentes.

- Capítulo 8: Se construyen cáscaras delgadas con carga en teorías $F(R)$ alrededor de agujeros negros, y se analiza la estabilidad de las configuraciones estáticas para los casos de escalares de curvatura iguales o diferentes.

- Capítulo 9: Se exponen las conclusiones finales de los trabajos realizados.

- Apéndice A: Se presentan las unidades geometrodinámicas, utilizadas a lo largo de la Tesis.

- Apéndice B: Se detalla el criterio utilizado para estudiar la estabilidad de las configuraciones estáticas.

- Apéndice C: Se muestra una extensión de la burbuja con una capa doble pura (diagrama de Penrose).

Capítulo 2

Relatividad general

La relatividad general es la teoría de campos clásica por excelencia. Para su descripción matemática se utiliza la geometría diferencial, uniendo el tiempo y el espacio en lo que se conoce como el espacio–tiempo. A continuación se resumen distintos tópicos de interés para los capítulos siguientes.

2.1. Nociones de relatividad general

La curvatura del espacio–tiempo es afectada por la presencia de materia o campos, debido a su energía e impulso. El "potencial" que describe la gravedad es la métrica del espacio–tiempo. El elemento de línea se puede escribir en la forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.1}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y se usó la convención usual de la suma sobre índices repetidos.

El espacio–tiempo es una variedad diferencial (*manifold*) de cuatro dimensiones que posee una métrica Lorentziana. Es decir que, en un sistema de coordenadas ortonormal, el tensor métrico tendrá en su diagonal tres componentes positivas y una negativa (o tres negativas y una positiva, utilizando otra convención). A partir de la métrica es posible construir la conexión, también llamada símbolos de Christoffel, que gobierna el movimiento de una partícula bajo los efectos de la gravedad:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}), \tag{2.2}$$

donde la coma representa la derivada parcial respecto de la correspondiente coordenada.

Las trayectorias que siguen las partículas libres se llaman geodésicas y representan en relatividad general el camino más corto entre dos puntos. La ecuación de las

geodésicas es la siguiente:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \tag{2.3}$$

donde la curva se parametrizó usando la distancia propia.

Las geodésicas se clasifican en tres clases según su naturaleza geométrica:

- Geodésicas de tipo temporal $\Leftrightarrow g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu < 0$,
- Geodésicas de tipo nulo (rayos de luz) $\Leftrightarrow g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0$,
- Geodésicas de tipo espacial $\Leftrightarrow g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu > 0$.

donde el vector $V^\mu = dx^\mu/ds$ es tangente a la curva.

Otro elemento de importancia dentro de la relatividad general es el tensor de Riemann. Este tensor caracteriza la curvatura del espacio–tiempo que se estudia. Mide la diferencia en la aceleración de dos partículas cercanas que caen libremente y tiene la siguiente forma:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\lambda} \equiv \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta\lambda} - \Gamma^\alpha_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}. \tag{2.4}$$

Usando contracciones es posible obtener otros elementos fundamentales para la relatividad general, tales como el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y el tensor de Einstein, respectivamente definidos por:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \tag{2.5}$$

$$R \equiv R^\alpha{}_\alpha, \tag{2.6}$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Las ecuaciones de Einstein relacionan la curvatura del espacio–tiempo, dada por el tensor de Rienman presente en el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, con la distribución de energía e impulso, dada por en el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

donde G es la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz en el vacío. Para más detalles, ver por ejemplo [1, 2].

2.2. Agujero negro de Schwarzschild

La solución más simple y no trivial de las ecuaciones de Einstein es la geometría de Scharzschild [1]. Esta geometría es la única solución de vacío esféricamente simétrica y asintóticamente plana (teorema de Kirchoff). Su métrica es independiente del tiempo y en coordenadas estándar de Schwarzschild (t, r, θ, φ) se escribe en la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\right), \qquad (2.9)$$

donde $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $r_s = 2GM/c^2$ es una constante con dimensiones de longitud que caracteriza la geometría del espacio–tiempo. El escalar de Ricci R y el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ son cero, y por lo tanto el tensor de Einstein también vale cero. Por medio de las ecuaciones de campo se puede verificar que efectivamente el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ también es cero (toda la región más allá de $r = 0$ es vacío). Si se analiza la métrica a grandes distancias, donde el campo es débil, se puede interpretar la cantidad M como la masa del objeto.

La geometría de Schwarzschild presenta dos singularidades, una a $r = 0$ y otra a $r = r_s$. En $r = 0$ se ubica una singularidad física, en la cual el escalar de Kretschmann, invariante construido a partir del tensor de Rienmann diverge. A pesar de que la métrica aparenta tener una singularidad en $r = r_s$, un estudio profundo al respecto muestra que no existe singularidad física (sino una singularidad de coordenadas). Lo que ocurre realmente es que las coordenadas con las que se ha elegido trabajar dejan de describir adecuadamente la región $r < r_s$. Este inconveniente se puede superar realizando una transformación de coordenadas (usualmente las coordenadas de Eddington-Finkelstein o las de Kruskal-Szekeres). Esto no significa que la superficie no sea particular. En ese radio la función métrica g_{tt} se anula, y es aquí donde se presenta el horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild, el cual separa los eventos que se pueden ver desde lejos de los que no. $r = r_s$ es un límite de la región, a partir del cual no se puede enviar ninguna señal con la esperanza de ser recibida por un observador lejano.

En un espacio–tiempo que presenta una o más regiones planas asintóticas, la definición más formal de horizonte de evento es la siguiente: para cada región asintóticamente plana el horizonte de evento del futuro/pasado es definido como el contorno de la región cuyas líneas causales (de tipo temporal o nulas) alcanzan infinitamente la asíntota de futuro/pasado. Es decir las partículas y los fotones más allá del horizonte de eventos se encuentran atrapados sin tener posibilidad de salir.

2.3. Agujero negro de Reissner-Nordström

La geometría de Reissner-Nordström es la única solución esféricamente simétrica y asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein–Maxwell (gravedad junto con el electromagnetismo) [1]. El cuerpo central gravitante posee masa, carga y campo electromagnético. En las coordenadas de Schwarzschild, esta métrica toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad (2.10)$$

donde $r_s = 2GM/c^2$ y $r_Q = G(Q_e^2 + Q_m^2)/(4\pi\epsilon_0 c^2)$. Aquí, Q_e y Q_m son las cargas eléctricas y magnéticas, respectivamente. El tensor del campo electromagnético, en coordenadas ortonormales, está dado por

$$F^{\hat{t}\hat{r}} = E^{\hat{r}} = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

y

$$F^{\hat{\theta}\hat{\varphi}} = B^{\hat{r}} = \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El sistema de coordenadas utilizado es $e_{\hat{\tau}} \equiv \sqrt{-1/g_{tt}}e_t, e_{\hat{r}} \equiv \sqrt{1/g_{rr}}e_r, e_{\hat{\theta}} \equiv r^{-1}e_\theta, e_{\hat{\varphi}} \equiv (r\sin\theta)^{-1}e_\varphi\}$. Estos vectores son el equivalente en relatividad general de los vectores unitarios en las direcciones (t, r, θ, φ), ya que $e_{\hat{\mu}} \cdot e_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = diag[-1, 1, 1, 1]$

La geometría de Reissner-Nordström describe un agujero negro cargado que presenta una singularidad física en $r = 0$ y dos horizontes, uno interno y otro externo, ubicados en los radios donde $g_{tt} = 0$. El horizonte exterior es un horizonte de eventos, mientras que le interior es un horizonte de Cauchy[1]. Los horizontes se encuentran en

$$r_\pm = \frac{r_s}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{r_Q^2}{r_s^2}}\right). \quad (2.11)$$

Estos horizontes se fusionan en uno solo cuando $2r_Q = r_s$ y desaparecen si $2r_Q > r_s$, caso en el cual se tiene una singularidad desnuda en el origen.

[1]El horizonte de Cauchy está asociado a la no predictibilidad. Dada una superficie de tipo espacial, el horizonte de Cauchy futuro asociado se lo define como el límite de la región a partir de la cual las curvas casuales dirigidas al pasado (es decir, curvas nulas o temporales) intersectan dicha superficie espacial.

2.4. Agujeros de gusano

Los agujeros de gusano son objetos teóricos que consisten en túneles en el espacio–tiempo que conectan dos regiones mediante una garganta. Los agujeros de gusano inter-universo son aquellos que conectan dos universos diferentes entre sí, como lo muestra la Fig. 2.1, mientras que los intra-universo conectan regiones lejanas del mismo universo como se aprecia en la Fig. 2.2. La diferencia entre estas dos clases radica únicamente en la geometría y la topología global. Si se utiliza física local y se concentra la atención en la "garganta" del agujero de gusano, los resultados del análisis no resultan distintos por ser un agujero de gusano entre universos diferentes o entre dos regiones lejanas del mismo universo [3].

Los agujeros de gusano son regiones compactas del espacio–tiempo con un contorno topológicamente simple pero con un interior topológicamente no trivial [3]. Usualmente no tienen un horizonte de eventos.

Los agujeros de gusano se pueden clasificar según su existencia temporal en:

- Agujeros de gusano (cuasi) permanentes: son objetos esencialmente tridimensionales y existen por una cantidad de tiempo finita distinta de cero [3].
- Agujeros de gusano transitorios: son agujeros de gusano cuya existencia emerge y desaparece sin tener una estructura topológica típica definida, ni siquiera localmente. Son objetos intrínsecamente de cuatro dimensiones [3].

Los agujeros de gusano se pueden clasificar según el tamaño de la región activa en macroscópicos y microscópicos, comparándolos con la longitud de Planck.

Existen algunos agujeros de gusano que debido a su sencillez o interés teórico se les ha caracterizado en detalle en numerosos trabajos. Entre ellos se encuentran los agujeros de gusano de Wheeler y los agujeros de gusano atravesables [3–6]. Los agujeros de gusano de Wheeler deben su existencia gracias a las fluctuaciones del vacío. Estos objetos son intrínsecamente transitorios y microscópicos y su caracterización depende fuertemente de las suposiciones que se hacen al modelarlos como así también del desarrollo aún no finalizado de la gravedad cuántica. En cuanto a los agujeros de gusano atravesables deben satisfacer tres condiciones: deben ser Lorentzianos, macroscópicos y (cuasi) permanentes. Estos agujeros de gusano deben carecer de un horizonte de eventos, ya que el mismo únicamente permite el paso en un sólo sentido.

Con estos requerimientos Morris y Thorne [4] desarrollaron un análisis simple para entender los agujeros de gusano atravesables. Primero se asume la existencia de una geometría bien comportada y que resulte interesante de investigar. Se calcula el tensor de Riemann (ver Sec. 2.1) y a partir de las ecuaciones de Einstein se puede deducir la distribución del tensor de energía–momento. Luego se analiza si la misma es razonable y si ésta viola algún principio físico fundamental. Usualmente el

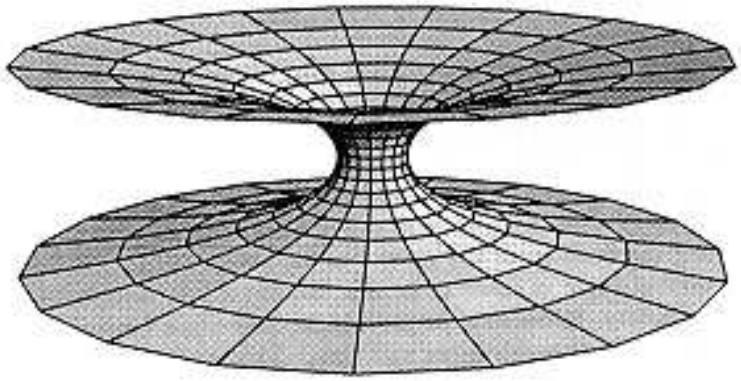

Figura 2.1: Inmersión de agujero de gusano que conecta diferentes universos entre sí. Los universos son las regiones superior e inferior de la figura.

tensor de energía–momento en las cercanías de la garganta de los agujeros de gusano es peculiar [3, 4, 7–9], pero no resulta incompatible con los conocimientos físicos que se tienen actualmente. La materia usada en la garganta del agujero de gusano viola la condición de energía nula. También suele violar las condiciones de energía débil, fuerte y dominante. Estas condiciones serán caracterizadas posteriormente. La violación de estas condiciones de energía produce que en las cercanías de la garganta del agujero de gusano exista una densidad de energía negativa [3, 4], por lo que la materia allí presente se denomina exótica. La cantidad de materia exótica puede hacerse tan pequeña como se desee mediante una elección apropiada de la geometría [10], pero esto se puede lograr sólo a costa de grandes esfuerzos en la garganta [11].

Morris y Thorne asumieron que los agujeros de gusano atravesables debían ser independientes del tiempo, no rotantes y esféricamente simétricos con el objeto de simplificar el análisis de los mismos. Con estas hipótesis se puede introducir una métrica sencilla:

$$ds^2 = -e^{2\phi(l)}dt^2 + dl^2 + r^2(l)[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \tag{2.12}$$

donde l es la distancia propia radial. Entre varias condiciones a cumplir detalladas en [3, 4] es importante destacar para esta métrica la garganta del agujero de gusano se puede definir como $r_0 = \text{mín}\{r(l)\}$, asumiéndose que sólo existe un mínimo para simplificar las cuentas, y considerar sin pérdida de generalidad que éste ocurre en $l = 0$. La coordenada l cubre todo el rango $(-\infty, +\infty)$. Se pide también que la función $\phi(r)$ sea siempre finita para todo l, de modo que no haya horizontes. Si además se desea que la geometría sea asintóticamente plana a ambos lados de la garganta se debe imponer que $r(l)/|l| \to 1$ cuando $l \to \pm\infty$. Para que también pueda

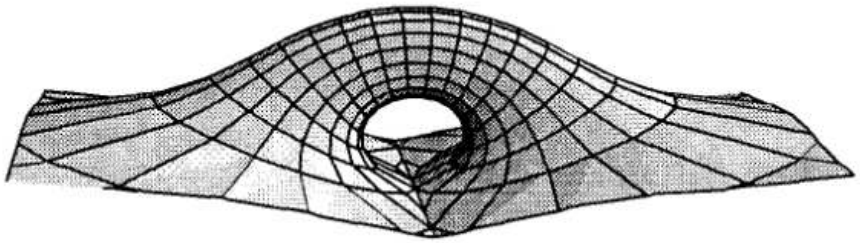

Figura 2.2: Inmersión de agujero de gusano que conecta diferentes zonas del mismo universo.

ser atravesable desde un punto de vista práctico, hay que agregar como condición que la fuerza gravitatoria en la garganta no sea muy grande (a escala humana).

Por razones de sencillez, es mejor analizar dicha métrica en coordenadas de Schwarzschild, con lo cual la Ec. (2.12) puede ser expresada de la siguiente manera:

$$ds^2 = -e^{2\phi_\pm(r)}dt^2 + \frac{1}{1-b_\pm(r)/r}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{2.13}$$

donde $\phi_\pm(r)$ se denomina función de corrimiento al rojo (*redshift*), la cual está relacionada con las fuerzas gravitatorias del agujero de gusano, y $b_\pm(r)$ es la función de forma, que permite entender la distribución de masa dentro del agujero de gusano. Para agregarle mayor simplicidad, la función de corrimiento al rojo cumple $\phi_+(r_0) = \phi_-(r_0)$ para asegurar que la coordenada t sea continua a través de la garganta. Para el caso de agujeros de gusano atravesables se requiere la condición de apertura de la garganta (*flare-out*), que establece como mínima el área descrita por la garganta.

Para analizar la métrica de la Ec. (2.13), se puede fijar el tiempo t y aprovechando la simetría esférica se puede elegir un plano $\theta = \pi/2$, obteniendo:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-b_\pm(r)/r} + r^2 d\varphi^2. \tag{2.14}$$

Se puede realizar una inmersión (*embedding*) en un espacio euclídeo de mayor dimensión, con coordenadas cilíndricas (r, φ, z), cuya métrica es:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{2.15}$$

La superficie inmersa es simétrica en φ y puede ser descrita por una función $z(r)$.

En esta superficie la métrica toma la forma siguiente:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{2.16}$$

Con las Ecs. (2.14) y (2.16) se obtiene la condición que debe satisfacer $z(r)$:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left[\frac{r}{b(r)} - 1\right]^{-1/2}. \tag{2.17}$$

Al llegar a esta ecuación se ve claramente que $r \in [r_0, +\infty)$ y por ello se necesitan dos grupos de coordenadas de $[r_0, +\infty)$ para describir cada uno de los lados del agujero de gusano, los cuales se unen en r_0, donde se halla la garganta, siendo $r_0 = b(r_0) \equiv b_0$. Como r no es una coordenada conveniente para describir los fenómenos cercanos a la garganta debido a que dz/dr diverge, se define la distancia propia radial como:

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{1 - b(r')/r'}}. \tag{2.18}$$

Continuando con el análisis de la Ec. (2.13), cuando r tiende a infinito, las funciones de corrimiento al rojo y de forma deben ser finitas. Pero pueden converger en valores diferentes. Es decir, que en el caso de la función de forma, $\lim_{r\to\infty} b_\pm(r) = b_\pm$ al agujero de gusano se le permite tener diferentes masas dependiendo de qué universo se esté observando. En el caso de la función de corrimiento al rojo $\lim_{r\to\infty} \phi(r) = \phi_\pm$. Es necesario resaltar que no hay necesidad de establecer a priori que $\phi_+(\infty) = \phi_-(\infty)$, esto implica que se podría permitir al tiempo correr con diferente ritmo según de que lado de la garganta se encuentre el observador. Sin embargo, por simplicidad en el estudio de agujeros de gusano atravesables se asume simetría ante intercambio de regiones, es decir $\pm \leftrightarrow \mp$, pero es importante remarcar que ésta condición no es esencial para la definición de agujeros de gusano atravesables.

Si se resuelven las ecuaciones de Einstein (Ecs. (2.8)) con la métrica presentada en Ec. (2.13) y teniendo en cuenta que las componentes no nulas del tensor de energía–momento son $T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho$, $T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau$, $T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = p$, se pueden obtener las siguientes ecuaciones tras una conveniente manipulación algebraica:

$$b' = 8\pi G\rho r^2, \tag{2.19}$$

$$\phi' = \frac{b - 8\pi G\tau r^3}{2r^2(1 - b/r)}, \tag{2.20}$$

$$\tau' = (\rho - \tau)\phi' - 2(p + \tau)/r. \tag{2.21}$$

Si estas ecuaciones se evalúan en la garganta y se utiliza la condición que es necesaria sobre la función de forma $b'(r) < b(r)/r$ se obtiene la siguiente ecuación de suma importancia

$$\rho(r_0) - \tau(r_0) \leq 0. \tag{2.22}$$

Esta desigualdad puede escribirse en la forma $\tau(r_0) \geq \rho(r_0)$, la cual implica que un observador que se mueva suficientemente rápido a través de la garganta, verá una densidad de energía negativa, por lo que se viola la condición de energía débil. Para mayor detalle en los cálculos ver Refs. [3, 4, 7–9].

Las condiciones mencionadas hasta el momento son necesarias para modelar un agujero de gusano atravesable "teórico", sin embargo es imprescindible incorporar más condiciones si se pretende diseñar un agujero de gusano atravesable "en la práctica", de modo que no se experimenten grandes fuerzas gravitatorias en la región cercana a la garganta [3, 4].

2.5. Condiciones de energía

Existen al menos siete tipos de condiciones de energía con las que se trabaja dentro de la relatividad general. Las cuatro más usadas son la condición de energía nula, débil, fuerte y dominante [2, 3]. Además existen tres condiciones más relacionadas con el promedio de las tres primeras condiciones de energías anteriormente mencionadas: la condición de energía nula promediada, la condición de energía débil promediada y la condición de energía fuerte promediada. Estas tres últimas condiciones no serán tratadas en esta Tesis.

Para entender las condiciones de energía no promediadas es necesario tener en cuenta al tensor de energía–momento en una base ortonormal. En dicho sistema el tensor tendrá la siguiente forma:

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3, \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

donde ρ es la densidad de energía y p_i son las presiones en las diferentes direcciones del espacio. Por lo tanto las condiciones de energía se pueden expresar en términos de las componentes del tensor de energía–momento. Luego se pueden definir

- **Condición de energía nula**
  La condición de energía nula o NEC (del inglés *null energy condition*) está dada por

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$$

para todo vector nulo k^μ. En el sistema de coordenadas ortonormal, esta condición se traduce en que la suma de la densidad de energía con cualquiera de las presiones principales, debe ser positiva:

$$NEC \iff \quad \rho + p_j \geq 0, \quad \forall j. \tag{2.24}$$

- **Condición de energía débil**
  La condición de energía débil o WEC (del inglés *weak energy condition*) establece que

  $$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$$

  donde V^μ es cualquier vector de tipo temporal. En términos de las presiones principales esta condición requiere que la densidad de energía local para todo observador (de tipo temporal) sea positiva, es decir

  $$WEC \iff \rho \geq 0 \quad \wedge \quad \rho + p_j \geq 0 \quad \forall j. \tag{2.25}$$

  La condición de energía débil implica la condición de energía nula.

- **Condición de energía fuerte**
  La condición de energía fuerte o SEC (del inglés *strong energy condition*) establece que para cualquier vector de tipo temporal V^μ

  $$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right)V^\mu V^\nu \geq 0$$

  donde $T = T^\mu_{\ \mu}$ es la traza del tensor de energía–momento. Expresada en términos de las presiones principales, dicha condición requiere

  $$SEC \iff \rho + p_j \geq 0 \quad \forall j, \quad \wedge \quad \rho + \sum_j p_j \geq 0 \quad \forall j. \tag{2.26}$$

  La condición de energía fuerte implica la condición de energía nula, pero no implica necesariamente la condición de energía débil.

- **Condición de energía dominante**
  La condición de energía dominante o DEC (del inglés *dominant energy condition*) establece que para cualquier vector de timpo temporal V^μ

  $$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$$

  y $T_{\mu\nu}V^\mu$ no es de tipo espacial. En términos de las presiones principales se requiere que la densidad de energía medida localmente sea positiva y el flujo de energía sea de tipo temporal o nulo:

  $$DEC \iff \rho \geq 0 \quad \wedge \quad p_j \in [-\rho, +\rho] \quad \forall j. \tag{2.27}$$

Significa que la densidad de energía medida localmente es siempre positiva para el flujo de energía es tipo temporal o nulo. La condición de energía dominante implica la condición de energía débil y por ende la nula también, pero no implica la condición de energía fuerte.

Estas condiciones de energía se han usado en muchos trabajos de teoremas de singularidades tratados clásicamente y en la termodinámica de agujeros negros [3]. Sin embargo, estas condiciones de energía pueden tener violaciones ante determinados fenómenos físicos teóricos y experimentales. Ejemplos de situaciones que violan todas o algunas de las condiciones anteriormente mencionadas son la teoría clásica de campos escalares, la teoría de inflación, el efecto Casimir y la evaporación de Hawking, entre otros [3].

2.6. Condiciones de juntura

Las condiciones de juntura permiten unir dos soluciones a través de una hipersuperficie. Dicha unión puede ser suave o a través de una capa de materia de espesor infinitesimal (*thin shell*). Históricamente el desarrollo de este formalismo fue iniciado por Sen [12], Lanczos [13] y Darmois [14] a principios del siglo XX, finalizándolo Israel [15] (para un resumen ver, por ejemplo, [16]).

Si se considera una cáscara delgada situada en un espacio bien comportado, se puede definir una función $\eta(x)$ (de momento arbitraria) tal que sea nula en la ubicación de la cáscara. Sin perder generalidad, la métrica en los alrededores de la cáscara puede ser escrita de la siguiente manera

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(\eta(x))g^1_{\alpha\beta} + \Theta(-\eta(x))g^2_{\alpha\beta}. \tag{2.28}$$

Sea $\mathcal{M}_{1,2}$ dos espacio–tiempos n-dimensionales suaves cuyos tensores métricos son $g_{1,2}$ respectivamente, se asume que existen hipersuperficies $\Sigma_{1,2} \subset \mathcal{M}_{1,2}$ que limitan las regiones $\mathcal{M}_{1,2}$ a cada lado de lo pegado. Estas dos hipersuperficies deben ser difeomorfas y como se van a identificar punto a punto, pueden ser simplemente llamadas como Σ. La variedad $\mathcal{M}$ es la unión de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$. La primer forma fundamental sobre Σ está denominada por $h_{\mu\nu}$, y la segunda forma fundamental (curvatura extrínseca) está dada por $K^{1,2}_{\mu\nu}$, donde los superíndices (o subíndices) se relacionan a las partes interna y externa de $\mathcal{M}$. El salto en la cantidad Υ a través de Σ se lo define

$$[\Upsilon] \equiv (\Upsilon^2 - \Upsilon^1)|_\Sigma. \tag{2.29}$$

Es importante notar que intercambiar $1 \longleftrightarrow 2$ modifica el signo del salto. Si hay una capa de materia sobre Σ, se la refiere como cáscara delgada, si no se la llama superficie de borde. La primer condición indispensable para la construcción de un

espacio bien definido (que por lo menos garantice la continuidad de la métrica) es que la primer forma fundamental $h_{1,2}$ de ambos espacios sobre la superficie Σ sean iguales, es decir

$$h^1_{\mu\nu} = h^2_{\mu\nu}. \tag{2.30}$$

La expresión de la primer forma fundamental sobre la cáscara es

$$h^{1,2}_{ij} = g^{1,2}_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu_{1,2}}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu_{1,2}}{\partial \xi^j}\bigg|_\Sigma . \tag{2.31}$$

La normal unitaria ($n^\gamma n_\gamma = 1$) sobre la cáscara se puede escribir como

$$n^{1,2}_\gamma = \left\{ \left| g^{\alpha\beta}_{1,2} \frac{\partial G}{\partial X^\alpha_{1,2}} \frac{\partial G}{\partial X^\beta_{1,2}} \right|^{-1/2} \frac{\partial G}{\partial X^\gamma_{1,2}} \right\}\bigg|_\Sigma , \tag{2.32}$$

donde la función G se anula sobre la superficie Σ. En la práctica se toman dos espacios diferentes $\mathcal{M}_{1,2}$, cada uno con su sistema de coordenadas $X^\mu_{1,2}$ que no tienen relación entre sí, y se parametriza la superficie Σ, con cada uno de estos sistemas $X^\mu_{1,2} = X^\mu_{1,2}(\xi^a)$ tal que ξ^a son las coordenadas intrínsecas locales para Σ (las letras griegas cuentan a partir de 0, mientras que las latinas a partir de 1). De esta forma se obtienen dos bases de espacios tangentes:

$$\{n^1_\nu, \frac{\partial X^\nu_1}{\partial \xi^i}\} \quad \text{y} \quad \{n^2_\nu, \frac{\partial X^\nu_2}{\partial \xi^i}\}.$$

Una vez identificadas ambas regiones con sus coordenadas respectivas se pueden obviar las etiquetas $1, 2$. La primer forma fundamental puede ahora expresarse también como el proyector sobre Σ

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \tag{2.33}$$

Las componentes de la segunda forma fundamental se obtienen a partir de

$$K^{1,2}_{ij} = -n^{1,2}_\gamma \left(\frac{\partial^2 X^\gamma_{1,2}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha_{1,2}}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\beta_{1,2}}{\partial \xi^j} \right)\bigg|_\Sigma , \tag{2.34}$$

y el salto de la segunda forma fundamental a través de la superficie Σ se lo define acorde a la Ec. (2.29) como

$$[K_{ij}] = K^2_{ij} - K^1_{ij}, \tag{2.35}$$

es necesario notar que la segunda forma fundamental es simétrica y ortogonal a n^μ por lo tanto sólo las $n(n-1)/2$ componentes tangentes a Σ no son nulas. Las ecuaciones de campo de relatividad general están bien definidas en un sentido distribucional debido a que el tensor de Riemann tiene la siguiente expresión

$$\underline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = (1-\underline{\theta})R^{1\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \underline{\theta}R^{2\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \underline{\delta}^{\Sigma}H^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}, \tag{2.36}$$

donde $R^{1,2\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ son los tensores de Riemann de $\mathcal{M}_{1,2}$ respectivamente, $\underline{\theta}$ es la distribución asociada a la función que vale 1 en $\mathcal{M}_1$ y cero en $\mathcal{M}_2$, $\underline{\delta}^{\Sigma}$ es la distribución escalar conocida como delta de Dirac sobre la superficie Σ y actúa sobre cualquier función de prueba Y dando por resultado el valor de la integral de dicha función sobre Σ

$$< \underline{\delta}^{\Sigma}, Y >= \int_{\Sigma} Y.$$

$H^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ en la Ec. (2.36) se lo suele llamar *la distribución singular* del tensor de Riemann, y debe conservarse sólo en los casos más ideales, tales como mundos brana o cáscaras delgadas de materia. Explícitamente toma la forma

$$H_{\alpha\beta\mu\nu} = -n_{\alpha}[K_{\beta\nu}]n_{\mu} + n_{\alpha}[K_{\beta\mu}]n_{\nu} - n_{\beta}[K_{\alpha\mu}]n_{\nu} + n_{\beta}[K_{\alpha\nu}]n_{\mu}, \tag{2.37}$$

de donde se pueden obtener, respectivamente, la parte singular de las distribuciones del tensor de Ricci $R_{\beta\nu}$ y del escalar de curvatura R

$$H^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} \equiv H_{\beta\nu} = -[K_{\beta\nu}] - [K^{\gamma}{}_{\gamma}]n_{\beta}n_{\nu}, \tag{2.38}$$

y

$$H^{\gamma}{}_{\gamma} \equiv H = -2[K^{\mu}{}_{\mu}], \tag{2.39}$$

con las cuales se obtiene la parte singular $\mathcal{G}_{\beta\nu}$ de la distribución del tensor de Einstein

$$\underline{G}_{\beta\nu} \equiv \underline{R}_{\beta\nu} - \frac{1}{2}g_{\beta\nu}\underline{R} = G^{2}_{\beta\nu}\underline{\theta} + G^{1}_{\beta\nu}(1-\underline{\theta}) + \mathcal{G}_{\beta\nu}\underline{\delta}^{\Sigma}, \tag{2.40}$$

donde

$$\mathcal{G}_{\beta\nu} = -[K_{\beta\nu}] - h_{\beta\nu}[K^{\gamma}{}_{\gamma}], \tag{2.41}$$

y

$$n^{\nu}\mathcal{G}_{\beta\nu} = 0. \tag{2.42}$$

En relatividad general, y por medio de las ecuaciones de Einstein, este formalismo provee la parte singular de la distribución del tensor de energía–momento $S_{\mu\nu}$ y se obtienen las llamadas ecuaciones de Lanczos

$$\kappa S_{\mu\nu} = -[K_{\mu\nu}] - h_{\mu\nu}[K^{\gamma}{}_{\gamma}], \tag{2.43}$$

donde $n^{\nu}S_{\beta\nu} = 0$ es sólo válido para relatividad general, k es la constante de acoplamiento gravitatorio, $S_{\mu\nu}$ es la parte singular del tensor de energía–momento y $[K_{\mu\nu}]$ es el salto de la segunda forma fundamental definido en Ec. (2.35). Es interesante

notar que solamente las componentes tangentes de $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ y $S_{\mu\nu}$ no son nulas. Como resultado general, y usando la identidad de Bianchi, se puede deducir

$$\nabla^\beta \underline{G}_{\beta\nu} = 0 = n^\beta [G_{\beta\nu}]\delta^\Sigma + \nabla^\beta(\mathcal{G}_{\beta\nu}\underline{\delta}^\Sigma).$$

Expandiendo la expresión resulta

$$\nabla^\beta \underline{G}_{\beta\nu} = 0 = \underline{\delta}^\Sigma \left(n^\beta [G_{\beta\nu}] + \overline{\nabla}^\beta \mathcal{G}_{\beta\nu} - \frac{1}{2} n_\nu \mathcal{G}^{\gamma\lambda}(K^1_{\gamma\lambda} + K^2_{\gamma\lambda}) \right), \tag{2.44}$$

con $\overline{\nabla}$ la derivada covariante intrínseca sobre la superficie Σ asociada a la primer forma fundamental. Esto implica las siguientes relaciones que son válidas en general, no sólo en relatividad general

$$(K^1_{\gamma\lambda} + K^2_{\gamma\lambda})\mathcal{G}^{\gamma\lambda} = 2n^\beta n^\nu [G_{\beta\nu}] = 2n^\beta n^\nu [R_{\beta\nu}] - [R], \tag{2.45}$$

$$\overline{\nabla}^\beta \mathcal{G}_{\beta\nu} = -n^\gamma h^\lambda_\nu [G_{\gamma\lambda}] = -n^\gamma h^\lambda_\nu [R_{\gamma\lambda}]. \tag{2.46}$$

En un espacio–tiempo de 4 dimensiones, si se adopta una base ortonormal sobre la cáscara, se logra diagonalizar la primer y la segunda forma fundamental y el tensor de energía–momento sobre la misma. La primer forma fundamental resulta ser $h_{\mu\nu} = diag[-1, 1, 1]$, y la segunda forma fundamental $K_{\mu\nu} = diag[K_0, K_1, K_2]$. Cuando el tensor de energía–momento se encuentra diagonalizado, $S_{\mu\nu} = diag[\sigma, p_1, p_2]$, se pueden interpretar sus componentes: σ como la densidad de energía superficial, y las p_i como presiones o tensiones (según su signo) sobre la superficie Σ. En términos de estas cantidades, las ecuaciones de Einstein sobre Σ resultan ser

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{8\pi}[K_1 + K_2], \\ p_1 &= -\frac{1}{8\pi}[K_2 - K_0], \\ p_2 &= -\frac{1}{8\pi}[K_1 - K_0]. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Esta técnica es de una gran flexibilidad lo que permite su aplicación para modelar y analizar la estabilidad ante perturbaciones que conservan la simetría de las construcciones. En particular, se ha utilizado en el estudio de burbujas o cáscaras alrededor de agujeros negros [17–25], agujeros de gusano en diferentes teorías con simetría esférica [5, 6, 26–42], con simetría plana [43] y cilíndrica [44–49]. También se ha usado este formalismo para el análisis y generalización de agujeros de gusano modelados con gas de Chaplygin [50–56] y dentro de la gravedad de Brans-Dicke [40, 57, 58]. Recientemente se ha considerado el análisis de la estabilidad linearizada de un agujero de gusano construido con cáscaras delgadas y con una ecuación de estado variable [59].

Capítulo 3

Gravedad $F(R)$

En este capítulo se introducen las teorías de gravedad denominadas $F(R)$. Se describe también una familia de soluciones que representan agujeros negros esféricamente simétricos con carga en estas teorías. Por último, se presentan las correspondientes condiciones de juntura a través de una hipersuperficie.

3.1. Gravedad modificada: teorías $F(R)$

Los primeros intentos de desarrollar una teoría de gravedad modificada [60–62] a través de la introducción de invariantes de mayor grado en la acción de la relatividad general datan de 1919 por Weyl y 1923 por Eddington, y fueron principalmente motivados por la curiosidad generada por la la teoría de Einstein. Estos esfuerzos no prosperaron dado que no resultaba de utilidad complicar la acción de Einstein-Maxwell sin un interés físico, ya sea teórico o experimental. En 1960 se reconoció que la relatividad general no es renormalizable, y por ende no podía cuantizarse convencionalmente. En 1962 Utiyama y De Witt mostraron que la renormalización a un bucle (*loop*) requería que la acción de Einstein-Hilbert tuviera términos de grado mayor en la curvatura R. Stelle demostró posteriormente que efectivamente las acciones de grado alto son renormalizables. Cuando se tiene en cuenta correcciones cuánticas o se trabaja dentro de la teoría de cuerdas, la energía efectiva mínima de las acciones gravitatorias admite invariantes de curvatura de grado alto. Estos hechos estimularon el interés de la comunidad científica por las teorías de gravedad modificadas. Sin embargo, la importancia de esos términos está restringida a regímenes de gravedad muy intensa, por lo que se esperaba que fuera despreciable para grandes escalas. De esta forma, las correcciones a la relatividad general sólo serían importantes a escalas cercanas a la de Planck y por ende, en el Universo temprano o en las proximidades de singularidades de agujeros negros. De modo que no se esperaba que estas correcciones afectaran la fenomenología de la gravedad a

bajas energías y grandes escalas como es el Universo tardío.

Sin embargo, debido a la información obtenida de la radiación cósmica de fondo (CMBR) y la observación de supernovas se considera que el Universo actual está compuesto aproximadamente en un 5 % por materia bariónica, un 25 % de materia oscura y un 70 % de energía oscura [60–62]. La materia oscura se refiere a un tipo de materia desconocida que se agrupa como lo hace la materia ordinaria pero no ha sido aún observada en el laboratorio. El término de energía oscura se lo utiliza para describir un tipo de energía desconocida que no se agrupa como lo hace materia ordinaria. Utilizando las condiciones de energía se puede distinguir la energía oscura de la materia oscura: la materia ordinaria y la materia oscura satisfacen la condición de energía fuerte, mientras que la energía oscura no lo hace. Además, la energía oscura se puede modelar por medio de la constante cosmológica. Debido a su predominancia sobre la materia (ya sea ordinaria u oscura) en los tiempos actuales, la expansión del Universo es acelerada. Es de notar que a esta aceleración en tiempos tardíos se le suma una aceleración en tiempos tempranos la cual es una característica predicha por el modelo inflacionario [61]. La época inflacionaria es necesaria para entender los problemas de monopolo, horizontes y planitud, como así también para proveer un mecanismo que genere inhomogeneridades primordiales que actuarían como semillas para la formación de estructuras de mayor escala [61]. Entre estos dos períodos de aceleración es necesario que haya otro de desaceleración para que las épocas de dominación de la radiación y de dominación de la materia puedan desarrollarse. Existe suficientes pruebas observacionales en la abundancia de elementos livianos como el deuterio, el helio y el litio, que requieren de la nucleosíntesis producto de la gran explosión (*Big Bang*) y la producción de otros materiales más allá del hidrógeno que se dan en la época de dominación de la radiación. Por otro lado, la era de dominación de la materia es necesaria para poder explicar la formación de estructuras. La materia oscura no sólo aparece en los datos cosmológicos sino también en las observaciones astrofísicas: la incógnita de la "masa faltante" para galaxias o cúmulos de galaxias. El modelo más simple compatible con los datos hasta ahora compilados es el llamado modelo de concordancia o ΛCDM[1] al que se agrega un escenario inflacionario basado usualmente en el campo escalar llamado inflatón. Este modelo no explica el origen del inflatón ni la naturaleza de la materia oscura per se, y tiene problemas con el valor de la constante cosmológica, la cual resulta ser muy pequeña como para atribuírsela a la energía del vacío de los campos de materia. También presenta un problema de coincidencia que no permite entender el motivo por el cual se observan estos fenómenos, si la densidad de energía de la constante cosmológica fue comparable con la de la materia por un período corto de tiempo. También hubo intentos de motivar la presencia de la constante cosmológica o proponer alternativas dinámicas de materia oscura, pero ninguno de

[1] Λ Cold Dark Matter: constante cosmológica y materia oscura fría

ellos está libre de problemas.

Otra perspectiva para tratar de resolver estas dificultades, considerando que la gravedad es la interacción dominante a escalas cosmológicas y por ende es la fuerza que gobierna el Universo, es preguntarse si la descripción actual de la interacción gravitatoria a grandes escalas no es exactamente la más adecuada. He ahí que se propone una modificación a la gravedad de Einstein, tratando de salvar estas dificultades de la teoría sin hacer uso de los conceptos de materia oscura y energía oscura. Una de las modificaciones más simples que se puede realizar, en las teorías de gravedad $F(R)$ [60–62], es reemplazar el lagrangiano de Einstein-Hilbert por $F(R)$ que es función del escalar de curvatura R. Esta forma de pensar no es mejor ni peor a las otras alternativas propuestas, simplemente es un cambio de perspectiva para ver el problema desde otro ángulo. Además, cuestionar la teoría de gravedad actual, podría ayudar a favorecer un entendimiento más profundo de sus problemáticas al punto de poder desarrollar una nueva física, como ha ocurrido con ejemplos tales como la precesión de Mercurio, que se atribuyó durante mucho tiempo a la presencia de un planeta "oscuro", cuando en realidad su explicación es posible al abandonar la teoría de Newton y pasar a la relatividad general.

En la actualidad existen varias teorías alternativas: tensorial-escalar, gravedad DPG (Dvali, Porratii y Gabadadze), mundos brana, TeVeS (tensorial-vectorial-escalar), Horava-Lifshitz, entre otras. La presente Tesis se focalizará en las teorías de gravedad $F(R)$ [60–62]. Éstas surgen como la generalización del lagrangiano R que aparece en la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{|g|}R, \tag{3.1}$$

donde $c = 1$ y $\kappa = 8\pi G$, de modo que el mismo se transforma en

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{|g|}F(R). \tag{3.2}$$

Se han comentado las distintas razones que motivaron este tipo de teorías en la búsqueda de generalizaciones de la relatividad general, pero también existen otras: explorar las teorías $F(R)$ y expresiones más generales que incluyan otros invariantes de grado superior tales como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ está principalmente motivado por la búsqueda de simplicidad. Las teorías $F(R)$ son lo suficientemente generales como para tener varias de las características básicas de la gravedad a órdenes altos, pero a la vez son lo suficientemente simples para permitir operar algebraica y analíticamente sin dificultades extremas. Por ejemplo, desarrollar a $F(R)$ como una serie

$$F(R) = ... + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} + ...,$$

donde los coeficientes α_i y β_i tienen las dimensiones apropiadas. En este caso se puede observar que la acción incluye una serie de términos fenomenológicamente interesantes. Estas teorías son excelentes para el desarrollo de modelos de juguete que permiten una mejor comprensión de tales modificaciones en la gravedad. Además existen serias razones para considerar a las $F(R)$ especiales entre las teorías de gravedad a órdenes altos, ya que son las únicas que pueden evitar la conocida y fatal inestabilidad de Ostrograski [61] La otra razón se halla en tratar de explicar si las modificaciones de altas energías en la acción gravitatoria tienen repercusión o no sobre la fenomenología cosmológica en los tiempos tardíos. Desde el punto de vista clásico, estos términos deberían tener coeficientes del orden de la escala de Planck y por ende podrían ser despreciables. Sin embargo, es necesario resaltar que existe una gran ambigüedad en el entendimiento de cómo funciona la gravedad a escalas pequeñas o a altas energías (existen trabajos que proponen que la fenomenología gravitatoria en los tiempos tardíos podría ser predicha usando teorías más fundamentales como la teoría de cuerdas [61, 62]). Por otro lado, no se debe olvidar que la medición de la constante cosmológica corresponde a una escala determinada de energía. La teoría de campo efectivo y otras teorías de altas energías han fallado en predecir o explicar su valor. Esto produce que cualquier teoría que se proponga requerirá inevitablemente el uso de algunos parámetros anormalmente pequeños.

La flexibilidad que permiten las teorías $F(R)$ ha incrementado el interés de la comunidad en este tipo de teorías. Se han encontrado soluciones de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos en la última década [63–69], agujeros de gusano [28,70–75], estrellas esféricas colapsando [76] , y gravastars [77–80]. El caso particular de las teorías gravitatorias $F(R)$, que tengan un teorema de masa positiva [81] y una formulación de entropía bien definida [82] pueden proveer un modelo de inflación consistente [83]. La radiación gravitatoria [84] y las estrellas compactas (estrellas de neutrones y quarks) [85] también han sido estudiadas en el caso de las teorías $F(R)$ cuadráticas.

3.2. Ecuaciones de campo

Existen dos principios variacionales que se pueden aplicar sobre la acción de Einstein-Hilbert y derivar las ecuaciones de Einstein: la variación estándar respecto de la métrica y la no tan común variación de Palatini. En esta última, se asume que la métrica y la conexión son variables independientes y la acción se varía en función de ambas, asumiendo que la parte de la acción asociada a la materia no depende de la conexión. La elección del principio variacional se lo refiere usualmente como formalismo, he ahí la razón por la cual se denomina formalismo métrico o formalismo de Palatini, respectivamente. Ambos formalismos concluyen en las mismas ecuaciones de campo para una acción cuyo lagrangiano es lineal en R, esto no

siempre es así para acciones más generales. Por ello las teorías de gravedad $F(R)$ se dividen en teorías $F(R)$ métricas y teorías $F(R)$ de Palatini. Existe también una tercera versión de las teorías $F(R)$ llamada teoría $F(R)$ métrica-afín, que proviene de utilizar el formalismo de Palatini quitando la hipótesis de que el la acción asociada a la materia es independiente de la conexión. Esta versión es la más general posible dentro de las teorías $F(R)$, que se reduce en el formalismo métrico o en el de Palatini bajo hipótesis adecuadas. En esta Tesis se trabaja dentro del formalismo métrico.

En presencia de materia, se agrega a la acción (3.2) el término S_M correspondiente a la misma, por lo que la acción total para teorías de gravedad $F(R)$ toma la siguiente forma

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{|g|}F(R) + S_M(g_{\mu\nu},\psi), \tag{3.3}$$

donde ψ denota los campos de materia. Luego de resolver el problema variacional y tras manipulación algebraica, resulta [61]

$$F'(R)R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}F(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu F'(R) + g_{\mu\nu}\nabla_\gamma\nabla^\gamma F'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.4}$$

donde

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

es el tensor de energía–momento asociado a la materia, la prima indica la derivada respecto de R y ∇_ν es la derivada covariante asociada a la conexión de Levi-Civita de la métrica. La gravedad $F(R)$ métrica fue estudiada por primera vez de manera rigurosa por Buchdahl en 1970. Estas ecuaciones de campo son ecuaciones diferenciales de cuarto orden en las derivadas parciales en la métrica. Los últimos dos términos del lado izquierdo de la Ec. (3.4) valen cero para una acción lineal en R, recuperando la expresión de la relatividad general. Es fácil de verificar que la traza de la Ec. (3.4) queda

$$F'(R)R - 2F(R) + 3\nabla_\gamma\nabla^\gamma F'(R) = \kappa T, \tag{3.5}$$

donde $T^\mu_{\ \mu} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ es la traza del tensor $T_{\mu\nu}$. La Ec. (3.5) relaciona R con T diferencialmente y no algebraicamente como ocurre en relatividad general, en la cual $R = -\kappa T$. Esta peculiaridad indica que las ecuaciones de campo de las teorías $F(R)$ admitirán una variedad mayor de soluciones que la teoría de Einstein. Por ejemplo, el Teorema de Birkhoff, que asegura a la solución de Schwarzschild como la única esféricamente simétrica y asintóticamente plana en el vacío, deja de ser válido para las teorías $F(R)$, incrementando la lista de soluciones. También deja de ser obligatorio que si $T = 0$ entonces $R = 0$. La Ec. (3.5) resulta de gran utilidad en el estudio de varios aspectos de la teoría $F(R)$ en cuestión, como por ejemplo

la estabilidad o los límites de campo débil. Las soluciones máximamente simétricas implican un escalar de Ricci constante. Para $R = R_0$ y $T_{\mu\nu} = 0$ la Ec. (3.5) se reduce a

$$F'(R_0)R_0 - 2F(R_0) = 0, \tag{3.6}$$

la cual, dada una función $F(R_0)$ resulta en una ecuación algebraica en R_0. Si $R = 0$ es raíz de la ecuación, y se trabaja con ella, la Ec. (3.4) se reduce a $R_{\mu\nu} = 0$ y la solución de máxima simetría es la del espacio de Minkowski. Si la raíz de la Ec. (3.6) resulta ser $R = R_0$, con R_0 constante, la Ec. (3.4) se reduce a $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}R_0/4$ y las soluciones de máxima simetría son las de Sitter o anti-de Sitter, dependiendo del signo de R_0, como ocurre en relatividad general en presencia de la constante cosmológica.

Con respecto a la conservación de la energía, en el formalismo métrico para gravedad $F(R)$, la materia está mínimamente acoplada a la métrica, por lo que el tensor $T_{\mu\nu}$ tiene divergencia nula [61], o sea que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

Finalmente es importante notar que es posible escribir las ecuaciones de campo en la forma de las ecuaciones de Einstein, con un tensor de energía–momento efectivo compuesto por términos que dependen de la curvatura en el lado derecho de las ecuaciones. Esta forma puede ser cuestionable en tanto que no se está trabajando con la teoría de Einstein y por ende es artificial forzar esta estructura y su interpretación en términos de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, en la práctica, ha demostrado ser de gran utilidad. Puntualmente, la Ec. (3.4) puede reescribirse como

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{F'(R)} + g_{\mu\nu}\frac{F(R) - RF'(R)}{2F'(R)} + \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu F'(R) - g_{\mu\nu}\nabla_\gamma\nabla^\gamma F'(R)}{F'(R)}, \tag{3.7}$$

o bien

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{F'(R)}\left(T_{\mu\nu} + T^{ef}_{\mu\nu}\right). \tag{3.8}$$

Tomando $\kappa_{ef} = \kappa/F'(R)$ es posible definir $G_{ef} \equiv G/F'(R)$ que puede ser entendida como la constante gravitatoria efectiva, si se hace una analogía con gravedad escalar-tensorial. Es necesario que G_{ef} sea positiva para evitar que el gravitón sea fantasma, razón por la cual $F'(R)$ está forzada a ser positiva para que esto no suceda. Es más

$$T^{ef}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{k}\left(\frac{F(R) - RF'(R)}{2}g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu F'(R) - g_{\mu\nu}\nabla_\gamma\nabla^\gamma F'(R)\right), \tag{3.9}$$

es un tensor de energía–momento efectivo que no tiene la forma canónica, es decir cuadrático en las derivadas primeras del campo $F'(R)$, en cambio posee términos lineales en la derivada segunda. La densidad de energía efectiva derivada de este tensor efectivo no está definida positiva, por lo tanto no se cumple ninguna de las

condiciones de energía. Esta situación es análoga a la que ocurre en gravedad escalar-tensorial. El tensor de energía–momento efectivo se puede reescribir en la forma de un tensor de energía–momento de un fluido perfecto, lo cual puede ser útil en muchos casos de interés.

3.3. Equivalencia con la teoría de Brans-Dicke

De la misma manera que en mecánica clásica se redefinen variables para que las ecuaciones que describen un sistema tomen una forma más atractiva o fácil de manejar, en teorías de campo se pueden hacer redefiniciones para reescribir la acción del sistema o sus ecuaciones de campo. No hay una prescripción única a la hora de redefinir los campos de una teoría. Se pueden incorporar campos auxiliares, aplicar renormalizaciones o transformaciones conformes o incluso redefinir los campos mismos a conveniencia personal. Es importante notar que desde el punto de vista clásico, dos teorías se consideran equivalentes dinámicamente si, tras una redefinición de los campos gravitatorios y de materia, se pueden hacer coincidir sus ecuaciones de campo o su acción. Las teorías dinámicamente equivalentes dan los mismos resultados cuando describen un sistema dinámico que puede ser descrito con dichas teorías. Existen muchas ventajas en la exploración de la equivalencia dinámica entre dos teorías, entre ellas la más importante es la de poder utilizar los resultados derivados de una para el estudio de la otra. El término "dinámicamente equivalente" puede resultar vago desde una perspectiva clásica gravitatoria. Dentro de dicha perspectiva, una teoría es completamente descrita por sus ecuaciones de campo. Cuando se refiere a una teoría gravitatoria, estas ecuaciones describen la dinámica de los sistemas gravitatorios. Por lo tanto, dos teorías dinámicamente equivalentes son en realidad dos representaciones diferentes de la misma teoría.

El problema de distinguir entre teorías verdaderamente diferentes y representaciones diferentes de la misma teoría (o teorías dinámicamente equivalentes) es un problema intrincado. Tiene implicaciones serias y ha dado origen a varias interpretaciones erróneas en el pasado, especialmente cuando se utilizan transformaciones conformes en la redefinición de los campos, como por ejemplo, en el caso de los marcos (*frames*) de Einstein o Jordan. La discusión del asunto es amplia y profunda y puede referirse al artículo [61]. Lo que importa resaltar es que, debido a que se tratan cuidadosamente, las redefiniciones de los campos y las diferentes representaciones de una misma teoría son perfectamente válidas y constituyen herramientas útiles para la comprensión de las teorías gravitatorias. Se pudo demostrar que el formalismo métrico y la teoría de Brans-Dicke con un campo y un potencial son dos representaciones diferentes del mismo sistema, cuando el parámetro de Brans-Dicke vale $\omega_0 = 0$. En el formalismo de Palatini se requiere, en cambio, que $\omega_0 = -3/2$.

Para ver esta equivalencia en el formalismo métrico, se va a trabajar al nivel de la

acción, pero un desarrollo análogo puede llevarse a cabo también con las ecuaciones de campo. Se comienza con la gravedad $F(R)$ reescribiendo la acción (3.3) mediante el agregado de un campo χ, en la forma

$$S = \frac{1}{2k}\int d^4x\sqrt{|g|}\left(F(\chi) + F'(\chi)(R-\chi)\right) + S_M(g_{\mu\nu},\psi). \tag{3.10}$$

Variando respecto χ se obtiene

$$F''(\chi)(R-\chi) = 0, \tag{3.11}$$

por lo tanto si $F''(\chi) \neq 0$ se tiene que $\chi = R$, lo que reproduce la acción de la Ec. (3.3). Si se redefine el campo χ por $\phi = F'(\chi)$ y se toma $V(\phi) = \chi(\phi)\phi - F(\chi(\phi))$ la acción toma la siguiente forma

$$S = \frac{1}{2k}\int d^4x\sqrt{|g|}\left(\phi R - V(\phi)\right) + S_M(g_{\mu\nu},\psi). \tag{3.12}$$

Esta es la representación de la acción de una teoría de Brans-Dicke con un parámetro $\omega_0 = 0$ en el marco de Jordan, muchas veces llamada "gravedad de dilatón masivo" [61], teoría que fue originalmente propuesta para generar un término de Yukawa en el límite newtoniano. Es importante destacar que $\phi = F'(\chi)$ es diferente a un campo de materia ordinaria, ya que puede violar todas las condiciones de energía. Las ecuaciones de campo correspondientes a la acción (3.12) quedan

$$G_{\mu\nu} = \frac{k}{\phi}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi}g_{\mu\nu}V(\phi) + \frac{1}{\phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\nabla_\gamma\nabla^\gamma\phi\right) \tag{3.13}$$

y

$$R = V'(\phi). \tag{3.14}$$

Estas ecuaciones de campo pudieron haberse derivado directamente de la Ec.(3.4) realizando las mismas redefiniciones de campo mencionadas anteriormente para la acción. Al tomar la traza de (3.13)y reemplazar R en la Ec. (3.14) se obtiene

$$3\nabla_\gamma\nabla^\gamma\phi + 2V(\phi) - \phi\frac{dV}{d\phi} = kT. \tag{3.15}$$

Esta ecuación determina la dinámica de ϕ para una fuente de materia dada. Para que la teoría escalar-tensorial sea considerada equivalente a la teoría $F(R)$ original, la condición $F''(R) \neq 0$ debe ser vista como la condición que permite que el cambio de variable $\phi = F'(R)$ necesario en la teoría de Brans-Dicke sea invertible, es decir, $d\phi/dR = F''(R) \neq 0$. Esta condición de invertibilidad es suficiente pero no necesaria, lo que es necesario es que $F'(R)$ sea continua uno a uno. Al analizar la Ec. (3.4) se ve que $F''(R) \neq 0$ implica $\phi = F'(R)$ junto con la equivalencia de las acciones

(3.2) y (3.10). Cuando $F''(R)$ no está definida, o se anula, la igualdad $\phi = F'(R)$ y su equivalencia entre las dos teorías ya no puede ser garantizada (aunque en principio esto no puede ser excluido por la condición $F''(R) = 0$). Realizando una transformación conforme es posible demostrar la equivalencia de la acción en el marco de Einstein. Definiendo la transformación [61]

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = F'(R) g_{\mu\nu} \equiv \phi g_{\mu\nu}$$

y la redefinición del campo escalar $\phi = F'(R) \longrightarrow \tilde{\phi}$ dada por

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega_0 + 3}{2\kappa}} \frac{d\phi}{\phi}$$

se pasa al marco de Einstein con un nuevo campo escalar $\tilde{\phi}$ acoplado mínimamente con el escalar de curvatura, de modo que para $\omega_0 = 0$ queda que la acción es [61]

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \partial^\gamma \tilde{\phi} \partial_\gamma \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right] + S_M(e^{-\sqrt{2\kappa}\tilde{\phi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \psi).$$

donde

$$\phi = F'(R) = e^{-\sqrt{2\kappa/3}\tilde{\phi}}$$

y

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{RF'(R) - F(R)}{2\kappa (F(R))^2}$$

Considerando que la teoría de Brans-Dicke se ha explorado ampliamente y ha sido profundamente estudiada, la representación en teorías $F(R)$ pareciera carecer de utilidad. Sin embargo es importante notar que no existe una razón para preferir una de las dos representaciones sobre la otra, al menos desde un punto de vista clásico gravitatorio. Puede haber aplicaciones donde la representación $F(R)$ puede ser más conveniente, mientras que en otros casos puede serlo Brans-Dicke. La teoría de Brans-Dicke se ha estudiado extensivamente, y se ha usado en el desarrollo de la cosmología. Sin embargo, la elección de $\omega_0 = 0$ para el parámetro de Brans-Dicke es excepcional, ya que en este caso se da la aparente ausencia del término cinético en la acción, un hecho que hacía tiempo había forzado a la comunidad a no estudiar la teoría.

Las teorías de Brans-Dicke que corresponden a las teorías métricas de gravedad $F(R)$ no habían sido estudiadas sino tiempo después de la reintroducción de las teorías de $F(R)$, lo que permitió el estudio de características especiales al ser comparadas con teorías Brans-Dicke más estándar, y que sólo fueron posibles de entenderse con el desarrollo de las teorías de gravedad $F(R)$

3.4. Agujeros negros cargados en $F(R)$

Las teorías $F(R)$ son de gran interés como posibles alternativas a la teoría de la relatividad general, ya que pueden proveer una visión unificada de la inflación en el Universo temprano y de su expansión acelerada en sus etapas tardías. De modo que el estudio de objetos compactos dentro de estas teorías resulta de interés. En el presente existen varios trabajos al respecto [63–65]. Por simplicidad, en esta sección y de aquí en más en el resto de la Tesis se adoptan unidades tales que $G = c = 1$ (ver Apéndice A), de modo que $\kappa = 8\pi$, $G_{ef} = 1/F'(R)$, etc.

En particular, se considera el caso de un agujero negro no rotante, con carga y un escalar de curvatura R_0 constante en teorías de gravedad $F(R)$, para el cual se plantea la generalización de la acción de Einstein-Maxwel dada por la Ec. (3.3), donde

$$S_M = -\frac{1}{2k}\int d^4x\sqrt{|g|}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

con

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu.$$

Para hallar la solución se considera un potencial electromagnético de la forma $\mathcal{A}_\mu = (\mathcal{V}(r), 0, 0, 0)$ y una métrica estática simétricamente esférica

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3.17}$$

donde $r > 0$ es la coordenada radial, y $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$ son las coordenadas angulares. Además se pide que la solución corresponda al caso de un escalar de curvatura constante R [64, 65].

Se comienza con la variación de la acción (3.3), que da como resultado las ecuaciones de campo, expresadas en la Ec. (3.4) con un tensor de energía–momento

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\gamma}F_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{g_{\mu\nu}}{4}F_{\lambda\gamma}F^{\lambda\gamma} \tag{3.18}$$

en donde $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$. Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell toman la forman

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Si se considera el escalar de curvatura constante $R = R_0$, la traza de la Ec. (3.4) resulta en la Ec. (3.6), con la cual se puede determinar el escalar de curvatura constante

$$R_0 = \frac{2F(R_0)}{F'(R_0)}.$$

Reemplazando esta expresión en la Ec. (3.4) resulta en el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_0}{4}g_{\mu\nu} + \frac{2}{F'(R_0)}T_{\mu\nu},$$

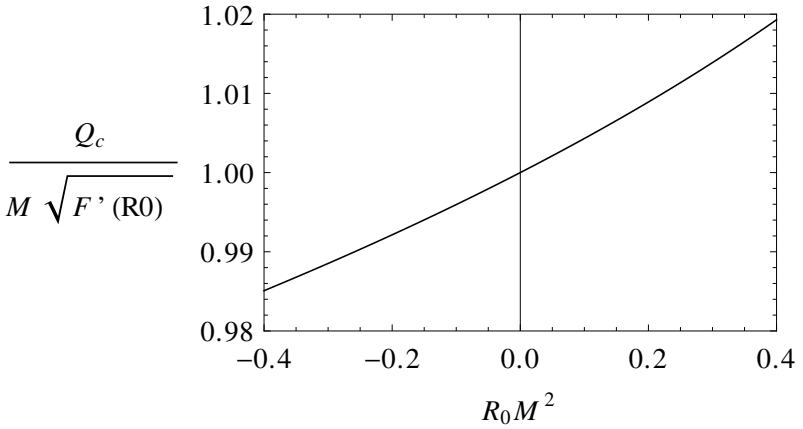

Figura 3.1: Carga crítica Q_c en función de la constante de curvatura R_0 y la masa M: si $|Q| < Q_c$ la variedad original presenta un horizonte interior y otro de eventos, que se fusionan en uno cuando $|Q| = Q_c$; Ambos horizontes desaparecen cuando $|Q| > Q_c$.

el cual implica que $R_{\mu\nu} \neq R_0 g_{\mu\nu}/4$ salvo que $T_{\mu\nu} = 0$. De esta forma se introduce una solución estimada (*ansatz*) esféricamente simétrica del tipo (3.17) y un campo de Gauge solución de las ecuaciones de Maxwell

$$\mathcal{A}_t(r) = \mathcal{V}(r) = -\frac{Q}{r},$$

donde se usaron unidades electromagnéticas tales que $4\pi\epsilon_0 = 1$ (sistema Gaussiano). Resolviendo la Ec. (3.4) junto con la condición de escalar de curvatura constante R_0, se obtiene la solución de la función de la métrica, la cual es [64, 65]

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2 F'(R_0)} - \frac{R_0}{12} r^2, \tag{3.19}$$

donde M la masa y Q la carga. Esta solución tiene escalar de curvatura constante R_0 cuyo valor se puede entender en términos de una constante cosmológica efectiva tal que $\Lambda_{\text{ef}} = R_0/4$. Es importante notar que la carga al cuadrado Q^2 es corregida por un factor $1/F'(R_0)$ con respecto al caso de relatividad general (ver Sec. 2.3)

La geometría es singular en $r = 0$ y los radios de los horizontes están determinados por los ceros de $A(r)$. Los mismos están dados por las soluciones positivas de un polinomio de grado cuatro si $R_0 \neq 0$, o por los de una función cuadrática si $R_0 = 0$. Para el caso de $R_0 > 0$, y valores pequeños de $|Q|$ existen tres horizontes: uno interno, r_i, el de eventos r_h y uno cosmológico r_c. Cuando la carga es lo suficientemente grande y se aproxima a la carga crítica $|Q| = Q_c$, el horizonte interior y el de eventos se fusionan en uno. Para valores $|Q| > Q_c$ existe una singularidad

desnuda en el origen y sólo se encuentra la presencia del horizonte cosmológico r_c. Cuando $R_0 \leq 0$, y para pequeños valores de $|Q|$ hay dos horizontes: el interno r_i y el de eventos r_h. Cuando la carga es $|Q| = Q_c$, ambos horizontes se fusionan en uno, y finalmente para $|Q| > Q_c$ existe una singularidad desnuda y ningún horizonte. El valor crítico de la carga Q_c se lo grafica en la Fig. 3.1.

3.5. Condiciones de juntura en $F(R)$

Las condiciones de juntura sobre una hipersuperficie para las teorías $F(R)$ fueron obtenidas en la última década [86–90]. Al igual que en el caso de la relatividad general, analizado en la Sec. 2.6, la primer forma fundamental debe ser continua, es decir que se debe cumplir la Ec. (2.30) al atravesar Σ. Pero en el caso de la gravedad $F(R)$ hay condiciones adicionales que deben cumplirse. Siguiendo el procedimiento de la Ref. [87], las ecuaciones de campo en las teorías $F(R)$, dadas por la Ec. (3.4), pueden reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} F'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F(R)g_{\mu\nu} - F''(R)\left(\nabla_\mu\nabla_\nu R - g_{\mu\nu}\nabla_\gamma\nabla^\gamma R\right) \\ -F'''(R)\left(\nabla_\mu R\nabla_\nu R - g_{\mu\nu}\nabla_\gamma R\nabla^\gamma R\right) = kT_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde se puede ver que las derivadas covariantes de R son necesarias en los cálculos de la Ec. (3.4), y la única forma de hacerlo para una distribución con una parte singular o una posible discontinuidad en la función R es a través del uso de teorías de distribuciones. Se puede ver que, a menos que $F''(R) = 0$, que corresponde a relatividad general, existen términos de la forma $\nabla_\mu\nabla_\nu R$ y $\nabla_\mu R\nabla_\nu R$ que relacionan términos del tipo [87, 90]

$$\begin{gathered} F(R)g_{\mu\nu}, \\ F'(R)H_{\mu\nu}, \\ F''(R)\nabla_\mu\nabla_\nu(H\delta^\Sigma), \\ F''(R)\nabla_\mu([R]n_\nu\delta^\Sigma), \end{gathered}$$

y

$$F'''(R)\left(\nabla_\mu(H\delta^\Sigma) + [R]n_\mu\delta^\Sigma\right)\left(\nabla_\nu(H\delta^\Sigma) + [R]n_\nu\delta^\Sigma\right).$$

Estos términos contienen productos que no son distribuciones posibles y que nunca podrían cancelarse mutuamente [87, 90]. Pedir que la Ec. (3.4) tenga sentido dentro del marco de la teoría de las distribuciones implica que la parte singular de la distribución del escalar de curvatura debe anularse $H = 0$. Por lo tanto, utilizando la Ec. (2.39) se obtiene

$$[K^\mu{}_\mu] = 0. \tag{3.21}$$

La condición

$$[R] = 0, \tag{3.22}$$

es imposible de evitar a menos que $F'''(R) = 0$. He aquí que surge el caso excepcional de las teorías $F(R)$ cuadráticas donde el escalar de curvatura puede ser discontinuo y aún así las ecuaciones de campo serían adecuadas desde un punto de vista distribucional.

3.5.1. El caso general: $F'''(R) \neq 0$

Para este caso no se puede evitar la condición dada por la Ec. (3.22), lo cual fuerza al escalar de curvatura R a ser continuo sobre la hipersuperficie de pegado Σ. Al cumplir dicha condición junto con la Ec. (3.21), se obtiene que la única parte singular de las ecuaciones de campo (3.4) proviene de la distribución del tensor de Ricci de la Ec. (2.39) y de la parte singular de

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \underline{R} = (1 - \underline{\theta}) \nabla_\mu \nabla_\nu R^1 + \underline{\theta} \nabla_\mu \nabla_\nu R^2 + [\nabla_\nu R] n_\mu \underline{\delta}^\Sigma. \tag{3.23}$$

Gracias a la Ec. (3.22) se puede calcular fácilmente que

$$[\nabla_\mu R] = a n_\mu, \qquad\qquad a = n^\mu [\nabla_\mu R], \tag{3.24}$$

donde a es una función definida sobre la superficie Σ que representa el salto con la derivada (normal) del escalar de curvatura $\nabla_\mu R$, por lo tanto la parte singular de las ecuaciones de campo, en contraste con la Ec. (2.43) de relatividad general, resulta ser

$$\kappa S_{\mu\nu} = -F'(R_\Sigma)[K_{\mu\nu}] + F''(R_\Sigma) h_{\mu\nu} n^\gamma [\nabla_\gamma R], \qquad n^\mu S_{\mu\nu} = 0, \tag{3.25}$$

donde R_Σ es el valor de R sobre Σ. El primer sumando de esta ecuación es nulo debido a la condición (3.22), razón por la cual la traza de la parte singular del tensor de energía–momento (a veces llamada "la tensión de la brana") resulta ser

$$\kappa S^\gamma{}_\gamma = (n-1) F''(R_\Sigma) n^\gamma [\nabla_\gamma R], \tag{3.26}$$

que queda completamente definida por la discontinuidad de la derivada normal del escalar de curvatura R sobre la superficie Σ. Esta característica es particular de las teorías $F(R)$ ya que la tensión de la brana en relatividad general está dada por la discontinuidad de la traza del la segunda forma fundamental $K^\gamma{}_\gamma$ (notar que en estas teorías $K^\gamma{}_\gamma$ es siempre continua).

Si se utilizan las condiciones de las Ecs. (3.21) y (3.22) junto con las relaciones (2.45) y (2.46) se obtiene

$$(K^1_{\gamma\lambda} + K^2_{\gamma\lambda}) \mathcal{G}^{\gamma\lambda} = (K^1_{\gamma\lambda} + K^2_{\gamma\lambda}) H^{\gamma\lambda} = 2 n^\beta n^\nu [R_{\beta\nu}], \tag{3.27}$$

$$\overline{\nabla}^\beta \mathcal{G}_{\beta\nu} = \overline{\nabla}^\beta H_{\beta\nu} = -n^\gamma h^\lambda{}_\nu [R_{\gamma\lambda}]. \tag{3.28}$$

Para obtener en $F(R)$ relaciones equivalentes a las de la relatividad general en donde intervengan cantidades asociadas al tensor de energía–momento se aplica la divergencia de la Ec. (3.25) que da por resultado

$$-F'(R_\Sigma)n^\gamma h^\lambda{}_\mu[R_{\gamma\lambda}]-F''(R_\Sigma)[K_{\gamma\mu}]\overline{\nabla}^\gamma R_\Sigma+F''(R_\Sigma)\overline{\nabla}_\mu a+F'''(R_\Sigma)a\overline{\nabla}_\mu R_\Sigma=\kappa\overline{\nabla}^\nu S_{\mu\nu}. \tag{3.29}$$

Por otro lado, la Ec. (3.4) permite el cálculo de la siguiente discontinuidad

$$\kappa n^\gamma h^\lambda{}_\mu[T_{\gamma\lambda}]=F'(R_\Sigma)n^\gamma h^\lambda{}_\mu[R_{\gamma\lambda}]-F''(R_\Sigma)n^\gamma h^\lambda{}_\mu[\nabla_\gamma\nabla_\lambda R]-F'''(R_\Sigma)a\overline{\nabla}_\mu R_\Sigma. \tag{3.30}$$

A partir de la Ref. [91] se puede obtener que

$$[\nabla_\mu\nabla_\nu R]=An_\mu n_\nu+n_\nu(\overline{\nabla}_\nu a-[K_{\gamma\nu}]\overline{\nabla}^\gamma R_\Sigma)+n_\nu(\overline{\nabla}_\mu a-[K_{\gamma\mu}]\overline{\nabla}^\gamma R_\Sigma)+\frac{a}{2}(K^1_{\mu\nu}+K^2_{\mu\nu}), \tag{3.31}$$

donde A es una función definida sobre la superficie Σ

$$A\equiv n^\mu n^\nu[\nabla_\mu\nabla_\nu R].$$

Al combinar las Ecs. (3.29),(3.30) y (3.31) se llega a la expresión

$$\overline{\nabla}^\beta S_{\beta\mu}=n^\gamma n^\lambda[T_{\gamma\lambda}], \tag{3.32}$$

y combinando las Ecs. (3.4), (3.31) y (3.21)se obtiene

$$(K^1_{\mu\nu}+K^2_{\mu\nu})S^{\mu\nu}=2n^\gamma n^\lambda[T_{\gamma\lambda}]. \tag{3.33}$$

Las expresiones (3.32) y (3.33) son idénticas a sus análogas en relatividad general, correspondientes a las Ecs. (2.45) y (2.46).

En resumen, y con el fin de dejarlo explícitamente claro, las condiciones de juntura para el caso general de $F'''(R)\neq 0$ toman la forma

- La continuidad de la primer forma fundamental a ambos lados de la cáscara, dada por la Ec. (2.30).
- La continuidad de la traza de la segunda forma fundamental a ambos lados de la cáscara, dada por la Ec. (3.21).
- La continuidad del escalar de curvatura a ambos lados de la cáscara, dada por la Ec. (3.22).
- El contenido de energía–momento en la cáscara, dado por la Ec. (3.25).

3.5.2. El caso cuadrático: $F'''(R) = 0$

Si se asume $F'''(R) = 0$, equivalentemente se puede trabajar con una teoría de la forma

$$F(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2, \tag{3.34}$$

donde Λ y α son constantes. En este caso particular, al ser $F'''(R) = 0$ es posible la discontinuidad del escalar de curvatura R por lo que la condición de la Ec. (3.22) ya no es estrictamente necesaria desde un punto de vista matemático. Esto acarrea cambios en las ecuaciones previamente halladas. Las ecuaciones de campo toman la forma [87, 90]

$$\kappa S_{\mu\nu} = -[K_{\mu\nu}] + 2\alpha\left([n^\gamma \nabla_\gamma R]h_{\mu\nu} - [RK_{\mu\nu}]\right), \quad n^\mu S_{\mu\nu} = 0, \tag{3.35}$$

de la Ec. (3.24) se obtiene [87]

$$[\nabla_\mu R] = a n_\mu + \overline{\nabla}[R], \qquad a = n^\mu [\nabla_\mu R], \tag{3.36}$$

y en lugar de la Ec. (3.31)

$$\begin{aligned}[\nabla_\mu \nabla_\nu R] = A n_\mu n_\nu + n_\nu \left(\overline{\nabla}_\nu a - [K_{\gamma\nu}](\nabla^\gamma R)_\Sigma) - K^\Sigma_{\gamma\nu}\overline{\nabla}^\gamma[R]\right) \\ + n_\nu \left(\overline{\nabla}_\mu a - [K_{\gamma\mu}](\nabla^\gamma R)_\Sigma) - K^\Sigma_{\gamma\mu}\overline{\nabla}^\gamma[R]\right) + aK^\Sigma_{\mu\nu} + \overline{\nabla}_\mu\overline{\nabla}_\nu[R],\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde se usaron las definiciones

$$\begin{aligned} R_\Sigma &= \frac{1}{2}(R^1 + R^2), \\ (\nabla^\gamma R)_\Sigma &= \frac{1}{2}\nabla^\gamma (R^1 + R^2)|_\Sigma, \\ K^\Sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(K^1_{\mu\nu} + K^2_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

La derivada segunda de la distribución del tensor de Ricci tiene una parte singular de la forma $\nabla_\nu([R]n_\mu \underline{\delta}^\Sigma) + [\nabla_\mu R] n_\nu \underline{\delta}^\Sigma$ que al usar cálculos de distribuciones y la Ec. (3.36) adopta la siguiente forma simétrica

$$\underline{\delta}^\Sigma\{(a - [R]K^\gamma{}_\gamma)n_\mu n_\nu \frac{1}{2}[R](K^1 + K^2) + n_\mu \overline{\nabla}_\nu[R] + n_\nu \overline{\nabla}_\mu[R]\} + \underline{\Delta}_{\mu\nu}, \tag{3.38}$$

donde $\underline{\Delta}$ es una distribución tensorial simétrica doblemente covariante cuyas componentes son definidas, sobre cualquier campo tensorial de prueba $Y^{\mu\nu}$ por

$$< \underline{\Delta}_{\mu\nu}, Y^{\mu\nu} >= -\int_\Sigma [R] n_\mu n_\nu n^\gamma \nabla_\gamma Y^{\mu\nu}. \tag{3.39}$$

Esta distribución existe sobre la hipersuperficie Σ pero como es una derivada de una delta (δ') su producto con otros elementos de la superficie no está definido a

menos que se realicen extensiones de dichos elementos fuera de Σ. Entonces la parte singular del lado izquierdo de la Ec. (3.4) es

$$-\{1+\alpha(R^1+R^2)\}[K_{\mu\nu}]\underline{\delta}^{\Sigma}+2\alpha\underline{\Omega}_{\mu\nu}$$
$$-2\alpha\underline{\delta}^{\Sigma}\{-ah_{\mu\nu}+\frac{1}{2}[R](K^1+K^2-2K^{\gamma}{}_{\gamma}n_{\mu}n_{\nu})+n_{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}[R]+n_{\nu}\overline{\nabla}_{\mu}[R]\}, \quad (3.40)$$

donde $\underline{\Omega}$ es una distribución tensorial simétrica doblemente covariante dada por

$$\underline{\Omega}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\underline{\Delta}^{\gamma}{}_{\gamma}-\underline{\Delta}_{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

con

$$<\underline{\Omega}_{\mu\nu},Y^{\mu\nu}>=-\int_{\Sigma}[R]h_{\mu\nu}n^{\gamma}\nabla_{\gamma}Y^{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

A partir de la Ec. (3.40) y usando las ecuaciones de campo (3.4) se observa que la distribución del tensor de energía–momento puede ahora tener una parte singular compuesta por varios términos

$$\underline{T}_{\mu\nu}=T^2_{\mu\nu}\underline{\theta}+T^1_{\mu\nu}(1-\underline{\theta})+S_{\mu\nu}\underline{\delta}^{\Sigma}+(\mathcal{T}_{\mu}n_{\nu}+\mathcal{T}_{\nu}n_{\mu})\underline{\delta}^{\Sigma}+\mathcal{T}n_{\mu}n_{\nu}\underline{\delta}^{\Sigma}+\mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (3.43)$$

donde

$$\kappa S_{\mu\nu} = -1+\alpha(R^1+R^2)[K_{\mu\nu}]+\alpha\{2ah_{\mu\nu}-[R](K^1_{\mu\nu}+K^2_{\mu\nu})\}, \quad (3.44)$$
$$\kappa\mathcal{T}_{\mu} = -2\alpha\overline{\nabla}_{\mu}[R], \quad (3.45)$$
$$\kappa\mathcal{T} = 2\alpha[R]K^{\gamma}{}_{\gamma}, \quad (3.46)$$
$$\kappa\mathcal{T}_{\mu\nu} = \nabla_{\gamma}\left(2\alpha[R]h_{\mu\nu}n^{\gamma}\delta^{\Sigma}\right), \quad (3.47)$$

con $n^{\mu}S_{\mu\nu}=0$, $n^{\mu}\mathcal{T}_{\mu}=0$ y δ^{Σ} la delta de Dirac sobre Σ. La Ec. (3.47) puede escribirse equivalentemente como [2]

$$\kappa\left\langle\mathcal{T}_{\mu\nu},\Psi^{\mu\nu}\right\rangle=-\int_{\Sigma}2\alpha[R]h_{\mu\nu}n^{\gamma}\nabla_{\gamma}\Psi^{\mu\nu}, \quad (3.48)$$

para cualquier campo tensorial de testeo $\Psi^{\mu\nu}$.

El término compuesto por la forma de la Ec. (3.47) llama la atención. La interpretación clásica de dicho término se puede realizar en el marco del electromagnetismo [92], considerándolo una distribución de densidad de dipolo sobre la hipersuperficie Σ.

En este caso, $\alpha=\frac{1}{2}F''(R)$ es una constante. La cáscara delgada o brana Σ va a tener un tensor de energía–momento $S_{\mu\nu}$ asociado a ella pero también va a tener la

[2] Notar que hay un error en esta formula dentro de los trabajos [87–89], donde faltan los índices en $\Psi^{\mu\nu}$. Esto fue corregido en la Ref. [90]

contribución de un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu$, una presión/tensión escalar externa $\mathcal{T}$ y una distribución de energía–momento de capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$.

La discontinuidad del tensor de energía–momento se puede calcular usando la Ec. (3.4) junto con la expresión (3.34), que llevan a

$$\kappa[T_{\mu\nu}] = (1+2\alpha R_\Sigma)[G_{\mu\nu}] + 2\alpha\{[R]R^\Sigma_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}[\nabla^\gamma\nabla_\gamma R] - [\nabla_\mu\nabla_\nu R]\}. \tag{3.49}$$

Si se usa esta ecuación en (3.37),(2.45),(2.46) y (2.41) se obtiene

$$\begin{aligned}
\kappa n^\mu n^\nu[T_{\mu\nu}] &= -(1+2\alpha R_\Sigma)K^{\gamma\lambda}_\Sigma[K_{\gamma\lambda}] + 2\alpha\{[R]R^\Sigma_{\mu\nu}n^\mu n^\nu + aK^\gamma{}_\gamma + \overline{\nabla}^\gamma\overline{\nabla}_\gamma[R]\},\\
\kappa n^\nu h^\gamma{}_\mu[T_{\gamma\nu}] &= (1+2\alpha R_\Sigma)\overline{\nabla}^\gamma[K_{\gamma\mu}]\\
&+ 2\alpha\{[R]n^\nu h^\gamma{}_\mu R_{\gamma\nu} - \overline{\nabla}_\mu a + [K_{\gamma\mu}]\overline{\nabla}^\gamma R_\Sigma + K^\Sigma_{\gamma\mu}\overline{\nabla}^\gamma[R]\}.
\end{aligned}$$

Se puede notar que cuando $\alpha = 0$ se recuperan las ecuaciones de relatividad general. Si se considera $[R] = 0$ se obtienen las mismas ecuaciones que las correspondientes al caso general con $F'''(R) \neq 0$ asumiendo (3.34).

En el caso de $F(R)$ cuadráticas, además del tensor de energía–momento estándar $S_{\mu\nu}$, la cáscara puede tener un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu$, un escalar de presión/tensión externa $\mathcal{T}$, y una contribución de energía–momento de una capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ similar a las distribuciones de dipolo clásicas [92]. Todas estas contribuciones son necesarias para asegurarse que el tensor de energía–momento tenga divergencia nula y por ende se conserve localmente [87–89]. En el caso de teorías $F(R)$ no lineales, la condición de pegado sin una cáscara son más demandantes que en relatividad general: además de $[h_{\mu\nu}] = 0$ y $[K_{\mu\nu}] = 0$, las relaciones $[R] = 0$ y $[\nabla_\gamma R] = 0$ son necesarias [87].

Resumiendo, las condiciones de juntura para el caso particular de $F'''(R) = 0$ son

- La continuidad de la primer forma fundamental a ambos lados de la cáscara dada por la Ec. (2.30).

- La continuidad de la traza del la segunda forma fundamental a ambos lados de la cáscara dada por la Ec. (3.21).

- El contenido de materia en la cáscara, determinado por las Ec. (3.44), y sus contribuciones adicionales como un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu$ dado por la Ec. (3.45), un escalar de presión/tensión externa $\mathcal{T}$ dado por la Ec. (3.46) y una contribución de "delta prima" de Dirac de capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ determinada por la Ec. (3.47).

3.6. El caso sin cáscaras delgadas

Si se considera el caso en el que el pegado de regiones no se realiza sobre una capa de materia o brana [88], de la Ec. (3.25) o de las Ecs. (3.44),(3.45),(3.46) y (3.47) si $F'''(R) = 0$, se sabe que esta situación particular debe cumplirse la Ec. (3.22) además de

$$[K_{\mu\nu}] = 0, \tag{3.50}$$

y

$$n^{\gamma}[R_{\mu\gamma}] = 0, \tag{3.51}$$

a partir de las cuales, se concluye que

$$[\nabla_{\mu} R] = 0. \tag{3.52}$$

Esto explicita la necesidad inevitable de pedir las condiciones de relatividad general para el pegado de superficies en teorías $F(R)$, es decir, que la primer y la segunda forma fundamental de ambas regiones coincidan sobre la superficie Σ, pero a diferencia de relatividad general, dichas condiciones no son suficientes desde un punto de vista general, ya que tienen que ser complementadas con las condiciones de las Ecs. (3.22) y (3.52). Estas dos condiciones establecen que el escalar de curvatura R, como función, es diferenciable en cualquier parte de la variedad, incluso sobre la superficie Σ. De las Ecs. (3.32) y (3.33) se deduce

$$n^{\mu}[T_{\mu\nu}] = 0, \tag{3.53}$$

condición que resulta ser igual a la de relatividad general, si se asegura la continuidad de las componentes normales del tensor de energía–momento sobre la superficie Σ.

Capítulo 4

Agujeros de gusano con carga en gravedad $F(R)$

En este capítulo se presenta la construcción y el análisis de estabilidad de agujeros de gusano con carga en teorías de gravedad $F(R)$. Los mismos se construyen mediante el cortado y pegado de dos soluciones idénticas, utilizando las condiciones de juntura descritas en la Sec. 3.5. La superficie de unión corresponde a la garganta, en la cual hay una cáscara delgada de materia. El estudio se focaliza en una variedad que tiene el mismo escalar de curvatura constante R_0 en las dos regiones unidas por la garganta.

4.1. Construcción de los agujeros de gusano

Se comienza de una geometría con simetría esférica definida por la métrica dada por la Ec. (3.17). Se adopta esta métrica en la construcción de agujeros de gusano y se utiliza el formalismo de cáscaras delgadas en gravedad $F(R)$ explicado en la Sec. 3.5. Se toma un radio a mayor que el radio del horizonte r_h evitando de esta forma las singularidades y horizontes que pudieran estar presentes en la geometría original. Teniendo en cuenta estos cuidados se realizan dos copias idénticas de una región con $r \geq a$

$$\mathcal{M}_{1,2} = \{X^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)/r \geq a\}, \tag{4.1}$$

ambas copias se pegan sobre la hiper-superficie Σ tal que

$$\Sigma = \{X^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)/G(r) = r - a = 0\}. \tag{4.2}$$

De este modo se crea una nueva variedad diferencial $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ que es geodésicamente completa. Dado un tiempo fijo t, de la Ec. (3.17) se ve fácilmente que el área de una superficie de radio r vale $4\pi r^2$, de modo que la condición (4.1) determina que

el área sea mínima para $r = a$. O sea que esta construcción cumple con la condición de apertura de la garganta [3, 4, 26, 34], es decir, el área de la garganta es mínima. Por lo tanto, la variedad representa un agujero de gusano que conecta dos regiones del espacio–tiempo a través de la garganta de radio a. Se puede definir una nueva coordenada radial $l = \mp \int_a^r \sqrt{1/A(r)}dr$ sobre esta variedad $\mathcal{M}$, que representa la distancia propia desde la garganta ubicada en $l = 0$. Los signos (−) y (+) corresponden a las diferentes regiones a los lados de la garganta $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, respectivamente. Como se estudió en los capítulos anteriores, se definen las normales unitarias sobre Σ en $\mathcal{M}$ como $n_\gamma^{1,2}$, la primer forma fundamental por $h_{\mu\nu}$, la segunda forma fundamental (curvatura extrínseca) por $K_{\mu\nu}$, y el salto a través de la superficie de juntura por la Ec. (2.29).

Además de la continuidad de la primer forma fundamental $h_{\mu\nu}$ sobre la cáscara, en las teorías de gravedad $F(R)$ existe una condición adicional que debe cumplirse, la cual es la continuidad de la traza de la segunda forma fundamental expresada por la Ec. (3.21). Como se explicó en la Sec. 3.5, si $F'''(R) \neq 0$ se requiere una condición adicional: la continuidad de R sobre la superficie Σ, es decir la Ec. (3.22). Sin embargo, en el caso cuadrático $F(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2$, se sabe que $F'''(R) = 0$ por lo que se permite la discontinuidad de R. En la presente construcción, la condición $[R] = 0$ está automáticamente garantizada debido a que se trabaja con geometrías iguales a ambos lados de la garganta. Las ecuaciones de campo sobre la superficie Σ en el caso $F'''(R) \neq 0$ están dadas por la Ec. (3.25). En el caso de $F(R)$ cuadrática, las ecuaciones de campo están dadas por la Ec. (3.35), pero además del tensor de energía–momento estándar $S_{\mu\nu}$, la cáscara tiene un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu$, un escalar de presión/tensión externa $\mathcal{T}$, y una distribución de tipo "delta prima de Dirac" de capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ determinadas por las Ecs. (3.45), (3.46) y (3.47), respectivamente. Todas estas contribuciones son necesarias para obtener un tensor de energía–momento con divergencia nula y de esta forma garantizar la conservación de la energía localmente. Como estas contribuciones son proporcionales a $[R]$,todas resultan ser cero para la presente construcción que trabaja con escalares de curvaturas constantes e iguales a ambos lados de Σ. Es más, para $[R] = 0$ y sabiendo que $F'(R) = 1 + 2\alpha R$ y $F''(R) = 2\alpha$, es fácil ver que la Ec. (3.35) se reduce de (3.25). El segundo término en la parte derecha de la igualdad (3.25) resulta ser cero porque este formalismo se va a aplicar a geometrías donde $R = R_0$ es una constante. De esta forma, para el caso particular de $[R] = 0$ y $R = R_0$ se ve que las Ecs. (3.25) y (3.35) coinciden, obteniéndose para ambas

$$\kappa S_{\mu\nu} = -F'(R_0)[K_{\mu\nu}], \qquad n^\mu S_{\mu\nu} = 0. \tag{4.3}$$

Sobre la superficie Σ se utilizan las coordenadas $\xi^i = (\tau, \theta, \varphi)$, con τ el tiempo propio sobre la cáscara. Para hacer el análisis de estabilidad se permite al radio de la garganta sea una función del tiempo propio: $a(\tau)$. Para la métrica (3.17) las

normales unitarias ($n^\gamma n_\gamma = 1$) se calculan usando la Ec. (2.32) y toman la siguiente forma explícita

$$n_\gamma^{1,2} = \pm\left(-\dot{a}, \frac{\sqrt{A(a)+\dot{a}^2}}{A(a)}, 0, 0\right), \tag{4.4}$$

donde el punto sobre el radio a representa la derivada respecto de τ, el signo (+) corresponde a la región 2 y el signo (–) a la 1. De esta forma, la normal a la superficie Σ en la variedad global $\mathcal{M}$ apunta de la zona 1 a la 2.

Si se adopta la base ortonormal $\{e_{\hat{\tau}} = e_\tau, e_{\hat{\theta}} = a^{-1}e_\theta, e_{\hat{\varphi}} = (a\sin\theta)^{-1}e_\varphi\}$ sobre la cáscara, es fácil ver que la primer forma fundamental vale $h_{\hat{i}\hat{j}}^{1,2} = \mathrm{diag}(-1,1,1)$, mientras que la segunda forma fundamental tiene componentes

$$K_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^{1,2} = K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{1,2} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{A(a)+\dot{a}^2}, \tag{4.5}$$

y

$$K_{\hat{\tau}\hat{\tau}}^{1,2} = \mp\frac{A'(a)+2\ddot{a}}{2\sqrt{A(a)+\dot{a}^2}}; \tag{4.6}$$

la prima representa aquí la derivada respecto de la coordenada radial r. Con la ayuda de las Ecs. (4.5) y (4.6), la condición $[K^{\hat{i}}{}_{\hat{i}}] = 0$ se puede escribir como

$$\ddot{a} = -\frac{A'(a)}{2} - \frac{2}{a}\left(A(a)+\dot{a}^2\right). \tag{4.7}$$

Al reemplazar el tensor de energía–momento superficial $S_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(\sigma, p_{\hat{\theta}}, p_{\hat{\varphi}})$, donde σ es la densidad de energía superficial y $p_{\hat{\theta}}$ y $p_{\hat{\varphi}}$ son las presiones transversales, en la Ec. (4.3) se encuentra que

$$\sigma = \frac{F'(R_0)}{\kappa\sqrt{A(a)+\dot{a}^2}}\left(2\ddot{a} + A'(a)\right), \tag{4.8}$$

y

$$p = \frac{-2F'(R_0)}{\kappa a}\sqrt{A(a)+\dot{a}^2}, \tag{4.9}$$

donde $p = p_{\hat{\theta}} = p_{\hat{\varphi}}$. Al reemplazar la Ec. (4.7) en la Ec. (4.8) se obtiene

$$\sigma = \frac{-4F'(R_0)}{\kappa a}\sqrt{A(a)+\dot{a}^2}, \tag{4.10}$$

por lo tanto si $F'(R_0) > 0$ se ve que $\sigma < 0$, lo cual indica que las condiciones de energía no se satisfacen, es decir que la materia en la garganta es exótica. En este caso la presión también es negativa, por lo cual resulta ser una tensión. Como se mencionó en la Sec. 3.2, la desigualdad $F'(R) > 0$ tiene una interpretación importante en las teorías de gravedad $F(R)$ (ver [64] y sus referencias), porque implica que

la constante efectiva de Newton $G_{\rm ef} = G/F'(R)$ es positiva. Desde un punto de vista cuántico, $F'(R) > 0$ evita que el gravitón sea un fantasma. O sea que las condiciones de energía se pueden satisfacer sólo a costa de la presencia de fantasmas. Se puede encontrar una discusión interesante del tema en el caso de agujeros de gusano en la Ref. [74].

Es importante notar que las Ecs. (4.9) y (4.10) fuerzan una ecuación de estado de la forma

$$\sigma - 2p = 0. \tag{4.11}$$

Al usar esta ecuación de estado en combinación con las Ecs. (4.7), (4.9) y (4.10) es fácil verificar la ecuación de conservación

$$\frac{d(\mathcal{A}\sigma)}{d\tau} + p\frac{d\mathcal{A}}{d\tau} = 0, \tag{4.12}$$

donde $\mathcal{A} = 4\pi a^2$, el primer término representa el cambio en la energía interna de la garganta y el segundo término representa el trabajo hecho por las fuerzas internas de la garganta.

4.2. Estabilidad de las configuraciones estáticas

En el caso de agujeros de gusano con el radio de la garganta a_0 fijo, es decir, para configuraciones estáticas, la condición dada por la Ec. (4.7) toma la forma

$$A'(a_0) = -4\frac{A(a_0)}{a_0}, \tag{4.13}$$

la cual puede reescribirse como

$$a_0 A'(a_0) + 4A(a_0) = 0. \tag{4.14}$$

La densidad de energía y la presión en el caso estático resultan, respectivamente,

$$\sigma_0 = \frac{F'(R_0)}{\kappa}\frac{A'(a_0)}{\sqrt{A(a_0)}} = \frac{-4F'(R_0)}{\kappa a_0}\sqrt{A(a_0)} \tag{4.15}$$

y

$$p_0 = \frac{-2F'(R_0)}{\kappa a_0}\sqrt{A(a_0)}. \tag{4.16}$$

Para el estudio de la estabilidad de las soluciones estáticas ante perturbaciones que preservan la simetría, se extiene el método desarrollado para relatividad general [26, 34] a teorías de gravedad $F(R)$. Si se usa que $\ddot{a} = (1/2)d(\dot{a}^2)/da$ y se define $u = \dot{a}^2$, la Ec. (4.7) toma la siguiente forma

$$u'(a) + \frac{4}{a}u = -A'(a) - \frac{4}{a}A(a). \tag{4.17}$$

Al integrar la Ec. (4.17) se puede determinar la dinámica de la garganta por medio de la ecuación

$$\dot{a}^2 = -V(a), \tag{4.18}$$

donde

$$V(a) = A(a) - \frac{a_0^4}{a^4} A(a_0) \tag{4.19}$$

se puede interpretar como un potencial efectivo. El mismo resultado puede ser hallado si se introduce la ecuación de estado (4.11) en la ecuación de conservación (4.12) y se integra para obtener $\sigma(a) = \sigma(a_0)a_0^3/a^3$; luego se reemplaza $\sigma(a)$ en la Ec. (4.10) para finalmente obtener $\dot{a}^2$ como una función de a. Es fácil corroborar que $V(a_0) = 0$ y, con la ayuda de la Ec. (4.13), que $V'(a_0) = 0$. La derivada segunda del potencial, evaluado en a_0 tiene la forma

$$V''(a_0) = A''(a_0) - \frac{20}{a_0^2} A(a_0). \tag{4.20}$$

la cual determina que la configuración con radio a_0 es estable bajo perturbaciones radiales sí y sólo sí $V''(a_0) > 0$. Para más detalle respecto del criterio de estabilidad usado, ver el Apéndice B.

4.3. Agujeros de gusano con carga

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación del formalismo introducido en las secciones anteriores. Para construir los agujeros de gusano con carga se utiliza la solución introducida en la Sec. 3.4, de modo que las funciones que definen las métricas a ambos lados de la garganta vienen dadas por la Ec. (3.19). Como se ha comentado en la Sec. 3.4, esta geometría es singular en $r = 0$, la posición de los horizontes, determinada por los ceros de $A(r)$ están dados por las soluciones reales positivas de un polinomio de grado cuatro si $R_0 \neq 0$, o por una función cuadrática si $R_0 = 0$. En el caso de $R_0 > 0$, para valores pequeños de $|Q|$ existen tres horizontes: uno interno r_i, el de eventos r_h y el cosmológico r_c. Cuando la carga es lo suficientemente grande, para un cierto valor $|Q| = Q_c$, el horizonte interno y el horizonte de eventos se fusionan. Para $|Q| > Q_c$ sólo existe una singularidad desnuda en $r = 0$. Cuando $R_0 \leq 0$, para pequeños valores de $|Q|$ hay dos horizontes, uno interno r_i y el de eventos r_h; cuando la carga es $|Q| = Q_c$, el horizonte interno y el de eventos se fusionan en uno. Por último, si $|Q| > Q_c$ no hay horizontes y sólo se encuentra una singularidad desnuda. Es importante recordar que la carga crítica Q_c es el valor de carga para el cual el horizonte interno y el de eventos se fusionan (ver Fig. 3.1).

En la construcción de los agujeros de gusano, al radio a de la garganta se lo elige lo suficientemente grande como para evitar la presencia de horizontes de evento y

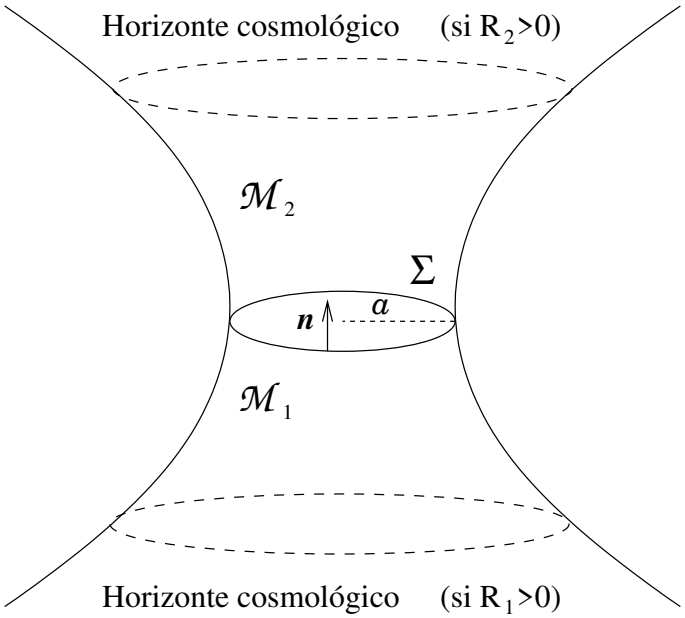

Figura 4.1: Esquema de la construcción de los agujeros de gusano. La variedad $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ carece de horizontes de eventos y de singularidades. La normal unitaria $\mathbf{n}$ a la superficie Σ correspondiente a la garganta apunta de $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$. En Σ hay una cáscara delgada de materia. En este capítulo se toma $R_1 = R_2 = R_0$. En el próximo se estudiará el caso de $F(R)$ cuadrática con $R_1 \neq R_2$.

singularidades, y en el caso de existir un horizonte cosmológico, menor a éste. La Fig. 4.1 muestra un diagrama esquemático de la construcción. En el caso estático, el radio de la garganta a_0 debe satisfacer la Ec. (4.14), que al reescribirla con la correspondiente función métrica $A(r)$ dada por la Ec. (3.19) toma la siguiente forma

$$\frac{R_0}{2}a_0^4 - 4a_0^2 + 6Ma_0 - \frac{2Q^2}{F'(R_0)} = 0, \tag{4.21}$$

que determina las posibles soluciones estáticas para un conjunto de parámetros dados. De las Ecs.(4.15) y (4.16), la densidad de energía y la presión reescritas con dicha función métrica son

$$\sigma_0 = \frac{-4F'(R_0)}{\kappa a_0}\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0} + \frac{Q^2}{F'(R_0)a_0^2} - \frac{R_0 a_0^2}{12}} \tag{4.22}$$

y

$$p_0 = \frac{-2F'(R_0)}{\kappa a_0}\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0} + \frac{Q^2}{F'(R_0)a_0^2} - \frac{R_0 a_0^2}{12}}. \tag{4.23}$$

Si se desea que el término de la métrica correspondiente a la carga tenga el mismo signo que el que tiene el término análogo para el caso de relatividad general, es decir $F'(R_0) > 0$, entonces se requiere la presencia de materia exótica en la garganta, ya que la densidad de energía y la presión violan las condiciones de energía descritas en la Sec. 2.5. Es importante recordar que la desigualdad $F'(R_0) > 0$ implica una constante gravitatoria efectiva positiva y la ausencia de fantasmas, por lo que en lo que sigue se asume dicha desigualdad.

Para el análisis de estabilidad, usando la Ec. (4.19), el potencial resulta ser

$$V(a) = 1 - \frac{2M}{a} + \frac{Q^2}{F'(R_0)a^2} - \frac{a^2 R_0}{12} - \frac{a_0^4}{a^4}\left(1 - \frac{2M}{a_0} + \frac{Q^2}{F'(R_0)a_0^2} - \frac{a_0^2 R_0}{12}\right), \quad (4.24)$$

el cual verifica $V(a_0) = 0$ y $V'(a_0) = 0$, y se obtiene que

$$V''(a_0) = \frac{3}{2}R_0 - \frac{20}{a_0^2} + \frac{36M}{a_0^3} - \frac{14Q^2}{F'(R_0)a_0^4}. \quad (4.25)$$

Para determinar la estabilidad de una solución estática ante perturbaciones radiales hay que analizar el signo de la derivada segunda del potencial, para que sea estable es necesario que se cumpla la condición $V''(a_0) > 0$.

Los resultados se presentan gráficamente en la Fig. 4.2, para la cual se han elegido las figuras más representativas. Las soluciones estables se muestran con líneas de trazo continuo, mientras que las inestables con líneas punteadas. Las regiones sombreadas en color gris no tienen significado físico, ya que corresponden a las zonas dentro del horizonte de eventos o del cosmológico de la variedad original y que han sido removidos en la construcción del agujero de gusano realizada. Los resultados presentan importantes cambios alrededor del valor de Q_c/M, donde Q_c es la carga crítica, correspondiente al valor de carga a partir de la cual el horizonte interno y el de eventos de la variedad original, desaparecen. Las soluciones tienen un comportamiento fuertemente dependiente de los valores de R_0M^2. Sin embargo, los diferentes valores de $F'(R_0)$ afectan los resultados sólo en la forma de "carga efectiva" $Q/\sqrt{F'(R_0)}$. Dependiendo del signo de R_0 se obtiene que

- Para $R_0 \leq 0$, no hay soluciones estáticas para $|Q| \leq Q_c$. Cuando la carga va creciendo, es decir que $|Q| > Q_c$, dos soluciones estáticas aparecen: una estable y otra inestable. Luego, dichas soluciones se fusionan en una, y finalmente desaparecen para valores de carga mayores.

- Para $R_0 > 0$, cuando $|Q| > Q_c$ existen dos soluciones estáticas (una estable y otra inestable) con comportamiento similar al descrito para el caso $R_0 < 0$, pero también existe una tercera solución para un valor mayor de a_0/M que se encuentra siempre presente. Esta solución es inestable para todo valor de carga.

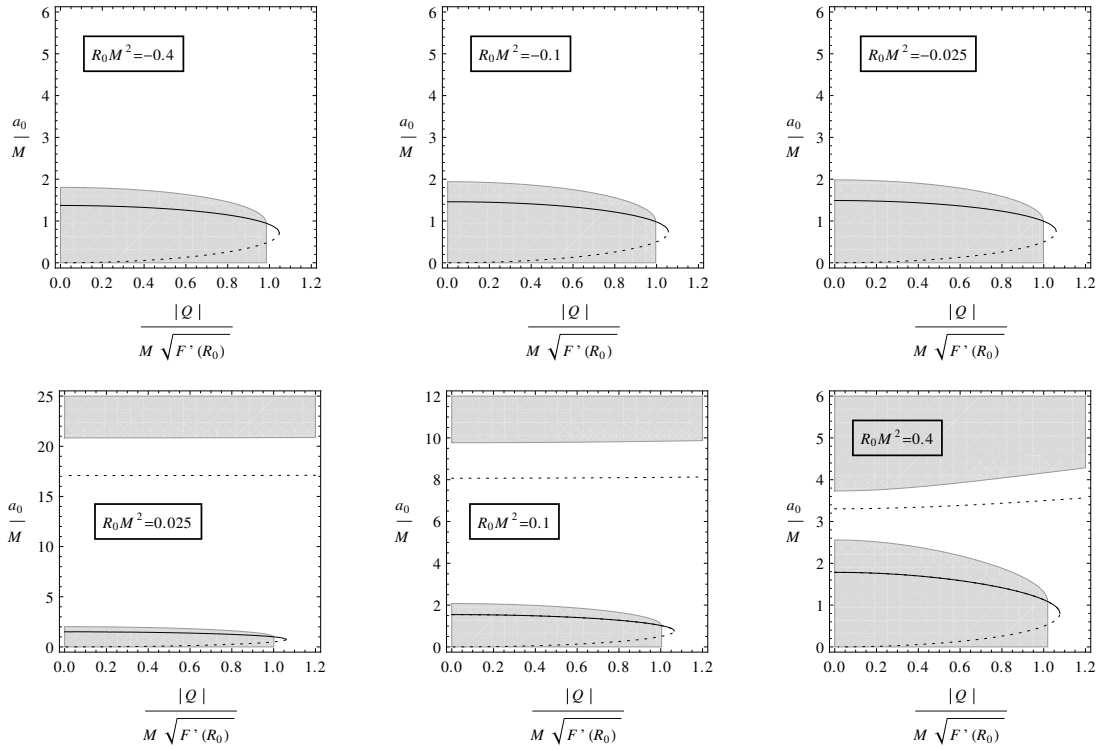

Figura 4.2: La estabilidad de los agujeros de gusano en teorías de $F(R)$ para diferentes valores del escalar de curvatura R_0; M y Q son la masa ADM y la carga, respectivamente. Las curvas de trazo continuo representan las soluciones estáticas estables, con a_0 el radio de la garganta; las lineas punteadas representan las soluciones inestables. Las zonas en gris no son físicamente admisibles. Notar que los gráficos tienen diferentes escalas en el eje vertical.

En cualquier caso, las soluciones estáticas estables se pueden obtener para un determinado conjunto de valores de masa y carga para una dada función $F(R)$ y un escalar de curvatura R_0 constante.

4.4. Discusión

Se construyó una clase de agujeros de gusano esféricamente simétricos usando el formalismo de cáscaras delgadas en teorías $F(R)$; la superficie que une las dos soluciones exactamente iguales, con escalar de curvatura R_0 constante, corresponde a la garganta. Se mostró que la materia en la garganta debe satisfacer la ecuación de estado $\sigma - 2p = 0$. La condición $F'(R_0) > 0$, requerida para obtener una constante gravitatoria efectiva positiva y un gravitón que no sea fantasma, fuerza la necesidad

de tener materia exótica en la garganta, ya que la desigualdad $\sigma < 0$ viola las condiciones de energía descritas en la Sec. 2.5. También se obtuvo la condición para garantizar la estabilidad de las configuraciones estáticas ante perturbaciones que preservan la simetría. En particular, se aplicó el formalismo a agujeros de gusano con masa M y carga Q. Como se asumió que $F'(R_0) > 0$, el término asociado a la carga tiene el mismo signo que el término análogo en la solución de Reissner-Nordström de la relatividad general. Se encontró que es posible obtener soluciones estáticas estables para valores apropiados de los parámetros, ya sea para el caso de R_0 positivo o negativo. Para R_0 positivo, siempre se encuentra presente una solución estática que es inestable para cualquier valor de carga. Para valores grandes de $|Q|/(M\sqrt{F'(R_0)})$ se encuentran otras dos soluciones estáticas en un rango pequeño de carga, una de ellas es estable mientras que la otra es inestable. Para R_0 negativo y valores grandes de $|Q|/(M\sqrt{F'(R_0)})$ se obtienen dos soluciones estáticas en un rango pequeño de carga, una de ellas es estable y la otra es inestable. El aspecto cualitativo de los resultados no depende de la forma particular de la función $F(R)$ con la que se trabaja; cada teoría se manifiesta a través de la constante $F'(R_0)$ en la forma de una carga efectiva $Q^2/F'(R_0)$.

Capítulo 5

Agujeros de gusano con una capa doble en gravedad $F(R)$

En el presente capítulo se muestra el desarrollo de la construcción de agujeros de gusano con una capa doble en teorías de gravedad $F(R)$ cuadráticas y el análisis de estabilidad de sus soluciones estáticas, con diferentes escalares de curvatura constantes $R_1 \neq R_2$ a ambos lados de la garganta. En particular, se analizan en detalle configuraciones con carga.

5.1. Construcción

Para la construcción de los agujeros de gusano a estudiar se comienza con dos geometrías esféricamente simétricas, dadas por

$$ds^2_{1,2} = -A_{1,2}(r_{1,2})dt^2_{1,2} + A_{1,2}(r_{1,2})^{-1}dr^2_{1,2} + r^2_{1,2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{5.1}$$

donde $A_{1,2}(r_{1,2})$ son funciones que dependen sólo de las coordenadas radiales $r_{1,2}$ en cada una de ellas, con $r_{1,2} \geq 0$, $0 \leq \theta < \pi$, y $0 \leq \varphi < 2\pi$. En ambos espacio–tiempos se eligen las correspondientes hipersuperficies esféricamente simétricas

$$\Sigma_{1,2} = \{X^\alpha_{1,2} = (t_{1,2}, r_{1,2}, \theta, \varphi)/G_{1,2}(r_{1,2}) = r_{1,2} - a_{1,2} = 0\}. \tag{5.2}$$

Luego se seleccionan dos variedades $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, definidas como

$$\mathcal{M}_{1,2} = \{X^\alpha_{1,2} = (t_{1,2}, r_{1,2}, \theta, \varphi)/r_{1,2} \geq a_{1,2}\}. \tag{5.3}$$

Matemáticamente se construye una nueva variedad $\mathcal{M}$ como la unión de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ identificando cada punto de Σ_1 con su correspondiente en Σ_2. Resulta natural entonces la adopción de las mismas coordenadas angulares en todo el espacio–tiempo $\mathcal{M}$. Las coordenadas intrínsecas (ahora únicas tras la identificación) sobre la superficie

Σ son $\xi^i = (\tau, \theta, \varphi)$, con τ el tiempo propio sobre Σ. La métrica inducida de ambos lados de la hipersuperficie de juntura Σ resulta ser

$$-A_{1,2}(a)\left(\frac{dt_{1,2}}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 + a_{1,2}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = -d\tau^2 + a_{1,2}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

por lo que ahora la igualdad de la primer forma fundamental a ambos lados de la superficie (es decir, la Ec. (2.30)) implica, por un lado

$$a_1 = a_2 := a \tag{5.4}$$

y por el otro lado (fijando los signos al elegir que las coordenadas $t_{1,2}$ y τ siempre se dirijan hacia el futuro)

$$\sqrt{A_1(a)}\,\frac{dt_1}{d\tau} = \sqrt{A_2(a)}\,\frac{dt_2}{d\tau}. \tag{5.5}$$

Al igual que en el Cap. 4, la condición de apertura (*flare-out*) se satisface porque el área $4\pi r_{1,2}^2$ es mínima cuando $r_{1,2} = a$; por lo tanto la variedad $\mathcal{M}$ representa un agujero de gusano con dos regiones conectadas a través de una garganta de radio a. Del mismo modo que en el Cap. 4 se puede definir una coordenada radial global en $\mathcal{M}$ usando la distancia radial propia: $\ell = \mp \int_a^r \sqrt{1/A_{1,2}(r_{1,2})}dr_{1,2}$, donde el signo $(-)$ corresponde a $\mathcal{M}_1$ y el signo $(+)$ a $\mathcal{M}_2$, y la garganta se ubica en $\ell = 0$. El salto a través de la cáscara se define acorde a la Ec. (2.29), las normales unitarias de Σ en $\mathcal{M}$ por $n_\gamma^{1,2}$ dadas por la Ec. (2.32), la primer forma fundamental como $h_{\mu\nu}$ descrita por la Ec. (2.31), y la segunda forma fundamental (curvatura extrínseca) por $K_{\mu\nu}$ usando la Ec. (2.34).

Como se estudió en el Cap. 3, además de la continuidad de la primer forma fundamental sobre la cáscara, $[h_{\mu\nu}] = 0$, debe cumplirse condición es la continuidad de la traza de la segunda forma fundamental, $[K^\mu{}_\mu] = 0$. Si $F'''(R) \neq 0$, la continuidad de R sobre la cáscara, $[R] = 0$, también es requerida como tercera condición. Sin embargo, en la teoría cuadrática, donde $F(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2$ es posible la discontinuidad de R sobre Σ. En la presente construcción, se toman dos métricas con diferentes valores constantes de R a cada lado de la garganta, por lo tanto $[R] \neq 0$. Las ecuaciones de campo sobre la cáscara en el caso cuadrático resultan ser las que se muestran en la Ec. (3.35), donde $S_{\mu\nu}$ representa la parte singular del tensor de energía–momento sobre la cáscara. Además de las ecuaciones de campo, la cáscara tiene un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu$ dado por la Ec. (3.45), una presión/tensión escalar externa $\mathcal{T}$ por la Ec. (3.46), y una distribución tensorial simétrica doblemente covariante $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ determinada por las Ecs. (3.47) o (3.48). Esta contribución de tipo "delta prima" de Dirac tiene similitud con las distribuciones de dipolo clásicas en el electromagnetismo. La distribución "dipolar" $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ tiene una fuerza dada por

$$\kappa\mathcal{P}_{\mu\nu} = 2\alpha[R]h_{\mu\nu}, \tag{5.6}$$

que satisface $\mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}_{\nu\mu}$ y $n^\mu \mathcal{P}_{\nu\mu} = 0$. Todas estas contribuciones son necesarias para hacer que el tensor completo de energía–momento tenga divergencia nula, y por ende se conserve localmente.

Continuando con el procedimiento, se eligen escalares de curvatura constantes, con valores diferentes para cada región que conforma $\mathcal{M}$, es decir $R_1 \neq R_2$, y se trabaja con la Ec. (3.35), que termina reduciéndose a

$$\kappa S_{\mu\nu} = -[K_{\mu\nu}] - 2\alpha[RK_{\mu\nu}]. \tag{5.7}$$

De manera análoga a lo hecho en el Cap. 4, se permite que el radio de la garganta sea una función del tiempo propio $a(\tau)$. En el caso particular de la métrica (3.17) las normales unitarias ($n^\gamma n_\gamma = 1$) toman la forma

$$n_\gamma^{1,2} = \pm\left(-\dot{a}, \frac{\sqrt{A_{1,2}(a) + \dot{a}^2}}{A_{1,2}(a)}, 0, 0\right), \tag{5.8}$$

donde el punto representa la derivada respecto de τ, el signo (+) a $\mathcal{M}_1$ y el (–) a $\mathcal{M}_2$. Se toma una base ortonormal, $\{e_{\hat{\tau}} = e_\tau, e_{\hat{\theta}} = a^{-1}e_\theta, e_{\hat{\varphi}} = (a\sin\theta)^{-1}e_\varphi\}$ en la cáscara. La primer forma fundamental resulta ser entonces $h_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}^{\pm} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$, y las componentes de la segunda forma fundamental

$$K_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^{1,2} = K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{1,2} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{A_{1,2}(a) + \dot{a}^2} \tag{5.9}$$

y

$$K_{\hat{\tau}\hat{\tau}}^{1,2} = \mp\left(\frac{\ddot{a}}{\sqrt{A_{1,2}(a) + \dot{a}^2}} + \frac{1}{2}\frac{A'_{1,2}(a)}{\sqrt{A_{1,2}(a) + \dot{a}^2}}\right), \tag{5.10}$$

donde la prima sobre $A(r)$ representa la derivada respecto de r. Utilizando las Ecs. (5.9) y (5.10), la condición $[K^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\imath}}] = 0$ se puede escribir como

$$\frac{2a\ddot{a} + aA'_1(a) + 4\left(A_1(a) + \dot{a}^2\right)}{\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}} + \frac{2a\ddot{a} + aA'_2(a) + 4\left(A_2(a) + \dot{a}^2\right)}{\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}} = 0. \tag{5.11}$$

Reemplazando el tensor de energía–momento $S_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = \mathrm{diag}(\sigma, p_{\hat{\theta}}, p_{\hat{\varphi}})$, donde σ es la densidad de energía superficial y $p_{\hat{\theta}}$ y $p_{\hat{\varphi}}$ son las presiones transversales, en la Ec. (5.7) se obtiene

$$\sigma = \frac{2\ddot{a} + A'_1(a)}{2\kappa\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}}\left(1 + 2\alpha R_1\right) + \frac{2\ddot{a} + A'_2(a)}{2\kappa\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}}\left(1 + 2\alpha R_2\right) \tag{5.12}$$

y

$$p = -\frac{\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}}{\kappa a}\left(1 + 2\alpha R_1\right) - \frac{\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}}{\kappa a}\left(1 + 2\alpha R_2\right), \tag{5.13}$$

donde $p = p_{\hat{\theta}} = p_{\hat{\varphi}}$. De la Ec. (3.45) se ve que $\mathcal{T}_{\mu} = 0$, debido a que se está trabajando con escalares de curvatura constantes. El escalar de tensión/presión externo $\mathcal{T}$ está dado por

$$\mathcal{T} = \frac{2\alpha[R]}{\kappa\sqrt{A_1(a)+\dot{a}^2}}\left(\ddot{a} + \frac{A_1'(a)}{2} + \frac{2}{a}\left(A_1(a)+\dot{a}^2\right)\right), \tag{5.14}$$

el cual usando la Ec. (5.11) se puede reescribir de la forma

$$\mathcal{T} = \frac{2a\ddot{a} + aA_1' + 4\left(A_1(a)+\dot{a}^2\right)}{\kappa a\sqrt{A_1(a)+\dot{a}^2}}\alpha R_1 + \frac{2a\ddot{a} + aA_2' + 4\left(A_2(a)+\dot{a}^2\right)}{\kappa a\sqrt{A_2(a)+\dot{a}^2}}\alpha R_2. \tag{5.15}$$

Es fácil ver que las Ecs. (5.12), (5.13), y (5.15) establecen una ecuación de estado que relaciona σ, p, y $\mathcal{T}$ de la siguiente manera

$$\sigma - 2p = \mathcal{T}. \tag{5.16}$$

Tomando la derivada de la Ec. (5.16) y usando $\dot{p} = -(\dot{a}/a)(\sigma + p)$, se puede tener una versión generalizada de la ecuación de continuidad

$$\dot{\sigma} + \frac{2\dot{a}}{a}(\sigma + p) = \dot{\mathcal{T}}; \tag{5.17}$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{d\tau}(\mathcal{A}\sigma) + p\frac{d\mathcal{A}}{d\tau} = \mathcal{A}\frac{d\mathcal{T}}{d\tau}, \tag{5.18}$$

donde $\mathcal{A} = 4\pi a^2$ es el área de la cáscara. El primer término del lado izquierdo representa el cambio de la energía total interna de la garganta mientras que en el segundo término se puede interpretar como el trabajo realizado por la presión interna de la garganta. El lado derecho de la ecuación representa el flujo externo. La distribución de capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, obtenida de la Ec. (3.48), debe satisfacer

$$\langle \mathcal{T}_{\mu\nu}, \Psi^{\mu\nu}\rangle = -\int_{\Sigma} \mathcal{P}_{\mu\nu}\left(n^t\nabla_t\Psi^{\mu\nu} + n^r\nabla_r\Psi^{\mu\nu}\right), \tag{5.19}$$

para todo tensor de prueba $\Psi^{\mu\nu}$. La fuerza de la capa doble, en la base ortonormal, tiene componentes determinadas por

$$-\mathcal{P}_{\tau\tau} = \mathcal{P}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \mathcal{P}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{2\alpha[R]}{\kappa}. \tag{5.20}$$

Es importante notar que estas componentes sólo dependen de α y $[R]$, por lo que la dependencia de $\mathcal{T}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}$ respecto de la forma particular de la métrica está siempre dada a través de la normal unitaria de su derivada covariante.

5.2. Estabilidad de las configuraciones estáticas

La condición que resulta de la Ec. (5.11) para agujeros de gusano estáticos se reduce a

$$\frac{a_0 A_1'(a_0) + 4A_1(a_0)}{\sqrt{A_1(a_0)}} + \frac{a_0 A_2'(a_0) + 4A_2(a_0)}{\sqrt{A_2(a_0)}} = 0, \tag{5.21}$$

donde a_0 es el radio fijo que corresponde a la garganta del agujero de gusano. La densidad de energía dada por la Ec. (5.12), la presión dada por la Ec. (5.13) y la tensión/presión externa determinada por la Ec. (5.14), para el caso estático toman respectivamente las siguientes formas

$$\sigma_0 = \frac{A_1'(a_0)}{2\kappa\sqrt{A_1(a_0)}}\left(1 + 2\alpha R_1\right) + \frac{A_2'(a_0)}{2\kappa\sqrt{A_2(a_0)}}\left(1 + 2\alpha R_2\right), \tag{5.22}$$

$$p_0 = -\frac{\sqrt{A_1(a_0)}}{\kappa a_0}\left(1 + 2\alpha R_1\right) - \frac{\sqrt{A_2(a_0)}}{\kappa a_0}\left(1 + 2\alpha R_2\right) \tag{5.23}$$

y

$$\mathcal{T}_0 = \frac{a_0 A_1'(a_0) + 4A_1(a_0)}{\kappa a_0\sqrt{A_1(a_0)}}\alpha R_1 + \frac{a_0 A_2'(a_0) + 4A_2(a_0)}{\kappa a_0\sqrt{A_2(a_0)}}\alpha R_2. \tag{5.24}$$

Luego la ecuación de estado resulta ser $\sigma_0 - 2p_0 = \mathcal{T}_0$. La distribución de capa doble para el caso estático, usando la Ec.(5.19), debe satisfacer

$$\langle \mathcal{T}_{\mu\nu}, \Psi^{\mu\nu} \rangle = -\int_\Sigma \mathcal{P}_{\mu\nu} n^r \nabla_r \Psi^{\mu\nu}, \tag{5.25}$$

para un campo tensorial arbitrario $\Psi^{\mu\nu}$. Las componentes en la base ortonormal $\mathcal{P}_{\hat{i}\hat{j}}$ de la distribución de la fuerza del dipolo están dadas por la Ec. (5.20).

Para proceder con el análisis de estabilidad de las configuraciones estáticas, se utiliza que $\ddot{a} = (1/2)d(\dot{a}^2)/da$ y se define $z = \sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2} + \sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}$, de esta forma la Ec. (5.11) puede reescribirse como

$$az' + 2z = 0. \tag{5.26}$$

Luego se integra la Ec. (5.26), obteniéndose

$$\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2} + \sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2} = \frac{a_0^2}{a^2}\left(\sqrt{A_1(a_0)} + \sqrt{A_2(a_0)}\right), \tag{5.27}$$

de la cual es posible expresar la dinámica de la garganta en términos de un potencial

$$\dot{a}^2 = -V(a), \tag{5.28}$$

donde

$$V(a) = -\frac{a_0^4\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2}{4a^4}+\frac{A_1(a)+A_2(a)}{2}-\frac{a^4\left(A_1(a)-A_2(a)\right)^2}{4a_0^4\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2}. \tag{5.29}$$

Se puede verificar fácilmente que $V(a_0) = 0$ y con la ayuda de la Ec. (5.21), también se cumple que $V'(a_0) = 0$, mientras que la derivada segunda del potencial, evaluado en el radio estático a_0, toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} V''(a_0) &= -\frac{5\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2}{a_0^2}-\frac{3\left(A_1(a_0)-A_2(a_0)\right)^2}{a_0^2\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2} \\ &\quad -\frac{\left(A_1'(a_0)-A_2'(a_0)\right)^2}{2\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2}-\frac{4\left(A_1(a_0)-A_2(a_0)\right)\left(A_1'(a_0)-A_2'(a_0)\right)}{a_0\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2} \\ &\quad +\frac{A_1''(a_0)+A_2''(a_0)}{2}-\frac{\left(A_1(a_0)-A_2(a_0)\right)\left(A_1''(a_0)-A_2''(a_0)\right)}{2\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Laa soluciones estáticas a_0 son estables ante perturbaciones radiales cuando $V''(a_0) > 0$.

5.3. Agujeros de gusano cargados

Para la construcción de los agujeros de gusano con carga se toman las funciones métricas $A_{1,2}(r_{1,2})$ dadas por la Ec. (3.19), con valores de masa M y carga Q iguales pero valores de curvatura $R_{1,2}$ diferentes a los lados de la garganta. Las mismas pueden escribirse en la forma

$$A_{1,2}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{(1+2\alpha R_{1,2})r^2} - \frac{R_{1,2}r^2}{12}, \tag{5.31}$$

donde, para alivianar la notación, se entiende que $r = r_1$ o $r = r_2$ según corresponda. Los escalares de curvatura $R_{1,2}$ están relacionados con las constantes cosmológicas a través de la relación $R_{1,2} = 4\Lambda_{1,2}$. La métrica presenta las características señaladas en la Sec. 3.4. Es interesante notar que la carga Q^2 es corregida por un factor $1/(1+2\alpha R)$ con respecto al caso de la solución análoga en relatividad general (ver Sec. 2.4). La geometría es singular en $r = 0$; la posición de los horizontes está determinada por los ceros de $A(r)$. Para $R_{1,2} > 0$, existen tres horizontes para valores pequeños de $|Q|$: el horizonte interior con radio r_i, el de eventos a r_h, y el cosmológico a r_c. Cuando la

carga alcanza el valor de carga crítica $|Q| = Q_c$, el horizonte interno y el de eventos se fusionan en uno, cuando $|Q| > Q_c$ existe una singularidad desnuda. Para $R_{1,2} < 0$ y valores pequeños de $|Q|$ existen dos horizontes: el horizonte interior con radio r_i y el de eventos en r_h; cuando la carga es $|Q| = Q_c$, ambos horizontes se fusionan en uno, y cuando $|Q| > Q_c$ sólo se encuentra una singularidad desnuda.

Se toma el radio a suficientemente grande como para evitar la presencia de horizontes y singularidades, pero también suficientemente pequeño para evitar que supere el radio del horizonte cosmológico, cuando éste se encuentre presente en cualquiera de las partes de la variedad. Un esquema de la construcción se muestra en la Fig. 4.1. Se espera que el término correspondiente a la carga en la Ec. (5.31) tenga el mismo signo que en relatividad general, por lo que la desigualdad $F'(R_{1,2}) = 1 + 2\alpha R_{1,2} > 0$ necesita ser satisfecha a ambos lados de la garganta. Como se mencionó anteriormente, en teorías de gravedad $F(R)$ esta desigualdad implica una constante gravitatoria efectiva positiva y la ausencia de fantasmas. En lo que sigue se toman valores de α y $R_{1,2}$ que garanticen que $F'(R_{1,2}) = 1 + 2\alpha R_{1,2} > 0$.

Los radios a_0 de las posibles soluciones estáticas se obtienen de la Ec. (5.21), con las funciones métricas correspondientes $A_{1,2}$, ambas dadas por la Ec. (5.31). Con el objetivo de obtener expresiones algebraicas de fácil visualización se definen

$$\Omega_{1,2} = \left(\frac{2M}{a_0^2} - \frac{2Q^2}{(1+2R_{1,2}\alpha)a_0^3} - \frac{R_{1,2}a_0}{6}\right)\left(1 - \frac{2M}{a_0} + \frac{Q^2}{(1+2R_{1,2}\alpha)a_0^2} - \frac{R_{1,2}a_0^2}{12}\right)^{-1/2}, \tag{5.32}$$

y

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{a_0}\left(1 - \frac{2M}{a_0} + \frac{Q^2}{(1+2R_{1,2}\alpha)a_0^2} - \frac{R_{1,2}a_0^2}{12}\right)^{1/2}, \tag{5.33}$$

de modo que la Ec. (5.21) se puede reescribir en la forma

$$\Omega_1 + 4\Phi_1 + \Omega_2 + 4\Phi_2 = 0. \tag{5.34}$$

Los resultados se muestran gráficamente en la Fig. 5.1, donde se han escogido los más representativos. Se ha usado en todos los casos $\alpha/M^2 = 0.1$, dado que para diferentes valores de α/M^2 no mostraban cambios significativos en el comportamiento de las soluciones. El único efecto que α/M^2 imprime en los resultados son pequeñas traslaciones del gráfico a lo largo de los ejes. Los valores de los escalares de curvatura (en módulo) a ambos lados de la garganta usados en la confección de las figuras son $|R_1|M^2 = 0.2$ y $|R_2|M^2 = 0.4$, con el correspondiente signo que se ve en las figuras. Los signos de R_1 y R_2 resultan ser más importantes que los valores de las constantes de curvaturas en sí mismas, ya que proveen cambios significativos en el comportamiento general de las soluciones. Al igual que en el Cap. 4, las soluciones estables se representan con líneas de trazo continuo, las inestables con líneas punteadas y las zonas grises carecen de significado físico. Los resultados muestran comportamientos

diferentes alrededor de Q_c/M, donde $Q_c = \max\{Q_c^1, Q_c^2\}$ es el valor de carga crítica, es decir el valor de carga para el cual los horizontes de eventos y el interno se fusionan en la métrica original. Dependiendo de los valores de los parámetros utilizados, existen como máximo tres soluciones físicamente útiles de la Ec. (5.34); se las nombra de la menor a la mayor para facilitar su referencia. Las soluciones estáticas son estables cuando el signo de la segunda derivada del potencial es positivo, es decir, cuando se reemplaza el radio correspondiente a_0 en la Ec. (5.30) y se obtiene $V''(a_0) > 0$. El comportamiento de las soluciones depende de los signos posibles de los escalares de curvatura R_1 y R_2 constantes. Teniendo en cuenta esto:

- Para el caso donde cualquiera de los dos escalares de curvatura es positivo, o sea, $R_1 > 0$ o $R_2 > 0$, existen tres soluciones, dos de las cuales están presentes para un corto rango de $|Q|/M$, una de ellas es estable y la otra inestable. Ambas se fusionan en una para un valor particular de $|Q|/M$, a partir del cual dejan de existir. La tercer solución existe para todo valor de $|Q|/M$, pero es inestable y siempre cercana al horizonte cosmológico.

- Para $R_1 < 0$ y $R_2 < 0$, hay dos soluciones para un pequeño rango de valores de $|Q|/M$ con las mismas características descritas previamente, una estable y la otra inestable, mientras que la tercer solución del caso anterior no existe. La solución estable es la que presenta el radio más grande.

Se puede observar que en todos los casos siempre existe una solución estable con un cierto radio a_0/M para un rango de valores de $|Q|/M$ restringido. Ese rango comienza para Q_c/M y termina poco después.

Para las soluciones estáticas halladas, reemplazando las funciones métricas dadas por la Ec. (5.31) y usando las Ecs. (5.32) y (5.33), se puede obtener la densidad de energía a través de la Ec. (5.22), la presión a partir de la Ec. (5.23),y la tensión externa de la Ec. (5.24) resultando:

$$\sigma_0 = \frac{\Omega_1(1+2\alpha R_1) + \Omega_2(1+2\alpha R_2)}{2\kappa}, \tag{5.35}$$

$$p_0 = -\frac{\Phi_1(1+2\alpha R_1) + \Phi_2(1+2\alpha R_2)}{\kappa} \tag{5.36}$$

y

$$\mathcal{T}_0 = \frac{\alpha R_1(\Omega_1 + 4\Phi_1) + \alpha R_2(\Omega_2 + 4\Phi_2)}{\kappa}. \tag{5.37}$$

Los valores de σ_0, p_0 y $\mathcal{T}_0$ se muestran como funciones de $|Q|/M$ en la Fig. 5.2. Se ha tomado $\alpha/M^2 = 0.1$, $|R_1|M^2 = 0.2$, y $|R_2|M^2 = 0.4$. Para las diferentes combinaciones de signo entre R_1 y R_2, los resultados se pueden resumir de la siguiente manera:

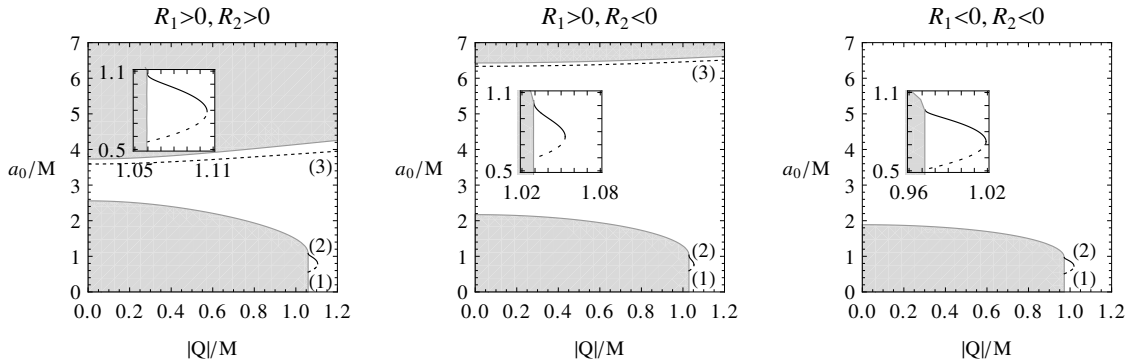

Figura 5.1: Soluciones estáticas de radio a_0 correspondientes a los agujeros de gusano con $|R_1|M^2 = 0.2$ y $|R_2|M^2 = 0.4$, para diferentes combinaciones de signo entre R_1 y R_2; M y Q son la masa y la carga respectivamente. El parámetro $\alpha/M^2 = 0.1$ es fijo. Las soluciones estables se denotan con líneas de trazo continuo, mientras que las inestables se representan con lineas punteadas. Las zonas grises carecen de significado físico.

- El valor absoluto de la densidad de energía (negativa) para la primer solución decrece con $|Q|/M$, mientras que el valor absoluto de la densidad de energía para la segunda y tercer solución se incrementa con $|Q|/M$.

- El valor absoluto de la presión (negativa) correspondiente a la primer solución decrece con $|Q|/M$, mientras que la segunda y la tercer solución crecen con $|Q|/M$.

- Independientemente de la solución considerada, la tensión externa es siempre negativa (por lo que es una presión) y su valor absoluto decrece con $|Q|/M$ para cualquier caso.

Teniendo en cuenta los conceptos de la Sec. 2.5, se puede ver que en todos los casos $\sigma_0 < 0$ y $\sigma_0 + p_0 < 0$, por lo que las condiciones de energía débil y nula no se satisfacen, y por ende el fluido en la garganta es exótico. La fuerza de la distribución de la capa doble, en la base ortonormal, tiene componentes dados por la Ec. (5.20), con valores absolutos $|\mathcal{P}_{\hat{i}\hat{j}}| = 2|\alpha[R]|\delta_{\hat{i}\hat{j}}/\kappa$, las cuales son independientes de la masa y de la carga. La dependencia de la distribución de capa doble $\mathcal{T}_{\hat{i}\hat{j}}$ con dichos parámetros se realiza solamente a través de la derivada covariante y las normales unitarias.

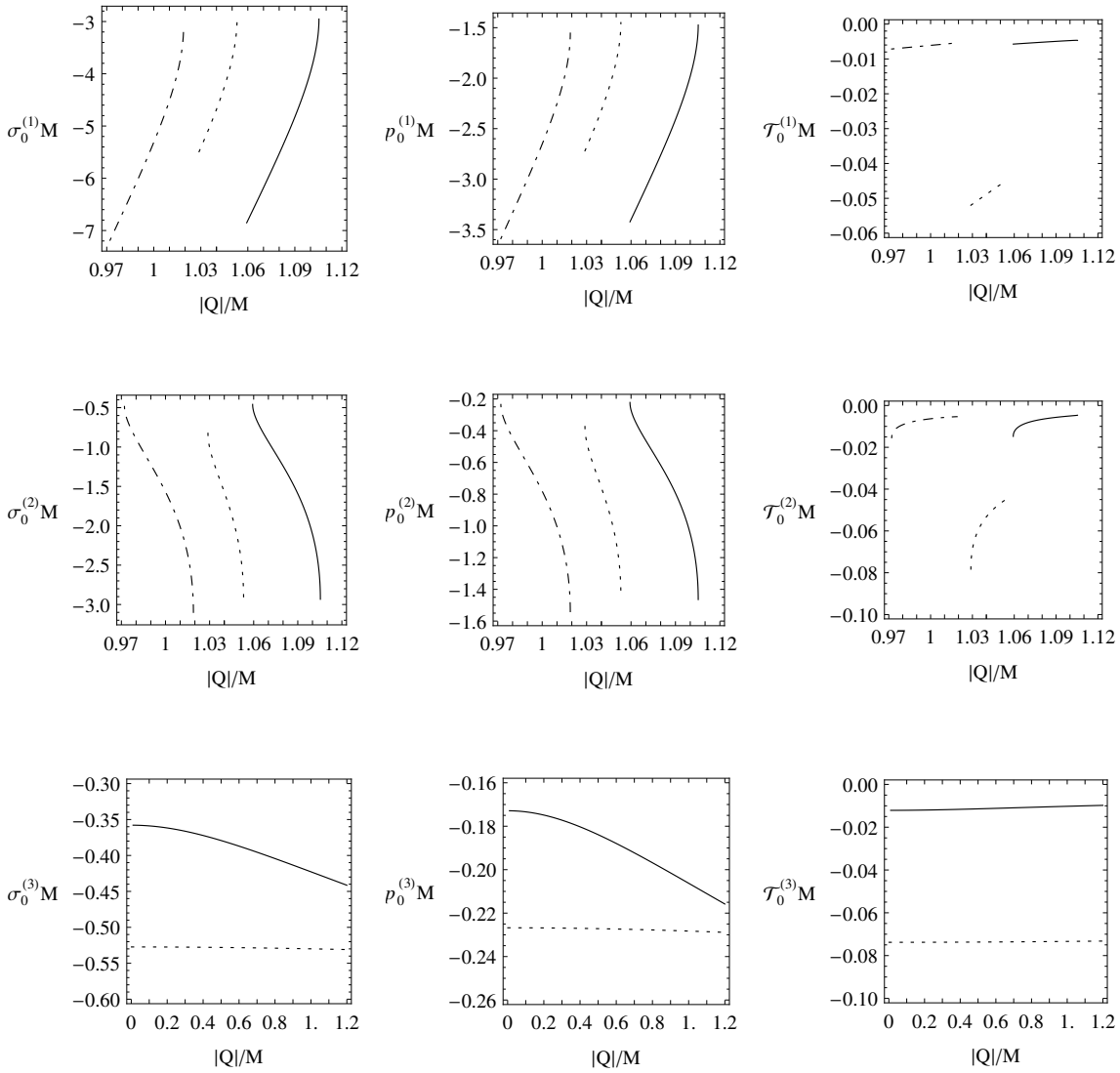

Figura 5.2: La densidad de energía σ_0, la presión p_0 y la tensión externa $\mathcal{T}_0$ se grafican en función del cociente $|Q|/M$ entre el valor absoluto de la carga y la masa. El parámetro $\alpha/M^2 = 0.1$ es fijo. En todas las figuras, donde $|R_1|M^2 = 0.2$ y $|R_2|M^2 = 0.4$, la línea de trazo continuo corresponde al caso $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$, la punteada al caso $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$, y la de puntos y rayas al caso $R_1 < 0$ y $R_2 < 0$. Cada fila corresponde a una solución estática diferente.

5.4. Discusión

Dentro del marco de las teorías cuadráticas, $F(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2$, se construyó una clase de agujeros de gusano esféricamente simétricos, al cortar y pegar dos variedades con diferentes escalares de curvatura (constantes), dando como resultado una geometría global con una superficie de unión que representa la garganta. De esta forma, el agujero de gusano construido resulta ser asimétrico a través de la garganta. La construcción fuerza una condición extra que determina la ecuación de estado entre la densidad de energía σ, la presión p y la tensión externa $\mathcal{T}$ sobre la garganta, la cual resulta ser $\sigma - 2p = \mathcal{T}$. Hay también una distribución tensorial de energía–momento de la capa doble en la garganta. La naturaleza de esta capa doble, símil a la distribución dipolar en el electromagnetismo clásico, no está bien comprendida aún [87–90]. Recientemente se ha mostrado que la presencia de una distribución de capa doble es una característica compartida por otras teorías cuadráticas gravitatorias [90].

Se presentó un formalismo general para el análisis de la estabilidad de las configuraciones estáticas ante perturbaciones que preservan la simetría esférica. Como ejemplo particular, se tomó para la construcción la parte externa de dos variedades con la misma masa M y carga Q, pero con diferentes valores constantes para los escalares de curvatura R_1 y R_2. Se halló el radio a_0 de las soluciones estáticas para diferentes combinaciones de R_1 y R_2. Cuando uno de los escalares de curvatura es positivo, o ambos, existen tres soluciones: dos de radio pequeño, que aparecen para un rango acotado de valores de carga $|Q|/M$, y una de mayor radio, que se encuentra presente para todo valor de $|Q|/M$, la cual tiene un radio cercano al del horizonte cosmológico. En el caso en que ambos escalares de curvatura son negativos, existen sólo las dos primeras soluciones mencionadas anteriormente; la tercer solución está ausente. La tercer solución y la más pequeña del par previamente comentado son inestables ante perturbaciones radiales, mientras que la restante es estable. Se ha encontrado que la materia tiene una densidad de energía negativa en la garganta, y por lo tanto, se requiere materia exótica para la construcción de los agujeros de gusano. Independientemente del signo de los escalares de curvatura, se ha obtenido que el valor absoluto de la densidad de energía de la primer solución decrece en términos de $|Q|/M$, mientras que el valor absoluto de la densidad de energía de la segunda y tercer solución (cuando existe) crece. Un comportamiento similar se encuentra con la presión. Si se considera el valor absoluto de la tensión externa (negativa), decrece con $|Q|/M$ sin importar cual de las tres soluciones se está teniendo en cuenta. La fuerza de la distribución de la capa doble tiene componentes en la base ortonormal $\mathcal{P}_{\hat{i}\hat{j}}$ que son proporcionales al coeficiente cuadrático α y al salto del escalar de curvatura $[R]$, los cuales no dependen de la masa ni de la carga, por lo tanto el tensor de la distribución de la capa doble $\mathcal{T}_{\hat{i}\hat{j}}$ depende de esos parámetros debido a la presencia de la normal unitaria y de la derivada covariante.

Capítulo 6

Burbujas con una capa doble pura en gravedad $F(R)$

El presente capítulo describe el desarrollo del primer ejemplo concreto de una configuración de capa doble pura en teorías de gravedad cuadrática $F(R)$ y su tentativa interpretación física. Para ello se introduce una variedad diferenciable con escalares de curvatura constantes diferentes $R_1 \neq R_2$ a los lados de la hipersuperficie de juntura y se fuerza la ausencia de densidad de energía, presión y tensión sobre la misma. En particular se toma la solución de vacío para la región interior, de modo que la geometría global corresponde a una burbuja con una capa doble pura.

6.1. Consideraciones generales

A diferencia de lo estudiado en los Caps. 4 y 5, la variedad $\mathcal{M}$ a construir en este capítulo tiene una parte interna $\mathcal{M}_1$ y otra externa $\mathcal{M}_2$; la superficie de pegado Σ corresponde a una hipersuperficie de borde o a una cáscara delgada, lo cual depende de las condiciones de juntura. Al igual que en relatividad general, para tener una curvatura bien definida sobre la superficie en un sentido distribucional, se fuerza a que la primer forma fundamental coincida sobre Σ, es decir, que se cumpla la Ec. (2.30). La normal unitaria n^μ sobre Σ referida en la Ec. (2.32) está, como consecuencia, bien definida sin tener saltos en Σ, a pesar de que es necesario dar sus dos expresiones a ambos lados de Σ debido a propósitos computacionales. Para el caso de las teorías $F(R)$ genéricas es necesaria una condición adicional: la traza de la segunda forma fundamental no puede tener un salto (ver Ec. (3.21)) y, cuando $F'''(R) \neq 0$, también es necesaria la continuidad de R sobre la superficie de juntura, (ver Ec. (3.22)). Sin embargo, en las teorías cuadráticas cuya forma más simple es $F(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2$ donde α es el parámetro que selecciona una teoría en particular, la discontinuidad de R sobre la hipersuperficie Σ está permitida. El

tensor de energía–momento $S_{\mu\nu}$ sobre Σ para el caso cuadrático queda determinado por la Ec. (3.35). Además existen otras tres contribuciones más: un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu$ dado por la Ec. (3.45), una presión o tensión escalar externa $\mathcal{T}$ dada por la Ec. (3.46) y una distribución tensorial simétrica doblemente covariante $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ dada por la Ec. (3.47), que tiene equivalencia con la Ec. (3.48). Esta distribución de energía–momento de la capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ corresponde a una contribución del tipo de "delta prima" de Dirac con una fuerza

$$\kappa\mathcal{P}_{\mu\nu} = 2\alpha[R]h_{\mu\nu}, \qquad \mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}_{\nu\mu}, \qquad n^\mu\mathcal{P}_{\nu\mu} = 0, \tag{6.1}$$

que, como se mencionó en el Cap. 3, resulta similar a la distribución clásica de dipolos en electromagnetismo. Todas las contribuciones anteriormente mencionadas son necesarias para lograr que el tensor de energía–momento completo tenga divergencia nula [87, 88, 90], ya que dicha condición garantiza su conservación local. Si $K_{\mu\nu}$ y R no tienen saltos sobre Σ, todas estas contribuciones desaparecen y Σ resulta ser una hipersuperficie de borde ordinaria. En general, siempre hay una cáscara delgada más una capa doble en la superficie de pegado. Cuando $S_{\mu\nu} \neq 0$ y $[R] = 0$ se obtiene sólo una cáscara delgada, pero si $S_{\mu\nu} = 0$, $\mathcal{T}_\mu = 0$ y $\mathcal{T} = 0$ pero $[R] \neq 0$ se obtiene una capa doble pura.

Las cantidades anteriormente mencionadas satisfacen las siguientes identidades y ecuaciones de campo

$$\kappa\left(S^\gamma{}_\gamma + \mathcal{T}\right) = 6\alpha[n^\gamma\nabla_\gamma R], \tag{6.2}$$

$$\mathcal{T}_\mu = -\overline{\nabla}^\gamma\mathcal{P}_{\gamma\mu}, \tag{6.3}$$

$$\mathcal{T} = K_\Sigma^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\mu\nu} = K^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\mu\nu}, \tag{6.4}$$

$$n^\gamma h^\lambda{}_\mu[T_{\gamma\lambda}] + \overline{\nabla}^\gamma S_{\gamma\mu} = -K^\gamma{}_\gamma\mathcal{T}_\mu - \overline{\nabla}_\mu\mathcal{T}, \tag{6.5}$$

$$\kappa\left(n^\gamma n^\lambda[T_{\gamma\lambda}] - K_\Sigma^{\gamma\lambda}S_{\gamma\lambda} + \overline{\nabla}^\gamma\mathcal{T}_\gamma\right) = 2\alpha[R]\left(R^\Sigma_{\gamma\lambda}n^\gamma n^\lambda + K^\Sigma_{\gamma\lambda}K_\Sigma^{\gamma\lambda}\right), \tag{6.6}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía–momento del espacio–tiempo y los superíndices Σ significan que la cantidad en cuestión debe ser evaluada sobre la hipersuperficie de juntura, y para las cantidades "discontinuas" significa, por ejemplo para el caso del tensor de Ricci

$$R^\Sigma_{\gamma\lambda} = \frac{1}{2}\left(R^1_{\gamma\lambda} + R^2_{\gamma\lambda}\right)|_\Sigma.$$

A partir de estas relaciones se deduce de inmediato que las capas dobles *puras* requieren que las siguientes condiciones se cumplan en simultáneo, conservando $[R] \neq 0$:

$$K^\gamma{}_\gamma = 0, \quad \overline{\nabla}_\mu[R] = 0, \quad [n^\gamma\nabla_\gamma R] = 0, \quad n^\gamma h^\lambda_\mu[T_{\gamma\lambda}] = 0, \tag{6.7}$$

$$n^\gamma n^\lambda[T_{\gamma\lambda}] = 2\frac{\alpha}{\kappa}[R]\left(R^\Sigma_{\gamma\lambda}n^\gamma n^\lambda + K^\Sigma_{\gamma\lambda}K_\Sigma^{\gamma\lambda}\right), \quad [K_{\mu\nu}] + 2\alpha[RK_{\mu\nu}] = 0. \tag{6.8}$$

La primer relación en la Ec. (6.7) implica que Σ debe tener una curvatura promedio igual a cero, mientras que la segunda y tercer ecuación son automáticamente satisfechas si los escalares de curvatura $R_{1,2}$ son constantes sobre Σ. La última expresión en la Ec. (6.7) requiere que las componentes tangenciales y normales del tensor de energía–momento sean continuas sobre Σ, lo que significa que no hay discontinuidad en el flujo de calor/energía. Por supuesto, esto es trivialmente garantizado si se está trabajando con soluciones en el vacío. Como se observa en las Refs. [88, 89] se entiende que si se elige la hipersuperficie mínima de pegado Σ en un espacio–tiempo con escalares de curvatura constantes $R_{1,2}$ a ambos lados de Σ y tensores de energía–momento $T^{1,2}_{\mu\nu}$ nulos, entonces todas las condiciones de la Ec. (6.7) son automáticamente satisfechas y sólo se debe prestar atención a las dos expresiones en la Ec. (6.8), adecuadamente restringidas. El significado de estas dos ecuaciones es que el balance del tensor de energía–momento, incluyendo a la capa doble pura, debido a las características específicas de su fuerza dada por la Ec. (6.1), que es proporcional a la primer forma fundamental (para más detalles, ver [90]).

6.2. Cáscaras esféricas

Para la construcción de los agujeros de gusano de los Caps. 4 y 5 se unieron las partes exteriores de las geometrías, de modo de obtener la garganta en la superficie de unión. Ahora, en cambio se unirá la parte interior de una geometría con la exterior de la otra, siendo la superficie de juntura singular. Se comienza entonces con dos geometrías esféricamente simétricas dadas por la Ec. (5.1) con $A_{1,2}(r_{1,2})$ funciones que dependen solamente de la correspondiente coordenada radial. Luego se seleccionan dos variedades $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, definidas por

$$\mathcal{M}_1 = \{X_1^\alpha = (t_1, r_1, \theta, \varphi)/0 \leq r_1 \leq a_0\}, \tag{6.9}$$

y

$$\mathcal{M}_2 = \{X_2^\alpha = (t_2, r_2, \theta, \varphi)/r_2 \geq a_0\}, \tag{6.10}$$

donde el radio a_0 es constante. Matemáticamente se construye una nueva variedad $\mathcal{M}$ como la unión de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ resultando en la superficie de juntura Σ definida por $G(r_{1,2}) = r_{1,2} - a_0 = 0$. Se puede definir de manera natural una nueva coordenada radial $r \in [0, +\infty)$ identificándola con r_1 en la parte $\mathcal{M}_1$ y con r_2 en la parte $\mathcal{M}_2$, de modo que Σ corresponde a $r = a$. Análogamente a lo hecho en los capítulos anteriores, sobre la cáscara se adopta la base ortonormal $\{e_{\hat{\tau}} = e_\tau, e_{\hat{\theta}} = a_0^{-1} e_\theta, e_{\hat{\varphi}} = (a_0 \sin\theta)^{-1} e_\varphi\}$. En este marco, la primer forma fundamental es simplemente $h_{\hat{i}\hat{j}} = \text{diag}(-1, 1, 1)$. Las normales unitarias ($n^\gamma n_\gamma = 1$) que apuntan desde $\mathcal{M}_1$ hacia $\mathcal{M}_2$

dadas por la Ec. (2.32), sobre cada lado de Σ resultan ser

$$n_{\gamma}^{1,2} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{A_{1,2}(a_0)}}, 0, 0\right). \tag{6.11}$$

La segunda forma fundamental a ambos lados de Σ se calcula usando la Ec. (2.34), en este caso se obtiene que las componentes no nulas son

$$K_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^{1,2} = K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{1,2} = \frac{\sqrt{A_{1,2}(a_0)}}{a_0} \tag{6.12}$$

y

$$K_{\hat{\tau}\hat{\tau}}^{1,2} = -\frac{A'_{1,2}(a_0)}{2\sqrt{A_{1,2}(a_0)}}. \tag{6.13}$$

Al usar las Ecs. (6.12) y (6.13), la condición sobre la traza dada por la Ec. (3.21) toma la forma

$$\frac{a_0 A'_1(a_0) + 4A_1(a_0)}{\sqrt{A_1(a_0)}} - \frac{a_0 A'_2(a_0) + 4A_2(a_0)}{\sqrt{A_2(a_0)}} = 0. \tag{6.14}$$

De ahora en más, con el propósito de llevar adelante la construcción de una geometría que presente una capa doble en la superficie de juntura, se asume, al igual que en el Cap. 5, que los escalares de curvatura R_1 y R_2 son ambos constantes pero diferentes uno del otro, es decir $R_1 \neq R_2$. Esto implica que se trabaje en una teoría cuadrática $F(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2$, de modo que el tensor de energía–momento sobre la cáscara viene dado por la Ec. (5.7). Utilizando la base ortonormal elegida, el tensor de energía–momento toma la forma $S_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(\sigma_0, p_0, p_0)$, donde σ_0 es la densidad de energía sobre la hipersuperficie que está dada por

$$\sigma_0 = -\frac{A'_1(a_0)}{2\kappa\sqrt{A_1(a_0)}}\left(1 + 2\alpha R_1\right) + \frac{A'_2(a_0)}{2\kappa\sqrt{A_2(a_0)}}\left(1 + 2\alpha R_2\right) \tag{6.15}$$

y p_0 es la presión isotrópica

$$p_0 = \frac{\sqrt{A_1(a_0)}}{\kappa a_0}\left(1 + 2\alpha R_1\right) - \frac{\sqrt{A_2(a_0)}}{\kappa a_0}\left(1 + 2\alpha R_2\right). \tag{6.16}$$

De la Ec. (3.45) es fácil de ver que $\mathcal{T}_\mu = 0$, ya que los escalares de curvatura con los que se está trabajando son constantes, y por lo tanto el vector de flujo de energía externo vale cero. La tensión/presión escalar externa $\mathcal{T}_0$ tiene la forma

$$\mathcal{T}_0 = \frac{a_0 A'_1(a_0) + 4A_1(a_0)}{\kappa a\sqrt{A_1(a_0)}}\alpha[R] = \frac{a_0 A'_2(a_0) + 4A_2(a_0)}{\kappa a_0\sqrt{A_2(a_0)}}\alpha[R], \tag{6.17}$$

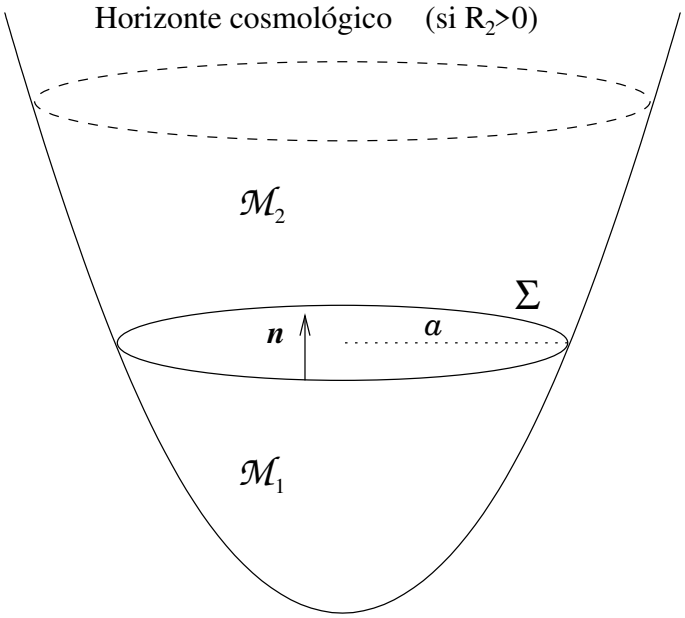

Figura 6.1: Esquema de la construcción de las burbujas en gravedad $F(R)$. La región $\mathcal{M}_1$ corresponde a una solución de vacío. La variedad $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ carece de horizontes de eventos y de singularidades. La normal unitaria $\mathbf{n}$ a la superficie de juntura Σ apunta de $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$. En este capítulo el radio $a = a_0$ es fijo.

la cual al usar la Ec. (6.14) puede ser reescrita como

$$\mathcal{T}_0 = -\frac{a_0 A_1'(a_0) + 4A_1(a_0)}{\kappa a_0 \sqrt{A_1(a_0)}}\alpha R_1 + \frac{a A_2'(a_0) + 4A_2(a_0)}{\kappa a_0 \sqrt{A_2(a_0)}}\alpha R_2. \tag{6.18}$$

De las Ecs. (6.15), (6.16), y (6.18), es fácil de ver que σ_0, p_0 y $\mathcal{T}_0$ están relacionadas a través de la ecuación de estado $\sigma_0 - 2p_0 = \mathcal{T}_0$, la cual también se puede obtener por medio de la Ec. (6.2). Además se tiene una distribución de dipolo, con una fuerza igual a

$$\kappa \mathcal{P}_{\hat{i}\hat{j}} = 2\alpha[R]h_{\hat{i}\hat{j}}, \tag{6.19}$$

la cual es diferente de cero por ser $R_1 \neq R_2$.

6.3. Burbujas

Para mostrar un ejemplo concreto de burbujas, se adopta una geometría introducida en la Sec.3.4 cuya función métrica en ausencia de carga es

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Rr^2}{12}, \tag{6.20}$$

donde M es la masa, y el valor R está relacionado con la constante cosmológica a través de $R = 4\Lambda$. Si $M \neq 0$ la geometría es singular en $r = 0$ y la posición de los horizontes, determinada por los ceros de $A(r)$, están dados por las raíces positivas de un polinomio de grado tres. Cuando $R \leq 0$, sólo hay un horizonte de eventos de radio r_h; para $0 < R < 4/(9M^2)$, además del horizonte de eventos de radio r_h, existe un horizonte cosmológico de radio r_c, que satisface $r_h < r_c$. Si $M = 0$, la ecuación $A(r) = 0$ es cuadrática; no hay horizontes cuando $R \leq 0$ y sólo hay horizonte cosmológico para todo $R > 0$, con $r_c = \sqrt{12/R} = \sqrt{3/\Lambda}$ en dicho caso.

Para obtener una burbuja, la región interna $\mathcal{M}_1$ de la variedad $\mathcal{M}$ se toma con un escalar de curvatura $R_1 = 4\Lambda_1$ y una masa $M_1 = 0$, mientras que para la región externa $\mathcal{M}_2$ se elige un escalar de curvatura $R_2 = 4\Lambda_2$ y una masa $M_2 = M \neq 0$. La superficie de pegado tiene un radio a_0 elegido de forma apropiada para evitar la presencia de los horizontes de evento que se encuentran en las regiones originales con las que se construyó la variedad $\mathcal{M}$. Esta elección también contempla el descarte del horizonte cosmológico de la región interna cuando $R_1 > 0$. En la Fig. 6.1 se muestra un esquema de la construcción. Como consecuencia, las siguientes condiciones deben ser satisfechas

$$1 - \frac{a_0^2 R_1}{12} > 0 \tag{6.21}$$

y

$$1 - \frac{2M}{a_0} - \frac{a_0^2 R_2}{12} > 0. \tag{6.22}$$

La variedad $\mathcal{M}$ consiste de una hipersuperficie singular Σ rodeando una región estática $\mathcal{M}_1$ con una constante cosmológica $\Lambda_1 = R_1/4$, sin materia ni horizontes; fuera de la cáscara la geometría representa un espacio–tiempo $\mathcal{M}_2$ con una constante cosmológica diferente $\Lambda_2 = R_2/4$, sin materia ni horizonte de eventos. Cuando $0 < R_2 < 4/(9M^2)$ existe un horizonte cosmológico en la zona externa. Para este caso el radio a_0 es más pequeño que el correspondiente horizonte cosmológico. Por lo tanto, la presencia de materia está solamente presente sobre la hipersuperficie Σ, y representa una especie de burbuja. Esta construcción debe satisfacer la condición dada por la Ec. (6.14), que se reescribe para esta particular construcción de la siguiente manera

$$\left(4 - \frac{6M}{a_0} - \frac{a_0^2 R_2}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{a_0^2 R_1}{12}} - \left(4 - \frac{a_0^2 R_1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0} - \frac{a_0^2 R_2}{12}} = 0. \tag{6.23}$$

De las Ecs. (6.15) y (6.16), se obtiene que

$$\sigma_0 = \frac{1 + 2R_1\alpha}{\kappa}\frac{a_0 R_1}{12}\left(\sqrt{1 - \frac{a_0^2 R_1}{12}}\right)^{-1} + \frac{1 + 2R_2\alpha}{\kappa}\left(\frac{M}{a_0^2} - \frac{a_0 R_2}{12}\right)\left(\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0} - \frac{a_0^2 R_2}{12}}\right)^{-1} \tag{6.24}$$

y

$$p_0 = \frac{1+2R_1\alpha}{\kappa a_0}\sqrt{1-\frac{a_0^2R_1}{12}} - \frac{1+2R_2\alpha}{\kappa a_0}\sqrt{1-\frac{2M}{a_0}-\frac{a_0^2R_2}{12}}, \tag{6.25}$$

y de la Ec. (6.17) se encuentra que

$$\mathcal{T}_0 = \frac{\alpha[R]}{\kappa a_0}\left(4-\frac{a_0^2R_1}{2}\right)\left(\sqrt{1-\frac{a_0^2R_1}{12}}\right)^{-1}, \tag{6.26}$$

o equivalentemente

$$\mathcal{T}_0 = \frac{\alpha[R]}{\kappa a_0}\left(4-\frac{6M}{a_0}-\frac{a_0^2R_2}{2}\right)\left(\sqrt{1-\frac{2M}{a_0}-\frac{a_0^2R_2}{12}}\right)^{-1}. \tag{6.27}$$

Como se ha mostrado anteriormente, el vector de flujo de energía externo es nulo ($\mathcal{T}_\mu = 0$) y la fuerza de la distribución de dipolo está dado por la Ec. (6.19), y es distinta de cero debido a $R_1 \neq R_2$. Un caso particularmente interesante es el de una geometría con una capa doble pura, que hasta el momento carecía de algún ejemplo concreto.

6.4. Capa doble pura

Como se discutió anteriormente, la capa doble pura debe satisfacer ciertas condiciones dadas por las Ecs. (6.7) y (6.8) mientras que $[R] \neq 0$. Con la construcción detallada en la Sec. 6.3 todas las condiciones de la Ec. (6.7) son satisfechas, con la excepción de la primera. Dicha condición equivale a tomar Σ como la hipersuperficie temporal mínima a ambos lados, o en otras palabras, a forzar $\mathcal{T}_0 = 0$. De esta forma, usando las Ecs. (6.26) y (6.27) se impone condiciones sobre los valores de la constante de curvatura, a saber

$$R_1 = \frac{8}{a_0^2} \tag{6.28}$$

y

$$R_2 = \frac{8}{a_0^2} - \frac{12M}{a_0^3}. \tag{6.29}$$

Para estos valores, la condición (6.21) siempre se satisface, pero la desigualdad (6.22) requiere que

$$a_0 > 3M, \tag{6.30}$$

que es lo que se asume de ahora en adelante. Esta condición no restringe al radio a_0 si el parámetro M es negativo. Sin embargo, se va a probar en la Sec. 6.5 que la

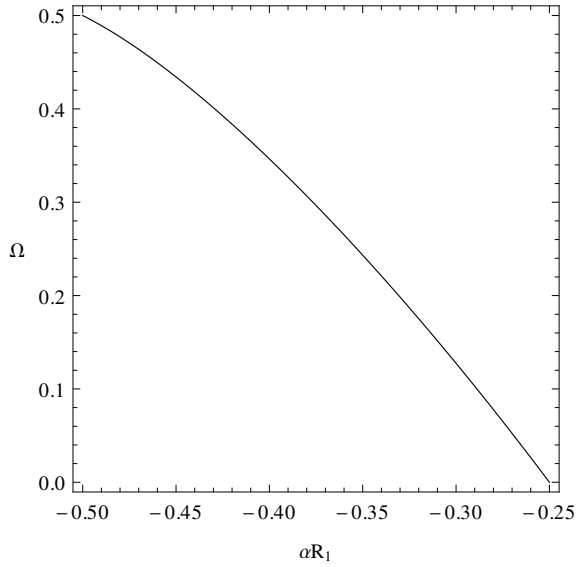

Figura 6.2: Burbujas con una capa doble pura en $F(R)$ cuadrática. La fuerza de la distribución dipolar tiene componentes $\kappa\mathcal{P}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = \Omega h_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}$, con $\Omega = 2\alpha[R]$. Se muestra Ω en función de αR_1.

energía cuasi-local del modelo, vista desde el exterior $\mathcal{M}_2$ es proporcional a M con una constante de proporcionalidad positiva. Por ende, para que dicha energía sea positiva se asume que $M > 0$ de ahora en adelante. El signo de M está relacionado con el balance de las constantes cosmológicas, como se ve en las Ecs. (6.28) y (6.29) que permiten afirmar que

$$\frac{[R]}{4} = [\Lambda] = -\frac{3M}{a_0^3}$$

De aquí se ve que M positiva implica un déficit de la constante cosmológica exterior con respecto a la interior. Es evidente que de la Ec. (6.28) se concluye que $R_1 > 0$ y entonces la combinación de la Ec. (6.30) con las Ecs. (6.28) y (6.29) da como resultado:

$$0 < \frac{R_1}{2} < R_2 < R_1. \tag{6.31}$$

La necesidad de que R_1 y R_2 sean ambos positivos determina que las regiones interior y exterior sean geometrías de de Sitter y de Kottler (Schwarzschild–de Sitter) respectivamente. Es más, la expresión (6.29) implica que $R_2(a_0 = 3M) = 4/(9M^2)$ y que también R_2 es una función decreciente de a_0 en el rango permitido $a_0 \in (3M, \infty)$, por lo tanto se deduce que

$$R_2 < \frac{4}{9M^2}. \tag{6.32}$$

Esto garantiza que el horizonte cosmológico siempre se encuentre fuera de la región a trabajar.

Con respecto a las condiciones de la Ec. (6.8), la última de esas expresiones es simplemente $S_{\mu\nu} = 0$, o en otras palabras que σ_0 y p_0 son ambos cero. Reemplazando las Ecs. (6.28) y (6.29) la Ec. (6.25) y forzando $p_0 = 0$, se obtiene una expresión que relaciona a_0 y M con el coeficiente de la teoría cuadrática α

$$-8\alpha\left(3-\frac{3M}{a_0}+\sqrt{1-\frac{3M}{a_0}}\right)=a_0^2, \tag{6.33}$$

así se deduce que α debe ser negativa. Esto se ve mucho más claramente cuando se usa la desigualdad (6.30) en la Ec. (6.33) obteniéndose

$$-16\alpha < a_0^2 < -32\alpha\,.$$

Introduciendo la Ec. (6.28), la desigualdad anterior se convierte en

$$-\frac{1}{2} < \alpha R_1 < -\frac{1}{4}\,. \tag{6.34}$$

A este punto, es claro ver que las Ecs. (6.23) y (6.24) son automáticamente satisfechas y lo mismo vale para la primera expresión de (6.8).

Finalmente, de la Ec. (6.19), las componentes de la fuerza del dipolo quedan definidas por $\kappa\mathcal{P}_{\hat{i}\hat{j}} = \Omega h_{\hat{i}\hat{j}}$, con

$$\Omega = 2[R]\alpha = -\frac{24M}{a_0^3}\alpha, \tag{6.35}$$

el cual tiene el mismo signo que M y se puede expresar en términos de M y a_0 como

$$\Omega = \frac{3M}{3a_0 - 3M + \sqrt{a_0(a_0-3M)}}. \tag{6.36}$$

Sin embargo es mucho más apropiado para la interpretación física expresar los resultados en términos de α, R_1 y R_2. Para ello se invierten las Ecs. (6.28) y (6.29), y se encuentra la expresión del radio de la burbuja a_0 y del parámetro M como

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R_1}} \tag{6.37}$$

y

$$M = \frac{4\sqrt{2}(R_1 - R_2)}{3R_1\sqrt{R_1}}. \tag{6.38}$$

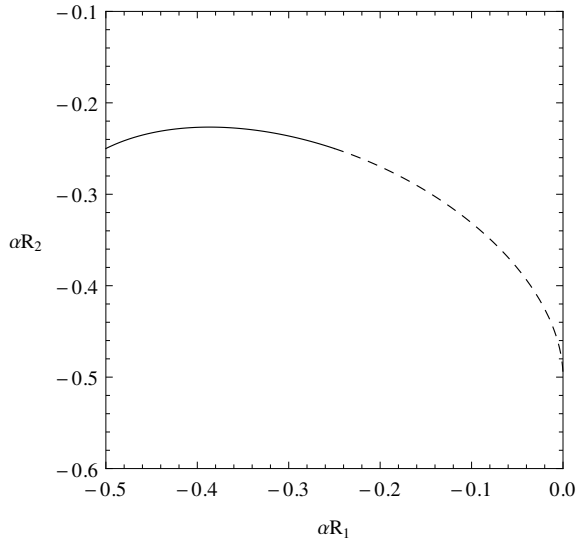

Figura 6.3: Burbuja con una capa doble pura en $F(R)$ cuadrática. Gráfico de αR_2 como función de αR_1, con R_1 y R_2 los escalares de curvatura, y α el coeficiente cuadrático de la teoría. Los valores de R_1 y R_2 son positivos mientras que α es negativa (ver el texto). Los valores permitidos para R_1 y R_2 compatibles con $M > 0$ y con una energía cuasi-local positiva se muestran con una línea de trazo continuo. La continuación con una línea punteada muestra los valores posibles si $M < 0$ fuera permitida, pero esto llevaría a energías negativas como se demuestra en la Sec. 6.5.

Reemplazando estos valores de a_0 y M en la Ec. (6.33), se puede ver que R_1 y R_2 están relacionado con α a través de la ecuación

$$-\frac{1}{\alpha} = R_1 + 2R_2 + \sqrt{R_1(2R_2 - R_1)}. \tag{6.39}$$

Por ello, si el parámetro α de la teoría cuadrática está dado y es negativo, se puede elegir una constante cosmológica dentro de los límites permitidos, y la otra constante será automáticamente fijada debido a la relación (6.39). Así, una vez que $\alpha < 0$ está dada, se puede elegir cualquier escalar de curvatura R_1 dentro de los valores permitidos (6.34) y obtener el valor asociado del escalar de curvatura R_2 de la Ec. (6.39), la cual tiene la siguiente forma

$$R_2 = \frac{-2 - \alpha R_1 + \sqrt{-\alpha R_1(4 + 7\alpha R_1)}}{4\alpha}. \tag{6.40}$$

Los valores correspondientes al radio de la burbuja a_0 y a la masa M son calculados de las Ecs. (6.37) y (6.38), respectivamente. La fuerza del dipolo Ω se obtiene al combinar las Ecs. (6.36) y (6.40):

$$\Omega = \frac{-2 - 5\alpha R_1 + \sqrt{-\alpha R_1(4 + 7\alpha R_1)}}{2}. \tag{6.41}$$

Un análisis similar, pero más complejo, se puede hacer en términos de R_2 en vez de R_1. Los resultados se presentan gráficamente en las Figs. 6.2 y 6.3.

Debido a que la capa doble pura requiere $R_2 > 0$, el espacio–tiempo presenta un horizonte cosmológico en la región exterior. Por lo tanto, las coordenadas utilizadas no describen la región más allá del horizonte cosmológico, con $r > r_c$. En el Apéndice C se muestra una extensión de la geometría que permite resolver esta dificultad.

6.5. Energía cuasi–local y el signo de M

En relatividad general se sabe que M representa la masa total del objeto que crea el espacio–tiempo $\mathcal{M}_2$, y pueden darse descripciones cuasi-locales como la masa de Misner-Sharp, o la energía cuasi-local de Hawking, entre muchas otras [93]. La situación es diferente, en principio, en las teorías $F(R)$, y se puede probar [94] que la correcta generalización para la teoría $F(R)$ cuadrática de la energía cuasi–local está dada por

$$E = (1 + 2\alpha R)M\,. \tag{6.42}$$

Esto conlleva la pregunta de si existe la posibilidad de tener un parámetro de masa negativo $M < 0$ mientras se tiene energía positiva E. Esto es posible en general, siempre y cuando $2\alpha R < -1$, pero no es posible en la capa doble pura analizada aquí, debido a la estricta relación entre R_1 y R_2 a ambos lados. Para probarlo, se observa que $E_1 = 0$ y por ende, sólo se debe considerar $E_2 = (1 + 2\alpha R_2)M$. El rango permitido de αR_1, dado por la desigualdad (6.34) para $M > 0$, se extiende a $-1/2 < \alpha R_1 < 0$ si también se permite $M < 0$. En dicho caso, la fórmula (6.40) — cuya validez es independiente del signo de M— implica que αR_2 es menor que cierto máximo (negativo) y siempre es mayor que $-1/2$, como muestra la Fig. 6.3. Por lo tanto, $1 + 2\alpha R_2$ es positivo para las capas dobles puras y el signo de E_2 es necesariamente el mismo que el signo de M. Esto restringe el análisis al caso $M > 0$.

Se puede proveer una interpretación física de la fuerza del dipolo Ω en términos de la energía cuasi-local E. La diferencia entre las energías a ambos lados de la capa doble es

$$E_2 - E_1 = E_2 = (1 + 2\alpha R_2)M$$

o bien

$$E_2 - E_1 = M\left(1 + 16\alpha\frac{1}{a_0^2} - 24\alpha\frac{M}{a_0^3}\right) = \tilde{E} + \Omega M,$$

donde $\tilde{E} = M(1 + 2\alpha R_1)$ es la energía que la capa doble tendría en $\mathcal{M}_1$ si las constantes cosmológicas no presentan un salto. Parece existir una especie de balance perfecto entre las constantes cosmológicas y la presencia de una capa doble pura con la fuerza del dipolo correspondiente.

6.6. Discusión

En este capítulo se construyeron burbujas esféricas de radio constante a_0 en teorías de $F(R)$ cuadráticas, usando el formalismo de juntura correspondiente. Se adoptó para la región interna una solución de vacío con escalar de curvatura constante $R_1 = 4\Lambda_1$ y carente de masa, y para la parte externa, otra solución de vacío con un escalar de curvatura constante $R_2 = 4\Lambda_2$ y un parámetro de masa M no nulo, que está asociado con una energía cuasi-local diferente de cero $E_2 = (1 + 2\alpha R_2)M$. Las condiciones de pegado resultan en la presencia de una cáscara delgada, donde el tensor de energía–momento es singular (tiene una parte distribucional), caracterizado por una densidad de energía superficial y una presión. Cuando $R_1 \neq R_2$, existe además una tensión/presión escalar externa y una distribución de capa doble, con una fuerza proporcional al salto del escalar de curvatura a través de la cáscara y al coeficiente cuadrático de la teoría α. Una tercera contribución adicional que aparece cuando $R_1 \neq R_2$, corresponde al vector de flujo de energía externo, que se anula en la presente construcción debido a que ambos escalares de curvatura elegidos son constantes.

La posibilidad de la existencia de cáscaras dobles puras es una propiedad notable que distingue las teorías de gravedad $F(R)$ cuadráticas de las teorías $F(R)$ no cuadráticas y de la relatividad general. Las burbujas obtenidas en la Sec. 6.4 constituyen el primer ejemplo explícito donde esta llamativa característica se encuentra presente, siempre y cuando el coeficiente cuadrático α sea negativo. Cuando $\alpha < 0$, $-1/2 < \alpha R_1 < -1/4$, y $0 < R_1/2 < R_2 < R_1$, para un dado valor de α, existe siempre una combinación de valores de R_1 y R_2 para los cuales la densidad de energía y la presión sobre la superficie son ambas cero (como así también es cero la presión/tensión escalar externa) pero no la fuerza de la distribución dipolar $\kappa\mathcal{P}_{\hat{i}\hat{j}} = \Omega h_{\hat{i}\hat{j}}$, dando como resultado la presencia de la capa doble pura. Una vez que $\alpha < 0$ es elegido, y por ende la teoría de gravedad es fijada, estas burbujas construidas con capas dobles puras tienen un radio y un parámetro de masa determinados por el valor de uno de los escalares de curvatura (R_1 o R_2).

La capa doble es pura sólo cuando hay un ajuste fino entre los parámetros, de lo contrario, la cáscara delgada reaparece gradualmente. Esta característica se puede visualizar en la Fig. 6.3: el movimiento a lo largo de la curva mantiene la capa doble pura, pero por fuera de ella, la cáscara delgada está presente con una densidad de energía y una presión diferentes de cero. Esto resulta similar al comportamiento análogo en electrodinámica clásica [92], donde las capas dipolares *puras* surgen cuando las densidades de carga superficial a ambos lados de la capa son de signo opuesto pero iguales en valor absoluto; de lo contrario una superficie de carga surge adicionalmente.

En el modelo presentado en este capítulo, la construcción de estas burbujas simples es posible en cualquier teoría $F(R)$ cuadrática, pero las capas dobles puras

sólo pueden aparecer si la teoría tiene un α negativo. En ese caso, el tensor de energía–momento del espacio–tiempo tiene la forma distribucional

$$T_{\mu\nu} = 8\frac{\alpha}{\kappa}(\Lambda_2 - \Lambda_1)\nabla_\gamma \left(h_{\mu\nu} n^\gamma \delta^\Sigma\right)$$

donde δ^Σ es la delta de Dirac sobre la hipersuperficie Σ. Por lo tanto $T_{\mu\nu}$ está contenido sólo sobre Σ, es decir que es cero excepto en $r = a_0$, lo cual describe una fuente dipolar en el sentido de la derivada de la delta de Dirac. En estos espacio–tiempo de capa doble pura, la región exterior tiene un déficit en la constante cosmológica con respecto a la región interna debido a la presencia de la capa doble en Σ. Este déficit está relacionado con el parámetro de masa a través de $M/a_0^3 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)/3$. Es notable que la construcción de la capa doble pura requiere que Σ sea la hipersuperficie mínima, esto resulta una analogía directa con las superficies mínimas que describen burbujas de jabón clásicas.

Por el otro lado, es ampliamente conocido [60–62] que cualquier teoría gravitatoria $F(R)$ es equivalente a otra teoría tensorial-escalar. En particular, las teorías $F(R)$ cuadráticas son equivalentes a la teoría de Brans-Dicke con parámetro $\omega = 0$; en este caso, el campo escalar ϕ se relaciona con R a través de $\phi = 2\alpha R - 1$, con un potencial $V(\phi) = 2\Lambda + (\phi^2 - 2\phi - 3)/(4\alpha)$ [60–62]. Desde este punto de vista, la capa doble corresponde a una discontinuidad abrupta en el campo escalar ϕ. En la construcción de la burbuja, el campo escalar podría tener diferentes valores constantes de ϕ_1 y ϕ_2 a cada lado de la superficie de pegado, lo cual puede ser interpretado como una especie de constante gravitatoria efectiva. En el caso especial de la capa doble pura, es interesante notar que la discontinuidad del campo escalar, dada por $[\phi] = 2\alpha[R]$ es precisamente el valor de Ω que corresponde a la fuerza dipolar de la capa doble.

Capítulo 7

Burbujas con carga en gravedad $F(R)$

A lo largo de este capítulo se realiza la construcción y se estudia la estabilidad de cáscaras delgadas de materia con simetría esférica. Se hace el análisis para los casos donde los escalares de curvatura son constantes e iguales al atravesar la cáscara, como así también para el caso en que ambos son diferentes. Se aplica el formalismo obtenido al estudio de burbujas cargadas.

7.1. Espacio–tiempos con un escalar de curvatura constante

Se comienza por construir una variedad compuesta por dos regiones descritas por las geometrías de la Ec. (5.1), tomando un escalar de curvatura que puede ser igual o diferente para cada una de ellas y separadas por una cáscara de materia. Se selecciona un radio a y se cortan dos regiones $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ definidas como la parte interna

$$\mathcal{M}_1 = \{X_1^\alpha = (t_1, r_1, \theta, \varphi)/0 \leq r_1 \leq a\}, \tag{7.1}$$

y la parte externa

$$\mathcal{M}_2 = \{X_2^\alpha = (t_2, r_2, \theta, \varphi)/r_2 \geq a\}, \tag{7.2}$$

de las geometrías 1 y 2 respectivamente. Esas regiones se pegan entre sí sobre una superficie Σ de radio a, haciendo las mismas identificaciones que en los capítulos precedentes. La construcción resultante es un espacio–tiempo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, con la zona interna correspondiente a $\mathcal{M}_1$ y la externa a $\mathcal{M}_2$. Nuevamente se puede definir una coordenada radial $r \in [0, +\infty)$ tomando $r = r_1$ en $\mathcal{M}_1$ y $r = r_2$ en $\mathcal{M}_2$. El salto a través de Σ de cualquier cantidad está definido por la Ec. (2.29). Las normales unitarias $n_\gamma^{1,2}$ ($n_\gamma n^\gamma = 1$) sobre la superficie Σ están dadas por la

Ec. (2.32) y apuntan desde $\mathcal{M}_1$ hacia $\mathcal{M}_2$, la primer forma fundamental $h_{\mu\nu}$ viene dada por la Ec. (2.31), y la segunda forma fundamental (o curvatura extrínseca) $K_{\mu\nu}$ por la Ec. (2.34). La construcción debe cumplir con la continuidad de la primer forma fundamental, es decir $[h_{\mu\nu}] = 0$, lo que asegura que $\mathcal{M}$ sea geodésicamente completa. Como se ha explicado en detalle en la Sec. 3.5, el formalismo de juntura en teorías de gravedad $F(R)$ agrega condiciones adicionales a las de la relatividad general. Una de ellas es la continuidad de la traza de la segunda forma fundamental, es decir $[K^{\mu}{}_{\mu}] = 0$. Cuando $F'''(R) \neq 0$ también es necesaria la condición de la continuidad de R sobre la superficie Σ, es decir $[R] = 0$. Como se estudió en la Sec. 3.5, las ecuaciones para el cálculo del tensor de energía–momento sobre Σ toman la forma dada por la Ec. (3.25). Si $F'''(R) = 0$, el escalar de curvatura puede ser discontínuo en Σ y las ecuaciones sobre la cáscara resultan ser las que muestra la Ec. (3.35). También existen otras contribuciones como un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_{\mu}$ dado por la Ec. (3.45),una presión o tensión escalar externa $\mathcal{T}$ dada por la Ec. (3.46) y una distribución tensorial simétrica doblemente covariante $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ dada por la Ec. (3.47) o equivalentemente por la Ec. (3.48). Como se vio en detalle en la Sec. 3.5.2, todas estas contribuciones, aparte del tensor de energía–momento en la cáscara $S_{\mu\nu}$, son necesarias para asegurar que el tensor de energía–momento total tenga divergencia nula, garantizando su conservación localmente. En teorías $F(R)$ no lineales, las condiciones para el pegado adecuado sin una cáscara delgada son más demandantes que en relatividad general, además de pedir $[h_{\mu\nu}] = 0$ y $[K_{\mu\nu}] = 0$, las relaciones $[R] = 0$ y $[\nabla_{\gamma} R] = 0$ también son requeridas.

Primero se analiza el escenario con un escalar de curvatura constante R_0 a ambos lados de Σ. Por ello la condición $[R] = 0$ es automáticamente satisfecha, y las Ecs. (3.25) y (3.35) toman la forma de la Ec. (4.3). En particular, en el caso cuadrático; $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_{\mu}$ y $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ son todos cero debido a que son proporcionales a $[R]$. De manera análoga a lo hecho en los Caps. 4 y 5, sobre la superficie Σ se adoptan las coordenadas $\xi^i = (\tau, \theta, \varphi)$, con τ el tiempo propio sobre la cáscara. El radio $a(\tau)$ es, de ahora en más, una función del tiempo propio. Se adopta una base ortonormal $\{e_{\hat{\tau}} = e_{\tau}, e_{\hat{\theta}} = a^{-1} e_{\theta}, e_{\hat{\varphi}} = (a \sin\theta)^{-1} e_{\varphi}\}$ sobre la cáscara de las geometrías (5.1). En este marco, la primer forma fundamental es simplemente $h^{1,2}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$, las normales unitarias toman la forma

$$n^{1,2}_{\gamma} = \left(-\dot{a}, \frac{\sqrt{A_{1,2}(a) + \dot{a}^2}}{A_{1,2}(a)}, 0, 0 \right), \tag{7.3}$$

y las componente no nulas de la segunda forma fundamental se pueden escribir como

$$K^{1,2}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = K^{1,2}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{1}{a} \sqrt{A_{1,2}(a) + \dot{a}^2} \tag{7.4}$$

y

$$K^{1,2}_{\hat{\tau}\hat{\tau}} = -\frac{A'_{1,2}(a) + 2\ddot{a}}{2\sqrt{A_{1,2}(a) + \dot{a}^2}}. \tag{7.5}$$

Usando las Ecs. (7.4) y (7.5), la condición $[K^{\hat{i}}{}_{\hat{i}}] = 0$ resulta en

$$-\frac{2a\ddot{a} + aA_1'(a) + 4(A_1(a) + \dot{a}^2)}{\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}} + \frac{2a\ddot{a} + aA_2'(a) + 4(A_2(a) + \dot{a}^2)}{\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}} = 0. \tag{7.6}$$

Recordando que el tensor de energía–momento en la base ortonormal tiene la forma $S_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(\sigma, p_{\hat{\theta}}, p_{\hat{\varphi}})$ con σ la densidad de energía y $p_{\hat{\theta}} = p_{\hat{\varphi}} = p$ la presión transversal

$$\sigma = \frac{F'(R_0)}{2\kappa}\left(\frac{2\ddot{a} + A_2'(a)}{\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}} - \frac{2\ddot{a} + A_1'(a)}{\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}}\right) \tag{7.7}$$

y

$$p = \frac{-F'(R_0)}{\kappa a}\left(\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2} - \sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}\right). \tag{7.8}$$

Se prefiere que la cáscara esté constituida por materia normal, satisfaciendo la condición de energía débil, o sea, $\sigma \geq 0$ y $\sigma + p \geq 0$. Como se mencionó en capítulos anteriores, se trabaja con $F'(R) > 0$ para evitar la presencia de fantasmas. De las Ecs. (7.6), (7.7), y (7.8) se puede ver que las condiciones de juntura requieren una ecuación de estado como la que muestra la Ec. (4.11). Al combinar la derivada de esta ecuación con la Ec. (7.7) y (7.8), es fácil de ver que también la ecuación de conservación (4.12) se satisface.

Para el caso estático de cáscaras con radio constante a_0, la Ec. (7.6) se reduce a

$$-\frac{a_0A_1'(a_0) + 4A_1(a_0)}{\sqrt{A_1(a_0)}} + \frac{a_0A_2'(a_0) + 4A_2(a_0)}{\sqrt{A_2(a_0)}} = 0. \tag{7.9}$$

A partir de las Ec. (7.7) y (7.8), la densidad de energía superficial σ_0 y la presión p_0 quedan determinadas por

$$\sigma_0 = \frac{F'(R_0)}{2\kappa}\left(\frac{A_2'(a_0)}{\sqrt{A_2(a_0)}} - \frac{A_1'(a_0)}{\sqrt{A_1(a_0)}}\right) \tag{7.10}$$

y

$$p_0 = \frac{-F'(R_0)}{\kappa a_0}\left(\sqrt{A_2(a_0)} - \sqrt{A_1(a_0)}\right). \tag{7.11}$$

Se procede entonces a estudiar la estabilidad de las soluciones estáticas ante perturbaciones que preservan la simetría esférica. Teniendo en cuenta que $\ddot{a} = (1/2)d(\dot{a}^2)/da$ y definiendo

$$z = \sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2} - \sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2},$$

es fácil ver que la Ec. (7.6) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$az'(a) + 2z(a) = 0. \tag{7.12}$$

Al integrar esta ecuación, se obtiene

$$\sqrt{A_2(a)+\dot{a}^2}-\sqrt{A_1(a)+\dot{a}^2}=\frac{a_0^2}{a^2}\left(\sqrt{A_2(a_0)}-\sqrt{A_1(a_0)}\right), \tag{7.13}$$

de la cual se puede despejar $\dot{a}^2$ y entenderse en términos de un potencial

$$\dot{a}^2=-V(a), \tag{7.14}$$

donde

$$V(a)=-\frac{a_0^4\left(\sqrt{A_2(a_0)}-\sqrt{A_1(a_0)}\right)^2}{4a^4}+\frac{A_1(a)+A_2(a)}{2}-\frac{a^4\left(A_2(a)-A_1(a)\right)^2}{4a_0^4\left(\sqrt{A_2(a_0)}-\sqrt{A_1(a_0)}\right)^2}. \tag{7.15}$$

No es difícil de verificar que $V(a_0)=0$ y, usando la Ec. (7.9), que también $V'(a_0)=0$. La derivada segunda del potencial, evaluado en a_0, toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} V''(a_0) \;=\; & -\frac{5\left(\sqrt{A_2(a_0)}-\sqrt{A_1(a_0)}\right)^2}{a_0^2}-\frac{3\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2}{a_0^2} \\ & -\frac{\left(A_2'(a_0)-A_1'(a_0)\right)^2}{2\left(\sqrt{A_2(a_0)}-\sqrt{A_1(a_0)}\right)^2}-\frac{4\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2\left(A_2'(a_0)-A_1'(a_0)\right)}{a_0\left(A_2(a_0)-A_1(a_0)\right)} \\ & +\frac{A_1''(a_0)+A_2''(a_0)}{2}-\frac{\left(\sqrt{A_1(a_0)}+\sqrt{A_2(a_0)}\right)^2\left(A_2''(a_0)-A_1''(a_0)\right)}{2\left(A_2(a_0)-A_1(a_0)\right)}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Una configuración estática con radio a_0 será estable sí y sólo sí cumple $V''(a_0)>0$, lo que corresponde a un mínimo del potencial, como se explica en el Apéndice B.

7.2. Escalares de curvatura diferentes: el caso cuadrático

Cuando se trabaja con escalares de curvatura constantes pero diferentes a ambos lados de la cáscara, es decir $R_1\neq R_2$, se debe restringir el estudio al caso cuadrático donde $F(R)=R-2\Lambda+\alpha R^2$. La derivada $F'(R)=1+2\alpha R$ sólo depende del parámetro α. Este caso no demanda la condición extra de continuidad de R sobre la superficie Σ, o sea que $[R]\neq 0$ está permitido. Lo que se requiere pedir únicamente son las continuidades de la primer forma fundamental y de la traza de la segunda forma fundamental, o sea $[h_{\mu\nu}]=0$ y $[K^{\mu}{}_{\mu}]=0$. Luego el radio de la cáscara a debe

satisfacer la Ec. (7.6). Las ecuaciones de campo dadas por la Ec. (3.35) se reducen a la Ec. (5.7). Usando nuevamente que $S_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(\sigma, p, p)$, se puede obtener entonces que la densidad de energía y la presión transversal vienen dadas por

$$\sigma = -\frac{2\ddot{a} + A_1'(a)}{2\kappa\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}}\left(1 + 2\alpha R_1\right) + \frac{2\ddot{a} + A_2'(a)}{2\kappa\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}}\left(1 + 2\alpha R_2\right), \tag{7.17}$$

$$p = \frac{\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}}{\kappa a}\left(1 + 2\alpha R_1\right) - \frac{\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}}{\kappa a}\left(1 + 2\alpha R_2\right), \tag{7.18}$$

respectivamente. Se asume que $F'(R_1) = 1+2\alpha R_1 > 0$ y $F'(R_2) = 1+2\alpha R_2 > 0$ para prevenir la presencia de fantasmas. Se pide que la materia sobre Σ sea normal, por lo cual debe satisfacer la condición de energía débil dada por la Ec. (2.25). De la Ec. (3.45) se puede ver que $\mathcal{T}_\mu = 0$ y gracias a la Ec. (3.46) el escalar de presión/tensión externa $\mathcal{T}$ resulta ser

$$\mathcal{T} = \frac{2\alpha[R]}{\kappa\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}}\left(\ddot{a} + \frac{A_1'(a)}{2} + \frac{2}{a}\left(A_1(a) + \dot{a}^2\right)\right), \tag{7.19}$$

el cual usando la Ec. (7.6) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\mathcal{T} = -\frac{2a\ddot{a} + aA_1' + 4\left(A_1(a) + \dot{a}^2\right)}{\kappa a\sqrt{A_1(a) + \dot{a}^2}}\alpha R_1 + \frac{2a\ddot{a} + aA_2' + 4\left(A_2(a) + \dot{a}^2\right)}{\kappa a\sqrt{A_2(a) + \dot{a}^2}}\alpha R_2. \tag{7.20}$$

Con la ayuda de las Ecs. (7.17), (7.18), y (7.20) se encuentra que la ecuación de estado que relaciona σ, p, y $\mathcal{T}$ está nuevamente dada por la Ec. (5.16). Al considerar la derivada temporal de esta ecuación y usando las Ecs. (7.17) y (7.18), fácilmente es posible obtener la ecuación de continuidad generalizada dada por la Ec. (5.17) o equivalentemente la Ec. (5.18). La distribución de capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, que se obtiene de la Ec. (3.48), debe satisfacer la Ec. (5.19). La fuerza de la distribución de la capa doble, en una base ortonormal, tiene componentes dadas por la Ec. (5.20) las cuales dependen de α y $[R]$, por lo que la dependencia de $\mathcal{T}_{\hat{i}\hat{j}}$ con la métrica se produce a través de la derivada covariante.

Para determinar las soluciones estáticas posibles, el radio a_0 debe satisfacer la Ec. (7.9), La densidad de energía superficial σ_0, la presión p_0, y la presión/tensión externa $\mathcal{T}_0$ toman la siguiente forma

$$\sigma_0 = -\frac{A_1'(a_0)}{2\kappa\sqrt{A_1(a_0)}}\left(1 + 2\alpha R_1\right) + \frac{A_2'(a_0)}{2\kappa\sqrt{A_2(a_0)}}\left(1 + 2\alpha R_2\right), \tag{7.21}$$

$$p_0 = \frac{\sqrt{A_1(a_0)}}{\kappa a_0}\left(1 + 2\alpha R_1\right) - \frac{\sqrt{A_2(a_0)}}{\kappa a_0}\left(1 + 2\alpha R_2\right) \tag{7.22}$$

y

$$\mathcal{T}_0 = -\frac{a_0 A_1'(a_0) + 4A_1(a_0)}{\kappa a_0 \sqrt{A_1(a_0)}}\alpha R_1 + \frac{a_0 A_2'(a_0) + 4A_2(a_0)}{\kappa a_0 \sqrt{A_2(a_0)}}\alpha R_2, \tag{7.23}$$

respectivamente. En este caso, la ecuación de estado resulta ser $\sigma_0 - 2p_0 = \mathcal{T}_0$. El vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu^{(0)}$ es cero y hay una distribución de capa doble diferente de cero $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(0)}$ que satisface la Ec. (5.19), con $n^t \nabla_t \Psi^{\mu\nu} = 0$. La fuerza del dipolo está dada por la Ec. (5.20).

Del mismo modo que en la Sec. 7.1, se utiliza un potencial $V(a)$ para el análisis de estabilidad de las configuraciones estáticas, que resulta nuevamente dado por la Ec. (7.15). Las mismas son estables cuando su derivada segunda, determinada por la Ec. (7.16), satisface que $V''(a_0) > 0$.

7.3. Burbujas con carga: $R_1 = R_2 = R_0$

Para trabajar con cáscaras cargadas, se parte de la solución esféricamente simétrica dada por la Ec. (3.19). Como se mencionó en la Sec. 3.4, en esta solución, el potencial electromagnético está dado por $\mathcal{A}_\mu = (\mathcal{V}(r), 0, 0, 0)$ con $\mathcal{V}(r) = -Q/r$. El escalar de curvatura constante y la constante cosmológica se relacionan a través de $R_0 = 4\Lambda_0$. Para construir las burbujas se considera dicha función métrica y se toma $M = 0$ y $Q = 0$ para la región interna $\mathcal{M}_1$ y $M \neq 0$ and Q para la externa $\mathcal{M}_2$. A ambos lados de la cáscara se adopta el mismo escalar de curvatura R_0. De esta forma, las funciones métricas resultan tener la forma

$$A_1(r) = 1 - \frac{R_0 r^2}{12} \tag{7.24}$$

para la zona interna y

$$A_2(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{F'(R_0) r^2} - \frac{R_0 r^2}{12} \tag{7.25}$$

para la externa. Los posibles horizontes están determinados por los ceros de las expresiones $A_1(r)$ y $A_2(r)$. La geometría dada por la Ec. (7.24) presenta solamente un horizonte cosmológico cuando $R_0 > 0$, y en el caso $R_0 \leqslant 0$ carece de horizontes. Para la región dada por la Ec. (7.25), la métrica es singular en $r = 0$, y cuando $R_0 = 0$ los horizontes quedan determinados por las soluciones de la ecuación cuadrática resultante, mientras que para $R_0 \neq 0$ los horizontes están dados por las raíces de un polinomio de grado cuatro. Existe un valor crítico de carga Q_c para el cual el número de horizontes cambia, por lo que juega un rol importante en el estudio de las soluciones. Para $R_0 > 0$ la métrica siempre presenta un horizonte cosmológico, además, si $0 < |Q| < Q_c$ tiene un horizonte interno y otro de eventos. Cuando

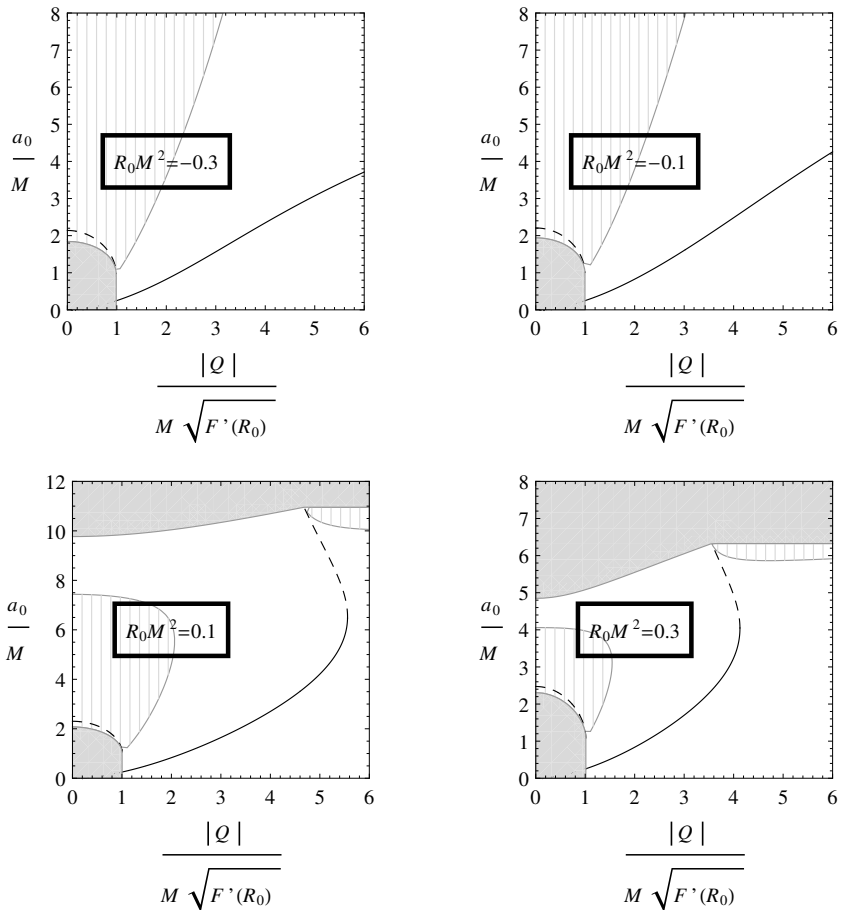

Figura 7.1: Burbujas en teorías $F(R)$ para diferentes valores del escalar de curvatura R_0. Las líneas de trazo continuo representan las soluciones estáticas estables de radio a_0, mientras que las líneas punteadas representan las soluciones inestables. La masa M y la carga Q corresponden a la geometría exterior. Las zonas rayadas corresponden a aquellas donde la materia en la cáscara satisface la condición de energía débil. Las zonas grises carecen de significado físico.

$|Q| = Q_c$ ambos se fusionan en uno hasta desaparecer para $|Q| > Q_c$, en cuyo caso sólo se encuentra una singularidad desnuda en el origen. Para $R_0 < 0$ no hay horizonte cosmológico, si $|Q| < Q_c$ el horizonte interno y el de eventos están presentes, cuando $|Q| = Q_c$ se fusionan, y si $|Q| > Q_c$ sólo hay una singularidad desnuda sin horizonte alguno.

Para proceder a la construcción de las burbujas, se toma un radio a que satisfaga la Ec. (7.6) y que sea mayor al radio del horizonte de eventos proveniente de la métrica exterior pero que a su vez también sea menor al radio de los (posibles) horizontes cosmológicos de ambas regiones con las que se construyó esta nueva variedad.

De esta forma, el espacio–tiempo resultante carece de horizontes y singularidades en su parte interna, mientras que la parte externa puede, eventualmente, presentar un horizonte cosmológico. Como se ha discutido en las secciones previas, también es necesario que $F'(R_0) > 0$ y que la materia con la que se construye la burbuja cumpla la condición de energía débil definida en la Sec. 2.5 para garantizar que la construcción de Σ se realiza con materia normal. De esta forma, el espacio–tiempo, sin horizontes de eventos o internos, consiste en una región de vacío rodeada por una capa de materia cargada que es a su vez está embebida en una región de Sitter o de anti-de Sitter, dependiendo de si $R_0 > 0$ o $R_0 < 0$, respectivamente. El diagrama esquemático de la construcción se muestra en la Fig. 6.1.

En particular, el radio a_0 para las configuraciones estáticas tiene que ser solución de la Ec. (7.9) y satisfacer las desigualdades $\sigma_0 \geq 0$ y $\sigma_0 + p_0 \geq 0$ si la materia es normal. La densidad de energía y la presión están dadas por las Ecs. (7.10) y (7.11), respectivamente. Usando la Ec. (7.16) se determina la estabilidad de las soluciones, recordando que $V''(a_0) > 0$ corresponde a las estables. Los resultados se presentan gráficamente en la Fig. 7.1, eligiéndose los más representativos. Todas las cantidades están adimensionalizadas con la masa. Las zonas rayadas representan las cáscaras construidas con materia normal, y las zonas grises carecen de sentido físico. Con líneas de trazo continuo se representan las soluciones estables, mientras que las inestables se grafican con líneas punteadas. Según el signo de R_0 se tiene que

- Cuando $R_0 < 0$ hay una solución inestable para $|Q| < Q_c$, mientras que para valores mayores de carga $|Q|$ la solución estable requiere materia exótica, es decir que viola la condición de energía débil.

- Para $R_0 > 0$ existen dos soluciones inestables, una para valores pequeños de $|Q|$ que se extiende hasta la carga crítica, mientras que la otra requiere de materia exótica y se encuentra presente para valores grandes de $|Q|$. La solución estable aparece luego del valor de carga crítica Q_c y existe para un amplio rango de valores de carga $|Q|$, pero también requiere materia exótica.

La forma explícita de la función $F(R)$, que actúa por medio de su derivada $F'(R_0)$, no afecta el aspecto cualitativo de los resultados, sólo modifica las escalas generales, es decir que el cociente $|Q|/\sqrt{F'(R_0)}$ se puede interpretar como una carga efectiva.

7.4. Burbujas con carga: $R_1 \neq R_2$

Análogamente a la sección anterior, se construye la burbuja tomando $M = 0$ y $Q = 0$ para la región interna y $M \neq 0$ and Q para externa. Pero ahora se toman diferentes escalares de curvatura $R_1 \neq R_2$ a ambos lados de la cáscara. De esta

forma, las funciones métricas con las que se trabaja resultan ser

$$A_1(r) = 1 - \frac{R_1 r^2}{12} \tag{7.26}$$

y

$$A_2(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{(1+2\alpha R_2)r^2} - \frac{R_2 r^2}{12}, \tag{7.27}$$

donde $R_1 = 4\Lambda_1$ y $R_2 = 4\Lambda_2$. La métrica definida por la Ec. (7.26) tiene un horizonte cosmológico para $R_1 > 0$, mientras que para cualquier otro caso carece de horizontes. En el caso de la métrica dada por la Ec. (7.27), para $R_2 > 0$ presenta el horizonte cosmológico; además si $0 < |Q| < Q_c$ la métrica tiene un horizonte de eventos y un horizonte interno. Cuando $|Q| = Q_c$ esos horizonte coinciden fusionándose en uno. Para $|Q| > Q_c$ ambos desaparecen dejando una singularidad desnuda en el origen. Para $R_2 < 0$ no hay horizonte cosmológico, si $|Q| < Q_c$ la geometría tiene un horizonte interno y un horizonte de eventos que se fusionan cuando $|Q| = Q_c$, y si $|Q| > Q_c$ hay una singularidad desnuda sin horizontes.

La construcción se realiza análogamente a los descrito en la sección anterior. El radio de la burbuja a es solución de la Ec. (7.6) y debe ser elegido evitando la presencia de horizontes de eventos y singularidades. Así, el espacio–tiempo construido consiste en una región de vacío rodeada por una cáscara delgada de materia normal y cargada, que se encuentra embebida en una región de Sitter (si $R_2 > 0$) o anti-de Sitter (si $R_2 < 0$). Se toma $F'(R_1) = 1+2\alpha R_1 > 0$ y $F'(R_2) = 1+2\alpha R_2 > 0$ para evitar la presencia de fantasmas. En la región externa hay un campo electromagnético si $Q \neq 0$.

En el caso específico de configuraciones estáticas, el radio a_0 tiene que ser solución de la Ec. (7.9) y satisfacer las desigualdades $\sigma_0 \geq 0$ y $\sigma_0 + p_0 \geq 0$ para garantizar cáscaras de materia normal. Adoptando las funciones métricas (7.26) y (7.27), la densidad de energía superficial, la presión y la tensión/presión externa quedan determinadas por las Ecs. (7.21), (7.22), y (7.23), respectivamente. La cáscara presenta una distribución de dipolo no nula dada por la Ec. (5.20). Se analiza la estabilidad de las soluciones a través del estudio del signo de $V''(a_0)$. Los resultados se presentan en la Fig. 7.2, donde todas las cantidades están adimensionalizadas con la masa. Las regiones rayadas corresponden a las cáscaras de materia normal, mientras que las zonas grises carecen de sentido físico. El valor del parámetro α, elegido como $\alpha/M^2 = 0.1$ en la Fig. 7.2, no produce cambios significativos, desde el punto de vista cualitativo, en el comportamiento de las soluciones, y sólo resulta en cambios de escala. El cociente $|Q|/F'(R_2)$ se puede entender como una carga efectiva. Se observa que las soluciones tienen dos comportamientos diferentes que dependen de la relación entre los valores de R_1 y R_2 en vez del signo de cada uno, de modo que

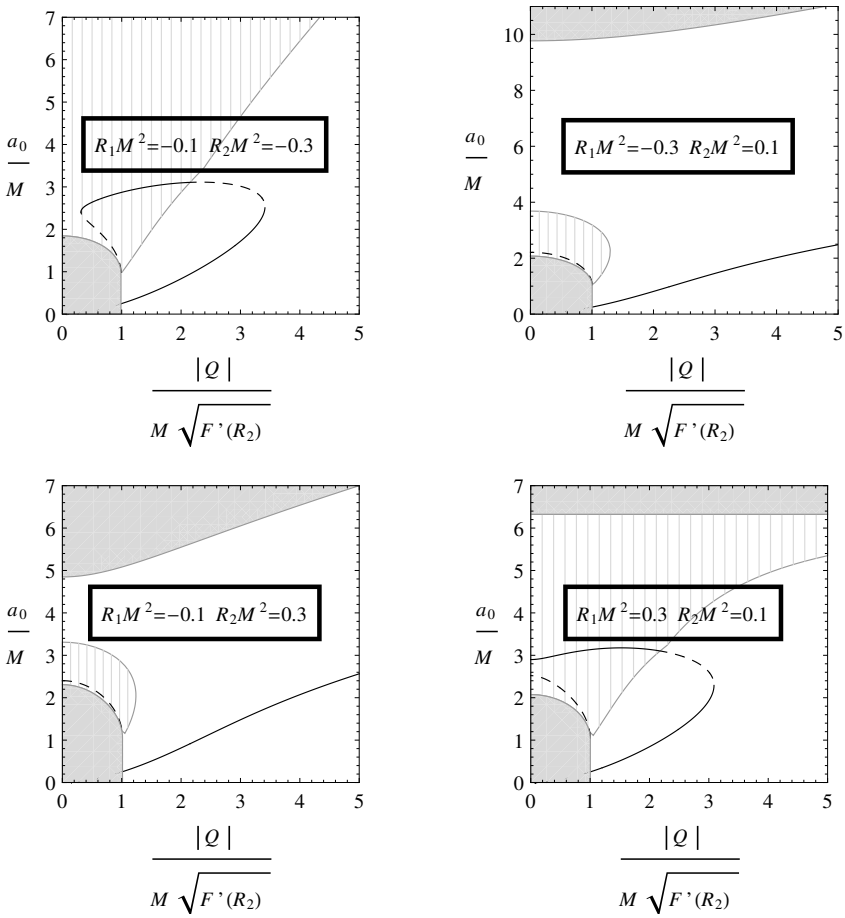

Figura 7.2: Burbujas en teorías $F(R)$ cuadráticas con diferentes valores de curvatura R_1 (región interna) y R_2 (región exterior). Las curvas de trazo continuo representan las soluciones estáticas estables con radio a_0, las curvas punteadas representan las soluciones inestables. La masa M y la carga Q corresponden a la geometría de la región exterior, $\alpha/M^2 = 0.1$, y $F'(R_2) = 1 + 2\alpha R_2$. En las zonas rayadas la materia satisface la condición débil de energía, mientras que las zonas grises carecen de sentido físico.

- Para $R_1 > R_2$ hay soluciones estables dado un rango acotado de valores de carga $|Q|$; estas soluciones existen antes y después de la carga crítica Q_c; en la de mayor radio, la cáscara está compuesta por materia normal. En particular, si R_1 y R_2 son elegidos adecuadamente, se puede encontrar soluciones estables con materia normal para valores pequeños de carga $|Q|$ e incluso para el caso sin carga, como lo muestra el gráfico inferior derecho de la Fig. 7.2.

- Para $R_1 < R_2$ no hay soluciones estables antes de la carga crítica Q_c; sólo hay

soluciones estables con materia exótica para cualquier valor de $|Q| > Q_c$.

7.5. Discusión

En este capítulo se presentó una clase amplia de espacio–tiempos esféricamente simétricos con cáscaras delgadas de materia, dentro del marco de las teorías de gravedad $F(R)$. En teorías $F(R)$ arbitrarias, las soluciones exactas con simetría esférica son muy difíciles de obtener sin imponer la condición de un escalar de curvatura constante. Por esta razón y por cuestiones de simplicidad, se adoptaron geometrías con escalares de curvatura constantes a ambos lados de la cáscara. En particular, se consideraron espacio–tiempos con el mismo escalar de curvatura R_0, en el cual no hay restricción alguna sobre la función $F(R)$. Pero en el caso de escalares de curvatura diferentes R_1 (interno) and R_2 (externo) a ambos lados de la cáscara, las condiciones de juntura restringen el estudio a $F(R)$ cuadráticas. Para espacio–tiempos con el mismo R_0, la cáscara tiene una densidad de energía superficial σ y una presión isotrópica p, relacionadas a través de $\sigma - 2p = 0$. En el caso cuadrático, con $R_1 \neq R_2$, existe también una presión/tensión externa $\mathcal{T}$ relacionada con σ y p a través de $\sigma - 2p = \mathcal{T}$. Adicionalmente al tensor de energía–momento, hay un vector de flujo de energía externo nulo $\mathcal{T}_\mu$, y una distribución tensorial de energía–momento de capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ proporcional a $\alpha(R_2 - R_1)$. En todos los casos, se presentó un análisis general de estabilidad de las configuraciones estáticas ante perturbaciones que conservan la simetría, en términos de un potencial.

Con la idea de proveer ejemplos concretos, se analizó el caso de burbujas esféricas, consistentes en una cáscara delgada de materia de masa M y carga Q, rodeando una región de vacío; por fuera de la misma hay presente un campo electromagnético. En estas burbujas se tomó el radio de la cáscara de forma tal que el horizonte de eventos (cuando existe de la métrica de partida) y su región interior no se encuentran en la variedad estudiada. De esta forma los problemas asociados con la estructura interna de la geometría original, tales como la presencia de singularidades o el horizonte de Cauchy (ver [95] y sus referencias) se evitan durante la construcción. El espacio–tiempo resulta ser de Sitter o anti-de Sitter, dependiendo de si el escalar de curvatura de la región externa es positivo o negativo, respectivamente. Siempre se pueden obtener soluciones estáticas inestables con materia normal sobre la cáscara. También se encontró que existen soluciones estables si los parámetros del modelo se eligen apropiadamente. En el caso de escalares de curvatura constantes e iguales a R_0, se halló que el comportamiento de las soluciones depende básicamente del signo de R_0. Para ambas posibilidades hay soluciones estables, pero requieren de materia exótica (ya que no satisfacen la condición de energía débil) para valores amplios de la carga "efectiva" $|Q|/(M\sqrt{F'(R_0)})$. En el caso de teorías $F(R)$ cuadráticas con $R_1 \neq R_2$ el comportamiento de las soluciones depende de la relación entre ambos

escalares de curvatura, es decir si $R_1 < R_2$ o $R_1 > R_2$. Cuando $R_1 < R_2$ se encuentran configuraciones estables sólo con materia exótica para un amplio intervalo de valores de $|Q|/(M\sqrt{F'(R_2)})$. Cuando $R_1 > R_2$ se obtienen soluciones estables construidas con materia normal para un rango acotado de valores de $|Q|/(M\sqrt{F'(R_2)})$ incluyendo el caso sin carga, siempre que se elija una combinación adecuada de los parámetros del modelo.

Capítulo 8

Cáscaras delgadas alrededor de agujeros negros en gravedad $F(R)$

En este capítulo se analiza la construcción de cáscaras delgadas cargadas alrededor de agujeros negros y se estudia la estabilidad de las configuraciones estáticas. El análisis se realiza para los casos de escalares de curvatura a los lados de la cáscara iguales y diferentes.

8.1. Consideraciones generales

Para el estudio de cáscaras delgadas alrededor de agujeros negros se procede de manera análoga a lo realizado en el Cap. 7. La construcción general de las cáscaras esféricas uniendo dos regiones con escalares de curvatura constantes y la estabilidad de las configuraciones estáticas se presentaron en las Secs. 7.1 y 7.2. A continuación se resumen las ecuaciones principales a utilizar, que serán aplicadas a un espacio–tiempo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ en el cual la parte interior $\mathcal{M}_1$ contiene un agujero negro, de modo que la cáscara queda por fuera de un horizonte de eventos. Las regiones $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ están definidas por las Ecs. (7.1) y (7.2), la superficie Σ tiene radio a y las normales unitarias quedan determinadas por la Ec. (7.3). En la base ortonormal la primer forma fundamental resulta ser $h^{1,2}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ y las componentes no nulas de la segunda forma fundamental están dadas por las Ecs. (7.4) y (7.5). Al utilizar estas ecuaciones, la condición impuesta por el formalismo, es decir, $[K^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\imath}}] = 0$ da como resultado la Ec. (7.6).

Cuando se tiene el mismo escalar de curvatura R_0 a ambos lados de la cáscara, el tensor de energía–momento en la base ortonormal toma la forma $S_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = \mathrm{diag}(\sigma, p_{\hat{\theta}}, p_{\hat{\varphi}})$ con σ la densidad de energía dada por la Ec. (7.7) y $p_{\hat{\theta}} = p_{\hat{\varphi}} = p$ la presión transversal dada por la Ec. (7.8). Las Ecs. (7.6), (7.7), y (7.8) fuerzan una ecuación de estado dada por $\sigma - 2p = 0$. Todas estas magnitudes verifican la ecuación de conservación

(4.12). Para cáscaras estáticas de radio constante a_0, la Ec. (7.6) se reduce a la Ec. (7.9), mientras que la densidad de energía superficial σ_0 y la presión p_0, dadas por las Ec. (7.7) y (7.8) respectivamente, quedan reducidas a las Ecs. (7.10) y (7.11) para dicho caso. Trabajando la Ec. (7.6) de la forma en que se explica en el Cap. 7, se obtiene una expresión del tipo $\dot{a}^2 = -V(a)$ donde $V(a)$ se entiende como el potencial dado por la Ec. (7.15). Dicha expresión verifica que $V(a_0) = 0$ y, con el uso de la Ec. (7.9), también que $V'(a_0) = 0$. La derivada segunda del potencial evaluado en a_0 toma la forma de la Ec. (7.16), expresión que determina la estabilidad de las soluciones estáticas ante perturbaciones que preservan la simetría esférica, siendo estables sí y sólo sí se satisface que $V''(a_0) > 0$.

Si los escalares de curvatura son diferentes, o sea $R_1 \neq R_2$ (caso $F(R)$ cuadrático), la densidad de energía queda determinada por la Ec. (7.17) y la presión por la Ec. (7.18), que se reducen a las Ecs. (7.21) y (7.22) respectivamente cuando se toma radio constante a_0. Además se tiene una tensión/presión externa $\mathcal{T}$ dada por la Ec. (7.19), que cumple la ecuación de estado $\sigma - 2p = \mathcal{T}$ y que en el caso estático se reduce a la Ec. (7.23). La estabilidad de las configuraciones estáticas ante perturbaciones con simetría esférica queda determinada nuevamente por el potencial de la Ec. (7.15), de modo que usando la Ec. (7.16) una solución es estable si cumple que $V''(a_0) > 0$.

En la construcción de este tipo de cáscaras se prefiere que la materia que la conforma sea normal, por lo que se debe satisfacer la condición de energía débil dada por las desigualdades de la Ec. (2.25). De la misma forma que se ha remarcado en el capítulo anterior, se asume $F'(R) > 0$ para garantizar que la constante de Newton efectiva sea positiva, evitando la aparición de fantasmas.

8.2. Cáscaras cargadas rodeando agujeros negros: caso $R_1 = R_2 = R_0$

Para la construcción de la cáscara se toma la función métrica interna correspondiente a $\mathcal{M}_1$ como aquélla dada por la Ec. (3.19) con masa $M_1 \neq 0$ y carga nula y para la externa $\mathcal{M}_2$ con masa $M_2 \neq 0$ y carga Q. A ambos lados de la cáscara se toma el mismo escalar de curvatura R_0. Es decir que las funciones métricas quedan determinadas de la siguiente manera

$$A_1(r) = 1 - \frac{2M_1}{r} - \frac{R_0 r^2}{12} \tag{8.1}$$

para la zona interna y

$$A_2(r) = 1 - \frac{2M_2}{r} + \frac{Q^2}{F'(R_0)r^2} - \frac{R_0 r^2}{12} \tag{8.2}$$

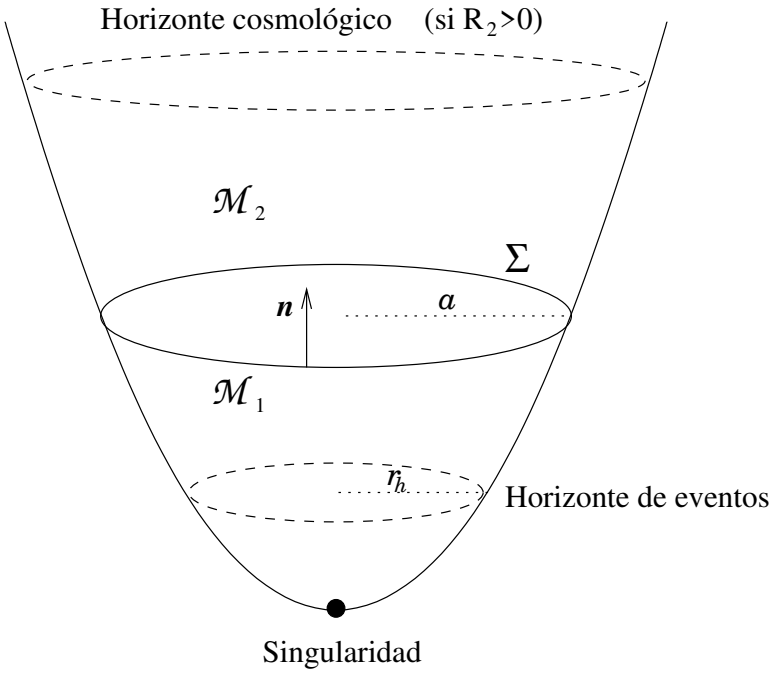

Figura 8.1: Diagrama esquemático de la cáscara alrededor de un agujero negro en gravedad $F(R)$. La variedad $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ contiene un agujero negro en la región $\mathcal{M}_1$. La normal unitaria $\mathbf{n}$ a la cáscara ubicada en Σ está direccionada de $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$.

para la externa. Los horizontes resultan de hallar los ceros de las expresiones $A_1(r)$ y $A_2(r)$. Ambas métricas son singulares en $r = 0$. Cuando $A_1(r) = 0$ se obtiene un polinomio de grado tres cuyos ceros representan los radios de los diferentes horizontes. Se tiene un horizonte de eventos cuando $R_0 \leqslant 0$. Cuando $0 < R_0 < 4/(9M_1^2)$ se encuentra presente un horizonte cosmológico además del horizonte de eventos. Si $M_1 = 0$ se recupera la descripción y las características detalladas en la Sec. 7.3. Para la región dada por la Ec. (8.2), los horizontes quedan determinados por las soluciones de la ecuación cuadrática resultante cuando $R_0 = 0$, mientras que para $R_0 \neq 0$ los horizontes están dados por las raíces de un polinomio de grado cuatro. El valor crítico de carga Q_c tiene un rol importante en el estudio de las soluciones, ya que determina el número de horizontes presentes en una construcción. Para $R_0 > 0$ la métrica tiene un horizonte cosmológico. Si en particular $0 < |Q| < Q_c$ presenta un horizonte interno y otro de eventos. Cuando $|Q| = Q_c$ ambos se fusionan en uno hasta desaparecer y a partir de $|Q| > Q_c$, sólo se encuentra una singularidad desnuda en el origen. Si $R_0 < 0$ y $|Q| < Q_c$ se encuentran dos horizontes, el horizonte interno y el de eventos. Cuando $|Q| = Q_c$ se fusionan, y si $|Q| > Q_c$ sólo se presenta una singularidad desnuda. El esquema de la construcción se muestra en la Fig. 8.1.

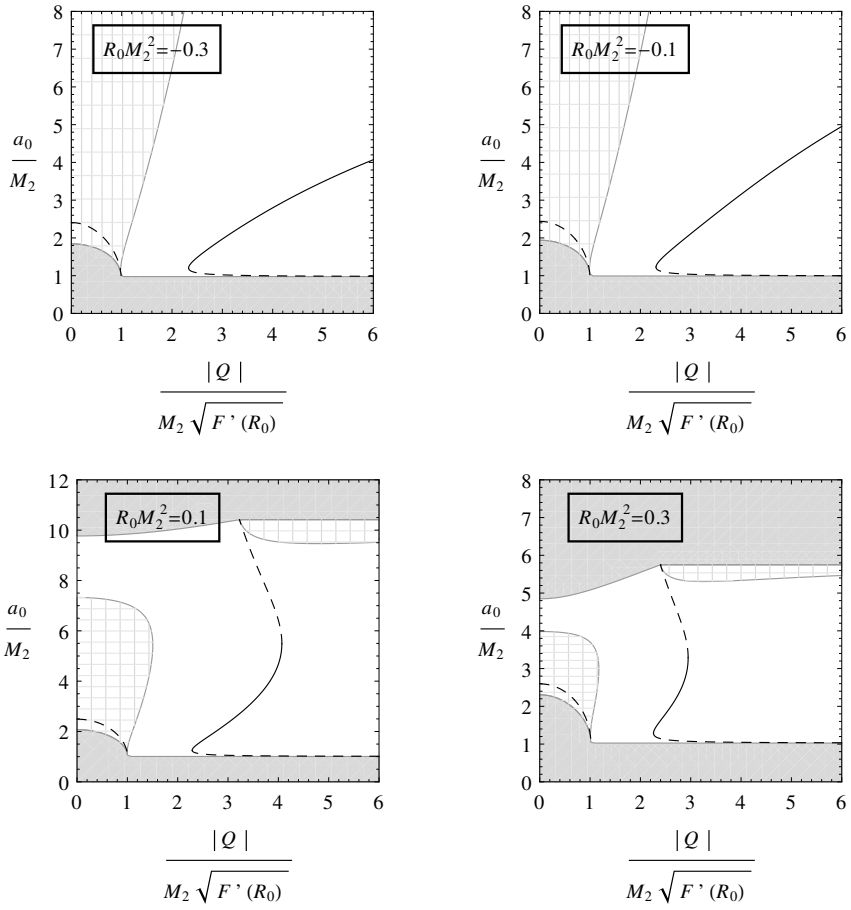

Figura 8.2: Cáscaras alrededor de agujeros negros en gravedad $F(R)$, para diferentes valores del escalar de curvatura R_0. Las líneas de trazo continuo representan las soluciones estáticas estables de radio a_0, mientras que las líneas punteadas representan las soluciones inestables. Las masas satisfacen la relación $M_1/M_2 = 0.5$ y se adopta $\alpha/M_2^2 = 0.1$. La carga Q corresponde a la geometría exterior. La zonas rayadas representan materia normal, mientras que las zonas grises carecen de significado físico.

Para la construcción de las cáscaras se elige el radio a que satisfaga la Ec. (7.6) y que sea mayor que el correspondiente al horizonte de eventos en $\mathcal{M}_1$ y en el caso que $R_0 > 0$ lo suficientemente pequeño como para eliminar el horizonte cosmológico en $\mathcal{M}_1$. Por otro lado, el radio a debe ser lo suficientemente grande como para remover el horizonte de eventos y la singularidad proveniente de la variedad original que se utiliza para la región $\mathcal{M}_2$ y también menor que su horizonte cosmológico si $R_0 > 0$. Como se comentó en la sección anterior, también se necesita que $F'(R_0) > 0$ para evitar fantasmas y que la materia con la que se construye la cáscara cumpla

la condición de energía débil (2.25) para garantizar la presencia de materia normal sobre Σ. La densidad de energía y la presión están dadas por las Ecs. son (7.7) y (7.8), respectivamente.

En el caso estático, con radio a_0, se debe cumplir la Ec. (7.9), mientras que σ_0 y p_0 están dadas por las Ecs. (7.10) y (7.11). A partir del potencial (7.15), y usando la Ec. (7.16) se puede determinar la estabilidad de las soluciones recordando que $V''(a_0) > 0$ corresponde a las estables.

Los resultados se presentan gráficamente en la Fig. 8.2, eligiéndose los más representativos. Todas las cantidades están adimensionalizadas con la masa M_2, y se toma $\alpha/M_2^2 = 0.1$. Las zonas rayadas representan las soluciones que satisfacen las condiciones de energía débil, y las zonas grises las que carecen de sentido físico. Las líneas de trazos continuos representan las soluciones estables, mientras que las inestables se dibujan con líneas punteadas. El comportamiento de las soluciones no varía significativamente con el valor en módulo del escalar de curvatura R_0 sino con su signo, resultando que

- Cuando $R_0 < 0$, para valores de $|Q| < Q_c$, hay una sola solución inestable compuesta por materia normal. Para valores mayores de carga, se encuentran dos soluciones con materia exótica, una de ellas es estable mientras que la otra, cercana al horizonte de eventos del agujero negro, es inestable.

- Para $R_0 > 0$ se encuentra una solución inestable de materia normal para $|Q| < Q_c$. Para valores $|Q| > Q_c$ y un rango acotado de carga, se encuentran tres soluciones compuestas por materia exótica, una de las cuales es estable. Para valores mucho mayores que Q_c sólo existe una solución inestable cercana al horizonte de eventos del agujero negro.

La función $F(R_0)$, que actúa a través de su derivada, no produce alteraciones significativas en el comportamiento de las soluciones, sino solamente un cambio de escala. Como en capítulos anteriores, se puede interpretar el cociente $|Q|/\sqrt{F'(R_0)}$ como una carga efectiva.

8.3. Caso cuadrático con $R_1 \neq R_2$

De forma análoga a la sección anterior, se construye la cáscara tomando la masa $M_1 \neq 0$ y carga nula para la región interna $\mathcal{M}_1$, y para la externa $\mathcal{M}_2$ se considera la masa $M_2 \neq 0$ y la carga Q. Ahora se toman diferentes escalares de curvatura a ambos lados de la cáscara Σ, por lo que $[R] \neq 0$. Las funciones métricas por lo tanto son

$$A_1(r) = 1 - \frac{2M_1}{r} - \frac{R_1 r^2}{12} \tag{8.3}$$

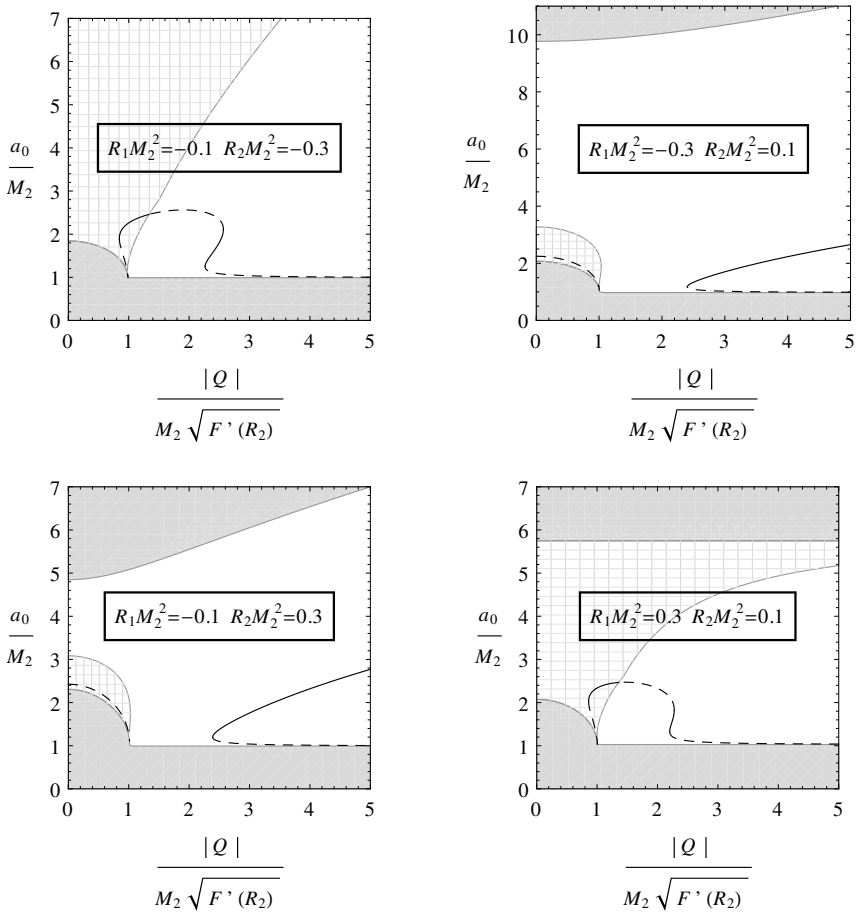

Figura 8.3: Cáscaras alrededor de agujeros negros en gravedad $F(R)$, para diferentes valores de los escalares de curvatura R_1 y R_2. Las líneas de trazo continuo representan las soluciones estáticas estables de radio a_0, mientras que las líneas punteadas representan las soluciones inestables. Las relación de masas utilizada es $M_1/M_2 = 0.5$ y se tomó $\alpha/M_2^2 = 0.1$. La carga Q corresponde a la geometría exterior. La zonas rayadas representan materia normal y las zonas grises carecen de significado físico.

y

$$A_2(r) = 1 - \frac{2M_2}{r} + \frac{Q^2}{F'(R_2)r^2} - \frac{R_2 r^2}{12}. \tag{8.4}$$

Los horizontes se encuentran de la misma forma explicada en la sección previa, y mantienen las mismas características descritas anteriormente.

El radio de la cáscara debe cumplir la Ec. (7.6); la densidad de energía superficial queda determinada por la Ec. (7.17), la presión por la Ec. (7.18) y la tensión/presión externa por la Ec. (7.19). Estas tres ecuaciones determinan, junto con la Ec. (7.6),

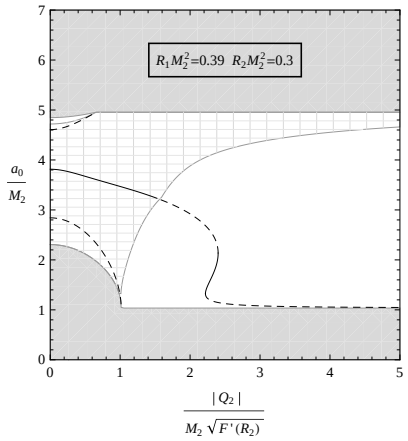

Figura 8.4: Idem Fig. 8.3, pero con $R_1 = 0.39$ y $R_2 = 0.3$. Se observa que puede existir una solución estable con materia normal y carga nula en la cáscara.

la ecuación de estado $\sigma - 2p = \mathcal{T}$. Derivando esta expresión y utilizando las Ec. (7.17) y (7.18) se mostró que cumplen con la ecuación de continuidad generalizada (5.18). Además $\mathcal{T}_\mu = 0$ y como $[R] \neq 0$, la densidad dipolar, dada por la Ec. (5.20), es diferente de cero.

En el caso estático, la construcción de la cáscara se realiza eligiendo un radio a_0 que cumpla la Ec. (7.9), la condición de energía débil (2.25) y se garantiza que $F'(R_) > 0$ para evitar la presencia de fantasmas. La densidad de energía superficial, la presión y la tensión/presión externa se obtiene de las Ecs. (7.21), (7.22), y (7.23), respectivamente. Como se mencionó anteriormente, se encuentra presente una distribución dipolar no nula dada por la Ec. (5.20). La estabilidad de las soluciones queda determinada a través del estudio del signo de $V''(a_0)$, utilizando para ello la Ec.(7.16), que garantiza la estabilidad de la solución cuando $V''(a_0) > 0$.

Los resultados se presentan en la Fig. 8.3. Las cantidades están adimensionalizadas con la masa M_2, y se utilizó nuevamente que $\alpha/M_2^2 = 0.1$. Las zonas rayadas son aquellas en donde la solución requiere materia normal, mientras que las zonas grises carecen de sentido físico. Las líneas de trazos continuos representan las soluciones estables y las punteadas las inestables. El comportamiento de las soluciones depende principalmente de la relación entre los valores de los escalares de curvatura R_1 y R_2, de manera que

- Para $R_1 > R_2$ y valores de carga cercanos a Q_c, se encuentran dos soluciones, una estable y otra inestable, ambas compuestas por materia normal. Para valores mayores de carga predominan las soluciones inestables compuestas por materia exótica. Sólo para un rango acotado de valores de carga se halla una solución estable con materia exótica.

- Para $R_1 < R_2$ y valores de carga $|Q| < Q_c$ se encuentra una solución inestable constituida de materia normal. Para $|Q| > Q_c$ y para un amplio rango de valores de carga, se hallan dos soluciones compuestas de materia exótica, una de ellas estable.

En particular, para una adecuada elección de los valores de los parámetros del modelo, es posible hallar una solución estable de materia normal y sin carga, como se muestra en la Fig. 8.4.

8.4. Discusión

Extendiendo lo realizado en el Cap. 7, en este capítulo se estudió el caso de cáscaras con simetría esférica alrededor de agujeros negros, dentro de las teorías de gravedad $F(R)$. Se trabajó utilizando escalares de curvatura constantes a ambos lados de la cáscara y se estudiaron dos casos: uno donde los escalares de curvatura son iguales con valor R_0, y el otro donde los escalares de curvatura son diferentes $R_1 \neq R_2$. Al igual que en capítulos anteriores, el caso con escalares de curvatura iguales R_0 no impone ninguna limitación sobre la función $F(R)$ utilizada. La cáscara construida de esta forma presenta una ecuación de estado del tipo $\sigma - 2p = 0$. Para el caso de escalares de curvatura diferentes, o sea $R_1 \neq R_2$, es necesario restringirse al caso de $F(R)$ cuadrática. La cáscara que se construye de este modo está compuesta por una materia que satisface la ecuación de estado $\sigma - 2p = \mathcal{T}$ y presenta además las magnitudes $\mathcal{T}_\mu = 0$ y $\mathcal{T}_{\mu\nu} \neq 0$.

En particular, se construyó una cáscara delgada de materia alrededor de un agujero negro estático de masa M_1 y sin carga. La geometría por fuera de la cáscara corresponde a una solución con masa M_2 y carga Q. Para el caso de escalares de curvatura iguales R_0 a ambos lados de la cáscara, el comportamiento de las soluciones queda determinado por el signo del escalar de curvatura, y siempre es posible hallar soluciones inestables de materia normal. En cambio, no se hallaron soluciones estables constituidas por materia normal; aquellas que son estables se encuentran para rangos acotados de carga en el caso $R_0 > 0$ o para amplios valores de carga en el caso $R_0 < 0$, pero siempre construidas con materia exótica. Este resultado es similar al que se halló en el Cap. 7 para burbujas, con la principal diferencia de que en las cáscaras que rodean agujeros negros se encuentra una solución extra, inestable y constituida por materia exótica, con valores de radio cercanos al del horizonte de eventos. Para el caso de escalares de curvatura $R_1 \neq R_2$, las soluciones tienen comportamientos diferentes dependiendo de la relación entre los valores de R_1 y R_2. Sólo en el caso de $R_1 > R_2$ se pudo hallar soluciones estables constituidas por materia normal para valores de carga cercanos a Q_c. El resto de las soluciones son inestables y están formadas por materia exótica, con la excepción de un pequeño rango de

valores de carga en donde la cáscara es estable y está constituida por materia exótica. Cuando $R_1 < R_2$ se hallaron solamente soluciones inestables constituidas por materia normal para valores de carga menores que Q_c, o constituidas por materia exótica para valores de carga mayores a Q_c. La única solución estable para este caso está formada por materia exótica para un amplio rango de valores de carga. Estos resultados son similares a los que se encuentran en el Cap. 7 para el caso $R_1 \neq R_2$, con la diferencia de que en el caso de cáscaras rodeando agujeros negros surge una solución adicional inestable cercana al horizonte de eventos. En comparación con el caso del Cap. 7, resulta ser mucho más complicado obtener los parámetros adecuados que permitan la construcción de una cáscara estable, de materia normal y sin carga alrededor del agujero negro. Sin embargo, se encontró que es posible para un rango acotado de valores de R_1 y R_2, como ejemplo se mostró el caso con $R_1 = 0.39$ y $R_2 = 0.3$.

Capítulo 9

Conclusiones

En esta Tesis se trabajó con el formalismo de juntura en teorías de gravedad $F(R)$ construyendo agujeros de gusano, burbujas y cáscaras delgadas alrededor de agujeros negros, mediante el pegado de dos regiones de espacio–tiempos diferentes sobre una hipersuperficie. En el caso de un agujero de gusano dicha superficie resulta ser la garganta del mismo, mientras que en el caso de una burbuja es la superficie de la misma, en tanto que la cáscara rodea el horizonte de eventos del agujero negro. Se analizó la estabilidad de las configuraciones estáticas ante perturbaciones que preservan la simetría esférica de las mismas.

Se construyeron agujeros de gusano dentro de las teorías $F(R)$, tanto en el caso más general como en el cuadrático, y se analizó las posibles soluciones estáticas y su estabilidad. En particular, se construyó una familia de agujeros de gusano esféricamente simétricos en teorías $F(R)$ con un escalar de curvatura constante R_0, en los cuales la superficie de pegado corresponde a la garganta. Esta superficie está compuesta por materia exótica (no cumple con la condición de energía débil) que debe satisfacer la ecuación de estado $\sigma - 2p = 0$, con σ la densidad superficial de energía y p la presión en la garganta. Para evitar la presencia de fantasmas, se trabajó asumiendo $F'(R_0) > 0$, que garantiza una constante gravitacional efectiva positiva. Se encontró que es posible hallar soluciones estáticas estables para valores adecuados al modelo. Para el caso de teorías $F(R)$ cuadráticas, es decir $F(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2$, se estudiaron también agujeros de gusano en los cuales las regiones pegadas difieren en el escalar de curvatura, es decir $R_1 \neq R_2$. La construcción de estos objetos obliga la ecuación de estado $\sigma - 2p = \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}$ es la tensión/presión externa. Se obtuvo que la materia en la garganta es exótica. También se encuentra presente un vector de flujo de energía externo $\mathcal{T}_\mu$ nulo y una distribución de capa doble $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ de materia. De modo que se construyó un agujero de gusano con una capa doble en su garganta. El comportamiento de las soluciones depende principalmente de la relación entre R_1 y R_2 en vez de sus signos o su valor en módulo. Para valores adecuados de los parámetros se encontraron soluciones estables. Estos trabajos dieron lugar a las

publicaciones de las Refs. [96, 97]

La existencia de una capa doble en la hipersuperficie de juntura es una característica importante dentro de las teorías $F(R)$ cuadráticas que las distinguen de otros modelos y de la relatividad general. Para explorar este aspecto, se construyó una burbuja con una capa doble procediendo de la forma estándar. Para ello se tomaron dos regiones con diferentes escalares de curvatura $R_1 \neq R_2$, la región interior describiendo una solución de vacío, mientras que la exterior describe una solución con masa distinta de cero. Se mostró que la construcción de una burbuja constituida por una capa doble pura es posible si se eligen adecuadamente los valores de los parámetros y si se trabaja con coeficientes cuadráticos α negativos. Si los parámetros no son elegidos cuidadosamente, la cáscara delgada aparece gradualmente, coexistiendo con la capa doble que deja de ser pura. Este comportamiento recuerda al caso del distribución de dipolos del electromagnetismo, donde la presencia del dipolo puro existe en tanto y en cuanto las densidades de carga se mantengan iguales en módulo y opuestas en signo. Ante el menor desbalance, una densidad de carga en la superficie aparece inmediatamente. Los espacio–tiempos que describen capas dobles puras presentan un déficit en la constante cosmológica externa en comparación con la interna, desbalance que se traduce en un parámetro de masa proporcional a la diferencia de las constantes cosmológicas. Este resultado fue publicado en la Ref. [98] y constituye el primer ejemplo explícito de burbuja de una capa doble pura en la literatura.

Continuando dentro del marco de las teorías de gravedad $F(R)$, se construyeron burbujas con simetría esférica, uniendo dos regiones, una interna y la otra externa, a través de la cáscara delgada. Se dividió los casos en aquellos donde ambas regiones presentan el mismo escalar de curvatura constante R_0 o bien escalares de curvatura diferentes y constantes $R_1 \neq R_2$. En todos los casos se tomó $F'(R) > 0$ para evitar la presencia de fantasmas. Para la construcción de la burbuja se utilizó la solución de vacío para la región interior, mientas que la exterior describe una región de masa y carga no nulas. Para el caso con R_0 a ambos lados de la cáscara, la ecuación de estado resulta ser $\sigma - 2p = 0$, mientras que para $R_1 \neq R_2$ es $\sigma - 2p = \mathcal{T}$, además de presentar otras componentes ($\mathcal{T}_\mu = 0$ y $\mathcal{T}_{\mu\nu} \neq 0$) que son necesarias para garantizar la conservación local del tensor de energía–momento. Para el caso donde R_0 es el mismo a ambos lados de la burbuja, el comportamiento de las soluciones depende principalmente del signo de R_0. Siempre es posible hallar soluciones estáticas inestables con materia normal sobre la cáscara. Para cualquier signo de R_0 es posible hallar soluciones estables con materia exótica para valores amplios de carga. Cuando $R_1 \neq R_2$, caso en el que se trabaja con $F(R)$ cuadráticas, el comportamiento de las soluciones depende de la relación entre los diferentes escalares de curvatura. Así, cuando $R_1 < R_2$, sólo se pudo encontrar soluciones estables con materia exótica, mientras que para $R_1 > R_2$ es posible hallar soluciones estables conformadas por materia normal para un rango acotado de carga. Se encontró en particular que, para

un rango pequeño de valores de los parámetros, es posible hallar soluciones estables con materia normal y sin carga. Estos estudios se publicaron en la Ref. [99].

Análogamente a los estudios de burbujas, se construyeron cáscaras delgadas cargadas alrededor de agujeros negros. En este caso, la región interior a la cáscara contiene un agujero negro estático con masa y sin carga, y la región exterior presenta masa y carga no nulas, además del escalar de curvatura que es constante en cada región. Con esta configuración se obtienen las mismas ecuaciones de estado anteriormente mencionadas, las cuales dependen del caso en el que se trabaja (escalares de curvatura iguales o diferentes). Cuando R_0 es el mismo a ambos lados de la cáscara, siempre se pueden hallar soluciones inestables con materia normal. Sólo se pudo encontrar soluciones estables, con materia exótica, para ciertos rangos de carga, independientemente del signo de R_0. Este caso presenta una solución adicional en comparación con el caso de burbujas, la cual es inestable, está compuesta por materia exótica, y el valor de su radio es muy cercano al del horizonte de eventos. Cuando $R_1 \neq R_2$, el comportamiento de las soluciones depende de la relación entre los escalares de curvatura. Sólo si $R_1 > R_2$ se encontró soluciones estables, cerca de la carga crítica, constituidas por materia normal. Las soluciones restantes están compuestas de materia exótica y son inestables, excepto para un rango muy acotado de carga, donde se pueden hallar soluciones estables con materia exótica. Cuando $R_1 < R_2$ solamente se hallaron soluciones inestables constituidas por materia normal para valores de carga menores a la crítica o conformadas por materia exótica para cargas mayores a la crítica. Sólo se obtuvieron soluciones estables con materia exótica para un amplio rango de valores de carga. Estos resultados son similares a los encontrados para burbujas con la excepción de que en este caso se halló una solución inestable constituida por materia exótica para amplios valores de carga muy cercana al horizonte de eventos de la variedad original. Es posible hallar soluciones estables conformadas por materia normal para un adecuado conjunto de valores de los parámetros del sistema, pero su rango está mucho más acotado que en el caso de burbujas. Este último trabajo corresponde a la Ref. [100].

Las condiciones de juntura requeridas por las teorías $F(R)$ son más estrictas que las de la relatividad general, ya que en las primeras las mismas exigen que se cumpla no sólo la continuidad de la primer forma fundamental, sino también la continuidad de la traza de la segunda forma fundamental (o curvatura extrínseca). Esta condición adicional fuerza, al menos para las geometrías con simetría esférica, la ecuación de estado sobre la cáscara. En cambio, en la relatividad general hay gran libertad en la elección de dicha ecuación de estado, que incluso puede ser no lineal. No está muy claro aún cual es el significado físico y las consecuencias de esta falta de libertad en la ecuación de estado para las cáscaras delgadas en gravedad $F(R)$. Este tema sugiere futuros estudios.

En el caso de las teorías $F(R)$ cuadráticas y también en otros casos de teorías cuadráticas más generales [90] aparece una contribución denominada capa doble

sobre la cáscara, característica que no es posible hallar en relatividad general. La misma presenta una cierta analogía con una distribución dipolar en el electromagnetismo. Pero la interpretación de estas capas es algo misteriosa, ya que no hay dipolos de masa en gravitación. Todavía no se tiene una acabada comprensión física del significado de las capas dobles, lo que deja abierta la posibilidad de nuevas investigaciones.

Dentro del caso particular de las teorías $F(R)$ cuadráticas se encuentra la posibilidad de capas dobles puras, cuyo primer ejemplo explícito conocido se mostró en esta Tesis. Este detalle es de suma importancia ya que otros objetos como los mundos brana, las paredes de dominio, las *gravastars* y los agujeros de gusano pueden eventualmente transformarse en capas dobles puras si el término cuadrático de la teoría en la que se trabaja resulta prominente y los parámetros del modelo son elegidos cuidadosamente. Es interesante la posibilidad de encontrar capas dobles puras en otras teorías de gravedad cuadrática distintas de $F(R)$. Este es un problema abierto que requiere de una mayor consideración a futuro.

Apéndice A

Unidades

Con determinadas combinaciones de la velocidad de la luz c, la constante de gravitación G y la constante de Planck $\hbar$, es posible definir unidades "naturales" de masa, longitud y tiempo. Es decir, a partir de las constantes fundamentales:

$$c = 2.99792458 \times 10^{8} m s^{-1}, \tag{A.1}$$
$$G = 6.67259 \times 10^{-11} m^{3} kg^{-1} s^{-1}, \tag{A.2}$$
$$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34} Js, \tag{A.3}$$

se pueden construir las siguientes magnitudes:

$$m_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1.221047 \times 10^{19} \frac{GeV}{c^2} = 2.17671 \times 10^{-8} Kg, \tag{A.4}$$
$$l_p \equiv \frac{\hbar}{m_p c} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616048 \times 10^{-35} m, \tag{A.5}$$
$$t_p \equiv \frac{l_p}{c} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.390557 \times 10^{-44} s, \tag{A.6}$$

denominadas masa, longitud y tiempo de Planck respectivamente.

El sistema más usado en relatividad general corresponde a las llamadas unidades geometrodinámicas, donde $c \equiv G \equiv 1$ y por ende $m_p \equiv l_p \equiv t_p \equiv \sqrt{\hbar}$. En este sistema de unidades:

$$1s \cong 2.99810^{10} cm, \tag{A.7}$$
$$1g \cong 7.42510^{-29} cm, \tag{A.8}$$
$$\hbar \cong 2.61210^{-66} cm^2. \tag{A.9}$$

Apéndice B

Estabilidad de las soluciones estáticas

El criterio de estabilidad de las configuraciones estáticas utilizado a lo largo de esta Tesis tiene una amplia difusión en la literatura, ver por ejemplo la Ref. [77] donde se hace un interesante análisis.

Se parte de una "ecuación de energía" de la forma

$$\dot{a}^2 + V(a) = H$$

con una "energía cinética" $\dot{a}^2$, un "potencial" $V(a)$ y una "energía" $H = 0$. Esta ecuación es formalmente idéntica a la correspondiente a una partícula no relativista que puede realizar un movimiento unidimensional. Una solución estática estable corresponde entonces a pedir un mínimo del "potencial", o sea

$$V(a_0) = 0, \quad V'(a_0) = 0, \quad V''(a_0) > 0.$$

Pero hay una diferencia en el caso de interés aquí, que tiene que ver con que la "energía" $H = 0$ es fija, por lo cual el caso $V(a_0) = 0$ resulta en lo que en mecánica no relativista se denomina equilibrio neutral. Para este equilibrio estable, al no poderse incrementar la "energía" H, se tiene que $\dot{a} = 0$ y no hay "movimiento posible" alrededor de la solución estática a_0. La restricción que impone el valor nulo de la "energía" hace que no se pueda tener un movimiento alrededor del mínimo de potencial.

Cabe destacar que si bien el método es correcto desde el punto de vista matemático, en el caso de las cáscaras esféricas hay que tener cuidado con la interpretación física. La cantidad dinámica es el radio $a(\tau)$, de modo que su variación no representa un desplazamiento, sino un aumento o una disminución del tamaño de la cáscara. El "potencial" $V(a)$ no corresponde a la energía de la cáscara desde el punto de vista gravitatorio y es solamente una cantidad auxiliar útil para el estudio de la

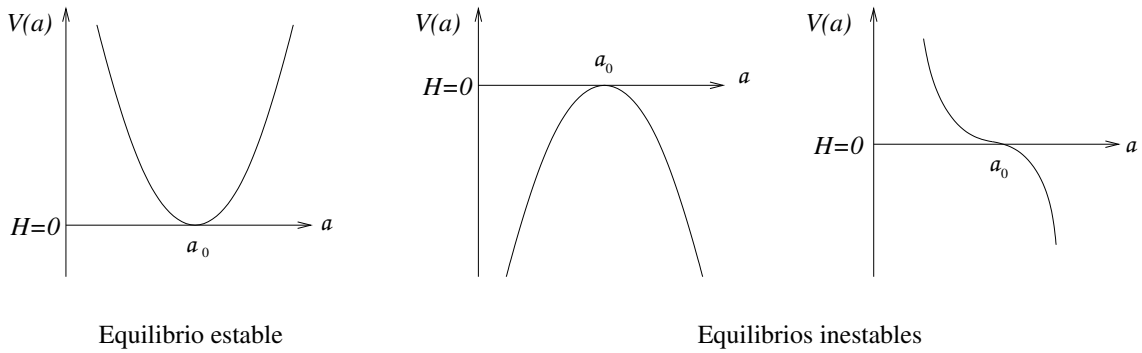

Figura B.1: El potencial y las posiciones de equilibrio.

estabilidad. En el cuerpo central de la Tesis se omiten las comillas para referirse al potencial $V(a)$, como es usual en la literatura.

Existe otra posible noción de estabilidad que se denomina "excursión limitada" [77]. Se parte de dos radios $a_2 > a_1$ que satisfacen

$$V(a_1) = 0, \quad V'(a_1) \leq 0, \quad V(a_2) = 0, \quad V'(a_2) \geq 0,$$

con $V(a) < 0$ para $a \in (a_1, a_2)$. En este caso el movimiento queda limitado al intervalo (a_1, a_2). Aunque no es estrictamente estable, ya que hay un movimiento en el radio, esta noción de "excursión limitada" refleja más adecuadamente algunos aspectos que surgen naturalmente en la mecánica (no relativista). En particular, es simplemente una versión del criterio de estabilidad habitual para órbitas alrededor de un punto fijo que existiría si se pudiese tomar arbitrariamente el valor de la "energía" H, y corresponde a las órbitas sobre un punto fijo que son estables pero no asintóticamente estables. En este contexto, si se perturba el potencial agregando un pequeño valor negativo

$$V(a) \longrightarrow V(a) - \epsilon^2$$

se puede convertir un potencial estrictamente estable en uno que exhiba una excursión limitada. Este procedimiento no se utilizó en la Tesis, pero se presenta aquí por completitud.

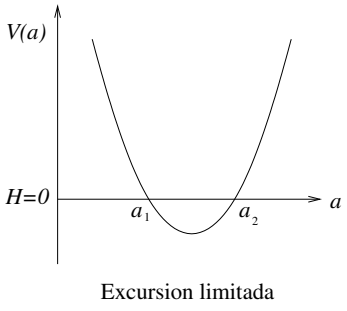

Figura B.2: El potencial y una "excursión limitada"

Apéndice C

Capa doble pura: extensión de la geometría y diagramas conformes

En la construcción realizada en el Cap. 6 no hay horizontes en la parte interna $\mathcal{M}_1$ pero, debido a que la Ec. (6.32) siempre es válida, aparece un horizonte cosmológico en la zona exterior $\mathcal{M}_2$ de la burbuja. Este horizonte está ubicado en $r = r_c$ con r_c definido por

$$1 - \frac{2M}{r_c} - \frac{R_2}{12} r_c^2 = 0.$$

Las coordenadas utilizadas no describen la región más allá del horizonte cosmológico, con $r > r_c$, pero una extensión estándar puede ser obtenida al definir coodenadas avanzadas/retardadas del tipo Eddington-Finkelstein.

$$v_\pm = t \pm \int \frac{dr}{A_2^2(r)}$$

por lo tanto la métrica sobre $\mathcal{M}_2$ resulta

$$ds^2 = -A_2(r) dv_\pm^2 \pm dr dv_\pm + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right).$$

Al pegar dos regiones diferentes de este tipo se puede obtener la extensión máxima en la forma estándar. Sin embargo, si se realiza dicha extensión se podía terminar en una típica singularidad de tipo espacial como las de Schwarzschild con $r = 0$ más allá del horizonte cosmológico, y aparecerían un número infinito de eventos y horizontes cosmológicos como ocurre en el caso usual en la métrica de Kottler para una constante cosmológica positiva. Esto se explica gráficamente en los diagramas conformes que se presentan en la Fig. C.1.

Debido a que se buscó eliminar las singularidades y los horizontes de evento de la región interna, no parece aceptable tener esta clase de comportamiento en otro lado, por lo tanto se propone una posibilidad más interesante y simétrica. Dicha

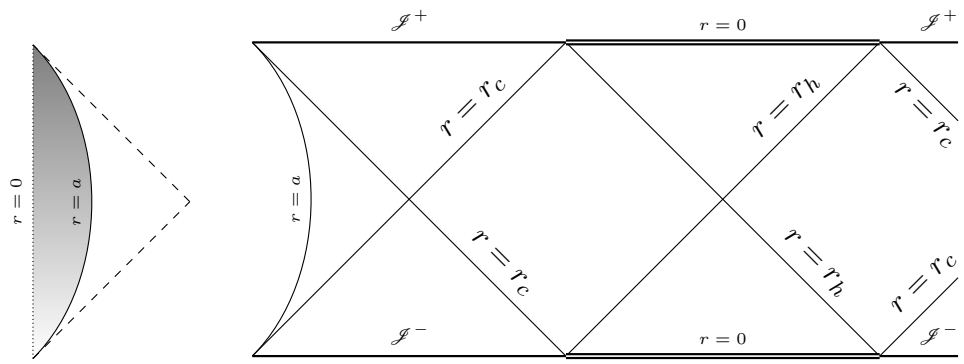

Figura C.1: Diagrama conforme de las dos regiones $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ que componen el espacio–tiempo total. Como es usual, las líneas a 45º son nulas. A la izquierda se muestra la porción del espacio–tiempo de Sitter que describe la parte interna de la burbuja. El origen de coordenadas $r = 0$ es representado por la línea punteada, mientras que la capa doble está ubicada en $r = a$. Sólo las zonas sombreadas describen la región interna $\mathcal{M}_1$, y esta tiene que unirse a la exterior $\mathcal{M}_2$ representada en el lado derecho de la figura, donde se ve el diagrama conforme de la porción del espacio–tiempo de Schwarzschild-de Sitter que describe la parte externa $\mathcal{M}_2$ de la burbuja. Este espacio–tiempo "comienza" sobre la hipersuperficie temporal $r = a$ (que representa una capa doble pura) dentro de una región estática. Por lo tanto, la métrica puede ser extendida, al futuro como al pasado, a través del horizonte cosmológico llamado $r = r_c$, que lleva al pasado y al futuro infinitos $\mathcal{J}^{\pm}$ nulos, así como también a un nuevo horizonte de eventos $r = r_h$ que encierra la singularidad mostrada con líneas dobles y marcada como $r = 0$. La métrica puede ser extendida hacia "la derecha" de forma indefinida, basta sólo con alternar un numero infinito de horizontes consmológicos y horizontes de eventos. Como se ve, esta burbuja elimina sólo algunas de las muchas singularidades del espacio–tiempo de Kottler, y por lo tanto debería ser mejor cortar la parte externa agregando una segunda burbuja simétrica, justo antes del primer horizonte de eventos. Esto se representa en la Fig. C.2

propuesta se muestra en la Fig. C.2. La idea básica es ubicar otra burbuja cuando el radio resulta ser $r = a$ nuevamente, con exactamente las mismas condiciones de juntura, por lo tanto la región con $r < a$ se reemplaza nuevamente por una segunda burbuja con simetría "espejo" de la primera con las mismas propiedades.

De esta manera, el espacio–tiempo total está libre de singularidades pero incluye una capa doble en $r = a$, dada por la juntura entre las diferentes constantes cosmológicas. El espacio–tiempo total puede pensarse como teniendo dos burbujas estáticas de tipo de Sitter en las antípodas, con una porción de Kottler–una porción

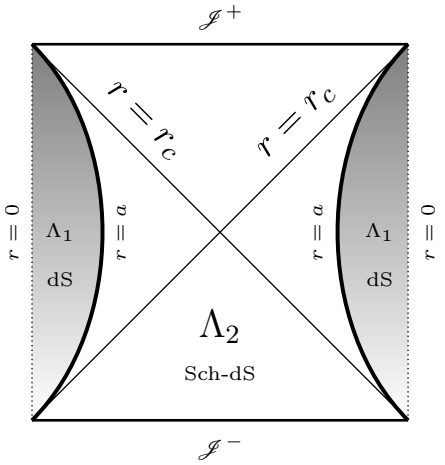

Figura C.2: Diagrama conforme de la burbuja total, evitando singularidades pero permitiendo tensores de curvatura distribucionales. Esta métrica se obtiene a partir del pegado de las dos porciones que se muestran en la Fig. C.1 sobre una hipersuperficie etiquetada $r = a$ como se explica en el texto, y luego haciendo un pocedimiento similar en la parte simétrica "derecha" del horizonte cosmológico. Las dos partes sombreadas son copias iguales de la porción $r < a$ del espacio–tiempo de Sitter estático con $\Lambda_1 > 0$, y la parte sin sombrear es una porción del espacio–tiempo de Kottler con $\Lambda_2 \in (\Lambda_1/2, \Lambda_1)$, con parámetro de masa $M = (\Lambda_1 - \Lambda_2)a^3/3$ y sin horizontes de eventos, de modo que las singularidades en la curvatura quedan eliminadas. Las capas dobles puras en la hipersuperficie $r = a$ se muestran con líneas gruesas, cuya fuerza total es $\Omega = -8\alpha(\Lambda_1 - \Lambda_2) = -24\alpha M/a^3$ que es positiva, debido a que α requiere ser negativa. En el límite $\Lambda_2 \to \Lambda_1$ la capa doble pura desaparece, M tiende a cero y se termina e un espacio–tiempo de Sitter.

sin singularidades–en el medio. Alternativamente, se podría hacer una identificación entre las dos burbujas espejo para producir una única burbuja.

Una extensión análoga puede realizarse cuando $R_2 > 0$ en el caso estático de las burbujas estudiadas en el Cap. 7. En la construcción del Cap. 8 también puede ser de interés tener solamente el horizonte de eventos del agujero negro, y remover el horizonte cosmológico de manera similar.

Por otro lado, consideraciones del mismo tipo pueden hacerse para los agujeros de gusano analizados en los Caps. 4 y 5 en los casos con presencia de horizontes cosmológicos, aunque los diagramas conformes serán algo más complicados.

Bibliografía

[1] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).

[2] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1973).

[3] M. Visser, *Lorentzian Wormholes* (AIP Press, New York, 1996).

[4] M.S. Morris and K.S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).

[5] M. Visser, Phys. Rev. D **39**, 3182 (1989).

[6] M. Visser, Nucl. Phys. **B328**, 203 (1989).

[7] D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev. D **56**, 4745 (1997).

[8] D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev. Lett. **81**, 746 (1998).

[9] D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev D **58**, 044021 (1998).

[10] M. Visser, S. Kar, and N. Dadhich, Phys. Rev. Lett. **90**, 201102 (2003).

[11] O.B. Zaslavskii, Phys. Rev. D **76**, 044017 (2007).

[12] N. Sen, Ann. Phys. (Leipzig) **73**, 365 (1924).

[13] K. Lanczos, Ann. Phys. (Leipzig) **74**, 518 (1924).

[14] G. Darmois, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule XXV, Chap. V (Gauthier-Villars, Paris, 1927).

[15] W. Israel, Nuovo Cimento **44B**, 1 (1966); *ibid.* **48B**, 463(E) (1967).

[16] P. Musgrave and K. Lake, Class. Quantum Grav. **13**, 1885 (1996).

[17] K. Lake, Phys. Rev. D **19**, 2847 (1979).

[18] V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev Phys. Rev. D **36**, 2919 (1987).

[19] P.R. Brady, J. Louko, and E. Poisson, Phys. Rev. D **44**, 1891 (1991).

[20] S.M.C.V. Gonçalves, Phys. Rev. D **66**, 084021 (2002).

[21] E.F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **83**, 104009 (2011).

[22] E.F. Eiroa and C. Simeone, Int. J. Mod. Phys. D **21**, 1250033 (2012)

[23] E.F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **87**, 064041 (2013).

[24] S.W. Kim, J. Korean Phys. Soc. **61**, 1181 (2012).

[25] M. Sharif and S. Iftikhar, Astrophys. Space Sci. **356**, 89 (2015).

[26] E. Poisson and M. Visser, Phys. Rev. D **52**, 7318 (1995).

[27] C. Barceló and M. Visser, Nucl. Phys. **B584**, 415 (2000).

[28] M. Ishak and K. Lake, Phys. Rev. D **65**, 044011 (2002).

[29] E.F. Eiroa and G.E. Romero, Gen. Relativ. Gravit. **36**, 651 (2004).

[30] F.S.N. Lobo and P. Crawford, Class. Quantum Grav. **21**, 391 (2004).

[31] F.S.N. Lobo and P. Crawford, Class. Quantum Grav. **22**, 4869 (2005).

[32] M. Thibeault, C. Simeone and E. F. Eiroa, Gen. Relativ. Gravit. **38**, 1593 (2006).

[33] E. F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **71**, 127501 (2005).

[34] E.F. Eiroa, Phys. Rev. D **78**, 024018 (2008).

[35] M.G. Richarte and C. Simeone, Phys. Rev. D **79**, 127502 (2009).

[36] F. Rahaman, M. Kalam, and S. Chakraborti, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 1669 (2007).

[37] E. Gravanis and S. Willison, Phys. Rev. D **75**, 084025 (2007).

[38] C. Garraffo, G. Giribet, E. Gravanis, and S. Willison, J. Math. Phys. **49**, 042502 (2008).

[39] M.G. Richarte and C. Simeone, Phys. Rev. D **76**, 087502 (2007); *ibid.* **77**, 089903 (E) (2008).

[40] E. F. Eiroa, M. G. Richarte, and C. Simeone, Phys. Lett. A **373**, 1 (2008); *ibid.* **373**, 2399 (E) (2009).

[41] K.A. Bronnikov and A.A. Starobinsky, Mod. Phys. Lett. A **24**, 1559 (2009).

[42] N. Montelongo Garcia, F.S.N. Lobo, and M. Visser, Phys. Rev. D **86**, 044026 (2012).

[43] J.P.S. Lemos and F.S.N. Lobo, Phys. Rev. D **78**, 044030 (2008).

[44] E. F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **70**, 044008 (2004).

[45] C. Bejarano, E. F. Eiroa, and C. Simeone, Phys. Rev. D **75**, 027501 (2007).

[46] E.F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **81**, 084022 (2010); **90**, 089906(E) (2014).

[47] M.G. Richarte, Phys. Rev. D **88**, 027507 (2013).

[48] S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy, and Z. Amirabi, Phys. Rev. D **89**, 084003 (2014).

[49] E.F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **91** 064005 (2015).

[50] E.F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **76**, 024021 (2007).

[51] E.F. Eiroa, Phys. Rev. D **80**, 044033 (2009).

[52] C. Bejarano and E.F. Eiroa, Phys. Rev. D **84**, 064043 (2011).

[53] E.F. Eiroa and G. Figueroa Aguirre, Eur. Phys. J. C **72**, 2240 (2012).

[54] Z. Amirabi, M. Halilsoy, and S. Habib Mazharimousavi, Phys. Rev. D **88**, 124023 (2013).

[55] M. Halilsoy, A. Ovgun, and S. Habib Mazharimousavi, Eur. Phys. J. C **74**, 2796 (2014).

[56] P.K. F. Kuhfittig, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 1485 (2009).

[57] E.F. Eiroa and C. Simeone, Phys. Rev. D **82**, 084039 (2010).

[58] X. Yue and S. Gao, Phys. Lett. A **375**, 2193 (2011).

[59] V. Varela, Phys. Rev. D **92**, 044002 (2015).

[60] A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Relativity **13**, 3 (2010).

[61] T.P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).

[62] S. Nojiri and S.D. Odintsov, Phys. Rep. **505**, 59 (2011).

[63] T. Multamäki and I. Vilja, Phys. Rev. D **74**, 064022 (2006).

[64] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, and A.L. Maroto, Phys. Rev. D **80**, 124011 (2009); *ibid.* **83** 029903(E) (2011).

[65] T. Moon, Y.S. Myung, and E.J. Son, Gen. Relativ. Gravit. **43**, 3079 (2011).

[66] T. Clifton and J.D. Barrow, Phys. Rev. D **72**, 103005 (2005).

[67] S. Capozziello, A. Stabile, and A. Troisi, Class. Quantum Gravity **25**, 085004 (2008).

[68] L. Sebastiani and S. Zerbini, Eur. Phys. J. C **71**, 1591 (2011).

[69] Z. Amirabi, M. Halilsoy, and S. Habib Mazharimousavi, Eur. Phys. J. C **76**, 338 (2016).

[70] P. Pavlovic and M. Sossich, Eur. Phys. J. C **75**, 117 (2015).

[71] F.S.N. Lobo and M.A. Oliveira, Phys.Rev. D **80**, 104012 (2009).

[72] A. DeBenedictis and D. Horvat, Gen. Rel. Grav. **44**, 2711 (2012).

[73] T. Harko, F.S.N. Lobo, M.K. Mak, and S.V. Sushkov, Phys. Rev. D **87**, 067504 (2013).

[74] K.A. Bronnikov, M.V. Skvortsova, and A.A. Starobinsky, Grav. Cosmol. **16**, 216 (2010).

[75] M. Zaeem-ul-Haq Bhatti, A. Anwar, and S. Ashraf, Mod. Phys. Lett. A **32**, 1750111 (2017).

[76] R. Goswami, A.M. Nzioki, S.D. Maharaj, and S.G. Ghosh, Phys. Rev. D **90**, 084011 (2014).

[77] M. Visser and D.L. Wiltshire, Class. Quantum Gravity **21**, 1135 (2004).

[78] N. Bilić, G.B. Tupper, and R. D. Viollier, J. Cosmol. Astropart. Phys. **02**, 013 (2006).

[79] F. S. N. Lobo and A. V. B. Arellano, Class. Quantum Gravity **24**, 1069 (2007).

[80] P. Martin-Moruno, N. Montelongo Garcia, F.S.N. Lobo, and M. Visser, J. Cosmol. Astropart. Phys. **03**, 034 (2012).

[81] A. Strominger, Phys. Rev. D **30**, 2257 (1984).

[82] T. Jacobson, G. Kang, and R.C. Myers, Phys. Rev. D **52**, 3518 (1995).

[83] A.A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).

[84] J. Näf and P. Jetzer, Phys. Rev. D **84**, 024027 (2011).

[85] A.V. Astashenok, A. de la Cruz-Dombriz, and S.D. Odintsov, Class. Quantum Gravity **34**, 205008 (2017).

[86] N. Deruelle, M. Sasaki, and Y. Sendouda, Prog. Theor. Phys. **119**, 237 (2008).

[87] J.M.M. Senovilla, Phys. Rev. D **88**, 064015 (2013).

[88] J.M.M. Senovilla, Class. Quantum Grav. **31**, 072002 (2014).

[89] J.M.M. Senovilla, J. Phys. Conf. Ser. **600**, 012004 (2015).

[90] B. Reina, J.M.M. Senovilla, and R. Vera, Class. Quantum Gravity **33**, 105008 (2016).

[91] M. Mars and J.M.M. Senovilla, Class. Quantum Grav. **10**, 1865 (1993).

[92] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (J. Wiley and sons, N. York, 1962).

[93] L.B. Szabados, Living Rev. Relativ. **7**, 4 (2004).

[94] R.-G. Cai, L.-M. Cao, Y.-P. Hu, and N. Ohta, Phys. Rev. D **80**, 104016 (2009).

[95] E. Poisson and W. Israel, Phys. Rev. D **41**, 1796 (1990).

[96] E.F. Eiroa and G. Figueroa Aguirre, Eur. Phys. J. C **76**, 132 (2016).

[97] E.F. Eiroa and G. Figueroa Aguirre, Phys. Rev. D **94**, 044016 (2016).

[98] E.F. Eiroa, G. Figueroa Aguirre, and J. M. M. Senovilla, Phys. Rev. D **95**, 124021 (2017).

[99] E.F. Eiroa and G. Figueroa Aguirre, Eur. Phys. J. C **78**, 54 (2018).

[100] E.F. Eiroa and G. Figueroa Aguirre, *Thin shells surrounding black holes in F(R) gravity*, arXiv:1812.03876 (2018).