Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis Doctoral

Caracterización de propiedades globales en espacio-tiempos con topología no trivial

Rubín de Celis, Emilio

2017-03-10

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Rubín de Celis, Emilio. (2017-03-10). Caracterización de propiedades globales en espacio-tiempos con topología no trivial. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:
Rubín de Celis, Emilio. "Caracterización de propiedades globales en espacio-tiempos con topología no trivial". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017-03-10.

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Caracterización de propiedades globales en espacio-tiempos con topología no trivial

Tesis presentada para optar al título de

Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

por **Lic. EMILIO RUBÍN DE CELIS**

Director de Tesis: Dr. Claudio M. Simeone

Director Asistente de Tesis: Dr. Osvaldo P. Santillán

Consejero de Estudios: Dr. Gastón Giribet

Lugar de Trabajo: IFIBA, CONICET - Dto. de Física, FCEN, UBA
Pabellón I, Ciudad Universitaria (1428) - C.A.B.A - Argentina

Fecha de defensa: 10 de Marzo de 2107

Emilio Rubín de Celis: *Caracterización de propiedades globales en espacio-tiempos con topología no trivial,* © Febrero de 2017

RESUMEN

Se estudian aspectos globales en espaciotiempos no triviales a partir de la autointeracción electromagnética de una carga puntual q. Las geometrías de fondo tienen simetría esférica o cilíndrica y se construyen con una cáscara delgada de materia, de forma tal que presentan *una* o *dos* regiones asintóticas. Se resuelven las ecuaciones de Maxwell electrostáticas y se renormaliza el potencial en la posición de la carga para obtener su autointeracción. La fuerza electrostática sobre la carga puntual q, medible por un observador local, manifiesta propiedades topológicas y geométricas del espaciotiempo de fondo. Los resultados se analizan en función de la curvatura espacial $\kappa_\pm$ de la superficie de la cáscara embebida (codificada en del tensor de curvatura extrínseca $K^\pm_{ij}$), y de la topología de la variedad.

Los espaciotiempos esféricos se construyen con métricas de Schwarzschild, y para los cilíndricos se usan métricas cónicas obtenidas de la geometría de una cuerda cósmica local. Se asocia la desviación del campo electrostático al salto de la curvatura espacial κ sobre la cáscara, y se caracteriza el potencial de la carga q a partir de la topología y el efecto que produce la curvatura de la cáscara. En los casos con una región asintótica, la autofuerza sobre q cerca de la cáscara se vuelve atractiva si $\kappa > 0$, o repulsiva si $\kappa < 0$. Los espaciotiempos con dos regiones asintóticas (agujeros de gusano) tienen $\kappa_{wh} > 0$, correspondiendo a gargantas de materia exótica. El efecto cerca de la garganta es atractivo excepto en configuraciones esféricas con radio de la cáscara r_0 menor al de las órbitas fotónicas de las geometrías de Schwarzschild. En variedades esféricas con dos regiones asintóticas se identifica a la garganta con una carga imagen neta $Q^\mp_{wh} = -q\frac{r_0}{r'}\kappa_\pm/\kappa_{wh}$ vista desde la región donde se encuentra la partícula con carga q y posición r'. A los efectos de la autointeracción ésta representa una fuerza de orden r'^{-3} asintóticamente. En los casos cilíndrico se encuentra $Q^\mp_{wh} = -q\kappa_\pm/\kappa_{wh}$ asociada a una distribución superficial de carga imagen que depende de la posición r'. Esta carga caracteriza la variación del flujo asintótico del campo eléctrico que genera la carga q.

Palabras Clave: AUTOFUERZA; ELECTROSTÁTICA; CÁSCARAS; AGUJEROS DE GUSANO; AGUJEROS NEGROS; CUERDAS CÓSMICAS.

GLOBAL PROPERTIES CHARACTERIZATION IN TOPOLOGICALLY NON TRIVIAL SPACETIMES

ABSTRACT

Global aspects in non trivial spacetimes are studied by the electromagnetic self-interaction of a point charge q. The considered manifolds are constructed with a thin-shell of matter that joins two geometries with spherical or cylindrical symmetry, in such a way to have *one* or *two* asymptotic regions. Electrostatic Maxwell equations are solved and the potential is renormalized at the position of the charge. Topologic and geometric properties of the background spacetime are manifested in the electrostatic force measured by a local observer at the position of the point charge q. Results are analyzed in terms of the spatial curvature $\kappa_{\pm}$ of the embedded surface of the shell (codified in the extrinsic curvature tensor $K^{\pm}_{ij}$), and the manifold's topology.

Spherically symmetric spacetimes are constructed with Schwarzschild metrics, while conical geometries obtained from local cosmic string spacetimes are used for cylindrical cases. The deflection of the electrostatic field is associated to the jump of the spatial curvature κ across the shell, and the characterization of the charge's potential is done in terms of the effect produced by the curvature of the shell in different topologies. In cases with one asymptotic region, the self-force over q near the shell is attractive if $\kappa > 0$, or repulsive if $\kappa < 0$. In spacetimes with two asymptotic regions (wormholes) $\kappa_{wh} > 0$, corresponding to throats of exotic matter. The effect over a charge near the throat is attractive except in some spherical configurations with shell radius r_0 smaller than the photonic orbits of the Schwarzschild geometry. In spherical wormholes with two asymptotic regions the throat is identified with a net image charge $Q^{\mp}_{wh} = -q\frac{r_0}{r'}\kappa_{\pm}/\kappa_{wh}$ as seen from the submanifold where the particle q is placed at some radius r'. This image charge represents an asymptotic self-force of order r'^{-3}. In cylindrical wormholes $Q^{\mp}_{wh} = -q\kappa_{\pm}/\kappa_{wh}$, associated to an image surface charge distribution which depends on the position r'. The net image charge characterizes the change in the asymptotic flux of the electric field generated by the charge q.

Key words: SELF-FORCE; ELECTROSTATICS; THIN-SHELLS; WORMHOLES; BLACKHOLES; COSMIC STRINGS.

PUBLICACIONES

El contenido de éste trabajo de tesis doctoral está basado en los artículos;

- [1]: *Probing global aspects of a geometry by the self-force on a charge: Cylindrical thin-shell wormholes*; E. Rubín de Celis, O. P. Santillan y C. Simeone. En: Phys. Rev. D**86** 12 (124009), 2012.

- [2]: *Probing global aspects of a geometry by the self-force on a charge: Spherical thin-shell wormholes*; E. Rubín de Celis, O. P. Santillan y C. Simeone. En: Phys. Rev. D**88** 12 (124012), 2013.

- [3]: *Effect of a cylindrical thin-shell of matter on the electrostatic self-force on a charge*; E. Rubín de Celis. En: The European Physical Journal C**76** 2 (92), 2016.

- [4]: *Thin shells joining local cosmic string geometries*; E. Eiroa, E. Rubín de Celis y C. Simeone. En: The European Physical Journal C**76** 10 (546), 2016.

Los dos primeros fueron realizados junto con mi director Dr. Claudio Simeone, y co-director de tesis de doctorado Dr. Osvaldo Santillán. Los primeros tres artículos están relacionados con el tema central de este trabajo: los efectos de la curvatura y topología sobre el campo y la autointeracción de una carga eléctrica. El último artículo, sobre cáscaras en geometrías de cuerdas cósmicas locales, se encuentra desarrollado en un Capítulo de ésta tesis dedicado al estudio de estabilidad de cáscaras. [1] [2]

1 Dentro de mi producción científica se encuentra un artículo publicado en la revista Journal of High Energy Physics junto con mi co-director [5], referido a simetrías escondidas en espacios curvos, cuyo contenido no forma parte del trabajo aquí presentado.

2 Otro trabajo, de autoría junto con mi director, referido a la estabilidad de cáscaras simétricas y titulado: *A note about the perturbative dynamics of symmetric shells*, fue recientemente aceptado (2017-02-03) en la revista The European Physical Journal Plus [6]. Será próximamente publicado en la versión online.

ÍNDICE GENERAL

I PRELIMINARES 1

1 INTRODUCCIÓN 3

1.1 Historia del problema de la autofuerza 4

1.2 Descomposición de la función de Green 5

1.3 Consecuencias físicas de la autofuerza 6

1.3.1 Problema de dos cuerpos Astrofísico 6

1.3.2 Otras aplicaciones del problema de la autofuerza 7

1.4 Autofuerza electrostática 8

1.4.1 Cargas en la geometría de agujeros negros 9

1.4.2 Autofuerza en otras geometrías 12

1.5 Espaciotiempos no triviales y con cáscaras 13

1.5.1 Defectos topológicos y agujeros de gusano 14

1.6 Autofuerza en geometrías con cáscaras y agujeros de gusano 15

1.7 Organización de la tesis 17

2 TEORÍA GENERAL DE BITENSORES 21

2.1 Función de mundo de Synge 22

2.2 Límite de coincidencia 23

2.3 Bivector de transporte paralelo 24

2.4 Expansión de bitensores cerca de la coincidencia 25

2.5 Determinante de van Vleck 28

3 FUNCIÓN DE GREEN DE DETWEILER-WHITING 29

3.1 Ecuaciones de Maxwell 29

3.2 Función de Green singular en Minkowski 30

3.3 Descomposición de Detweiler-Whiting 31

3.4 Los bietensores $U^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$ y $V^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$ 33

II CUERPO PRINCIPAL 37

4 ESPACIOTIEMPOS CON CÁSCARAS 39

4.1 Hipersuperficies: curvatura intrínseca y extrínseca 40

4.1.1 Formas fundamentales 42

4.2 Tensor de energía superficial 43

4.3 Cáscaras tipo-tiempo en vacío 46

4.4 Construcción 47

4.5 Cáscaras asociadas a cuerdas cósmicas locales 51

4.5.1 Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior . . 54

4.5.2 Tipo II: Garganta en agujeros de gusano 55

4.6 Cáscaras en geometrías de Schwarzschild 56

4.6.1 Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior . . 57

4.6.2 Tipo II: Garganta en agujeros de gusano 58

5 ECUACIONES DE MAXWELL EN ESPACIOTIEMPOS ESTÁTICOS CON CÁSCARAS 61
5.1 Función de Green estática 62
5.2 Función de Green singular en geometrías estáticas con fuente estática 63
5.3 Condiciones de contorno en espaciotiempos estáticos con cáscaras 67
5.4 Descomposición y autofuerza en geometrías con cáscaras 71
5.5 Interpretación y problema equivalente 73
6 POTENCIAL Y AUTOINTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA EN ESPACIOTIEMPOS TIPO I Y TIPO II 75
6.1 Autofuerza electrostática en geometrías de Schwarzschild 76
6.1.1 Tipo I: Una región asintótica 79
6.1.2 Tipo II: Agujeros de gusano 88
6.2 Autofuerza electrostática en geometrías cónicas 96
6.2.1 Tipo I: Una región asintótica 100
6.2.2 Tipo II: Agujeros de gusano 107

III CONCLUSIONES 113
7 CONCLUSIONES 115
7.1 Construcción y estabilidad de espaciotiempos con topología no trivial 116
7.2 Caracterización de propiedades eléctricas en función de la curvatura y topología 117

IV APÉNDICE 123
A ESTABILIDAD MECÁNICA LINEALIZADA DE CÁSCARAS 125
A.1 Cáscaras asociadas a métricas de Levi-Civita 128
A.1.1 Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior . . 129
A.1.2 Tipo II: Garganta en agujeros de gusano 130
A.2 Cáscaras en geometrías de Schwarzschild 131
A.2.1 Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior . . 133
A.2.2 Tipo II: Garganta en agujeros de gusano 134
B POTENCIAL ELECTROSTÁTICO EN LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD 137

BIBLIOGRAFÍA 141

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en la región exterior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia ordinaria ($m_2 > m_1$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa < 0$ produce un efecto repulsivo sobre la carga. 84

Figura 2 Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en la región exterior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia exótica ($m_2 < m_1$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa > 0$ produce un efecto atractivo sobre la carga. 85

Figura 3 Autofuerza adimensional electrostática en función de r_1/r_0 en la región interior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia ordinaria ($m_2 > m_1$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa < 0$ produce un efecto repulsivo, hacia el interior, sobre la carga. 86

Figura 4 Autofuerza adimensional electrostática en función de r_1/r_0 en la región interior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia exótica ($m_1 > m_2$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa > 0$ produce un efecto atractivo sobre la carga. 87

Figura 5 Autofuerza adimensional electrostática en función de r/r_0 en un agujero de gusano de Schwarzschild simétrico a través de la garganta. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la geometría del agujero negro. La garganta de materia exótica con $\kappa_{wh} > 0$ produce un efecto atractivo si se ubica por encima de la órbita fotónica. 92

Figura 6 Autofuerza adimensional electrostática en función de r/r_0 en un agujero de gusano simétrico a través de la garganta con geometrías tipo Schwarzschild. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la métrica del agujero negro. La garganta de materia exótica con $\kappa_{wh} > 0$ ubicada por debajo de la órbita fotónica produce un efecto repulsivo si la carga se encuentra suficientemente cerca. 92

Figura 7 Condición para que la el cociente Q^+/q entre la carga monopolar total y q, del potencial regular en una geometría de Schwarzschild Tipo II se vuelva positivo. 94

Figura 8 Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en un agujero de gusano asimétrico a través de la garganta con geometrías tipo Schwarzschild. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la métrica del agujero negro. La garganta de materia exótica con $\kappa_{wh} > 0$ produce un efecto atractivo sobre la carga si se encuentra por encima de las órbitas fotónicas o $r_0 \gtrsim 3\frac{m_1+m_2}{2}$. 95

Figura 9 Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en un agujero de gusano asimétrico a través de la garganta con geometrías tipo Schwarzschild. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la métrica del agujero negro. Con la carga suficientemente cerca, la garganta produce un efecto repulsivo si se encuentra por debajo de las órbitas fotónicas o $r_0 \lesssim 3\frac{m_1+m_2}{2}$. . 96

Figura 10 Autofuerza adimensional en función de r/r_i en un espaciotiempo localmente plano con una cáscara cilíndrica de materia ordinaria y $\kappa < 0$. Valores negativos corresponden a una fuerza hacia el eje central de simetría. La cáscara repele a la carga. 104

Figura 11 Autofuerza adimensional en función de r/r_i en un espaciotiempo localmente plano con una cáscara cilíndrica de materia exótica y $\kappa > 0$. La cáscara atrae a la carga. 105

Figura 12 Representación tridimensional de la densidad de carga superficial imagen σ_2 para dos cáscaras diferentes. El plano vertical corresponde a la superficie espacial de $\partial\mathcal{M}_{ext}$ en coordenadas $(\varphi, \zeta = z/r_i)$ para el problema equivalente de la región exterior. Valores positivos de $\sigma_2(\varphi,\zeta) \times \omega_i (r_i\pi)^2/q$ aparecen a la derecha del plano en ambos casos. Se muestra esquemáticamente la carga ubicada en $(\varphi' = \pi, \zeta')$ y $r_2' = r_i + r_e$ $(r' = 2r_i)$. 107

Figura 13 Autofuerza adimensional sobre una carga q en función de r/r_0 en un agujero de gusano cilíndrico y simétrico a través de la garganta. La cáscara de materia exótica y $\kappa_{wh} > 0$ produce un efecto atractivo. 110

Figura 14 Autofuerza sobre una carga q en función de r/r_0 en agujeros de gusano cilíndricos con regiones cónicas de diferente déficit de ángulo. 110

Figura 15 Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano (η_φ, η_z) para cuatro valores diferentes del parámetro d. En espaciotiempos de Levi-Civita con una cáscara la estabilidad no depende de los parámetros ω_1, ω_2, R_1 y R_2, ni del radio de la configuración estática. 130

Figura 16 Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano (η_φ, η_z) para cuatro valores diferentes del parámetro d. En agujeros de gusano Levi-Civita que no son simétricos a través de la garganta, la estabilidad no depende de los parámetros ω_1, ω_2, R_1 y R_2, ni del radio de la configuración estática. 131

Figura 17 Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano $(\eta, \frac{a_0}{2m_{1,2}})$, con distintos valores de $\frac{m_1}{m_2}$, para cáscaras de materia ordinaria y exótica en geometrías de Schwarzschild. 134

Figura 18 Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano $(\eta, \frac{a_0}{2m_2})$, con distintos valores de $\frac{m_1}{m_2}$, para agujeros de gusano en geometrías de Schwarzschild. El gráfico tridimensional incluye parte de los anteriores en el espacio de parámetros $(\eta, \frac{a_0}{2m_2}, \frac{m_1}{m_2})$. 135

Parte I

PRELIMINARES

La Parte I está dividida en tres capítulos preliminares que hacen el trabajo de esta tesis autocontenido. En el Capítulo 1 se plantea la hipótesis central y luego se enfoca el tema de investigación en el contexto e historia del problema de la autofuerza; desde sus orígenes hasta la actualidad. En los siguientes capítulos se resumen las herramientas matemáticas necesarias para abordar el problema de la autointeracción. En el Capítulo 2 se presenta la función de mundo de Synge y la teoría general de bitensores. En el Capítulo 3 se introducen las funciones de Green electromagnéticas según la descomposición de Detweiler y Whiting.

1 INTRODUCCIÓN

En esta tesis se estudia el problema de una carga puntual y su autointeracción electrostática en espaciotiempos con topología no trivial en el contexto de la Relatividad General. La autofuerza electromagnética es la interacción del campo producido por una partícula cargada consigo misma. La hipótesis a investigar es que la autofuerza de una carga, medible por un observador local, puede distinguir geometrías localmente idénticas pero con diferencias globales. La curvatura desvía las líneas de campo de una carga; el objetivo es caracterizar propiedades físicas del problema eléctrico a partir de aspectos topológicos y geométricos del espaciotiempo.

Las ecuaciones de Maxwell en espacios curvos describen la teoría electromagnética en Relatividad General. Al considerar una carga puntual el campo diverge sobre su posición, pero se puede regularizar aislando una parte singular que sólo contribuye a la inercia de la partícula. Se utiliza el método de Detweiler y Whiting [7] de las funciones de Green en espaciotiempos generales para renormalizar el potencial electromagnético. El potencial regular satisface una ecuación de onda homogénea en un entorno de la carga y es el responsable de la autointeracción.

Para construir los fondos donde se plantea la teoría de campos se aplica el formalismo de cáscaras de Sen-Lanczos-Darmois-Israel [8-11] para pegar distintas geometrías a través de una hipersuperficie tipotiempo. Las cáscaras permiten modelar espaciotiempos condensando parte de la información geométrica en una hipersuperficie donde la curvatura extrínseca es discontinua. Esta discontinuidad posee una clara interpretación física en términos de las densidades de energía y presión sobre la superficie. Se consideran espaciotiempos asociados a cuerdas cósmicas de gauge, geometrías de agujeros negros tipo Schwarzschild y se utilizan cáscaras de materia ordinaria o exótica para construir variedades con diferente topología, en particular con una o dos regiones asintóticas. Se resolverá la ecuación de Maxwell para el potencial eléctrico en espaciotiempos estáticos de simetría esférica o cilíndrica con una cáscara y distintas propiedades globales. Para ello se aplicará el método de separación de variables.

A continuación en el Capítulo 1 se resume el estado del área de investigación del problema de la autofuerza desde sus comienzos hasta la actualidad. También se presenta un breve repaso sobre la aplicación de geometrías con cáscaras para estudiar teorías de campos en escenarios de física teórica en general. Al final se presenta la organización de la tesis en detalle.

1.1 HISTORIA DEL PROBLEMA DE LA AUTOFUERZA

En el límite de masa de prueba en Relatividad General, o carga de prueba en Electromagnetismo, la partícula se mueve sobre un fondo fijo; se desprecia totalmente la influencia del objeto sobre la geometría de fondo y el cuerpo se mueve a lo largo de una geodésica del espaciotiempo. Más allá de la aproximación de carga de prueba esto se modifica. En general una carga eléctrica o carga escalar en movimiento emite radiación que a su vez interactúa con la misma partícula cargada. Más aún, las líneas de campo de una carga en reposo en un espacio curvo no son isótropas desde su posición, la curvatura del espaciotiempo produce una deflexión dando lugar a la autointeracción con su propio campo estático. La interacción de un cuerpo con su propio campo se denomina autofuerza. Por lo tanto, incluso en el límite de masa de prueba, una partícula cargada no se mueve en trayectorias geodésicas de la geometría de fondo.

El movimiento de una partícula con carga eléctrica fue materia de investigación activa desde los trabajos en espaciotiempos planos realizados por Lorentz, Abraham, Poincaré y Dirac [12] durante los primeros 40 años del siglo veinte. El campo de radiación que produce una carga la desvía de la geodésica, por esta razón su efecto se denominó reacción por radiación. El trabajo de Dirac fue generalizado por DeWitt y Brehme en 1960 derivando la fórmula para la autofuerza sobre una partícula cargada en espaciotiempos curvos [13]. Sus cálculos fueron finalmente corregidos por Hobbs en 1968 [14]. Recién en el año 2009 Gralla, Harte y Wald produjeron una derivación definitiva de las ecuaciones de movimiento [15] con un rigor satisfactorio: sin postulados e incluyendo procedimientos de renormalización. La historia temprana de este campo de investigación se puede hallar en la siguiente referencia [16].

La autofuerza se presenta también en ausencia de una carga cuando la masa de un cuerpo es considerada suficientemente grande como para ser una partícula de prueba. En ese caso la partícula genera una perturbación gravitatoria que afecta su trayectoria. En 1997 Mino, Sasaki y Tanaka [17] investigaron el movimiento de una masa puntual en espacios curvos y derivaron una expresión para la aceleración de la partícula que es no nula cuando ésta deja de ser una partícula de prueba. Las mismas ecuaciones fueron halladas posteriormente por Quinn y Wald [18] usando un enfoque axiomático, por lo que se las conoce como las ecuaciones de MiSaTaQuWa. El método que formularon no era práctico para realizar cálculos y fue rediseñado por Barack y Ori [19]. Por último, el caso de un una partícula con carga escalar fue estudiado con la misma rigurosidad en un trabajo de Quinn en el año 2000 [20], lo que concluyó en que la masa de una partícula con carga escalar no es necesariamente una constante de movimiento.

El problema de la autofuerza fue motivo de intensas investigaciones y se obtuvo muchos avances en los últimos años. La mayoría de esta actividad se enfocó en el caso gravitatorio en un esfuerzo por modelar el problema de dos cuerpos en caída espiral con una relación de masas extrema (EMIRs por sus siglas en inglés: *extreme mass ratio inspiral*) para obtener la emisión de ondas gravitacionales al producirse la fusión de cuerpos astrofísicos de estas características [21]. La reciente detección de ondas gravitacionales por la colaboración LIGO y las expectativas por el observatorio espacial eLISA, que sería capaz de detectar las ondas provenientes de EMRIs [22], motivan el estudio del problema de dos cuerpos astrofísicos mediante la autofuerza. Existen varios artículos de la última década que resumen el extenso trabajo realizado para abordar el problema de la autointeracción escalar, electromagnética y gravitatoria, entre ellos; el de Poisson, Pound y Vega [23], el de Detweiler [24] y el de Barack [25].

1.2 DESCOMPOSICIÓN DE LA FUNCIÓN DE GREEN

Se trabaja con partículas puntuales para evitar las complicaciones relativas a la estructura interna de un cuerpo extenso. En este contexto es que la definición de la autofuerza requiere un cuidado especial dado que el campo de una partícula puntual diverge en la posición que ésta ocupa. No es evidente cómo formular una definición para la autofuerza que sea finita, que tenga el correcto sentido físico y que concuerde con la fuerza que actúa sobre un cuerpo extendido en el límite donde el tamaño tiende a cero. Se debe formular un procedimiento de regularización que produzca una expresión finita para la autointeracción de una forma única y físicamente bien argumentada.

Algunas descripciones de la autofuerza en espaciotiempos curvos como las originalmente formuladas en [13, 14, 17, 18, 20], mencionadas en la Sección 1.1, se reducen correctamente a los resultados de Dirac en el límite de un espaciotiempo plano. Sin embargo, no poseen la simplicidad del análisis de Dirac en donde la fuerza se deriva enteramente en términos de una solución de vacío de las ecuaciones de campo. Se han utilizado muchos enfoques, pero finalmente el procedimiento de regularización que recibió la justificación física y matemática más apropiada y convincente es el propuesto por Detweiler y Whiting [7]. Este método es completamente general y consiste en una descomposición del campo en una parte singular y otra regular. La parte singular, o función de Green singular, es identificada mediante una construcción local diseñada para proveer la solución exacta a las ecuaciones de campo inhomogéneas cuya fuente es la partícula. La propiedad fundamental de la función de Green singular es que comparte la estructura singular del campo total creado por la partícula. La parte regular, o función de Green regular, es la diferencia entre el campo total y el campo sin-

gular; satisface las ecuaciones homogéneas localmente, es suave en la posición de la partícula y es la responsable de la autofuerza. El método de regularización de Detweiler-Whiting fue extensamente justificado y emergió como el procedimiento elegido por la mayoría de los cómputos de autointeracción reportados en la literatura reciente [23-26].

1.3 CONSECUENCIAS FÍSICAS DE LA AUTOFUERZA

El campo que genera una carga eléctrica q, o una carga escalar μ (también el generado por una masa m), interactúa con la curvatura fija del espaciotiempo de fondo de forma tal que se distorsiona la distribución isótropa de las líneas de campo alrededor del cuerpo. Como consecuencia surge un campo en la posición de la carga que da origen a una autofuerza neta que desvía el movimiento de la partícula de una geodésica de la geometría. La autofuerza contiene típicamente dos componentes bien definidas; una es la disipativa, denominada de reacción por radiación, asociada con la pérdida de energía y momento angular, y la otra es una fuerza conservativa que está presente incluso cuando el cuerpo se mantiene en una posición estacionaria.

La autofuerza es proporcional a μ^2 en el caso escalar, q^2 en el caso eléctrico y m^2 en el caso de una masa puntual. La complejidad del problema aumenta con el espín de la partícula. El caso escalar suele ser el más sencillo aunque con consecuencias teóricas muy interesantes. El electromagnético, representado por el potencial vector A^α, incluye todos los ingredientes del cálculo tensorial, mientras que la autofuerza gravitacional generaliza al último involucrando las perturbaciones sobre la métrica. El abanico de posibles consecuencias al incluir la autointeracción en el contexto de la Relatividad General motiva su estudio por intereses teóricos y fundamentales así como por su relevancia en cómputos experimentales y astrofísicos. A continuación se resumen algunos de los principales problemas que involucran cálculos de autofuerza y el interés actual por comprender las consecuencias físicas dentro de cada teoría hasta finalmente enfocarnos en el caso electrostático al cual se refiere esta tesis.

1.3.1 *Problema de dos cuerpos Astrofísico*

El problema de la autofuerza ha tomado gran relevancia en los últimos años por el avance tecnológico en cuanto a detectores de ondas gravitacionales provenientes de sistemas binarios. El problema de dos cuerpos en Relatividad General es un problema abierto desde la época de Einstein que ha recobrado un enorme interés por el crecimiento de la astronomía experimental y, particularmente, por la primera detección de LIGO [27] a principios de 2016 de ondas provenientes de un sistema binario de agujeros negros.

Una de las fuentes más interesantes de ondas gravitacionales es la fusión espiral de dos agujeros negros con relación de masas extremadamente grande denominada EMRI. Un agujero negro de masa estelar (o una estrella de neutrones) podría completar más de 1000 órbitas hasta caer en otro, supermasivo, de 10^6 masas solares. En el centro de nuestra galaxia se ha detectado indirectamente un agujero negro supermasivo y se espera encontrar uno en el centro de cada galaxia [28]. Las fusiones tipo EMRIs son fuentes de ondas gravitacionales, del orden del mHz, detectables por interferómetros con bases espaciales como eLISA (evolved Laser Interferometer Space Antenna [29, 30]) en los próximos años. La radiación emitida podría revelar información de la geometría espacio-temporal de agujeros negros tipo Kerr e incluso ser utilizada para probar la teoría de la Relatividad General en el régimen fuerte [31].

Para una detección exitosa se requiere de un banco de datos completo y preciso con los posibles perfiles de ondas gravitacionales (*waveform templates*) según sus fuentes. Los cálculos de autofuerza gravitacionales son principalmente eficientes para abordar EMRIs en el régimen de campo gravitacional fuerte. Se usa una perturbación de las ecuaciones de Einstein a partir del cociente entre las masas para describir el movimiento de una partícula puntual en un espaciotiempo dado, por lo que está íntimamente relacionado con la teoría perturbativa de agujeros negros. A orden cero la masa puntual sigue una trayectoria geodésica, y a primer orden se desvía debido a la interacción con su propio campo. Otras técnicas como los cálculos post-Newtonianos, aplicables en sistemas lentos y de campo débil principalmente, pueden modelar cualquier relación de masas pero no son útiles para velocidades tales que $v/c > 1/3$, donde c es la velocidad de la luz. Ambos métodos completan los cálculos que se suelen realizar con relatividad numérica que resultan extremadamente computacionales y poco eficientes para separaciones temporales largas o relación de masas grandes.

1.3.2 *Otras aplicaciones del problema de la autofuerza*

El objetivo primordial de la comunidad científica enfocada en el problema de la autofuerza en la actualidad es el cómputo de una evolución dinámica prolongada de EMRIs. Por ahora este programa permanece como un desafío. Mientras tanto, un objetivo menos ambicioso es comprender las consecuencias físicas de la autofuerza tanto para casos gravitatorios como para eléctricos y escalares.

Un cálculo de un observable bien definido que podría ser medido es la variación de la frecuencia orbital de un cuerpo respecto a otro con relación de masas m/M. En particular, el cambio de la frecuencia en una órbita circular interna y estable de un agujero tipo Schwarzschild fue obtenido por Barack y Sago [32] considerando únicamente la parte

conservativa de la autofuerza gravitacional (se excluyen los efectos disipativos que introducen una ambigüedad heredada en la determinación de la frecuencia). La variación relativa es de $0{,}4870m/M$, correspondiente a una frecuencia creciente por el efecto de la autofuerza (otras trabajos relacionadas se pueden encontrar en [32-34]). Por otro lado, las variaciones conservativas en las órbitas circulares internas de un agujero negro tipo Schwarzschild fueron obtenidas anteriormente en el contexto de la autofuerza escalar por Diaz-Rivera y colaboradores [33], obteniendo un incremento relativo de $0{,}0291657\mu^2/(mM)$.

Otra consecuencia interesante se encontró considerando una carga escalar en espaciotiempos cosmológicos. La carga escalar cambia su masa en reposo debido a la interacción con su autocampo. Esto fue estudiado por Burko, Harte y Poisson [35] y por Haas y Poisson [36] en el contexto de la partícula en reposo en un universo en expansión. La función de Green escalar se calculó explícitamente en diferentes escenarios cosmológicos y la acción del campo renormalizado sobre la partícula se determinó sin aproximaciones. En ciertos modelos cosmológicos la masa decrece e incrementa nuevamente a su valor original, en otros sólo una fracción se restituye. Para espaciotiempos tipo de Sitter la partícula irradia toda su masa en reposo como ondas escalares monopolares.

En cuanto al caso electromagnético, Poisson y colaboradores [37], intentaron recientemente abordar un problema de aparente violación a la censura cósmica de agujeros negros a partir de la absorción por parte de un agujero tipo Reissner-Nordström cuasi extremal de una carga eléctrica. En el año 1999 Hubeny [38] había identificado una manera en que una partícula cargada sea absorbida por un Reissner-Nordstöm cuasi extremal, y la consiguiente aparición de una singularidad desnuda llevándolo a violar la conjetura de censura cósmica de Penrose. A partir de esta idea, los autores de [37], propusieron tratar el problema a partir de la autofuerza electromagnética sobre la partícula considerando la radiación emitida y todos los efectos de su autointeracción. Hasta el momento se ha determinado que la autofuerza juega un rol preponderante en la censura cósmica para algunas trayectorias particulares, pero los argumentos de Hubeny al respecto no han sido completamente refutados.

1.4 AUTOFUERZA ELECTROSTÁTICA

A pesar del inmenso trabajo en los últimos años aún queda mucho por entender acerca de la naturaleza de la autofuerza en espacios curvos, incluso en problemas más sencillos que los motivados astrofísicamente. El foco de este trabajo está puesto exclusivamente en el caso electromagnético y estático. Estos problemas están motivados para intentar responder aspectos más fundamentales de la autointeracción más que

por sus posibles aplicaciones experimentales. A continuación se resumen los trabajos más relevantes en cuanto al estudio de autofuerzas electrostáticas. El problema suele estudiarse en escenarios simples para entender el comportamiento poco intuitivo de la autointeracción a partir de las particularidades que presenta cada geometría y, paralelamente, suele compararse con el problema de partículas con carga escalar para enriquecer el análisis.

1.4.1 *Cargas en la geometría de agujeros negros*

Uno de los primeros cálculos realizados en espacios curvos fue el presentado por Smith y Will en 1980 [39] quienes calcularon la fuerza externa necesaria para mantener una carga eléctrica estática fuera de un agujero negro de Schwarzschild de masa m. Para ello renormalizaron la masa M de la partícula medida por un observador local en caída libre instantáneamente en reposo respecto a la carga, en la métrica de Schwarzschild. Si la partícula de prueba no tiene carga eléctrica, la fuerza externa necesaria para anular la atracción gravitatoria tiene una componente radial, en el marco de la base ortonormal del observador, dada por [1]

$$\mathbf{f}^{\hat{r}}_{ext} = \frac{M\,m}{r'^2\sqrt{f(r')}}\,,$$

donde $f(r) = 1 - 2m/r$ es el factor de la métrica de Schwarzschild y r' la coordenada radial en la posición de la partícula. Smith y Will encontraron que para una partícula con carga q la fuerza externa necesaria es

$$\mathbf{f}^{\hat{r}}_{ext} = \frac{M_{ren}\,m}{r'^2\sqrt{f(r')}} - \frac{q^2 m}{r'^3}\,.$$

El segundo término es la contribución electromagnética de la autofuerza e implica que la fuerza externa es menor para mantener estática a una partícula cargada. En definitiva, encontraron que la autofuerza electroestática se dirige radialmente hacia afuera del centro y su valor es

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = \frac{q^2 m}{r'^3}\,. \tag{1}$$

Frolov y Zel'nikov mostraron que la misma autofuerza eléctrica se encuentra para una carga estática fuera de un agujero negro del tipo Reissner-Nordström de masa m y carga Q, con la función de la métrica $f(r) = 1 - 2m/r + Q^2/r^2$, [40].

Es importante señalar que la contribución de la masa renormalizada M_{ren} que obtuvieron Smith y Will, y el término repulsivo de la autofuerza electrostática (1), no deben confundirse con una contribución

1 Se trabajará en unidades Geométricas.

al campo gravitacional sobre la partícula debida a una métrica del espaciotiempo perturbada por el tensor de energía-momento del campo eléctrico. Dicha perturbación generaría una fuerza que escaléa como Mq^2. En todos los cálculos de autofuerza electromagnéticos se ignoran las correcciones a la métrica el fondo.

La autofuerza electromagnética repulsiva sobre una carga estática frente de un agujero negro de Schwarzschild es inesperada y contradice lo que indicaría la intuición. De acuerdo con el paradigma de membrana [41, 42] el horizonte de un agujero negro actúa como un equipotencial, pues el potencial electrostático $\Phi = -A_t$ es necesariamente uniforme sobre la superficie. Se puede hacer el ejercicio de reemplazar el horizonte por un conductor perfecto y pensar en la fuerza sobre la carga ubicada en la región exterior. La distribución de carga negativa sobre la superficie más cercana a la carga resultará en una fuerza atractiva entre el conductor y la carga puntual. Modelando el problema original de esta manera en un espacio plano, y utilizando el método de imágenes usual de electrostática con la superficie del conductor de radio r_0 a potencial nulo, la fuerza sobre la carga puntual es equivalente a la que le genera una carga $q_* = -q\, r_0/r'$ ubicada a una distancia $r_* = r_0^2/r'$ del centro, es decir

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = -\frac{q^2 r_0}{r'^3} \frac{1}{\left[1-(r_0/r')^2\right]^2} \,,$$

que da la dependencia correcta r'^{-3} lejos, pero con el signo opuesto a lo hallado por Smith y Will. Para remover la carga total q_* sobre el conductor a tierra, y que se asemeje al horizonte del agujero que no posee ninguna carga eléctrica, se ubica una carga puntual $-q_*$ en el centro $r = 0$. En ese caso se obtiene

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = -\frac{q^2 r_0^3}{r'^5} \frac{2-(r_0/r')^2}{\left[1-(r_0/r')^2\right]^2} \,,$$

que sigue siendo atractiva aunque menor pues se reemplazó el conductor aislado por un dipolo imagen y ahora la fuerza lejos es $\sim r'^{-5}$. En ninguna de las dos variantes del modelo del conductor se obtienen resultados que ayuden a guiar la intuición acerca de la autofuerza electrostática hallada en geometrías de agujeros negros.

Al día de hoy, el resultado de Smith y Will fue reproducido mediante otros enfoques y justificado con diferentes argumentos. La manera más directa de obtenerlo es a partir de la solución exacta a las ecuaciones de Maxwell con una carga puntual q en una posición $r = r'$ y $\theta = 0$ en la geometría de un agujero negro que está dado por

$$\Phi = \Phi^L + \Phi^C \,, \tag{2}$$

donde

$$\Phi^C = \frac{q}{r'r} \frac{(r-m)(r'-m) - m^2\cos\theta}{\left[(r-m)^2 - 2(r-m)(r'-m)\cos\theta + (r'-m)^2 - m^2\sin^2\theta\right]^{1/2}} \tag{3}$$

es una solución local hallada por Copson en 1928, y

$$\Phi^L = \frac{q\, m/r'}{r} \tag{4}$$

es un término monopolar agregado 50 años después por Linet [43] para obtener el comportamiento asintótico correcto, $\Phi \sim q/r$, cuando r es mucho mayor a r'. El potencial de Copson a distancias grandes se comporta como $\Phi^C \sim q(1 - m/r')/r$. Esta solución contiene una carga neta menor, o dicho de otra forma, una carga $-qm/r'$ extra además de la fuente q. Linet removió esta carga extra añadiendo a la solución de Copson un potencial tal que; 1. sea una solución a las ecuaciones de Maxwell en vacío, 2. sea regular sobre la geometría de Schwarzschild, y 3. cuya carga asintótica sea la opuesta a la carga extra en la solución de Copson, es decir $+qm/r'$. Tiempo después, el término de Copson se asoció a la parte singular del potencial sobre la posición de la carga q. Teniendo esto en cuenta, la autofuerza electrostática calculada en la base ortonormal es $\mathbf{f}^{\hat{r}} = -q\, \partial_r \Phi^L$ evaluada en $r = r'$.

Copson obtuvo el potencial Φ^C como una solución particular de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell en la geometría de Schwarzschild, siguiendo el método de Hadamard para soluciones elementales de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales [44]. Esto fue 40 años antes de que la terminología *agujero negro* comenzara a utilizarse [45] y se empezara a formular el teorema de agujeros negros sin pelos (no-hair theorem). Sin embargo, Copson fue el primero en notar una consecuencia importante del teorema a partir de su solución: el horizonte es una superficie equipotencial. La solución de Copson se generalizó para Reissner-Nordström en un trabajo hecho por Léauté y Linet [46], quienes mostraron que el potencial regular (4) no se modifica. Por otro lado, el análogo escalar al trabajo de Smith y Will lo realizó Wiseman en el 2000 [47], encontrando que la autofuerza estática sobre una carga escalar en la geometría de Schwarzschild es cero. En ese caso la solución de Copson posee las condiciones de contorno adecuadas y al no ser necesario el agregado de un término extra la parte regular del potencial es nula.

A pesar de que Φ^L y Φ^C satisfacen a simple vista las propiedades esenciales de los campos singular (inhomogéneo) y regular (homogéneo) de la descomposición de Detweiler-Whiting, respectivamente, hasta hace pocos años no estaba clara su identificación y algunos autores aceptaban la posibilidad de que no fueran precisamente los mismos [23]. Incluso, muchos otros cálculos de autofuerza se realizaron con procedimientos ad hoc que no poseen el mismo nivel de justificación que el de Detweiler-Whiting. En las referencias [39, 40, 47-50], por ejemplo, con partículas estáticas en espaciotiempos estáticos, se han utilizado una gran variedad de métodos de regularización. Por otro lado, en [51-55], se utilizó la función de dos puntos de Hadamard definida en las secciones espaciales de la variedad cuadri-dimensional. Este último pro-

cedimiento es equivalente al descripto aquí arriba en el agujero negro de Schwarzschild, ya que el potencial de Copson es una representación exacta de la solución de Hadamard. Fue recién en el año 2012 que los autores de [26] establecieron la conexión entre la función de dos puntos de Hadamard en 3 dimensiones y la función de Green cuadridimensional de Detweiler-Whiting, y en particular demostraron que son equivalentes para el cálculo de autofuerzas estáticas en espaciotiempos ultra-estáticos tanto para la teoría con una carga escalar como la teoría electromagnética. En esta tesis se usa el procedimiento propuesto por Detweiler-Whiting mediante la función de Green singular para regularizar el potencial en los espaciotiempos de interés. El resultado (1) aparecerá como un término de la autofuerza en geometrías de Schwarzschild con cáscaras. Para abordar este método se trabaja con la teoría general de bitensores que se describe brevemente en el Capítulo 2.

1.4.2 *Autofuerza en otras geometrías*

El problema de la autofuerza electromagnética, así como escalar, se abordó en espaciotiempos con diferentes condiciones asintóticas, en otras dimensiones y en geometrías con simetría cilíndrica. Un caso de interés teórico se plantea en espaciotiempos tipo Schwarzschild/de Sitter, con constante cosmológica positiva o negativa. Los autores de [56] encontraron una autofuerza eléctrica positiva cuando la constante cosmológica es positiva representando una fuerza repulsiva desde el agujero negro y decreciente con la distancia. Mientras que con constante cosmológica negativa (asintóticamente anti de Sitter) los resultados resultan aún más interesantes: la autofuerza puede invertir su sentido cerca del horizonte cuando la escala cosmológica es comparable con la del agujero negro. Además, la autofuerza tiende a un valor constante a distancias cosmológicas grandes como consecuencia de la interacción entre la carga y el contorno conforme en el infinito que puede interpretarse como un conductor a tierra. Estos resultados se relacionan al caso de la autofuerza eléctrica en agujeros negros tipo BTZ en $(2+1)$ dimensiones donde también aparecen condiciones asintóticas de anti de Sitter [57]. El problema en 5 dimensiones fue estudiando en [58, 59], mientras que la extensión a dimensiones superiores fue estudiada en 2014 por Frolov y Zelnikov [59].

Es relevante para esta trabajo mencionar el primer cálculo de la autofuerza sobre una carga estática en geometrías cilíndricas realizado en el espaciotiempo de una cuerda cósmica de gauge recta, infinitamente larga y delgada. Este espaciotiempo corresponde a una geometría cónica con un déficit de ángulo global. La curvatura es localmente nula en todas partes excepto sobre la cuerda, no hay potencial Newtoniano, pero los efectos globales asociados con la topología no trivial del espaciotiempo pueden ser detectados por la autofuerza electrostática. Fue Linet [49] quien calculó la autointeracción de la carga, resultando en

una repulsión desde el eje de simetría por donde se extiende la cuerda. Este resultado evidencia que la carencia de planitud global y asintótica del espaciotiempo distorsiona el campo eléctrico. La autofuerza es aproximadamente $f \sim \mu q^2/r'^2$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda y r' la distancia entre la carga y el eje. El problema de la autofuerza electrostática general para geometrías cilíndricas estáticas arbitrarias se abordó con la aproximación lineal en la constante de Newton en [48] y en [60] se calculó la autofuerza en la geometría de una cuerda cósmica con espesor.

Por otro lado, la autointeracción magnética se investigó con la intención de entender el comportamiento de una cuerda superconductora en la geometría de una cuerda cósmica [61]. Se calculó la fuerza sobre una corriente eléctrica paralela a la cuerda y se obtuvo una autofuerza magnética atractiva hacia el eje que se pude relacionar con la fuerza eléctrica mediante una transformación de Lorentz.

En la Sección 1.7 se retoma el problema de la autofuerza eléctrica en espaciotiempos con cáscaras y agujeros de guano. Antes, en la Sección 1.5, resumimos algunas características de los espaciotiempos con topología no trivial que se utilizan en esta tesis, el área de investigación relativo a cáscaras de materia en Relatividad General, y sus aplicaciones.

1.5 ESPACIOTIEMPOS NO TRIVIALES Y CON CÁSCARAS

El formalismo para la construcción de geometrías con cáscaras es conocido hace más de 60 años, [8-11]. Las cáscaras de materia suelen utilizarse para pegar dos soluciones suaves de las ecuaciones de Einstein en una hipersuperficie donde salta la curvatura extrínseca. Espaciotiempos con cáscaras aparecen tanto en contextos astrofísicos como cosmológicos. A escalas cosmológicas, el formalismo se ha aplicado en modelos de branas donde el espaciotiempo del universo se define como una hipersuperficie que une dos variedades de mayor dimensión (ver por ejemplo; [62, 63] y referencias allí incluidas). Otras aplicaciones involucran transiciones de fase cosmológicas en el modelado de la expansión del universo [64, 65]. Desde el punto de vista astrofísico, las cáscaras han aparecido por ejemplo como modelos atmosféricos para estrellas, gravastars y otros, [66-68]. La mayoría de los modelos con cáscaras considerados en la literatura están asociados a geometrías con simetría esférica. Una de las primeras aplicaciones fue en modelos para describir el colapso gravitacional de objetos esféricos, incluyendo por ejemplo casos rotantes donde se construye una cáscara que rota lentamente a partir de un límite en la geometría de Kerr, como también se ha utilizado con cáscaras nulas para considerar un colapso a la velocidad de la luz [64]. La incorporación de cáscaras, o la aproximación de una geometrías mediante el uso de una cáscara de materia que con-

densa información geométrica en una hipersuperficie del espaciotiempo, permite simplificar el estudio de problemas que de otra manera serían muy complejos de abordar. Por estas razones, la dinámica y estabilidad de geometrías con cáscaras ha sido área de investigación activa en los últimos años y se han desarrollado diferentes enfoques para estudiarlas, tanto en geometrías esféricas [64, 66-73] como cilíndricas [74-76].

1.5.1 *Defectos topológicos y agujeros de gusano*

Las consecuencias físicas de los defectos topológicos producidos por cuerdas cósmicas fue motivo de estudio detallado en las últimas tres décadas principalmente porque pudieron haber tenido un rol preponderante en la formación de estructuras en el universo temprano por ruptura espontánea de simetría [77-81]. Objetos astrofísicos de estas características podrían ser observados por sus efectos como lentes gravitacionales [82-84]. Por otro lado, las cuerdas son en la actualidad seriamente consideradas en física teórica como objetos fundamentales de la naturaleza y candidatas a proveer una teoría de interacciones unificada. Por estas razones el interés en los efectos gravitacionales, y en otras teorías, de las cuerdas fundamentales y las cuerdas cósmicas se ha intensificado en los últimos años (ver por ejemplo; [85, 86] y sus referencias). Las geometrías con simetría cilíndrica como las asociadas a cuerdas cósmicas locales y globales [76, 87] han alcanzado, en algunos campos de investigación, un nivel de relevancia comparable a las geometrías esféricas. A partir de este interés en los últimos años se ha trabajado en espaciotiempos con cáscaras asociados a las geometrías mencionadas [88, 89], así como en la construcción teórica y estabilidad de agujeros de gusano cilíndricos [72, 74-76, 90-93].

Los espaciotiempos con agujeros de gusano que se utilizan en este trabajo son atravesables y conectan dos regiones asintóticas diferentes. Ejemplos de geometrías con esta topología fueron presentados por Bronikov en 1973 [94]. El término *wormhole* fue introducido en 1955 por Wheeler en sus trabajos orientados a intentar explicar la física clásica (gravitación y electromagnetismo) a partir de la topología no trivial de un espaciotiempo vacío con agujeros tipo *handles* [45]. Estos últimos corresponden a espaciotiempos múltiplemente conexos, con una región asintótica y agujeros que unen regiones distantes del mismo universo. La referencia más amplia en la actualidad es el libro *Lorentzian Wormholes*, de Matt Visser [95]. Los agujeros de gusano atravesables recobraron relevancia en la comunidad científica a partir del trabajo pedagógico de Morris y Thorne en 1988 [96]. Allí se consideraron espaciotiempos suaves con dos regiones asintóticas y un tensor de energía-momento de energía exótica. A partir de estos trabajos los agujeros de gusano recibieron enorme atención por las consecuencias notables que determinan en la estructura del espaciotiempo [97, 98], y por su aplicación y consecuencias en otras teorías [99, 100]. Las cáscaras de

materia exótica han sido utilizadas para construir espaciotiempos con topología no trivial como los mencionados agujeros de gusano (así como otras configuraciones que requieren energía negativa), donde la cáscara representa una garganta infinitamente delgada que conecta dos regiones a través de una hipersuperficie de área mínima [97]. Esto se traduce en un tensor de energía-momento, proporcional a una delta de Dirac, que representa una densidad de energía negativa sobre la superficie de la cáscara [95, 101]. La construcción de este tipo de gargantas permite en general que el agujero de gusano sea atravesable, pero la presencia de materia exótica es inevitable. Si bien la materia negativa viola generalmente todas las condiciones de energía, la ventaja de la cáscara es que permite ubicarla en una capa infinitamente delgada.

En esta tesis se construyen espaciotiempos utilizando el formalismo de cáscaras pegando geometrías con simetría esférica y cilíndrica, sin agujeros o con un agujero que une dos regiones asintóticas. Se resuelven las ecuaciones de Maxwell electrostáticas en espaciotiempos con diferente topología y se estudia la autofuerza en función de la curvatura extrínseca de la cáscara y la topología de la variedad.

1.6 AUTOFUERZA EN GEOMETRÍAS CON CÁSCARAS Y AGUJEROS DE GUSANO

Por último mencionamos los trabajos de autofuerzas relacionados a geometrías con cáscaras. En cuanto a la autofuerza electrostática, Unruh en 1976 fue quien primero consideró el efecto de una cáscara esférica sobre una carga eléctrica en su interior de Minkowski y encontró una fuerza radial no nula [102]. En el año 2000 Burko, Liu y Soen [103] retomaron el problema interior y también lo estudiaron en el exterior, con la misma cáscara de masa m y radio r_0 para un interior de Minkoski. Para derivar una autofuerza usaron una prescripción de regularización por suma de modos, que en ese entonces era conocida para el campo escalar [19], y concluyeron que la fuerza es repulsiva en el exterior y que coincide con la del agujero negro al orden dominante asintóticamente. En 2007 Shankar y Whiting confirmaron la coincidencia estudiando la autofuerza electrostática frente a una estrella masiva [104] con una renormalización adecuada y argumentada para el problema de interés. Recientemente en [105], Drivas y Gralla generalizaron el problema anterior para la carga en una posición r' exterior a una cáscara, usando una métrica exterior de Schwarzschild y un interior suficientemente genérico. En aquel trabajo testearon la no localidad de los términos disipativos de la autofuerza en el caso orbitante entorno al objeto central y, además, se analizaron casos estáticos lejos del centro. Establecieron que el orden $\sim r'^{-3}$ de la autofuerza es universal, y que la estructura interna de la métrica influye en términos de orden $\sim r'^{-5}$. Con el resultado anterior, un programa interesante propuesto en [106], se enfocó en estudiar la estructura interna de objetos centrales

con simetría esférica a partir de la autofuerza eléctrica o escalar. En particular, se tomaron objetos compuestos por un fluido perfecto en equilibrio hidrostático con una densidad de masa y presión relacionadas por una ecuación de estado politrópica. Se obtuvo que la autofuerza que escalea como r'^{-3} depende de la masa total del objeto central y de la carga de la partícula al cuadrado, mientras que la dependencia con la estructura interna, que se ve al siguiente orden r'^{-5}, se manifiesta mediante un factor que depende de la ecuación de estado. En cuanto al campo escalar, uno de los primeros cálculos de autointeracción se realizó para obtener la función de dos puntos en la geometría de una cuerda cósmica con radio finito modelada a partir de una cáscara de materia ordinaria [107].

En esta tesis se estudia la autofuerza eléctrica en geometrías con cáscaras esféricas o cilíndricas de materia ordinaria o materia exótica. Las cáscaras de materia exótica dan lugar a la incorporación de agujeros de gusano y la posibilidad de espaciotiempos con diferente topología. Los primeros estudios relativos a electrodinámica en geometrías con agujeros de gusano surgieron en los trabajos de Wheeler mencionados en la sección anterior. Allí se consideraron espaciotiempos con una región asintótica y agujeros de gusano de dos bocas del tipo *handle* que unen regiones distantes del mismo universo. El foco de aquellas investigaciones se centró en las soluciones homogéneas, denominadas "carga sin carga", que admite un espaciotiempo múltiplemente conexo con una región asintótica [108-110]. Incorporando agujeros por donde entran y salen las líneas de campo eléctrico en un mismo universo, Wheeler consideró el origen fundamental de las propiedades de cargas eléctricas y otras partículas en el espaciotiempo de Minkowski. Por otro lado, los agujeros esféricos que conectan dos regiones asintóticas también admiten una solución homogénea monopolar que para el campo eléctrico escaléa como r^{-2} en la coordenada radial [111, 112], mientras que los cilíndricos admiten un potencial que diverge logarítmicamente en cada infinito y un campo que escaléa como r^{-1} con la coordenada cilíndrica. Los agujeros de gusano que nos interesan conectan dos regiones asintóticas y son geometrías sin campo eléctrico en ausencia de la carga de prueba. En particular consideramos métricas de Schwarzschild, por lo que se descarta la solución eléctrica monopolar en los casos esféricos que correspondería a geometrías tipo Reissner-Nordström. En cuanto a los cilíndricos, trabajamos en geometrías cónicas que son localmente planas, y usamos un potencial eléctrico que no diverja asintóticamente de modo que se descarta una carga total para el espaciotiempo de fondo.

El problema de la autofuerza de una carga en geometrías con dos regiones asintóticas lo abordaron Khusnutdinov y Bakhmatov en 2007 en espaciotiempos esféricos que unen dos partes de Minkowski conectadas por una garganta con dos tipos de perfiles específicos; una suave y otra infinitamente corta [51]. Posteriormente Linet en [54] repitió el

cálculo anterior consiguiendo una expresión cerrada de la solución para el caso de gargantas suaves, y luego Boisseau y Krasnikov [111, 112] lo repitieron sumando el monopolo arbitrario a la solución esférica. En 2010, los autores de [55], consideraron una clase de agujeros de gusano masivos que son solución a las ecuaciones de Einstein con un campo escalar, mientras que problemas similares para una partícula acoplada a una carga escalar se estudiaron en [52, 113, 114].

En los mencionados trabajos sobre agujeros de gusano se encontró que la autofuerza electrostática es atractiva, contrariamente a lo que resulta en espacios con una región asintótica. En esta tesis veremos que un efecto atractivo suele producirse al incorporar una cáscara con salto de la curvatura positiva (materia exótica) sobre su superficie, tanto para geometrías con una región asintótica como con dos. También se mostrarán ejemplos donde el efecto puede invertirse con gargantas ubicadas por debajo de las órbitas fotónicas en geometrías de Schwarzschild. Veremos, además, que la atracción asintótica tampoco es una característica general para la autofuerza electrostática total, tanto en los casos esféricos como en los cilíndricos. En cuanto a los trabajos mencionados relativos a la estructura interna de objetos esféricos, la autofuerza en agujeros de gusano se distingue de la encontrada en espaciotiempos triviales en el orden dominante r'^{-3}.

1.7 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

La Parte I del material preliminar se compone de este Capítulo 1 y de dos capítulos cortos más donde se resumen los aspectos formales del procedimiento de renormalización para autointeracciones (pueden saltearse en una primera lectura). El cuerpo principal de la tesis se encuentra en la Parte II, compuesta por otros 3 capítulos. La Parte III son las conclusiones y finalmente en la Parte IV se encuentran algunos resultados y cuentas auxiliares como apéndices.

El Capítulo 2 resume los elementos relevantes de la teoría general de bitensores, necesaria para formular el procedimiento de renormalización del potencial electromagnético. En la Sección 2.1 se presenta la función de mundo de Synge, un biescalar que mide mitad de la distancia geodésica al cuadrado entre dos puntos cercanos cuando existe una única geodésica que los conecta. La Sección 2.2 define el límite de coincidencia, la operación que efectúa la renormalización en la posición de la partícula. En la Sección 2.3 se presenta el bivector de transporte paralelo. En la Sección 2.4 se desarrolla la expansión de bitensores cerca de la coincidencia entre los dos puntos de su argumento, una herramienta fundamental para construir funciones de Green locales, y en la Sección 2.5 se define el determinante de van Vleck que será utilizado en el capítulo siguiente. La mayoría del material de este capítulo

preliminar se recopiló de los *reviews* de autofuerzas mencionados en la Sección 1.1 del Capítulo 1.

En el Capítulo 3 se presentan las funciones de Green retardadas, singulares y regulares para problemas electromagnéticos en espacios curvos. La Sección 3.1 introduce las ecuaciones de Maxwell en Relatividad General y algunas definiciones relevantes. En la Sección 3.2 se repasan las funciones de Green en el espaciotiempo de Minkowski. En la Sección 3.3 se muestra la descomposición de Detweiler-Whiting de la función de Green para espacios curvos. Por último, en la Sección 3.4 se construyen los bitensores $U_{\alpha\beta'}$ y $V_{\alpha\beta'}$ que aparecen en las funciones de Green generales. El material de este capítulo preliminar fue recopilado, como el Capítulo 2, de las citas mencionadas en la Sección 1.1 y otras de la Sección 1.2, del Capítulo 1.

El cuerpo principal comienza en el Capítulo 4 donde se construyen las geometrías con cáscaras de materia que se utilizan en los problemas de esta tesis. Adicionalmente se analiza la posibilidad de que sean configuraciones estables. En la Sección 4.1 se define la métrica intrínseca y el tensor de curvatura extrínseca de una hipersuperficie y se establecen las formas fundamentales sobre cáscaras. En la Sección 4.2 se define el tensor de energía superficial, las curvaturas principales y el salto de la curvatura espacial de una cáscara. En la Sección 4.3 se especializan las ecuaciones de Gauss-Codazzi para los casos con hipersuperficies tipo-tiempo en vacío que se utilizarán. En la Sección 4.4, se aplica el formalismo de construcción para geometrías esféricas o cilíndricas en general, permitiendo pequeñas perturbaciones simétricas de la posición de la cáscara y/o bajo la aproximación de que conservan la estatiticidad del bulk. En la Sección 4.5 y la Sección 4.6 se aplica el formalismo para obtener geometrías de Schwarzschild y cónicas respectivamente, se analiza la estabilidad y las características esenciales de las configuraciones estáticas que se utilizarán posteriormente. La estabilidad de cáscaras que unen geometrías de cuerdas cósmicas locales se estudió en [4].

El siguiente, Capítulo 5, presenta los aspectos formales para resolver las ecuaciones de Maxwell en espaciotiempos estáticos y con cáscaras. En la Sección 5.1 se define la función de Green estática y en la Sección 5.2 se desarrolla localmente la función de Green singular para los casos estáticos. En la Sección 5.3 se plantean las condiciones de contorno generales para resolver los problemas electrostáticos en geometrías con cáscaras mediante el método de separación de variables en el potencial. En la Sección 5.4 se presenta formalmente la autofuerza y cómo se obtendrá, para los casos que se estudian, en función de un potencial regularizado. Por último en este Capítulo, en la Sección 5.5, se plantea la interpretación del potencial mediante un problema equivalente que ayuda a comprender aspectos relevantes del campo y la autofuerza en las geometrías con cáscaras.

En el Capítulo 6 se desarrollan y exponen los resultados obtenidos en cuanto al problema de una carga puntual en geometrías con una cáscara y topología no trivial, basado en los artículos [1-3] sobre autofuerzas electrostáticas. En este Capítulo se encuentran los detalles del planteo y resolución de problema, y un análisis de los resultados con las conclusiones de cada caso estudiado. En la Sección 6.1 se encuentran los casos esféricos con geometrías de Schwarzschild y Minkowski en el bulk. Los espaciotiempos con una región asintótica se estudian en la Sección 6.1.1, mientras que los agujeros de gusano, con dos regiones asintóticas, se estudian en la Sección 6.1.2. Análogamente, los casos cilíndricos aparecen en la Sección 6.2 donde se resuelve en geometrías cónicas asociadas a cuerdas cósmicas con defectos de ángulos globales. La Sección 6.2.1 y la Sección 6.2.2 presentan los casos con una región asintótica y dos regiones asintóticas respectivamente. Los resultados obtenidos se resumen en las conclusiones, Capítulo 7.

Denotaremos eventos espacio-temporales con el cuadrivector $x = (t, \mathbf{x})$, de posición espacial $\mathbf{x}$. Índices griegos α, β, γ se usan para componentes tensoriales corriendo sobre $\{t, x^1, x^2, x^3\}$ con t la componente temporal. Los índices latinos i, j, k se usan para componentes sobre hipersuperficies. Cuando una t aparece como índice explícitamente en alguna componente, ésta siempre está evaluada (y nunca sumando por convención de Einstein). Otros índices y letras que se usan son especificados cuando aparecen. A lo largo de la tesis se utiliza el sistema de unidades geométrico donde $c = G = 1$.

2 TEORÍA GENERAL DE BITENSORES

En este Capítulo se resume la teoría general de bitensores, basada en funciones que dependen de dos puntos del espaciotiempo. El punto fuente o base se denotará generalmente como x' y se asignarán índices primados α', β', etc, a las componentes tensoriales asociadas a x'. Al otro, el punto campo x, se le asignarán índices sin primar. Se supone que x pertenece al conjunto de puntos que están unidos a x' por una única geodésica, y denominamos a ese conjunto *entorno normal convexo* de x'.

A continuación se presentan los biescalares, bivectores y bitensores requeridos para desarrollar y comprender los procedimientos de renormalización de autointeracciones sobre partículas puntuales en espacios curvos. La mayoría de los resultados de este Capítulo están detalladamente explicados en las referencias [23, 24, 115]. Comenzamos considerando una variedad espacio-temporal de cuatro dimensiones dotada por la métrica $g_{\alpha\beta}$. El elemento de línea en función de coordenadas x^α es

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \,. \tag{5}$$

La separación entre dos puntos puede ser

$$ds^2 \begin{cases} < 0 \text{ tipo-tiempo} \\ = 0 \text{ nula} \\ > 0 \text{ tipo-espacio} \,. \end{cases} \tag{6}$$

El intervalo propio entre dos puntos define la geodésica que los une mediante la acción

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\epsilon g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\epsilon g_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta} d\lambda \end{aligned} \tag{7}$$

con

$$\epsilon = \begin{cases} -1 & \text{para geodésicas tipo-tiempo} \\ 0 & \text{para geodésicas nulas o de luz} \\ +1 & \text{para geodésicas tipo-espacio} \end{cases} \tag{8}$$

donde λ es un parámetro afín para la trayectoria $z^\alpha(\lambda)$ entre $x_1 = z(\lambda_1)$ y $x_2 = z(\lambda_2)$, de vector tangente $\dot{z}^\alpha = dz(\lambda)/d\lambda$. La trayectoria que extremiza la acción, entre los puntos fijos $z(\lambda_1)$ y $z(\lambda_2)$, determina la ecuación de la geodésica

$$\frac{D\dot{z}^\alpha}{d\lambda} := \ddot{z}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{z}^\beta \dot{z}^\gamma = 0 \,, \tag{9}$$

donde las componentes de la conexión afín $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ respecto al sistema de coordenadas son los símbolos de Christoffel, dados por las derivadas del tensor métrico respecto de las coordenadas:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho} \right) . \tag{10}$$

La ecuación de la geodésica (9) indica que $g_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}$ es constante sobre la geodésica. Si se utiliza el tiempo propio τ de una partícula como parámetro afín, definido por $d\tau^2 = -ds^2$, las geodésicas temporales sobre la variedad tendrán cuadri-velocidad $u^{\alpha} = \dot{z}^{\alpha}(\tau)$ tal que $g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = -1$. Si se utiliza la distancia propia η como parámetro afín para geodésicas tipo-espacio, entonces $g_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}(\eta)\dot{z}^{\beta}(\eta) = 1$. Tomando estos parámetros en los correspondientes casos tenemos en general que $\epsilon := g_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}$ a lo largo de una geodésica.

2.1 FUNCIÓN DE MUNDO DE SYNGE

La función de mundo de Synge es una biescalar del punto base x' y del punto campo x definida por

$$\sigma(x, x') := \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} d\lambda \tag{11}$$

donde la integral está evaluada sobre la geodésica que une $x' = z(\lambda_1)$ y $x = z(\lambda_2)$. Tomando $\lambda = \eta$ o $\lambda = \tau$, para geodésicas tipo-espacio o tipo-tiempo correspondientemente, podemos escribir

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2}\epsilon\Delta\lambda^2 = \epsilon\frac{1}{2}d(x, x')^2 , \tag{12}$$

la función de mundo como mitad de la distancia geodésica al cuadrado, con

$$d(x, x') = \int_{x'}^{x} \sqrt{\epsilon g_{\alpha\beta} dz^{\alpha} dz^{\beta}} := \begin{cases} \Delta\tau \ : \ \text{tipo-tiempo} \\ 0 \ : \ \text{nula} \\ \Delta s \ : \ \text{tipo-espacio} . \end{cases} \tag{13}$$

Al ser un biescalar, las derivadas de la función de Synge pueden tomarse respecto a cada uno de los puntos, definimos;

$$\sigma_{\alpha}(x, x') := \frac{\partial\sigma}{\partial x^{\alpha}} , \quad \sigma_{\alpha'}(x, x') := \frac{\partial\sigma}{\partial x^{\alpha'}} . \tag{14}$$

En busca de una expresión para σ_{α} se define la variación $\delta\sigma = \sigma(x + \delta x, x') - \sigma(x, x')$. La única geodésica que conecta $x + \delta x$ con x' se describe por $z(\lambda) + \delta z(\lambda)$, para la cual el parámetro afín está definido de forma tal que: $z(\lambda_1) + \delta z(\lambda_1) = x' \Rightarrow \delta z(\lambda_1) = \delta x' = 0$ y,

$z(\lambda_2) + \delta z(\lambda_2) = x + \delta x \Rightarrow \delta z(\lambda_2) = \delta x$ no nulo. Con estos elementos a mano se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta\sigma &= \frac{1}{2}\Delta\lambda \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g_{\alpha\beta}(z+\delta z)(\dot{z}^\alpha + \delta\dot{z}^\alpha)(\dot{z}^\beta + \delta\dot{z}^\beta) d\lambda - \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} g_{\alpha\beta}(z)\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta d\lambda \right] \\
&= \Delta\lambda \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[g_{\alpha\beta}(z)\dot{z}^\alpha \delta\dot{z}^\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\gamma}(z)\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta \delta z^\gamma + O(\delta z^2) \right] d\lambda \\
&= \Delta\lambda \left[\left(g_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha \delta z^\beta \right) \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g_{\alpha\beta} \left(\ddot{z}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{z}^\beta \dot{z}^\gamma \right) \delta z^\beta d\lambda \right] \\
&= \Delta\lambda\, g_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha \delta x^\beta
\end{aligned} \tag{15}$$

donde se usó la expansión de Taylor $g_{\alpha\beta}(z+\delta z) = g_{\alpha\beta}(z) + g_{\alpha\beta,\gamma}(z)\delta z^\gamma + O(\delta z^2)$ en el primer renglón, se integró por partes el primer término del segundo renglón (y se descartaron las variaciones de orden superior), y en el tercer renglón se usó la ecuación de la geodésica. Finalmente se obtuvo $\delta\sigma$ con un extremo fijo $\delta x'$ y la variación δx sobre el otro, por lo tanto

$$\sigma_\alpha = \Delta\lambda\, g_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta\,, \quad \sigma^\alpha = \Delta\lambda\, \dot{z}^\alpha\,. \tag{16}$$

Operando análogamente para $\sigma_{\alpha'}$, se define $\delta'\sigma = \sigma(x, x' + \delta x') - \sigma(x, x')$, con la geodésica $z(\lambda) + \delta' z(\lambda)$ que conecta x con $x' + \delta x'$, y se tiene: $\delta z(\lambda_1) = \delta x'$ y $\delta z(\lambda_2) = \delta x = 0$. Al evaluar en la última igualdad de (15) se obtiene

$$\sigma_{\alpha'} = -\Delta\lambda\, g_{\alpha'\beta'}\dot{z}^{\beta'}\,, \quad \sigma^{\alpha'} = -\Delta\lambda\, \dot{z}^{\alpha'}\,. \tag{17}$$

Una vez derivada, σ_α es un vector respecto a x pero un escalar respecto a x', así como $\sigma_{\alpha'}$ es un vector respecto a x' y un escalar respecto a x. De los últimos dos resultados se ve que cualquier derivada de σ se puede contraer consigo misma obteniendo:

$$g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = g^{\alpha'\beta'}\sigma_{\alpha'}\sigma_{\beta'} = \epsilon\Delta\lambda^2 = 2\sigma \tag{18}$$

2.2 LÍMITE DE COINCIDENCIA

Será útil determinar el comportamiento de biescalares, bivectores y bitensors cuando x tiende x'. Introducimos la notación [“*bitensor*”] que representa la siguiente operación sobre cualquier bitensor $G_{\dots}(x, x')$:

$$\Big[G_{\dots}(x, x')\Big] \equiv \lim_{x \to x'} G_{\dots}(x, x') \doteq \textit{un tensor en } x'\,, \tag{19}$$

para designar el límite de $x \to x'$, denominado *límite de coincidencia* del bitensor. Se supone que el límite de coincidencia genera una función única del punto base x', independiente de la dirección en la cual se tome el límite. Por ejemplo, si se computa el límite $\lambda \to \lambda_0$ después de haber evaluado $G_{\dots}(z(\lambda), x')$ sobre una geodésica específica, el resultado no depende de la elección de la geodésica [115].

Para el caso de la función de mundo de Synge σ, es directo de (12), (16) y (17) que

$$[\sigma] = 0\,, \quad [\sigma_\alpha] = [\sigma_{\alpha'}] = 0\,. \tag{20}$$

De la ecuación (18) se obtiene que $\sigma_\gamma = g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_{\beta\gamma} = \sigma^\beta\sigma_{\beta\gamma}$, entonces $(g_{\gamma\beta} - \sigma_{\beta\gamma})\dot{z}^\beta = 0$, y como tomar el límite de coincidencia es independiente de la geodésica se obtiene $[\sigma_{\alpha\beta}] = g_{\alpha'\beta'}$. Operando análogamente sobre las otras posibles derivadas se tiene

$$\left[\sigma_{\alpha\beta}\right] = \left[\sigma_{\alpha'\beta'}\right] = g_{\alpha'\beta'}, \qquad \left[\sigma_{\alpha\beta'}\right] = \left[\sigma_{\alpha'\beta}\right] = -g_{\alpha'\beta'}. \tag{21}$$

2.3 BIVECTOR DE TRANSPORTE PARALELO

Para definir el bivector de transporte paralelo entre puntos base y fuente de un bitensor, introducimos una base ortonormal $\mathrm{e}^\mu_{\hat{a}}(z)$ (tetradas) que sea transportada paralelamente a lo largo de la geodésica que une x con x', es decir, sus elementos satisfacen:

$$g_{\mu\nu}\,\mathrm{e}^\mu_{\hat{a}}\mathrm{e}^\nu_{\hat{b}} = \eta_{\hat{a}\hat{b}}\,, \qquad \frac{D\mathrm{e}^\mu_{\hat{a}}}{d\lambda} = 0\,, \tag{22}$$

donde $\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ es la métrica de Minkowski. Se tiene la relación de completitud

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\hat{a}\hat{b}}\,\mathrm{e}^\mu_{\hat{a}}\mathrm{e}^\nu_{\hat{b}}\,, \tag{23}$$

a partir de la definición de la base dual $\mathrm{e}^{\hat{a}}_\mu(z)$

$$\mathrm{e}^{\hat{a}}_\mu := \eta^{\hat{a}\hat{b}} g_{\mu\nu}\,\mathrm{e}^\nu_{\hat{b}}\,, \tag{24}$$

que también se trassporta paralelamente sobre la geodésica. En términos de la base dual la relación de completitud es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\hat{a}\hat{b}}\,\mathrm{e}^{\hat{a}}_\mu\mathrm{e}^{\hat{b}}_\nu, \tag{25}$$

por lo que las bases satisfacen $\mathrm{e}^{\hat{a}}_\mu\mathrm{e}^\mu_{\hat{b}} = \delta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$ y $\mathrm{e}^{\hat{a}}_\nu\mathrm{e}^\mu_{\hat{a}} = \delta^\mu{}_\nu$. Estas propiedades se cumplen a lo largo de todo el segmento de la geodésica que une x' y x; por ejemplo, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\hat{a}\hat{b}}\,\mathrm{e}^{\hat{a}}_\alpha\mathrm{e}^{\hat{b}}_\beta$ es la métrica en x.

Con la base ortonormal sobre el segmento geodésico se puede definir el bitensor de transporte paralelo entre x' y x. Dado un campo vectorial $A^\mu(z)$ definido sobre el segmento geodésico entre x y x' se lo puede descomponer en la base $\mathrm{e}^\mu_{\hat{a}}$: $A^\mu = A^{\hat{a}}\,\mathrm{e}^\mu_{\hat{a}}$, con componentes en la base ortonormal $A^{\hat{a}} = A^\mu\,\mathrm{e}^{\hat{a}}_\mu$. Si A^μ es transportado paralelamente sobre la geodésica, sus coeficientes $A^{\hat{a}}$ son constantes. El vector en x se puede expresar como $A^\alpha = (A^{\alpha'}\,\mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha'})\mathrm{e}^\alpha_{\hat{a}}$. En definitiva tenemos que

$$A^\alpha(x) = g^\alpha{}_{\alpha'}(x,x')\,A^{\alpha'}(x') \tag{26}$$

$$\text{con} \quad g^\alpha{}_{\alpha'}(x,x') := \mathrm{e}^\alpha_{\hat{a}}(x)\,\mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha'}(x')\,. \tag{27}$$

El objeto $g^{\alpha}{}_{\alpha'} = \mathrm{e}^{\alpha}_{\hat{a}}\mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha'}$ es el bitensor de transporte paralelo o *propagador paralelo*: toma un vector en x' y lo transporta paralelamente a x a lo largo de la única geodésica que une ambos puntos. Análogamente

$$A^{\alpha'}(x') = g^{\alpha'}{}_{\alpha}(x', x)\, A^{\alpha}(x) \tag{28}$$

$$\text{con} \quad g^{\alpha'}{}_{\alpha}(x', x) := \mathrm{e}^{\alpha'}_{\hat{a}}(x')\, \mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha}(x)\,, \tag{29}$$

de donde se ve que $g^{\alpha'}{}_{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha'}_{\hat{a}}\mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha}$ realiza la operación inversa: toma un vector en x y lo transporta paralelamente hacia x'. Se puede chequear por definición que

$$g^{\alpha}{}_{\alpha'} g^{\alpha'}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \qquad g^{\alpha'}{}_{\alpha} g^{\alpha}{}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}{}_{\beta'}, \tag{30}$$

es decir $g^{\alpha'}{}_{\alpha}$ es la inversa de $g^{\alpha}{}_{\alpha'}$. La definición $g^{\alpha}{}_{\alpha'} = \mathrm{e}^{\alpha}_{\hat{a}}\mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha'}$ también puede expresarse como $g^{\alpha}{}_{\alpha'} = \mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha'}\mathrm{e}^{\alpha}_{\hat{a}}$, es decir que

$$g_{\alpha}{}^{\alpha'}(x, x') = g^{\alpha'}{}_{\alpha}(x', x), \qquad g_{\alpha'}{}^{\alpha}(x', x) = g^{\alpha}{}_{\alpha'}(x, x'). \tag{31}$$

El orden de los índices y los argumentos es arbitrario. La acción del propagador paralelo sobre tensores de otro rango es análoga, operando sobre cada índice.

Como los vectores de la base ortonormal son transportados paralelamente a lo largo de las geodésicas entre x y x', entonces satisfacen $e^{\alpha}_{\hat{a};\beta}\sigma^{\beta} = 0$ en x, y $e^{\alpha'}_{\hat{a};\beta'}\sigma^{\beta'} = 0$ en x'. Esto implica que el bitensor de transporte paralelo debe cumplir

$$g^{\alpha}{}_{\alpha';\beta}\sigma^{\beta} = g^{\alpha}{}_{\alpha';\beta'}\sigma^{\beta'} = 0, \qquad g^{\alpha'}{}_{\alpha;\beta}\sigma^{\beta} = g^{\alpha'}{}_{\alpha;\beta'}\sigma^{\beta'} = 0. \tag{32}$$

Otra propiedad útil es que $\dot{z}^{\alpha} = g^{\alpha}{}_{\alpha'} z^{\alpha'}$, donde $\dot{z}^{\alpha} = dz^{\alpha}/d\lambda$ es la tangente a la geodésica entre x y x'. Por lo tanto, usando (16) y (17), se obtiene que

$$\sigma_{\alpha} = -g^{\alpha'}{}_{\alpha}\sigma_{\alpha'}, \qquad \sigma_{\alpha'} = -g^{\alpha}{}_{\alpha'}\sigma_{\alpha}. \tag{33}$$

En cuanto los límites de coincidencia sobre el bivector de transporte paralelo, resumimos los siguientes resultados relevantes:

$$\begin{aligned}
&[g^{\alpha}{}_{\beta'}] = \delta^{\alpha}{}_{\beta'}\,, \\
&[g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma}] = [g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma'}] = 0\,, \\
&\left[g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma\delta}\right] = -\frac{1}{2}\, R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}\,, \qquad \left[g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma\delta'}\right] = \frac{1}{2}\, R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}\,, \\
&\left[g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma'\delta}\right] = -\frac{1}{2}\, R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}\,, \qquad \left[g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma'\delta'}\right] = \frac{1}{2}\, R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

2.4 EXPANSIÓN DE BITENSORES CERCA DE LA COINCIDENCIA

El análogo a $(x - x')^{\alpha}$ de un espacio tiempo plano es la cantidad $-\sigma^{\alpha'}(x, x')$. Queremos expresar un bitensor $\Omega_{\alpha'\beta'}(x, x')$ como una expansión en $-\sigma^{\alpha'}(x, x')$ cerca de la coincidencia. Para un bitensor de rango 2 en el punto base x', la expansión que interesa es de la forma

$$\Omega_{\alpha'\beta'}(x, x') = A_{\alpha'\beta'} + A_{\alpha'\beta'\gamma'}\,\sigma^{\gamma'} + \frac{1}{2}\, A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\,\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\epsilon^3), \tag{35}$$

donde los coeficientes $A_{\alpha'\beta'}$, $A_{\alpha'\beta'\gamma'}$ y $A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ son tensores ordinarios en x', y el último es simétrico respecto al par de índices γ' y δ'. Aquí llamamos ϵ a la magnitud que tiene el tamaño de una componente típica de $\sigma^{\alpha'}$, esto quiere decir que cerca de la coincidencia es del orden de la distancia geodésica entre x y x'.

Los coeficientes de la expansión se hallan a partir de las derivadas de (35) y tomando el límite de coincidencia. De esta manera se obtiene: $[\Omega_{\alpha'\beta'}] = A_{\alpha'\beta'}$. De la primera derivada: $\Omega_{\alpha'\beta';\gamma'} = A_{\alpha'\beta';\gamma'} + A_{\alpha'\beta'\epsilon';\gamma'}\sigma^{\epsilon'} + A_{\alpha'\beta'\epsilon'}\sigma^{\epsilon'}{}_{\gamma'} + \frac{1}{2}A_{\alpha'\beta'\epsilon'\iota';\gamma'}\sigma^{\epsilon'}\sigma^{\iota'} + A_{\alpha'\beta'\epsilon'\iota'}\sigma^{\epsilon'}\sigma^{\iota'}{}_{\gamma'} + O(\epsilon^2)$, y con el límite de coincidencia entonces $[\Omega_{\alpha'\beta';\gamma'}] = A_{\alpha'\beta';\gamma'} + A_{\alpha'\beta'\gamma'}$. Repitiendo el procedimiento con la segunda derivada se tiene $[\Omega_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'}] = A_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'} + A_{\alpha'\beta'\gamma';\delta'} + A_{\alpha'\beta'\delta';\gamma'} + A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$. En resumen

$$\begin{aligned} A_{\alpha'\beta'} &= \Big[\Omega_{\alpha'\beta'}\Big], \\ A_{\alpha'\beta'\gamma'} &= \Big[\Omega_{\alpha'\beta';\gamma'}\Big] - A_{\alpha'\beta';\gamma'}, \\ A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} &= \Big[\Omega_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'}\Big] - A_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'} - A_{\alpha'\beta'\gamma';\delta'} - A_{\alpha'\beta'\delta';\gamma'}\,, \end{aligned} \tag{36}$$

son los coeficientes a segundo orden en la distancia geodésica para $\Omega_{\alpha'\beta'}(x,x')$ como en (35).

Para obtener la expansión del bitensor $\Omega_{\alpha'\beta}$ con un índice referido al punto x' y otro referido a x, se puede aplicar el mismo procedimiento introduciendo previamente el bitensor $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'} := g^{\beta}{}_{\beta'}\Omega_{\alpha'\beta}$ con índices referidos a x'. Expandiendo $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'}$ igual que en (35), el bitensor original se puede reconstruir de la siguiente manera

$$\Omega_{\alpha'\beta}(x,x') = g^{\beta'}{}_{\beta}\left(B_{\alpha'\beta'} + B_{\alpha'\beta'\gamma'}\,\sigma^{\gamma'} + \frac{1}{2}\,B_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\,\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'}\right) + O(\epsilon^3). \tag{37}$$

Los coeficientes se obtienen tomando el límite de coincidencia sobre $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'}$ y sus derivadas. Si se expresan en términos del bitensor original $\Omega_{\alpha'\beta}$ mediante la relación $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'} = g^{\beta}{}_{\beta'}\Omega_{\alpha'\beta}$ y la de sus derivadas, y se usan los resultados de (34) se llega a

$$\begin{aligned} B_{\alpha'\beta'} &= \Big[\Omega_{\alpha'\beta}\Big], \\ B_{\alpha'\beta'\gamma'} &= \Big[\Omega_{\alpha'\beta;\gamma'}\Big] - B_{\alpha'\beta';\gamma'}, \\ B_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} &= \Big[\Omega_{\alpha'\beta;\gamma'\delta'}\Big] + \frac{1}{2}\,B_{\alpha'\epsilon'}R^{\epsilon'}{}_{\beta'\gamma'\delta'} \\ &\quad -B_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'} - B_{\alpha'\beta'\gamma';\delta'} - B_{\alpha'\beta'\delta';\gamma'}\,, \end{aligned} \tag{38}$$

donde se evidencia la diferencia con (35) por la aparición del tensor de Riemann en el término $B_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$.

Repitiéndolo de la misma manera para expandir un bitensor $\Omega_{\alpha\beta}$ con ambos índices referidos al punto fuente x, se tendrá que

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta}(x,x') &= g^{\alpha'}{}_{\alpha}g^{\beta'}{}_{\beta}\left(C_{\alpha'\beta'} + C_{\alpha'\beta'\gamma'}\,\sigma^{\gamma'} + \frac{1}{2}\,C_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\,\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'}\right) \\ &+ O(\epsilon^3), \end{aligned} \tag{39}$$

con los coeficientes de expansión

$$\begin{aligned} C_{\alpha'\beta'} &= \Big[\Omega_{\alpha\beta}\Big], \\ C_{\alpha'\beta'\gamma'} &= \Big[\Omega_{\alpha\beta;\gamma'}\Big] - C_{\alpha'\beta';\gamma'}, \\ C_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} &= \Big[\Omega_{\alpha\beta;\gamma'\delta'}\Big] + \frac{1}{2}\, C_{\alpha'\epsilon'} R^{\epsilon'}{}_{\beta'\gamma'\delta'} + \frac{1}{2}\, C_{\epsilon'\beta'} R^{\epsilon'}{}_{\alpha'\gamma'\delta'} \\ &\quad - C_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'} - C_{\alpha'\beta'\gamma';\delta'} - C_{\alpha'\beta'\delta';\gamma'}\,, \end{aligned} \tag{40}$$

donde aparece un tensor de Riemann adicional en el término $C_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ respecto a (37).

A partir de estos resultados se obtienen expansiones generales para los bitensores asociados a la función de mundo de Synge, que serán de particular interés para desarrollar una función de Green local en espaciotiempos curvos. En particular tenemos que:

$$\sigma_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{3}\, R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'}\, \sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\epsilon^3) \tag{41}$$

$$\sigma_{\alpha'\beta} = -g^{\beta'}{}_{\beta}\Big(g_{\alpha'\beta'} + \frac{1}{6}\, R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'}\, \sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'}\Big) + O(\epsilon^3) \tag{42}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = g^{\alpha'}{}_{\alpha} g^{\beta'}{}_{\beta}\Big(g_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{3}\, R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'}\, \sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'}\Big) + O(\epsilon^3)\,. \tag{43}$$

Para llegar a estos resultados se usa que; $A_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'}$, $A_{\alpha'\beta'\gamma'} = 0$, y $A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -\frac{1}{3}(R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} + R_{\alpha'\delta'\beta'\gamma'})$ en la primera expansión, $B_{\alpha'\beta'} = -g_{\alpha'\beta'}$, $B_{\alpha'\beta'\gamma'} = 0$ y $B_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -\frac{1}{3}(R_{\beta'\alpha'\gamma'\delta'} + R_{\beta'\gamma'\alpha'\delta'}) - \frac{1}{2}R_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -\frac{1}{3}R_{\alpha'\delta'\beta'\gamma'} - \frac{1}{6}R_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ en la segunda, y que $C_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'}$, $C_{\alpha'\beta'\gamma'} = 0$ y $C_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -\frac{1}{3}(R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} + R_{\alpha'\delta'\beta'\gamma'})$ en la tercera.

Otros bitensores de interés son las derivadas del propagador paralelo. El método de expansión se extiende a bitensores de mayor rango análogamente de forma tal que se en este caso se obtiene

$$\begin{aligned} g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma'} &= \frac{1}{2}\, g^{\alpha}{}_{\alpha'} R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}\, \sigma^{\delta'} + O(\epsilon^2), \\ g^{\alpha}{}_{\beta';\gamma} &= \frac{1}{2}\, g^{\alpha}{}_{\alpha'} g^{\gamma'}{}_{\gamma} R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}\, \sigma^{\delta'} + O(\epsilon^2)\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Estas expansiones serán de utilidad en el Capítulo 4 donde se desarrolla la función de Green singular en espaciotiempos estáticos a partir de la función de Green general de Detweiler-Whiting (que será presentada en el siguiente Capítulo 3). Por último mencionamos que la expansión en potencias de $\sigma^{\alpha'}$ también se extiende a campos tensoriales ordinarios. Por ejemplo, un tensor $D_{\alpha\beta}(x)$ de rango 2 en el punto campo x se puede expresar en términos de sus valores y derivadas en un punto x' de su entorno. Para ello utilizamos la base ortonormal $\mathrm{e}^{\alpha'}_{\hat{a}}(x')$ definida anteriormente y escribimos

$$\begin{aligned} D_{\hat{a}\hat{b}}(\lambda_2) &= D_{\hat{a}\hat{b}}(\lambda_1) + \frac{dD_{\hat{a}\hat{b}}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda_1} (\lambda_2 - \lambda_1) + O(\epsilon^2) \\ &= D_{\alpha'\beta'} e^{\alpha'}_{\hat{a}} e^{\beta'}_{\hat{b}} + (D_{\alpha'\beta'} e^{\alpha'}_{\hat{a}} e^{\beta'}_{\hat{b}})_{;\gamma'} \dot{z}^{\gamma'} (\lambda_2 - \lambda_1) + O(\epsilon^2) \\ &= D_{\alpha'\beta'} e^{\alpha'}_{\hat{a}} e^{\beta'}_{\hat{b}} - D_{\alpha'\beta';\gamma'} e^{\alpha'}_{\hat{a}} e^{\beta'}_{\hat{b}}\, \sigma^{\gamma'} + O(\epsilon^2)\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Usando (26) se puede obtener $D_{\alpha\beta}(x) = D_{\hat{a}\hat{b}}(\lambda_2)\mathrm{e}^{\hat{a}}_{\alpha}\mathrm{e}^{\hat{b}}_{\beta}$, esto es

$$D_{\alpha\beta}(x) = g^{\alpha'}{}_{\alpha} g^{\beta'}{}_{\beta} \left(D_{\alpha'\beta'} - D_{\alpha'\beta';\gamma'}\, \sigma^{\gamma'} \right) + O(\epsilon^2). \tag{46}$$

2.5 DETERMINANTE DE VAN VLECK

Cerramos este Capítulo con el determinante de van Vleck $\Delta(x, x')$, un biescalar que aparecerá en el Capítulo 3, definido por

$$\begin{aligned} \Delta(x, x') &:= \det\left\{ \Delta^{\alpha'}{}_{\beta'}(x, x') \right\}, \\ \Delta^{\alpha'}{}_{\beta'}(x, x') &:= -g^{\alpha'}{}_{\alpha}(x', x)\sigma^{\alpha}{}_{\beta'}(x, x')\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Se puede expresar equivalentemente de la siguiente manera,

$$\Delta(x, x') = -\frac{\det\left\{ -\sigma_{\alpha\beta'}(x, x') \right\}}{\sqrt{-g}\sqrt{-g'}}, \tag{48}$$

donde g es el determinante de la métrica en x y g' el determinante en x', por lo que se puede probar que Δ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\Delta}\left(\Delta\sigma^{\alpha} \right)_{;\alpha} = 4\,. \tag{49}$$

Las ecuaciones (21) y (34) implican $[\Delta^{\alpha'}{}_{\beta'}] = \delta^{\alpha'}{}_{\beta'}$ y $[\Delta] = 1$, en el límite de coincidencia. Por otro lado, será de utilidad escribir

$$\Delta^{\alpha'}{}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}{}_{\beta'} + \frac{1}{6}\, R^{\alpha'}{}_{\gamma'\beta'\delta'}\, \sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\epsilon^3)\,, \tag{50}$$

donde se usó (42), de modo que finalmente obtenemos

$$\Delta = 1 + \frac{1}{6}\, R_{\alpha'\beta'}\, \sigma^{\alpha'}\sigma^{\beta'} + O(\epsilon^3). \tag{51}$$

En el último resultado se usó la aproximación para una matriz "pequeña" $\mathbf{M}$; $\det\{\mathbf{1} + \mathbf{M}\} = \mathbf{1} + \mathrm{Tr}(\mathbf{M}) + \mathrm{O}(\mathbf{M^2})$.

3 FUNCIÓN DE GREEN DE DETWEILER-WHITING

Presentamos brevemente las ecuaciones de Maxwell en espacios curvos y resumimos los aspectos relevantes de la función de Green, la función de Green singular y la función de Green regular según la descomposición de Detweiler-Whiting. La información de este Capítulo se puede encontrar ampliada y en detalle en las referencias [7, 23-25]. Tomaremos x' o z como puntos fuentes sobre la línea de mundo de una partícula con carga eléctrica q, mientras que x será un punto campo cercano a x'.

3.1 ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell expresadas en términos del tensor de campo electromagnético son

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha \qquad\qquad F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0\,,$$

donde aparece la cuadri-corriente $J^\alpha(x)$ del lado derecho de las ecuaciones inhomogéneas. En el caso de una partícula puntual de trayectoria γ sobre la línea de mundo $z(\tau)$, puede definirse la fuente distribucional

$$J^\alpha(x) = q\int_\gamma g^\alpha{}_\beta(x,z)\, u^\beta \delta_4(x,z) d\tau\,, \tag{52}$$

donde $u^\beta = dz^\beta/d\tau$ es la cuadri-velocidad y q la carga eléctrica de la partícula. La funcional invariante delta de Dirac cuadri-dimensional es

$$\delta_4(x,x') = \frac{\delta^4(x-x')}{\sqrt{-g'}}\,, \tag{53}$$

donde g' es el determinante de la métrica en coordenadas primadas y $\delta^4(x-x') = \delta(t-t')\delta(x^1-x'^1)\delta(x^2-x'^2)\delta(x^3-x'^3)$ es la funcional de Dirac (ordinaria) de las coordenadas. El tensor de campo electromagnético en función del cuadri-potencial vector A^α es

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}\,. \tag{54}$$

Fijando el gauge de Lorenz $\nabla_\alpha A^\alpha = 0$, A^α satisface la ecuación de onda:

$$\left(\Box\delta_\alpha{}^\beta - R_\alpha{}^\beta\right) A_\beta = -4\pi J_\alpha\,, \tag{55}$$

donde $\Box = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha$, ${\delta_\alpha}^\beta$ es la función delta de Kronecker y $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci. La función de Green $G_{\alpha\beta'}(x,x')$ genera las soluciones de la ecuación de onda para el potencial electromagnético:

$$\begin{aligned} A_\alpha(x) &= \int {G_\alpha}^{\beta'}(x,x')\, J_{\beta'}(x')\sqrt{-g'}d^4x' \\ &= q\int_\gamma G_{\alpha\beta}(x,z)\, u^\beta d\tau\,. \end{aligned} \tag{56}$$

Al introducir (56) en (55) se obtiene que la función de Green cuadridimensional debe satisfacer

$$\left(\Box{\delta_\alpha}^\beta - {R_\alpha}^\beta\right){G_\beta}^{\beta'}(x,x') = -4\pi {g_\alpha}^{\beta'}(x,x')\delta_4(x,x')\,. \tag{57}$$

El propagador paralelo del lado derecho mantiene consistente la estructura de la ecuación, distribucionalmente se tiene que $[g^\alpha{}_{\beta'}]\delta_4(x,x') = \delta^{\alpha'}{}_{\beta'}\delta_4(x,x') = \delta^\alpha{}_\beta\delta_4(x,x')$.

3.2 FUNCIÓN DE GREEN SINGULAR EN MINKOWSKI

Las soluciones físicas de cuadri-potencial (56) se presentan en dos tipos; retardadas y avanzadas

$$A^\alpha_\pm(x) = q\int_\gamma {G_\pm}^\alpha{}_{\beta'}(x,z)\, u^{\beta'}d\tau\,, \tag{58}$$

donde ${G_+}^\alpha{}_{\beta'}(x,x')$ y ${G_-}^\alpha{}_{\beta'}(x,x')$ son las funciones de Green retardada y avanzada respectivamente. Antes de presentar el campo singular y su función de Green asociada en espacios curvos los examinamos en espaciotiempos planos para simplificar su introducción. Para el caso del espaciotiempo de Minkowski; ${G_+}^\alpha{}_{\beta'}(x,x')$ es distinta de cero sobre la línea de mundo γ de la fuente cuando x está en el cono de luz futuro a x', denotamos a este punto x_+, y ${G_-}^\alpha{}_{\beta'}(x,x')$ es distinta de cero sobre la línea de mundo γ de la fuente cuando x está en el cono de luz pasado de x', en el punto x_-. De aquí la reciprocidad para funciones de Green globalmente definidas, dada por la relación

$${G^+}_{\alpha\beta'}(x,x') = {G^-}_{\beta'\alpha}(x',x)\,. \tag{59}$$

La solución física significativa es la asociada con la función de Green retardada que llamaremos campo retardado. Ésta es la que incorpora apropiadamente las condiciones de contorno en el infinito correspondientes a la radiación saliente de la fuente. Las soluciones avanzadas, contrariamente, vienen con información de ondas entrantes desde el infinito. El campo retardado es singular sobre la línea de mundo de la partícula porque ésta produce un campo Coulombiano que diverge sobre su posición. El objetivo de esta Sección es obtener la descomposición regular y singular del campo retardado de la forma :

$$A^\alpha_+ = A^\alpha_S + A^\alpha_R\,. \tag{60}$$

En el espaciotiempo de Minkowski se logra definiendo las cantidades de la siguiente manera:

$$A_{\mathrm{S}}^{\alpha} := \frac{1}{2}[A_{+}^{\alpha} + A_{-}^{\alpha}]\,, \quad A_{\mathrm{R}}^{\alpha} := \frac{1}{2}[A_{+}^{\alpha} - A_{-}^{\alpha}]\,. \tag{61}$$

Esta definición cumple con la condición para el campo singular de satisfacer la ecuación inhomogénea (55), mientras que el campo regular satisface la versión homogénea de la misma ecuación de onda. En términos de la correspondiente función de Green, asociada al campo electromagnético, la definición para la parte regular y singular queda [7, 23]

$$G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') := \frac{1}{2}[G_{+}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') + G_{-}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')]\,, \tag{62}$$

$$G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') := \frac{1}{2}[G_{+}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') - G_{-}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')]\,. \tag{63}$$

La función de Green singular produce un campo con la estructura singular de la solución retardada. La parte divergente sobre la posición de la carga no depende de las condiciones de contorno en el infinito porque contiene igual cantidad de radiación entrante y saliente. De la misma forma que para el cuadri-potencial, $G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ satisface la función de onda inhomogénea (con una delta de Dirac como fuente) y es simétrica en sus argumentos. $G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ satisface la ecuación de onda homogénea, y produce un campo regular sobre la línea de mundo de la partícula. $G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ no distingue entre pasado y futuro, es decir, es una solución con condiciones de contorno estacionarias. Por lo tanto, remover esta parte de una solución retardada no afecta el movimiento de la partícula, elimina la parte singular y genera un campo regular sobre su línea de mundo.

3.3 DESCOMPOSICIÓN DE DETWEILER-WHITING

La descomposición en partes singular y regular de la función de Green en espaciotiempos generales no es tan sencilla como en el caso plano. Cuando el espacio es curvo las ondas no viajan solamente sobre los conos de luz de la partícula. Las ondas pueden interactuar con la curvatura y dispersar hacia puntos interiores al cono de luz futuro. Esto quiere decir que la función de Green no será no nula únicamente sobre el cono de luz de x', sino también en su interior. La función de Green retardada, por ejemplo, será no nula si $x \in I^{+}(x')$, que denota que x está en el futuro cronológico de x'. Similarmente la función de Green avanzada será no nula cuando $x \in I^{-}(x')$. Consecuentemente, con la formulación de Minkowski, cuando x sea muy cercano a x' las partes regular y singular serán funciones que dependen de todo el futuro y el pasado de x'. De ésta manera, la función de Green sería algo matemáticamente imposible de calcular y además se perdería el sentido causal del sistema físico.

La descomposición adecuada de la función de Green que permite la regularización del campo retardado fue introducida por Detweiler y Whiting [7]. La propuesta fue restar una función $H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ en la función de Green singular, ésto es

$$G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = \frac{1}{2}\Big[G_{+}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') + G_{-}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') - H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')\Big]\,, \tag{64}$$

para evitar la dependencia con el pasado y futuro de x' pero manteniendo las características físicas de cada una de las funciones de Green asociadas. Para conseguirlo se requieren las siguientes propiedades:

s.1 : $G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ satisface la ecuación de ondas inhomogénea,

$$\Big[\Box\delta^{\alpha}_{\beta} - R^{\alpha}{}_{\beta}(x)\Big]\, G_{\mathrm{S}}{}^{\beta}{}_{\beta'}(x,x') = -4\pi g^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')\delta_4(x,x')\,. \tag{65}$$

s.2: $G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ es simétrica en sus índices y argumentos,

$$G^{\mathrm{S}}_{\beta'\alpha}(x',x) = G^{\mathrm{S}}_{\alpha\beta'}(x,x')\,. \tag{66}$$

s.3: $G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ es nula con x en el pasado y futuro cronológico de x',

$$G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = 0 \qquad \text{si } x \in I^{\pm}(x'). \tag{67}$$

Las propiedades s.1 y s.2 aseguran que $G_{\mathrm{S}}{}^{\beta}{}_{\beta'}(x,x')$ reproduzca el comportamiento singular de la solución retardada sin distinguir entre pasado y futuro, mientras que s.3 asegura que el soporte de la función de Green regular no incluye el futuro cronológico de x. La función de Green regular se define como

$$G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = G_{+}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') - G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x'), \tag{68}$$

con las siguientes propiedades:

r.1: $G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ satisface la ecuación de ondas homogénea,

$$\Big[\Box\delta^{\alpha}_{\beta} - R^{\alpha}{}_{\beta}(x)\Big]\, G_{\mathrm{R}}{}^{\beta}{}_{\beta'}(x,x') = 0\,. \tag{69}$$

r.2: $G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ coincide con la función de Green retardada is x está en el futuro cronológico de x',

$$G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = G_{+}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') \qquad \text{si } x \in I^{+}(x')\,. \tag{70}$$

r.3: $G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ es nula si x está en el pasado cronológico de x',

$$G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = 0 \qquad \text{si } x \in I^{-}(x'). \tag{71}$$

La propiedad r.1 se deduce de (68) y s.1. Las propiedades r.2 y r.3 pueden deducirse de s.3 y de que la función de Green retardada es nula si x pertenece al pasado de x'. Estas propiedades aseguran que el campo regular no sea singular sobre la línea de mundo y que dependa únicamente de la historia pasada de la partícula. Las propiedades s.1, s.2, s.3 y la construcción propuesta dependen de la existencia del bitensor $H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ que debe tener las siguientes propiedades:

h.1: $H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ satisface la ecuación de onda homogénea,

$$\left[\Box\delta^{\alpha}{}_{\beta} - R^{\alpha}{}_{\beta}(x)\right] H^{\beta}{}_{\beta'}(x,x') = 0\,. \tag{72}$$

h.2: $H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ es simétrico en sus índices y argumentos,

$$H_{\beta'\alpha}(x',x) = H_{\alpha\beta'}(x,x')\,. \tag{73}$$

h.3: $H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ coincide con la función de Green retardada si x está en el futuro cronológico de x',

$$H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = G_{+}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') \qquad \text{si } x \in I^{+}(x')\,. \tag{74}$$

h.4: $H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ coincide con la función de Green avanzada si x está en el pasado cronológico de x',

$$H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = G_{-}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') \qquad \text{si } x \in I^{-}(x'). \tag{75}$$

Se puede probar que la propiedad h.4 es consecuencia de h.2, h.3 y la relación de reciprocidad para funciones de Green electromagnéticas globalmente definidas

$$G^{-}_{\beta'\alpha}(x',x) = G^{+}_{\alpha\beta'}(x,x'). \tag{76}$$

La existencia global de $H^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ puede ser plausiblemente argumentada pero bastará con garantizar su existencia en un entorno normal convexo local a x'.

3.4 LOS BIETENSORES $U^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ Y $V^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$

Suponiendo que x se encuentra en un entorno normal convexo a x', a partir del ansatz de Hadamard [44] para construir las funciones de Green se tiene

$$G_{\pm}{}^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = U^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')\delta_{\pm}(\sigma) + V^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')\theta_{\pm}(-\sigma), \tag{77}$$

donde $U^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$, $V^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ son bitensores suaves y $\theta_{\pm}(-\sigma)$, $\delta_{\pm}(\sigma)$ son las denominadas distribuciones sobre el cono de luz. Son tales que $\theta_{\pm}(-\sigma)$ es uno si $x \in I^{\pm}(x')$ y $\theta(-\sigma) = \theta_{+}(-\sigma) + \theta_{-}(-\sigma)$. Mientras que $\delta_{\pm}(\sigma)$, como función de x, tiene soporte en el cono de luz futuro o pasado de x' respectivamente y $\delta(\sigma) = \delta_{+}(\sigma) + \delta_{-}(\sigma)$.

Agregamos a σ una pequeña cantidad ϵ para operar sobre las funciones de Green,

$$G^{\epsilon}_{\pm}{}^{\alpha}_{\beta'}(x,x') := U^{\alpha}_{\beta'}(x,x')\delta_{\pm}(\sigma+\epsilon) + V^{\alpha}_{\beta'}(x,x')\theta_{\pm}(-\sigma-\epsilon)\,. \tag{78}$$

Las funciones de Green se recuperarán tomando el límite $\epsilon \to 0^+$. Sustituyendo esta versión en la ecuación (57) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Box G_{\pm}{}^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}{}_{\beta} G_{\pm}{}^{\beta}_{\beta'} &= -4\pi\delta_4(x,x')U^{\alpha}_{\beta'} \\
&\quad + \delta'_{\pm}(\sigma)\Big\{2U^{\alpha}_{\beta';\gamma}\sigma^{\gamma} + (\sigma^{\gamma}{}_{\gamma} - 4)U^{\alpha}_{\beta'}\Big\} \\
&\quad + \delta_{\pm}(\sigma)\Big\{-2V^{\alpha}_{\beta';\gamma}\sigma^{\gamma} + (2-\sigma^{\gamma}{}_{\gamma})V^{\alpha}_{\beta'} \\
&\quad + \Box U^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}{}_{\beta}U^{\beta}_{\beta'}\Big\} \\
&\quad + \theta_{\pm}(-\sigma)\Big\{\Box V^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta}_{\beta'}\Big\} \\
&= -4\pi\delta_4(x,x')g^{\alpha}_{\beta'}(x,x')\,,
\end{aligned} \tag{79}$$

tras computar cuidadosamente las distribuciones con el parámetro ϵ y luego tomar el límite $\epsilon \to 0$. De la comparación con la última igualdad se lee lo siguiente:

$$\Big[U^{\alpha}_{\beta'}\Big] = \Big[g^{\alpha}_{\beta'}\Big] = \delta^{\alpha'}_{\beta'} \tag{80}$$

y

$$2U^{\alpha}_{\beta';\gamma}\sigma^{\gamma} + (\sigma^{\gamma}{}_{\gamma} - 4)U^{\alpha}_{\beta'} = 0 \tag{81}$$

determinan $U^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$. La ecuación

$$\check{V}^{\alpha}_{\beta';\gamma}\sigma^{\gamma} + \frac{1}{2}(\sigma^{\gamma}{}_{\gamma} - 2)\check{V}^{\alpha}_{\beta'} = \frac{1}{2}\Big(\Box U^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}{}_{\beta}U^{\beta}_{\beta'}\Big)\Big|_{\sigma=0} \tag{82}$$

determina $\check{V}^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$, una restricción para $V^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$ sobre el cono de luz $\sigma(x,x') = 0$, y para dentro del cono de luz

$$\Box V^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta}_{\beta'} = 0 \tag{83}$$

determina $V^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$. La ecuación (81) se puede integrar a lo largo de la única geodésica que une x' y x, y junto a las condiciones iniciales dadas por (80) se puede determinar unívocamente la función $U^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$. Para ello se define $U^{\alpha}_{\beta'}(x,x') = g^{\alpha}_{\beta'}(x,x')U(x,x')$, y resolvemos recordando que σ^{α} es un vector en x que es tangente a la única geodésica que conecta x con x'. Esta geodésica está parametrizada por el parámetro afín λ, por lo que un desplazamiento a lo largo de ella puede describirse mediante $dx^{\alpha} = (\sigma^{\alpha}/\lambda)d\lambda$. De este modo, el primer término en (81) representa el cambio de $U^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$ a lo largo de la geodésica y se lo expresa como $g^{\alpha}_{\beta'}\,2\lambda\,dU/d\lambda$. Para el segundo término,

tomamos de la Sección 2.5 la ecuación diferencial de el determinante de van Vleck $\Delta(x,x')$, (49): $\Delta^{-1}(\Delta\sigma^{\alpha})_{;\alpha} = 4$. Reescribiéndola como $\sigma^{\alpha}{}_{\alpha} - 4 = -\Delta^{-1}\Delta_{,\alpha}\sigma^{\alpha} = -\Delta^{-1}\lambda\, d\Delta/d\lambda$, se obtiene una igualdad que será útil para el segundo término. A partir de estos cálculos auxiliares se escribe la ecuación (81) de la siguiente manera

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}\Big(2\ln U - \ln\Delta\Big) = 0\,. \tag{84}$$

De aquí arriba se ve que U^2/Δ es constante sobre el segmento de la geodésica en cuestión y debe ser igual al valor sobre el punto inicial x', es decir, el del límite de coincidencia; $U^2/\Delta = [U^2/\Delta] = 1$ (en virtud de (80) y la propiedad $[\Delta] = 1$ del determinante de van Vleck). Como esto se cumple para cada geodésica que emana de x', la solución de (81) y (80) es única y dada por

$$U^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x') = g^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')\Delta^{1/2}(x,x')\,, \tag{85}$$

que según (51) se reduce a

$$U^{\alpha}{}_{\beta'} = g^{\alpha}{}_{\beta'}\Big(1 + \frac{1}{12}R_{\gamma'\delta'}\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\lambda^3)\Big) \tag{86}$$

cerca de la coincidencia, con λ como el parámetro afín que mide la distancia entre x' y x. Derivando esta relación se puede obtener

$$U^{\alpha}{}_{\beta';\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma'}{}_{\gamma}\Big(g^{\alpha}{}_{\alpha'}R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'} - \frac{1}{3}g^{\alpha}{}_{\beta'}R_{\gamma'\delta'}\Big)\sigma^{\delta'} + O(\lambda^2), \tag{87}$$

$$U^{\alpha}{}_{\beta';\gamma'} = \frac{1}{2}\Big(g^{\alpha}{}_{\alpha'}R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'} + \frac{1}{3}g^{\alpha}{}_{\beta'}R_{\gamma'\delta'}\Big)\sigma^{\delta'} + O(\lambda^2), \tag{88}$$

y eventualmente,

$$\Big[\Box U^{\alpha}{}_{\beta'}\Big] = \frac{1}{6}\delta^{\alpha'}{}_{\beta'}R(x'). \tag{89}$$

Algo similar se puede hacer con (82) e integrar a lo largo de cada geodésica nula que genera el cono $\sigma(x,x') = 0$. Los valores iniciales se obtienen tomando el límite de coincidencia sobre esta misma ecuación usando (80), (89) y la relación $[\sigma^{\gamma}{}_{\gamma}] = 4$. Finalmente

$$\Big[V^{\alpha}{}_{\beta'}\Big] = -\frac{1}{2}\Big(R^{\alpha'}{}_{\beta'} - \frac{1}{6}\delta^{\alpha'}{}_{\beta'}R'\Big). \tag{90}$$

Con la información característica que sale de integrar (82), la ecuación de onda (83) admite solución única.

Resumiendo, las funciones de Green electromagnéticas retardada y avanzada quedan determinadas por (77) al menos en un entorno normal convexo al punto fuente x', y con; $U^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ dada por (85) y $V^{\alpha}{}_{\beta'}(x,x')$ determinado por (83) y de los datos característicos que salen de (82)

y (90). Entonces, cuando x se restringe a un entorno normal convexo a x' tenemos

$$
\begin{aligned}
H^{\alpha}_{\beta'}(x,x') &= V^{\alpha}_{\beta'}(x,x'), && (91)\\
G_{\mathrm{S}}{}^{\alpha}_{\beta'}(x,x') &= \frac{1}{2}U^{\alpha}_{\beta'}(x,x')\delta(\sigma) - \frac{1}{2}V^{\alpha}_{\beta'}(x,x')\theta(\sigma), && (92)\\
G_{\mathrm{R}}{}^{\alpha}_{\beta'}(x,x') &= \frac{1}{2}U^{\alpha}_{\beta'}(x,x')\Big[\delta_{+}(\sigma) - \delta_{-}(\sigma)\Big] \\
&\quad + V^{\alpha}_{\beta'}(x,x')\Big[\theta_{+}(-\sigma) + \frac{1}{2}\theta(\sigma)\Big]. && (93)
\end{aligned}
$$

Se ve que la función de Green singular no distingue entre pasado y futuro (propiedad s.2), y que no tiene soporte en $I^{\pm}(x')$ (propiedad s.3). Además, la función regular coincide con $G_{+}{}^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$ en $I^{+}(x')$ (propiedad r.2), y no tiene soporte sobre $I^{-}(x')$ (propiedad r.3). Ésta es la formulación general para obtener funciones de Green electromagnéticas con las características especificadas. En el Capítulo 5 las usaremos aplicadas a espaciotiempos estáticos con fuentes estáticas. Aquí finaliza la Parte I con el material preliminar.

Parte II

CUERPO PRINCIPAL

La Parte ii está dividida en tres capítulos que contienen el material original de esta tesis. En el Capítulo 4 se construyen espaciotiempos con cáscaras y se analiza su posible estabilidad mecánica linealizada. En el Capítulo 5 se plantean las condiciones generales para resolver problemas electrostáticos en espaciotiempos estáticos con cáscaras de simetría esférica y cilíndrica, y cómo obtener la autointeracción. En el Capítulo 6 se presentan los resultados obtenidos en cuanto a la autofuerza sobre una carga eléctrica q en estas geometrías y la caracterización de los efectos eléctricos en términos de la curvatura de la cáscara y la topología de la variedad.

4 ESPACIOTIEMPOS CON CÁSCARAS

Comenzamos por presentar la construcción matemática de espaciotiempos con cáscaras infinitamente delgadas. Nos concentraremos exclusivamente en geometrías con simetría esférica o cilíndrica donde aplicaremos el formalismo de cáscaras conocido como *thin-shell formalism*, introducido por de Darmois, Sen, Israel y Lanczos [8-11]. Éste consiste en pegar dos subvariedades pertenecientes a geometrías que son soluciones de las ecuaciones de Einstein. El resultado es una nueva variedad, geodésicamente completa, con una cáscara de materia en la hipersuperficie de pegado que une las dos regiones.

Se construyen dos tipos de geometrías que son localmente idénticas y se distinguen por sus características topológicas. Una de ellas corresponde a espaciotiempos con una cáscara y una sola región asintótica. La otra a espaciotiempos con un agujero de gusano y dos regiones asintóticas. Estos últimos son los comúnmente denominados *thin-shell wormholes*, en donde la cáscara representa una garganta infinitamente corta que conecta dos regiones diferentes. En general, el tipo de materia requerida para construir agujeros de gusano viola la condición de energía nula (también la débil, la fuerte y la dominante) al menos en alguna región cercana a la garganta [95]. Al utilizar cáscaras la densidad de energía negativa se puede concentrar exclusivamente en la hipersuperficie de unión. Denominaremos materia exótica a la energía con signo negativo medible por un observador local. Este tipo de materia es matemáticamente consistente con la Relatividad General en el sentido de que no se contrapone a la conservación de energía-momento. Si bien no hay evidencias clásicas, existen experimentos cuánticos de efectos con pequeñas violaciones a la condición de energía nula. Un ejemplo donde se mide una densidad de energía local negativa es el efecto Casimir [95].

Aunque estaremos interesados en espaciotiempos estáticos, es físicamente relevante estudiar la estabilidad mecánica de los escenarios que se utilizan. En este Capítulo se suponen pequeñas perturbaciones de la posición de la cáscara que preservan la simetría y la estaticidad del bulk para analizar su estabilidad mecánica linealizada. En particular se incluyen casos de cáscaras cilíndricas, y agujeros de gusano en vacío que no son simétricos a través de la garganta. Los resultados relativos a esto último se encuentran actualmente en el artículo publicado junto con C. Simeone y E. Eiroa en [4]. En cuanto a lo casos esféricos, fueron tratados en variadas ocaciones en la literatura, entre los cuales se destacan los trabajos [64, 66-73], así como otros anteriores mencionados en sus referencias. Finalmente nos quedaremos con los espaciotiempos estáticos que se utilizarán en los siguientes capítulos para estudiar pro-

piedades globales en función de la autointeracción electrostática de una carga puntual.

En la Sección 4.1 y la Sección 4.2 se introduce la teoría y notación relativa al tratamiento de hipersuperficies, su curvatura intrínseca y extrínseca. A partir de la Sección 4.3 nos enfocamos en las características de hipersuperficies tipo-tiempo que serán de interés en este trabajo. En la Sección 4.4 se formula la construcción de cáscaras con geometrías de simetría esférica y cilíndrica general, y finalmente en la Sección 4.5 y Sección 4.6 se aplican a espaciotiempos asociados a geometrías cónicas (caso cilíndrico) y geometrías de Schwarzschild, respectivamente, con una cáscara de materia.

En cuánto a la notación; índices griegos α, β, γ se usan para componentes tensoriales corriendo sobre coordenadas espaciotemporales $\{t, r, \varphi, \zeta\}$ con t la componente temporal. Los índices latinos i, j, k se usan exclusivamente para componentes tridimensionales en hipersuperficies.

4.1 HIPERSUPERFICIES: CURVATURA INTRÍNSECA Y EXTRÍNSECA

Una hipersuperficie tridimensional $\mathcal{H}$ se describirá con las coordenadas intrínsecas $\xi^i = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ dadas por las ecuaciones $x^\alpha = x^\alpha(\xi^i)$. Estudiaremos hipersuperficies no nulas en las que se puede definir una normal unitaria n_α a $\mathcal{H}$ tal que

$$\upsilon \equiv n_\alpha n^\alpha = \begin{cases} -1 \text{ si } \mathcal{H} \text{ es tipo-espacio}\,, \\ +1 \text{ si } \mathcal{H} \text{ es tipo-tiempo}\,. \end{cases} \tag{94}$$

La métrica intrínseca es la que se obtiene al restringir el elemento de línea de la variedad cuadridimensional, $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, a desplazamientos sobre $\mathcal{H}$. Utilizando los cuadri-vectores $e_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi i}$, tangentes a las curvas de la hipersuperficie, se obtiene:

$$h_{ij} = g_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta\,, \tag{95}$$

la métrica inducida sobre $\mathcal{H}$. La relación de completitud para la métrica inversa es

$$g^{\alpha\beta} = \upsilon\, n^\alpha n^\beta + h^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta\,. \tag{96}$$

El tensor $h^{\alpha\beta} \equiv h^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta$ proyecta tensores cuadridimensionales arbitrarios eliminando las componentes normales a la hipersuperficie. Un tensor *puramente tangencial* $\mathcal{T}_{\alpha\ldots\beta}$ tiene asociado un tensor tridimensional definido por sus componentes $\mathcal{T}_{i\ldots j} = \mathcal{T}_{\alpha\ldots\beta} e_i^\alpha \ldots e_j^\beta$. Los 3-tensores $\mathcal{T}^{i\ldots j}$, tanto como la métrica tridimensional h_{ij}, son escalares ante transformaciones de coordenadas x^α de la cuadrivariedad del espaciotiempo, pero se comportan como tensores ante transformaciones de las coordenadas

tridimensionales ξ^i intrínsecas de $\mathcal{H}$. Se define la derivada covariante intrínseca de un 3-vector $\mathcal{T}_i$ como la proyección tridimensional de $\mathcal{T}_{\alpha;\beta}$ sobre $\mathcal{H}$, y la denotamos

$$\mathcal{T}_{i|j} \equiv \mathcal{T}_{\alpha;\beta} e_i^\alpha e_j^\beta \,. \tag{97}$$

Explícitamente, se puede calcular como

$$\mathcal{T}_{i|j} = \mathcal{T}_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \mathcal{T}_k \,, \tag{98}$$

a partir de la conexión Γ_{ij}^k compatible con la métrica inducida h_{ij}, y análogamente para tensores de mayor rango. Las componentes $\mathcal{T}_{i|j}$ son la parte tangencial del cuadrivector $\mathcal{T}^\alpha{}_{;\beta} e_j^\beta$, que se escribe completamente como

$$\mathcal{T}^\alpha{}_{;\beta} e_j^\beta = \mathcal{T}^i{}_{|j} e_i^\alpha - \upsilon \mathcal{T}^i K_{ij} n^\alpha \,, \tag{99}$$

donde en la componente normal se define el 3-tensor simétrico de curvatura extrínseca de la hipersuperficie

$$K_{ij} \equiv n_{\alpha;\beta} e_i^\alpha e_j^\beta \,. \tag{100}$$

La curvatura extrínseca es la magnitud que caracteriza cómo se curva $\mathcal{H}$ embebida en la cuadrivariedad. La traza, $K \equiv h^{ij} K_{ij} = n^\alpha{}_{;\alpha}$, es igual a la expansión de una congruencia de geodésicas que interceptan la hipersuperficie ortogonalmente. Una hipersuperficie es convexa si la congruencia diverge, $K > 0$, y es cóncava si la congruencia converge, $K < 0$.

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi expresan algunas componentes de la curvatura del espaciotiempo en término de las curvaturas intrínseca y extrínseca de la hipersuperficie:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_i^\alpha e_j^\beta e_k^\gamma e_l^\delta = R_{ijkl} + \upsilon \left(K_{il} K_{jk} - K_{ik} K_{jl}\right) \tag{101}$$

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}\, n^\delta e_i^\alpha e_j^\beta e_k^\gamma = K_{ij|k} - K_{ik|j} \,, \tag{102}$$

donde el tensor de Riemann tridimensional R^i_{jkl} representa la curvatura intrínseca, determinado puramente por h_{ij}. Introduciendo el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ y el escalar de Ricci tridimensional ${}^3R = h^{ij} R^k{}_{ikj}$ [1], las ecuaciones de Gauss-Codazzi pueden escribirse en su formulación contraída como

$$-2\upsilon\, G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^3R + \upsilon \left(K^{ij} K_{ij} - K^2\right) = -\upsilon\, 16\pi T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \tag{103}$$

$$G_{\alpha\beta}\, e_i^\alpha n^\beta = K_i{}^j{}_{|j} - K_{,i} = 8\pi T_{\alpha\beta} e_i^\alpha n^\beta \,. \tag{104}$$

Éstas forman parte de las ecuaciones de Einstein sobre una hipersuperficie, quedan expresadas exclusivamente en términos de la curvatura intrínseca y extrínseca por lo que vinculan h_{ij} y K_{ij} sobre $\mathcal{H}$. Las 6 componentes restantes del tensor de Einstein, $G_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$, no pueden expresarse solamente en términos de h_{ij} y K_{ij}.

1 Cuando la notación de una cantidad tridimensional se confunda con otra cuadridimensional se usa el superíndice ^{3} para distinguirla.

4.1.1 *Formas fundamentales*

Las hipersuperficies se pueden clasificar a partir de la forma que toma el tensor del energía-momento $T_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}G_{\alpha\beta}$ sobre $\mathcal{H}$ (o por cómo se comporta al aproximarse a puntos sobre ella). Las formas fundamentales son condiciones sobre la curvatura intrínseca y extrínseca que se establecen para eliminar posibles singularidades del $T_{\alpha\beta}$ evaluado en la hipersuperficie. Para formularlas consideramos que $\mathcal{H}$ separa el espaciotiempo en dos subvariedades cuadridimensionales $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$, usaremos

$$[A] \equiv \{A(\mathcal{M}_+) - A(\mathcal{M}_-)\}\Big|_{\mathcal{H}} \equiv A|^+ - A|^- \tag{105}$$

para denotar el salto a través de la hipersuperficie, y la semi suma

$$\tilde{A} \equiv \frac{1}{2}(A|^+ + A|^-) \tag{106}$$

para cualquier cantidad vectorial A definida a ambos lados de la hipersuperficie. La primera forma fundamental establece que la métrica inducida sea la misma de ambos lados de $\mathcal{H}$,

$$[h_{ij}] = 0\,. \tag{107}$$

Esta condición determina una geometría bien definida en el sentido de evitar términos singulares al calcular las primeras derivadas del tensor métrico cuadridimensional en los puntos de la hipersuperficie. Es un requerimiento indispensable para definir cantidades geométricas como el tensor de Riemann (al menos de forma distribucional, ver (117) más adelante). La segunda forma fundamental establece condiciones sobre la curvatura extrínseca. Pidiendo

$$[K_{ij}] = 0, \tag{108}$$

se evitan singularidades en la curvatura del espaciotiempo sobre $\mathcal{H}$. A partir de esta segunda condición se tiene un tensor de energía regular e incluso un tensor de Riemann completo sin singularidades evaluado sobre la hipersuperficie. Las magnitudes tridimensionales que aparecen en la segunda forma fundamental, $K_{ij}|^+$ y $K_{ij}|^-$, representan la curvatura extrínseca de la hipersuperficie embebida en la subvariedad $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$ respectivamente. La normal n_α apunta desde $\mathcal{M}_-$ hacia $\mathcal{M}_+$ por convención.

Si el tensor de energía-momento es continuo $\mathcal{H}$ se dice regular. Si $K_{ij}|^+ = K_{ij}|^-$ en todos los puntos de $\mathcal{H}$ pero hay una discontinuidad finita en el $T_{\alpha\beta}$, se tiene una superficie de *interfase*. Este caso corresponde, por ejemplo, al contorno que separa una estrella del vacío que la rodea, $T_{\alpha\beta}$ pega un salto tipo escalón al atravesar la interfase. Por otro lado, si no se satisface la segunda forma fundamental, $K_{ij}|^+ \neq K_{ij}|^-$, el tensor de energía-momento presenta una singularidad sobre $\mathcal{H}$. Estas

singularidades, correspondientes a hipersuperficies tipo *cáscaras*, pueden interpretarse como una densidad de energía concentrada en una fina capa del espaciotiempo representada por $\mathcal{H}$.

En la siguiente sección se presenta el tensor de energía momento y su interpretación sobre hipersuperficies que no satisfacen la segunda forma fundamental. Siempre se pedirá que una hipersuperficie satisfaga la primera forma fundamental, bajo esta hipótesis los tensores de curvatura extrínseca de una cáscara quedan sujetos a 8 condiciones que se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Gauss-Codazzi contraídas (103) y (104), resumidas en

$$ {}^3R\,\upsilon + \tilde{K}_{ij}\tilde{K}^{ij} - \tilde{K}^2 + 16\pi^2(S_{ij}S^{ij} - \frac{1}{2}S^2) = -8\pi\tilde{T}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta\,, \tag{109} $$

$$ \tilde{K}_{ij}S^{ij} = [T_{\alpha\beta}]n^\alpha n^\beta\,, \tag{110} $$

$$ \tilde{K}_i{}^j{}_{|j} - \tilde{K}_{,i} = 8\pi\,\tilde{T}_{\alpha\beta}e_i^\alpha n^\beta\,, \tag{111} $$

$$ S^{ij}{}_{|j} = -\upsilon[T^{\alpha\beta}]e^i_\alpha n_\beta\,. \tag{112} $$

La condición (109), o las (111), se obtienen de sumar las ecuaciones (103), o las respectivas (104), a cada lado de la cáscara. Las ecuaciones (110) y (112) se obtienen de manera análoga, pero restando las ecuaciones (103) y (104) a cada lado de la cáscara, respectivamente.

4.2 TENSOR DE ENERGÍA SUPERFICIAL

Suponemos la existencia de un sistema de coordenadas x^α en un entorno de la hipersuperficie tal que se pueda definir la función $s(x)$, cuyo módulo mide la distancia (o tiempo) propio a lo largo de las geodésicas que la atraviesan ortogonalmente. La métrica en un entorno de la posición de $\mathcal{H}$, ubicada en $s = 0$, puede escribirse de forma distribucional como

$$ g_{\alpha\beta}(x) = \Theta\left(s(x)\right) g^+_{\alpha\beta}(x) + \Theta\left(-s(x)\right) g^-_{\alpha\beta}(x)\ , \tag{113} $$

donde las métricas diferenciables $g^\pm_{\alpha\beta}(x)$, evaluadas en las coordenadas x^α, describen las regiones $\mathcal{M}_\pm$ del bulk a cada lado de $\mathcal{H}$ (al menos en un entorno). Si ξ^i son las coordenadas tridimensionales que adoptamos para describir la hipersuperficie, se ve que $[e^\alpha_i] = 0$ ya que ξ^i son las mismas de ambos lados. Las derivadas de la métrica son

$$ g_{\alpha\beta,\gamma}(x) = \Theta\left(s\right) g^+_{\alpha\beta,\gamma} + \Theta\left(-s\right) g^-_{\alpha\beta,\gamma}(x)\ , \tag{114} $$

donde se usó que $[g_{\alpha\beta}] = 0$ para eliminar el término proporcional a la delta de Dirac, es decir, se impuso la primera forma fundamental y se usa que $[n_\alpha] = 0$ en el sistema de coordenadas que cubre un entorno de la hipersuperficie. Bajo estas condiciones, los símbolos de Christoffel se pueden definir como una magnitud distribucional

$$ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Theta(s)\Gamma_+{}^\alpha_{\beta\gamma} + \Theta(-s)\Gamma_-{}^\alpha_{\beta\gamma}\,, \tag{115} $$

evitando términos proporcionales a $\Theta(s)\delta(s)$. Cómo la métrica $g_{\alpha\beta}$ es continua a través de $\mathcal{H}$, la única discontinuidad en sus derivadas puede surgir en la dirección normal, por lo que se define el tensor

$$k_{\alpha\beta} = \upsilon[g_{\alpha\beta,\gamma}]n^{\gamma}\,. \tag{116}$$

Al evaluar el tensor de Riemann, se tiene

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= \Theta(s)R_{+}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \Theta(-s)R_{-}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \\ &\quad \delta(s)\frac{\upsilon}{2}\left(k^{\alpha}{}_{\delta}n_{\beta}n_{\gamma} - k^{\alpha}{}_{\gamma}n_{\beta}n_{\delta} - k_{\beta\delta}n^{\alpha}n_{\gamma} + k_{\beta\gamma}n^{\alpha}n_{\delta}\right), \end{aligned} \tag{117}$$

y contrayendo índices una vez para el tensor de Ricci, y otra vez para el escalar, se consigue la parte que acompaña a la delta de Dirac en de las ecuaciones de Einstein. Por ejemplo, el escalar de Ricci queda:

$$\begin{aligned} R &= \delta(s)\upsilon\left(k_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} - \upsilon k\right) + \Theta(s)R^{+} + \Theta(-s)R^{-} \\ &= -2\delta(s)\upsilon[K] + \Theta(s)R^{+} + \Theta(-s)R^{-}\,, \end{aligned} \tag{118}$$

donde $k = k_{\alpha}^{\alpha}$. Para obtener el segundo renglón se usó la proyección de $k_{\alpha\beta}$ sobre $\mathcal{H}$, que sale de calcular por definición

$$2\upsilon[K_{ij}] = 2[n_{\alpha;\beta}]e_i^{\alpha}e_j^{\beta} = k_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_j^{\beta}\,, \tag{119}$$

y que la traza se puede escribir como

$$k = k_{\alpha\beta}\left(h^{\alpha\beta} + \upsilon n^{\alpha}n^{\beta}\right) = 2\upsilon[K] + \upsilon k_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}\,. \tag{120}$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones de Einstein, se obtiene la expresión para el tensor de energía-momento:

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(s)T_{+\alpha\beta} + \Theta(-s)T_{-\alpha\beta} + \delta(s)S_{\alpha\beta}\,. \tag{121}$$

El tensor $S_{\alpha\beta}$ representa la densidad de energía superficial sobre la hipersuperficie, satisface $S_{\alpha\beta}n^{\beta} = 0$, y admite la descomposición:

$$S^{\alpha\beta} = S^{ij}e_i^{\alpha}e_j^{\beta}\,, \tag{122}$$

donde el 3-tensor simétrico que se obtuvo queda definido como

$$S_{ij} = -\frac{\upsilon}{8\pi}\left([K_{ij}] - [K]h_{ij}\right)\,. \tag{123}$$

Estas últimas son las ecuaciones de Einstein sobre la hipersuperficie y son conocidas como ecuaciones de Lanczos. De la ecuación (121) queda en evidencia que si se satisface la segunda forma fundamental se evitan singularidades en el tensor de energía cuadridimensional, e incluso (no tan evidente) sobre el tensor de Riemann completo. Sin embargo, si no se satisface, la singularidad sobre $\mathcal{H}$ tiene una clara interpretación física. Tomando una normal n^{α} espacial, podemos adoptar un sistema ortonormal sobre la hipersuperficie tipo-tiempo tal que

$$h_{\hat{i}\hat{j}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{124}$$

El tensor de energía superficial diagonalizado queda

$$S_{\hat{i}\hat{j}} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \tag{125}$$

de donde se interpreta la densidad de energía superficial Σ y las presiones principales p_2 y p_3, en las direcciones principales dadas por la base ortonormal $(e_0^\alpha, e_2^\alpha, e_3^\alpha)$ sobre $\mathcal{H}$. Equivalentemente, se definen también las tensiones superficiales principales como $\mu_2 = -p_2$ y $\mu_3 = -p_3$.

Por otro lado, además del significado señalado en la Sección 4.1, la curvatura extrínseca tiene una precisa interpretación geométrica en términos de los radios principales de curvatura. En la base ortonormal sobre la hipersuperficie tenemos que

$$K_{\hat{i}\hat{j}}|^{\pm} \doteq K^{\pm}_{\hat{i}\hat{j}} = \delta \begin{pmatrix} A_0^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3^{\pm} \end{pmatrix}, \tag{126}$$

donde tomamos la dirección temporal e_0^α y dos espaciales $(e_2^\alpha,\ e_3^\alpha)$ [2]. Los autovalores en la diagonal representan la cuadri-aceleración en la dirección principal temporal y los inversos de los radios principales de curvatura de la superficie, respectivamente [95, 116]. Más adelante nos interesará la curvatura principal de la parte espacial

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm} &= \delta\, n^{\pm}_{\alpha;\beta}(e_2^\alpha e_2^\beta + e_3^\alpha e_3^\beta) \\ &= \kappa_2^{\pm} + \kappa_3^{\pm}\,. \end{aligned} \tag{127}$$

Esta proyección sobre los vectores espaciales de $\mathcal{H}$ equivale a dos veces la curvatura normal media de la superficie espacial en cada punto de la cáscara embebida en $\mathcal{M}_{\pm}$. Finalmente el salto de la curvatura extrínseca se caracteriza por los valores principales

$$[K_{\hat{i}\hat{j}}] = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix}, \tag{128}$$

en donde el salto de la curvatura principal se define como

$$\begin{aligned} \kappa &= [n_{\alpha;\beta}](e_2^\alpha e_2^\beta + e_3^\alpha e_3^\beta) \\ &= \kappa_+ - \delta\,\kappa_- \\ &= \kappa_2 + \kappa_3\,. \end{aligned} \tag{129}$$

Notar que esta cantidad está íntimamente relacionada con la densidad de energía superficial de la cáscara, precisamente; $\kappa = -8\pi\Sigma$.

2 el parámetro δ del lado derecho de (128) se introduce para corregir la arbitrariedad del sentido de la normal n^α en casos donde la cáscara une dos regiones asintóticas. Por la convención adoptada, con una normal que apunta de $\mathcal{M}_-$ hacia $\mathcal{M}_+$, $\delta = \pm 1$ en la subvariedad $\mathcal{M}_{\pm}$ (en la Sección 4.4 se ve en detalle). En espaciotiempos con una región asintótica $\delta = 1$.

4.3 CÁSCARAS TIPO-TIEMPO EN VACÍO

Las variedades que son de interés en este trabajo poseen una cáscara tipo-tiempo en vacío. Se estudiarán geometrías con simetría esférica o cilíndrica, con una cáscara de materia que preserve la simetría, inmersa en un espaciotiempo con tensor de energía-momento nulo de cada lado. Si bien nos interesan las configuraciones estáticas, en este Capítulo permitiremos la dinámica de la cáscara para estudiar su estabilidad.

Las cáscaras son una idealización que permiten compactar energía en una fina capa localizada en su hipersuperficie y de esta manera poder abordar un problema en una geometría simplificada. Para construir los espaciotiempos con estas características se aplica el método de cortar y pegar geometrías, que consiste en tomar 2 subvariedades de espaciotiempos conocidos y pegarlas sobre una hipersuperficie de unión. Tomaremos cada subvariedad de alguna región de una geometría que es solución de las ecuaciones de Einstein. La hipersuperficie de unión será una cáscara tipo-tiempo con una superficie espacial esférica o cilíndrica.

Si las regiones del bulk a cada lado de la cáscara se toman de espaciotiempos que son soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein, el *pegado* da lugar a una cáscara de materia en vacío. Para este caso las condiciones (109), (110), (111) y (112) sobre la cáscara quedan todas igualadas a cero. Para estudiar la dinámica de cáscaras en vacío suelen utilizarse típicamente dos de las condiciones de Gauss-Codazzi. La primera es la *identidad de evolución*

$$\tilde{K}_{ij}S^{ij} = 0\,, \tag{130}$$

obtenida de (110), que representa una relación entre los coeficientes de las métricas a cada lado de la cáscara que debe satisfacerse en todo instante de su evolución. La segunda condición es la *ecuación de conservación* para las densidades superficiales sobre la hipersuperficie,

$$S^{ij}{}_{|j} = 0\,. \tag{131}$$

obtenida de (112). Junto con las ecuaciones dinámicas, que puedan leerse de la expresión para el tensor de energía superficial (125) y las ecuaciones de Lanczos (123), suelen usarse para determinar la evolución dinámica de la cáscara. Para completar el sistema es necesario una relación fenomenológica; la ecuación de estado para las densidades.

En general, si se permite la dinámica de la cáscara, las métricas del bulk podrían modificarse, por ejemplo, por la emisión de ondas gravitacionales. Se despreciarán los efectos del movimiento de la cáscara para trabajar con geometrías estáticas en el bulk. Si se supone que la cáscara no modifica las métricas del bulk, las ecuaciones (109), (110), (111) y (112) quedan garantizadas siempre que se pueda definir un sistema de coordenadas intrínsecas sobre $\mathcal{H}$ compatible con las métricas inducidas de cada lado, es decir, que se cumpla la primera forma fundamental.

Estas ecuaciones representan vínculos infinitesimales entre las geometrías del bulk en la unión sobre la cáscara, y junto con las de Lanczos representan ecuaciones dinámicas para las densidades de energía. Además pueden existir condiciones globales que relacionan las coordenadas a ambos lados de la hipersuperficie. Por ejemplo, si $\mathcal{H}$ representa la superficie de una esfera, el área de la esfera debe medir lo mismo en cualquier sistema de coordenadas.

4.4 CONSTRUCCIÓN

Desarrollamos la construcción de geometrías con simetría cilíndrica o esférica con una cáscara usando el formalismo de Sen, Darmois, Lanczos e Israel [8-11]. Permitiremos pequeñas perturbaciones de la posición de la cáscara que preservan la simetría y la estaticidad del bulk. Para ello se supone que la velocidad de la cáscara es pequeña frente a la velocidad de la luz y se desprecia la emisión de ondas gravitacionales por su movimiento. A partir de estas construcciones, y bajo las hipótesis señaladas, se estudiará la estabilidad de configuraciones estáticas en las siguientes secciones.

Tomaremos dos subvariedades de espaciotiempos conocidos para pegarlas en la hipersuperficie de unión $\mathcal{H}$. En geometrías esféricas se tienen coordenadas $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$ con; $-\infty \leq t \leq \infty$, $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, mientras que en cilíndricas $x^\alpha = (t, r, \varphi, z)$ con $-\infty \leq z \leq \infty$. Para desarrollar ambos casos colectivamente se usa la coordenada ζ correspondiente a θ o z.

Se empieza con dos métricas estáticas de la misma simetría, que denotamos por comodidad $g^{1,2}_{\alpha\beta}$, soluciones de las ecuaciones de Einstein dadas por el elemento de línea

$$ds^2_{1,2} = -A_{1,2}(r_{1,2})dt^2_{1,2} + B_{1,2}(r_{1,2})dr^2_{1,2} + \mathcal{C}_{1,2}d\varphi^2_{1,2} + D_{1,2}(r_{1,2})d\zeta^2_{1,2}\,. \quad (132)$$

Cada uno describe la variedad completa $\mathcal{M}_1$ o $\mathcal{M}_2$. Todos los coeficientes dependen de la coordenada radial $r_{1,2}$ respectiva. En geometrías con simetría cilíndrica $\mathcal{C}_{1,2} = C_{1,2}(r_{1,2})$, mientras que en los casos esféricos definimos en general $\mathcal{C}_{1,2} = C_{1,2}(r_{1,2})\sin^2\theta_{1,2}$. Notar que en geometrías esféricas, además, $C_{1,2}(r_{1,2}) = D_{1,2}(r_{1,2})$ y, en particular en métricas tipo Schwarzschild $A_{1,2}(r_{1,2}) = B_{1,2}(r_{1,2})^{-1}$. El procedimiento consiste en remover de cada variedad ($\mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_1$) una región cuadridimensional delimitada por cierto valor de la respectiva coordenada radial. Así se obtienen las subvariedades $\mathcal{M}_+ \in \mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_- \in \mathcal{M}_1$ con borde en la hipersuperficie tipo-tiempo $\mathcal{H}_2 \equiv \partial\mathcal{M}_+$ o $\mathcal{H}_1 \equiv \partial\mathcal{M}_-$, de superficies espaciales esféricas o cilíndricas. Las esferas o cilindros, así como la dirección temporal, serán identificadas. Hay 3 tipos de construcciones po-

sibles que pueden realizarse para obtener una variedad geodésicamente completa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+$ con una cáscara de unión en $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_2 \equiv \mathcal{H}_1$;

$$\begin{aligned} &\text{Tipo I}: \quad \mathcal{M}_- = \{x_1^\alpha \,/\, 0 \leq r_1 \leq a\}, \quad \mathcal{M}_+ = \{x_2^\alpha \,/\, 0 \leq b \leq r_2\}\,, \\ &\text{Tipo II}: \quad \mathcal{M}_- = \{x_1^\alpha \,/\, 0 \leq a \leq r_1\}, \quad \mathcal{M}_+ = \{x_2^\alpha \,/\, 0 \leq b \leq r_2\}\,, \\ &\text{Tipo III}: \quad \mathcal{M}_- = \{x_1^\alpha \,/\, 0 \leq r_1 \leq a\}, \quad \mathcal{M}_+ = \{x_2^\alpha \,/\, 0 \leq r_2 \leq b\}\,. \end{aligned} \tag{133}$$

El primero corresponde a unir una región interior y una región asintótica exterior, mientras que el segundo corresponde a pegar dos regiones exteriores. El tercero, correspondiente a unir dos subvariedades interiores, no será considerado en este trabajo. En cualquier caso las subvariedades se unen en la cáscara $\mathcal{H}$ que se define como

$$\mathcal{H}: \begin{cases} \mathcal{H}_1(r_1, \tau) = r_1 - a(\tau) = 0 \\ \mathcal{H}_2(r_2, \tau) = r_2 - b(\tau) = 0\,, \end{cases} \tag{134}$$

según el sistema de coordenadas a cada lado de la hipersuperficie. Como se pretende analizar la estabilidad de la construcción, en general, los radios no nulos $a = a_1(\tau)$ y $b = a_2(\tau)$ son funciones del tiempo propio τ sobre la cáscara, dado por

$$-d\tau^2 = -d\tau_{1,2}{}^2 = -A_{1,2} dt_{1,2}{}^2 + B_{1,2}\dot{a}_{1,2}^2 d\tau^2\,, \tag{135}$$

donde el punto denota la derivada respecto al tiempo propio, $A_{1,2} = A_{1,2}(a_{1,2})$, y $B_{1,2} = B_{1,2}(a_{1,2})$, y entonces

$$d\tau^2 = \frac{A_{1,2}}{1 + B_{1,2}\dot{a}_{1,2}^2} dt_{1,2}^2\,. \tag{136}$$

Adoptando los sistemas de coordenadas $\xi_{1,2}^i = (\tau; \varphi_{1,2}; \zeta_{1,2})$ para $\mathcal{H}$, la métrica inducida sobre la cáscara se puede escribir como

$$ds^2 = -d\tau^2 + \mathcal{C}_{1,2} d\varphi_{1,2}^2 + D_{1,2} d\zeta_{1,2}^2\,. \tag{137}$$

Los coeficientes C_1, D_1 y C_2, D_2 también son funciones de τ, por lo que se obtienen hipersuperficies de un solo parámetro. La primera forma fundamental establece cómo deben vincularse infinitesimalmente estos coeficientes en función de la relación entre las coordenadas intrínsecas.

Por comodidad y para homogeneizar la notación, se usarán índices $(1, 2)$ en lugar de $|^\mp$ para referirnos a las cantidades sobre la cáscara en la subvariedad $\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$, respectivamente. Con las coordenadas y las métricas de la cuadrivariedad y de la hipersuperficie a cada lado, se puede escribir el tensor de curvatura extrínseca como [4, 70]

$$K_{ij}^{1,2} = -n_\gamma^{1,2} \left(\frac{\partial^2 x_{1,2}^\gamma}{\partial \xi_{1,2}^i \partial \xi_{1,2}^j} + (\Gamma_{1,2})_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x_{1,2}^\alpha}{\partial \xi_{1,2}^i} \frac{\partial x_{1,2}^\beta}{\partial \xi_{1,2}^j} \right) \Bigg|_{\mathcal{H}}\,. \tag{138}$$

Las normales unitarias a $\mathcal{H}$ que apuntan desde $\mathcal{M}_-$ a $\mathcal{M}_+$ quedan definidas como

$$n^{1,2}_\gamma = \delta \left| g^{\alpha\beta}_{1,2} \frac{\partial \mathcal{H}_{1,2}}{\partial x^\alpha_{1,2}} \frac{\partial \mathcal{H}_{1,2}}{\partial x^\beta_{1,2}} \right|^{-1/2} \frac{\partial \mathcal{H}_{1,2}}{\partial x^\gamma_{1,2}} \,, \tag{139}$$

donde se usa el parámetro δ tal que

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{geometría Tipo I,} \\ \left.\begin{array}{l} -1, \text{ para } \mathcal{M}_- \\ +1, \text{ para } \mathcal{M}_+ \end{array}\right\} & \text{geometría Tipo II.} \end{cases} \tag{140}$$

La normal para estas construcciones esféricas o cilíndricas queda

$$n^{1,2}_\gamma = \delta \left(-\dot{a}_{1,2}\sqrt{A_{1,2}B_{1,2}}, B_{1,2}\Delta_{1,2}, 0, 0 \right) , \tag{141}$$

donde se definió

$$\Delta_{1,2} = \sqrt{B^{-1}_{1,2} + \dot{a}^2_{1,2}} \,. \tag{142}$$

Se usará una prima para denotar una la derivada con respecto $r_{1,2}$ sobre los respectivos coeficientes y se entienden evaluados en $a = a_1$ o $b = a_2$, según corresponde. En la base ortonormal sobre la cáscara se tiene que $h_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ y las componentes no nulas del tensor de curvatura extrínseca son

$$K^{1,2}_{\hat{\tau}\hat{\tau}} = -\delta \frac{2A_{1,2}B_{1,2}\ddot{a}_{1,2} + A'_{1,2} + (A_{1,2}B_{1,2})' (\dot{a}_{1,2})^2}{2A_{1,2}B_{1,2}\Delta_{1,2}} \,, \tag{143}$$

$$K^{1,2}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \delta\Delta_{1,2} \frac{C'_{1,2}}{2C_{1,2}} \,, \tag{144}$$

$$K^{1,2}_{\hat{\zeta}\hat{\zeta}} = \delta\Delta_{1,2} \frac{D'_{1,2}}{2D_{1,2}} \,. \tag{145}$$

Finalmente, para el salto $[K_{\hat{i}\hat{j}}]$ a través de la cáscara se obtiene

$$[K_{\hat{\tau}\hat{\tau}}] = \frac{2A_2B_2\ddot{b} + A'_2 + (A_2B_2)' \dot{b}^2}{-2A_2B_2\Delta_2} + \epsilon \frac{2A_1B_1\ddot{a} + A'_1 + (A_1B_1)' \dot{a}^2}{-2A_1B_1\Delta_1} \,, \tag{146}$$

$$[K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}] = \Delta_2 \frac{C'_2}{2C_2} + \epsilon\Delta_1 \frac{C'_1}{2C_1} \,, \tag{147}$$

$$[K_{\hat{\zeta}\hat{\zeta}}] = \Delta_2 \frac{D'_2}{2D_2} + \epsilon\Delta_1 \frac{D'_1}{2D_1} \,, \tag{148}$$

donde $\epsilon = -1$ corresponde a una geometría Tipo I y $\epsilon = 1$ a un espaciotiempo Tipo II. En un marco ortonormal, el tensor de energía-momento toma la forma $S_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(\Sigma, p_\varphi, p_\zeta)$. De las ecuaciones de Lanczos (123) se tiene que la densidad de energía se puede escribir como

$$\Sigma = \Sigma_2 + \epsilon\Sigma_1, \tag{149}$$

donde se definió

$$\Sigma_{1,2} = -\frac{\Delta_{1,2}}{16\pi}\left(\frac{C'_{1,2}}{C_{1,2}} + \frac{D'_{1,2}}{D_{1,2}}\right). \tag{150}$$

Análogamente, de (123), las presiones toman la forma

$$p_\varphi = p_{\varphi 2} + \epsilon p_{\varphi 1} \tag{151}$$

$$p_\zeta = p_{\zeta 2} + \epsilon p_{\zeta 1}, \tag{152}$$

con

$$\begin{aligned} p_\varphi^{1,2} &= \frac{1}{16\pi B_{1,2}\Delta_{1,2}}\left\{2B_{1,2}\ddot{a}_{1,2} + B_{1,2}\left(\frac{A'_{1,2}}{A_{1,2}} + \frac{B'_{1,2}}{B_{1,2}} + \frac{D'_{1,2}}{D_{1,2}}\right)\dot{a}_{1,2}^2 \right. \\ &+ \left. \frac{A'_{1,2}}{A_{1,2}} + \frac{D'_{1,2}}{D_{1,2}}\right\}, \end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned} p_\zeta^{1,2} &= \frac{1}{16\pi B_{1,2}\Delta_{1,2}}\left\{2B_{1,2}\ddot{a}_{1,2} + B_{1,2}\left(\frac{A'_{1,2}}{A_{1,2}} + \frac{B'_{1,2}}{B_{1,2}} + \frac{C'_{1,2}}{C_{1,2}}\right)\dot{a}_{1,2}^2 \right. \\ &+ \left. \frac{A'_{1,2}}{A_{1,2}} + \frac{C'_{1,2}}{C_{1,2}}\right\}. \end{aligned} \tag{154}$$

Notar que las densidades de energía y las presiones pueden verse como el resultado de la suma de dos contribuciones, una de cada lado de la cáscara. De las últimas ecuaciones se computan los valores estáticos de la densidad de energía y las presiones que se usarán en cálculos subsiguientes. La densidad de energía estática es

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{16\pi\sqrt{B_2}}\left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{D'_2}{D_2}\right)\Bigg|_{b_0} - \epsilon\frac{1}{16\pi\sqrt{B_1}}\left(\frac{C'_1}{C_1} + \frac{D'_1}{D_1}\right)\Bigg|_{a_0}, \tag{155}$$

mientras que para las presiones se obtiene

$$p_{0\varphi} = \frac{1}{16\pi\sqrt{B_2}}\left(\frac{A'_2}{A_2} + \frac{D'_2}{D_2}\right)\Bigg|_{b_0} + \epsilon\frac{1}{16\pi\sqrt{B_1}}\left(\frac{A'_1}{A_1} + \frac{D'_1}{D_1}\right)\Bigg|_{a_0}, \tag{156}$$

y

$$p_{0\zeta} = \frac{1}{16\pi\sqrt{B_2}}\left(\frac{A'_2}{A_2} + \frac{C'_2}{C_2}\right)\Bigg|_{b_0} + \epsilon\frac{1}{16\pi\sqrt{B_1}}\left(\frac{A'_1}{A_1} + \frac{C'_1}{C_1}\right)\Bigg|_{a_0}, \tag{157}$$

donde a_0 y b_0 son los valores estáticos de los radios de la cáscara en el sistema de coordenadas correspondiente. A partir de pedir que el perímetro de la sección cilíndrica o la superficie de la cáscara esférica sea igual de cada lado se obtiene que

$$C_1(a) = C_2(b)\,, \tag{158}$$

para todo tiempo τ. Con esta relación global se pueden relacionar ambos radios sobre $\mathcal{H}$. Para los valores estáticos podemos escribir $a_0 = C_1^{-1}(C_2(b_0))$ o $b_0 = C_2^{-1}(C_1(a_0))$. Como consecuencia de la condición (158), las derivadas temporales $\dot{a}_{1,2}$ quedan relacionadas por

$$\frac{\dot{a}}{\dot{b}} = \frac{da}{db} = \frac{C'_2}{C'_1}\,. \tag{159}$$

4.5 CÁSCARAS ASOCIADAS A CUERDAS CÓSMICAS LOCALES

Las geometrías cilíndricas con una cáscara en vacío que utilizaremos son las llamadas cónicas y están asociadas a geometrías de cuerdas cósmicas locales. Corresponden a un caso particular de las métricas más generales de Levi-Civita. En esta Sección aplicamos el formalismo de pegado para variedades cónicas con una cáscara de materia y analizamos las configuraciones estáticas según el criterio de estabilidad conocido en la literatura como *bounded excursions* [67, 69, 70, 73, 74, 95]. Los resultados que aquí se presentan fueron publicados en [4]. El desarrollo general del criterio de estabilidad se encuentra resumido en el Apéndice A, aquí lo aplicamos concretamente para las geometrías de interés. Adicionalmente, en la Sección A.1 del Apéndice A, se aplica el formalismo de pegado y el análisis de estabilidad para cáscaras en geometrías de Levi-Civita y en la Sección A.2 se presentan los detalles para las geometrías de Schwarzschild.

A continuación definimos las métricas y resumimos los aspectos relevantes de la construcción y la estabilidad linealizada en geometrías asociadas a cuerdas cósmicas locales. Los resultados se resumen en la Sección 4.5.1 y la Sección 4.5.2. Las métricas cónicas en coordenadas cilíndricas $x^\alpha_{1,2} = (t_{1,2}, r_{1,2}, \varphi_{1,2}, z_{1,2})$, están descriptas por los elementos de línea

$$ds^2_{1,2} = -dt^2_{1,2} + dr^2_{1,2} + r^2_{1,2}\omega^2_{1,2}d\varphi^2_{1,2} + dz^2_{1,2}, \tag{160}$$

donde $0 < \omega_{1,2} \leq 1$. Estos espaciotiempos están asociados a cuerdas cósmicas de gauge delgadas, rectas e infinitas en la dirección z. Las geometrías son localmente planas, por lo tanto, las cuerdas no ejercen fuerza sobre una partícula estática. Los parámetros $\omega_{1,2}$ están relacionados al déficit de ángulo $2\pi(1-\omega_{1,2})$ de la geometría. Este deficit de ángulo no puede ser removido por una redefinición de la coordenada angular; en particular, una cuerda local ($\omega > 0$) genera efectos físicos como imágenes dobles y fluctuaciones de la densidad de energía. En el caso de la variedad de una cuerda cósmica infinitamente delgada la masa por unidad de longitud de la cuerda es $\mu = \frac{1-\omega}{4}$ y el tensor de energía-momento escrito en coordenadas cilíndricas queda $T_\alpha{}^\beta = \mathrm{diag}(\mu, 0, 0, \mu)\,\delta(r)/(2\pi\omega r)$.

La cáscara en la variedad $\mathcal{M}$, definida como en (133), se obtiene al pegar el contorno $\partial\mathcal{M}_-$, de coordenada radial $r_1 = a_1 = a(\tau)$, de la subvariedad $\mathcal{M}_- \subset \mathcal{M}_1$, con el contorno $\partial\mathcal{M}_+$, de radio $r_2 = a_2 = b(\tau)$, de la subvariedad $\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M}_2$. La geometría que se obtiene es plana excepto en la cáscara, y en el caso de ser un espaciotiempo Tipo I también hay una singularidad cónica en $r_1 = 0$ si $\omega_1 \neq 1$. Una región asintótica es cónicas si el déficit de ángulo es distinto de cero en esa subvariedad.

El elemento de línea de la métrica inducida sobre la cáscara es

$$dh^2 = -d\tau^2 + a^2_{1,2}\omega^2_{1,2}d\varphi^2_{1,2} + dz^2_{1,2}\,. \tag{161}$$

Identificando la coordenada angular $0 \leq \varphi_{1,2} = \varphi \leq 2\pi$ e imponiendo la primera forma fundamental, se obtiene la relación entre los radios y los parámetros del déficit

$$\omega_1 a = \omega_2 b\,. \tag{162}$$

Las derivadas temporales $\dot{a}_{1,2}$ quedan relacionadas mediante

$$\frac{\dot{a}}{\dot{b}} = \frac{da}{db} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{163}$$

La condición sobre el coeficiente en la dirección z de la métrica es trivial y se puede elegir libremente $-\infty < z_{1,2} = z < +\infty$. La normal a la cáscara en el sistema de coordenadas de cada lado, según (141), es

$$n_\gamma^{1,2} = \delta\left(-\dot{a}_{1,2}, \sqrt{1+\dot{a}_{1,2}^2}, 0, 0\right)\,, \tag{164}$$

donde se usa δ definida en (142). Seguimos usando los índices 1 y 2 para referirse a cantidades en las subvariedades $-$ y $+$, respectivamente, por comodidad en la notación. En la base ortonormal definida sobre la hipersuperficie se tiene $h_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(-1,1,1)$, y las componentes no nulas del tensor de curvatura extrínseca son

$$K_{\hat{\tau}\hat{\tau}}^{1,2} = -\delta\frac{\ddot{a}_{1,2}}{\sqrt{1+\dot{a}_{1,2}^2}}\,, \tag{165}$$

$$K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{1,2} = \delta\frac{\sqrt{1+\dot{a}_{1,2}^2}}{a_{1,2}}\,, \qquad (K_{\hat{z}\hat{z}}^{1,2} = 0)\,. \tag{166}$$

Finalmente, para el salto $[K_{\hat{i}\hat{j}}]$ se obtiene

$$[K_{\hat{\tau}\hat{\tau}}] = -\frac{\ddot{b}}{\sqrt{1+\dot{b}^2}} - \epsilon\frac{\ddot{a}}{\sqrt{1+\dot{a}^2}}\,, \tag{167}$$

$$[K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}] = \frac{\sqrt{1+\dot{b}^2}}{b} + \epsilon\frac{\sqrt{1+\dot{a}^2}}{a}\,, \qquad [K_{\hat{z}\hat{z}}] = 0\,, \tag{168}$$

donde $\epsilon = -1$ corresponde a un espaciotiempo Tipo I y $\epsilon = 1$ a uno Tipo II. En el marco ortonormal, el tensor de energía-momento superficial $S_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(\Sigma, p_\varphi, p_z)$ determina la densidad de energía y presiones;

$$\Sigma = -\frac{\sqrt{1+\dot{b}^2}}{8\pi b} - \epsilon\frac{\sqrt{1+\dot{a}^2}}{8\pi a}\,, \tag{169}$$

$$p_\varphi = \frac{\ddot{b}}{8\pi\sqrt{1+\dot{b}^2}} + \epsilon\frac{\ddot{a}}{8\pi\sqrt{1+\dot{a}^2}}\,, \tag{170}$$

$$p_z = \frac{1+\dot{b}^2+b\,\ddot{b}}{8\pi b\sqrt{1+\dot{b}^2}} + \epsilon\frac{1+\dot{a}^2+a\,\ddot{a}}{8\pi a\sqrt{1+\dot{a}^2}}. \tag{171}$$

Por lo que los valores estáticos quedan

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{b_0} + \epsilon\frac{1}{a_0}\right)\,, \tag{172}$$

$$p_{0\varphi} = 0\,, \tag{173}$$

$$p_{0z} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{b_0} + \epsilon\frac{1}{a_0}\right)\,, \tag{174}$$

donde a_0 y b_0 son los valores estáticos de los radios de la cáscara en las coordenadas de cada lado, relacionados por $a_0\omega_1 = b_0\omega_2$. Asimismo, la densidad de energía y presiones se escriben en función del radio b y sus derivadas temporales usando que $a = b\omega_2\omega_1^{-1}$. Todas las expresiones que siguen en esta sección se entienden compuestas con $a = a(b)$ para obtener funciones que dependen sólo de b. La ecuación de conservación (131) para cáscaras asociadas a cuerdas cósmicas es

$$\dot{\Sigma} + \Sigma\frac{\dot{b}}{b} + p_\varphi\frac{\dot{b}}{b} = 0, \tag{175}$$

y se puede reescribir de la siguiente manera

$$b\Sigma'(b) + \Sigma(b) + p_\varphi = 0, \tag{176}$$

donde la prima representa una derivada respecto al radio b. Usando las ecuaciones de estado linealizadas

$$p_\varphi = \eta_\varphi\left(\Sigma - \Sigma_0\right) + p_{0\varphi}\,, \qquad p_z = \eta_z\left(\Sigma - \Sigma_0\right) + p_{0z}, \tag{177}$$

con η_φ y η_z constantes, (176) se puede integrar formalmente para obtener $\Sigma(b)$. El criterio de estabilidad que aplicamos consiste en usar (169) para escribir la ecuación de movimiento de la cáscara de la forma $\dot{b}^2 + V(b) = 0$, donde se definió el potencial

$$V(b) = 1 - \left(\frac{(2\Sigma)^2 + (\psi_2)^2 - (\psi_1)^2}{4\Sigma\psi_2}\right)^2 \tag{178}$$

$$\text{con:} \quad \psi_1 = -\frac{1}{4\pi b}\frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad \text{y} \qquad \psi_2 = -\frac{1}{4\pi b}\,. \tag{179}$$

Para el análisis linealizado se considera una expansión de Taylor del potencial. Se puede chequear que en la expansión de Taylor a segundo orden alrededor de la solución estática en b_0, se tiene $V(b_0) = 0$ y $V'(b_0) = 0$. La última derivada se obtiene usando la ecuación de conservación (176). Finalmente, introduciendo las ecuaciones de estado y usando nuevamente (176), la segunda derivada del potencial queda

$$V''(b_0) = -\epsilon\frac{\eta_\varphi}{b_0\Sigma_0}\left(\Omega_2 + \epsilon\,\Omega_1\right), \tag{180}$$

$$\text{donde:} \quad \Omega_1 = -\frac{1}{4\pi b_0^2} \qquad \text{y} \qquad \Omega_2 = -\frac{1}{4\pi b_0^2}\frac{\omega_1}{\omega_2}\,. \tag{181}$$

La solución estática es estable ante perturbaciones radiales si $V''(b_0) > 0$. Esta condición, con las funciones auxiliares aquí definidas, resuelve el problema de la estabilidad mecánica linealizada para ambos Tipos, I y II, de topología. En las próximas subsecciones se resumen los resultados para una cáscara cilíndrica que envuelve una cuerda cósmica de gauge y para el caso de un agujero de gusano con métricas cónicas y asimétrico a través de la garganta.

4.5.1 *Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior*

Las geometrías Tipo I asociadas a cuerdas cósmicas presentan una región interior separada por una cáscara cilíndrica de materia de una región exterior que se extiende hasta infinito en la coordenada radial. El espaciotiempo resultante tiene una cáscara que rodea a una cuerda cósmica local ubicada en el eje si $\omega_1 \neq 1$, y es asintóticamente cónica si $\omega_2 \neq 1$.

Para configuraciones estáticas, el tensor de curvatura extrínseca asociado a cada lado de $\mathcal{H}$ tiene las únicas componentes no nulas: $K^{1,2}_{\varphi\varphi} \equiv K^{\mp}_{\varphi\varphi}$ (volvemos a la notación $\mp$ para cada lado de la hipersuperficie). La curvatura de la superficie embebida en cada subvariedad es, según se definió en (127), $\kappa_- = \frac{1}{a_0}$ y $\kappa_+ = \frac{1}{b_0}$. En geometrías cónicas estáticas, la traza del salto de la curvatura extrínseca $[K]$ coincide con la discontinuidad de la curvatura principal espacial κ, y siguiendo la definición (129), una cáscara cilíndrica queda caracterizada por

$$\begin{aligned}\kappa = \kappa_+ - \kappa_- &= \frac{1}{b_0} - \frac{1}{a_0} \\ &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 b_0}\,,\end{aligned} \tag{182}$$

para espaciotiempos estáticos. En cuanto a las densidades, los valores estáticos de la energía superficial y presiones quedan

$$\Sigma_0 = \frac{1}{8\pi b_0}\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}, \tag{183}$$

$$p_{0\varphi} = 0\,, \qquad p_{0z} = \frac{1}{8\pi b_0}\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}\,. \tag{184}$$

que son magnitudes positivas o negativas. En particular, (183) muestra que la cáscara puede ser de materia ordinaria o exótica dependiendo del signo de $\omega_1 - \omega_2$. Si el déficit de ángulo de la región exterior es mayor que el de la región interior entonces la densidad de energía es positiva, mientras que en la situación opuesta sólo puede haber densidad de energía negativa, es decir, una cáscara de materia exótica. La presión $p_{0\varphi}$ es nula, y la tensión a lo largo del eje $(-p_{0z})$ de simetría es igual a la densidad de energía; algo que era de esperar dada la naturaleza del tensor de energía-momento asociado a la geometría de la cuerda cósmica de la cual se obtuvo la construcción matemática. En cuanto a la estabilidad, el potencial obtenido es

$$V(b) = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_2^2} - \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{16\pi b\omega_2\Sigma}\right)^2 - (4\pi b\Sigma)^2, \tag{185}$$

y su segunda derivada evaluada en la posición estática b_0 queda

$$V''(b_0) = \frac{2\omega_1}{\omega_2 b_0^2}\eta_\varphi\,. \tag{186}$$

Se ve que la estabilidad es independiente de los parámetros ω_1, ω_2, y del radio estático b_0, pues son siempre magnitudes positivas. La estabilidad

depende únicamente del parámetro de la ecuación de estado linealizada, y se reduce a la positividad del coeficiente η_φ.

4.5.2 *Tipo II: Garganta en agujeros de gusano*

Las geometrías Tipo II son agujeros de gusano que no son simétricos a través de la garganta si $\omega_1 \neq \omega_2$. La cáscara es una garganta si satisface la condición de *flare–out*. En la literatura hay dos definiciones de la condición en los casos cilíndricos. La primera, llamada condición *areal*, requiere que las funciones de área $\mathcal{A}^{\mp}(r_{1,2}) = 2\pi\sqrt{g^{\mp}_{\varphi\varphi}(r_{1,2})g^{\mp}_{zz}(r_{1,2})} = 2\pi\omega_{1,2}r_{1,2}$ sean crecientes a ambos lados de la garganta [97]. La segunda, conocida como la condición *radial* [100], sólo requiere que la función del radio perimetral de la circunsferencia $\mathcal{R}^{\mp}(r_{1,2}) = \sqrt{g^{\mp}_{\varphi\varphi}(r_{1,2})} = \omega_{1,2}r_{1,2}$ tenga un mínimo en la garganta. Para una variedad Tipo II, con dos regiones en general diferentes ($\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$) a cada lado de la garganta, las dos condiciones de flare-out se satisfacen ya que $r_{1,2} \geq a_{1,2}$. En cuanto a la curvatura de la configuración estática, nuevamente, la traza del salto de la curvatura extrínseca $[K]$ coincide con la discontinuidad de la curvatura principal espacial κ_{wh}. Para geometrías cónicas Tipo II estáticas obtenemos

$$\begin{aligned}\kappa_{wh} &= \kappa_+ + \kappa_- = \frac{1}{b_0} + \frac{1}{a_0} \\ &= \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 b_0}\,.\end{aligned} \tag{187}$$

En cuanto a las densidad de energía y presiones, los valores estáticos son

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{8\pi b_0}\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2}\,, \tag{188}$$

$$p_{0\varphi} = 0\,, \qquad p_{0z} = \frac{1}{8\pi b_0}\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2}\,, \tag{189}$$

y corresponden a densidades de energía negativa y presiones positivas. Al igual que en los espaciotiempo Tipo I, la presión $p_{0\varphi}$ es nula y la tensión a lo largo del eje es igual a la densidad de energía. Para determinar la estabilidad, notamos que el potencial para geometrías Tipo II y Tipo I tiene la misma forma funcional (185), y la única diferencia está en el valor de la densidad de energía Σ. La segunda derivada evaluada en la posición estática resulta

$$V''(b_0) = -\frac{2\omega_1}{\omega_2 b_0^2}\eta_\varphi, \tag{190}$$

En el caso de agujeros de gusano con gargantas cilíndricas que conectan dos regiones con métricas cónicas, la condición de estabilidad se reduce a pedir $\eta_\varphi < 0$. Las magnitudes η de las ecuaciones de estado para las presiones pueden interpretarse como la velocidad del sonido al cuadrado sobre la cáscara en la posición de equilibrio, por lo que resultaría

natural esperar que $0 < \eta < 1$. Esta definición no puede aplicarse si las densidades de energía violan la condición de energía nula, es decir, cuando se tiene materia exótica. Existen varios ejemplos conocidos de comportamientos exóticos. El más común es el vacío de Casimir entre dos placas paralelas en el límite de campo de prueba, donde al integrar entre las placas se tiene un 3-tensor de energía momento $S_{ij} = \text{diag}(-1,1,1)$, y en ese caso $\eta = p'/\Sigma' = -1$. Los ejemplos de esta naturaleza invalidan la interpretación de $\sqrt{\eta}$ como la velocidad del sonido cuando se trata con materia exótica. Por eso el rango $\eta \in (0;1)$ suele relajarse incluyendo valores negativos [69] como los necesarios en la estabilidad obtenida para cáscaras en geometrías cónicas Tipo II.

4.6 CÁSCARAS EN GEOMETRÍAS DE SCHWARZSCHILD

Como se mencionó en la introducción de este Capítulo 4 (también en la Sección 1.5), las cáscaras esféricas han sido extensamente estudiadas desde los primeros trabajos de Israel [11] en diversos contextos y teorías. La estabilidad de las geometrías Tipo I y Tipo II de Schwarzschild fue estudiada con diferentes enfoques y los resultados suelen depender de las ecuaciones de estado asociadas a las densidades de energía sobre la cáscara [6, 64, 66-73]. Las resultados que se exponen en esta sección no son novedosas pero permiten obtener los detalles relevantes, incluyendo los aspectos fundamentales encontrados en la literatura, relacionados a la estabilidad de las geometrías de interés.

Consideramos los elementos de línea de geometrías de Schwarzschild

$$ds^2_{1,2} = -\left(1 - \frac{2m_{1,2}}{r_{1,2}}\right) dt^2_{1,2} + \left(1 - \frac{2m_{1,2}}{r_{1,2}}\right)^{-1} dr^2_{1,2} + r^2_{1,2} d\Omega^2 \,, \quad (191)$$

en coordenadas $x^\alpha_{1,2} = (t_{1,2}, r_{1,2}, \theta, \varphi)$, donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Las coordenadas angulares; $0 \leq \varphi < 2\pi$ y $0 \leq \theta < \pi$, se identifican de antemano. La variedad $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_-$, definida como en (133), tiene una cáscara de radio $a > 2m_{1,2}$ para evitar que se encuentre por debajo del horizonte de un agujero negro. La métrica inducida sobre la hipersuperficie es

$$dh^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\, d\Omega^2 \,, \quad (192)$$

donde τ es el tiempo propio de la cáscara. Suponiendo perturbaciones esféricamente simétricas la dinámica de la cáscara estará determinada por el radio $a(\tau) \equiv r_{1,2}|_{\mathcal{H}}$, notar que la primera forma fundamental determina que es el mismo para ambos sistemas de coordenadas. Las cantidades relevantes de la construcción se obtienen al reemplazar los coeficientes de las métricas en los resultados desarrollados en la Sección 4.4. Dado que la construcción de cáscaras esféricas con métricas de Schwarzschild ha sido tratada en la literatura en varios trabajos, y los resultados obtenidos no son novedosos, en esta tesis presentamos los

detalles y el análisis de los resultados en la Sección A.2 del Apéndice A. Los aspectos relevantes que se utilizarán en los siguientes capítulos se mencionan a continuación.

4.6.1 *Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior*

Las configuraciones estáticas en las que estamos interesados poseen una region interior con parámetro de masa de Schwarzschild m_1, separada de una exterior, asintóticamente plano, de parámetro de masa m_2. La cáscara de unión tiene radio a_0 mayor a los respectivos radios de Schwarzschild por lo que habrá un horizonte de eventos en $r_1 = 2m_1$ en la región interior. La curvatura principal de la superficie de la cáscara embebida en $\mathcal{M}_{\mp}$ es

$$\kappa_- = \frac{2}{a_0}\sqrt{1-\frac{2m_1}{a_0}}\,, \quad \text{y} \quad \kappa_+ = \frac{2}{a_0}\sqrt{1-\frac{2m_2}{a_0}}\,, \tag{193}$$

respectivamente. La discontinuidad de la curvatura principal en espaciotiempos estáticos Tipo I queda

$$\begin{aligned}\kappa &= \kappa_+ - \kappa_- \\ &= \frac{2}{a_0}\left(\sqrt{1-\frac{2m_2}{a_0}} - \sqrt{1-\frac{2m_1}{a_0}}\right)\,.\end{aligned} \tag{194}$$

En términos de las densidades, tenemos que los valores estáticos de la densidad de energía y presiones ($p_0 = p_{0\varphi} = p_{0\theta}$) sobre la cáscara son

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{4\pi a_0}\left(\sqrt{1-\frac{2m_2}{a_0}} - \sqrt{1-\frac{2m_1}{a_0}}\right)\,, \tag{195}$$

$$p_0 = \frac{1}{8\pi a_0^2}\left(\frac{a_0-m_2}{\sqrt{1-\frac{2m_2}{a_0}}} - \frac{a_0-m_1}{\sqrt{1-\frac{2m_1}{a_0}}}\right)\,. \tag{196}$$

Estas magnitudes pueden ser positivas o negativas. Si $m_1 < m_2$, como podría ser el caso de una cáscara que une un interior de Minkowski ($m_1 = 0$) con un exterior de Schwarzschild, la densidad de energía y la presión son positivas. Si $m_1 > m_2$ se tiene materia exótica.

La estabilidad de la cáscara se reduce al análisis de 3 parámetros involucrados en el potencial $V(a)$; la relación entre masas $\frac{m_1}{m_2}$, el radio estático de la cáscara a_0 y el parámetro de la ecuación de estado lineal η, que relaciona $p = \eta\,(\Sigma - \Sigma_0) + p_0$. No se pretende hacer un estudio riguroso; en resumen, bajo las hipótesis del formalismo adoptado, se obtiene que existen configuraciones estables para algún η en el rango $0 < \eta < 1$, si el radio de la cáscara es mayor a $3m_{1,2}$, para cualquier valor de las masas m_1 y m_2, independientemente de cuál sea mayor entre ellas. Por ejemplo, si $a_0 > 6m_{1,2}$ y $\eta > 0{,}2$ se tienen configuraciones estables para cualquier valor de los parámetros de masas. Cuanto más grande sea el radio de la cáscara (comparado a la mayor de las masas

m_1 o m_2), el parámetro η puede ser cada vez más cercano a cero obteniendo una configuración estable. Para radios $2m_{1,2} < a_0 < 3m_{1,2}$, en general, el rango de estabilidad se achica apreciablemente y se necesitan valores de η cada vez más cercanos a 1. Por ejemplo, Si el cociente $m_2/m_1 \sim 1$ y $a_0 < 3m_{1,2}$ se necesita η muy cercano a la unidad, o superior, para que la configuración sea estable. Los resultados se muestran en la Sección A.2.1 del Apéndice A, donde se ilustra gráficamente la estabilidad según la el signo de $V''(a_0)$.

4.6.2 *Tipo II: Garganta en agujeros de gusano*

Las variedades Tipo II corresponden a agujeros de gusano esféricos que no son simétricos a través de la garganta si $m_2 \neq m_1$. Tomando el radio de la garganta $a > 2m_{1,2}$, no hay horizontes de eventos. Nos interesa la curvatura principal de la superficie espacial de la garganta en configuraciones estáticas, que en estos casos es

$$\begin{aligned}\kappa_{wh} &= \kappa_+ + \kappa_- \\ &= \frac{2}{a_0}\left(\sqrt{1-\frac{2m_2}{a_0}} + \sqrt{1-\frac{2m_1}{a_0}}\right) .\end{aligned} \tag{197}$$

Los valores estáticos de la densidad de energía y las presiones quedan

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{4\pi a_0}\left(\sqrt{1-\frac{2m_2}{a_0}} + \sqrt{1-\frac{2m_1}{a_0}}\right) , \tag{198}$$

$$p_0 = \frac{1}{8\pi a_0^2}\left(\frac{a_0-m_2}{\sqrt{1-\frac{2m_2}{a_0}}} + \frac{a_0-m_1}{\sqrt{1-\frac{2m_1}{a_0}}}\right) . \tag{199}$$

En cuento a la estabilidad de las configuraciones estáticas, uno de los aspectos más importantes a destacar es la inestabilidad de la cáscara ubicada en la esfera de la órbita fotónica, $r = 3m$, del agujero de gusano de Schwarzschild que es simétrico a través de la garganta. En este caso donde $m = m_1 = m_2 \neq 0$, la expresión para el potencial se simplifica apreciablemente y, tras algunos pasos algebraicos, se obtiene la segunda derivada dada por

$$V''_{sim}(a_0) = -2\frac{a_0^2(1+2\eta) + 3m^2(1+4\eta) - a_0 m(3+10\eta)}{a_0^3(a_0-2m)} , \tag{200}$$

con $a_0 > 2m$. Finalmente resulta que

$$V''_{sim}(a_0) > 0 \text{ si } \begin{cases} \eta > W(a_0,m) & \text{para } 2m < a_0 < 3m \\ \eta < W(a_0,m) & \text{para } a_0 > 3m , \end{cases} \tag{201}$$

$$\text{con:} \quad W(a_0,m) = \frac{-a_0^2 + 3a_0 m - 3m^2}{2a_0^2 - 10a_0 m + 12m^2} . \tag{202}$$

En particular, $V''_{sim}(a_0 = 3m) = -\frac{2}{9m^2}$ independiente del parámetro η. En el contexto de la estabilidad mecánica linealizada que se ha utilizado,

obtenemos que para el agujero de gusano simétrico existe un radio crítico inestable en $r = 3m$, que corresponde a la esfera de órbitas fotónicas en la geometría de Schwarzschild. Esta posición suele resultar inestable con la mayoría de las ecuaciones de estado que se han usado en la literatura y puede considerarse que este resultado restringe el tamaño de las regiones de estabilidad y ubicación de la garganta de este tipo de geometrías. Recientemente, Varela en [73] logró eliminar esta inestabilidad considerando, por ejemplo, una ecuación de estado variable. Para los agujeros de gusano asimétricos la segunda derivada del potencial no es tan sencilla de estudiar analíticamente, pero puede analizarse gráficamente. En la Sección A.2.2 del Apéndice A se analizan casos asimétricos. Cabe mencionar que al romper la simetría a través de la garganta, $m_1 \neq m_2$, la segunda derivada del potencial ya no resulta independiente de η para ningún valor del radio a_0 y desaparece el radio crítico de inestabilidad.

5

ECUACIONES DE MAXWELL EN ESPACIOTIEMPOS ESTÁTICOS CON CÁSCARAS

Pasamos a considerar el problema de una carga puntual en geometrías curvas, con cáscaras y con diferentes condiciones globales. El objetivo es estudiar la autointeracción de una carga eléctrica y caracterizar el efecto que la curvatura y topología producen en el potencial electroestático para las variedades Tipo I y Tipo II descriptas en la Sección 4.5 y la Sección 4.6. El principio de equivalencia garantiza que para un observador inercial las ecuaciones de Maxwell cerca de una carga puntual son como las del espaciotiempo plano de Minkowski. Esto último no quiere decir que las soluciones sean localmente las mismas pues las condiciones de contorno correctas deben tener en cuenta la curvatura y topología de la variedad globalmente. Las líneas de campo sobre la posición de la carga no son isótropas en general y al quitar la parte singular se obtiene un campo regular sobre la carga que es el responsable de la autointeracción.

Comenzamos en la Sección 5.1 escribiendo las ecuaciones de Maxwell en espacios curvos estáticos en términos de una función de Green tridimensional para una carga estática. En la Sección 5.2 se obtiene un desarrollo de la función de Green singular en términos de coeficientes de la métrica. En la Sección 5.3 se establecen las condiciones de contorno necesarias para los problemas en geometrías con cáscaras esféricas y cilíndricas. Con el planteo formal del problema, en la Sección 5.4, se implementa una descomposición del potencial en geometrías con cáscaras y se formaliza el procedimiento para obtener el potencial renormalizado y la autofuerza. Finalmente, en la Sección 5.5, se presenta una interpretación general aplicable a esta clase de problemas en términos de un problema equivalente.

Denotamos eventos espacio temporales como $x = (t, \mathbf{x})$, con posición espacial $\mathbf{x} = (r, \varphi, \zeta)$. Las geometrías que se consideran en éste y en los siguientes dos capítulos admiten hipersuperficies ortogonales a un vector de Killing temporal t^α por lo que se supone un sistema de coordenadas adaptado para expresar la métrica mediante el elemento de línea

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j \,, \tag{203}$$

en términos del coeficiente $g_{tt}(\mathbf{x}) = -N^2$ y una métrica espacial $h_{ij}(\mathbf{x})$, que dependen únicamente de las coordenadas espaciales $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Con distribuciones de carga eléctrica estáticas, la componente temporal J^t es la única no nula de la cuadri-corriente J^α y, en espaciotiempos

estáticos (donde adoptamos el gauge de Lorenz), la única componente relevante de las ecuaciones de Maxwell es $F^{t\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^t$. Definiendo al potencial electrostático $\Phi = -A_t$, las componentes no nulas del tensor electromagnético son $F_{ti} = \partial_i \Phi$. Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas se pueden escribir como

$$F_{ti}{}^{;i} = \Phi_{|i}{}^{i} - \Gamma^t_{ti} h^{ij} \Phi_{,j} = 4\pi J_t \,, \tag{204}$$

donde la barra vertical indica la derivada covariante relativa a la conexión espacial. Definiendo el operador D'alambertiano ∇^2 en las secciones espaciales de t constante según esta derivada y las cantidades sobre la hipersuperficie espacial

$$T_i = \frac{N_i}{N} = \Gamma^t_{ti} \,, \tag{205}$$

se puede escribir la ecuación para el potencial en espaciotiempos estáticos con fuentes estáticas como

$$\left(\nabla^2 - T^i \partial_i\right) \Phi = 4\pi J_t \,, \tag{206}$$

donde

$$J_t(\mathbf{x}) = -qN(\mathbf{z}) \delta_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \,, \tag{207}$$

con la delta de Dirac invariante tridimensional dada por

$$\delta_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\sqrt{h(\mathbf{z})}} \,. \tag{208}$$

Observar que el potencial Φ es un escalar para las derivadas covariantes sobre las hipersuperficies espaciales. En los desarrollos posteriores serán de utilidad las componentes no nulas del tensor de Riemann. Además de las espaciales R_{ijkl} tenemos que

$$R_{titj} = N^2 \left(T_{i|j} + T_i T_j\right) \,, \tag{209}$$

mientras que para el tensor de Ricci se tiene R_{ij} y

$$R_{tt} = N^2 \left(T^i{}_{|i} + T^i T_i\right) \,. \tag{210}$$

5.1 FUNCIÓN DE GREEN ESTÁTICA

A partir de la ecuación (56) para el potencial vector en términos de la función de Green cuadridimensional, tenemos que la componente temporal puede obtenerse como

$$A_t(\mathbf{x}) = \int G_t{}^{\beta'}(x, x') \, J_{\beta'}(x') \sqrt{-g'} d^4x' \,. \tag{211}$$

Reescribiendo la última expresión para el caso estático en geometrías estáticas, usando las definiciones introducidas en este capítulo, queda el potencial electrostático escrito como

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= -\int d^3x'\sqrt{h'}\,J_{t'}(x')\int dt'N'G_t{}^{t'}(x,x') \\ &= -\int d^3x'\sqrt{h'}\,J_{t'}(x')G^3(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,. \end{aligned} \tag{212}$$

En la última igualdad se definió la función de Green tridimensional $G^3(\mathbf{x},\mathbf{z})$, sobre hipersuperficies de t constante en la variedad cuadridimensional, dada por

$$\begin{aligned}G^3(\mathbf{x},\mathbf{z}) &= \int dt'N'\,G_t{}^{t'}(x,z) \\ &= -\int d\tau\frac{G_{tt'}(x,z)\,\dot{z}^{t'}}{N(\mathbf{z})}\,, \end{aligned} \tag{213}$$

donde la componente temporal $\dot{z}^{t'} = \frac{dt'}{d\tau}$ de la cuadri-velocidad es la única no nula para una partícula estática. Finalmente el potencial electrostático para una carga puntual ubicada en $z^\alpha = (t,\mathbf{z})$ en términos de $G^3(\mathbf{x},\mathbf{z})$ queda:

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{z}) = qN(\mathbf{z})G^3(\mathbf{x},\mathbf{z})\,. \tag{214}$$

La $G^3(\mathbf{x},\mathbf{z})$ debe satisfacer la ecuación diferencial (213),

$$\left(\nabla^2 - T^i\partial_i\right)G^3(\mathbf{x},\mathbf{z}) = -4\pi\delta_3(\mathbf{x},\mathbf{z})\,, \tag{215}$$

similar a (206), obtenida de la componente temporal $\beta = t$ de la versión cuadridimensional (57) integrando según la definición (213). La condición de contorno global para el potencial será que se anule en el infinito espacial y las condiciones de contorno específicas sobre la cáscara se especifican en la Sección 5.3.

5.2 FUNCIÓN DE GREEN SINGULAR EN GEOMETRÍAS ESTÁTICAS CON FUENTE ESTÁTICA

A partir de (213) queda definida la función de Green singular tridimensional como

$$G^3_S(\mathbf{x},\mathbf{z}) = -\int d\tau\frac{G_{Stt'}(x,z)\,\dot{z}^{t'}}{N(\mathbf{z})}\,. \tag{216}$$

Tomamos del Capítulo 3 la función de Green singular

$$G_{S\alpha\beta'}(x,z) = \frac{1}{2}U_{\alpha\beta'}(x,z)\delta(\sigma) - \frac{1}{2}V_{\alpha\beta'}(x,z)\Theta(\sigma)\,, \tag{217}$$

en términos de los bitensores $U_{\alpha\beta'}(x,z)$ y $V_{\alpha\beta'}(x,z)$. Para evaluar la integral (216) realizamos el siguiente cambio de variable

$$d\sigma = \sigma(x,z+dz) - \sigma(x,z) = \sigma_{\mu'}\dot{z}^{\mu'}d\tau\,, \tag{218}$$

recordando que la derivada de la función de Synge es

$$\sigma_{\mu'} = \frac{\partial \sigma(x,z)}{\partial z^{\mu'}} \,. \tag{219}$$

Obtenemos entonces que el diferencial de tiempo propio puede escribirse en términos de la distancia geodésica de la siguiente manera

$$d\tau = \frac{d\sigma}{|\sigma_{\mu'}\dot{z}^{\mu'}|} \,. \tag{220}$$

Trabajamos sobre el primer término que queda del lado derecho en (216) según la expresión (217) para reescribirlo como:

$$\begin{aligned} \int \delta(\sigma)\frac{U_{\alpha\beta'}(x,z)\dot{z}^{\beta'}}{N(z)}d\tau &= \int \delta(\sigma)\frac{U_{\alpha\beta'}(x,z(\sigma))\dot{z}^{\beta'}(\sigma)}{N(z)|\sigma_{\mu'}\dot{z}^{\mu'}(\sigma)|}d\sigma \\ &= \left[\frac{U_{\alpha\beta'}(x,z)\dot{z}^{\beta'}}{N(z)\sigma_{\mu'}\dot{z}^{\mu'}}\right]\Bigg|_{z(v)}^{z(u)} \\ &= \frac{U_{\alpha\beta'}(x,x')u^{\beta'}}{N(x')r_{ret}} + \frac{U_{\alpha\beta''}(x,x'')u^{\beta''}}{N(x'')r_{av}} \,, \end{aligned} \tag{221}$$

donde se usó que $\delta(\sigma) = \delta_+(\sigma) + \delta_-(\sigma)$. Los dos términos de la Delta de Dirac corresponden a los dos puntos sobre la trayectoria de la partícula donde se anula la distancia geodésica con punto campo x dado; a éstos los llamamos puntos avanzado y retardado sobre la trayectoria. Precisamente, $x' := z(u)$ es el punto retardado sobre la línea de mundo (estática), $x'' := z(v)$ el avanzado, $r_{ret} := \sigma_{\alpha'}u^{\alpha'} := \dot{\sigma}(u)$ la distancia retardada, $r_{av} := -\sigma_{\alpha''}u^{\alpha''} := \dot{\sigma}(v)$ la distancia avanzada. El término restante que aparece para (216) corresponde a la integral de cola y quedará escrito como

$$\int \Theta(\sigma)\frac{V_{\alpha\beta'}(x,z)\dot{z}^{\beta'}}{N(z)}d\tau = \int_u^v \frac{V_{\alpha\beta'}(x,z(\tau))\dot{z}^{\beta'}(\tau)}{N(z(\tau))}d\tau \,. \tag{222}$$

Estamos interesados en $G_S^3(\mathbf{x},\mathbf{z})$ para espaciotiempos estáticos, por lo que $r_{ret} = r_{ad} := r$, asi como $u^{\alpha'} = u^{\alpha''}$, y entonces se tiene

$$G_S^3(\mathbf{x},\mathbf{z}) = -\left[\frac{U_{tt'}(\mathbf{x},\mathbf{z})u^{t'}}{N(\mathbf{z})r} - \frac{1}{2}\int_u^v \frac{V_{tt'}(\mathbf{x},\mathbf{z}(\tau))u^{t'}(\tau)}{N(\mathbf{z})}d\tau\right] \,. \tag{223}$$

Para obtener una expansión de la función de Green se sigue el método de Haas y Poisson [117], en donde las posiciones retardados y avanzados se relacionan con un punto medio en la trayectoria $\bar{x}$. Este punto puede elegirse arbitrariamente, en particular es conveniente elegir $\bar{x}$ tal que sea simultáneo con x, es decir, para que tengan la misma coordenada temporal. Esta condición implica $\bar{r} := \sigma_{\bar{\alpha}}(x,\bar{x})u^{\bar{\alpha}} := 0$. Dado que las geometrías estáticas se estudiarán sobre secciones tipo espacio ortogonales al vector de Killing temporal global t^α (en el sistema de coordenadas para ello adaptado), el punto $\bar{x}$ seleccionado está en la misma hipersuperficie que x para cada $t = \bar{t}$. Mantendremos la notación cuadri-vectorial con x y $\bar{x}$ por un lado, y $U_{\alpha\beta}(x,x')$ y $V_{\alpha\beta}(x,x')$

sin evaluar, para poder llevar a cabo una expansión de la función de Green lo suficientemente genérica y finalmente se tomarán los índices como en (223). Definimos de antemano:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &:= \sigma(x, z(\tau)) \\ U_\alpha(\tau) &:= U_{\alpha\mu}(x, z(\tau))u^\mu(\tau)\,, \\ V_\alpha(\tau) &:= V_{\alpha\mu}(x, z(\tau))u^\mu(\tau)\,, \end{aligned} \tag{224}$$

que con x fijo son todos escalares respecto a su dependencia en $z(\tau)$. Las distancias r_{ret} y r_{av}, y las magnitudes en (224), serán expresadas como expansiones de Taylor alrededor de $\tau = \bar{\tau}$ con $\bar{\tau}$ dado por $\bar{x} = z(\bar{\tau})$. Definimos la distancia geodésica al cuadrado $s^2 := 2\sigma(x, \bar{x})$ en la hipersuperficie espacial, tal que

$$s^2 = g^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\sigma_{\bar{\alpha}}\sigma_{\bar{\beta}}\,. \tag{225}$$

Calculamos la expansión de Taylor de la distancia retardada $r_{ret} = \dot{\sigma}(u)$ y de la distancia avanzada $r_{adv} = \dot{\sigma}(v)$ alrededor de $\bar{\tau}$ como:

$$\begin{aligned} r_{ret} &= \dot{\sigma} + \ddot{\sigma}I_- + \frac{1}{2}\dddot{\sigma}I_-^2 + O(s^3) \\ r_{av} &= \dot{\sigma} + \ddot{\sigma}I_+ + \frac{1}{2}\dddot{\sigma}I_+^2 + O(s^3)\,, \end{aligned} \tag{226}$$

donde las derivadas de σ también están evaluadas en $\bar{\tau}$, y se definieron los intervalos $I_- = u - \bar{\tau} < 0$ y $I_+ = v - \bar{\tau} > 0$. Para determinarlos se usa nuevamente una expansión de Taylor alrededor de $\bar{\tau}$ para $\sigma(u) = 0$ y $\sigma(v) = 0$ respectivamente;

$$0 = \sigma + \dot{\sigma}I_\pm + \frac{1}{2}\ddot{\sigma}I_\pm^2 + O(s^3)\,, \tag{227}$$

donde $\sigma = \frac{1}{2}s^2$, $\dot{\sigma} = \sigma_{\bar{\alpha}}u^{\bar{\alpha}} = 0$, $\ddot{\sigma} = \dot{\sigma}_{\bar{\alpha}}u^{\bar{\alpha}} + \sigma_{\bar{\alpha}}\dot{u}^{\bar{\alpha}}$, etc.. En $\ddot{\sigma}$ aparece la cuadri-aceleración $\dot{u}^{\bar{\alpha}} = a^{\bar{\alpha}}$ y $\dot{\sigma}_{\bar{\alpha}} = \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}u^{\bar{\beta}}$. La expansión para $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ aparece en (41), de donde pueden calcularse las sucesivas derivadas respecto a $x^{\bar{\alpha}}$. Sustituyendo en (227) e igualando orden a orden se obtiene

$$I_\pm = \pm s\left[1 + \frac{1}{2}\sigma_{\bar{\alpha}}a^{\bar{\alpha}} + O(s^2)\right]\,, \tag{228}$$

y con ésto último en (226) finalmente se tiene $r = r_{ret} = r_{ad}$ como

$$r = s(1 - \frac{1}{2}\sigma_{\bar{\alpha}}a^{\bar{\alpha}}) + O(s^3)\,. \tag{229}$$

Para expandir $U_{\alpha\beta'}u^{\beta'}$ o $U_{\alpha\beta''}u^{\beta''}$ escribimos colectivamente:

$$U_\alpha(\tau) = U_\alpha + \dot{U}_\alpha I + \frac{1}{2}\ddot{U}_\alpha I^2 + O(s^3)\,, \tag{230}$$

donde se usa I en lugar de $I_\pm$, y en $U_\alpha(\tau)$; $\tau = u$ o, $\tau = v$ correspondientemente. Las U_α y sus derivadas están evaluadas en $\bar{\tau}$ y dadas por:

$$U_\alpha = U_{\alpha\bar{\alpha}}u^{\bar{\alpha}} = g_{\alpha\bar{\alpha}}u^{\bar{\alpha}}\left(1 + \frac{1}{12}R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\sigma^{\bar{\alpha}}\sigma^{\bar{\beta}}\right) + O(s^3)\,, \tag{231}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_\alpha = &\quad U_{\alpha\bar{\alpha};\bar{\beta}}u^{\bar{\alpha}}u^{\bar{\beta}} + U_{\alpha\bar{\alpha}}a^{\bar{\alpha}} \\ = &\quad g_{\alpha\bar{\alpha}}\left(\frac{1}{2}R^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}u^{\bar{\beta}}u^{\bar{\gamma}}\sigma^{\bar{\delta}} + \frac{1}{6}u^{\bar{\alpha}}R_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}u^{\bar{\beta}}\sigma^{\bar{\gamma}} + a^{\bar{\alpha}}\right) + O(s^2)\,,\end{aligned} \tag{232}$$

$$\ddot{U}_\alpha = g_{\alpha\bar{\alpha}}\left(\frac{1}{6}u^{\bar{\alpha}}R_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}u^{\bar{\beta}}\sigma^{\bar{\gamma}} + \dot{a}^{\bar{\alpha}}\right) + O(s)\,, \tag{233}$$

donde se usó la expansión (86) en (231) y (232), así como la expansión (44) para escribir el primer término del lado derecho en (232). Por último, para evaluar la integral de cola, se expande $V_\alpha(\tau) = V_\alpha + \dot{V}_\alpha(\tau - \bar{\tau}) + O(s^2)$ y se integra obteniendo

$$\int_u^v V_\alpha(\tau)d\tau = V_\alpha\left(I_+ - I_-\right) + O(s^2) \tag{234}$$

donde $V_\alpha = V_\alpha(\bar{\tau}) = V_{\alpha\bar{\alpha}}u^{\bar{\alpha}}$. Para computar las cantidades que aparecen para la integral de cola se usan expansiones similares a las utilizadas para $U_\alpha(\tau)$, teniendo en cuenta que la función de dos puntos $V^\alpha{}_{\bar{\alpha}}$ debe satisfacer su ecuación de onda (83), así como la ecuación de cono de luz (82) (evaluada en $\sigma(x,\bar{x}) = 0$). Lo que se obtiene es

$$V_\alpha = -\frac{1}{2}g_{\alpha\bar{\beta}}\left[R^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}} - \frac{1}{6}\delta^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}}R\right]u^{\bar{\alpha}} + O(s)\,. \tag{235}$$

Con (229), (230) y (234) se puede expandir (223) hasta $O(s)$ y obtener los términos relevantes de la función de Green singular para espaciotiempos y fuentes estáticos en el límite de coincidencia con la posición de la fuente. En este límite $s \to 0$ ya que la distancia geodésica al cuadrado, $\sigma(x,x')$, se anula. Se ve que el aporte del término de cola (234) en el límite de coincidencia es nulo para el potencial estático. Visto que $r \sim s$, nos interesan los coeficientes de $U_t(\tau)$ sólo hasta el de orden s^1 inclusive, esto es

$$U_{tt'}u^{t'} = U_t + \dot{U}_t I + O(s^2)\,. \tag{236}$$

De (231) se obtiene que

$$U_t = g_{t\bar{t}}u^{\bar{t}} + O(s^2)\,, \tag{237}$$

mientras que de (232) se puede ver que $\dot{U}_t = O(s^2)$, ya que $g_{t\bar{i}} = 0$, $R^{\bar{t}}_{\bar{t}\bar{t}\bar{\delta}} = 0$, $R_{\bar{t}\bar{i}}, = 0$ y que $g_{t\bar{\alpha}}a^{\bar{\alpha}} = g_{t\bar{i}}a^{\bar{i}} = 0$. Teniendo en cuenta que

$$g_{t\bar{t}} = -N(\bar{\mathbf{x}})N(\mathbf{x})\,, \tag{238}$$

y que $u^{\bar{t}} = N(\bar{\mathbf{x}})^{-1}$, queda

$$U_{tt'}(x,x')u^{t'} = U_{tt''}(x,x'')u^{t''} = -N(\mathbf{x})\left[1 + O(s^2)\right]\,. \tag{239}$$

Notar que no aparecen términos lineales en s y que la parte retardada y avanzada son iguales dada la estaticidad del problema. Volviendo a (223), se ve que en la función de Green aparece el cociente $N(\mathbf{x})/N(\bar{\mathbf{x}})$

y el factor r^{-1}. Por un lado es conveniente expresar el cociente como una expansión alrededor de $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ usando la expansión de Taylor generalizada (como se desarrolló en el Capítulo 2);

$$N(\mathbf{x}) = N(\bar{\mathbf{x}}) - N_{|\bar{i}}\sigma^{\bar{i}} + O(s^2)\,, \tag{240}$$

y por otro lado tenemos que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s}\left[1 + \frac{1}{2}a_{\bar{\alpha}}\sigma^{\bar{\alpha}} + O(s^2)\right]\,, \tag{241}$$

donde se usó que $\sigma_{\bar{\alpha}}(x,\bar{x}) = -sn_{\bar{\alpha}}$ en la última expansión. Observar que $n_{\bar{\alpha}}$ representa la tangente a la geodésica espacial que une $\bar{x}$ con x evaluada en $\bar{x}$. Teniendo en cuenta que $a_\alpha \doteq (1, N_i)$, poniendo todo junto queda

$$-\frac{U_{tt'}(x,x')u^{t'}}{N(\bar{\mathbf{x}})\,r} = \frac{1}{s}\left[1 + \frac{1}{2}a_{\bar{i}}\sigma^{\bar{i}} + O(s^2)\right]\left[1 - a_{\bar{i}}\sigma^{\bar{i}} + O(s^2)\right]\,. \tag{242}$$

Finalmente se obtiene:

$$G^3_S(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma(\mathbf{x},\mathbf{z})}}\left\{1 - \left[\frac{1}{4g_{t't'}}g_{t't',i'}\sigma^{i'}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\right]\Big|_{x'=z} + O(\sigma)\right\}\,. \tag{243}$$

En la expresión final se puso explícitamente la dependencia de $G^3_S(\mathbf{x},\mathbf{z})$ con la componente temporal de la métrica, con la función de mundo de Synge, y se reemplazó $\bar{x} = z$.

5.3 CONDICIONES DE CONTORNO EN ESPACIOTIEMPOS ESTÁTICOS CON CÁSCARAS

Reescribimos las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas $F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha$ para tener la ecuación diferencial del potencial electrostático en función de las componentes de la métrica cuadridimensional de la variedad

$$\begin{aligned} 4\pi J^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\mu\nu}\right)_{,\beta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\left(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\right)\right)_{,\beta} \end{aligned} \tag{244}$$

que para el caso estático queda

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,g^{tt}g^{ji}\Phi_{,i}\right)_{,j} = 4\pi q\,\frac{\delta^3(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\sqrt{-g}}\,. \tag{245}$$

El problema se plantea en variedades como las estudiadas en el Capítulo 4 donde se pegan dos geometrías en una hipersuperficie tipo-tiempo $\mathcal{H}$. Siguiendo aquel procedimiento, las subvariedades que llamaremos $\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$ a cada lado de $\mathcal{H}$ heredan coordenadas x_1 y x_2, de las variedades de donde se las recortó, respectivamente. De esta manera se

puede resolver la ecuación diferencial en cada región con sólo unas coordenadas (caso contrario habría que separar el espacio en más regiones para poder escribir (245) para cada una de ellas en algunas coordenadas). Dado que nos enfocaremos en espacios con simetría esférica o cilíndrica, la métrica inducida sobre $\mathcal{H}$ es diagonal.

Resolveremos la ecuación de Poisson (245) por el método de separación de variables para el potencial electrostático. Las condiciones de contorno varían en general según; la topología del espacio, las características asintóticas, singularidades y, en este caso, las condiciones sobre las cáscaras. Asintóticamente se imponen condiciones de finitud, precisamente, pediremos que $\Phi \to 0$ en el infinito espacial de geometrías Tipo I (con una región asintótica) o en ambos regiones asintóticas espaciales de geometrías Tipo II (agujeros de gusano). En los casos que aquí se estudian siempre es posible requerir estas condiciones ya que los espaciotiempos son asintóticamente planos o a lo sumo cónicos. En principio, un potencial finito o asintóticamente nulo no es una condición que puede imponerse en cualquier tipo de topología. Por ejemplo, en casos de Sitter o anti de Sitter hay que asegurarse que las ecuaciones de Maxwell con fuentes prescritas en el bulk no rompan las ecuaciones de Einstein para la métrica, o viceversa, que las ecuaciones de Einstein que determinan la métrica de fondo del espaciotiempo no se contrapongan a la conservación de la carga o corriente de las ecuaciones de Maxwell, [56, 57]. Una forma de corroborar si existe alguna inconsistencia entre las ecuaciones es verificar la conservación de la carga en los infinitos (si los hay), es decir, chequear que el flujo del campo eléctrico sea igual a la carga eléctrica total con la que se planteó el problema. En topologías no triviales con agujeros, además, suelen existir soluciones homogéneas en ausencia de fuentes eléctricas [108-110]. Estas soluciones pueden descartarse si se trabaja con una métrica de fondo cuyo tensor de energía no tenga asociado un campo eléctrico de forma tal de poder tener un potencial electrostático nulo en ausencia de una carga de prueba. Se debe chequear que el campo se distribuye en partes iguales entre las dos regiones asintóticas con una carga de prueba ubicada sobre la cáscara si la geometría es simétrica a través de la garganta. En los casos con una sola región asintótica también se pide que $\Phi \neq \infty$ en la región interior, o que el campo sea finito, para descartar las soluciones divergentes (por ejemplo, en el origen) de la base según la cual se desarrolla el potencial. La fuente del lado derecho en (245) establece el salto del campo sobre la posición de la carga puntual, y a su vez se requerirá un potencial continuo en todo el espacio.

Para plantear las condiciones de contorno sobre la cáscara en espaciotiempos estáticos, tomamos una normal espacial r^α a la hipersuperficie $\mathcal{H}$ en cada subvariedad, que apunte desde $-$ hacia $+$, como en los ejemplos estudiados en el Capítulo 4. Se tiene en general la relación de completitud

$$g^{\alpha\beta} = r^\alpha r^\beta + h^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta \,. \tag{246}$$

La métrica inducida desde la subvariedad $\mathcal{M}_-$ en coordenadas $x_1 = (t_1, r_1, \varphi_1, \zeta_1)$ se relaciona con la métrica de $\mathcal{M}_+$ en coordenadas $x_2 = (t_2, r_2, \varphi_2, \zeta_2)$ por la primera forma fundamental,

$$\begin{aligned} h^{ij} &= g^{\alpha\beta} e^i_\alpha e^j_\beta|_{\mathcal{H}} \\ &= g^{\alpha_1\beta_1} e^i_{\alpha_1} e^j_{\beta_1}|_{\mathcal{H}^+} \\ &= g^{\alpha_2\beta_2} e^i_{\alpha_2} e^j_{\beta_2}|_{\mathcal{H}^-} \,. \end{aligned} \tag{247}$$

La relación entre la componente temporal del potencial vector $A_{t_1}|^-$ y $A_{t_2}|^+$ a cada lado de $\mathcal{H}$ se establece a partir de la continuidad tangencial del tensor electromagnético;

$$A_{t_2},_{B_2}|_{\mathcal{H}^+} = A_{t_1},_{B_1} e^{t_1}_{\ t_2} e^{B_1}_{\ B_2}|_{\mathcal{H}^-} \,, \tag{248}$$

donde el índice B se usa para las componentes espaciales tangentes a la cáscara: $h^{ij} = -g^{tt}\delta^i_t\delta^j_t + s^{AB}e^i_A e^j_B$. Las condiciones tangenciales pueden obtenerse usando las ecuaciones de Maxwell homogéneas $F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0$. Para eso consideremos las coordenadas intrínsecas $\varphi_{1,2}$ y $\zeta_{1,2}$ tales que la métrica de la superficie bidimensional de la cáscara es diagonal, la primera forma fundamental establece

$$\begin{aligned} e^{t_1}_{\ t_2} &= \frac{\partial t_1}{\partial t_2} = \sqrt{\frac{g_{t_2t_2}}{g_{t_1t_1}}} \\ e^{\varphi_1}_{\ \varphi_2} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} = \sqrt{\frac{g_{\varphi_2\varphi_2}}{g_{\varphi_1\varphi_1}}} \\ e^{\zeta_1}_{\ \zeta_2} &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_2} = \sqrt{\frac{g_{\zeta_2\zeta_2}}{g_{\zeta_1\zeta_1}}} \end{aligned} \tag{249}$$

sobre la hipersuperficie de la cáscara. Aplicando el teorema de Stokes a las ecuaciones homogéneas se tiene

$$0 = \oint_{\partial\mathcal{Z}} F_{\alpha\beta}\, \delta^\alpha_\varphi\, \delta^\beta_t\, dt\, d\varphi + O(\epsilon) \tag{250}$$

donde tomamos $\mathcal{Z}$ como una hipersuperficie de intersección no nula con la cáscara con coordenada ζ_0 fija y longitud $\epsilon \to 0$ en dirección de la normal r^α, por lo que el contorno de circulación $\partial\mathcal{Z}$ queda sólo en las direcciones δ^α_t y δ^β_φ a cada lado de la cáscara. Explícitamente en función del potencial electrostático queda

$$0 = -\int \Phi,_{\varphi_2}|^+_{\zeta_0}\, dt_2\, d\varphi_2 + \int \Phi,_{\varphi_1}|^-_{\zeta_0}\, dt_1\, d\varphi_1 + O(\epsilon)\,, \tag{251}$$

y usando la primer forma fundamental se obtiene nuevamente, como en (248),

$$\Phi,_{\varphi_2}|^+ = \frac{\partial t_1}{\partial t_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2}\,\Phi,_{\varphi_1}|^- \,. \tag{252}$$

Si las métricas originales son diagonales sobre $\mathcal{H}$, la condición (252) vale para todo $\zeta_{1,2}$. Análogamente se tiene

$$\Phi_{,\zeta_2}\,|^{+} = \frac{\partial t_1}{\partial t_2}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_2}\,\Phi_{,\zeta_1}\,|^{-}\,. \tag{253}$$

Podemos plantear la misma condición pidiendo que las componentes tangenciales del campo electromagnético sean iguales de ambos lados de la cáscara, en base ortonormal sobre $\mathcal{H}$, por ejemplo

$$\begin{aligned} F^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{t}}u^{\hat{t}}\Big|^{+} &= F^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{t}}u^{\hat{t}}\Big|^{-} \\ \frac{-\Phi_{,\varphi_2}}{\sqrt{-g_{t_2t_2}g_{\varphi_2\varphi_2}}}\Bigg|^{+} &= \frac{-\Phi_{,\varphi_1}}{\sqrt{-g_{t_1t_1}g_{\varphi_1\varphi_1}}}\Bigg|^{-}\,, \end{aligned} \tag{254}$$

esta formulación resume la noción física de las anteriores. La conservación de la componente tangencial del campo sobre una hipersuperficie suele pedirse imponiendo la continuidad del potencial. En este caso donde tenemos una cáscara que une dos subvariedades a priori diferentes y se pide la primera forma fundamental sobre $\mathcal{H}$, si se elige de antemano que $\varphi_2 = \varphi_1$ y $\zeta_1 = \zeta_2$, la condición de continuidad se puede expresar

$$\frac{\Phi}{\sqrt{-g_{t_2t_2}}}\Bigg|^{+} = \frac{\Phi}{\sqrt{-g_{t_1t_1}}}\Bigg|^{-}\,. \tag{255}$$

La condición de continuidad de reduce a la continuidad habitual en los casos donde las regiones a cada lado de $\mathcal{H}$ tienen la misma métrica, ya sean gargantas simétricas [114], interfaces [104], agujeros de gusano suaves [55], o geometrías Tipo I suaves donde ya no hay cáscara sobre la hipersuperficie y se recupera un potencial continuo tradicional.

Para establecer la condición normal del campo sobre $\mathcal{H}$, es decir la derivada del potencial en la dirección r^α al aproximarse a la hipersuperficie, planteamos las ecuaciones de Maxwell en un entorno de la cáscara y aplicamos el teorema de la divergencia con un volumen V espacial que contenga a la cáscara donde no hay fuentes eléctricas

$$0 = 4\pi\int_V J_\alpha\, dV^\alpha = \int_V F_{\alpha\beta}{}^{;\beta}\, dV^\alpha = \frac{1}{2}\oint_{\partial V} F_{\alpha\beta}\, dS^{\alpha\beta} \tag{256}$$

con $dV^\alpha = -t^\alpha\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}drd\theta d\varphi$ y $dS^{\alpha\beta} = -2t^{[\alpha}r^{\beta]}\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}d\theta d\varphi$ (usando coordenadas colectivas para referirse a ambos lados). Finalmente, tomando el límite de espesor radial nulo se obtiene

$$\frac{\Phi_{,r_2}}{\sqrt{-g_{t_2t_2}g_{r_2r_2}}}\Bigg|^{+} - \delta\,\frac{\Phi_{,r_1}}{\sqrt{-g_{t_1t_1}g_{r_1r_1}}}\Bigg|^{-} = 0\,, \tag{257}$$

donde $\delta = \pm 1$ según cómo crezca la coordenada r_1. Por ejemplo, en casos Tipo II donde se tiene un agujero de gusano y r_1 crece hacia el infinito de la región $\mathcal{M}_-$, entonces vale $\delta = -1$. Notar que al tomar el límite hacia la hipersuperficie se utilizó la primera forma fundamental.

La condición de salto (257) se puede obtener análogamente a partir de integrar en la coordenada normal a $\mathcal{H}$ en la ecuación (245) o también de pedir que el campo en dirección ortonormal en cada región sea el mismo al aproximarse a la cáscara por cada lado en sus coordenadas $F^{\hat{r}}{}_{\hat{t}} u^{\hat{t}}|^{+} = F^{\hat{r}}{}_{\hat{t}} u^{\hat{t}}|^{-}$.

Estas son todas las condiciones de contorno que se necesitan para resolver por el método de separación de variables la ecuación (245) en los espaciotiempo con cáscaras Tipo I y Tipo II. En particular estamos interesados en aplicarlas utilizando geometrías de Schwarzschild donde podemos elegir de antemano que $\varphi_2 = \varphi_1$ y $\theta_1 = \theta_2$, o en geometrías cónicas donde $\varphi_2 = \varphi_1$ y $z_1 = z_2$, sin redefinir ninguna de las coordenadas de las métricas originales (de esta manera se sintetizó la condición (255)). A continuación resumimos todas las condiciones de contorno:

1. finitud del campo en la región interior $\mathcal{M}_{int}$

2. nulidad asintótica

$$\Phi \overset{\mathbf{x}\to\infty}{\to} 0 \tag{258}$$

3. continuidad en la posición de la carga r'

$$\Phi|_{r\to r'^{+}} = \Phi|_{r\to r'^{-}} \,, \tag{259}$$

4. continuidad en la cáscara

$$\left.\frac{\Phi}{\sqrt{-g_{t_2t_2}}}\right|^{+} = \left.\frac{\Phi}{\sqrt{-g_{t_1t_1}}}\right|^{-} , \tag{260}$$

5. salto de la derivada radial a través de la carga q

$$\left.\left(\sqrt{-g}\, g^{tt} g^{rr} \frac{\partial}{\partial r}\Phi\right)\right|_{r\to r'^{-}}^{r\to r'^{+}} = 4\pi q\, \delta(\varphi-\varphi')\delta(\zeta-\zeta') \,, \tag{261}$$

6. salto de la derivada radial (la normal) en la cáscara

$$\left.\frac{\Phi_{,r_2}}{\sqrt{-g_{t_2t_2}g_{r_2r_2}}}\right|^{+} = \delta \left.\frac{\Phi_{,r_1}}{\sqrt{-g_{t_1t_1}g_{r_1r_1}}}\right|^{-} . \tag{262}$$

5.4 DESCOMPOSICIÓN Y AUTOFUERZA EN GEOMETRÍAS CON CÁSCARAS

Para obtener la autointeracción se regulariza el potencial utilizando la función de Green singular de la Sección 5.2. El resultado es un potencial renormalizado en la posición del a carga obtenido mediante el límite de coincidencia

$$\Phi_{ren}(\mathbf{x}') = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'} \left(\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}') - \Phi_S(\mathbf{x},\mathbf{x}')\right) \,, \tag{263}$$

donde el límite se refiere a que las coordenadas espaciales del punto campo x coincidan con las de la posición de la carga x' acercándose a lo largo de la geodésica más corta que los une. En esta definición el campo singular es

$$\Phi_S(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = q\sqrt{-g_{t't'}}G_S^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \tag{264}$$

con $g_{t't'} = g_{tt}(\mathbf{x}')$ y $G_S^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ la función de Green singular en 3 dimensiones calculada anteriormente

$$G_S^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{2\sigma(x; x')}}\left[1 - \left(\frac{g_{t't',j'}\sigma^{,j'}}{4g_{t't'}}\right) + \mathcal{O}(\sigma)\right]. \tag{265}$$

Para realizar la renormalización se toma la solución Φ en un entorno de la posición de la carga que se encuentra en la región $\mathcal{M}_-$ o $\mathcal{M}_+$, donde se usan las coordenadas x_1 o x_2 respectivamente. En general, cuando el punto campo y la carga están en la misma región $\mathcal{M}_-$ ($\mathcal{M}_+$), el potencial en geometrías con cáscaras se puede descomponer en dos partes:

$$\Phi = \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma}\,, \quad \text{si } x, x' \in \mathcal{M}_-\,(\mathcal{M}_+)\,. \tag{266}$$

La parte del *bulk*, Φ^{bulk}, corresponde a un campo inhomogéneo cuya fuente es la carga eléctrica en $\mathcal{M}_-$ ($\mathcal{M}_+$), en particular, un campo que es singular exclusivamente en la posición de la carga. Para determinarlo unívocamente pensamos en la variedad completa $\mathcal{M}_a = \{x_a\}$ con $a = 1$ o 2. Recordar de la construcción en el Capítulo 4 que $\mathcal{M}_- \subset \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M}_2$, y $\{x_a\}$ cubre la variedad geodésicamente completa $\mathcal{M}_a$. Entonces podemos definir Φ^{bulk} como

$$\begin{gathered}\left(\sqrt{-g_{(a)}}\, g^{tt}_{(a)}\, g^{ji}_{(a)}(\Phi^{bulk})_{,i}\right)_{,j} = 4\pi q\, \delta^3(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}'_a)\,,\ \forall x_a \in \mathcal{M}_a\,, \\ \Phi^{bulk} \overset{|\mathbf{x}_a|\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \qquad \Phi^{bulk}|_{\mathbf{x}_a \neq \mathbf{x}'_a} \neq \infty\,,\end{gathered} \tag{267}$$

con $\mathbf{x}'_a$ la posición espacial de la fuente heredada de las coordenadas del problema original en la región $\mathcal{M}_-$, o $\mathcal{M}_+$ según corresponda. La parte restante del campo Φ^{σ}, la llamaremos el término de la *cáscara* y contiene información de las propiedades globales del espaciotiempo y el cambio en la curvatura que introduce la cáscara en el espaciotiempo original. Con esta superposición para el potencial, el efecto de la cáscara de materia sobre el campo queda representado en el término Φ^{σ}. En cuanto a la regularización, lo importante es que Φ^{σ} no diverge en la posición de la carga. Consecuentemente la renormalización para obtener la autointeracción debe realizarse únicamente sobre Φ^{bulk} [1]

$$\Phi_{ren}(x') = \Phi^{bulk}_{ren}(x') + \Phi^{\sigma}(x')\,, \tag{268}$$

1 La linealidad de las ecuaciones de Maxwell en un fondo fijo garantizan que (268) es regular en la posición de la carga.

$$\Phi^{bulk}_{ren}(\mathbf{x}') = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'}(\Phi^{bulk}(\mathbf{x},\mathbf{x}') - \Phi_S(\mathbf{x},\mathbf{x}'))\,. \tag{269}$$

La energía electrostática de la carga puntual q queda definida como

$$U_{elec} = \frac{q}{2}\Phi_{ren}(x')\,. \tag{270}$$

La fuerza electromagnética en la posición de la carga es en general

$$f^\alpha = q \lim_{x\to x'} (F_R)^\alpha{}_\beta u^\beta\,, \tag{271}$$

donde $(F_R)^\alpha{}_\beta = F^\alpha_\beta - (F_S)^\alpha{}_\beta$ es el tensor electromagnético regularizado. En los problemas con simetría esférica y cilíndrica la autofuerza tiene únicamente dependencia y componente radial, por lo que en el marco ortonormal para partículas estáticas queda

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = \frac{q}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}\bigg|_{\mathbf{x}'} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'} A^R_{t,r}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,. \tag{272}$$

Análogamente, se puede utilizar el procedimiento estándar para calcular la autofuerza radial ortonormal a partir de la autoenergía como

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = -\frac{q}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}U'_{elec}\,, \tag{273}$$

donde la prima denota la derivada respecto al radio, y es equivalente a (272) según la definición (270). Para los problemas que consideraremos nos será útil definir el potencial regular para la carga q, $\Phi_R(r,r')$, definido a partir de tomar de antemano la coincidencia en las coordenadas irrelevantes (según la simetría del problema), de forma tal que

$$\begin{aligned} \Phi_{ren}(r') &= \Phi_R(r,r')|_{r\to r'} \\ \mathbf{f}^{\hat{r}}(r') &= -q\left[\tfrac{1}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}\tfrac{\partial}{\partial r}\Phi_R(r,r')\right]\bigg|_{r\to r'}\,. \end{aligned} \tag{274}$$

5.5 INTERPRETACIÓN Y PROBLEMA EQUIVALENTE

El término Φ^σ queda determinado por la construcción (266) y la definición de Φ^{bulk} y Φ. Este campo interactúa con la carga q y es parte de la autofuerza. Además contiene información de cómo la cáscara de materia enfoca o desenfoca las líneas de campo eléctrico. Nos interesa aislarlo para estudiar cómo se relacionan estos efectos con la curvatura de la cáscara y la topología del espaciotiempo. A continuación desarrollamos una manera intuitiva para interpretar la distorsión del campo que introduce el término de la cáscara Φ^σ.

La ecuación (266) sugiere que podemos interpretar Φ mediante un problema eléctrico equivalente. Si el punto campo de observación y la carga están en $\mathcal{M}_-$ ($\mathcal{M}_+$), Φ se puede pensar como un potencial

en la variedad completa $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$) generado por una carga q en $x'_{1(2)}$ más un campo adicional $\Phi^{\sigma_{1(2)}}$ generado por una superficie cargada eléctricamente ubicada en $\mathcal{H} \equiv \partial\mathcal{M}_-$ ($\mathcal{H} \equiv \partial\mathcal{M}_+$). Notar que el problema equivalente se plantea en la variedad completa $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$), una de las que se había utilizado para la construcción del espaciotiempo con cáscara mediante el procedimiento de cortado y pegado, pero estamos interesados en interpretar la solución en la subvariedad $\mathcal{M}_- \subset \mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M}_2$) que es la misma que aparece en el problema con cáscara original. El término de la cáscara del potencial electrostático original es replicado por el generado por una superficie con densidad de carga eléctrica y no gravitante, en el problema equivalente. Es decir, la densidad de carga superficial produce exactamente el mismo campo total de Φ^σ en la región de interés $\mathcal{M}_-$ ($\mathcal{M}_+$) [2]. El problema equivalente para q tiene solución

$$\Phi_a(x_a) = \Phi_a^{bulk}(x_a) + \Phi^{\sigma_a}(x_a)\,, \tag{275}$$

$\forall x_a \in \mathcal{M}_a$, donde $a = 1$ si $x, x' \in \mathcal{M}_-$ en el problema original, o $a = 2$ si $x, x' \in \mathcal{M}_+$. Observar que Φ_a^{bulk} quedó definido en (267). Para definir correctamente Φ^{σ_a} recurrimos primero a la noción de la normal r^α a la cáscara, que apunta desde $-$ hacia $+$ en un entorno de $\mathcal{H}$ en el problema original, como se usó en (246). Tenemos la misma normal en el problema equivalente, ortogonal a la hipersuperficie $\partial\mathcal{M}_\mp$, según corresponda. La hipersuperficie está descripta por la coordenada constante $r_a = r_\sigma$ del sistema de coordenadas $x_a^\alpha = (t_a, r_a, x_a^A)$ usado en el problema equivalente, donde queda definida la densidad de carga superficial σ_a. Establecida la posición de la densidad, el potencial Φ^{σ_a} del problema equivalente queda unívocamente determinado por

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{(a)}}}\left(\sqrt{-g_{(a)}}\, g^{tt}_{(a)}\, g^{ji}_{(a)} (\Phi^{\sigma_a})_{,i}\right)_{,j} = 4\pi J^t_a\,, \quad \forall x_a \in \mathcal{M}_a\,, \tag{276}$$

$$\Phi^{\sigma_a} \overset{|\mathbf{x}_a|\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \qquad \Phi^{\sigma_a}|_{\mathbf{x}_a \neq \mathbf{x}_\sigma} \neq \infty\,, \qquad \Phi^{\sigma_a}|_{r_\sigma} = \left(\Phi - \Phi_a^{bulk}\right)|_{r_a = r_\sigma}\,,$$

$$\text{donde:} \quad J^t_a = \sqrt{-g^{tt}_{(a)} g^{rr}_{(a)}}\,\delta(r_a - r_\sigma)\sigma_a\,, \tag{277}$$

$$\text{con:} \quad \sigma_a = -\frac{\sqrt{-g^{tt}_{(a)} g^{rr}_{(a)}}}{4\pi} \frac{\partial \Phi^{\sigma_a}}{\partial r_a}\bigg|_{r_\sigma^-}^{r_\sigma^+}\,. \tag{278}$$

Se está usando que la métrica $g^{\alpha\beta}_{(a)}$ de $\mathcal{M}_a$ es estática y diagonal, y que $r^\alpha = \delta^\alpha_{\ r}\sqrt{g^{rr}_{(a)}}$ es perpendicular a $\partial\mathcal{M}_-$ cuando $a = 1$, o perpendicular a $\partial\mathcal{M}_+$ en el caso del problema para $a = 2$. La construcción (275) satisface trivialmente

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1\left(r_1, x_1^A\right)\,, & \text{si } x_1, x_1' \in \mathcal{M}_-\,, \\ \Phi_2\left(r_2, x_2^A\right)\,, & \text{si } x_2, x_2' \in \mathcal{M}_+\,. \end{cases} \tag{279}$$

2 La ausencia de una cáscara de materia gravitatoria en el problema equivalente cambia la geometría al otro lado de la superficie con densidad de carga eléctrica, pero estaremos interesados en el problema eléctrico sobre la subvariedad que no ha cambiado, donde se encuentra la carga puntual q.

6

POTENCIAL Y AUTOINTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA EN ESPACIOTIEMPOS TIPO I Y TIPO II

Se resuelve el potencial electrostático de una carga puntual q en espaciotiempos Tipo I, con una región asintótica, y en los Tipo II con dos regiones asintóticas. Se usan los resultados del Capítulo 5 para plantear la solución con el método de separación de variables usando las condiciones de contorno especificadas. Finalmente se renormaliza el potencial en la posición de la fuente y se calcula la autofuerza en la base ortonormal. La hipótesis central es que la autointeracción distingue las características globales de las geometrías. Se estudian las propiedades de el potencial y la autofuerza sobre la partícula en función de las curvaturas de la cáscara $\kappa_{\pm}$, definidas en (127) de la Sección 4.2, y la topología de la variedad.

Las geometrías de fondo son las analizadas en la Sección 4.5 y la Sección 4.6 del Capítulo 4, con métricas de Schwarzschild para los casos esféricos y cónicas para los casos cilíndricos. Como se mencionó al final de la Sección 4.2, y según lo calculado para estas geometrías en la Sección 4.5 y la Sección 4.6, el salto de la curvatura espacial (129) de la cáscara y la densidad de energía superficial están íntimamente relacionadas, $\kappa = -8\pi\Sigma$, por lo que se habla indistintamente de materia ordinaria y curvatura negativa, o materia exótica y curvatura positiva. Notar que la densidad de energía y la curvatura se definen punto a punto sobre $\mathcal{H}$ pero son homogéneas en las cáscaras simétricas que se utiliza. En espaciotiempos Tipo I denotamos subvariedades $\mathcal{M}_{\substack{int\\ext}}$, en lugar de $\mathcal{M}_{\mp}$, para diferenciarlos respecto a los Tipo II, en los cuales se sigue usando $\mathcal{M}_{\mp}$.

En la Sección 6.1 se comienza resolviendo parcialmente el problema esférico y se obtiene la parte renormalizada del potencial del problema general. En la Sección 6.1.1 se aborda el problema en geometrías Tipo I y en la Sección 6.1.2 para las Tipo II. En la Sección 6.2 la organización es análoga para los problemas cilíndricos, los Tipo I en la Sección 6.2.1 y los Tipo II en la Sección 6.2.2. Los resultados de este Capítulo están publicados en los artículos [1], [2] y [3], de autoría junto a C. Simeone, O. Santillán y/o personal.

6.1 AUTOFUERZA ELECTROSTÁTICA EN GEOMETRÍAS DE SCHWARZSCHILD

Usamos la métrica de Schwarzschild con el elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) . \tag{280}$$

Vamos a estudiar la autointeracción en regiones exteriores al horizonte de eventos. Por la simetría del problema esférico, es suficientemente general ubicar la carga en $r' > 2m$, $\theta' = 0$. Para calcular la función de Green singular en espaciotiempos tipo Schwarzschild, el elemento de línea (280) es todo lo que se necesita, ya que depende únicamente de la geometría local en la posición de la partícula. El potencial electrostático renormalizado se obtiene tomando el límite de coincidencia

$$\Phi_{ren}\left(r'\right) = \lim_{r\to r'} \Phi\left(r, r'\right) - \Phi_S(r, r') . \tag{281}$$

donde se ha evaluado de antemano la coordenada angular para acercarse por geodésicas puramente radiales sobre las secciones espaciales. La magnitud fundamental en la estructura de la parte singular es la función de mundo de Synge $\sigma(x, x')$ completamente definida por las propiedades locales de la métrica. En el caso de geodésicas radiales tenemos que

$$\sigma(r; r') = \frac{1}{2} d^2(r, r') , \tag{282}$$

donde la distancia radial es

$$\begin{aligned} d(r; r') &= \int_{r'}^{r} \sqrt{g_{rr}} dr = \int_{r'}^{r} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \\ &= \left\{ r\sqrt{1-2m/r} + m \ln\left[2\left(r\sqrt{1-2m/r} - m + r\right)\right]\right\}\Big|_{r'}^{r} . \end{aligned} \tag{283}$$

Usando los resultados de la sección 2.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma^{r'} &= g^{r'\alpha'}\sigma_{\alpha'} = g^{r'r'}\frac{\partial}{\partial r'}\sigma(r; r') \\ &= -d(r; r')\sqrt{1-2m/r'} , \end{aligned} \tag{284}$$

y computando $g_{t't',r'} = -2m/r'^2$ se obtiene

$$G_S^3(r; r') = \frac{1}{|d(r; r')|} + \frac{m}{2}\frac{1}{r'^2\sqrt{1-2m/r'}}\frac{d(r; r')}{|d(r; r')|} + \mathcal{O}\left(\sqrt{\sigma}\right) \tag{285}$$

donde se entiende que ya se evaluó $\theta = \theta'$ y $\varphi = \varphi'$. El potencial singular $\Phi_S = q\sqrt{g_{t't'}}G_S^3$ es el que se utiliza para renormalizar el potencial electrostático Φ en cualquier geometría cuya métrica sea como (280) en la posición de la carga.

Buscaremos el potencial de una carga q en un espaciotiempo con una cáscara. Por lo visto en la Sección 5.4, la solución más general admite una separación de la forma

$$\Phi = \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma} \,, \tag{286}$$

donde Φ^{bulk} es una parte inhomogénea, que diverge en la posición de la carga[1]. El término Φ^{σ} contiene información de las condiciones de contorno y es regular sobre la posición de carga, por construcción. A esta altura, quizás conviene pensar simplemente que Φ^{σ} es todo el resto del potencial, tal que se satisfagan las condiciones de contorno. La separación en estos dos términos hace evidente que la parte a renormalizar, al evaluar Φ en r', se encuentra exclusivamente en Φ^{bulk} y entonces

$$\Phi_{ren}(r') = \Phi^{bulk}_{ren}|_{r'} + \Phi^{\sigma}|_{r'}. \tag{287}$$

Para los espaciotiempo Tipo I y Tipo II con geometrías de Schwarzschild tendremos que $\Phi^{bulk} = \Phi^{bh}$ es el potencial en la geometría de un agujero negro de Schwarzschild (sin cáscaras).

En la geometría de un agujero negro, el potencial de una carga puntual en r' ubicada por fuera del horizonte es [43]

$$\Phi^{bh} = \Phi^{L} + \Phi^{C} \tag{288}$$

donde

$$\Phi^{L} = \frac{qm/r'}{r} \,, \tag{289}$$

$$\Phi^{C} = \frac{q\left[(r-m)(r'-m) - m^2\cos\theta\right] / (r'r)}{\sqrt{(r-m)^2 + (r'-m)^2 - 2(r-m)(r'-m)\cos\theta - m^2\sin^2\theta}} \tag{290}$$

Expresando (288) para $r \geq r'$ y $\theta = 0$ como

$$\Phi^{bh}(r \geq r', \theta = 0) = \frac{q}{r - r'}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \,, \tag{291}$$

y tomando el límite $r \to r'^{+}$ (desde radios mayores a la posición de la carga) sobre la resta $\Phi^{bh} - \Phi_S$ se obtiene

$$\Phi^{bh}_{ren} = \frac{qm}{r'^2} \,. \tag{292}$$

Este resultado puede recogerse directamente de (288) removiendo la solución de Copson Φ^{C} y evaluando en la posición de la carga. Lo que se corroboró con la renormalización es que la solución elemental de Copson construida con el método de Hadamard coincide localmente con el potencial singular obtenido de la función de Green de Detweiler-Whiting. Por otro lado, el término de Linet Φ^{L} es la parte regular del potencial para la carga q en la geometría de un agujero negro.

1 $\Phi^{bulk} = 0$ en la subvariedad sin la carga q .

Para obtener el potencial en geometrías de Schwarzschild con cáscaras se utilizará un desarrollo en serie a partir del método de separación de variables. Las ecuaciones de Maxwell para el potencial Φ en métricas tipo (280) se reducen a

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{(1-2m/r)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right)=-4\pi\rho\,, \quad (293)$$

donde

$$\rho=q\frac{\delta(r-r')\delta(\theta)}{2\pi r^2\sin\theta} \quad (294)$$

es la componente temporal de la cuadri-corriente J^α que será no nula en la región donde se encuentre la carga. El potencial se puede expandir en las coordenadas esféricas de Schwarzschild de la siguiente manera

$$\Phi=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)P_l(\cos\theta)\,, \quad (295)$$

donde $P_l(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre con la relación de ortogonalidad

$$\int_0^1 P_l(x)P_k(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}\,, \quad (296)$$

y las funciones radiales $R_l(r)$ son soluciones de la ecuación homogénea en la región libre de fuentes

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right)-l(l+1)R_l=0\,. \quad (297)$$

Las dos soluciones independientes de (297) son [11, 118]

$$f_l(r)=-\frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)!l!m^{l+1}}\,(r-2m)\,\frac{d}{dr}Q_l\left(\frac{r}{m}-1\right)\,, \quad (298)$$

$$g_l(r)=\begin{cases}1\,, & \text{para } l=0\\ \frac{2^l l!(l-1)!m^l}{(2l)!}\,(r-2m)\,\frac{d}{dr}P_l\left(\frac{r}{m}-1\right)\,, & \text{para } l\neq 0\,.\end{cases} \quad (299)$$

Aquí $P_l(x)$ y $Q_l(x)$ son los dos tipos de funciones de Legendre. Las soluciones poseen el siguiente comportamiento asintótico en $r\to\infty$:

$$g_l(r)\to r^l,\qquad f_l(r)\to 1/r^{l+1}. \quad (300)$$

Los límites de las funciones radiales corresponden a los de soluciones esféricas habituales, ya que el efecto de la curvatura se disuelve a distancias grandes donde el espacio es plano. Por otro lado, cuando $r\to 2m$ se tiene que; $f_l(r)\to$ *constante finita*, $f_l'(r)\sim\log(1-2m/r)$ si $l\neq 0$, y $g_l(r)\to 0$ mientras que $g_l'(r)\to$ *constante finita*. Notar, además, que $f_0=r^{-1}$ y $g_0=1$ por lo que el Wronskiano entre g_l y f_l queda [118]

$$W(g_l(r),f_l(r),r)=g_l(r)f_l'(r)-f_l(r)g_l'(r)=-\frac{(2l+1)}{r^2}, \quad (301)$$

donde se usan primas para indicar derivadas respecto al radio.

Por lo señalado anteriormente, nos interesa expresar Φ^{bh} en función de polinomios de Legendre. Según las propiedades de las funciones radiales, al considerar la fuente puntual, la solución es

$$\Phi^{bh} = q \sum_{l=0}^{\infty} g_l(r_<) f_l(r_>) P_l(\cos\theta)\,, \tag{302}$$

donde $r_<$ y $r_>$ son el menor y mayor entre r y r'. La expansión del potencial Φ^{bh} fue calculada por primera vez por Cohen y Wald en [118]. Para obtenerla, se descartan las funciones $g_l(r)$ en radios mayores a r' ya que no satisfacen la condición asintótica $\Phi^{bh} \to 0$. Para radios menores, las funciones $f_{l\neq 0}(r)$ permanecen finitas en el horizonte, pero sus derivadas producen campos que divergen en $r \to 2m$ por lo que se descartan, mientras que $f_0(r)$ no se usa para la zona interna porque representa una carga adicional en $r = 0$. La serie (302) es continua por construcción en $r = r'$ y satisface la condición de salto a través de la fuente (261). Podemos chequear el salto directamente introduciendo la solución en (293) y aplicando la ortogonalidad de los $P_l(\cos\theta)$ para obtener

$$\frac{2}{2l+1}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R_l\right) - \frac{l(l+1)}{1-2m/r}R_l\right] = -2P_l(1)\delta(r-r'). \tag{303}$$

$$\frac{2}{2l+1}\left[\left(r^2 R_l{}'\right)' - \frac{l(l+1)}{1-2m/r}R_l\right] = -2P_l(1)\delta(r-r'). \tag{304}$$

Reemplazando $P_l(1) = 1$, integrando de $r' - \epsilon$ a $r' + \epsilon$ en la coordenada radial y usando la continuidad sobre r' se obtiene

$$R_l{}'\Big|_{r'-}^{r'+} = -\frac{2l+1}{r'^2}\,, \tag{305}$$

que es equivalente al Wronskiano. En el Apéndice B se resuma el resultado obtenido mediante separación de variables (302) y se obtiene (288).

6.1.1 *Tipo I: Una región asintótica*

A partir de dos métricas de Schwarzschild con elementos de línea:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m_2}{r_2}\right)dt_2^2 + \left(1-\frac{2m_2}{r_2}\right)^{-1}dr_2^2 + r_2^2 d\Omega^2\,, \tag{306}$$

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m_1}{r_1}\right)dt_1^2 + \left(1-\frac{2m_1}{r_1}\right)^{-1}dr_1^2 + r_1^2 d\Omega^2 \tag{307}$$

y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, consideramos una variedad geodésicamente completa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{int} \cup \mathcal{M}_{ext}$, de Tipo I. Según definimos en el Capítulo 4

$$\mathcal{M}_{int} = \{x_1^\alpha \,/\, 2m_1 \leq r_1 \leq r_0\}, \quad \mathcal{M}_{ext} = \{x_2^\alpha \,/\, 2m_2 \leq r_0 \leq r_2\}\,, \tag{308}$$

con una cáscara de unión en la hipersuperficie $\mathcal{H}$, ubicada en $r_{1,2} = r_0 > 2m_{1,2}$, de normal espacial. El potencial electrostático de una carga puntual q, ubicada en r' y $\theta' = 0$ en $\mathcal{M}$, tiene un desarrollo en serie en las regiones libres de fuentes con la forma general

$$\Phi = q\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left[g_l(r)A_l + f_l(r)C_l\right]\,, \tag{309}$$

con coeficientes a determinar por las condiciones de contorno. En la expresión anterior denotamos r colectivamente para las coordenadas radiales de cada subvariedad. Esta función satisface la versión homogénea de la ecuación (293) con las funciones radiales que corresponden a cada región, es decir, definidas según el parámetro de masa del bulk; m_1 o m_2. Por esta razón separamos el problema para escribir el potencial de la siguiente manera

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_i & \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \Phi_e & \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{cases} \tag{310}$$

En cada subvariedad se aplica separación de variables en sus coordenadas para resolver como en la región por fuera del horizonte de la geometría del agujero negro de Schwarzschild. La carga ubicada en r' puede estar en $\mathcal{M}_{int}$ o $\mathcal{M}_{ext}$, por lo que resolvemos el problema para cada caso. En principio, según el método de separación, la región que alberga a la carga se sub divide en 2 zonas. De esta manera las funciones radiales satisfacen (297) en cada zona, y sus coeficientes se determinan mediante las condiciones de contorno estudiadas en el Capítulo 5. Quedaron entonces 3 zonas con un total de 6 coeficientes a determinar con las siguientes 6 condiciones de contorno para esta clase de problemas: 1. finitud del potencial y/o el campo sobre el horizonte de la región interior, 2. el comportamiento asintótico en la región exterior, 3. la continuidad del potencial en todo el espacio, en particular; sobre la posición de la fuente, y 4. sobre la cáscara, y finalmente en cuanto al salto; 5. la inhomogeneidad sobre la posición de la carga puntual q y, 6. asegurar que no haya fuentes eléctricas sobre la hipersuperficie de la cáscara. El procedimiento estándar se simplifica notablemente incorporando 4 de estas condiciones en el planteo inicial del potencial, como haremos a continuación.

Si $2m_1 < r' < r_0$ (fuente en $\mathcal{M}_{int}$):

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma_i} && \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \Phi_e &= \Phi^{\sigma_e} && \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{aligned} \tag{311}$$

con

$$\Phi^{bulk} = q\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) g_l^i(r_<) f_l^i(r_>)\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_1, r'\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_1, r'\} \end{aligned} \tag{312}$$

$$\Phi^{\sigma_i} = q\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) g_l^i(r_1) A_l\,, \tag{313}$$

$$\Phi^{\sigma_e} = q\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) f_l^e(r_2) C_l\,, \tag{314}$$

Los supraíndices i y e hacen referencia a las funciones radiales del interior y el exterior que son soluciones de (297) con la masa m_1 y m_2 respectivamente. Φ es continua en cada región por construcción. La inhomogeneidad puntual q se ve de la derivada radial en la posición de la carga, (261), a partir de la forma de Φ^{bulk} (como se mostró al final de la Sección 6.1) y la continuidad de la derivada de Φ^{σ_i} en $r = r'$. Dado que en general $m_1 \neq 0$ en la región interior, para que el campo no diverja en $r \to 2m_1$ las funciones $f_{l\neq 0}$ no se usan en esa zona, y también se descarta f_0 para que no haya cargas adicionales por debajo del horizonte y obtener un flujo en el infinito que corresponda a una carga q. Asintóticamente $\Phi \to 0$, en virtud de las propiedades de $f_l^e(r_2 \to \infty)$. En el caso de un interior plano ($m_1 = 0$) las funciones $g_l^i(r_1) \to {r_1}^l$, y tanto el potencial como el campo eléctrico son finitos en el origen. Las condiciones `1`, `2`, `3` y `5` quedaron satisfechas por construcción, mientras que los coeficientes A_l y C_l se determinan a partir de las condiciones de contorno sobre la cáscara en r_0; (260) y (262). Según las funciones radiales éstas quedan expresadas como

$$\frac{g_l^i(r') f_l^i(r_0) + g_l^i(r_0) A_l}{\sqrt{1 - 2m_1/r_0}} = \frac{f_l^e(r_0) C_l}{\sqrt{1 - 2m_2/r_0}}\,, \tag{315}$$

$$g_l^i(r') f_l^{i\prime}(r_0) + g_l^{i\prime}(r_0) A_l = f_l^{e\prime}(r_0) C_l\,, \tag{316}$$

respectivamente, y finalmente se obtiene

$$A_l = -g_l^i(r') \left(\frac{\Delta_1 f_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 f_l^i f_l^{e\prime}}{\Delta_1 g_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 g_l^i f_l^{e\prime}} \right) \Bigg|_{r_0}\,, \tag{317}$$

$$C_l = g_l^i(r') \frac{2l+1}{r_0^2} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1 g_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 g_l^i f_l^{e\prime}} \right) \Bigg|_{r_0}\,. \tag{318}$$

donde $\Delta_{1,2} = \sqrt{1 - 2m_{1,2}/r}$, y se usaron primas sobre las funciones radiales para indicar derivadas respecto al radio de su argumento. Del mismo modo planteamos la solución para el caso con la carga en la región exterior.

Si $r_0 < r'$ (fuente en $\mathcal{M}_{ext}$):

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi^{\sigma_i} && \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \Phi_e &= \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma_e} && \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{aligned} \tag{319}$$

con

$$\Phi^{\sigma_i} = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) g_l^i(r_1) D_l \,, \tag{320}$$

$$\Phi^{bulk} = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) g_l^e(r_<) f_l^e(r_>) \,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_2, r'\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_2, r'\} \end{aligned} \tag{321}$$

$$\Phi^{\sigma_e} = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) f_l^e(r_2) B_l \,, \tag{322}$$

Nuevamente Φ es continua en cada región por construcción, se satisfacen las condiciones asintóticas en el exterior, finitud en el interior y el salto a través de la fuente. Los coeficientes D_l y B_l se determinan a partir de las condiciones de contorno sobre la cáscara en r_0, que en este caso quedan expresadas como

$$\frac{g_l^i(r_0) D_l}{\sqrt{1 - 2m_1/r_0}} = \frac{g_l^e(r_0) f_l^e(r') + f_l^e(r_0) B_l}{\sqrt{1 - 2m_2/r_0}} \tag{323}$$

y

$$g_l^{i\prime}(r_0) D_l = g_l^{e\prime}(r_0) f_l^e(r') + f_l^{e\prime}(r_0) B_l \,, \tag{324}$$

respectivamente, y finalmente se obtiene

$$D_l = f_l^e(r') \frac{2l+1}{r_0^2} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 g_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 g_l^i f_l^{e\prime}} \right) \Bigg|_{r_0} \,, \tag{325}$$

$$B_l = -f_l^e(r') \left(\frac{\Delta_1 g_l^{i\prime} g_l^e - \Delta_2 g_l^i g_l^{e\prime}}{\Delta_1 g_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 g_l^i f_l^{e\prime}} \right) \Bigg|_{r_0} \,. \tag{326}$$

Los resultados permiten chequear que $\Phi \sim q/r_2$ asintóticamente, y por lo tanto se tiene el flujo deseado para el campo eléctrico en el infinito. En este último caso, el coeficiente B_0 es nulo porque $g_0 = 1$ y entonces $\Phi_e \sim q f_0(r_2) = q/r_2$. Para el caso con la carga en el interior, se ve que $\Phi_e \sim q f_0(r_2) C_0 = q/r_2$. Por otro lado, al tomar $m_1 = m_2$ se recupera la solución frente al agujero negro de Schwarzschild en ambos casos.

Teniendo en cuenta los resultados de la renormalización obtenidos en la primera parte de esta Sección 6.1, el potencial regular para la carga q queda

$$\Phi_R = \begin{cases} q\frac{m_1}{r'}\frac{1}{r_1} + q\sum_{l=0}^{\infty} g_l^i(r_1)A_l, & \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ q\frac{m_2}{r'}\frac{1}{r_2} + q\sum_{l=0}^{\infty} f_l^e(r_2)B_l, & \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{cases} \tag{327}$$

para cualquier posición en la geometría de Schwarzschild Tipo I con una cáscara esférica. El primer término es la parte regular (289) del bulk de Schwarzschild donde se encuentra la carga, la suma corresponde al potencial de la cáscara. La energía electrostática de la carga puntual es $U_{elec} = \frac{q}{2}\Phi_R|_{r'}$ y la autofuerza electrostática en base ortonormal, $\mathbf{f}^{\hat{r}} = -U'_{elec}$, es explícitamente

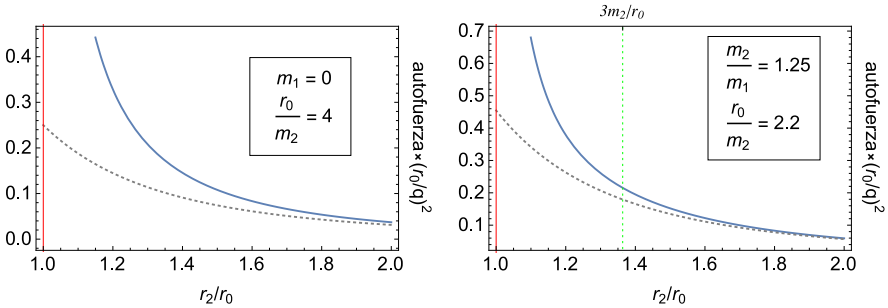
$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = q^2 \begin{cases} \frac{m_1}{r_1^3} + \sum_{l=0}^{\infty} g_l^{i\prime}(r_1)g_l^i(r_1)\left[\frac{\Delta_1 f_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 f_l^i f_l^{e\prime}}{\Delta_1 g_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 g_l^i f_l^{e\prime}}\right]_{r_0}, & \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \frac{m_2}{r_2^3} + \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{e\prime}(r_2)f_l^e(r_2)\left[\frac{\Delta_1 g_l^{i\prime} g_l^e - \Delta_2 g_l^i g_l^{e\prime}}{\Delta_1 g_l^{i\prime} f_l^e - \Delta_2 g_l^i f_l^{e\prime}}\right]_{r_0}, & \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{cases} \tag{328}$$

La autofuerza presenta un término producido exclusivamente por el bulk donde se encuentra la carga q (la solución regular de Linet en la geometría de Schwarzschild) y la serie de multipolos que representa la distorsión que produce la cáscara y la topología global del espaciotiempo. Los resultados se representan gráficamente en las figuras a continuación donde separamos el caso exterior e interior para el análisis.

La Figura 1 y la Figura 2 muestran la autofuerza electrostática con cáscaras de materia ordinaria o de materia exótica respectivamente, para la carga en el exterior. El primer ejemplo con una cáscara de materia ordinaria ($\kappa < 0$), la Figura 1a, tiene un interior plano y un exterior con la cáscara ubicada en un radio mayor a la órbita fotónica de la geometría de Schwarzschild; $r_0 > 3m_2 \neq 0$. En línea punteada aparece la autofuerza en la geometría del agujero negro, se ve que la cáscara produce un efecto repulsivo y que la autofuerza es positiva. El ejemplo de la Figura 1b, también con $\kappa < 0$, corresponde a un fondo con una cáscara apenas por encima del horizonte interior y el hipotético horizonte exterior. Se ve que la autofuerza electrostática en la región exterior es repulsiva, incluso con la carga por debajo de la órbita fotónica. Estos dos ejemplos son representativos de todos las posibles configuraciones que pueden construirse con cáscaras de materia ordinaria Tipo I para el problema exterior. Se encontró que independientemente de la posición $r_0 > 2m_{1,2}$, con una cáscara esférica de materia positiva y $\kappa < 0$, el efecto de Φ^{σ_e} sobre la carga q es repulsivo.

La Figura 2 presenta el caso de la carga en el exterior con cáscaras de materia exótica. El primer ejemplo 2a, corresponde a un interior de Schwarzschild y un exterior de Minkowski. La autofuerza es atractiva

Figura 1: Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en la región exterior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia ordinaria ($m_2 > m_1$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa < 0$ produce un efecto repulsivo sobre la carga.



(a) Una cáscara ubicada por encima de la órbita fotónica de la región, $r_0 > 3m_2$, en el caso particular de un interior plano ($m_1 = 0$).

(b) Una cáscara ubicada por debajo de la órbita fotónica de ambas regiones $r_0 < 3m_1 < 3m_2$.

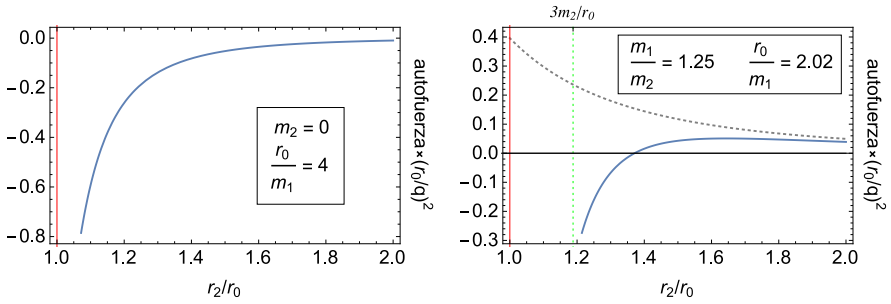
hacia la cáscara de materia exótica. Como la métrica es plana no hay una autofuerza del bulk y todo el efecto se debe a la contribución de la cáscara de curvatura $\kappa > 0$. En el siguiente gráfico 2b, con $m_2 \neq 0$ en el exterior, se ve que la atracción a la cáscara es muy intensa suficientemente cerca, pero asintóticamente domina el término del bulk con la fuerza repulsiva. En resumen, independientemente de la posición $r_0 > 2m_{1,2}$, se observa un efecto atractivo de la cáscara esférica de materia exótica con $\kappa > 0$, sin importar la inclusión o no de las órbitas fotónicas de cada región. Asintóticamente domina el término repulsivo de la métrica del agujero negro. En el caso de un exterior plano ($m_2 = 0$) la autofuerza es negativa, siempre atractiva hacia la cáscara.

Utilizamos este caso para introducir la aplicación de la interpretación mediante el problema equivalente. Éste consiste en trasladar el problema en la región $\mathcal{M}_{ext}$ a un problema en la variedad geodésicamente completa $\mathcal{M}_2$, con $2m_2 < r_2 < +\infty$. El problema es equivalente en la misma región $\mathcal{M}_{ext}$ de $\mathcal{M}_2$, donde se ha reemplazando la cáscara de materia por una densidad de carga eléctrica superficial no gravitante ubicada en $r_2 = r_0$, que genera el siguiente potencial

$$\Phi^{\sigma_2} = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{B_l}{g_l^e(r_0)} g_l^e(r_<) f_l^e(r_>)\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_2, r_0\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_2, r_0\} \\ 2m_2 &< r_2, r_0 < +\infty \end{aligned} \tag{329}$$

Habiendo resuelto el problema original con la superposición de la parte del bulk y la parte de la cáscara desde el inicio, esta interpretación resulta evidente. La simetría esférica simplifica la analogía adicional-

Figura 2: Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en la región exterior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia exótica ($m_2 < m_1$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa > 0$ produce un efecto atractivo sobre la carga.



(a) Un exterior de Minkowski ($m_2 = 0$) unido a un interior con radio $r_0 > 3m_1$. La autofuerza atractiva es exclusivamente debida a la presencia de la cáscara exótica.

(b) Una cáscara ubicada por debajo de la órbita fotónica de ambas regiones $r_0 < 3m_2 < 3m_1$. El efecto atractivo se invierte al alejarse de la cáscara debido al término repulsivo en la métrica del agujero negro.

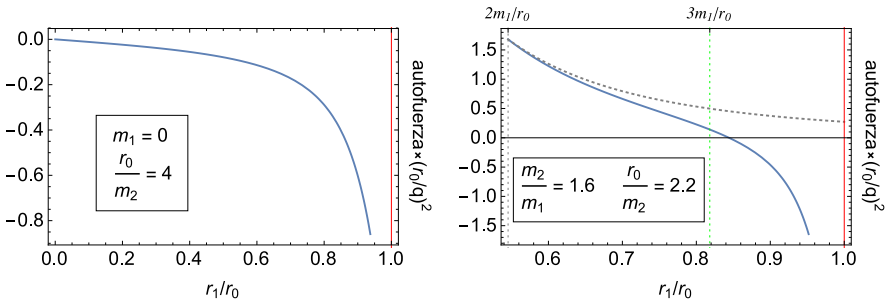
mente ya que los multipolos imágenes pueden leerse de la expansión. En este caso, el monopolo[2] es $qB_0 = 0$, por lo que los efectos de la cáscara surgen de multipolos superiores. El término dipolar imagen aparece proporcional a $\sim r'^{-2}r^{-2}$, que efectivamente para la autofuerza determina una dependencia con r'^{-5}. Consecuentemente, el término del bulk domina asintóticamente en la autofuerza como $\sim r'^{-3}$. En particular, si el exterior es Minkowski, el término del bulk es nulo y se tiene la autointeracción atractiva debido a la cáscara de materia exótica.

Para la carga en el interior la Figura 3 y la Figura 4 muestran la autofuerza electrostática con cáscaras de materia ordinaria o de materia exótica respectivamente. El primer ejemplo con una cáscara de materia ordinaria, 3a, corresponde a un interior plano, por lo que se muestra la autofuerza desde el origen hasta la posición $r_1 = r_0$. El efecto sobre la autofuerza es producido exclusivamente por la cáscara debido a la ausencia del término de bulk. En estos casos, valores negativos corresponden a una repulsión de la cáscara de materia ordinaria empujando la carga hacia el centro, donde la fuerza se anula por la simetría esférica. El ejemplo de la Figura 3b muestra un interior desde el horizonte de eventos hasta la cáscara, más allá de la órbita fotónica de la región. La repulsión de la superficie de materia ordinaria compite con la repulsión desde el centro que aporta el término del bulk. Suficientemente cerca de la cáscara domina el efecto del salto de la curvatura y alejándose se encuentra un punto de equilibrio estable. Como en los casos exteriores,

2 En general, si el desarrollo no es esférico, habría que integrar la densidad de carga eléctrica del problema equivalente σ_2 para obtener el monopolo.

independientemente de la posición $r_0 > 2m_{1,2}$, se observa un efecto repulsivo de la cáscara esférica de materia ordinaria con $\kappa < 0$.

Figura 3: Autofuerza adimensional electrostática en función de r_1/r_0 en la región interior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia ordinaria ($m_2 > m_1$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa < 0$ produce un efecto repulsivo, hacia el interior, sobre la carga.



(a) Un interior plano ($m_1 = 0$) unido a un exterior con $r_0 > 3m_2$. La fuerza repulsiva se anula en el origen.

(b) Una cáscara ubicada por encima de la órbita fotónica de la región interior tal que $3m_1 < r_0 < 3m_2$.

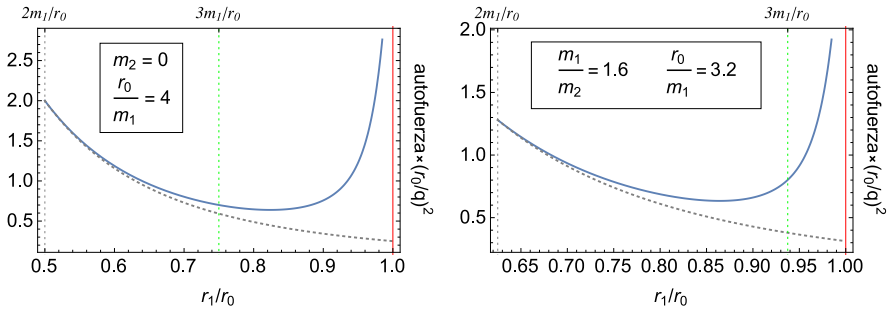
Finalmente, en la Figura 4, se presentan casos interiores con cáscaras exóticas. El ejemplo en 4a corresponde a un exterior plano. La cáscara de materia exótica produce un efecto atractivo sobre la carga que contribuye en el mismo sentido que término del bulk (línea punteada) expulsando la carga del centro hacia r_0. La Figura 4b, muestra un escenario similar en cuanto a los efectos relevantes, pero con un exterior de Schwarzschild. Se encontró que independientemente de la posición de la cáscara, $r_0 > 2m_{1,2}$, se produce un efecto atractivo hacia la cáscara esférica de materia exótica con $\kappa > 0$, sin importar la inclusión o no de las órbitas fotónicas de cada región.

En cuanto al problema equivalente, pensamos nuevamente en trasladar el problema en la región $\mathcal{M}_{int}$ a un problema en la variedad geodésicamente completa $\mathcal{M}_1$, con $2m_1 < r_1 < +\infty$. Se reemplaza la cáscara de materia por una densidad de carga eléctrica superficial no gravitante ubicada en $r_1 = r_0$ que genera el siguiente potencial

$$\Phi^{\sigma_1} = q\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{A_l}{f_l^i(r_0)}g_l^i(r_<)f_l^i(r_>)\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_1, r_0\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_1, r_0\} \\ 2m_1 &< r_1, r_0 < +\infty \end{aligned}$$

El problema equivalente de interés está en la región $\mathcal{M}_{int}$ de $\mathcal{M}_1$. Se puede interpretar una densidad de carga superficial sobre la superficie $r = r_0$ como se analizó en la Sección 5.4. La carga total equivalente se puede obtener integrando la densidad equivalente σ_1 o, aprovechando

Figura 4: Autofuerza adimensional electrostática en función de r_1/r_0 en la región interior de geometrías tipo Schwarzschild con una cáscara de materia exótica ($m_1 > m_2$). La línea punteada corresponde a la autofuerza en el agujero negro (sin cáscara). La cáscara de radio r_0 y $\kappa > 0$ produce un efecto atractivo sobre la carga.



(a) Una cáscara ubicada por encima de la órbita fotónica interior, $r_0 > 3m_1$ unida a un exterior plano ($m_2 = 0$).

(b) Una cáscara ubicada por encima de la órbita fotónica de ambas regiones $r_0 > 3m_1 < 3m_2$.

la ventaja del problema esférico, leyendo el monopolo del potencial equivalente Φ^{σ_1} visto desde el infinito. En este caso encontramos la carga

$$Q_1 = qA_0 \frac{g_0^i}{f_0^i(r_0)} = -q\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{r_0}\frac{r_0}{\Delta_2} = -q\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_2}\,. \tag{330}$$

A partir de la interpretación equivalente vemos que la carga q en la región interior no siente la interacción debida a esta carga imagen total, ya que se encuentra uniformemente distribuida en la cáscara esféricamente simétrica. La interacción que surge del término de la cáscara se debe a multipolos superiores, al igual que en el caso exterior. La carga neta imagen no aporta a la autointeracción así como la carga total de un conductor esférico no afecta a una carga interior, de todos modos, aprovechamos este ejemplo para ver que en Q_1 aparecen cantidades geométricas de la cáscara, más precisamente vemos que

$$\frac{Q_1}{q} = -\frac{\kappa}{\kappa_+}\,, \tag{331}$$

donde $\kappa_+ = \frac{2}{a_0}\sqrt{1 - \frac{2m_2}{a_0}}$ es la curvatura espacial de la cáscara embebida en la subvariedad $\mathcal{M}_{ext}$ y $\kappa = \kappa_+ - \kappa_-$ el salto de la curvatura espacial.

En resumen, encontramos que el potencial electrostático en geometrías Tipo I con métricas de Schwarzschild presenta una contribución Φ^σ asociado a la cáscara. Este término produce un efecto repulsivo o atractivo sobre la carga q dependiendo exclusivamente del tipo de materia, ordinaria o exótica respectivamente, de la cáscara. Geométricamente podemos decir que una cáscara cuya superficie tiene curvatura $\kappa < 0$

produce una autointeracción repulsiva sobre la carga puntual, y una cáscara cuya superficie tiene curvatura $\kappa > 0$ produce una autointeracción atractiva sobre una carga. Este efecto se manifiesta intensamente en las cercanías de la hipersuperficie. Con la carga en el exterior, el término del bulk Φ^{bulk} de Schwarzschild domina frente a Φ^{σ} asintóticamente, por lo que la autofuerza es siempre repulsiva suficientemente lejos de la cáscara, sin importar su curvatura. Esto es evidente a partir de la ausencia del término monopolar del potencial de la cáscara para la carga en el exterior, y que el siguiente multipolo es de orden inferior al término del bulk (el potencial de Linet (289)). En el caso de un exterior de Minkowski la cáscara es de materia exótica y sólo está presente Φ^{σ}, por lo que la autointeracción es atractiva en toda la región exterior. Tanto para la carga en $\mathcal{M}_{int}$ o $\mathcal{M}_{ext}$, la distorsión del campo por la presencia de la cáscara se manifiesta con multipolos superiores al monopolar, que a los efectos de la autofuerza son $\sim r'^{-5}$. El efecto atractivo cerca de cáscaras esféricas de materia exótica en geometrías de Schwarzschild Tipo I contrasta con los efectos frente a cáscaras de materia ordinaria no sólo en este trabajo, sino comparando con otros resultados de la literatura que incluyen escenarios donde se reemplaza la región interior por un cuerpo material y se estudia la estructura interna mediante una autofuerza eléctrica que resulta siempre repulsiva, [103-106].

6.1.2 *Tipo II: Agujeros de gusano*

Pasamos a resolver el potencial electrostático de una carga q en el espaciotiempo de un agujero de gusano esférico con garganta infinitamente delgada. A partir de dos métricas de Schwarzschild con elementos de línea:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m_2}{r_2}\right) dt_2^2 + \left(1 - \frac{2m_2}{r_2}\right)^{-1} dr_2^2 + r_2^2 d\Omega^2 \,, \tag{332}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m_1}{r_1}\right) dt_1^2 + \left(1 - \frac{2m_1}{r_1}\right)^{-1} dr_1^2 + r_1^2 d\Omega^2 \tag{333}$$

y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, consideramos una variedad geodésicamente completa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+$, de Tipo II según definimos en Capítulo 4;

$$\mathcal{M}_- = \{x_1^\alpha \,/\, r_1 \geq r_0 > 2m_1\}, \quad \mathcal{M}_+ = \{x_2^\alpha \,/\, r_2 \geq r_0 > 2m_2\} \,, \tag{334}$$

con una cáscara de unión en la hipersuperficie $\mathcal{H}$, ubicada en $r_{1,2} = r_0 > 2m_{1,2}$, de normal espacial. La fuente puede estar de un lado u otro de la garganta, en la región $\mathcal{M}_-$ o $\mathcal{M}_+$. Alcanza con resolver un caso,

ya que el otro se obtendría cambiando $m_{1,2} \to m_{2,1}$. Se ubica q en r' y $\theta' = 0$ en $\mathcal{M}_+$ y se define el potencial de la siguiente manera

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_- & \text{en } \mathcal{M}_- \\ \Phi_+ & \text{en } \mathcal{M}_+ \end{cases} \tag{335}$$

En principio, según el método de separación habitual, la región que alberga la carga, $\mathcal{M}_+$, se sub divide en 2 zonas. Nuevamente se tendrían 6 coeficientes a determinar. La diferencia entre la resolución en geometrías Tipo II respecto a las Tipo I es que no hay una región interior y la condición sobre el horizonte u origen se reemplaza por una condición asintótica en $\mathcal{M}_-$. Las 6 condiciones de contorno para esta clase de problemas son: 1. el comportamiento asintótico del potencial y/o el campo en la región $\mathcal{M}_-$, 2. el comportamiento asintótico en la región $\mathcal{M}_+$, 3. la continuidad del potencial en todo el espacio, en particular; sobre la posición de la fuente, y 4. sobre la cáscara, y finalmente en cuanto al salto; 5. la inhomogeneidad sobre la posición de la carga q y, 6. asegurar que no haya fuentes eléctricas sobre la hipersuperficie de la cáscara. Se resuelve en cada subvariedad como se hizo en la Sección 6.1.1, incorporando 4 de estas condiciones en el planteo inicial del potencial.

Si $2m_2 < r_0 < r'$ (fuente en $\mathcal{M}_+$):

$$\begin{aligned} \Phi_- &= \Phi^{\sigma_-} && \text{en } \mathcal{M}_- \\ \Phi_+ &= \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma_+} && \text{en } \mathcal{M}_+ \end{aligned} \tag{336}$$

con

$$\Phi^{\sigma_-} = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) f_l^-(r_1) A_l \,, \tag{337}$$

$$\Phi^{bulk} = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) g_l^+(r_<) f_l^+(r_>) \,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_2, r'\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_2, r'\} \end{aligned} \tag{338}$$

$$\Phi^{\sigma_+} = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) f_l^+(r_2) B_l \,. \tag{339}$$

Los superíndices $-$ y $+$ hacen referencia a las funciones radiales del bulk $\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$, soluciones de (297) con la masa m_1 y m_2 respectivamente. Φ es continua en cada región por construcción. La inhomogeneidad puntual q se ve de la derivada radial en la posición de la carga a partir de la forma de Φ^{bulk} y la continuidad de la derivada de Φ_+^{σ} en $r = r'$. En las regiones asintóticas se descartan las funciones g_l, tal que $\Phi \to 0$. Las condiciones 1, 2, 3 y 5 quedaron satisfechas por construcción, mientras que los coeficientes A_l y B_l se determinan a partir de las condiciones

de contorno sobre la cáscara en r_0; (260) y (262). Según las funciones radiales éstas quedan expresadas como

$$\frac{f_l^-(r_0)A_l}{\sqrt{1-2m_1/r_0}} = \frac{g_l^+(r_0)f_l^+(r') + f_l^+(r_0)B_l}{\sqrt{1-2m_2/r_0}} \tag{340}$$

y

$$-f_l^{-\prime}(r_0)A_l = g_l^{+\prime}(r_0)f_l^+(r') + f_l^{+\prime}(r_0)B_l\,, \tag{341}$$

respectivamente, y finalmente se obtiene

$$A_l = -f_l^+(r')\frac{2l+1}{r_0^2}\left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 f_l^{-\prime} f_l^+ + \Delta_2 f_l^- f_l^{+\prime}}\right]_{r_0}\,, \tag{342}$$

$$B_l = -f_l^+(r')\left[\frac{\Delta_1 f_l^{-\prime} g_l^+ + \Delta_2 f_l^- g_l^{+\prime}}{\Delta_1 f_l^{-\prime} f_l^+ + \Delta_2 f_l^- f_l^{+\prime}}\right]_{r_0}\,. \tag{343}$$

donde $\Delta_{1,2} = \sqrt{1-2m_{1,2}/r}$. Según el procedimiento de regularización descripto en la Sección 6.1, el potencial regular para la carga q queda

$$\begin{aligned}\Phi_R^+ &= \Phi^L + \Phi^{\sigma_+}\\ &= q\tfrac{m_2}{r'}\tfrac{1}{r_2} + q\sum_{l=0}^{\infty} f_l^+(r_2)B_l\,,\end{aligned} \tag{344}$$

para cualquier posición en la subvariedad $\mathcal{M}_+$ de la geometría de Schwarzschild Tipo II. La energía electrostática es $U_{elec} = \frac{q}{2}\Phi_R|_{r'}$ y la autofuerza electrostática en base ortonormal, $\mathbf{f}^{\hat{r}} = -U'_{elec}$, queda explícitamente

$$\mathbf{f}^{\hat{r}}(r_2) = q^2\frac{m_2}{r_2^3} + q^2\sum_{l=0}^{\infty} f_l^{+\prime}(r_2)f_l^+(r_2)\left[\frac{\Delta_1 f_l^{-\prime} g_l^+ + \Delta_2 f_l^- g_l^{+\prime}}{\Delta_1 f_l^{-\prime} f_l^+ + \Delta_2 f_l^- f_l^{+\prime}}\right]_{r_0} \tag{345}$$

para la carga q en $r_2 \in \mathcal{M}_+$.

Para analizar los resultados será útil calcular la carga monopolar del potencial de la cáscara. Planteamos el problema equivalente para la región $\mathcal{M}_+$, que corresponde al problema en la variedad geodésicamente completa $\mathcal{M}_2$ donde la coordenada radial es $2m_2 < r_2 < +\infty$. La cáscara de materia se reemplaza por una densidad de carga eléctrica σ_2, no gravitante, en la superficie $r_2 = r_0$ en la geometría de Schwarzschild de $\mathcal{M}_2$. El potencial que genera σ_2 es

$$\begin{aligned}\Phi^{\sigma_2} &= q\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{B_l}{g_l^+(r_0)}g_l^+(r_<)f_l^+(r_>)\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_2, r_0\}\\ r_> &= \text{máx}\{r_2, r_0\}\\ 2m_2 &< r_2, r_0 < +\infty\end{aligned}\\ &= -q\frac{r_0}{r'}\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2+\Delta_1}\frac{1}{r_2} + \mathcal{O}\left(r_2^{-2}r'^{-2}\right)\end{aligned} \tag{346}$$

El problema eléctrico en la región $\mathcal{M}_+ \in \mathcal{M}_2$ es equivalente al problema original del espaciotiempo del agujero de gusano en la región $\mathcal{M}_+$. Se pueden leer los momentos multipolares de este potencial equivalente, en particular, la carga neta total se ve del primer término del potencial Φ^{σ_2}. Encontramos que la carga monopolar imagen del potencial de la cáscara depende de la posición de la carga q como r'^{-1}. En términos efectivos para la autofuerza este primer multipolo genera una fuerza sobre q proporcional a r'^{-3}. Observando la dependencia general, podemos caracterizar la carga monopolar de la cáscara en problemas esféricos Tipo II como

$$Q^+_{wh} = -q\frac{r_0}{r'}\,\frac{\kappa_-}{\kappa_{wh}}\,, \tag{347}$$

done el $+$ hace referencia a la subvariedad donde se encuentra la carga, κ_- es la curvatura espacial de la superficie de la cáscara embebida en la subvariedad complementaria $\mathcal{M}_-$, y $\kappa_{wh} = \kappa_+ + \kappa_-$. La cantidad Q^+_{wh} caracteriza la variación del flujo del campo en la región $\mathcal{M}_+$, o por el contrario $-Q^+_{wh}$ es el flujo que sale por la garganta hacia la región asintótica de $\mathcal{M}_-$. Se puede chequear que la integral de flujo en las dos regiones asintóticas, con la carga en $\mathcal{M}_+$, es

$$\begin{aligned} -\int\limits_{r_1\to\infty} \Phi'_-\, r_1^2\, d\Omega - \int\limits_{r_2\to\infty} \Phi'_+\, r_2^2\, d\Omega &= -4\pi Q^+_{wh} + 4\pi\left(q + Q^+_{wh}\right) \\ &= 4\pi q\,. \end{aligned} \tag{348}$$

Comenzamos analizando agujeros de gusano simétricos a través de la garganta donde $m_1 = m_2 = m$. Si la carga se ubica sobre la garganta en $r' = r_0$ se tiene $Q_{wh} = -q/2$, y el flujo se distribuye en partes iguales sobre las regiones asintóticas. Una primer pregunta a responder es cómo se modifica el comportamiento asintótico de la autofuerza sobre q en topologías Tipo II. Mirando el potencial regular obtenido (344) tenemos,

$$\begin{aligned} \Phi_R &= \Phi^L + \Phi^\sigma = \tfrac{Q}{r} + \mathcal{O}\left[\tfrac{1}{(rr')^2}\right] \\ &= \left(Q_{bh} + Q_{wh}\right)\tfrac{1}{r} + \mathcal{O}\left[\tfrac{1}{(rr')^2}\right] \\ &= \tfrac{q}{r'}\left(m - \tfrac{r_0}{2}\right)\tfrac{1}{r} + \mathcal{O}\left[\tfrac{1}{(rr')^2}\right] \end{aligned} \tag{349}$$

donde llamamos $Q = Q_{bh} + Q_{wh}$ al monopolo total, con $Q_{bh} = q\frac{m}{r'}$ el monopolo del término de Linet en la geometría del agujero negro, y $Q_{wh} = -q\frac{r_0}{2r'}$ para los casos simétricos. Como $r_0 > 2m$, se ve que la autofuerza detecta el cambio de topología a primer orden no nulo asintóticamente en un agujero de gusano simétrico con métrica de Schwarzschild. La expresión completa para la autofuerza es

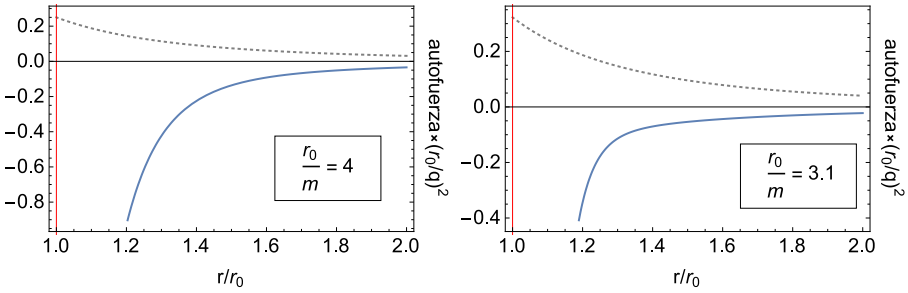
$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = \frac{q^2 m}{r^3} + q^2 \sum_l f'_l(r)\frac{f_l(r)}{f_l(r_0)}\left[\frac{2l+1}{2r_0^2 f'_l(r_0)} + g_l(r_0)\right]\,, \tag{350}$$

y el comportamiento asintótico queda

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = -q^2 \left(\frac{r_0}{2} - m \right) \frac{1}{r^3} + \mathcal{O}\left(r^{-5} \right). \tag{351}$$

Las siguientes figuras muestran el gráfico de la autofuerza electrostática para casos simétricos. En la Figura 5 el radio de la garganta es $r_0 > 3m$, y el análisis numérico muestra que la autofuerza es siempre atractiva hacia la garganta. En la Figura 6 se presentan casos donde $r_0 < 3m$, y se observa que si la cáscara está por debajo de la órbita fotónica, domina un efecto repulsivo suficientemente cerca de la garganta. En todos los casos la autofuerza es atractiva lejos de la garganta.

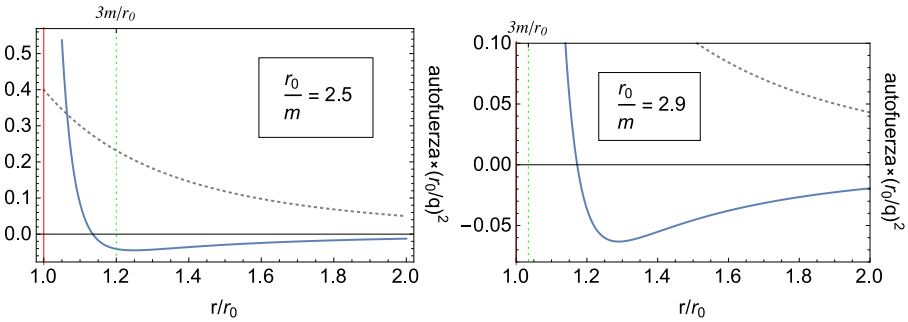
Figura 5: Autofuerza adimensional electrostática en función de r/r_0 en un agujero de gusano de Schwarzschild simétrico a través de la garganta. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la geometría del agujero negro. La garganta de materia exótica con $\kappa_{wh} > 0$ produce un efecto atractivo si se ubica por encima de la órbita fotónica.



(a) Garganta de radio $r_0 = 4m$.

(b) Garganta apenas por encima de la órbita fotónica.

Figura 6: Autofuerza adimensional electrostática en función de r/r_0 en un agujero de gusano simétrico a través de la garganta con geometrías tipo Schwarzschild. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la métrica del agujero negro. La garganta de materia exótica con $\kappa_{wh} > 0$ ubicada por debajo de la órbita fotónica produce un efecto repulsivo si la carga se encuentra suficientemente cerca.



(a) Garganta de radio $r_0 = 2{,}5m$.

(b) Garganta apenas por debajo de la órbita fotónica.

Se pudo ver que en general la cáscara de materia exótica actúa con un efecto atractivo, como se observó en espaciotiempos Tipo I, excepto cuando la carga está suficientemente cerca de una garganta por debajo de la órbita fotónica. Esta transición es consecuencia del peso que adquieren los multipolos de orden superior en Φ^σ cuando $r_0 \to 3m$. Por otro lado, si $3m \ll r_0, r$, la autofuerza queda

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} \sim -\frac{q^2 r_0}{2r^3}\left[\frac{1}{1-(r_0/r)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{r_0}+\frac{m}{r}\right)\right]. \tag{352}$$

Esta expresión permite ver cómo es la divergencia al acercar la carga a la cáscara, al menos en casos alejados de la órbita fotónica. Para obtener este resultado estudiamos el problema en el límite al agujero de gusano de Minkowski, $m \to 0$, plano en todas partes excepto en la garganta. Las funciones radiales se reducen a

$$g_l(r) \xrightarrow{m\to 0} r^l \quad \text{y} \quad f_l(r) \xrightarrow{m\to 0} 1/r^{l+1}\,, \tag{353}$$

y el potencial de la cáscara en la región donde se encuentra la carga q queda

$$\begin{aligned}
\Phi^\sigma \to \Phi^{\sigma_M} &= Q_{wh}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{1}{l+1}\frac{r_*^l}{r^{l+1}}\,, \qquad r_* = \tfrac{r_0^2}{r'} \\
&= Q_{wh}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) r_*^l \int dr \frac{-1}{r^{l+2}} \\
&= Q_{wh}\int dr \frac{-1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{r_*^l}{r^{l+1}} \\
&= -Q_{wh}\int dr \frac{1}{r}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*|} \\
&= -\frac{Q_{wh}}{r_*}\ln\frac{r_*|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*| + \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}_* - r_*^2}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}_* + r r_*}\,,
\end{aligned} \tag{354}$$

expresado en función del vector posición espacial $\mathbf{x}$ y la *posición imagen* $\mathbf{x}_*$, de longitud $r = r_*$, con $\theta_* = 0$. Evaluando en la dirección $\theta = 0$ de la carga q se obtiene

$$\begin{aligned}
\Phi^{\sigma_M}|_{\theta=0} &= -\frac{Q_{wh}}{r_*}\ln\frac{r-r_*}{r} \\
&= -\frac{Q_{wh}}{r_0^2/r'}\ln\frac{r-r_0^2/r'}{r},
\end{aligned} \tag{355}$$

de donde se ve la clase de divergencia del potencial cuando $r = r' \to r_0$. Los logaritmos en el potencial electrostático aparecen típicamente ante distribuciones uniformes de carga rectas e infinitas. Si bien aquí la coordenada radial es la de esféricas y la situación en general es diferente, para la carga q, la imagen de la garganta corresponde a dos hilos rectos (perpendiculares a $\mathbf{x}_*$) de densidad lineal $\pm\lambda = \pm\frac{Q_{wh}}{2r_*} = \mp\frac{q}{4r_0}$, ubicados en $\mathbf{x}_*$ y en el origen, respectivamente. La divergencia logarítmica del

potencial al acercar la carga hacia la cáscara se puede pensar como el encuentro de q con la distribución imagen en $r_* \to r_0$. Finalmente, la autofuerza para la carga en la geometría plana con garganta esférica queda

$$\mathbf{f}_M^{\hat{r}} = -\frac{q^2 r_0}{2r^3}\left[\frac{1}{1-(r_0/r)^2}\right], \tag{356}$$

como el orden dominante en (352). La autofuerza es siempre atractiva hacia la garganta y diverge cerca de ella donde salta la curvatura.

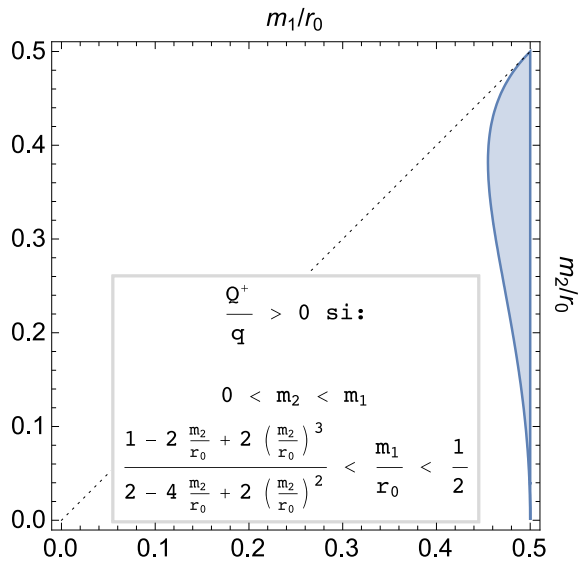
Por último analizamos los agujeros de gusano asimétricos. En cuanto al comportamiento asintótico de la autofuerza, según el potencial regular (349) tenemos la carga monopolar

$$Q^+ = Q_{bh} + Q^+_{wh} \tag{357}$$

$$= \frac{q}{r'}\left(m_2 - r_0\frac{\kappa_-}{\kappa_{wh}}\right) \tag{358}$$

para la carga q ubicada en la región $\mathcal{M}_+$. A partir de esta cantidad podemos determinar el comportamiento asintótico general de la autofuerza. Unos pasos algebraicos permiten ver rápidamente que si $m_2 \geq m_1$, Q^+/q es siempre negativo y la autofuerza vuelve a manifestar la atracción hacia la garganta de los casos simétricos. Cuando $m_2 < m_1$, existe un estrecho rango de valores para los cuales la atracción asintótica puede invertirse. Los resultados se expresan en la Figura 7 donde se puede ver la región en el espacio de parámetros $(m_1/r_0, m_2/r_0)$ para los cuales Q^+/q es positiva.

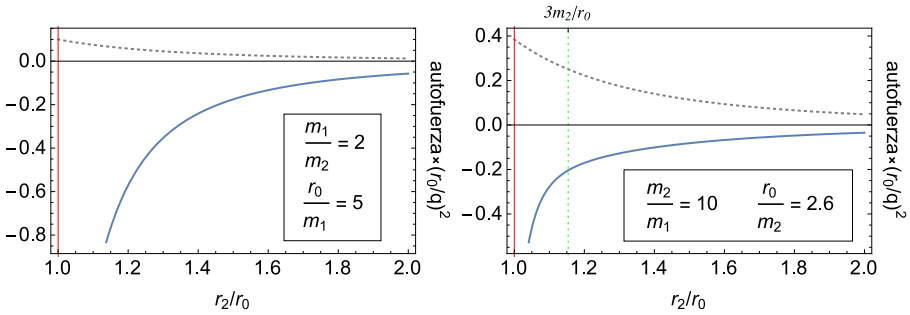
Figura 7: Condición para que la el cociente Q^+/q entre la carga monopolar total y q, del potencial regular en una geometría de Schwarzschild Tipo II se vuelva positivo.



Bajo las condiciones representadas en la Figura 7, la autofuerza electrostática no podría distinguir asintóticamente al orden dominante una geometría Tipo I de la Tipo II. Esta situación requiere al menos que el radio de la cáscara sea tal que $2m_2 < 2m_1 < r_0 \lesssim 2{,}2\, m_1$, es decir, configuraciones muy particulares con la garganta muy cercana al radio de Schwarzschild de la región complementaria a $\mathcal{M}_+$ en el agujero de gusano. Un ejemplo de esta configuración se observa en la Figura 9b a continuación.

Por otro lado, el comportamiento cerca de la garganta presenta la misma característica que en los casos simétricos; si $r_0 > 3m_{1,2}$ la fuerza es siempre atractiva, mientras que si $r_0 < 3m_{1,2}$ se observa la repulsión cerca de la cáscara. La transición atractiva/repulsiva en las cercanías de la garganta se presenta cuando $r_0 \simeq 3\frac{m_1+m_2}{2}$. La Figura 8 muestra ejemplos con cáscaras atractivas para cualquier posición de la carga, y la Figura 9 muestra ejemplos donde se ubicó la garganta por debajo de la órbita fotónica media y se observa la repulsión. Los ejemplos de la Figura 8 también son representativos para casos con subvariedades de Minkowski en cualquiera de las dos regiones o ambas. En la Figura 9b se muestra un caso particular de los que tienen $Q^+/q > 0$, y la autofuerza de la carga q es repulsiva en toda la región a pesar de estar frente a un agujero de gusano.

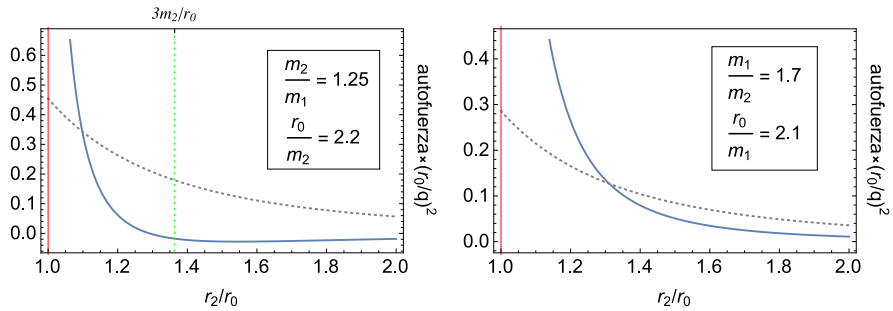
Figura 8: Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en un agujero de gusano asimétrico a través de la garganta con geometrías tipo Schwarzschild. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la métrica del agujero negro. La garganta de materia exótica con $\kappa_{wh} > 0$ produce un efecto atractivo sobre la carga si se encuentra por encima de las órbitas fotónicas o $r_0 \gtrsim 3\frac{m_1+m_2}{2}$.



(a) Garganta de radio $r_0 = 5m_1 = 10m_2$. (b) Garganta por debajo(encima) de la órbita fotónica de la región $\mathcal{M}_{+(-)}$.

En cuanto a las características generales, si la cáscara de materia exótica se ubica en $r_0 \gtrsim 3\frac{m_1+m_2}{2}$, la autofuerza es atractiva hacia la garganta para cualquier posición de la carga. Si la cáscara está aproximadamente por debajo de la órbita fotónica media, $3\frac{m_1+m_2}{2}$, la carga se siente repelida en posiciones suficientemente cercanas a la garganta. Asintóticamente, la carga monopolar del potencial regular para q es, en casi todas las configuraciones, de signo opuesto producien-

Figura 9: Autofuerza adimensional electrostática en función de r_2/r_0 en un agujero de gusano asimétrico a través de la garganta con geometrías tipo Schwarzschild. La línea punteada corresponde a la autofuerza en la métrica del agujero negro. Con la carga suficientemente cerca, la garganta produce un efecto repulsivo si se encuentra por debajo de las órbitas fotónicas o $r_0 \lesssim 3\frac{m_1+m_2}{2}$.



(a) Garganta de radio $r_0 = 2{,}2m_2 = 2{,}75m_1$. La autofuerza es asintóticamente atractiva.

(b) Garganta de radio $r_0 = 2{,}1m_1 = 3{,}5m_2$. Ejemplo de autofuerza asintóticamente repulsiva ($Q^+/q > 0$).

do una autofuerza atractiva hacia la garganta. Existen excepciones en un rango estrecho de valores de los parámetros de la geometría que se consiguen con gargantas muy cercanas a uno de los radios de Schwarzschild en los casos asimétricos (debe cumplirse al menos que $2m_2 < 2m_1 < r_0 < 2{,}2\, m_1$). Dejando de lado esos casos particulares, la *carga neta imagen* $Q^+_{wh} = -q\frac{r_0}{r'}\frac{\kappa_-}{\kappa_{wh}}$ del potencial de la cáscara es más intensa que la del término de Linet (el que produce la repulsión en la geometría localmente idéntica de un agujero negro). Esta cantidad de carga equivalente se caracteriza mediante la curvatura extrínseca de la superficie de la cáscara en geometrías Tipo II compuestas de materia exótica. Con curvatura espacial $\kappa_{wh} > 0$ el signo de Q_{wh} es siempre opuesto al de la carga q produciendo el mencionado efecto atractivo para la autofuerza que asintótica escalea como r'^{-3}.

6.2 AUTOFUERZA ELECTROSTÁTICA EN GEOMETRÍAS CÓNICAS

Pasamos al estudio de la autofuerza electrostática en espaciotiempos con simetría cilíndrica. Usaremos métricas asociadas a cuerdas cósmicas locales (rectas infinitamente delgadas y largas) unidas por una cáscara de materia con la misma simetría. De lo analizado en la Sección 4.5 sabemos que la geometría es localmente plana pero tiene un defecto de ángulo global, por lo que se las denomina métricas cónicas. El elemento de línea en general es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \omega^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2, \tag{359}$$

con $0 \leq \omega \leq 1$, en las coordenadas cilíndricas con $t \in (-\infty, +\infty)$, $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Seguimos los mismos pasos de la sección anterior para obtener la función de Green singular. En este caso

$$G_S^3(r; r') = \frac{1}{|d(r; r')|} + \mathcal{O}(\sigma) \ , \tag{360}$$

pues $g_{t't',r'} = 0$, y

$$d(r; r') = \int_{r'}^{r} \sqrt{g_{rr}} dr = r - r' \ , \tag{361}$$

donde se entiende que ya se evaluó $\varphi = \varphi'$ y $z = z'$ para regularizar mediante geodésicas radiales en secciones puramente espaciales de la geometría cilíndrica. La métrica es plana excepto en el eje donde se encuentra la cuerda o en donde se ubique la cáscara, por esta razón la función de Green singular resulta la función en el espacio de Minkowski. Con el potencial singular $\Phi_S = q\, G_S^3$, se renormaliza el potencial en la posición de la carga

El potencial de una carga puntual en un espaciotiempo con una cáscara en métricas cónicas se puede descomponer en la superposición

$$\Phi = \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma} \ , \tag{362}$$

donde el término Φ^{bulk} contiene la inhomogeneidad en la posición de la carga, y Φ^{σ} incorpora la distorsión que produce la cáscara y el tipo de topología ante la presencia de la fuente puntual q. Lo esencial para la renormalización, como vimos en los casos esféricos, es que el término de la cáscara es regular en la posición de la fuente. La parte que diverge en la posición de la carga es equivalente al potencial que se encuentra en la geometría de una cuerda cósmica infinitamente delgada Φ^{CS}. Identificando $\Phi^{bulk} = \Phi^{CS}$, el potencial renormalizado es

$$\Phi_{ren}(r') = \Phi_{ren}^{CS}|_{r'} + \Phi^{\sigma}|_{r'} \ , \tag{363}$$

La renormalización del término inhomogéneo, correspondiente al potencial en el espaciotiempo de una cuerda cósmica infinitamente delgada, fue obtenida por Linet [49] de forma cerrada utilizando resultados de electrostática en regiones delimitadas por planos conductores infinitos en cuña. Finalmente, prescribiendo un procedimiento de regularización, obtuvo la autoenergía de la carga frente a una cuerda cósmica. Por otro lado, el potencial en geometrías cónicas es conocido en la literatura por el estudio de la energía de vacío en el espaciotiempo de cuerdas cósmicas y se puede representar con una sola integral. Tomando este resultado de la referencia [119] tenemos que

$$\Phi^{CS} = \frac{q}{\pi\sqrt{2rr'}} \int_{u}^{+\infty} \frac{\sinh(\zeta/\omega)\, \omega^{-1} \quad d\zeta}{\left[\cosh(\zeta/\omega) - \cos\frac{\varphi-\varphi'}{\omega}\right] (\cosh\zeta - \cosh u)^{1/2}} \tag{364}$$

donde

$$\cosh u = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'}\,, \quad u \geqslant 0\,. \tag{365}$$

Como la geometría es plana en un entorno de la carga el potencial singular Φ_S es idéntico al potencial en la métrica de Minkowski. Para poder restarlo, lo escribimos reemplazando $\omega = 1$ en la expresión anterior;

$$\Phi_S = \frac{q}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2rr'}}\int_u^{+\infty} \frac{\sinh\zeta \quad d\zeta}{\left[\cosh\zeta - \cos(\varphi - \varphi')\right]\left(\cosh\zeta - \cosh u\right)^{1/2}}\,. \tag{366}$$

Evaluando de antemano en $z = z'$ y $\varphi = \varphi'$, al tomar el límite de coincidencia por geodésicas radiales se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi^{CS}_{ren} &= \lim_{r\to r'} \Phi^{CS}(r, r') - \Phi_S(r, r') \\ &= \frac{q}{2\pi}\frac{L_\omega}{r'}\,, \quad \text{donde:} \end{aligned} \tag{367}$$

$$L_\omega = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sinh(\zeta/\omega)}{\omega\left[\cosh(\zeta/\omega) - 1\right]} - \frac{\sinh\zeta}{\cosh\zeta - 1}\right]\frac{d\zeta}{\sinh(\zeta/2)}\,, \tag{368}$$

que depende únicamente de la posición radial r' en virtud de la simetría cilíndrica. A partir de la energía electrostática $U_{elec} = \frac{q}{2}\Phi^{CS}_{ren}$ se puede obtener la autofuerza $\mathbf{f}^{\hat{r}}_{CS} = -U'_{elec}$. Para la geometría cónica podemos definir el potencial regular de la carga q

$$\Phi^{CS}_R(r, r') = \frac{q}{4\pi}\frac{L_\omega}{r'}\left(2 - \ln\frac{r}{r'}\right)\,, \tag{369}$$

a partir del cual se obtiene $\Phi^{CS}_{ren} = \Phi^{CS}_R(r, r')|_{r'}$, y la autofuerza sobre la carga q en un espaciotiempo cónico queda

$$\mathbf{f}^{\hat{r}}_{CS} = -q\,\partial_r \Phi^{CS}_R|_{r'} = \frac{q^2}{4\pi}\frac{L_\omega}{r'^2}\,. \tag{370}$$

La autofuerza es repulsiva respecto al eje de simetría donde se encuentra la cuerda cósmica infinitamente larga y delgada, y es consecuencia del déficit de ángulo global de la geometría cónica.

Para obtener el potencial en geometrías con cáscaras usaremos un desarrollo en serie de la solución a partir del método de separación de variables. La ecuación de Poisson con una carga puntual q, ubicada en $\mathbf{x}' = (r', \varphi', z')$ en una métrica tipo (359), es

$$r\omega\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Phi = -4\pi q\,\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\,, \tag{371}$$

con la función delta de Dirac escrita en coordenadas cilíndricas $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')$. El potencial se puede expandir como

$$\Phi = q \int_0^{+\infty} dk\, Z(k,z) \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\varphi) R_n(k,r)\,, \tag{372}$$

donde $F_z = \{Z(k,z) = \cos[k(z-z')]\}$ y $F_\varphi = \{Q_n(\varphi) = a_n \cos[n(\varphi-\varphi')]\}$ son un conjunto completo de funciones ortogonales de las coordenadas z y φ, con

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{si } n = 0\,, \\ \frac{4}{\pi} & \text{si } n \,\epsilon\, \mathbb{N} - \{0\}\,. \end{cases} \tag{373}$$

En las regiones libres de fuentes las funciones radiales $R_n(k,r)$ satisfacen

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{\upsilon^2}{r^2}\right)\right] R_n(k,r) = 0\,. \tag{374}$$

Esta es la ecuación homogénea de Bessel modificada de orden $\upsilon = n/\omega$, con $n \,\epsilon\, \mathbb{N}_0$. Las soluciones son las funciones independientes $K_\upsilon(kr)$ e $I_\upsilon(kr)$. La función de Bessel modificada $K_\upsilon(kr)$ tiende a cero si su argumento tiende a infinito y diverge en el origen, mientras que $I_\upsilon(kr)$ diverge en infinito y es finita en el origen. Su Wronskiano es

$$W\left(K_\upsilon(kr), I_\upsilon(kr), r\right) = K_\upsilon(kr) I'_\upsilon(kr) - K'_\upsilon(kr) I_\upsilon(kr) = \frac{1}{r}\,, \tag{375}$$

donde usamos $K'(kr)$ e $I'(kr)$ para denotar derivadas con respecto a r. En primer lugar nos interesa obtener Φ^{CS} en la geometría (359), por lo que las funciones radiales quedan determinadas a partir de exigir que el potencial sea finito cuando $r \to 0$ y en $r \to +\infty$, junto con la continuidad en $r = r'$ y la discontinuidad de la derivada determinada de integrar la ecuación inhomogénea

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{\upsilon^2}{r^2}\right)\right] R_n^{CS}(k,r) = -\frac{\delta(r-r')}{\omega r}\,. \tag{376}$$

Finalmente el potencial de una carga puntual en la geometría de una cuerda cósmica queda desarrollado como en (372) con la función radial

$$R_n^{CS}(k,r) = \frac{1}{\omega} K_\upsilon(kr_>) I_\upsilon(kr_<) \quad \text{con } \upsilon = n/\omega\,, \tag{377}$$

donde $r_<$ y $r_>$ son el menor y mayor entre r y r'. La solución para el caso de la métrica de Minkowski se recupera al evaluar $\omega = 1$.

6.2.1 *Tipo I: Una región asintótica*

Consideramos espaciotiempos Tipo I, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{int} \cup \mathcal{M}_{ext}$ construidos con dos métricas cónicas de elementos de línea

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr_1^2 + \omega_i^2 r_1^2 d\theta^2 + dz^2 \,, \\ ds^2 &= -dt^2 + dr_2^2 + \omega_e^2 r_2^2 d\theta^2 + dz^2, \end{aligned} \tag{378}$$

unidas en una cáscara cilíndrica $\mathcal{H} = \partial\mathcal{M}_{int} = \partial\mathcal{M}_{ext}$, tal que

$$\mathcal{M}_{int} = \{x_1^\alpha \,/\, 0 \leq r_1 \leq r_i\}, \quad \mathcal{M}_{ext} = \{x_2^\alpha \,/\, 0 \leq r_e \leq r_2\} \,. \tag{379}$$

El potencial electrostático de una carga puntual q en $\mathcal{M}$ tiene un desarrollo en serie según el método de separación de variables con la forma general

$$\Phi = q \int_0^{+\infty} dk \, Z(k,z) \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\varphi) R_n(k,r) \,, \tag{380}$$

donde se usó colectivamente r. Esta función satisface la versión homogénea de la ecuación (371) con las funciones radiales

$$R_n(k,r) = A_n(k) I_\upsilon(kr) + C_n(k) K_\upsilon(kr) \,, \tag{381}$$

índice de Bessel

$$\upsilon = \begin{cases} \lambda = n/\omega_i & \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \nu = n/\omega_e & \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{cases} \tag{382}$$

y coeficientes a determinar. Separamos el problema para escribir el potencial de la siguiente manera

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_i & \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \Phi_e & \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{cases} \tag{383}$$

La carga puede ubicarse en $\mathcal{M}_{int}$ o $\mathcal{M}_{ext}$, por lo que resolvemos el problema para cada caso. En principio, según el método de separación, la región que alberga la carga se sub divide en 2 zonas. Las funciones radiales satisfacen (374) en cada zona, y sus coeficientes se determinan mediante las condiciones de contorno estudiadas en el Capítulo 5. En total quedan 6 coeficientes a determinar con las siguientes 6 condiciones de contorno para esta clase de problemas: 1. finitud del potencial y el campo en la región interior, 2. el comportamiento asintótico en la región exterior, 3. la continuidad del potencial en todo el espacio, en particular; sobre la posición de la fuente, y 4. sobre la cáscara, y finalmente en cuanto al salto; 5. la inhomogeneidad sobre la posición de la carga puntual q y, 6. asegurar que no haya fuentes eléctricas sobre la hipersuperficie de la cáscara. El procedimiento estándar se simplifica notablemente incorporando 4 de estas condiciones en el planteo inicial

del potencial, como se ha hecho en la sección anterior.

Si la fuente está en $\mathcal{M}_{int}$, $0 < r' < r_i$, el potencial es

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma_i} \quad \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \Phi_e &= \Phi^{\sigma_e} \quad \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{aligned} \tag{384}$$

con funciones radiales

$$R^{bulk} = \frac{1}{\omega_i} I_\lambda(kr_<) K_\lambda(kr_<)\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_1, r'\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_1, r'\} \end{aligned} \tag{385}$$

$$R^{\sigma_i} = \frac{1}{\omega_i} I_\lambda(kr_1) A_n(k)\,, \tag{386}$$

$$R^{\sigma_e} = \frac{1}{\omega_i} K_\nu(kr_2) C_n(k)\,. \tag{387}$$

De esta manera Φ es continuo en cada región por construcción. La inhomogeneidad puntual q, o salto (261), se ve de la derivada radial en la posición de la carga a partir de la forma de Φ^{bulk} (como se mostró al final de la Sección 6.2), y la continuidad de la derivada de Φ^{σ_i} en $r_1 = r'$. Se descartaron las funciones K_λ en el interior para que el potencial no diverja en el origen, así como las funciones I_ν en el exterior para que asintóticamente $\Phi \to 0$. Las condiciones `1`, `2`, `3` y `5` quedaron satisfechas por construcción, mientras que los coeficientes $A_n(k)$ y $C_n(k)$ se determinan a partir de las condiciones de contorno sobre la cáscara (260) y (262);

$$\left(R^{bulk} + R^{\sigma_i}\right)\Big|_{r_1=r_i} = R^{\sigma_e}\Big|_{r_2=r_e}\,, \tag{388}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(R^{bulk} + R^{\sigma_i}\right)\Big|_{r_1=r_i} = \frac{\partial}{\partial r_2} R^{\sigma_e}\Big|_{r_2=r_e}\,, \tag{389}$$

respectivamente, y finalmente se obtiene

$$A_n(k) = -I_\lambda(kr') \frac{K'_\lambda(kr_i)K_\nu(kr_e) - K_\lambda(kr_i)K'_\nu(kr_e)}{I'_\lambda(kr_i)K_\nu(kr_e) - I_\lambda(kr_i)K'_\nu(kr_e)}\,, \tag{390}$$

$$C_n(k) = \frac{I_\lambda(kr')}{r_i} \frac{1}{I'_\lambda(kr_i)K_\nu(kr_e) - I_\lambda(kr_i)K'_\nu(kr_e)}\,. \tag{391}$$

Se usa primas sobre las funciones radiales para indicar una derivada respecto al radio de su argumento. Del mismo modo planteamos la solución para el caso con la carga en la región exterior, $\mathcal{M}_{ext}$, ubicada en la coordenada radial r'_2:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi^{\sigma_i} \quad \text{en } \mathcal{M}_{int} \\ \Phi_e &= \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma_e} \quad \text{en } \mathcal{M}_{ext} \end{aligned} \tag{392}$$

con funciones radiales

$$R^{\sigma_i} = \frac{1}{\omega_e} I_\lambda(kr_1) D_n(k)\,, \tag{393}$$

$$R^{bulk} = \frac{1}{\omega_e} I_\nu(kr_<) K_\nu(kr_>)\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_2, r_2'\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_2, r_2'\} \end{aligned} \tag{394}$$

$$R^{\sigma_e} = \frac{1}{\omega_e} K_\nu(kr_2) B_n(k)\,. \tag{395}$$

Nuevamente Φ es continua en cada región por construcción, se satisfacen las condiciones asintóticas en el exterior, finitud en el interior y el salto a través de la fuente. Los coeficientes $D_n(k)$ y $B_n(k)$ se determinan a partir de las condiciones de contorno sobre la cáscara, que en este caso quedan expresadas como

$$R^{\sigma_i}\Big|_{r_1=r_i} = \left(R^{bulk} + R^{\sigma_e}\right)\Big|_{r_2=r_e}\,, \tag{396}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1} R^{\sigma_i}\Big|_{r_1=r_i} = \frac{\partial}{\partial r_2}\left(R^{bulk} + R^{\sigma_e}\right)\Big|_{r_2=r_e}\,. \tag{397}$$

Finalmente se obtiene

$$D_n(k) = \frac{K_\nu(kr_2')}{r_e} \frac{1}{I_\lambda'(kr_i) K_\nu(kr_e) - I_\lambda(kr_i) K_\nu'(kr_e)}\,, \tag{398}$$

$$B_n(k) = -K_\nu(kr_2') \frac{I_\lambda'(kr_i) I_\nu(kr_e) - I_\lambda(kr_i) I_\nu'(kr_e)}{I_\lambda'(kr_i) K_\nu(kr_e) - I_\lambda(kr_i) K_\nu'(kr_e)}\,. \tag{399}$$

Para ambos problemas Tipo I se ve rápidamente que si $\omega_i = \omega_e$ se recupera la solución frente a la cuerda cósmica infinitamente larga y delgada o la carga en el espaciotiempo de Minkowski con $\omega = 1$.

Definimos la coordenada global $r \in (0; +\infty)$, tal que

$$\begin{aligned} r_1(r) &= r\,,\ \text{si } r \in (0; r_i]\ , \\ r_2(r) &= r - r_i + r_e\,,\ \text{si } r \in [r_i; +\infty)\ , \end{aligned} \tag{400}$$

que usamos para escribir colectivamente los resultados. Teniendo en cuenta lo obtenido en la primera parte de la Sección 6.2 se obtiene que el potencial regular para la carga q es

$$\Phi_R = \begin{cases} \frac{q}{4\pi}\frac{L_{\omega_i}}{r'}\left(2 - \ln\frac{r}{r'}\right) + \frac{q}{\omega_i}\int\limits_0^{+\infty} dk \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n I_\lambda(kr) A_n(k)\,, \\ \qquad\qquad 0 < r < r_i\,,\ \text{en } \mathcal{M}_{int}\,. \\ \frac{q}{4\pi}\frac{L_{\omega_e}}{r_2'}\left(2 - \ln\frac{r_2(r)}{r_2'}\right) + \frac{q}{\omega_e}\int\limits_0^{+\infty} dk \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n K_\nu(kr_2(r)) B_n(k)\,, \\ \qquad\qquad r_i < r\,,\ \text{en } \mathcal{M}_{ext}\,. \end{cases}$$

(401)

para cualquier posición en la geometría cónica Tipo I, con una cáscara cilíndrica. La energía electrostática de la carga puntual es $U_{elec} = \frac{q}{2}\Phi_R|_{r=r'}$ y la autofuerza en base ortonormal, $\mathbf{f}^{\hat{r}} = -U'_{elec}$, queda

$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = \begin{cases} \frac{q^2}{4\pi}\frac{L_{\omega_i}}{r'^2} - \frac{q^2}{\omega_i}\int\limits_0^{+\infty} dk \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n I'_\lambda(kr')A_n(k)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < r' < r_i \text{ para } \mathcal{M}_{int}\,. \\ \frac{q^2}{4\pi}\frac{L_{\omega_e}}{[r_2(r')]^2} - \frac{q^2}{\omega_e}\int\limits_0^{+\infty} dk \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n K'_\nu(kr_2(r'))B_n(k)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad r_i < r' \text{ para } \mathcal{M}_{ext}\,. \end{cases} \tag{402}$$

El primer término corresponde a la autofuerza del bulk de la geometría cónica donde se encuentra la carga (la autofuerza (370) en el espacio-tiempo de una cuerda cósmica), y la expansión es la contribución del término de la cáscara. La autofuerza se muestra graficada en las Figuras 10 y 11 en función del cociente r/r_i en cuatro fondos distintos. La Figura 10 corresponde a ejemplos de cáscaras cóncavas ($\kappa < 0$) construidas con materia ordinaria, mientras que la Figura 11 representa cáscaras convexas ($\kappa > 0$), construidas con materia exótica. Valores positivos de la autofuerza corresponden a fuerzas repulsivas desde el eje central de simetría del espaciotiempo. Para interpretar los resultados pensamos en un problema equivalente como se describió en la Sección 5.5 del Capítulo 5 y se introdujo en la Sección 6.1 anterior. El problema eléctrico equivalente consiste en una geometría sin cáscara pero con una densidad de carga eléctrica no gravitante en su lugar. Para la región interior planteamos el problema equivalente 1 en la variedad geodésicamente completa $\mathcal{M}_1$, y para la región exterior planteamos el problema 2 en la variedad geodésicamente completa $\mathcal{M}_2$. El potencial electrostático equivalente en cada variedad debe ser

$$\Phi_a(r_a,\varphi,z) = \Phi_a^{bulk}(r_a,\varphi,z) + \Phi^{\sigma_a}(r_a,\varphi,z)\,, \quad \text{con } 0 < r_a < +\infty\,, \tag{403}$$

para $a = 1$ o $a = 2$. El término del bulk es el generado por una carga puntual q, precisamente

$$\Phi_a^{bulk} = \Phi_\omega^{CS}\,, \tag{404}$$

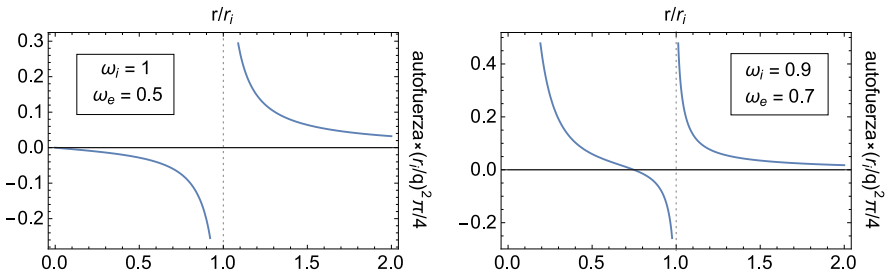
con $\omega = \omega_i$ (ω_e) si $a = 1$ (2). El término de la cáscara,

$$\Phi^{\sigma_a} = q\int\limits_0^{+\infty} dk\, Z(k,z)\sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\varphi)S_n^a(k)\begin{cases} I_\lambda(kr_<)K_\lambda(kr_>) & \text{si } a = 1\,, \\ I_\nu(kr_<)K_\nu(kr_>) & \text{si } a = 2\,, \end{cases}$$

$$S_n^a(k) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_i}\frac{A_n(k)}{K_\lambda(kr_i)}\,, & \lambda = \frac{n}{\omega_i} \quad \text{si } a = 1\,, \\ \frac{1}{\omega_e}\frac{B_n(k)}{I_\nu(kr_e)}\,, & \nu = \frac{n}{\omega_e} \quad \text{si } a = 2\,, \end{cases} \tag{405}$$

es la contribución de la densidad de carga eléctrica equivalente ubicada en r_i o r_e en el respectivo problema equivalente. En la expresión anterior $r_>$ y $r_<$ son el mayor y menor entre $\{r_1; r_i\}$ en el problema equivalente 1, o entre $\{r_2; r_e\}$ en el problema equivalente 2. Es evidente que $\Phi_1 \equiv \Phi_i$ en un entorno de la carga en $\mathcal{M}_{int} \subset \mathcal{M}_1$, y $\Phi_2 \equiv \Phi_e$ en el caso de $\mathcal{M}_{ext} \subset \mathcal{M}_2$.

Figura 10: Autofuerza adimensional en función de r/r_i en un espaciotiempo localmente plano con una cáscara cilíndrica de materia ordinaria y $\kappa < 0$. Valores negativos corresponden a una fuerza hacia el eje central de simetría. La cáscara repele a la carga.



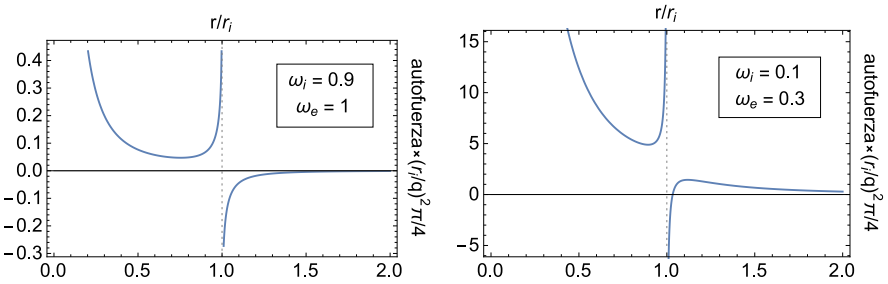
(a) $\omega_i = 1$ y $\omega_e = 0{,}5$. (b) $\omega_i = 0{,}9$ y $\omega_e = 0{,}7$.

La Figura 10 representa cáscaras de materia ordinaria, y el efecto que produce el término de la cáscara sobre q es siempre repulsivo. En 10a, $\omega_i = 1 > \omega_e$; la autofuerza en la región interior empuja a la carga hacia el eje donde se anula debido a la simetría cilíndrica (no hay singularidad cónica en $r = 0$). En esta región el término del bulk renormalizado es nulo y la única contribución surge por el término de la cáscara Φ^{σ_1}. En la región exterior $\mathcal{M}_{ext}$, ambos términos Φ^{σ_2} y el del bulk están presentes ($\omega_e \neq 1$) y son repulsivos. Con cáscaras de materia ordinaria asociamos un efecto repulsivo a la superficie con densidad de carga $\sigma_{1,2}$ tanto en el problema equivalente interior o exterior. Para el problema exterior, el comportamiento asintótico coincide con la repulsión que genera el término del bulk, es decir, por el déficit de ángulo global de la región (derivada del término Φ_R^{CS} con ω_e), veremos que Φ^{σ_2} es subdominante. En la Figura 10b, $1 > \omega_i > \omega_e$, $\kappa < 0$ y nuevamente la carga es repelida por la cáscara de materia ordinaria. La diferencia con el caso anterior es la repulsión divergente desde el eje en $\mathcal{M}_{int}$ debida a la cuerda cósmica en $r = 0$. Como consecuencia se encuentra un punto de equilibrio estable en una posición $r \in (0; r_i)$.

En la Figura 11 se ven cáscaras de materia exótica, con $\kappa > 0$, y el efecto de su distribución de carga equivalente sobre la carga q es siempre atractivo. La figura 11a tiene $\omega_i < \omega_e = 1$; en la región interior el efecto repulsivo del término del bulk se incrementa por la atracción hacia la cáscara. Del otro lado de la cáscara la geometría es Minkowski por lo que se tiene sólo el término asociado al campo que genera la cáscara. El efecto es atractivo, por lo que para radios $r > r_i$ la fuerza es negativa,

hacia el centro, en todas partes. Finalmente, la Figura 11b con $\omega_i < \omega_e < 1$, manifiesta el mismo comportamiento cualitativo del último desde el centro hasta las vecindades de la cáscara. Suficientemente lejos, en la región asintótica cónica del exterior, domina el efecto repulsivo del término del bulk sobre la carga. Como consecuencia se encuentra un punto de equilibrio inestable en algún $r > r_i$.

Figura 11: Autofuerza adimensional en función de r/r_i en un espaciotiempo localmente plano con una cáscara cilíndrica de materia exótica y $\kappa > 0$. La cáscara atrae a la carga.



(a) $\omega_i = 0{,}9$ y $\omega_e = 1$. (b) $\omega_i = 0{,}1$ y $\omega_e = 0{,}3$.

Podemos calcular explícitamente σ_a del problema equivalente usando (278),

$$\begin{aligned} \sigma_a(\varphi, z) &= \int_0^{+\infty} dk\, Z(k,z) \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\varphi)\, \sigma_n^a(k)\,, \\ \sigma_n^a(k) &= \tfrac{q}{4\pi} S_n^a(k) \begin{cases} \frac{1}{r_i}\,, & \text{si } a = 1\,, \\ \frac{1}{r_e}\,, & \text{si } a = 2\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{406}$$

La densidad σ es una construcción para el problema equivalente y no aparece en el problema original. A partir de σ se analiza con mayor claridad cómo la cáscara afecta a la carga q dependiendo de la distancia relativa y la relación con la curvatura extrínseca. Notar que los coeficientes de Fourier $\sigma_n(k)$ dependen de la posición de la carga r' como sucede para las cargas imágenes en problemas de electrostática habituales. La carga neta total Q_a en la superficie con σ_a es:

$$\begin{aligned} Q_a &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} \omega_i r_i d\varphi\, \sigma_a(\varphi, z) = 4\pi\omega_e r_e \lim_{k\to 0} \sigma_0^a(k) \\ &= q \begin{cases} \frac{\omega_i - \omega_e}{\omega_e} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a = 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{407}$$

Nuevamente, como en los problemas esféricos, podemos asociar una cantidad geométrica a la carga neta en la superficie de la cáscara en el problema equivalente interior:

$$Q_1 = -q \frac{\kappa}{\kappa_+}\,, \tag{408}$$

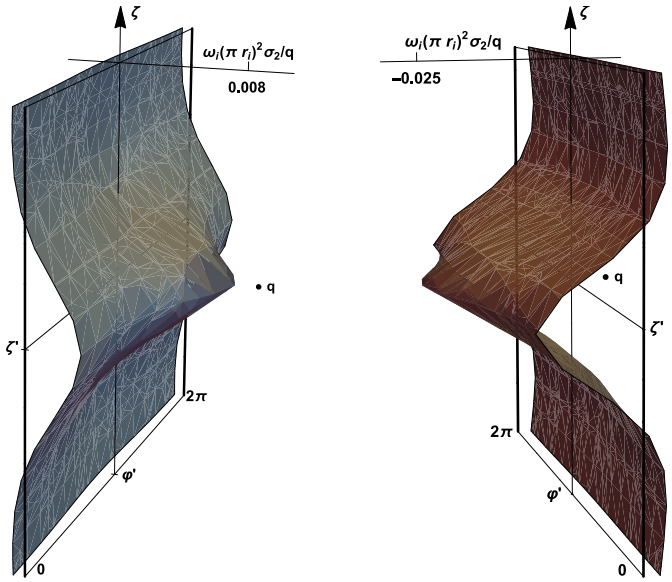
donde $\kappa_+ = \frac{1}{r_e}$ es la curvatura de la cáscara embebida en la variedad $\mathcal{M}_{ext}$, y el salto $\kappa = \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_i}$ coincide con la traza de la discontinuidad de la curvatura extrínseca $[K]$ de $\mathcal{H}$. Si bien la carga Q_1 no depende de la posición de q, la distribución en la superficie infinita del cilindro sí depende de r'. Al acercar la carga a la cáscara, σ_1 se intensifica en un pico central en (φ', z') hasta divergir en el límite $r \to r_i$. El análisis numérico de (406) muestra que el cociente $\sigma_1(\varphi, z)/q$ tiene el mismo signo que Q_1/q por toda la extensión de la superficie equivalente. Por otro lado para el problema exterior, σ_2 tiene carga neta nula como es de esperarse ya que q debe ser toda la carga vista desde el infinito espacial. A pesar de ello, $\sigma_2(\varphi, z)$ posee un pico en su distribución superficial con carga neta definida en un entorno de (φ', z'); para este caso se graficaron algunos ejemplos en la Figura 12. Allí se puede ver una representación tridimensional de σ_2 sobre la superficie $r_2 = r_e$ cerca de la posición $(\varphi' = \pi, z' = \zeta' r_i)$. Se consideran dos casos; 12a corresponde a una cáscara cóncava de materia ordinaria como en la Figura 10, y 12b corresponde a una cáscara convexa de materia exótica como las de en la Figura 11. El plano vertical de cada figura representa una porción de la superficie cilíndrica donde se entiende la identificación de $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$. La distribución de densidad del lado derecho del plano representa valores positivos del cociente σ_2/q. En ambos casos se ve un pico centrado en (φ', z'). El pico tiene el mismo signo que q si $\kappa < 0$, y el opuesto si $\kappa > 0$. La concentración de *densidad de carga imagen* en el centro de la superficie es la responsable del efecto dominante, repulsivo $(\kappa < 0)$ o atractivo $(\kappa > 0)$ sobre la autofuerza, cuando la carga está suficientemente cerca de la cáscara en el problema exterior. Cuando la carga de aleja, la distribución imagen sobre la superficie infinita se vuelve cada vez más homogénea y tiende a cero.

En general, la función $\sigma_a(\varphi, z)$ está bien definida por construcción excepto en el límite $r' \to r_i$; se puede ver que

$$\lim_{r' \to r_i} \frac{r_i^2}{q} \sigma_a(\varphi', z') \to \begin{cases} +\infty\,, & \text{si } \kappa < 0 \text{ (materia ordinaria)}\,, \\ -\infty\,, & \text{si } \kappa > 0 \text{ (materia exótica)}\,, \end{cases} \tag{409}$$

que confirma en general la relación entre el salto de la curvatura extrínseca y la densidad de carga equivalente σ_a del potencial de la cáscara de cada lado. Volviendo al problema original en el espaciotiempo localmente plano con una cáscara cilíndrica de materia gravitante, los efectos de la cáscara cilíndrica sobre la autofuerza se pueden resumir de la siguiente manera: una cáscara tipo-tiempo $\mathcal{H}$ convexa $(\kappa > 0)$ o cóncava $(\kappa < 0)$ enfoca o desenfoca las líneas de campo eléctrico en la región entre la carga q y la superficie del a cáscara, contribuyendo con una efecto atractivo o repulsivo sobre la autofuerza, respectivamente.

Figura 12: Representación tridimensional de la densidad de carga superficial imagen σ_2 para dos cáscaras diferentes. El plano vertical corresponde a la superficie espacial de $\partial\mathcal{M}_{ext}$ en coordenadas $(\varphi, \zeta = z/r_i)$ para el problema equivalente de la región exterior. Valores positivos de $\sigma_2(\varphi,\zeta) \times \omega_i(r_i\pi)^2/q$ aparecen a la derecha del plano en ambos casos. Se muestra esquemáticamente la carga ubicada en $(\varphi' = \pi, \zeta')$ y $r_2' = r_i + r_e$ $(r' = 2r_i)$.



(a) Densidad de carga equivalente para una cáscara cilíndrica de materia ordinaria ($\omega_i = 1$, $\omega_e = 0{,}9$).

(b) Densidad de carga equivalente para una cáscara cilíndrica de materia exótica ($\omega_i = 0{,}5$, $\omega_e = 1$).

6.2.2 *Tipo II: Agujeros de gusano*

Consideramos espaciotiempos Tipo II con $\mathcal{M} = \mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+$, construidos con dos métricas cónicas de elementos de línea

$$ds^2 = \quad -dt^2 + dr_1^2 + \omega_-^2 r_1^2 d\theta^2 + dz^2\,, \tag{410}$$

$$ds^2 = \quad -dt^2 + dr_2^2 + \omega_+^2 r_2^2 d\theta^2 + dz^2, \tag{411}$$

unidas en una cáscara cilíndrica $\mathcal{H} = \partial\mathcal{M}_- = \partial\mathcal{M}_+$, donde

$$\mathcal{M}_- = \{x_1^\alpha \,/\, r_- \leq r_1 \leq +\infty\}, \quad \mathcal{M}_+ = \{x_2^\alpha \,/\, r_+ \leq r_2 \leq -\infty\}\,. \tag{412}$$

El pegado en la hipersuperficie $\mathcal{H}$ determina la condición de juntura $r_-\,\omega_- = r_+\,\omega_+$ a partir de la primera forma fundamental. La expansión para el potencial electrostático de una carga puntual q en $\mathcal{M}$ es nuevamente

$$\Phi = q \int_0^{+\infty} dk\, Z(k,z) \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\varphi) R_n(k,r)\,,$$

donde se usa colectivamente la coordenada r. El potencial satisface la versión homogénea de la ecuación (371) en las regiones libres de fuentes, con funciones radiales generales

$$R_n(k,r) = C_n(k)I_\upsilon(kr) + D_n(k)K_\upsilon(kr)\,, \tag{413}$$

de índice de Bessel

$$\upsilon = \begin{cases} \lambda = n/\omega_- & \text{en } \mathcal{M}_- \\ \nu = n/\omega_+ & \text{en } \mathcal{M}_+ \end{cases} \tag{414}$$

y coeficientes a determinar por las condiciones de contorno. En general, separamos el problema de cada subvariedad para escribir el potencial de la siguiente manera

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_- & \text{en } \mathcal{M}_- \\ \Phi_+ & \text{en } \mathcal{M}_+ \end{cases} \tag{415}$$

Para geometrías Tipo II resolvemos con la carga en $r_2' > r_+$ ubicada en $\mathcal{M}_+$, y el otro caso es análogo cambiando los parámetros $+$ por los $-$. Quedan 3 zonas delimitadas por la garganta y $r_2 = r_2'$, y 6 coeficientes a determinar con las 6 condiciones de contorno para esta clase de problemas: 1. el comportamiento asintótico del potencial en la región $\mathcal{M}_-$, y 2. en $\mathcal{M}_+$, 3. la continuidad del potencial en todo el espacio, en particular; sobre la posición de la fuente, y 4. sobre la cáscara, finalmente en cuanto al salto; 5. la inhomogeneidad sobre la posición de la carga puntual q y, 6. asegurar que no haya fuentes eléctricas sobre la hipersuperficie de la cáscara. La superposición que planteamos para el potencial es

$$\begin{aligned} \Phi_- &= \Phi^{\sigma_-} && \text{en } \mathcal{M}_- \\ \Phi_+ &= \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma_+} && \text{en } \mathcal{M}_+ \end{aligned} \tag{416}$$

con las funciones radiales de cada término

$$R^{\sigma_-} = \frac{1}{\omega_+} K_\lambda(kr_1)A_n(k)\,, \tag{417}$$

$$R^{bulk} = \frac{1}{\omega_+} I_\nu(kr_<)K_\nu(kr_>)\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_2, r_2'\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_2, r_2'\} \end{aligned} \tag{418}$$

$$R^{\sigma_+} = \frac{1}{\omega_+} K_\nu(kr_2)B_n(k)\,. \tag{419}$$

En las últimas expresiones se omitieron los índices n y argumentos k de las funciones radiales del lado izquierdo. El potencial Φ es continuo por construcción y satisface las condiciones asintóticas en cada subvariedad, así como el salto a través de la fuente. Los coeficientes $A_n(k)$ y $B_n(k)$

se determinan a partir de la continuidad del potencial y el campo sobre la cáscara en $r = 0$, en este caso quedan expresadas como

$$R^{\sigma_-}\Big|_{r_1=r_-} = \left(R^{bulk} + R^{\sigma_+}\right)\Big|_{r_2=r_+} , \tag{420}$$

$$-\frac{\partial}{\partial r_1} R^{\sigma_-}\Big|_{r_1=r_-} = \frac{\partial}{\partial r_2}\left(R^{bulk} + R^{\sigma_+}\right)\Big|_{r_2=r_+} , \tag{421}$$

respectivamente, y finalmente se obtiene

$$A_n(k) = -\frac{K_\nu(kr_2')}{r_+}\frac{1}{K_\lambda'(kr_-)K_\nu(kr_+) + K_\lambda(kr_-)K_\nu'(kr_+)} \tag{422}$$

$$B_n(k) = -K_\nu(kr_2')\frac{K_\lambda'(kr_-)I_\nu(kr_+) + K_\lambda(kr_-)I_\nu'(kr_+)}{K_\lambda'(kr_-)K_\nu(kr_+) + K_\lambda(kr_-)K_\nu'(kr_+)} . \tag{423}$$

Teniendo en cuenta los resultados de la primera parte de la Sección 6.2, el potencial regular para la carga q en $\mathcal{M}_+$ es

$$\Phi_R = \frac{q}{4\pi}\frac{L_{\omega_+}}{r_2'}\left(2 - \ln\frac{r_2}{r_2'}\right) + \frac{q}{\omega_+}\int_0^{+\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_\nu(kr_2) B_n(k) , \tag{424}$$

para cualquier posición frente a la garganta del agujero de gusano cilíndrico. Su energía electrostática es $U_{elec} = \frac{q}{2}\Phi_R|_{r_2=r_2'}$ y la autofuerza en base ortonormal queda explícitamente

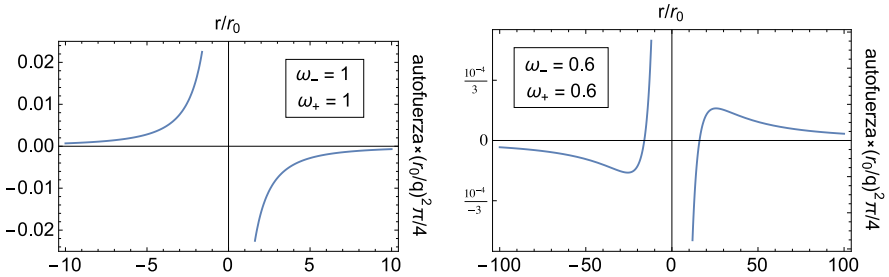
$$\mathbf{f}^{\hat{r}} = \frac{q^2}{4\pi}\frac{L_{\omega_+}}{r_2'^2} - \frac{q^2}{\omega_+}\int_0^{+\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_\nu'(kr_2') B_n(k) , \quad r_2' \in \mathcal{M}_+ . \tag{425}$$

Para representar la autofuerza gráficamente definimos la coordenada global $r \in (-\infty; +\infty)$, tal que la posición de la carga es

$$\begin{aligned} r_1' &= -r + r_- , \text{ si } r \in (-\infty; 0] , \\ r_2' &= r + r_+ , \text{ si } r \in [0; +\infty) . \end{aligned} \tag{426}$$

A continuación, en las figuras, se usa la coordenada radial adimensionalizada r/r_0, donde $r_0 = \frac{r_+ + r_-}{2}$. Los primeros ejemplos, en la Figura 13, corresponden a agujeros de gusano simétricos a través de la garganta cilíndrica. El gráfico 13a muestra la fuerza sobre la carga en el caso de dos regiones de Minkowski conectadas por la garganta cilíndrica de materia exótica. El término del bulk renormalizado es nulo por lo que la fuerza sobre q es exclusivamente debida al efecto atractivo de la cáscara de materia exótica. El segundo gráfico 13b, correspondiente a un agujero cónico con parámetro $\omega = 0{,}6$ en ambas regiones, muestra cómo compite el efecto atractivo de la garganta de curvatura $\kappa_{wh} > 0$ con el término repulsivo del bulk debido al déficit de ángulo. Asintóticamente domina la repulsión de la geometría cónica del bulk, esto es

Figura 13: Autofuerza adimensional sobre una carga q en función de r/r_0 en un agujero de gusano cilíndrico y simétrico a través de la garganta. La cáscara de materia exótica y $\kappa_{wh} > 0$ produce un efecto atractivo.



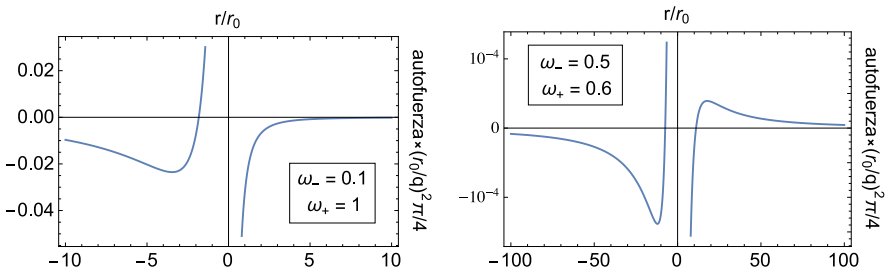
(a) Agujero de gusano con métricas de Minkowski ($\omega_\pm = 1$).

(b) Agujero de gusano cónico con $\omega_\pm = 0{,}6$ y déficit de ángulo $2\pi(1-\omega_\pm)$.

la autofuerza para la carga en la geometría de una cuerda cósmica de orden $\sim r'^{-2}$.

Por último, en la Figura 14 se muestran casos asimétricos. Se observa una atracción hacia la cáscara para posiciones de la carga q suficientemente cercanas, en todos los casos. Asintóticamente el término del bulk con el efecto del déficit de ángulo global de la región es dominante en todas las configuraciones. En el ejemplo 14a, la región $\mathcal{M}_+$ es plana por lo que la fuerza es consecuencia del término de la cáscara. En esa región la fuerza sobre q es atractiva hacia la garganta. En la región $\mathcal{M}_-$, así como en el ejemplo 14b, al alejar la carga de la garganta el efecto de la cáscara es subdominante frente al déficit de ángulo de la geometría.

Figura 14: Autofuerza sobre una carga q en función de r/r_0 en agujeros de gusano cilíndricos con regiones cónicas de diferente déficit de ángulo.



(a) Asimétrico con métrica de Minkowski en la región $\mathcal{M}_+$.

(b) Asimétrico con $\omega_- = 0{,}5$ y $\omega_+ = 0{,}6$.

Para completar el análisis pensamos en el problema eléctrico equivalente en una geometría sin cáscara pero con una densidad de carga eléctrica no gravitante. Para la carga en la región $\mathcal{M}_+$ planteamos el

problema 2 en la variedad geodésicamente completa $\mathcal{M}_2$. El potencial electrostático equivalente es

$$\Phi_2(r_2,\varphi,z) = \Phi_2^{bulk}(r_2,\varphi,z) + \Phi^{\sigma_2}(r_2,\varphi,z)\,, \quad 0 < r_2 < +\infty\,. \tag{427}$$

El término del bulk es el generado por una carga puntual q, precisamente

$$\Phi_2^{bulk}(r_2,\varphi,z) = \Phi_{\omega_+}^{CS}(r_2,\varphi,z)\,, \tag{428}$$

con el parámetro ω_+. El término de la cáscara Φ^{σ_+} debe ser idéntico a Φ^{σ_2} del problema equivalente en la región donde se encuentra q, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \Phi^{\sigma_2} &= q \int_0^{+\infty} dk\, Z(k,z) \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\varphi) S_2(n,k) I_\nu(kr_<) K_\nu(kr_>)\,, \\ S_2(n,k) &= \tfrac{1}{\omega_+} \tfrac{B_n(k)}{I_\nu(kr_+)}\,, \qquad \begin{aligned} r_< &= \text{mín}\{r_2, r_2'\} \\ r_> &= \text{máx}\{r_2, r_2'\} \end{aligned} \end{aligned} \tag{429}$$

Con esta construcción podemos interpretar los resultados de una carga frente a la cáscara de un agujero de gusano cilíndrico en una geometría cónica mediante la densidad de carga superficial efectiva que interactúa con la partícula estática. Siguiendo el mismo procedimiento de la Sección 6.1.1 construimos la densidad de carga superficial del problema equivalente. Usamos (429) y el desarrollo de la sección 5.5 para obtener

$$\begin{aligned} \sigma_2(\varphi,z) &= \int_0^{+\infty} dk\, Z(k,z) \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\varphi)\, \sigma_n(k)\,, \\ \sigma_n(k) &= \tfrac{q}{4\pi} \tfrac{S_2(n,k)}{r_+}\,. \end{aligned} \tag{430}$$

Análogamente, se obtiene la densidad superficial de carga eléctrica para el problema equivalente cuando la partícula se encuentra en la región $\mathcal{M}_-$. Integrando como en (407) obtenemos la carga total imagen frente a una cáscara cilíndrica en geometrías cónicas Tipo II

$$\begin{aligned} \frac{Q_{wh}^{\mp}}{q} &= -\frac{\omega_\pm}{\omega_- + \omega_+} \\ &= -\frac{\kappa_\pm}{\kappa_{wh}}\,, \end{aligned} \tag{431}$$

con q ubicada en $\mathcal{M}_\mp$ respectivamente, donde $\kappa_\pm = \frac{1}{r_\pm}$ es la curvatura principal espacial de la cáscara embebida en $\mathcal{M}_\pm$ y $\kappa_{wh} > 0$ la discontinuidad de la curvatura de la cáscara que en estas geometrías equivale al salto de la curvatura extrínseca. La carga neta equivalente de un agujero de gusano cilíndrico Tipo II no depende de la posición de la carga puntual y sólo depende de las curvaturas de la cáscara. Al igual que en los agujeros de gusano esféricos, el signo de Q_{wh}/q es siempre negativo. La carga neta caracteriza el flujo que se pierde o se escapa

por la garganta del agujero de gusano hacia la otra subvariedad. Por ejemplo, si la carga está en $\mathcal{M}_+$ el flujo hacia el infinito de su región es

$$\oint_{\mathbf{x}\to\infty} -\nabla\Phi_+ dS = 4\pi\left(Q^+_{wh} + q\right) \tag{432}$$

mientras que $-4\pi Q^+_{wh}$ se escapa por la región asintótica de $\mathcal{M}_-$. Cuando la carga q se ubica sobre la garganta de un agujero de gusano Tipo II simétrico, el flujo es $2\pi q$ en cada región asintótica. Por otro lado, se ve de (430) que la distribución σ_2 sí varía con la distancia de la carga puntual a la garganta. Del análisis numérico se puede chequear que la distribución se intensifica en un pico central como en el caso exterior de las geometrías Tipo I (ver la Figura 12), y con $r' \to r_e$ el pico diverge. En contraparte, el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel K_ν ($\sim e^{-kr'}$) que aparecen en σ_2, hace que la concentración de carga imagen se disuelva rápidamente sobre la superficie cuando la carga q se encuentra lejos de la cáscara. Con la partícula lejos de la garganta, Q_{wh} actúa como una carga finita distribuida homogéneamente, y de forma oscilante, en la superficie infinita de la cáscara equivalente. Por esa razón, como se ve en todos los ejemplos cilíndricos graficados, la autofuerza asintótica dominante es de orden $\sim r'^{-2}$, debido al defecto de ángulo global en una geometría cónica (término del bulk). Los casos de agujeros de gusano cilíndricos con métricas de Minkowski (asintóticamente planos), donde el término del bulk renormalizado es nulo, son los únicos en donde la atracción a la garganta se manifiesta para cualquier posición de la carga q. Notar que en los espaciotiempos cilíndricos Tipo I y Tipo II la geometría es localmente plana y la autofuerza es la única fuerza que actúa sobre la partícula.

Parte III

CONCLUSIONES

A continuación se resume el trabajo realizado, los resultados obtenidos y se plantean las perspectivas para continuar en esta línea de investigación.

7 CONCLUSIONES

Se caracterizaron propiedades globales en geometrías localmente indistinguibles mediante la autointeracción electromagnética de una carga puntual q. Para ello se plantearon las ecuaciones de Maxwell en espaciotiempos con diferente topología y una cáscara de materia, y se analizó el campo y la autofuerza de la carga eléctrica a partir de la curvatura espacial de la cáscara. La fuerza eléctrica sobre q, medible por un observador local, se calculó la partir de un potencial regular en la posición de la partícula obtenido con la descomposición singular de Detweiler-Whiting.

Para estudiar estas propiedades se planteó el problema eléctrico en geometrías de Schwarzschild y geometrías cónicas con una cáscara de materia. Las geometrías con cáscaras permiten, entre otras aplicaciones, modelar espaciotiempos con un fondo simplificado donde parte de la información geométrica queda condensada en el salto del tensor de curvatura extrínseca $[K_{ij}]$ sobre la hipersuperficie. Los espaciotiempos se construyeron usando el formalismo de Darmois-Sen-Lanczos-Israel, pegando diferentes subvariedades cuadridimensionales, $\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$, sobre una hipersuperficie tipo-tiempo de unión $\mathcal{H}$. Las variedades construidas $\mathcal{M} = \mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+$ son geodésicamente completas, y poseen una o dos regiones asintóticas.

Las variedades Tipo I se caracterizan por una cáscara que separa una región interior de otra exterior. Las topologías Tipo II tienen una cáscara que satisface la condición de *flare-out*, por lo que se las denomina gargantas de agujeros de gusano. Este tipo de garganta conecta dos regiones asintóticas, es infinitamente corta y se caracteriza por un fluido exótico. En el caso de cáscaras que unen un interior a un exterior, la materia puede ser ordinaria o exótica dependiendo de las curvaturas medias principales $\kappa_\mp$ de la parte espacial de la superficie en $\mathcal{H}$ embebida en $\mathcal{M}_\mp$ respectivamente. La relación entre la densidad de energía Σ de la cáscara y el salto de la curvatura espacial es: $\kappa = -8\pi\Sigma$. En topologías Tipo I se tiene que $\kappa = \kappa_+ - \kappa_-$, mientras que en las Tipo II $\kappa_{wh} = \kappa_+ + \kappa_-$. Las hipersuperficies esféricas y cilíndricas utilizadas tienen $\kappa_\pm > 0$ y uniforme, por lo que κ_{wh} es siempre positiva.

7.1 CONSTRUCCIÓN Y ESTABILIDAD DE ESPACIOTIEMPOS CON TOPOLOGÍA NO TRIVIAL

La construcción de las geometrías con cáscaras que se utilizaron para abordar la hipótesis central de este trabajo motivó el desarrollo de un análisis de estabilidad para cáscaras en vacío con geometrías esféricas o cilíndricas. Si bien el formalismo es conocido en la literatura, la mayoría de los trabajos precedentes utiliza cáscaras estáticas o estudia su dinámica en geometrías que tienen un pegado casi trivial, por ejemplo, casos esféricos o agujeros de gusano simétricos a través de la garganta. El análisis de estabilidad se realizó suponiendo perturbaciones de la posición estática de la cáscara que preserven la simetría y la staticidad de las métricas del bulk que la rodean. El criterio de estabilidad utilizado consiste en definir un potencial para el radio r_0 de la cáscara en función de la densidad de energía superficial Σ y las presiones p_A, y finalmente hacer un análisis linealizado. Se adoptaron ecuaciones de estado lineales en función de los parámetros $\eta_A = p'_A(r_0)/\Sigma'(r_0)$. Este procedimiento se desarrolló formalmente y en general para incluir geometrías con simetría esférica o cilíndrica. Finalmente se aplicó a las métricas de interés; cónicas y de Schwarzschild (también se incluyeron casos con métricas de Levi-Civita), para espaciotiempos con una o dos regiones asintóticas e incluyendo casos asimétricos.

El análisis en geometrías cónicas para una cáscara que separa una región interior, con déficit de ángulo $2\pi(1-\omega_i)$, de una región exterior, con déficit de ángulo $2\pi(1-\omega_e)$, muestra que la estabilidad es independiente de los parámetros ω_i, ω_e, y del radio estático de la cáscara. La estabilidad depende únicamente del parámetro de la ecuación de estado lineal, y se reduce a la positividad del coeficiente η_φ de la dirección angular. En el caso de agujeros de gusano con gargantas cilíndricas que conectan dos métricas cónicas, en general con diferente déficit de ángulo, la condición de estabilidad se reduce a pedir $\eta_\varphi < 0$.

Las geometrías de Schwarzschild con cáscaras han sido estudiadas en la literatura y analizadas bajo diferentes enfoques. Se construyeron cáscaras con radios $r_0 > 2m_{1,2}$ para evitar que estén por dentro del horizonte. Para destacar, bajo las hipótesis del formalismo adoptado, se obtuvo que las geometrías Tipo I son estables para algún rango dentro del intervalo $\eta \in (0;1)$ cuando el radio de la cáscara está por encima de la órbita fotónica de ambas regiones, esto es $r_0 > 3m_{1,2}$. Para espaciotiempos Tipo II, encontramos la inestabilidad crítica para el radio $r_0 = 3m_1 = 3m_2$, en agujeros de gusano simétricos. Este problema es conocido en la literatura, y actualmente se sabe que con otras ecuaciones de estado se puede conseguir configuraciones estables para una cáscara sobre la órbita fotónica. Con la ecuación de estado lineal que se utilizó en este trabajo podemos eliminar la inestabilidad crítica al tomar $m_1 \neq m_2$.

7.2 CARACTERIZACIÓN DE PROPIEDADES ELÉCTRICAS EN FUNCIÓN DE LA CURVATURA Y TOPOLOGÍA

Para estudiar la autointeracción se interpretó el potencial electrostático en la región donde se encuentra la carga q como la superposición de un término del *bulk* más un término de la *cáscara*; $\Phi = \Phi^{bulk} + \Phi^{\sigma}$. El *potencial del bulk* se definió como una parte inhomogénea cuya fuente es la carga q en una geometría sin cáscara. El término Φ^{σ} queda definido a partir de Φ y Φ^{bulk}, y es regular en la posición de la partícula. El término de la cáscara codifica cómo se distorsiona el campo eléctrico que genera la fuente en el bulk y está asociado a la curvatura de la cáscara y la topología del espaciotiempo. Con esta separación la regularización del potencial en la posición de la carga r' se efectúa sólo sobre Φ^{bulk}, y el potencial renormalizado es $\Phi_{ren} = \Phi_R^{bulk}|_{r'} + \Phi^{\sigma}|_{r'}$.

Se estableció que Φ, en $\mathcal{M}_{\pm}$, se puede interpretar mediante un problema equivalente; correspondiente a un problema eléctrico planteado en la variedad completa $\mathcal{M}_{1,2}$, respectivamente. En el problema equivalente se reemplaza la cáscara de materia por una lámina de densidad superficial de carga no gravitante. La geometría e incluso la topología del espaciotiempo se modifican globalmente, pero en la región de interés $\mathcal{M}_{\pm} \in \mathcal{M}_{1,2}$ se tiene el mismo potencial, y los efectos eléctricos sobre la carga q son equivalentes por construcción a los del problema original. Mediante esta interpretación se pueden analizar con mayor claridad los efectos del término Φ^{σ} para el campo en la subvariedad y sobre q.

En casos esféricos, la carga neta imagen Q de la densidad de carga equivalente se interpreta en una cáscara acotada. Esta carga neta corresponde a la carga monopolar del potencial de la cáscara que se ve desde el bulk. En los casos cilíndricos se tiene una cáscara no acotada en donde se puede calcular e interpretar la carga neta y los efectos de la densidad equivalente sobre q. En los espaciotiempos con dos regiones asintóticas y cáscaras de materia exótica, el valor absoluto de la carga neta Q_{wh} está asociado al flujo de campo eléctrico que se pierde por la garganta hacia la otra región asintótica, donde no se encuentra la carga q. El signo de Q_{wh} es siempre opuesto al de la carga q aportando un efecto atractivo para la autofuerza, hacia la garganta, al menos asintóticamente. La carga neta imagen se caracteriza por las curvaturas espaciales de la cáscara.

En geometrías de Schwarzschild Tipo I, el potencial Φ^{σ} enfoca o desenfoca las líneas de campo en la región entre la carga q y la superficie, dependiendo exclusivamente del tipo de materia sobre la cáscara. En términos geométricos, una cáscara con curvatura $\kappa < 0$ repele a la carga, y una cáscara con $\kappa > 0$ la atrae. Este efecto se manifiesta intensamente cerca de la superficie y se vuelve divergente cuando la posición r' de la partícula tiende a la posición r_0 de la cáscara.

En un bulk de Schwarzschild la autofuerza que se deriva del potencial regularizado Φ_R^{bulk} repele a la carga hacia afuera desde el centro. Este

potencial se conoce en la literatura relativa a agujeros negros como el término de Linet, el campo que genera es $q\frac{m}{r'}\frac{1}{r^2}$, por lo que en términos efectivos para la autofuerza es $\sim r'^{-3}$. Con la carga en el exterior de una geometría de Schwarzschild Tipo I, como Φ^σ no presenta carga neta, la autofuerza es siempre repulsiva suficientemente lejos de la cáscara sin importar su curvatura. En el caso particular de un exterior de Minkowski sólo está presente el potencial de la cáscara, por lo tanto la cáscara de materia exótica produce una autofuerza atractiva en todas partes y que decae como $\sim r'^{-5}$ asintóticamente. Con la carga en el interior, la cáscara representa una superficie con carga eléctrica neta $Q_1 = -q\frac{\kappa}{\kappa_+}$ en el problema equivalente, pero esta carga total no aporta a la fuerza. Se la puede interpretar distribuida uniformemente en una superficie esférica exterior por lo que es irrelevante. En los problemas con cáscaras de materia ordinaria se encuentra una posición de equilibrio estable para la carga q en alguna posición interior debido a la competencia entre la repulsión desde el centro del término de Linet y la repulsión desde la cáscara con $\kappa < 0$. Tanto para la carga en $\mathcal{M}_{int}$ o $\mathcal{M}_{ext}$, los efectos de la cáscara se manifiestan con multipolos superiores al monopolar.

Para geometrías de Schwarzschild Tipo II la autofuerza es atractiva para cualquier posición de la carga si la garganta se ubica en $r_0 \gtrsim 3\frac{m_1+m_2}{2}$. Se encontró que si la cáscara está aproximadamente por debajo de las órbitas fotónicas del bulk la carga es repelida en posiciones suficientemente cercanas a la garganta. La carga monopolar de Φ^σ es $Q^{\pm}_{wh} = -q\frac{r_0}{r'}\frac{\kappa_\mp}{\kappa_{wh}}$, de signo opuesto a q, por lo que su efecto sobre la autofuerza es atractivo. En cuanto a la autointeracción lejos de la cáscara, la autofuerza resulta atractiva hacia la garganta en casi todas las configuraciones. Existen excepciones en un rango estrecho de valores de los parámetros de la geometría; por ejemplo, con q en $\mathcal{M}_+$ de masa m_2, pueden ocurrir si se tiene $2m_2 < 2m_1 < r_0 < 2{,}2\,m_1$, una garganta muy cercana al radio del horizonte. El término de Linet en estos casos resulta dominante y la autofuerza es repulsiva asintóticamente. La posibilidad de una autofuerza asintótica repulsiva en los casos excepcionales, así como el efecto repulsivo sobre una carga cercana a una garganta por debajo de las órbitas fotónicas de Schwarzschild, contrastan con otros resultados de autofuerzas electrostáticas en agujeros de gusano esféricos [51, 54, 55, 114]. Más allá de las configuraciones excepcionales, la carga monopolar imagen Q_{wh} del potencial de la cáscara es más intensa que la carga del término de Linet y la autofuerza resulta atractiva asintóticamente ($\sim r'^{-3}$). Este resultado, distingue el espaciotiempo de un agujero de gusano respecto a la geometría localmente idéntica, pero topológicamente distinta, de un agujero negro de Schwarzschild. Los casos con autofuerza eléctrica repulsiva cerca de la garganta y atracción asintótica dan lugar a un equilibrio estable para alguna posición radial.

En cuanto a geometrías con simetría cilíndrica, se usaron métricas cónicas con diferente déficit de ángulo global en cada región. Al tratarse de espaciotiempos localmente planos en le bulk, la fuerza sobre la partícula estática con carga q es exclusivamente debida a la autointeracción eléctrica. En las variedades Tipo I se pudo ver que una cáscara convexa $\kappa > 0$, o cóncava $\kappa < 0$, enfoca o desenfoca las líneas de campo eléctrico en la región entre la carga q y la superficie contribuyendo con un efecto atractivo o repulsivo sobre la autofuerza, respectivamente. Este efecto se manifiesta intensamente en las cercanías de la cáscara donde domina en todos los casos al igual que en los problemas esféricos Tipo I. En los problemas exteriores, la carga neta equivalente de la cáscara es nula, por lo que los efectos se manifiestan con multipolos superiores. El potencial regular del bulk Φ_R^{bulk} genera una repulsión que domina lejos de la cáscara, y en términos efectivos para la autofuerza es $\sim r'^{-2}$, cuando $\omega_e \neq 1$. En el caso de un exterior de Minkowski ($\kappa > 0$) se tiene que $\Phi_R^{bulk} = 0$ para la carga q, y la autofuerza es atractiva en toda la región debida puramente al efecto de la cáscara cilíndrica de materia exótica. En los problemas interiores la cáscara representa una superficie con carga neta $Q_1 = -q\frac{\kappa}{\kappa_+}$, análoga a lo que se encontró en los casos esféricos estudiados. El efecto repulsivo de la cuerda cósmica es dominante cerca del eje y el efecto de la curvatura κ es dominante al aproximarse a la cáscara. Si $\kappa < 0$ existen posiciones de equilibrio estable para la carga q en el interior. En el caso de ubicarse en un interior de Minkowski ($\kappa < 0$) el potencial Φ_R^{bulk} es nulo para la carga q y la cáscara de materia ordinaria repele a la carga, excepto sobre el eje donde la fuerza es nula.

Finalmente en las geometrías cónicas Tipo II, la cáscara de materia exótica ($\kappa_{wh} > 0$) enfoca las líneas de campo de la carga q hacia la garganta aportando un efecto atractivo. En términos del problema equivalente $Q_{wh}^{\pm} = -q\frac{\kappa_{\mp}}{\kappa_{wh}}$ no depende de la posición de la carga y se puede interpretar como una carga finita distribuida en una superficie cilíndrica infinita. Su efecto sobre la autofuerza, así como el del resto de la distribución de carga imagen representada en Φ^{σ}, se diluye rápidamente al alejar la carga q de la garganta. En los agujeros de gusano con métricas cónicas la fuerza total asintótica es repulsiva como en las geometrías Tipo I, debido al defecto de ángulo global de la región. Cerca de la cáscara de materia exótica domina la fuerza atractiva derivada de Φ^{σ}. En los casos de agujeros de gusano cilíndricos con la carga q en una región de Minkowski, la fuerza es atractiva hacia la garganta en toda la región.

Para concluir es importante hacer un comentario respecto a el principio de equivalencia en función de los resultados obtenidos. El principio de equivalencia no se satisface en problemas de autointeracción, es decir, dos partículas idénticas en geometrías localmente indistinguibles experimentan fuerzas distintas. Estas conclusiones están sujetas a que

las geometrías son fondos fijos dadas por soluciones a las ecuaciones de Einstein en ausencia de la partícula de prueba. Cuando se consideran correcciones de orden superior a la solución del espaciotiempo, las geometrías dejan de ser idénticas en un entorno de las respectivas partículas. El campo que la carga acopla a la geometría será diferente en los casos donde haya diferencias globales. Por lo tanto, el entorno de la partícula deja de ser el mismo si se consideran las correcciones a la métrica de orden q^2 provenientes del respectivo tensor de energía-momento. Con la modificaciones locales de la geometría habrá también una fuerza que escaléa como q^2M debida a la masa de la partícula, y también será diferente en cada caso.

Las soluciones a las ecuaciones de Maxwell para una carga puntual en un espacio curvo de fondo dependen de la curvatura y las condiciones globales de la geometría. Los efectos de un espaciotiempo diferente al de Minkowski sobre la teoría de campos son difíciles de interpretar y resolver. Utilizar cáscaras para obtener una geometría más sencilla es una herramienta que permite abordar la resolución y la interpretación de esta clase de problemas. El formalismo de cáscaras se ha utilizado para plantear problemas eléctricos (y de autofuerza electromagnética), así como problemas para el campo escalar acoplado a la curvatura y otras teorías de campos en espaciotiempos curvos. Resulta especialmente útil para desarrollarlas en geometrías con agujeros de gusano. Modificar la topología con estas construcciones produce consecuencias adicionales sobre las soluciones a las ecuaciones de onda de la teoría por los efectos a distancia de la curvatura y los cambios globales. Hemos visto que las cáscaras pueden interpretarse como fuentes de un potencial que deflecta el campo eléctrico que se espera por la carga puntual q en el bulk de una región suave. Esta interpretación es consecuencia de tener un salto de curvatura condensada en una hipersuperficie del espaciotiempo. En cuanto a la autofuerza, en general, un salto de curvatura espacial positiva (y materia exótica) aporta un efecto atractivo sobre una carga eléctrica puntual, mientras que una curvatura negativa (materia ordinaria) aporta una repulsión. Se encontraron excepciones con cáscaras exóticas en agujeros de gusano tipo Schwarzschild con gargantas por debajo de las órbitas fotónicas, en esos casos aparece una autofuerza repulsiva sobre la carga suficientemente cerca de la cáscara. En agujeros de gusano con dos regiones asintóticas se puede interpretar a la garganta en el problema eléctrico a partir de un potencial que altera el flujo total sobre la región asintótica donde se encuentra la carga q. Los resultados que asocian cargas equivalentes a propiedades geométricas y topológicas del espacio motivan a preguntarse si se pueden encontrar resultados más generales, tanto electromagnéticos como para otras teorías de campos sobre fondos fijos con cáscaras. Por ejemplo, obtener una relación formal entre el salto de la curvatura y los siguientes multipolos del *potencial de la cáscara*. Las consecuencias de la autointeracción en

topologías no triviales es una área poco desarrollada sobre todo en sistemas en movimiento. Sería relevante abordar el problema dinámico y caracterizar en función de la curvatura la autointeracción de una carga en movimiento y analizar qué rol juegan los efectos disipativos.

Parte IV

APÉNDICE

El Apéndice está dividido en dos. En el Apéndice A se desarrolla el análisis de estabilidad de cáscaras cilíndricas y esféricas como las construidas en el Capítulo 4, y se implementa en geometrías de Levi-Civita y los casos de Schwarzschild de interés. En el Apéndice B se presenta un cálculo auxiliar donde se resuma la serie del potencial electrostático de una carga puntual q en la métrica de Schwarzschild (referido a la ecuación (302) de la Sección 6.1).

A

ESTABILIDAD MECÁNICA LINEALIZADA DE CÁSCARAS

En la construcción dinámica del Capítulo 4, y el análisis de estabilidad que se desarrolla a continuación, se supone que la cáscara preserva la simetría y no se rompe la estaticidad de las geometrías del bulk que se usaron. Bajo estas hipótesis, pidiendo la primera forma fundamental sobre la hipersuperfice, los coeficientes de las métricas cuadridimensionales usadas para la construcción quedan parcialmente vinculados. Las relaciones que salen de observar el elemento de línea de la métrica inducida (137),

$$ds^2 = -d\tau^2 + \mathcal{C}_{1,2} d\varphi_{1,2}^2 + D_{1,2} d\zeta_{1,2}^2 \,, \tag{433}$$

e identificar las direcciones de las coordenadas φ_1 con φ_2, y ζ_1 con ζ_2 sobre $\mathcal{H}$, son

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} = \sqrt{\frac{C_2(\tau)}{C_1(\tau)}} \,, \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_2} = \sqrt{\frac{D_2(\tau)}{D_1(\tau)}} \,. \tag{434}$$

Derivando respecto a la coordenada intrínseca τ se obtiene

$$\frac{\dot{C}_1}{C_1} = \frac{\dot{C}_2}{C_2} \,, \qquad \frac{\dot{D}_1}{D_1} = \frac{\dot{D}_2}{D_2} \,. \tag{435}$$

Estas relaciones representan la condición que establece la primera forma fundamental, equivalente a instalar un sistema de coordenadas único para describir las características intrínsecas de la hipersuperficie, bajo la hipótesis de estaticidad de los bulks. Nos enfocamos en métricas que satisfacen las condiciones (435) para garantizar no sólo la primera forma fundamental, sino además todos los vínculos que de ella se desprenden utilizando las ecuaciones de Gauss-Codazzi. La relación sobre los coeficientes $C_{1,2}$ no aporta algo nuevo tras haber considerado la condición global del perímetro (158). Tampoco la relación sobre $D_{1,2}$ para los casos de simetría esférica, pero sí para los cilíndricos. Para métricas tipo Schwarzschild, una cáscara esféricamente simétrica que aumenta y/o disminuye su radio representa un momento monopolar y no irradia ondas gravitacionales de acuerdo al Teorema de Birkhoff. En los casos esféricos (435) deja de ser una aproximación y resulta una consecuencia de considerar cáscaras que preservan la simetría durante su evolución.

Según se desarrolló en la Sección 4.4 se han obtenido 2 o 3 componentes independientes del salto de la curvatura extrínseca relacionadas a las densidades de energía y presión. Las densidades y sus derivadas, además, se pueden relacionar a partir de la ecuación de conservación

de energía-momento (112). Si se provee una ecuación de estado para la materia sobre la cáscara, $p_\varphi = p_\varphi(\Sigma)$ y $p_\zeta = p_\zeta(\Sigma)$, se puede integrar formalmente la ecuación de conservación para determinar $\Sigma(b)$ en función del radio de la cáscara. De esta manera, bajo las hipótesis señaladas, la dinámica queda resumida en la ecuación de Lanczos para la densidad de energía (149).

Como no nos interesa la evolución dinámica sino la estabilidad de la cáscara, se considerarán perturbaciones radiales lineales alrededor de alguna solución estática. Además se supondrán ecuaciones de estado lineales para la materia localizada en la cáscara, dadas por

$$p_\varphi = \eta_\varphi\,(\Sigma - \Sigma_0) + p_{0\varphi} \tag{436}$$

$$p_\zeta = \eta_z\,(\Sigma - \Sigma_0) + p_{0\zeta}\,. \tag{437}$$

La estabilidad se estudia en función de los parámetros de la geometría, y las constantes $\eta_\varphi = p'_\varphi(b_0)/\Sigma'(b_0)$ y $\eta_\zeta = p'_\zeta(b_0)/\Sigma'(b_0)$.

Al tratar con cáscaras que sólo dependen del tiempo propio todas las ecuaciones pueden escribirse fácilmente en función del radio de la cáscara y sus derivadas. Por ejemplo, si se elige b, correspondiente a la coordenada radial de $\mathcal{M}_+$ sobre la posición de la hipersuperficie de unión, se usa que

$$\dot{Y}_2 = \dot{Y}_2(b(\tau)) = Y_2'\,\dot{b}\,, \qquad \dot{Y}_1 = \dot{Y}_1(a(\tau)) = Y_2'\,\frac{da}{db}\,\dot{b}\,, \tag{438}$$

para cualquier cantidad $Y_{1,2}$. Tomando la derivada respecto al tiempo propio, o derivada covariante intrínseca en dirección de la coordenada τ sobre la hipersuperficie, en la ecuación de Lanczos para la densidad de energía (149), usando los resultados obtenidos en (153) y (154) para las presiones, y agrupando términos convenientemente, se obtiene

$$E_1 + \epsilon\,E_2 = \dot{a}F_2 + \epsilon\,\dot{b}F_1\,, \tag{439}$$

donde

$$E_l = \dot{\sigma}_l + \frac{\sigma_l}{2}\left(\frac{\dot{C}_l}{C_l} + \frac{\dot{D}_l}{D_l}\right) + \frac{p^l_\varphi}{2}\frac{\dot{C}_l}{C_l} + \frac{p^l_\zeta}{2}\frac{\dot{D}_l}{D_l}\,; \quad l = 1,2 \tag{440}$$

y $F_1 = F_1(a)$, $F_2 = F_2(b)$ son, en general, los flujos a cada lado de la cáscara, dados por

$$F_l = -\frac{\sigma_l}{2}\left\{\frac{A_l'}{A_l} + \frac{B_l'}{B_l} + \right. \tag{441}$$

$$\left.\left(\frac{(C_l')^2}{(C_l)^2} - \frac{2C_l''}{C_l} + \frac{(D_l')^2}{(D_l)^2} - \frac{2D_l''}{D_l}\right)\left(\frac{C_l'}{C_l} + \frac{D_l'}{D_l}\right)^{-1}\right\}\,; \quad l = 1,2\,.$$

Lo obtenido en (439) es la ecuación de conservación (112) con los términos de la discontinuidad del flujo $T_{\alpha\beta}e^\alpha_\tau n^\beta$ del lado derecho. Los flujos son nulos si los tensores de energía-momento del bulk son cero como ocurre en las geometrías consideradas en este trabajo. En esos casos la

ecuación de conservación se simplifica notoriamente quedando como en la versión de vacío (131). Si se calcula la ecuación de conservación directamente con la componente de índice τ a partir de (131), usando como coordenadas intrínsecas ξ_2^i y la métrica inducida con los coeficientes que se obtienen a partir de las coordenadas x_2^α, se tiene

$$S^{\tau j}{}_{;j} = \dot{\Sigma} + \frac{\Sigma}{2}\left(\frac{\dot{C}_2}{C_2} + \frac{\dot{D}_2}{D_2}\right) + p_\varphi \frac{\dot{C}_2}{2C_2} + p_\zeta \frac{\dot{D}_2}{2D_2} = 0\,, \tag{442}$$

donde se usaron los símbolos de Christoffel tridimensionales escritos con las coordenadas intrínsecas ξ_2^i. Notar que para que el lado izquierdo de (439) coincida con (442) es necesario usar las relaciones que establece la primera forma fundamental, (435), sobre los coeficientes.

Escribiendo la ecuación de conservación en términos del radio b de la cáscara, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden dada por

$$\Sigma' + \Sigma\left(\frac{C_2'}{C_2} + \frac{D_2'}{D_2}\right) + p_\varphi \frac{C_2'}{C_2} + p_\zeta \frac{D_2}{D_2} = 0\,. \tag{443}$$

Introduciendo las ecuaciones de estado (436) y (437) la ecuación diferencial se puede integrar formalmente y obtener $\Sigma(b)$. Finalmente, de la ecuación de Lanczos (149) para la densidad de energía se pude despejar una ecuación de movimiento para el radio de la cáscara similar a la *energía de una partícula no relativista* [67] [1],

$$\dot{b}^2 + V(b) = 0\,. \tag{444}$$

El potencial $V(b)$, que se despeja tras una serie de pasos que implican elevar al cuadrado dos veces la ecuación de la densidad de energía, queda escrito cómo

$$V(b) = \frac{1}{B_2}\left\{1 - \left(\frac{(2\Sigma)^2 + (\psi_2)^2 - (\psi_1)^2}{4\Sigma\,\psi_2}\right)^2\right\} \tag{445}$$

donde

$$\psi_{1,2} = -\frac{1}{8\pi\sqrt{B_{1,2}}}\left(\frac{C_{1,2}'}{C_{1,2}} + \frac{D_{1,2}'}{D_{1,2}}\right)\,, \tag{446}$$

dependiendo del radio b a través de los coeficientes de las métricas ($a = a(b)$) y de $\Sigma(b)$. No nos interesa la evolución dinámica sino perturbaciones lineales de las configuraciones estáticas de la cáscara, por lo que desarrollamos la expansión de Taylor a segundo orden del potencial $V(b)$ alrededor de la solución estática en b_0 (y $a_0 = a(b_0)$)

$$V(b) = V(b_0) + V'(b_0)(b - b_0) + V''(b_0)(b - b_0)^2 + O(b - b_0)^3. \tag{447}$$

1 El criterio de estabilidad según la definición de este potencial es conocido en la literatura en inglés como *bounded excursion* por los autores de [67], se ha utilizado en diversos trabajos que incluyen tanto geometrías esféricas como cilíndricas, y diferentes ecuaciones de estado para las densidades de energía asociadas a la cáscara [69, 70, 73, 74, 95].

De (445) se puede chequear que $V(b_0) = 0$ y que $V'(b_0) = 0$. Finalmente, introduciendo las ecuaciones de estado y usando (443), la segunda derivada del potencial en la posición de equilibrio queda

$$V''(b_0) = -\epsilon \frac{1}{\Sigma_0} \frac{1}{\sqrt{B_1 B_2}} \left\{ \frac{\chi_2 + \epsilon \chi_1}{2} C_2' + \frac{\Omega_2 + \epsilon\, \Omega_1}{2} \left(\eta_\varphi \frac{C_2'}{C_2} + \eta_\zeta \frac{D_2'}{D_2} \right) \right\} \Bigg|_{b_0}, \tag{448}$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_{1,2} \;=\; & \left(\frac{da}{da_{1,2}} \right)^{-1} \left\{ \frac{\psi_{1,2}}{C_{1,2}'} \frac{A_{1,2}'}{A_{1,2}} \left(\frac{A_{1,2}'}{A_{1,2}} - \frac{A_{1,2}''}{A_{1,2}'} + \frac{B_{1,2}'}{2B_{1,2}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{D_{1,2}'}{8\pi C_{1,2} D_{1,2} \sqrt{B_{1,2}}} \left(\frac{C_{1,2}''}{C_{1,2}'} + \frac{D_{1,2}''}{D_{1,2}'} - \frac{C_{1,2}'}{C_{1,2}} - \frac{D_{1,2}'}{D_{1,2}} - \frac{B_{1,2}'}{B_{1,2}} \right) \right\} \Bigg|_{b_0}, \end{aligned} \tag{449}$$

y

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2} = \frac{1}{8\pi \sqrt{B_{1,2}}} \left(\frac{da}{da_{1,2}} \right)^{-1} & \left\{ \frac{C_{1,2}'}{C_{1,2}} \left(\frac{C_{1,2}''}{C_{1,2}'} - \frac{C_{1,2}'}{C_{1,2}} - \frac{B_{1,2}'}{2B_{1,2}} \right) + \right. \\ & \left. \frac{D_{1,2}'}{D_{1,2}} \left(\frac{D_{1,2}''}{D_{1,2}'} - \frac{D_{1,2}'}{D_{1,2}} - \frac{B_{1,2}'}{2B_{1,2}} \right) \right\} \Bigg|_{b_0}. \end{aligned} \tag{450}$$

La solución estática es estable ante perturbaciones si $V''(b_0) > 0$, mientras que para $V''(b_0) < 0$ las perturbaciones pueden crecer al menos hasta alcanzar el regimen no lineal. De esta manera se resuelve el problema general de la estabilidad mecánica linealizada de cáscaras en topologías del Tipo I y del Tipo II, bajos las hipótesis consideradas y con ecuaciones de estado lineales. En las próximas secciones del apéndice aplicamos el formalismo en espaciotiempos con cáscaras cilíndricas y esféricas para variedades Tipo I y Tipo II.

A.1 CÁSCARAS ASOCIADAS A MÉTRICAS DE LEVI-CIVITA

Se aplica el formalismo desarrollado para analizar la estabilidad mecánica de cáscaras cilíndricas que preservan la simetría y estaticidad del bulk ante pequeñas perturbaciones en geometrías de Levi–Civita. Las métricas de Levi–Civita quedan definidas por los coeficientes

$$\begin{aligned} & A_{1,2}(r_{1,2}) = B_{1,2}(r_{1,2}) = \left(\frac{r_{1,2}}{R_{1,2}} \right)^{2d_{1,2}(d_{1,2}-1)} \\ & C_{1,2}(r_{1,2}) = r_{1,2}^2 \omega_{1,2}^2 \left(\frac{r_{1,2}}{R_{1,2}} \right)^{-2d_{1,2}}, \quad D_{1,2}(r_{1,2}) = \left(\frac{r_{1,2}}{R_{1,2}} \right)^{2d_{1,2}} \end{aligned} \tag{451}$$

a partir del elemento de línea que se definió en (160) del Capítulo 4. Se trabaja con las siguientes condiciones: la longitud de la circunferencia

normal al eje de simetría crece con la coordenada radial, y la longitud del elemento de línea paralelo al eje no se anula en el infinito. La primer condición implica $d_{1,2} < 1$, y la segunda $d_{1,2} \geq 0$. El caso $d_{1,2} = 0$ corresponde a espaciotiempos cónicos. Los parámetros $0 < \omega_{1,2} \leq 1$ dan el déficit de ángulo $2\pi(1-\omega_{1,2})$ de la subvariedad correspondiente y $R_{1,2}$ son factores de normalización positivos.

A.1.1 *Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior*

Para espaciotiempos Tipo I se tiene una región interior unida por la cáscara cilíndrica a una región exterior que se extiende hasta infinito en la coordenada radial r_2. Para garantizar la estaticidad de las métricas del bulk ante el movimiento de la cáscara, la continuidad de la primera forma fundamental establece la relación entre los radios $a_1 = a(\tau)$ y $a_2 = b(\tau)$ dada por

$$a = \frac{\omega_2}{\omega_1} b\,, \quad \text{con:} \quad d_1 = d_2 = d\,, \text{ y } \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2\,. \tag{452}$$

Los valores de la densidad de energía y presiones estáticas son

$$\Sigma_0 = \frac{1}{8\pi b_0} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} \left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{d(1-d)}\,, \tag{453}$$

$$p_{0\varphi} = \frac{d^2}{8\pi b_0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{d(1-d)}\,, \tag{454}$$

$$p_{0z} = \frac{(d-1)^2}{8\pi b_0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{d(1-d)}\,, \tag{455}$$

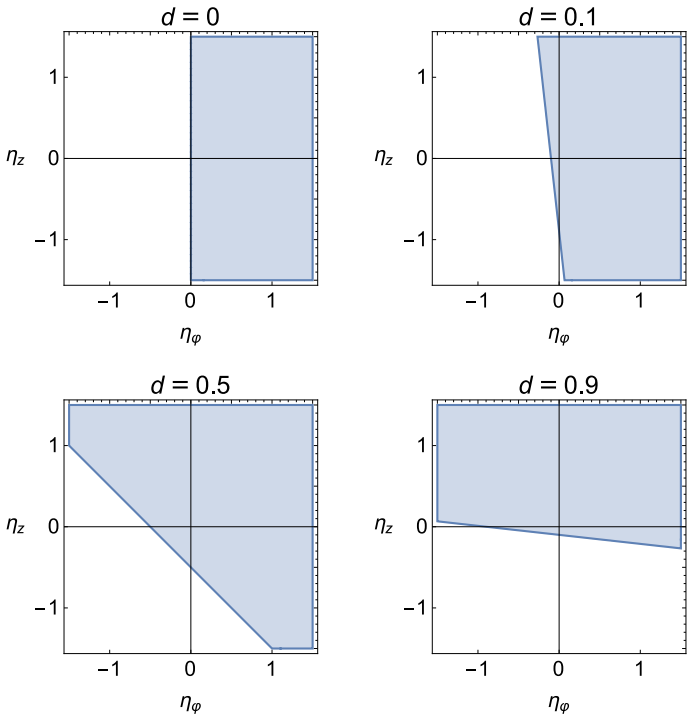
a patir de las ecuaciones (155), (156), y (157). Éstas magnitudes tienen valores negativos o positivos. En particular (453) muestra que la densidad de materia necesaria para la construcción de la cáscara puede ser exótica u ordinaria. Usando (445), el potencial de la ecuación de movimiento de la cáscara $V(b)$, y su segunda derivada evaluada en la posición estática b_0 ($a_0 = b_0\omega_2/\omega_1$) quedan;

$$V(b) = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_2^2} \left(\frac{b}{R_2}\right)^{2d(1-d)} - \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{16\pi b \omega_2 \Sigma}\right)^2 \left(\frac{b}{R_2}\right)^{4d(1-d)} - (4\pi b \Sigma)^2\,,$$

$$V''(b_0) = \frac{2\omega_1}{\omega_2 b_0^2}(d^2 - d + 1)\left(\eta_\varphi + d(\eta_z - \eta_\varphi + 1) - d^2\right)\left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{2d(1-d)}\,.$$

Se ve que la estabilidad es independiente de los parámetros ω_1, ω_2, R_1 y R_2, y de las posiciones estáticas a_0 y b_0. La estabilidad depende únicamente de los parámetros de las ecuaciones de estado linealizadas y del parámetro d de la geometría de Levi–Civita. La Figura 15 muestra las regiones de estabilidad para diferentes valores del parámetro d, las regiones estables $V''(b_0) > 0$ aparecen en gris sobre en el plano (η_φ, η_z). En particular, para cualquier par de valores positivos de los parámetros η_φ y η_z, la construcción resulta estable para todo valor de d, bajo las hipótesis del formalismo y el criterio utilizado.

Figura 15: Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano (η_φ, η_z) para cuatro valores diferentes del parámetro d. En espaciotiempos de Levi-Civita con una cáscara la estabilidad no depende de los parámetros ω_1, ω_2, R_1 y R_2, ni del radio de la configuración estática.



A.1.2 *Tipo II: Garganta en agujeros de gusano*

En cuanto a geometrías Tipo II, se obtienen agujeros de gusano cilíndricos con métricas de Levi–Civita diferentes a cada lado de la garganta. La condición de *flare–out* definida en la Sección 4.5 se satisface si $0 \leq d_{1,2} < 1$. La primera forma fundamental establece las relaciones (452), por lo que nuevamente $a = b\omega_2/\omega_1$. Los valores estáticos

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{8\pi b_0}\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_2}\left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{d(1-d)}, \tag{456}$$

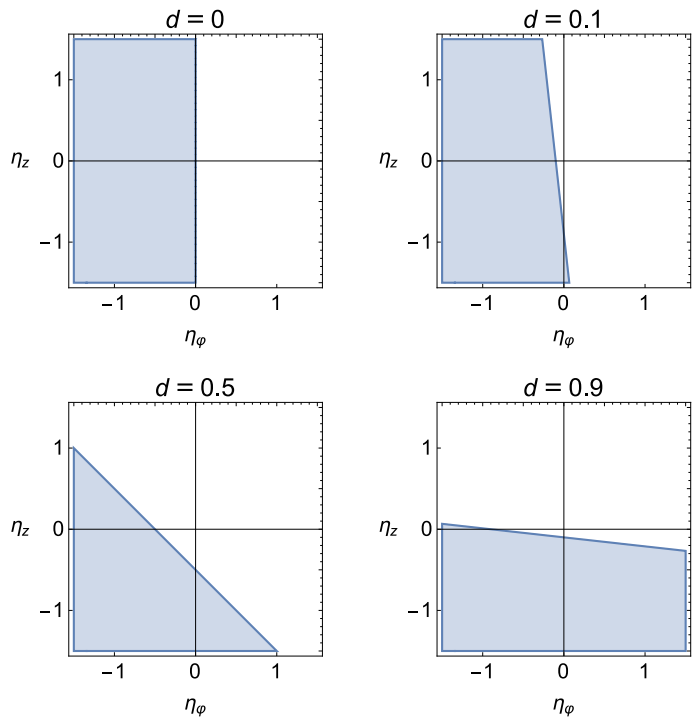
$$p_{0\varphi} = \frac{d^2}{8\pi b_0}\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_2}\left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{d(1-d)}, \tag{457}$$

$$p_{0z} = \frac{(d-1)^2}{8\pi b_0}\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_2}\left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{d(1-d)}, \tag{458}$$

se obtienen de las ecuaciones (155), (156), y (157), y corresponden a densidades de energía negativa y presiones positivas. El potential para el movimiento de la garganta en un agujero de gusano es igual al de la cáscara en (456), la diferencia está en el valor de la densidad de energía Σ. La segunda derivada evaluada en la posición estática resulta

$$V''(b_0) = -\frac{2\omega_1}{\omega_2 b_0^2}(d^2-d+1)\left(\eta_\varphi + d(\eta_z-\eta_\varphi+1) - d^2\right)\left(\frac{b_0}{R_2}\right)^{2d(1-d)}.$$

Figura 16: Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano (η_φ, η_z) para cuatro valores diferentes del parámetro d. En agujeros de gusano Levi-Civita que no son simétricos a través de la garganta, la estabilidad no depende de los parámetros ω_1, ω_2, R_1 y R_2, ni del radio de la configuración estática.



En la Figura 16 se muestran regiones de estabilidad en gris sobre el plano (η_φ, η_z) para diferentes valores del parámetro d. Se necesita que al menos uno de los parámetros η_φ o η_z de la ecuación de estado sea negativo para poder evitar la inestabilidad.

A.2 CÁSCARAS EN GEOMETRÍAS DE SCHWARZSCHILD

Los elementos de línea para las métricas de Schwarzschild son

$$ds_{1,2}^2 = -\left(1 - \frac{2m_{1,2}}{r_{1,2}}\right) dt_{1,2}^2 + \left(1 - \frac{2m_{1,2}}{r_{1,2}}\right)^{-1} dr_{1,2}^2 + r_{1,2}^2 d\Omega^2 \,, \quad (459)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ y $0 \leq \theta < \pi$. Se construye la variedad $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ + \mathcal{M}_-$ definida como en (133), con la cáscara de radio $a > 2m_{1,2}$. La métrica inducida sobre la hipersuperficie es $dh^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\, d\Omega^2$, con τ es el tiempo propio sobre la cáscara. Suponiendo perturbaciones esféricamente simétricas, la dinámica de la cáscara estará determinada por el radio $a(\tau) \equiv r_{1,2}|_{\mathcal{H}}$. Notar que la primera forma fundamental establece que el valor del radio es el mismo

para ambos sistemas de coordenadas. La normal definida en (139), en las coordenadas de cada subvariedad, es

$$n_\gamma^{1,2} = \delta \left(-\dot{a}, \frac{\beta_{1,2}}{f_{1,2}}, 0, 0 \right) , \tag{460}$$

donde $f_{1,2} = 1 - \frac{2m_{1,2}}{a}$, $\beta_{1,2} = \sqrt{f_{1,2} + \dot{a}^2}$ y $\dot{a} = da/d\tau$. El parámetro δ, definido en (142), es igual a 1 excepto para el bulk en $\mathcal{M}_-$ de variedades Tipo II donde vale -1. En la base ortonormal definida sobre la hipersuperficie, $h_{\hat{i}\hat{j}} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ y las componentes no nulas del tensor de curvatura extrínseca son

$$K^{1,2}_{\hat{\tau}\hat{\tau}} = -\delta \, \frac{\dot{\beta}_{1,2}}{\dot{a}}, \qquad K^{1,2}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = K^{1,2}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \delta \, \frac{\beta_{1,2}}{a} \, . \tag{461}$$

Finalmente, para el salto $[K_{\hat{i}\hat{j}}]$ se obtiene

$$[K_{\hat{\tau}\hat{\tau}}] = -\frac{1}{\dot{a}} \left(\dot{\beta}_2 + \epsilon \, \dot{\beta}_1 \right) , \tag{462}$$

$$[K_{\hat{\theta}\hat{\theta}}] = [K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}] = \frac{1}{a} \left(\beta_2 + \epsilon \, \beta_1 \right) , \tag{463}$$

donde $\epsilon = -1$ corresponde a un espaciotiempo Tipo I y $\epsilon = 1$ a los Tipo II. El tensor de energía-momento superficial determina la densidad de energía y presiones;

$$\Sigma = -\frac{1}{4\pi a} \left(\beta_2 + \epsilon \, \beta_1 \right) , \tag{464}$$

$$p = p_\theta = p_\varphi = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{\beta_2}{a} + \frac{\dot{\beta}_2}{\dot{a}} + \epsilon \left(\frac{\beta_1}{a} + \frac{\dot{\beta}_1}{\dot{a}} \right) \right\} . \tag{465}$$

Los valores estáticos quedan

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{f_2} + \epsilon \sqrt{f_1}}{a} \right) \Big|_{a_0} , \tag{466}$$

$$p_0 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\sqrt{f_2} + \epsilon \sqrt{f_1}}{a} + \frac{f_2'}{2\sqrt{f_2}} + \epsilon \, \frac{f_1'}{2\sqrt{f_1}} \right) \Big|_{a_0} , \tag{467}$$

donde se usa a_0 para el radio de la configuración estática de la cáscara. Usando la ecuación de estado lineal $p = \eta \left(\Sigma - \Sigma_0 \right) + p_0$, con η constante, y usando la ecuación de conservación, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para la densidad de energía en función del radio de la cáscara dada por

$$a\Sigma' + 2 \left(1 + \eta \right) \Sigma + 2 \left(p_0 - \eta \Sigma_0 \right) = 0, \tag{468}$$

donde la prima representa la derivada respecto a a. Integrando, resulta que

$$\Sigma(a) = \left(\Sigma_0 - \Sigma_p \right) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{2(1+\eta)} + \Sigma_p \, , \quad \Sigma_p = -\frac{p_0 - \eta \Sigma_0}{1 + \eta} \, . \tag{469}$$

Según el formalismo, la estabilidad de las configuraciones estáticas de la cáscara se determina del potencial (445),

$$V(a) = \frac{f_2 + f_1}{2} - (2\pi a\Sigma)^2 - \left(\frac{f_2 - f_1}{8\pi a\Sigma}\right)^2 . \tag{470}$$

Explícitamente, para las métricas de Schwarzschild queda

$$V(a) = 1 - \frac{m_2 + m_1}{a} - \left(\frac{M}{2a}\right)^2 - \left(\frac{m_2 - m_1}{M}\right)^2 , \tag{471}$$

donde $M = 4\pi a^2\Sigma$ es la masa en reposo de la cáscara. La solución estática es estable ante perturbaciones radiales si $V''(a_0) > 0$. La segunda derivada se obtiene directamente a partir de (471) y (469), y el análisis de positividad depende de los parámetros m_1 y m_2, de la posición de la cáscara a_0 y los posibles valores de η. Los resultados para variedades Tipo I y II se muestran en las próximas subsecciones.

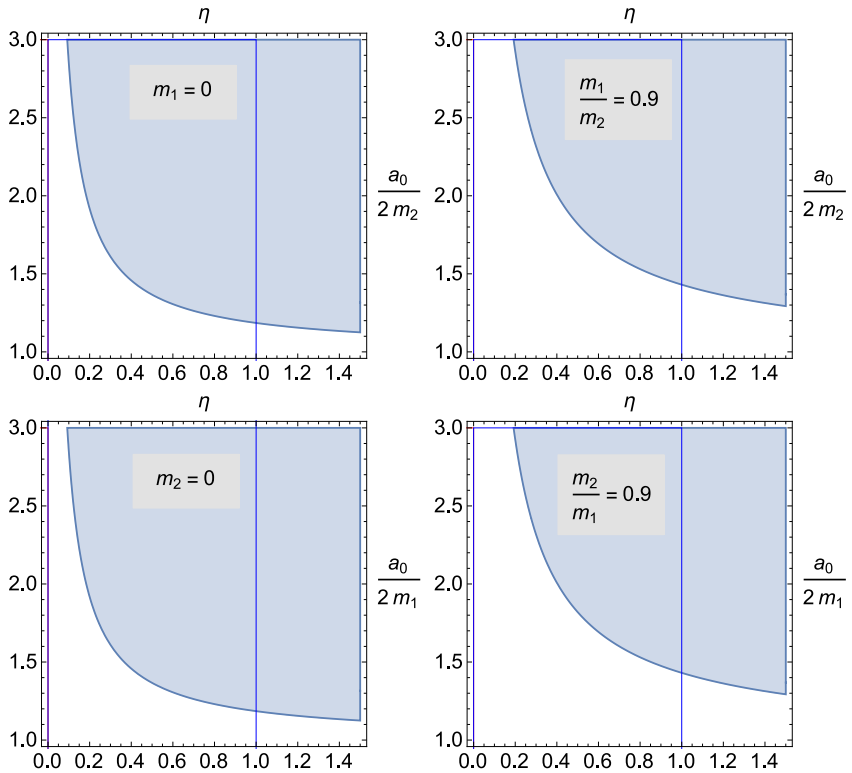
A.2.1 *Tipo I: Cáscara con un interior y un exterior*

La segunda derivada del potencial (471) es

$$\begin{aligned}
&V''(a_0) = \tfrac{1}{2a_0^2}\times \\
&\Big\{4\Big\{-a_0^2(1-\tfrac{2m_1}{a_0})^{3/2} + 3a_0(1-\tfrac{2m_1}{a_0})^{3/2}m_2 - 3(1-\tfrac{2m_1}{a_0})^{3/2}m_2^2 \\
&+a_0^2(1-\tfrac{2m_2}{a_0})^{3/2} - 3a_0m_1(1-\tfrac{2m_2}{a_0})^{3/2} + 3m_1^2(1-\tfrac{2m_2}{a_0})^{3/2}\Big\} \\
&\Big\{(a_0-2m_1)(-a_0+\sqrt{(a_0-2m_1)(a_0-2m_2)}+2m_2)\sqrt{1-\tfrac{2m_2}{a_0}}\Big\}^{-1} \\
&+8\eta\Big\{-\sqrt{a_0(a_0-2m_1)}+\sqrt{a_0(a_0-2m_2)} \\
&+3\sqrt{1-\tfrac{2m_1}{a_0}}m_2 - 3m_1\sqrt{1-\tfrac{2m_2}{a_0}}\Big\} \\
&\Big\{\sqrt{a_0(a_0-2m_1)}-\sqrt{a_0(a_0-2m_2)}\Big\}^{-1}\Big\}
\end{aligned} .$$

La Figura 17 muestra las regiones de estabilidad, en gris, para diferentes valores del cociente $\frac{m_1}{m_2}$ en el plano $(\eta, \frac{a_0}{2m_{1,2}})$. En general se tienen configuraciones estables para radios $a_0 > 3m_{1,2}$ si $\eta \gtrsim 0$, excepto cuando las masas son similares. Se ve por ejemplo que si $\frac{m_1}{m_2} = 0{,}9$, para $a_0 = 3m_2$ se necesita $\eta > 0{,}8$. Para radios $a_0 < 3m_{1,2}$, en general se necesita η cercano o superior a 1.

Figura 17: Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano $(\eta, \frac{a_0}{2m_{1,2}})$, con distintos valores de $\frac{m_1}{m_2}$, para cáscaras de materia ordinaria y exótica en geometrías de Schwarzschild.



A.2.2 *Tipo II: Garganta en agujeros de gusano*

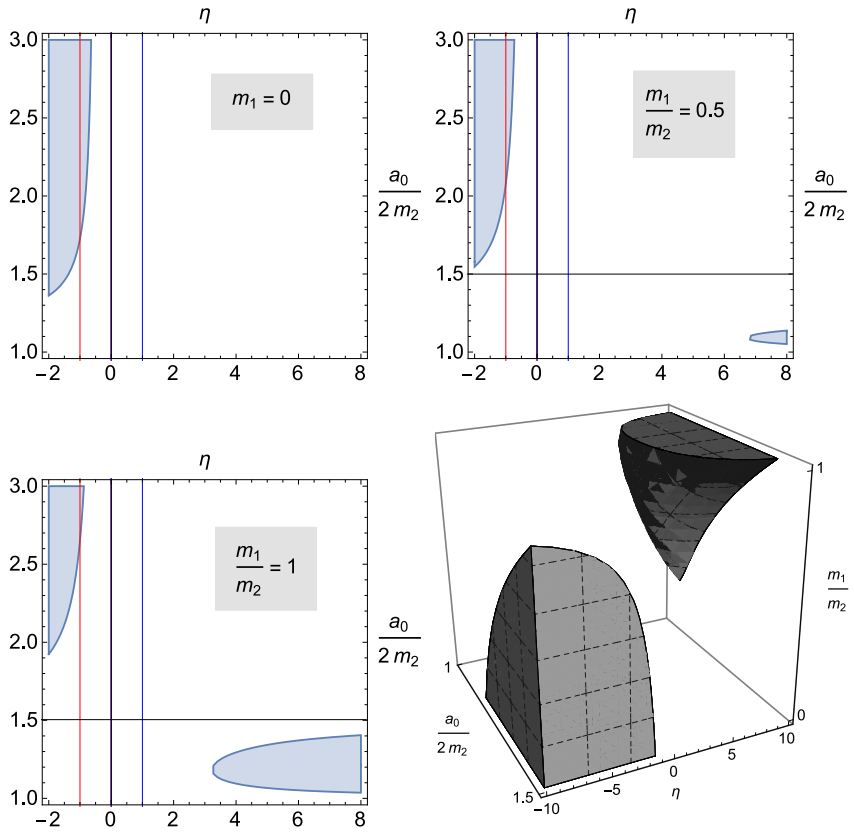
La segunda derivada del potencial (471) es

$$
\begin{aligned}
&V''(a_0) = -\tfrac{1}{2a_0^2}\times \\
&\Big\{4\Big\{a_0^2(1-\tfrac{2m_1}{a_0})^{3/2} - 3a_0(1-\tfrac{2m_1}{a_0})^{3/2}m_2 + 3(1-\tfrac{2m_1}{a_0})^{3/2}m_2^2 \\
&+a_0^2(1-\tfrac{2m_2}{a_0})^{3/2} - 3a_0m_1(1-\tfrac{2m_2}{a_0})^{3/2} + 3m_1^2(1-\tfrac{2m_2}{a_0})^{3/2}\Big\} \\
&\Big\{(a_0-2m_1)(a_0+\sqrt{(a_0-2m_1)(a_0-2m_2)}-2m_2)\sqrt{1-\tfrac{2m_2}{a_0}}\Big\}^{-1} \\
&+8\eta\Big\{\sqrt{a_0(a_0-2m_1)}+\sqrt{a_0(a_0-2m_2)} \\
&-3\sqrt{1-\tfrac{2m_1}{a_0}}m_2 - 3m_1\sqrt{1-\tfrac{2m_2}{a_0}}\Big\} \\
&\Big\{\sqrt{a_0(a_0-2m_1)}+\sqrt{a_0(a_0-2m_2)}\Big\}^{-1}\Big\}
\end{aligned}
\quad .
$$

La Figura 18 muestra regiones de estabilidad, en gris, para algunos valores del cociente $\frac{m_1}{m_2}$ en el plano $(\eta, \frac{a_0}{2m_2})$, con $m_2 > m_1$. No se consiguen configuraciones estables si $0 < \eta < 1$. Para radios de la garganta $a_0 < 3m_2$ sólo se consiguen soluciones estables si $|\eta| > 1$. A partir de $a_0 \gtrsim 3m_2$, también se encuentran regiones de estabilidad para algunos valores dentro del rango $-1 < \eta < 0$. El caso particular de un agujero de gusano de Schwarzschild simétrico a través de la garganta

$(m_1 = m_2 = m \neq 0)$ posee una inestabilidad crítica en $a_0 = 3m$. En el gráfico tridimensional que aparece en la Figura 18 se agrega el eje vertical $\frac{m_1}{m_2}$ y se muestra el rango $2m < a_0 < 3m$ (incluye a los anteriores en este intervalo).

Figura 18: Regiones de estabilidad, en gris, sobre el plano $(\eta, \frac{a_0}{2m_2})$, con distintos valores de $\frac{m_1}{m_2}$, para agujeros de gusano en geometrías de Schwarzschild. El gráfico tridimensional incluye parte de los anteriores en el espacio de parámetros $(\eta, \frac{a_0}{2m_2}, \frac{m_1}{m_2})$.



Para el caso particular donde $m_1 = m_2 = 0$, un agujero de gusano con dos regiones de Minkowski pegadas por una garganta esférica infinitamente corta, se obtiene

$$V''(a_0) = -2\frac{1+2\eta}{a_0^2}\,, \tag{472}$$

y es estables si $\eta < -1/2$.

B

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO EN LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

A continuación se demuestra que la expansión (302) utilizada en la Sección 6.1 para el potencial electrostático de un agujero negro de Schwarzschild es equivalente a la expresión cerrada (288). Los argumentos son análogos a los expuestos en [120], la principal diferencia es que en aquella referencia el potencial no satisface las condiciones de contorno correctas. Para este fin transformamos a coordenadas isotrópicas ρ dadas en función de la de Schwazschild r por

$$\rho = \frac{r - m + \sqrt{r(r-2m)}}{2}, \qquad r > 2m. \tag{472}$$

La transformación anterior se puede invertir de forma que

$$r = \rho\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2, \qquad 2\rho > m. \tag{472}$$

La expresión cerrada que se usó para el potencial electrostático (288) con una carga puntual unidad $q = 1$ en el agujero negro es

$$\Phi^{bh} = \Phi^C + \frac{m/r'}{r}\,. \tag{472}$$

El término Φ^C, (290), expresado con la coordenada radial isotrópicas adimensionalizada $\eta = 2\rho/m$ y la posición adimensionalizada de la carga $\beta = 2\rho'/m$ queda

$$\Phi^C = \frac{4\eta\beta}{2m[1+\eta]^2[1+\beta]^2}\left[\sqrt{\frac{\eta^2+\beta^2-2\beta\eta\cos\theta}{\beta^2\eta^2+1-2\beta\eta\cos\theta}} + \sqrt{\frac{\beta^2\eta^2+1-2\beta\eta\cos\theta}{\eta^2+\beta^2-2\beta\eta\cos\theta}}\right],$$

y evaluando en $\theta = 0$ y $\eta > \beta$ se reduce a

$$\Phi_0^C = \frac{2\eta\beta}{m[1+\eta]^2[1+\beta]^2}\left[\frac{\eta-\beta}{\beta\eta-1} + \frac{\beta\eta-1}{\eta-\beta}\right]. \tag{471}$$

Manipulando esta expresión se la puede llevar a la forma de un par de series, haciendo el siguiente desarrollo;

$$\begin{aligned}\Phi_0^C &= \tfrac{2\beta}{m(\beta+1)^2}\tfrac{\eta-1}{\eta+1}\tfrac{\eta}{\eta^2-1}\left[\tfrac{1}{\beta}\left(1-\tfrac{\beta}{\eta}\right)\left(1-\tfrac{1}{\beta\eta}\right)^{-1}+\beta\left(1-\tfrac{1}{\beta\eta}\right)\left(1-\tfrac{\beta}{\eta}\right)^{-1}\right]\\ &= \tfrac{2\beta}{m(\beta+1)^2}\tfrac{\eta-1}{\eta+1}\tfrac{1}{\eta}\left(1+\tfrac{1}{\eta^2}+\tfrac{1}{\eta^4}+...\right)\left[\left(\beta+\tfrac{1}{\beta}\right)+\left(\beta^2-2+\tfrac{1}{\beta^2}\right)\tfrac{1}{\eta}+..\right]\\ &= \tfrac{2\beta}{m(\beta+1)^2}\tfrac{\eta-1}{\eta+1}\left[\left(\beta+\tfrac{1}{\beta}\right)\tfrac{1}{\eta}+\left(\beta^2-2+\tfrac{1}{\beta^2}\right)\tfrac{1}{\eta^2}+\left(\beta^3+\tfrac{1}{\beta^3}\right)\tfrac{1}{\eta^3}+\right.\\ &\left.\left(\beta^4-2+\tfrac{1}{\beta^4}\right)\tfrac{1}{\eta^4}+...\right].\end{aligned}$$

Para relacionar estas expresiones con las funciones de Legendre P_l y Q_l se usará la siguiente identidad [121]

$$\tfrac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^n} = -n\sum_{l=0}^{\infty}\tfrac{(4l+2n-1)}{4\pi}\tfrac{\Gamma(l-1/2)\Gamma(l+n-1/2)}{l!(l+n)!}Q_{2l+n-1}(x) \quad (470)$$

De donde se puede tomar la derivada respecto a x y obtener

$$\tfrac{1}{(\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})^n} = \sum_{l=0}^{\infty}\tfrac{(4l+2n-1)}{4\pi}\tfrac{\Gamma(l-1/2)\Gamma(l+n-1/2)}{l!(l+n)!}Q'_{2l+n-1}(x) \quad (470)$$

Incorporando este resultado con $x=\frac{\eta^2+1}{2\eta}$ en el potencial Φ_0^C, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_0^C &= \tfrac{\beta(\eta-1)^2}{m\eta(1+\beta)^2}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\tfrac{(4l+4p+1)}{4\pi}\left(\beta^{2l+1}+\tfrac{1}{\beta^{2l+1}}\right)\tfrac{\Gamma(p-\frac{1}{2})\Gamma(2l+p+\frac{1}{2})}{p!(2l+p+1)!}\right.\\ &\times Q'_{2l+2p}(x)+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\tfrac{(4l+4p+3)}{4\pi}\left(\beta^{2l+2}-2+\tfrac{1}{\beta^{2l+2}}\right)\tfrac{\Gamma(p-\frac{1}{2})\Gamma(2l+p+\frac{3}{2})}{p!(2l+p+1)!}\\ &\left.\times Q'_{2l+2p+1}(x)\right]=\\ &\tfrac{\beta(\eta-1)^2}{m\eta(1+\beta)^2}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{l}\tfrac{(4l+3)}{4\pi}\left(\beta^{2(l-t)+1}-2+\tfrac{1}{\beta^{2(l-t)+1}}\right)\right.\\ &\times\tfrac{\Gamma(t-\frac{1}{2})\Gamma(2l-t+\frac{3}{2})}{t!(2l-t+2)!}Q'_{2l+1}(x)+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{l}\tfrac{(4l+1)}{4\pi}\left(\beta^{2(l-t+1)}+\tfrac{1}{\beta^{2(l-t+1)}}\right)\\ &\left.\times\tfrac{\Gamma(t-\frac{1}{2})\Gamma(2l-t+\frac{1}{2})}{t!(2l-t+1)!}Q'_{2l}(x)-\tfrac{1}{2}\left(\beta+\tfrac{1}{\beta}\right)Q'_0(x)\right].\end{aligned}$$

Finalmente, usando las siguiente expansiones [121] con $x'=\frac{\beta^2+1}{2\beta}$;

$$\begin{aligned}(\beta^2-2+\tfrac{1}{\beta^2})P'_{2n}(x') &= -\tfrac{2n(2n+1)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\beta^{2n-2k+1}+\tfrac{1}{\beta^{2n-2k+1}}\right)\\ &\times\tfrac{\Gamma(k-\frac{1}{2})\Gamma(2n-k+\frac{1}{2})}{k!(2n-k+1)!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta^2-2+\tfrac{1}{\beta^2})P'_{2n+1}(x') &= -\tfrac{(2n+1)(2n+2)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\beta^{2n-2k+2}-2+\tfrac{1}{\beta^{2n-2k+2}}\right)\\ &\times\tfrac{\Gamma(k-\frac{1}{2})\Gamma(2n-k+\frac{3}{2})}{k!(2n-k+2)!}\end{aligned}$$

se obtiene

$$\Phi_0^C = -\frac{\beta(\eta-1)^2}{2m\eta(1+\beta)^2}\left[\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)Q_0'(x)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\left(\beta^2-2+\frac{1}{\beta^2}\right)\right.$$
$$\left.\times P_l'(x')Q_l'(x)\right].$$

Expresándolo nuevamente en término de las coordenadas de Schwarzschild r y r' se tiene

$$\Phi_0^C = \frac{(r-2m)}{r'm}Q_0'\left(\frac{r}{m}-1\right)-\left[\frac{(r-2m)}{m^2}Q_0'\left(\frac{r}{m}-1\right)+\frac{1}{m^3}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\right.$$
$$\left.\times(r'-2m)P_l'\left(\frac{r'}{m}-1\right)(r-2m)Q_l'\left(\frac{r}{m}-1\right)\right].$$

Como se señaló anteriormente, las funciones de Legendre que aquí aparecen fueron diferenciadas en su argumento y luego evaluadas, por lo tanto la identidad

$$Q_0'\left(\frac{r}{m}-1\right)=\left.\frac{dQ_0}{dx}\right|_{(\frac{r}{m}-1)}=-\frac{m^2}{r(r-2m)}\,, \tag{465}$$

junto con las definiciones (298), muestran que:

$$\Phi_0^C = -\frac{m}{r'r}+\sum_{l=0}^{\infty}g_l(r')f_l(r). \tag{465}$$

Consecuentemente tenemos

$$\Phi^{bh}(r>r',\theta=0)=\Phi_0^C+\Phi^L=\sum_{l=0}^{\infty}g_l(r')f_l(r). \tag{465}$$

Este es el potencial electrostático evaluado en la superficie $\theta=0$ con $r>r'$. Sabemos que para $\theta\neq 0$ la expresión debe ser una expansión de la forma

$$\Phi^{bh}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)P_l(\cos\theta), \tag{465}$$

con $R_l(r)$ las funciones radiales etiquetadas con l y que son soluciones de (297). Esta expresión debe reducirse a la anterior cuando $\theta=0$, o equivalentemente para $P_l(1)=1$. De todo esto se sigue que la expresión completa para el potencial (recuperando la carga q) debe ser

$$\Phi^{bh}(r>r',\theta)=q\sum_{l=0}^{\infty}g_l(r')f_l(r)P_l(\cos\theta), \tag{465}$$

que es la expansión (302) usada en la Sección 6.1 para $r>r'$. La expresión correspondiente para $r<r'$ es completamente análoga y se omite. Queda demostrado que la expansión (302) es equivalente al potential (288).

BIBLIOGRAFÍA

[1] E. Rubín de Celis, O. P. Santillan y C. Simeone. «Probing global aspects of a geometry by the self-force on a charge: Cylindrical thin-shell wormholes». En: *Phys. Rev. D* **86** (12 2012), pág. 124009. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.124009. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.124009.

[2] E. Rubín de Celis, O. P. Santillán y C. Simeone. «Probing global aspects of a geometry by the self-force on a charge: Spherical thin-shell wormholes». En: *Phys. Rev. D* **88** (12 2013), pág. 124012. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.124012. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.124012.

[3] Emilio Rubín de Celis. «Effect of a cylindrical thin-shell of matter on the electrostatic self-force on a charge». En: *The European Physical Journal C* **76**.2 (2016), pág. 92. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-016-3939-6. URL: http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-3939-6.

[4] E. Eiroa, E. Rubín de Celis y C. Simeone. «Thin shells joining local cosmic string geometries». En: *The European Physical Journal C* **76**.10 (2016), pág. 546. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-016-4401-5. URL: http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4401-5.

[5] E. Rubín de Celis y O. P. Santillán. «Massless geodesics in $AdS_5 \times Y_{(p,q)}$ as a superintegrable system». En: *Journal of High Energy Physics* **9** (2012), pág. 32. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP09(2012)032. URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2012)032.

[6] E. Rubín de Celis y C. Simeone. «A note about the perturbative dynamics of symmetric shells». En: *The European Physical Journal Plus* (2017), trabajo recientemente aceptado (2017-02-03), próximo a ser publicado online.

[7] Steven Detweiler y Bernard F. Whiting. «Self-force via a Green's function decomposition». En: *Phys. Rev. D* **67** (2 2003). DOI: 10.1103/PhysRevD.67.024025. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.024025.

[8] N. Sen. En: *Ann. Phys. (Leipzig)* **73** (1924), pág. 365.

[9] K. Lanczos. En: *Annalen Phys.* **379** (1924), pág. 528.

[10] G. Darmois. «Mémorial des Sciences Mathématiques». En: *Fascicule XXV* **Chapter 5** (1927).

[11] W. Israel. En: *Nuovo Cimento B* **44** (1 1966), Errata; **48**, 463 (1967).

[12] P. A. M. Dirac. «Classical Theory of Radiating Electrons». En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **167**.929 (1938), págs. 148-169. ISSN: 0080-4630. DOI: 10.1098/rspa.1938.0124. eprint: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/167/929/148.full.pdf. URL: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/167/929/148.

[13] B. DeWitt y R. Brehme. «Radiation Damping in a Gravitational Field». En: *Ann. Phys. (N.Y.)* **9** (220 1960).

[14] J. Hobbs. «A vierbein formalism for radiation damping». En: *Ann. Phys. (N.Y.)* **47**.141 (1968).

[15] Samuel E. Gralla, Abraham I. Harte y Robert M. Wald. «Rigorous derivation of electromagnetic self-force». En: *Phys. Rev. D* **80** (2 2009), pág. 024031. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.024031. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.024031.

[16] Fritz Rohrlich. *Classical Charged Particles*. 3rd Edition. Redwood City, CA, USA: Addison-Wesley, 1990.

[17] Yasushi Mino, Misao Sasaki y Takahiro Tanaka. «Gravitational radiation reaction to a particle motion». En: *Phys. Rev. D* **55** (6 1997), págs. 3457-3476. DOI: 10.1103/PhysRevD.55.3457. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.3457.

[18] Theodore C. Quinn y Robert M. Wald. «Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime». En: *Phys. Rev. D* **56** (6 1997), pág. 3381 3394. DOI: 10.1103/PhysRevD.56.3381. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.3381.

[19] Leor Barack y Amos Ori. «Mode sum regularization approach for the self-force in black hole spacetime». En: *Phys. Rev. D* **61** (6 2000), pág. 061502. DOI: 10.1103/PhysRevD.61.061502. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.061502.

[20] Theodore C. Quinn. «Axiomatic approach to radiation reaction of scalar point particles in curved spacetime». En: *Phys. Rev. D* **62** (6 2000), pág. 064029. DOI: 10.1103/PhysRevD.62.064029. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.064029.

[21] Leor Barack y Norichika Sago. «Gravitational self-force on a particle in eccentric orbit around a Schwarzschild black hole». En: *Phys. Rev. D* **81** (8 2010), pág. 084021. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.084021. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.084021.

[22] Niels Warburton, Sarp Akcay, Leor Barack, Jonathan R. Gair y Norichika Sago. «Evolution of inspiral orbits around a Schwarzschild black hole». En: *Phys. Rev. D* **85** (6 2012), pág. 061501. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.061501. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.061501.

[23] Eric Poisson, Adam Pound y Ian Vega. «The Motion of Point Particles in Curved Spacetime». En: *Living Reviews in Relativity* **14**.7 (2011). DOI: 10.1007/lrr-2011-7. URL: http://www.livingreviews.org/lrr-2011-7.

[24] Steven Detweiler. «Perspective on gravitational self-force analyses». En: *Classical and Quantum Gravity* **22**.15 (2005), S681. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/22/i=15/a=006.

[25] Leor Barack. «Gravitational self-force in extreme mass-ratio inspirals». En: *Classical and Quantum Gravity* **26** (21 2009). URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/26/i=21/a=213001.

[26] Marc Casals, Eric Poisson y Ian Vega. «Regularization of static self-forces». En: *Phys. Rev. D* **86** (6 2012), pág. 064033. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.064033. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.064033.

[27] A. Abramovici, W.E. Althouse, R. W. P. Drever, Y. Gursel, S. Kawamura, F. J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. E. Spero y K. S. Thorne. «LIGO - The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory». En: *Science* **256** (1992), págs. 325-333. DOI: 10.1126/science.256.5055.325. URL: http://adsabs.harvard.edu/abs/1992Sci...256..325A.

[28] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins y T. Ott. «Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center». En: *The Astrophysical Journal* **692**.2 (2009), pág. 1075. URL: http://stacks.iop.org/0004-637X/692/i=2/a=1075.

[29] En: *LISA Home Page* (2017). URL: http://lisa.nasa.gov/.

[30] En: *LISA Home Page* (2017). URL: https://www.elisascience.org/.

[31] Pau Amaro-Seoane, Jonathan R. Gair, Marc Freitag, M. Coleman Miller, Ilya Mandel, Curt J. Cutler y Stanislav Babak. «Intermediate and extreme mass-ratio inspirals astrophysics, science applications and detection using LISA». En: *Classical and Quantum Gravity* **24**.17 (2007), R113.

[32] Leor Barack y Norichika Sago. «Gravitational Self-Force Correction to the Innermost Stable Circular Orbit of a Schwarzschild Black Hole». En: *Phys. Rev. Lett.* **102** (19 2009), pág. 191101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.191101. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.191101.

[33] L. Diaz-Rivera, E. Messaritaki, B. Whiting y S. Detweiler. «Scalar field self-force effects on orbits about a Schwarzschild black hole». En: *Phys. Rev. D* **70** (2004), pág. 124018.

[34] P. Sundararajan. «Transition from adiabatic inspiral to geodesic plunge for a compact object around a massive Kerr black hole: Generic orbits». En: *Phys. Rev. D* **77** (2008), pág. 124050.

[35] Lior M. Burko, Abraham I. Harte y Eric Poisson. «Mass loss by a scalar charge in an expanding universe». En: *Phys. Rev. D* **65** (12 2002), pág. 124006. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.124006. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.124006.

[36] Roland Haas y Eric Poisson. «Mass change and motion of a scalar charge in cosmological spacetimes». En: *Classical and Quantum Gravity* **22**.15 (2005), S739. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/22/i=15/a=008.

[37] Peter Zimmerman, Ian Vega, Eric Poisson y Roland Hass. «Self force as a cosmic censor». En: *Phys. Rev. D* **87** (4 2013). DOI: 10.1103/PhysRevD.87.041501. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.041501.

[38] Veronika E. Hubeny. «Overcharging a black hole and cosmic censorship». En: *Phys. Rev. D* **59** (6 1999), pág. 064013. DOI: 10.1103/PhysRevD.59.064013. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.064013.

[39] A. G. Smith y Clifford M. Will. «Force on a static charge outside a Schwarzschild black hole». En: *Phys. Rev. D* **22** (6 1980), págs. 1276-1284. DOI: 10.1103/PhysRevD.22.1276. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.1276.

[40] A. I. Zel'nikov y V. P. Frolov. «Influence of gravitation on the self-energy of charged particles». En: *I Sov. Phys. JETP* **55** (1982), pág. 919. URL: http://jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_055_02_0191.pdf.

[41] K.S. Thorne, R. H. Price y D. A. MacDonald. *Black holes: The membrane paradigm*. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Yale University Press, 1986. URL: http://adsabs.harvard.edu/abs/1986bhmp.book.....T.

[42] Kip S. Thorne. «The Membrane Paradigm for Black-Hole Astrophysics». En: *Gravitation in Astrophysics: Cargèse 1986*. Ed. por B. Carter y J. B. Hartle. Boston, MA: Springer US, 1987, págs. 209-213. ISBN: 978-1-4613-1897-2. DOI: 10.1007/978-1-4613-1897-2_6. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-1897-2_6.

[43] B Linet. «Electrostatics and magnetostatics in the Schwarzschild metric». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* **9**.7 (1976), pág. 1081. URL: http://stacks.iop.org/0305-4470/9/i=7/a=010.

[44] J Hadamard. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. USA: Dover Publications, New York, 1952.

[45] J. A. Wheeler. En: *American Scientist* **56** (1 1968).

[46] B. Linet B. Leaute. «Electrostatics in a Reissner Nordström space time». En: *Phys. Lett. A* **58**.5 (1976).

[47] Alan G. Wiseman. «Self-force on a static scalar test charge outside a Schwarzschild black hole». En: *Phys. Rev. D* **61** (8 2000), pág. 084014. DOI: 10.1103/PhysRevD.61.084014. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.084014.

[48] B Boisseau, C Charmousis y B Linet. «Electrostatic self-force in a static weak gravitational field with cylindrical symmetry». En: *Classical and Quantum Gravity* **13**.7 (1996), pág. 1797. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/13/i=7/a=013.

[49] B. Linet. «Force on a charge in the space-time of a cosmic string». En: *Phys. Rev. D* **33** (6 1986), págs. 1833-1834. DOI: 10.1103/PhysRevD.33.1833. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.33.1833.

[50] Michael J. Pfenning y Eric Poisson. «Scalar, electromagnetic, and gravitational self-forces in weakly curved spacetimes». En: *Phys. Rev. D* **65** (8 2002), pág. 084001. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.084001. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.084001.

[51] Nail R. Khusnutdinov e Ilya V. Bakhmatov. «Self-action of a point charge in a wormhole space-time». En: *Phys. Rev. D* **76** (12 2007), pág. 124015. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.124015. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.124015.

[52] V. B. Bezerra y Nail R. Khusnutdinov. «Self-force on a scalar particle in a class of wormhole spacetimes». En: *Phys. Rev. D* **79** (6 2009), pág. 064012. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.064012. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.064012.

[53] D. Barbosa, U. de Freitas y E. R. Bezerra de Mello. «Induced self-energy on a static scalar charged particle in the spacetime of a global monopole with finite core». En: *Classical and Quantum Gravity* **28**.6 (2011), pág. 065009. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=6/a=065009.

[54] Bernard Linet. «Electrostatics in a wormhole geometry». En: *arxiv* (2007). URL: https://arxiv.org/abs/0712.0539.

[55] Nail R. Khusnutdinov, Arkady A. Popov y Lilia N. Lipatova. «Self-force of a point charge in the spacetime of a massive wormhole». En: *Classical and Quantum Gravity* **27**.21 (2010), pág. 215012. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/27/i=21/a=215012.

[56] Joseph Kuchar, Eric Poisson y Ian Vega. «Electromagnetic self-force on a static charge in Schwarzschildâde Sitter spacetimes». En: *Classical and Quantum Gravity* **30**.23 (2013), pág. 235033. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/30/i=23/a=235033.

[57] Y. Herrera, V. Hurovich, O. Santillán y C. Simeone. «Aspects of electrostatics in BTZ geometries». En: *Phys. Rev. D* **92** (8 2015), pág. 085042. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.085042. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.085042.

[58] Matthew J. S. Beach, Eric Poisson y Bernhard G. Nickel. «Self-force on a charge outside a five-dimensional black hole». En: *Phys. Rev. D* **89** (12 2014), pág. 124014. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.124014. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.124014.

[59] Valeri P. Frolov y Andrei Zelnikov. «Charged particles in higher dimensional homogeneous gravitational field: self-energy and self-force». En: *Journal of High Energy Physics* **10** (2014). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP10(2014)068. URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2014)068.

[60] N. R. Khusnutdinov y V. B. Bezerra. «Self-energy and self-force in the space-time of a thick cosmic string». En: *Phys. Rev. D* **64** (8 2001), pág. 083506. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.083506. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.083506.

[61] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, C. Furtado y F. Moraes. «Self-forces on electric and magnetic linear sources in the space-time of a cosmic string». En: *Phys. Rev. D* **51** (12 1995), págs. 7140-7143. DOI: 10.1103/PhysRevD.51.7140. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.7140.

[62] Stephen C. Davis. «Generalized Israel junction conditions for a Gauss-Bonnet brane world». En: *Phys. Rev. D* **67** (2 2003), pág. 024030. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.024030. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.024030.

[63] Klapdor Kleingrothaus. *Dark Matter in Astro- and Particle Physics*. Proceedings of the International Conference DARK 2000 Heidelberg. Alemania, 2000.

[64] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit*. University of Guelph, Ontario: Cambridge, 2007.

[65] C. Barrabès y P. A. Hogan. «Colliding impulsive gravitational waves and a cosmological constant». En: *Phys. Rev. D* **92** (4 2015), pág. 044032. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.044032. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.044032.

[66] Patrick R. Brady, Jorma Louko y Eric Poisson. «Stability of a shell around a black hole». En: *Phys. Rev. D* **44** (6 1991), págs. 1891-1894. DOI: 10.1103/PhysRevD.44.1891. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.44.1891.

[67] Matt Visser y David L. Wiltshire. «Stable gravastars: an alternative to black holes?» En: *Classical and Quantum Gravity* **21**.4 (2004), pág. 1135. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/21/i=4/a=027.

[68] Sérgio M. C. V. Goncalves. «Relativistic shells: Dynamics, horizons, and shell crossing». En: *Phys. Rev. D* **66** (8 2002), pág. 084021. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.084021. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.084021.

[69] Visser Matt Poisson Eric. «Thin-shell wormholes: Linearization stability». En: *Phys. Rev. D* **52** (12 1995), págs. 7318-7321. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.7318. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.7318.

[70] Ernesto F. Eiroa y Gustavo E. Romero. «Linearized Stability of Charged Thin-Shell Wormholes». En: *General Relativity and Gravitation* **36**.4 (2004), págs. 651-659. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1023/B:GERG.0000016916.79221.24. URL: http://dx.doi.org/10.1023/B:GERG.0000016916.79221.24.

[71] Ernesto F. Eiroa y Claudio Simeone. «Stability of charged thin shells». En: *Phys. Rev. D* **83** (10 2011), pág. 104009. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.104009. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.104009.

[72] S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy y Z. Amirabi. «Microscopic thin-shell wormholes in magnetic Melvin universe». En: *The European Physical Journal C* **74**.5 (2014), pág. 2889. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-2889-0. URL: http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2889-0.

[73] Victor Varela. «Note on linearized stability of Schwarzschild thin-shell wormholes with variable equations of state». En: *Phys. Rev. D* **92** (4 2015), pág. 044002. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.044002. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.044002.

[74] Ernesto F. Eiroa y Claudio Simeone. «Asymptotically anti–de Sitter cylindrical thin-shell wormholes». En: *Phys. Rev. D* **91** (6 2015), pág. 064005. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.064005. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.064005.

[75] Ernesto F. Eiroa y Claudio Simeone. «Cylindrical thin-shell wormholes». En: *Phys. Rev. D* **70** (4 2004), pág. 044008. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.044008. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.044008.

[76] Cecilia Bejarano, Ernesto F. Eiroa y Claudio Simeone. «Thin-shell wormholes associated with global cosmic strings». En: *Phys. Rev. D* **75** (2 2007), pág. 027501. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.027501. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.027501.

[77] A. Vilenkin y E. P. S. Shellard. *Cosmological strings and other topological defects*. Great Britain: Cambridge University Press, 1994.

[78] Neil Turok y Robert H. Brandenberger. «Cosmic strings and the formation of galaxies and clusters of galaxies». En: *Phys. Rev. D* **33** (8 1986), págs. 2175-2181. DOI: 10.1103/PhysRevD.33.2175. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.33.2175.

[79] Tanmay Vachaspati. «Cosmic Strings and the Large-Scale Structure of the Universe». En: *Phys. Rev. Lett.* **57** (13 1986). DOI: 10.1103/PhysRevLett.57.1655. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.1655.

[80] Tanmay Vachaspati y Alexander Vilenkin. «Large-scale structure from wiggly cosmic strings». En: *Phys. Rev. Lett.* **67** (9 1991), págs. 1057-1061. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.1057. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.1057.

[81] Alexander Vilenkin. «Cosmic strings: Progress and problems». En: (2005). URL: hep-th/0508135.

[82] A. Vilenkin. En: *Astrophys. J.* **282** (L51 1984).

[83] J. Richard Gott. «Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions». En: *Astrophys.J.* **288** (1985), págs. 422-427. DOI: 10.1086/162808.

[84] Rebecca J. Danos, Robert H. Brandenberger y Gil Holder. «Signature of cosmic string wakes in the CMB polarization». En: *Phys. Rev. D* **82** (2 2010), pág. 023513. DOI: 10.1103/PhysRevD.82.023513. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.023513.

[85] A. Vilenkin. *Inflating Horizons of Particle Astrophysics and Cosmology*. Tokyo: edited by H. Suzuki, J. Yokoyama, Y. Suto, y K. Sato Universal Academy Press, 2006.

[86] Alexander Vilenkin. «Gravitational field of vacuum domain walls and strings». En: *Phys. Rev. D* **23** (4 1981), págs. 852-857. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.852. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.852.

[87] Martín G. Richarte y Claudio Simeone. «More about thin-shell wormholes associated to cosmic strings». En: *Phys. Rev. D* **79** (12 2009), pág. 127502. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.127502. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.127502.

[88] J. Bicák y M. Zofka. «Notes on static cylindrical shells». En: *Classical and Quantum Gravity* **19**.14 (2002), pág. 3653. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/19/i=14/a=307.

[89] Metin Arık y Özgür Delice. «Static cylindrical matter shells». En: *General Relativity and Gravitation* **37**.8 (2005), pág. 1395. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/s10714-005-0123-y. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10714-005-0123-y.

[90] Ernesto F. Eiroa y Claudio Simeone. «Some general aspects of thin-shell wormholes with cylindrical symmetry». En: *Phys. Rev. D* **81** (8 2010), pág. 084022. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.084022. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.084022.

[91] M. Sharif y M. Azam. «Stability analysis of thin-shell wormholes from charged black string». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **04** (2013), pág. 023. URL: http://stacks.iop.org/1475-7516/2013/i=04/a=023.

[92] Martín G. Richarte. «Cylindrical wormholes with positive cosmological constant». En: *Phys. Rev. D* **88** (2 2013), pág. 027507. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.027507. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.027507.

[93] S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy y Z. Amirabi. «Stability of generic cylindrical thin shell wormholes». En: *Phys. Rev. D* **89** (8 2014), pág. 084003. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.084003. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.084003.

[94] K. A. Bronikov. «Scalar-tensor theory and scalar charge». En: *Acta Phys.Polon.* **B4** (1973), pág. 251.

[95] M. Visser. *Lorentzian Wormholes*. New York: AIP Press, 1996.

[96] Michael S. Morris y Kip S. Thorne. «Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity». En: *American Journal of Physics* **56**.5 (1988), págs. 395-412. DOI: 10.1119/1.15620. eprint: http://dx.doi.org/10.1119/1.15620. URL: http://dx.doi.org/10.1119/1.15620.

[97] David Hochberg y Matt Visser. «Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat». En: *Phys. Rev. D* **56** (8 1997), págs. 4745-4755. DOI: 10.1103/PhysRevD.56.4745. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.4745.

[98] Michael S. Morris, Kip S. Thorne y Ulvi Yurtsever. «Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition». En: *Phys. Rev. Lett.* **61** (13 1988), págs. 1446-1449. DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.1446. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.1446.

[99] K. A. Bronnikov, M. V. Skvortsova y A. A. Starobinsky. «Notes on wormhole existence in scalar-tensor and F(R) gravity». En: *Gravitation and Cosmology* **16**.3 (2010), págs. 216-222. ISSN: 1995-0721. DOI: 10.1134/S0202289310030047. URL: http://dx.doi.org/10.1134/S0202289310030047.

[100] K. A. Bronnikov y José P. S. Lemos. «Cylindrical wormholes». En: *Phys. Rev. D* **79** (10 2009), pág. 104019. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.104019. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.104019.

[101] Claudio Simeone. «Cylindrical Thin-Shell Wormholes and Energy Conditions». En: *International Journal of Modern Physics D* **21**.02 (2012), pág. 1250015. DOI: 10.1142/S0218271812500150. eprint: http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0218271812500150. URL: http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271812500150.

[102] W. G. Unruh. «Self Force on Charged Particles». En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **348**.1655 (1976), págs. 447-465. ISSN: 0080-4630. DOI: 10.1098/rspa.1976.0049. eprint: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/348/1655/447.full.pdf. URL: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/348/1655/447.

[103] Lior M. Burko, Yuk Tung Liu y Soen, Yoav. «Self-force on charges in the spacetime of spherical shells». En: *Phys. Rev. D* **63** (2 2000), pág. 024015. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.024015. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.024015.

[104] Karthik Shankar y Bernard F Whiting. «Self-force of a static electric charge near a Schwarzschild star». En: *Phys. Rev. D* **76** (12 2007), pág. 124027. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.124027. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.124027.

[105] Theodore D. Drivas y Samuel E. Gralla. «Dependence of self-force on central object». En: *Classical and Quantum Gravity* **28**.14 (2011), pág. 145025. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=14/a=145025.

[106] Soichiro Isoyama y Eric Poisson. «Self-force as probe of internal structure». En: *Classical and Quantum Gravity* **29**.15 (2012), pág. 155012. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/29/i=15/a=155012.

[107] B. Allen y A. C. Ottewill. «Effects of curvature couplings for quantum fields on cosmic string space-times». En: *Phys. Rev. D* **42** (1990), 2669-2677. 25 p. URL: http://cds.cern.ch/record/211000.

[108] J.A. Wheeler. *Geometrodynamics*. USA: Academic Press, New York, 1962.

[109] Bernard Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics.* USA: Cambridge University Press, 1982.

[110] John Baez y Javier P. Muniain. *Gauge filds, knots and gravity.* World Scientific, USA y UK, 1994.

[111] S. Krasnikov. «Electrostatic interaction of a pointlike charge with a wormhole». En: *Classical and Quantum Gravity* **25**.24 (2008), pág. 245018. URL: http://stacks.iop.org/0264-9381/25/i=24/a=245018.

[112] Bruno Boisseau y Bernard Linet. «Electrostatics in a simple wormhole revisited». En: *General Relativity and Gravitation* **45**.4 (2013), págs. 845-864. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/s10714-013-1504-2. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10714-013-1504-2.

[113] Peter Taylor. «Self-force on an arbitrarily coupled static scalar particle in a wormhole space-time». En: *Phys. Rev. D* **87** (2 2013), pág. 024046. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.024046. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.024046.

[114] Nail R. Khusnutdinov. «Self-interaction for praticles in the wormhole space-times». En: *Int. J. Mod. Phys. A* **26** (2011), pág. 3868. DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X11054322.

[115] J. Synge. *Relativity: The General Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1960.

[116] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Vol. 1, 3rd Edition. Huston, Texas: Publish or Perish, Inc., 1999.

[117] Roland Haas y Eric Poisson. «Mode-sum regularization of the scalar self-force: Formulation in terms of a tetrad decomposition of the singular field». En: *Phys. Rev. D* **74** (4 2006), pág. 044009. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.044009. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.044009.

[118] Jeffrey M. Cohen y Robert M. Wald. «Point Charge in the Vicinity of a Schwarzschild Black Hole». En: *J. Math. Phys.* **12** (1971), pág. 1845. URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.1665812.

[119] S. A. Fulling, C. Trendafilova, P. Truong y J. Wagner. «Wedges, cones, cosmic strings and their vacuum energy». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **45**.37 (2012), pág. 374018. URL: http://stacks.iop.org/1751-8121/45/i=37/a=374018.

[120] E. T. Copson. «On Electrostatics in a Gravitational Field». En: *Proc. R. Soc. Lond. A* **118** (1928), págs. 184-194.

[121] Watson G. N. Whittaker E. T. *A course of modern analysis; an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions.* p.334, ex.31. Inglaterra: Cambridge: University Press, 1920.

D E C L A R A C I Ó N

Tesis doctoral presentada para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales).

Pabellón I, Ciudad Universitaria (1428) - C.A.B.A - Argentina, Febrero de 2017.

Lic. Emilio Rubín de Celis
(Candidato a Doctor)

Dr. Osvaldo P. Santillán
(Director Asistente de Tesis)

Dr. Claudio M. Simeone
(Director de Tesis)

COLOFÓN

Este documento es la versión final de la tesis doctoral del candidato Lic. Emilio Rubín de Celis, entregada en el mes de Febrero del año 2017 para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas en la Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. El trabajo, el aporte científico y los resultados obtenidos se desarrollaron y llevaron a cabo en el Instituto de Física de Buenos Aires (IFIBA) del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina, con el apoyo de una beca interna doctoral otorgada desde Abril del año 2012 y hasta Marzo del año 2017.

Para contactar al autor escribir a:

erdec@df.uba.ar