

Tesis Doctoral

Fricción cuántica: disipación inducida por las fluctuaciones de vacío

Farias, María Belén

2017-03-28

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Farias, María Belén. (2017-03-28). Fricción cuántica: disipación inducida por las fluctuaciones de vacío. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Farias, María Belén. "Fricción cuántica: disipación inducida por las fluctuaciones de vacío". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017-03-28.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**Fricción cuántica:
disipación inducida por las
fluctuaciones de vacío**

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires área Ciencias Físicas

Lic. María Belén Farias

Director de tesis: Dr. Fernando Lombardo

Consejero de estudios: Dr. Gustavo Otero y Garzón

Lugar de trabajo: Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires e
IFIBA, CONICET.

Buenos Aires, Octubre de 2016

Fecha de defensa: 30 de marzo de 2017

A mamá, papá y Andrés.

“...o simplemente agarrando una tacita de café y mirándola por todos lados, no ya como una taza sino como un testimonio de la inmensa burrada en que estamos metidos todos, creer que ese objeto es nada más que una tacita de café cuando el más idiota de los periodistas encargados de resumirnos los quanta, Planck y Heisenberg, se mata explicándonos a tres columnas que todo vibra y tiembla y está como un gato a la espera de dar el enorme salto de hidrógeno o de cobalto que nos va a dejar a todos con las patas para arriba.”

J. Cortázar, *Rayuela*

Agradecimientos

En primer lugar, obviamente, quiero agradecerle a Fernando. Por haber apostado por mí aun sin conocerme, y haberme dado la oportunidad de trabajar en su grupo. Durante estos cuatro años aprendí mucho, creo que más de lo que pensé que podía a llegar a aprender, me sentí cómoda y me divertí. No creo que se pueda pedir más que eso a un director, pero Fernando también me incentivó a mejorar y superarme en un montón de cosas, desde aprender formalismos nuevos hasta estar como ayudante en Campos, y sobre todo a confiar en lo que sé y en lo que hago. Sinceramente espero que en el futuro sigamos trabajando juntos. Sigue automáticamente agradecer a Diego Mazzitelli y a César Fosco, que sin tener ninguna obligación dedicaron mucho tiempo y energía a explicarme y ayudarme. Esta Tesis no hubiera sido posible sin ellos. A Diego Dalvit, que me invitó dos veces a trabajar con él en Los Álamos, dándome la oportunidad de conocer gente y métodos de trabajo nuevos. A todas las otras personas que se tomaron el tiempo de discutir distintos problemas conmigo en estos años: Juan Pablo Paz, Ricardo Decca, Wilton Kort-Kamp, Juliane Klatt, Stefan Buhmann, y seguramente más gente de la que me olvidó.

Quiero agradecer muy especialmente a Tomi, que siempre trata de ayudarme con todo lo que puede (que es muchísimo), me enseña a hacer cosas pseudo numéricas, me banca cuando entro en crisis, y me acompaña a comer cosas ricas (muy importante). A mis compañeros de oficina, Iván y Flor (y Edgar!), siempre dispuestos a compartirme su café, mate, y experiencias. A Anto, Roby, Yago, Ger, Santi, Maxi, Flor, Neri, Javi, y todos mis amigos de Exactas, compañeros en burocracias, quejas, cansancio, viajes a La Plata, clases, mates, apuntes, menús estudiantiles y, obviamente, cafés. A Sole y Manu, seguimos sumando años, café (Lorelai un poroto), tortas, y nada cambia. Gracias por bancarme siempre, y ayudarme con las reglas gramaticales, siempre supe que era bueno tener amigas de Puan! A Pau, que está lejos pero siempre está presente. A Len y Dani, porque

una no puede pedir más que amigas con las que hacer detirés en frío. Es hermoso tener Tonys con las que compartir las dos grandes áreas de mi vida.

Por último, lo más importante: mi familia. Estoy convencida de que no estaría donde estoy ahora si no fuera por mis papás, Marcelo y Patricia, que siempre me incentivaron a hacerme preguntas, a entender el mundo, y siempre me hicieron sentir que podía hacer lo que quisiera. Gracias por haberme acompañado en este camino que, en algún punto, recién empieza! Gracias también a mis hermanos, mis compañeros incondicionales. Y a Andrés, mi amor, mi mejor amigo, siempre dispuesto a ayudarme, a animarme cuando las cosas salen mal, a ponerse feliz por mis logros, a incentivarme a creer y mejorar. Gracias por ser mi compañero en esta y todas las aventuras.

Resumen

En este trabajo estudiamos las manifestaciones macroscópicas de las fluctuaciones cuánticas de vacío, en particular el efecto conocido como la fricción de Casimir, o fricción cuántica. Este fenómeno se produce cuando dos cuerpos son puestos en movimiento relativo (incluso a velocidad constante), y se observa una fuerza disipativa actuando en sentido contrario al movimiento. Este efecto, al igual que el caso más estudiado de la fuerza atractiva entre dos placas neutras conocido como Efecto Casimir, es el resultado de una interacción efectiva entre los dos cuerpos, mediada por el campo electromagnético fluctuante, que está presente aun cuando los cuerpos son eléctricamente neutros y no están en contacto (por esta razón, a la fricción cuántica también se la denomina fricción sin contacto).

A lo largo de esta tesis analizamos dichos efectos disipativos en distintos sistemas. En primer lugar consideramos el caso más simple en el que el campo de vacío es un campo escalar no masivo y luego extendemos nuestros cálculos al caso más realista en el que el campo de vacío es un campo de Maxwell no masivo. En cuanto a la geometría del sistema, consideramos el caso de dos placas semi-infinitas, dos placas de espesor infinitesimal (en ambos casos con velocidad relativa paralela a los planos), y un átomo frente a una placa dieléctrica moviéndose paralelo a la misma. Muchos de nuestros resultados están expresados en función de las características del material que conforma las placas (o el átomo), por ejemplo su permitividad eléctrica ϵ . Estudiamos con detalle algunos modelos específicos: el caso de un modelo microscópico en el que el material está descrito por un continuo de osciladores armónicos desacoplados de frecuencia fija, y el caso de dos placas de materiales de Dirac bidimensionales (materiales cuyas excitaciones de baja energía se comportan como fermiones de Dirac), particularmente el grafeno.

Desarrollamos un formalismo funcional para la descripción de la fricción cuántica, donde nuestro principal objeto de estudio es la acción efectiva in-out, cuya parte imaginaria da cuenta de los efectos disipativos del sistema. Calculamos la parte imaginaria de la acción efectiva in-out y encontramos que es no nula en un rango no despreciable de velocidades, encontrando la existencia de un umbral que depende de las magnitudes características del sistema, a partir del cual comienza a haber disipación. Para el

caso de las dos placas conformadas por osciladores armónicos desacoplados, calculamos además la acción efectiva CTP (Closed Time Path) o in-in, la que nos permite obtener explícitamente el cuadritensor energía-momento y por lo tanto la fuerza de fricción. En el caso de la partícula frente al plano, estudiamos además la decoherencia del grado de libertad interno de la partícula, encontrando que la presencia de la placa y el movimiento relativo aumenta los efectos de decoherencia propios del vacío, volviéndolos potencialmente detectables experimentalmente.

Paralelamente, estudiamos el problema de un átomo ubicado frente a una placa dieléctrica semi-infinita, moviéndose con velocidad constante pero en una dirección arbitraria (acercándose al plano y con una componente paralela al mismo). Con las herramientas de la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo de la mecánica cuántica, calculamos la fuerza de fricción actuante sobre el átomo.

Palabras claves: Efecto Casimir - Teoría cuántica de campos - Fricción cuántica - Integrales Funcionales - Decoherencia

Abstract

On this work we study one of the macroscopic manifestation of quantum vacuum fluctuations: Casimir friction, or quantum friction. This phenomenon is produced when two bodies are set in relative motion (even if the relative velocity is constant), where a frictional force acts on the bodies, opposed to the motion. This effect, like the more studied case of an attractive force acting between two neutral plates, known as Casimir Effect, is the result of an effective interaction between the two bodies, mediated by the fluctuating electromagnetic field, which is present even when both bodies are electrically neutral and are not in contact (this is the reason why quantum friction is also known as non-contact friction).

Along this thesis we study these dissipative effects on different systems. First we consider the simpler case of modelling the vacuum field with a non-massive scalar field, and then we extend our calculations to the more realistic case where the vacuum field is a non-massive Maxwell field. Concerning the geometry, we consider the case of two semi-infinite plates, two plates with infinitesimal width, and an atom moving in front of a dielectric plane, with velocity parallel to the plate. Many of our results are very general and expressed as a function of the material that conforms the plates (or the atom), for instance their electric permittivity ϵ . We studied with detail some specific models: a microscopic model where the material is described by a continuum of uncoupled harmonic oscillators, and the relevant case of 2D Dirac materials, graphene in particular.

We develop a functional approach to the description of the quantum friction, where our main object of study is the in-out effective action, whose imaginary part accounts for the dissipative effects on the system. We calculate the imaginary part of the in-out effective action, finding that it is non-vanishing in a wide range of velocities. We also find a threshold depending on the characteristic of the materials, and only for velocities above that threshold we have dissipation. For the case of the two plates modelled as a harmonic oscillators, we also calculate the CTP (closed time path) or in-in effective action, which allows us to explicitly obtain the energy-momentum four-tensor, and hence the frictional force. On the case of the particle in front of a plate, we have also studied the decoherence on the internal degree of freedom

of the atom, finding that the presence of the plate and the relative motion enhance the (otherwise undetectable) decoherence effect due to the vacuum, making them potentially experimentally detectable.

We also study the problem of an atom in front of a dielectric semi-infinite plate, moving at a constant velocity but in an arbitrary direction (approaching the plate and with a component parallel to it). With the tools of quantum mechanics' time dependent perturbation theory, we calculate the frictional force acting on the atom.

Keywords: Casimir Effect - Quantum field theory - Quantum Friction - Functional methods - Decoherence

Índice general

I	Introducción	1
1.	Efecto Casimir y fricción cuántica	2
2.	Formalismo Funcional	12
2.1.	Formalismos <i>in-out</i> y Euclídeo	12
2.2.	Formalismo de Schwinger-Keldysh o Camino Temporal Cerrado	16
II	Fricción cuántica entre dos placas paralelas	22
3.	Fricción entre dos espejos imperfectos	23
3.1.	Introducción	23
3.2.	El modelo	24
3.2.1.	Acción efectiva para dos placas interactuando con el vacío	25
3.2.1.1.	Potencial efectivo para la placa móvil	29
3.2.2.	Modelo microscópico del material	30
3.2.3.	Relación entre la función λ y el coeficiente de reflexión del material	32
3.3.	Cálculo de la parte imaginaria de la acción efectiva <i>in-out</i>	34
3.3.1.	Estructura analítica y parte imaginaria	36
3.4.	Cálculo de la fuerza de fricción en el formalismo <i>in-in</i>	41
3.5.	Cálculo de la fuerza de fricción a partir de la acción efectiva	48
3.6.	Límite no retardado	50
3.7.	Conclusiones	51
4.	Fricción entre dos placas de grafeno	54
4.1.	Introducción	54
4.2.	El modelo	56
4.2.1.	Contribución a la acción efectiva debida al espejo estático	57
4.2.2.	Contribución a la acción efectiva debida a la placa móvil	59

4.2.3.	Acción efectiva $\mathcal{S}_v^{(\text{int})}$ para el campo de vacío en presencia de las placas de grafeno	61
4.3.	Acción efectiva para el sistema	63
4.3.1.	Fuerza de Casimir estática entre dos placas de grafeno	66
4.3.2.	Parte imaginaria de la acción efectiva <i>in-out</i>	66
4.4.	Fuerza de fricción	72
4.5.	Conclusiones	75

III Fricción cuántica entre una partícula y una placa 77

5. Fricción y decoherencia sobre una partícula moviéndose paralela a un espejo imperfecto 78

5.1.	Introducción	78
5.2.	Acción efectiva <i>in-out</i> y fricción	80
5.2.1.	El sistema	80
5.2.2.	La acción efectiva <i>in-out</i>	82
5.2.3.	Modelo específico y parte imaginaria	85
5.2.4.	Fuerza de fricción	87
5.3.	Acción de influencia CTP y ecuaciones de movimiento estocásticas	89
5.3.1.	Acción de influencia para la partícula	89
5.3.2.	Nuestro modelo	92
5.3.3.	Ecuaciones de movimiento reales y causales	93
5.4.	Decoherencia del grado de libertad interno de la partícula	95
5.4.1.	Funcional de decoherencia	95
5.4.2.	Cálculo de la parte imaginaria de S_1^{IF}	97
5.4.3.	Cálculo de la parte imaginaria de S_2^{IF}	99
5.4.4.	Estimación del tiempo de decoherencia	102
5.5.	Conclusiones	106

6. Fricción sobre una partícula moviéndose en dirección arbitraria frente a un espejo imperfecto 108

6.1.	Introducción	108
6.2.	El sistema	109
6.3.	Enfoque Markoviano	112
6.3.1.	Dinámica atómica interna	113
6.3.2.	Fuerzas de Casimir-Polder y de Fricción	117

6.4. Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo	122
6.4.1. Dinámica atómica interna	124
6.4.2. Fuerzas de Casimir-Polder y de fricción: segundo orden	127
6.4.3. Fuerzas de Casimir-Polder y de fricción: cuarto orden, vía vacío	128
6.4.4. Fuerzas de Casimir-Polder y de fricción: cuarto orden, vía dos fotones	130
6.5. Conclusiones	131

IV Conclusiones	134
------------------------	------------

Bibliografía	139
---------------------	------------

Índice de figuras

1.1.	Esquema que ilustra el origen de la fuerza de Casimir-Polder entre un átomo y una placa. El dipolo inducido en el átomo por las fluctuaciones del campo electromagnético se refleja en el material, dando lugar a una fuerza atractiva.	4
1.2.	Esquema que ilustra el origen de la fuerza de fricción entre un átomo y una placa en movimiento relativo. Si el material no es un conductor perfecto, se produce un retraso en la imagen reflejada del átomo, dando lugar a una fuerza horizontal que se opone al movimiento del átomo, además de a la fuerza de Casimir-Polder usual.	5
3.1.	Un esquema simple del sistema que estamos estudiando, donde $\phi(x)$ es el campo de vacío y $\psi(x)$ son los grados de libertad internos del material que conforma las placas.	25
3.2.	Singularidades de $f(p_0)$ (Ec. (3.52)) en el plano p_0 complejo. Los polos simples están representados como círculos rellenos, y los cortes como líneas discontinuas. Hemos introducido la notación: $u^\pm = vp_1 \pm \Omega$. . .	38
3.3.	Parte imaginaria de la acción efectiva <i>in-out</i> para placas delgadas, como función de v con $\Omega a = 0,01$. A es el factor global $A = \frac{g^4 T \Sigma (\Omega a)^3 \pi^2}{4a^3 \Omega^6}$. La parte imaginaria de la acción efectiva, y por ende los efectos disipativos, están fuertemente suprimidos para valores pequeños de la velocidad relativa entre las placas.	41
3.4.	Parte imaginaria de la acción efectiva <i>in-out</i> para semiespacios, como función de v , con $\Omega a = 0,01$. A es el factor global $A = \frac{g^4 T \Sigma (\Omega a)^5 \pi^2}{16a^3 \Omega^8}$. La parte imaginaria de la acción efectiva, y por ende los efectos disipativos, están fuertemente suprimidos para valores pequeños de la velocidad relativa entre las placas.	42

3.5.	Módulo de la fuerza de fricción por unidad de área actuante sobre la placa móvil para el caso de placas de espesor infinitesimal, como función de la velocidad relativa v y para $\Omega a = 0,01$. El factor global es $A = \frac{\pi^2 g^4 (\Omega a)^5}{2 \Omega^6 a^4}$. La fuerza de fricción es prácticamente despreciable para valores chicos de la velocidad entre las placas.	47
3.6.	Módulo de la fuerza de fricción por unidad de área actuante sobre la placa móvil para el caso de placas de espesor infinitesimal, como función de la velocidad relativa v y para $\Omega a = 0,01$. El factor global es $A = \frac{g^4 (\Omega a)^5}{16 \Omega^8 \pi a^4}$. La fuerza de fricción es prácticamente despreciable para valores chicos de la velocidad entre las placas.	48
4.1.	Parte imaginaria de la acción efectiva <i>in-out</i> por unidad de superficie y tiempo, como función de la velocidad relativa entre las placas de grafeno, y para una velocidad de Fermi típica $v_F = 0,003$, en unidades de $A = \frac{\alpha_N^2}{32 \pi^2} \frac{1}{a^3}$	72
4.2.	Norma de las contribuciones transversal y longitudinal a la fuerza por unidad de área F_{fr} actuando en la placa móvil de grafeno, como función de su velocidad v , y para una velocidad de Fermi típica $v_F = 0,003$. La fuerza está normalizada por la fuerza de Casimir estática entre las placas.	74
4.3.	Norma de la fuerza por unidad de área que actúa en la placa móvil como función de su velocidad relativa, para velocidades cercanas a la velocidad de Fermi del grafeno $v_F = 0,003$. La fuerza está normalizada por la fuerza de Casimir estática entre las placas.	74
5.1.	Un esquema simple del sistema que estamos estudiando, donde $\phi(x)$ es el campo de vacío, $\psi(x)$ son los grados de libertad internos del material, y $q(t)$ es el grado de libertad interno de la partícula, que sigue una trayectoria macroscópica $z(t)$ en la dirección x_1	81
5.2.	Parte imaginaria de la acción efectiva como función de v , para $\tilde{\Omega} = \Omega a = 0,01$ y $\lambda = 0,01$, en unidades de $g^2 a^4$	87
5.3.	Norma de la fuerza actuante sobre la partícula como función de v , para $\tilde{\Omega} = \Omega a = 0,01$ y $\lambda = 0,01$, en unidades de $g^2 a^3$	88
5.4.	Estimación del tiempo de decoherencia para el grado de libertad interno de la partícula, en unidades de un factor global $A = \frac{g^2 \Delta q_0^2}{2}$, como función de la velocidad relativa v ; para $\tilde{\omega}_0 = 0,03$	103

5.5. Estimación del tiempo de decoherencia para el grado de libertad interno de la partícula, en unidades de un factor global $A = \frac{g^2 \Delta q_0^2}{2}$, como función de la frecuencia adimensionalizada del material $\tilde{\Omega}$; para $\tilde{\omega}_0 = 0,03.104$

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Efecto Casimir y fricción cuántica

La naturaleza cuántica de los sistemas microscópicos puede, bajo ciertas circunstancias especiales, manifestarse en la forma de interesantes efectos macroscópicos. Entre las diversas características que distinguen a los fenómenos cuánticos, muchas de las cuales desafían a nuestra intuición cotidiana, se destacan las fluctuaciones de vacío. Las mismas son de interés en diversas ramas de la física, y explican una gran cantidad de fenómenos: desde el corrimiento Lamb en los niveles atómicos hasta la radiación de Hawking en los agujeros negros, pasando por las fuerzas de Van der Waals entre átomos y moléculas, fuerzas de Casimir-Polder entre átomos y superficies conductoras, fuerzas de contacto en nanodispositivos, fuerzas de Casimir entre conductores neutros, etc. Es posible que también sean relevantes en el problema de la energía oscura en astrofísica y en la formulación de los modelos cosmológicos inflacionarios.

Las fluctuaciones de punto cero del campo electromagnético no producen ningún efecto observable en el espacio libre, pero este hecho cambia drásticamente cuando se imponen condiciones de contorno no triviales en el campo. En el efecto Casimir y los fenómenos relacionados, aparece una fuerza entre dos cuerpos macroscópicos *neutrales* [1–3]. Este efecto ha sido predicho por primera vez para el caso de dos placas conductoras perfectas [4]: en 1948, H. Casimir demostró que, debido a las fluctuaciones del campo electromagnético en vacío, dos placas paralelas, conductoras y descargadas deberían atraerse. En las décadas siguientes, el efecto Casimir se convirtió en un tema interdisciplinario dentro de la física, ya que juega un rol importante en diversas áreas como Teoría de Campos, Óptica Cuántica, Materia Condensada, Física Atómica y Molecular, Gravitación, Cosmología y Física Matemática. Las mediciones exitosas de la fuerza de Casimir entre dos placas conductoras [5] y de la fuerza de Casimir-Polder entre un átomo y una placa, son algunos de los resultados de investigaciones más

impresionantes acerca del vacío cuántico y la manera en la que puede manipularse a través de condiciones de contorno impuestas por cuerpos macroscópicos.

Efectos cualitativamente diferentes, también debidos a las fluctuaciones de vacío, pueden tener lugar cuando los cuerpos son puestos en movimiento o, de manera más general, cuando algún agente externo produce una dependencia temporal en las condiciones de contorno. El efecto resultante puede involucrar disipación y, si las condiciones de contorno experimentan aceleraciones no-nulas, se pueden excitar fotones *reales* a partir del vacío cuántico. En esto consiste la versión más frecuentemente considerada del llamado Efecto Casimir Dinámico (DCE, por sus siglas en inglés), que ha sido ampliamente estudiado de manera teórica [6]. Su verificación experimental es complicada debido a que el número de fotones creado es apreciable sólo para propiedades que varían muy rápidamente con el tiempo. A pesar de ello, el DCE ha sido observado experimentalmente hace algunos años [7], utilizando una guía de ondas superconductor en cuyo extremo se coloca un dispositivo superconductor de interferencia cuántica (SQUID, por sus siglas en inglés). Al aplicar un flujo de campo magnético variable sobre el SQUID, se genera una condición de contorno dependiente del tiempo, con la subsecuente excitación del campo (creación de partículas) en la guía de ondas [8]. También puede utilizarse un conjunto de SQUIDs para medir el DCE, simulando ya no un espejo móvil sino un índice de refracción dependiente del tiempo, ver Ref. [9].

La creación de fotones en cavidades con propiedades electromagnéticas dependientes del tiempo es una consecuencia de la interacción entre las fluctuaciones cuánticas del vacío y las condiciones externas variables. La creación de fotones debida a espejos acelerados comenzó a estudiarse debido a su analogía con la radiación de Hawking (evaporación de agujeros negros) y luego se desarrolló por su interés intrínseco. Es un efecto en general muy débil, que ocurre más generalmente cuando campos cuánticos están en presencia de fondos no triviales (por ejemplo un campo gravitacional dependiente del tiempo en modelos cosmológicos o colapso gravitacional). El efecto puede aumentarse notablemente por amplificación paramétrica cuando la frecuencia de variación de los parámetros externos es un múltiplo de alguna de las autofrecuencias del campo en la cavidad.

Otro efecto que ha recibido mucha atención, y a cuyo estudio nos abocaremos a lo largo de esta Tesis, es la fricción entre dos cuerpos en movimiento relativo a velocidad constante, presente aun cuando los mismos *no están en contacto*. Este fenómeno se manifiesta, por ejemplo, en el caso de dos espejos planos imperfectos en movimiento paralelo, donde una fuerza de fricción es generada por el desfase entre las corrientes

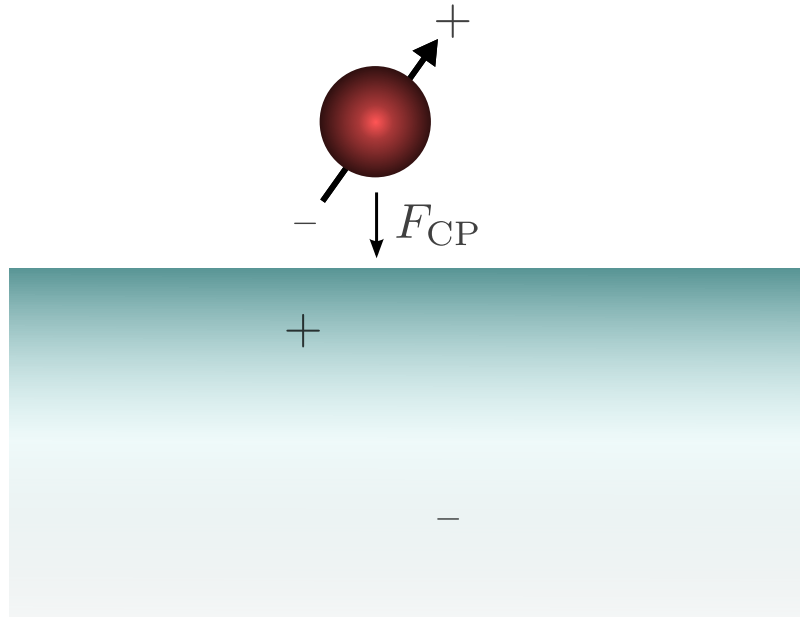


Figura 1.1: Esquema que ilustra el origen de la fuerza de Casimir-Polder entre un átomo y una placa. El dipolo inducido en el átomo por las fluctuaciones del campo electromagnético se refleja en el material, dando lugar a una fuerza atractiva.

inducidas por las fluctuaciones. Dicho desfase no está presente en el caso de espejos perfectos [10]. Este efecto ha sido largamente analizado y debatido [11], utilizando diferentes métodos teóricos, principalmente para el caso de medios materiales semi-infinitos, moviéndose con velocidad relativa constante, manteniendo fija la separación entre sus caras planas y paralelas. [12]. Una situación diferente, que también genera fricción, es debida al efecto Cerenkov cuántico entre medios no dispersivos [13] que se mueven con una velocidad constante que sobrepasa un cierto umbral determinado por la velocidad de la luz en el medio. En cualquier caso, el efecto puede ser interpretado en términos del intercambio de fotones virtuales entre los dos cuerpos, que como resultado excitan sus grados de libertad internos.

Consideremos por un momento otro de los sistemas paradigmáticos de estudio que hemos mencionado: el caso de un átomo o partícula polarizable frente a un espejo imperfecto. Comencemos considerando el caso en el que el átomo está quieto, que ilustramos en la Figura 1.1. Una manera de interpretar el surgimiento de la fuerza de Casimir-Polder es la siguiente: las fluctuaciones del campo EM de vacío generan un dipolo fluctuante en el átomo, el cual a su vez polariza el espejo, generando un dipolo imagen en su interior. Es decir, el campo reflejado por la superficie es equivalente al campo producido por una distribución de carga fluctuante, la cual es idéntica a la del átomo pero de signo opuesto en el caso en el que el espejo sea un conductor

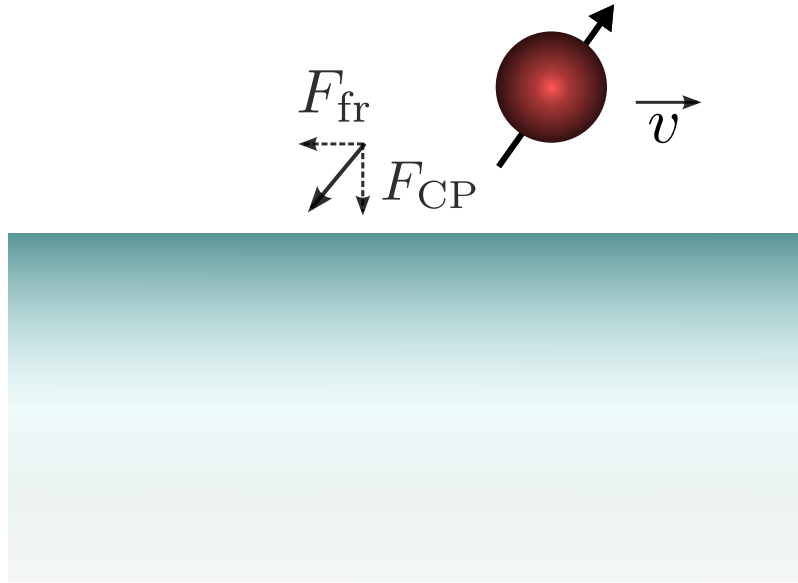


Figura 1.2: Esquema que ilustra el origen de la fuerza de fricción entre un átomo y una placa en movimiento relativo. Si el material no es un conductor perfecto, se produce un retraso en la imagen reflejada del átomo, dando lugar a una fuerza horizontal que se opone al movimiento del átomo, además de a la fuerza de Casimir-Polder usual.

perfecto. Cuando el dipolo del átomo oscila, el dipolo del átomo reflejado también lo hace. Como las dos oscilaciones están correlacionadas, se produce una interacción dipolo-dipolo finita y, por lo tanto, una fuerza atractiva – la fuerza de Casimir-Polder. La dirección de esta fuerza estará dada por la línea que une al átomo con su imagen reflejada.

Supongamos ahora que, como se muestra en la Figura 1.2, el átomo se pone en movimiento con respecto a la placa. Si el material que forma la placa es un conductor perfecto, las cargas inducidas se reacomodan de manera instantánea, formando una imagen del átomo que siempre se encuentra exactamente debajo de éste, de modo que la situación es virtualmente la misma que en el caso en el que el átomo está en reposo. Ahora bien, cuando el espejo es imperfecto, existe un desfase entre el átomo y su imagen reflejada, debido a que las cargas inducidas no pueden reacomodarse de manera instantánea para adaptarse a la posición actual del átomo. Esto es equivalente a decir que los campos inducidos por las imágenes reflejadas en tiempos previos alcanzan al átomo en su posición actual, generando una fuerza ‘inclinada’. La fuerza continúa apuntando en la línea que une al átomo con su imagen reflejada, pero ahora, además de la fuerza de Casimir-Polder vertical, aparece una contribución horizontal que se opone al movimiento del átomo, desacelerándolo. Esta componente horizontal de la fuerza, presente sólo si el medio material es dispersivo, es la fuerza de fricción

cuántica.

Por supuesto, esto no es más que una manera sencilla, casi pictórica, de entender el origen de la fricción cuántica. Para hacer un análisis un poco más riguroso, consideremos el caso de dos placas dieléctricas paralelas moviéndose con velocidad relativa constante, que se ilustra en el *review* de la Ref. [14]. Seguiremos el enfoque introducido por Pendry [10], quien consideró el caso más simple de temperatura nula y límite no-retardado. La ventaja de este enfoque es que se conecta de manera manifiesta con la noción intuitiva de que el movimiento induce la creación de fotones virtuales, que funcionan como mediadores del intercambio de momento entre las superficies. Como ya mencionamos anteriormente e ilustramos en el caso de la partícula frente a la placa, el material dieléctrico, pese a ser eléctricamente neutro, experimenta fluctuaciones cuánticas de carga en su interior, las cuales se reflejan en la superficie de la otra placa dieléctrica. Debido al movimiento relativo entre las superficies, las imágenes se retrasan con respecto a la distribución de carga que las generó, resultando en una fuerza de fricción (que no está presente para metales perfectos ideales).

Modelaremos cada uno de los dieléctricos con un continuo de osciladores armónicos, cuyo Hamiltoniano es

$$\hat{H}_\alpha = \sum_{\mathbf{k}, j} \hbar \omega_{\alpha; \mathbf{k}, j} \left(\hat{a}_{\alpha; \mathbf{k}, j}^\dagger \hat{a}_{\alpha; \mathbf{k}, j} + 1/2 \right), \quad (1.1)$$

donde $\hat{a}_{\alpha; \mathbf{k}, j}^\dagger$ y $\hat{a}_{\alpha; \mathbf{k}, j}$ son los operadores de creación y destrucción bosónicos asociados a la placa superior ($\alpha = R$) o inferior ($\alpha = L$). Cada modo en cada superficie está definido por \mathbf{k} , que es un vector de onda paralelo a la superficie plana, y por j , que denota grados de libertad perpendiculares a la superficie.

Siguiendo a Pendry, nos restringiremos al límite no-retardado (es decir, longitudes de onda muy largas para los modos del campo EM). En este límite el campo EM es prácticamente electrostático, sólo importan los modos TM estáticos de polarización (debido a que el campo TE estático es esencialmente un campo magnético que no interactúa con la superficie no-magnética), y la intensidad decae exponencialmente al alejarse de las superficies (campos evanescentes). El acoplamiento entre los modos oscilatorios que pertenecen a superficies distintas está mediado por el campo EM, y asumiremos que es una interacción posición-posición de la forma:

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \sum_{\mathbf{k}, j, j'} C_{\mathbf{k}, j, j'}(a) \hat{x}_{R, \mathbf{k}, j} \otimes \hat{x}_{L, \mathbf{k}, j'} e^{-ik_x vt}. \quad (1.2)$$

En el límite no-relativista el efecto del desplazamiento relativo de las superficies con velocidad v a lo largo de la dirección x está contenido en el último factor exponencial.

Este tipo de Hamiltoniano puede obtenerse de dos maneras alternativas: considerando la interacción electrostática efectiva entre cargas fluctuantes en los dieléctricos y su expansión al orden más bajo en el desplazamiento de cada oscilador con respecto a su posición de equilibrio, o utilizando el límite no-retardado y estático de la interacción dipolo-dipolo entre dipolos fluctuantes de cada superficie. Los factores de acoplamiento $C_{\mathbf{k},j,j'}(a)$ (con a la distancia entre las placas) pueden ser obtenidos analizando la manera en la que cada oscilador disipa energía en el vacío entre las placas. Esto fue hecho en la Ref. [10] de dos formas distintas: invocando un enfoque tipo *scattering* que relaciona los campos en las interfaces mediante amplitudes de reflexión, y considerando la manera en la que las distribuciones de carga fluctuantes en cada superficie disipan energía. El resultado es

$$C_{\mathbf{k},j,j'}(a) = \frac{\beta_{\mathbf{k}j}\beta_{\mathbf{k}j'}}{2k\varepsilon_0} e^{-|k|a}, \quad (1.3)$$

donde aparece explícitamente un decaimiento exponencial debido a la naturaleza evanescente del campo EM, y

$$\beta_{\mathbf{k}j}^2 = \left(\frac{dN}{d\omega} \right)^{-1} \frac{4k\omega\varepsilon_0}{\pi} \text{Im} \left[\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right]. \quad (1.4)$$

Aquí $dN/d\omega$ es la densidad de modos de oscilación de frecuencia ω , y $\varepsilon(\omega)$ es la permitividad dieléctrica compleja de las placas (que asumimos idénticas).

Si bien el Hamiltoniano de interacción no depende explícitamente del campo EM cuantizado (dado que esta derivación es semiclásica), uno puede inferir el proceso cuántico de creación y absorción que tiene lugar expandiendo el producto $\hat{x}_{R,\mathbf{k},j} \otimes \hat{x}_{L,\mathbf{k},j'}$:

$$\hat{x}_{R,\mathbf{k},j} \otimes \hat{x}_{L,\mathbf{k},j'} = -\frac{1}{2} \left(\hat{a}_{R,\mathbf{k},j}^\dagger - \hat{a}_{R,\mathbf{k},j} \right) \otimes \left(\hat{a}_{L,\mathbf{k},j'}^\dagger - \hat{a}_{L,\mathbf{k},j'} \right). \quad (1.5)$$

Imaginemos que el sistema de los dos dieléctricos está inicialmente en su estado inicial $|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_g\rangle_R \otimes |\Psi_g\rangle_L$, donde $|\Psi_g\rangle_\alpha = \prod_{\mathbf{k},j} |\Psi_{g,\mathbf{k},j}\rangle_\alpha$ es el producto de los estados fundamentales de todos los osciladores armónicos que conforman la superficie α . La ecuación anterior implica que dos fotones creados a partir del campo EM de vacío a causa del movimiento producen una excitación en cada superficie, es decir, hay una probabilidad no nula de transición a estados $|1; \mathbf{k}, j\rangle_R \otimes |1; \mathbf{k}, j'\rangle_L$. Dicha probabilidad de transición puede ser evaluada utilizando la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo de la mecánica cuántica, para una perturbación $\hat{H}_{\text{int}}(t)$. A primer orden, la probabilidad de transición del estado fundamental a cada uno de estos estados doblemente excitados es

$$P_{\mathbf{k}j,j'}(t) = \frac{\beta_{\mathbf{k}j}^2 \beta_{\mathbf{k}j'}^2}{4k^2 \varepsilon_0^2} \frac{e^{-2|k|a}}{4\omega_{R,\mathbf{k}j} \omega_{L,-\mathbf{k}j'}} \frac{4 \sin^2 [(\omega_{R,\mathbf{k}j} + \omega_{L,-\mathbf{k}j'} - k_x v) t / 2]}{(\omega_{R,\mathbf{k}j} + \omega_{L,-\mathbf{k}j'} - k_x v)^2}. \quad (1.6)$$

En el límite de tiempos largos (mucho tiempo después de que las placas se pusieron en movimiento, $t \rightarrow \infty$)

$$\frac{\sin^2(\Omega t/2)}{(\Omega/2)^2} \rightarrow \pi t \delta(\Omega), \quad (1.7)$$

por lo que la probabilidad de transición crece linealmente con el tiempo.

Podemos encontrar la fuerza de fricción igualando el trabajo disipativo $F_x v$ con la tasa de cambio en el tiempo de la energía de las excitaciones, es decir

$$F_x v = \frac{dU}{dt} = \sum_{\mathbf{k}j j'} \hbar (\omega_{R, \mathbf{k}j} + \omega_{L, -\mathbf{k}j'}) \frac{dP_{\mathbf{k}j j'}}{dt}, \quad (1.8)$$

y el miembro derecho es independiente del tiempo ya que las probabilidades de transición son lineales en éste. Usando las expresiones 1.4 para $\beta_{\mathbf{k}j}^2$ y las probabilidades de transición 1.6 a tiempos largos, y escribiendo las sumas sobre los grados de libertad dieléctricos j como $\sum_j = \int_0^\infty d\omega dN/d\omega$ (lo mismo para j'), obtenemos la expresión final para la fuerza de fricción

$$F_x = \frac{\hbar}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_x e^{-2|k|a} \int_0^{k_x v} d\omega \text{Im} \left[\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right] \text{Im} \left[\frac{\varepsilon(k_x v - \omega) - 1}{\varepsilon(k_x v - \omega) + 1} \right]. \quad (1.9)$$

Existen, sin embargo, enfoques más rigurosos a la hora de obtener la fuerza de fricción actuante entre dos placas en movimiento relativo. En la Parte II de esta Tesis encararemos este problema utilizando métodos funcionales de la teoría de campos. En el Capítulo 3, al igual que en el ejemplo discutido en los párrafos anteriores, utilizaremos un modelo de juguete en el que los grados de libertad de las placas son osciladores armónicos cuánticos que no interactúan entre sí, pero sí lo hacen con el campo del vacío. El mismo será modelado como un campo escalar no masivo que representa la componente A_0 del campo electromagnético. Esta aproximación es equivalente a trabajar en el límite cuasi-estático, y seguiremos restringiéndonos al caso con temperatura nula. No nos limitaremos, sin embargo, al régimen no-retardado, aunque sí consideraremos velocidades relativas mucho más chicas que la velocidad de la luz, lo que nos permitirá usar transformaciones de Galileo para pasar del sistema donde la placa L está en reposo, a aquél en el que la placa R lo está. Consideraremos el caso en el que el espesor de las placas es infinitesimal, y el caso en el que las mismas son semi-espacios.

Encontraremos la fuerza que actúa sobre la placa móvil utilizando dos métodos complementarios que, creemos, arrojan nueva luz sobre este interesante fenómeno desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos. En primer lugar, calcularemos

la acción efectiva *in-out*, que está relacionada con la probabilidad de decaimiento del vacío y por lo tanto da cuenta de los efectos disipativos sobre el sistema. Para ello integraremos en primer lugar los grados de libertad internos de las placas, obteniendo una acción que contiene la influencia de los mismos sobre el campo de vacío, integrando finalmente también sobre éste. Luego mostraremos una manera general para obtener la potencia disipada a partir de la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*, lo que permite calcular la fuerza de fricción. Por otro lado, calcularemos el propagador en el formalismo de camino temporal cerrado (*CTP* por sus siglas en inglés) para el campo de vacío acoplado a los grados de libertad internos del material, y evaluaremos el valor medio del tensor energía-momento en el estado de vacío. A partir del mismo calcularemos la fuerza que actúa sobre la placa móvil, y corroboraremos que coincide con el resultado obtenido mediante la acción efectiva. Estudiaremos la manera en la que los efectos disipativos dependen de la velocidad relativa entre las placas y de las propiedades del material que las conforma.

Luego, en el Capítulo 4, buscaremos mejorar nuestro modelo de estudio. Para ello consideraremos, por un lado, el campo electromagnético completo, descrito por el campo de Maxwell A_μ , en lugar de un campo escalar que modele su componente A_0 . Además, recordando que la mayoría de las predicciones de la fricción de Casimir han sido hechas para materiales dieléctricos, estudiaremos el efecto para dos placas de grafeno, cumpliendo además el objetivo de utilizar un modelo más realista para el material que conforma las placas. En nuestro estudio comenzaremos considerando el modelo microscópico que describe las dos placas de grafeno acopladas al campo EM. Estos grados de libertad microscópicos, que corresponden a campos de Dirac no masivos en $2 + 1$ dimensiones, serán integrados funcionalmente, resultando en una acción que da cuenta de la influencia de las placas sobre el campo EM. Luego integraremos también el campo de gauge, obteniendo una acción efectiva *in-out* para el sistema completo, cuya parte imaginaria da cuenta de los efectos disipativos en el sistema y nos permitirá encontrar finalmente la fuerza que actúa sobre la placa móvil.

Como mencionamos anteriormente, otro sistema paradigmático para el estudio de la fricción cuántica es el de una partícula moviéndose frente a un plano (conductor imperfecto o dieléctrico). En la Parte III de esta Tesis estudiaremos este tipo de sistema. La fuerza de fricción que actúa sobre la partícula ha sido calculada utilizando varios métodos teóricos y modelos diferentes [15–20]. Si bien es claro que esta fuerza es una consecuencia macroscópicamente observable muy interesante de la naturaleza cuántica de los sistemas microscópicos, las fuerzas de fricción y de Casimir-Polder no son los únicos efectos de las fluctuaciones cuánticas del vacío. Como cualquier sistema

cuántico que interactúa con un entorno, el átomo sufrirá un proceso de decoherencia, cuyo estudio es también clave para entender la manera en la que las propiedades cuánticas de un sistema se manifiestan macroscópicamente. Pese a que el campo de vacío es un entorno que no puede ser apagado, en ninguno de los diversos estudios de la fricción cuántica sobre una partícula que se mueve frente a un plano se han considerado los efectos de decoherencia. Estos dos fenómenos están obviamente relacionados, y la decoherencia de algún grado de libertad de la partícula podría ser, eventualmente, más fácil de medir que la fuerza de fricción, permitiendo de este modo detectar indirectamente los efectos disipativos producidos por las fluctuaciones del vacío.

Por esta razón, en el Capítulo 5 de esta Tesis consideraremos una partícula neutra que se mueve en frente de un espejo imperfecto, con velocidad constante y paralela al mismo, y estudiaremos, además de la fricción cuántica, la decoherencia de su grado de libertad interno. Para simplificar nuestros cálculos, volveremos a modelar el campo de vacío como un campo de Klein-Gordon no masivo, y el material que conforma la placa como un conjunto de osciladores armónicos. Utilizaremos, nuevamente, métodos funcionales, primero en el espacio de Minkowski para calcular la fuerza de fricción, y luego, con ayuda del formalismo de Schwinger-Keldysh, calcularemos la funcional de influencia para la partícula, que contiene el efecto de su interacción con la placa mediada por el campo EM. Estimaremos el tiempo de decoherencia para el grado de libertad interno del átomo, analizando la manera en la que depende de la presencia de la placa, de las propiedades del material que la conforman, y de la velocidad relativa entre ambos objetos.

Tanto los resultados que encontraremos en los capítulos siguientes de esta Tesis como los que pueden hallarse en la literatura mencionada, coinciden en el hecho de que la fuerza de fricción para movimientos paralelos, sea entre placas o entre un átomo y una placa, es demasiado chica como para poder ser detectada experimentalmente. En un trabajo reciente [21] se encontró que las correcciones a la dinámica interna de un átomo – es decir, a los corrimientos de sus niveles de energía y a las tasas de decaimiento – son significativamente mayores cuando el átomo se mueve en forma vertical hacia o desde la superficie de una placa, en lugar de paralelamente a la misma. Esto nos motiva a preguntarnos si lo mismo puede ocurrir para el caso de la fricción cuántica, ya que de ocurrir un cambio cualitativo similar podría facilitarse la accesibilidad experimental de la elusiva fuerza de fricción de Casimir. Con esto en mente, en el Capítulo 6 generalizaremos los resultados obtenidos en la literatura y en el Capítulo 5 al caso de un átomo que se mueve con una trayectoria rectilínea

y a velocidad constante, pero en una dirección arbitraria en la proximidad de una superficie dieléctrica o metálica. En lugar de utilizar el formalismo funcional que está presente en el resto de esta Tesis, se compararán y contrastarán dos enfoques diferentes, de amplio uso en la literatura: ecuaciones maestras Markovianas y teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. Obtendremos la fuerza de fricción y la fuerza de Casimir-Polder hasta cuarto orden en la constante de acoplamiento entre el átomo y el campo electromagnético.

Todos los resultados y conclusiones obtenidos a lo largo de esta Tesis, que pueden hallarse además en las Refs. [22–25], serán resumidos en el Capítulo IV.

Capítulo 2

Formalismo Funcional

2.1. Formalismos *in-out* y Euclídeo

El objetivo de este Capítulo es repasar algunas nociones de la teoría de campos que nos serán de utilidad a la hora de estudiar la física de los fenómenos de Casimir, en particular la fricción cuántica. Consideremos, por simplicidad, un único campo φ en $3 + 1$ dimensiones, descrito por una acción clásica $S[\varphi]$. Podemos definir la amplitud de persistencia del vacío en presencia de una fuente clásica J como

$$\mathcal{Z}[J] = e^{iW[J]} = \langle 0, \text{out} | 0, \text{in} \rangle_J , \quad (2.1)$$

donde hemos utilizado unidades en las que $\hbar = c = 1$, y los estados $|0, \text{in}\rangle$ y $|0, \text{out}\rangle$ son estados asintóticos de vacío cuando $t \rightarrow \pm\infty$, respectivamente.

Podemos escribir la amplitud de persistencia del vacío como una integral funcional, y resulta

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] + \int d^4x J(x)\varphi(x)} . \quad (2.2)$$

Derivando funcionalmente la funcional generatriz se obtiene el elemento de matriz del operador de campo en los estados asintóticos de vacío:

$$\left. \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = \langle 0, \text{in} | \varphi(x) | 0, \text{out} \rangle . \quad (2.3)$$

Si los estados en $t \rightarrow \pm\infty$ coinciden, este procedimiento resulta en el valor medio del campo en el estado asintótico.

Las ecuaciones anteriores son de importancia central para la aplicación de integrales funcionales a la teoría cuántica de campos. Sin embargo, debido a la presencia de exponenciales oscilatorias, su convergencia no siempre está garantizada. La prescripción habitual que garantiza la convergencia, seleccionando el estado fundamental por medio de un corrimiento en $i\epsilon$, muchas veces lleva a importantes complicaciones

a la hora de realizar cálculos explícitos. Es por eso que puede ser útil, en muchos casos, realizar una rotación de Wick hacia tiempos imaginarios $t \rightarrow ix_0$. Esto nos permite definir la funcional generatriz en el *espacio Euclídeo*. En ausencia de corrientes externas, podemos escribir:

$$\mathcal{Z}_E[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_E[\varphi]}, \quad (2.4)$$

donde $S_E[\varphi]$ es la acción para el campo rotada al espacio Euclídeo.

Dentro de la física de Casimir, la funcional generatriz resulta de utilidad debido a que nos permite calcular la energía de punto cero de un sistema. Para ello supongamos que la acción del sistema puede escribirse como:

$$S_E[\varphi] = S_0[\varphi] + S_{\text{eff}}[\varphi], \quad (2.5)$$

donde $S_0[\varphi]$ es la acción del campo libre, y $S_{\text{eff}}[\varphi]$ tiene en cuenta la presencia de otros campos con los que interactúa, o condiciones de contorno, o cualquier tipo de potencial que afecte al campo. Entonces, la densidad energía de punto cero del campo puede calcularse como:

$$\mathcal{E}_0 = \lim_{T,L \rightarrow \infty} \frac{1}{TL^3} \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0}, \quad (2.6)$$

donde

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S_E[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0[\varphi]}}. \quad (2.7)$$

Consideraremos a continuación un breve ejemplo, que puede encontrarse en la Ref. [26], que servirá como una primera aproximación a los problemas que estudiaremos en los capítulos siguientes, y que nos permitirá ilustrar la utilización de métodos funcionales para la resolución de este tipo de problemas.

Consideremos entonces un único espejo plano sujeto a algún movimiento no-relativista, acoplado a un campo escalar real φ (que representa al campo de vacío) en $3 + 1$ dimensiones. Denotaremos a las coordenadas del espacio Euclídeo como x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), y elegimos el sistema de referencia de manera que el espejo ocupa siempre un plano $x_3 = \text{cte}$, donde esa constante será independiente del tiempo en principio. Las coordenadas dentro del plano ocupado por el espejo serán denominadas $x_{\parallel} \equiv (x_1, x_2)$. Notemos que si el espejo se mueve de manera completamente paralela, el plano que ocupa es invariante, pero las coordenadas x_{\parallel} de los puntos dentro del espejo sí cambiarán. Si el movimiento tiene una dirección constante, podemos llamar x_1 a la dirección de dicho movimiento y por lo tanto sólo esas coordenadas

podrán tener una dependencia temporal, es decir que el movimiento quedará determinado por $x_1 = q_{\parallel}(x_0)$. Si el movimiento, en cambio, es completamente perpendicular al plano, también alcanzará con una única función del tiempo para describirlo, $x_3 = q_{\perp}(x_0)$.

El campo de vacío φ está acoplado a los grados de libertad internos del material, descritos por un campo genérico ψ que vive en el espacio-tiempo de 2+1 dimensiones ocupado por el espejo en su evolución temporal. Definimos la *acción efectiva* Γ para las coordenadas del espejo, debida a las fluctuaciones cuánticas de los campos φ y ψ . Esta acción efectiva será una funcional de q_{\perp} y q_{\parallel} , las variables clásicas que describen la posición macroscópica del espejo. Se calcula a partir de la funcional generatriz:

$$\mathcal{Z}_E \equiv e^{-\Gamma(q_{\perp}, q_{\parallel})} = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\psi e^{-S_0(\varphi) - S_m^{(0)}(\psi) - S_m^{(\text{int})}(\varphi, \psi)}, \quad (2.8)$$

donde S_0 es la acción del campo de vacío en ausencia del espejo, que en este caso corresponde a un campo escalar real libre:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial\varphi)^2 + m^2\varphi^2]. \quad (2.9)$$

Por otro lado, $S_m^{(0)}$ denota la acción libre para los grados de libertad microscópicos del material, mientras que $S_m^{(\text{int})}$ es el término que los acopla al campo de vacío.

Una manera conveniente de encontrar una expresión para la acción efectiva Γ consiste en realizar las integraciones de los dos campos relevantes en dos pasos sucesivos. Considerando primero los grados de libertad microscópicos de los espejos, y bajo las suposiciones habituales de que el medio se comporta de manera lineal, uno puede quedarse sólo con los términos cuadráticos que resultan de dicha integral, es decir

$$e^{-\Gamma(q_{\perp}, q_{\parallel})} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi) - S_I(\varphi)}, \quad (2.10)$$

donde

$$S_I(\varphi) = \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \varphi(x') V(x, x') \varphi(x). \quad (2.11)$$

En la Ec. (2.10) hemos descartado un término que, pese a ser independiente de φ , podría, para movimientos no-rígidos del espejo, dar cuenta de la excitación de los grados de libertad internos del mismo debido a la aceleración del espejo. Estos efectos no inerciales, descritos en [27], no van a ser tenidos en cuenta aquí ni en ningún capítulo de esta Tesis, ya que estamos interesados en efectos en los que las fluctuaciones de vacío sean relevantes.

En cuanto a la forma de $V(x, x')$, dado que tanto $S_m^{(0)}$ como $S_m^{(int)}$ están localizados en el espacio ocupado por el espejo, podemos escribir

$$V(x, x') = \delta(x_3 - q_\perp(x_0)) \Lambda(x_0, x_\parallel; x'_0, x'_\parallel) \delta(x'_3 - q_\perp(x'_0)) , \quad (2.12)$$

donde Λ es una función que debe aun ser especificada o determinada a partir del modelo microscópico. Sí podemos garantizar que, *en un sistema en el que el espejo no tiene ningún movimiento paralelo*, es razonable asumir que Λ será no-local sólo en el tiempo, es decir

$$\Lambda(x_0, x_\parallel; x'_0, x'_\parallel) = \lambda(x_0 - x'_0) \delta^{(2)}(x_\parallel - x'_\parallel) . \quad (2.13)$$

La suposición simplificadora de que $\Lambda(x_0, x_\parallel; x'_0, x'_\parallel)$ es no-local sólo en el tiempo es equivalente a asumir que los coeficientes de reflexión y transmisión del espejo sólo pueden ser función de la frecuencia, y no de la componente paralela del momento de las ondas del campo escalar incidentes, suposición habitual en la literatura. En otras palabras, las fluctuaciones de ψ sólo dependen del tiempo, no se propagan en la dirección paralela.

El hecho de que Λ adopte su forma más simple en un sistema comóvil requiere, quizá, una clarificación extra: Λ describe la correlación, *mediada por el campo microscópico*, de dos fluctuaciones del campo φ localizadas en el espacio-tiempo ocupado por el espejo. En un sistema comóvil, esta correlación dependerá sólo de la diferencia entre los tiempos de observación, dado que las propiedades del medio se asumen independientes del tiempo.

Como ejemplo concreto, en el sistema comóvil uno puede considerar un espejo en $x_3 = 0$, compuesto por osciladores armónicos desacoplados unidimensionales $Q(x_\parallel, x_0)$, cada uno acoplado a φ en su respectiva posición, es decir

$$\begin{aligned} S_m^{(0)} &= \frac{1}{2} \int dx_0 \int d^2x_\parallel \left[\dot{Q}(x_\parallel, x_0)^2 + \Omega^2 Q(x_\parallel, x_0)^2 \right] \\ S_m^{int} &= ig \int d^4x Q(x_\parallel, x_0) \delta(x_3) \varphi(x_0, x_\parallel, x_3) , \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde Ω y g son constantes positivas. Es fácil chequear que, en este caso, la integración sobre los grados de libertad del espejo produce un término de interacción S_I con una función de dos puntos $\Lambda(x_0, x_\parallel; x'_0, x'_\parallel)$ de la forma dada en la Ec. (2.13), con

$$\lambda(x_0 - x'_0) = \frac{g^2}{2\Omega} e^{-\Omega|x_0 - x'_0|} . \quad (2.15)$$

En el límite en el que las oscilaciones se vuelven extremadamente rígidas, esto es, cuando $\Omega \rightarrow \infty$, se obtiene una interacción local en el tiempo:

$$\lambda(x_0 - x'_0) \rightarrow \left(\frac{g}{\Omega}\right)^2 \delta(x_0 - x'_0). \quad (2.16)$$

Por otro lado, visto desde el sistema Laboratorio, cuando el espejo tiene movimiento paralelo la situación cambia: Λ puede depender de la coordenada q_{\parallel} , debido a que los grados de libertad microscópicos no están en reposo, y su movimiento colectivo puede contribuir a la correlación de las fluctuaciones del campo de vacío entre puntos espacialmente separados.

Las modificaciones relevantes que deben implementarse para el caso de movimiento paralelo serán discutidas ampliamente en los siguientes capítulos de esta Tesis, dado que éste es justamente el caso que podría llevar a la existencia de fricción cuántica.

Debido a que asumimos que las velocidades involucradas son no-relativistas, vamos a despreciar para ambos movimientos los efectos de dilatación temporal que podrían también afectar la forma de λ .

Volviendo a la construcción del modelo, el paso final es integrar el campo de vacío,

$$\Gamma(q_{\perp}, q_{\parallel}) = \frac{1}{2} \log \det(-\partial^2 + V) = \frac{1}{2} \text{Tr} \log(-\partial^2 + V). \quad (2.17)$$

Al rotar este resultado nuevamente al espacio-tiempo de Minkowski, la acción efectiva contendrá información sobre la fuerza de reacción ejercida por el vacío sobre el espejo móvil, y sobre las probabilidades de excitar cualquiera de los dos campos que han sido integrados. Volveremos al estudio de este tipo de sistemas en el Capítulo 3 de esta Tesis.

Es importante remarcar que este tipo de métodos funcionales ya ha sido ampliamente utilizado para el estudio de distintos fenómenos relacionados con la física de Casimir y las fluctuaciones cuánticas de vacío. Algunos de estos estudios pueden encontrarse en las referencias [26–30].

2.2. Formalismo de Schwinger-Keldysh o Camino Temporal Cerrado

Hasta aquí hemos repasado algunas propiedades del formalismo funcional en el espacio Euclídeo y en el espacio de Minkowski, y la manera en la que éste puede utilizarse en el estudio de los fenómenos de la física de Casimir. Sin embargo, a la hora de querer obtener ecuaciones de movimiento efectivas que sean reales y causales,

calcular valores medios de observables, o estudiar sistemas abiertos, es útil recurrir al formalismo *in-in*, desarrollado independientemente por Schwinger y Keldysh, y también denominado ‘formalismo de camino temporal cerrado’ (*CTP*, por sus siglas en inglés) [31–33]. Versiones no relativistas de este formalismo son habitualmente usadas en el contexto de la mecánica cuántica, sobre todo para el estudio de sistemas cuánticos abiertos (formalismo de Feynman-Vernon), y de la materia condensada. En esta Sección describiremos brevemente el formalismo *CTP* para una teoría de campos.

En este formalismo, consideraremos que el vacío *in* (estado asintótico para $t = -T \rightarrow -\infty$) evoluciona en presencia de dos fuentes externas distintas $J_+(x)$ y $J_-(x)$, es decir que en la representación de Schrödinger tenemos, en un cierto tiempo T (que luego podemos tomar $T \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} |0_{\text{in}}\rangle &\xrightarrow{J_+} |0_{\text{in}}, T\rangle_{S, J_+} = U_{J_+}(T, -T) |0_{\text{in}}\rangle \\ |0_{\text{in}}\rangle &\xrightarrow{J_-} |0_{\text{in}}, T\rangle_{S, J_-} = U_{J_-}(T, -T) |0_{\text{in}}\rangle , \end{aligned} \quad (2.18)$$

con

$$U_J(T, -T) = \mathbb{T} \left[e^{-i \int_{-T}^T dt' [H(t') - \int d^3x J(t', \mathbf{x}) \phi_S(\mathbf{x})]} \right] , \quad (2.19)$$

donde \mathbb{T} indica el producto temporalmente ordenado, y $\phi_S(\mathbf{x})$ es el campo de Klein-Gordon en la representación de Schrödinger. En la representación de Heisenberg, los estados no evolucionan libremente, pero sí lo hacen bajo la acción de las corrientes externas, de modo que:

$$\begin{aligned} |0_{\text{in}}, T\rangle_{J_+} &= \mathbb{T} \left[e^{i \int_{-T}^T dt' \int d^3x J_+(t', \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x})} \right] |0_{\text{in}}\rangle \\ |0_{\text{in}}, T\rangle_{J_-} &= \mathbb{T} \left[e^{i \int_{-T}^T dt' \int d^3x J_-(t', \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x})} \right] |0_{\text{in}}\rangle . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Esto nos permite definir la funcional generatriz *in-in*:

$$\mathcal{Z}_{\text{in-in}}[J_+, J_-] = e^{-iS_{CTP}[J_+, J_-]} = {}_{J_-} \langle 0, \text{in} | 0, \text{in} \rangle_{J_+} . \quad (2.21)$$

De las definiciones anteriores podemos ver que efectivamente este formalismo nos permite encontrar valores medios en el estado asintótico $|0, \text{in}\rangle$, y no elementos de matriz como el formalismo *in-out*. Efectivamente, es fácil ver que:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}_{\text{in-in}}[J_+, J_-]}{\delta J_+(x)} \Bigg|_{J_+ = J_- = 0} = \langle 0, \text{in} | \phi(x) | 0, \text{in} \rangle , \quad (2.22)$$

donde $\phi(x)$ es el campo escalar usual (es decir, en la representación de Heisenberg, puesto que $x = (t, \mathbf{x})$). Usando la siguiente propiedad (que puede probarse escribiendo la serie de Taylor de la exponencial):

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \mathbb{T} \left[e^{i \int d^4y J(y) \phi(y)} \right] = \mathbb{T} \left[e^{i \int d^4y J(y) \phi(y)} \phi(x) \right] \quad (2.23)$$

pueden calcularse las funciones de n puntos:

$$\begin{aligned}
(-i)^n \frac{\delta^n \mathcal{Z}_{\text{in-in}}[J_+, J_-]}{\delta J_+(x_1) \delta J_+(x_2) \dots \delta J_+(x_n)} \Big|_{J_+ = J_- = 0} &= \langle 0, \text{in} | \mathbb{T}(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)) | 0, \text{in} \rangle \\
i^n \frac{\delta^n \mathcal{Z}_{\text{in-in}}[J_+, J_-]}{\delta J_-(x_1) \delta J_-(x_2) \dots \delta J_-(x_n)} \Big|_{J_+ = J_- = 0} &= \langle 0, \text{in} | \tilde{\mathbb{T}}(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)) | 0, \text{in} \rangle ,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

donde $\tilde{\mathbb{T}}$ denota el operador de ordenamiento antitemporal. Es posible generalizar el cálculo para la función de $n + m$ puntos más general posible:

$$\begin{aligned}
(-i)^{n-m} \frac{\delta^{n+m} \mathcal{Z}_{\text{in-in}}[J_+, J_-]}{\delta J_+(x_1) \dots \delta J_+(x_n) \delta J_+(y_1) \dots \delta J_-(y_m)} \Big|_{J_+ = J_- = 0} \\
= \langle 0, \text{in} | \tilde{\mathbb{T}}(\phi(y_1) \dots \phi(y_m)) \mathbb{T}(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0, \text{in} \rangle .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Busquemos ahora encontrar una expresión que nos permita calcular la funcional generatriz *in-in*. Veremos a continuación que nuevamente puede escribirse como una integral funcional, pero que esta vez habrá que integrar sobre dos historias diferentes. Para ello insertaremos, en la Ec. (2.21), una identidad escrita de la forma:

$$\mathbb{I} = \int \mathcal{D}\phi_{\text{out}} |\phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})\rangle \langle \phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})| \tag{2.26}$$

donde $|\phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})\rangle$ es la base de autoestados del operador $\phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})$. Esto nos deja teniendo que calcular dos elementos de matriz, que podemos escribir como integrales funcionales de la siguiente forma:

$$\langle \phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x}) | 0_{\text{in}}, T \rangle_{J_+} = \int^{\phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})} \mathcal{D}\phi_+ e^{iS_+[\phi_+] + i \int d^4x J_+(x) \phi_+(x)} , \tag{2.27}$$

donde, por un lado, no estamos integrando sobre todas las configuraciones posibles del campo ϕ_+ , sino sobre aquellas que cumplen que a tiempo T el estado del campo sea $\phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, T)$. Por otro lado, la acción S_+ contiene la prescripción $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$, que selecciona el estado de menor energía en $t = -T \rightarrow -\infty$ (y luego el estado evoluciona bajo J_+ hasta $t = T$). El otro elemento de matriz, entonces, resulta:

$${}_{J_-} \langle 0_{\text{in}}, T | \phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x}) \rangle = \int^{\phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})} \mathcal{D}\phi_- e^{-iS_-[\phi_-] - i \int d^4x J_-(x) \phi_-(x)} , \tag{2.28}$$

donde, al haber transpuesto y conjugado el elemento de matriz, S_- contiene la prescripción $m^2 \rightarrow m^2 + i\epsilon$. Esto nos permite escribir, finalmente, la funcional generatriz

in-in como una integral funcional:

$$\mathcal{Z}_{\text{in-in}}[J_+, J_-] = \int \mathcal{D}\phi_{\text{out}} \int^{\phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})} \mathcal{D}\phi_+ \mathcal{D}\phi_- e^{i(S_+[\phi_+] - S_-[\phi_-]) + i \int d^4x [J_+(x)\phi_+(x) - J_-(x)\phi_-(x)]}, \quad (2.29)$$

donde las integrales funcionales deben realizarse con la condición de contorno $\phi_+|_T = \phi_-|_T = \phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})$. Esta condición implica, por un lado, que las integrales no pueden realizarse por separado. Por otro lado, queda en evidencia el hecho de que no debemos conocer información sobre el estado del sistema en el futuro, ya que integramos sobre todos los posibles estados del campo a tiempo T .

Es este tipo de integrales dobles, en las que las historias coinciden en uno de sus extremos, son las que reciben el nombre de integral de camino temporal cerrado o *CTP*, ya que las dos historias pueden ser pensadas como una sola historia definida sobre el camino temporal cerrado \mathcal{C} que va $-T$ a T y luego vuelve de T a $-T$. Sobre la primera rama \mathcal{C}_+ , que va de $-T \rightarrow -\infty$ a T , el campo asume la configuración ϕ_+ y evoluciona bajo la influencia de una corriente externa J_+ . Luego el campo asume la configuración ϕ_- sobre la rama \mathcal{C}_- que vuelve de T a $-T \rightarrow -\infty$, en presencia de la corriente J_- . Esto nos permite reescribir la funcional generatriz de la siguiente manera

$$\mathcal{Z}_{\text{in-in}}[J_+, J_-] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^3x \int_{\mathcal{C}} dt (\mathcal{L}[\phi] + J(x)\phi(x)) \right], \quad (2.30)$$

donde, por un lado

$$\int_{\mathcal{C}} dt = \int_{\mathcal{C}_+} dt - \int_{\mathcal{C}_-} dt, \quad (2.31)$$

y el campo y la corriente cumplen que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_{\pm}(x) & \text{si } t \in \mathcal{C}_{\pm} \\ J(x) &= J_{\pm}(x) & \text{si } t \in \mathcal{C}_{\pm}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Obviamente sigue estando implícita la condición $\phi(T, \mathbf{x}) = \phi_+(T, \mathbf{x}) = \phi_-(T, \mathbf{x}) = \phi_{\text{out}}(T, \mathbf{x})$, que impide que las integrales sobre cada historia puedan resolverse de manera independiente.

La ventaja de escribir la funcional generatriz como en la Ec. (2.30) es que tiene la misma estructura que la funcional generatriz *in-out* y la Euclídea, de modo que podemos usar los resultados ya conocidos en dichos formalismos, pero cambiando apropiadamente el contorno de integración. Notando, entonces, que estamos en

presencia de una integral Gaussiana y sabiendo que el resultado de la misma es la exponencial de una forma cuadrática, escribiremos el resultado de la integral sobre ϕ como la forma cuadrática más general posible que, haciendo el cambio pertinente en el contorno temporal, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{in-in}} = \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \left[J_+(x)G_{++}(x, y)J_+(y) \right. \right. \\ \left. \left. + J_-(x)G_{--}(x, y)J_-(y) - J_+(x)G_{+-}(x, y)J_-(y) - J_-(x)G_{-+}(x, y)J_+(y) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aquí $G_{\alpha\beta}(x, y)$, con $\alpha, \beta = +, -$, son las componentes de un núcleo que juega el papel del propagador usual, pero que es una matriz de 2×2 . Para conocer las distintas componentes del propagador *CTP*, recordemos las expresiones para las funciones de n puntos dadas por la Ec. 2.25. Aquí sólo necesitamos las funciones de 2 puntos, de modo que derivando tenemos:

$$\begin{aligned} G_{++}(x, y) &= \frac{1}{i}(-i)^2 \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_{\text{in-in}}}{\delta J_+(x)\delta J_+(y)} \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0_{\text{in}} | \text{T} \phi(x)\phi(y) | 0_{\text{in}} \rangle \\ G_{--}(x, y) &= \frac{1}{i}(+i)^2 \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_{\text{in-in}}}{\delta J_-(x)\delta J_-(y)} \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0_{\text{in}} | \tilde{\text{T}} \phi(x)\phi(y) | 0_{\text{in}} \rangle \\ G_{+-}(x, y) &= \frac{1}{i}(-i)^0 \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_{\text{in-in}}}{\delta J_+(x)\delta J_-(y)} \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0_{\text{in}} | \phi(y)\phi(x) | 0_{\text{in}} \rangle \\ G_{-+}(x, y) &= \frac{1}{i}(-i)^0 \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_{\text{in-in}}}{\delta J_-(x)\delta J_+(y)} \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0_{\text{in}} | \phi(x)\phi(y) | 0_{\text{in}} \rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Como puede observarse de la Ec. 2.34, cada una de las componentes de $G(x, y)$ corresponde a un propagador/función de conmutación distinto. Los elementos diagonales, en los que aparece el orden temporal y anti-temporal, estarán relacionados con los propagadores de Feynman y Dyson, respectivamente. Para calcular dichos propagadores será necesario mover los polos hacia arriba (en el caso de Feynman) o hacia abajo. Los elementos de fuera de la diagonal, en cambio, se corresponden con las funciones de Wightman de frecuencia positiva y negativa, que se calculan integrando alrededor de un sólo polo (ver [34] para más detalle sobre los cálculos de diferentes propagadores). De acuerdo a las definiciones usuales, podemos escribir

$$\begin{aligned} G_{++}(x, y) &= -G_F(x, y) \\ G_{--}(x, y) &= G_D(x, y) \\ G_{+-}(x, y) &= G^{(-)}(x, y) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$G_{-+}(x, y) = -G^{(+)}(x, y), \quad (2.36)$$

donde $G_F(x, y)$ y $G_D(x, y)$ son los propagadores de Feynman y Dyson, respectivamente, para el campo en cuestión, mientras que $G^{(\pm)}(x, y)$ indican las funciones de Wightman de frecuencia positiva/negativa. Esto nos permite mostrar algunas propiedades sobre las componentes del propagador CTP que serán útiles en el futuro:

$$\begin{aligned}
G_{++}^*(x, y) &= -G_{--}(x, y) , \\
G_{+-}^*(x, y) &= -G_{-+}(x, y) , \\
G_{\pm\pm}(y, x) &= G_{\pm\pm}(x, y) , \\
G_{-+}(y, x) &= G_{+-}(x, y) , \\
G_{++}(x, y) &= \Theta(x_0 - y_0)G_{-+}(x, y) + \Theta(y_0 - x_0)G_{+-}(x, y) , \\
G_{++}(x, y) + G_{--}(x, y) &= G_{+-}(x, y) + G_{-+}(x, y) .
\end{aligned} \tag{2.37}$$

En el caso de que el campo sea un campo escalar libre, podemos escribir el propagador **CTP** en el espacio de Fourier valiéndonos de la Ec. 2.35:

$$\tilde{G}(p) = \begin{pmatrix} -1/(p_0^2 - m^2 + i\epsilon) & 2\pi i\delta(p^2 - m^2)\Theta(-p_0) \\ 2\pi i\delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0) & 1/(p_0^2 - m^2 - i\epsilon) \end{pmatrix} . \tag{2.38}$$

Hasta aquí llegaremos con nuestra descripción del formalismo CTP . Como último comentario, notemos que por el momento hemos considerado solamente sistemas cerrados. Es decir, hemos tenido en cuenta todas las posibles variables del sistema por igual. Sin embargo, muchas veces estamos interesados en estudiar un sistema que interactúa con un entorno cuya dinámica no nos interesa. Siempre es posible descomponer un problema en un sistema (descrito por un campo ϕ_S), cuyo comportamiento detallado nos interesa y deseamos estudiar, que interactúa con un entorno (que llamaremos ϕ_E) el cual o bien no nos interesa estudiar, o bien es demasiado complicado como para que podamos hacerlo. En cualquier caso, es posible integrar sobre los grados de libertad del entorno, y así obtener la *acción de influencia* para el campo ϕ_S , que describe su dinámica bajo la influencia del entorno: [33]

$$\mathcal{F}[\phi_S^+, \phi_S^-] = e^{iS^{\text{IF}}[\phi_S^+, \phi_S^-]} = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi_E e^{iS[\phi_S, \phi_E]} \tag{2.39}$$

donde $\mathcal{F}[\phi_S^+, \phi_S^-]$ es la *funcional de influencia* de Feynman-Vernon, y S^{IF} es la acción de influencia para el campo ϕ_S . Notemos que esta división entre sistema y entorno es siempre posible formalmente, pero sólo tendrá significado físico y será técnicamente implementable cuando haya una clara separación entre los dos sectores. A lo largo de esta tesis veremos las aplicaciones del formalismo CTP para el estudio de sistemas cuánticos abiertos en teorías de campos.

Parte II

Fricción cuántica entre dos placas paralelas

Capítulo 3

Fricción entre dos espejos imperfectos

3.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar los efectos disipativos entre dos placas de un material dieléctrico o metálico. El campo de vacío será modelado como un campo escalar real no masivo, que representa la componente A_0 del campo electromagnético, es decir, el campo eléctrico. Vamos a describir microscópicamente los grados de libertad internos de las placas, utilizando un modelo de juguete en el que cada placa está formada por un conjunto de osciladores armónicos cuánticos desacoplados, modelando los fonones del material. Consideraremos el caso en que los espesores de las placas son despreciables, y el caso en que son semi-infinitos.

Durante nuestros cálculos consideraremos que una de las placas, que llamaremos L , está quieta en el sistema de referencia fijo al laboratorio. La otra placa, que llamaremos R , se mueve en forma paralela a la placa L y con velocidad constante. Esta trayectoria macroscópica estará fijada por un mecanismo externo.

Utilizando métodos funcionales calcularemos dos magnitudes que dan cuenta de los efectos disipativos presentes en el sistema. La primera de dichas magnitudes es la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*, que representa la probabilidad de decaimiento del vacío. La segunda es la fuerza actuante sobre la placa, que obtendremos mediante el cálculo del valor medio del tensor energía-momento en un formalismo *in-in*. Luego mostraremos que estas dos magnitudes están de hecho relacionadas, y corroboraremos dicha relación explícitamente.

Este capítulo, basado en el trabajo '*Functional approach to quantum friction: Effective action and dissipative force*' publicado en *Physical Review D* [22], está organizado de la siguiente manera: en la Sección 3.2 describimos con detalle el modelo

y el formalismo que utilizaremos para el estudio de la fricción cuántica en este sistema. En la Subsección 3.2.1 mostramos una expresión general para la acción efectiva *in-out* de dos placas paralelas moviéndose con velocidad relativa. Lo hacemos para cualquier modelo efectivo no-local, estableciendo recién en la Subsección 3.2.2 el modelo específico con el que describiremos el material de las placas. En la Subsección 3.2.3 relacionamos el objeto matemático que describe a las placas en nuestro modelo, $\tilde{\lambda}$, con la permitividad dieléctrica y el coeficiente de reflexión de cada placa. Luego en la Sección 3.3 calculamos explícitamente la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* para las dos configuraciones consideradas. En la Sección 3.4 calculamos la fuerza actuante sobre las placas utilizando el formalismo de Swinger-Keldysh o *Closed-Time Path* (CTP). En la Sección 3.5 calculamos la fuerza a partir de la acción efectiva *in-out*, y comparamos los resultados con los obtenidos en la sección anterior. En la Sección 3.6 estudiamos el límite no retardado de nuestros resultados, para conectarlos con los resultados presentes en la literatura. Finalmente en la Sección 3.7 mostramos las conclusiones de este capítulo.

3.2. El modelo

El sistema que estudiaremos en este capítulo consiste en dos placas paralelas moviéndose con velocidad relativa constante. Dichas placas no interactúan entre sí, pero interactúan con el campo de vacío, que en este capítulo modelaremos como un campo escalar real ϕ . El medio material que forma los espejos está descrito por un campo ψ , confinado al espacio ocupado por los mismos. Uno de ellos, que denotaremos L , está en reposo en el sistema laboratorio. Utilizaremos un sistema de coordenadas tal que, si L tiene espesor infinitesimal, $x_3 = 0$ es la superficie que ocupa, y si L tiene un espesor semi-infinito, $x_3 = 0$ es la superficie que separa al medio material del vacío. La placa R , en cambio, se mueve con velocidad v en el sistema laboratorio. Consideraremos que dicho movimiento sucede a lo largo de la dirección x_1 , y que la superficie que define a R o la separa del vacío es $x_3 = a$. En la Figura 3.1 mostramos un esquema del sistema para el caso en que el espesor de las placas es infinitesimal.

La acción del sistema puede escribirse como una suma de tres términos

$$\mathcal{S}[\phi, \psi] = \mathcal{S}_v^{(0)}[\phi] + \mathcal{S}_m^{(0)}[\psi] + \mathcal{S}_{vm}^{(\text{int})}[\phi, \psi], \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{S}_v^{(0)}$ es la acción del campo de vacío libre (es decir, en ausencia de los espejos):

$$\mathcal{S}_v^{(0)}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - (m^2 - i\epsilon)\phi^2], \quad (3.2)$$

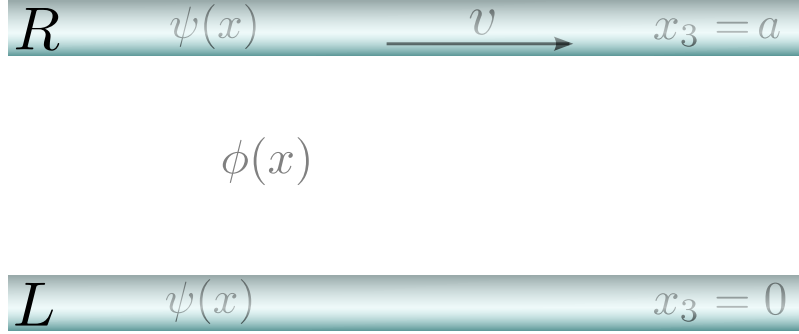


Figura 3.1: Un esquema simple del sistema que estamos estudiando, donde $\phi(x)$ es el campo de vacío y $\psi(x)$ son los grados de libertad internos del material que conforma las placas.

mientras que $\mathcal{S}_m^{(0)}$ y $\mathcal{S}_{\text{vm}}^{(\text{int})}$ denotan las acciones del campo de materia libre y de la interacción entre el campo de materia y el campo de vacío, respectivamente. Como deseamos modelar el campo electromagnético, tomaremos $m = 0$ a partir de ahora.

Asumiendo que la interacción entre el campo de vacío y el campo de materia es local, $\mathcal{S}_{\text{vm}}^{(\text{int})}$ sólo dependerá del campo de vacío evaluado en puntos espaciales pertenecientes a las regiones ocupadas por los espejos. En el caso en que los espejos sean semi-infinitos, supondremos que tienen propiedades isotrópicas y homogéneas en cada plano $x_3 = \text{cte.}$, y que dichas propiedades son independientes de x_3 dentro de cada espejo. Trabajaremos en unidades naturales en las cuales $\hbar = c = 1$.

3.2.1. Acción efectiva para dos placas interactuando con el vacío

A continuación deseamos encontrar una expresión para la acción efectiva del sistema teniendo en cuenta la geometría, pero sin especificar las propiedades microscópicas de los espejos. La amplitud de persistencia de vacío \mathcal{Z} para un sistema descrito por la acción \mathcal{S} puede ser representada como una integral funcional

$$\mathcal{Z} = \langle 0_{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi e^{i\mathcal{S}[\phi, \psi]} = e^{i\Gamma}, \quad (3.3)$$

donde Γ es la acción efectiva *in-out* del sistema completo. En lugar de realizar las integrales funcionales sobre los campos de materia y de vacío simultáneamente, como vimos en la Sección 2.1, resulta conveniente introducir el resultado parcial de integrar

solamente los grados de libertad de los materiales:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}_v^{(\text{eff})}[\phi]}, \quad (3.4)$$

con $\mathcal{S}_v^{(\text{eff})}[\phi] \equiv \mathcal{S}_v^{(0)}[\phi] + \mathcal{S}_v^{(\text{int})}[\phi]$. El segundo término es, básicamente, un término de auto-interacción para el campo de vacío, generado por la presencia de las placas. Es decir, toda la información sobre la estructura geométrica y microscópica de los espejos y su interacción con el campo de vacío está contenida dentro del segundo término, que viene dado por

$$e^{i\mathcal{S}_v^{(\text{int})}[\phi]} = \int \mathcal{D}\psi e^{i(\mathcal{S}_m^{(0)}[\psi] + \mathcal{S}_{\text{vm}}^{(\text{int})}[\phi, \psi])}. \quad (3.5)$$

Independientemente del modelo que utilicemos luego para describir microscópicamente a los espejos, podemos considerar al término de interacción como una suma de dos términos independientes, uno correspondiente a cada espejo

$$\mathcal{S}_v^{(\text{int})}[\phi] = \mathcal{S}_v^{(L)}[\phi] + \mathcal{S}_v^{(R)}[\phi], \quad (3.6)$$

donde $\mathcal{S}_v^{(R)}[\phi]$ y $\mathcal{S}_v^{(L)}[\phi]$ son, en general, funciones no locales ni cuadráticas de $\phi(x_{\parallel}, x^3)$ (donde $x_{\parallel} \equiv (x^0, x^1, x^2)$). Como asumimos localidad para la interacción microscópica entre el vacío y el material, sabemos que $\mathcal{S}_v^{(L,R)}$ puede depender de $\phi(x_{\parallel}, x^3)$ sólo para valores de x^3 dentro de la región ocupada por el espejo correspondiente. En este sentido es conveniente introducir dos funciones, $\chi_L(x^3)$ y $\chi_R(x^3)$, que determinen dichas regiones. Para el caso de placas con espesor finito o infinito, $\chi_{L,R}(x^3) = 1$ cuando x_3 está en la región L, R , y $\chi_{L,R}(x^3) = 0$ si no. Para espejos con espesor infinitesimal, son simplemente funciones delta de Dirac del valor correspondiente de x^3 .

Podría ocurrir que el término que contiene los efectos de las placas sobre el campo de vacío, $\mathcal{S}_v^{(\text{int})}[\phi]$, sea cuadrático en el campo de manera exacta (como en el caso que vamos a considerar más adelante). Si este no es el caso, el término cuadrático será de todos modos la principal contribución cuando la constante de acoplamiento entre el vacío y el material sea pequeña. Es decir, podemos asumir que $\mathcal{S}_v^{(L,R)}$ es cuadrático en el campo de vacío, sea de manera exacta o de manera aproximada, y tenemos:

$$\mathcal{S}_v^{(\text{int})}[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x)V(x, y)\phi(y) \quad (3.7)$$

con

$$V(x, y) = V_L(x, y) + V_R(x, y). \quad (3.8)$$

Bajo las suposiciones que hicimos hasta ahora, los *potenciales efectivos* $V_{L,R}$ tendrán la forma

$$V_{L,R}(x, y) = \chi_{L,R}(x^3) \delta(x^3 - y^3) \lambda_{L,R}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) . \quad (3.9)$$

La interpretación de estos potenciales es la siguiente: la presencia de las placas genera una *interacción efectiva* para el campo de vacío, resultado de haber integrado la interacción real del vacío con las placas. Si hubiéramos elegido integrar los campos en el orden inverso, habríamos obtenido una interacción efectiva entre las placas, mediada por el campo de vacío. Estos potenciales pueden ser determinados utilizando un modelo específico para el material, o incluso pueden ser introducidos a mano bajo ciertas suposiciones.

Independientemente del origen de los potenciales, la integral sobre el campo de vacío se vuelve Gaussiana,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) A(x, y) \phi(y)} , \quad (3.10)$$

donde hemos introducido el operador A , cuya representación en el espacio de posición $A(x, y) = \langle x|A|y\rangle$ es

$$A(x, y) = [i(\square_x + m^2) + \epsilon] \delta(x - y) + iV(x, y) . \quad (3.11)$$

Podemos resolver formalmente la integral sobre ϕ , obteniendo para la acción efectiva Γ :

$$\Gamma = \frac{i}{2} \text{Tr} \log A . \quad (3.12)$$

Para obtener una expresión explícita de Γ , es útil realizar una expansión en potencias de los potenciales efectivos. Escribimos $A = A_0 + A_1$, con A_0 un término de orden $V(x, y)^0$, y A_1 un término de orden $V(x, y)^1$. Es fácil ver que

$$A_0(x, y) = [i\square_x + \epsilon] \delta(x - y) \quad (3.13)$$

es la inversa del propagador de Feynman libre para un campo de Klein-Gordon no masivo $G_F(x - y) = -i\langle 0|T[\phi(x)\phi(y)|0\rangle$, mientras que

$$A_1(x, y) = iV(x, y) . \quad (3.14)$$

Con esta consideración, podemos expandir $\log A$:

$$\log A = \log [A_0(\mathbb{I} + A_0^{-1}A_1)] = \log(A_0) + \log[\mathbb{I} + A_0^{-1}A_1] \approx A_0^{-1}A_1 + \frac{1}{2}(A_0^{-1}A_1)(A_0^{-1}A_1) ,$$

donde en el último paso hemos ignorado un término divergente independiente de la interacción con las placas, y nos hemos quedado hasta orden $V(x, y)^2$. Es importante notar que el término $(A_0^{-1}A_1)(A_0^{-1}A_1)$ es un abuso de notación para expresar la contracción de los operadores:

$$[(A_0^{-1}A_1)(A_0^{-1}A_1)](x, y) \equiv \int dz (A_0^{-1}A_1)(x, z)(A_0^{-1}A_1)(z, y)$$

donde nuevamente cada factor $(A_0^{-1}A_1)$ nota una contracción entre dichos operadores. Recordando que la inversa de A_0 es el propagador libre en el espacio de Minkowski, y quedándonos sólo con los términos que consideran la interacción entre las dos placas, se obtiene, esquemáticamente, que $\log A \sim -G_F V_R G_F V_L$. Luego de escribir explícitamente todas las contracciones, resulta:

$$\log A \sim - \int dz dy dw G_F(x - y) V_R(y, z) G_F(z - w) V_L(w, x) ,$$

y la acción efectiva hasta orden cuadrático en el potencial tendrá la forma:

$$\Gamma_I^{(2)} = -\frac{i}{2} \text{Tr}(G_F V_L G_F V_R) . \quad (3.15)$$

Escribiendo los propagadores en el espacio de posición como la transformada de los propagadores libres en el espacio de momentos $\tilde{G}_F(k)$, haciendo lo análogo para los potenciales y tomando explícitamente la traza, obtenemos la expresión general para la acción efectiva en el espacio de momentos:

$$\Gamma_I^{(2)} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{G}_F(p) \tilde{G}_F(q) \tilde{V}_L(p, q) \tilde{V}_R(q, p) , \quad (3.16)$$

donde $\tilde{G}(p) \equiv 1/(p^2 + i\epsilon)$, mientras que los dos núcleos en el espacio de momentos $\tilde{V}_{R,L}$, definidos como

$$\tilde{V}_{L,R}(p, q) = \int d^4 x d^4 y e^{-iq_\mu x^\mu + ip_\mu y^\mu} V_{L,R}(x, y) , \quad (3.17)$$

están determinados por la geometría y composición de los espejos, así como también las características del movimiento relativo entre ellos. La ventaja de utilizar un modelo microscópico es que las propiedades analíticas de estos núcleos quedarán completamente determinadas luego de la integración sobre los grados de libertad de la materia. A continuación mostraremos la manera en la que los efectos del movimiento de los espejos se ve reflejado en dichos potenciales.

3.2.1.1. Potencial efectivo para la placa móvil

Debido a que lo único que puede afectar los resultados físicos es el movimiento relativo de los espejos, vamos a utilizar como sistema de referencia el sistema laboratorio (L), donde el espejo L está en reposo, mientras que el espejo R se mueve con velocidad constante v a lo largo de la dirección paralela a sus planos isótropos y homogéneos, que llamaremos x_1 .

Si llamamos x'_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, a las coordenadas fijas al espejo móvil, y suponiendo $|v| \ll 1$, podemos relacionarlas con las coordenadas del sistema L mediante transformaciones de Galileo: $x'_0 = x_0$, $x'_1 = x_1 - vx_0$, $x'_2 = x_2$ and $x'_3 = x_3$.

Para la placa L , bajo las suposiciones discutidas anteriormente, el potencial necesariamente tiene que tener la forma

$$V_L(x, y) = \chi_L(x_3) \lambda_L(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \delta(x_3 - y_3) , \quad (3.18)$$

donde λ_L puede escribirse convenientemente en función de su transformada de Fourier $\tilde{\lambda}_L(k^0, k^1, k^2)$. En cuanto a la placa R notemos que, en un sistema de referencia comóvil,

$$V'_R(x', y') = \chi_R(x'_3) \lambda_R(x'_{\parallel} - y'_{\parallel}) \delta(x'_3 - y'_3) , \quad (3.19)$$

donde λ_R está determinado por el modelo microscópico en reposo, dado que es un objeto definido en el sistema comóvil. También puede escribirse en términos de su transformada de Fourier, de la siguiente manera:

$$\lambda_R(x'_{\parallel} - y'_{\parallel}) = \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{ik_{\parallel} \cdot (x'_{\parallel} - y'_{\parallel})} \tilde{\lambda}_R(k_{\parallel}) . \quad (3.20)$$

Notemos que no es necesario introducir variables primadas para los momentos, dado que son variables mudas por estar integradas. Si los dos medios materiales fueran idénticos, las funciones $\tilde{\lambda}_R$ y $\tilde{\lambda}_L$ (definida más arriba) lo serían también.

Ahora bien, nosotros conocemos la forma del potencial de la placa R en el sistema comóvil, dado por la (3.19), pero no tenemos una expresión para dicho potencial en el sistema laboratorio, ya que es una cantidad definida en el sistema en reposo. Por esta razón resulta útil hacer un cambio de variables en el término de la Ec. (3.7) correspondiente a V_R : simplemente escribimos la acción en términos de las variables en el sistema en el que la placa R está en reposo. Luego de hacer esto, la interacción entre los espejos y el campo queda escrita como:

$$\mathcal{S}_v^{(\text{int})} = -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \phi(x) V_L(x, y) \phi(y) - \frac{1}{2} \int d^4 x' d^4 y' \phi'(x') V'_R(x', y') \phi'(y') , \quad (3.21)$$

donde ahora el segundo término está expresado en función de las variables del sistema de referencia R . Para poner todo en el mismo sistema de referencia, recordemos que el campo de vacío es un campo escalar y por lo tanto satisface $\phi'(x') = \phi(x)$. Trivialmente χ_R es invariante, al igual que las medidas de integración, mientras que

$$\begin{aligned}\lambda_R(x'_\parallel - y'_\parallel) &= \int \frac{d^3 k_\parallel}{(2\pi)^3} e^{i[k_0(x'_0 - y'_0) - k_1(x'_1 - y'_1) - k_2(x'_2 - y'_2)]} \tilde{\lambda}_R(k_0, k_1, k_2) \\ &= \int \frac{d^3 k_\parallel}{(2\pi)^3} e^{i[k_0(x_0 - y_0) - k_1(x_1 - y_1 - u(x_0 - y_0)) - k_2(x_2 - y_2)]} \tilde{\lambda}_R(k_0, k_1, k_2) \\ &= \int \frac{d^3 k_\parallel}{(2\pi)^3} e^{i[k_0(x_0 - y_0) - k_1(x_1 - y_1) - k_2(x_2 - y_2)]} \tilde{\lambda}_R(k_0 - uk_1, k_1, k_2),\end{aligned}\quad (3.22)$$

donde hemos utilizado las transformaciones de Galileo y un desplazamiento en las variables de integración. La última línea de la ecuación anterior nos dice que, en el sistema laboratorio L , la placa R está descrita por la función $\tilde{\lambda}_R$ desplazada:

$$\tilde{\lambda}_R(k_0, k_1, k_2) \rightarrow \tilde{\lambda}_R(k_0 - vk_1, k_1, k_2). \quad (3.23)$$

3.2.2. Modelo microscópico del material

Hasta este momento no hemos especificado el modelo microscópico para el material que conforma los espejos, tan sólo hemos hecho consideraciones generales sobre la geometría de los mismos. Aquí introducimos un modelo microscópico simple: una realización concreta de la interacción entre los campos de vacío y de materia que resulta en una función $\tilde{\lambda}$ físicamente aceptable.

Los grados de libertad microscópicos del medio material se comportan como osciladores armónicos cuánticos unidimensionales, uno en cada punto del espejo. Cada oscilador estará representado por una coordenada generalizada $Q(x^0, x^1, x^2) = Q(x_\parallel)$, que toma valores en un espacio interno. No tendremos en cuenta el acoplamiento entre osciladores, mientras que el acoplamiento entre cada oscilador y el campo de vacío será lineal en posición. Notemos en este punto que un acoplamiento de este tipo es análogo al acoplamiento de un dipolo con el campo electromagnético. Sin embargo un acoplamiento tipo corriente (un acoplamiento lineal en momento) diferirá en los resultados sólo en un factor igual a la frecuencia del oscilador. La interacción ocurre sólo localmente, en las posiciones espaciales ocupadas por el material.

Para encontrar $\mathcal{S}_v^{(L)}$, consideraremos los términos en la acción dependiendo de Q_L (luego podemos aplicar argumentos análogos para los términos R):

$$\mathcal{S}_m^{(0)} = \frac{1}{2} \int d^4 x \chi_L(x_3) [\dot{Q}_L^2(x_\parallel) - (\Omega_L^2 - i\epsilon)Q_L^2(x_\parallel)] \quad (3.24)$$

y

$$\mathcal{S}_{\text{vm}}^{(\text{int})} = g_L \int d^4x \chi_L(x_3) Q_L(x_{\parallel}) \phi(x). \quad (3.25)$$

Luego de integrar por partes $\mathcal{S}_m^{(0)}$, la integral funcional sobre los grados de libertad del material en (3.5) puede ser escrita como

$$e^{i\mathcal{S}_v^{(L)}[\phi]} = \int \mathcal{D}Q_L e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \chi_L(x_3) Q_L(x_{\parallel}) [\partial_0^2 + \Omega_L^2 - i\epsilon] Q_L(x_{\parallel}) + ig_L \int d^4x \chi_L(x_3) Q_L(x_{\parallel}) \phi(x_{\parallel})}. \quad (3.26)$$

Afortunadamente esta integral funcional también es Gaussiana, de modo que para resolverla tan sólo necesitamos la inversa del operador entre corchetes, $\Delta(x_{\parallel}, x'_{\parallel}) = \Delta(x_0 - x'_0) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel})$. El operador $\Delta(x_0 - x'_0)$ es el propagador para un oscilador armónico cuántico, es decir, debe resolver la ecuación

$$[\partial_0^2 + \Omega_L^2 - i\epsilon] \Delta(x_0 - x'_0) = -\delta(x_0 - x'_0). \quad (3.27)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es

$$\begin{aligned} \Delta(x_0 - x'_0) &= \frac{-\Theta(x_0 - x'_0) e^{-i\sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon}(x_0 - x'_0)} - \Theta(x'_0 - x_0) e^{i\sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon}(x_0 - x'_0)}}{2i\sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon}} \\ &= \frac{ie^{-i\sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon}|x_0 - x'_0|}}{2\sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon}}. \end{aligned}$$

Ahora que tenemos una expresión explícita para el operador $\Delta(x_{\parallel}, x'_{\parallel})$, podemos resolver la integral funcional y obtener:

$$\mathcal{S}_v^{(L)} = \frac{1}{2} \int dx dx' \phi(x) \chi_L(x_3) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}) \lambda_L(x_0 - x'_0) \delta(x'_3 - x_3) \phi(x'), \quad (3.28)$$

donde

$$\lambda_L(x_0 - x'_0) = \frac{g^2 i e^{-i\sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon}|t-t'|}}{2 \sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon}}. \quad (3.29)$$

En el espacio de momentos, tenemos para la placa L

$$\tilde{\lambda}_L(p_0) = \frac{-g_L^2}{p_0^2 - \Omega_L^2 + i\epsilon}. \quad (3.30)$$

Esto significa que podemos escribir, para el potencial efectivo de la placa L ,

$$V_L(x, y) = \chi_L(x_3) \delta(x_3 - y_3) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}) \lambda_L(x_0 - x'_0). \quad (3.31)$$

Notemos que, incluso para este modelo sencillo, $\tilde{\lambda}_L$ no es analítica, ya que tiene dos polos ubicados en $k_{0,L} = \pm \sqrt{\Omega_L^2 - i\epsilon} \approx \pm \Omega_L \mp \frac{i\epsilon}{2\Omega_L}$. Esto será relevante a la

hora de encontrar la parte imaginaria de la acción efectiva. Para el espejo móvil R , entonces, tendremos

$$\tilde{\lambda}_R(p_0 - vp_1) = \frac{-g_R^2}{(p_0 - vp_1)^2 - \Omega_R^2 + i\epsilon} . \quad (3.32)$$

Finalmente, debemos hacer una aclaración importante en cuanto a las dimensiones de Q y de las constantes de acoplamiento g_L (y g_R por ende): las mismas son diferentes en el caso en que χ_L es una función delta de Dirac con respecto al caso en el que es una función de Heaviside. En unidades de masa tenemos para el caso de la delta de Dirac que $[Q] = 1/2$ y $[g_L] = -3/2$, mientras que en el caso de la función escalón $[Q] = 1$ y $[g_L] = -2$. Obviamente, lo mismo ocurre con g_R .

3.2.3. Relación entre la función λ y el coeficiente de reflexión del material

En nuestro formalismo, el principal objeto que caracteriza el material que conforma las placas es la función $\tilde{\lambda}(\omega)$. Para poder comparar los modelos que utilizemos con aquellos presentes en la literatura, nos interesa relacionar la función λ con la constante dieléctrica del material, y su correspondiente coeficiente de reflexión. Para hacerlo sólo necesitamos considerar el problema clásico, en el que la acción del sistema está dada por

$$S = \int dx \phi(x) \left[\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + \int dy V(x, y) \phi(y) \right] ,$$

donde V es el potencial no-local que manifiesta la interacción efectiva para el campo de vacío, y está dado por las ecuaciones (3.8) y (3.9). Esto resulta en una ecuación de movimiento no-local,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + \int dx' V(x, x') \phi(x') = 0 . \quad (3.33)$$

Transformando Fourier sobre las coordenadas temporales y paralelas, obtenemos

$$(\partial_3^2 - k_\mu k^\mu) \phi(k, x_3) + \int dx' \tilde{V}(k, x_3, x'_3) \tilde{\phi}(k, x'_3) \quad (3.34)$$

donde \tilde{V} y $\tilde{\phi}$ son las funciones transformadas, y $k = (\omega, k_\parallel)$. En este punto es necesario especificar la geometría del sistema. Vamos a mirar el caso en que las placas son semi-espacios, el caso de las placas de espesor infinitesimal puede ser obtenido de manera análoga. Consideremos la placa L , ubicada en el semi-espacio $x_3 < 0$. Dividamos el

problema en dos regiones: la región I será la región ocupada por el material, mientras que la región II será $x_3 > 0$. En la región I , el potencial estará dado por:

$$V(k, x_3, x'_3) = \delta(x_3 - x'_3)(2\pi)^3 \tilde{\lambda}(\omega) ,$$

mientras que $V(k, x_3, x'_3)$ se anula en la región II ($x_3 > 0$). Para obtener las condiciones de contorno en la interfaz ($x_3 = 0$), en primer lugar pedimos continuidad al campo de vacío:

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \tilde{\phi}(k, x_3) = \lim_{x_3 \rightarrow 0^-} \tilde{\phi}(k, x_3) . \quad (3.35)$$

Luego interamos las ecuaciones de movimiento y utilizamos explícitamente la primera condición de contorno (3.35), obteniendo una segunda condición de contorno

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_3}(k, x_3) = \lim_{x_3 \rightarrow 0^-} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_3}(k, x_3) . \quad (3.36)$$

En este punto es importante notar que la continuidad de la primera derivada perpendicular a la superficie, Ec. (3.36), es una condición de contorno válida solamente para el caso de los semiespacios, y no se cumple en el caso de las placas de espesor infinitesimal, ya que la función delta de Dirac que aparece en los potenciales en ese caso resulta en una discontinuidad en la derivada del campo de vacío. Por esta razón, la relación entre λ y la permitividad dieléctrica del material que obtendremos en esta sección es válida para el caso de las placas de espesor semi-infinito pero no para el caso de placas de espesor infinitesimal.

Volviendo al caso que estamos considerando, simplemente tenemos que resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \left[\partial_3^2 - k_{\parallel}^2 + \omega^2 - \tilde{\lambda}(\omega) \right] \tilde{\phi} = 0 & \text{in } (I) \\ \left[\partial_3^2 - k_{\parallel}^2 + \omega^2(\omega) \right] \tilde{\phi} = 0 & \text{in } (II) \end{cases} . \quad (3.37)$$

La ecuación del movimiento dentro del material puede reescribirse como

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x_3^2} + \left[\omega^2 \underbrace{\left(1 - \frac{\tilde{\lambda}(\omega)}{\omega^2} \right)}_{n^2(\omega)=\varepsilon(\omega)} - k_{\parallel}^2 \right] \tilde{\phi} = 0 , \quad (3.38)$$

donde hemos identificado la permitividad dieléctrica

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\tilde{\lambda}(\omega)}{\omega^2} . \quad (3.39)$$

Para el modelo desarrollado en la Subsección 3.2.2, la constante dieléctrica resulta

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{g^2}{\omega^2(\omega^2 - \Omega^2 + i\epsilon)}, \quad (3.40)$$

permitividad que difiere de la obtenida para el modelo de Drude, el más comúnmente utilizado en la bibliografía para describir materiales dieléctricos:

$$\varepsilon_{\text{Drude}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}. \quad (3.41)$$

Ahora estamos en condiciones de calcular el coeficiente de reflexión. Para hacerlo, proponemos soluciones tipo onda viajera para la Ec. (3.38):

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_I(k, x_3) &= t(\omega)e^{-iqx_3} \\ \tilde{\phi}_{II}(k, x_3) &= e^{-iq'x_3} + r(\omega)e^{iq'x_3}, \end{aligned}$$

donde $r(\omega)$ ($t(\omega)$) es el coeficiente de reflexión (transmisión). Las ecuaciones de movimiento determinan los valores de q y q' :

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\omega^2 - k_{\parallel}^2 - \tilde{\lambda}(\omega)} \\ q' &= \sqrt{\omega^2 - k_{\parallel}^2}. \end{aligned}$$

Usando las condiciones de contorno (3.35) y (3.36), obtenemos el coeficiente de reflexión para una placa de espesor semi-infinito compuesta por un material caracterizado por la función $\tilde{\lambda}(\omega)$:

$$r(\omega) = \frac{\sqrt{1 - \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2}} - \sqrt{1 - \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{\tilde{\lambda}(\omega)}{\omega^2}}}{\sqrt{1 - \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2}} + \sqrt{1 - \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{\tilde{\lambda}(\omega)}{\omega^2}}}. \quad (3.42)$$

El caso de las placas de espesor infinitesimal puede resolverse de manera análoga, los resultados pueden encontrarse en la referencia [29].

3.3. Cálculo de la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*

Debido a que la acción efectiva *in-out* está relacionada con la amplitud de persistencia del vacío (Ec. (3.3)), la presencia de una parte imaginaria señala, para el sistema que estamos estudiando, la excitación de los grados de libertad internos del material que compone los espejos. Debido a que el motivo detrás de la presencia de

dichas excitaciones es el movimiento a velocidad constante de una de las placas, podemos concluir que es un reflejo de la existencia de fricción sin contacto entre las mismas. En esta sección obtendremos explícitamente la acción efectiva del sistema para el modelo que estamos estudiando, y luego calcularemos su parte imaginaria.

Ahora calculemos la acción efectiva del sistema como función de $\tilde{\lambda}$ que caracteriza el material. Como ya vimos en la Sección 3.2.3, esto es análogo a escribir la acción efectiva como función de $\epsilon(\omega)$ o del coeficiente de reflexión del material. En la expresión para la acción efectiva de la Ec. (3.16) podemos insertar las expresiones explícitas para los potenciales, dadas por las transformadas de Fourier de las Ecs. (3.18) y (3.19) (recordando que en el sistema laboratorio debemos utilizar la función $\tilde{\lambda}_R$ desplazada, según la Ec. (3.23)).

Si para simplificar la notación llamamos $\tilde{\lambda}(k_0, k_1, k_2) \equiv \tilde{\lambda}(k_0)$, puesto que en este capítulo sólo utilizaremos modelos que resultan en una función $\lambda(x_0 - x'_0)$ (es decir, local en posición), tenemos:

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{-iT\Sigma}{2(2\pi)^2} \int d^3p_{\parallel} \tilde{\lambda}_L(p_0) \tilde{\lambda}_R(p_0 - vp_1) \int dx_3 dy_3 \chi_L(x_3) [\tilde{G}_F(p_{\parallel}, x_3 - y_3)]^2 \chi_R(y_3), \quad (3.43)$$

donde T es el tiempo total, Σ es la superficie total de cada placa, y el propagador de Feynman para el campo está escrito como

$$\tilde{G}_F(p_{\parallel}, x_3) = \int dp_3 \frac{e^{ip_3 x_3}}{p_{\parallel}^2 - p_3^2 + i\epsilon} = -\pi i \frac{e^{i|x_3| \sqrt{p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}, \quad (3.44)$$

donde en el último paso hemos integrado sobre p_3 haciendo uso del Teorema de los Residuos.

Las integrales sobre la coordenada perpendicular a las superficies sólo puede realizarse explícitamente una vez especificado el grosor de cada espejo. Para dos placas de espesor nulo separadas por una distancia a , se obtiene

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{iT\Sigma}{4} \int d^3p_{\parallel} \frac{e^{2ia\sqrt{p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{p_{\parallel}^2 + i\epsilon} \tilde{\lambda}_L(p_0) \tilde{\lambda}_R(p_0 - vp_1). \quad (3.45)$$

En la expresión anterior se puede ver cómo la función $\tilde{\lambda}(\omega)$ aparece evaluada en la frecuencia medida en el sistema en reposo de cada placa.

Si las dos placas tienen espesor semi-infinito y están separadas a una distancia a , es decir, si $\chi_L(x_3) = \Theta(-x_3)$ y $\chi_R(x_3) = \Theta(x_3 - a)$, se tiene

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{iT\Sigma}{4} \int d^3p_{\parallel} \frac{\tilde{\lambda}_L(p_0) \tilde{\lambda}_R(p_0 - vp_1)}{(p_{\parallel})^2 + i\epsilon} \int dx_3 dx'_3 \Theta(-x_3) \Theta(x'_3 - a) e^{2i(x'_3 - x_3) \sqrt{(p_{\parallel})^2 + i\epsilon}}. \quad (3.46)$$

Para no tener que hacer todos los cálculos dos veces, una vez para cada configuración, notemos que podemos obtener el resultado para el caso de los dos semi-espacios a partir del caso con placas de espesor nulo: simplemente introducimos dos variables auxiliares s_L y s_R , que cumplen las siguientes relaciones:

$$\Theta(-x_3) = \int_{-\infty}^0 ds_L \delta(x_3 - s_L), \quad \Theta(x_3 - a) = \int_a^{\infty} ds_R \delta(x_3 - s_R). \quad (3.47)$$

Debido a que Γ , para espejos delgados, es función sólo de la distancia a entre los espejos, podemos escribir Γ para placas semi-infinitas como

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{iT\Sigma}{4} \int_{-\infty}^0 ds_L \int_{a-s_L}^{\infty} ds_R \int d^3p_{\parallel} \frac{e^{2is_R\sqrt{(p_{\parallel})^2+i\epsilon}}}{(p_{\parallel})^2+i\epsilon} \tilde{\lambda}_L(p_0) \tilde{\lambda}_R(p_0 - vp_1), \quad (3.48)$$

o bien como

$$\begin{aligned} \Gamma_I^{(2)} &= \frac{iT\Sigma}{4} \int_a^{\infty} ds_R \int_{a-s_R}^0 ds_L \int d^3p_{\parallel} \frac{e^{2is_R\sqrt{(p_{\parallel})^2+i\epsilon}}}{(p_{\parallel})^2+i\epsilon} \tilde{\lambda}_L(p_0) \tilde{\lambda}_R(p_0 - vp_1) \\ &= \frac{iT\Sigma}{4} \int_a^{\infty} ds_R (s_R - a) \int d^3p_{\parallel} \frac{e^{2is_R\sqrt{(p_{\parallel})^2+i\epsilon}}}{(p_{\parallel})^2+i\epsilon} \tilde{\lambda}_L(p_0) \tilde{\lambda}_R(p_0 - vp_1), \end{aligned} \quad (3.49)$$

es decir que para obtener la acción efectiva para semiespacios sólo debemos tomar la acción efectiva para placas infinitesimales, reemplazar $a \rightarrow s_R$ y realizar las integrales pertinentes. Dado que la variable auxiliar s_R es real, podemos además extraer la parte imaginaria de Γ para el caso de semiespacios directamente del resultado para placas de espesor infinitesimal. Por esta razón a partir de ahora sólo haremos con detalle los cálculos para el caso de placas delgadas, y luego a partir de esos resultados obtendremos el caso de espejos semi-infinitos. Además también a partir de ahora, para simplificar la notación, dejaremos de escribir el superíndice (2) que nota que estamos quedándonos hasta orden cuadrático en teoría de perturbaciones.

3.3.1. Estructura analítica y parte imaginaria

Para poder calcular la parte imaginaria de la acción efectiva es necesario hacer un análisis de la estructura analítica de Γ_I en el plano complejo. En lo que sigue consideraremos el caso de dos espejos idénticos, por lo que vamos a abandonar los subíndices L y R de los parámetros del modelo microscópico. Usando la notación $p_{\parallel} = (p_1, p_2)$, es fácil ver que el integrando de la Ec.(3.45), visto como una función de

p_0 , tiene singularidades en $\pm\sqrt{p_{\parallel}^2 - i\epsilon} \approx \pm(|\mathbf{p}_{\parallel}| - i\epsilon/2|\mathbf{p}_{\parallel}|)$, independientemente de la estructura analítica de las funciones $\tilde{\lambda}(p_0)$. Hay además dos cortes o *branch cuts*: el primero puede ser tomado comenzando desde la primera singularidad y extendiéndose hasta $+\infty$ paralelamente al eje real (es decir, con $\text{Im}(p_0) = -\epsilon/2|\mathbf{p}_{\parallel}|$ y $\text{Re}(p_0) > |\mathbf{p}_{\parallel}|$, para ϵ pequeño). El otro corte se extiende paralelo al eje real desde la segunda singularidad hasta $-\infty$.

Resulta conveniente reescribir la integral en la variable p_0 de la Ec. (3.45) como una integral a lo largo del semieje positivo:

$$\Gamma_I = \frac{iT\Sigma}{4} \int d^2p_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_0 (f(p_0) + f(-p_0)), \quad (3.50)$$

donde

$$f(p_0) = \frac{e^{2ia\sqrt{(p_0)^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{(p_0)^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon} \tilde{\lambda}(p_0) \tilde{\lambda}(p_0 - vp_1). \quad (3.51)$$

La ventaja de este procedimiento es que nos permite computar la integral sobre p_0 en el plano complejo considerando un contorno cerrado formado por el semieje real positivo, el semieje imaginario positivo, y un cuarto de circunferencia de radio grande. Como la integral sobre el cuarto de circunferencia tiende a cero cuando el radio tiende a infinito, utilizando el Teorema de los Residuos podemos ver que la integral en (3.50) está dada por la rotación de Wick $p_0 \rightarrow ip_0$, más una contribución proveniente de los polos simples que $f(p_0)$ tenga en el primer cuadrante.

Como un primer ejemplo, consideremos el caso en el que $\tilde{\lambda}(p_0)$ es constante. Si llamamos a esta constante ω_p^2 , es fácil mostrar que, siguiendo los pasos detallados en la Sección 3.2.3, se obtiene la permitividad dieléctrica correspondiente al modelo de plasma $\epsilon(p_0) = 1 - \omega_p^2/(p_0)^2$. En este caso, como $\tilde{\lambda}$ no tiene ningún polo y $f(ip_0)$ es una función real, la parte imaginaria de la acción efectiva es nula y por lo tanto no hay fricción cuántica.

Volamos ahora al modelo microscópico que estamos estudiando, en el que el material está compuesto por osciladores armónicos desacoplados. La función $f(p_0)$ en este caso resulta

$$f(p_0) = g^4 \frac{1}{(p_0)^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \times \frac{1}{(p_0 - vp_1)^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \times \frac{e^{2ia\sqrt{(p_0)^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{(p_0)^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon}. \quad (3.52)$$

Además de las singularidades mencionadas anteriormente (que provienen de los propagadores del campo de vacío y por lo tanto son independientes del material de las

placas), esta función tiene cuatro polos simples ubicados en las siguientes posiciones:

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \approx \Omega - \frac{i\epsilon}{2\Omega} \\
 p_0 &= -\sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \approx -\Omega + \frac{i\epsilon}{2\Omega} \\
 p_0 &= vp_1 + \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \approx vp_1 + \Omega - \frac{i\epsilon}{2\Omega} \\
 p_0 &= vp_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \approx vp_1 - \Omega + \frac{i\epsilon}{2\Omega}.
 \end{aligned}$$

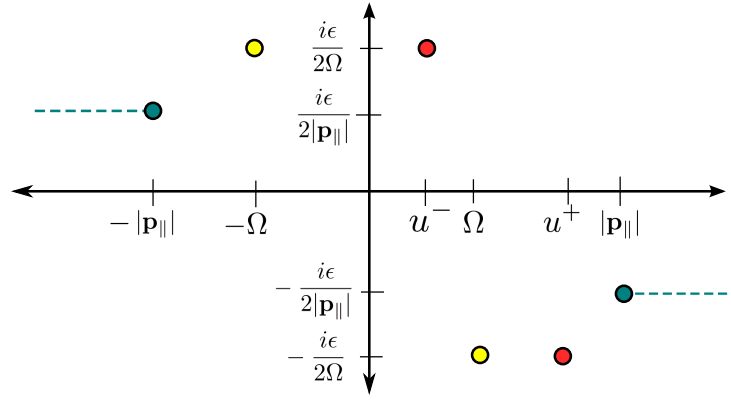


Figura 3.2: Singularidades de $f(p_0)$ (Ec. (3.52)) en el plano p_0 complejo. Los polos simples están representados como círculos rellenos, y los cortes como líneas discontinuas. Hemos introducido la notación: $u^{\pm} = vp_1 \pm \Omega$.

En la Fig. 3.2 pueden observarse las singularidades de $f(p_0)$ en el plano complejo (las singularidades correspondientes a $f(-p_0)$ pueden hallarse simplemente cambiando $p_0 \rightarrow -p_0$). Mirando la figura podemos notar que, para cada término del integrando ($f(p_0)$ y $f(-p_0)$), solamente hay un polo que podría estar ubicado en el primer cuadrante, siempre y cuando los parámetros del sistema cumplan ciertas condiciones. Para el primer término, el polo está en el primer cuadrante si y solo si $vp_1 - \Omega > 0$, mientras que la condición para el segundo término es que $-vp_1 - \Omega > 0$. Con estas consideraciones podemos usar explícitamente el Teorema de los Residuos y escribir la

integral sobre p_0 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Gamma_I &= \frac{iT\Sigma}{4} \int d^2 p_{\parallel} \int_0^{+\infty} dp_0 (f(p_0) + f(-p_0)) \\
&= \frac{-T\Sigma}{4} \int d^2 \mathbf{p}_{\parallel} \left\{ \int_0^{+\infty} dp_0 (f(ip_0) + f(-ip_0)) + \right. \\
&\quad \left. + \Theta(vp_1 - \Omega) 2\pi \text{Res} \left[f(p_0), vp_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \right] \right. \\
&\quad \left. + \Theta(-vp_1 - \Omega) 2\pi \text{Res} \left[f(-p_0), -vp_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \right] \right\}. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Notando que $f(ip_0) + f(-ip_0)$ es real, la parte imaginaria de la acción efectiva resulta

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Gamma_I &= \frac{-T\Sigma\pi}{2} \text{Im} \int d^2 p_{\parallel} \left\{ \Theta(vp_1 - \Omega) \text{Res} \left[f(p_0), vp_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \right] \right. \\
&\quad \left. + \Theta(-vp_1 - \Omega) \text{Res} \left[f(-p_0), -vp_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \right] \right\}. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Para obtener la forma funcional explícita de la ecuación anterior necesitamos evaluar los dos residuos involucrados:

$$\begin{aligned}
\text{Res} \left[f(\pm p_0), \pm vp_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \right] &= g^4 \frac{e^{2ia\sqrt{v^2 p_1^2 + \Omega^2 - p_{\parallel}^2 - 2vp_1\sqrt{\Omega^2 - i\epsilon}}}}{v^2 p_1^2 + \Omega^2 - p_{\parallel}^2 \mp 2vp_1\sqrt{\Omega^2 - i\epsilon}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{v^2 p_1^2 \mp 2vp_1\sqrt{\Omega^2 - i\epsilon}} \right) \left(\frac{1}{-2\sqrt{\Omega^2 - i\epsilon}} \right). \quad (3.55)
\end{aligned}$$

De la Ec. (3.54) podemos ver que los únicos modos del campo de vacío que contribuyen a la fricción son aquellos con $|p_1| > \Omega/v$. Insertando Ec. (3.55) en Ec.(3.54), y haciendo el cambio de variables $vp_1 \rightarrow \omega$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Gamma_I &= \frac{\pi T\Sigma}{2} v \frac{g^4}{2\Omega} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \quad (3.56) \\
&\times \left\{ \Theta(\omega - \Omega) \frac{\exp \left[2i\frac{a}{v} \sqrt{(v^2 - 1)\omega^2 + \Omega^2 v^2 - p_2^2 v^2 - 2\omega\Omega v^2 + i\omega\epsilon v^2/\Omega} \right]}{\left((v^2 - 1)\omega^2 + \Omega^2 v^2 - p_2^2 v^2 - 2\omega\Omega v^2 + i\omega\epsilon v^2/\Omega \right) (\omega^2 - 2\omega\Omega + i\omega\epsilon/\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \Theta(-\omega - \Omega) \frac{\exp \left[2i\frac{a}{v} \sqrt{(v^2 - 1)\omega^2 + \Omega^2 v^2 - p_2^2 v^2 + 2\omega\Omega v^2 - i\omega\epsilon v^2/\Omega} \right]}{\left((v^2 - 1)\omega^2 + \Omega^2 v^2 - p_2^2 v^2 + 2\omega\Omega v^2 - i\omega\epsilon v^2/\Omega \right) (\omega^2 + 2\omega\Omega - i\omega\epsilon/\Omega)} \right\}.
\end{aligned}$$

En el último término podemos hacer el cambio $\omega \rightarrow -\omega$, obteniendo una expresión simplificada:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Gamma_I = & \pi T \Sigma v \frac{g^4}{2\Omega} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Theta(\omega - \Omega) \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega - 2\Omega + i\epsilon/\Omega} \\ & \times \frac{\exp \left[2i \frac{a}{v} \sqrt{(v^2 - 1)\omega^2 + \Omega^2 v^2 - p_2^2 v^2 - 2\omega\Omega v^2 + i\omega\epsilon v^2/\Omega} \right]}{(v^2 - 1)\omega^2 + \Omega^2 v^2 - p_2^2 v^2 - 2\omega\Omega v^2 + i\omega\epsilon v^2/\Omega}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Notemos que en el segundo renglón de la ecuación anterior, podemos tomar trivialmente el límite $\epsilon \rightarrow 0$, ya que la función $(v^2 - 1)\omega^2 + \Omega^2 v^2 - p_2^2 v^2 - 2\omega\Omega v^2 < 0$ en toda la región de integración, por lo que poner $\epsilon = 0$ no nos movería ningún polo ni corte al intervalo de integración. El factor del primer renglón, sin embargo, debe tratarse con más cuidado. Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene

$$\frac{1}{\omega - 2\Omega + i\epsilon/\Omega} \rightarrow \text{v.p.} \left(\frac{1}{\omega - 2\Omega} \right) - i\pi\delta(\omega - 2\Omega), \quad (3.58)$$

donde v.p. denota en valor principal de la función.

Utilizando el resultado anterior y adimensionalizando la integral restante llamando $vp_2 a \rightarrow x$, obtenemos la expresión final para la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Gamma_I = & \frac{\pi^2 T \Sigma}{4} \frac{g^4}{a^3 \Omega^6} (\Omega a)^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-\frac{2}{u} \sqrt{(\Omega a)^2 (4-u^2) + x^2}}}{(\Omega a)^2 (4-u^2) + x^2} \\ & \simeq \frac{\pi^2 T \Sigma}{4} \frac{g^4}{a^3 \Omega^6} (\Omega a)^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-\frac{2}{u} \sqrt{4(\Omega a)^2 + x^2}}}{4(\Omega a)^2 + x^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Este es el resultado principal de esta sección, escrito como el producto de factores adimensionales. La integral sobre x en la Ec. (3.59) puede resolverse numéricamente. En la figura 3.3 mostramos el resultado para la parte imaginaria de la acción efectiva como función de v , para $\Omega a = 0,01$. Como es de esperarse, los efectos disipativos están fuertemente suprimidos cuando $v \rightarrow 0$. La razón detrás de este comportamiento es la existencia un umbral en la energía necesaria para excitar los grados de libertad internos del material, dado por la frecuencia Ω . De hecho, la integral en la Ec. (3.59) tiende a cero como $\exp(-4\Omega a/v)$ para $v \ll \Omega a$, y crece linealmente con v en el límite opuesto.

La parte imaginaria de la acción efectiva para semi-espacios puede ser obtenida integrando el caso de láminas delgadas, como fue explicado anteriormente (ver

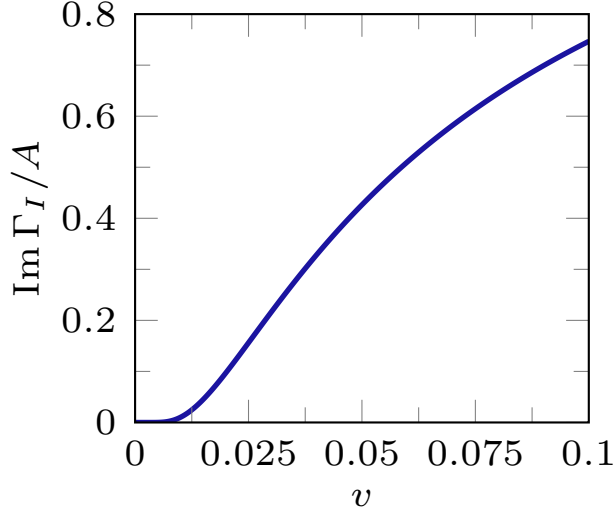


Figura 3.3: Parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* para placas delgadas, como función de v con $\Omega a = 0,01$. A es el factor global $A = \frac{g^4 T \Sigma (\Omega a)^3 \pi^2}{4a^3 \Omega^6}$. La parte imaginaria de la acción efectiva, y por ende los efectos disipativos, están fuertemente suprimidos para valores pequeños de la velocidad relativa entre las placas.

Ec.(3.49)). El resultado es

$$\text{Im } \Gamma_I = \frac{\pi^2 T \Sigma}{16} \frac{g^4}{a^3 \Omega^8} (\Omega a)^6 v^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-\frac{2}{v} \sqrt{(\Omega a)^2 (4-v^2) + x^2}}}{[(\Omega a)^2 (4-v^2) + x^2]^2}. \quad (3.60)$$

Como ya mencionamos, las constantes de acomplamiento g para semiespacios y para placas de espesor infinitesimal tienen diferentes dimensiones. En la Figura 3.4 mostramos el resultado de esta integración numérica como función de v , con $\Omega a = 0,01$. Como en el caso anterior, hay una supresión fuerte para velocidades bajas.

3.4. Cálculo de la fuerza de fricción en el formalismo *in-in*

Debido a que $\text{Im } \Gamma_I > 0$ cuando los espejos están en movimiento relativo, existe una transferencia de energía al sistema. De hecho, habiendo comenzado en el estado de vacío *in* $|0_{in}\rangle$, el sistema termina estando en un estado excitado, como puede verse de la probabilidad de persistencia del vacío

$$|\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle|^2 = e^{-2\text{Im} \Gamma_I}. \quad (3.61)$$

De esta manera, la conservación de la energía implica que debe haber una fuerza realizando trabajo mecánico al mover el espejo. Además, dado que la placa se mueve

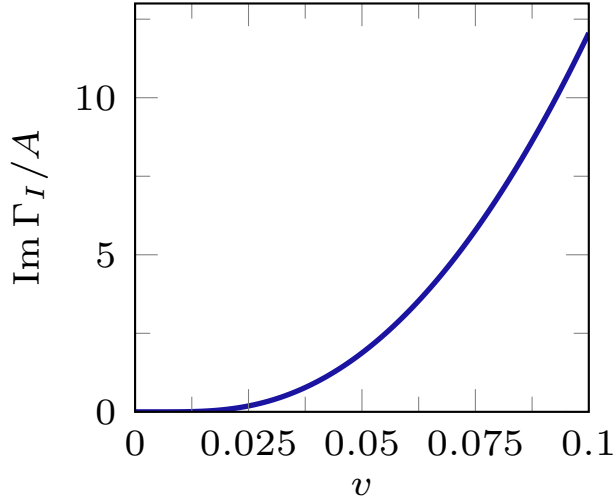


Figura 3.4: Parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* para semiespacios, como función de v , con $\Omega a = 0,01$. A es el factor global $A = \frac{g^4 T \Sigma (\Omega a)^5 \pi^2}{16 a^3 \Omega^8}$. La parte imaginaria de la acción efectiva, y por ende los efectos disipativos, están fuertemente suprimidos para valores pequeños de la velocidad relativa entre las placas.

a velocidad constante, la fuerza debe ser de naturaleza disipativa. A pesar de que la acción efectiva nos permite entender, de manera indirecta, que debe existir una fuerza de fricción, la relación entre estas dos magnitudes no es obvia, y la desarrollaremos con detalle en la próxima sección.

Sin embargo creemos que es importante, como un chequeo de consistencia, evaluar de manera explícita e independiente dicha fuerza de fricción. Para ello computaremos el valor medio del tensor energía-momento $t_{\mu\nu}$ en el vacío *in*, en el régimen estacionario:

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle \equiv \langle 0_{\text{in}} | t_{\mu\nu} | 0_{\text{in}} \rangle. \quad (3.62)$$

La fuerza generada por el campo de vacío sobre la placa móvil puede obtenerse integrando este tensor en un cubo ubicado en la superficie de la placa, con dos caras paralelas a la superficie, una de cada lado de la misma. Al tomar altura del cubo tendiendo a cero, se obtiene la fuerza por unidad de área σ :

$$\sigma = \lim_{x \rightarrow a^+} \langle t_{13}(x) \rangle - \lim_{x \rightarrow a^-} \langle t_{13}(x) \rangle, \quad (3.63)$$

donde

$$\langle t_{13}(x) \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \langle \partial_1 \phi(x) \partial'_3 \phi(x') \rangle = \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} (i p_1) \partial'_3 G_1(p^0, p_{\parallel}, x_3, x'_3). \quad (3.64)$$

Aquí G_1 denota la función de dos puntos de Hadamard, que se define como

$$G_1(x, x') = \langle 0_{\text{in}} | \{ \phi(x), \phi(x') \} | 0_{\text{in}} \rangle. \quad (3.65)$$

Notemos que el solo hecho de que haya una parte imaginaria no nula en Γ implica que el vacío *in* es distinto del vacío *out*, por lo que no puede utilizarse el formalismo *in-out* para calcular el valor medio del tensor energía-momento. Es bien sabido, sin embargo, que puede utilizarse el formalismo de Schwinger-Keldysh, *CTP*, o *in-in* [31–33]. Notemos que este punto es completamente irrelevante a la hora de calcular la fuerza de Casimir estática, ya que los dos vacíos son equivalentes cuando $v = 0$.

En el formalismo *in-out* que estuvimos empleando hasta ahora, el propagador de Feynman en presencia de las placas puede evaluarse perturbativamente, asumiendo que los potenciales V_R y V_L son pequeñas perturbaciones al problema libre. En ese caso tenemos, esquemáticamente

$$G_F = G_F^{(0)} + G_F^{(0)} V_L G_F^{(0)} V_R G_F^{(0)} + L \leftrightarrow R, \quad (3.66)$$

donde solamente hemos incluido los términos con contribuciones mixtas de los espejos L y R . Además hemos omitido las integrales en las contracciones de los propagadores.

Como ya hemos visto en la Sección 2.2, en el formalismo *CTP* el propagador libre es una matriz de 2×2 con elementos $G_{\alpha\beta}^{(0)}$, donde $\alpha, \beta = +, -$: [31–33]

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(x, y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \begin{pmatrix} -1/(p^2 + i\epsilon) & 2\pi i \delta(p^2) \Theta(-p^0) \\ 2\pi i \delta(p^2) \Theta(p^0) & 1/(p^2 - i\epsilon) \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Para evaluar la fuerza necesitamos la función de dos puntos de Hadamard, que podemos escribir como

$$G_1(p_0, p_{\parallel}, x_3, x'_3) = 2\text{Im} [G_{++}(p_0, p_{\parallel}, x_3, x'_3)] . \quad (3.68)$$

De modo que la versión *CTP* de la Ec. (3.66) es

$$G_{++} = G_{++}^{(0)} + G_{+\alpha}^{(0)} V_{L,\alpha\beta} G_{\beta\gamma}^{(0)} V_{R,\gamma\delta} G_{\delta,+}^{(0)} + L \leftrightarrow R, \quad (3.69)$$

donde los potenciales $V_{L,R}$ son nuevamente matrices de 2×2 . Cada una de sus componentes estará dada, como vimos en la sección 2.2, por una solución distinta de la ecuación de movimiento correspondiente. Los elementos diagonales, correspondientes a los valores medios de los operadores temporalmente y anti-temporalmente ordenados, están dados por el propagador de Feynman (para $\alpha, \beta = +, +$ y el propagador anticausal de Dyson (para $\alpha, \beta = -, -$), y se calculan moviendo los polos una distancia ϵ hacia arriba o hacia abajo del eje real, respectivamente. Los elementos de fuera de la diagonal corresponden a valores medios de los operadores sin orden temporal, por lo que vienen dados por las funciones de Wightman, que se obtienen integrando

alrededor de uno sólo de los polos (ver [34] para más detalle sobre el cálculo de los distintos propagadores).

Finalmente, obtenemos las siguientes expresiones para los propagadores *CTP* en el espacio de momentos para el caso de las placas de espesor infinitesimal (recordemos que el caso de los semi-espacios puede obtenerse integrando el resultado final para placas delgadas):

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{L,\alpha\beta}(q,p) &= (2\pi)^3 \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}(p_0) \delta(q_0 - p_0) \delta^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) \\ \tilde{V}_{R,\alpha\beta}(q,p) &= (2\pi)^3 \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}(p_0 - vp_1) \delta(q_0 - p_0) \delta^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) e^{-ia(q_3 - p_3)},\end{aligned}\quad (3.70)$$

donde, para nuestro modelo microscópico de osciladores armónicos desacoplados,

$$\tilde{\lambda}(p_0) = -g^2 \begin{pmatrix} -1/((p_0)^2 - \Omega^2 + i\epsilon) & \frac{\pi i}{\Omega} \delta(p_0 + \Omega) \\ \frac{\pi i}{\Omega} \delta(p_0 - \Omega) & 1/((p_0)^2 - \Omega^2 - i\epsilon) \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Evaluando de manera explícita cada una de las contracciones que aparecen en la Ec. (3.69), la componente deseada del tensor energía-momento puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\langle t_{13}(x) \rangle &= \text{Im} \left\{ \lim_{x \rightarrow x'} \left[\partial_1 \partial_3' G_{++}^{(0)}(x, x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int dudvdydz \partial_1 G_{+\alpha}^{(0)}(x, u) V_{L,\alpha\beta}(u, v) G_{\beta\gamma}^{(0)}(v, y) V_{R,\gamma\delta}(y, z) \partial_3' G_{\delta+}^{(0)}(z, x') + L \leftrightarrow R \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.72)$$

La fuerza disipativa está dada por la discontinuidad de esta magnitud en $x = a$. El primer término de la Ec. (3.72), la contribución del propagador del campo de vacío libre, es continuo en $x = a$ y por lo tanto, como era de esperarse, no aporta a la fuerza.

Miremos primero qué ocurre con los términos con $\delta = -$. El único factor que podría contener una discontinuidad en $x_3 = a$ es

$$\partial_3' G_{-+}^{(0)}(z, x') = 2\pi \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p_3 e^{ip(z-x')} \delta(p_0^2 - p_3^2 - p_{\parallel}^2). \quad (3.73)$$

Para estudiar la discontinuidad, sólo nos interesa cómo se comporta el factor de la ecuación anterior como función de las variables perpendiculares, z_3 y x'_3 . Mirando la Ec. (3.72) y recordando expresiones para $V_R(y, z)$, sabemos que aparecerán necesariamente factores de la forma $\delta(y_3 - a) \delta(z_3 - a)$ de modo que, como función de x'_3 , tenemos:

$$\int dp_3 p_3 e^{ip_3(a-x'_3)} \delta(p_0^2 - p_3^2 - p_{\parallel}^2) \quad (3.74)$$

y resulta continuo en $x'_3 = a$.

Esto significa que la contribución a la fuerza, que ya sabemos que no se anula, debe venir dada necesariamente por los términos con $\delta = +$, es decir

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{x \rightarrow x'} \text{Im} \int dudvdydz \partial_1 G_{+\alpha}^{(0)}(x, u) V_{L, \alpha\beta}(u, v) G_{\beta, \gamma}^{(0)}(v, y) V_{R, \gamma+}(y, z) \\ &\quad \times \left[\lim_{x'_3 \rightarrow a^+} \partial'_3 G_{++}^{(0)}(z, x') - \lim_{x'_3 \rightarrow a^-} \partial'_3 G_{++}^{(0)}(z, x') \right] + R \leftrightarrow L, \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde hemos utilizado explícitamente que sólo el último factor de (3.72) puede ser discontinuo. Transformando Fourier en las coordenadas paralelas a los propagadores y los potenciales, realizando luego explícitamente las integrales en las variables espaciales paralelas para formar funciones delta de Dirac en momento, y utilizando además nuevamente que para todas sus componentes $V_L(u, v) \propto \delta(u_3)\delta(v_3)$ y $V_R(y, z) \propto \delta(y_3 - a)\delta(z_3 - a)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \tilde{G}_{+\alpha}^{(0)}(p_{\parallel}, a, 0) i p_1 \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}(p_0) \tilde{G}^{(0)}(p_{\parallel}, 0, a) \tilde{\lambda}_{\gamma+}(p_0) \\ &\quad \times \left[\lim_{x'_3 \rightarrow a^+} \partial'_3 \tilde{G}_{++}^{(0)}(p_{\parallel}, a, x_3) - \lim_{x'_3 \rightarrow a^-} \partial'_3 \tilde{G}_{++}^{(0)}(p_{\parallel}, a, x_3) \right] + R \leftrightarrow L. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ahora nos resta calcular explícitamente la derivada del propagador libre en x'_3 y luego su discontinuidad en $x'_3 = a$. Recordando la expresión para el propagador de Feynman libre transformado en las coordenadas paralelas, dado por la Ec. (3.44), tenemos

$$\partial'_3 \tilde{G}_{++}^{(0)}(p_{\parallel}, a, x'_3) = \pi i \partial'_3 \frac{e^{|a-x'_3| \sqrt{p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + i\epsilon}} = -\pi e^{|a-x'_3| \sqrt{p_{\parallel}^2 + i\epsilon}} \text{sgn}(a - x'_3), \quad (3.77)$$

de donde podemos ver explícitamente la discontinuidad presente en x_3 que genera una fuerza no nula actuante sobre la placa. Calcular esta discontinuidad es muy simple, y resulta

$$\left[\lim_{x'_3 \rightarrow a^+} \partial'_3 \tilde{G}_{++}^{(0)}(p_{\parallel}, a, x_3) - \lim_{x'_3 \rightarrow a^-} \partial'_3 \tilde{G}_{++}^{(0)}(p_{\parallel}, a, x_3) \right] = 2\pi. \quad (3.78)$$

La fuerza, entonces, estará dada por

$$\sigma = \text{Im} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} i p_1 G_{+\alpha}^{(0)}(p_{\parallel}, a, 0) \tilde{\lambda}_{L, \alpha\beta}(p_0) G_{\beta\gamma}^{(0)}(p_{\parallel}, 0, a) \tilde{\lambda}_{R, \gamma+}(p_0) + L \leftrightarrow R. \quad (3.79)$$

El integrando consiste de ocho términos diferentes, pero sólo uno de ellos resulta ser no nulo: aquél con $\alpha = +, \beta = \gamma = -$. Los otros siete términos se anulan o bien debido a consideraciones de paridad, o bien como resultado de las funciones

de Heaviside presentes en los propagadores *CTP*. Por ejemplo, miremos el caso con $\alpha = \beta = +, \gamma = -$. Este término será:

$$\begin{aligned} & \int dp_3 dp_0 d^2 p_{\parallel} \Theta(-p_0) \delta(p_0 - vp_1 - \Omega) \delta(p^2) f(p_0, p_1, p_2, p_3) \\ &= \int dp_3 d^2 p_{\parallel} \Theta(-vp_1 - \Omega) \delta((vp_1 + \Omega)^2 - p_{\parallel}^2 - p_3^2) f(vp_1 + \Omega, p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (3.80)$$

para una cierta función f . Ahora bien, es claro que la función escalón de Heaviside implica que $p_1 v < -\Omega$. Por otro lado, la función delta de Dirac será no nula cuando

$$\begin{aligned} & (\Omega + vp_1)^2 - p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 \\ & \Omega^2 + 2 \underbrace{vp_1}_{< -\Omega} \Omega + (v^2 - 1)p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 \\ & \Leftrightarrow \Omega^2 - 2\Omega^2 \Omega + (v^2 - 1)p_1^2 > p_2^2 + p_3^2 \\ & \quad -\Omega^2 - (2 - v^2)p_1^2 > p_2^2 + p_3^2, \end{aligned}$$

condición que nunca puede cumplirse ya que el miembro izquierdo es definido negativo, y el miembro derecho es definido positivo, de modo que todo el término se anula, pues nunca se satisface la condición requerida por la δ .

Razonamientos análogos a éste, junto con argumentos de paridad, alcanzan para justificar que los seis términos restantes de la Ec. (3.79) también se anulan. La única contribución a la fuerza por unidad de área, entonces, estará dada por el término con $\alpha = +, \beta = \gamma = -$, y se puede calcular fácilmente ya que las integrales sobre p_0 y p_1 son triviales gracias a las funciones δ presentes en los potenciales:

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Im} \int dp_0 \frac{d^2 \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} i p_1 G_{++}^{(0)}(p_{\parallel}, a, 0) \tilde{\lambda}_{L,+} (p_0) G_{--}^{(0)}(p_{\parallel}, 0, a) \tilde{\lambda}_{R,-} (p_0) + L \leftrightarrow R \\ &= -\frac{\pi^2}{2a^4} \frac{g^4}{\Omega^6} \frac{1}{v} (\Omega a)^5 \int dx \frac{e^{-\frac{2}{v} \sqrt{(\Omega a)^2 (4-v^2) + x^2}}}{(\Omega a)^2 (4-v^2) + x^2}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

donde hemos utilizado que los términos $R \leftrightarrow L$ no contribuyen, y hemos escrito el resultado final como producto de factores adimensionales, de modo que aparezcan las dimensiones correctas explícitamente. El signo negativo evidencia que la fuerza generada por el campo sobre la placa se opone al movimiento de la misma. Notemos que la integral que queda por calcular es exactamente la misma que encontramos para la acción efectiva en la Sección anterior. Esto no debería ser sorprendente, ya que ambas magnitudes dan cuenta de los efectos disipativos presentes en el sistema. En la próxima Sección mostraremos explícitamente la forma en la que estas dos magnitudes se relacionan entre sí.

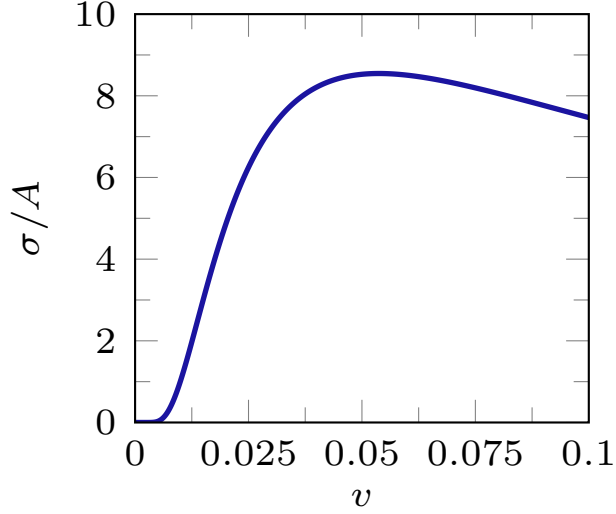


Figura 3.5: Módulo de la fuerza de fricción por unidad de área actuante sobre la placa móvil para el caso de placas de espesor infinitesimal, como función de la velocidad relativa v y para $\Omega a = 0,01$. El factor global es $A = \frac{\pi^2 g^4 (\Omega a)^5}{2\Omega^6 a^4}$. La fuerza de fricción es prácticamente despreciable para valores chicos de la velocidad entre las placas.

La Ec. (3.81) es el resultado principal de esta Sección, y la integral resultante puede ser calculada numéricamente, obteniendo el resultado de la Figura 3.5 . El comportamiento de la fuerza como función de la velocidad relativa entre las placas muestra que, como era de esperarse, la fricción cuántica es prácticamente despreciable para velocidades bajas, es decir, cuando $v \ll \Omega a$. La fricción alcanza un máximo para una cierta velocidad $v = v_0$; un estudio numérico sugiere que dicha velocidad es proporcional a Ωa , la única magnitud con dimensiones de velocidad que puede construirse en términos de los parámetros del sistema a este orden en teoría de perturbaciones.

Ahora es cuestión de simplemente resolver una integral, y podemos obtener la fuerza entre dos placas de espesor infinito, dado que el argumento que usamos para la acción efectiva continúa siendo válido en este caso. De este modo, para dos semi-espacios, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= -\frac{\pi^2 g^4}{2\Omega v} \int_a^\infty ds (s-a) \int dk \frac{\exp[-\frac{2s}{v} \sqrt{\Omega^2(4-v^2) + k^2}]}{\Omega^2(4-v^2) + k^2} \\
 &= -\frac{\pi^2}{8a^4} \frac{g^4}{\Omega^8} (\Omega a)^7 v \int dx \frac{\exp[-\frac{2}{v} \sqrt{(\Omega a)^2(4-v^2) + x^2}]}{[(\Omega a)^2(4-v^2) + x^2]^2}, \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

resultado que mostramos en la Figura 3.6. Recordemos que las dimensiones de g y de Ω son distintas cuando el espesor de los espejos no es infinitesimal, como explicamos en la Sección 3.2.2. Además, notemos que en este caso no aparece un máximo para

la fuerza, como era el caso para placas delgadas. La razón de esta discrepancia es que, a este orden, el resultado para semiespacios es obtenido mediante la integración del caso de espesor nulo, y dicha integración incluye un peso que favorece distancias más grandes que a . Puede mostrarse que los dos semiespacios pueden ser descriptos de manera aproximada como dos placas de espesor nulo separadas por una distancia efectiva que dependa de la velocidad. Este efecto pareciera ser el responsable de la desaparición aparente del pico que existía en el caso de placas delgadas.

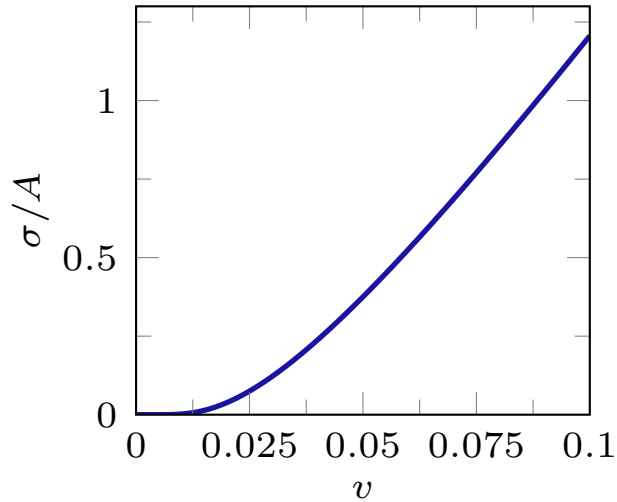


Figura 3.6: Módulo de la fuerza de fricción por unidad de área actuante sobre la placa móvil para el caso de placas de espesor infinitesimal, como función de la velocidad relativa v y para $\Omega a = 0,01$. El factor global es $A = \frac{g^4(\Omega a)^5}{16\Omega^8\pi a^4}$. La fuerza de fricción es prácticamente despreciable para valores chicos de la velocidad entre las placas.

3.5. Cálculo de la fuerza de fricción a partir de la acción efectiva

Como ya mencionamos, tanto la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* como la potencia disipada (y la fuerza de fricción que de ella puede obtenerse) son distintas manifestaciones de un mismo fenómeno: la fricción de Casimir entre las placas. Por ello es razonable suponer que estas dos magnitudes estén de hecho relacionadas.

La disipación aparece, en este caso, cuando se genera una excitación en el campo que describe los grados de libertad del material, debido a su interacción con el campo de vacío. La probabilidad \mathcal{P} de que esto ocurra, durante toda la historia de las placas, está relacionada con la acción efectiva mediante [28]

$$2\text{Im}\Gamma = \mathcal{P} = T \int d^3k_{\parallel} p(k_{\parallel}), \quad (3.83)$$

donde $p(k_{\parallel})$ es la probabilidad por unidad de tiempo de crear un par de excitaciones en el material con momento total k_{\parallel} . El resultado es proporcional al tiempo total transcurrido T , debido a que estamos en un régimen estacionario (asumimos que este tiempo es muy posterior al instante en el que el espejo se puso en movimiento). Notemos que k_{\parallel} es el tri-momento inyectado en el sistema por las condiciones externas (es decir, por el movimiento de la placa R). La expresión explícita de $p(k_{\parallel})$ puede leerse de la Ec. (3.54), y tiene la forma

$$p(k_{\parallel}) = -\frac{\pi\Sigma}{2} \text{Im} \left[\Theta \left(vk_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \right) \delta \left(k_0 - (vk_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon}) \right) f(k_0) \right. \\ \left. + \Theta \left(-vk_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon} \right) \delta \left(k_0 - (-vk_1 - \sqrt{\Omega^2 - i\epsilon}) \right) f(-k_0) \right], \quad (3.84)$$

expresión que, a pesar del aparente signo negativo, es definida positiva. La presencia de las funciones δ resalta el hecho de que la integración sobre el plano complejo k_0 captura la contribución de los dos polos simples ya mencionados anteriormente.

Por otro lado, la energía total E acumulada en las placas debido a la excitación de los grados de libertad internos está dada por

$$E = T \int d^3 k_{\parallel} |k_0| p(k_{\parallel}), \quad (3.85)$$

donde $|k_0|$ es la energía de la excitación que fue creada con probabilidad $p(k_{\parallel})$. Esta energía es proporcionada por la fuente externa que mantiene a la placa moviéndose a velocidad constante en contra de la fuerza de fricción (por unidad de área) σ . El balance de energía, entonces, resulta

$$\frac{E}{T\Sigma} = v|\sigma|. \quad (3.86)$$

De la ecuación anterior es fácil ver que para obtener la fuerza de fricción uno puede simplemente insertar $2|k_0|/v$ en las Ecs. (3.50), lo que es equivalente a redefinir la función $f(p_0)$ y repetir todo el procedimiento realizado en la Sección 3.3. Notemos que el agregado de $|k_0|$ no afecta toda la discusión acerca de las posiciones de los polos y sus contribuciones a la integral. Siguiendo todos los pasos de los cálculos anteriores, se ve que el agregado de $2|k_0|/v$ en la definición de $f(p_0)$ resulta en un agregado de $2|\omega - \Omega|/v$ en la Ec. (3.57). Luego de tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$, la función delta de Dirac fija el valor de $\omega = 2\Omega$, y finalmente en el resultado final de la Ec. (3.59) sólo debemos agregar el factor $2\Omega/v$ para obtener la fuerza de fricción, que resulta

$$\sigma = \frac{\pi^2}{2a^4} \frac{g^4}{\Omega^6} \frac{1}{v} (\Omega a)^5 \int dx \frac{e^{-\frac{2}{v}\sqrt{(\Omega a)^2(4-v^2)+x^2}}}{(\Omega a)^2(4-v^2)+x^2}, \quad (3.87)$$

que es exactamente el módulo de la fuerza que calculamos utilizando el formalismo *CTP* en la Sección anterior, Ec. (3.81).

Este resultado es muy importante ya que relaciona los dos formalismos que utilizamos hasta ahora, y nos permite prescindir de pasar por las complicaciones de *CTP* a la hora de calcular la fuerza de fricción. El formalismo de *CTP* será útil a la hora de querer estudiar otros fenómenos relacionados, como la decoherencia producida por las interacciones mediadas por el vacío, como estudiaremos en el Capítulo 5. Sin embargo, a partir de ahora, mientras nos limitemos al estudio de la disipación dentro del formalismo funcional, nos quedaremos dentro del formalismo *in-out* y obtendremos la fuerza de fricción a partir de la acción efectiva.

3.6. Límite no retardado

Para terminar este Capítulo, repetiremos nuestros cálculos en el límite no retardado que, como vimos en la Sección 1, constituye el caso más ampliamente considerado en la literatura.

Trabajar en el límite no retardado equivale a despreciar los efectos relativistas, es decir, a tomar el límite $c \rightarrow \infty$. En las unidades naturales en las que estamos trabajando, esto se traduce en la aproximación $p_0 \ll p_{\parallel}$, que nos permite utilizar las expresiones no-relativistas para los propagadores que aparecen en la Ec. 3.16, obteniendo la versión no retardada de la Ec. 3.45:

$$\Gamma_I^{(2)} \approx -\frac{iT\Sigma}{4} \int d^3p_{\parallel} \frac{e^{-2ap_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2} \tilde{\lambda}(p_0) \tilde{\lambda}(p_0 - vp_1). \quad (3.88)$$

La parte imaginaria de la acción efectiva, entonces, presenta una expresión considerablemente simplificada:

$$\text{Im}\Gamma_I^{(2)} \approx \frac{-T\Sigma}{4} \int d^2p_{\parallel} \frac{e^{-2ap_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2} \int dp_0 \left[\text{Re}\tilde{\lambda}(p_0)\text{Re}\tilde{\lambda}(p_0 - vp_1) - \text{Im}\tilde{\lambda}(p_0)\text{Im}\tilde{\lambda}(p_0 - vp_1) \right]. \quad (3.89)$$

Para poder evaluar la expresión anterior, miremos primero el término que contiene las dos partes imaginarias. Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, recordando la definición de $\tilde{\lambda}$ (Ec. 3.30), tenemos

$$\begin{aligned} \text{Im}\tilde{\lambda}(p_0)\text{Im}\tilde{\lambda}(p_0 - vp_1) &\approx \pi^2 g^2 \delta[p_0^2 - \Omega^2] \delta[(p_0 - vp_1)^2 - \Omega^2] \\ &= \pi^2 g^2 \left[\frac{\delta(p_0 - \Omega) + \delta(p_0 + \Omega)}{2\Omega} \right] \delta[v^2 p_1^2 - 2vp_0 p_1] \end{aligned} \quad (3.90)$$

Con este resultado podemos evaluar la integral sobre p_0 , resultando:

$$\int dp_0 \operatorname{Im}\tilde{\lambda}(p_0)\operatorname{Im}\tilde{\lambda}(p_0 - vp_1) = \frac{\pi^2 g^2}{2\Omega} \left[\frac{\delta(p_1)}{v\Omega} + \frac{\delta(p_1 + 2\Omega/v) + \delta(p_1 - 2\Omega/v)}{2v\Omega} \right]. \quad (3.91)$$

Por otro lado, en el término que contiene las partes reales podemos escribir

$$\operatorname{Re}\tilde{\lambda}(p_0)\operatorname{Re}\tilde{\lambda}(p_0 - vp_1) = \frac{p_0^2 - \Omega^2}{(p_0^2 - \Omega^2)^2 + \epsilon^2} \frac{(p_0 - vp_1)^2 - \Omega^2}{((p_0 - vp_1)^2 - \Omega^2)^2 + \epsilon^2}. \quad (3.92)$$

La integral sobre p_0 de este término puede resolverse utilizando que, cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2 + \epsilon^2} \frac{(x - y)^2 - 1}{((x - y)^2 - 1)^2 + \epsilon^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{2} \left[\delta(y) - \frac{1}{2}\delta(y - 2) - \frac{1}{2}\delta(y + 2) \right]. \quad (3.93)$$

Esta última identidad puede demostrarse reescribiendo $\frac{1}{((x-y)^2-1)^2+\epsilon^2} \rightarrow \frac{1}{(x-y-1)^2+\frac{\epsilon^2}{4}} \times \frac{1}{(x-y+1)^2+\frac{\epsilon^2}{4}}$. El resultado es, entonces:

$$\int dp_0 \operatorname{Re}\tilde{\lambda}(p_0)\operatorname{Re}\tilde{\lambda}(p_0 - vp_1) = \frac{\pi^2 g^2}{2\Omega} \left[\frac{\delta(p_1)}{v\Omega} - \frac{\delta(p_1 + 2\Omega/v)}{2v\Omega} - \frac{\delta(p_1 - 2\Omega/v)}{2v\Omega} \right]. \quad (3.94)$$

Insertando las Ecs. (3.91) y (3.94) en la expresión para la parte imaginaria de la acción efectiva (3.89), llegamos a la expresión final (haciendo el cambio de variables $x = ap_2u$)

$$\operatorname{Im}\Gamma_I^{\text{nr}} = \frac{T\Sigma\pi^2 g^4 a}{4\Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2}{v}\sqrt{x^2+4(\Omega a)^2}}}{x^4 + 4(\Omega a)^2}. \quad (3.95)$$

La expresión anterior es exactamente idéntica a la que obtuvimos al tomar el límite $v \ll c$ en nuestro resultado para la acción efectiva *in-out* dado por la Ec. 3.59 (ver segunda línea).

Evidentemente, trabajar en el límite no retardado simplifica considerablemente los cálculos involucrados, y hemos mostrado que el resultado es el mismo que se obtiene trabajando con los propagadores completos para el campo de vacío si consideramos velocidades mucho menores que la velocidad de la luz.

3.7. Conclusiones

En este capítulo hemos utilizado un enfoque funcional para estudiar la fricción cuántica en un sistema de dos espejos imperfectos moviéndose a velocidad relativa constante, dentro de un modelo en el cual el campo de vacío es un campo escalar no

masivo que está acoplado a los grados de libertad microscópicos de los espejos, representados por osciladores armónicos desacoplados. Este acoplamiento induce, luego de integrar funcionalmente el campo de materia, un término de interacción no-local en la acción para el campo de vacío. Dicho término tiene una estructura que depende, entre otras cosas, de la velocidad relativa entre las placas. Hemos utilizado esta acción no-local para el campo de vacío para encarar el problema desde dos puntos de vista complementarios, que luego hemos relacionado entre sí.

En las primeras secciones de este capítulo calculamos la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*. Debido a que está relacionada con la amplitud de persistencia del vacío, la presencia de una parte imaginaria es una señal de la existencia de efectos disipativos. Para clarificar la relación entre la disipación y las propiedades analíticas de la interacción no-local (relacionada con la permitividad dieléctrica del material), hicimos un análisis detallado en tiempo real (en contraste con estudios anteriores en este formalismo, donde se utilizaba tiempo Euclídeo o imaginario). El formalismo *in-out* involucra la presencia de propagadores de Feynman, es decir, con la prescripción $-i\epsilon$, tanto para el campo de vacío como para el campo de materia. Es decir que este tipo de estructura analítica determina tanto la estructura analítica de la acción efectiva total como la de la permitividad dieléctrica, obtenida luego de integrar los grados de libertad internos del material. Esta característica ya ha sido observada en uno de los trabajos pioneros sobre fricción cuántica [11], donde la presencia de singularidades fue señalada como la fuente de la disipación. El trabajo de este capítulo complementa el enfoque Euclídeo de la Ref. [26] y clarifica la cuestión de la validez de realizar rotaciones de Wick a partir de los resultados Euclídeos.

Luego en la Sección 3.4 calculamos de manera independiente la fuerza de fricción entre los dos espejos. Para ello recurrimos al formalismo *CTP*, que es crucial para obtener resultados correctos al calcular valores medios en problemas fuera del equilibrio, en particular $\langle 0_{\text{in}} | t_{\mu\nu} | 0_{\text{in}} \rangle$. Si hubiéramos utilizado el formalismo *in-out*, no habríamos obtenido el valor medio sino el elemento de matriz $\langle 0_{\text{out}} | t_{\mu\nu} | 0_{\text{in}} \rangle$. El punto crucial aquí es que, debido a la disipación, los estados de vacío *in* y *out* son diferentes. Esta es la razón por la cual el formalismo *CTP* no es necesario a la hora de calcular fuerzas de Casimir estáticas, mientras que su uso es inevitable a la hora de computar la fuerza en espejos móviles [28].

Por último, en la última sección de este capítulo, hemos relacionado estos dos enfoques que, en principio, parecían desvinculados. Encontramos una manera de obtener la energía disipada en el sistema a partir de la acción efectiva y, a partir del balance de energía, la fuerza de fricción. Este resultado es muy importante ya que

nos permitirá, a partir de ahora, prescindir del formalismo *CTP* cuando queramos calcular la fuerza de fricción.

Todo el enfoque que hemos descrito a lo largo de este capítulo puede generalizarse al caso más realista en el que el campo de vacío está descrito por el campo electromagnético, y el material de las placas es algún material real. Nos encargaremos de esto en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Fricción entre dos placas de grafeno

4.1. Introducción

En este capítulo también estudiaremos la fricción cuántica entre dos espejos paralelos que se mueven a velocidad relativa constante, pero con algunos cambios que, creemos, permiten ajustar un poco más nuestro sistema de estudio a la realidad. En primer lugar, utilizaremos el campo de Maxwell completo para describir el campo electromagnético de vacío, en lugar de un campo de Klein-Gordon. Por otro lado, si bien el modelo de juguete con el que estábamos describiendo los grados de libertad del material nos permitió estudiar el problema en detalle y extraer muchas conclusiones pertinentes sobre el fenómeno de fricción de Casimir, en este capítulo consideraremos un modelo más realista para el material, al cual se puede acceder experimentalmente.

Teniendo en cuenta que las predicciones del fenómeno de fricción de Casimir han sido obtenidas principalmente para materiales dieléctricos o metales imperfectos, en este capítulo estudiaremos el mismo efecto pero para dos placas de grafeno. Nuestro argumento es que el grafeno tiene propiedades altamente inusuales que vuelven mucho más interesante su estudio teórico. De hecho, gracias a la baja dimensionalidad del grafeno y su particular estructura cristalina, sus excitaciones de baja energía se comportan como fermiones de Dirac no masivos (con la velocidad de Fermi v_F jugando el papel la velocidad de la luz). Este hecho resulta en un inusual comportamiento semi-metálico [35], así como en propiedades ópticas y de transporte peculiares [36–38].

En unidades naturales (las cuales adoptaremos también en este capítulo), las dimensiones en masa de la función de respuesta del grafeno en el espacio de momentos sólo puede estar dada por el momento mismo. De hecho, los otros posibles ingredientes, v_F y la carga efectiva de los fermiones, son adimensionales. Y, cuando la placa se está moviendo a velocidad constante v , otro objeto dimensional, la velocidad misma v , entra en juego (ver más abajo). De modo que los observables macroscópicos del

fenómeno de fricción de Casimir van a exhibir la propiedad remarcable de ser función de v y v_F , con las dimensiones globales (triviales) de la magnitud respectiva quedando determinadas puramente por la geometría: tamaño y distancia entre las placas, como en el efecto Casimir estático entre dos espejos.

Un efecto relacionado pero diferente, también denominado *fricción cuántica*, ha sido estudiado para el grafeno en la Referencia [39]. Notemos, sin embargo, que en ese trabajo el sistema de estudio está compuesto por una única placa de grafeno estático, por la cual se hace circular una corriente, sobre un substrato de SiO_2 . La fuerza disipativa actúa, en este caso, sobre los portadores de carga del grafeno, que se asume tienen una velocidad de deriva v con respecto al substrato.

En el estudio que haremos a continuación, comenzaremos considerando el modelo microscópico para dos placas de grafeno acopladas al campo electromagnético (EM). Estos grados de libertad microscópicos corresponden a campos de Dirac en $2 + 1$ dimensiones que, en el marco de un formalismo funcional, serán integrados. El resultado de esta integración funcional, junto con la acción para el campo de gauge libre, produce una acción efectiva *in-out* para dicho campo. Integrando también a este campo, finalmente obtenemos una acción efectiva para el sistema completo, cuya parte imaginaria da cuenta de los efectos disipativos en el sistema, el mismo procedimiento que hemos llevado a cabo en el capítulo anterior y en el trabajo [22, 23].

En este capítulo nuevamente haremos nuestros cálculos dentro del formalismo de integrales funcionales [26, 28] y, luego de evaluar la probabilidad de decaimiento del vacío, relacionaremos la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* con la fuerza de fricción actuando sobre las placas, como mostramos en el capítulo anterior.

La estructura de este capítulo, basado en el trabajo *Quantum friction between graphene sheets* [24], es la siguiente: en la Sección 4.2, introducimos el modelo microscópico considerado en este capítulo. Luego derivamos una 'acción efectiva' para el campo EM, es decir, una acción Euclídea que, en nuestra descripción, es una funcional de A_μ , el campo de gauge correspondiente al campo EM de vacío. Esta acción contendrá la influencia de las placas de grafeno y, para encontrarla, tendremos que encontrar la forma del tensor de polarización de vacío (VPT, por sus siglas en inglés) para la placa de grafeno móvil, vista desde el sistema laboratorio (en el que la otra placa está en reposo).

Luego, en la Sección 4.3, calculamos la acción efectiva total resultante de la posterior integración del campo EM. Esta acción efectiva, cuando es rotada al espacio de Minkowski, puede ser utilizada para calcular la probabilidad de persistencia del vacío como función de la velocidad relativa entre las placas de grafeno. Luego, en

la Sección 4.4, calculamos la potencia disipada en el sistema a partir de la acción efectiva *in-out*, y con ello calculamos la fuerza disipativa actuante en la placa móvil. Por último, la Sección 4.5 contiene las conclusiones de este capítulo.

4.2. El modelo

En primer lugar introducimos la acción Euclídea \mathcal{S} para el campo EM y las dos placas de grafeno, una de ellas estática, y la otra moviéndose a velocidad constante (que asumimos paralela a las placas). La acción depende del campo de gauge y de los campos de Dirac que están confinados a los espejos. Nuevamente \mathcal{S} se descompone de manera natural en tres términos:

$$\mathcal{S}[A; \bar{\psi}, \psi] = \mathcal{S}_v^{(0)}[A] + \mathcal{S}_d^{(0)}[\bar{\psi}, \psi] + \mathcal{S}_{mv}^{(int)}[\bar{\psi}, \psi, A], \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{S}_v^{(0)}$ es la acción libre (es decir, en ausencia de medios materiales) para el campo EM de vacío:

$$\mathcal{S}_v^{(0)}[A] = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, mientras que $\mathcal{S}_m^{(0)}$ y $\mathcal{S}_{mv}^{(int)}$ son las acciones para los campos de Dirac libres de la materia y para su interacción con el campo de gauge, respectivamente. Los índices del medio del alfabeto griego (μ, ν, \dots) corren de 0 a 3, con $x_0 \equiv ct$.

Tanto $\mathcal{S}_m^{(0)}$ como $\mathcal{S}_{mv}^{(int)}$ están localizados en las regiones ocupadas por los dos espejos, que nuevamente vamos a denotar como L y R (cada letra va a usarse para denotar tanto a la placa como a la región espacial que ocupa). Nuestra elección de coordenadas Cartesianas es tal que L es el plano $x_3 = 0$, y R está definida por $x_3 = a$. Volvemos a adoptar la convención $\hbar = c = 1$.

Introducimos Γ , la acción efectiva para el sistema total definido por la acción \mathcal{S} en (4.1), que puede ser escrita en términos de \mathcal{Z} , la función de partición a temperatura cero:

$$e^{-\Gamma} \equiv \mathcal{Z} \equiv \int [\mathcal{D}A] \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\mathcal{S}[A; \bar{\psi}, \psi]}, \quad (4.3)$$

donde $[\mathcal{D}A]$ es la medida de integración del campo EM incluyendo el fijado de gauge.

Integrando los grados de libertad del material, es decir, los campos de Dirac, obtenemos una acción para el campo EM, \mathcal{S}_{eff} que satisface

$$e^{-\mathcal{S}_{\text{eff}}[A]} \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\mathcal{S}[A; \bar{\psi}, \psi]}, \quad (4.4)$$

y que puede ser escrita como

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[A] = \mathcal{S}_v^{(0)}[A] + \mathcal{S}_v^{(\text{int})}[A], \quad (4.5)$$

donde el segundo término contiene la influencia de las placas de grafeno sobre el campo de vacío. Para obtener la acción efectiva total para el sistema es necesario integrar además al campo de gauge, es decir:

$$e^{-\Gamma} \equiv \int [\mathcal{D}A] e^{-\mathcal{S}_{\text{eff}}[A]}. \quad (4.6)$$

En las dos subsecciones siguientes lidiaremos con la determinación de $\mathcal{S}_v^{(\text{int})}$, que es el resultado de la integración de los grados de libertad fermiónicos.

4.2.1. Contribución a la acción efectiva debida al espejo estático

Al igual que ocurría en la Referencia [40], el término de interacción efectiva para el campo de gauge en presencia de las placas de grafeno se origina a partir de dos teorías en (esencialmente) $2 + 1$ dimensiones, acopladas al campo de gauge en $3 + 1$ dimensiones. Por consiguiente $\mathcal{S}_v^{(\text{int})} = \mathcal{S}_v^{(\text{L})} + \mathcal{S}_v^{(\text{R})}$, donde cada término es debido al espejo correspondiente. El hecho de que una de las placas se este moviendo no afecta la dimensionalidad de estas teorías, debido a que la superficie que ocupa es invariante frente al movimiento de deslizado que realiza.

Primero consideremos el término debido a la placa estática en $x_3 = 0$, $\mathcal{S}_v^{(\text{L})}[A]$. Hasta orden cuadrático en el campo de gauge, siguiendo [40], podemos escribir esta contribución de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}_v^{(\text{L})}[A] = \frac{1}{2} \int d^3x_{\parallel} \int d^3y_{\parallel} A_{\alpha}(x_{\parallel}, 0) \Pi_{\alpha\beta}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) A_{\beta}(y_{\parallel}, 0), \quad (4.7)$$

donde los índices del principio del alfabeto griego (α, β, \dots) pueden tomar valores $0, 1, 2$ y son usados aquí para etiquetar las coordenadas del espacio-tiempo en el volumen de universo $2 + 1$ -dimensional en el que viven los grados de libertad internos de cada placa. Estas coordenadas serán colectivamente denominadas x_{\parallel} . Con respecto al espacio de momentos en $2 + 1$, usaremos $k_{\parallel} \equiv (k_0, k_1, k_2)$, y $\mathbf{k}_{\parallel} \equiv (k_1, k_2)$ para su parte espacial.

A diferencia de lo ocurrido para el campo escalar de vacío, el resultado de integrar los grados de libertad internos de la placa L interactuando con el campo electromagnético completo no es un núcleo escalar sino tensorial: $\Pi_{\alpha\beta}$, el tensor de polarización de vacío o VPT. Bajo las suposiciones de independencia temporal e invarianza

bajo rotaciones y traslaciones espaciales, este tensor puede ser convenientemente descompuesto en tensores ortogonales el espacio de Fourier. De hecho, debido a que este tensor debe verificar la identidad de Ward:

$$k_\alpha \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k) = 0, \quad (4.8)$$

(la tilde es nuevamente utilizada para denotar la transformada de Fourier), los tensores irreducibles (proyectores) a lo largo de los cuales $\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}$ puede descomponerse deben satisfacer la condicion anterior y deben poder construirse utilizando como piezas los objetos: $\delta_{\alpha\beta}$, k_α , y $n_\alpha = (1, 0, 0)$. Realizando combinaciones simples entre ellos, podemos además introducir: $\check{k}_\alpha \equiv k_\alpha - k_0 n_\alpha$, y $\check{\delta}_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$.

Debido a que no podemos garantizar que el VPT sea proporcional a $\mathcal{P}_{\alpha\beta}^\perp \equiv \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}$, vamos a construir dos tensores independientes que satisfacen la condición (4.8), \mathcal{P}^t y \mathcal{P}^l , definidos como:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^t \equiv \check{\delta}_{\alpha\beta} - \frac{\check{k}_\alpha \check{k}_\beta}{\check{k}^2} \quad (4.9)$$

y

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \equiv \mathcal{P}_{\alpha\beta}^\perp - \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t. \quad (4.10)$$

Definiendo además

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{\parallel} \equiv \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}, \quad (4.11)$$

podemos verificar las siguientes propiedades algebraicas:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\perp + \mathcal{P}^{\parallel} &= I, \quad \mathcal{P}^t + \mathcal{P}^l = \mathcal{P}^\perp \\ \mathcal{P}^t \mathcal{P}^l &= \mathcal{P}^l \mathcal{P}^t = 0, \quad \mathcal{P}^{\parallel} \mathcal{P}^t = \mathcal{P}^t \mathcal{P}^{\parallel} = 0, \\ \mathcal{P}^{\parallel} \mathcal{P}^l &= \mathcal{P}^l \mathcal{P}^{\parallel} = 0, \end{aligned}$$

$$(\mathcal{P}^\perp)^2 = \mathcal{P}^\perp, \quad (\mathcal{P}^{\parallel})^2 = \mathcal{P}^{\parallel}, \quad (\mathcal{P}^t)^2 = \mathcal{P}^t, \quad (\mathcal{P}^l)^2 = \mathcal{P}^l. \quad (4.12)$$

Notemos que $\delta_{\alpha\beta}$, $\mathcal{P}_{\alpha\beta}^\perp$, y $\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{\parallel}$ son tensores de Lorentz de segundo orden. Los otros proyectores, \mathcal{P}^t y \mathcal{P}^l , no lo son: ellos separan explícitamente la cordenada temporal en sus definiciones. Los tensores de Lorentz tienden a tensores de Galileo en el límite de bajas velocidades.

Para un medio general, uno tiene

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) = g_t(k_0, \mathbf{k}_{\parallel}) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + g_l(k_0, \mathbf{k}_{\parallel}) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l, \quad (4.13)$$

donde g_t y g_l son funciones escalares que dependen del modelo.

Si la acción para los campos de materia fuera relativista, tendríamos $g_t = g_l \equiv g$, una función escalar de k_{\parallel} , y el VPT sería proporcional a un único proyector:

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) = g(k_{\parallel}) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^{\perp}. \quad (4.14)$$

Por otro lado, para el caso del grafeno, podemos presentar los resultados ya conocidos para su tensor de polarización del vacío [35]:

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) = \frac{e^2 N |m|}{4\pi} F\left(\frac{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{4m^2}\right) \left[\mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + \frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \right] \quad (4.15)$$

donde

$$F(x) = 1 - \frac{1-x}{\sqrt{x}} \arcsin[(1+x^{-1})^{-\frac{1}{2}}], \quad (4.16)$$

m es la 'masa' (el gap), N el número de especies de fermiones de Dirac de 2 componentes, y v_F es la velocidad de Fermi (en unidades donde $c = 1$).

En este trabajo vamos a considerar el caso del grafeno sin gap ($m = 0$) y definimos $\alpha_N \equiv \frac{e^2 N}{16}$, de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} &= \alpha_N \sqrt{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2} \left[\mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + \frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \right] \\ &= \alpha_N \sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2} \left[\sqrt{\frac{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + \sqrt{\frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Vemos explícitamente que la dimensión en masa del VPT está dada por el momento, como mencionamos en la Introducción de este Capítulo.

Concluimos nuestra discusión acerca de $\mathcal{S}_v^{(L)}$ escribiendo su expresión hasta segundo orden en la constante de acoplamiento y en una forma en la que parezca de $3 + 1$ dimensiones,

$$\mathcal{S}_v^{(L)}[A] = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y A_{\alpha}(x) V_{\alpha\beta}^{(L)}(x, y) A_{\beta}(y), \quad (4.18)$$

donde $V_{\alpha\beta}^{(L)}(x, y)$ está dado por

$$V_{\alpha\beta}^{(L)}(x, y) = \delta(x_3) \Pi_{\alpha\beta}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) \delta(y_3). \quad (4.19)$$

4.2.2. Contribución a la acción efectiva debida a la placa móvil

Ahora que ya conocemos la expresión para la acción efectiva debido al espejo estático en $x_3 = 0$, queremos derivar el mismo objeto para el espejo móvil en $x_3 = a$.

Al igual que hicimos en el capítulo anterior, vamos a partir de la expresión en el sistema de referencia en el que el espejo está quieto. Dicha expresión debe coincidir en forma con el resultado para L , dado que las funciones de respuesta de los materiales usualmente están definidas en el sistema comóvil. También vamos a suponer que la velocidad relativa entre las placas es mucho menor que la velocidad de la luz c , es decir, $v \ll 1$, de modo que tomaremos el límite de velocidades chicas a la hora de relacionar expresiones definidas en distintos sistemas de referencia inerciales. Además, usualmente las descripciones de los medios materiales están restringidas a este mismo régimen.

Repetiremos el procedimiento que realizamos en la Sección 3.2.1.1 del Capítulo anterior. Nuevamente, escribimos la acción que contiene el efecto de la placa móvil en función de las variables referidas al sistema de referencia R , en el que la misma está en reposo:

$$\mathcal{S}_v^{(R)}[A] = \frac{1}{2} \int d^4x' \int d^4y' A'_\alpha(x') V_{\alpha\beta}^{(R)}(x', y') A'_\beta(y'), \quad (4.20)$$

donde

$$V_{\alpha\beta}^{(R)}(x', y') = \delta(x'_3 - a) \Pi'_{\alpha\beta}(x'_\parallel, y'_\parallel) \delta(y'_3 - a). \quad (4.21)$$

Ahora bien: por un lado, las medidas de integración y las variables perpendiculares al movimiento, x_3 e y_3 , son invariantes frente a las transformaciones de Lorentz que conectan los dos sistemas. Por otro lado, el campo electromagnético se transforma de acuerdo a $A'_\alpha(x') = \Lambda_{\alpha\beta} A_\beta(x)$, donde $\Lambda_{\alpha\beta}$ es la matriz de la transformación de Lorentz en $2 + 1$ restringida al espacio de interés (es decir, el plano ocupado por la placa R). Las coordenadas también se transforman como $x'_\parallel = \Lambda(v)x_\parallel$.

En cuanto al tensor de polarización de vacío, notemos que, como ya mencionamos, el mismo está siempre definido en el sistema en el que el material está en reposo. Es decir que $\Pi'_{\alpha\beta}$ no es más que el tensor de polarización de vacío usual, equivalente en forma funcional al que aparece para la placa L , sólo que aquí aparece evaluado en las coordenadas fijas a la placa R :

$$\Pi'_{\alpha\beta}(x'_\parallel, y'_\parallel) \equiv \Pi_{\alpha\beta}(x'_\parallel, y'_\parallel) = \Pi_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1}x_\parallel, \Lambda^{-1}y_\parallel). \quad (4.22)$$

Es importante notar que aquí no estamos queriendo decir que la estructura tensorial del VPT no se transforma ante transformaciones de Lorentz (lo cual no es cierto, como veremos más adelante), sino que la expresión del tensor que aparece en la acción para la placa móvil es la misma expresión que aparece en la acción para la placa quieta, debido a que las expresiones que se utilizan para los VPT son válidas en sus respectivos sistemas en reposo.

Todo esto nos permite escribir la siguiente expresión para la acción de la placa R :

$$\mathcal{S}_v^{(R)}[A] = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y A_\alpha(x) V_{\alpha\beta}^{(R)}(x, y) A_\beta(y), \quad (4.23)$$

donde hemos definido

$$V_{\alpha\beta}^{(R)}(x, y) \equiv \delta(x_3 - a) \Pi_{\alpha\beta}^R(x_\parallel, y_\parallel) \delta(y_3 - a), \quad (4.24)$$

y:

$$\Pi_{\alpha\beta}^R(x_\parallel, y_\parallel) \equiv \Lambda_{\alpha\delta} \Lambda_{\beta\gamma} \Pi_{\delta\gamma}(\Lambda^{-1}x_\parallel, \Lambda^{-1}y_\parallel). \quad (4.25)$$

Para poder realizar explícitamente estas transformaciones, nos quedaremos con el primer término no trivial en una expansión en potencias de v de las transformaciones de Lorentz, aprovechando el hecho de que siempre trabajaremos a velocidades bajas. Debido a que en nuestras convenciones $c = 1$ y nuestra métrica es Euclídea,

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} 1 & v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

(es decir, son matrices de rotación expandidas para ángulos pequeños). Notemos que esta matriz incluye la transformación de la coordenada temporal, mientras que las transformaciones de Galileo no lo hacen:

$$\Lambda_G(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

En el espacio de momentos, podemos escribir (luego de un cálculo análogo al realizado en la Sec. 3.2.1.1):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^R(k_\parallel) &= \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} \tilde{\Pi}_{\gamma\delta}(\Lambda^{-1}k_\parallel) \\ &= \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} \tilde{\Pi}_{\gamma\delta}(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2.3. Acción efectiva $\mathcal{S}_v^{(\text{int})}$ para el campo de vacío en presencia de las placas de grafeno

Juntando los resultados anteriores, tenemos

$$\mathcal{S}_v^{(\text{int})} = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y A_\alpha(x) [V_{\alpha\beta}^{(L)}(x, y) + V_{\alpha\beta}^{(R)}(x, y)] A_\beta(y), \quad (4.29)$$

o bien

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_v^{(\text{int})}[A] = & \frac{1}{2} \int dx_3 \int dy_3 \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) \left[\delta(x_3) \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) \delta(y_3) \right. \\ & \left. + \delta(x_3 - a) \tilde{\Pi}'_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) \delta(y_3 - a) \right] \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, y_3), \end{aligned} \quad (4.30)$$

con $\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^R(k_{\parallel})$ definido como en (4.28).

Estudiamos ahora con más detalle la forma de $\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^R(k_{\parallel})$. Tenemos:

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^R(k_{\parallel}) = g_t(\Lambda^{-1}k_{\parallel}) \mathcal{P}'_{\alpha\beta}{}^t + g_l(\Lambda^{-1}k_{\parallel}) \mathcal{P}'_{\alpha\beta}{}^l, \quad (4.31)$$

donde $\mathcal{P}'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\delta} \Lambda_{\beta\gamma} \mathcal{P}_{\delta\gamma}$, es decir, los tensores primados son objeto de una transformación de Lorentz.

A continuación vamos a ver que los dos proyectores involucrados permanecen invariantes frente a las transformaciones de sistema de referencia. En este punto es importante la siguiente consideración: como ya mencionamos, el procedimiento correcto sería transformar todos los proyectores utilizando las transformaciones de Lorentz al orden más bajo no trivial, es decir, con (4.26). Sin embargo, este proceso es muy engorroso cuando los proyectores son tensores de Galileo y no de Lorentz y el resultado, al quedarse sólo con los órdenes más bajos en v , es equivalente a transformar los tensores de Lorentz con las transformaciones de Lorentz (4.26), y los tensores de Galileo con transformaciones de Galileo (4.27).

Primero, entonces, notemos que los tensores de Lorentz que entran en la definición de los proyectores de Galileo son, de hecho, invariantes frente a (4.26):

$$\mathcal{P}'_{\alpha\beta}{}^{\perp}(k_{\parallel}) = \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} \mathcal{P}_{\gamma\delta}{}^{\perp}(\Lambda^{-1}k_{\parallel}) = \mathcal{P}_{\alpha\beta}{}^{\perp}(k_{\parallel}) \quad (4.32)$$

$$\mathcal{P}'_{\alpha\beta}{}^{\parallel}(k_{\parallel}) = \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} \mathcal{P}_{\gamma\delta}{}^{\parallel}(\Lambda^{-1}k_{\parallel}) = \mathcal{P}_{\alpha\beta}{}^{\parallel}(k_{\parallel}), \quad (4.33)$$

mientras que para el tensor de Galileo \mathcal{P}^t verificamos explícitamente que:

$$\mathcal{P}'_{\alpha\beta}{}^t(k_{\parallel}) = (\Lambda_G)_{\alpha\gamma} (\Lambda_G)_{\beta\delta} \mathcal{P}_{\gamma\delta}{}^t((\Lambda_G)^{-1}k_{\parallel}) = \mathcal{P}_{\alpha\beta}{}^t(k_{\parallel}). \quad (4.34)$$

Como \mathcal{P}^l está definido en términos de los tres proyectores que acabamos de considerar, podemos ver trivialmente que

$$\mathcal{P}'_{\alpha\beta}{}^l = \mathcal{P}_{\alpha\beta}{}^l. \quad (4.35)$$

De modo que concluimos que:

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^R(k_{\parallel}) = g_t(\Lambda^{-1}k_{\parallel}) \mathcal{P}_{\alpha\beta}{}^t + g_l(\Lambda^{-1}k_{\parallel}) \mathcal{P}_{\alpha\beta}{}^l. \quad (4.36)$$

Como estamos interesados en velocidades relativas pequeñas entre los espejos, podemos usar la expresión simplificada

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^R(k_{\parallel}) = g_t(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + g_l(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l. \quad (4.37)$$

donde

$$\begin{aligned} g_t(k_{\parallel}) &= \alpha_N \sqrt{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2} \\ g_l(k_{\parallel}) &= \alpha_N \sqrt{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2} \frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.3. Acción efectiva para el sistema

Con todas las consideraciones de la sección anterior, estamos ahora en condiciones de escribir la acción total para el campo de gauge, que contiene la influencia efectiva de las placas de grafeno. En el espacio de Fourier:

$$S_v[A] = \frac{1}{2} \int dx_3 \int dy_3 \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) M_{\alpha\beta}(k_{\parallel}, x_3, y_3) \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, y_3), \quad (4.39)$$

donde el núcleo $M_{\alpha\beta}(k_{\parallel}, x_3, y_3)$ puede ser escrito como

$$M_{\alpha\beta}(k_{\parallel}, x_3, y_3) = M_{\alpha\beta}^0(k_{\parallel}, x_3, y_3) + M_{\alpha\beta}^{\text{int}}(k_{\parallel}, x_3, y_3). \quad (4.40)$$

M^0 es el núcleo para el campo electromagnético libre

$$M_{\alpha\beta}^0(k_{\parallel}, x_3, y_3) = -\partial_3^2 \delta(x_3 - y_3) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^{\parallel} + (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \delta(x_3 - y_3) [\mathcal{P}_{\alpha\beta}^l + \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t], \quad (4.41)$$

y M^{int} contiene la interacción efectiva para el campo EM, generada por la interacción real con los grados de libertad internos de los espejos,

$$M_{\alpha\beta}^{\text{int}}(k_{\parallel}, x_3, y_3) = \tilde{V}_{\alpha\beta}^{(\text{L})}(k_{\parallel}, x_3, y_3) + \tilde{V}_{\alpha\beta}^{(\text{R})}(k_{\parallel}, x_3, y_3). \quad (4.42)$$

Para encontrar la funcional generatriz para todo el sistema debemos integrar además sobre los grados de libertad del campo de vacío:

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}A] e^{-S_v[A]} \quad (4.43)$$

donde $[\mathcal{D}A]$ tiene fijado el *gauge*. Nuevamente, el integrando es Gaussiano, de modo que formalmente la solución de la integral funcional es

$$\mathcal{Z} = [\det(M_{\alpha\beta}(k_{\parallel}, x_3, y_3))]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.44)$$

Ahora, como hemos elegido un conjunto completo de proyectores $\{\mathcal{P}^{\parallel}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^l\}$, podemos descomponer unívocamente el campo de gauge en sus direcciones $\tilde{A}_\alpha \equiv \tilde{A}_\alpha^{\parallel} + \tilde{A}_\alpha^t + \tilde{A}_\alpha^l$, escribiendo de este modo la integración funcional sobre A como tres integrales independientes

$$[\mathcal{D}\tilde{A}] = \mathcal{D}\tilde{A}^{\parallel} \mathcal{D}\tilde{A}^t \mathcal{D}\tilde{A}^l. \quad (4.45)$$

Esto significa que la funcional generatriz para el sistema puede ser escrita como el producto directo de tres integrales funcionales independientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= [\det(M^{\parallel}(k_{\parallel}, x_3, y_3))]^{-\frac{1}{2}} [\det(M^t(k_{\parallel}, x_3, y_3))]^{-\frac{1}{2}} [\det(M^l(k_{\parallel}, x_3, y_3))]^{-\frac{1}{2}} \\ &\equiv \mathcal{Z}^{\parallel} \mathcal{Z}^t \mathcal{Z}^l, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde hemos definido los núcleos

$$M^{\parallel}(k_{\parallel}, x_3, y_3) = -\partial_3^2 \delta(x_3 - y_3) \mathcal{P}^{\parallel}, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} M^l(k_{\parallel}, x_3, y_3) &= \{(-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \delta(x_3 - y_3) + g_l(k_0, k_1, k_2) \delta(x_3) \delta(y_3) \\ &\quad + g_l(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2) \delta(x_3 - a) \delta(y_3 - a)\} \mathcal{P}^l, \end{aligned} \quad (4.48)$$

y

$$\begin{aligned} M^t(k_{\parallel}, x_3, y_3) &= \{(-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \delta(x_3 - y_3) + g_t(k_0, k_1, k_2) \delta(x_3) \delta(y_3) \\ &\quad + g_t(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2) \delta(x_3 - a) \delta(y_3 - a)\} \mathcal{P}^t. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dada la Ec. (4.47), es fácil ver que \mathcal{Z}^{\parallel} es una contribución libre que no tiene en cuenta la presencia de las placas. Por esta razón, es simplemente un factor de normalización, y no lo tendremos en cuenta de aquí en adelante. Los factores restantes \mathcal{Z}^t y \mathcal{Z}^l son formalmente equivalentes pero distintos, excepto para el caso de materiales relativistas.

En cuanto a la acción efectiva, es fácil ver que debe tener dos contribuciones independientes

$$\Gamma \equiv \Gamma^t + \Gamma^l = \frac{1}{2} \text{tr} \log M^t + \frac{1}{2} \text{tr} \log M^l. \quad (4.50)$$

A continuación vamos a obtener una expresión formal para Γ^t ; la expresión correspondiente para Γ^l se obtiene sustituyendo $g_t \rightarrow g_l$, $\mathcal{P}^t \rightarrow \mathcal{P}^l$. Como en el capítulo anterior y en los trabajos [22, 26], vamos a realizar una expansión perturbativa en la constante acoplamiento, $e \ll 1$, y quedarnos sólo hasta el orden más bajo no trivial.

Tomando explícitamente la traza sobre todos los índices discretos y continuos en este término, obtenemos un factor global $T\Sigma$, donde T denota el tiempo total y Σ

el área de los espejos (esto es un reflejo de las simetrías de traslación temporal y espacial del sistema). Como Γ^t es una variable extensiva en estas magnitudes, vamos a trabajar con $\gamma^t \equiv \frac{\Gamma}{T\Sigma}$ en su lugar, que está dada por

$$\gamma^t = -\frac{1}{4} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \int dx_3 \int dy_3 \int du_3 \int dv_3 G_{\alpha\gamma}(k_{\parallel}, x_3, y_3) V_{\gamma\delta}^t(k_{\parallel}, y_3, u_3) \times G_{\delta\beta}(k_{\parallel}, u_3, v_3) V_{\beta\alpha}^t(k_{\parallel}, v_3, x_3). \quad (4.51)$$

Aquí, $G_{\alpha\gamma}(k_{\parallel}, x_3, y_3)$ denota las respectivas componentes del propagador Euclídeo para el campo de gauge libre, y hemos introducido

$$V^t(k_{\parallel}, x_3, y_3) \equiv [g_t(k_0, k_1, k_2)\delta(x_3)\delta(y_3) + g_t(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2)\delta(x_3 - a)\delta(y_3 - a)] \mathcal{P}^t. \quad (4.52)$$

En lo que sigue sólo consideraremos los términos ‘cruzados’, es decir, aquellos que involucran tanto $g_t(k_0, k_1, k_2)$ como $g_t(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2)$, dado que son ellos los que dan lugar a la disipación (puede mostrarse que los otros términos son independientes de v).

Teniendo esto en cuenta, la expresión para el propagador del campo EM en el gauge de Feynman:

$$G_{\alpha\beta}(k_{\parallel}, x_3, y_3) \equiv \delta_{\alpha\beta} G(k_{\parallel}, x_3, y_3) = \delta_{\alpha\beta} \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{e^{ik_3(x_3 - y_3)}}{k_{\parallel}^2 + k_3^2}, \quad (4.53)$$

y las propiedades de los proyectores, vemos que

$$\gamma^t = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} G(k_{\parallel}, a, 0) G(k_{\parallel}, 0, a) g_t(k_0, k_1, k_2) g_t(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2). \quad (4.54)$$

El proceso y resultado para la contribución Γ^l son exactamente análogos, de modo que podemos escribir ($s = t, l$):

$$\gamma^s = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} G(k_{\parallel}, a, 0) G(k_{\parallel}, 0, a) g_s(k_0, k_1, k_2) g_s(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2). \quad (4.55)$$

Entonces,

$$\gamma^s = -\frac{1}{8a^3} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2\sqrt{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2}}}{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2} g_s(k_0, k_1, k_2) g_s(k_0 - vk_1, k_1 + vk_0, k_2), \quad (4.56)$$

donde hemos reescalado el momento $ak_{\alpha} \rightarrow k_{\alpha}$ para factorizar la dependencia de la acción efectiva con la distancia entre las placas. Notemos que γ_s es la acción efectiva por unidad de tiempo y superficie, de modo que tiene unidades de $(longitud)^{-3}$.

Antes de proceder con la evaluación de la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*, vamos a hacer un pequeño paréntesis en el cual vamos a utilizar la acción efectiva Euclídea para calcular la fuerza de Casimir estática entre dos placas de grafeno quietas.

4.3.1. Fuerza de Casimir estática entre dos placas de grafeno

En ausencia de efectos disipativos (es decir, en este caso, para $v = 0$), la amplitud de persistencia del vacío Euclídea es

$$\mathcal{Z} = e^{-E_0 T} \quad (4.57)$$

donde T es el tiempo total, y E_0 es la energía de punto cero del campo EM. Esto significa que la energía de Casimir por unidad de área $E_C = E_0/\Sigma$ puede ser obtenida a partir de la acción efectiva Euclídea para las placas cuando su velocidad relativa se anula, es decir, $E_C = \gamma_{\text{Eucl}}(v = 0)$.

Tomando $v = 0$ en la Ec. (4.56), y recordando la definición de g_t y g_l de la Ec. (4.38), la contribución transversal a la energía de punto cero resulta

$$E_C^t = -\frac{1}{8a^3} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2\sqrt{k_0^2 + k_{\parallel}^2}}}{k_0^2 + k_{\parallel}^2} g_t^2(k_0, k_{\parallel}) = -\frac{1}{48} \frac{\alpha_N^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{a^3} (1 + 2v_F^2). \quad (4.58)$$

Análogamente, la contribución longitudinal está dada por

$$E_C^l = -\frac{1}{8a^3} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2\sqrt{k_0^2 + k_{\parallel}^2}}}{k_0^2 + k_{\parallel}^2} g_l^2(k_0, k_{\parallel}) = -\frac{1}{16} \frac{\alpha_N^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{a^3} \frac{\arccos(v_F)}{v_F \sqrt{1 - v_F^2}}. \quad (4.59)$$

Considerando que las velocidades de Fermi típicas en materiales tipo Dirac 2D son mucho menores que la velocidad de la luz ($v_F = 0,003$ para el grafeno), la principal contribución a la fuerza de Casimir estática entre dos placas de grafeno viene de la acción efectiva longitudinal, y resulta

$$E_C \approx -\frac{\alpha_N^2}{128\pi} \frac{1}{a^3} \frac{1}{v_F}. \quad (4.60)$$

Como era de esperarse, debido a la ausencia de constantes con dimensiones en la descripción microscópica del grafeno, la energía de Casimir tiene la dependencia $1/a^3$ usual de la energía de interacción de vacío para conductores perfectos. Asimismo, la fuerza de Casimir tiene la dependencia usual $1/a^4$, y resulta

$$F_C \approx \frac{3\alpha_N^2}{128\pi} \frac{1}{a^4} \frac{1}{v_F}. \quad (4.61)$$

4.3.2. Parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*

Para poder calcular la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*, primero debemos rotar la expresión para la acción efectiva total Euclídea a tiempos reales. Con ese

objetivo, vamos a reescribir cada contribución en una manera en la que las discusiones siguientes van a verse simplificadas. Notemos que podemos escribir las dos funciones g_t y g_l como:

$$g_t(k_{\parallel}) = \alpha_N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{\pi} \frac{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_3^2} \quad (4.62)$$

$$g_l(k_{\parallel}) = \alpha_N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{\pi} \frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_3^2}. \quad (4.63)$$

Luego vemos que

$$\begin{aligned} \gamma^t = & -\frac{\alpha_N^2}{8 a^3} \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2\sqrt{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2}}}{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2} \frac{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_3^2} \\ & \times \frac{(k_0 - k_1 v)^2 + v_F^2 [(k_1 + k_0 v)^2 + k_2^2]}{(k_0 - k_1 v)^2 + v_F^2 [(k_1 + k_0 v)^2 + k_2^2] + p_3^2}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma^l = & -\frac{\alpha_N^2}{8 a^3} \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2\sqrt{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2}}}{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2} \frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2} \\ & \times \frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_3^2} \frac{1}{(k_0 - k_1 v)^2 + v_F^2 [(k_1 + k_0 v)^2 + k_2^2] + p_3^2}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Analicemos primero la contribución longitudinal a la acción efectiva. Su expresión en tiempo real resulta

$$\begin{aligned} \gamma^l = & \frac{i\alpha_N^2}{8 a^3} \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{2i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon} \\ & \times \frac{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 - v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 - k_3^2 + i\epsilon} \times \frac{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2}{(k_0 - k_1 v)^2 - v_F^2 [(k_1 - k_0 v)^2 + k_2^2] - p_3^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Miremos primero la integral a lo largo de k_0 , que puede ser reescrita convenientemente como:

$$\int_0^{\infty} dk_0 \frac{e^{2i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon} [f_1(k_0) f_2(k_0) + f_1(-k_0) f_2(-k_0)] \quad (4.67)$$

donde

$$f_1(k_0) \equiv \frac{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 - v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 - k_3^2 + i\epsilon} \quad (4.68)$$

$$f_2(k_0) \equiv \frac{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2}{(k_0 - k_1 v)^2 - v_F^2 [(k_1 - k_0 v)^2 + k_2^2] - p_3^2 + i\epsilon}.$$

Para resolver esta integral, procedemos de manera similar a lo hecho en el capítulo anterior, es decir, estudiamos la estructura analítica de las funciones f_1 y f_2 para realizar una rotación de Wick por medio de una integración de Cauchy en un cuarto de circunferencia ubicada en el primer cuadrante. Notemos que el resto del integrando es exactamente el mismo con el que lidiamos en el capítulo anterior y en [22]: presenta dos cortes y dos polos, ninguno de ellos ubicado en el primer cuadrante, por lo que no contribuyen a la integral por Residuos. Miremos entonces los polos de $f_1(k_0) = f_1(-k_0)$; están ubicados en las posiciones

$$k_0 = \pm \sqrt{v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_3^2 - i\epsilon} \approx \pm \sqrt{v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_3^2} \mp \frac{i\epsilon}{2\sqrt{v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_3^2}}. \quad (4.69)$$

Como ninguno de ellos está localizado en el primer cuadrante, tampoco van a contribuir a la integral de Cauchy. Las singularidades de la función $f_2(k_0)$ son dos polos simples, ubicados en:

$$k_0^{(\pm)} = \frac{vk_1(1 - v_F^2) \pm \sqrt{v^2 k_1^2 (1 - v_F^2)^2 + (1 - v_F^2 v^2) [(v_F^2 - v^2) k_1^2 + v_F^2 k_2^2 + p_3^2 - i\epsilon]}}{1 - v_F^2 v^2} \quad (4.70)$$

De los valores de k_0 de la expresión anterior, sólo $k_0^{(-)}$ puede tener una parte imaginaria positiva (y, por lo tanto, pertenecer al primer cuadrante). La condición para que este polo, cuya posición llamaremos $\Lambda_A \equiv k_0^{(-)}$, esté ubicado en el primer cuadrante, es $\text{Re}\Lambda_A > 0$. Notemos primero que, si $k_1 < 0$, entonces $\text{Re}\Lambda_A < 0$ y no hay ninguna singularidad en el primer cuadrante. Por otro lado, para valores positivos de k_1 , podemos ver que:

$$\text{Re}\Lambda_A > 0 \Leftrightarrow -(v_F^2 - v^2)k_1^2 - (v_F^2 k_2^2 + p_3^2) > 0.$$

Claramente, cuando $v < v_F$, el miembro izquierdo de la última ecuación es definido negativo, y por lo tanto la inecuación nunca puede cumplirse. Por lo tanto, para velocidades más chicas que la velocidad de Fermi del material, este polo nunca puede estar localizado en el primer cuadrante. Finalmente, cuando $v > v_F$, tendremos un único polo simple en el primer cuadrante si y sólo si

$$k_1 > \sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}}. \quad (4.71)$$

Procediendo de manera totalmente análoga para el término con $f_2(-k_0)$, uno puede también chequear que solamente un polo simple puede estar ubicado en el primer cuadrante, y sólo si $v > v_F$. La posición de este polo está dada por:

$$\Lambda_B = \Lambda_A - 2vk_1 \frac{1 - v_F^2}{1 - v_F^2 v^2}, \quad (4.72)$$

y va a pertenecer al primer cuadrante si y sólo si

$$k_1 < -\sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}}. \quad (4.73)$$

Basándonos en el análisis anterior, estamos listos para realizar la integral de Cauchy a lo largo de un cuarto de circunferencia, como hicimos en el capítulo anterior. El resultado es:

$$\begin{aligned} \gamma^l = & \frac{i\alpha_N^2}{8a^3(2\pi)^3} \int \frac{dk_3}{\pi} \frac{dp_3}{\pi} dk_2 dk_1 \left\{ -i \int_0^\infty dp_0 \frac{e^{-2k_\parallel}}{k_\parallel^2} f_1(ip_0) [f_2(ip_0) + f_2(-ip_0)] \right. \\ & + 2\pi i \Theta(v - v_F) \Theta \left(k_1 - \sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}} \right) \text{Res}(F_A(k_0), \Lambda_A) \\ & \left. + 2\pi i \Theta(v - v_F) \Theta \left(-k_1 - \sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}} \right) \text{Res}(F_B(k_0), \Lambda_B) \right\}, \quad (4.74) \end{aligned}$$

donde

$$F_A(k_0) = F_B(-k_0) = \frac{e^{2i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_\parallel^2 + i\epsilon}}}{k_0^2 - \mathbf{k}_\parallel^2 + i\epsilon} f_1(k_0) f_2(k_0). \quad (4.75)$$

Como nuestro interés es computar los efectos disipativos en el sistema, debemos tomarle la parte imaginaria a la acción efectiva (4.74). Se ve fácilmente que $f_1(p_0) \in \mathbb{R}$ y que $f_2(ip_0) + f_2(-ip_0) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la parte imaginaria de la contribución longitudinal a la acción efectiva del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \text{Im}\gamma^l = & -\frac{\alpha_N^2}{16\pi^2 a^3} \Theta(v - v_F) \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int dk_2 \int dk_1 \\ & \times \text{Im} \left\{ \text{Res}(F_A(k_0), \Lambda_A) \Theta \left(k_1 - \sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}} \right) \right\}, \quad (4.76) \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio $k_1 \rightarrow -k_1$ en el segundo término de (4.74) para obtener una expresión simplificada. A partir de la ecuación anterior podemos ver que no habrá contribución longitudinal a la fricción cuántica si las placas se mueven con una velocidad relativa menor que la velocidad de Fermi.

Ahora analicemos la contribución transversal de la acción efectiva. Rotemos primero nuevamente a tiempos reales:

$$\begin{aligned} \gamma^t = & \frac{i\alpha_N^2}{8a^3} \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int \frac{d^3k_\parallel}{(2\pi)^3} \frac{e^{2i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_\parallel^2 + i\epsilon}}}{k_0^2 - \mathbf{k}_\parallel^2 + i\epsilon} \\ & \times \frac{k_0^2 - v_F^2 \mathbf{k}_\parallel^2}{k_0^2 - v_F^2 \mathbf{k}_\parallel^2 - k_3^2 + i\epsilon} \frac{(k_0 - k_1 v)^2 - v_F^2 (k_1 - k_0 v)^2 - v_F^2 k_2^2}{(k_0 - k_1 v)^2 - v_F^2 [(k_1 - k_0 v)^2 + k_2^2] - p_3^2 + i\epsilon}. \quad (4.77) \end{aligned}$$

Los cálculos son completamente análogos al caso longitudinal. La parte imaginaria de la contribución transversal a la acción efectiva *in-out* resulta

$$\begin{aligned} \text{Im}\gamma^t = & -\frac{\alpha_N^2}{16\pi^2 a^3} \Theta(v - v_F) \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int dk_2 dk_1 \\ & \times \text{Im} \left\{ \text{Res}(F_C(k_0), \Lambda_A) \Theta \left(k_1 - \sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

con

$$F_C(k_0) = \frac{e^{2i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon} f_3(k_0) f_4(k_0), \quad (4.79)$$

donde

$$\begin{aligned} f_3(k_0) &= \frac{k_0^2 - v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 - v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 - k_3^2 + i\epsilon} \\ f_4(k_0) &= \frac{(k_0 - k_1 v)^2 - v_F^2 (k_1 - k_0 v)^2 - v_F^2 k_2^2}{(k_0 - k_1 v)^2 - v_F^2 [(k_1 - k_0 v)^2 + k_2^2] - p_3^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Aquí llegamos a una conclusión importante: no habrá fricción cuántica entre dos placas de grafeno a menos que las mismas se muevan con una velocidad relativa mayor a la velocidad de Fermi de las excitaciones internas del grafeno. Notemos que este tipo de umbral ha sido encontrado en materiales dieléctricos [13], como consecuencia de un efecto diferente, de tipo Cerenkov.

Para poder obtener una expresión final para la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*, es necesario calcular los residuos involucrados y tomar explícitamente el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Para hacerlo vamos a repetir el procedimiento que realizamos en el capítulo anterior. Comencemos con la parte longitudinal:

$$\begin{aligned} \text{Res}(F_A(k_0), \Lambda_A) &\equiv \lim_{k_0 \rightarrow \Lambda_A} (k_0 - \Lambda_A) F_A(k_0) \\ &= \frac{e^{2i\sqrt{\Lambda_A^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{\Lambda_A^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 + i\epsilon} \frac{\Lambda_A^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2}{\Lambda_A^2 - v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 - k_3^2 + i\epsilon} \frac{\Lambda_A^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2}{-2\sqrt{v_F^2 k_1^2 (1 - v^2)^2 + (1 - v_F^2 v^2)(v_F^2 k_2^2 + p_3^2)}}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

donde en el último factor hemos utilizado explícitamente el hecho de que el denominador es definido positivo y por lo tanto el límite $\epsilon \rightarrow 0$ puede ser tomado trivialmente.

Puede mostrarse que $\Lambda_A^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2$ es definido negativo en toda la región de integración (es decir, para $k_1 > \sqrt{v_F^2 k_2^2 + p_3^2 / (v^2 - v_F^2)}$). Esto puede verse de manera muy simple al tomar los límites $v, v_F \ll 1$ (es decir, al quedarse sólo con potencias bajas de estas magnitudes), pero la relación sigue valiendo para valores arbitrarios de $v, v_F < 1$.

Esto significa que podemos tomar $\epsilon \rightarrow 0$ en todas partes excepto en el segundo factor de la ecuación (4.81), que puede ser reescrito como:

$$\frac{1}{\Lambda_A^2 - v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 - k_3^2 + i\epsilon} \equiv \frac{1}{h(k_1, k_2, k_3, p_3) + i\epsilon}, \quad (4.82)$$

con

$$h(k_1, k_2, k_3, p_3) = \Lambda_A^2 - v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 - k_3^2. \quad (4.83)$$

El límite $\epsilon \rightarrow 0$ puede tomarse de manera explícita:

$$\frac{1}{h(k_1, k_2, k_3, p_3) + i\epsilon} \rightarrow \text{p.v.} \left(\frac{1}{h} \right) - i\pi \delta(h(k_1, k_2, k_3, p_3)). \quad (4.84)$$

De este modo, la contribución longitudinal a la parte imaginaria de la acción efectiva resulta

$$\begin{aligned} \text{Im}\gamma^l &= \frac{\alpha_N^2}{32\pi a^3} \Theta(v - v_F) \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int dk_1 \int dk_2 \delta(h(k_1, k_2, k_3, p_3)) \quad (4.85) \\ &\times \Theta \left(k_1 - \sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}} \right) \frac{e^{-2\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 - \Lambda_A^2}} (\mathbf{k}_{\parallel}^2 - \Lambda_A^2)}{\sqrt{v_F^2 k_1^2 (1 - v^2)^2 + (1 - v_F^2 v^2)(v_F^2 k_2^2 + p_3^2)}}. \end{aligned}$$

Notemos que lo que tenemos en la expresión anterior es una integral en 4 dimensiones, multiplicada por una función delta de Dirac compuesta con la función h :

$$\int d^4 \kappa \mathcal{F}(\boldsymbol{\kappa}) \delta(h(\boldsymbol{\kappa})) = \int_{\mathcal{S}/h(\boldsymbol{\kappa})=0} d\sigma \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{\kappa})}{|\nabla h(\boldsymbol{\kappa})|}, \quad (4.86)$$

donde, en nuestro caso, $\boldsymbol{\kappa} = (k_1, k_2, k_3, p_3)$. El miembro derecho es una integral sobre la superficie tridimensional definida por la ecuación $h(k_1, k_2, k_3, p_3) = 0$. Podemos pensar esta superficie como aquella definida por las ecuaciones $k_1 = x_1(k_2, k_3, p_3)$ y $k_1 = x_2(k_2, k_3, p_3)$, con

$$x_1(k_2, k_3, p_3) = \sqrt{\frac{u(k_2, k_3, p_3) - 2\sqrt{w(k_2, k_3, p_3)}}{v^2 (v_F^2 - 1)^2 (vv_F^2 + v - 2v_F) (vv_F^2 + v + 2v_F)}}, \quad (4.87)$$

$$x_2(k_2, k_3, p_3) = \sqrt{\frac{u(k_2, k_3, p_3) + 2\sqrt{w(k_2, k_3, p_3)}}{v^2 (v_F^2 - 1)^2 (vv_F^2 + v - 2v_F) (vv_F^2 + v + 2v_F)}}, \quad (4.88)$$

donde

$$\begin{aligned} u(k_2, k_3, p_3) &= v^2 (1 - v_F^2) \{ p_3^2 (v_F^2 + 1) + k_2^2 v_F^2 [v_F^2 (v^2 (v_F^2 + 1) - 2) + 2] \\ &\quad + k_3^2 [1 + v_F^2 (v^2 (v_F^2 + 1) - 3)] \} \quad (4.89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(k_2, k_3, p_2) &= v^2 (1 - v_F^2)^2 \left\{ k_3^4 v_F^2 (v^2 - 1)^2 + k_2^2 p_3^2 v^2 v_F^2 (v_F^4 + 1) + p_3^4 v_F^2 \right. \\ &\quad \left. k_3^2 [k_2^2 v^2 v_F^2 (2(v^2 - 2) + v_F^4 + 1) + p_3^2 (v^2 (v_F^4 + 1) - 2v_F^2)] + \right. \\ &\quad \left. + k_2^4 v^2 v_F^4 [1 + (v^2 - 2) v_F^2 + v_F^4] \right\}. \end{aligned}$$

Así es que obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Im}\gamma^l = & \frac{\alpha_N^2}{32\pi a^3} \Theta(v - v_F) \int \frac{dk_3}{\pi} \int \frac{dp_3}{\pi} \int dk_2 \int dk_1 \sum_{i=1,2} \frac{\delta(k_1 - x_i)}{|\nabla h(k_1, k_2, k_3, p_3)|_{k_1=x_i}} \\ & \times \Theta\left(k_1 - \sqrt{\frac{v_F^2 k_2^2 + p_3^2}{v^2 - v_F^2}}\right) \frac{e^{-2\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 - \Lambda_A^2}}(\mathbf{k}_{\parallel}^2 - \Lambda_A^2)}{\sqrt{v_F^2 k_1^2 (1 - v^2)^2 + (1 - v_F^2 v^2)(v_F^2 k_2^2 + p_3^2)}}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

El resultado de la integración sobre k_1 puede ser escrito como una función escalón de Heaviside de una expresión bastante complicada que depende del resto de las variables de integración. Este procedimiento, junto con las restantes integrales, ha sido realizado numéricamente. El cálculo de γ^t se realiza de manera completamente análoga.

Los resultados se muestran en la Figura 4.1, donde puede verse que la contribución transversal es mucho más chica que la longitudinal. Entonces, el primer gráfico en la Fig. 4.1 muestra el comportamiento de la principal contribución a la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* como función de la velocidad relativa v , para la velocidad de Fermi del grafeno $v_F = 0,003$.

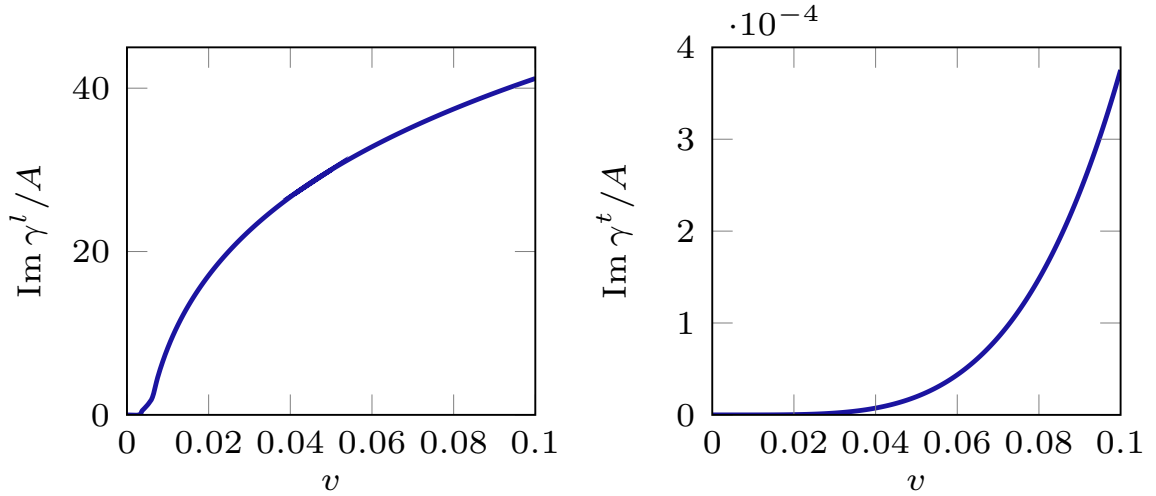


Figura 4.1: Parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* por unidad de superficie y tiempo, como función de la velocidad relativa entre las placas de grafeno, y para una velocidad de Fermi típica $v_F = 0,003$, en unidades de $A = \frac{\alpha_N^2}{32\pi^2} \frac{1}{a^3}$.

4.4. Fuerza de fricción

Como ya vimos en el capítulo anterior, un observable muy conveniente a la hora de cuantificar la disipación es la potencia disipada y la fuerza de fricción relacionada.

En esta sección vamos a calcular la fuerza de fricción actuante sobre la placa móvil a partir de la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*, relación que mostramos en 3.5.

En este caso, la disipación aparece cuando el vacío de Dirac de las placas se vuelve inestable frente a la producción de un par real (es decir, *on shell*) de fermiones. Nuevamente podemos relacionar la probabilidad \mathcal{P} de que ocurra tal evento con la parte imaginaria de la acción efectiva:

$$2\text{Im}\Gamma = \mathcal{P} = T \int d^3k_{\parallel} p(k_{\parallel}), \quad (4.91)$$

donde $p(k_{\parallel})$ es la probabilidad por unidad de tiempo de crear un par de fermiones en los espejos con momento total k_{\parallel} . La expresión explícita de $p(k_{\parallel})$ puede leerse de las Ecuaciones (4.66) y (4.77), y puede escribirse como

$$p(k_{\parallel}) = \int dk_3 \int dp_3 \delta(k_0 - \Lambda_A) \mathcal{H}(k_{\parallel}, k_3, p_3), \quad (4.92)$$

para una cierta función \mathcal{H} . La presencia de la función δ resalta nuevamente el hecho de que la integración en el plano complejo k_0 captura la contribución de un único polo en $k_0 = \Lambda_A$.

Continuando con el razonamiento de la Sección 3.5, encontramos la fuerza de fricción que actúa sobre la placa móvil simplemente insertando $|k_0|$ en las Ecs. (4.66) y (4.77), y multiplicando el resultado por $2/v$. Los resultados para las contribuciones transversal y longitudinal a la fuerza se muestran en la Figura 4.2. Graficamos la fuerza de fricción normalizada por la fuerza de Casimir estática entre las dos placas F_C , dada por la Ecuación (4.61).

En la Figura 4.3 mostramos con más detalle la fuerza para velocidades cercanas a la velocidad de Fermi. Allí se puede apreciar que el sistema pasa por tres diferentes regímenes con respecto a la disipación. Para $v < v_F$, como ya mencionamos, no hay efectos disipativos en el sistema, y la fuerza de fricción total se anula. Para velocidades $v_F < v < 2v_F$, aparece una fuerza de fricción, pero su crecimiento con la velocidad es comparativamente más lento. Para $v > 2v_F$, sin embargo, la fuerza de fricción empieza a crecer rápidamente con la velocidad.

La existencia de este umbral puede justificarse como sigue. Consideremos el balance de momentos y energía en un pequeño intervalo de tiempo δt , asumiendo que tanto la fuerza de fricción como la disipación de energía son producidas por la creación de pares. Llamaremos \mathbf{P} momento total *del par*. Su única componente relevante para el

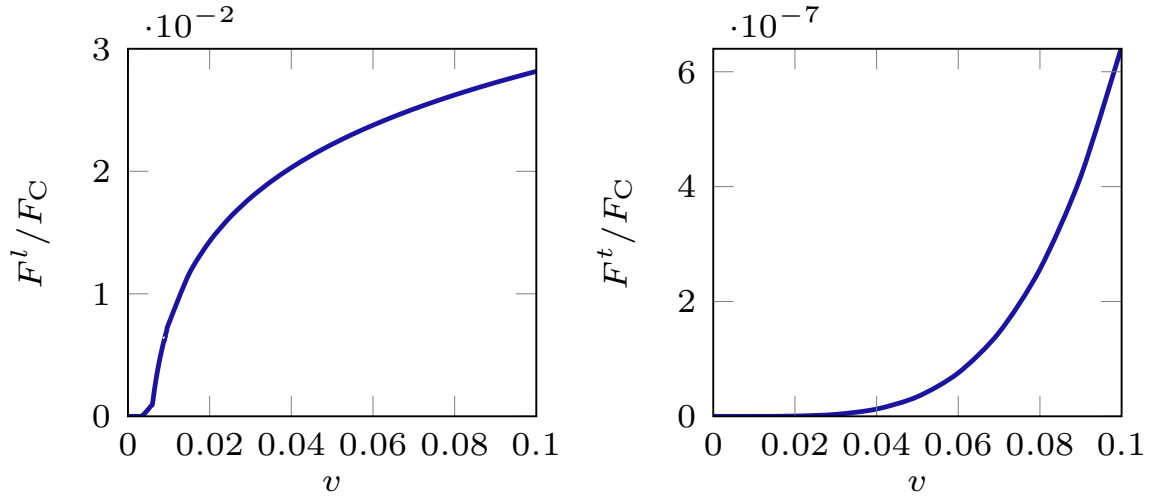


Figura 4.2: Norma de las contribuciones transversal y longitudinal a la fuerza por unidad de área F_{fr} actuando en la placa móvil de grafeno, como función de su velocidad v , y para una velocidad de Fermi típica $v_F = 0,003$. La fuerza está normalizada por la fuerza de Casimir estática entre las placas.

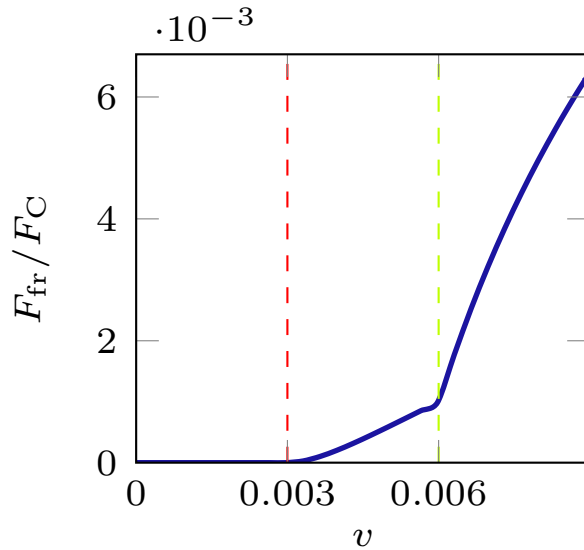


Figura 4.3: Norma de la fuerza por unidad de área que actúa en la placa móvil como función de su velocidad relativa, para velocidades cercanas a la velocidad de Fermi del grafeno $v_F = 0,003$. La fuerza está normalizada por la fuerza de Casimir estática entre las placas.

balance de momentos es aquella en la dirección de la velocidad v , que llamaremos 1. Podemos relacionar esta componente del momento total con la fuerza de fricción:

$$F_{\text{fr}} \delta t = P_1 . \quad (4.93)$$

El balance de energía, por otro lado, implica que la energía del par \mathcal{E} debe ser equi-

valente al trabajo de la fuerza de fricción durante el intervalo δt , es decir:

$$F_{\text{fr}} v \delta t = \mathcal{E} \quad (4.94)$$

Ahora bien, la energía y el momento total de los fermiones no son dos variables independientes, dado que el par creado está en su capa de masa, es decir:

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \left(v_F \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, p_1, p_2 \right) + \left(v_F \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2}, p_1', p_2' \right) \\ &= \left(v_F \left[\sqrt{p_1^2 + p_2^2} + \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2} \right], P_1, P_2 \right) \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde las variables primadas/sin primar corresponden a los momentos individuales de cada fermión, mientras que P_α es el momento total del par en $2 + 1$, siendo su primera componente la energía del par \mathcal{E} . De aquí se puede ver claramente que

$$\mathcal{E} \geq v_F |P_1| \quad (4.96)$$

y que el signo igual corresponde al caso en el que el momento del par está en la dirección de v (es decir, $p_2 = p_2' = 0$). Dividiendo las Ecuaciones (4.94) y (4.93), y tomando en cuenta la Ecuación (4.96), vemos que la condición necesaria para la existencia de fricción es:

$$v \geq v_F . \quad (4.97)$$

4.5. Conclusiones

En este capítulo hemos calculado la fuerza de fricción entre dos placas de grafeno sometidas a un movimiento lateral a velocidad relativa constante. La interacción entre los campos de Dirac de $2 + 1$ dimensiones que describen los grados de libertad internos del grafeno, y el campo electromagnético de vacío, ha sido considerada utilizando los resultados conocidos para el tensor de polarización de vacío en el sistema comóvil, transformándolo apropiadamente al sistema laboratorio para el caso de la placa móvil. Hemos observado que esta interacción genera una parte imaginaria en la acción efectiva *in-out*, que dentro del límite de velocidades bajas puede ser interpretada como producida por la excitación de los grados de libertad internos del material, producida por el movimiento relativo de los espejos. Por lo tanto, los efectos disipativos surgen del hecho de que el vacío de Dirac del grafeno se vuelve inestable ante la producción de un par real (es decir, en su capa de masa) de fermiones. Además, computamos la fuerza de fricción entre las placas usando la relación entre la parte imaginaria de la acción efectiva y la fuerza que desarrollamos en el capítulo anterior.

Los resultados para la parte imaginaria de la acción efectiva y para la fuerza de fricción muestran un fenómeno interesante: existe un umbral para los efectos de fricción cuántica, es decir, no hay disipación cuando la velocidad relativa entre las placas es menor que la velocidad de Fermi. Hemos presentado un argumento simple que justifica la existencia de dicho umbral.

La fuerza de fricción que hemos obtenido en este capítulo es mucho más chica que la fuerza de Casimir usual entre placas de grafeno, que resulta incluso ser más chicas que la fuerza de Casimir entre conductores perfectos (al menos cuando se considera grafeno con *gap*, ver Ref. [41]). De todas maneras, uno puede visualizar situaciones en las que la fuerza de fricción pudiera llegar a ser más relevante. De hecho, ha sido señalado que, a temperaturas altas, la fuerza de Casimir entre una placa de grafeno y un conductor perfecto se vuelve comparable con aquella entre conductores perfectos [42]. Además, dopar el grafeno puede mejorar la fuerza de Casimir entre placas de grafeno [43]. Sería de interés generalizar los resultados de este capítulo para calcular la fuerza de fricción en esas situaciones, y discutir si la mejora en la fuerza de Casimir tiene un efecto correspondiente en la fuerza de fricción o no. Esto quedará pendiente para futuros trabajos.

Parte III

Fricción cuántica entre una partícula y una placa

Capítulo 5

Fricción y decoherencia sobre una partícula moviéndose paralela a un espejo imperfecto

5.1. Introducción

En este capítulo consideraremos una partícula neutra moviéndose frente a un espejo imperfecto, con velocidad constante paralela a la superficie. Este tipo de sistema ha recibido creciente atención en los últimos años [15–19]. El interés principal en todos estos trabajos ha sido calcular la fuerza friccional ejercida sobre la partícula por la placa, mediada por las fluctuaciones del campo de vacío. Estos efectos disipativos, como ya hemos mencionado varias veces a lo largo de esta Tesis, son consecuencias muy interesantes, observables macroscópicamente, de la naturaleza cuántica de los sistemas microscópicos.

Sin embargo, las fuerzas de Casimir (regular y de fricción) no son los únicos efectos observables de las fluctuaciones cuánticas del vacío. Cualquier sistema cuántico que interactúa con un entorno va a sufrir el proceso de decoherencia, que es uno de los principales ingredientes necesarios para entender la transición cuántico-clásica. El campo de vacío es, claramente, un entorno que no puede ser apagado, debido a que cada partícula (cargada o con un momento dipolar permanente o inducido por el mismo vacío) va a interactuar inevitablemente con las fluctuaciones del campo electromagnético. Los efectos del campo electromagnético sobre la coherencia del estado cuántico de una partícula, y la manera en la que este efecto es modificado por la presencia de una placa conductora, ya han sido estudiados para experimentos de interferencia [44, 45]. Sin embargo, en los múltiples estudios de la fricción cuántica sobre una partícula moviéndose frente a una placa dieléctrica o metálica, los efectos

de decoherencia no han sido aún tenidos en cuenta.

En este capítulo no estudiaremos sólo la fricción cuántica sobre la partícula, sino también la decoherencia que sufre su grado de libertad interno. La pérdida de coherencia del momento dipolar de la partícula se vuelve relevante en cualquier experimento de interferometría de Ramsey, donde la despolarización del átomo podría ser observada macroscópicamente mediante las franjas de Ramsey. En el caso de un átomo de Rydberg, este fenómeno podría además ser observado como un decaimiento en las oscilaciones de Rabi [46,47]. Por otro lado, debido a que el origen de los dos fenómenos es, básicamente, el mismo (la interacción con el campo de vacío fluctuante), la decoherencia puede ser una vía para detectar la presencia de efectos disipativos en el sistema, teniendo más posibilidades de ser detectada que la elusiva fricción cuántica.

El sistema de estudio de este capítulo consistirá en una partícula neutra pero con momento dipolar no nulo, moviéndose frente a una superficie de material dieléctrico o metálico. La trayectoria de la partícula será, a lo largo de este capítulo, una variable fijada de manera externa. Esto da cuenta de varios casos de interés, por ejemplo, cuando la partícula es la punta de un microscopio de fuerza atómica (AFM por sus siglas en inglés). Encontraremos varios resultados generales sin especificar el tipo de trayectoria ni el modelo para el material o para la partícula, pero luego sí consideraremos la trayectoria más comunmente estudiada en la literatura: el caso en el que la partícula se mueve con velocidad constante v , de manera paralela a la superficie de la placa. Estamos interesados en la dinámica del grado de libertad interno de la partícula, que modelaremos como un oscilador armónico cuántico, siendo éste un modelo simple para describir su momento dipolar eléctrico. El grado de libertad interno de la partícula estará acoplado en posición al campo de vacío, que nuevamente modelaremos de manera simplificada con un campo de Klein-Gordon real y no masivo. Para los grados de libertad de la placa, utilizaremos el mismo modelo sencillo que usamos en el Capítulo 3: un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, cada uno de ellos interactuando también en posición y localmente con el campo de vacío. A pesar de que es un modelo muy simple (mucho más simple que el considerada en el capítulo anterior), nos permite calcular algunas cantidades relevantes sin hacer muchas suposiciones extras.

Tanto los efectos de fricción como los de decoherencia van a ser estudiados, a lo largo de este capítulo, desde la perspectiva de la teoría cuántica de campos. Para ello utilizaremos dos enfoques similares pero diferentes, que ya han sido introducidos en los capítulos anteriores. Para estudiar la fricción procederemos de la misma manera que en los capítulos anteriores: calcularemos la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*,

que da cuenta de los efectos disipativos en el sistema. Para estudiar la decoherencia, pasaremos al formalismo *CTP* y calcularemos el funcional de influencia del entorno (campo de vacío + placa) sobre la partícula, y lo utilizaremos para obtener una estimación del tiempo de decoherencia, siguiendo un enfoque similar al realizado en [28].

Este capítulo está basado en el trabajo '*Dissipation and decoherence effects on a moving particle in front of a dielectric plate*', publicado en *Physical Review D* [23], y está organizado de la siguiente manera: en la Sección 5.2 definimos nuestro sistema de estudio, y presentamos el formalismo en el espacio de Minkowski. Luego calculamos la acción efectiva *in-out* para el modelo microscópico específico, y obtenemos una expresión para la parte imaginaria de la acción efectiva como función de la velocidad de la partícula, medida desde el sistema de referencia en el que la placa está en reposo. En la Sección 5.3 obtenemos una expresión general para la acción de influencia *CTP* para el grado de libertad interno de la partícula, que da cuenta de la influencia de las fluctuaciones de vacío y del espejo sobre la misma. Luego la utilizamos para encontrar las ecuaciones de movimiento estocásticas del grado de libertad interno de la partícula. En la Sección 5.4 repasamos las nociones de funcional de decoherencia y de historias consistentes, y presentamos una forma de estimar el tiempo de decoherencia, analizando la manera en la que el mismo resulta modificado por la presencia de la placa. Por último, en 5.5 mostramos las conclusiones de este capítulo.

5.2. Acción efectiva *in-out* y fricción

5.2.1. El sistema

Consideremos un sistema específico, pese a que el formalismo que vamos a desarrollar en las siguientes secciones es general y puede ser usado para estudiar diferentes problemas. En este capítulo estamos interesados en los efectos sobre una partícula que se mueve paralela a una espejo imperfecto plano. El campo de vacío será descrito por un campo escalar no masivo $\psi(x)$ que obedece la ecuación de Klein-Gordon, tal como en el Capítulo 3, que interactúa tanto con el grado de libertad interno de la partícula $q(t)$ como con los del material que forma la placa, descritos por un campo $\psi(x)$. La partícula se mueve siguiendo una trayectoria macroscópica, fijada por medios externos, unidimensional, y contenida en un plano paralelo al espejo. La distancia a entre la partícula y la placa también es mantenida constante por una mecanismo

externo. Llamaremos x_1 a la dirección de movimiento de la partícula, y x_3 a la dirección perpendicular a la placa. En la Figura 5.1 mostramos un esquema del sistema en consideración.

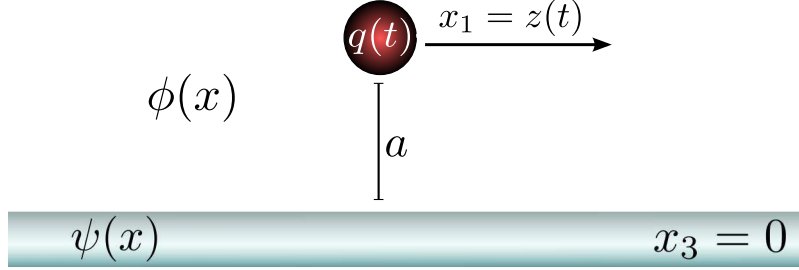


Figura 5.1: Un esquema simple del sistema que estamos estudiando, donde $\phi(x)$ es el campo de vacío, $\psi(x)$ son los grados de libertad internos del material, y $q(t)$ es el grado de libertad interno de la partícula, que sigue una trayectoria macroscópica $z(t)$ en la dirección x_1 .

Podemos escribir la acción clásica del sistema como

$$S[\phi, \psi, q] = S_0^{\text{vac}}[\phi] + S_0^{\text{pl}}[\psi] + S_0^{\text{part}}[q] + S_{\text{int}}^{\text{pl}}[\phi, \psi] + S_{\text{int}}^{\text{part}}[\phi, q], \quad (5.1)$$

donde la acción de Klein-Gordon para el campo de vacío libre, despreciando términos de borde, está dada por

$$S_0^{\text{vac}}[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) [\partial_\mu \partial^\mu - i\epsilon] \phi(x), \quad (5.2)$$

mientras que $S_0^{\text{pl}}[\psi]$ es la acción libre para el campo de materia que conforma la placa, $S_0^{\text{part}}[q]$ es la acción libre para el grado de libertad interno de la partícula, y $S_{\text{int}}^{\text{pl}}[\phi, \psi]$ y $S_{\text{int}}^{\text{part}}[\phi, q]$ son los términos de interacción del vacío con la placa y la partícula, respectivamente. Todos estos términos serán escritos de manera explícita cuando especifiquemos el modelo para la materia.

La funcional generatriz del sistema está dada por

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}q e^{iS[\phi, \psi, q]}. \quad (5.3)$$

Los grados de libertad internos de las placas pueden ser integrados, resultando en un potencial efectivo de interacción $V(x, x')$ para el campo de vacío. Ya hemos realizado este proceso en la Sección 3.2, y la acción clásica resultante es

$$S[\phi, q] = S_{\text{eff}}[\phi] + S_0^{\text{part}}[q] + S_{\text{int}}^{\text{part}}[\phi, q], \quad (5.4)$$

con

$$S_{\text{eff}}[\phi] = S_0[\phi] + \int d^4x d^4y \phi(x)V(x,y)\phi(y). \quad (5.5)$$

El grado de libertad interno de la partícula interactúa con el campo de vacío a través de una corriente que llamaremos $j(x)$. Esta corriente contiene la información acerca de la posición y trayectoria de la partícula, del tipo de acoplamiento y de la intensidad del mismo. Es decir que el término de interacción entre la partícula y el vacío tiene la forma:

$$S_{\text{int}}^{\text{part}}[\phi, q] = i \int d^4x \phi(x)j(x). \quad (5.6)$$

Vale la pena notar que, hasta este punto, la corriente $j(x)$ podría hacer al vacío interactuar con cualquier sistema de cualquier geometría dada: todavía no hemos especificado que estamos estudiando una partícula puntual y móvil.

5.2.2. La acción efectiva *in-out*

Ahora nos gustaría obtener la acción efectiva *in-out* para la partícula. Es decir, vamos a integrar funcionalmente sobre el campo de vacío para obtener

$$\mathcal{Z}[q] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, q]} = e^{iS_0[q]} \int \mathcal{D}\phi e^{iS_{\text{eff}}[\phi] + iS_{\text{int}}[\phi, q]}. \quad (5.7)$$

Esta integral funcional puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[q] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \phi(x)A(x, x')\phi(x') - \int d^4x \phi(x)j(x) \right] \\ &= (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x)A^{-1}(x, x')j(x') \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde

$$A(x, x') = i [\partial_\mu \partial^\mu - i\epsilon] \delta(x - x') - iV(x - x'). \quad (5.9)$$

Esto significa que necesitamos encontrar un operador A^{-1} que cumpla:

$$A^{-1}(x, x')A(x, x') = A(x, x') = A^{-1}(x, x') = \delta(x - x'). \quad (5.10)$$

Para hacerlo, escribimos $A(x, x') = iA_0(x, x') + A_1(x, x')$, donde

$$\begin{aligned} A_0(x, x') &= \delta(x - x')(\partial_\mu \partial^\mu - i\epsilon) \\ A_1(x, x') &= -iV(x, x'). \end{aligned}$$

El potencial efectivo $V(x, x')$ es proporcional a la constante de acoplamiento, que llamaremos λ , entre el campo de vacío y los grados de libertad internos de la placa.

Si el acoplamiento es débil, podemos asumir que $A_1 \ll A_0$ y obtener A^{-1} como una expansión en potencias de λ . Quedándonos hasta primer orden en λ , escribimos

$$A^{-1}(x, x) \approx -i(\mathbb{I} + iA_0^{-1}A_1)A_0^{-1}. \quad (5.11)$$

Y es fácil probar que el operador de (5.11) satisface

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (5.12)$$

Ahora, recordando la definición de A_0 , es claro que A_0^{-1} es una función de Green de la ecuación de Klein-Gordon. Como estamos estudiando el problema *in-out*, lo tomamos como el propagador de Feynman $A_0^{-1}(x, x') = G_F^{(0)}(x, x')$:

$$G_F^{(0)}(x, x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \frac{1}{p_\mu p^\mu + i\epsilon}. \quad (5.13)$$

Con todo esto, podemos escribir el operador que buscamos como

$$A^{-1}(x, x') = -i \left(G_F^{(0)}(x, x') + \int d^4y d^4y' G_F^{(0)}(x, y) V(y, y') G_F^{(0)}(y', x') \right). \quad (5.14)$$

La única parte de la Ecuación (5.8) que nos faltaría calcular es el factor de normalización $(\det A)^{1/2}$. Sin embargo, este factor no contribuye a los diagramas conexos: involucra sólo la interacción entre la placa y el vacío, y no tiene efecto en la física de la partícula móvil (o cualquier otro sistema en el que estuviéramos interesados, que pudiera ser introducido mediante la corriente $j(x)$). Dicho esto, podemos escribir la funcional generatriz para la partícula:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[q] = \exp \left\{ iS_0[q] - \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' j(x) G_F^{(0)}(x, x') j(x') \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y d^4y' d^4x' j(x) G_F^{(0)}(x, y) V(y, y') G_F^{(0)}(y', x') j(x') \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Considerando la ecuación anterior, podemos escribir la acción efectiva *in-out* para la partícula como

$$\Gamma[q] = S_0[q] + S_1[q] + S_2[q], \quad (5.16)$$

donde S_1 es la acción que contiene la influencia del vacío sobre la partícula como si no hubiera ningún espejo, y está definida como

$$S_1[q] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) G_F^{(0)}(x, x') j(x'). \quad (5.17)$$

El término S_2 da cuenta de la influencia de la placa sobre la partícula, mediada por el campo de vacío, y lo definimos:

$$S_2[q] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y d^4y' d^4x' j(x) G_F^{(0)}(x, y) V(y, y') G_F^{(0)}(y', x') j(x'). \quad (5.18)$$

Podemos pensar en el efecto de la placa sobre la partícula como si estuviera mediado por un nuevo propagador efectivo $G^{(1)}(x, x')$, que es la corrección al propagador del campo libre a primer orden en el potencial de la placa:

$$G_F^{(1)}(x, x') \equiv \int d^4y d^4y' G_F(x, y) V(y, y') G_F(y', x'), \quad (5.19)$$

y entonces S_2 puede escribirse como

$$S_2[q] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) G_F^{(1)}(x, x') j(x'). \quad (5.20)$$

Por otra parte, también estamos interesados en calcular la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* para todo el sistema, ya que esta cantidad da cuenta de los efectos disipativos en el sistema (ya vimos en los capítulos anteriores que está relacionada con la fuerza de fricción). Para obtener la acción efectiva para el sistema completo, necesitamos integrar sobre el grado de libertad interno de la placa. Es decir, necesitamos integral funcionalmente la Ecuación (5.15) sobre q :

$$\mathcal{Z}_{\text{sys}} = \int \mathcal{D}q \mathcal{Z}[q]. \quad (5.21)$$

Sin embargo, resulta conveniente, en lugar de realizar las integrales funcionales en este orden (primero sobre ψ , luego sobre ϕ , y por último sobre q), volver un poco sobre nuestros pasos e integrar sobre q antes de integrar sobre el campo de vacío ϕ . De esta manera, nos encontramos con un cálculo completamente análogo al que realizamos en el Capítulo 3, pero con la partícula en lugar de una de las placas. La razón para este cambio es puramente de simplicidad matemática, y no afecta en lo más mínimo la expresión final para la acción efectiva.

Luego de haber integrado, entonces, sobre ψ y q , obtenemos una expresión con dos potenciales efectivos: uno dando cuenta de la interacción de la placa con el campo de vacío, y el otro de la interacción de la partícula con el vacío. Si, como hicimos en la Sección 3.2.1, descartamos todos los términos independientes de la distancia entre la partícula y la placa, la acción efectiva para valores pequeños de las constantes de acoplamiento (para ambas interacciones) es [22]:

$$\Gamma_I \approx \frac{-i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_F(p) V_{\text{placa}}(p, q) G_F(q) V_{\text{part}}(q, p). \quad (5.22)$$

5.2.3. Modelo específico y parte imaginaria

Llegado este punto sí especificaremos un modelo concreto de estudio. Como ya hemos dicho en la Sección 5.2.1, si bien por claridad a lo largo de este capítulo nos hemos referido siempre a una partícula moviéndose frente a un plano, hasta este momento no hemos especificado dicha situación. Hasta ahora tenemos un campo escalar no masivo ϕ que interactúa con otro campo ψ que estuvimos llamando ‘grados de libertad internos de la placa’, pero que podría estar asociado a cualquier otro sistema de interés, y que podría o no estar confinado a una región particular del espacio. Cuando integramos sobre estos grados de libertad, obtenemos un potencial efectivo no-local $V(x, x')$ que contiene toda la información acerca de las características del otro sistema. Podría ser una placa delgada, un semiespacio, o cualquier otra geometría, con cualquier clase de grados de libertad interno.

Pero si efectivamente consideramos, como en el Capítulo 3, una placa de espesor infinitesimal ocupando el plano $x_3 = 0$, cuyos grados de libertad internos interactúan de forma local en el espacio con el campo de vacío, entonces el potencial efectivo tendrá la forma: [22, 26]

$$V_{\text{placa}}(q, p) = (2\pi)^3 \tilde{\lambda}(p_0) \delta(p_0 - q_0) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}). \quad (5.23)$$

En cuanto a la partícula, si la consideramos puntual, moviéndose a lo largo del eje x_1 con velocidad constante, a una distancia fija $x_3 = a$ por sobre el plano, e interactuando localmente en posición con el campo de vacío, entonces su potencial efectivo resulta:

$$V_{\text{part}}(q, p) = 2\pi \tilde{g}(p_0 - vp_1) \delta(p_0 - q_0 - v(p_1 - q_1)) e^{-ia(q_3 - p_3)}. \quad (5.24)$$

Estos potenciales tienen en cuenta la geometría de la placa y la partícula y las características del movimiento relativo entre ambas, pero la información acerca de sus grados de libertad internos y la naturaleza de su interacción con el campo de vacío aún tienen que ser especificadas a través de las funciones $\tilde{\lambda}(\omega)$ y $\tilde{g}(\omega)$. La diferencia entre una partícula móvil y una placa móvil resulta más clara en el espacio de posiciones, donde el potencial está localizado en posición a través de 3 funciones δ de Dirac: una indicando que la partícula está siempre contenida en el plano $x_3 = a$ (esta δ también estaba presente en el caso de la placa de espesor infinitesimal), otra indicando que la partícula no se mueve en la dirección x_2 (y hemos fijado su posición como $x_2 = 0$), y una última estableciendo que su posición a tiempo t es $x_1 = vt$.

Usando las expresiones explícitas para los potenciales e integrando sobre q_0 , q_1 y q_2 , encontramos:

$$\Gamma_I \approx \frac{iT}{2(2\pi)^4} \int d^4p dq_3 G_F^{(0)}(p_0, p_1, p_2, p_3) \tilde{\lambda}(p_0) G_F^{(0)}(p_0, p_1, p_2, q_3) \tilde{g}(p_0 - vp_1) e^{-i(q_3 - p_3)a}, \quad (5.25)$$

donde T es el tiempo de vuelo de la partícula.

Esto es lo más lejos a lo que podemos llegar sin establecer modelos concretos para los grados de libertad internos de la materia. Para la placa, nuevamente consideraremos el modelo microscópico introducido en la Sección 3.2.2, en el que modelamos sus grados de libertad internos como un conjunto de osciladores armónicos cuánticos desacoplados, de frecuencia Ω , cada uno de ellos interactuando localmente en posición con el campo de vacío con constante de acoplamiento λ . El grado de libertad interno de la partícula también será un oscilador armónico, con frecuencia ω_0 , interactuando también linealmente en posición con el campo de vacío con constante de acoplamiento g . Repitiendo el procedimiento de la Sección 3.2.2 en el Capítulo 3, obtenemos los resultados:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\omega) &= \frac{-\lambda^2}{\omega^2 - \Omega^2 + i\epsilon}, \\ \tilde{g}(\omega) &= \frac{-g^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Realizamos el resto de las integrales de la misma manera en la que lo hicimos en el Capítulo 3, y en el trabajo [22]. A partir de ahora, por razones que quedarán claras en las próximas secciones, trabajaremos en $2 + 1$ dimensiones. El resultado analítico para la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* del sistema es:

$$\text{Im}\Gamma_I \approx \frac{\pi^2 T \lambda^2 g^2}{4 a \Omega^3 \omega_0^2} v \tilde{\Omega}^2 \tilde{\omega}_0 \frac{e^{-\frac{2}{v} \sqrt{(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\Omega})^2 - v^2 \tilde{\Omega}^2}}}{(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\Omega})^2 - v^2 \tilde{\Omega}^2}, \quad (5.27)$$

donde $\tilde{\Omega} = \Omega a$ y $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 a$ son las frecuencias adimensionalizadas (a es la distancia entre la partícula y la placa). Hemos escrito el resultado, nuevamente, como producto de factores adimensionales, notando que en $2 + 1$ dimensiones, $[g] = L^{-1}$ mientras que $[\lambda] = L^{-\frac{3}{2}}$.

En la Figura 5.2 mostramos la parte imaginaria de la acción efectiva como función de la velocidad relativa v , para algunos valores específicos de las variables del problema.

Como hemos mencionado anteriormente, la existencia de una parte imaginaria en la acción efectiva *in-out* implica la excitación de los grados de libertad internos del

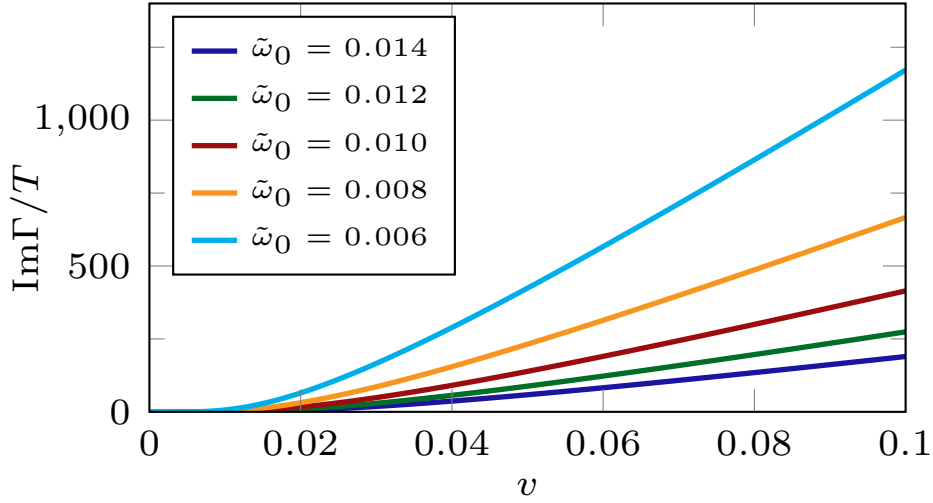


Figura 5.2: Parte imaginaria de la acción efectiva como función de v , para $\tilde{\Omega} = \Omega a = 0,01$ y $\lambda = 0,01$, en unidades de $g^2 a^4$.

espejo y de la partícula, debida a su movimiento relativo y generada por el campo de vacío. Esto señala la presencia de fricción sin contacto. A continuación calcularemos explícitamente la fuerza de fricción.

5.2.4. Fuerza de fricción

En la Sección 3.5 hemos desarrollado una manera de relacionar la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* con la fuerza de fricción. Esta ‘receta’ nos ha permitido, en la Sección 4.4, obtener la fuerza de fricción entre dos placas de grafeno sin necesidad de pasar por el formalismo *CTP*. Repetiremos aquí el mismo procedimiento, notando que insertaremos en la expresión para la acción efectiva un factor $\frac{2|p_0|}{v}$, donde $|p_0|$ será, ahora, la energía de una excitación del grado de libertad interno del átomo. El procedimiento es equivalente al que realizamos en los capítulos anteriores, y el resultado final indica que insertando $\frac{2\tilde{\Omega}}{v}$ en la expresión 5.27, obtenemos la expresión para la fuerza de fricción actuante sobre la partícula. Notemos que en la expresión final aparece la energía de una excitación en el material de la placa. La fuerza resulta:

$$F_{\text{fr}} = \frac{\pi^2}{2a^2} \frac{\lambda^2}{\Omega^3} \frac{g^2}{\omega_0} \tilde{\Omega}^3 \tilde{\omega}_0 \frac{e^{-\frac{2}{v} \sqrt{(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\Omega})^2 - v^2 \tilde{\Omega}^2}}}{(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\Omega})^2 - v^2 \tilde{\Omega}^2}, \quad (5.28)$$

donde nuevamente hemos escrito el resultado como producto de factores adimensionales, de modo que aparezcan explícitamente las dimensiones correctas (recordemos que estamos en 2 + 1 dimensiones, y que este resultado es la fuerza sobre la partícula). En

la Figura 5.3 mostramos la norma de dicha fuerza como función de la velocidad relativa v , para algunos valores específicos de las variables del problema. Tanto de la Figura

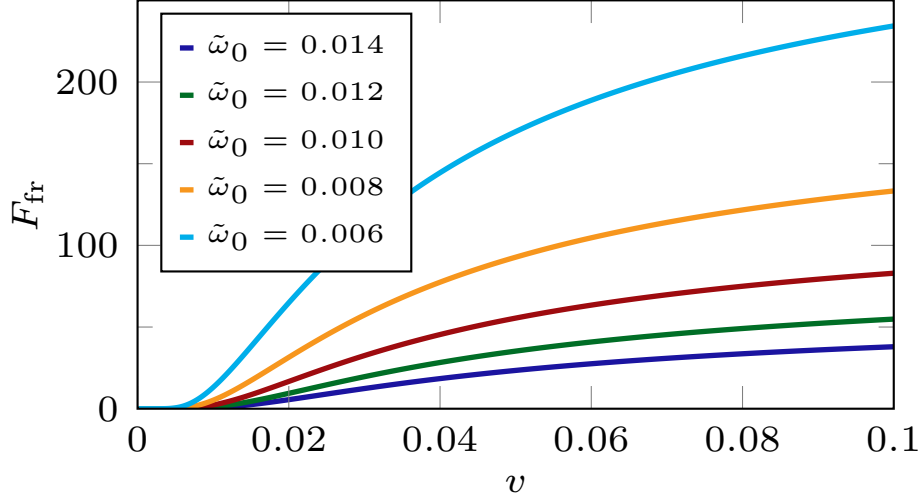


Figura 5.3: Norma de la fuerza actuante sobre la partícula como función de v , para $\tilde{\Omega} = \Omega a = 0,01$ y $\lambda = 0,01$, en unidades de $g^2 a^3$.

5.3 donde se ve la fuerza como de la Figura 5.2 donde se muestra la parte imaginaria de la acción efectiva, es posible apreciar que los efectos disipativos están fuertemente suprimidos para $v \rightarrow 0$. Este decaimiento exponencial en la fuerza de fricción ya ha sido encontrado, utilizando diferentes enfoques y técnicas de cálculo [15, 17].

En este punto vale la pena notar que la constante de acoplamiento entre el átomo y el vacío, g , es el análogo en nuestro modelo al momento dipolar eléctrico d que aparece en otros modelos considerados en la literatura, dado que da cuenta de la interacción entre la polarizabilidad de la partícula y el campo electromagnético de vacío (que nosotros, en un modelo simplificado, describimos con un campo escalar). Esto significa que los resultados que presentamos en este capítulo corresponden a la contribución a orden d^2 a la fricción cuántica. Por último, recordemos que el factor λ^2 da cuenta de la interacción entre los grados de libertad internos de la placa y el campo EM de vacío: esta información usualmente está contenida dentro de la permitividad dieléctrica del material o el coeficiente de reflexión, por lo que no existe un análogo a nuestro λ en la literatura.

A partir de las expresiones generales dadas por las Ecuaciones (5.27) y (5.28) es posible ver que el caso resonante, es decir, cuando $\omega_0 = \Omega$, coincide casi de manera exacta con las expresiones correspondientes para dos placas de osciladores de frecuencia Ω . La única diferencia está dada por el factor Σ presente en los resultados de la sección 3.3: el área total de las placas. Esto no es tan sorprendente, dado que en

nuestro modelo la placa y la partícula/la otra placa sólo interactúan localmente, y los osciladores armónicos que forman los grados de libertad internos de la(s) placa(s) están desacoplados entre sí. En el Capítulo 3 tomamos finalmente las dos constantes de acoplamiento con el mismo valor g , y esa es la razón por la cual nuestro resultado era de orden g^4 . Con todo esto lo que deseamos es hacer notar que nuestros resultados, en contra de lo que aparentan, deben compararse con los resultados cuadráticos presentes en la literatura.

5.3. Acción de influencia CTP y ecuaciones de movimiento estocásticas

5.3.1. Acción de influencia para la partícula

En la Sección anterior hemos considerado la acción efectiva *in-out* para todo el sistema, cuya parte imaginaria da cuenta de los efectos disipativos sobre el sistema y permite obtener la fuerza de fricción, y la acción efectiva para la partícula que describe su dinámica luego de la integración de los campos cuánticos. Esta acción efectiva *in-out* no puede utilizarse de manera directa para derivar las ecuaciones de movimiento (del grado de libertad interno de la partícula, por ejemplo su polarizabilidad), dado que las ecuaciones resultantes no serían reales ni causales. Como ya vimos en la Sección 3.7, para obtener las ecuaciones de movimiento efectivas correctas uno debe calcular la acción efectiva *in-in*, CTP, o de Schwinger-Keldysh [31–33], que contiene además información sobre la dinámica estocástica.

Como también hemos visto en la Sección 2.2, las acciones efectiva y de influencia CTP pueden obtenerse a partir de las *in-out*, simplemente cambiando el contorno de integración. En esta Subsección encontraremos de esta manera la acción de influencia para el grado de libertad interno de la partícula, que describe la influencia del entorno (campos de materia y de vacío) sobre la misma. Lo haremos de forma general, y luego volveremos a nuestro sistema y modelo concreto. Haciendo el cambio pertinente en el contorno de integración, el término que contiene la influencia del vacío sobre la partícula (ignorando la presencia de la placa), S_1 , tiene la siguiente expresión CTP (ver Ec. (5.17)):

$$S_1^{\text{IF}}[q^+, q^-] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left[j^+(x)G_{++}^{(0)}(x, y)j^+(y) + j^-(x)G_{--}^{(0)}(x, y)j^-(y) - j^+(x)G_{+-}^{(0)}(x, y)j^-(y) - j^-(x)G_{-+}^{(0)}(x, y)j^+(y) \right], \quad (5.29)$$

donde $j_{\pm}(x)$ están evaluadas sobre el contorno \mathcal{C}_{\pm} . Un punto a tener en cuenta es que en la Sección 2.2 habíamos introducido una corriente auxiliar, que luego tomaríamos igual a cero, y cuyo propósito era permitirnos evaluar distintos propagadores y valores medios, mientras que aquí $j(x)$ hace referencia a una corriente real, que luego dará cuenta del acoplamiento entre la partícula y el campo EM. Es útil definir:

$$\begin{aligned}\Delta j(x) &= \frac{j^+(x) - j^-(x)}{2}, \\ \Sigma j(x) &= \frac{j^+(x) + j^-(x)}{2}.\end{aligned}$$

Escribiendo la Ec. (5.29) en términos de Δj y Σj , uno obtiene cuatro términos diferentes. Sin embargo, recordando las definiciones y propiedades de los distintos propagadores *CTP*, es fácil ver que uno de ellos se anula y dos de los restantes son idénticos, con el resultado:

$$\begin{aligned}S_1^{\text{IF}}[q^+, q^-] &= \tag{5.30} \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \{ \Delta j(x) [G_{++}^{(0)}(x, y) + G_{--}^{(0)}(x, y) + G_{-+}^{(0)}(x, y) + G_{+-}^{(0)}(x, y)] \Delta j(y) \\ & + 2\Delta j(x) [G_{++}^{(0)}(x, y) - G_{--}^{(0)}(x, y) + G_{-+}^{(0)}(x, y) - G_{+-}^{(0)}(x, y)] \Sigma j(y) \},\end{aligned}$$

Con algunas consideraciones más sobre las propiedades de los propagadores que mencionamos en la Sección 2.2, es posible definir el núcleo de ruido (o de difusión):

$$N_1(x, y) \equiv -i(G_{++}^{(0)}(x, y) + G_{--}^{(0)}(x, y)) = 2 \text{Im} G_{++}^{(0)}(x, y), \tag{5.31}$$

que está asociado a los efectos de las fluctuaciones y fuentes de decoherencia; y el núcleo de disipación

$$\begin{aligned}D_1(x, y) &\equiv \frac{1}{2} [G_{++}^{(0)}(x, y) - G_{--}^{(0)}(x, y) - G_{+-}^{(0)}(x, y) + G_{-+}^{(0)}(x, y)] \\ &= 2\Theta(x_0 - y_0) \text{Re} G_{++}^{(0)}(x - y).\end{aligned} \tag{5.32}$$

Ambos núcleos son reales, y el núcleo de disipación (como indica la segunda línea de la ecuación anterior) es explícitamente causal. La acción de influencia S_1 , entonces, tiene la forma

$$S_1^{\text{IF}}[q^+, q^-] = - \int d^4x d^4y [i\Delta j(x)N_1(x, y)\Delta j(y) + 2\Delta j(x)D_1(x, y)\Sigma j(y)]. \tag{5.33}$$

Esta acción da cuenta de la interacción de la partícula con el vacío, y todos los propagadores involucrados en los cálculos corresponden a campos escalares libres.

Para incluir al espejo imperfecto en nuestras consideraciones, tenemos que mirar el término S_2 (Ec. (5.20)), que contiene el efecto de la placa sobre la partícula a orden cuadrático en el acoplamiento (efecto que es resultado de la interacción de la placa con el campo de vacío, resultando en una interacción efectiva entre la placa y la partícula). Cambiando apropiadamente el contorno de integración, podemos escribir una expresión similar a (5.29):

$$S_2^{\text{IF}}[q^+, q^-] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left[j^+(x)G_{++}^{(1)}(x, y)j^+(y) + j^-(x)G_{--}^{(1)}(x, y)j^-(y) \right. \\ \left. - j^+(x)G_{+-}^{(1)}(x, y)j^-(y) - j^-(x)G_{-+}^{(1)}(x, y)j^+(y) \right], \quad (5.34)$$

donde aparece el propagador efectivo *CTP efectivo* $G_{\alpha\beta}^{(1)}$, definido como:

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}(x, y) \equiv \int d^4x' d^4y' \left[G_{\alpha+}^{(0)}(x, x')V_{++}(x', y')G_{+\beta}^{(0)}(y', y) + G_{\alpha-}^{(0)}(x, x')V_{--}(x', y')G_{-\beta}^{(0)}(y', y) \right. \\ \left. - G_{\alpha+}^{(0)}(x, x')V_{+-}(x', y')G_{-\beta}^{(0)}(y', y) - G_{\alpha-}^{(0)}(x, x')V_{-+}(x', y')G_{+\beta}^{(0)}(y', y) \right] \quad (5.35)$$

donde $G_{\alpha\beta}^{(0)}$ es el propagador *CTP* libre, y $V_{\alpha\beta}$ es la expresión *CTP* del potencial efectivo. Es claro que el propagador total para el campo de vacío en presencia de la placa puede escribirse como $G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^{(0)} + G_{\alpha\beta}^{(1)} + \mathcal{O}(V^2)$. Es decir que $G_{\alpha\beta}^{(1)}$ es una corrección al propagador *CTP* y por lo tanto cumple todas las propiedades que hemos deducido en la Sección 2.2, Ecuación (2.37). Entonces podemos escribir

$$S_2^{\text{IF}}[q^+, q^-] = \int d^4x d^4y [i\Delta j(x)N_2(x, y)\Delta j(y) + 2\Delta j(x)D_2(x, y)\Sigma j(y)], \quad (5.36)$$

con el núcleo de ruido dado por:

$$N_2(x, y) \equiv -i \left[G_{++}^{(1)}(x, y) + G_{--}^{(1)}(x, y) \right] = 2\text{Im} G_{++}^{(1)}(x, y). \quad (5.37)$$

El núcleo de disipación es

$$D_2(x, y) \equiv \frac{1}{2} \left[G_{++}^{(1)}(x, y) - G_{--}^{(1)}(x, y) - G_{+-}^{(1)}(x, y) + G_{-+}^{(1)}(x, y) \right] \quad (5.38)$$

$$= 2\Theta(x_0 - y_0)\text{Re} G_{++}^{(1)}(x, y). \quad (5.39)$$

En términos generales, las partes real e imaginaria de la acción de influencia pueden ser asociadas con la disipación y el ruido, respectivamente, y pueden relacionarse entre sí con una cierta ecuación integral denominada relación de fluctuación-disipación. Como veremos, la disipación estará presente en la ecuación de movimiento tipo Langevin generalizada que cumple el grado de libertad interno de la partícula, y el núcleo de ruido será relevante para definir la función de correlación de la fuente de ruido.

5.3.2. Nuestro modelo

Ahora consideraremos, como hemos hecho en la Sec. 5.2.3, una placa infinitesimal ocupando el plano $x_3 = 0$, formada por conjunto de osciladores armónicos desacoplados de frecuencia Ω , cada uno de ellos interactuando localmente en posición con el campo de vacío con una constante de acoplamiento λ . Ya hemos encontrado la expresión *CTP* de este potencial efectivo (básicamente el propagador de un oscilador armónico) en la Sección 3.4, y resulta:

$$V^{\text{CTP}}(x - y) = -\lambda^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \left(\begin{array}{c} \frac{-1}{p_0^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \quad \frac{i\pi\delta(p_0 + \Omega)}{\Omega} \\ \frac{i\pi\delta(p_0 - \Omega)}{\Omega} \quad \frac{1}{p_0^2 - \Omega^2 - i\epsilon} \end{array} \right). \quad (5.40)$$

El mismo tipo de razonamiento se aplica a la corriente $j(x)$. Queremos estudiar una partícula moviéndose en la dirección x_1 , describiendo una trayectoria $z(t)$, a una distancia fija $x_3 = a$ de la placa. Es decir que sus coordenadas macroscópicas están dadas por $x^\mu(t) = (z(t), 0, a, t)$, y son mantenidas así por una fuente externa. Por otro lado, describimos su grado de libertad interno como un oscilador armónico unidimensional $q(t)$ de frecuencia ω_0 . Esta es la variable cuya dinámica queremos estudiar. El acoplamiento entre esta variable y el campo de vacío, lineal en posición y local, queda descrito por la corriente

$$j(x) = gq(t)\delta(x_1 - z(t))\delta(x_2)\delta(x_3 - a), \quad (5.41)$$

donde g es la constante de acoplamiento.

Ahora bien, como la trayectoria clásica $z(t)$ es macroscópica y está fijada externamente, es razonable asumir que se mantiene igual en las distintas ramas de la integral *CTP* (volveremos a este tema con más detalle en la próxima Sección). Es decir, de ahora en adelante asumiremos que $z^+(t) = z^-(t)$, donde $z^\pm(t)$ es la función clásica $z(t)$ con t en el contorno \mathcal{C}_\pm . Es decir que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Delta j(x) &= g\Delta q(t)\delta(x_1 - z(t))\delta(x_2)\delta(x_3) \\ \Sigma j(x) &= g\Sigma q(t)\delta(x_1 - z(t))\delta(x_2)\delta(x_3). \end{aligned}$$

Con todas estas consideraciones sobre el sistema podemos definir, para $N \equiv N_1 + N_2$:

$$N(t - t') \equiv g^2 \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}' \delta(x_1 - z(t))\delta(x_2)\delta(x_3 - a)N(x - x')\delta(x'_1 - z(t'))\delta(x'_2)\delta(x'_3), \quad (5.42)$$

y podemos hacer una definición análoga para $D \equiv D_1 + D_2$. Además, estamos en condiciones de escribir expresiones explícitas para D_1 , D_2 , N_1 and N_2 como integrales

en el espacio de momentos. Sólo es necesario considerar que, en nuestro modelo, se cumple que $G_{++}^{(1)} = G_{++}^{(0)}V_{++}G_{++}^{(0)}$ (donde estamos omitiendo las contracciones en posición). Entonces, si la trayectoria es $z(t) = vt$ para v constante, tenemos

$$\begin{aligned} D_1(t-t') &= 2g^2\Theta(t-t')\text{Re} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-i(p_0-vp_1)(t-t')}}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + i\epsilon}, \\ N_1(t-t') &= 2g^2\text{Im} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-i(p_0-vp_1)(t-t')}}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} D_2(t-t') &= \frac{\lambda^2 g^2}{2}\Theta(t-t')\text{Re} \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_0^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \frac{e^{-i(p_0-vp_1)(t-t')+2ia\sqrt{p_0^2-p_1^2-p_2^2+i\epsilon}}}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + i\epsilon}, \\ N_2(t-t') &= \frac{\lambda^2 g^2}{2}\text{Im} \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_0^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \frac{e^{i(p_0-vp_1)(t-t')+2ia\sqrt{p_0^2-p_1^2-p_2^2+i\epsilon}}}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Así es que podemos escribir la acción de influencia para una partícula moviéndose frente a un espejo plano imperfecto:

$$S^{\text{IF}}[q^+, q^-] = \int dt dt' [i\Delta q(t)N(t, t')\Delta q(t') + 2\Delta q(t)D(t, t')\Sigma q(t')]. \quad (5.45)$$

5.3.3. Ecuaciones de movimiento reales y causales

De lo visto hasta ahora en esta Sección, es fácil ver que la acción de influencia CTP tiene una parte real, generada por los núcleos de disipación D_1 y D_2 , y una parte imaginaria generada por los núcleos de ruido N_1 y N_2 . Para obtener las ecuaciones de movimiento reales y causales para $q(t)$, como ya vimos en la Sección 2.2, debemos derivar funcionalmente $S[q^+, q^-] = S_0[q^+] - S_0[q^-] + S^{\text{IF}}[q^+, q^-]$ con respecto a q^+ , y luego tomar $q^+ = q^- = q$. Sin embargo, dado que estamos trabajando en un sistema abierto, este procedimiento nos daría ecuaciones de movimiento para el valor medio de $q(t)$, y todos los efectos del ruido estocástico generado por el entorno no aparecerían.

Para ver la influencia del ruido en las ecuaciones de movimiento, es necesario considerar una realización del ruido sobre el sistema, considerando una fuente de ruido estocástico $\xi(t)$. Siguiendo el procedimiento altamente utilizado para el estudio de sistemas cuánticos abiertos, consideraremos que esta fuerza estocástica tiene una distribución de probabilidad Gaussiana dada por:

$$P[\xi(t)] = N_{\xi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt dt' \xi(t) N^{-1}(t, t') \xi(t') \right\}. \quad (5.46)$$

Es fácil ver que la inclusión de esta fuente estocástica puede ser lograda agregando el siguiente factor a la funcional generatriz:

$$\int \mathcal{D}\xi P[\xi] e^{-i \int dt \Delta q(t) \xi(t)} = e^{i \int dt dt' \Delta q(t) N(t, t') \Delta q(t')}, \quad (5.47)$$

que, como mostramos en el miembro derecho de la ecuación anterior, no afecta a la funcional generatriz. La acción de influencia modificada es, entonces

$$\hat{S}^{\text{IF}}[q^+, q^-, \xi] = 2 \int dt dt' \Delta q(t) D(t, t') \Sigma q(t') - \int dt \Delta q(t) \xi(t). \quad (5.48)$$

La ecuación de movimiento está dada por

$$\left. \frac{\delta \left(S_0[q^+] - S_0[q^-] + \hat{S}^{\text{IF}}[q^+, q^-, \xi] \right)}{\delta q^+} \right|_{q^+ = q^- = q} = 0. \quad (5.49)$$

resultando:

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) + \int dt' D(t, t') q(t') = \xi(t), \quad (5.50)$$

de donde es fácil ver que la disipación del sistema viene del núcleo $D(t, t')$, y las fluctuaciones están generadas por la fuerza estocástica $\xi(t)$, que debe cumplir, de acuerdo a la Ec. (5.46):

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t) \xi(t') \rangle &= N(t, t'), \end{aligned}$$

es decir que la fuerza estocástica ξ tiene valor medio nulo, y su función de correlación está dada por el núcleo de ruido (de allí su nombre).

La Ec. (5.50) es una ecuación de Langevin generalizada, con ruido clásico ξ y disipación que satisfacen el teorema de fluctuación-disipación. Cada parte del entorno que incluyamos resultará en nuevos términos *disipativos* en el miembro izquierdo (en nuestro caso, D_1 que da cuenta del campo EM como entorno, y D_2 que incluye a la placa y su interacción con el vacío) con nuevos términos de ruido correspondientes en el miembro derecho. Obviamente es muy difícil resolver esta ecuación estocástica analíticamente. Es difícil imaginarse una derivación *ab initio* de los términos disipativos y de ruido a partir de la teoría cuántica completa. En este sentido, una alternativa razonable es analizar ecuaciones estocásticas fenomenológicas numéricamente, y chequear la robustez de las predicciones contra diferentes elecciones de los núcleos disipativos y del tipo de ruido.

5.4. Decoherencia del grado de libertad interno de la partícula

5.4.1. Funcional de decoherencia

La pregunta que aún no hemos respondido es si las distintas soluciones de la ecuación de Langevin pueden ser observadas [33]. Aun si no tenemos en cuenta la precisión de nuestras observaciones, que podrían inculcar más ruido en el sistema, de acuerdo con el Principio de Heisenberg, debemos preguntarnos si la evolución de nuestro sistema cuántico puede describirse en términos de trayectorias, y si la dinámica de dichas trayectorias es reconocible.

La ausencia de interferencia cuántica entre las soluciones de fase estacionaria a las ecuaciones estocásticas, $q(t)$, se manifiesta a través de un creciente decaimiento de los términos no-diagonales de la matriz de densidad reducida $\rho[q^+, q^-, t]$ (la matriz densidad resultante de haber integrado los grados de libertad del entorno). Este hecho lleva a la noción crucial de un tiempo de decoherencia t_D , después del cual ρ (o, más exactamente, su parte real) es efectivamente diagonal.

La ecuación de movimiento estocástica que estamos buscando es, por supuesto, la Ec. (5.50). El problema es que, así como está, solamente tenemos garantías de que describirá los grados de libertad clásicos $q_{\text{class}}(t)$ luego de la decoherencia (ver, en otros contextos, [48, 49])

La noción de historias consistentes provee un enfoque alternativo a la clasicidad, que no requiere intentar resolver las ecuaciones de movimiento, y es comúnmente utilizado en sistemas cuánticos abiertos. Debido a que deseamos ser capaces de distinguir entre diferentes configuraciones clásicas del sistema evolucionando en el tiempo, trabajaremos en la base de amplitudes $q(t)$. Definimos una historia α vía una función de filtro $w_\alpha[q(t_i)]$, que toma valor unitario si la configuración instantánea q satisface el requerimiento de la historia α , y se anula si no. El caso límite es una *historia de granulado fino* en la que $q(t)$ está especificado para todo tiempo. La evolución cuántica puede ser considerada como una superposición coherente de historias de granulado fino, de modo que si el número complejo $q(t)$ es una historia de granulado fino específica, la amplitud cuántica de dicha historia será $\Psi \sim e^{iS[q]}$ (dado que seguimos trabajando en unidades en las que $\hbar = 1$) [33, 50].

En el enfoque de sistemas cuánticos abiertos que estamos utilizando aquí, estamos interesados en las *historias de granulado grueso* definidas por una cierta función de

filtro $w_\alpha[q]$, cuya amplitud cuántica es

$$\Psi[\alpha] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} w_\alpha[q]. \quad (5.51)$$

En este sentido uno puede asignarle una probabilidad $\mathcal{P}[\alpha] = |\Psi[\alpha]|^2$ a cada historia de granulado grueso α , pero dichas asignaciones no necesariamente serán consistentes, es decir, la suma de las probabilidades de dos historias mutuamente excluyentes generalmente no equivalen a la probabilidad conjunta. En este sentido es conveniente definir la *funcional de decoherencia* para dos historias α^+ y α^- :

$$\mathcal{D}[\alpha^+, \alpha^-] = \int \mathcal{D}q^+ \mathcal{D}q^- e^{i(S[q^+] - S[q^-])} w_{\alpha^+}[q^+] w_{\alpha^-}[q^-]. \quad (5.52)$$

La funcional de influencia $\mathcal{D}[\alpha^+, \alpha^-]$ no se factoriza debido a que las dos historias q^\pm no son independientes: deben cumplir la condición de contorno de igualarse en futuro lejano. La decoherencia significa, físicamente, que las distintas historias de granulado grueso que conforman la evolución cuántica total adquieren realidad individual y se les puede, entonces, asignar diferentes probabilidades en el sentido clásico. Puede verse que una condición necesaria y suficiente para la validez de la regla de la suma de la teoría de probabilidades (es decir, para que no haya términos de interferencia) es [51]:

$$\text{Re}\mathcal{D}[\alpha^+, \alpha^-] \approx 0, \quad (5.53)$$

cuando $\alpha^+ \neq \alpha^-$, (aunque en la mayoría de los casos se cumple la condición más fuerte $\mathcal{D}[\alpha^+, \alpha^-] \approx 0$) [52]. Los tipos de historias donde esta condición se cumple son consistentes [53].

Para nuestra aplicación particular, deseamos considerar como una única historia de granulado grueso a todas aquellas historias de granulado fino para las cuales la solución $q(t)$ se mantiene cerca de una configuración clásica prescrita q_{cl} . La función de filtro toma la forma:

$$\alpha_{\text{cl}}[q] = \int \mathcal{D}J e^{i \int d^4x J(x)(q(x) - q_{\text{cl}}(x))} \alpha_{\text{cl}}[J(x)] \quad (5.54)$$

La funcional de decoherencia entre dos historias clásicas puede ser escrita en términos de la funcional generatriz *CTP*. En principio, podríamos examinar la consistencia de soluciones clásicas adyacentes generales pero, en la práctica, resulta más simple restringirnos a soluciones particulares q^\pm , de acuerdo a la naturaleza de la decoherencia que estamos estudiando. Finalmente, en una aproximación de punto de ensilladura sobre J , la funcional de decoherencia resulta [50]

$$\mathcal{D}[q_{\text{cl}}^+, q_{\text{cl}}^-] \approx F[q_{\text{cl}}^+, q_{\text{cl}}^-], \quad (5.55)$$

donde $F[q_{\text{cl}}^+, q_{\text{cl}}^-]$ es la funcional de influencia de Feynman y Vernon [54]. La funcional de influencia se escribe en términos de la acción de influencia $S^{\text{IF}}[q^+, q^-]$ como $F = \exp[-iS^{\text{IF}}]$. Como resultado:

$$|\mathcal{D}[q_{\text{cl}}^+, q_{\text{cl}}^-]| \sim \exp\{i\text{Im}S^{\text{IF}}[q_{\text{cl}}^+, q_{\text{cl}}^-]\}, \quad (5.56)$$

donde S^{IF} es la contribución a la acción debida a, en nuestro caso, el entorno compuesto. Desde este punto de vista, una vez elegidas las soluciones clásicas de interés, dos historias adyacentes se volverán consistentes luego de un tiempo t_D para el cual $1 \approx \text{Im}S^{\text{IF}}|_{t=t_D}$ [50]. Este tiempo de decoherencia sera relevante en cualquier experimento de interferometria de Ramsey [46], dado que para tiempos más grandes que t_D , las franjas de Ramsey no serán distinguibles, expresando la despolarización del átomo.

5.4.2. Cálculo de la parte imaginaria de S_1^{IF}

Recordemos la expresión para $N_1(t, t')$ dada por la Ec. (5.31), y consideremos dos trayectorias clásicas $q_{\text{cl}}(t)$ de igual frecuencia pero diferente amplitud, de modo que:

$$\Delta q_{\text{cl}}(t) = \Delta q_0 \cos(\omega_0 t). \quad (5.57)$$

Podemos entonces escribir una expresión para la parte imaginaria de la acción de influencia para la partícula en presencia del campo de vacío (ignorando la placa):

$$\begin{aligned} \text{Im}S_1^{\text{IF}} = & \frac{-g^2 \Delta q_0^2}{4} \text{Im} \int \frac{dp_0 d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 + i\epsilon} \left\{ \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 + \omega_0)(t-t')} \right. \\ & \left. + \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 - \omega_0)(t-t')} + \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 + \omega_0)(t+t')} + \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 - \omega_0)(t+t')} \right\}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Todas las integrales temporales dan como resultado funciones delta de Dirac. Los últimos dos términos se anulan porque las deltas resultantes de las integraciones sobre t y sobre t' no pueden cumplirse simultáneamente. Para cada término no nulo, se obtiene un factor infinito $\delta(0)$, que da cuenta del tiempo total de integración T : el tiempo de vuelo de la partícula.

De este modo, las integrales sobre p_0 pueden resolverse trivialmente, y los términos restantes resultan:

$$\text{Im}S_1^{\text{IF}} = \frac{-g^2 \Delta q_0^2 T}{4} \text{Im} \int \frac{dp_0 d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{\delta(p_0 + vp_1 - \omega_0) \delta(p_0 + vp_1 + \omega_0)}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 + i\epsilon}. \quad (5.59)$$

Podemos tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$ en el denominador, obteniendo:

$$\frac{1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 + i\epsilon} \rightarrow \text{p.v.} \left(\frac{1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2} \right) - i\pi \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2), \quad (5.60)$$

donde p.v denota el valor principal de Cauchy. De modo que tenemos

$$\text{Im}S_1^{\text{IF}} = \frac{-g^2\Delta q_0^2 T}{4} \int \frac{dp_0 d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2} [\delta(p_0 + vp_1 - \omega_0) + \delta(p_0 + vp_1 + \omega_0)] \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2). \quad (5.61)$$

Consideremos ahora nuevamente el caso en 2+1 dimensiones, tomando $p_2 \equiv 0$ (x_2 es la dirección con simetría traslacional, es decir, paralela a la placa y perpendicular al movimiento de la partícula). Entonces, la integral sobre p_0 resulta

$$\text{Im}S_1^{\text{IF}} = \frac{\pi g^2\Delta q_0^2 T}{4} \int \frac{dp_1 dp_3}{2\pi} [\delta((-vp_1 + \omega_0)^2 - (p_1^2 + p_3^2)) + \delta((vp_1 + \omega_0)^2 - (p_1^2 + p_3^2))] . \quad (5.62)$$

Si llamamos $h_{\pm}(p_1, p_3) = (\pm vp_1 + \omega_0)^2 - (p_1^2 + p_3^2)$, entonces podemos escribir la integral anterior como:

$$\text{Im}S_1^{\text{IF}} = \frac{g^2\Delta q_0^2 T}{8} \left\{ \int_{\mathcal{S}_+} d\sigma(p_1, p_3) \frac{1}{|\nabla h_+(p_1, p_3)|} + \int_{\mathcal{S}_-} d\sigma(p_1, p_3) \frac{1}{|\nabla h_-(p_1, p_3)|} \right\}, \quad (5.63)$$

donde las integrales de área deben realizarse sobre las superficies definidas por las ecuaciones $\mathcal{S}_{\pm}/h_{\pm}(p_1, p_3) = 0$. Una forma de definir dichas superficies es mediante nuevas funciones delta de Dirac que, para cada valor de p_1 , restrinjan la integración sobre p_3 a aquellos valores pertenecientes a la superficie de integración:

$$\begin{aligned} \text{Im}S_1^{\text{IF}} &= \frac{g^2\Delta q_0^2 T}{8} \int dp_1 dp_3 \quad (5.64) \\ &\times \left[\frac{\delta\left(p_3 - \sqrt{(v^2 - 1)p_1^2 + 2\omega_0 vp_1 + \omega_0^2}\right) + \delta\left(p_3 + \sqrt{(v^2 - 1)p_1^2 + 2\omega_0 vp_1 + \omega_0^2}\right)}{|\nabla h_+(p_1, p_3)|} \right. \\ &\left. + \frac{\delta\left(p_3 - \sqrt{(v^2 - 1)p_1^2 - 2\omega_0 vp_1 + \omega_0^2}\right) + \delta\left(p_3 + \sqrt{(v^2 - 1)p_1^2 - 2\omega_0 vp_1 + \omega_0^2}\right)}{|\nabla h_-(p_1, p_3)|} \right] \end{aligned}$$

Dado que la integración en p_3 debe realizarse sobre valores, cada término será no nulo sólo si el argumento de la raíz cuadrada que aparece dentro de cada función delta es positivo. Es fácil ver que los términos provenientes de h_+ se anulan a menos que

$$\frac{-\omega_0}{1+v} < p_1 < \frac{\omega_0}{1-v} \quad (5.65)$$

mientras que los provenientes de h_- son no nulos cuando

$$\frac{-\omega_0}{1-v} < p_1 < \frac{\omega_0}{1+v}. \quad (5.66)$$

Es decir que sólo nos resta resolver cuatro integrales sobre conjuntos acotados de p_1 . Como los denominadores $|\nabla h_{\pm}(p_1, p_3)|$ son cuadráticos en p_3 , sólo habrá dos tipos de integrales diferentes. Para velocidades chicas, tenemos

$$\text{Im}S_1^{\text{IF}} \approx \frac{g^2 \Delta q_0^2 T}{4} \int_{-\frac{\omega_0}{1-v}}^{\frac{\omega_0}{1+v}} dp_1 \frac{1}{-4v^2 p_1^2 + 4\omega_0^2(1+v^2)} + \int_{-\frac{\omega_0}{1+v}}^{\frac{\omega_0}{1-v}} dp_1 \frac{1}{-4v^2 p_1^2 + 4\omega_0^2(1+v^2)}. \quad (5.67)$$

$$\text{Im}S_1^{\text{IF}} = \frac{g^2 \Delta q_0^2 T}{2} \frac{1}{2v} \left[\arctan\left(\frac{v}{1-v}\right) + \arctan\left(\frac{v}{1+v}\right) \right] \approx \frac{g^2 \Delta q_0^2 T}{2} \left(1 + \frac{2}{3}v^2\right), \quad (5.68)$$

donde hemos despreciado los términos de orden $\mathcal{O}(v^3)$ y superiores.

5.4.3. Cálculo de la parte imaginaria de S_2^{IF}

Recordemos la expresión para $N_2(t, t')$ dada por la Ec. (5.37), y consideremos dos trayectorias clásicas $q(t)$ con diferentes amplitudes pero la misma frecuencia:

$$\Delta q_{\text{cl}}(t) = \Delta q_0 \cos(\omega_0 t) \quad (5.69)$$

Insertando estos resultados en la Ec. (5.45), podemos escribir una expresión para la parte imaginaria de la acción de influencia, dada por

$$\text{Im}S_2^{\text{IF}} = \frac{g^2 \lambda^2 \pi^2 \Delta q_0^2}{2} \text{Im} \int \frac{dp_0 d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{2ia\sqrt{p_0^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{(p_0^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon)(p_0^2 - \Omega^2 + i\epsilon)} \quad (5.70)$$

$$\times \left\{ \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 + \omega_0)(t-t')} + \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 - \omega_0)(t-t')} + \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 + \omega_0)(t+t')} + \int dt dt' e^{i(p_0 - vp_1 - \omega_0)(t+t')} \right\}. \quad (5.71)$$

Nuevamente las integrales temporales resultan en funciones delta de Dirac, y sólo los dos primeros términos son no nulos. De cada uno de ellos se obtiene una $\delta(0) \rightarrow T$, representando el tiempo total de vuelo de la partícula. De este modo, al igual que para $\text{Im}S_1^{\text{IF}}$, las integrales sobre p_0 resultan triviales, y tenemos:

$$\text{Im}S_2^{\text{IF}} = \frac{g^2 \pi^2 \Delta q_0^2 \lambda^2 T}{2} \text{Im} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{2ia\sqrt{(vp_1 - \omega_0)^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon}}}{((vp_1 - \omega_0)^2 - p_{\parallel}^2 + i\epsilon)((vp_1 - \omega_0)^2 - \Omega^2 + i\epsilon)} + \omega_0 \leftrightarrow -\omega_0. \quad (5.72)$$

A continuación volveremos a restringirnos al caso de 2 + 1 dimensiones, tomando $p_2 = 0$. Realizando el cambio de variables $x \equiv vp_1 a$, podemos escribir:

$$\text{Im}S_2^{\text{IF}} = \frac{g^2 \pi^2 \Delta q_0^2 \lambda^2 T a^3}{2} \text{Im} \int \frac{dx}{(2\pi)} \frac{e^{\frac{2ia}{v} \sqrt{P(x)+i\epsilon}}}{(P(x)+i\epsilon)(A(x)+i\epsilon)} + \omega_0 \leftrightarrow -\omega_0, \quad (5.73)$$

donde $P(x) = (k - \tilde{\omega}_0)^2 v^2 - x^2$ y $A(x) = (x - \tilde{\omega}_0)^2 - \tilde{\Omega}^2$, con $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 a$ y $\tilde{\Omega} = \Omega a$, las frecuencias adimensionalizadas. Comenzaremos analizando el primer término. Si el polinomio $P(x)$ tuviera signo definido, podríamos librarnos del $i\epsilon$ que lo acompaña. Como $P(x)$ tiene dos raíces reales distintas, ubicadas en $x_+ = \frac{v\tilde{\omega}_0}{1+v}$ y $x_- = -\frac{v\tilde{\omega}_0}{1-v}$, vamos a considerar tres regiones diferentes, definidas por:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \rightarrow & \quad \frac{v\tilde{\omega}_0}{1+v} < x & \quad P(x) < 0 \\ \text{(II)} \rightarrow & \quad -\frac{v\tilde{\omega}_0}{1-v} < x < \frac{v\tilde{\omega}_0}{1+v} & \quad P(x) > 0 \\ \text{(III)} \rightarrow & \quad x < -\frac{v\tilde{\omega}_0}{1-v} & \quad P(x) < 0 \end{aligned}$$

La razón para definir dichas regiones es que $P(x)$ tiene signo bien definido dentro de cada una de ellas, y podemos tomar trivialmente el límite $\epsilon \rightarrow 0$ en los términos que involucran a $P(x)$.

Por otra parte, el integrando va a tener dos polos, asociados con los ceros de $A(x)$, cuyas posiciones son $x_1 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\Omega}$ y $x_2 = \tilde{\omega}_0 - \tilde{\Omega}$. Es fácil ver que x_1 siempre está localizado dentro de la región (III), mientras que x_2 puede estar en cualquiera de las regiones, dependiendo de los valores de los parámetros externos del problema: v , $\tilde{\omega}_0$, y $\tilde{\Omega}$. Con un poco de álgebra, es posible mostrar que x_2 está ubicado en la región (II) si y sólo si:

$$\frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} < \tilde{\Omega} < \frac{\tilde{\omega}_0}{1-v}. \quad (5.74)$$

Esta condición es importante para calcular las integrales explícitamente.

Comencemos computando la integral sobre la región (II). Para hacerlo, tengamos en mente que, cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{A(x)+i\epsilon} \rightarrow \text{p.v.} \left(\frac{1}{A(x)} \right) - i\pi \delta(A(x)). \quad (5.75)$$

Por otro lado, como $P(x) > 0$ en esta región, podemos escribir

$$\exp\left(\frac{2i}{v}\sqrt{P(x)}\right) = \cos\left(\frac{2}{v}\sqrt{P(x)}\right) + i \sin\left(\frac{2}{v}\sqrt{P(x)}\right).$$

Si se cumple la condición (5.74), $A(x)$ tendrá una raíz en la región de integración, de modo que la integral de $\delta(A(x))$ será no nula. Tendremos, entonces, dos términos

que contribuirán a la parte imaginaria de la acción de influencia, el primero de los cuales será

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{2\pi} (-v\pi) \frac{\cos \left[\frac{2}{v} \sqrt{P(x)} \right]}{P(x)} \delta(A(x)) = -\frac{v}{4\tilde{\Omega}} \frac{\cos \left[\frac{2}{v} \sqrt{\tilde{\Omega}^2 v^2 - (\tilde{\omega}_0 - \tilde{\Omega})^2} \right]}{\tilde{\Omega}^2 v^2 - (\tilde{\omega}_0 - \tilde{\Omega})^2}, \quad (5.76)$$

donde hemos insertado las expresiones explícitas para $P(x_2)$ y $|A'(x_2)|$. El otro término será

$$\frac{v}{2\pi} \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{\sin \left(\frac{2}{v} \sqrt{P(x)} \right)}{P(x)} \text{p.v.} \left(\frac{1}{A(x)} \right). \quad (5.77)$$

Ahora bien, si la condición (5.74) no se cumple, no habrá polos en la región de integración de modo que podremos tomar $\epsilon \rightarrow 0$ en todas partes. Esto resulta en un único término que contribuye a la parte imaginaria de la acción de influencia, dado por:

$$\frac{v}{2\pi} \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{\sin \left(\frac{2}{v} \sqrt{P(x)} \right)}{P(x)A(x)}. \quad (5.78)$$

Computemos ahora las integrales sobre las regiones (I) y (III). Como $P(x) < 0$ en esta región, podemos escribir

$$\text{Im} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{x_-} dx + \int_{x_+}^{+\infty} dx \right] \underbrace{\frac{e^{-\frac{2}{v} \sqrt{-P(x)}}}{P(x)}}_{\in \mathbb{R}} \right\} v \frac{1}{A(x) + i\epsilon} \quad (5.79)$$

y, cuando tomemos $\epsilon \rightarrow 0$, las únicas contribuciones a la parte imaginaria vendrán del término $-i\pi\delta$. La única pregunta restante es cuántas raíces tiene $A(x)$ en esta región. Como ya dijimos, x_1 está siempre en la región (III), de manera que tendremos una contribución proveniente de x_1 , para cualquier combinación de valores de los parámetros externos, y será

$$\frac{v}{4\tilde{\Omega}} \frac{e^{-\frac{2}{v} \sqrt{(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\Omega})^2 - \tilde{\Omega}^2 v^2}}}{(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\Omega})^2 - \tilde{\Omega}^2 v^2}. \quad (5.80)$$

Además, cuando la condición (5.74) no se cumpla, entonces k_2 estará también en la región (I) o en la región (III), dándonos una contribución extra de la forma

$$\frac{v}{4\tilde{\Omega}} \frac{e^{-\frac{2}{v} \sqrt{(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\Omega})^2 - \tilde{\Omega}^2 v^2}}}{(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\Omega})^2 - \tilde{\Omega}^2 v^2}. \quad (5.81)$$

Hasta aquí hemos analizado el primer término de la Ec. (5.72). El procedimiento para evaluar las contribuciones al segundo término es completamente análogo, de modo que estamos en condiciones de juntar todas las contribuciones y escribir el resultado para la parte imaginaria de la acción de influencia proveniente de la placa. Para ello definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{v\tilde{\omega}_0}{1-v}}^{\frac{v\tilde{\omega}_0}{1+v}} dx \frac{\sin\left[\frac{2}{v}\sqrt{(x-\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2}\right]}{((x-\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2)((x-\tilde{\omega}_0)^2-\tilde{\Omega}^2)} + \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \frac{e^{-\frac{2}{v}\sqrt{(\tilde{\omega}_0-\tilde{\Omega})^2-v^2\tilde{\Omega}^2}}}{(\tilde{\omega}_0-\tilde{\Omega})^2-v^2\tilde{\Omega}^2} \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{v\tilde{\omega}_0}{1+v}}^{\frac{v\tilde{\omega}_0}{1-v}} dx \frac{\sin\left[\frac{2}{v}\sqrt{(x+\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2}\right]}{((x+\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2)((x+\tilde{\omega}_0)^2-\tilde{\Omega}^2)} + \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \frac{e^{-\frac{2}{v}\sqrt{(\tilde{\omega}_0+\tilde{\Omega})^2-v^2\tilde{\Omega}^2}}}{(\tilde{\omega}_0+\tilde{\Omega})^2-v^2\tilde{\Omega}^2}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{v\tilde{\omega}_0}{1-v}}^{\frac{v\tilde{\omega}_0}{1+v}} dx \frac{\sin\left[\frac{2}{v}\sqrt{(x-\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2}\right]}{(k-\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2} \text{p.v.} \left(\frac{1}{(x-\tilde{\omega}_0)^2-\tilde{\Omega}^2} \right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{v\tilde{\omega}_0}{1+v}}^{\frac{v\tilde{\omega}_0}{1-v}} dx \frac{\sin\left[\frac{2}{v}\sqrt{(x+\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2}\right]}{(x+\tilde{\omega}_0)^2v^2-x^2} \text{p.v.} \left(\frac{1}{(x-\tilde{\omega}_0)^2+\tilde{\Omega}^2} \right) \\ & + \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \frac{e^{-\frac{2}{v}\sqrt{(\tilde{\omega}_0+\tilde{\Omega})^2-v^2\tilde{\Omega}^2}}}{(\tilde{\omega}_0+\tilde{\Omega})^2-v^2\tilde{\Omega}^2} - \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \frac{\cos\left[\frac{2}{v}\sqrt{v^2\tilde{\Omega}^2-(\tilde{\omega}_0-\tilde{\Omega})^2}\right]}{v^2\tilde{\Omega}^2-(\tilde{\omega}_0-\tilde{\Omega})^2}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

donde las integrales restantes sobre k pueden ser fácilmente resueltas numéricamente.

La parte imaginaria de la acción de influencia está dada, entonces, por

$$\text{Im}S_2^{\text{IF}} = \frac{g^2\pi^2\Delta q_0^2\lambda^2Tv a^3}{2} \begin{cases} \mathcal{S}_1 & \text{si } \tilde{\Omega} < -\frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} \text{ ó } \frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} < \tilde{\Omega} \\ \mathcal{S}_2 & \text{si } -\frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} < \tilde{\Omega} < \frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} \end{cases}. \quad (5.84)$$

5.4.4. Estimación del tiempo de decoherencia

Estamos ahora en condiciones de estimar el tiempo de decoherencia para el grado de libertad interno de la partícula. Para ello necesitamos la acción de influencia total, que incluya tanto el efecto del vacío sobre la partícula como el efecto de la placa, mediada por el vacío. Hasta segundo orden en λ , tenemos:

$$\text{Im}S^{\text{IF}} = \frac{g^2\Delta q_0^2T}{2} \left(1 + \frac{2}{3}v^2 + \lambda^2 a^3 v \begin{cases} \mathcal{S}_1 & \text{si } \tilde{\Omega} < -\frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} \text{ ó } \frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} < \tilde{\Omega} \\ \mathcal{S}_2 & \text{si } -\frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} < \tilde{\Omega} < \frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} \end{cases} \right). \quad (5.85)$$

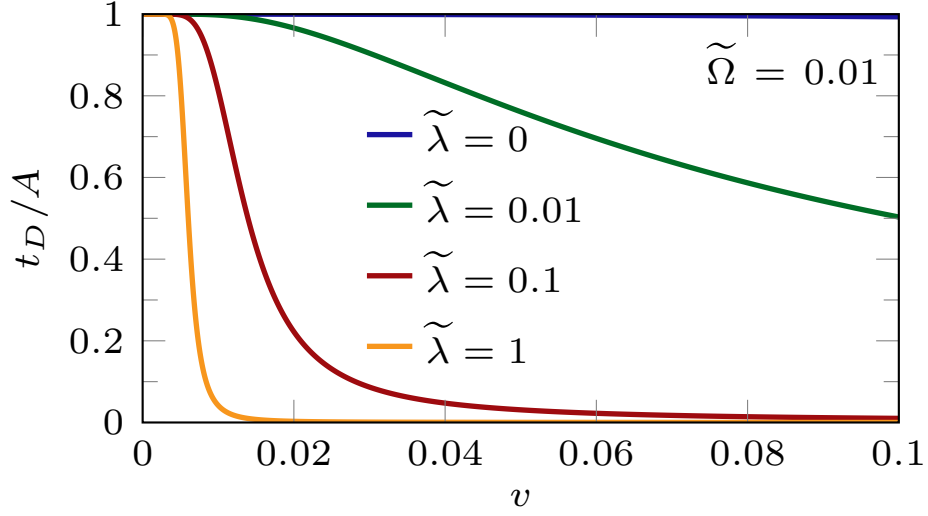


Figura 5.4: Estimación del tiempo de decoherencia para el grado de libertad interno de la partícula, en unidades de un factor global $A = \frac{g^2 \Delta q_0^2}{2}$, como función de la velocidad relativa v ; para $\tilde{\omega}_0 = 0,03$.

Como ya hemos detallado en la Subsección 5.4.1, el tiempo de decoherencia puede ser estimado como el tiempo de vuelo de la partícula para el cual $\text{Im}S^{\text{IF}} \sim 1$, de modo que

$$t_D \sim \frac{2}{g^2 \Delta q_0^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3}v^2 + \lambda^2 a^3 v \begin{cases} \mathcal{S}_1 & \text{si } \tilde{\Omega} < -\frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} \text{ ó } \frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} < \tilde{\Omega} \\ \mathcal{S}_2 & \text{si } -\frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} < \tilde{\Omega} < \frac{\tilde{\omega}_0}{1+v} \end{cases}\right)}, \quad (5.86)$$

donde \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 fueron definidos en las Ecs. (5.82) y (5.83) respectivamente. Calculamos numéricamente \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 para distintos valores de los parámetros del problema, lo que nos permite mostrar, en la Figura 5.4, la estimación del tiempo de decoherencia como función de la velocidad de la partícula (en unidades de c), para diferentes valores de la constante de acoplamiento normalizada $\tilde{\lambda} = \lambda a^{3/2}$, donde a es la distancia entre la partícula y la placa, y λ es la constante de acoplamiento entre el espejo y el campo de vacío, y que, como ya vimos en el Capítulo 3, está relacionada con la constante dieléctrica del material que conforma la placa. Hay un factor global $A = \frac{2}{g^2 \Delta q_0^2}$ que muestra que la decoherencia es mayor (menor t_D) cuanto mayor sea el acoplamiento entre la partícula y el campo de vacío (es decir, la polarizabilidad de la partícula), y cuanto mayor sea la diferencia entre las amplitudes de las trayectorias clásicas que estamos considerando.

Como puede verse en la Fig. 5.4, la presencia de la placa aumenta la decoherencia, pero solamente para velocidades no nulas. Para una partícula en reposo o moviéndose

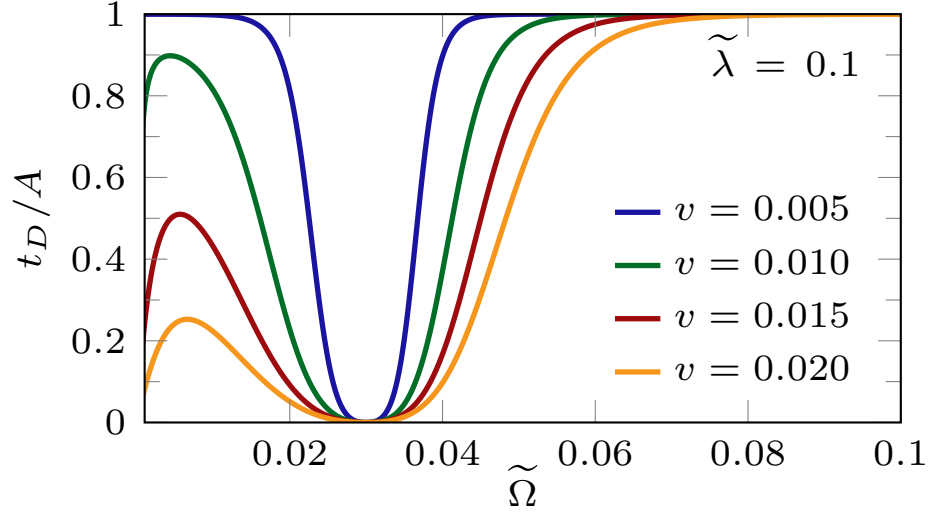


Figura 5.5: Estimación del tiempo de decoherencia para el grado de libertad interno de la partícula, en unidades de un factor global $A = \frac{g^2 \Delta q_0^2}{2}$, como función de la frecuencia adimensionalizada del material $\tilde{\Omega}$; para $\tilde{\omega}_0 = 0,03$.

a velocidades muy bajas con respecto a un espejo imperfecto, el tiempo de decoherencia es el mismo que en ausencia de la placa (es decir, es el propio de la interacción con el campo EM), incluso para valores altos del acoplamiento entre ésta y el vacío, lo que implicaría una interacción más fuerte entre la partícula y la placa, mediada por el campo de vacío. Ahora bien, para velocidades finitas, el tiempo de decoherencia del grado de libertad interno de la partícula es más corto cuanto más intenso sea el acoplamiento entre el espejo y el vacío.

En la Fig. 5.5, mostramos el tiempo de decoherencia t_D como función de la frecuencia característica de la placa adimensionalizada $\tilde{\Omega}$, que puede ser interpretada como la frecuencia de los modos fonónicos más relevantes. Lo hacemos para diferentes valores de la velocidad de la partícula v (en unidades de c), y para un valor fijo de la frecuencia característica del átomo $\tilde{\omega}_0 = 0,03$. Podemos observar en el gráfico que un mínimo claro aparece para todos los valores considerados de v , y está ubicado en $\tilde{\Omega} = 0,03 = \tilde{\omega}_0$. Esto significa que la decoherencia es máxima en el caso resonante, haciendo que el tiempo de decoherencia se anule. Lejos de la resonancia, es decir, cuando $\Omega \gg \omega_0$ o en el límite opuesto (de ser posible), el tiempo de decoherencia tiende al valor límite que corresponde al caso en ausencia del espejo.

De estos resultados podemos ver que, en este modelo sencillo, la presencia de la placa aumenta la decoherencia sobre la partícula. Los efectos de decoherencia pueden ser maximizados mediante una elección apropiada de las historias de granulado grueso

del átomo (en este ejemplo, las amplitudes clásicas que generan la diferencia $\Delta q_0(t)$) y el material de la placa. Como ya ha sido discutido [44], los efectos de decoherencia generados solamente por el campo de vacío son despreciables. El acoplamiento entre cualquier átomo neutro y el vacío es muy débil, resultando en un tiempo de decoherencia prácticamente infinito. Sin embargo, de nuestros resultados puede verse que, eligiendo apropiadamente el material, el tiempo de decoherencia puede ser drásticamente reducido. También mostramos que la velocidad relativa contribuye al aumento de los efectos de decoherencia.

Como último comentario, queremos mencionar que, en lugar de considerar dos trayectorias clásicas que difieran en amplitud, podríamos considerar dos trayectorias que difieran en una fase: esto tendría, eventualmente, mayores posibilidades de ser implementado experimentalmente. Si las dos trayectorias clásicas $q_{cl}(t)$ tienen la misma amplitud q_0 y la misma frecuencia ω_0 , pero una diferencia de fase δ :

$$\Delta q_{cl}(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta) - q_0 \cos(\omega_0 t), \quad (5.87)$$

el tiempo de decoherencia resulta

$$t_D \sim \frac{1}{g^2 q_0^2 (1 - \cos \delta)} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3} v^2 + \lambda^2 a^3 v \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}_1 & \text{if } \Omega < -\frac{\omega_0}{1+v} \text{ or } \frac{\omega_0}{1+v} < \Omega \\ \mathcal{S}_2 & \text{if } -\frac{\omega_0}{1+v} < \Omega < \frac{\omega_0}{1+v} \end{array} \right. \right)}. \quad (5.88)$$

Es decir, el resultado es completamente análogo al anterior.

Como ya hemos mostrado a lo largo de todo este capítulo, los efectos disipativos y de decoherencia están intrínsecamente relacionados. Como hemos visto en los capítulos anteriores, la fuerza de fricción cuántica es, por el momento, imposible de detectar, al menos en los sistemas que se han considerado hasta la actualidad en la literatura. En este sentido, podríamos considerar a la decoherencia como una manera de detectar experimentalmente los efectos disipativos sobre el sistema, debido a que existe una combinación de parámetros tales que la decoherencia es máxima, reduciendo el tiempo de decoherencia a cero. Por supuesto, para poder realmente considerar la posibilidad de implementación experimental de este problema, primero sería necesario extender nuestros resultados a $3 + 1$ dimensiones. Planeamos en el futuro cercano hacer dicha extensión, trabajando en el límite no relativista para poder simplificar un poco las complicaciones algebraicas involucradas en el cálculo de S_2^{IF} .

5.5. Conclusiones

En este capítulo hemos aplicado el enfoque funcional que veníamos utilizando al estudio de los efectos de las fluctuaciones cuánticas de vacío en una partícula moviéndose en forma paralela a un espejo imperfecto. Hemos presentado un modelo simple en el cual el campo de vacío es un campo escalar real y no masivo, acoplado a los grados de libertad microscópicos del espejo y al grado de libertad interno de la partícula. En nuestro modelo sencillo, la placa está formada por osciladores armónicos unidimensionales desacoplados, cada uno de ellos interactuando localmente en posición con el campo de vacío. La trayectoria macroscópica de la partícula está fijada externamente, y su grado de libertad interno también fue modelado como un oscilador armónico unidimensional, también acoplado en posición al campo escalar, resultando en una interacción tipo dipolar.

En primer lugar estudiamos los efectos disipativos sobre el sistema. Para hacerlo, repetimos el procedimiento de los capítulos anteriores: calculamos la acción efectiva *in-out* para el sistema completo, que presentó una parte imaginaria, dando cuenta de la existencia de una probabilidad no nula de decaimiento del estado inicial del sistema debida a la fricción. Encontramos que estos efectos disipativos dependen de la velocidad relativa entre la placa y el espejo, y de las características de los materiales. Luego, como hicimos en los capítulos anteriores, calculamos la fuerza de fricción que actúa sobre la placa a partir de la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out*.

Después cambiamos al formalismo de Schwinger-Keldysh o *CTP* para estudiar la decoherencia sufrida por la partícula debido a su interacción con las fluctuaciones del campo de vacío, y a su interacción efectiva (mediada por el vacío) con el espejo. Calculamos la acción de influencia *CTP* que describe la influencia del campo de vacío y de los grados de libertad microscópicos de la placa sobre el grado de libertad interno de la partícula. Esta acción de influencia nos permitió estimar el tiempo de decoherencia luego del cual dos historias cuánticas determinadas ganan realidad propia individual, pudiéndose identificar como trayectorias clásicas diferentes. Encontramos que el tiempo de decoherencia se reduce con la presencia del espejo, y es mínimo cuando las frecuencias características de la placa y del átomo (representando un modo fonónico del material y la energía de transición entre niveles del átomo en nuestro modelo sencillo) son muy cercanas (caso resonante). También encontramos que la velocidad relativa entre el espejo y la partícula incrementa la decoherencia, como así también lo hace el incremento de las constantes de acoplamiento.

Esperamos que en un experimento de interferencia tipo Ramsey, los parámetros de nuestro modelo pudieran ser elegidos de manera de maximizar o minimizar los efectos de decoherencia, según fuera deseado. Con una velocidad relativa no nula, esperamos detectar los efectos de decoherencia vía la atenuación del contraste entre las franjas de Ramsey.

Capítulo 6

Fricción sobre una partícula moviéndose en dirección arbitraria frente a un espejo imperfecto

6.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar nuevamente los efectos de fricción sobre una partícula moviéndose frente a la superficie plana de un dieléctrico o un metal. Sin embargo, habrá cambios sustanciales con respecto al Capítulo anterior.

En primer lugar, consideraremos una trayectoria más general: el movimiento continuará siendo rectilíneo y uniforme, pero el vector velocidad podrá apuntar en cualquier dirección. Esto nos permite describir átomos que se acercan o se alejan de la superficie, siempre a velocidad constante. La razón detrás de esta consideración es la siguiente: como vimos en los capítulos anteriores, los efectos disipativos producto de las fluctuaciones cuánticas de vacío, si bien han sido predichos utilizando una gran cantidad de formalismos teóricos diferentes, eluden la detección experimental, debido a que son extremadamente chicos y de corto rango. En un trabajo reciente [21], se ha encontrado que las correcciones a la dinámica interna de los átomos -es decir, a los corrimientos en los niveles atómicos y a las tasas de decaimiento-, son significativamente mayores cuando el átomo se mueve en dirección vertical, en lugar de paralela, a la superficie macroscópica. De aquí surge la pregunta acerca de si podría ocurrir un cambio cualitativo similar para la fuerza de fricción en el caso de movimiento perpendicular, facilitando potencialmente la accesibilidad experimental de la fricción cuántica en este tipo de configuraciones verticales. Es por ello que en este capítulo generalizamos los cálculos del escenario paradigmático del movimiento paralelo de la partícula, al caso de movimiento en una dirección arbitraria.

Por otro lado, este será el único Capítulo de esta Tesis en el cual no utilizaremos el formalismo funcional. En su lugar, utilizaremos dos enfoques diferentes que luego contrastaremos entre sí, y que ya se han utilizado ampliamente en la literatura para el estudio, por ejemplo, del caso de movimiento paralelo: ecuaciones maestras Markovianas y teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. Una ventaja de estos métodos es que nos van a permitir obtener resultados a un orden más en la teoría de perturbaciones de lo que obtuvimos en los capítulos anteriores.

Estudiaremos de nuevo el caso paradigmático de un átomo moviéndose cerca de un cuerpo plano macroscópico a temperatura cero. El átomo es neutro y no posee un momento dipolar eléctrico ni magnético permanente. La distribución de carga proveída por sus constituyentes, sin embargo, está sujeta a las fluctuaciones cuánticas, que dan lugar a la polarizabilidad eléctrica del átomo. La polarizabilidad eléctrica del cuerpo macroscópico, que asumiremos es un metal o un dieléctrico, es tenida en cuenta a través de su permitividad dieléctrica $\varepsilon(\omega)$.

Este Capítulo está basado en el trabajo ‘*Quantum Friction in Arbitrarily Directed Motion*’ [25], fruto de una colaboración con en Dr. Diego Dalvit, del Laboratorio Nacional de Los Alamos, y Juliane Klatt y el Dr. Stefan Buhmann, de la Universidad de Freiburg; y está organizado de la siguiente manera: en la Sección 6.2 establecemos el terreno común tanto para el enfoque Markoviano como para la teoría de perturbaciones. Luego, en la Sección 6.3, desarrollamos el formalismo de la ecuación maestra de Markov para la fricción cuántica en movimientos de dirección arbitraria, mientras que en la Sección 6.4 contrastamos estos cálculos con los resultados que se obtienen utilizando la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. Por último, la Sección 6.5 contiene las conclusiones de este Capítulo.

6.2. El sistema

Como hemos mencionado en la Introducción, consideramos aquí un átomo moviéndose en la proximidad de un medio dieléctrico homogéneo que ocupa el semiespacio $z < 0$, mientras que el átomo mismo se encuentra en vacío a temperatura cero. El Hamiltoniano para todo el sistema consiste de una contribución atómica, una del campo electromagnético, y la interacción entre ambos. La presencia del medio dieléctrico es tenida en cuenta en la expresión del campo EM como condición de contorno, de modo que dicho campo no representa ya las excitaciones del campo EM libre sino del mismo acoplado a los modos de oscilación del material. Las contribuciones, entonces,

son:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF} \quad (6.1)$$

$$= \frac{\hat{\mathbf{p}}_A^2}{2m_A} + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \hat{A}_{nn} \quad (6.2)$$

$$+ \hbar \sum_{\sigma=e,m} \int d\mathbf{r} \int_0^{\infty} d\omega \omega \hat{\mathbf{f}}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}_{\sigma}(\mathbf{r}, \omega) \quad (6.3)$$

$$- \sum_{mn} \hat{A}_{mn} \mathbf{d}_{mn} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A). \quad (6.4)$$

Aquí $\hat{\mathbf{p}}_A$ es el operador momento en el sistema centro de masa, y E_n son las autoenergías internas del átomo. Los operadores $\hat{A}_{mn} = |m\rangle \langle n|$ son los llamados operadores de volteo que, para $m=n$, proyectan en el n -ésimo autoestado, y para $m \neq n$, inducen transiciones del estado $|n\rangle$ al estado $|m\rangle$. Estos operadores están íntimamente relacionados con la matriz densidad del estado atómico [55]: en particular, el valor medio de los operadores de volteo diagonales coincide con la población de ese estado interno:

$$\langle \hat{A}_{nn}(t) \rangle = p_n(t), \quad (6.5)$$

mientras que los operadores no diagonales caracterizan la coherencia del estado cuántico interno del átomo. Las relaciones de conmutación a tiempos iguales para estos operadores de volteo se pueden encontrar fácilmente, resultando

$$[\hat{A}_{mn}, \hat{A}_{kl}] = \delta_{nk} \hat{A}_{ml} - \delta_{lm} \hat{A}_{kn}. \quad (6.6)$$

Por otra parte, los operadores $\hat{\mathbf{f}}_{\sigma}^{\dagger}$ crean excitaciones del campo asistidas por el medio, que resultan de la cuantización del mismo en presencia del sólido [56, 57]:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma=e,m} \int d\mathbf{r}' \int_0^{\infty} d\omega \mathbf{G}_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}_{\sigma}(\mathbf{r}', \omega) + \text{h.c.} \quad (6.7)$$

Pueden pensarse como si representaran dipolos unitarios magnéticos (m) o eléctricos (e) situados en \mathbf{r}' y oscilando con frecuencia ω , poblando entonces el modo correspondiente del campo. Actúan sobre el estado de vacío del campo $|\{0\}\rangle$ de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\sigma}(\mathbf{r}, \omega) |\{0\}\rangle = 0, \quad (6.8)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, \omega) |\{0\}\rangle = |\mathbf{1}_{\sigma}(\mathbf{r}, \omega)\rangle, \quad (6.9)$$

y cumplen relaciones de conmutación bosónicas. Los coeficientes eléctrico y magnético,

$$\mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = i \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\frac{\hbar \varepsilon_0}{\pi} \text{Im} \varepsilon(\omega)} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \quad (6.10)$$

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\hbar}{\pi \mu_0} \frac{\text{Im} \mu(\omega)}{|\mu(\mathbf{r}', \omega)|^2}} [\nabla' \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)]^T, \quad (6.11)$$

respectivamente, se derivan del tensor de Green electromagnético \mathbf{G} . El mismo está definido como la solución formal de la ecuación de Helmholtz homogénea que surge de las leyes de Ampère y de Faraday, complementadas con condiciones de contorno nulas en $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. [55] El tensor \mathbf{G}_σ cumple la siguiente relación integral:

$$\sum_\sigma \int d\mathbf{s} \mathbf{G}_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) \cdot \mathbf{G}_\sigma^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{\hbar \mu_0 \omega^2}{\pi} \text{Im} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega). \quad (6.12)$$

Calcular la varianza de $\hat{\mathbf{E}}$ usando la relación anterior e invocar el teorema de fluctuación-disipación nos revela que la respuesta lineal del campo electromagnético es $\mu_0 \omega^2 \mathbf{G}$. Para poder eventualmente evaluar la fuerza, el tensor de Green tiene que especificarse de acuerdo a la geometría y a las propiedades del material que conforman el medio sólido. Utilizaremos un modelo local para el dieléctrico (es decir, asumiremos que su permitividad depende sólo de la frecuencia), y utilizaremos el límite no retardado del tensor de Green para el campo reflejado por el semiespacio [55]:

$$\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{r_p(\omega) c^2}{8\pi^2 \omega^2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}^\parallel}{k^\parallel} (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}^*) e^{i\mathbf{k}^\parallel \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k^\parallel (z + z')}. \quad (6.13)$$

El mismo describe el *scattering* de las excitaciones del campo asistidas por el medio en el régimen de campo cercano, de frecuencia ω y vector de onda

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}^\parallel, ik^\parallel) = (k^\parallel \cos \phi, k^\parallel \sin \phi, ik^\parallel). \quad (6.14)$$

La reflexión está gobernada por el coeficiente de reflexión de Fresnel $r_p(\omega)$ para radiación TM de frecuencia ω , que en el límite no-retardado resulta

$$r_p(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1}, \quad (6.15)$$

siempre y cuando la permitividad $\varepsilon(\omega)$ sea local y dispersiva.

El último término del Hamiltoniano (6.1) describe la interacción entre el átomo y el campo dentro de la aproximación dipolar. El dipolo atómico \mathbf{d} ha sido expandido en la base de estados atómicos:

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_{m,n} \mathbf{d}_{mn} |m\rangle \langle n| = \sum_{m,n} \mathbf{d}_{mn} \hat{A}_{mn}. \quad (6.16)$$

La fuerza que actúa sobre el átomo es

$$\mathbf{F}(t) = \langle \hat{\mathbf{d}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A) \rangle. \quad (6.17)$$

Como ya ha sido estudiado en la Ref. [17], la fuerza depende crucialmente de la trayectoria del átomo. En el enfoque Markoviano (Sec. 6.3), la misma puede asumirse aproximadamente recta y uniforme

$$\mathbf{r}_A - \mathbf{r}'_A \simeq \mathbf{v}_A(t - t'), \quad (6.18)$$

en escalas temporales similares al tiempo de auto-correlación del campo. Dentro del enfoque perturbativo (Sec. 6.4), asumiremos que el átomo está en reposo para tiempos $t < 0$, y que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}_A = v(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, $v > 0$, para tiempos $t > 0$. Este tipo de trayectoria en la que la partícula se pone en movimiento abruptamente es precisamente la que fue utilizada en Ref. [15] para el caso de movimiento paralelo. Notemos nuevamente que este movimiento uniforme prescrito debe ser mantenido por una fuerza externa que contrarreste la fuerza de fricción cuántica. Para $t < 0$ el átomo está ubicado en $\mathbf{r}_A(t < 0) = (x_0, y_0, z_0)$, mientras que para $t > 0$ su trayectoria está dada por

$$\mathbf{r}_A(t) = (x_0 + vt \sin \theta, y_0, z_0 + vt \cos \theta). \quad (6.19)$$

Notemos que $\theta = \pm\pi/2$ corresponde al caso de movimiento paralelo, $\theta = \pi$ al caso de movimiento vertical dirigido hacia el plano, y $\theta = 0$ indicaría movimiento vertical alejándose del plano. Trayectorias que consideraran, por ejemplo, una aceleración continua de cero a la velocidad constante final sobre un cierto intervalo temporal, han sido consideradas en la Ref. [17] para el caso de movimiento paralelo, y podrían ser implementadas de manera análoga para nuestro caso de movimiento en dirección arbitraria. Sin embargo, por simplicidad, en este capítulo sólo consideraremos la trayectoria que hemos descrito más arriba, en la que el movimiento del átomo comienza de manera abrupta.

6.3. Enfoque Markoviano

En primer lugar, resolveremos la dinámica interna del átomo por medio de la ecuación maestra de Markov. Esto nos permitirá inferir las correlaciones del dipolo atómico via la hipótesis de regresión cuántica de Lax-Onsager [58], la cual se ha demostrado que se cumple como un teorema para procesos de Markov [59]. Las correlaciones dipolares obtenidas de esta manera eventualmente nos permiten evaluar la fuerza de fricción cuántica.

6.3.1. Dinámica atómica interna

Empleando la aproximación de Born-Oppenheimer, asumiremos que la dinámica interna rápida del átomo se desacopla efectivamente del movimiento lento de su centro de masa, de modo que podemos resolver la dinámica interna del átomo para una posición \mathbf{r}_A y un momento \mathbf{p}_A , arbitrarios pero fijos. Posteriormente, la fuerza que determina el cambio en ese momento puede ser calculada para una dada dinámica interna. La misma está capturada en la evolución de los operadores de volteo \hat{A}_{mn} . En esta Subsección resolveremos la ecuación de Heisenberg correspondiente, mostrando que la misma resulta en tasas de decaimiento espontáneo y autofrecuencias dependientes de la velocidad. Notemos que, obviamente, el Hamiltoniano completo incluye al campo que rodea el átomo: luego trazaremos sobre este entorno, encontrando que genera una dinámica disipativa.

En cualquier instante temporal, el Hamiltoniano completo puede ser descompuesto como en (6.1). Los operadores puramente atómicos \hat{A}_{mn} conmutan a tiempos iguales con la contribución del campo (6.3), debido a que viven en subespacios ortogonales del espacio de Hilbert total. El conmutador con el Hamiltoniano atómico (6.2) resulta en las autofrecuencias ‘desnudas’, es decir, en ausencia del campo EM, mientras que el conmutador con el Hamiltoniano de interacción (6.4) resultará en el corrimiento de Lamb y las tasas de Einstein:

$$\dot{\hat{A}}_{mn}(t) = i\omega_{mn}\hat{A}_{mn} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_{mn}(t), \hat{H}_{\text{AF}}(t)]. \quad (6.20)$$

Esta ecuación diferencial puede ser formalmente resuelta y re-insertada en sí misma *ad infinitum*. Este procedimiento resulta en una expansión tipo Dyson, basándose en la cual uno puede diseñar una serie de soluciones aproximadas $\hat{A}_{mn}^{(k)}$ (con k par), que convergen a las soluciones exactas cuando $k \rightarrow \infty$. El k -ésimo elemento de esta serie es de orden \mathbf{d}^k . Esto implica que su dinámica comprende la re-absorción de fotones reflejados hasta $k/2$ veces. En lo que sigue no consideraremos reflexiones múltiples, por lo que resolveremos la dinámica hasta orden $k = 2$. De este modo podemos escribir

$$\dot{\hat{A}}_{mn}^{(2)}(t) = \dot{\hat{A}}_{mn}^{(0)}(t) + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_{mn}^{(0)}(t), \hat{H}_{\text{AF}}^{(2)}(t)], \quad (6.21)$$

$$\hat{H}_{\text{AF}}^{(2)}(t) = - \sum_{mn} \hat{A}_{mn}^{(0)}(t) \mathbf{d}_{mn} \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(1)}(\mathbf{r}_A, t). \quad (6.22)$$

Notemos que $\hat{\mathbf{E}}^{(1)}$ denota el campo libre más el campo inducido por un átomo descrito por $\hat{A}_{mn}^{(0)}$. Esto significa que, para poder resolver la dinámica interna del átomo,

es necesario resolver la dinámica del campo EM. Comenzando con la ecuación de Heisenberg para el operador $\hat{\mathbf{f}}_\sigma$ y utilizando la relación integral (6.12), se llega a (ver [55] para más detalles)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}^{(1)}(\mathbf{r}_A, t) = & \sum_\sigma \int d\mathbf{r} \int_0^\infty d\omega \mathbf{G}_\sigma(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}_\sigma(\mathbf{r}, \omega) \\ & + \frac{i\mu_0}{\pi} \sum_{mn} \int_{t_0}^t \int_0^\infty d\omega \omega^2 e^{i\omega_{mn}(t-t')} \text{Im} \mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_A, \omega) \cdot \mathbf{d}_{mn} \hat{A}_{mn}^{(0)}(t') + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde la ausencia de argumentos indica el tiempo inicial t_0 , y las cantidades primadas están evaluadas en t' . Aquí el primer término es el campo libre, es decir, el campo electromagnético en ausencia del átomo (pero en presencia de la placa), mientras que el segundo término es el campo fuente creado por el átomo.

Reemplazando el campo anterior en (6.22) se vuelve evidente el hecho de que el proceso de interacción toma en cuenta la re-absorción de un ‘fotón’ (utilizaremos el término fotón para referirnos a las excitaciones del campo EM asistidas por el medio) reflejado que ha sido emitido por el átomo a un tiempo t' en la historia, es decir, la interacción dipolar entre $\mathbf{d}(t)$ y $\mathbf{d}(t')$. Cada uno de estos fotones reflejados acumula una fase $i\omega_{mn}(t-t')$ cuando viaja desde la posición en la que fue creado, \mathbf{r}'_A , hasta su posición final \mathbf{r}_A , donde eventualmente interfiere con otros de su clase, de acuerdo a sus respectivas fases relativas.

Insertando (6.23) dentro del valor medio normalmente ordenado de (6.21), obtenemos la dinámica reducida de los grados de libertad internos del átomo, que resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas. Para desacoplarlas, es necesario realizar algunas consideraciones. En primer lugar, asumiremos que el átomo no presenta transiciones quasi-degeneradas: es decir, no hay transiciones para las cuales $\omega_{mn} \approx \omega_{nk}$ si los estados involucrados no pertenecen al mismo multiplete. Supondremos, además, que los autoestados de energía están despolarizados, es decir, que $\mathbf{d}_{nn} = 0$, y que los estados degenerados de un mismo multiplete no están conectados por transiciones dipolares, es decir, $\mathbf{d}_{nn'} = 0$. Estas condiciones están garantizadas por las reglas de selección atómicas usuales.

Bajo las condiciones enumeradas en el párrafo anterior, la dinámica efectiva de los operadores de volteo no-diagonales, rápidamente oscilantes, se desacopla de manera efectiva de los operadores diagonales, que no son oscilantes, y del resto de los operadores no-diagonales, siempre que el acoplamiento sea débil. Esto da como resultado

ecuaciones cerradas para la dinámica interna del átomo, que incluye los efectos de la dinámica del campo EM

$$\langle \dot{\hat{A}}_{mn}^{(2)}(t) \rangle = i\omega_{mn} \langle \hat{A}_{mn}^{(2)}(t) \rangle - \sum_k [C_{nk}(t) + C_{mk}^*(t)] \langle \hat{A}_{mn}^{(2)}(t) \rangle, \quad (6.24)$$

con los coeficientes

$$C_{nk} = \frac{\mu_0}{\pi \hbar} \int_{t_0}^t dt' \int_0^\infty d\omega \omega^2 e^{-i(\omega - \omega_{nk})(t-t')} \mathbf{d}_{nk} \cdot \text{Im} \mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_A, \omega) \cdot \mathbf{d}_{kn}. \quad (6.25)$$

Ahora bien, la parte real de C_{nk} genera las tasas de decaimiento espontáneo Γ_n del estado $|n\rangle$, mientras que su parte imaginaria produce correcciones $\hbar\delta\omega_n$ a las autoenergías E_n del átomo libre. Ambos efectos se generan a partir de la interacción del átomo con el campo:

$$\delta\omega_n = \sum_k \delta\omega_{nk} = \sum_k \text{Im} C_{nk}, \quad (6.26)$$

$$\Gamma_n = \sum_k \Gamma_{nk} = 2 \sum_k \text{Re} C_{nk}. \quad (6.27)$$

La integración sobre t' en (6.25) involucra al tensor de Green via \mathbf{r}'_A , y la exponencial oscilatoria describe una excitación del campo de frecuencia ω_{nm} viajando de \mathbf{r}'_A a \mathbf{r}_A . Pensando en el efecto Doppler, la distancia espacial entre el origen del fotón y su destino puede escribirse como un corrimiento en frecuencia. Bajo las condiciones de (a) movimiento uniforme en escalas del tiempo de autocorrelación del campo y (b) t mucho mayor que dichos tiempos, tomando el límite $t_0 \rightarrow -\infty$ (es decir, una aproximación Markoviana) y utilizando el tensor de Green no retardado (6.13), podemos llegar al siguiente resultado para las contribuciones resonante (es decir, con el campo oscilando a la frecuencia de transición del átomo) y no resonante, respectivamente, a los coeficientes de Heisenberg (6.25). Los detalles de este cálculo pueden hallarse en [21]. Los resultados son:

$$C_{nk}^{\text{res}} = -\frac{i}{8\pi^2 \hbar \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \|k\|^2 d_{nk}^{(\phi)2} r_p(\omega'_{nk}) \Theta(\omega'_{nk}) e^{-2k \|z_A(t)} \quad (6.28)$$

$$C_{nk}^{\text{mres}} = \frac{i}{8\pi^3 \hbar \varepsilon_0} \int_0^\infty d\xi \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \|k\|^2 d_{nk}^{(\phi)2} \frac{\omega'_{nk} r_p(i\xi)}{(\omega'_{nk}{}^2 + \xi^2)} e^{-2k \|z_A(t)}, \quad (6.29)$$

donde hemos utilizado la notación compacta

$$d_{nk}^{(\phi)2} = \mathbf{d}_{nk} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & -i \cos \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi & -i \sin \phi \\ i \cos \phi & i \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}_{nk}, \quad (6.30)$$

y definimos la frecuencia con un corrimiento de Doppler complejo

$$\omega'_{nk} = \omega_{nk} + vk^{\parallel}(\sin\theta \cos\phi - i \cos\theta). \quad (6.31)$$

La función escalón de Heaviside que aparece en la Ec. (6.28) se debe tomar sólo sobre la parte real de ω'_{nk} .

Sin pérdida de generalidad, el sistema de coordenadas puede elegirse de modo que la componente y de la velocidad sea nula. La dirección de la velocidad atómica \mathbf{v} queda entonces determinada solamente por el ángulo θ entre \mathbf{v} y el eje z . Dependiendo de θ , la frecuencia ω_{nk} puede tener un corrimiento con una componente a lo largo de eje imaginario, lo cual es inusual. El efecto Doppler puede entenderse como el acortamiento/alargamiento del intervalo temporal entre el paso de dos frentes de onda consecutivos por un cierto punto de observación, debido al movimiento relativo entre la fuente de ondas y dicho punto de observación. En nuestro escenario, la fuente es el dipolo atómico a tiempo $t - \tau$ en el pasado, y el punto de observación es la posición del átomo a tiempo t . En el caso en el que el átomo se mueve de forma paralela a la superficie hay frentes de onda reales propagándose en la dirección de movimiento, mientras que en el caso de movimiento perpendicular, en el régimen no retardado, sólo hay ondas evanescentes a lo largo de la dirección de movimiento. Las mismas no poseen un frente de onda bien definido y por lo tanto la intuición típica del efecto Doppler no se aplica. Así como las ondas evanescentes están caracterizadas por un vector de onda complejo, el corrimiento Doppler que encontramos en el caso del movimiento vertical tiene una componente a lo largo del eje imaginario. Lógicamente, lo mismo ocurre en cualquier dirección intermedia, con la componente imaginaria del corrimiento Doppler volviéndose más pequeña a medida que uno se acerca al movimiento paralelo, en el cual se anula por completo. Por último, vale la pena enfatizar que como estamos utilizando la forma no-retardada del tensor de Green, todos los resultados que encontremos serán válidos siempre y cuando el átomo se mantenga dentro de la zona de campo cercano.

Las expresiones (6.28) y (6.29) para las contribuciones resonante y no resonante a la dinámica interna de un átomo moviéndose frente a un semi-espacio son válidas para un movimiento rectilíneo en cualquier dirección arbitraria. Sin embargo, estos resultados provienen de una expansión en serie de potencias (ver Ref. [21]) cuyo radio de convergencia es $v/(z_A(t)\omega_{nk})$, por lo que debe cumplirse la condición $v < z_A(t)\omega_{nk}$ para que estos resultados sean válidos. Esto significa que la velocidad macroscópica debe ser siempre menor que la velocidad ‘microscópica’ que caracteriza a la dinámica interna.

Los corrimientos y tasas para el fenómeno de Casimir-Polder estático pueden ser re-obtenidos reemplazando las frecuencias primadas, es decir, con corrimiento de Doppler, por sus contrapartes sin corrimiento ω_{nk} , lo cual es equivalente a considerar sólo términos de orden cero en la velocidad relativa. Para velocidades finitas, las integrales en (6.28) y (6.29) pueden ser resueltas numéricamente. En el caso de movimiento paralelo, debido a la simetría rotacional del sistema, los corrimientos y las tasas varían sólo cuadráticamente con la velocidad del átomo. Para otras direcciones, la variación es lineal, por lo que las correcciones dinámicas a los corrimientos y tasas estáticos son significativamente mayores si el átomo se mueve de manera perpendicular a la superficie.

Debido a que vamos a necesitarlos más adelante, terminaremos esta Subsección dando los resultados para la tasa de decaimiento y el corrimiento no-resonante para el caso de un átomo descrito como un sistema de dos niveles, isotrópico y que está inicialmente en su estado fundamental:

$$\Gamma_0^{(\theta=\frac{\pi}{2})} = \frac{d^2}{2\pi^2\hbar\varepsilon_0} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d^2k^\parallel k^\parallel e^{-2k^\parallel z_0} \text{Im } r_p(\omega) \delta(\omega + \omega_{10} - k^\parallel v \cos \phi), \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(\theta \neq \frac{\pi}{2})} &\simeq -\frac{3d^2 v \cos \theta}{8\pi^2 \hbar \varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im } r_p(\omega)}{(\omega + \omega_{10})^2} \\ &= \frac{3d^2 v \cos \theta}{8\pi^2 \hbar \varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2 - \omega_{10}^2}{(\xi^2 + \omega_{10}^2)^2} r_p(i\xi), \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega_0 &\simeq -\frac{d^2}{8\pi^2 \hbar \varepsilon_0 z_A^3(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im } r_p(\omega)}{\omega + \omega_{10}} \left[1 - \frac{3v^2(1 + 3\cos 2\theta)}{4(\omega + \omega_{10})^2 z_A^2(t)} \right] \\ &= -\frac{d^2}{8\pi^2 \hbar \varepsilon_0 z_A^3(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_{10}}{\omega_{10}^2 + \xi^2} r_p(i\xi) \left[1 - \frac{3v^2(\omega_{10}^2 - \xi^2)(1 + 3\cos 2\theta)}{4(\omega_{10}^2 + \xi^2)^2 z_A^2(t)} \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Notemos que en este caso las tasas implican una excitación espontánea del átomo. En el caso paralelo, el proceso siempre es resonante, debido a la función delta que aparece al tomar el límite de tiempos largos (ver [17]).

6.3.2. Fuerzas de Casimir-Polder y de Fricción

Luego de haber resuelto la dinámica interna del átomo para una velocidad arbitraria pero fija de su centro de masa, estamos en condiciones de resolver la dinámica Newtoniana del átomo para valores fijos pero arbitrarios de sus frecuencias de transición

y tasas de decaimiento/excitación espontánea. La fuerza que determina la dinámica de Newton del átomo puede ser descompuesta en F_v , su proyección en la dirección de movimiento, y una componente ortogonal. Mientras que aquella desacelera al átomo, la última cambia su dirección de movimiento. Como estamos interesados en los efectos disipativos, estudiaremos a la fuerza en la dirección del movimiento del átomo, calculada como la derivada direccional del campo en la dirección de la velocidad (es decir, la proyección del gradiente en la dirección de \mathbf{v}). El campo eléctrico que se necesita para calcular la fuerza (6.17) ya ha sido determinado en (6.23). Insertándolo en al expresión para la fuerza y aplicando orden normal, llegamos a

$$F_v(t) = \frac{i\mu_0}{\pi} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\omega \omega^2 e^{-i\omega\tau} \nabla_v \langle \mathbf{d}(t) \cdot \text{Im} \mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_A, \omega) \cdot \mathbf{d}(t - \tau) \rangle + \text{h.c.} \quad (6.35)$$

La ecuación anterior muestra explícitamente la dependencia de la fuerza con las funciones de auto-correlación del dipolo atómico. Dentro de la aproximación de Markov, la función de correlación que necesitamos puede inferirse via la hipótesis de regresión cuántica de Lax [58, 59] y resulta

$$\langle \mathbf{d}(t) \mathbf{d}(t - \tau) \rangle = \sum_{nk} \mathbf{d}_{nk} \mathbf{d}_{kn} p_n(t) e^{[i\omega_{nk} - \frac{1}{2}(\Gamma_n + \Gamma_k)]\tau}, \quad (6.36)$$

donde $p_n(t) \equiv \langle A_{nn}(t) \rangle$ es la población del estado atómico $|n\rangle$. Insertando la Ec. (6.36) en la expresión para la fuerza (6.35), y restringiéndonos al régimen no retardado, encontramos que la fuerza de fricción se descompone en contribuciones asociadas a los distintos niveles de energía del átomo, cada una pesada por la población p_n de ese nivel:

$$F_v(t) = \sum_{nk} p_n(t) F_{nk}(t). \quad (6.37)$$

Los sumandos están dados por:

$$F_{nk}(t) = -\frac{1}{4\pi^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \|\mathbf{k}\|^3 e^{-2k\|z_A(t)\|} d_{nk}^{(\phi)2} \times \frac{(\omega + \Omega'_{kn}) \cos \theta + \frac{1}{2}(\Gamma'_n + \Gamma'_k) \sin \theta \cos \phi}{(\omega + \Omega'_{kn})^2 + \frac{1}{4}(\Gamma'_n + \Gamma'_k)^2} \text{Im} r_p(\omega), \quad (6.38)$$

donde Ω_{nk} incluye los corrimientos en energía calculados anteriormente (6.26),

$$\Omega_{nk} = \omega_{nk} + \delta\omega_n - \delta\omega_k, \quad (6.39)$$

y los corrimientos y tasas de decaimiento primados llevan corrimientos Doppler:

$$\Omega'_{nk} = \Omega_{nk} - vk^{\parallel} \sin \theta \cos \phi, \quad (6.40)$$

$$\Gamma'_{nk} = \Gamma_{nk} - vk^{\parallel} \cos \theta. \quad (6.41)$$

Como ya mencionamos anteriormente, nos concentraremos a partir de ahora en el caso en el que el átomo está en su estado fundamental a $t = 0$, es decir, $p_n(0) = \delta_{n,0}$, y sólo consideraremos su primer excitado al calcular la fuerza, de modo que $F_v(t) = F_{01}(t)$: es decir consideraremos que el átomo es un sistema de dos niveles, modelo que se utiliza frecuentemente en la literatura. Simplificaremos la notación, dejando de escribir los subíndices referentes a los estados inicial y final, de modo que $\Omega \equiv \Omega_{10}$ y $\Gamma \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_0 + \Gamma_1)$. La fuerza total que actúa sobre el átomo puede descomponerse en un término resonante - que proviene del polo en la integración sobre ω - y un término no resonante:

$$F_v^{\text{res}}(t) = -\frac{1}{4\pi^2 \varepsilon_0} \text{Re} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dk^{\parallel} k^{\parallel 3} e^{-2k^{\parallel} z_A(t)} d^{(\phi)2} \\ \times (\cos \theta - i \sin \theta \cos \phi) r_p(-\Omega' + i\Gamma') \Theta(-\Omega'), \quad (6.42)$$

$$F_v^{\text{nr}}(t) = -\frac{1}{4\pi^3 \varepsilon_0} \text{Re} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dk^{\parallel} k^{\parallel 3} e^{-2k^{\parallel} z_A(t)} d^{(\phi)2} \\ \times (\cos \theta - i \sin \theta \cos \phi) \int_0^{\infty} d\xi \frac{\Omega' - i\Gamma'}{(\Omega' - i\Gamma')^2 + \xi^2} r_p(i\xi). \quad (6.43)$$

Debido a la función escalón de Heaviside, la fuerza resonante sólo es finita si la energía con corrimiento de Doppler $\hbar vk^{\parallel}$ es lo suficientemente grande como para superar el *gap* entre el estado fundamental y el primer excitado. La fuerza de fricción resonante proviene de una excitación tipo Cherenkov del átomo y está exponencialmente suprimida debido a la restricción en k^{\parallel} impuesta por la Θ [17]. Por esta razón, despreciaremos este término y nos enfocaremos en la fuerza de fricción no-resonante en lo que sigue.

La dependencia en velocidad de esta fuerza no resonante (6.43) proviene de dos lugares de distinta naturaleza. Por un lado, hay una dependencia en v que surge del corrimiento Doppler de las frecuencias Ω' y las tasas de decaimiento Γ' , que llamaremos dependencia *explícita*. Por otro lado, $\delta^v C_{nk}$ también depende de la velocidad, y esta dependencia *implícita* está incluida en la frecuencia y la tasa sin corrimientos (Ω y Γ) mediante los coeficientes

$$C_{nk} = C_{nk}|_{v=0} + \delta^v C_{nk}, \quad (6.44)$$

dados en (6.25). Considerando ambos tipos de dependencia podemos escribir la fuerza sobre el átomo hasta orden lineal en v , y resulta

$$\begin{aligned}
F_v(t) &\simeq -\frac{3d^2}{8\pi^2\varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{(\omega + \Omega) \operatorname{Im} r_p(\omega)}{(\omega + \Omega)^2 + \Gamma^2} \\
&\times \left[\cos \theta + \frac{2v\Gamma(1 + \cos^2 \theta)}{z_A(t)[(\omega + \Omega)^2 + \Gamma^2]} - (\delta^v C_{01}^* + \delta^v C_{10}) \cos \theta \right] \\
&= -\frac{3d^2}{8\pi^2\varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\Omega(\Omega^2 + \Gamma^2 + \xi^2) r_p(i\xi)}{(\Omega^2 + \Gamma^2 - \xi^2)^2 + 4\Omega^2 \xi^2} \\
&\times \left[\cos \theta + \frac{2v\Gamma(1 + \cos^2 \theta)}{z_A(t)[(\omega + \Omega)^2 + \Gamma^2]} - (\delta^v C_{01}^* + \delta^v C_{10}) \cos \theta \right].
\end{aligned} \tag{6.45}$$

El primer sumando da la fuerza de Casimir-Polder estática proyectada en la dirección de movimiento. El segundo sumando contiene la dependencia explícita en la velocidad, y el tercero la implícita.

Como una manera de conectar nuestros dos enfoques entre sí, y de anclar nuestros resultados a resultados previos, deduciremos en primer lugar la fuerza de Casimir-Polder estática hasta orden d^2 , a partir de la expresión (6.45). Para hacerlo, omitiremos la tasa de decaimiento así como las correcciones $\delta\omega_0$ a la frecuencia desnuda ω_{10} , y tomaremos $v = 0$. Si el átomo está preparado de forma isotrópica, es decir, si $d_x = d_y = d_z \equiv d$, obtenemos

$$F_{\text{CP}}^{(2)}(t) = -\frac{3d^2 \cos \theta}{8\pi^2\varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\operatorname{Im} r_p(\omega)}{\omega + \omega_{10}} = -\frac{3d^2 \cos \theta}{8\pi^2\varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_{10} r_p(i\xi)}{\omega_{10}^2 + \xi^2}. \tag{6.46}$$

El coseno proviene de la proyección de la fuerza en la dirección de movimiento. Si la trayectoria del átomo es elegida de modo que se dirija hacia el plano, y por lo tanto $\cos \theta < 0$, la proyección de la fuerza de Casimir-Polder en la dirección de la velocidad es positiva, como debería ser.

La primer contribución no trivial en v a la fuerza de fricción, de acuerdo a la Ec. (6.45), está dada por

$$\begin{aligned}
F_{\text{fr}}(t) &\simeq -\frac{3d^2}{8\pi^2\varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\operatorname{Im} r_p(\omega)}{\omega + \Omega} \left[\frac{v\Gamma_1(1 + \cos^2 \theta)}{z_A(t)(\omega + \Omega)^2} - (\delta^v C_{01}^* + \delta^v C_{10}) \cos \theta \right] \\
&= -\frac{3d^2}{8\pi^2\varepsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\Omega r_p(i\xi)}{\Omega^2 + \xi^2} \left[\frac{v\Gamma_1(\Omega^2 - 3\xi^2)(1 + \cos^2 \theta)}{z_A(t)(\Omega^2 + \xi^2)^2} - (\delta^v C_{01}^* + \delta^v C_{10}) \cos \theta \right].
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Llegados a este punto, es pertinente hacer algunas aclaraciones. Primero y más importante, notemos que la expresión anterior es correcta sólo hasta orden d^4 debido a que sólo hemos determinado hasta orden d^2 la dinámica interna del átomo, que entra dentro de la fuerza. Por otro lado, la dependencia *implícita* con la velocidad sólo contribuye a la fuerza para el caso no paralelo, pues está pesada con un factor $\cos\theta$. Por último, notemos que aunque la contribución principal en órdenes de v es lineal, este orden lineal en la fuerza es de orden cuártico en el momento dipolar. Si sólo considerásemos términos de orden d^2 , la fuerza de fricción se anularía a orden v , debido a que $\Gamma_1 = \delta^v C_{01} = 0$. Puede mostrarse que a nivel d^2 para movimiento paralelo, la fuerza no resonante es estrictamente nula para todo orden en la velocidad atómica. Para cualquier otra dirección de movimiento, el orden dominante en v a orden d^2 resulta:

$$F_{\text{fr}}^{(2)}(t) \simeq \frac{15 d^2 v^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 z_A^6(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_{10}(\omega_{10}^2 - 3\xi^2)}{(\omega_{10}^2 + \xi^2)^3} r_p(i\xi)(1 + \cos^2\theta) \cos\theta,$$

es decir, es cuadrática en la velocidad atómica.

De lo calculado hasta aquí podemos encontrar una primera respuesta a la pregunta inicial de si la fricción cuántica sería cualitativamente diferente en un movimiento no paralelo. Hasta segundo orden en la constante de acoplamiento, la respuesta es que sí. Mientras que la fuerza a orden d^2 está exponencialmente suprimida (como vimos arriba y ha sido mostrado en la Ref. [17]), un átomo en movimiento no paralelo experimenta una fuerza que no está suprimida, sino que depende cuadráticamente de la velocidad. Miremos con un poco más de detalle el origen de esta discrepancia. A nivel d^2 , la integral temporal que aparece en la fuerza para movimientos paralelos tiene la forma

$$\text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega + \Omega - k^{\parallel}v)\tau} = \delta(\omega + \Omega - k^{\parallel}v). \quad (6.48)$$

Como ilustramos anteriormente, esta condición de resonancia fuerza una restricción en el vector de onda que luego genera una supresión exponencial. Para el caso del movimiento vertical, sin embargo, la integral temporal que entra en la fuerza de fricción a orden d^2 es

$$-\text{Im} \int_0^\infty d\tau e^{-[i(\omega + \Omega) + k^{\parallel}v]\tau} = \frac{\omega + \Omega}{(\omega + \Omega)^2 + (k^{\parallel}v)^2}. \quad (6.49)$$

En lugar de una condición de resonancia aguda en el sistema comóvil, forzada por una delta de Dirac, encontramos aquí una Lorentziana cuyo ancho está dado por la velocidad. La Lorentziana es, evidentemente, cuadrática en v . Esta consideración básica revela también la manera en la que aparece el orden lineal en v en la fuerza de fricción Markoviana a orden d^4 : allí aparece la misma Lorentziana, pero con un ancho que está dado por la suma de la velocidad y las tasas de decaimiento espontáneo del átomo. Las últimas, entonces, aumentan el grosor de la Lorentziana de manera lineal. Notemos que esta diferencia cualitativa entre la fricción en movimientos paralelos y verticales está íntimamente relacionada con la naturaleza evanescente de las ondas en el régimen de campo cercano.

Por último, notemos que en la expresión (6.48) no resulta evidente cuál es el sentido de la fuerza. Un análisis más cuidadoso de dicha ecuación revela que la integración de $(\omega_{10}^2 - 3\xi^2)/(\omega_{10}^2 + \xi^2)^3$ entre cero e infinito se anula idénticamente, pues la contribución positiva de las frecuencias imaginarias chicas equilibra exactamente la contribución negativa de las frecuencias imaginarias grandes. Como $r_p(i\xi)$ es estrictamente positivo y monótonamente decreciente, la integral total sobre frecuencias imaginarias resulta positiva. Para trayectorias en las que el átomo se mueve hacia el plano ($\cos\theta < 0$), la proyección de la fuerza de fricción en la dirección de la velocidad es negativa y contrarresta el movimiento.

6.4. Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo

En esta Sección utilizaremos la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo para calcular la fuerza de fricción cuántica que actúa sobre un átomo que se mueve a velocidad constante en una dirección arbitraria frente a un plano dieléctrico. Seguiremos de cerca el enfoque usado en las Referencias [15, 17]. Para ello modificaremos levemente el marco matemático que hemos introducido en la Sección 6.2. En primer lugar, nuestros cálculos a partir de ahora serán realizados en la representación de interacción, y no en la de Heisenberg. Inspirándonos en los niveles atómicos $1s$ y $1p$ del átomo de hidrógeno, tomaremos ahora que los estados de menor energía del átomo serán el estado fundamental $|g\rangle$ y tres estados excitados degenerados $|\boldsymbol{\eta}\rangle$. El vector unitario $\boldsymbol{\eta}$ se debe tomar de un conjunto $\{\boldsymbol{\eta}\}$ que forma una base ortonormal real. Como antes, llamaremos ω_{10} a la frecuencia de transición desnuda entre los niveles, y consideraremos que el átomo interactúa con el campo EM a través de su momento

dipolar eléctrico $\hat{\mathbf{d}}(t)$, cuyos elementos de matriz no nulos en la representación de interacción son $\langle g | \hat{\mathbf{d}}(t) | \boldsymbol{\eta} \rangle = \boldsymbol{\eta} d e^{-i\omega_{10}t}$ y $\langle \boldsymbol{\eta} | \hat{\mathbf{d}}(t) | g \rangle = \boldsymbol{\eta} d e^{i\omega_{10}t}$.

Como mencionamos en la Sección 6.2, asumiremos que para $t < 0$ el átomo está estático a una distancia z_0 de la superficie, y que para $t > 0$ su distancia a la superficie varía como $z_A(t) = z_0 + vt \cos \theta$. Al igual que en el enfoque Markoviano que discutimos en la Sección anterior, asumiremos aquí $z_A(t)$ se encuentra siempre dentro de la zona de campo cercano, sin importar si el átomo se mueve hacia la superficie o se aleja de ella. De aquí que el operador de campo eléctrico pueda escribirse como [15, 17]

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A) = \int d^2 \mathbf{k}^{\parallel} \int_0^{\infty} d\omega \, i \mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}^{\parallel} \omega} \psi_{\mathbf{k}^{\parallel} \omega} e^{i \mathbf{k}^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_A^{\parallel}(t) - i\omega t - k^{\parallel} z_A(t)} + \text{h.c.} \quad (6.50)$$

Aquí, $\hat{a}_{\mathbf{k}^{\parallel} \omega}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}^{\parallel} \omega}^{\dagger}$ son operadores de creación/destrucción bosónicos (que corresponden básicamente a las transformadas de Fourier 2D de los operadores $\mathbf{f}_e^{\dagger}(\mathbf{r}, \omega)$ de la Sec.. 6.2), y $\psi_{\mathbf{k}^{\parallel} \omega}$ son las amplitudes de plasmones complejas, cuyos módulos cuadrados son:

$$|\psi_{\mathbf{k}^{\parallel} \omega}|^2 = (\hbar / (8\pi^3 \varepsilon_0 k^{\parallel})) \text{Im} r_p(\omega). \quad (6.51)$$

Notemos que difieren en un factor $\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$ con respecto a las referencias que mencionamos anteriormente. Esto se debe al uso de diferentes sistemas de unidades: aquí usamos unidades SI mientras que en aquellas referencias se utilizaron unidades Gaussianas.

Asumiremos que el estado inicial del sistema es el átomo en su estado fundamental y ningún fotón, es decir, $|\psi(0)\rangle = |g; \text{vac}\rangle$. Como en [17], expresaremos el estado conjunto del átomo y el campo (campo cuyas excitaciones están mediadas por la presencia de la placa, es decir, no son realmente fotones libres, como ya mencionamos) en una expansión perturbativa en la constante de acoplamiento d . Hasta tercer orden, está dada por

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle \simeq & \left(1 + c_0^{(2)}(t)\right) |g; \text{vac}\rangle + \sum_{\boldsymbol{\eta}} \int d^3 \kappa \left(c_1^{(1)}(t) + c_1^{(3)}(t)\right) |\boldsymbol{\eta}; \kappa\rangle \\ & + \frac{1}{2} \int d^3 \kappa_1 \int d^3 \kappa_2 c_2^{(2)}(t) |g; \kappa_1, \kappa_2\rangle, \end{aligned} \quad (6.52)$$

donde los coeficientes $c_n^{(p)}(t)$ denotan las amplitudes de transición para estados con n fotones en el p -ésimo orden perturbativo, y pueden ser obtenidos utilizando las técnicas habituales de la teoría de perturbaciones de la mecánica cuántica. Necesitamos

computar el estado hasta tercer orden para poder evaluar la fuerza hasta cuarto orden en la constante de acoplamiento. Arriba hemos utilizado la notación compacta $\kappa = \{\mathbf{k}^{\parallel}, \omega\}$, y las integrales $\int d^3\kappa = \int d^2\mathbf{k}^{\parallel} \int_0^{\infty} d\omega$.

El valor de expectación en el estado $|\psi(t)\rangle$ del operador fuerza a lo largo de la dirección de movimiento, $\hat{F}_v = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{F}}/v = \sin\theta\hat{F}_x + \cos\theta\hat{F}_z$, está dado por

$$F_v(t) = 2\text{Re} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \left\{ \int d^3\kappa \langle g; \text{vac} | \hat{F}_v | \boldsymbol{\eta}; \kappa \rangle \left[c_1^{(1)}(t) + c_0^{(2)*}(t)c_1^{(1)}(t) + c_1^{(3)}(t) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int d^3\kappa d^3\kappa_1 d^3\kappa_2 \langle \boldsymbol{\eta}; \kappa | \hat{F}_v | g; \kappa_1, \kappa_2 \rangle c_1^{(1)*}(t)c_2^{(2)}(t) \right\}, \quad (6.53)$$

válido hasta cuarto orden en la constante de acoplamiento. Los elementos de matriz relevantes del Hamiltoniano de interacción son

$$\langle g; \text{vac} | \hat{H}_{\text{AF}} | \boldsymbol{\eta}; \kappa \rangle = id(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k})\psi_{\kappa} \\ \times e^{-i(\omega_{10}+\omega)t+i\mathbf{k}^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_A^{\parallel}(t)-k^{\parallel}z_A(t)}, \quad (6.54)$$

$$\langle \boldsymbol{\eta}; \kappa | \hat{H}_{\text{AF}} | g; \kappa_1, \kappa_2 \rangle = id(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k}_1)\psi_{\kappa_1} \\ \times e^{i(\omega_{10}-\omega_1)t+i\mathbf{k}_1^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_A^{\parallel}(t)-k_1^{\parallel}z_A(t)}\delta^3(\kappa - \kappa_2) + (1 \leftrightarrow 2), \quad (6.55)$$

$$\langle \boldsymbol{\eta}; \text{vac} | \hat{H}_{\text{AF}} | g; \kappa \rangle = id(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k})\psi_{\kappa} \\ \times e^{i(\omega_{10}-\omega)t+i\mathbf{k}^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_A^{\parallel}(t)-k^{\parallel}z_A(t)}, \quad (6.56)$$

donde $\delta^3(\kappa - \kappa_1) = \delta^2(\mathbf{k}^{\parallel} - \mathbf{k}_1^{\parallel})\delta(\omega - \omega_1)$. Los elementos de matriz relevantes del operador fuerza pueden ser computados fácilmente. Obtenemos

$$\langle g; \text{vac} | \hat{F}_v | \boldsymbol{\eta}; \kappa \rangle = -idk^{\parallel}(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k})f_{\phi\theta}\psi_{\kappa} \\ \times e^{-i(\omega_{10}+\omega)t+i\mathbf{k}^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_A^{\parallel}(t)-k^{\parallel}z_A(t)}, \quad (6.57)$$

$$\langle \boldsymbol{\eta}; \kappa | \hat{F}_v | g; \kappa_1, \kappa_2 \rangle = -idk_1^{\parallel}(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k}_1)f_{\phi_1\theta}\psi_{\kappa_1} \\ \times e^{i(\omega_{10}-\omega_1)t+i\mathbf{k}_1^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_A^{\parallel}(t)-k_1^{\parallel}z_A(t)}\delta^3(\kappa - \kappa_2) + (1 \leftrightarrow 2), \quad (6.58)$$

con $f_{\phi\theta} = -\cos\theta + i\sin\theta\cos\phi$.

6.4.1. Dinámica atómica interna

En esta Subsección evaluaremos las amplitudes de transición relevantes $c_n^{(p)}(t)$, necesarias para evaluar la fuerza a cuarto orden en teoría de perturbaciones. El coe-

ficiente $c_1^{(1)}(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \boldsymbol{\eta}; \kappa | \hat{H}_{\text{AF}}(t') | g; \text{vac} \rangle \\ &= \frac{id(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k})^* \psi_{\kappa}^*}{\hbar(\omega_{10} + \omega')} e^{-i\mathbf{k}^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_0 - k^{\parallel} z_0} \left[e^{i(\omega_{10} + \omega')t} - 1 \right], \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde hemos definido la frecuencia compleja

$$\omega' = \omega - vk^{\parallel} \cos \phi \sin \theta + ivk^{\parallel} \cos \theta, \quad (6.60)$$

y $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$.

El coeficiente $c_2^{(2)}(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} c_2^{(2)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \int d^3 \kappa \int_0^t dt' c_1^{(1)}(t') \langle g; \kappa_1 \kappa_2 | \hat{H}_{\text{AF}}(t') | \boldsymbol{\eta}; \kappa \rangle \\ &= -\frac{d^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^* \psi_{\kappa_1}^* \psi_{\kappa_2}^*}{\hbar^2} e^{-i(\mathbf{k}_1^{\parallel} + \mathbf{k}_2^{\parallel}) \cdot \mathbf{r}_0 - (k_1^{\parallel} + k_2^{\parallel}) z_0} \left[\frac{e^{i(\omega'_1 + \omega'_2)t} - 1}{\omega'_1 + \omega'_2} \left(\frac{1}{\omega_{10} + \omega'_1} + \frac{1}{\omega_{10} + \omega'_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-i(\omega_{10} - \omega'_1)t} - 1}{(\omega_{10} - \omega'_1)(\omega_{10} + \omega'_2)} + \frac{e^{-i(\omega_{10} - \omega'_2)t} - 1}{(\omega_{10} - \omega'_2)(\omega_{10} + \omega'_1)} \right], \end{aligned} \quad (6.61)$$

con las frecuencias con corrimientos separados

$$\omega'_j = \omega_j - vk_j^{\parallel} \cos \phi_1 \sin \theta + ivk_j^{\parallel} \cos \theta. \quad (6.62)$$

El coeficiente $c_0^{(2)}(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} c_0^{(2)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \int d^3 \kappa \int_0^t dt' c_1^{(1)}(t') \langle g; \text{vac} | \hat{H}_{\text{AF}}(t') | \boldsymbol{\eta}; \kappa \rangle \\ &= -\frac{id^2}{4\pi^3 \hbar \varepsilon_0} \int_0^{\infty} d\omega \text{Im} r_p(\omega) \int d^2 \mathbf{k}^{\parallel} \frac{k^{\parallel} e^{-2k^{\parallel} z_0}}{\omega_{10} + \omega'} \\ &\quad \times \left[\frac{e^{-2k^{\parallel} v \cos \theta t} - 1}{-2k^{\parallel} v \cos \theta} - \frac{e^{-i(\omega_{10} + \omega')t - 2k^{\parallel} v \cos \theta t} - 1}{-i(\omega_{10} + \omega') - 2k^{\parallel} v \cos \theta} \right] \end{aligned} \quad (6.63)$$

Este coeficiente involucra el corrimiento en energía del estado $|g; \text{vac}\rangle$ y la tasa del proceso $|g; \text{vac}\rangle \rightarrow |\boldsymbol{\eta}; \kappa\rangle$. En el límite de velocidades chicas, el primer término dentro de los corchetes crece como t , mientras que el segundo, siendo la suma de una función oscilatoria modulada y un término que no depende del tiempo, puede despreciarse. De modo que podemos aproximar $c_0^{(2)}(t)$ como

$$c_0^{(2)}(t) \simeq -\frac{it}{\hbar} \delta E_g - t \frac{\Gamma_g}{2}, \quad (6.64)$$

y entonces $1 + c_0^{(2)}(t) \simeq \exp[-\frac{it}{\hbar}\delta E_g - t\frac{\Gamma_g}{2}]$, donde δE_g es el corrimiento en energía y Γ_g es la tasa de la transición. Realizando una nueva expansión del integrando de (6.63) en potencias de $k^{\parallel}v$ y realizando la integración sobre momentos, obtenemos

$$\delta E_g \simeq -\frac{d^2}{8\pi^2\varepsilon_0 z_0^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im } r_p(\omega)}{\omega + \omega_{10}} \left[1 - \frac{3v^2(1 + 3\cos(2\theta))}{4(\omega + \omega_{10})^2 z_0^2} \right], \quad (6.65)$$

y

$$\Gamma_g \simeq -\frac{3d^2 v \cos\theta}{8\pi^2 \hbar \varepsilon_0 z_0^4} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im } r_p(\omega)}{(\omega + \omega_{10})^2}. \quad (6.66)$$

Estas expresiones para el corrimiento y la tasa coinciden con las Ecs. (6.33) y (6.34) obtenidas mediante el enfoque Markoviano, con la pequeña diferencia de que en ellas aparece la altura instantánea $z_A(t)$, en lugar de la altura inicial z_0 que aparece aquí. Notemos que la tasa (6.66) se anula en el caso del movimiento paralelo, lo que resulta consistente con la tasa exponencialmente chica hallada en las Refs. [15, 17].

Finalmente, computamos el coeficiente $c_1^{(3)}(t)$, expresándolo como una suma de dos contribuciones $c_1^{(3)}(t) = c_{1,0}^{(3)}(t) + c_{1,2}^{(3)}(t)$. El subíndice 0 en el primer término denota contribuciones via vacío, y el subíndice 2 en el segundo término denota aquellas contribuciones provenientes del sector de dos fotones. Están respectivamente dadas por:

$$\begin{aligned} c_{1,0}^{(3)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' c_0^{(2)}(t') \langle \boldsymbol{\eta}; \kappa | \hat{H}_{\text{AF}}(t') | g; \text{vac} \rangle \\ &= \frac{d(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k})^* \psi_\kappa^*}{\hbar} \int_0^t dt' e^{i(\omega_{10} + \omega)t' - i\mathbf{k}^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_A^{\parallel}(t') - k^{\parallel} z_A(t')} t' \left(\frac{\Gamma_g}{2} + \frac{i\delta E_g}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (6.67)$$

y

$$\begin{aligned} c_{1,2}^{(3)}(t) &= \frac{i}{2\hbar} \int d^3\kappa_1 d^3\kappa_2 \int_0^t dt' c_2^{(2)}(t') \langle \boldsymbol{\eta}; \kappa | \hat{H}_{\text{AF}}(t') | g; \kappa_1 \kappa_2 \rangle \\ &= \frac{id^3}{\hbar^3} \psi_\kappa^* e^{-i\mathbf{k}^{\parallel} \cdot \mathbf{r}_0} \int d^3\kappa_1 \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k})^* |\psi_{\kappa_1}|^2 e^{-2k_1^{\parallel} z_0}}{\omega'_1 + \omega'} \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{1}{\omega_{10} + \omega'_1} + \frac{1}{\omega_{10} + \omega'} \right] \left[\frac{e^{i(\omega_{10} + \omega' + 2ivk^{\parallel} \cos\theta)t} - 1}{\omega_{10} + \omega' + 2ivk^{\parallel} \cos\theta} - \frac{e^{i(\omega_{10} - \omega'_1 + 2ivk^{\parallel} \cos\theta)t} - 1}{\omega_{10} - \omega'_1 + 2ivk^{\parallel} \cos\theta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\omega_{10} + \omega')(\omega_{10} - \omega'_1)} \left[\frac{e^{-2vk^{\parallel} \cos\theta t} - 1}{2ivk^{\parallel} \cos\theta} - \frac{e^{i(\omega_{10} - \omega'_1 + 2ivk^{\parallel} \cos\theta)t} - 1}{\omega_{10} - \omega'_1 + 2ivk^{\parallel} \cos\theta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

6.4.2. Fuerzas de Casimir-Polder y de fricción: segundo orden

La primera contribución no nula a la fuerza es de segundo orden en el acoplamiento, y está dada por el término de la Ec.(6.53) que contiene solamente al coeficiente $c_1^{(1)}(t)$. Obtenemos

$$\begin{aligned}
F_v^{(2)}(t) &= 2\text{Re} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \int d^3\kappa \langle g; \text{vac} | \hat{F}_v | \boldsymbol{\eta}; \kappa \rangle c_1^{(1)}(t) \\
&= \frac{d^2}{2\pi^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty d\omega \int d^2\mathbf{k} \|k^\parallel\|^2 e^{-2k^\parallel z_A(t)} \text{Im} r_p(\omega) \\
&\quad \times \text{Re} \left[\frac{f\phi\theta}{\omega_{10} + \omega'} \left(1 - e^{-i(\omega_{10} + \omega - vk^\parallel \cos\phi \sin\theta)t} \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.69}$$

El segundo término dentro de los corchetes resulta en una contribución oscilatoria modulada a la fuerza, y se promedia a cero luego de promediar en el tiempo. El primer término, por otro lado, da una contribución no nula, y su forma explícita puede ser evaluada en el límite de velocidades chicas. Para ello es conveniente introducir las variables adimensionales $s = k^\parallel z_A(t)$ e $y = v/[z_A(t)(\omega_{10} + \omega)]$. Entonces la fuerza puede ser re-escrita como

$$\begin{aligned}
F_v^{(2)}(t) &= -\frac{d^2}{2\pi^3 \varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{z_A^4(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im} r_p(\omega)}{\omega_{10} + \omega} \\
&\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty ds \frac{s^3 e^{-2s} (1 - 2ys \cos\phi \sin\theta)}{(1 - ys \cos\phi \sin\theta)^2 + (ys \cos\theta)^2}.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

En el régimen adiabático, en el que la frecuencia característica del movimiento macroscópico $v/z_A(t)$ es mucho más chica que la frecuencia de transición del átomo ω_{10} , podemos tomar $y \ll 1$ y expresar la fuerza como una suma de dos contribuciones $F_v^{(2)}(t) = F_{\text{CP}}^{(2)}(t) + F_{\text{fr}}^{(2)}(t)$, donde

$$\begin{aligned}
F_{\text{CP}}^{(2)}(t) &= -\frac{3d^2}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{z_A^4(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im} r_p(\omega)}{\omega_{10} + \omega} \\
&= -\frac{3d^2}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{z_A^4(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_{10}}{\omega_{10}^2 + \xi^2} r_p(i\xi)
\end{aligned} \tag{6.71}$$

es la proyección de la fuerza de Casimir-Polder estándar a lo largo de la dirección de movimiento, evaluada en la posición instantánea del átomo. En el último paso hemos

realizado una rotación de Wick hacia frecuencias imaginarias $\omega \rightarrow i\xi$. Este resultado perturbativo coincide perfectamente con la expresión (6.46) que hemos obtenido mediante el enfoque de Markov. Notemos que para el movimiento paralelo ($\theta = \pi/2$) esta proyección se anula, lo cual era de esperarse. En el caso del movimiento totalmente vertical ($\theta = 0, \pi$), $F_{\text{CP}}^{(2)}(t)$ cambia de signo, lo cual se debe simplemente al cambio de signo en el vector velocidad. El otro término de la fuerza $F_{\text{fr}}^{(2)}(t)$ is está dado por

$$\begin{aligned} F_{\text{fr}}^{(2)}(t) &= \frac{15d^2v^2 \cos\theta(1 + \cos^2\theta)}{16\pi^2\varepsilon_0 z_A^6(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im}r_p(\omega)}{(\omega_{10} + \omega)^3} \\ &= \frac{15d^2v^2}{16\pi^2\varepsilon_0 z_A^6(t)} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_{10}(\omega_{10}^2 - 3\xi^2)}{(\omega_{10}^2 + \xi^2)^3} r_p(i\xi)(1 + \cos^2\theta) \cos\theta. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Esta expresión coincide con la Ec.(6.48), obtenida mediante el enfoque Markoviano. Notemos que $F_{\text{fr}}^{(2)}(t) = 0$ para el movimiento paralelo, en concordancia con los resultados de trabajos previos (ver, por ejemplo, Refs. [15, 17]) donde se mostró que la fricción cuántica es infinitesimalmente pequeña a segundo orden en la constante de acoplamiento.

6.4.3. Fuerzas de Casimir-Polder y de fricción: cuarto orden, vía vacío

Computaremos a continuación la fuerza al orden siguiente, que es el cuarto orden en la constante de acoplamiento. Para ello seguiremos un enfoque similar al que puede encontrarse en el Apéndice C de la Ref. [17]. Consideraremos primero la parte de (6.53) que involucra la amplitud mixta $c_0^{(2)*}(t)c_1^{(1)}(t)$ y la parte de $c_1^{(3)}(t)$ vía vacío, Ec. (6.67). Integrando por partes y utilizando la Ec. (6.59), podemos escribir a $c_{1,0}^{(3)}(t)$ como

$$\begin{aligned} c_{1,0}^{(3)}(t) &= c_0^{(2)}(t) c_1^{(1)}(t) - \frac{id(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k})^* \psi_\kappa^*}{\hbar(\omega_{10} + \omega')} c_0^{(2)}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - k \parallel z_0} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\hbar} \delta E_g + i \frac{\Gamma_g}{2} \right) \frac{d(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k})^* \psi_\kappa^*}{\hbar(\omega_{10} + \omega')^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - k \parallel z_0} [e^{i(\omega_{10} + \omega')t} - 1]. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Combinando el primer término de la Ec. anterior con $c_0^{(2)*}(t)c_1^{(1)}(t)$, obtenemos $-\Gamma_g t c_1^{(1)}(t)$, y la fuerza a orden cuatro correspondiente resulta

$$F_{v,0}^{(4)}(t) = -\Gamma_g t F_v^{(2)}(t), \quad (6.74)$$

que, combinada con la fuerza a segundo orden $F_v^{(2)}(t)$, representa la pérdida de probabilidad del estado fundamental. El subíndice 0 en $F_{v,0}^{(4)}(t)$ denota que se trata de la contribución vía vacío.

La contribución a la fuerza del segundo término de (6.73) es

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2}{2\pi^3\epsilon_0} \int_0^\infty d\omega \text{Im}r_p(\omega) \int d^2k^\parallel (k^\parallel)^2 e^{-2k^\parallel z_0 - k^\parallel vt \cos \theta} \\
& \times \text{Re} \left[\frac{f_{\phi\theta}}{\omega_{10} + \omega'} \left(\frac{it}{\hbar} \delta E_g + t \frac{\Gamma_g}{2} \right) e^{-i(\omega_{10} + \omega - k^\parallel v \cos \phi \sin \theta)t} \right].
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Este término es, como función del tiempo, una función oscilatoria modulada, y se anula luego de realizar un promedio temporal.

La contribución a la fuerza del tercer término de (6.73) es

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{2\pi^3\hbar\epsilon_0} \int_0^\infty d\omega \text{Im}r_p(\omega) \int d^2k^\parallel (k^\parallel)^2 e^{-2k^\parallel z_A(t)} \\
& \times \text{Re} \left\{ \left(-\frac{1}{\hbar} \delta E_g + i \frac{\Gamma_g}{2} \right) \frac{f_{\phi\theta}}{(\omega_{10} + \omega')^2} \right\} + \text{t.o.m.},
\end{aligned} \tag{6.76}$$

donde ‘t.o.m’ denota términos oscilatorios modulados, similares a los que aparecieron en (6.75), que se anulan luego de promediar temporalmente. Para poder evaluar (6.76), reescribimos la segunda línea en función de las variables adimensionales que introdujimos más arriba, $s = k^\parallel z_A(t)$ y $y = v/[z_A(t)(\omega_{10} + \omega)]$, y realizamos una expansión en potencias de la velocidad.

A orden y^0 , obtenemos una corrección de orden d^4 a la fuerza de Casimir-Polder (6.71),

$$F_{\text{CP}}^{(4)}(t) = \frac{3d^2\delta E_g^{(0)} \cos \theta}{8\pi^2\hbar\epsilon_0 z_A^4(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im}r_p(\omega)}{(\omega_{10} + \omega)^2}. \tag{6.77}$$

donde $\delta E_g^{(0)}$ es el término que no depende de la velocidad del corrimiento δE_g definido en (6.65). Notemos que esta corrección es idénticamente nula para el caso de movimiento paralelo.

A orden y^1 , obtenemos una corrección de orden d^4 a la fuerza de fricción (6.72)

$$F_{\text{fr}}^{(4)}(t) = -\frac{3d^2\Gamma_g v(1 + \cos^2 \theta)}{8\pi^2\hbar\epsilon_0 z_A^5(t)} \int_0^\infty d\omega \frac{\text{Im}r_p(\omega)}{(\omega_{10} + \omega)^3}. \tag{6.78}$$

Recordando la definición de la tasa Γ_g en la Ec. (6.66), concluimos que $F_{\text{fr}}^{(4)}(t)$ va como v^2 y se anula para el movimiento paralelo.

6.4.4. Fuerzas de Casimir-Polder y de fricción: cuarto orden, vía dos fotones

La pieza final de la fuerza a cuarto orden en d tiene dos contribuciones. Una de ellas surge de la parte de $c_1^{(3)}(t)$ que involucra el sector de dos fotones, es decir, $c_{1,2}^{(3)}(t)$, y la otra proviene de la coherencia entre los sectores de uno y dos fotones, el último término de la Ec. (6.53). Denotamos estas contribuciones como $F_{v,2}^{(4)[03]}(t)$ y $F_{v,2}^{(4)[12]}(t)$, respectivamente. El subíndice 2 en $F_{v,2}^{(4)}(t)$ denota contribuciones del sector de dos fotones. Resultan

$$F_{v,2}^{(4)[03]}(t) = \frac{d^4}{4\pi\epsilon_0\hbar^3} \operatorname{Re} \int d^3\kappa_1 d^3\kappa_2 |\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2|^2 |\psi_{\kappa_1}|^2 |\psi_{\kappa_2}|^2 \frac{e^{-2(k_1^{\parallel} + k_2^{\parallel})z_A(t)}}{\omega'_1 + \omega'_2} \\ \times \left[\frac{k_1^{\parallel} f_{\phi_1\theta}}{\omega_{10} + \omega'_1 + 2ivk_2^{\parallel} \cos\theta} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \left[\frac{1}{\omega_{10} + \omega'_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] + \text{t.o.m.},$$

y

$$F_{v,2}^{(4)[12]}(t) = \frac{d^4}{4\pi\epsilon_0\hbar^3} \operatorname{Re} \int d^3\kappa_1 d^3\kappa_2 |\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2|^2 |\psi_{\kappa_1}|^2 |\psi_{\kappa_2}|^2 \frac{e^{-2(k_1^{\parallel} + k_2^{\parallel})z_A(t)}}{\omega'_1 + \omega'_2} \\ \times \left[\frac{k_1^{\parallel} f_{\phi_1\theta}}{\omega_{10} + \omega'_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \left[\frac{1}{\omega_{10} + \omega'_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] + \text{m.o.t..}$$

Los términos oscilatorios modulados se anulan luego de promediar en el tiempo, y los descartaremos en lo que sigue. Notemos que las dos ecuaciones anteriores tienen la misma estructura, excepto por el primer factor entre corchetes. Si definimos a su suma como $\Sigma^{(4)}(t) = F_{v,2}^{(4)[03]}(t) + F_{v,2}^{(4)[12]}(t)$, obtenemos

$$\Sigma^{(4)}(t) = \frac{d^4}{4\pi\epsilon_0\hbar^3} \operatorname{Re} \int d^3\kappa_1 d^3\kappa_2 |\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2|^2 |\psi_{\kappa_1}|^2 |\psi_{\kappa_2}|^2 \frac{e^{-2(k_1^{\parallel} + k_2^{\parallel})z_A(t)}}{\omega'_1 + \omega'_2} \left[\frac{1}{\omega_{10} + \omega'_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \\ \times \left[k_1^{\parallel} f_{\phi_1\theta} \left(\frac{1}{\omega_{10} + \omega'_1 + 2ivk_2^{\parallel} \cos\theta} + \frac{1}{\omega_{10} + \omega'_2} \right) + (1 \leftrightarrow 2) \right]. \quad (6.79)$$

Para poder evaluar la Ec. (6.79), procederemos de la misma manera que lo hicimos en las subsecciones anteriores: definimos las variables $y_1 = v/[z_A(t)(\omega_{10} + \omega_1)]$ y $y_2 = v/[z_A(t)(\omega_{10} + \omega_2)]$, y realizamos una expansión en potencias de y_1 e y_2 , obteniendo

$$\Sigma_0^{(4)}(t) = -\frac{3d^4}{128\pi^3\hbar\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{z_A^7(t)} \int_0^\infty d\omega_1 d\omega_2 \operatorname{Im}r_p(\omega_1) \operatorname{Im}r_p(\omega_2) \\ \times \frac{(2\omega_{10} + \omega_1 + \omega_2)^2}{(\omega_1 + \omega_2)(\omega_{10} + \omega_1)^2(\omega_{10} + \omega_2)^2}. \quad (6.80)$$

El subíndice 0 en $\Sigma_0^{(4)}(t)$ denota orden cero en la velocidad. Es decir que es una corrección a la fuerza de Casimir-Polder (6.71) proveniente de procesos que involucran la emisión o absorción de dos fotones. La corrección a la fuerza lineal en la velocidad, que proviene de los términos proporcionales a $y_1^1 y_2^0$ e $y_1^0 y_2^1$, se anula idénticamente: $\Sigma_1^{(4)}(t) = 0$. La siguiente corrección no nula es cuadrática en la velocidad, (proviene de los términos proporcionales a $y_2^1 y_2^0$, $y_1^0 y_2^2$, y $y_1^1 y_2^1$) y resulta en una fuerza de la forma $\Sigma_2^{(4)}(t) \propto v^2 \cos \theta / z_A^9(t)$, donde el factor de proporcionalidad es una complicada integral sobre ω_1 y ω_2 , y no lo reportaremos aquí. Notemos que para movimiento paralelo ($\theta = \pi/2$) tanto $\Sigma_0^{(4)}(t)$ como $\Sigma_2^{(4)}(t)$ se anulan idénticamente, en acuerdo con los resultados encontrados en la Ref. [17].

6.5. Conclusiones

En la Tabla 6.1 resumimos nuestros resultados para las correcciones inducidas por el movimiento a la dinámica interna (nivel de energía y tasa de transición) de un átomo en su estado fundamental, y a la fuerza que actúa sobre ese mismo átomo. En esta tabla, el movimiento no paralelo está representado por su caso más extremo, es decir, movimiento perfectamente vertical del átomo hacia la superficie. Los resultados para este movimiento son contrastados con aquellos para el escenario paralelo. En ambos casos, los enfoques Markoviano y de teoría de perturbaciones dependientes del tiempo coinciden al orden dominante en las correcciones a los corrimientos de los niveles (comparar Ecs. (6.34) y (6.65)) y las tasas de decaimiento (comparar Ecs. (6.32), (6.33) y (6.66)). Notemos que el enfoque Markoviano predice una tasa de decaimiento infinitesimalmente chica para el caso paralelo, mientras que esta cantidad es idénticamente nula en el enfoque perturbativo. En cuanto a la fuerza de fricción, los dos enfoques coinciden a segundo orden en el acoplamiento entre el átomo y el campo. Por ejemplo, los dos predicen una fuerza nula para el caso del movimiento paralelo (comparar Ecs. (6.48) y (6.72)). En contraste, los dos enfoques difieren a cuarto orden en el acoplamiento, independientemente de la dirección del movimiento. Por ejemplo, dentro del enfoque Markoviano la fuerza es lineal en v para cualquier dirección, mientras que de acuerdo a la teoría de perturbaciones la fuerza experimenta un cambio cualitativo desde una dependencia tipo v^3 para el caso paralelo, a un comportamiento como v^2 si el movimiento es vertical.

A esta altura no estamos en condiciones de decidir si alguno de los dos resultados está errado (y, de ser así, por qué razón) o si simplemente se aplican a diferentes regímenes temporales. Tanto el enfoque Markoviano como el perturbativo están

	Markov	Pert.
corrimiento \parallel	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^2$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^2$
corrimiento \perp	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^2$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^2$
tasa \parallel	exp. chica	0
tasa \perp	$\frac{v}{\omega_{10}z_A}$	$\frac{v}{\omega_{10}z_A}$
fuerza $\parallel d^2$	exp. chica	0
fuerza $\perp d^2$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^2$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^2$
fuerza $\parallel d^4$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)\left(\frac{\Gamma_1}{\omega_{10}}\right)$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^3$
fuerza $\perp d^4$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)\left(\frac{\Gamma_1}{\omega_{10}}\right)$	$\left(\frac{v}{\omega_{10}z_A}\right)^2$

Cuadro 6.1: Correcciones inducidas por el movimiento a la dinámica de un átomo en su estado inicial moviéndose frente a un cuerpo macroscópico, y a la fuerza de fricción que actúa sobre el mismo. Comparamos en la tabla los resultados obtenidos por medio de los dos enfoques diferentes que hemos utilizado a lo largo de este capítulo, mostrando la manera en la que los corrimientos, tasas y fuerzas dependen de la velocidad del átomo v , de la frecuencia de transición atómica desnuda ω_{10} , de la superficie de separación entre el átomo y la superficie z_A , y de la tasa de decaimiento espontáneo Γ_1 . Aquí \perp hace referencia a un átomo moviéndose hacia el cuerpo. Los resultados obtenidos vía las ecuaciones maestras de Markov (“Markov”) y vía teoría de perturbaciones dependientes del tiempo (“Pert.”) coinciden a nivel del corrimiento y de la tasa de decaimiento, así como para la fuerza a orden d^2 , pero difieren para la fuerza a orden d^4 .

basados en aproximaciones que restringen su respectiva aplicabilidad. Los resultados Markovianos no pueden aplicarse en escalas temporales más cortas que los tiempos de autocorrelación del campo electromagnético, pues en esta escala temporal los efectos de memoria llevan a un comportamiento transitorio que no puede resolverse aplicando la aproximación de Markov. Sin embargo, estos tiempos cortos – fracciones del tiempo de vida del estado excitado del átomo – son el dominio de la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. En este sentido, no debería sorprendernos que los resultados Markovianos y los de la teoría de perturbaciones no coincidan, pero sería deseable en un futuro poder trazar la transición de un régimen al otro, o verificar los resultados respectivos por medio de un tercer método teórico o un experimento.

Finalmente, recordemos que la motivación original de este Capítulo era encontrar un sistema en el que se facilitara la medición experimental de la fuerza de fricción cuántica, que está fuera del alcance de las técnicas actuales. Mirando los resultados que hemos resumido en la Tabla 6.1, podemos concluir que existe de hecho un cambio cualitativo en la dependencia de la fuerza con la velocidad cuando pasamos del movimiento paralelo al vertical. Mientras que a segundo orden en el acoplamiento la fuerza de fricción cuántica es exponencialmente chica para el movimiento paralelo, hallamos que varía cuadráticamente con la velocidad en el movimiento vertical. Más aun, este comportamiento fue encontrado tanto mediante el enfoque Markoviano como mediante la teoría de perturbaciones. Si también consideramos términos de cuarto orden en el acoplamiento, el enfoque Markoviano sólo predice un cambio en el prefactor numérico de la fuerza al cambiar del movimiento paralelo al vertical, mientras que la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo sugiere un incremento de un orden de magnitud. Sin embargo, debemos reconocer que aun para estimaciones extremadamente optimistas de los parámetros, como por ejemplo $v = 10^3$ m/s, $\omega_{10} = 10$ THz, $\Gamma_1 = 10^9$ s⁻¹ y $z_A = 1$ nm, en el mejor escenario posible (el caso que resulta en la mayor predicción para la fricción cuántica, de entre los resultados que mostramos en la Tabla 6.1),

$$F_{\text{fric}} \propto \left(\frac{v}{\omega_{10} z_A} \right)^2 F_{\text{CP}}, \quad (6.81)$$

es decir que la fuerza de fricción resulta de sólo un 1 % de la fuerza de Casimir-Polder estática, y por lo tanto continúa eludiendo su detección.

Parte IV

Conclusiones

El objetivo principal de esta Tesis fue estudiar una de las consecuencias de las fluctuaciones del vacío: la fricción cuántica. Existen muchos trabajos en la literatura donde se aborda este problema de manera teórica, en diferentes sistemas y utilizando diversas técnicas de cálculo. Los resultados obtenidos no siempre coinciden en sus predicciones para la dependencia de la fuerza de fricción con la distancia, la velocidad relativa, y otras magnitudes relevantes de cada sistema. Al no existir aún la posibilidad de detectar la fuerza de manera experimental, no es posible determinar qué resultados son correctos y por qué fallan los demás, si es que lo hacen, o si simplemente se aplican a distintos regímenes temporales, por ejemplo.

Con esto en mente, durante la mayor parte de este trabajo (Capítulos 3, 4 y 5) hemos aplicado los métodos funcionales que venían siendo utilizados dentro de nuestro grupo de trabajo. El objeto principal de estudio fue la acción efectiva *in-out*, cuya parte imaginaria es proporcional a la probabilidad de decaimiento del vacío, conteniendo por lo tanto información sobre los efectos disipativos en el sistema. A lo largo de esta Tesis mostramos una forma en la que la fuerza de fricción puede obtenerse a partir de la parte imaginaria de la acción efectiva. Utilizamos, además, el formalismo de *camino temporal cerrado* para corroborar dicha relación, y para relacionar a la fricción cuántica con los efectos de decoherencia. En el Capítulo 6 utilizamos otros métodos de cálculo, ampliamente presentes en la literatura: ecuaciones maestras Markovianas y teoría de perturbaciones dependientes del tiempo.

Trabajamos en los dos sistemas mayormente considerados a la hora de estudiar la fricción cuántica: la Parte II de esta Tesis trata el problema de dos placas moviéndose con velocidad relativa, y en la Parte III una de las placas se reemplaza por un átomo polarizable.

Comenzamos nuestro estudio en el Capítulo 3 (Ref. [22]) con el modelo más simple posible, en el que el campo de vacío es un campo escalar no masivo. Los grados de libertad internos de las placas se comportan como osciladores armónicos cuánticos que no interactúan entre sí, pero interactúan de manera lineal con el campo de vacío. Este acoplamiento es el que induce, al poner a las placas en movimiento relativo, la creación de fotones virtuales que excitan a los osciladores que conforman el material, produciendo disipación.

A la hora de realizar el cálculo, sin embargo, procedimos en el orden inverso: integramos primero los grados de libertad de las placas, obteniendo en la acción para el campo de vacío un término efectivo no-local que contiene la influencia de los espejos. Este potencial efectivo tiene una estructura que depende, entre otras cosas, de la velocidad relativa entre las placas. Al integrar también sobre los grados de libertad del

campo de vacío, pudimos obtener una expresión para la acción efectiva en el espacio de Minkowski. Mostramos que la misma desarrolla una parte imaginaria cuando la velocidad relativa entre las placas no es nula. Este resultado, al indicar la presencia de disipación en el sistema, nos señaló que debía existir una fuerza externa actuando sobre la placa móvil, manteniéndola en un movimiento rectilíneo uniforme. Mostramos cómo calcular la fuerza de fricción a partir de la acción efectiva, y encontramos que, hasta orden cuadrático en el acoplamiento entre cada placa y el campo de vacío (orden g^4 en total), la misma está exponencialmente suprimida para velocidades chicas, resultado consistente con lo hallado mediante otros métodos en la literatura.

Paralelamente, utilizamos el formalismo de Schwinger-Keldysh para calcular el valor medio del tensor energía-momento en el estado asintótico de vacío. Escribimos el propagador CTP del campo libre, y calculamos su corrección (al orden más bajo en el acoplamiento entre el campo y las placas) debida a la presencia de las placas. Con este resultado pudimos evaluar el valor medio de t_{13} , obteniendo así la fuerza disipativa que actúa sobre la placa móvil. Encontramos que este resultado coincide con aquel obtenido mediante la acción efectiva en el espacio de Minkowski.

Luego, en el Capítulo 4 (Ref. [24]), estudiamos un sistema similar pero modificando nuestro modelo para hacerlo más realista. Con este fin, utilizamos el campo de Maxwell completo A_μ para describir al campo electromagnético, y consideramos dos placas de grafeno, un material real que resulta accesible experimentalmente, y que exhibe propiedades inusuales. Para modelar las placas utilizamos un modelo microscópico para describir las excitaciones de baja energía del grafeno, que se comportan como fermiones de Dirac en $2 + 1$ dimensiones. Procediendo de la misma manera que en el Capítulo 3, calculamos la parte imaginaria de la acción efectiva *in-out* y la fuerza de fricción. Lamentablemente, encontramos que la misma se anula de manera exacta para velocidades relativas más chicas que la velocidad de Fermi. Aun para velocidades más grandes, que ya no serían experimentalmente accesibles, la fuerza sigue siendo demasiado chica como para poder ser detectada. Sin embargo, la estructura de bandas del grafeno (y por lo tanto sus propiedades ópticas y de transporte) puede ser fácilmente manipulada externamente. Esto nos permite tener la esperanza de encontrar algún conjunto de parámetros externos que permitan aumentar considerablemente la magnitud de la fuerza de fricción. Estudiaremos esta posibilidad en trabajos futuros.

En el Capítulo 5 (Ref. [23]), volvimos al sistema que consideramos en el Capítulo 3, pero cambiamos la placa móvil por un átomo polarizable, modelado como una partícula puntual cuyo grado de libertad interno es un oscilador armónico cuántico, que interactúa con el campo de Klein-Gordon de vacío. El campo de vacío, que a

su vez interactúa con la placa, actúa como mediador de la interacción entre ésta y la partícula. Integramos los grados de libertad de la placa y del campo de vacío, y obtuvimos la acción de influencia para la partícula, que contiene toda la información de su interacción con el entorno (el vacío y el espejo). Integramos también el grado de libertad de la partícula, obteniendo la acción efectiva *in-out* para el sistema completo, y la fuerza de fricción.

Pero no estábamos interesados solamente en calcular la fuerza de fricción sobre el átomo, sino que también estudiamos la decoherencia sobre su grado de libertad interno, inducida por su interacción con el vacío y con la placa (a través de aquél). Para ello volvimos al formalismo de Schwinger-Keldysh. Calculamos la acción de influencia CTP para el grado de libertad interno de la partícula, y a partir de ésta obtuvimos la funcional de decoherencia. Luego consideramos dos historias distintas bien definidas, en las cuales el estado del átomo tuviera la misma frecuencia pero distinta amplitud (o también la misma amplitud pero distinta fase), y estimamos el tiempo de decoherencia luego del cual esas dos historias serían clásicamente distinguibles, y todo patrón de interferencia desaparecería (en, por ejemplo, un experimento de interferometría de Rayleigh). Sabiendo que el tiempo de decoherencia propio de la interacción con las fluctuaciones cuánticas del vacío es infinitamente grande (de lo contrario no existirían estados cuánticos en la naturaleza, pues no puede apagarse la interacción con el vacío de fondo), encontramos que la presencia de la placa puede disminuirlo considerablemente, para velocidades relativas finitas entre ésta y la partícula, siendo el tiempo de decoherencia más chico cuanto más grande la velocidad. Para velocidades chicas, posiblemente alcanzables experimentalmente, el tiempo de decoherencia decae prácticamente a cero cuando la frecuencia de los modos característicos de la placa es similar a la de la partícula.

De lo anterior podemos sacar dos conclusiones importantes: en experimentos en los que sea clave retener la coherencia del estado del átomo, colocarlo frente a una placa dieléctrica o metálica no afectará su coherencia mientras se mantenga en reposo. Si existe un movimiento relativo entre el átomo y la placa, para que aquél no sufra decoherencia deben mantenerse velocidades bajas y elegir el átomo y el material que conforma el espejo de modo que sus modos de oscilación no estén en resonancia. Ahora bien, por otro lado, uno podría querer detectar experimentalmente la decoherencia sobre el átomo. Una razón detrás de esto es que constituye una forma indirecta de medir los efectos de las fluctuaciones de vacío sobre el sistema, siendo el tiempo de decoherencia otra manera de cuantificar la disipación.

Por último, en el Capítulo 6 (Ref. [25]), continuamos con el estudio de un átomo polarizable moviéndose frente a un plano dieléctrico. Motivados por hallazgos recientes en los que se encontró que las correcciones a la dinámica interna del átomo aumentan significativamente cuando la dirección del movimiento no es paralela a la superficie del dieléctrico, decidimos calcular la fuerza de fricción que actúa sobre un átomo que se mueve frente a un semi-espacio. Realizamos los cálculos utilizando dos enfoques diferentes, distintos a los métodos funcionales que veníamos usando: ecuaciones maestras Markovianas, y teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. Estos métodos ya habían sido utilizados en otros trabajos para estudiar, por ejemplo, el caso del movimiento paralelo, dando lugar a algunas discrepancias. Estos métodos arrojaron resultados prometedores, pues predijeron fuerzas de fricción significativamente mayores para el movimiento perpendicular al plano. A pesar de esto, aun en el caso más optimista la fuerza de fricción continúa siendo demasiado chica como para poder ser medida.

Si bien a lo largo de esta Tesis no encontramos ningún sistema que pudiera permitir medir la fuerza de fricción cuántica en el corto plazo, sí encontramos efectos muy interesantes que nos permitieron entender con mayor profundidad este fenómeno único. No sólo encontramos una nueva manera de calcular la fuerza de fricción, sino que la calculamos por primera vez en un sistema semiconductor de gran relevancia actual como el grafeno. Confiamos en que considerando materiales más generales de la familia del grafeno (todos ellos accesibles experimentalmente), la posibilidad de aplicar un campo externo o un pulso láser, podremos aumentar significativamente la magnitud de la fuerza de fricción, y posiblemente reducir el umbral en el que aparezca. Además, mostramos que la decoherencia puede ser una vía alternativa para detectar la fricción, ya que estos fenómenos están intrínsecamente relacionados, y comprobamos que considerando movimientos más generales también podemos lograr un aumento considerable en la magnitud de la fuerza.

Bibliografía

- [1] Peter W Milonni. *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic press, 2013.
- [2] Kimball A Milton. *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. World Scientific, 2001.
- [3] Michael Bordag, Galina Leonidovna Klimchitskaya, Umar Mohideen, and Vladimir Mikhaylovich Mostepanenko. *Advances in the Casimir effect*, volume 145. OUP Oxford, 2009.
- [4] Hendrick BG Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. In *Proceedings of the KNAW*, volume 51, pages 793–795, 1948.
- [5] Steven K Lamoreaux. The casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on progress in Physics*, 68(1):201, 2004.
- [6] VV Dodonov. Current status of the dynamical casimir effect. *Physica Scripta*, 82(3):038105, 2010.
- [7] CM Wilson, Göran Johansson, Arsalan Pourkabirian, Michael Simoen, JR Johansson, Tim Duty, F Nori, and Per Delsing. Observation of the dynamical casimir effect in a superconducting circuit. *Nature*, 479(7373):376–379, 2011.
- [8] J Robert Johansson, Göran Johansson, CM Wilson, and Franco Nori. Dynamical casimir effect in a superconducting coplanar waveguide. *Physical review letters*, 103(14):147003, 2009.
- [9] Pasi Lähteenmäki, GS Paraoanu, Juha Hassel, and Pertti J Hakonen. Dynamical casimir effect in a josephson metamaterial. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(11):4234–4238, 2013.
- [10] JB Pendry. Shearing the vacuum-quantum friction. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 9(47):10301, 1997.

- [11] JB Pendry. Quantum friction—fact or fiction? *New Journal of Physics*, 12(3):033028, 2010.
- [12] AI Volokitin and Bo NJ Persson. Near-field radiative heat transfer and noncontact friction. *Reviews of Modern Physics*, 79(4):1291, 2007.
- [13] Mohammad F Maghrebi, Ramin Golestanian, and Mehran Kardar. Quantum cherenkov radiation and noncontact friction. *Physical Review A*, 88(4):042509, 2013.
- [14] Diego AR Dalvit, Paulo A Maia Neto, and Francisco Diego Mazzitelli. Fluctuations, dissipation and the dynamical casimir effect. In *Casimir Physics*, pages 419–457. Springer, 2011.
- [15] Gabriel Barton. On van der waals friction. ii: Between atom and half-space. *New Journal of Physics*, 12(11):113045, 2010.
- [16] F Intravaia, RO Behunin, and DAR Dalvit. Quantum friction and fluctuation theorems. *Physical Review A*, 89(5):050101, 2014.
- [17] Francesco Intravaia, Vanik E Mkrtchian, Stefan Yoshi Buhmann, Stefan Scheel, Diego AR Dalvit, and Carsten Henkel. Friction forces on atoms after acceleration. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 27(21):214020, 2015.
- [18] Gregor Pieplow and Carsten Henkel. Cherenkov friction on a neutral particle moving parallel to a dielectric. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 27(21):214001, 2015.
- [19] Ryan O Behunin and Bei-Lok Hu. Nonequilibrium forces between atoms and dielectrics mediated by a quantum field. *Physical Review A*, 84(1):012902, 2011.
- [20] François Impens, Claudio Ccapa Ttira, and Paulo A Maia Neto. Non-additive dynamical casimir atomic phases. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 46(24):245503, 2013.
- [21] Juliane Klatt, Robert Bennett, and Stefan Yoshi Buhmann. Spectroscopic signatures of quantum friction. *Physical Review A*, 94(6):063803, 2016.
- [22] M. Belén Farías, César D. Fosco, Fernando C. Lombardo, Francisco D. Mazzitelli, and Adrián E Rubio López. Functional approach to quantum friction: Effective action and dissipative force. *Physical Review D*, 91(10):105020, 2015.

- [23] M Belén Fariás and Fernando C Lombardo. Dissipation and decoherence effects on a moving particle in front of a dielectric plate. *Physical Review D*, 93(6):065035, 2016.
- [24] M Belén Fariás, César D Fosco, Fernando C Lombardo, and Francisco D Mazzitelli. Quantum friction between graphene sheets. *arXiv preprint arXiv:1612.08675*, 2016.
- [25] J Klatt, MB Fariás, DAR Dalvit, and SY Buhmann. Quantum friction in arbitrarily directed motion. *arXiv preprint arXiv:1612.01715*, 2016.
- [26] César D Fosco, Fernando C Lombardo, and Francisco D Mazzitelli. Quantum dissipative effects in moving imperfect mirrors: Sidewise and normal motions. *Physical Review D*, 84(2):025011, 2011.
- [27] CD Fosco, FC Lombardo, and FD Mazzitelli. Inertial forces and dissipation on accelerated boundaries. *Physical Review D*, 82(12):125039, 2010.
- [28] César D. Fosco, Fernando C. Lombardo, and Francisco D. Mazzitelli. Quantum dissipative effects in moving mirrors: A functional approach. *Physical Review D*, 76(8):085007, 2007.
- [29] César D. Fosco, Fernando C. Lombardo, and Francisco D. Mazzitelli. Neumann casimir effect: A singular boundary-interaction approach. *Physics Letters B*, 690(2):189–195, 2010.
- [30] Ramin Golestanian and Mehran Kardar. Path-integral approach to the dynamic casimir effect with fluctuating boundaries. *Physical Review A*, 58(3):1713, 1998.
- [31] Leonid V Keldysh. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Sov. Phys. JETP*, 20(4):1018–1026, 1965.
- [32] Julian Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2(3):407–432, 1961.
- [33] Esteban A Calzetta and Bei-Lok Hu. *Nonequilibrium quantum field theory*, volume 10. Cambridge University Press Cambridge UK, 2008.
- [34] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.

- [35] AK Geim. Nature mater. 6, 183 (2007); ah castro neto, f. guinea, nmr peres, ks novoselov, and ak geim. *Rev. Mod. Phys.*, 81(1):109, 2009.
- [36] AB Kuzmenko, Erik Van Heumen, Fabrizio Carbone, and Dirk Van Der Marel. Universal optical conductance of graphite. *Physical review letters*, 100(11):117401, 2008.
- [37] Rahul Raveendran Nair, Peter Blake, Alexander N Grigorenko, Konstantin S Novoselov, Tim J Booth, Tobias Stauber, Nuno MR Peres, and Andre K Geim. Fine structure constant defines visual transparency of graphene. *Science*, 320(5881):1308–1308, 2008.
- [38] MB Farías, GF Quinteiro, and PI Tamborenea. Photoexcitation of graphene with twisted light. *The European Physical Journal B*, 86(10):1–9, 2013.
- [39] AI Volokitin and BNJ Persson. Quantum friction. *Physical review letters*, 106(9):094502, 2011.
- [40] César D. Fosco, Fernando C. Lombardo, and Francisco D. Mazzitelli. Casimir effect with dynamical matter on thin mirrors. *Physics Letters B*, 669(5):371–375, 2008.
- [41] M Bordag, IV Fialkovsky, DM Gitman, and DV Vassilevich. Casimir interaction between a perfect conductor and graphene described by the dirac model. *Physical Review B*, 80(24):245406, 2009.
- [42] Ignat V Fialkovsky, Valery N Marachevsky, and Dmitri V Vassilevich. Finite-temperature casimir effect for graphene. *Physical Review B*, 84(3):035446, 2011.
- [43] M Bordag, I Fialkovskiy, and D Vassilevich. Enhanced casimir effect for doped graphene. *Physical Review B*, 93(7):075414, 2016.
- [44] Francisco D Mazzitelli, Juan Pablo Paz, and Alejandro Villanueva. Decoherence and recoherence from vacuum fluctuations near a conducting plate. *Physical Review A*, 68(6):062106, 2003.
- [45] François Impens, Ryan O Behunin, Claudio Ccapa Ttira, and Paulo A Maia Neto. Non-local double-path casimir phase in atom interferometers. *EPL (Europhysics Letters)*, 101(6):60006, 2013.

- [46] O Zobay and G Alber. Dynamics of electronic rydberg wave packets in isolated-core excited atoms. *Physical Review A*, 52(1):541, 1995.
- [47] M Brune, F Schmidt-Kaler, A Maali, J Dreyer, E Hagley, JM Raimond, and S Haroche. Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Physical Review Letters*, 76(11):1800, 1996.
- [48] FC Lombardo, FD Mazzitelli, and RJ Rivers. Decoherence in field theory: general couplings and slow quenches. *Nuclear Physics B*, 672(3):462–486, 2003.
- [49] FC Lombardo, FD Mazzitelli, and RJ Rivers. Classical behaviour after a phase transition. *Physics Letters B*, 523(3):317–322, 2001.
- [50] FC Lombardo, RJ Rivers, and PI Villar. Decoherence of domains and defects at phase transitions. *Physics Letters B*, 648(1):64–69, 2007.
- [51] Robert B Griffiths. Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics. *Journal of Statistical Physics*, 36(1-2):219–272, 1984.
- [52] Roland Omnes. Logical reformulation of quantum mechanics. i. foundations. *Journal of Statistical Physics*, 53(3-4):893–932, 1988.
- [53] Murray Gell-Mann and James B Hartle. Classical equations for quantum systems. *Physical Review D*, 47(8):3345, 1993.
- [54] Richard Phillips Feynman and Frank Lee Vernon. The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Annals of physics*, 24:118–173, 1963.
- [55] Stefan Yoshi Buhmann. *Dispersion forces I: Macroscopic quantum electrodynamics and ground-state Casimir, Casimir–Polder and van der Waals Forces*, volume 247. Springer, 2013.
- [56] Bruno Huttner and Stephen M Barnett. Quantization of the electromagnetic field in dielectrics. *Physical Review A*, 46(7):4306, 1992.
- [57] Thomas Gerard Philbin. Canonical quantization of macroscopic electromagnetism. *New Journal of Physics*, 12(12):123008, 2010.
- [58] Melvin Lax. The lax–onsager regressiontheorem’revisited. *Optics communications*, 179(1):463–476, 2000.

- [59] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.