

Tesis Doctoral

Renormalización holográfica y campos de espín-2 masivos en tres dimensiones

Goya, Andrés Fabio

2016-09-27

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Goya, Andrés Fabio. (2016-09-27). Renormalización holográfica y campos de espín-2 masivos en tres dimensiones. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Goya, Andrés Fabio. "Renormalización holográfica y campos de espín-2 masivos en tres dimensiones". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2016-09-27.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Renormalización holográfica y campos de espín-2 masivos
en tres dimensiones**

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR

DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES EN EL ÁREA DE FÍSICA

Andrés Goya

DIRECTOR DE TESIS: GASTÓN GIRIBET

DIRECTOR ASISTENTE: MAURICIO LESTON

CONSEJERO DE ESTUDIOS: RAFAEL FERRARO

Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2016

RESUMEN

En esta tesis estudiaremos la renormalización holográfica de teorías de campos masivos de espín-2 en espacios Anti-de Sitter (AdS) y no Anti-de Sitter (no-AdS). Más precisamente, estudiaremos teorías de gravedad en 2+1 dimensiones con grados de libertad dinámicos. La principal motivación para estudiar estos modelos proviene de la correspondencia AdS/CFT y los ensayos por extender la misma a espacios asintóticamente no-AdS. Algunas de las extensiones de holografía más estudiadas involucran espacios no-AdS como los espacios de Schrödinger, de Lifshitz y deformaciones “warped” de AdS (WAdS). Los dos primeros han sido propuestos como duales gravitatorios de modelos de materia condensada (con o sin simetría de Galileo, respectivamente) con invariancia de escala anisotrópica. Los espacios WAdS también aparecen en ese contexto, pero surgen además en el estudio de las geometrías de las regiones cercanas al horizonte de los agujeros negros rotantes extremales. Este tipo de geometrías, los espacios de Schrödinger, de Lifshitz y WAdS, son soluciones de teorías de gravedad con campos de espín-2 masivos sin necesidad de la presencia de materia ni campos adicionales. Así, la gravedad masiva en tres dimensiones aparece como el escenario minimal en el que es posible abordar estos problemas, sin la necesidad de introducir campos de materia artificiales para sostener dichas geometrías. Entre muchas teorías de gravedad masiva en tres dimensiones, se destacan básicamente tres: Topologically Massive Gravity (TMG), New Massive Gravity (NMG), y Zwei-Dreibein Gravity (ZDG). En esta tesis nos dedicaremos a las dos últimas (aunque mencionaremos la relación con la primera), que son las que exhiben invariancia ante paridad. Asimismo, NMG y ZDG comparten la propiedad de corresponder a teorías de campos de espín-2 masivos, con dos grados de libertad locales. NMG es una teoría de derivadas superiores, invariante de paridad, y constituye una completación no-lineal completamente covariante de la teoría de Fierz-Pauli. Por otro lado, ZDG es una teoría de bi-gravedad; es decir, presenta dos campos de espín-2 como entidades dinámicas. Esta última teoría presenta la notable propiedad de ser capaz de lograr unitariedad tanto en el borde como en el *bulk* del espacio-tiempo, resolviendo por tanto la llamada “inconsistencia *bulk-boundary*”. Además, ZDG tiene como límite particular a NMG, siendo, en un sentido que es necesario precisar, una generalización de ésta última.

En esta tesis estudiaremos tanto NMG como ZDG en el contexto de AdS/CFT y de sus generalizaciones no-AdS. Lo haremos con la motivación de investigar cuáles son las propiedades

de las teorías de campos duales en estos casos en los que hay gravitones masivos en el *bulk*. El foco central de nuestro estudio estará en: i) las técnicas de renormalización holográfica tanto en espacios AdS como en espacios no-AdS, ii) la obtención de soluciones exactas AdS y no-AdS que tengan interés en holografía.

Un pieza fundamental en el estudio de toda teoría de campos es su tensor de energía-momentos y sus cargas conservadas. El cálculo de las mismas (o de sus valores de expectación en la versión cuántica de la teoría) mediante holografía es una herramienta sumamente útil para caracterizar las teorías del borde (por ejemplo, mediante el cálculo de las anomalías). Por ello, en esta tesis aplicaremos el método de renormalización holográfica en NMG para espacios con condiciones de borde tipo-AdS logarítmicas, lo que nos permitirá comprobar la robustez del método ante deformaciones que incluso cambian el comportamiento del orden más relevante en la expansión asintótica. También exploraremos hasta dónde es posible extender la receta de renormalización holográfica para geometrías no-AdS como los espacios WAdS, agujeros negros asintóticamente WAdS, y defectos angulares inmersos en WAdS que representan partículas masivas. También mostramos que ZDG posee un espectro de soluciones AdS y no-AdS muy rico e interesante para holografía, que incluye tanto espacios con asintóticas AdS diversas, como geometrías con invariancia de escala anisótropa tipo Schrödinger y Lifshitz, así también como espacios AdS $\times \mathbb{R}$ y espacios WAdS. Esto permite dar el primer paso para considerar esta teoría de bi-gravedad como modelo para investigar extensiones de AdS/CFT.

PALABRAS CLAVES: CORRESPONDENCIA ADS/CFT; CAMPOS DE ALTO ESPÍN; GRAVEDAD MASIVA; BI-GRAVEDAD; HOLOGRAFÍA NO-RELATIVISTA.

HOLOGRAPHIC RENORMALIZATION AND MASSIVE SPIN-2 FIELDS

IN THREE DIMENSIONS

ABSTRACT

In this thesis we will study holographic renormalization in theories with massive spin-2 fields in Anti-de Sitter (AdS) and non-Anti-de Sitter (non-AdS) spaces. More precisely, we will study gravity theories in 2+1 dimensions with dynamical degrees of freedom. The motivation to study these theories has its origin on the AdS/CFT correspondence and the attempts to extend it to spaces with non-AdS asymptotic boundary conditions. Some of the more studied extensions of holography involve non-AdS spaces; for example: Schrödinger spaces, Lifshitz spaces, and warped deformations of AdS space (WAdS). The first two have been proposed as gravity duals of condensed matter systems (with and without Galilei symmetry, respectively) with anisotropic scale invariant symmetry. The WAdS spaces appear in this context too, as well as in the study of near-horizon geometry of extremal rotating black holes. These type of geometries, the Schrödinger, Lifshitz, and WAdS spaces, are solutions of gravity theories with massive spin-2 fields without any matter content. Hence, three-dimensional massive gravity is the minimal scenario in which it is possible to attack these problems without the addition of artificial matter fields. There are three massive gravity theories in 3D that stand out among others: Topologically Massive Gravity (TMG), New Massive Gravity (NMG), and Zwei-Dreibein Gravity (ZDG). In this thesis we will focus on the last two (even though we will mention the connection with the first one), which exhibit invariance under parity. Additionally, both NMG and ZDG are theories with massive spin-2 fields with two local degrees of freedom. NMG is a higher-derivative parity invariant theory and it is a fully covariant non-linear completion of Fierz-Pauli theory. On the other hand, ZDG is a bi-gravity theory, i.e. it has two spin-2 fields as dynamical entities. This last theory solves the so-called bulk-boundary unitarity clash, in other words, it achieves unitarity both in the bulk and in the boundary at the same time. In addition, ZDG contains NMG as a particular limit, thus, ZDG is a generalization of the last one in a sense that must be precised.

In this thesis we will study both NMG and ZDG in the context of AdS/CFT and its generalizations to non-AdS spaces. The goal is to investigate the properties of the dual field theories

when there are massive gravitons in the bulk. The main focus will be: i) holographic renormalization techniques in AdS and non-AdS spaces, ii) exact AdS and non-AdS solutions relevant for holography.

The stress-energy tensor and its associated conserved charges are fundamental quantities of any field theories. Holography is a useful tool to compute them (or their expectation values in the quantum version of the theory) in order to characterize the boundary theories (for instance, by the computation of anomalies). In this thesis we will apply the holographic renormalization method in NMG to spacetimes with logarithmic AdS boundary conditions. The idea is to test the robustness of the method under deformations that modify the leading-order behavior of the asymptotic expansion. We will also explore the possibility to extend the holographic renormalization procedure to non-AdS geometries like WAdS spaces, asymptotically WAdS black holes, and angular defects that represents massive particles on WAdS spaces. We will show that ZDG has a rich spectrum of AdS and non-AdS solutions relevant in the context of holography; which includes AdS spaces with different asymptotics, as well as geometries with anisotropic scale invariant symmetry, like Schrödinger and Lifshitz spaces, $\text{AdS} \times \mathbb{R}$ and WAdS spaces. This is the first step in order to take into consideration this bi-gravity theory to investigate extensions of AdS/CFT.

KEYWORDS: ADS/CFT CORRESPONDENCE; HIGHER-SPIN FIELDS; MASSIVE GRAVITY; BI-GRAVITY; NON-RELATIVISTIC HOLOGRAPHY.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a Gastón Giribet, su ayuda, apoyo y confianza fueron indispensables durante estos años de doctorado. Su dedicación y pasión por la física resultan inspiradoras para todos los que lo rodeamos. Sus consejos certeros y apreciaciones tanto sobre física como sobre otros aspectos son invaluable. Gracias por creer en mi y no ser solo mi director sino también un amigo.

También quiero agradecer a los otros miembros del grupo: Mauricio Leston, Alan Garbarz, Guillem Pérez-Nadal y Mario Galante, quienes más que compañeros de trabajo son amigos. Discusiones de física, de fútbol y de tantos otros temas, ya sea en almuerzos, tomando café o simplemente charlando en los pasillos me han enriquecido enormemente.

Qué decir de Adrián, una persona que me acompaña desde hace más de 15 años tanto en la facultad como fuera de ella. Simplemente, gracias por estar.

Quiero también agradecer a Eric Bergshoeff quién me permitió realizar una estadía bajo su dirección en la Universidad de Groningen. La experiencia ha contribuido enormemente a mi formación académica.

Agradezco a todas las personas que conocí gracias a la física: a la gente de La Plata, de la Universidad de Groningen y los colegas chilenos de la Universidad Austral y del CECs. Todos aportaron a mi crecimiento académico y personal. Y entre todos ellos, tengo que destacar especialmente al profesor Julio Oliva a quién le agradezco enormemente por su colaboración en distintos proyectos, por su hospitalidad y por su amistad.

No me puedo olvidar de los amigos que conocí gracias a la facultad, en especial a Germán Patterson quién me acompaña desde Física 2, y a Víctor Penas en quién encontré un colega y un amigo. También quiero agradecer a otros amigos que de una u otra manera han estado a mi lado todos estos años: Pali, Herno, Sasa, Rama, Nahui, Fer y Edmundo. Agradezco además a mis compañeros de oficina Ale Strajzman y Rodrigo Lugones.

También agradezco al resto de mis colaboradores y co-autores: Mariano Chernicoff , Laura Donnay , José Juan Fernández-Melgarejo , Matías Leoni , Wout Merbis y Jan Rosseel. Disfruté mucho trabajar con uds. y espero que se vuelva a repetir.

Gracias a todos los grupos de fútbol de los que formé parte: el fobal del DM, los más fuertes, el fútbol de los jueves. Y en especial a Los Dueños del Pabellón.

Gracias a la UBA y a CONICET que me permitieron trabajar y vivir de la ciencia en Argentina.

Gracias Laura brindarme amor y aguantarme siempre, por tus consejos (aunque a veces no los siga), por tu confianza. Te amo. Gracias a Lilo y a Cleo por su compañía en tantas noches de estudio y trabajo.

Gracias a mi familia por bancarme siempre.

Y por último, gracias a Oscar Jamardo, por marcarme el comienzo de este camino.

A Laura, Lilo y Cleo, que me han acompañado en estos años de doctorado.

Índice general

Contenidos	ix
1. Introducción	1
2. Correspondencia AdS/CFT	7
2.1. La conjetura de Maldacena	8
2.2. Espacio-tiempo de Anti-de Sitter	10
2.3. Prescripción de Witten-Gubser-Klebanov-Polyakov	13
2.4. Renormalización holográfica	17
2.5. Extensiones de holografía	23
2.5.1. Correspondencia Lifshitz-Schrödinger/CMT	23
2.5.2. Correspondencia WAdS/WCFT	25
3. Teorías de gravedad con campos de espín-2 masivos	29
3.1. Gravedad masiva y holografía	30
3.2. Gravedad masiva: la acción de Fierz-Pauli	32
3.3. New Massive Gravity (NMG)	35
3.3.1. Principio variacional en NMG	38
3.3.2. Tensor de Brown-York en NMG	42
3.3.3. Renormalización holográfica en NMG	43
3.3.4. Inconsistencia de unitariedad bulk/boundary en NMG	49
3.4. Zwei-Dreibein Gravity (ZDG)	51
3.4.1. Bi-gravedad en tres dimensiones	51
3.4.1.1. Límite a NMG en ZDG	54
3.4.2. La teoría linealizada	54
3.4.3. Resolviendo la inconsistencia bulk/boundary	56
3.4.4. ZDG como una teoría de un solo dreibein	56
3.4.5. Auto-dualidad en ZDG	60
4. Espacios asintóticamente AdS y sus deformaciones en NMG	63
4.1. Deformaciones quirales en AdS	64
4.1.1. Condiciones asintóticas de borde	66

4.1.2.	Soluciones no lineales: Deformando la solución BTZ	69
4.1.3.	Cargas conservadas	70
4.2.	Espacios Warped Anti-de Sitter (WAdS)	72
4.2.1.	Agujeros negros asintóticamente WAdS ₃	72
4.2.2.	Tensor de Brown-York y cargas conservadas	75
4.2.2.1.	Contra-términos	75
4.2.2.2.	Energía cuasi-local	77
4.2.2.3.	Término gravitacional de Chern-Simons	78
4.2.2.4.	Momento angular	79
4.3.	Espacios de Gödel en tres dimensiones	80
4.3.1.	Espacio WAdS ₃ tipo-tiempo	81
4.3.1.1.	Espacio WAdS ₃ tipo-tiempo desde la métrica de Gödel	81
4.3.1.2.	Introduciendo un defecto en el espacio de Gödel	83
4.3.1.3.	Espacios WAdS ₃ como fondos gravitatorios	84
4.3.2.	Tensor de Brown-York y cargas conservadas	85
4.3.2.1.	Contra-términos	85
4.3.2.2.	Energía gravitacional cuasi-local	86
5.	Espacios asintóticamente AdS y sus deformaciones en ZDG	89
5.1.	Ondas Anti-de Sitter logarítmicas en ZDG	90
5.1.1.	Puntos críticos	91
5.1.2.	Nueva anomalía	93
5.1.3.	Teoría no-lineal	95
5.1.3.1.	Ondas AdS	95
5.1.3.2.	Puntos especiales	99
5.2.	Espacios invariantes de escala anisótropa en ZDG	101
5.2.1.	Espacios de Lifshitz	101
5.2.1.1.	Agujero negro de Lifshitz	103
5.2.2.	Espacios de Schrödinger	104
5.2.3.	Espacios Warped Anti-de Sitter	105
6.	Conclusiones	109
A.	Espacios Warped Anti-De Sitter: tipo-tiempo y tipo-espacio	117
A.1.	Warped Anti-de Sitter: expansión para r grande	117
A.2.	Relación entre WAdS ₃ tipo-tiempo y tipo-espacio	119
B.	Publicaciones relacionadas con la tesis	123
	Bibliografía	125

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la Relatividad General (GR, por sus siglas en inglés) [Ein16] es el marco teórico que describe la física a escalas cosmológicas y de objetos muy masivos y densos como los agujeros negros. Las predicciones de GR han sido puestas a prueba incontables veces, desde la desviación de la luz en torno al Sol realizada en 1919 por Dyson, Eddington y Davidson [DED20], hasta la reciente detección directa de ondas gravitacionales (predichas por el mismo Einstein en 1916) realizada por la colaboración LIGO en febrero de este año [A+16]. Más allá del éxito y la elegancia de la teoría de Einstein, existen motivos para estudiar modificaciones de GR, algunos de origen observacional y otros de origen teórico. Entre las motivaciones cosmológicas podemos mencionar el llamado “problema de la constante cosmológica” [Wei00, Car01], que refiere a la incompatibilidad entre las estimaciones del valor de la constante cosmológica obtenida de las observaciones de corrimiento al rojo de supernovas tipo Ia [R+98, P+99] y del cálculo de la energía cuántica de vacío en el Modelo Estándar de partículas, llegando a diferir ambas estimaciones en 120 órdenes de magnitud [Wei00, Car01]. La adición de una masa pequeña al gravitón del orden de la constante de Hubble modifica el comportamiento a escalas cosmológicas del potencial gravitatorio, pudiendo proveer una alternativa a la energía oscura [Hin12]. Otra motivación para estudiar partículas masivas de espín-2 proviene de la fenomenología de partículas. Recientemente en el *Large Hadron Collider* se observó un exceso en el canal de di-fotones que podría ser explicado por la presencia de una resonancia de espín-2 masiva [GZ16]. De ser confirmada esta posibilidad, es crucial entender cómo formular una teoría con partículas masivas de espín-2.

Entre las motivaciones de carácter teórico podemos destacar el problema de la cuantización de la gravedad. Como es sabido, GR en $D \geq 4$ no es renormalizable ya que la constante de Newton

G no es adimensional y por lo tanto la teoría no es renormalizable por conteo de potencias¹. Una excepción es el caso particular de $D = 3$ con constante cosmológica negativa, donde es posible ver que todos los contra-términos pueden ser escritos como un término de constante cosmológica, razón por la cual GR en AdS_3 es renormalizable (para mayores detalles referirse a [Wit07]); vale aclarar que, sin embargo, la teoría cuántica de la gravedad en AdS_3 no es un problema resuelto. Un modo de mejorar la renormalizabilidad por conteo de potencias es agregar términos con derivadas superiores al lagrangiano de la teoría². Una de las maneras más naturales de hacerlo es mediante términos con potencias altas en la curvatura. La adición de este tipo de términos en teorías de gravedad fue estudiado por Stelle [Ste78, Ste77], quién descubrió que al hacerlo se añade grados de libertad a la teoría que pueden dar lugar a modos inestables. En [Ste78, Ste77] se mostró que no es posible construir una teoría de gravedad que sea al mismo tiempo perturbativamente renormalizable y libre de inestabilidades tipo-fantasma (modos con el signo incorrecto en el término cinético) en torno a Minkowski.

Por otro lado, la teoría de cuerdas, uno de los candidatos más promisorios a proveer una teoría cuántica de la gravedad y unificadora de todas las interacciones fundamentales, provee otra motivación más para estudiar teorías de gravedad con términos superiores en la curvatura. La teoría efectiva de bajas energías de teoría de cuerdas es una teoría de supergravedad cuya parte gravitatoria está dada por la acción de Einstein-Hilbert. Al estudiar qué correcciones introduce teoría de cuerdas en el sector gravitatorio se puede ver que los términos a segundo orden en la expansión perturbativa son cuadráticos en el tensor de Riemann [Zwi85].

Asimismo, la teoría de cuerdas es el marco original de una idea que revolucionó la física de altas energías desde 1997 hasta la actualidad: la conjetura de Maldacena [Mal99]. También llamada correspondencia AdS/CFT, esta dualidad es la realización más exitosa y precisa de las ideas relacionadas con el principio holográfico en gravedad cuántica [tH93, Sus95], el cuál postula que los grados de libertad deben “estar en la superficie”. El ejemplo clásico es el de la entropía de los agujeros negros que es proporcional al área de su horizonte de eventos [Bek73, BCH73]. Si bien originalmente la conjetura de Maldacena establecía una relación muy precisa entre una teoría de cuerdas particular y una teoría de campos conformes (CFT) especial, la comunidad está convencida de que la dualidad debe ser válida para toda teoría candidata a proveer un modelo consistente de gravedad cuántica. Más específicamente, lo que establece la correspondencia es que toda teoría de gravedad consistente más allá del límite clásico formulada en un espacio AdS_D

¹También es posible chequear mediante el cálculo de amplitudes de *scattering* que GR no es renormalizable a dos *loops*, y si se acopla a materia no es renormalizable a un *loop* [GS85, GS86].

²Con derivadas superiores nos referimos a más de dos derivadas actuando sobre la métrica. La acción de Einstein-Hilbert posee derivadas de segundo orden en la métrica.

es equivalente a una teoría cuántica de campos con simetría conforme en espacio plano de $(D-1)$ dimensiones. Es decir, ambas teorías son dos descripciones distintas de la misma física, incluso siendo ambas de distinta dimensionalidad. De esta notable característica proviene el nombre de holografía para referirse a la dualidad gravedad/*gauge*. Entonces, la correspondencia provee una interpretación de lo que se entiende por hallar una teoría cuántica de la gravedad. En este contexto, significa poder identificar unívocamente las teorías a ambos lados de la dualidad, es decir, determinar la teoría de gravedad del *bulk* o interior de AdS_D y la CFT del *boundary* o borde. Existen pocos casos en los cuales se ha podido identificar ambas teorías, uno de ellos es la versión original de la conjetura de Maldacena que relaciona la teoría de cuerdas tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ con la teoría de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías y grupo de *gauge* $SU(N)$ en espacio plano de cuatro dimensiones. Otra propiedad interesante de la conjetura es que vincula teorías en regímenes de acoplamiento opuestos; es decir, cuando una teoría está en el régimen de acoplamiento débil, la otra está en acoplamiento fuerte y viceversa. En la versión más utilizada de AdS/CFT, la correspondencia provee una descripción de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM fuertemente acoplada, la cual es muy difícil de tratar, en términos de una teoría perturbativa de bajas energías de teoría de cuerdas, es decir, una teoría de supergravedad en la cual se pueden realizar cálculos con relativa facilidad. He aquí una de las características más interesantes y útiles de AdS/CFT, la de ser capaz de proveer una descripción gravitatoria dual tratable de teorías de campos en régimen de acoplamiento fuerte que de otro modo serían muy difíciles de abordar (sino imposibles).

La correspondencia AdS/CFT es extremadamente útil en proveer descripciones duales de teorías conformes en el régimen de acoplamiento fuerte en términos de teorías gravitatorias débilmente acopladas. Sin embargo, la mayoría de estas CFTs no se relacionan con modelos realizables experimentalmente. Esto motiva a hallar extensiones de AdS/CFT que puedan ser aplicadas, por ejemplo, a teorías de materia condensada. Esto podría brindar nuevas ideas para la física de sistemas fuertemente acoplados. Entre las extensiones de holografía que involucran espacios asintóticamente AdS se destacan dos aplicaciones: al plasma de quarks y gluones y a los superconductores. En el primer caso, AdS/CFT permite estudiar la termalización del plasma de quarks y gluones que se genera al colisionar átomos pesados y obtener estimación muy realista del cociente viscosidad/entropía que no es posible con otros métodos [KSS05, CSLM⁺11]. El otro ejemplo de aplicación refiere a los superconductores holográficos [HHH08, Har09], donde AdS/CFT podría brindar una descripción dual de la teoría microscópica que gobierna el comportamiento de los materiales superconductores que no se ajustan a la teoría BCS. Por otro lado,

en la física de materia condensada existen sistemas fuertemente acoplados descritos por teorías con invariancia de escala no-relativista que pueden ser estudiados en un laboratorio. Un ejemplo son los llamados fermiones en *unitariedad*, que son arreglos de átomos fríos cuyas interacciones son aproximadamente invariantes de escala. Otro ejemplo interesante lo constituyen sistemas de electrones fuertemente interactuantes con puntos críticos cuánticos, llamados puntos fijos de Lifshitz, que exhiben invariancia de escala anisótropa del tipo $(t, \vec{x}) \rightarrow (\lambda^z t, \lambda \vec{x})$ con z una constante positiva. Para poder describir mediante holografía los sistemas de materia condensada mencionados, es necesario que la geometría del *bulk* tenga las mismas simetrías que el sistema que se pretende describir. En el caso de los átomos fríos, el espacio-tiempo debe poseer las simetrías del grupo no-relativista conforme, también llamado grupo de Schrödinger [Son08, BM08]. Por otro lado, para los sistemas con puntos fijos de Lifshitz, el dual gravitatorio que los describa debe ser invariante ante difeomorfismos de la forma $(t, \vec{x}) \rightarrow (\lambda^z t, \lambda \vec{x})$. Dicha geometría recibe el nombre de espacio de Lifshitz [KLM08]. Los espacios de Schrödinger y de Lifshitz no son soluciones de vacío de GR, sino que es necesario añadir materia para soportar dichas geometrías. Es interesante notar que estos espacios con invariancia de escala anisótropa aparecen naturalmente como soluciones de vacío de teorías de gravedad con términos superiores en la curvatura, como se mostró en las referencias [ABGGH10, ABGH11]. Otra extensión de AdS/CFT que ha sido muy estudiada en la literatura es la llamada Kerr/CFT [GHSS09] que relaciona la geometría de horizonte cercano de agujeros negros rotantes con la dinámica de una CFT bidimensional. Muy relacionada a Kerr/CFT se encuentra la correspondencia WAdS/(W)CFT [ALP⁺09], donde WAdS refiere a los llamados espacios *Warped Anti-de Sitter* que consisten en deformaciones de AdS₃ [BS06]. Estos espacios también aparecen como geometrías de horizonte cercano de agujeros negros rotantes extremales. En el caso de WAdS/(W)CFT la teoría de campos dual no es una CFT convencional sino que posee un grupo de simetría dado por un producto semi-directo entre un álgebra de Virasoro y un álgebra de Kač-Moody [DHH12]. Por otro lado, es interesante notar que la holografía resulta tan exitosa en relacionar teorías gravitatorias y teorías de campos que incluso mapea teorías de gravedad no-unitarias en CFT no-unitarias. Este es el caso de las llamadas teorías *Log-gravity* y las teorías de campos logarítmicas denominadas *Logarithmic CFT* (LCFT), que tienen aplicación en contextos como percolación y turbulencia. La dualidad que las relaciona se denomina Log-grav/LCFT [GRRZ13].

Como ya mencionamos, las teorías de gravedad con derivadas de orden superior poseen, en general, un mayor número de grados de libertad que la teoría de Einstein³. En el caso de términos cuadráticos en la curvatura además del gravitón no-masivo de GR hay nuevas excitaciones correspondientes a un campo escalar masivo y un gravitón masivo. En torno al espacio plano, uno de los dos gravitones es tipo-fantasma, por lo tanto, la teoría es inestable. Notablemente este problema puede eludirse en tres dimensiones dado que el gravitón no-masivo no posee grados de libertad propagantes, razón por la cual es posible obtener una teoría de gravedad masiva libre de fantasmas. Por lo tanto las teorías de gravedad con campos de espín-2 masivos en $2+1$ dimensiones proveen un escenario interesante para testear extensiones de la correspondencia AdS/CFT. Entre otras teorías de gravedad masiva tridimensionales destacan dos: *Topologically Massive Gravity* (TMG) [DJT82b, DJT82a] y *New Massive Gravity* (NMG) [BHT09a, BHT09b]. TMG es una teoría que viola paridad con ecuaciones de movimiento de tercer orden cuyo espectro posee un modo masivo de espín-2 de helicidad $+2$ o -2 . Por otro lado, NMG preserva paridad y sus ecuaciones de movimiento son de cuarto orden presentando dos modos masivos con helicidades ± 2 correspondientes a los grados de libertad de un gravitón masivo en tres dimensiones. Este tipo de teorías cuentan con un espacio de parámetros más amplio que GR, lo que les permite tener un amplio espectro de soluciones: espacios asintóticamente AdS con condiciones de borde relajadas [GGV09, GGL11, GGGL14], agujeros negros con horizontes de eventos deformados [AKT16], agujeros de gusano [OTT09], espacios de Schrödinger [ABGH09], espacios de Lifshitz y agujeros negros asintóticamente Lifshitz [ABGGH09], y geometrías Warped AdS (WAdS) [BC07, Cle09a]. Este variado menú de soluciones hace que las teorías de gravedad masiva en $2+1$ dimensiones provean un buen escenario en el cuál explorar extensiones de las ideas holográficas. Para ello, como ya dijimos, el primer paso es hallar espacios que realicen geoméricamente las simetrías de la teoría de campos dual que se intenta describir. Sin embargo, esto no es suficiente; también es necesario poder calcular observables tales como valores de espectación. En general, el cálculo ingenuo da lugar a cantidades divergentes y es necesario recurrir a métodos de regularización. En el contexto de AdS/CFT el procedimiento para obtener valores de espectación finitos es el proceso de renormalización holográfica [BK99, dHSS01]. Este procedimiento está bien estudiado en el caso de espacios asintóticamente AdS y en particular para geometrías con condiciones asintóticas AdS₃ de Brown-Henneaux [BH86], pero para otro tipo de condiciones de borde relajadas o asintóticamente Schrödinger, Lifshitz o WAdS₃ no. Por ello es necesario estudiar como extender la receta de renormalización holográfica para otro tipo de geometrías.

³Una excepción la constituyen las teorías de Lovelock que tienen términos superiores en la curvatura, pese a lo cual, sus ecuaciones de movimiento son de segundo orden en derivadas de la métrica. Entonces, posee la misma cantidad de grados de libertad que GR.

Por otro lado, debemos destacar otro tipo de construcciones que también llevan a teorías de gravedad con campos de espín-2: las teorías de bi-gravedad. Este tipo de teorías posee, a diferencia de las teorías de gravedad convencionales, dos métricas, cada una con su propio término cinético. Es interesante notar que las teorías de bi-gravedad pueden interpretarse como teorías de *higher spin*, dado que acoplan de un modo consistente un gravitón no-masivo con un campo de espín-2 masivo. Algunos ejemplos notables son: la llamada teoría $f-g$ [ISS71]; la teoría de Hassan-Rosen [HR12], que es una extensión de la teoría de gravedad masiva libre de fantasmas denominada dRGT [dRGT11]; y, en el caso particular de $2+1$ dimensiones, la teoría *Zwei-Dreibein Gravity* (ZDG) [BdHH⁺13], que posee como límite particular a NMG, y la recientemente propuesta extensión bi-métrica de NMG [AAN⁺16]. ZDG es una teoría de bi-gravedad escrita en formalismo de primer orden que también posee un espectro interesante de soluciones que abarca espacios asintóticamente AdS_3 con condiciones de borde tanto de Brown-Henneaux como relajadas, así como también espacios con invariancia de escala anisótropa con y sin simetría de Galileo [Goy14]; lo cual la convierte en un modelo interesante para explorar extensiones de holografía.

En esta tesis exploraremos la posibilidad de utilizar teorías de gravedad masiva en $2+1$ dimensiones como modelos para extensiones de holografía que incluyen tanto espacios con condiciones asintóticas AdS_3 relajadas (respecto de las de Brown-Henneaux) como espacios con invariancia de escala anisótropa con y sin invariancia de Galileo. Para ello primero introduciremos la correspondencia AdS/CFT y la prescripción de Witten-Gubser-Klebanov-Polyakov para calcular observables utilizando la conjetura. También repasaremos el método de renormalización holográfica y los conceptos básicos de algunas extensiones de AdS/CFT en el Capítulo 2. Luego, en el Capítulo 3 introduciremos las teorías de gravedad masiva que utilizaremos en el resto de la tesis: NMG y ZDG. En particular repasaremos la definición de los términos de borde de NMG para obtener un principio variacional bien definido y que permite calcular el tensor de energía-momentos del borde. También veremos cómo es que NMG está incluida en ZDG a través de un procedimiento de límite que involucra una re-definición de campos y de parámetros. Luego en el Capítulo 4 utilizaremos el método de renormalización holográfica en NMG para calcular las cargas conservadas de espacios asintóticamente AdS_3 con condiciones de borde relajadas y a espacios asintóticamente WAdS_3 tipo-tiempo y tipo-espacio. A continuación, en el Capítulo 5, veremos que ZDG soporta como soluciones ondas AdS_3 con decaimiento logarítmico así como también espacios con invariancia de escala anisótropa tales como geometrías de Schrödinger y Lifshitz. ZDG también contiene en su espectro agujeros negros asintóticamente Lifshitz y WAdS tipo-espacio. Por último el Capítulo 6 contiene las conclusiones de la tesis.

Capítulo 2

Correspondencia AdS/CFT

En este capítulo repasaremos la formulación de correspondencia AdS/CFT. Veremos como la prescripción de Witten o de Gubser-Klebanov-Polyakov nos provee de un método explícito para calcular observables utilizando la dualidad. Gracias a esta prescripción podremos identificar el tensor cuasi-local de Brown-York con el tensor de energía-momentos de la teoría de *gauge* dual. También mostraremos como regularizar las cargas conservadas de Brown-York mediante el proceso de renormalización holográfica.

2.1. La conjetura de Maldacena

Originalmente la teoría de cuerdas fue diseñada a fines de los años '60 para tratar de entender la dinámica de los hadrones y los mesones que interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte. La teoría de cuerdas se diseñó para explicar entre otras cosas, las llamadas trayectorias de Regge, que vinculan el momento angular con la energía de los hadrones a través de la expresión $J = \alpha' E^2$. Pronto se comprendió que ese comportamiento podía ser explicado con una cuerda abierta. Poco tiempo después, a mediados de los años '70, hizo su aparición la cromodinámica cuántica (QCD), una teoría cuántica de campos (QFT) con simetría de *gauge* $SU(3)$, como la descripción correcta de la interacción fuerte entre quarks y gluones. Es interesante destacar que el modelo de cuerdas provee una descripción útil de bajas energías para la dinámica de los mesones, dado que estos están formados por un par quark/anti-quark “unido” por gluones que forman una especie de “tubo de líneas de fuerza”, lo que pictóricamente puede pensarse como una cuerda que une el par quark/anti-quark (ver Figura 2.1). Dado que la tensión de la cuerda que une los quarks es independiente de su longitud, necesitamos una cantidad infinita de energía para separarlos. Este razonamiento explica al menos cualitativamente el comportamiento de QCD a bajas energías, es decir, en el régimen no-perturbativo.

Esto nos permite inferir que existe alguna relación entre teorías de *gauge* en el régimen no-perturbativo y teorías de cuerdas. Es importante remarcar que hasta el día de hoy no se conoce la descripción exacta de QCD en términos de teoría de cuerdas. Sin embargo, existe una realización concreta de esta dualidad entre teorías de *gauge* fuertemente acopladas y teoría de cuerdas: la llamada “conjetura de Maldacena” o correspondencia AdS/CFT [Mal99]. Si bien no haremos uso explícito de la dualidad en su versión original, merece la pena describirla al menos una vez. La conjetura de Maldacena relaciona una QFT en $\mathbb{R}^{1,3}$ muy particular, una teoría de Yang-Mills (YM) con supersimetría e invariancia de *gauge* $SU(N)$ en el límite de acoplamiento fuerte, con una teoría de supergravedad (SUGRA) en un fondo $AdS_5 \times S^5$ que es el límite de bajas energías de teoría de cuerdas. Esta geometría anti-de Sitter y el hecho de que $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría de campos conforme (CFT) es lo que le da el nombre a la conjetura: correspondencia AdS/CFT.

Se cree que esta dualidad gravedad/*gauge* es válida no solo dentro del marco de teoría de cuerdas sino que es una característica de toda teoría de gravedad de la cual se espera un buen comportamiento más allá del límite clásico. Entonces la correspondencia relaciona una teoría de gravedad en un espacio Anti-de Sitter (AdS) D -dimensional con una teoría campos conformes en espacio plano de $(D - 1)$ dimensiones. Este es un aspecto muy interesante y curioso de la conjetura,

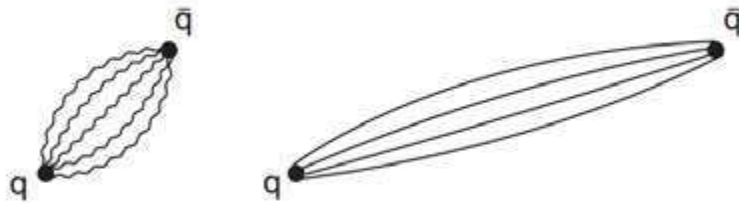


FIGURA 2.1: Un mesón visto como un par quark/anti-quark unido por gluones (representados como líneas de campo). Al separar el quark y el anti-quark las líneas de campo pueden verse como una cuerda. Figura tomada del Capítulo 23, página 526 de [Zwi06].

ya que relaciona teorías de distinta dimensionalidad. Es en este sentido en el que se denomina a la correspondencia como una dualidad “holográfica”, como los hologramas que codifican una imagen tridimensional en una superficie bidimensional. La idea de que una teoría de gravedad cuántica debe ser “holográfica”, en el sentido de que sus grados de libertad deben estar en la “superficie”, ha estado en la comunidad hace ya largo tiempo. Ejemplo de ello son los trabajos pioneros de ’t Hooft [tH93] y Susskind [Sus95]. El ejemplo más emblemático es el de la entropía de los agujeros negros. En los sistemas físicos usuales, la entropía, una cantidad extensiva, es proporcional al volumen de sistema. Sin embargo, en el caso de los agujeros negros, su entropía es proporcional al área del horizonte de eventos \mathcal{A} medida en unidades de Planck [Bek73, BCH73]

$$S_{\text{BH}} = \frac{1}{4\ell_{\text{P}}^2} \mathcal{A},$$

donde $\ell_{\text{P}} = G^{1/(D-2)}$ es la longitud de Planck en D dimensiones. Esto es parte de lo que se conoce como principio holográfico. La realización más concreta y exitosa de este principio es el trabajo de Maldacena [Mal99].

Lo que establece la correspondencia AdS/CFT es una equivalencia entre dos teorías totalmente diferentes. La idea subyacente (y en cierto sentido más fundamental) al trabajo de Maldacena es que existe una dualidad entre la teoría de gravedad formulada en el *bulk* (o interior) de AdS_D y la teoría de campos conformes en el *boundary* (o borde) de dicho espacio. Lo que la conjetura nos dice es que la teoría de gravedad y la CFT son dos realizaciones de la misma física, dos descripciones muy diferentes del mismo fenómeno físico. Otro aspecto sumamente atrayente de la correspondencia es que relaciona dos teorías en regímenes completamente diferentes. La teoría de gravedad y la teoría de campos se encuentran en regímenes opuestos, ya sea este clásico o cuántico, perturbativo o no-perturbativo. Por ejemplo, si la teoría gravitatoria puede ser tratada en la aproximación semi-clásica, la CFT dual deber ser tratada cuánticamente; lo mismo sucede

para los regímenes perturbativo/no-perturbativo. Esta característica de la dualidad es de suma utilidad, ya que cuando no sabemos o no podemos realizar un cálculo, por ejemplo, en la CFT ya que la misma posee una constante de acoplamiento “grande”, podemos utilizar la conjetura para hacer el cálculo en la teoría de gravedad. Esta propiedad “débil/fuerte” ha generado mucho interés en extender la correspondencia para ser utilizada como herramienta de cálculo en sistemas fuertemente correlacionados en materia condensada; nos referiremos a esto con más detalle en al final de este capítulo y en los siguientes. Por otro lado, la correspondencia nos da una nueva manera de entender el significado de tener una teoría cuántica de la gravedad; en este contexto significa poder identificar unívocamente la teoría de *bulk* con la teoría del *boundary*.

De qué manera estas dos teorías están relacionadas y cómo realizar cálculos concretos utilizando holografía fue explicitado en las referencias [Wit98] y [GKP98]. Dicha “receta” es lo que se conoce como prescripción de Witten o de Gubser-Klebanov-Polyakov y será repasado en la Sección 2.3, pero primero haremos un breve repaso de la geometría AdS y veremos a que nos referimos con borde en dicho espacio.

2.2. Espacio-tiempo de Anti-de Sitter

Comenzaremos estudiando el espacio-tiempo de anti-de Sitter (AdS) en GR en $D = d + 1$ dimensiones. AdS_{d+1} es una solución maximalmente simétrica (el número de vectores de Killing es el máximo posible) con constante cosmológica negativa $\Lambda < 0$ de la acción de Einstein-Hilbert¹

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1} \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.1)$$

donde G_{d+1} es la constante de Newton en $(d + 1)$ dimensiones, R es el escalar de Ricci de la métrica $g_{\mu\nu}$ con $\mu, \nu = 0, \dots, d$.

Otro modo de introducir AdS_{d+1} es como una superficie embebida en $\mathbb{R}^{2,d}$. Entonces AdS_{d+1} resulta ser la hiper-superficie definida por el hiperboloide

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_d^2 = -L^2,$$

¹Las convenciones que utilizaremos para los tensores de curvatura son las del libro de S. Carroll [Car04] con signatura mayoritariamente “+”.

en un espacio de $d + 2$ dimensiones con métrica plana

$$ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + dX_1^2 + \dots + dX_d^2.$$

Por construcción, este espacio tiene grupo de isometría $SO(2, d)$, en consecuencia AdS_{d+1} también es invariante ante transformaciones de $SO(2, d)$.

Realizando el siguiente cambio de coordenadas $U = X_{-1} + X_d$, $V = X_{-1} - X_d$ e $Y_\mu = \frac{L}{U} X_\mu$ con $\mu = 0, \dots, d$, podemos escribir AdS_{d+1} del siguiente modo

$$ds^2 = \frac{L^2}{U^2} dU^2 + \frac{U^2}{L^2} dY^2. \quad (2.2)$$

Otra forma de escribir AdS_{d+1} es con el llamado *Poincaré patch*, donde el cambio de coordenadas es $X_{-1} = \frac{z}{2}(1 + \frac{1}{z^2}(1 + x^i x^i - t^2))$, $X_0 = \frac{L}{z}t$, $X^i = \frac{L}{z}x^i$ y $X_d = \frac{z}{2}(1 - \frac{1}{z^2}(1 + x^i x^i - t^2))$, con $i = 1, \dots, d$ quedando el elemento de línea de AdS_{d+1} escrito como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (2.3)$$

Luego tenemos el conjunto de coordenadas globales, dadas por $X_{-1} = L \cosh \rho \cos \tau$, $X_0 = L \cosh \rho \sin \tau$, y $X^i = L \sinh \rho \hat{x}^i$, donde las coordenadas \hat{x}^i parametrizan S^{d-1} . La métrica de AdS_{d+1} ahora toma la forma

$$ds^2 = L^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2).$$

Si realizamos la transformación $r = L \sinh \rho$ y $t = L\tau$, AdS_{d+1} se escribe del siguiente modo

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.4)$$

en coordenadas globales.

Finalmente para terminar esta sección notemos que AdS_{d+1} en el parche de Poincaré tiene un “borde” en $z = 0$. En el límite $z \rightarrow 0$ el factor L^2/z^2 diverge. Si tomamos un valor finito y pequeño $z = \epsilon$ con $\epsilon \ll 1$ la métrica nos queda

$$ds^2|_{z=\epsilon} = \frac{L^2}{\epsilon^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu).$$

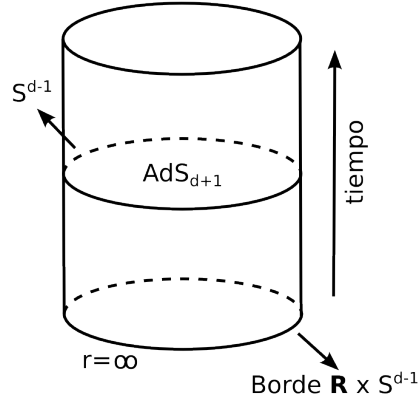


FIGURA 2.2: Diagrama de Penrose de AdS_{d+1} . La dirección vertical es el tiempo. Las secciones a tiempo fijo y radio fijo son esferas de $d-1$ dimensiones. El borde de AdS_{d+1} está dado por la dirección temporal y una esfera S^{d-1} de radio unitario representada aquí como un círculo.

Si ahora realizamos una transformación conforme de la forma $ds'^2 = \Omega(x)ds^2$ tal que ds'^2 no tiene ningún polo cuando $\epsilon \rightarrow 0$, notaremos que el nuevo elemento de línea ds'^2 es el espacio de Minkowski en d dimensiones. Este “borde” de AdS_{d+1} es un “borde conforme”, define lo que se conoce como una clase conforme de métricas d -dimensionales. Es en este espacio de Minkowski de d dimensiones donde está formulada la CFT dual a la teoría de gravedad en AdS_{d+1} . A la teoría de campos en el borde nos referiremos simplemente como “la teoría del borde” y a la teoría de gravedad como la “teoría del *bulk*”.

Otra forma de ver que AdS_{d+1} posee un borde es recurriendo a su diagrama de Penrose en las coordenadas globales (2.4). Podemos ver que, si extraemos un factor global $(1 + \frac{r^2}{L^2})$ de la métrica (2.4) y realizamos el cambio de variables $d\rho = dr / (1 + \frac{r^2}{L^2})$ con ρ tomando valores en un rango finito, la métrica de AdS_{d+1} puede escribirse como

$$ds^2 = (1 + r^2(\rho)) (-dt^2 + R(\rho)^2 d\Omega_{d-1}^2 + d\rho^2) ,$$

donde además hemos tomado $L = 1$ sin pérdida de generalidad y donde $R(\rho)^2$ es una función positiva que determina el radio de la esfera S^{d-1} . Entonces, el diagrama de Penrose de AdS_{d+1} es un cilindro sólido de altura infinita, como puede verse en la Figura 2.2. Podemos notar que para $\rho = \pi/2$, *i.e.* $r = \infty$, la métrica de AdS_{d+1} es conforme a $\mathbb{R} \times S^{d-1}$. Por lo tanto, el borde de AdS_{d+1} está dado por las métricas d -dimensionales que pertenecen a la clase conforme de $\mathbb{R} \times S^{d-1}$.

En la siguiente sección veremos cómo calcular observables utilizando la conjetura, en la versión

más habitual de la misma, es decir, en el régimen semi-clásico de la teoría de gravedad y cuántico no-perturbativo de la CFT. La prescripción de Witten nos da un “diccionario holográfico” que nos dice que es lo que debemos calcular del lado de gravedad para obtener el valor de expectación de un determinado observable en la teoría de campos.

2.3. Prescripción de Witten-Gubser-Klebanov-Polyakov

La correspondencia AdS/CFT puede resumirse como

$$\left\{ \text{Teoría de Gravedad en AdS}_{d+1} \right\} \stackrel{\text{AdS/CFT}}{\equiv} \left\{ \text{CFT en Mink}_d \right\}. \quad (2.5)$$

Lo que significa la “igualdad” en (2.5) es que tanto la teoría de gravedad en un fondo AdS_{d+1} como la CFT en espacio plano d -dimensional son descripciones equivalentes de la misma física.

Pero esto no es suficiente, necesitamos saber cómo realizar cálculos explícitos utilizando la correspondencia AdS/CFT (2.5), para ello necesitaremos introducir una prescripción para calcular observables. La determinación de dicha prescripción fue realizada por Witten [Wit98] e independientemente por Gubser, Klebanov y Polyakov [GKP98]. La idea es establecer una relación precisa entre un operador \mathcal{O} de la teoría de *gauge* y un campo Φ de la teoría de gravedad. Queremos establecer una “receta” para poder obtener funciones de correlación de la teoría del borde con acoplamiento fuerte utilizando el comportamiento de la teoría de gravedad en el régimen perturbativo.

De acuerdo a lo visto anteriormente, la teoría de *gauge* se ubica en el borde de AdS, es decir en la región $z \rightarrow 0$ o $r \rightarrow \infty$ según el sistema de coordenadas elegido, por lo tanto, si queremos establecer una relación entre un operador del borde y un campo del *bulk*, lo más natural sería construir un término de interacción con el operador de la teoría de *gauge* y el campo del interior evaluado en la región asintótica $z \rightarrow 0$. Con estas ideas en mente podemos escribir un término de la forma

$$\int d^d x \Phi^{(0)}(x) \mathcal{O}(x),$$

donde $\mathcal{O}(x)$ es un operador local en el borde e invariante de *gauge*, y $\Phi_0(x)$ es la fuente que genera la interacción con $\mathcal{O}(x)$. La interpretación de $\Phi^{(0)}$ desde el lado gravitatorio corresponde

al valor del campo dual a \mathcal{O} en la región asintótica $z \rightarrow 0$

$$\Phi^{(0)}(x) = \Phi|_{\partial AdS}(x) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\tilde{\Delta}} \Phi(x, z), \quad (2.6)$$

donde ∂AdS denota el borde de AdS y $\tilde{\Delta}$ es una potencia relacionada con la dimensión conforme del operador \mathcal{O} , por ejemplo, para un campo escalar masivo $\tilde{\Delta} = -d/2 + \sqrt{m^2 L^2 + d^2/4}$ donde L es el radio de curvatura de AdS_{d+1} .

A esta relación entre campos en AdS y operadores locales e invariantes de *gauge* se la conoce como “correspondencia campo/operador” o “diccionario holográfico”. Es importante aclarar que no hay una manera unívoca de identificar campos con operadores, pero en general ambos deben tener los mismos números cuánticos ante las simetrías globales de la teoría y el acoplamiento entre ellos debe formar un invariante de *gauge*. Otros ejemplos conocidos de relación entre operadores duales viene dada por la identificación de corrientes conservadas ante simetrías globales y campos vectoriales en AdS

$$\int d^d x A_i^{(0)}(x) J^i(x).$$

En este caso el campo A_i puede pensarse como un campo externo sobre el fondo gravitatorio de AdS y $A_i^{(0)}(x)$ es el valor en el borde de $A_i(x, z)$.

Otro caso de sumo interés es el de la identificación del campo dual al tensor de energía-momentos de la CFT del borde $\mathcal{T}^{\mu\nu}(x)$. Este tensor es simétrico y es la corriente conservada asociada a la simetría traslacional. La fuente de este operador tiene que ser un tensor simétrico del *bulk* y es la métrica inducida en el borde

$$\int d^d x g_{ij}^{(0)}(x) \mathcal{T}^{ij}(x).$$

Desde el lado de teoría de campos, podemos interpretar a $g_{ij}^{(0)}$ como una deformación externa de la métrica plana del borde, y desde el lado gravitatorio, como el valor del borde de la métrica $g_{ij}(x, z)$, más precisamente la clase conforme de la métrica inducida en $z = 0$.

Basándonos en la correspondencia campo/operador anteriormente descrita, es natural suponer que existe una relación entre la función de partición de la teoría de gravedad y la funcional generatriz en la teoría de campos. Dicha relación es la siguiente

$$\mathcal{Z}_{\text{grav}} [\Phi|_{\partial AdS}(x)] \stackrel{\text{AdS/CFT}}{\equiv} \left\langle \exp \int d^d x \Phi^{(0)}(x) \mathcal{O}(x) \right\rangle_{\text{CFT}}, \quad (2.7)$$

donde $\Phi^{(0)}$ es la fuente del operador \mathcal{O} de la CFT y Φ es campo dual en AdS. Se asume la identificación de $\Phi^{(0)}$ con el valor en el borde de Φ como en (2.6).

En general es muy difícil calcular el lado izquierdo de (2.7) o incluso imposible, tanto por dificultades técnicas como conceptuales². Sin embargo, bajo ciertas condiciones, podemos obtener la función de partición de gravedad en su aproximación de *saddle point*, evaluando la acción clásica euclídea en una solución de las ecuaciones de movimiento, la llamada acción *on-shell*

$$\mathcal{Z}_{\text{grav}} [\Phi^{(0)}] \simeq \exp \left(- S_{\text{on-shell}} [\Phi^{(0)}_{\text{class}}] \right). \quad (2.8)$$

En la ecuación de arriba $S_{\text{on-shell}} [\Phi^{(0)}_{\text{class}}]$ es la acción clásica euclídea evaluada en una solución de las ecuaciones de movimiento que satisface determinadas condiciones de contorno. En la versión más utilizada de la conjetura, la teoría de gravedad está en su aproximación semi-clásica mientras que la CFT dual está en el régimen cuántico no-perturbativo.

Ahora ya estamos en condiciones de dar la “receta” para calcular funciones de correlación de la teoría del borde utilizando la correspondencia AdS/CFT. Por definición

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle_{\text{CFT}} \equiv (-1)^n \frac{\delta^n \log(\mathcal{Z}_{\text{CFT}} [J])}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (2.9)$$

donde J es la fuente del operador \mathcal{O} . En general es posible calcular (2.9) en el régimen perturbativo, pero fuera de este es extremadamente difícil. Sin embargo, apelando a la correspondencia AdS/CFT (2.7) junto con la aproximación (2.8) e identificando $J = \Phi^{(0)}$ obtenemos la prescripción de Witten para calcular funciones de correlación en la teoría del borde utilizando la acción de gravedad

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle_{\text{CFT}} = (-1)^n \frac{\delta^n S_{\text{on-shell}} [\Phi^{(0)}_{\text{class}}]}{\delta \Phi^{(0)}(x_1) \dots \delta \Phi^{(0)}(x_n)}. \quad (2.10)$$

Vale destacar que en el caso de acoplamiento fuerte el lado izquierdo de (2.10) puede no estar bien definido, sin embargo, el lado derecho es, en principio, calculable. También es importante señalar que, debido al volumen infinito de AdS, cantidades como $S_{\text{on-shell}} [\Phi_{\text{class}}]$ o las funciones de correlación (2.10), sufren de divergencias *IR* (*UV* en la teoría del borde) y es necesario introducir un procedimiento para regularizarlas, este método es la renormalización holográfica que se verá en la próxima Sección.

Para ejemplificar cómo funciona (2.10) vamos a calcular la función de dos puntos de un campo escalar sin masa en AdS. La acción de un campo escalar en un fondo de AdS (asumimos que la

²De hecho aún no contamos con una formulación de gravedad cuántica consistente.

presencia del campo escalar no afecta a la geometría del espacio-tiempo) es

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^d x dz \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (2.11)$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica de AdS_{d+1} euclídeo que viene dada por el elemento de línea

$$ds_{AdS}^2 = \frac{1}{z^2} (\delta_{ij} dx^i dx^j + dz^2),$$

donde el borde de AdS se encuentra en $z = 0$. Entonces debemos hallar la función de Green o propagador *bulk-boundary* que satisface la ecuación diferencial

$$\square K(\vec{x}, z; \vec{x}') = \partial_i \partial^i K(\vec{x}, z; \vec{x}') = \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

que resulta ser

$$K(\vec{x}, z; \vec{x}') = C \frac{z^d}{(z^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2)^d}, \quad (2.12)$$

donde C es una constante de normalización. Al reemplazar (2.12) en la acción (2.11) e integrando por partes obtenemos la acción *on-shell*

$$S_{\text{grav}}[\phi_0] = \frac{Cd}{2} \int d^d x \int d^d x' \phi_0(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{2d}} \phi_0(\vec{x}').$$

Por último, utilizamos la prescripción de Witten (2.10) para obtener la función de dos puntos

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle = -\frac{Cd/2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{2d}},$$

que corresponde a un operador con peso conforme $\Delta = d$.

El caso de un campo escalar masivo es más complicado y no lo mostraremos aquí. A continuación enumeraremos los pesos conformes para distintos campos en AdS_{d+1} [AGM⁺00]

- campo escalar: $\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{m^2 + \frac{d^2}{4}}$
- campo espinorial: $\Delta = \frac{d}{2} + |m|$
- campo vectorial: $\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{m^2 + \frac{(d-2)^2}{4}}$
- p-formas: $\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{m^2 + \frac{(d-2p)^2}{4}}$
- (d/2)-formas de primer orden (con d par): $\Delta = \frac{d}{2} + |m|$

- campo de Rarita-Schwinger: $\Delta = \frac{d}{2} + |m|$
- campo no-masivo de espín-2: $\Delta = d$

Es importante señalar que las funciones de dos puntos son observables cinemáticos, para tener en cuenta la dinámica de la teoría es necesario computar las funciones de tres y cuatro puntos cuyos resultados pueden verse en las Secciones 3.3.2 y 3.3.3 de [AGM⁺00].

2.4. Renormalización holográfica

Como hemos dicho, los valores de expectación y las funciones de correlación en teorías de campos suelen no estar bien definidas y pueden resultar divergentes. Para solucionar esto se recurre al proceso de renormalización holográfica. La realización de este mecanismo en el contexto de AdS/CFT ha sido estudiado en [dHSS01] y [BK99]. Aquí seguiremos la referencia [BK99].

Nos centraremos en el cálculo del valor de expectación del tensor de energía-momentos de la teoría del borde, ya que el interés principal en el Capítulo 4 es el de obtener las cargas conservadas de distintos espacios asintóticamente AdS y no-AdS.

Recordemos que el campo gravitatorio dual al tensor de energía-impulso \mathcal{T}^{ij} de la CFT del borde es la métrica del borde $g_{ij}^{(0)}$. De acuerdo a la prescripción de Witten (2.10) el valor expectación de \mathcal{T}^{ij} viene dado por

$$\langle \tilde{\mathcal{T}}^{ij}(x) \rangle_{\text{CFT}} = \frac{\delta S_{\text{on-shell}}}{\delta g_{ij}^{(0)}},$$

sin embargo, la expresión anterior no es un tensor, sino una densidad tensorial. Para obtener un tensor debemos dividir por la cantidad $\sqrt{-g^{(0)}}$

$$\langle \mathcal{T}^{ij}(x) \rangle_{\text{CFT}} = \frac{2}{\sqrt{-g^{(0)}}} \frac{\delta S_{\text{on-shell}}}{\delta g_{ij}^{(0)}}. \quad (2.13)$$

Es interesante notar que la expresión del lado derecho de (2.13) es un tensor conocido, el tensor cuasi-local de Brown-York

$$T_{\text{BY}}^{ij} \equiv \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta \gamma_{ij}}, \quad (2.14)$$

donde γ_{ij} es la métrica inducida en hipersuperficies de r constante. Este tensor fue introducido por dichos autores en [BY93] para calcular cargas conservadas en gravedad inspirados en el método de Hamilton-Jacobi aplicado a GR. De aquí en más llamaremos a la métrica inducida o métrica del borde γ_{ij} y no $g_{ij}^{(0)}$ como en la sección anterior.

Para mostrar cómo se realiza el proceso de renormalización holográfica primero debemos contar con un principio variacional bien definido para la acción de Einstein-Hilbert. Debido a que la acción de GR contiene derivadas de segundo orden, es necesario añadir un término de borde a fin de tener un problema de Dirichlet bien determinado para la métrica. Dicho término es el de Gibbons-Hawking [GH77, Yor72] y está dado por

$$S_{\text{GH}} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\Sigma_r} d^d x \sqrt{-\gamma} K,$$

donde K es la traza de la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu} = -(1/2)\mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu}$, con \mathcal{L}_n la derivada de Lie asociada al campo vectorial del vector normal n^μ a las hiper-superficies de r constante. Σ_r es la hiper-superficie a r constante donde imponemos $\delta g_{\mu\nu} = 0$.

La acción completa de GR está dada por

$$S_{\text{GR}} = S_{\text{EH}} + S_{\text{GH}} + S_{\text{C}},$$

donde S_{EH} es la acción de Einstein-Hilbert, S_{GH} es el término de Gibbons-Hawking y S_{C} es la parte de contra-términos, que será especificada más adelante, y que permitirá regularizar la acción y el tensor de energía-momentos del borde.

Ahora consideremos una foliación del espacio-tiempo utilizando una descomposición tipo-ADM de la métrica

$$ds^2 = N^2 dr^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dr)(dx^j + N^j dr),$$

donde γ_{ij} es la métrica inducida en las hiper-superficies Σ_r de r constante. Tomamos los índices $i, j = \{0, \dots, d-1\}$. En AdS la métrica del borde adquiere un factor de Weyl infinito cuando tomamos $r \rightarrow \infty$, por lo tanto pensaremos el borde de AdS_{d+1} como una clase conforme de bordes (para mayores detalles ver [Wit98]). La expresión para el tensor de energía-momento del borde renormalizado es

$$T_{ij}^* = T_{ij}^{\text{BY}} - \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_{\text{C}}}{\delta \gamma^{ij}}, \quad \text{donde} \quad T_{ij}^{\text{BY}} = \frac{1}{8\pi G} (K_{ij} - K \gamma_{ij}), \quad (2.15)$$

debemos elegir S_{C} de modo tal que cancele las divergencias que aparecen al tomar el límite $r \rightarrow \infty$ en Σ_r . Denotaremos el borde de la variedad por $\partial\Sigma$.

Para los casos de AdS₃, AdS₄ y AdS₅ en GR los contra-términos son

$$\begin{aligned}
AdS_3 : S_C &= -\frac{1}{8\pi G\ell} \int_{\partial\Sigma} d^d x \sqrt{-\gamma} \Rightarrow T_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} \left(K_{ij} - K\gamma_{ij} - \frac{1}{\ell}\gamma_{ij} \right) \\
AdS_4 : S_C &= -\frac{1}{8\pi G\ell} \int_{\partial\Sigma} d^d x \sqrt{-\gamma} 2 \left(1 + \frac{\ell^2}{4}\hat{R} \right) \Rightarrow T_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} \left(K_{ij} - K\gamma_{ij} - \frac{2}{\ell}\gamma_{ij} + \ell\hat{G}_{ij} \right) \\
AdS_5 : S_C &= -\frac{1}{8\pi G\ell} \int_{\partial\Sigma} d^d x \sqrt{-\gamma} 3 \left(1 + \frac{\ell^2}{12}\hat{R} \right) \Rightarrow T_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} \left(K_{ij} - K\gamma_{ij} - \frac{3}{\ell}\gamma_{ij} + \frac{\ell}{2}\hat{G}_{ij} \right),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

donde \hat{R} y $\hat{G}_{ij} = \hat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\hat{R}\gamma_{ij}$ son el escalar de Ricci y el tensor de Einstein asociados a γ_{ij} respectivamente. El número de contra-términos que hay que agregar aumenta con la dimensión del espacio. Vale la pena mencionar que, en el formalismo llamado de “Kounterterms” es posible hallar una forma general para los términos de borde que garantizan el principio variacional y la finitud de la acción *on-shell* [KO07]. Sin embargo, en esta tesis, no nos adentraremos en dicho formalismo.

Debemos aclarar que los términos que aparecen en S_C quedan fijados al requerir que cancelen las divergencias en T^{ij} . Es importante que los términos que se incluyan en S_C deben ser construidos con cantidades intrínsecamente invariantes del borde, de modo tal que no contribuyan a las ecuaciones de movimiento del *bulk*.

El caso particular de AdS₃ y de los agujeros negros BTZ [BTZ92] nos regala un ejemplo instructivo para ver cómo funciona esta construcción. Veamos que el tensor (2.15) permite calcular las cargas conservadas según la expresión

$$Q[\xi] = \int_{\partial\Sigma} d^{d-1} x \sqrt{\sigma} \xi^i T_{ij}^* u^j, \tag{2.17}$$

donde ξ^i es un vector de Killing que genera una isometría en el borde, *i.e.* $\mathcal{L}_\xi[\gamma_{ij}] = 0$, y u^i es el vector normal a la superficie tipo espacio Σ dada por

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = d\sigma^2 = N_\sigma^2 dt^2 + \sigma_{ab} (dx^a + N_\sigma^a dt)(dx^a + N_\sigma^a dt),$$

con métrica σ_{ab} , $a, b \in \{1, \dots, d-1\}$.

Si consideramos AdS₃ en el parche de Poincaré

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2}(-dt^2 + dx^2) + \frac{\ell^2}{r^2}.$$

tenemos que $\xi = N_\sigma u^i \partial_i = \partial_t$ es el vector de Killing temporal y $u_i dx^i = -N_\Sigma dt$ es el vector normal unitario ($u^i u_i = -1$) a la superficie tipo espacio a r y t constante. Al reemplazar estas cantidades en (2.17) se obtiene que

$$\mathcal{M} = Q[\xi] = \int dx \sqrt{\gamma_{xx}} \xi^t T_{tt}^* u^t = 0,$$

que es el resultado esperado. De no haber utilizado (2.15), sino simplemente el tensor de Brown-York (2.14) el valor de la masa hubiese sido divergente $\mathcal{M} \sim r^2$. El contra-término (2.16) provee el factor adecuado para cancelar dicha divergencia.

Ahora consideremos el agujero negro BTZ [BTZ92] cuya métrica es

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 8GM + \frac{16G^2 J^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 8GM \right) dt^2 + 8GJ dt d\varphi + r^2 d\varphi^2, \quad (2.18)$$

es importante notar que, dado que satisface las condiciones asintóticas de contorno llamadas de Brown-Henneaux, el contra-término necesario para regularizar el tensor de energía-momento es el mismo. Al evaluar (2.17) en la métrica (2.18) obtenemos los siguientes valores de masa y momento angular

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = Q[\xi] &= \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}} \xi^t (T_{tt}^* u^t + T_{t\varphi}^* u^\varphi) = M, \\ \mathcal{J} = Q[\eta] &= \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}} \eta^\varphi (T_{\varphi t}^* u^t + T_{\varphi\varphi}^* u^\varphi) = J, \end{aligned}$$

que son los resultados esperados.

Un chequeo no-trivial de la correspondencia es comprobar que el tensor de Brown-York representa el valor de expectación del tensor de energía-momentos de una CFT. A continuación mostraremos dos maneras de ver esto: mediante el cálculo de término anómalo en la transformación de T_{BY}^{ij} y calculando la anomalía de traza. Primero veremos la regla de transformación del tensor de Brown-York ante difeomorfismos generados por vectores de Killing asintóticos que representan transformaciones conformes en el borde. Consideremos la métrica de AdS₃ con coordenadas nulas

en el borde $x^\pm = \frac{1}{\ell}(t \pm x)$

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + r^2 dx^+ dx^- .$$

Los vectores de Killing asintóticos (AKV por sus siglas en inglés) ζ^μ son aquellos cuya derivada de Lie no es nula, sino que satisface ciertas condiciones de decaimiento. En este caso estamos interesados en las condiciones de Brown-Henneaux [BH86]

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\zeta[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1/r^3) \\ & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1/r^3) \\ & & \mathcal{O}(1/r^4) \end{pmatrix} .$$

Los AKV $\zeta = \zeta^\mu \partial_\mu$ que satisfacen las condiciones de arriba están dados por

$$\begin{aligned} \zeta^\pm &= \xi^\pm(x^\pm) + \frac{\ell}{2r^2} \partial_\mp^2 \xi^\mp(x^\mp) + \mathcal{O}(1/r^4), \\ \zeta^r &= -\frac{r}{2} (\partial_+ \xi^+(x^+) + \partial_- \xi^-(x^-)) + \mathcal{O}(1/r). \end{aligned}$$

Las componentes ζ^\pm generan transformaciones conformes en el borde, como puede verse de la transformación del tensor de energía-momentos del borde

$$\delta T_{\pm\pm} = 2\partial_\pm \xi^\pm T_{\pm\pm} + \xi^\pm \partial_\pm T_{\pm\pm} - \frac{\ell}{16\pi G} \partial_\pm^3 \xi^\pm .$$

El último término corresponde a la derivada Schwarziana que representa la anomalía conforme del tensor de esfuerzos de una CFT

$$\delta_\epsilon \mathcal{T}(z) = 2\partial\epsilon(z)\mathcal{T}(z) + \epsilon(z)\partial\mathcal{T}(z) - \frac{c}{24\pi} \partial^3 \epsilon(z),$$

donde $\mathcal{T}(z)$ es la componente holomorfa de \mathcal{T}_{ij} (la misma regla de transformación aplica para la componente anti-holomorfa $\bar{\mathcal{T}}(\bar{z})$). Por lo tanto, el valor de la carga central de la CFT₂ dual es

$$c = \frac{3\ell}{2G} . \tag{2.19}$$

A continuación veremos que este resultado coincide con el que se obtiene calculando la anomalía de traza [BK99].

Sabemos que clásicamente el tensor de energía-impulso de una CFT tiene traza nula, sin embargo, puede sufrir una anomalía a nivel cuántico

$$\mathcal{T}_i{}^i = 0 \quad \text{pero} \quad \langle \mathcal{T}_i{}^i \rangle = \frac{c}{24\pi} \hat{R},$$

donde c es la carga central de álgebra de simetría conforme y \hat{R} es el escalar de Ricci de la métrica bidimensional. Podemos ver que la traza del tensor de Brown-York es

$$\gamma^{ij} T_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi G} \left(K + \frac{2}{\ell} \right).$$

Escribiendo la métrica en un sistema de coordenadas conveniente como

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

la curvatura extrínseca queda expresada así

$$K_{ij} = -\frac{r}{2\ell} \partial_r \gamma_{ij}.$$

Ahora utilizaremos la expansión de Fefferman-Graham [FG85], que establece que dada una métrica conforme en el borde de un espacio AdS existe una expansión asintótica formal que resuelve las ecuaciones de Einstein de vacío. Dicha expansión es una serie de potencias de $1/r$ que, para $D = 3$ se trunca a orden dos³

$$\gamma_{ij} = r^2 \gamma_{ij}^{(0)} + \gamma_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(\log(r)); \quad (2.20)$$

para el cálculo que realizaremos el término logarítmico no es relevante. Introduciendo la expansión (2.20) en la traza de T_{ij}^* obtenemos que

$$\gamma^{ij} T_{ij}^* = \frac{\ell}{16\pi G} \mathcal{R},$$

lo que equivale a tomar

$$c = \frac{3\ell}{2G}. \quad (2.21)$$

Este valor de la carga central coincide con el que obtuvimos de la derivada Schwarziana (2.19) y con el hallado por Brown y Henneaux en 1986 [BH86] cuando estudiaron el comportamiento de

³En dimensiones mayores la serie posee más términos.

GR en espacios asintóticamente AdS_3 , obteniendo que está regido por dos copias del álgebra de Virasoro con $c_{\text{BH}} = \frac{3\ell}{2G}$. Esta es precisamente el álgebra de simetría conforme en dos dimensiones. Este resultado confirma la interpretación de que existe una relación entre las teorías de gravedad en AdS_3 y una CFT_2 con dicha carga central.

En el trabajo de Balasubramanian y Kraus [BK99] también se calcula la anomalía de traza en el caso de AdS_5 obteniendo el resultado esperado e incluso pudiendo identificar el contenido de campos de la CFT dual, siendo consistente con la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en cuatro dimensiones. Es notable que realizando cálculos gravitatorios en la aproximación clásica o semi-clásica seamos capaces de reproducir resultados cuánticos de la CFT dual.

Habiendo introducido los principales conceptos de holografía, a continuación haremos un breve repaso de las extensiones de AdS/CFT relevantes para esta tesis.

2.5. Extensiones de holografía

En esta sección repasaremos brevemente las extensiones de holografía con aplicaciones potenciales a sistemas no-relativistas.

2.5.1. Correspondencia Lifshitz-Schrödinger/CMT

Como mencionamos en la introducción, extender las ideas de holografía para ser aplicadas a teorías de materia condensada (CMT del inglés *Condensed Matter Theories*) podría brindar nuevas maneras de entender la física de sistemas fuertemente correlacionados. Un ejemplo interesante lo proveen los sistemas con puntos fijos que presentan transiciones de fase con simetría anisótropa

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}. \quad (2.22)$$

En el caso particular de $z = 2$, un modelo que exhibe esta simetría es la teoría de campos de Lifshitz

$$S = \int d^2x dt \left((\partial_t \phi)^2 - \chi (\nabla^2 \phi)^2 \right),$$

que modela materiales con múltiples puntos críticos parametrizados por χ . Otros ejemplos que poseen la simetría (2.22) son sistemas de electrones fuertemente correlacionados con puntos

críticos cuánticos. Estos modelos presentan propiedades interesantes como ultra-localidad en las funciones de correlación.

Por otro lado, en holografía, uno de los ingredientes fundamentales es la identificación entre el grupo de simetrías de la teoría del borde con el grupo de isometrías del *bulk*. Entonces, para hallar un dual gravitatorio que describa sistemas con puntos fijos de Lifshitz es necesario hallar un espacio que realice geoméricamente (2.22). En la referencia [KLM08] se propuso el siguiente candidato

$$ds^2 = L^2 \left(-r^{2z} dt^2 + r^2 d\vec{x}^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right). \quad (2.23)$$

Las simetrías del espacio de Lifshitz (2.23) incluyen el reescalo (2.22) junto con traslaciones temporales, traslaciones espaciales y rotaciones espaciales. Los generadores de estas simetrías satisfacen la llamada álgebra de Lifshitz [HKO15].

Otro ejemplo que es posible realizar experimentalmente lo constituyen sistemas de átomos fermiónicos fríos en unitariedad⁴. Ajustando el potencial de interacción es posible lograr que la longitud de *scattering* sea infinita haciendo que el sistema esté fuertemente correlacionado. La energía y otras cantidades físicas relevantes del sistema están determinadas por el grupo de simetría [NS07]. Así pues, necesitamos hallar un espacio que posea como isometrías el llamado grupo de Schrödinger [Son08, NS07]. En las referencias [Son08, BM08] se propuso la siguiente geometría como candidato a describir los sistemas mencionados

$$ds^2 = L^2 \left(-\frac{dt^2}{y^{2z}} + \frac{dt d\xi + d\vec{x}^2}{y^2} + \frac{dy^2}{y^2} \right), \quad (2.24)$$

donde \vec{x} es un vector $(D-2)$ dimensional, z es una constante positiva llamada exponente dinámico y ξ es una coordenada nula. La métrica (2.24) posee simetrías ante rotaciones espaciales, traslaciones espaciales, traslaciones temporales, transformaciones de Galileo y dilataciones. En el caso particular de $z = 2$ el espacio (2.24) es invariante ante el grupo de Schrödinger completo ya que se añade una simetría conforme especial. Debemos notar que álgebra de Lifshitz se encuentra contenida en el álgebra de Schrödinger que a su vez está incluida en el grupo conforme relativista [Son08].

Por último, debemos señalar que tanto los espacios de Schrödinger como los de Lifshitz son soluciones de teorías de gravedad con términos superiores en la curvatura [ABGGH10, ABGH11, ABGGH09] en $D \geq 3$, así como también de teorías de bi-gravedad tridimensionales [Goy14].

⁴Reciben este nombre debido a que el *scattering* de dos fermiones satura el límite de unitariedad.

2.5.2. Correspondencia WAdS/WCFT

En la última sección de este capítulo nos abocaremos a una de las extensiones de AdS/CFT más estudiadas en la literatura: la correspondencia WAdS/WCFT [ALP⁺09]. Los espacios WAdS, al poseer invariantes de curvatura constantes, constituyen un ejemplo sencillo en el cual explorar extensiones de la correspondencia AdS/CFT hacia geometrías no-AdS. Además, WAdS/WCFT se encuentra estrechamente relacionada a otra variación de holografía, la llamada dualidad Kerr/CFT [GHSS09], que relaciona la geometría de horizonte cercano de agujeros negros rotantes extremales con teorías conformes bidimensionales.

Los espacios WAdS₃ son deformaciones (ya sean estas compresiones o estiramientos) del espacio AdS₃ [BS06, GHSS09] y aparecen, entre otros contextos, en el límite de horizonte cercano de agujeros negros rotantes extremales. Para ver esto, recordemos primero que la métrica de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist está dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\phi} \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left((\hat{r}^2 + a^2) d\hat{\phi} - a d\hat{t} \right)^2 + \frac{\rho}{\Delta} d\hat{r}^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (2.25a)$$

donde

$$\Delta = \hat{r}^2 - 2GM\hat{r} + a^2, \quad \rho^2 = \hat{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad a = \frac{J}{M}. \quad (2.25b)$$

La métrica (2.25) posee dos constantes de integración M y J que corresponden a la masa y el momento angular del agujero negro de Kerr. Para que (2.25) no posea singularidades desnudas el momento angular debe estar acotado por $|J| \leq GM^2$. En el caso en que J satura la desigualdad se denomina al agujero negro como extremal y es el caso en el cual nos concentraremos; es decir, $J = GM$. Para obtener la geometría de horizonte cercano del agujero negro de Kerr extremal (NHEK por sus siglas en inglés) debemos definir las coordenadas adimensionales

$$t = \frac{\lambda}{2GM}, \quad y = \frac{\lambda}{\hat{r} - GM}, \quad \phi = \hat{\phi} - \frac{\hat{t}}{2GM},$$

y tomar el límite $\lambda \rightarrow 0$ manteniendo las coordenadas (t, x, ϕ, θ) fijas. La geometría NHEK en coordenadas tipo-Poincaré se lee

$$ds^2 = 2GJ\Omega^2 \left(\frac{-dt^2 + dy^2}{y^2} + d\theta^2 + \Upsilon \left(d\phi + \frac{dt}{y} \right)^2 \right), \quad (2.26a)$$

donde hemos definido

$$\Omega^2 = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad \Upsilon = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (2.26b)$$

y donde las coordenadas angulares cumplen $\phi \sim \phi + 2\pi$ y $\theta \in [0, \pi]$. También es posible definir coordenadas globales para NHEK

$$t = \left(\cos \tau \sqrt{1+r^2} + r \right)^{-1}, \quad t = y \sin \tau \sqrt{1+r^2}, \quad \phi = \varphi + \log \left(\frac{\cos \tau + r \sin \tau}{1 + \sin \tau \sqrt{1+r^2}} \right),$$

en las cuales la geometría de horizonte cercano queda escrita como

$$ds^2 = 2GJ\Omega^2 \left(-(1+r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + d\theta^2 + \Upsilon^2(d\varphi + rd\tau)^2 \right). \quad (2.27)$$

Es interesante notar que, para $\theta = \text{const.}$ y $\Upsilon = 0$, la métrica (2.27) es conforme a AdS_2 . Para $\theta = \text{const.}$ y $\Upsilon = 1$, la métrica (2.27) es proporcional a AdS_3 escrito como un fibrado de Hopf de AdS_2 . Más precisamente, es posible escribir la métrica de AdS_3 como

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{4} \left(-\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 + (du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right). \quad (2.28)$$

Si ahora multiplicamos la fibra en (2.28) por un factor de deformación constante K obtenemos

$$ds^2 = \frac{\ell_K^2}{4} \left(-\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 + K(du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right). \quad (2.29)$$

Notemos que (2.29) es conforme a la métrica NHEK (2.27) identificando $r = \sinh \sigma$, $u = \varphi$ y $\Upsilon^2 = K$. Es usual parametrizar la deformación K en términos de una nueva constante ν a través de la relación $K = \frac{4\nu^2}{\nu^2+3}$ y $\ell_K^2 = \frac{4\ell^2}{\nu^2+3}$ [ALP+09], lo que resulta en

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2+3} \left(-\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 + \frac{4\nu^2}{\nu^2+3} (du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right). \quad (2.30)$$

A este espacio lo denominaremos *Warped AdS* (WAdS) tipo-espacio, dado que el factor *warped* tiene signatura positiva. Según el valor de ν los espacios WAdS₃ tipo-espacio se denominan: para $\nu^2 > 1$ estirados o *stretched* y para $\nu^2 < 1$ comprimidos o *squashed* [ALP+09]. Para $\nu = 1$ no hay deformación y (2.30) coincide con AdS_3 .

Otras variedades de espacios *warped* son los *Warped AdS* tipo-tiempo (tWAdS)

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2+3} \left(\cosh^2 \sigma du^2 + d\sigma^2 - \frac{4\nu^2}{\nu^2+3} (d\tau + \sinh \sigma du)^2 \right), \quad (2.31)$$

que resultan equivalentes a la sección tridimensional del espacio de Gödel (ahondaremos en esta relación más adelante, en la Sección 4.3); y los espacios *Warped* AdS tipo-nulo

$$ds^2 = \ell^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + \frac{dx^+ dx^-}{u^2} \pm \frac{(dx^-)^2}{u^4} \right), \quad (2.32)$$

que son equivalentes a la versión tridimensional de los espacios de Schrödinger (2.24) con $z = 2$, habiendo identificado $t = x^-$, $\xi = x^+$ e $y = u$.

Otro aspecto que vuelve interesante a estos espacios es que son soluciones de distintas teorías de gravedad, desde teoría de cuerdas hasta gravedad masiva pasando por teorías de *higher spin*. Además, en el caso de los espacios WAdS tipo-espacio (WAdS), existen agujeros negros que en su región asintótica tienden a WAdS₃. Estos agujeros negros presentan la notable propiedad de ser localmente equivalentes al espacio en el que se encuentra inmersos, tal y como el agujero negro de BTZ es localmente equivalente a AdS₃ [ALP⁺09]. Incluso se han estudiado transiciones de fase *à la* Hawking-Page [GN16] y entropía de entrelazamiento [BC16] en espacios WAdS₃. Todo esto hace de los espacios WAdS₃ un escenario sumamente interesante para explorar versiones no-AdS de holografía.

Algo esencial en holografía es la determinación del grupo de isometrías del espacio, ya que este será el grupo de simetrías de la teoría de campos dual. Las deformaciones introducidas anteriormente rompen el grupo de isometrías $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ de AdS₃ a $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$. Como consecuencia, el grupo asintótico de simetrías, que en el caso de AdS₃ coincide con el grupo conforme en dos dimensiones, también se modifica. El grupo de simetrías asintótico de WAdS₃ está generado por el producto semi-directo de una copia del álgebra de Virasoro y una extensión afín del álgebra $u(1)$ con una extensión central no nula; para más detalles, ver por ejemplo, las referencias [CD09b, CD09a, BC09b, BC09a, HMT11, DG15]. Entonces la teoría de campos dual a WAdS₃ debe poseer simetrías que satisfagan dicha álgebra. Estas simetrías brindan suficiente información como para poder derivar varias propiedades de la teoría de campos dual como se realizó en la referencia [DHH12], estas teorías conformes especiales son denominadas *Warped* CFT (WCFT). Siguiendo las ideas de [DHH12] en el trabajo [HR15] se logró construir un ejemplo explícito de WCFT.

Como veremos en los Capítulos 4 y 5 los espacios WAdS aparecen como soluciones de vacío de teorías de gravedad masiva tridimensional, dando un primer indicio para considerarlas en el contexto de la correspondencia WAdS₃/WCFT₂.

Capítulo 3

Teorías de gravedad con campos de espín-2 masivos

En este capítulo haremos un breve repaso de las motivaciones basadas en holografía para estudiar teorías de gravedad masiva. Luego introduciremos las dos teorías con campos de espín-2 masivos que estudiaremos: New Massive Gravity (NMG) y Zwei-Dreibein Gravity (ZDG). Presentaremos la formulación de campo auxiliar de NMG que nos permitirá hallar el término de borde y obtener el tensor de Brown-York. También veremos que ZDG puede ser escrita como una teoría de un sólo *dreibein* con una torre infinita de derivadas superiores.

3.1. Gravedad masiva y holografía

En el Capítulo 1 de esta tesis ya hemos mencionado que algunas de las motivaciones para estudiar modificaciones de Relatividad General (GR), como por ejemplo, añadirle masa al gravitón, tienen carácter cosmológico y otras más bien teórico. Sin embargo, ahora nos enfocaremos en las motivaciones basadas en holografía, en especial en el caso de $D = 2 + 1$, que es el que nos interesa en esta tesis. Como se mencionó en el capítulo anterior, la correspondencia AdS/CFT provee un nuevo marco teórico para atacar el problema de la cuantización de la gravedad. En el contexto holográfico, hallar una teoría cuántica de la gravedad significa también hallar la teoría conforme (CFT) dual. Algunos indicios de esta relación entre GR formulada en AdS_3 y una CFT_2 ya fueron dados antes de la formulación de la conjetura de Maldacena; destacan el trabajo de Brown-Henneaux [BH86] que prueba que el comportamiento asintótico de GR con $\Lambda < 0$ está gobernado por el álgebra de simetrías conformes en dos dimensiones, y el de Coussaert, Henneaux y van Driel [CHvD95] que muestra que la dinámica está regida por una CFT_2 .

Ya en el contexto de holografía, en su artículo de 2007 [Wit07], Witten propone un candidato concreto para ser la CFT_2 dual de la teoría de Einstein en tres dimensiones. Más precisamente, propone que la CFT es una teoría de campos conforme autodual extremal holomórficamente factorizable. Esta propuesta, al menos en su forma original, ha recibido diversas críticas, en otras la de los trabajos [Gai08, Gab07, GK08]. En particular, una de las críticas es respecto a la validez de la construcción para valores grandes de la carga central $c = \frac{3\ell}{2G}$. Otro inconveniente con dicha propuesta proviene de un trabajo del mismo Witten y Maloney, quienes calcularon la función de partición de GR con $\Lambda < 0$ en la aproximación de *saddle point* [MW10]. El resultado que obtienen no puede ser escrito como la traza de un operador hermítico (la suma del hamiltoniano y el operador de momento angular) sobre un espacio de Hilbert; sin embargo, los autores de [MW10] fueron capaces de reproducir correcciones *subleading* a la entropía de Bekenstein-Hawking. Una de las posibles causas del fallo en su cálculo es que quizá no haya que excluir *saddle points* con sección euclídea compleja¹ en la integral de caminos. Otra posibilidad, es que la teoría de Einstein no sea un buen modelo para estudiar una teoría cuántica de la gravedad en AdS_3 y haya que recurrir a otras teorías. Siguiendo esta idea es que Li, Song y Strominger [LSS08, Str08] proponen utilizar una teoría de gravedad masiva tridimensional conocida como Topologically Massive Gravity (TMG) [DJT82b, DJT82a] en un punto especial del espacio de parámetros llamado “punto quiral”. La Gravedad Quiral (CG, por sus siglas en inglés) está dada

¹Los *saddle points* complejos son soluciones de la teoría que, al rotarlas al euclídeo, su métrica correspondiente resulta ser compleja.

por la acción TMG con constante cosmológica, que consta del término de Einstein-Hilbert y un término gravitacional de Chern-Simons

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{32\pi G\mu} \int_{\Sigma} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \left(\partial_{\nu} \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} - \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\delta}^{\alpha} \Gamma_{\rho\beta}^{\delta} \right), \quad (3.1)$$

en el punto del espacio de parámetros donde $c_L = 0$, lo que implica una relación particular entre la constante de acoplamiento μ y el radio de AdS_3 ℓ , más precisamente $\mu\ell = 1$. Esta teoría recibe el nombre de quiral debido a que las excitaciones “izquierdas” de la CFT_2 dual son triviales, resultando automáticamente una teoría holomórficamente factorizable, tal y como sugiere Witten. Una suposición adicional es que TMG en el punto quiral con condiciones asintóticas de Brown-Henneaux [BH86] tiene como soluciones espacios de Einstein únicamente [MSS10]. La validez de la propuesta [Str08] depende fuertemente de las condiciones asintóticas elegidas. En [MSS10] se estudia este problema y se encuentra que si se adoptan las condiciones de borde de Brown-Henneaux CG es dual a una CFT holomorfa extremal, mientras que si se adoptan condiciones de borde relajada CG es dual a una Logarithmic Conformal Field Theory (LCFT)². Una de las suposiciones de [MSS10] es que una vez impuestas las condiciones asintóticas de borde de Brown-Henneaux, todas las soluciones de CG son espacios de Einstein y por consiguiente *saddle points* reales. Esto fue rebatido en [CdBD10], donde se hallaron soluciones que satisfacen las condiciones de Brown-Henneaux pero no son localmente AdS_3 . Esto llevó a considerar la posibilidad de acoplar otra teoría de gravedad masiva tridimensional a la acción de CG, en este caso una teoría invariante de paridad llamada New Massive Gravity (NMG) [BHT09a, BHT09b], en el punto quiral del espacio de parámetros (*i.e.* $c_L = 0$), con la esperanza de que los términos de curvatura superior de NMG removieran del espectro los espacios no-Einstein. Sin embargo, dicha propuesta no fue exitosa, ya que se probó que TMG acoplada a NMG contiene soluciones que representan *saddle points* complejos y que sin embargo satisfacen las condiciones de Brown-Henneaux [GGL11].

Entonces, la correspondencia AdS/CFT provee otro motivo para estudiar modificaciones de GR: el de hallar distintos modelos para atacar el problema de la gravedad cuántica. Huelga decir, que dicho problema está lejos de ser resuelto, incluso para un modelo de juguete como la gravedad tridimensional. Sin embargo, combinado holografía y modificaciones de GR, es posible estudiar extensiones de AdS/CFT con aplicaciones en diversos contextos, como por ejemplo, en materia condensada. Es interesante que algunos modelos de gravedad tridimensional con campos espín-2

²Este es un tipo especial de teoría conforme no-unitaria cuyo hamiltoniano forma un bloque Jordan y típicamente presenta operadores cuyas funciones de dos puntos tienen una dependencia logarítmica.

masivos como la mencionada NMG y la teoría de bi-gravedad Zwei-Dreibein Gravity (ZDG) contienen un espectro de soluciones muy amplio, que abarca tanto geometrías con condiciones asintóticas de AdS relajadas como espacios con invariancia de escala anisótropa con y sin simetría de Galileo. Estas variedades son útiles en el contexto de extensiones de AdS/CFT como Log-Gravity/LCFT [MSS10, GJ09, GRRZ13], Schrödinger-Lifshitz/CMT [BM08, Son08, KLM08] y WAdS/(W)CFT [ALP⁺09, DHH12].

En este capítulo estudiaremos dos teorías de gravedad masiva tridimensional: NMG y ZDG. Para ello primero introduciremos la teoría de Fierz-Pauli [FP39] que es la primer teoría en considerar campos de espín-2 masivos. Además tanto NMG como ZDG a nivel linealizado respecto al espacio de Minkowski coinciden con la teoría de Fierz-Pauli en tres dimensiones.

3.2. Gravedad masiva: la acción de Fierz-Pauli

Como mencionamos anteriormente, la teoría que describe campos de espín-2 masivos propagándose en el espacio-tiempo plano, está dada por la acción de Fierz-Pauli [FP39]. Pero antes de estudiar la teoría de Fierz-Pauli masiva, nos enfocaremos en el caso $m = 0$; es decir, la teoría de gravitones no-masivos en torno a Minkowski. Para ello consideraremos la acción más general construida con un tensor simétrico de rango-2 $h_{\mu\nu}$ y la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ con no más de dos derivadas actuando sobre $h_{\mu\nu}$. La misma está dada por

$$S = \int d^D x (b_1 \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + b_2 \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\nu h^{\mu\lambda} + b_3 \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + b_4 \partial_\lambda h \partial^\lambda h) . \quad (3.2)$$

Si elegimos los parámetros $b_1 = -1/4, b_2 = 1/2, b_3 = -1/2, b_4 = 1/4$, la acción (3.2) posee la siguiente simetría de *gauge*

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu} \xi_{\nu)} , \quad (3.3)$$

a menos de un factor global. Esta simetría no es otra que la de difeomorfismos linealizados, y la acción (3.2) es la acción de Einstein-Hilbert a orden cuadrático en las perturbaciones $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, donde $\kappa^2 = 16\pi G$. El análisis hamiltoniano de los grados de libertad de la acción de Einstein-Hilbert a nivel linealizado³ nos muestra que de las $D(D+1)/2$ componentes libres de

³Con esto nos referimos a nivel lineal en las ecuaciones de movimiento y cuadrático en las perturbaciones a nivel de la acción. Haremos un abuso de notación y nos referiremos a la acción linealizada cuando en realidad estamos aproximando a segundo orden en las perturbaciones la acción.

$h_{\mu\nu}$ solamente $D(D-3)/2$ son independientes; por lo tanto, en $D = 4$ tenemos dos polarizaciones del gravitón no-masivo, y en $D = 3$ no hay grados de libertad locales⁴.

Ahora pasemos a analizar el caso masivo. Para añadirle masa al gravitón es necesario introducir términos cuadráticos en el campo $h_{\mu\nu}$, y tenemos dos posibilidades $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ y h^2 . El término cuadrático más general es una combinación de ambos, sin embargo, el de Fierz-Pauli es el único que garantiza la ausencia de un modo escalar tipo-fantasma; dicho término está dado por

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = -\frac{1}{4}m^2 (h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2). \quad (3.4)$$

Si el coeficiente relativo entre $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ y h^2 no es -1 , aparecerá una inestabilidad en la teoría lineal. La elección de Fierz-Pauli garantiza que la componente h^{00} sea un multiplicador de Lagrange, lo que genera un vínculo secundario que remueve del espectro el modo inestable en el modelo lineal. En el caso masivo todos los vínculos son de tipo-secundario, con lo cual, la teoría de un campo masivo de espín-2 no posee simetría de *gauge*, al igual que sucede en el electromagnetismo al introducir en la acción el término de masa de Proca. Entonces, la teoría de Fierz-Pauli para un campo de espín-2 masivo propagándose en un fondo plano está dado por

$$S = \int d^D x \left(-\frac{1}{4}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{4}\partial_\lambda\partial^\lambda h - \frac{1}{4}m^2 (h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) \right). \quad (3.5)$$

Esta teoría de gravedad masiva a nivel lineal posee $D(D-1)/2 - 1$ grados de libertad en D dimensiones; en particular el gravitón masivo posee cinco polarizaciones en $D = 4$ y dos en $D = 3$.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción (3.5) son

$$\frac{\delta S_{\text{FP}}}{\delta h^{\mu\nu}} = G_{\mu\nu}^{(1)}[h] - \frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) = 0, \quad (3.6)$$

donde

$$G_{\mu\nu}^{(1)}[h] = \frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - \partial_\alpha\partial_\nu h_\mu^\alpha - \partial_\alpha\partial_\mu h_\nu^\alpha + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\square h), \quad (3.7)$$

es un operador diferencial de segundo orden definido por su acción sobre $h_{\mu\nu}$ y que coincide con el tensor de Einstein linealizado.

⁴Para más detalles referirse a la Sección 2.1 de la referencia [Hin12].

Ahora procederemos a reescribir las ecuaciones (3.6) de un modo que resultará útil más adelante. Si tomamos divergencia en las ecuaciones (3.6) actuando con ∂^μ , y asumimos que $m \neq 0$, obtenemos que

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h = 0.$$

Si sustituimos esta relación nuevamente en (3.6), se tiene que

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - m^2 (h_{\mu\nu} - h \eta_{\mu\nu}) = 0.$$

Ahora, si multiplicamos por $\eta^{\mu\nu}$ la ecuación anterior, encontramos que la traza de $h_{\mu\nu}$ se anula, lo que implica, a su vez, que $h_{\mu\nu}$ es transverso

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h = 0, \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.8)$$

Reemplazando estas restricciones en la ecuación de movimiento (3.6) obtenemos una ecuación de Klein-Gordon para el tensor $h_{\mu\nu}$

$$(\square - m^2) h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.9)$$

Combinando la ecuación (3.9) y las restricciones (3.8), se obtiene un sistema de ecuaciones de movimiento equivalentes a (3.6)

$$(\square - m^2) h_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.10)$$

Esta forma de presentar las ecuaciones de movimiento de Fierz-Pauli será útil cuando estudiemos una extensión no-lineal de la teoría en tres dimensiones.

Hallar una completación no-lineal de la teoría de Fierz-Pauli es todo un desafío. Como mencionamos anteriormente, se creyó imposible durante años. Uno de los principales problemas es cómo evadir el fantasma de Boulware-Deser. Otra dificultad que aparece a nivel no-lineal es la de cómo construir un término de masa utilizando únicamente la métrica $g_{\mu\nu}$. Es evidente que cualquier contracción de la métrica producirá un término constante equivalente a una constante cosmológica que no le otorga masa al gravitón. Por lo tanto, parece necesario introducir un nuevo tensor de rango-2 simétrico, que interactuará con la métrica de modo tal de generar los grados de libertad correspondientes a un campo masivo de espín-2. La introducción de este campo adicional es llevada a cabo en la llamada teoría dRGT [dRGT11] mediante el truco de

Stückelberg. En el caso tridimensional, New Massive Gravity (NMG) [BHT09a], en su formulación de segundo orden también hace uso de un campo auxiliar. En este caso, el tensor auxiliar de rango-2 no es dinámico, es decir, no posee un término cinético asociado en su acción. Cuando dicho campo posee dinámica la teoría en cuestión es denominada de bi-gravedad, ya que tiene dos “métricas”⁵ como campos dinámicos. Ejemplos de teorías de bi-gravedad son la teoría de Hassan-Rosen [HR12], que es una extensión de la teoría dRGT, y la teoría tridimensional Zwei-Dreibein gravity (ZDG) [BdHH⁺13], que posee como límite particular a NMG. En esta tesis nos centraremos en el estudio de las teorías de gravedad tridimensional NMG y ZDG, las cuales serán presentadas en este capítulo.

3.3. New Massive Gravity (NMG)

En esta sección veremos cómo en el caso $D = 3$ es posible hallar una completación no-lineal completamente covariante de la teoría linealizada de Fierz-Pauli.

Primero debemos considerar la primer ecuación del sistema alternativo (3.10), y realizar el reemplazo de la métrica $h_{\mu\nu}$ por su correspondiente tensor de Einstein linealizado, es decir, realizaremos el cambio

$$h_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu}^{(1)}[h]. \quad (3.11)$$

Como veremos a continuación, este sencillo truco nos dará como resultado un modelo interesante que solo es posible en tres dimensiones. Luego de realizar el cambio (3.11), las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$(\square - m^2)G_{\mu\nu}^{(1)}[h], \quad R^{(1)}[h] = 0, \quad (3.12)$$

donde $R^{(1)}[h]$ representa el escalar de Ricci asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$ a primer orden en $h_{\mu\nu}$. La segunda ecuación del sistema (3.10) se traduce en la identidad de Bianchi linealizada para el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}^{(1)}$. Entonces, teniendo en cuenta la forma explícita de (3.7), la primera de las ecuaciones en (3.12) queda escrita como

$$G_{\mu\nu}^{(1)}[G^{(1)}[h]] = G_{\mu\nu}^{(1)}[m^2 h], \quad (3.13)$$

⁵Al tensor de rango-2 simétrico auxiliar se lo suele denominar “métrica” en analogía con el mismo tensor métrico que también es simétrico y de rango dos.

Dado que el campo de espín-2 $h_{\mu\nu}$ es transverso y de traza nula, es decir $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ y $h = 0$, entonces se cumple que $G_{\mu\nu}^{(1)}[h] = \square h_{\mu\nu}$. De este modo, se obtienen ecuaciones que son invariantes bajo difeomorfismos linealizados.

Vale la pena realizar una observación importante: el punto clave para entender la peculiaridad del caso tridimensional es recordar que para $D = 3$ existe una conexión directa, más precisamente una identificación local, entre el tensor de Einstein asociado a una métrica dada y la métrica misma. De hecho, todas las soluciones a las ecuaciones de Einstein de vacío, con o sin constante cosmológica, son localmente equivalentes, entonces, si nos concentramos en aspectos locales, tanto $g_{\mu\nu}$ como $G_{\mu\nu}$ contienen la misma información. En particular, esto implica que (3.13) expresa una identificación local entre $G_{\mu\nu}^{(1)}$ y $m^2 h_{\mu\nu}$, la cual justifica *a posteriori* haber realizado el cambio (3.11).

Resumiendo, hemos logrado algo notable: construir una teoría invariante ante difeomorfismos lineales que, al mismo tiempo, es equivalente a la teoría de Fierz-Pauli [BHT09a]. Esto es debido a las notables propiedades de la gravedad de Einstein en $D = 3$. A continuación veremos como extender esta teoría de una manera completamente covariante.

Notemos que el sistema (3.12) puede ser derivado de la siguiente acción

$$S_{\text{NMG}}^{(1)} = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(1)}[h] + \frac{1}{m^2} G_{\mu\nu}^{(1)}[h] \left(R^{(1)\mu\nu}[h] - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} R^{(1)}[h] \right) \right), \quad (3.14)$$

calculando la variación respecto al campo $h_{\mu\nu}$.

Resulta sencillo proponer una extensión covariante ante transformaciones generales de la acción (3.14), al notar que en tres dimensiones la contracción del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \equiv R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}$ y del tensor de Schouten $S_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - (1/4)Rg_{\mu\nu}$ da por resultado $G_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - (3/8)R^2$. Entonces, la extensión no-lineal completamente covariante de (3.14) es la acción de New Massive Gravity [BHT09a]

$$S_{\text{NMG}} = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} \left(\sigma R - 2\Lambda + \frac{1}{m^2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) \right), \quad (3.15)$$

donde además hemos introducido un término de constante cosmológica Λ y un parámetro de signo $\sigma = \pm 1$. Debemos notar que NMG es una teoría de gravedad masiva completamente covariante e invariante ante paridad.

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de la acción (3.15) son

$$16\pi G \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \sigma G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2} \mathcal{K}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.16)$$

donde el tensor $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mu\nu} = & 2\Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu R - \frac{1}{2}\Box R g_{\mu\nu} \\ & + 4R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{3}{2}RR_{\mu\nu} - R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + \frac{3}{8}R^2g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En las teorías de gravedad con términos cuadráticos en la curvatura, las excitaciones presentes en el espectro están representadas por un gravitón sin masa, un gravitón masivo y un modo escalar [Ste78, Ste77]. Ocurre que, cuando la energía del gravitón sin masa es positiva, la del gravitón masivo es negativa y viceversa (dependiendo del signo elegido para la constante de Newton G). Dado que en $D = 3$ el gravitón no-masivo no posee grados de libertad, este problema no está presente. Así que es posible tener un campo de espín-2 masivo bien comportado eligiendo adecuadamente el signo de σ . Típicamente, el modo de espín-0 puede dar lugar a una excitación tipo-fantasma. Sin embargo, en NMG este modo escalar no está presente, debido a la combinación particular de términos cuadráticos en la curvatura del tensor $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ (3.17) [BHT09a]. Esto está relacionado con el hecho de que la traza del tensor $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ es el lagrangiano del cual se deriva, *i.e.* $g^{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - (3/8)R^2$.

Debemos destacar que cualquier solución de vacío de GR también resuelve las ecuaciones de movimiento de NMG (3.16). El cálculo explícito muestra que cualquier métrica que satisfaga la relación $R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}$ posee $\mathcal{K}_{\mu\nu} = 0$. La teoría también admite soluciones que no son espacios de Einstein, los cuales poseen $\mathcal{K}_{\mu\nu} \neq 0$, como por ejemplo, espacios de Schrödinger, de Lifshitz y Warped Anti-de Sitter entre otros, los cuales serán estudiados en los Capítulos 4 y 5.

Por último, debemos recordar que, para poder obtener una teoría completa y bien definida es necesario suplementar la acción del *bulk* con un término de borde, a fin de tener un principio variacional bien definido. Dada la naturaleza de derivadas superiores de la acción de NMG (3.15) este no es un problema trivial. La resolución fue dada en el trabajo de Hohm y Tonni [HT10] y la repasaremos en la siguiente sección.

3.3.1. Principio variacional en NMG

En esta sección abordaremos el problema de obtener un principio variacional bien definido para NMG con condiciones de borde tipo Dirichlet. Como mencionamos en el capítulo anterior, la misma teoría de Einstein, dado que su acción posee derivadas segundas de la métrica, *a priori* parece no estar bien definida ante variaciones de la métrica fijas en el borde. Sin embargo, la adición del término de borde de Gibbons-Hawking, soluciona dicho problema eliminando las derivadas normales al borde de las variaciones de la métrica. En el caso de NMG, dado que la acción (3.15) posee términos cuadráticos en la curvatura, supone una dificultad aún mayor, ya que las ecuaciones de movimiento son de cuarto orden en la métrica. Esto implica que, al variar la acción se deben fijar condiciones de borde no solo sobre la métrica sino también sobre sus derivadas. En el caso de GR, el agregado del término de Gibbons-Hawking es suficiente para eliminar las derivadas en la dirección normal al borde y, entonces, basta con fijar las variaciones de la métrica. Este no es el caso de NMG, donde es necesario proveer más información sobre las condiciones de borde; es decir, no solo hay que fijar las variaciones de la métrica sino de sus derivadas. La idea utilizada en [HT10] es la de introducir un tensor auxiliar $f_{\mu\nu}$ que permita re-escribir la acción (3.15) de manera tal que las ecuaciones de movimiento sean de segundo orden tanto en la métrica como en el tensor $f_{\mu\nu}$ (que no posee término cinético en la acción). Con esta prescripción, los autores de [HT10] son capaces de construir un término de Gibbons-Hawking generalizado que da lugar a un principio variacional bien definido habiendo fijado las variaciones, no solo de la métrica, sino también del tensor auxiliar en el borde (el cual, como veremos a continuación, es equivalente a una combinación muy particular de derivadas de la métrica). Esto nos permite, además, obtener el tensor cuasi-local de Brown-York [BY93] para NMG.

Primero, debemos notar que es posible reescribir la acción de NMG introduciendo un tensor auxiliar $f_{\mu\nu}$. La acción de NMG de segundo orden es

$$S_{\text{NMG}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} \left(\sigma R + f^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f^2) - 2\Lambda \right), \quad (3.18)$$

donde $\sigma = \pm 1$ y $f \equiv g^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$ es la traza del tensor auxiliar. Notemos que $f_{\mu\nu}$ no presenta término cinético, por lo cual, su ecuación de movimiento es puramente algebraica, y nos dice que es proporcional al tensor de Schouten

$$f_{\mu\nu} = \frac{2}{m^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \right). \quad (3.19)$$

Si reemplazamos (3.19) nuevamente en la acción (3.18) reobtenemos la acción original de NMG (3.15) con constante cosmológica.

Las ecuaciones de movimiento en términos del tensor auxiliar $f_{\mu\nu}$ son

$$\begin{aligned} \sigma G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 \left(f_{\mu}{}^{\rho} f_{\nu\rho} - f f_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} (f^{\rho\sigma} f_{\rho\sigma} - f^2) \right) \\ + 2f_{(\mu}{}^{\rho} G_{\nu)\rho} + \frac{1}{2}R f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} f^{\rho\sigma} G_{\rho\sigma} \\ + \frac{1}{2} \left(\nabla^2 f_{\mu\nu} - 2\nabla^{\rho} \nabla_{(\mu} f_{\nu)\rho} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f + (\nabla^{\rho} \nabla^{\sigma} f_{\rho\sigma} - \nabla^2 f) g_{\mu\nu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

y, como era de esperar, son de segundo orden en derivadas tanto de la métrica $g_{\mu\nu}$ como del tensor auxiliar $f_{\mu\nu}$. Si insertamos la expresión (3.19) en (3.20) reobtenemos las ecuaciones diferenciales de cuarto orden para la métrica de (3.16).

Gracias a la introducción del tensor auxiliar $f_{\mu\nu}$ tenemos ahora una formulación de segundo orden para NMG, es decir, tanto la acción como las ecuaciones de movimiento tienen a lo sumo derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$. Esto permite definir un problema de Dirichlet para variaciones la métrica y del tensor auxiliar. Veremos que es posible tener un principio variacional bien definido para NMG si se asume que tanto las variaciones de $g_{\mu\nu}$ como de $f_{\mu\nu}$ están fijas en el borde. Para ello será necesario introducir un término de Gibbons-Hawking generalizado que elimine las derivadas normales al borde de las variaciones.

Para obtener el término de borde es necesario variar la acción (3.18) respecto a una solución de las ecuaciones de movimiento. Dicha variación está dada por

$$\delta S_{\text{NMG}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} \nabla_{\mu} v^{\mu}, \quad (3.21)$$

donde el vector v^{μ} es

$$\begin{aligned} v^{\mu} = \sigma w^{\mu} - \frac{1}{2} f w^{\mu} + f^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} \nabla_{\rho} (\delta g_{\sigma\nu}) - \frac{1}{2} f^{\rho\sigma} \nabla^{\mu} (\delta g_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} f^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_{\nu} (\delta g_{\rho\sigma}) \\ + \frac{1}{2} (\nabla^{\mu} f^{\nu\rho} - 2D^{\nu} f^{\mu\rho} + g^{\mu\nu} \nabla^{\rho} f + g^{\nu\rho} \nabla_{\sigma} f^{\sigma\mu} - g^{\nu\rho} \nabla^{\mu} f) \delta g_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

y donde se definió

$$w^{\mu} = g^{\mu\nu} \nabla^{\rho} (\delta g_{\nu\rho}) - g^{\rho\sigma} \nabla^{\mu} (\delta g_{\rho\sigma}), \quad (3.23)$$

que corresponde al vector que da la variación que aparece en GR.

Los términos problemáticos en (3.22) son los poseen derivadas normales de la métrica o del campo auxiliar. Los términos proporcionales a $\delta g_{\mu\nu}$ no generan inconveniente alguno ya que $\delta g_{\mu\nu} = 0$ en el borde.

Para poder obtener el término de borde debemos realizar una foliación de la variedad Σ en superficies de r constante Σ_r . Para ello recurriremos a una expresión tipo-ADM de la métrica

$$ds^2 = N^2 dr^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dr) (dx^j + N^j dr) , \quad (3.24)$$

donde N es la función *lapse*, N_i las funciones *shift* y γ_{ij} la métrica inducida en Σ_r . También hemos separado las coordenadas del *bulk* como $x^\mu = (x^i, r)$, donde x^i son las coordenadas en las superficies de r constante.

De acuerdo a la descomposición (3.24), el determinante de la métrica queda expresado como $\sqrt{-g} = \sqrt{-\gamma} N$. Teniendo esto en cuenta y utilizando el teorema de Stokes, la variación (3.21) se lee

$$\delta S_{\text{NMG}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma_r} d^2x \sqrt{-\gamma} n_\mu v^\mu ,$$

donde n^μ es el vector unitario normal a Σ_r dado por $n_\mu dx^\mu = N dr$.

Un ingrediente fundamental para construir el término de borde es la curvatura extrínseca. Recordemos que la expresión de la misma es

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu n_\nu + \nabla_\nu n_\mu) .$$

La parte relevante de la curvatura extrínseca son sus componentes tangenciales

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} (\partial_r \gamma_{ij} - D_i n_j - D_j n_i) ,$$

donde D_i es la derivada covariante construida con γ_{ij} .

Para hallar el término de borde adecuado va a ser conveniente elegir coordenadas adaptadas al problema en cuestión, es decir, va a ser útil fijar parcialmente el *gauge* y elegir coordenadas gaussianas $N = 1, N_i = 0$. En estas coordenadas, la curvatura extrínseca toma la forma $K_{ij} = -\frac{1}{2} \partial_r \gamma_{ij}$. Al final del día para poder deshacer el fijado del *gauge* reemplazamos $-\frac{1}{2} \partial_r \gamma_{ij}$ por K_{ij} para obtener una expresión general. Dado que el tensor auxiliar $f_{\mu\nu}$ está presente en la variación

(3.21), también es necesario hacer una descomposición tipo 2 + 1 del mismo, esto es

$$f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f^{ij} & h^j \\ h^i & s \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Debemos remarcar, que la elección de las coordenadas gaussianas no implica necesariamente que las componentes “no-diagonales” de $f^{\mu\nu}$ sean cero.

Ahora estamos en condiciones de hacer una evaluación más precisa de la variación de la acción de NMG. Las componentes relevantes del vector v^μ para el cálculo del término de borde son las perpendiculares a las superficies de r constante, más precisamente, la componente v^r . El cálculo explícito nos muestra que δS_{NMG} está dado por la siguiente expresión

$$\delta S_{\text{NMG}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma_r} d^2x \sqrt{-\gamma} \left(2\sigma \gamma^{ij} \delta K_{ij} + f^{ij} \delta K_{ij} - \tilde{f} \gamma^{ij} \delta K_{ij} \right),$$

donde $\tilde{f} \equiv \gamma^{ij} f_{ij}$.

Entonces el término generalizado de Gibbons-Hawking es

$$S_{\text{GGH}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma_r} d^2x \sqrt{-\gamma} \left(-2\sigma K - \hat{f}^{ij} K_{ij} + \hat{f} K \right), \quad (3.26)$$

donde hemos definido los tensores

$$\begin{aligned} \hat{f}^{ij} &= f^{ij} + 2h^{(i} N^{j)} + s N^i N^j, \\ \hat{h}^i &= N(h^i + s N^i), \\ \hat{s} &= N^2 s. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La elección de estos tensores se basa en el pedido de que transformen covariantemente ante difeomorfismos infinitesimales del borde, y que además se reduzcan a (3.25) cuando se eligen coordenadas gaussianas (para más detalles referirse al Apéndice A de la referencia [HT10]).

El primer término en (3.26) corresponde al ya conocido término de Gibbons-Hawking. Los otros dos términos provienen de las contribuciones de curvatura superior de NMG. El resultado de GR se recupera tomando el límite $m \rightarrow \infty$, lo que es equivalente a hacer el reemplazo $f^{\mu\nu} = 0$ (recordar la expresión *on-shell* de $f^{\mu\nu}$ (3.19)).

Por lo tanto, gracias a la introducción del término de borde (3.26) en la acción tenemos ahora un principio variacional bien definido para NMG. Como dijimos anteriormente, dado que NMG en su formulación original es una teoría de derivadas superiores, no es suficiente con fijar condiciones de tipo Dirichlet para las variaciones de la métrica, es necesario brindar más información sobre las condiciones de borde. La información adicional que se debe dar se encuentra codificada en el tensor auxiliar. Fijar $\delta f^{\mu\nu} = 0$ en las hiper-superficies de r constante es lo que permite que la acción sea estacionaria ante perturbaciones respecto a una solución de las ecuaciones de movimiento.

3.3.2. Tensor de Brown-York en NMG

Habiendo obtenido el término de borde adecuado ahora estamos en condiciones de calcular el tensor cuasi-local de Brown-York para NMG. Entonces, el tensor de energía-momento de Brown-York puede obtenerse variando la acción (3.15) junto con el término de borde (3.26) respecto a la métrica del borde γ^{ij}

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S}{\delta \gamma^{ij}} \Big|_{r=\text{const}}. \quad (3.28)$$

Este tensor tiene dos contribuciones $T^{ij} = T_{\text{EH}}^{ij} + T_{\text{NMG}}^{ij}$, una proveniente del término de GR y otra del término cuadrático en la curvatura propio de NMG. Primero, tenemos el término de Israel

$$T_{\text{EH}}^{ij} = \frac{1}{8\pi G} (K^{ij} - K\gamma^{ij}), \quad (3.29)$$

y segundo, tenemos la contribución proveniente de los términos de curvatura superior [HT10]

$$T_{\text{NMG}}^{ij} = -\frac{1}{8\pi G} \left(\frac{1}{2} \hat{f} K^{ij} + D^{(i} \hat{h}^{j)} - \frac{1}{2} \mathcal{D}_r \hat{f}^{ij} + K_k^{(i} \hat{f}^{j)k} - \frac{1}{2} \hat{s} K^{ij} \right. \quad (3.30)$$

$$\left. - \gamma^{ij} (D_k \hat{h}^k - \frac{1}{2} \hat{s} K + \frac{1}{2} \hat{f} K - \frac{1}{2} \mathcal{D}_r \hat{f}) \right), \quad (3.31)$$

donde los tensores con “sombrero” fueron definidos en (3.27) y la “derivada covariante- r ” \mathcal{D}_r se define como

$$\mathcal{D}_r \hat{f}^{ij} = \frac{1}{N} \left(\partial_r \hat{f}^{ij} - N^k \partial_k \hat{f}^{ij} + 2 \hat{f}^{k(i} \partial_k N^{j)} \right), \quad (3.32)$$

$$\mathcal{D}_r \hat{f} = \frac{1}{N} \left(\partial_r \hat{f} - N^k \partial_k \hat{f} \right). \quad (3.33)$$

Las cantidades $\mathcal{D}_r \hat{f}^{ij}$ y $\mathcal{D}_r \hat{f}$ son combinaciones particulares que transforman como tensores ante difeomorfismos infinitesimales del borde (nuevamente, para más información al respecto, referirse al Apéndice A de la referencia [HT10]).

Como vimos en el capítulo anterior, el tensor cuasi-local de Brown-York viene de la mano con una definición de carga conservada asociada a vectores de Killing del borde [BY93]. Recordemos que para obtener dicha carga es necesario hacer una foliación en superficies de tiempo constante en Σ_r , esto es

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = -N_\sigma^2 dt^2 + \rho (dx + N_\sigma^x dt)^2, \quad (3.34)$$

donde ρ es una métrica unidimensional, N_σ es la función *lapse* y N_σ^x es la función *shift*. Entonces, la expresión para las cargas en el caso $D = 3$ es

$$Q[\xi] = \int_{\partial\Sigma} dx \rho u^i T_{ij} \xi^j. \quad (3.35)$$

donde $\partial\Sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \Sigma_r$ es el borde del espacio⁶, u^i es el vector unitario normal a la superficies de t constante en $\partial\Sigma$, ξ^j es el vector de Killing del borde, *i.e.* $\mathcal{L}_\xi[\gamma_{ij}] = 0$. De aquí en más, para no recargar la notación, llamaremos T_{ij} al tensor de energía-momentos del borde de NMG en lugar de T_{ij}^{NMG} . Como vimos en el capítulo anterior, para obtener la masa del espacio-tiempo debemos identificar el vector de Killing temporal con $\xi^i = N_\sigma u^i$. Mientras que para el momento angular, el vector de Killing tipo-espacio es simplemente $\eta^i = \delta_\varphi^i \partial_\varphi$.

Debemos mencionar que, en general, las cargas conservadas en (3.35) no están bien definidas y es necesario recurrir a algún mecanismo para regularizarlas. En general las divergencias son infrarrojas y se encuentran relacionadas con el volumen infinito del espacio en cuestión, como en el caso de espacios asintóticamente AdS₃. Como veremos a continuación, las cargas conservadas, una vez regularizadas mediante el proceso de renormalización holográfica, resultan proporcionales a la carga central de la teoría dual. Por lo tanto, en el punto crítico $c = 0$ las cargas son finitas, de hecho, son nulas.

3.3.3. Renormalización holográfica en NMG

El próximo paso hacia la definición del tensor de energía-momentos del borde es añadir contra-terminos para regularizar (3.30) en el límite $r \rightarrow \infty$. En espacios asintóticamente AdS₃ esto se

⁶Para ser más precisos, en el caso de espacios AdS o asintóticamente AdS, el borde del espacio es en realidad una clase conforme, es decir, es la métrica inducida en r constante en el límite $r \rightarrow \infty$ a menos de un factor conforme.

logra mediante el proceso de renormalización holográfica, que implica agregar términos de borde que solo involucran cantidades intrínsecas del borde. Aquí, tales términos son de la forma

$$S_C = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{-\gamma} (a_0 + a_1 \hat{f} + a_2 \hat{f}^2 + a_3 \hat{f}_{ij} \hat{f}^{ij} + \dots + b_1 \hat{R} + b_2 \hat{R}^2 + b_3 \hat{R}_{ij} \hat{R}^{ij} + \dots), \quad (3.36)$$

los puntos suspensivos refieren a términos de orden superior tanto en curvaturas intrínsecas \hat{R}_{ij} como en tensores \hat{f}_{ij} . Desde el punto de vista del borde, estos términos pueden pensarse como los contra-términos de la teoría de campos dual; esto significa que el tensor de esfuerzos del borde está definido al tomar el límite $r \rightarrow \infty$ en el tensor mejorado

$$T_{ij} \rightarrow T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_C}{\delta \gamma^{ij}}, \quad (3.37)$$

donde T_{ij}^* es el tensor de Brown-York renormalizado.

Anti-de Sitter Para ilustrar como funciona este procedimiento en NMG veamos primero el caso de AdS₃. La métrica de AdS₃ está dada por

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2} (-dt^2 + dx^2) + \frac{\ell^2}{r^2}.$$

En este caso la masa recibe contribuciones únicamente de la componente (t, t) del tensor de energía-momentos

$$\mathcal{M} = \int dx T_{tt} = -\frac{1}{4G} \left(\sigma + \frac{1}{2m^2 \ell^2} \right) r^2.$$

Como veremos más adelante, el coeficiente entre paréntesis es proporcional a la carga central de la teoría dual. Resulta claro de la expresión anterior que la masa diverge al tomar el límite $r \rightarrow \infty$. Para determinar el contra-término adecuado es necesario regularizar la acción de NMG (3.18)-(3.26). Es sencillo ver que el contra-término que hace finita la acción *on-shell* es una constante cosmológica de borde

$$S_C = -\frac{1}{8\pi G \ell} \left(\sigma + \frac{1}{2m^2 \ell^2} \right). \quad (3.38)$$

Entonces el tensor de esfuerzos renormalizado es

$$T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{1}{8\pi G \ell} \left(\sigma + \frac{1}{2m^2 \ell^2} \right) \gamma_{ij},$$

y la masa de AdS_3 es

$$\mathcal{M}_{\text{AdS}} = 0,$$

que es el resultado esperado para el estado de vacío de AdS.

Es interesante corroborar que el tensor de energía-momentos (3.30) corresponde al valor de expectación del tensor de esfuerzos de una CFT dual, tal y como sugiere la correspondencia AdS/CFT

$$T_{\text{BY}}^{ij} \Big|_{\partial\Sigma} \stackrel{\text{AdS/CFT}}{\equiv} \langle \mathcal{T}_{\text{CFT}}^{ij} \rangle.$$

Hay varias maneras de corroborar esto. Una forma es considerar transformaciones que dejan invariante la forma asintótica de la métrica y que corresponden a transformaciones conformes en el borde, y aplicarlas al tensor (3.30). Esto da lugar a un término anómalo, llamado derivada Schwarziana, proporcional a la carga central de la CFT. Este procedimiento fue realizado por los autores de [HT10] y el resultado es

$$c_{\text{NMG}} = \frac{3\ell}{2G} \left(\sigma + \frac{1}{2m^2\ell^2} \right). \quad (3.39)$$

Tomando el límite $m^2 \rightarrow \infty$ se recupera el resultado de GR $c_{\text{BH}} = \frac{3\ell}{2G}$.

Otra forma de obtener el valor de la carga central es mediante la anomalía de traza. Dicho cálculo, en el caso de NMG, fue realizado en [GGL11] y lo repasaremos a continuación.

Un resultado conocido de CFT en dos dimensiones es la relación existente entre el valor de expectación de la traza del tensor de esfuerzos y el escalar curvatura del espacio curvo en el que se encuentra definida la teoría

$$\langle \mathcal{T}_i^i \rangle = \frac{c}{24\pi} \hat{R}.$$

Para chequear este resultado del “lado de gravedad” es necesario recurrir a la expansión de Fefferman-Graham [FG85]

$$\gamma_{ij} = r^2 \gamma_{ij}^{(0)} + \gamma_{ij}^{(2)} + \frac{1}{r^2} \gamma_{ij}^{(4)} + \dots,$$

donde los “coeficientes” $\gamma_{ij}^{(2k)}$ dependen únicamente de las coordenadas del borde (t, x) . Para calcular la traza del tensor de energía-momentos del borde es necesario evaluar las ecuaciones de movimiento utilizando la expansión de Fefferman-Graham, más precisamente, es suficiente con considerar las componentes (r, r) de (3.16) hasta el cuarto orden en la expansión para r grande.

Teniendo esto en cuenta se obtiene que

$$\gamma^{ij} T_{ij}^* = \frac{\ell}{16\pi G} \left(\sigma + \frac{1}{2m^2 \ell^2} \right) \gamma^{ij} \hat{R}_{ij} = \frac{c}{24\pi} \hat{R}.$$

Esto da como resultado $c_{\text{NMG}} = \frac{3\ell}{2G} \left(\sigma + \frac{1}{2m^2 \ell^2} \right)$, que coincide exactamente con (3.39). Esto es una confirmación de la interpretación holográfica del tensor de Brown-York, es decir, que el mismo representa el valor de expectación cuántico del tensor de energía-momentos de la CFT dual. Como mencionamos en el capítulo anterior debemos resaltar el hecho de que, mediante un cálculo puramente clásico en el *bulk* de AdS₃, hemos podido obtener información cuántica de una CFT₂ dual. Este es uno de los aspectos más atractivos de la correspondencia AdS/CFT.

Agujero negro BTZ Como un segundo ejemplo de aplicación, calcularemos la masa y el momento angular del agujero negro BTZ en NMG.

Recordemos que la métrica del agujero negro BTZ está dada por el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 8GM + \frac{16G^2 J^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 8GM \right) dt^2 + 8GJ dt d\varphi + r^2 d\varphi^2. \quad (3.40)$$

Este espacio satisface las condiciones asintóticas de borde de Brown-Henneaux [BH86]. Tanto la acción como el tensor de energía-momentos del borde presentan la misma estructura de divergencias que el espacio AdS₃, por lo tanto, el contra-término requerido para hacer finita la acción es el mismo (3.38). Entonces, la masa del agujero negro BTZ es

$$\mathcal{M} = \left(\sigma + \frac{1}{2m^2 \ell^2} \right) M. \quad (3.41)$$

Mientras que el momento angular es

$$\mathcal{J} = \left(\sigma + \frac{1}{2m^2 \ell^2} \right) J. \quad (3.42)$$

Notemos que tanto la masa como el momento angular del agujero negro BTZ son proporcionales a la carga central (3.39). Entonces, las cargas conservadas en el punto crítico $c_{\text{NMG}} = 0$ son nulas. También es interesante notar que en el límite $m^2 \rightarrow \infty$ se recupera el resultado de GR

Espacios de Lifshitz El último ejemplo de aplicación en NMG que veremos será el de los espacios de Lifshitz [KLM08] y el agujero negro de Lifshitz $z = 3$ [ABGGH09].

Estos espacios fueron propuestos como duales gravitatorios de sistemas de materia condensada con puntos fijos de Lifshitz en la referencia [KLM08]. Aquí estudiaremos los análogos tridimensionales de esos espacios.

Los espacio-tiempos de Lifshitz presentan invariancia de escala anisótropa ante

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad x \rightarrow \lambda x.$$

Los llamados espacios de Lifshitz son aquellos que realizan geoméricamente la simetría que recién mencionamos

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{\ell^{2z}} dt^2 + \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{\ell^2} d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad (3.43)$$

donde \vec{x} es un vector tipo espacio de $(D - 2)$ dimensiones. Debemos notar que para $z = 1$ el espacio (3.43) se reduce a AdS_D . Típicamente este tipo de geometrías requieren la adición de materia “artificial” en la teoría, como por ejemplo formas diferenciales sin otra motivación que la de soportar la solución [KLM08, BM09]. Por otro lado, NMG posee como soluciones de vacío espacios de Lifshitz tridimensionales con exponente dinámico arbitrario. En este sentido, NMG provee un escenario minimal en el cual estudiar holografía no-relativista para teorías duales con puntos fijos de Lifshitz, dado que no requiere la adición de materia y la teoría es interesante en sí misma al ser un modelo de gravedad consistente. La versión tridimensional de (3.43) como solución de NMG fue hallada en la referencia [ABGGH09]. Para que satisfaga las ecuaciones de movimiento (3.16), el radio de curvatura ℓ y el parámetro de masa m^2 se relacionan con el exponente dinámico z a través de

$$m^2 \ell^2 = \frac{1}{2\sigma} (z^2 - 3z + 1), \quad \Lambda \ell^2 = -\frac{\sigma}{2} (z^2 + z + 1). \quad (3.44)$$

En el cálculo de la masa, la componente relevante del tensor de energía-momento es la (t, t)

$$T_{tt} = - \left(\sigma - \frac{z^2 - 3z + 1}{2m^2 \ell^2} \right) \frac{r^{2z}}{\ell^{2z+1}}.$$

Es fácil ver que la integral que da el valor de la masa diverge para cualquier $z > 0$. Sin embargo, el coeficiente entre paréntesis se anula *on-shell* gracias a las condiciones (3.44). Por lo tanto, en el caso del espacio de Lifshitz no es necesario renormalizar la acción.

Es interesante notar que NMG no solo presenta soluciones de Lifshitz sino que también soporta agujeros negros de Lifshitz con $z = 3$ [ABGGH09].

Para poder estudiar sistemas de materia condensada con puntos fijos de Lifshitz a temperatura finita mediante técnicas holográficas, es necesario encontrar soluciones de agujero negro que coincidan con el espacio de Lifshitz en la región asintótica. En [ABGGH09] se encontró un agujero negro que es asintóticamente Lifshitz con $z = 3$. Recientemente se mostró que este es el único agujero negro asintóticamente Lifshitz con exponente dinámico $z \neq 1$ en NMG⁷ [ABHJA14]. La métrica de este agujero negro de Lifshitz con $z = 3$ está dada por el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -\frac{r^6}{\ell^6} \left(1 - \frac{M\ell^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{r^2}{\ell^2} dx^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M\right)^{-1} dr^2.$$

La métrica de arriba resuelve las ecuaciones de movimiento de NMG (3.16) si los parámetros satisfacen las siguientes relaciones

$$m^2 \ell^2 = \frac{1}{2\sigma}, \quad \Lambda \ell^2 = -\frac{13\sigma}{2}.$$

Estas condiciones son simplemente (3.44) evaluadas en $z = 3$.

Para regularizar la acción, en este caso no será suficiente con introducir una constante cosmológica de borde, deberemos recurrir a otros contra-términos. La acción *on-shell* presenta divergencias que no pueden ser removidas con un término de constante cosmológica de borde, razón por la cual hay que recurrir a términos de orden superior. Una posible elección es la siguiente

$$S_c = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{-h} \left(\alpha_0 + \alpha_1 \hat{f} + \alpha_2 \hat{f}^2 \right).$$

Debemos remarcar que el requerimiento de que la acción *on-shell* sea finita no fija unívocamente los coeficientes α_0 , α_1 y α_2 . En necesario recurrir a alguna otra información, por ejemplo, la primera ley de la termodinámica. La temperatura y la entropía del agujero negro (3.3.3) fueron calculadas en [GTT11]. Entonces, si pedimos que la masa calculada sea consistente con $T dS = d\mathcal{M}$, obtenemos los siguientes valores para los coeficientes de los contra-términos

$$\alpha_0 = \frac{15}{4\sigma\ell}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{8\ell}, \quad \alpha_2 = -\frac{\sigma}{64\ell}.$$

En consecuencia el valor de la masa del agujero negro de Lifshitz es

$$\mathcal{M} = -\frac{\sigma M^2}{4G}.$$

⁷Al menos para geometrías que puedan ser escritas como de una deformación de Kerr-Schild de un espacio de Lifshitz.

Debemos resaltar que este cálculo de la masa no provee un chequeo independiente de la misma. Resta hallar algún otro método para poder determinar un mecanismo que fije unívocamente los contra-términos. Quizá nuevas soluciones asintóticamente Lifshitz, como por ejemplo un agujero negro rotante, pueda dar indicios al respecto.

3.3.4. Inconsistencia de unitariedad bulk/boundary en NMG

Por último, repasaremos la llamada inconsistencia o desacuerdo entre las condiciones para satisfacer las condiciones de unitariedad tanto en el *bulk* como en el *boundary*. Para ello primero consideraremos la linealización de la acción de NMG en su formulación de campo auxiliar (3.18). Consideramos perturbaciones de la forma

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

donde $\kappa^2 = 16\pi G$ y $\bar{g}_{\mu\nu}$ representa la métrica del fondo (o de *background*) AdS₃. El tensor de Ricci y el escalar asociados a la métrica *background* están dados por

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}[\bar{g}] = 2\Lambda\bar{g}_{\mu\nu}, \quad \bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} = 6\Lambda.$$

Para espacios AdS tenemos que $\Lambda = -1/\ell^2 < 0$.

Consideraremos una expansión del campo auxiliar $f_{\mu\nu}$ de la forma

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2}(\Lambda(\bar{g}_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu})) - \kappa k_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (3.46)$$

donde $k_{\mu\nu}$ representa una perturbación independientes de $h_{\mu\nu}$.

Reemplazando las perturbaciones (3.45) y (3.46) en (3.18) obtenemos el siguiente lagrangiano de segundo orden

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{\Lambda - 2m^2\sigma}{4m^2}h^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}[h] + k^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{4}m^2(k^{\mu\nu}k_{\mu\nu} - k^2), \quad (3.47)$$

donde $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ es un operador diferencial lineal auto-adjunto definido por su acción sobre $h_{\mu\nu}$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}[h] = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}h_{\mu\nu} - 2\bar{\nabla}_{(\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}h_{\nu)\alpha} + \bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}h - (\bar{\nabla}^2h - \bar{\nabla}_{\rho}\bar{\nabla}_{\sigma}h^{\rho\sigma})\bar{g}_{\mu\nu}), \quad (3.48)$$

donde $\bar{\nabla}$ son las derivadas compatibles con $\bar{g}_{\mu\nu}$ y donde definimos $h^{\mu\nu} \equiv \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ y $h \equiv \bar{g}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. En el caso en que $\Lambda = 0$ y $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ el operador (3.48) coincide con (3.7).

Si asumimos que $\Lambda \neq 2m^2\sigma$ es posible diagonalizar el lagrangiano (3.47) realizando la siguiente re-definición de campos

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{2m^2}{(\Lambda - 2m^2\sigma)}k_{\mu\nu}.$$

En términos de $\tilde{h}_{\mu\nu}$ y $k_{\mu\nu}$, el lagrangiano (3.47) es

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{\Lambda - 2m^2\sigma}{4m^2}\tilde{h}^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}[\tilde{h}] + \frac{2m^2}{(\Lambda - 2m^2\sigma)}\left(\frac{1}{2}k^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}[k] - \frac{1}{4}M_{\text{FP}}^2(k^{\mu\nu}k_{\mu\nu} - k^2)\right), \quad (3.49)$$

donde la masa de Fierz-Pauli está dada por

$$M_{\text{FP}}^2 = \frac{1}{2}(\Lambda - 2m^2\sigma). \quad (3.50)$$

El primer término en (3.49) es proporcional a la acción de Einstein-Hilbert linealizada respecto a un *background* dado. El segundo término se reduce a la acción de Fierz-Pauli (3.5) para $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Es interesante notar que si $\Lambda = 0$ y $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, no es posible que los términos cinéticos de $\tilde{h}_{\mu\nu}$ y $k_{\mu\nu}$ tengan el signo adecuado al mismo tiempo, sin embargo, como mencionamos anteriormente, dado que GR en $D = 3$ no posee grados de libertad propagantes, es posible elegir σ de modo tal que el campo de espín-2 no sea tipo-fantasma.

Volviendo al caso del *background* AdS₃, para que la acción (3.49) sea unitaria debemos pedir que sea libre de fantasmas (es decir, que tenga signo del término cinético adecuado) y libre de taquiones (campos con masa negativa que satisfagan la condición de Breitenlohner-Freedman, *BF-bound* en inglés). A su vez, si asumimos que la correspondencia AdS/CFT es válida para NMG, la CFT₂ dual también debe ser unitaria, lo que implica que la carga central (3.39) tiene que ser positiva.

La ausencia de modos tipo-fantasma en (3.49) se logra pidiendo

$$m^2(\Lambda - 2m^2\sigma) > 0, \quad (3.51)$$

mientras que los taquiones se evitan si

$$M_{\text{FP}}^2 = \frac{1}{2}(\Lambda - 2m^2\sigma) \geq 0. \quad (3.52)$$

Del lado de la teoría de campos la condición $c_{\text{NMG}} > 0$ implica

$$c = \frac{3\ell}{2G} \left(\sigma - \frac{\Lambda}{2m^2} \right) > 0. \quad (3.53)$$

Es posible ver que las condiciones (3.51), (3.52) y (3.53) son mutuamente excluyentes. Por lo tanto, no es posible lograr unitariedad a “ambos lados de la conjetura”; es decir, para la teoría de gravedad en AdS_3 y en la CFT del borde al mismo tiempo. Esto es lo que se conoce como inconsistencia de unitariedad entre el *bulk* y el *boundary*. Han habido diversos intentos de suplementar la acción de NMG con términos con derivadas superiores con el objetivo de resolver la inconsistencia [ABM14, Sin10, Pau10], sin embargo, ninguno ha tenido éxito. En la próxima sección veremos que existe una teoría de bi-gravedad en $2 + 1$ dimensiones que logra sortear este problema.

3.4. Zwei-Dreibein Gravity (ZDG)

En esta sección describiremos la otra teoría de gravedad en tres dimensiones en la cual nos centraremos en la tesis. En este caso se trata de una teoría de bi-gravedad, es decir, contiene como entes dinámicos dos campos de espín-2 representados por dos *dreibeine*⁸. Estudiaremos la teoría tanto a nivel linealizado como a nivel no-lineal. También veremos la relación que existe entre ZDG y NMG.

3.4.1. Bi-gravedad en tres dimensiones

Ahora pasemos a describir los principales aspectos de la teoría Zwei-Dreibein Gravity (ZDG) propuesta en la referencia [BdHH⁺13].

ZDG es una teoría cuya formulación natural es en términos en el formalismo de Cartan, utilizando formas diferenciales (para una breve pero concisa introducción al formalismo referirse al Apéndice J de libro de Carroll sobre GR [Car04]). ZDG es una teoría de bi-gravedad cuyos campos dinámicos son dos *dreibeine* y dos conexiones de espín. Los *dreibeine* son 1-formas vectoriales $e_I^a = e_{I\mu}^a dx^\mu$ y las conexiones de espín son 1-formas tensoriales de rango-2 $\omega_I^a{}_b = \omega_{I\mu}^a{}_b dx^\mu$.

⁸En la formulación de primer orden utilizando formas diferenciales, es habitual nombrar a los *vielbeine* por su dimensionalidad: en tres dimensiones *dreibein* (del alemán *drei* tres, en cuatro dimensiones *vierbein*, *drei* cuatro, y así sucesivamente).

La 3-forma lagrangiana⁹ de ZDG es la siguiente¹⁰

$$L_{\text{ZDG}} = -M_{\text{P}} \left\{ \sigma e_{1a} R_1^a + e_{2a} R_2^a + \frac{1}{6} m^2 \epsilon_{abc} (\alpha_1 e_1^a e_1^b e_1^c + \alpha_2 m^2 e_2^a e_2^b e_2^c) - \frac{1}{2} m^2 \epsilon_{abc} (\beta_1 e_1^a e_1^b e_2^c + \beta_2 e_1^a e_2^b e_2^c) \right\}, \quad (3.54)$$

donde hemos suprimido los símbolos \wedge y donde todos los productos entre formas deben ser entendidos como productos exteriores, *i.e.* $v^a w^b = v^a \wedge w^b$. También hemos reemplazado la conexión de espín $\omega_{I\mu}{}^a{}_b$ por su dual de Hodge, la 1-forma vectorial $\omega_{I\mu}{}^a = (1/2)\epsilon^a{}_{bc}\omega_{I\mu}{}^{bc}$. Este reemplazo es una práctica habitual en el caso tridimensional. En lugar de las 2-formas tensoriales para la curvatura (de rango 2) y para la torsión (rango 1), utilizaremos las 1-formas duales

$$R_I^a = d\omega_I^a + \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{Ib}\omega_{Ic}, \quad T_I^a = \mathcal{D}_I e_I^a \equiv de_I^a + \epsilon^{abc}\omega_{Ib}e_{Ic}.$$

Los parámetros independientes en (3.54) son las dos constantes cosmológicas α_I , las constantes de interacción β_I y la masa de Planck M_{P} . El parámetro m^2 es un parámetro de masa, que si bien es redundante, es conveniente (entre otras cosas para tomar el límite a NMG), y $\sigma = \pm 1$ es un parámetro de signo.

El análisis hamiltoniano de la teoría nos dice que, para valores arbitrarios de los parámetros β_1 y β_2 , ZDG contiene tres grados de libertad, dos corresponden a un modos de helicidad ± 2 de un gravitón masivo y el restante grado de libertad es un modo potencialmente tipo-fantasma. Un modo de evadir este problema es restringir el espacio de parámetros de la teoría, por ejemplo, eligiendo $\beta_2 = 0$ y asumiendo la invertibilidad de e_1 [DMZ13, BDP13, BHM+15]¹¹.

Las ecuaciones de movimiento para e_1^a , e_2^a , ω_1^a y ω_2^a , habiendo asumido la invertibilidad de e_1^a y elegido $\beta_2 = 0$, son

$$0 = \sigma R_1^a + \frac{1}{2} m^2 \epsilon^a{}_{bc} (\alpha_1 e_1^b e_1^c - 2\beta_1 e_1^b e_2^c), \quad (3.55a)$$

$$0 = R_2^a + \frac{1}{2} m^2 \epsilon^a{}_{bc} (\alpha_2 e_2^b e_2^c - \beta_1 e_1^b e_1^c), \quad (3.55b)$$

$$0 = T_I^a \quad \text{para } I = 1, 2, \quad (3.55c)$$

⁹Si bien el término correcto es densidad lagrangiana, a veces nos referiremos a ésta simplemente como lagrangiano.

¹⁰Aquí ϵ_{abc} es el símbolo de Levi-Civita con $\epsilon_{012} = 1$, mientras que el tensor de Levi-Civita está dado por $\epsilon_{\mu\nu\rho} = \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\nu\rho}$.

¹¹Con el objetivo de eliminar del espectro los grados de libertad no deseados, es necesario generar nuevos vínculos secundarios. Un modo de hacer esto es asumir la invertibilidad de la combinación lineal $\beta_1 e_1^a + \beta_2 e_2^a$. Este requerimiento garantiza la aparición de vínculos secundarios adicionales. La elección que hacemos en este trabajo (e_1 invertible y $\beta_2=0$) es un caso particular del caso anterior. Para más detalles al respecto referise a [BHM+15].

respectivamente.

Notemos que las 2-formas de curvatura y de torsión satisfacen identidades de Bianchi

$$\mathcal{D}_I R_I^a = 0, \quad \mathcal{D}_I T_I^a = \epsilon^{abc} R_{Ib} e_{Ic}.$$

Los términos cinéticos de e_1 y e_2 en (3.54) son invariantes bajo sus respectivos difeomorfismos y sus transformaciones locales de Lorentz. Notemos que la presencia del término de interacción rompe la simetría al subgrupo diagonal correspondiente, dado por la identificación de los parámetros de *gauge* de cada grupo.

Ahora repasaremos algunas soluciones de vacío de la teoría. Entre otras, las soluciones correspondientes a espacios maximalmente simétricos son de suma importancia, en especial el espacio AdS. Asumiremos que ambos *dreibeine* son proporcionales al correspondiente a un espacio de curvatura constante

$$e_1^a = \bar{e}^a, \quad e_2^a = \gamma \bar{e}^a, \quad \omega_I^a = \bar{\omega}^a, \quad (3.56)$$

donde γ es un parámetro de proporcionalidad entre los dos campos de espín-2. Los campos \bar{e}^a y $\bar{\omega}^a$ son el *dreibein* y la conexión de espín para una geometría maximalmente simétrica con constante cosmológica Λ y satisfacen las siguientes relaciones

$$d\bar{\omega}^a + \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\bar{\omega}_b\bar{\omega}_c - \frac{1}{2}\Lambda\epsilon^{abc}\bar{e}_b\bar{e}_c = 0,$$

$$\bar{D}\bar{e}^a \equiv d\bar{e}^a + \epsilon^{abc}\bar{\omega}_b\bar{e}_c = 0.$$

De hecho, es posible ver que (3.56) es una solución de las ecuaciones de movimiento (3.55) dado que el parámetro de proporcionalidad γ y la constante cosmológica Λ cumplen

$$\alpha_1 = 2\gamma\beta_1 - \sigma\frac{\Lambda}{m^2}, \quad \gamma^2\alpha_2 = \beta_1 - \frac{\Lambda}{m^2}. \quad (3.57)$$

Para valores genéricos de los α_I y β_I , las ecuaciones anteriores pueden ser resueltas para expresar γ y Λ en términos de los parámetros de ZDG.

3.4.1.1. Límite a NMG en ZDG

Otro aspecto interesante para destacar de ZDG es el hecho de que es posible obtener la acción de NMG a partir un “flujo” particular en su espacio de parámetros. En nuestra convención para los parámetros del lagrangiano de ZDG(3.54) el límite a NMG es ligeramente diferente de la que fue dada en [BdHH⁺13]. Para el seguir el “flujo” hacia NMG debemos tomar $\sigma = -1$ y realizar las siguientes redefiniciones de campos

$$e_2^a = \gamma e_1^a + \frac{\lambda}{m^2} f^a, \quad \omega_2^a = \omega_1^a - \lambda h^a. \quad (3.58)$$

Entonces NMG puede ser obtenida del siguiente flujo

$$\begin{aligned} M_P(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} M', & \gamma(\lambda) &= 1 + \sigma' \lambda, \\ \alpha_1(\lambda) &= \left(6 - \frac{\Lambda'}{m^2}\right) \lambda + \frac{2(1 + \sigma' \lambda)}{\lambda}, & \beta_1(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} + \lambda, \\ \alpha_2(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} - 2\sigma', \end{aligned} \quad (3.59)$$

y tomando el límite $\lambda \rightarrow 0$. Aquí σ' es el nuevo parámetro de signo y Λ' es la nueva constante cosmológica. La 3-forma lagrangiana (3.54) toma la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{\text{NMG}} = M' \left\{ -\sigma' e_{1a} R_1^a + \frac{\Lambda'}{6} \epsilon^{abc} e_{1a} e_{1b} e_{1c} + h_a T_1^a - \frac{1}{m^2} \left(f_a R_1^a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} e_1^a f^b f^c \right) \right\}. \quad (3.60)$$

La acción de arriba es la formulación “tipo-Chern-Simons” de NMG estudiada en [HRTZ12], donde la masa de Planck está dada por $M' = 1/(8\pi G)$.

A continuación procederemos a estudiar la teoría de ZDG en el régimen lineal.

3.4.2. La teoría linealizada

Ahora nos centraremos en la teoría de ZDG a nivel linealizado respecto a un fondo de AdS. Consideraremos perturbaciones pequeñas respecto de los *dreibeine* y las conexiones de espín de AdS₃ del siguiente modo

$$\begin{aligned} e_1^a &= \bar{e}^a + \kappa h_1^a, & \omega_I^a &= \bar{\omega}^a + \kappa v_I^a, \\ e_2^a &= \gamma (\bar{e}^a + \kappa h_2^a), \end{aligned}$$

donde κ es un parámetro pequeño que controla la expansión. Los términos lineales en la expansión de la densidad lagrangiana (3.54) se cancelan cuando se cumplen las relaciones (3.57). El lagrangiano cuadrático para las fluctuaciones $h_{I\mu}{}^a$ y $v_{I\mu}{}^a$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & -\sigma M_P \left[h_{1a} \bar{\mathcal{D}} v_1^a + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \bar{e}_a (v_{1b} v_{1c} - \Lambda h_{1b} h_{1c}) \right] \\ & -\gamma M_P \left[h_{2a} \bar{\mathcal{D}} v_2^a + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \bar{e}_a (v_{2b} v_{2c} - \Lambda h_{2b} h_{2c}) \right] \\ & - \frac{1}{2} m^2 \gamma \beta_1 M_P \epsilon^{abc} \bar{e}_a (h_{1b} - h_{2b}) (h_{1c} - h_{2c}) . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dado que $\sigma + \gamma \neq 0$, este lagrangiano puede ser diagonalizado mediante una redefinición de los campos

$$\begin{aligned} (\sigma + \gamma) h_+^a &= \sigma h_1^a + \gamma h_2^a , & h_-^a &= h_1^a - h_2^a , \\ (\sigma + \gamma) v_+^a &= \sigma v_1^a + \gamma v_2^a , & v_-^a &= v_1^a - v_2^a . \end{aligned} \quad (3.62)$$

En términos de esos campos el lagrangiano linealizado se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & -(\sigma + \gamma) M_P \left[h_{+a} \bar{\mathcal{D}} v_+^a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \bar{e}^a (v_+^b v_+^c - \Lambda h_+^b h_+^c) \right] \\ & - \frac{\sigma\gamma}{(\sigma + \gamma)} M_P \left[h_{-a} \bar{\mathcal{D}} v_-^a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \bar{e}^a (v_-^b v_-^c - \Lambda h_-^b h_-^c) + \frac{1}{2} M_{\text{FP}}^2 \epsilon_{abc} \bar{e}^a h_-^b h_-^c \right] , \end{aligned} \quad (3.63)$$

que corresponde a un lagrangiano de Fierz-Pauli con y sin masa respectivamente, en formalismo de Cartan. La masa de Fierz-Pauli M_{FP} está dada en términos de los parámetros de ZDG

$$M_{\text{FP}}^2 = m^2 \beta_1 \frac{(\sigma + \gamma)}{\sigma} . \quad (3.64)$$

Al resolver las ecuaciones de movimiento para v_{\pm}^a en términos de las perturbaciones h_{\pm}^a y sustituyendo el resultado de nuevo en la densidad lagrangiana, podemos ver que (3.63) se reduce a la suma de un lagrangiano de Einstein-Hilbert linealizado para $h_{+\mu\nu} = h_{+\mu a} \bar{e}_\nu^a$ y un lagrangiano de Fierz-Pauli para $h_{-\mu\nu} = h_{-\mu a} \bar{e}_\nu^a$, que describe dos modos de helicidad ± 2 con masa M_{FP} en un fondo de AdS_3 .

3.4.3. Resolviendo la inconsistencia bulk/boundary

En la sección anterior hemos obtenido el lagrangiano linealizado de ZDG y hemos visto que es equivalente a la suma del de Einstein-Hilbert a segundo orden en las perturbaciones y el de Fierz-Pauli masivo. Para que la teoría satisfaga las condiciones de unitariedad perturbativa debemos estar seguros de que no posee modos tipo-fantasma ni taquiones. Es suficiente pedir que tanto el coeficiente del término cinético en (3.63) como la masa de Fierz-Pauli (3.64) sean positivos. Ambas condiciones se cumplen si

$$\sigma + \gamma > 0. \quad (3.65)$$

Por otro lado, asumiendo la validez de la conjetura AdS/CFT para ZDG, la teoría de campos dual también debe ser unitaria, lo que implica que la carga central tiene que ser positiva. En la referencia [BdHH⁺13] se calculó el álgebra de cargas asintóticas¹² dando por resultado dos copias del álgebra de Virasoro con carga central

$$c_{\text{ZDG}} = 12\pi\ell M_{\text{P}}(\sigma + \gamma). \quad (3.66)$$

La condición para que c_{ZDG} sea positiva es la misma que (3.65), por lo tanto, ZDG es capaz de lograr unitariedad en el *bulk* y en el *boundary* al mismo tiempo. Esta teoría constituye el primer ejemplo tridimensional que logra resolver la llamada inconsistencia de unitariedad *bulk/boundary*, haciendo de ZDG un modelo de gravedad sumamente interesante.

3.4.4. ZDG como una teoría de un solo dreibein

Una observación interesante que debemos hacer, es que ZDG puede ser entendida como una teoría con un solo *dreibein* con un número infinito de términos de derivadas superiores [BGM14]. El hecho de que las teorías de bi-gravedad puedan ser expresadas como teorías con derivadas superiores de una sola métrica fue observado por primera vez en la referencia [HSMvS15]. Debemos notar que es posible despejar algebraicamente la ecuación de movimiento (3.55b) en favor de e_2 . Usando la propiedad $\varepsilon^{\rho\sigma\tau} R_{1\sigma\tau}{}^a = \det(e_1) e_1^{\sigma a} G_{1\rho}{}^\sigma$, podemos obtener la siguiente expresión para e_2

$$e_{2\mu}{}^a = \frac{\alpha_1}{2\beta_1} e_{1\mu}{}^a + \frac{\sigma}{m^2\beta_1} S_{1\mu}{}^a, \quad (3.67)$$

¹²Para más detalles acerca del cálculo referirse a la tesis doctoral de Wout Merbis [Mer14] Capítulo 5.

donde $S_{1\mu}{}^a \equiv S_{1\mu\nu}e_1^{\nu a}$, con $S_{1\mu\nu} = R_{1\mu\nu} - \frac{1}{4}R_1g_{1\mu\nu}$ el tensor de Schouten asociado a la métrica $g_{1\mu\nu} \equiv e_{1\mu}{}^a e_{1\nu}{}^b \eta_{ab}$. Aquí identificamos $g_{1\mu\nu}$ con la métrica física, dado que, como dijimos anteriormente, hemos asumido que e_1 es invertible. El campo e_2 representa el contenido de derivadas superiores de la teoría, y puede ser interpretado como un “campo auxiliar”, en el sentido de que podemos resolver las ecuaciones de movimiento (3.55a) de un modo algebraico en favor de dicho campo. Es “auxiliar” del mismo modo en que el campo $f_{\mu\nu}$ lo es en la formulación de segundo orden de NMG [HT10] (ver Sección 3.3.1).

Utilizando la relación (3.67) podemos resolver la ecuación de la torsión $T_2^a = 0$ para $\omega_2^a(e_1)$ como una serie de potencias formal en $1/m^2$

$$\omega_{2\mu}{}^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \Omega_{\mu}^{(2n)a}, \quad (3.68)$$

y resolviendo $T_2^a = de_2^a + \epsilon^a{}_{bc}\omega_2^b e_2^c = 0$ orden por orden en $1/m^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu}^{(0)a} &= \omega_{1\mu}{}^a, & \Omega_{\mu}^{(2)a} &= -\frac{2\sigma}{\alpha_1} C_{1\mu}{}^a, \\ \Omega_{\mu}^{(2k)a} &= -\frac{2\sigma}{\alpha_1} \det(e_1)^{-1} \epsilon^{\nu\rho\sigma} \epsilon_{bcd} \left(e_{1\nu}{}^a e_{1\mu}{}^b - \frac{1}{2} e_{1\nu}{}^b e_{1\mu}{}^a \right) \Omega_{\rho}^{(2k-2)c} S_{1\sigma}{}^d, \end{aligned} \quad (3.69)$$

para $k > 1$. Aquí $C_{1\mu}{}^a \equiv C_{1\mu\nu}e_1^{\nu a}$ y $C_{1\mu\nu} = \det(e_1)^{-1} \epsilon_{\mu}{}^{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\alpha} S_{1\beta\nu}$ es el tensor de Cotton asociado a $g_{1\mu\nu}$. Este resultado nos permite escribir R_2^a como una serie en $1/m^2$

$$R_2^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} R_2^{(2n)a}, \quad (3.70)$$

donde los coeficientes de la expansión están dados por

$$\begin{aligned} R_2^{(0)a} &= R_1^a, & R_2^{(2)a} &= -\frac{2\sigma}{\alpha_1} \mathcal{D} C_1^a, \\ R_2^{(2k)a} &= \mathcal{D} \Omega^{(2k)a} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon^a{}_{bc} \Omega^{(2i)b} \Omega^{(2k-2i)c}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

con $C_{1\mu}{}^a \equiv e_{1\nu}{}^a C_{1\mu}{}^{\nu}$. La derivada covariante \mathcal{D} está definida respecto a ω_1^a . Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones de movimiento (3.55b) obtenemos una ecuación diferencial para e_1^a como una serie de potencias formal en $1/m^2$. Debemos notar que las ecuaciones de movimiento de ZDG escritas en términos de un solo *dreibein* involucran un número infinito de términos con derivadas superiores. También debemos advertir que esta es una expansión formal que en la mayoría de los casos no es de mucha utilidad, a menos que seamos capaces de sumar los

infinitos términos involucrados. Como veremos más adelante, para ondas propagantes en AdS_3 en la Sección 5.1 es posible resumir toda la serie a una expresión cerrada.

Por otro lado, las acciones con más de cuatro derivadas pueden, al contrario de ZDG, propagar dos o más gravitones masivos (ver referencia [BdHM⁺12] por ejemplo). Sin embargo, en los casos donde esto sucede, hay términos con más de cuatro derivadas actuando sobre la métrica. Este no es el caso de ZDG, dado que $\Omega^{(2n)}$ contiene contracciones del tensor de Cotton con $2n - 2$ tensores de Schouten y por lo tanto la curvatura R_2 es una serie infinita de términos que son productos que tienen como mucho cuatro derivadas actuando sobre el tensor métrico. Las ecuaciones de movimiento resultantes contienen un número infinito de derivadas, pero no más de cuatro actuando sobre la métrica. También notemos que en el caso de un número infinito de derivadas el problema de valores iniciales y el conteo de grados de libertad es sutil (para una discusión al respecto ver por ejemplo [BK08]). La formulación de derivadas superiores de arriba, por lo tanto, no está en contradicción con el hecho de que ZDG posee un solo gravitón masivo que se propaga.

Es interesante mencionar que se ha intentado construir teorías de gravedad en tres dimensiones libres de fantasmas y de la inconsistencia de unitariedad entre el *bulk* y el *boundary*, mediante la adición de términos de curvatura superior. Algunos ejemplos son las referencias [ABM14], [Sin10] y [Pau10]. Sin embargo, esos intentos no han tenido éxito. Por lo tanto, la expansión (3.71) nos sugiere que la única manera obtener una teoría consistente de gravedad en AdS_3 y de evadir el conflicto *bulk/boundary* es mediante la adición de una torre infinita de términos con derivadas superiores, los cuales se encuentran “codificados” en el campo auxiliar de espín-2 e_2 .

Vale la pena resaltar que las ecuaciones de movimiento con derivadas superiores para g_1 hasta orden $1/m^2$ pueden ser integradas a una acción si los parámetros de la teoría satisfacen una relación de consistencia con el límite de NMG. Debemos remarcar que esto no significa que ZDG con valores genéricos de sus constantes de acoplamiento es una completación con derivadas superiores de NMG. Sin embargo, es interesante notar que, como veremos a continuación, la acción al orden $1/m^2$ es precisamente la acción de NMG. En general, la interpretación de ZDG como una teoría de gravedad con derivadas de orden superior de una sola métrica, solo se mantiene al nivel de las ecuaciones de movimiento sin campos de materia.

Otra relación entre NMG y ZDG Ahora veremos que hay otra manera de relacionar ZDG con NMG haciendo uso de la expansión formal (3.71). Primero escribiremos la ecuaciones de

movimiento de ZDG como función de una sola métrica con contribuciones de términos de derivadas superiores hasta orden $1/m^4$. Esto puede obtenerse sustituyendo (3.70) con los coeficientes (3.71) en la ecuación de movimiento (3.55b). La ecuación de movimiento está escrita en su forma de segundo orden, utilizando como métrica $g_{\mu\nu} = e_{1\mu}{}^a e_{1\nu}{}^b \eta_{ab}$ para subir y bajar índices. El resultado es

$$0 = \sqrt{-g} M_P \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \sigma}{2\beta_1^2} \right) G_{\mu\nu} - \left(\frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{4\beta_1^2} - \beta_1 \right) m^2 g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} E_{\mu\nu} + \frac{1}{m^4} F_{\mu\nu} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{m^6} \right) \right\}, \quad (3.72)$$

donde aquí y en lo sucesivo suprimiremos la etiqueta “1”. Los tensores simétricos $E_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ poseen términos con cuatro y seis derivadas respectivamente

$$E_{\mu\nu} = -\frac{2\sigma}{\alpha_1} \left[\square R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} \square R + \nabla_\mu \nabla_\nu R) - 3R_{\mu\rho} R^\rho{}_\nu + g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + \frac{3}{2} R R_{\mu\nu} \right] + \frac{\alpha_2}{2\beta_1^2} \left[g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} - \frac{5}{8} g_{\mu\nu} R^2 + \frac{3}{2} R R_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho} R^\rho{}_\nu \right], \quad (3.73)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{4}{\alpha_1^2} \left\{ \nabla^\rho [S_{(\mu}{}^\sigma \nabla_{\nu)} S_{\rho\sigma} - S_{(\mu}{}^\sigma \nabla_\rho S_{|\nu)\sigma} - S_\rho{}^\sigma \nabla_{(\mu} S_{\nu)\sigma} + 2S^\sigma{}_\mu \nabla_{[\rho} S_{\sigma]\nu} + S^\sigma{}_\rho \nabla_\sigma S_{\mu\nu}] + \nabla^\rho S^{\lambda\sigma} \nabla_{[\lambda} S_{\rho]\sigma} g_{\mu\nu} - 2\nabla^\rho S^\sigma{}_\nu \nabla_{[\sigma} S_{\rho]\mu} \right\}. \quad (3.74)$$

Queremos remarcar que al orden $1/m^2$ las ecuaciones de movimiento de arriba no pueden ser integradas a una acción, a menos que las siguientes relaciones entre los parámetros de ZDG se cumplan

$$-\frac{\sigma}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{2\beta_1^2}. \quad (3.75)$$

Si los parámetros de ZDG se restringen de esa manera, entonces las contribuciones de orden $1/m^2$ en (3.73), pueden ser integrados a una acción proporcional a $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2$. Esta combinación de términos cuadráticos en la curvatura corresponden a la parte de derivadas superiores de la acción de NMG. Esto no es una mera coincidencia como puede verse al tomar explícitamente el límite a NMG. De hecho, luego de sustituir las parametrizaciones (3.59) en los coeficientes de la ecuación (3.72), podemos ver los términos al orden $1/m^4$ escalan como λ y por lo tanto se

anulan en el límite $\lambda \rightarrow 0$. Los coeficientes que sobreviven a dicho límite son

$$\begin{aligned} M_P \left(1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \sigma}{2\beta_1^2} \right) &= \sigma' + \mathcal{O}(\lambda), \\ -M_P \left(\frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{4\beta_1^2} - \beta_1 \right) m^2 &= \Lambda_0 + \mathcal{O}(\lambda), \\ -M_P \frac{2\sigma}{\alpha_1} &= 1 + \mathcal{O}(\lambda), \\ M_P \frac{\alpha_2}{2\beta_1^2} &= \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\lambda). \end{aligned}$$

En particular, las dos últimas ecuaciones muestran que el límite $\lambda \rightarrow 0$ refuerza la relación entre los parámetros (3.75) y es una consecuencia de las ecuaciones de movimiento de NMG [BHT09a, BHT09b] que resultan de la ecuación (3.72) en el límite $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} 0 = \sigma' G_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \left[\square R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} \square R + \nabla_\mu \nabla_\nu R) - 4R_{\mu\rho} R^\rho{}_\nu \right. \\ \left. + \frac{9}{4} R R_{\mu\nu} + \frac{3}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} - \frac{13}{16} g_{\mu\nu} R^2 \right], \end{aligned}$$

pueden ser integradas a una acción, incluso para las ecuaciones de movimiento de ZDG genéricas (3.72) esto no es posible orden por orden en m^2 .

Notemos que la utilidad de la formulación en términos de derivadas superiores de ZDG dependerá fuertemente de la aplicación específica en la que estemos pensando. En esta sección, hemos utilizado dicha formulación para obtener las soluciones de onda AdS. Para otras aplicaciones, como por ejemplo, en AdS/CFT, es necesario contar con una acción con un principio variacional bien definido, razón por la cual debemos remitirnos a la formulación de primer orden con dos *dreibeine*. Notemos que incluso si los términos de derivadas superiores pudieran ser integrados a una acción, la formulación con derivadas superiores sigue siendo más útil para definir un principio variacional bien definido, como es discutido en el caso de NMG en la referencia [HT10].

3.4.5. Auto-dualidad en ZDG

Para terminar este capítulo veremos una curiosa relación que se da entre los dos campos de espín-2 de la teoría, una suerte de auto-dualidad entre la métrica asociada a e_1 y a la “métrica” asociada a e_2 .

Además de la relación (3.67) entre e_1^a y e_2^a y las correspondientes métricas $g_{1\mu\nu} = e_1^a{}_\mu e_1^b{}_\nu \eta_{ab}$ y $g_{2\mu\nu} = e_2^a{}_\mu e_2^b{}_\nu \eta_{ab}$, uno puede preguntarse si, para una clase particular de soluciones, existe

una transformación de coordenadas que mapee g_2 en g_1 y viceversa. Vale la pena mencionar que aquí y en lo subsiguiente nos referiremos a g_2 como una “métrica” dado que la forma que toma por su relación con el *dreibein* respectivo recuerda a la de una métrica. Dado que únicamente estamos asumiendo la invertibilidad de e_1 , g_1 es la métrica física¹³. Si ambos campos de espín-2 tienen una interpretación geométrica, no es claro aún.

En esta sección analizaremos cuando ambas “métricas”, g_1 y g_2 , están relacionadas por una transformación de coordenadas y/o escala. Este suerte de “dualidad” entre los dos campos de espín-2 ya fue descubierta en la llamada teoría $f - g$ [ISS71], donde las dos métricas ($g_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$) representan la solución de Schwarzschild-(A)dS al mismo tiempo [ISS71]. En [Vol15], se halló una solución de agujero negro con pelo asintóticamente (A)dS en la teoría de bi-gravedad de Hassan-Rosen [HR12] donde esta dualidad entre métricas ocurre. Todos los ejemplos recién mencionados pertenecen a teorías de bi-gravedad de cuatro dimensiones; sin embargo, también existen ejemplos en tres dimensiones: en la referencia [BT09] se estudió la versión tridimensional de la teoría $f - g$ y se encontraron soluciones de agujero negro asintóticamente AdS₃ para ambas métricas. Por lo tanto, es natural preguntarse si ZDG también posee este tipo de dualidad. En el caso particular en el cual g_1 es un espacio maximalmente simétrico, se cumple que $R_{1\mu\nu} = 2\Lambda g_{1\mu\nu}$, y recurriendo a la expresión (3.67) es inmediato que g_2 debe ser proporcional a g_1 *on-shell*. Este razonamiento también es válido para el agujero negro BTZ, dado que es localmente equivalente a AdS₃. Más precisamente, si la métrica asociada a e_1 está dada por

$$ds_1^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M \right) dt^2 + 2J dt d\varphi + r^2 d\varphi^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M + \frac{J}{4r^2} \right)^{-1} dr^2,$$

entonces, la “métrica” asociada a e_2 viene dada por un factor conforme constante multiplicando la métrica de BTZ

$$ds_2^2 = \frac{1}{4m^2 \ell^4 \beta_1^2} \left\{ - \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M \right) dt^2 + 2J dt d\varphi + r^2 d\varphi^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M + \frac{J}{4r^2} \right)^{-1} dr^2 \right\}.$$

Este mismo comportamiento será observado más adelante para ondas propagantes en AdS₃ (Sección 5.1), y en espacios de Lifshitz, Schrödinger y Warped AdS (Sección 5.2). Por lo tanto, en ZDG tenemos un fenómeno de dualidad similar al encontrado en otras teorías de bi-gravedad,

¹³En la nota al pie de página número 4 de la referencia [BGM14] los autores dicen que es posible hallar la inversa de e_2 como una expansión en potencias de $1/m^2$. Por otro lado, incluso cuando la invertibilidad de e_2 no es impuesta como condición necesaria, veremos que las soluciones que encontramos aquí para los dos campos de espín-2 son invertibles.

es decir, los dos campos de espín-2 g_1 y g_2 representan el mismo tipo de geometría. Más precisamente, lo que queremos decir es que, cuando una solución de uno de los *dreibein* representa una geometría dada, la solución del otro *dreibein* representa la misma geometría a menos de difeomorfismos y redefiniciones de parámetros, si bien hasta el momento solo lo hemos chequeado para espacios localmente AdS_3 .

Capítulo 4

Espacios asintóticamente Anti-de Sitter y sus deformaciones en New Massive Gravity

En este capítulo estudiaremos soluciones de New Massive Gravity (NMG) con distintas condiciones asintóticas de borde. En primer lugar, estudiaremos espacios con condiciones de borde relajadas (respecto de las condiciones habituales de Brown-Henneaux) que permiten incluir decaimientos logarítmicos. Mediante el proceso de renormalización holográfica adaptado al caso de NMG, podremos calcular las cargas conservadas asociadas utilizando el tensor de Brown-York de la teoría. También consideraremos geometrías que no tienden asintóticamente al espacio AdS y que son útiles para explorar extensiones de AdS/CFT. En estos casos la receta de renormalización holográfica no será completamente satisfactoria y discutiremos las dificultades que aparecen en el cálculo de las cargas conservadas.

4.1. Deformaciones quirales en AdS

En esta sección consideraremos la teoría de gravedad masiva conocida como New Massive Gravity (NMG) en su versión “crítica”; es decir, en la región del espacio de parámetros donde se anula la carga central de la teoría de campos dual. En ese punto del espacio de parámetros la masa del gravitón también se hace cero, degenerando los gravitones masivos en los modos no-masivos de Relatividad General (GR). Una consecuencia de esto es que la masa del agujero negro de Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) tiene masa y momento angular nulo. Esto parecería implicar que la teoría carece de soluciones con cargas no-nulas, sin embargo, si se eligen adecuadamente las condiciones asintóticas de borde, es posible hallar deformaciones del agujero negro BTZ con cargas conservadas no triviales. Estas condiciones de contorno resultan ser relajadas respecto de las condiciones asintóticas de Brown-Henneaux [BH86]. El objetivo de esta sección es estudiar de qué manera pueden ser relajadas las condiciones asintóticas de borde.

Un conjunto de condiciones de borde relajadas respecto de las de Brown-Henneaux [BH86] fueron consideradas en la referencia [GJ08]. Estas condiciones de borde, conocidas como de Log-Gravity contemplan términos *subleading* tipo logarítmicos. Los modos que presentan este tipo de decaimientos son identificados como los duales gravitatorios de los llamados operadores logarítmicos de un tipo especial de CFT, las llamadas Logarithmic CFT (LCFT) [Gur93]. Típicamente estos modos logarítmicos aparecen en teorías de gravedad con derivadas superiores en puntos especiales del espacio de parámetros. En estos puntos, llamados críticos, la carga central de la teoría de campos dual se anula.

En esta parte de la tesis consideraremos soluciones que satisfacen un conjunto de condiciones de borde diferentes a las de Brown-Henneaux [BH86] y a las de Log-Gravity [GJ08]. Las condiciones asintóticas que exploraremos en esta sección resultan ser una deformación de las de Brown y Henneaux, pero de un tipo diferente ya que no solo relajan las componentes *subleading* de la métrica sino que también modifican las partes *leading-order* de la misma. Debemos destacar que, a pesar de que las condiciones de borde empleadas cambian drásticamente el comportamiento asintótico, el tensor de energía momentos cuasi-local sigue estando bien definido en el borde del espacio-tiempo y permite calcular las cargas conservadas asociadas a soluciones que satisfacen las nuevas condiciones de borde. El tensor de energía-momentos cuasi-local para distintos tipos de condiciones de borde de AdS_3 deformadas ya ha sido calculado en la literatura, por ejemplo, en las referencias [HT10, GL10, GGL11, CMT12, GG13], algunas de las cuales serán estudiadas más

adelante en esta tesis. Sin embargo, como ya hemos dicho, las condiciones asintóticas consideradas aquí exhiben un decaimiento substancialmente más débil.

Debemos mencionar que en esta sección tomaremos el parámetro de signo $\sigma = 1$, con lo cual la acción de NMG queda escrita en su forma habitual

$$S_{\text{NMG}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{m^2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) \right).$$

Como primer paso, recordemos cuál es el punto crítico de NMG en espacios asintóticamente AdS₃. El espacio-tiempo de AdS₃ puede escribirse en coordenadas estáticas como

$$ds_{\text{AdS}}^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (4.1)$$

con $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. El borde del espacio-tiempo está ubicado en $r = \infty$. Para un dado valor de la constante cosmológica Λ existen dos valores para el radio ℓ para los cuales AdS es solución

$$\ell_{\pm} = -\frac{\Lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{m^2}} \right).$$

De acuerdo con la conjetura AdS/CFT, si NMG formulada en AdS₃ resulta ser un modelo consistente, entonces debe existir una CFT bidimensional formulada en $r = \infty$, con cargas centrales izquierdas y derechas iguales dadas por

$$c = \frac{3\ell}{2G} \left(1 + \frac{1}{2\ell^2 m^2} \right). \quad (4.2)$$

Este valor de la carga central coincide con el de la anomalía de traza de la CFT₂ dual (ver Sección 3.3.3).

Además, es posible añadir a la teoría dada por $S_{\text{NMG}} + S_{\Lambda}$ un término de Chern-Simons gravitacional [DJT82b]

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{32\pi G\mu} \int_{\Sigma} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \left(\partial_{\nu} \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} - \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\delta}^{\alpha} \Gamma_{\rho\beta}^{\delta} \right). \quad (4.3)$$

En tal caso, las ecuaciones de movimiento adquieren un término adicional proporcional al tensor de Cotton $C_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} R_{\beta\nu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} R_{\mu\beta}$ con una constante de acoplamiento μ . Si este término está presente, la carga central de la CFT dual cambia, tomando valores distintos para los modos izquierdos y derechos $c_{\pm} = \frac{3\ell}{2G} \left(1 + \frac{1}{2\ell^2 m^2} \pm \frac{1}{\mu\ell} \right)$. Esto resulta en una anomalía de

difeomorfismos en la teoría del borde. La teoría de Gravedad Quiral de [LSS08] corresponde al caso $\mu\ell = 1$ y $1/m^2 = 0$ y es fácilmente generalizada a valores de $1/m^2$ finito pidiendo $c_- = 0$. Sin embargo, en este capítulo nos centraremos en el caso de NMG pura, es decir, tomando $1/\mu = 0$ en el punto del espacio de parámetros donde la carga central (4.2) se anula, más precisamente, esto ocurre cuando la masa del gravitón adquiere el valor

$$m^2 = -\frac{1}{2\ell^2}. \quad (4.4)$$

En este punto, NMG exhibe algunas peculiaridades. Por ejemplo, cuando se cumple la relación (4.4) los agujeros negros de BTZ poseen cargas conservadas nulas. Sin embargo, debemos notar que, a pesar de esto, existen soluciones en el punto $c = 0$ que poseen cargas conservadas no-triviales [GL10]. En esta sección discutiremos soluciones de este tipo.

4.1.1. Condiciones asintóticas de borde

Como mencionamos anteriormente, un ingrediente importante para definir la teoría son las condiciones de borde. Las condiciones asintóticas de Brown-Henneaux [BH86] quedan especificadas al considerar deformaciones de la métrica de AdS₃ de la forma

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

siendo $\bar{g}_{\mu\nu}$ la métrica de AdS₃ y $h_{\mu\nu}$ las perturbaciones que satisfacen el siguiente comportamiento asintótico

$$h_{tt} \simeq \mathcal{O}(1), \quad h_{rr} \simeq \mathcal{O}(r^{-4}), \quad h_{\varphi t} \simeq \mathcal{O}(1), \quad (4.5)$$

$$h_{\varphi r} \simeq \mathcal{O}(r^{-3}), \quad h_{\varphi\varphi} \simeq \mathcal{O}(1), \quad h_{rt} \simeq \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (4.6)$$

donde $\mathcal{O}(r^{-n})$ refiere a funciones arbitrarias de φ y t cuyo decaimiento es igual o más rápido que una potencia r^{-n} para r grande; en particular, esto implica que

$$g_{tt} = -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1), \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 + \mathcal{O}(1). \quad (4.7)$$

Este conjunto de condiciones incluye, en particular, a las soluciones de agujero negro BTZ.

Las condiciones de borde propuestas en [GJ08, GJ09] para la llamada Gravedad Logarítmica permiten un relajar las condiciones (4.7), al considerar decaimientos de la forma $h_{ij} \simeq \mathcal{O}(\log(r))$

con $i, j = t, \varphi$. Además, es posible definir otros conjuntos de condiciones de borde; ver, por ejemplo, las referencias [LS09b, ABGH09, OTT09, HMT09]. Para poder distinguir claramente entre las distintas condiciones, a continuación resumiremos las distintas propuestas. Para ello, consideraremos la siguiente forma para la métrica

$$ds^2 = d\rho^2 + e^{2\rho} \gamma_{ab} dz^a dz^b, \quad (4.8)$$

que recuerda a la expansión de Fefferman-Graham de GR [FG85], donde z^\pm son direcciones nulas ($a, b = \pm$), y la expansión asintótica está dada por

$$\gamma_{ab}(\rho) = \gamma_{ab}^{(0)} + e^{-2\rho} \gamma_{ab}^{(2)} + e^{-4\rho} \gamma_{ab}^{(4)} + \dots \quad (4.9)$$

siendo $\gamma_{ab}^{(n)}$ funciones de z^+ y/o z^- que no dependen de ρ [Cun13].

En términos de (4.8)-(4.9), las condiciones de borde de Brown-Henneaux (4.5)-(4.6) se leen

$$\gamma_{--}^{(0)} = \gamma_{++}^{(0)} = 0, \quad \gamma_{-+}^{(0)} = \gamma_{+-}^{(0)} = -\frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

Para poder comparar las expresiones anteriores con (4.5)-(4.6), es necesario considerar el cambio de coordenadas $\tau \equiv t/\ell^2$, $\varphi \equiv \phi/\ell$, con $z^\pm \equiv \tau \pm \varphi$ y $\rho \equiv \log(r)$.

Las llamadas condiciones de borde relajadas de Log-Gravity [GJ08] corresponden a considerar NMG en el punto $m^2 \ell^2 = -1/2$ y suplementar la expansión (4.9) con un término adicional: $\rho e^{-2\rho} \gamma_{++}^{(\text{Log})}$, manteniendo las condiciones (4.10). Dado que NMG es invariante ante paridad, la versión $(--)$ de esas condiciones también existe [LS09a]. Claramente, el comportamiento asintótico con $\gamma_{++}^{(\text{Log})} \neq 0$ es más débil que las condiciones de borde Brown-Henneaux debido a la existencia de un término en (4.8) que crece linealmente como $\sim \mathcal{O}(\rho)$. En términos de la coordenada radial r esto corresponde a un término de decaimiento logarítmico $\sim \mathcal{O}(\log(r))$.

Por otro lado, en la referencia [LS09b], se consideró la posibilidad de tener contribuciones a (4.8) con un crecimiento cuadrático en la coordenada radial de la forma $\sim \mathcal{O}(\rho^2) \sim \mathcal{O}(\log^2(r))$. Allí se mostró que tal comportamiento es posible si se acopla NMG y TMG en un punto especial del espacio de parámetros: $m^2 \ell^2 = 2\mu\ell = 3/2$. En dicho punto, es posible añadir a la expansión (4.9) un término de la forma $\rho^2 e^{-2\rho} \gamma_{++}^{(\text{Log}^2)}$ con $\gamma_{ab}^{(0)}$ cumpliendo (4.10). Soluciones explícitas de NMG que satisfacen dichas condiciones de contorno fueron halladas en la referencia [ABGH09].

Un conjunto de condiciones de borde completamente diferente para NMG acoplada a TMG fue propuesto en [OTT09], donde se mostró que la teoría en el punto $m^2\ell^2 = 1/2$ con μ arbitrario, admite la adición a (4.9) de un término de la forma $e^{-\rho}\gamma_{+-}^{(1)}$. Este término crece rápidamente para ρ grande y da lugar a correcciones del tipo $\sim \mathcal{O}(e^\rho) \sim \mathcal{O}(r)$ para (4.8). El cálculo del tensor de energía-momentos de soluciones que satisfacen este tipo de condiciones asintóticas y/o las condiciones asintóticas de Log-grav fue realizado, por ejemplo, en las referencias [HT10, GL10].

Es interesante comparar los comportamientos enumerados anteriormente con el nuevo tipo de condiciones de borde propuestos por Compère, Song y Strominger en [CSS13] en el contexto de GR en tres dimensiones acoplada a materia. Estas corresponden a considerar la expansión (4.9) y relajar las condiciones (4.10) permitiendo que $\gamma_{++}^{(0)} = \partial_+ f(z^+) \neq 0$ con $\gamma_{-+}^{(0)} = \gamma_{+-}^{(0)} = -1/2$ y $\gamma_{--}^{(2)}$ fijo. Se mostró que estas condiciones de borde dan lugar a un álgebra de isometrías asintóticas generada por el producto de una álgebra de Virasoro y un factor afín de Kac-Moody $\hat{u}(1)$. Las simetrías conformes reducidas para TMG en AdS₃ con condiciones de borde de quiralidad mixta también fueron estudiadas en [HMT09].

Aquí consideraremos un conjunto de condiciones de borde diferentes. Estudiaremos deformaciones de las condiciones asintóticas de Brown-Henneaux (4.10) que corresponden a agregar a la expansión (4.9) términos de la forma

$$\rho e^{-2\rho}\gamma_{++}^{(\text{Log})} + \rho\gamma_{++}^{(\text{New})}. \quad (4.11)$$

Estas condiciones se reducen a las de Log-gravity solo en el caso $\gamma_{++}^{(\text{New})} = 0$. Mientras que en el caso en que dicho término está presente, la métrica (4.8) adquiere una dependencia del tipo $\sim \mathcal{O}(\rho e^{2\rho}) \sim \mathcal{O}(r^2 \log(r))$. Notemos que, al contrario de las condiciones de Brown-Henneaux y de Log-gravity, los términos (4.11) cambian el comportamiento del orden dominante (4.7). De hecho, (4.11) permite cambiar (4.7) por

$$g_{tt} \simeq -\frac{r^2}{\ell^2} \log(r) - \frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(\log(r)).$$

Algo similar ocurre para $g_{\varphi\varphi}$. Este tipo de condiciones de borde fueron estudiadas en [HMT09] para TMG, donde se mostró que las mismas son consistentes con la simetría conforme en el borde. Soluciones explícitas que satisfacen esas condiciones asintóticas fueron analizadas en [GGV09, Cle09a]. En la próxima sección revisaremos ese tipo de soluciones en el caso de NMG.

4.1.2. Soluciones no lineales: Deformando la solución BTZ

Ahora nos centraremos en el estudio de soluciones de NMG que satisfacen las condiciones asintóticas de borde discutidas anteriormente. Para ello, primero consideraremos la solución de BTZ rotante extremal

$$ds_{e\text{BTZ}}^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 4GM \right) dt^2 - 4GM\ell dt d\phi + r^2 d\phi^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 4M + \frac{4G^2 M^2 \ell^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2, \quad (4.12)$$

con $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t \in \mathbb{R}$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Para $M > 0$ esta métrica posee un horizonte de eventos en $r = \ell\sqrt{2GM}$. Al ser un espacio de Einstein con constante cosmológica negativa en tres dimensiones, la geometría del BTZ es localmente equivalente a AdS_3 y es asintóticamente AdS_3 en el sentido estricto de [BH86]. En el caso de GR, el parámetro M en (4.12) corresponde a la masa y al momento angular del agujero negro rotante extremal $J = M\ell$. En el caso de TMG en el punto quiral $\mu\ell = 1$, por el contrario, la masa de dicha solución es cero, y lo mismo sucede en NMG en el punto $m^2\ell^2 = -1/2$ donde $c = 0$.

Ahora, consideremos una deformación del BTZ extremal (4.12) de la forma

$$ds^2 = ds_{e\text{BTZ}}^2 + H_{ab} dz^a dz^b, \quad (4.13)$$

donde z^\pm son las coordenadas nulas introducidas anteriormente con $a, b = +, -$, y H_{ab} son tres funciones de las coordenadas z^\pm y r . La expansión asintótica de H_{ab} para r grande determina las condiciones asintóticas de borde.

Una solución exacta de NMG en el punto $m^2\ell^2 = -1/2$ ($c = 0$) está dada por la deformación

$$H_{ab}(r) = \ell^4 \delta_a^+ \delta_b^+ (k_0 + k_2 r^2) \log \left(\frac{r^2 - 2GM\ell^2}{2GM\ell^2} \right), \quad (4.14)$$

donde k_0 y k_2 son dos constantes arbitrarias.

La geometría (4.12)-(4.14) no es conformemente plana, razón por la cual, no es una variedad de Einstein; sin embargo, presenta invariantes de curvatura constantes que dependen sólo del parámetro ℓ . En general, la función (4.14) diverge en $r = \ell\sqrt{2GM}$, salvo en caso $k_0 = -2GM\ell^2 k_2$, que será abordado más adelante.

Es interesante mencionar que existen soluciones similares a (4.12)-(4.14) para NMG acoplada a TMG en el punto quiral $c_- = 0$. Para el caso de NMG puro, *i.e.* $1/\mu = 0$, dado que la teoría es

invariante de paridad, la geometría (4.12)-(4.14) sigue siendo solución si se realizan los cambios $N_\phi \rightarrow -N_\phi$ y $z^\pm \rightarrow z^\mp$. Métricas del tipo (4.12)-(4.14) han sido estudiadas en las referencias [GGV09, Cle09a], y soluciones localmente equivalentes a ellas han aparecido, por ejemplo, en [GPS08, ABGH09].

4.1.3. Cargas conservadas

Ahora nos abocaremos al cálculo de las cargas conservadas de las soluciones encontradas en la sección anterior. Para ello utilizaremos el método del tensor cuasi-local de esfuerzos de Brown-York para NMG que repasamos en la Sección 3.3.1. Recordemos entonces la definición del tensor de Brown-York en NMG realizada en [HT10]. Este tensor se obtiene al variar la acción completa de la teoría, términos de *bulk* y de borde, respecto a la métrica del borde γ^{ij} . Para el caso de NMG se obtienen dos contribuciones, una proveniente del término de Einstein-Hilbert y otra de la parte cuadrática en la curvatura

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S}{\delta \gamma^{ij}} \Big|_{r=\text{const}} = T_{ij}^{\text{EH}} + T_{ij}^{\text{NMG}}. \quad (4.15)$$

La forma explícita de T_{ij}^{EH} y T_{ij}^{NMG} ya fue dada en la Sección 3.3.1. El tensor de esfuerzos del borde se obtiene al tomar el límite $r \rightarrow \infty$, el cual suele divergir a menos que se utilice algún método de regularización como la renormalización holográfica discutida en el capítulo anterior (ver Sección 3.3.1).

Dado el tensor T_{ij} , las cargas conservadas se definen de acuerdo a la siguiente integral [BY93]

$$Q[\xi] = \int ds u^i T_{ij} \xi^j,$$

donde ds es el elemento de línea de las superficies de t constante en el borde, u es el vector unitario ortogonal a las superficies de t constante y ξ es el vector de Killing que genera la isometría en $\partial\Sigma$ a la que la carga está asociada. En el caso de la masa, las componentes de este vector son $\xi^i = N_t u^i$, donde la función N^t es la función *lapse* de la métrica bidimensional inducida en el borde en términos de la descomposición ADM de la misma.

Ahora vamos a calcular las cargas asociadas a las soluciones (4.12)-(4.14). La acción *on-shell* de la teoría diverge como $\sim cr^2 + \mathcal{O}(1)$ para valores grandes de r . Sin embargo, dado que las deformaciones del BTZ extremal en las que estamos interesados ocurren en el punto crítico de la teoría, es decir, cuando $2m^2\ell^2 = -1 \Rightarrow c = 0$; por lo tanto, la acción *on-shell* asociada es finita

y no es necesario emplear ningún método de renormalización. Entonces, la carga conservada asociada a $\xi = N_t u$ es

$$Q[N_t u] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2(k_0 + 2GM\ell^2 k_2)}{1 + \ell^2 k_2 \log(r^2/(2GM\ell^2))};$$

la cual tiene a cero si $k_2 \neq 0$ y tiende a $2k_0$ si $k_2 = 0$. Sin embargo, esta no es la definición de la energía cuasi-local que queremos para las configuraciones con $k_2 \neq 0$. En cambio, preferimos definir la masa con respecto al vector de Killing del borde $\xi = \partial_t$. La masa asociada a este vector es

$$Q[\partial_t] = 2(k_0 + 2GM\ell^2 k_2). \quad (4.16)$$

Para $k_2 = 0$ tenemos que $Q[\partial_t] = 2k_0$. Este resultado coincide con el hallado en [GL10], mientras que para $k_2 \neq 0$ da una contribución finita a la masa proporcional al parámetro M de la solución de BTZ extremal. Notemos que si $k_2 = 0$ entonces $N_t u$ tiende a ∂_t cuando r tiende a infinito.

El momento angular, por otro lado, es la carga asociada al vector de Killing ∂_φ , y está dado por

$$Q[\partial_\varphi] = 2(k_0 + 2GM\ell^2 k_2)\ell. \quad (4.17)$$

Nuevamente, para $k_2 = 0$ se reobtiene el mismo resultado de cálculos previos [GL10], mientras que la carga recibe una corrección cuando el término $\mathcal{O}(r^2 \log(r))$ está presente. Esto significa que las soluciones tienen masa igual a su momento angular para todos los valores de k_0 , k_2 y M .

Es interesante destacar el hecho de que NMG en el punto crítico $m^2 \ell^2 = -1/2$ (*i.e.* $c = 0$) posea soluciones a nivel no-lineal que exhiben un comportamiento asintótico de este tipo, siendo este tan drástico que incluso altera los términos dominantes de la expansión para r grande de la métrica y, que a su vez, posean cargas conservadas finitas.

También vale la pena mencionar que los dos términos que contribuyen a la masa (4.16) y al momento angular (4.17) provienen de contribuciones distintas en la expansión asintótica de (4.14); mientras que la parte que depende de k_0 proviene de $\mathcal{O}(\log(r))$, que es consistente con las condiciones de borde de *Log-gravity*; la segunda parte viene de la nueva dependencia $\mathcal{O}(r^2 \log(r))$. Es notable que este último término depende tanto de k_2 como de M .

Hay un caso especial que debemos mencionar, y es en el cual la deformación (4.14) se anula en $r^2 = 2GM\ell^2$; es decir, cuando $k_0 = -2GM\ell^2 k_2$. Con esta elección de los parámetros, la solución posee algunas características especiales; por ejemplo, el potencial efectivo de las geodésicas no diverge. Es notable que en este caso las cargas (4.16) y (4.17) se anulan.

La existencia de este tipo de soluciones que presentan un comportamiento asintótico tipo AdS relajado, nos sugiere que NMG proporciona un modelo de gravedad tridimensional interesante para estudiar extensiones de la correspondencia AdS/CFT. Como ya mencionamos en la introducción, otros casos de interés lo proveen geometrías no-AdS, siendo un de los casos más estudiados el de los espacios Warped AdS, los cuales serán estudiados a continuación.

4.2. Espacios Warped Anti-de Sitter (WAdS)

Ahora procederemos a estudiar los espacios WAdS₃ tipo-espacio en NMG. Como dijimos en la Sección 2.5.2 los espacios WAdS₃ son deformaciones tipo estiramiento o compresión de AdS₃ [BS06, ALP⁺09], y se encuentran parametrizados por una constante ν

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2 + 3} \left(-\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 + \frac{4\nu^2}{\nu^2 + 3} (du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right). \quad (4.18)$$

Como ya mencionamos, conocer el grupo de simetrías es un paso esencial a la hora de formular la dualidades holográficas. En el caso de WAdS₃ el grupo de isometrías del *bulk* es $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$, mientras que el grupo de simetrías asintóticas está dado por un producto semi-directo de un álgebra de Virasoro y un álgebra de Kač-Moody (ver las referencias [CD09b] y [DG15] para los casos de TMG y NMG respectivamente). En [DHH12] se mostró que, bajo ciertas condiciones, la simetría resulta ser suficiente para constreñir la teoría dual y extraer información física relevante de ella. La descripción holográfica de la termodinámica de agujeros negros en WAdS₃ llevada a cabo en [DHH12] es una realización notable de esta idea. La teoría construida en [HR15] constituye un ejemplo explícito de la misma idea.

A continuación veremos que existen agujeros negros asintóticamente WAdS₃ tipo-espacio, los cuales proveen un escenario ideal para explorar la posibilidad de extender las ideas de holografía a este tipo de geometrías con la menor cantidad de modificaciones posibles.

4.2.1. Agujeros negros asintóticamente WAdS₃

Una de las propiedades más atractivas de los espacios WAdS es que admiten agujeros negros que son asintóticamente WAdS, que a su vez son cocientes discretos de WAdS₃, tal y como el agujero negro de Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) es un cociente de AdS₃. La existencia de agujeros

negros en WAdS₃ es muy interesante, dado que en el marco de la correspondencia WAdS₃/CFT₂, da la posibilidad de estudiar la física de agujeros negros en un nuevo contexto.

La métrica de los agujeros negros en WAdS₃ está dada por

$$ds^2 = dt^2 + \left(2\nu r - \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}\right) dt d\varphi + \ell^2 \left((\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)\right)^{-1} dr^2 + \frac{r}{4} \left(3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)}\right) d\varphi^2, \quad (4.19)$$

donde $t \in \mathbb{R}$, la coordenada angular $\varphi \in [0, 2\pi)$, siendo identificada como $\varphi \sim \varphi + 2\pi$ y $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Los parámetros r_+ y r_- son constantes de integración que, para $r_+ \geq r_- \geq 0$, representan los horizontes externo e interno respectivamente. Soluciones del tipo (4.19) tienden asintóticamente al espacio WAdS₃ estirado tipo-espacio para valores grandes de r . La métrica (4.19) puede ser escrita en su forma ADM

$$ds^2 = -N_t^2 dt^2 + \rho^2 (d\varphi + N^\varphi dt)^2 + \ell^2 (4\rho^2 N_t^2)^{-1} dr^2, \quad (4.20a)$$

donde

$$\rho^2 = \frac{r}{4} (3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)}), \quad (4.20b)$$

$$N_t^2 = \frac{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)}{4\rho^2}, \quad (4.20c)$$

$$N^\varphi = \frac{2\nu r - \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}}{2\rho^2}. \quad (4.20d)$$

Como mencionamos anteriormente, los agujeros negros en WAdS₃ son identificaciones precisas del espacio WAdS₃ [ALP⁺09]. Es decir, la geometría del agujero negro (4.19) se obtiene al realizar un cociente del espacio WAdS₃ por un grupo discreto de $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$, mediante la identificación de puntos en la variedad original a lo largo de la dirección $\partial_\varphi = \pi l (J_2/\beta_L - \bar{J}_2/\beta_R)$ con $J_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ y $\bar{J}_2 \in U(1)$, y $\beta_{L,R} \in \mathbb{R}$. Esto nos permite definir temperaturas izquierda y derecha como la inversa de los períodos $\beta_{L,R}$; es decir

$$T_L = \beta_L^{-1} = \frac{(\nu^2 + 3)}{8\pi\ell^2} \left(r_+ + r_- - \frac{1}{\nu} \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}\right),$$

$$T_R = \beta_R^{-1} = \frac{(\nu^2 + 3)}{8\pi\ell^2} (r_+ - r_-).$$

Las transformaciones de coordenadas que relacionan el agujero negro (4.19) con el espacio WAdS₃ (4.18) se encuentran la Sección 5.2 de la referencia [ALP⁺09].

La geometría local de los agujeros negros (4.19) es notablemente simple debido a que son localmente equivalentes al espacio WAdS₃, sin embargo, poseen una rica estructura causal. En particular, los escalares de curvatura resultan ser independientes de las constantes de integración r_{\pm} . Es más, los invariantes de curvatura son constantes, dependiendo únicamente de los parámetros ν y ℓ

$$\begin{aligned} R &= -\frac{6}{\ell^2}, & R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= \frac{6}{\ell^4}(3 - 2\nu^2 + \nu^4) \\ R_{\mu\nu}R_{\rho}^{\nu}R^{\rho\mu} &= -\frac{6}{\ell^6}(9 - 9\nu^2 + 3\nu^4 + \nu^6). \end{aligned}$$

Como veremos, la simplicidad de la geometría de los agujeros negros WAdS₃ es, paradójicamente, lo dificulta tratar con ellos.

En [Cle09b] fue mostrado que los agujeros negros WAdS₃ (4.19) resuelven las ecuaciones de movimiento de NMG si los parámetros de la teoría satisfacen las siguientes relaciones

$$m^2 = -\frac{(20\nu^2 - 3)}{2\ell^2}, \quad \Lambda = -\frac{m^2(9 - 48\nu^2 + 4\nu^2)}{(9 - 120\nu^2 + 400\nu^4)}. \quad (4.21)$$

El mismo tipo de soluciones fue estudiado en [Ton10] para el caso de NMG acoplada a TMG.

Se puede calcular la entropía del agujero negro WAdS₃ en NMG utilizando la fórmula de Wald [Wal93], de la cual obtenemos la siguiente expresión

$$S = \frac{8\pi\nu^3}{(20\nu^2 - 3)G} \left(r_+ - \frac{1}{2\nu} \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right). \quad (4.22)$$

Debemos remarcar que la entropía resulta proporcional a $T_L + T_R$, lo que significa que puede ser escrita como una fórmula de Cardy

$$\mathcal{S} = \frac{\pi^2 \ell}{3} c (T_L + T_R)$$

donde c es independiente de r_{\pm} . Por lo tanto, es posible identificar la carga central de la teoría conforme dual

$$c = \frac{96\nu^3 \ell}{(20\nu^4 + 57\nu^2 - 9)G}. \quad (4.23)$$

Notemos que, en el límite $\nu \rightarrow 1$, la carga central c tiende al valor correspondiente de AdS₃, $c = 24\ell/(17G)$; recordemos que en NMG la carga central de Brown-Henneaux $c_{\text{BH}} = 3\ell/(2G)$

aparece multiplicada por un factor $1+1/(2m^2\ell^2)$ y, de acuerdo con (4.21), para $\nu = 1$ corresponde $m^2\ell^2 = -17/2$.

4.2.2. Tensor de Brown-York y cargas conservadas

Ahora, nos centraremos en la evaluación del tensor cuasi-local de Brown-York en la métrica del agujero negro WAdS₃ tipo-espacio. Para ello necesitamos utilizar la descomposición ADM de la métrica (4.19). Entonces haremos una foliación en superficies de r constante, más precisamente

$$ds^2 = N^2 dr^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dr)(dx^j + N^j dr), \quad (4.24)$$

donde N^2 es la función radial *lapse*, N^i son las funciones *shift* y γ_{ij} es la métrica bidimensional sobre las superficies de r constante. En el caso de espacios asintóticamente AdS₃ la expansión de Fefferman-Graham [FG85] restringe la dependencia en la coordenada radial en γ_{ij} y es consistente con las condiciones asintóticas de borde de Brown-Henneaux [BH86]. Para el caso de espacios asintóticamente WAdS₃, las condiciones de borde apropiadas en TMG fueron estudiadas en [CD09b, CD09a, BC09b, BC09a, HMT11]; en particular, se mostró que la teoría admite más de un conjunto de condiciones de borde consistentes [HMT11], todas ellas definidas de tal modo que el agujero negro (4.19) esté contenido. Aquí, asumiremos ese tipo de comportamiento asintótico. Más precisamente, consideraremos perturbaciones de la configuración con $r_{\pm} = 0$ de la forma

$$ds^2 = dt^2 + 2\nu r dt d\varphi + \frac{\ell^2 dr^2}{r^2(\nu^2 + 3)} + \frac{3r}{4}(\nu^2 - 1)d\varphi^2 + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

donde $h_{\mu\nu}$ satisface las condiciones de borde

$$\begin{aligned} h_{rr} &\simeq \mathcal{O}(r^{-3}), & h_{\varphi\varphi} &\simeq \mathcal{O}(r), \\ h_{t\varphi} &\simeq \mathcal{O}(1), & h_{tt} &\simeq \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned}$$

4.2.2.1. Contra-términos

Para obtener un tensor de energía-momentos cuasi-local de Brown-York bien definido en el límite $r \rightarrow \infty$, es necesario introducir contra-términos en la acción de NMG con el objetivo de hacerla finita. En espacios asintóticamente AdS, esto se logra mediante el proceso de renormalización holográfica [dHSS01, BK99], que nos dice que para obtener una acción *on-shell* bien definida

debemos agregar términos de borde contruidos únicamente con cantidades intrínsecas. Como vimos en la Sección 3.3.1 Tales términos son de la forma

$$S_C = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{-\gamma} (a_0 + a_1 \hat{f} + a_2 \hat{f}^2 + b_2 \hat{f}_{ij} \hat{f}^{ij} + \dots), \quad (4.25)$$

donde los puntos suspensivos se refieren a términos de mayor orden en curvaturas intrínsecas \hat{R}_{ij} o tensores \hat{f}_{ij} . Desde el punto de vista de la teoría dual, estos términos son interpretados como contra-términos para renormalizar la teoría campos efectiva. El tensor de energía-momentos del borde queda entonces definido al tomar el límite $r \rightarrow \infty$ del tensor cuasi-local mejorado de NMG con los contra-términos

$$T_{ij} \rightarrow T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_C}{\delta \gamma^{ij}}. \quad (4.26)$$

La elección de los contra-términos (4.25); es decir, la elección de los coeficientes a_i, b_i , está parcialmente determinada por el requerimiento de que la acción *on-shell* sea finita. Llegados a este punto, es importante mencionar una peculiaridad del espacio WAdS₃, y es el hecho de que estos no admiten sección euclídea real. Por lo tanto, se debe establecer de forma precisa a que nos referimos cuando pedimos que la acción sea finita. Aquí eludiremos este problema argumentando que nos enfocaremos en soluciones estacionarias, por lo tanto, pediremos que la acción lorentziana integrada en un intervalo finito de tiempo no diverja. Esto se logra al pedir que el coeficiente de la constante cosmológica de borde tome el siguiente valor

$$a_0 = -\frac{8\nu^2 \sqrt{\nu^2 + 3}}{(20\nu^2 - 3)\ell}. \quad (4.27)$$

Sin embargo, uno puede preguntarse si (4.27) es la única elección posible. La respuesta es afirmativa: al contrario de lo que sucede con otras soluciones de gravedad masiva, como las encontradas en las referencias [OTT09, ABGGH09], cuyos tensores de esfuerzos del borde pueden ser regularizados introduciendo contra-términos adicionales, en el caso de WAdS, la simplicidad de su geometría conspira en nuestra contra. Para WAdS₃ algunos de los invariantes locales que tenemos son

$$\begin{aligned} \hat{f} &= -\frac{2\nu^2}{m^2 \ell^2}, & \hat{f}_{ij} \hat{f}^{ij} &= \frac{2}{m^4 \ell^4} (9 - 18\nu^2 + 10\nu^4), \\ \hat{f}_{ij} \hat{f}_k^j \hat{f}^{ki} &= -\frac{2\nu^2}{m^6 \ell^6} (27 - 54\nu^2 + 28\nu^4). \end{aligned}$$

Podemos ver que todos los términos son constantes, por lo tanto, del reducido menú de contra-términos que tenemos a disposición, solo hay una opción independiente (4.27), ya que todas las opciones son equivalentes a una constante cosmológica de borde. A esto es a lo que nos referíamos anteriormente diciendo que la simplicidad de la geometría de los agujeros negros WAdS₃ es uno de los aspectos que dificultan la regularización de su tensor de esfuerzos.

Debemos remarcar que el contra-término (4.27) es consistente con el hecho de que el agujero negro WAdS₃ (4.19) se reduce al agujero negro BTZ (2.18) (en un sistema de coordenadas rotante) cuando $\nu = 1$. Para $\nu = 1$ tenemos que $a_0 = -16/(17\ell)$, que es el valor esperado para el caso en el que no hay deformación y el espacio WAdS₃ se reduce a AdS₃. Recordemos que $m^2 = -(20\nu^2 - 3)/(2\ell^2)$, entonces para $\nu = 1$ tenemos $m^2\ell^2 = -17/2$; por otro lado, en NMG el contra-término necesario para regularizar el tensor de energía-momentos del borde en AdS₃ es un término de constante cosmológica de borde cuyo coeficiente es $a_0 = -(1 + 2m^2\ell^2)/(2m^2\ell^3) = -16/(17\ell)$.

4.2.2.2. Energía cuasi-local

Procederemos ahora a calcular las cargas conservadas asociadas a la solución (4.19). Habiendo mejorado el tensor de esfuerzos del borde (4.26) la adición de contra-términos de borde S_C (4.25)-(4.27), es posible definir las cargas conservadas del siguiente modo

$$Q[\xi] = \int ds u^i T_{ij}^* \xi^j, \quad (4.28)$$

donde ds es el elemento de línea de las superficies de t constante en el borde, u es el vector unitario ortogonal a las superficies de t constante y ξ es el vector de Killing que genera la isometría en $\partial\Sigma$ a la que la carga está asociada. En el caso de la masa, las componentes de este vector son $\xi^i = N_t u^i$, donde la función N_t es la función lapso (4.20c). Esto define la densidad de energía; ver discusiones al respecto en [BY93, BK99]. De la métrica (4.20) podemos ver que el elemento de línea en el que estamos interesados es simplemente $ds = \rho d\varphi$.

Antes de continuar con el cómputo de las cargas conservadas, haremos un comentario acerca de la finitud de las mismas. Si bien el contra-término (4.27) es suficiente para hacer que la acción *on-shell* sea finita, esto no necesariamente implica que el tensor de energía-momentos del borde también lo sea. De hecho, se puede verificar explícitamente que la inclusión del término de borde (4.27) no regulariza todas las componentes del tensor T_{ij}^* . Sin embargo, resulta que la carga

conservada asociada al vector de Killing $\xi = N_t u$ evaluada en el borde $r = \infty$ es finita, dando como resultado

$$\mathcal{M} = \frac{\nu^2(\nu^2 + 3)}{2(20\nu^2 - 3)\ell G} \left(r_+ + r_- - \frac{1}{\nu} \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right). \quad (4.29)$$

Este resultado concuerda con el obtenido en [Cle09b, Ton10, NPY10] a menos de un factor $1/2$. La finitud de la carga (4.29) se sigue de cancelaciones que ocurren en cerca del borde, *i.e.* $r \rightarrow \infty$. Esto puede ser chequeado en la expansión para r grande de las componentes del tensor de energía-momentos del borde

$$\begin{aligned} T_{tt}^* &\simeq t_{tt}^{(0)} + t_{tt}^{(-1)} r^{-1} + t_{tt}^{(-2)} r^{-2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \\ T_{t\varphi}^* &\simeq t_{t\varphi}^{(1)} r + t_{t\varphi}^{(0)} + t_{t\varphi}^{(-1)} r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}), \end{aligned}$$

donde $t_{ij}^{(n)}$ son coeficientes constantes cuyas expresiones pueden encontrarse en el Apéndice A.1.

En un contexto similar, en la referencia [GL10], se mencionó que la fórmula (4.29) es lo suficientemente intrincada como para confiar en el cálculo mediante (4.26) y (4.28). Sin embargo, para convencernos haremos un breve repaso del cálculo para TMG y veremos que el método también funciona cuando el término gravitacional de Chern-Simons es incluido.

4.2.2.3. Término gravitacional de Chern-Simons

Los espacios WAdS₃ fueron hallados primero como soluciones de TMG [DJT82b, DJT82a] en las referencias [BC07, MCL03]. Esta teoría está dada por el término de Einstein-Hilbert más un término gravitacional de Chern-Simons (4.3).

Tanto los espacios WAdS₃ como los agujeros negros WAdS₃ resuelven las ecuaciones de movimiento de TMG si la constante de acoplamiento μ del término gravitacional de Chern-Simons (4.3) y los parámetros ν y ℓ satisfacen la relación $\nu = \mu\ell/3$. La masa de los agujeros negros WAdS₃ en TMG ya ha sido calculada en [GL10] haciendo uso del tensor de Brown-York en el borde. El resultado es

$$\mathcal{M} = \frac{(\nu^2 + 3)}{48\ell G} \left(r_+ + r_- - \frac{1}{\nu} \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right),$$

que nuevamente está en acuerdo con el valor obtenido por otros métodos, cf. [ALP⁺09]. En el caso de TMG, la carga conservada es regularizada mediante la adición de una constante cosmológica

de borde, cuyo coeficiente es

$$a_0 = -\frac{\sqrt{\nu^2 + 3}}{2\ell},$$

y tiende al valor correspondiente para AdS₃ ($a_0 = -1/\ell$) en el límite $\nu = 1$. Por lo tanto, el cálculo de la masa mediante el tensor de esfuerzo del borde parece funcionar en distintos contextos.

4.2.2.4. Momento angular

Ahora volvamos a NMG. Al contrario de lo que sucede con el cálculo de la masa $\mathcal{M} = Q[N_t u]$, la carga asociada al momento angular $\mathcal{J} = Q[\partial_\varphi]$ no da como resultado un valor finito en el límite $r \rightarrow \infty$. De hecho, los términos de borde (4.25), (4.27) no alcanzan a regularizar las divergencias que aparecen en la carga $Q[\partial_\varphi] = \int ds u^i T_{i\varphi}^*$, como sí ocurría en el caso de la masa (4.29). Sin embargo, la parte finita en la expansión para r grande de $Q[\partial_\varphi]$ captura toda la información físicamente relevante de la carga. Esto puede ver en la expansión del tensor de energía-momento

$$T_{\varphi\varphi}^* \simeq t_{\varphi\varphi}^{(1)} r + t_{\varphi\varphi}^{(0)} + \mathcal{O}(r^{-1}),$$

lo que resulta en una expansión de la carga

$$Q[\partial_\varphi] \simeq \mathcal{J}_{(2)} r^2 + \mathcal{J}_{(1)} r + \mathcal{J}_{(0)} + \mathcal{O}(r^{-1}),$$

donde el coeficiente $\mathcal{J}_{(2)}$ solo depende de ν , mientras que el coeficiente $\mathcal{J}_{(1)}$ depende tanto de ν como de las constantes de integración r_\pm . Más precisamente

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{(2)} &= \frac{9}{8} \frac{\nu(\nu^2 - 1)^2}{(20\nu^2 - 3)\ell}, \\ \mathcal{J}_{(1)} &= \frac{3}{8} \frac{\nu(\nu^2 - 1)}{(20\nu^2 - 3)\ell} \left((\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right). \end{aligned}$$

Es posible verificar en la expansión anterior que, para $\nu \neq 1$, al contrario de lo que sucede con la masa, la adición de contra-términos (3.36) no contribuye a cancelar las divergencias de $Q[\partial_\varphi]$. Sin embargo, es notable que la parte finita $\mathcal{J}_{(0)}$ da el valor correcto para el momento angular

$$\mathcal{J}_{(0)} = \frac{\nu(\nu^2 + 3)}{4(20\nu^2 - 3)G\ell} \left((5\nu^2 + 3)r_+ r_- - 2\nu(r_+ + r_-)\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right). \quad (4.30)$$

Para constatar que (4.30) realmente reproduce el resultado correcto uno puede recurrir al cálculo realizado en la referencia [Cle09b], donde se utiliza el método de Abbott-Deser-Tekin [AD82, DT02, DT03] para obtener las cargas conservadas de los agujeros negros WAdS₃. El resultado obtenido en [Cle09b] es

$$\tilde{\mathcal{J}} = \frac{\zeta^3 \eta^2}{4Gm^2 \ell^2} \left((1 - \eta^2) \omega^2 - \frac{\rho_0^2}{(1 - \eta^2)} \right), \quad (4.31)$$

donde $\zeta = 2\nu$, $\eta = -\sqrt{\nu^2 + 3}/(2\nu)$, $\omega = (r_+ + r_- + 2\eta\sqrt{r_+ r_-})/(2 - 2\eta^2)$ y $\rho_0^2 = (r_+ - r_-)^2/4$. Entonces, luego de traducir (4.31) a nuestra notación, podemos verificar que (4.30) es proporcional a (4.31); es decir, $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_{(0)} \zeta^2 (1 - \eta^2)/4$, y que el factor de proporcionalidad es precisamente (el cuadrado de) el que relaciona las coordenadas angulares ϕ usadas en [Cle09b] y nuestra coordenada angular φ ; más precisamente, tenemos que $\phi = \varphi \sqrt{\zeta^2 (1 - \eta^2)}/2$. Este factor de proporcionalidad también es explicado en el Apéndice C de la referencia [Ton10] (ver ecuación (C.15) de dicho trabajo). En conclusión, la parte finita de la carga $Q[\partial_\varphi]$ captura la contribución físicamente relevante y da el valor correcto del momento angular del agujero negro. Una pregunta pendiente es cómo entender la imposibilidad de regularizar la carga $Q[\partial_\varphi]$ como una consecuencia de la geometría asintótica de los espacios WAdS₃. Es interesante notar que cálculos utilizando otros métodos, como la estructura simpléctica de NMG, también han reportado discrepancias en el valor del momento angular [AD12].

4.3. Espacios de Gödel en tres dimensiones

En esta sección consideraremos la versión tipo-tiempo de los espacios Warped Anti-de Sitter (WAdS) tridimensionales, a los que denotaremos con la sigla tWAdS₃ para diferenciarlos de las geometrías WAdS tipo-espacio. Los tWAdS corresponden a la sección tridimensional de la solución de Gödel de GR en cuatro dimensiones. Esta geometría presenta curvas temporales cerradas (CTCs), las cuales son heredadas de su *embedding* cuatridimensional. En tres dimensiones, este tipo de espacios son soluciones de vacío de teorías de gravedad masiva, en particular de New Massive Gravity (NMG). En esta sección también introduciremos defectos en el *bulk* del espacio-tiempo que, desde el punto de vista tridimensional, representan partículas puntuales rotantes. Para este tipo de fuentes, investigaremos si es posible dar una definición de energía gravitatoria cuasi-local vista desde la región asintótica, lejos de la zona donde aparecen CTCs. La importancia del estudio de cargas conservadas en espacios con CTCs radica en el hecho de

poder brindar una definición sensible de energía (entre otras cantidades) para geometrías que no presentan vectores de Killing globalmente definidos. Este tipo de peculiaridades también ocurre en el espacio de Sitter (dS). En la referencia [BdB02] se dio una propuesta para calcular cargas conservadas en dS utilizando el tensor cuasi-local de esfuerzos de Brown-York. Esto nos motiva para extender este procedimiento al caso tWAdS₃. Veremos que, al igual que sucede en el caso de los agujeros negros asintóticamente WAdS₃, la masa obtenida para los defectos en tWAdS₃ da el valor correcto a menos de un factor 1/2, mientras que la carga asociada al momento angular diverge. Debemos mencionar, que pese a las similitudes de los espacios WAdS tipo-tiempo y tipo-espacio, las transformaciones de coordenadas que los relacionan involucran no solo dos rotaciones de Wick sino que también son dependientes de las cargas, lo cual hace que el cálculo de las mismas sea no-trivial.

4.3.1. Espacio WAdS₃ tipo-tiempo

Como ya mencionamos, los espacios WAdS₃ tipo-tiempo son estiramientos o compresiones de AdS₃ [BS06]. En el caso de un estiramiento, el espacio WAdS₃ corresponde a la sección tridimensional de la solución de Reboucas-Tiomno [RT83, RS98] que es una generalización uniparamétrica de la solución de Gödel de GR en cuatro dimensiones, y la existencia de curvas temporales cerradas es heredada, como dijimos anteriormente, de su predecesor cuatridimensional, el universo de Gödel [God49]. Estos espacios representan ejemplos asequibles en donde estudiar cuestiones tales como la definición de observables físicos, como por ejemplo, las cargas conservadas en espacios con CTCs.

4.3.1.1. Espacio WAdS₃ tipo-tiempo desde la métrica de Gödel

La solución cosmológica de Gödel es el producto directo de la recta real \mathbb{R} y una variedad tridimensional Σ equipada con una métrica [God49, HE11]

$$ds^2 = - \left(d\hat{t} + e^{\sqrt{2}\omega x} dy \right)^2 + dx^2 + \frac{1}{2} e^{2\sqrt{2}\omega x} dy^2, \quad (4.32)$$

con coordenadas $x, y, \hat{t} \in \mathbb{R}$, y donde ω es un parámetro real que representa la vorticidad de la solución de Gödel. Este sistema de coordenadas es una carta completa del espacio, y la solución cuatridimensional es entonces homeomorfa a \mathbb{R}^4 . El espacio es geodésicamente completo y, por lo tanto, libre de singularidades; y resulta también espacialmente homogéneo pero no isotrópico.

En un sistema de coordenadas conveniente, el elemento de línea (4.32) toma la forma

$$ds^2 = - \left(dt + \frac{2}{\omega} \sinh^2 \left(\frac{\omega \rho}{\sqrt{2}} \right) d\phi \right)^2 + \frac{1}{2\omega^2} \sinh^2 (\sqrt{2}\omega\rho) d\phi^2 + d\rho^2, \quad (4.33)$$

donde la métrica tridimensional es escrita ahora como un fibrado de Hopf sobre el plano hiperbólico. Este espacio exhibe curvas temporales cerradas, como puede verse del rol que juegan las coordenadas t y ϕ en el primer término de (4.33).

Consideremos ahora una deformación uniparamétrica de la métrica (4.33) de modo tal que las propiedades más notorias del espacio de Gödel persistan. Esta deformación permite, en particular, interpolar entre la sección tridimensional del espacio de Gödel y AdS₃ [RT83]. La métrica de dicha deformación está dada por el intervalo

$$ds^2 = - \left(dt + \frac{4\omega}{\lambda^2} \sinh^2 \left(\frac{\lambda\rho}{2} \right) d\phi \right)^2 + \frac{\sinh^2(\lambda\rho)}{\lambda^2} d\phi^2 + d\rho^2, \quad (4.34)$$

en el cual, además de la vorticidad ω , hay un parámetro real λ que nos permite controlar la deformación. Cuando $\lambda^2 = 2\omega^2$ la métrica (4.34) se corresponde con la sección tridimensional de la solución de Gödel (4.33); cuando $\lambda^2 = 4\omega^2$ se corresponde con el cubrimiento universal de AdS₃. Para valores genéricos de λ y ω dentro del rango $0 \leq \lambda^2 \leq 4\omega^2$, la métrica (4.34) describe los espacios tWAdS₃ estirados en los que nos centraremos.

Con el objetivo de introducir defectos angulares en el espacio tWAdS₃ va a ser necesario introducir algunos cambios de coordenadas. Primero, va a ser conveniente considerar una parametrización ligeramente diferente: definamos el parámetro

$$\ell^2 = \frac{2}{\lambda^2 - 2\omega^2},$$

y utilicemos ω y ℓ^2 (en lugar de λ) para describir la familia de métricas tipo tWAdS₃. Ahora, en términos de ω y ℓ^2 , la solución de Gödel corresponde a $\ell^2 = \infty$, mientras que el espacio AdS₃ corresponde a $\ell^2 = 1/\omega^2$. El rango $0 \leq \lambda^2 \leq 4\omega^2$, en términos de estos parámetros, se traduce a $|\omega^2 \ell^2| \geq 1$. Notemos que $\omega^2 \ell^2$ puede tomar valores entre -1 e ∞ . Los espacios con $|\omega^2 \ell^2| < 1$ también resultan interesantes, aunque presentan una estructura causal diferente; corresponden a los espacios tWAdS₃ comprimidos.

Ahora, continuando con los cambios de coordenadas, definamos una nueva variable radial $r = 2\lambda^{-2} \sinh^2(\lambda\rho/2)$, tal que $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. La métrica (4.34) ahora queda escrita como

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\phi + 2(r + (\ell^{-2} - \omega^2)r^2) d\phi^2 + \frac{dr^2}{2(r + (\ell^{-2} + \omega^2)r^2)}. \quad (4.35)$$

Esta es una de las maneras estándar de representar los espacios tWAdS₃. Los invariantes de curvatura asociados a esta métrica son constantes, y toman la siguiente forma general

$$R_{\mu_n}^{\mu_1} R_{\mu_1}^{\mu_2} R_{\mu_2}^{\mu_3} \dots R_{\mu_{n-1}}^{\mu_n} = (-1)^n \frac{2^n}{\ell^{2n}} (\omega^{2n} \ell^{2n} + 2).$$

Otra propiedad interesante de la métrica (4.33) es que es espacialmente homogénea. Y, tal y como sucede con el cubrimiento universal de AdS, los espacios WAdS no son globalmente hiperbólicos.

El grupo de isometrías de los espacios WAdS₃ (4.35) es $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$, y es generado por cuatro de los cinco vectores de Killing que la solución de Gödel admite. Este grupo es la parte que sobrevive del grupo de isometrías de AdS₃ $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ luego de la deformación de estiramiento ó compresión.

Es sencillo verificar que en el punto del espacio de parámetros $\omega^2 \ell^2 = 1$ la métrica (4.35) coincide con AdS₃. De hecho, definiendo nuevas coordenadas $\theta = t - \phi$ y $\rho^2 = 2r$, y reemplazando $\omega = \ell = 1$ en (4.35), obtenemos la métrica de AdS₃

$$ds_{\text{AdS}_3}^2 = -(\rho^2 + 1)dt^2 + \frac{d\rho^2}{(\rho^2 + 1)} + \rho^2 d\theta^2. \quad (4.36)$$

4.3.1.2. Introduciendo un defecto en el espacio de Gödel

Ahora vamos a introducir un defecto puntual en el espacio-tiempo (4.35). Esto se logra realizando el siguiente cambio ¹

$$\phi \rightarrow (1 - \mu)\phi, \quad \text{with } 0 \leq \mu < 1, \quad (4.37)$$

manteniendo la misma periodicidad para la coordenada angular φ ; es decir, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Esta deformación ciertamente modifica las propiedades globales del espacio de un modo que resulta equivalente a introducir un déficit angular $\delta\phi = \mu/(2\pi)$ en la coordenada angular original.

Realizando el cambio (4.37) y re-escalando la coordenada radial por $r \rightarrow r/(1 - \mu)$, se obtiene

¹No confundir el parámetro de la deformación μ con la constante de acoplamiento del término gravitacional de Chern-Simons de TMG (4.3), que también suele ser llamado μ .

la métrica

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\varphi + 2r((\ell^{-2} - \omega^2)r + (1 - \mu)) d\varphi^2 + \frac{dr^2}{2r((\omega^2 + \ell^{-2})r + (1 - \mu))}, \quad (4.38)$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Esta métrica comparte el mismo comportamiento asintótico que (4.35); es decir, ambas geometrías tienden a la siguiente forma para r grande

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\varphi + 2(\ell^{-2} - \omega^2)r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{2r^2(\ell^{-2} + \omega^2)} + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.39)$$

donde, en particular, $\delta g_{\varphi\varphi} \equiv h_{\varphi\varphi} \simeq \mathcal{O}(r)$ y $\delta g_{rr} \equiv h_{rr} \simeq \mathcal{O}(r^{-3})$.

La métrica (4.38) representa un objeto tipo-partícula ubicado en $r = 0$ en el seno del universo de Gödel. El objeto en cuestión desaparece cuando el parámetro μ tiene a cero, lo que nos permite intuir que μ está relacionado con la masa del defecto. Ahora introduciremos defectos más generales en el espacio tWAdS₃.

4.3.1.3. Espacios WAdS₃ como fondos gravitatorios

Una de las características que vuelve interesante a los espacios WAdS₃ es el hecho de que este tipo de espacios sean soluciones de una gran variedad de modelos, incluyendo teoría de cuerdas [Isr04, DOPS05], teorías de gauge topológicamente masivas [MC96, IKOP05, BC07, BBCG06], teorías de derivadas superiores [Cle09b], teorías de bi-gravedad [Goy14] y gravedad de Einstein no-minimamente acoplada a campos de materia [Ann09, GT15]. Un modelo mínimo en el cual los espacios WAdS₃ aparecen como solución es provisto por la gravedad en tres dimensiones en ausencia de campos de materia. De hecho, los espacios WAdS₃ tipo-tiempo y tipo-espacio son soluciones exactas de gravedad tridimensional una vez que el gravitón adquiere masa. Es la masa del gravitón la que provee la vorticidad necesaria para sostener el universo de Gödel, o más precisamente, la parte tridimensional relevante. En tres dimensiones hay diversas maneras de otorgarle masa al gravitón de manera consistente. Aquí utilizaremos la teoría de gravedad masiva invariante de paridad New Massive Gravity (NMG) [BHT09a]. El método que utilizaremos para calcular las cargas conservadas asociadas a espacios asintóticamente tWAdS₃, tales como los defectos angulares introducidos en la sección anterior, será mediante el tensor de esfuerzos cuasi-local de Brown-York de NMG evaluado en el borde del espacio-tiempo [HT10], más allá del radio en el cual aparecen las CTCs.

Primero consideraremos un defecto en $tWAdS_3$, que viene a representar una partícula masiva no-rotante. Desde el punto de vista cuatridimensional, es como considerar una cuerda cósmica en el universo de Gödel. Propondremos una definición físicamente sensible para la masa de esta partícula ultra-localizada. Curiosamente, el resultado obtenido difiere de la masa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) en un factor $1/2$, tal y como sucede con los agujeros negros en un fondo $WAdS_3$ tipo-espacio (ver Sección 4.2). Además, la definición de las cargas en términos del tensor de esfuerzos cuasi-local no será apropiada para calcular el momento angular de los defectos rotantes. Dicho fallo será atribuido a la imposibilidad de regularizar todas las componentes del tensor de energía-momentos del borde mediante la introducción de contra-términos locales.

Los espacios $tWAdS_3$ (4.38) resuelven las ecuaciones de movimiento de NMG si las constantes de acoplamiento satisfacen las siguientes relaciones

$$\Lambda = -\frac{(11\omega^4\ell^4 + 28\omega^2\ell^2 - 4)\sigma}{2(19\omega^2\ell^2 - 2)\ell^2}, \quad m^2 = -\frac{(19\omega^2\ell^2 - 2)\sigma}{2\ell^2}. \quad (4.40)$$

4.3.2. Tensor de Brown-York y cargas conservadas

Ahora nos abocaremos a la tarea de computar las cargas conservadas asociadas a los defectos introducidos en las secciones anteriores.

4.3.2.1. Contra-términos

Como vimos en la Sección 3.3.1 del Capítulo anterior, el tensor de esfuerzos T_{ij} se obtiene al variar la acción respecto a la métrica del borde γ_{ij} . La forma explícita del mismo puede verse en la ecuación (3.30) de la Sección 3.3.1.

Al tomar el límite $r \rightarrow \infty$, el tensor de energía-momentos (4.15) diverge. Sin un procedimiento de regularización adecuado, esta divergencia dará lugar a cargas también divergentes. Para resolver este problema, se debe mejorar la definición (4.15) mediante la inclusión de términos de borde adicionales en la acción, de modo tal que no se alteren las ecuaciones de movimiento. En la sección anterior, este método fue utilizado en el caso de métricas $WAdS_3$ tipo espacio. Mostramos que, a pesar de que algunas componentes del T_{ij} continúan divergiendo, aun habiendo añadido a la acción términos de borde locales que regularizan la acción *on-shell*, la integral de la densidad de energía obtenida del tensor de esfuerzos del borde da lugar a una masa finita (4.29). A continuación veremos que sucede lo mismo para el caso tipo-tiempo. Para ello agregamos el

siguiente término al tensor de energía-momentos de Brown-York

$$T_{ij} \rightarrow T_{ij} - \frac{a_0}{8\pi G} \gamma_{ij}, \quad (4.41)$$

el cual proviene de un contra-término del tipo

$$S_B \rightarrow S_B + \frac{a_0}{8\pi G} \int d^2x \sqrt{-\gamma}, \quad (4.42)$$

donde a_0 es un coeficiente a ser fijado por el requerimiento de que la acción sea finita. El valor de este coeficiente es

$$a_0 = -\frac{\sigma 8\omega^2 \ell \sqrt{2(\omega^2 \ell^2 + 1)}}{(19\omega^2 \ell^2 - 2)}. \quad (4.43)$$

4.3.2.2. Energía gravitacional cuasi-local

Una vez mejorado el tensor de energía-momentos (4.15) mediante la adición de (4.41), (4.43), obtenemos una definición de carga conservada $Q[\xi]$ asociada al vector de Killing del borde $\tilde{\xi}$ que genera una isometría e $\partial\Sigma$, *i.e.* $\mathcal{L}_{\tilde{\xi}}\gamma_{ij} = 0$. Entonces, las cargas están definidas por la proyección del tensor de esfuerzos del borde sobre el vector ξ y el vector unitario u ortogonal a las superficies de t constante (4.16). Esto es

$$Q[\xi] = \int d\varphi \varrho u^i T_{ij} \tilde{\xi}^j, \quad (4.44)$$

donde ϱ está dado por la métrica inducida escrita de la forma

$$d\sigma^2 = -N_\sigma^2 dt^2 + \varrho^2 (dt + N_\sigma^\varphi d\varphi)^2.$$

En particular, para los defectos en tWAdS₃ tenemos que

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= 2(1 - \mu)r + 2(\ell^{-2} - \omega^2)r^2, \\ N_\sigma^\varphi &= -\frac{\omega r}{(1 - \mu)r + (\ell^{-2} - \omega^2)r^2}, \\ N_\sigma^2 &= 1 + \frac{2\omega^2 r^2}{(1 - \mu)r + (\ell^{-2} - \omega^2)r^2}. \end{aligned}$$

Y el vector unitario ortogonal a las superficies de t constante está dado por $u = -N_\sigma dt$. Considerando el vector de Killing tipo-tiempo del borde $\xi^i = N_\sigma u^i$ (*i.e.* tipo tiempo en la región donde la fuente está localizada) encontramos que la energía cuasi-local $\mathcal{M} = Q[\xi]$ da el siguiente

valor

$$\mathcal{M} = \frac{2\sigma\omega^2\ell^2(\mu-1)}{(19\omega^2\ell^2-2)G} = \frac{2(\mu-1)}{19G} \left(\sigma - \frac{1}{m^2\ell^2} \right), \quad (4.45)$$

donde usamos que $2m^2\ell^2\sigma = 2 - 19\omega^2\ell^2$.

Primero comparemos el resultado (4.45) con el caso especial de soluciones localmente AdS₃, que corresponde a $\omega^2\ell^2 = 1$. En este caso, (4.45) se reduce a

$$\mathcal{M}_{\omega^2\ell^2=1} = \frac{2\sigma(\mu-1)}{17G}, \quad (4.46)$$

y, de hecho, concuerda con el valor esperado para un defecto en un espacio localmente AdS₃ en NMG. Para ver esto explícitamente, recordemos que en el caso de NMG en AdS₃ la masa de un defecto angular (un caso particular de la geometría BTZ) está dado por [BHT09b]

$$\mathcal{M}_{\text{AdS}_3} = \frac{(\mu-1)}{8G} \left(\sigma + \frac{1}{2m^2\ell^2} \right) = \frac{2\sigma(\mu-1)}{17G}, \quad (4.47)$$

donde hemos usado que $\omega^2\ell^2 = 1$ corresponde a $2m^2\ell^2\sigma = -17$. Esto significa que (4.45) se reduce al valor (4.46) en ese punto del espacio de parámetros. En principio, podemos estar tentados de tomar esta coincidencia como un chequeo del resultado (4.45), sin embargo, si lo pensamos con cuidado, concluiremos que *a priori* no hay ninguna razón para que esto ocurra.

Tal y como sucede con los espacios WAdS₃ tipo-espacio, el método que utiliza el tensor de esfuerzos cuasi-local (4.15) para calcular cargas conservadas no basta para dar un resultado finito para el momento angular de los defectos rotantes en tWAdS₃. Esto ocurre porque no parece haber manera de regularizar todas las componentes de (4.15) mediante la introducción de contra-términos locales en el borde.

Capítulo 5

Espacios asintóticamente Anti-de Sitter y sus deformaciones en Zwei-Dreibein Gravity

En este capítulo estudiaremos soluciones de la teoría de bi-gravedad conocida como Zwei-Dreibein Gravity (ZDG) con diferentes comportamientos asintóticos. Primero, nos centraremos en espacios asintóticamente AdS con condiciones de borde relajadas (respecto de las condiciones habituales de Brown-Henneaux) que permiten decaimientos logarítmicos. Mostraremos que ZDG soporta modos logarítmicos a nivel lineal y ondas propagantes en AdS con decaimiento logarítmico a nivel no-lineal, lo que nos permitirá conjeturar que ZDG podría ser el dual gravitatorio de las llamadas Logarithmic Conformal Field Theories (LCFT). También estudiaremos asintóticas no-AdS tales como Lifshitz, Schrödinger y Warped AdS, ya que estas representan algunas de las extensiones de la conjetura AdS/CFT más estudiadas, que cobran relevancia en sistemas de materia condensada. Veremos que ZDG contiene en su espectro espacios de Schrödinger, de Lifshitz, WAdS, y agujeros negros asintóticamente Lifshitz y WAdS, dando un indicio de que ZDG puede ser considerada como un nuevo modelo para holografía no-AdS.

5.1. Ondas Anti-de Sitter logarítmicas en ZDG

En esta sección argumentaremos que la existencia de puntos críticos en el espacio de parámetros, en los cuales aparecen modos logarítmicos en el espectro de la teoría lineal, no es un rasgo privativo de los modelos de gravedad con derivadas superiores, sino que también del recientemente propuesto modelo de Zwei-Dreibein Gravity (ZDG). Primero, mostraremos esto a nivel lineal, luego veremos que existen regiones en el espacio de parámetros de ZDG donde los gravitones se convierten en no-masivos y, por lo tanto, coinciden con los modos puro *gauge*. Los modos logarítmicos encontrados en el espectro linealizado se comportan de manera similar a los que aparecen en otras teorías críticas con derivadas superiores, como New Massive Gravity (NMG). La existencia de esos modos puede ser vista como un indicio serio de que ZDG puede ser añadida a la clase de teorías de gravedad que, para valores específicos de los parámetros, es dual a las llamadas Logarithmic Conformal Field Theories (LCFT) con cargas centrales nulas. De acuerdo a la conjetura AdS/CFT, los modos degenerados y sus compañeros logarítmicos son duales a operadores, cuyas funciones de dos puntos son gobernadas por cantidades llamadas “nuevas anomalías”. En esta sección calcularemos los valores de esas nuevas anomalías en el lado de gravedad mediante el procedimiento delineado en [GJZ11].

En esta sección también confirmaremos que la existencia de estos modos logarítmicos no son un artefacto de la aproximación lineal, sino que también existen soluciones en la teoría completa que exhiben un decaimiento logarítmico. Esto da mayor credibilidad a la idea de que ZDG posee puntos críticos en su espacio de parámetros, por lo tanto, dando apoyo a la idea de que es el dual gravitatorio de una LCFT. Las soluciones no-lineales que estudiaremos son las ondas propagantes en AdS (a las que llamaremos simplemente ondas AdS) y que son análogas a las analizadas en [ABGH09] para el caso de NMG. Para poder hallar tales soluciones, haremos uso de una propiedad interesante de las teorías de bi-gravedad como ZDG, y es que pueden ser escritas como teorías de derivadas superiores¹ para una sola métrica [HSMvS15]. Entonces, reescribiremos ZDG como una teoría cuyas ecuaciones de movimiento involucran un número infinito de derivadas para un solo *dreibein* y mostraremos que esto nos permite hallar explícitamente las ondas AdS. Confirmaremos que las ondas AdS que exhiben un comportamiento logarítmico en los puntos críticos del espacio de parámetros.

¹Nos referimos como “teoría con derivadas superiores” a una teoría de gravedad cuyo lagrangiano posee derivadas mayores a orden dos.

5.1.1. Puntos críticos

Comenzaremos repasando brevemente la acción de ZDG. La misma está dada por la siguiente densidad lagrangiana²

$$L_{\text{ZDG}} = -M_{\text{P}} \left\{ \sigma e_{1a} R_1^a + e_{2a} R_2^a + \frac{1}{6} m^2 \epsilon_{abc} (\alpha_1 e_1^a e_1^b e_1^c + \alpha_2 m^2 e_2^a e_2^b e_2^c) - \frac{1}{2} m^2 \epsilon_{abc} (\beta_1 e_1^a e_1^b e_2^c + \beta_2 e_1^a e_2^b e_2^c) \right\}, \quad (5.1)$$

donde los campos dinámicos de la teoría son cuatro 1-formas: los dos *dreibeine* e_I^a y las dos conexiones de espín duales ω_I^a . Recordemos que en la Sección 3.4 consideramos el lagrangiano a nivel cuadrático en las perturbaciones

$$\begin{aligned} e_1^a &= \bar{e}^a + \kappa h_1^a, & \omega_I^a &= \bar{\omega}^a + \kappa v_I^a, \\ e_2^a &= \gamma (\bar{e}^a + \kappa h_2^a), \end{aligned}$$

donde \bar{e}^a y $\bar{\omega}^a$ hacen referencia al *dreibein* y a la *spin-connection* de AdS₃ respectivamente; κ es un parámetro para controlar la expansión; y γ es una constante de proporcionalidad. También vimos que es posible diagonalizar el lagrangiano cuadrático (3.61) cuando el parámetro de signo σ y la constante de proporcionalidad γ cumplen la relación $\sigma + \gamma \neq 0$; el resultado es la suma del lagrangiano de Einstein-Hilbert a nivel cuadrático y un lagrangiano de Fierz-Pauli que describen un campo de espín-2 no-masivo y otro masivo, con la masa de Fierz-Pauli dada por

$$M_{\text{FP}}^2 = m^2 \beta_1 \frac{(\sigma + \gamma)}{\sigma}. \quad (5.2)$$

Cuando $\sigma + \gamma = 0$ la diagonalización recién mencionada no es posible; y, como la masa de Fierz-Pauli (5.2) se anula, el gravitón masivo degenera en el no-masivo. Este comportamiento corresponde a un punto crítico³ en el espacio de parámetros de ZDG, donde, como veremos a continuación, los modos logarítmicos aparecen.

²En lo que sigue utilizaremos indistintamente los términos densidad lagrangiana y lagrangiano, si bien, el término correcto es el primero.

³De hecho, es una línea de puntos críticos. Para $\sigma + \gamma = 0$, la relación (3.57) se reduce a $\alpha_1 = -\sigma (2\beta_1 + \Lambda/m^2)$ y $\alpha_2 = \beta_1 - \Lambda/m^2$. Para un dado valor de constante cosmológica, todavía tenemos un parámetro libre: β_1 . En lo que sigue, mantendremos la terminología de “punto crítico”, utilizando su forma plural para enfatizar de que existe una familia continua de puntos críticos en ZDG.

Para obtener el lagrangiano crítico, realizaremos la siguiente re-definición de campos

$$\begin{aligned} h_{-\mu}{}^a &= m^2 \beta_1 (h_{1\mu}{}^a - h_{2\mu}{}^a), & h_{+\mu}{}^a &= h_{1\mu}{}^a + h_{2\mu}{}^a, \\ v_{-\mu}{}^a &= m^2 \beta_1 (v_{1\mu}{}^a - v_{2\mu}{}^a), & v_{+\mu}{}^a &= v_{1\mu}{}^a + v_{2\mu}{}^a. \end{aligned}$$

el lagrangiano cuadrático (3.61) se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \frac{M_{\text{P}}}{2m^2 \beta_1} (h_{+a} \bar{\mathcal{D}} v_{-}{}^a + h_{-a} \bar{\mathcal{D}} v_{+}{}^a + \epsilon_{abc} \bar{e}^a (v_{+}{}^b v_{-}{}^c - \Lambda h_{+}{}^b h_{-}{}^c) \\ &\quad - \epsilon_{abc} \bar{e}^a h_{-}{}^b h_{-}{}^c). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Este lagrangiano corresponde a la forma de primer orden del lagrangiano de NMG crítica⁴ linealizada, donde los modos masivos degeneran en los no-masivos, y nuevas soluciones logarítmicas aparecen [LS09a, BHRT11]. La única diferencia con el caso de NMG crítica es la aparición de la constante de acoplamiento β_1 como un factor global.

Las ecuaciones de movimiento derivadas de la densidad lagrangiana (5.3) están dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}} v_{-}{}^a - \Lambda \epsilon^{abc} \bar{e}_b h_{-c} &= 0, \\ \bar{\mathcal{D}} v_{+}{}^a - \Lambda \epsilon^{abc} \bar{e}_b h_{+c} &= 2\epsilon^{abc} \bar{e}_b h_{-c}, \\ \bar{\mathcal{D}} h_{\pm}{}^a + \epsilon^{abc} \bar{e}_b v_{\pm c} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

La última de estas ecuaciones puede ser usada para expresar $v_{\pm}{}^a$ en términos de $h_{\pm}{}^a$. Tenemos entonces que

$$v_{\pm\mu}{}^a(h_{\pm}) = -\det(\bar{e})^{-1} \epsilon^{\nu\rho\sigma} \left(\bar{e}_{\sigma}{}^a \bar{e}_{\mu b} - \frac{1}{2} \bar{e}_{\mu}{}^a \bar{e}_{\sigma b} \right) \bar{\mathcal{D}}_{\nu} h_{\pm\rho}{}^b. \quad (5.5)$$

Es más, actuando con $\epsilon^{\rho\mu\nu} \bar{\mathcal{D}}_{\rho}$ en las ecuaciones de movimiento (5.4) y usando la identidad $\bar{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{D}} f^a = \epsilon^{abc} \bar{R}_b f_c = \frac{1}{2} \Lambda \epsilon^{abc} \epsilon_{bde} \bar{e}^d \bar{e}^e f_c$, se pueden derivar las siguientes relaciones

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \bar{e}_{\mu}{}^a \bar{e}_{\nu}{}^b h_{-\rho b} = 0, \quad (5.6)$$

que implican que el campo $h_{-\mu\nu} = h_{-\mu a} \bar{e}_{\nu}{}^a$ es simétrico

$$h_{-[\mu\nu]} = 0. \quad (5.7)$$

⁴Es NMG evaluada en el punto del espacio de parámetros donde $c = 0$, *i.e.* $2m^2 \ell^2 = -1$.

Reemplazando (5.5) en la primera de las ecuaciones de (5.4) y escribiéndolas con índices de espacio-tiempo libres obtenemos

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(h_-) = 0, \quad \mathcal{G}_{\mu\nu}(h_+) = h_{-\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}h_-, \quad (5.8)$$

donde $\mathcal{G}_{\mu\nu}(h)$ es el tensor de Einstein linealizado, el cual es invariante bajo difeomorfismos linealizados por construcción

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(h) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{(\mu}{}^{\alpha\rho}\varepsilon_{\nu)}{}^{\beta\sigma}\bar{\mathcal{D}}_\alpha\bar{\mathcal{D}}_\beta h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\Lambda(h_{(\mu\nu)} - \bar{g}_{\mu\nu}h).$$

Es posible ver que estas ecuaciones de movimiento linealizadas son equivalentes a las de NMG en el punto crítico; ver referencia [BHRT11]. En particular, el análisis de soluciones se puede llevar a cabo sin modificaciones. Podemos concluir entonces, que en los puntos críticos, ZDG a nivel lineal exhibe modos logarítmicos con las mismas propiedades que los modos de NMG crítica.

Hemos encontrado puntos críticos donde el lagrangiano linealizado (5.3) y las ecuaciones de movimiento (5.4) son equivalentes a las de NMG crítica. Esos puntos críticos constituyen una generalización del punto crítico de NMG. De hecho, NMG puede ser recuperada desde ZDG por medio de un procedimiento de límite detallado en la Sección 3.4.1.1, pero este límite requiere partir de una región en el espacio de parámetros de ZDG donde $\sigma = -1$. Por el contrario, en la discusión anterior, no hemos asumido dicha restricción, y de hecho, es posible hallar regiones en el espacio de parámetros de ZDG donde $\sigma + \gamma + 0$ para $\sigma > 0$. Los puntos críticos encontrados aquí son, por lo tanto, más generales que los de NMG.

5.1.2. Nueva anomalía

En la sección anterior hemos confirmado la existencia de puntos críticos en ZDG linealizada. Dichos modos logarítmicos poseen las mismas propiedades que los de teorías de gravedad con derivadas superiores, tales como NMG crítica. En el caso de NMG, la aparición de estos modos permitió conjeturar que la teoría de campos dual a NMG en el punto crítico es una LCFT con cargas centrales nulas, una vez que se adoptan condiciones de borde apropiadas. Los modos logarítmicos de NMG pueden ser vistos como duales a los compañeros logarítmicos de las componentes del tensor de energía-momentos de la LCFT dual. A pesar de que las cargas centrales son cero, las funciones de dos puntos de los modos del tensor de esfuerzos y de sus compañeros

logarítmicos no son triviales y están determinadas por nuevas cantidades llamadas nuevas anomalías. Una manera sencilla de calcular estas nuevas anomalías en el lado de gravedad fue propuesto en la referencia [GJZ11].

Se puede arribar a conclusiones similares para los puntos críticos de ZDG. Recordemos que las cargas centrales de la teoría son [BdHH⁺13]

$$c_{L/R} = 12\pi\ell M_P (\sigma + \gamma),$$

y se anulan en el punto crítico⁵ $\sigma + \gamma = 0$. Entonces, las funciones de dos puntos de la LCFT con $c_{L/R} = 0$ estarán ahora caracterizadas por las nuevas anomalías $b_{L/R}$

$$\begin{aligned} \text{Massless Left:} \quad & (h_L, \bar{h}_L) = (2, 0), & \text{Massless Right:} \quad & (h_R, \bar{h}_R) = (0, 2), \\ \text{Massive Left:} \quad & (h_{M,L}, \bar{h}_{M,L}) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \ell^2 M_{\text{FP}}^2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \ell^2 M_{\text{FP}}^2} \right), \\ \text{Massive Right:} \quad & (h_{M,R}, \bar{h}_{M,R}) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \ell^2 M_{\text{FP}}^2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \ell^2 M_{\text{FP}}^2} \right), \end{aligned}$$

donde M_{FP}^2 está dado por la ecuación (5.2). Las anomalías izquierda y derecha pueden ser calculadas siguiendo [GJZ11]

$$b_{L/R} = \lim_{\sigma+\gamma \rightarrow 0} \frac{c_{L/R}}{h_{L/R} - h_{M,L/R}}. \quad (5.9)$$

Evaluando este límite en forma explícita, podemos hallar las nuevas anomalías de ZDG crítica

$$b_{L/R} = -\frac{48\pi\sigma M_P}{\ell m^2 \beta_1}. \quad (5.10)$$

El hecho de que ambas nuevas anomalías sean iguales se debe al hecho de que ZDG es una teoría invariante de paridad. En el límite de NMG (ver Sección 3.4.1.1) las nuevas anomalías se reducen a $b_{L/R}^{\text{NMG}} = -12\sigma'\ell/G$, donde σ' es el parámetro de signo de NMG. Este resultado concuerda con las expresiones obtenidas en [GH10] en el punto crítico de NMG ($2m^2\ell^2 = -\sigma'$). La diferencia en el caso de ZDG es que la nueva anomalía es función del parámetro β_1 en lugar de depender de la combinación ℓ/G .

A continuación veremos las soluciones no-lineales que representan ondas propagantes en AdS₃, lo que reforzará la idea de que ZDG crítica es dual a LCFT.

⁵La constante cosmológica se relaciona con el radio de AdS del siguiente modo: $\Lambda = -1/\ell^2$.

5.1.3. Teoría no-lineal

En esta sección, veremos soluciones de ZDG a nivel no-lineal, con el objetivo de corroborar que los modos logarítmicos encontrados en la sección anterior no son un artefacto de la aproximación lineal. Con este objetivo, construiremos soluciones tipo ondas propagantes en AdS₃ y mostraremos que en el punto crítico exhiben un comportamiento similar al de los modos logarítmicos anteriormente estudiados. Para obtener estas soluciones, será útil la interpretación de que ZDG puede ser entendida como una teoría de un solo *dreibein* que, sin embargo, contiene un número infinito de términos con derivadas superiores. Mostraremos que, para el caso de una solución de onda AdS, las contribuciones de los términos de derivadas superiores pueden ser resumidos a una expresión cerrada. Las ecuaciones de movimiento resultantes se reducen a ecuaciones diferenciales de cuarto orden para el perfil de la onda que pueden ser resueltas explícitamente.

5.1.3.1. Ondas AdS

Para estudiar el comportamiento crítico a nivel no-lineal en ZDG vamos a buscar soluciones de ondas propagantes en un fondo de AdS₃ con un decaimiento logarítmico análogo al de NMG, como fue estudiado en [ABGH09]. Primero recordaremos las ecuaciones de movimiento que se derivan de la densidad lagrangiana (5.1)

$$0 = \sigma R_1^a + \frac{1}{2} m^2 \epsilon^a{}_{bc} (\alpha_1 e_1^b e_1^c - 2\beta_1 e_1^b e_2^c), \quad (5.11a)$$

$$0 = R_2^a + \frac{1}{2} m^2 \epsilon^a{}_{bc} (\alpha_2 e_2^b e_2^c - \beta_1 e_1^b e_1^c), \quad (5.11b)$$

$$0 = T_I^a \quad \text{para } I = 1, 2. \quad (5.11c)$$

Un hecho notable, ya mencionado en la Sección 3.4, es que es posible resolver la ecuación (5.11a) algebraicamente en favor de e_2 . De este modo se obtiene e_2 como función de e_1 y sus derivadas

$$e_{2\mu}{}^a = \frac{\alpha_1}{2\beta_1} e_{1\mu}{}^a + \frac{\sigma}{m^2 \beta_1} S_{1\mu}{}^a, \quad (5.12)$$

donde $S_{1\mu}{}^a \equiv S_{1\mu\nu} e_1^{\nu a}$ y $S_{1\mu\nu}$ es el tensor de Schouten asociado a la métrica g_1 . A su vez, si reemplazamos la forma (5.12) en la ecuación de la torsión (5.11c) de e_2 podemos obtener la conexión de espín ω_2 como una serie de potencias

$$\omega_{2\mu}{}^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \Omega_{\mu}^{(2n)a}, \quad (5.13)$$

donde los coeficientes $\Omega_\mu^{(2n)a}$ dependen de e_1 y sus derivadas

$$\begin{aligned}\Omega_\mu^{(0)a} &= \omega_{1\mu}{}^a, & \Omega_\mu^{(2)a} &= -\frac{2\sigma}{\alpha_1} C_{1\mu}{}^a, \\ \Omega_\mu^{(2k)a} &= -\frac{2\sigma}{\alpha_1} \det(e_1)^{-1} \varepsilon^{\nu\rho\sigma} \epsilon_{bcd} \left(e_{1\nu}{}^a e_{1\mu}{}^b - \frac{1}{2} e_{1\nu}{}^b e_{1\mu}{}^a \right) \Omega_\rho^{(2k-2)c} S_{1\sigma}{}^d,\end{aligned}\quad (5.14)$$

donde $C_{1\mu}{}^a \equiv C_{1\mu\nu} e_1^\nu{}^a$ y $C_{1\mu\nu}$ es el tensor de Cotton asociado a g_1 .

Como se detalló en la Sección 3.4, es posible expresar ZDG como una teoría de derivadas superiores en términos de un solo *dreibein*. Para ello necesitamos reemplazar la expresión (5.12) y la expansión (5.13) en la ecuación de movimiento (5.11b), lo que nos permite escribir la curvatura R_2^a como una serie de potencias

$$R_2^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} R_2^{(2n)a}; \quad (5.15)$$

donde los coeficientes $R_2^{(2n)a}$ dependen de e_1 y sus derivadas

$$\begin{aligned}R_2^{(0)a} &= R_1^a, & R_2^{(2)a} &= -\frac{2\sigma}{\alpha_1} \mathcal{D}C_1^a, \\ R_2^{(2k)a} &= \mathcal{D}\Omega^{(2k)a} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon^a{}_{bc} \Omega^{(2i)b} \Omega^{(2k-2i)c}.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Ahora sí, estamos en condiciones de empezar a buscar las soluciones de ondas propagantes en AdS₃. Recordemos que AdS₃ es solución de ZDG si las constantes de acoplamiento cumplen las siguientes relaciones

$$\alpha_1 = 2\gamma\beta_1 - \sigma \frac{\Lambda}{m^2}, \quad \gamma^2 \alpha_2 = \beta_1 - \frac{\Lambda}{m^2}. \quad (5.17)$$

Para la onda AdS, consideraremos como *ansatz* una deformación de Kerr-Schild de AdS₃

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - f(u, y) k_\mu k_\nu,$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica de AdS₃, k^μ es un vector nulo⁶ y la función $f(u, y)$ es el perfil de la onda. Utilizando coordenadas de Poincarè, el *ansatz* tiene la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{y^2} (-f(u, y) du^2 - 2 dudv + dy^2).$$

⁶Nosotros tomamos $k^\mu \partial_\mu = (y/\ell) \partial_v$.

Elegiremos el siguiente *dreibein* para la métrica de la onda

$$e^{\hat{0}} = \frac{\ell}{y} \left(\sqrt{f(u, y)} du + \frac{1}{\sqrt{f(u, y)}} dv \right), \quad e^{\hat{1}} = \frac{\ell}{y} \frac{1}{\sqrt{f(u, y)}} dv, \quad e^{\hat{2}} = \frac{\ell}{y} dy. \quad (5.18)$$

Para poder encontrar las soluciones de ondas AdS, seguiremos el mismo procedimiento que fue descrito brevemente más arriba, y en detalle en la Sección 3.4.4. Recordemos que en esta formulación de un solo *dreibein*, las ecuaciones de movimiento están dadas por (5.11b), donde e_2^a debe ser entendida como una función de e_1^a y sus derivadas, como puede verse en (3.67). Por lo tanto, utilizaremos (5.18) como *ansatz* para el *dreibein* e_1^a y la expresión (5.12) para e_2^a , dando por resultado

$$e_2^{\hat{0}} = g(u, y) du + h(u, y) dv, \quad e_2^{\hat{1}} = p(u, y) du + q(u, y) dv, \quad e_1^{\hat{2}} = s(u, y) dy, \quad (5.19a)$$

donde

$$\begin{aligned} g(u, y) &= \frac{1}{2m^2 \ell \beta_1 y \sqrt{f(u, y)}} \left(2m^2 \ell^2 \gamma \beta_1 f(u, y) + \sigma y \left(\frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(u, y) \right), \\ h(u, y) &= \frac{\gamma \ell}{y \sqrt{f(u, y)}} = q(u, y), \\ p(u, y) &= \frac{\sigma}{2m^2 \ell \beta_1 \sqrt{f(u, y)}} \left(\frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(u, y), \quad s(u, y) = \frac{\gamma \ell}{y}. \end{aligned} \quad (5.19b)$$

El parámetro γ que aparece en estas funciones pueden ser determinado desde (5.17). Para poder escribir completamente las ecuaciones de movimiento (5.11b) es necesario evaluar la serie (5.13) para ω_2^a . Realizando el cálculo explícito de (5.14) para esta solución se puede ver que todas las contribuciones a $\Omega_\mu^{(2n)a}$ con $n > 0$ tienen la misma forma⁷.

$$\Omega_\mu^{(2n)a} = \left(\frac{\sigma}{\ell^2 \alpha_1} \right)^n \ell y \frac{\partial^3 f(u, y)}{\partial y^3} k_\mu k_\nu e_1^{\nu a}. \quad (5.20)$$

Notemos que podemos sumar todos los órdenes de la expansión $1/m^2$ en una expresión cerrada para ω_2^a , entonces encontramos que

$$\omega_{2\mu}^a = \omega_{1\mu}^a - \frac{\sigma \ell y}{\sigma - \alpha_1 \ell^2 m^2} \frac{\partial^3 f(u, y)}{\partial y^3} k_\mu k_\nu e_1^{\nu a}. \quad (5.21)$$

⁷Puede parecer extraño que esta expresión contenga solo tres derivadas para todos los valores de n , en vista de que $\Omega_\mu^{(2n)a}$ tiene más derivadas para n grande para poder balancear las dimensiones de masa de m^{-2n} . Para este *ansatz* en particular, sin embargo, el parámetro ℓ es un parámetro dimensional que puede ser utilizado para balancear las dimensiones, y esto explica por qué es posible que todos los $\Omega_\mu^{(2n)a}$ tengan el mismo número de derivadas.

Reemplazando esta expresión en la ecuación de movimiento (5.11b), podemos ver que se reduce a la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden para el perfil de la onda

$$\frac{1}{y^2 \sqrt{f(u, y)}} \left[y^4 \frac{\partial^4 f(u, y)}{\partial y^4} + 2y^3 \frac{\partial^3 f(u, y)}{\partial y^3} - (1 + M_{\text{FP}}^2 \ell^2) \left(y^2 \frac{\partial^2 f(u, y)}{\partial y^2} - y \frac{\partial f(u, y)}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (5.22)$$

Aquí M_{FP}^2 es la masa de Fierz-Pauli (5.2) y hemos utilizado las relaciones entre los parámetros dadas en (5.17). La ecuación (5.22) se puede resolver utilizando separación de variables y proponiendo que las soluciones sean polinomios en y , *i.e.* $f(u, y) = \tilde{f}(u) y^n$. La potencia n es determinada por el polinomio indicial

$$n(n-2) (n(n-2) - M_{\text{FP}}^2 \ell^2) = 0. \quad (5.23)$$

En general, esta ecuación presenta cuatro raíces distintas: $n = \{0, 2, n_+, n_-\}$. La solución más general para el perfil de la onda es

$$f(u, y) = f_0(u) + f_2(u) \left(\frac{y}{\ell}\right)^2 + f_+(u) \left(\frac{y}{\ell}\right)^{n_+} + f_-(u) \left(\frac{y}{\ell}\right)^{n_-}, \quad (5.24)$$

donde $n_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 + M_{\text{FP}}^2 \ell^2}$. La parte relevante de la solución (5.24) está dada por los términos que involucran $y^{n_{\pm}}$, ya que los términos constante y cuadrático pueden ser removidos mediante transformaciones locales [ABH06]. En ciertos puntos especiales del espacio de parámetros las raíces $y^{n_{\pm}}$ degeneran entre sí o con las otras raíces y nuevos comportamientos asintóticos aparecen. Estos comportamientos especiales serán discutidos en la próxima sección.

Dado que las expresiones para $\Omega^{(2n)a}$ son proporcionales una a la otra, la solución de onda AdS (5.24) no es solamente una solución de la teoría completa, sino que resuelve las ecuaciones de movimiento a cada orden en $1/m^2$, ajustando apropiadamente las potencias n_{\pm} .

Auto-dualidad de las ondas AdS Antes de discutir los puntos especiales en el espacio de parámetros de ZDG, haremos una pequeña digresión para analizar la auto-dualidad presentada en la Sección 3.4.5 del capítulo anterior en el caso de las ondas propagantes en AdS₃.

La mencionada auto-dualidad entre las métricas asociadas a los dos campos de espín-2 de ZDG, también tiene lugar en las ondas AdS estudiadas anteriormente. En este último caso, la métrica asociada a e_1 está dada por (5.24).

Por otro lado, utilizando la expresión (5.12) podemos ver que la métrica asociada a e_2 está dada por

$$ds_2^2 = \frac{(m^2\ell^2\alpha_1 - \sigma)^2 \ell^2}{4m^2\ell^4\beta_1^2} \frac{1}{y^2} (-F(u, y)du^2 - 2dudv + dy^2),$$

donde

$$F(u, y) = (1 - 2\sigma y(y\partial_y^2 - \partial_y)) f(u, y),$$

se identifica con el perfil de onda de g_2 . Aquí asumiremos que $m^2\ell^2\alpha_1 \neq \sigma$.

Sería interesante saber si este tipo de “dualidad” entre “métricas” también tiene lugar para el caso geometrías no-AdS. Hasta donde tenemos conocimiento, todas las soluciones conocidas en las que ocurre dicha “dualidad”, tanto en tres como en cuatro dimensiones, son espacios asintóticamente planos, AdS o dS. En la Sección 5.2 mostraremos que, de hecho, la teoría de bi-gravedad ZDG posee soluciones no-AdS que exhiben esta dualidad entre los dos campos dinámicos. Esto sugiere que es fenómeno es mucho más universal de lo pensado y que no está relacionado necesariamente a soluciones que tienden asintóticamente a espacios de curvatura constante.

5.1.3.2. Puntos especiales

Ahora procederemos a analizar los puntos especiales del espacio de parámetros de ZDG, donde los perfiles de las ondas propagantes en AdS₃ presentan comportamientos particulares.

En los puntos críticos de ZDG se cumple que $\sigma + \gamma = 0$, por lo tanto, la masa de Fierz-Pauli es cero $M_{\text{FP}}^2 = 0$. En esos puntos tenemos que $n_+ = 2$ y $n_- = 0$ y la ecuación indicial (5.23) tiene dos soluciones degeneradas en lugar de tener cuatro distintas. Dado que la ecuación diferencial (5.22) sigue siendo de cuarto orden, debemos tener cuatro soluciones distintas, aunque quizá de carácter no-polinómico. Ignorando las soluciones constante y cuadrática, ya que pueden ser removidas por transformaciones locales, encontramos las siguientes soluciones en el punto crítico $\sigma + \gamma = 0$

$$f_c(u, y) = f_L(u) \ln\left(\frac{y}{\ell}\right) + f_{2L}(u) \left(\frac{y}{\ell}\right)^2 \ln\left(\frac{y}{\ell}\right). \quad (5.25)$$

Por lo tanto, en el punto crítico de ZDG existen soluciones de ondas AdS con decaimiento logarítmico que confirman las evidencias que hemos hallado en la sección anterior a nivel linealizado.

Existe otra clase de puntos especiales donde también tiene lugar una degeneración en las raíces de la ecuación indicial (5.23). En estos puntos se tiene que $M_{\text{FP}}^2 = -1/\ell^2$ y $n_{\pm} = 1$, con lo

cual, la ecuación (5.23) tiene solamente tres raíces. Entonces debe aparecer una nueva solución, nuevamente no-polinómica

$$f_s(u, y) = \left(\frac{y}{\ell}\right) \left(f_1(u) + f_{1L}(u) \ln\left(\frac{y}{\ell}\right)\right). \quad (5.26)$$

En este punto especial también se encuentra un comportamiento logarítmico. Este tipo de solución también ha sido hallado en la referencia [AAN10] en la teoría $f - g$ de Isham, Salam y Strathdee [ISS71].

Es interesante notar que NMG posee en su espacio de parámetros un punto especial con características similares, donde aparecen nuevas soluciones de agujero negro que no son localmente equivalentes a AdS_3 [BHT09b, OTT09]. Además, en dicho punto, la teoría linealizada de NMG presenta una simetría de *gauge* extra con un parámetro escalar. Lo mismo sucede para ZDG linealizada como puede verse de (3.63) y la discusión subsiguiente. Entonces, a nivel linealizado, tanto ZDG crítica como NMG crítica propagan un único grado de libertad. Sin embargo, esto no es cierto a nivel no-lineal y la invariancia de *gauge* extra del punto crítico es un accidente de la aproximación lineal. NMG en este punto especial ha sido llamada Partially Massless Gravity (PMG), dado que los modos masivos se convierten en parcialmente masivos [DN84, DW01]. La existencia de soluciones del tipo (5.26) en PMG fue tomado como un indicio de que la teoría dual correspondiente es una LCFT [GJZ11]. Es interesante mencionar que PMG, originalmente hallada como una versión especial de NMG, puede ser generalizada en el contexto de ZDG, donde hay una clase más amplia de puntos especiales en su espacio de parámetros.

La existencia de estos modos logarítmicos en ZDG crítica, brinda un claro indicio de que podemos incluir a ZDG en el menú de modelos candidatos a ser duales gravitatorios de LCFT. Este hecho nos lleva a preguntarnos si ZDG también puede proveer un escenario adecuado para estudiar otras extensiones de la correspondencia AdS/CFT, tales como las dualidades aplicadas a materia condensada (Lifshitz-Schrödinger/CMT) o WAdS/CFT. Un ingrediente esencial para ello es hallar soluciones que realicen geoméricamente las simetrías requeridas en la teoría de campos dual. En la próxima sección veremos que ZDG contiene en su espectro espacios de Lifshitz, Schrödinger y Warped AdS.

5.2. Espacios invariantes de escala anisótropa en ZDG

En la sección anterior hemos mostrado que ZDG provee un escenario interesante para explorar extensiones de la conjetura AdS/CFT, en aquel caso, para espacios asintóticamente AdS en un sentido relajado, y para teorías del borde no-unitarias. Esto nos anima para considerar ZDG como modelo para estudiar otras extensiones de la correspondencia. Entre otras, las aplicaciones a materia condensada han recibido una atención notable, tanto en espacios AdS como no-AdS. Esto es de sumo interés, ya que permite abordar problemas de teorías de campos en regímenes de acoplamiento fuerte con una herramienta distinta y novedosa. Entre distintas versiones de holografía no-AdS destacan las que involucran siguientes geometrías: los espacios de Lifshitz, conjeturados a ser los duales gravitatorios de sistemas de materia condensada con puntos fijos de Lifshitz [KLM08]; los espacios de Schrödinger, que realizan geoméricamente el grupo conforme no-relativista [Son08, BM08]; y los espacios Warped AdS (WAdS), cuyas distintas versiones (tipo-espacio, tipo-tiempo y tipo-nulo) tienen aplicación en diversos contextos, como materia condensada o Kerr/CFT [ALP⁺09, DHH12]. El primero paso para poder considerar a ZDG en el catálogo de teorías capaces de brindar modelos para estudiar holografía no-relativista, es corroborar que posea en su espectro geometrías con las simetrías requeridas. En esta sección mostraremos que, de hecho, ZDG admite todos los espacios anteriormente mencionados como soluciones exactas. Construiremos explícitamente las soluciones que representan espacios de Schrödinger así como también espacios asintóticamente Lifshitz y WAdS. Algunas de las geometrías estudiadas presentan una propiedad interesante ya observada en otras teorías de bi-gravedad consideradas en la literatura. Cuando se considera una solución de agujero negro, las dos “métricas” de la teoría están relacionadas por una transformación de coordenadas y un re-escalo global. Mostraremos que este tipo de “dualidad” también aparece en ZDG para algunas soluciones. Sin embargo, para el caso del agujero negro asintóticamente Lifshitz, la segunda “métrica” representa un nuevo agujero negro de Lifshitz que coincide con el primero únicamente en la región asintótica.

5.2.1. Espacios de Lifshitz

Comencemos con las soluciones de Lifshitz. Como ya mencionamos anteriormente, estos espacios cobran relevancia como duales gravitatorios de sistemas de materia condensada con puntos fijos de Lifshitz. La expresión (3.67) nos sugiere un *ansatz* para encontrar una solución de Lifshitz en ZDG. Es conveniente re-escalar los parámetros α_1 , α_2 y β_1 , definiendo las nuevas constantes

$\alpha \equiv m^2 \ell^2 \alpha_1$, $\mathcal{A} \equiv m^2 \ell^2 \alpha_2$ y $\beta \equiv m^2 \ell^2 \beta_1$. El *dreibein* e_1 está relacionado con la métrica de Lifshitz de la manera usual $g_{1\mu\nu} = e_{1\mu}{}^a \eta_{ab} e_{1\nu}{}^b$; y utilizando (3.67), el *ansatz* para e_2^a es

$$\begin{aligned} e_2^{\hat{1}} &= \frac{\alpha - \sigma(z^2 + z - 1)}{2\beta} \left(\frac{r}{\ell}\right)^z dt, \\ e_2^{\hat{2}} &= \frac{\alpha + \sigma(z^2 - z - 1)}{2\beta} \left(\frac{r}{\ell}\right) dx, \\ e_2^{\hat{3}} &= \frac{\alpha - \sigma(z^2 - z + 1)}{2\beta} \left(\frac{\ell}{r}\right) dr. \end{aligned} \quad (5.27)$$

El espacio de Lifshitz tridimensional resuelve las ecuaciones de movimiento (5.11a)-(5.11b) si los parámetros \mathcal{A} y β satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{(\alpha(\alpha - 2\sigma z) - (z^2 + z - 1)(z^2 - z - 1))^2 (\alpha - \sigma(z^2 + z + 1))}{2\sigma(\alpha - \sigma(z^2 - z + 1))^4}, \\ \beta &= -\frac{\alpha(\alpha - 2\sigma z) - (z^2 + z - 1)(z^2 - z - 1)}{2\sigma(\alpha - \sigma(z^2 - z + 1))}, \end{aligned}$$

o, de manera equivalente

$$\frac{\mathcal{A}}{\beta} = \frac{(\alpha(\alpha - 2z\sigma) - (z^2 + z - 1)(z^2 - z - 1)) (\alpha - \sigma(z^2 + z + 1))}{(\alpha - \sigma(z^2 - z + 1))^3}, \quad (5.28)$$

donde asumimos que $\alpha\sigma \neq z^2 - z + 1$.

Como dijimos en la sección anterior, sería interesante investigar si las soluciones no-AdS también presentan una “dualidad” entre “métricas”. Para responder a esta pregunta podemos ver que la “métrica” asociada a (5.27) puede ser escrita de la siguiente forma

$$ds_2^2 = \Omega^2 \left(-\frac{r^{2z}}{\ell^{2z}} d\tilde{t}^2 + \frac{r^2}{\ell^2} d\tilde{x}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 \right),$$

donde hemos (re-)definido

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{(\alpha - \sigma(z^2 - z + 1))^2}{4\beta^2}, \quad \tilde{t} = \frac{\alpha - \sigma(z^2 + z - 1)}{\alpha - \sigma(z^2 - z + 1)}, \\ \tilde{x} &= \frac{\alpha - \sigma(z^2 - z - 1)}{\alpha - \sigma(z^2 - z + 1)}. \end{aligned}$$

Entonces, la “métrica” g_2 , siendo un re-escalado de g_1 , también representa un espacio-tiempo de Lifshitz con el mismo exponente dinámico z .

5.2.1.1. Agujero negro de Lifshitz

En el caso particular de $z = 3$, debemos destacar que ZDG admite como solución agujeros negros circularmente simétricos que en la región asintótica tienen a un espacio de Lifshitz con el mismo exponente dinámico. En el contexto de holografía, un agujero negro en el *bulk* representa una teoría del borde dual a una temperatura finita, la temperatura de Hawking del agujero negro. La métrica agujero negro de Lifshitz está dada por

$$ds^2 = -\frac{r^6}{\ell^6} \left(1 - \frac{M\ell^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{r^2}{\ell^2} dx^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M\right)^{-1} dr^2. \quad (5.29)$$

Esta geometría persiste como solución luego de la adición del conjunto infinito de términos de curvatura superior de ZDG⁸. Esto es notable debido al hecho que los agujeros negros de Lifshitz no exhiben invariantes de curvatura constantes, cosa que sí sucede en las ondas AdS estudiadas en la Sección 5.1, lo que permitió resumir la serie infinita de términos con derivadas altas.

Para probar que el agujero negro (5.29) es solución de ZDG, es conveniente considerar el siguiente *ansatz* para e_2

$$\begin{aligned} e_2^{\hat{1}} &= \frac{(\alpha - 11\sigma)r^2 + 4M\ell^2\sigma}{2\beta r^2} \left(\frac{r}{\ell}\right)^3 \sqrt{1 - \frac{M\ell^2}{r^2}} dt, \\ e_2^{\hat{2}} &= \frac{\alpha + 5\sigma}{2\beta} \frac{r}{\ell} dx, \\ e_2^{\hat{3}} &= \frac{\alpha - 7\sigma}{2\beta} \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M\right)^{-1/2} dr. \end{aligned} \quad (5.30)$$

El agujero negro de Lifshitz de [ABGGH09] resuelve las ecuaciones de movimiento si \mathcal{A} y β satisfacen las condiciones (5.28) evaluadas en $z = 3$; es decir

$$\mathcal{A} = -\frac{(\alpha(\alpha - 6\sigma) - 55)^2(\alpha - 13\sigma)}{2\sigma(\alpha - 7\sigma)^4}, \quad \beta = -\frac{\alpha(\alpha - 6\sigma) - 55}{2\sigma(\alpha - 7\sigma)}, \quad (5.31)$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{\mathcal{A}}{\beta} = \frac{(\alpha(\alpha - 6\sigma) - 55)(\alpha - 13\sigma)}{(\alpha - 7\sigma)^3}.$$

Aquí hemos asumido que $\alpha \neq 11\sigma$, $\alpha \neq 7\sigma$ y $\alpha \neq -5\sigma$ para que (5.30)-(5.31) estén bien definidas.

Podemos ver que la “métrica” asociada al segundo *dreibein* (5.30) puede ser re-escrita como un agujero negro de Lifshitz con $z = 3$ multiplicado por un factor global. Más precisamente, el

⁸Como dijimos en la Sección 3.4, ZDG no es una completación de curvatura superior de NMG.

elemento de línea de g_2 es

$$ds_2^2 = \Omega^2 \left(- \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M \right) \left(\frac{r^2}{\ell^2} + \mu \right)^2 d\tilde{t}^2 + \frac{r^2}{\ell^2} d\tilde{x}^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M \right)^{-1} dr^2 \right), \quad (5.32)$$

donde hemos (re-)definido

$$\Omega^2 = \frac{(\alpha - 7\sigma)^2}{4\beta^2}, \quad \mu = \frac{4M\sigma}{\alpha - 11\sigma}, \quad \tilde{t} = \frac{\alpha - 11\sigma}{\alpha - 7\sigma}, \quad \tilde{x} = \frac{\alpha + 5\sigma}{\alpha - 7\sigma}.$$

El parámetro μ es positivo si $\text{sign}(M\sigma)(\alpha - 11\sigma) > 0$.

El “espacio-tiempo” descrito por el intervalo (5.32) posee invariantes de curvatura no-constantes con la misma estructura de divergencias que (5.29). Sin embargo, es importante remarcar que el agujero negro (5.32) es distinto al hallado en [ABGGH09]. La presencia del parámetro μ hace que el agujero negro (5.32) no sea localmente equivalente a (5.29), pudiendo contribuir a las propiedades globales de la geometría, como por ejemplo, su masa. Sin embargo, ambos espacios comparten el mismo comportamiento asintótico, aproximándose al espacio de Lifshitz con $z = 3$ en la región asintótica (*i.e.* para valores de r grandes).

Notemos que, dado que tanto M como μ son positivos, el agujero negro (5.32) posee una temperatura positiva, dada por

$$T = \frac{\sqrt{M}(M + \mu)}{2\pi\ell}.$$

Aún resta hallar un modo de definir las cargas conservadas en esta teoría y para estas soluciones en particular para, por ejemplo, estudiar la termodinámica este nuevo agujero negro. Una posibilidad para calcular las cargas conservadas podría venir de la mano del método de renormalización holográfica descrito en [Apo16] para teorías de *higher spin*.

5.2.2. Espacios de Schrödinger

Ahora consideremos otras geometrías con invariancia anisótropa, en este caso los llamados espacios de Schrödinger, los cuales realizan geoméricamente las simetrías de la ecuación de Schrödinger. Estos son un caso especial de las ondas AdS estudiadas en la Sección 5.1, en los que las funciones del perfil de onda (5.24) toman los valores $f_+(u) = 0$, $f_-(u) = f_0$ con $n_- = -2\nu$. Entonces el *dreibein* e_1 está dado por

$$e_1^{\hat{1}} = \frac{\ell}{y} \left(\frac{\ell^\nu}{y^\nu} du + \frac{y^\nu}{\ell^\nu} dv \right), \quad e_1^{\hat{2}} = \frac{\ell}{y} \frac{y^\nu}{\ell^\nu} dv, \quad e_1^{\hat{3}} = \frac{\ell}{y} dy,$$

mientras que e_2 tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} e_2^{\hat{1}} &= \frac{\ell}{y} \left[\left(\gamma - \frac{2\sigma\nu(1+\nu)}{\beta} \right) \frac{\ell^\nu}{y^\nu} du + \gamma \frac{y^\nu}{\ell^\nu} dv \right], \\ e_2^{\hat{2}} &= \frac{\ell}{y} \left[-\frac{2\sigma(1+\nu)}{\beta} \frac{\ell^\nu}{y^\nu} du + \gamma \frac{y^\nu}{\ell^\nu} dv \right], \\ e_2^{\hat{3}} &= \frac{\ell\gamma}{y} dy. \end{aligned}$$

Para que esta geometría sea solución de ZDG, los parámetros de la teoría deben cumplir las restricciones

$$\alpha = -\sigma(2\beta + 1 - 8\nu - 8\nu^2), \quad \mathcal{A} = -\frac{\beta^2(\beta - 1)}{(\beta - 4\nu(1 + \nu))^2}, \quad \gamma = -\frac{\sigma(\beta - 4\nu(1 + \nu))}{\beta}.$$

Dado que los espacios de Schrödinger son casos particulares de las ondas AdS, el campo de espín-2 g_2 es un re-escalado de g_1 como se discutió en la Sección 5.1.

5.2.3. Espacios Warped Anti-de Sitter

Ya hemos mencionado que un caso especial de los espacios de Schrödinger son los llamados espacios WAdS tipo-nulo, los cuales también resuelven las ecuaciones de movimiento de ZDG. Además, la teoría admite como soluciones las geometrías WAdS tipo-tiempo y tipo-espacio. En la introducción resaltamos la importancia de estos espacios en extensiones de la correspondencia AdS/CFT [ALP⁺09, DHH12], dado que constituyen un caso relativamente sencillo de geometrías no-AdS al presentar invariantes de curvatura constantes.

Debemos resaltar que el agujero negro localmente equivalente al espacio WAdS estirado tipo-espacio resuelve las ecuaciones de movimiento de ZDG (5.11a)-(5.11b). Este agujero negro está dado por la métrica

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \rho^2 (d\varphi + N^\varphi dt)^2 + \frac{\ell^2 dr^2}{4\rho^2 N^2}, \quad (5.33a)$$

con

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{r}{4} \left(3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right), \\ N^2 &= \frac{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)}{4\rho^2}, \\ N^\varphi &= \frac{2\nu r - \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}}{2\rho^2}. \end{aligned} \quad (5.33b)$$

Para el campo e_1 tomaremos el *dreibein* asociado al elemento de línea (5.33)

$$\begin{aligned} e_1^{\hat{1}} &= dt + \left(\nu r - \frac{1}{2} \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right) d\varphi, \\ e_1^{\hat{2}} &= \frac{1}{2} \sqrt{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)} d\varphi, \\ e_1^{\hat{3}} &= \frac{\ell}{\sqrt{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)}} dr, \end{aligned} \quad (5.34)$$

mientras que el segundo *dreibein* tiene la forma

$$\begin{aligned} e_2^{\hat{1}} &= \frac{\alpha - \sigma(4\nu^2 - 3)}{4\beta} \left[2dt + \left(2\nu r - \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right) d\varphi \right], \\ e_2^{\hat{2}} &= \frac{\alpha + \sigma(2\nu^2 - 3)}{4\beta} \sqrt{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)} d\varphi, \\ e_2^{\hat{3}} &= \frac{\ell}{2\beta} \frac{\alpha + \sigma(2\nu^2 - 3)}{\sqrt{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)}} dr. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Para estas geometrías sean soluciones de ZDG, los parámetros α , \mathcal{A} y β deben satisfacer las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}}{\beta} &= \frac{(\alpha - \sigma(4\nu^2 - 3))}{(\alpha + \sigma(2\nu^2 - 3))^6} (20\nu^4 - 12\sigma(\alpha + \sigma)\nu^2 + (\alpha - 3\sigma)^2) \\ &\quad \times (8\sigma\nu^6 + 12(\alpha - 3\sigma)\nu^4 - 12\sigma(\alpha^2 - 3)\nu^2 + (\alpha - 3\sigma)^3). \end{aligned}$$

La “métrica” asociada al segundo *dreibein* del agujero negro WAdS tipo-espacio (5.35) puede ser escrita del siguiente modo

$$\begin{aligned} ds_2^2 &= \Omega^2 \left(d\tilde{t}^2 + 2 \left(\nu r - \frac{1}{2} \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right) d\tilde{t}d\tilde{\varphi} + \frac{\ell^2 dr^2}{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{4} \left(3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right) d\tilde{\varphi}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde hemos (re-)definido

$$\Omega^2 = \frac{9(\nu^2 - 1)^2}{4\beta^2}, \quad \alpha = \nu^2\sigma, \quad \tilde{t} = -t, \quad \tilde{\varphi} = -\varphi, \quad (5.37)$$

y donde las constantes de acoplamiento toman los valores

$$\mathcal{A} = -\frac{(\nu^2 - 3)}{2}, \quad \beta = \frac{3(\nu^2 - 1)}{2}.$$

Vale la pena mencionar que el “espacio-tiempo” descrito por (5.36) no difiere globalmente de (5.33) dado que el re-escalo de parámetros dado por (5.37) no introduce un déficit angular.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado teorías de gravedad masiva en el contexto de holografía y extensiones de la correspondencia AdS/CFT. La relevancia de las teorías con campos de espín-2 masivos radica en que estas poseen un amplio espectro de soluciones entre las que se encuentran varias geometrías útiles en extensiones de AdS/CFT. El agregado de masa al gravitón se logra añadiendo términos de interacción con campos auxiliares (es el caso de la teoría dRGT [dRGT11] o de New Massive Gravity en su formulación de segundo orden [BHT09a, BHT09b, HT10]) o términos superiores en la curvatura (por ejemplo, Topologically Massive Gravity [DJT82b, DJT82a] o New Massive Gravity en su formulación habitual [BHT09a, BHT09b]). Estos términos extra hacen más grande el espacio de parámetros permitiendo una mayor variedad de soluciones en el espectro de la teoría. En general, la adición de términos con derivadas superiores añade grados de libertad (a excepción de las teorías de Lovelock); en el caso de términos cuadráticos en la curvatura, los modos de la teoría pueden descomponerse en un gravitón no-masivo, un gravitón masivo y un campo escalar masivo [Ste78]. Sin embargo, algunos de esos modos de espín-2 son inestables. Este problema puede eludirse en $2 + 1$ dimensiones, ya que allí el gravitón no-masivo no posee grados de libertad propagantes, lo que permite ajustar la teoría de modo tal que el campo de espín-2 masivo no sea un modo tipo-fantasma.

Por otro lado, la correspondencia AdS/CFT es extremadamente útil ya que brinda descripciones gravitatorias tratables de teorías de campos fuertemente acopladas difíciles de abordar con otros métodos. Sin embargo, los casos más habituales involucran teorías de campos que no son realizables experimentalmente. Desde hace casi una década han surgido distintas extensiones de AdS/CFT con el propósito de aplicar las ideas holográficas a, entre otras cosas, sistemas de

materia condensada [Son08, BM08, KLM08]. E incluso a teorías de campos no-unitarias como las llamadas Logarithmic CFT (LCFT) que también poseen aplicaciones en materia condensada [GRRZ13].

Comenzamos esta tesis introduciendo los principales conceptos de holografía en el Capítulo 2: el diccionario holográfico dado por la prescripción de Witten y el proceso de renormalización holográfica que nos permite calcular observables bien definidos utilizando la dualidad. Este procedimiento nos permitió identificar el tensor de Brown-York renormalizado con el valor de expectación del tensor de energía-momentos de la CFT dual. Teniendo el tensor de esfuerzos bien definido procedimos a utilizarlo en algunos ejemplos de interés como la obtención de cargas conservadas del agujero negro BTZ [BTZ92] y el calculo de la anomalía de traza en espacios asintóticamente AdS₃ [BK99]. Luego, repasamos brevemente las principales ideas de la holografía no-relativista en espacios de Schrödinger [Son08, BM08], de Lifshitz [KLM08] y Warped AdS [ALP⁺09, DHH12].

En el Capítulo 3 introdujimos las teorías de gravedad masiva tridimensionales en las que centramos nuestra investigación en esta tesis: New Massive Gravity (NMG) [BHT09a, BHT09b] y Zwei-Dreibein Gravity (ZDG) [BdHH⁺13]. Para NMG estudiamos el principio variacional utilizando la formulación de campo auxiliar, lo que nos permitió determinar los términos de borde de la teoría y obtener el tensor de Brown-York para NMG. Luego aplicamos el método de renormalización holográfica en NMG para distintos casos: en espacios asintóticamente AdS₃ obtuvimos la anomalía de traza de la CFT dual y las cargas conservadas del agujero negro BTZ; en espacios con invariancia de escala anisótropa calculamos la masa del espacio de Lifshitz y el agujero negro de Lifshitz. También vimos que, si bien NMG es una teoría perturbativamente consistente en torno a Minkowski, cuando se considera el espacio AdS hay una inconsistencia de unitariedad entre la teoría de gravedad y la teoría de campos dual. Como se menciona en la sección correspondiente, hubo intentos de corregir este problema añadiendo términos con derivadas superiores que no tuvieron éxito. Vimos cómo ZDG, una teoría de bi-gravedad escrita en formalismo de primer orden, sí resuelve dicho problema. Además, ZDG puede ser escrita como una teoría de una sola métrica pero con un número infinito de términos de derivadas superiores. Esto parece sugerir que la única manera de tener una teoría libre de la inconsistencia *bulk/boundary* es la adición de una torre infinita de términos con derivadas superiores, de una manera ligeramente reminiscente a teoría de cuerdas. Asimismo, es posible pensar a ZDG como una teoría de *higher spin* dado que acopla de un modo consistente gravitones con campos de espín-2 masivos.

Una vez introducida la correspondencia AdS/CFT y las teorías de gravedad con campos de espín-2 masivos, procedimos a presentar los resultados originales de esta tesis en los Capítulos 4 y 5. En la Sección 4.1 del Capítulo 4 estudiamos deformaciones quirales del agujero negro BTZ extremal. La primer observación interesante es destacar que NMG en el punto crítico $m^2\ell^2 = -1/2$ (*i.e.* $c = 0$) posee soluciones a nivel no-lineal que exhiben un comportamiento asintótico del tipo estudiado. Es decir, deformaciones del agujero negro BTZ extremal de la forma $ds^2 = ds_{e\text{BTZ}}^2 + H_{ab}dz^a dz^b$ con H_{ab} dado por

$$H_{ab}(r) = l^4 \delta_a^+ \delta_b^+ (k_0 + k_2 r^2) \log\left(\frac{r^2 - 2GM\ell^2}{2GM\ell^2}\right). \quad (6.1)$$

Estas deformaciones alteran incluso los términos dominantes de la métrica original y, a pesar de ello, poseen cargas conservadas finitas. También vale la pena mencionar que los dos términos que contribuyen a la masa (4.16) y al momento angular (4.17) provienen de contribuciones distintas en la expansión (6.1); mientras que la parte que depende de k_0 viene del término $\mathcal{O}(\log(r))$, siendo consistente con las condiciones de borde de Log-gravity, la segunda parte viene de la nueva dependencia $\mathcal{O}(r^2 \log(r))$. Es notable que este último depende tanto de k_2 como de M . Hay un caso especial para el cual la deformación (6.1) se anula en $r^2 = 2GM\ell^2$; es decir, cuando $k_0 = -2GM\ell^2 k_2$. Para esta elección de los parámetros la solución posee algunas características especiales; por ejemplo, el potencial efectivo de las geodésicas no diverge. Es notable que en este caso las cargas (4.16) y (4.17) se anulan.

En la Sección 4.2 hemos estudiado el proceso de renormalización holográfica de espacios WAdS en gravedad masiva tridimensional. La motivación para llevar a cabo dicha tarea fue la de ver hasta que punto es posible extender las técnicas estándar de renormalización holográfica *mutatis mutandis* a espacios asintóticamente WAdS₃. Los resultados de nuestro análisis mostraron que el intento de aplicar directamente la receta de renormalización holográfica a espacios WAdS₃ tuvo éxito de forma parcial: por un lado, si bien el procedimiento dio lugar al cálculo exacto de cargas conservadas de agujeros negros asintóticamente WAdS₃, no fue suficiente para regularizar completamente el tensor de energía-momentos en el borde del espacio-tiempo. A pesar de ello, se pudo dar una definición de la densidad de energía cuasi-local

$$\mathcal{M} = \frac{\nu^2(\nu^2 + 3)}{2(20\nu^2 - 3)\ell G} \left(r_+ + r_- - \frac{1}{\nu} \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-} \right),$$

que da el resultado correcto de la masa del agujero negro. Además, la parte finita en la expansión para distancias radiales grandes da el valor exacto del momento angular

$$\mathcal{J}_{(0)} = \frac{\nu(\nu^2 + 3)}{4(20\nu^2 - 3)G\ell} \left((5\nu^2 + 3)r_+r_- - 2\nu(r_+ + r_-)\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+r_-} \right).$$

Una pregunta natural que surge es por qué el método estándar de renormalización holográfica no es suficiente para definir un tensor de esfuerzos en el borde. A este respecto queremos discutir una posibilidad interesante: existe evidencia fuerte de que la gravedad en espacios WAdS₃ es dual a una teoría bidimensional que viola invariancia de Lorentz, siendo invariante únicamente ante el grupo $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$. Entonces, es natural preguntarse si es posible suplementar el tensor $T_{ij}^{(*)}$ con contra-términos que no sean invariantes de Lorentz de modo tal que el resultado sea un tensor de energía-momentos finito. Precisamente debido a la ausencia de la invariancia de Lorentz, tal contribución daría lugar a un tensor no-simétrico que no tendría la forma de un tensor de Belifante, como el que provendría de los contra-términos $T_C^{ij} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S_C}{\delta \gamma_{ij}}$, que es simétrico por construcción. Todavía persiste la pregunta sobre si es posible agregar otro tipo de contribuciones que violen la invariancia de Lorentz y que den lugar a un tensor de energía-momentos finito en el borde. Sin embargo, una inspección exhaustiva de todos los posibles términos a mano, enumerados en el Apéndice A.1, muestra que no hay una manera clara de mejorar el tensor de esfuerzos de borde sin estropear los valores correctos de las cargas.

El último caso de NMG estudiado en el Capítulo 4 es el del espacio de Gödel, en la Sección 4.3, donde se investigó la definición de las cargas conservadas en espacios WAdS₃ tipo-tiempo (tWAdS₃), los cuales exhiben curvas temporales cerradas (CTCs). Las geometrías tWAdS₃ en NMG representan ejemplos manejables en los cuales se pueden atacar preguntas tales como la definición de observables con sentido físico, como las cargas conservadas, en espacios que no poseen vectores de Killing globalmente definidos. Para espacios tWAdS₃ estirados y comprimidos hemos investigado la viabilidad de la definición de cargas conservadas. Una de las preguntas que abordamos es cómo proveer una definición sensible cuasi-local de la energía gravitacional en estos espacios con CTCs. La motivación para hacer esto es la de estudiar hasta donde es posible extender los métodos inspirados en holografía en estos ejemplos de extensiones de AdS/CFT a espacios no-AdS. Hemos tenido éxito en cuanto a defectos no-rotantes concierne, siendo capaces de obtener su masa

$$\mathcal{M} = \frac{2\sigma\omega^2\ell^2(\mu - 1)}{(19\omega^2\ell^2 - 2)G} = \frac{2(\mu - 1)}{19G} \left(\sigma - \frac{1}{m^2\ell^2} \right).$$

Este es un resultado interesante ya que, a pesar de las similitudes entre los agujeros negros en

WAdS tipo-espacio y los defectos angulares en WAdS tipo-tiempo, la transformación de coordenadas que los vincula depende las constantes de integración. Es decir, depende de las mismas cargas conservadas que se quiere calcular. Esto queda evidenciado en el Apéndice A.2. Debemos aclarar que también hemos encontrado dificultades cuando intentamos aplicar estas técnicas a soluciones rotantes. La pregunta acerca de la posibilidad de formular una receta de renormalización holográfica en espacios WAdS₃ permanece pendiente de respuesta. La obstrucción encontrada fue la misma que en el caso de espacios WAdS₃ tipo-espacio: la imposibilidad de regularizar completamente el tensor de esfuerzos con contra-términos locales. Este fenómeno ha sido observado tanto en TMG como en NMG para el caso de espacios WAdS₃ tipo-espacio, sugiriendo que esta es una característica general de este tipo de geometrías. Aún no queda claro si esto es consecuencia o no de la falta de invariancia de Lorentz en la teoría de campos dual.

Luego, ya concentrándonos en ZDG, en la Sección 5.1 del Capítulo 5 hemos mostrado que el espacio de parámetros de ZDG alrededor de AdS₃ posee puntos críticos donde aparecen soluciones con decaimientos logarítmicos, tanto a nivel lineal como no-lineal. Estos puntos críticos y las soluciones logarítmicas que allí aparecen son similares a las de NMG crítica. Debemos destacar que los puntos críticos de ZDG son una generalización de los de NMG. La existencia de este tipo de soluciones logarítmicas es no-trivial. Tanto en NMG como en ZDG, la criticalidad está marcada por el hecho de que los modos masivos se convierten en no-masivos y degeneran con los modos puro *gauge*. En ambos casos se puede argumentar que, por continuidad, nuevos modos que no son masivos ni no-masivos deben aparecer en el punto crítico. En NMG, dado que es una teoría cuadrática en el tensor de curvatura, las ecuaciones de movimiento son de cuarto orden, por lo tanto, deben existir cuatro modos independientes en cualquier punto del espacio de parámetros. Como en el punto crítico los modos masivos degeneran en los no-masivos, nuevos modos deben surgir en el espectro linealizado. Estos modos resultan ser soluciones de una ecuación de cuarto orden muy particular que presenta un operador diferencial de cuarto orden que es la raíz cuadrada de uno de segundo orden [BHRT11] y típicamente presentan soluciones logarítmicas. En ZDG las ecuaciones de movimiento en los puntos críticos siguen siendo un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de segundo orden para las dos métricas y deben tener cuatro modos linealizados distintos. Lo que resulta no-trivial en ZDG es que los nuevos modos que aparecen en los puntos críticos para suplantar los modos masivos resultan tener decaimiento logarítmico. De hecho, el comportamiento logarítmico es típicamente asociado a ecuaciones diferenciales de orden mayor a dos y ZDG está formulada naturalmente en términos de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para dos métricas. Sin embargo, hemos mostrado que las nuevas soluciones de ZDG en

los puntos críticos son logarítmicas. A nivel linealizado, esto sucede porque las ecuaciones de ZDG crítica y las de NMG a nivel lineal son las mismas. A nivel no-lineal hemos mostrado que ZDG puede ser entendida como una teoría de derivadas superiores (de hecho, infinitos términos con derivadas más altas) para una única métrica, y es esta característica la que en última instancia es responsable de la existencia de las soluciones de onda AdS con decaimiento logarítmico en los puntos críticos. Como en el caso de teorías de gravedad masiva con derivadas superiores, la existencia de modos logarítmicos puede ser vista como un indicio de que ZDG crítica es dual a teorías conformes logarítmicas, una vez que se imponen condiciones de borde adecuadas. Para poder confirmar esta conjetura son necesarios otras pruebas, tales como el cálculo de funciones de dos y tres puntos, como las realizadas en TMG y NMG [STvR09, GS10, GH10], a través de un procedimiento de renormalización holográfica apropiado. También son necesarios cálculos de la función de partición a nivel árbol y a 1-*loop* del lado de gravedad (ver por ejemplo [GGV10, BGVZ11]) para ver si se reproduce la estructura esperada para una LCFT. Para poder realizar estos chequeos es necesaria una extensión del diccionario holográfico para teorías de bi-gravedad.

En la Sección 5.2 hemos construido soluciones explícitas de ZDG. Hemos encontrado como soluciones geometrías con invariancia de escala anisótropa con y sin invariancia de Galileo. Estas son los análogos tridimensionales de los espacios de Schrödinger y Lifshitz respectivamente, los cuales fueron conjeturados a ser los duales gravitatorios de sistemas de materia condensada fuertemente correlacionados. Lo que constituye el primer paso para poder considerar esta teoría como un modelo sensato de holografía no-relativista. También hemos hallado agujeros negros estáticos circularmente simétricos que tienden asintóticamente al espacio de Lifshitz, lo que es notable, dado que representan soluciones de curvatura no-constante de New Massive Gravity (NMG) que persisten luego de la introducción de la torre infinita de términos de curvatura superior de ZDG. Además se derivaron soluciones de agujeros negro asintóticamente WAdS tipo-espacio. Para el caso de los espacios de Lifshitz, Schrödinger y Warped AdS, ambos campos de espín-2 están relacionados por cambios de coordenadas y re-escalos globales. Para el caso del agujero negro asintóticamente Lifshitz, por el contrario, la “métrica” asociada al segundo *dreibein* representa un nuevo tipo de agujero negro que tiende asintóticamente a la geometría de Lifshitz con $z = 3$. La pregunta acerca de si estos dos campos dinámicos poseen o no una interpretación geométrica clara no está resuelta. Por otro lado, sería interesante averiguar si ZDG contiene en su espectro nuevas soluciones con invariancia de escala anisótropa, como agujeros negros de Lifshitz con $z \neq 3$. Un problema abierto en esta teoría es sobre cómo definir cargas conservadas. Hallar un método que permita hacerlo es muy importante para, por ejemplo, estudiar la termodinámica

de agujeros negros de bi-gravedad. Los resultados de esta sección dan motivaciones adicionales para estudiar teorías de (bi-)gravedad masiva tridimensional como modelos simplificados para estudiar AdS/CFT y sus extensiones.

Finalmente, queremos mencionar que en la referencia [Apo16] se ha propuesto un método de renormalización holográfica para la teoría de *Higher-Spin Gravity* en tres dimensiones. Esto junto con la formulación tipo-Chern-Simons de la teoría de gravedad masiva tridimensional [BHM⁺15, Mer14], puede dar lugar a un diccionario holográfico para teorías de bi-gravedad en tres dimensiones como ZDG. También sería interesante estudiar la teoría de bi-gravedad de la referencia [AAN⁺16], que añade un término cinético para el campo auxiliar $f_{\mu\nu}$ de NMG, y su espectro de soluciones. De contener los espacios estudiados en esta tesis como soluciones, permitiría incorporar un nuevo modelo de gravedad al menú de teorías para explorar extensiones de AdS/CFT.

Apéndice A

Espacios Warped Anti-De Sitter: tipo-tiempo y tipo-espacio

A.1. Warped Anti-de Sitter: expansión para r grande

Ahora colectaremos las expresiones correspondientes a la expansión para r grande de las cantidades relevante en el borde. Las componentes del tensor de esfuerzos, dadas por la expansión

$T_{ij}^* = t_{ij}^{(1)} r + t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(-1)} r^{-1} + t_{ij}^{(-2)} r^{-2} + \dots$, están dadas por

$$\begin{aligned}
 t_{tt}^{(0)} &= \frac{\nu^2 \sqrt{\nu^2 + 3}}{(20\nu^2 - 3) \pi \ell G}, \\
 t_{tt}^{(-1)} &= 0, \\
 t_{tt}^{(-2)} &= \frac{\nu^2 \sqrt{\nu^2 + 3} (r_+ - r_-)^2}{4 (20\nu^2 - 3) \pi \ell G}, \\
 t_{t\varphi}^{(1)} &= \frac{3\nu(\nu^2 - 1) \sqrt{\nu^2 + 3}}{8(20\nu^2 - 3) \pi \ell G}, \\
 t_{t\varphi}^{(0)} &= \frac{\nu \sqrt{\nu^2 + 3}}{16((20\nu^2 - 3) \pi \ell G)} \left((5\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) + 8\nu \sqrt{\nu^2 + 3r_+ r_-} \right), \\
 t_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{3\nu(\nu^2 - 1) \sqrt{\nu^2 + 3}}{8(20\nu^2 - 3) \pi \ell G} \left(\nu(r_+ + r_-) - \sqrt{\nu^2 + 3r_+ r_-} \right), \\
 t_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \frac{\nu \sqrt{\nu^2 + 3}}{32(20\nu^2 - 3) \pi \ell G} \left(\nu(13\nu^2 + 3)(r_+^2 + r_-^2) - \right. \\
 &\quad \left. 2(5\nu^2 + 3) \sqrt{\nu^2 + 3r_+ r_-} (r_+ + r_-) - 2\nu(5\nu^2 - 21)r_+ r_- \right).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, las componentes no nulas de la métrica del borde, denotada por $\gamma_{ij} \simeq \gamma_{ij}^{(2)} r^2 + \gamma_{ij}^{(1)} r + \gamma_{ij}^{(0)} + \dots$

$$\begin{aligned}\gamma_{tt}^{(0)} &= 1, \\ \gamma_{t\varphi}^{(1)} &= \nu, \\ \gamma_{t\varphi}^{(0)} &= -\frac{1}{2}\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}, \\ \gamma_{\varphi\varphi}^{(2)} &= \frac{3}{4}(\nu^2 - 1), \\ \gamma_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{4}(\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - \nu\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}.\end{aligned}$$

Las componentes de \hat{f}_{ij} , siguiendo la misma notación, es decir $\hat{f}_{ij} = \hat{f}_{ij}^{(2)} r^2 + \hat{f}_{ij}^{(1)} r + \hat{f}_{ij}^{(0)} + \dots$, están dadas por

$$\begin{aligned}\hat{f}_{tt}^{(0)} &= -\frac{4\nu^2 - 3}{m^2 \ell^2}, \\ \hat{f}_{t\varphi}^{(1)} &= -\frac{\nu(4\nu^2 - 3)}{m^2 \ell^2}, \\ \hat{f}_{t\varphi}^{(0)} &= \frac{(4\nu^2 - 3)\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}}{2m^2 \ell^2}, \\ \hat{f}_{\varphi\varphi}^{(2)} &= -\frac{9(\nu^2 - 1)(2\nu^2 - 1)}{4m^2 \ell^2}, \\ \hat{f}_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{(2\nu^2 - 3)(\nu^2 + 3)(r_+ + r_-)}{4m^2 \ell^2} + \frac{\nu(4\nu^2 - 3)\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}}{m^2 \ell^2}, \\ \hat{f}_{\varphi\varphi}^{(0)} &= -\frac{3(\nu^2 - 1)(\nu^2 + 3)r_+ r_-}{2m^2 \ell^2}.\end{aligned}$$

Otras cantidades relevantes para los términos de borde es el tensor $\nabla_r \hat{f}_{ij}$, cuyas componentes en la expansión para r grande $\nabla_r \hat{f}_{ij}^{(n)}$, son las siguientes

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_r \hat{f}_{tt}^{(0)} &= 0, \\ \mathcal{D}_r \hat{f}_{t\varphi}^{(1)} &= -\frac{6\nu(2\nu^2 - 3)\sqrt{\nu^2 + 3}r}{m^2 \ell^3}, \\ \mathcal{D}_r \hat{f}_{t\varphi}^{(0)} &= \frac{\nu\sqrt{\nu^2 + 3}(2\nu^2 - 3)(r_+ + r_-)}{2m^2 \ell^3}, \\ \mathcal{D}_r \hat{f}_{\varphi\varphi}^{(2)} &= -\frac{2(\nu^2 - 1)(6\nu^2 - 9)\sqrt{\nu^2 + 3}}{4m^2 \ell^3}, \\ \mathcal{D}_r \hat{f}_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{(2\nu^2 - 3)\sqrt{\nu^2 + 3}}{2m^2 \ell^3}((\nu^2 - 3)(r_+ + r_-) + 2\nu\sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}), \\ \mathcal{D}_r \hat{f}_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \frac{(2\nu^2 - 3)(\nu^2 + 3)}{2m^2 \ell^3}(\sqrt{\nu^2 + 3}(r_+^2 + r_-^2) - 4\nu\sqrt{r_+ r_-}(r_+ + r_-) \\ &\quad + \sqrt{\nu^2 + 3}r_+ r_-).\end{aligned}$$

Las contribuciones a las cargas $\mathcal{M} = 2\pi\rho u^i T_{ij}^* \xi^j$ y $\mathcal{J} = 2\pi\rho u^i T_{i\varphi}^*$ provienen de las expansiones para r grande $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_{(1)}r + \mathcal{M}_{(0)} + \dots$ y $\mathcal{J} \simeq \mathcal{J}_{(2)}r^2 + \mathcal{J}_{(1)}r + \mathcal{J}_{(0)} + \dots$ están compuestas del siguiente modo: para la masa

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}_{(1)}}{2\pi} &= \rho^{(1)} u_{(0)}^t t_{tt}^{(0)} + \rho^{(1)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(1)} \xi_{-1}^\varphi + \rho^{(1)} u_{(-1)}^\varphi t_{\varphi t}^{(1)} = 0, \\ \frac{\mathcal{M}_{(0)}}{2\pi} &= \rho^{(1)} u_{(-1)}^t t_{tt}^{(0)} + \rho^{(0)} u_{(0)}^t t_{tt}^{(0)} + \rho^{(1)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(0)} \xi_{(-1)}^\varphi + \\ &\quad \rho^{(1)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(1)} \xi_{(-2)}^\varphi + \rho^{(1)} u_{(-1)}^t t_{t\varphi}^{(1)} \xi_{(-1)}^\varphi + \\ &\quad \rho^{(0)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(1)} \xi_{(-1)}^\varphi + \rho^{(1)} u_{(-1)}^\varphi t_{\varphi t}^{(0)} + \rho^{(1)} u_{(-2)}^\varphi t_{\varphi t}^{(1)} + \\ &\quad \rho^{(0)} u_{(-1)}^\varphi t_{\varphi t}^{(1)} + \rho^{(1)} u_{(-1)}^\varphi t_{\varphi\varphi}^{(1)} \xi_{(-1)}^\varphi, \end{aligned}$$

donde $\rho^{(n)}$ se refiere a las componentes de la expansión de la función métrica (4.20b) en potencias del radio r ; análogamente para la expansión de r grande de $u^t = u_{(0)}^t + u_{(-1)}^t r^{-1} + u_{(-2)}^t r^{-2}$, $u^\varphi \simeq u_{(-1)}^\varphi r^{-1} + u_{(-2)}^\varphi r^{-2}$ y de los vectores de Killing $\xi^t = \xi_{(0)}^t = 1$, $\xi^\varphi \simeq \xi_{(-1)}^\varphi r^{-1} + \xi_{(-2)}^\varphi r^{-2}$. Para el momento angular, la expresión análoga es

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}_{(2)}}{2\pi} &= \rho^{(1)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(1)}, \\ \frac{\mathcal{J}_{(1)}}{2\pi} &= \rho^{(1)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(0)} + \rho^{(1)} u_{(-1)}^t t_{t\varphi}^{(1)} + \rho^{(0)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(1)} + \rho^{(1)} u_{(-1)}^\varphi t_{\varphi t}^{(1)}, \\ \frac{\mathcal{J}_{(0)}}{2\pi} &= \rho^{(1)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(-1)} + \rho^{(1)} u_{(-1)}^t t_{t\varphi}^{(0)} + \rho^{(1)} u_{(-2)}^t t_{t\varphi}^{(1)} \\ &\quad + \rho^{(0)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(0)} + \rho^{(0)} u_{(-1)}^t t_{t\varphi}^{(1)} + \rho^{(-1)} u_{(0)}^t t_{t\varphi}^{(1)} + \\ &\quad + \rho^{(1)} u_{(-1)}^\varphi t_{\varphi\varphi}^{(0)} + \rho^{(1)} u_{(-2)}^\varphi t_{\varphi\varphi}^{(1)} + \rho^{(0)} u_{(-1)}^\varphi t_{\varphi\varphi}^{(1)}. \end{aligned}$$

Entonces, uno encuentra que la masa del agujero negro está dada por $\mathcal{M}_{(0)}$ mientras que el del momento angular está dado por $\mathcal{J}_{(0)}$.

A.2. Relación entre WAdS₃ tipo-tiempo y tipo-espacio

Como veremos, la relación entre las cargas que hemos calculados de los defectos en tWAdS₃ y de los agujeros negros en WAdS₃ no es tan simple como se podría pensar *a priori*. Los agujeros negros WAdS₃ son soluciones que tienden asintóticamente al espacio WAdS₃ estirado tipo espacio; ver [ALP⁺09] y referencias ahí. Como describiremos más abajo, esos agujeros negros pueden obtenerse desde la solución tipo-tiempo por medio de un cambio de coordenadas complejo.

Los defectos rotantes en tWAdS₃ están dados por el siguiente elemento de línea¹

$$ds^2 = -dt^2 - 4\omega r dt d\varphi + \frac{dr^2}{(2r^2\omega^2 + \lambda_{\mu,j}(r))} - (2r^2\omega^2 - \lambda_{\mu,j}(r)) d\varphi^2, \quad (\text{A.1a})$$

donde

$$\lambda_{\mu,j}(r) = \frac{2r^2}{\ell^2} + 2(1 - \mu)r - j\ell^2, \quad (\text{A.1b})$$

y donde $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $0 \leq \mu \leq 1$, and $\phi \in [0, 2\pi)$. La métrica (A.1) involucra un nuevo parámetro $j \in \mathbb{R}$, y se reduce a (4.38) cuando $j = 0$. Notemos también que solo $\xi^t \sim \partial_t$ and $\xi^\varphi \sim \partial_\varphi$ de los cuatro generadores de $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$ sobreviven como vectores de Killing exactos de la métrica (A.1).

Ahora consideremos la doble rotación de Wick

$$t \rightarrow i\tau, \quad \varphi \rightarrow -i\Theta, \quad \omega \rightarrow -\omega, \quad r \rightarrow -r, \quad j \rightarrow -j,$$

y, segundo, $\tau = t' - \ell\sqrt{j}\Theta$. Finalmente, para poder comparar con las coordenadas utilizadas en la literatura debemos reescalar el tiempo como $t' \rightarrow LT$.

El cambio de coordenadas de arriba mapea la métrica tipo tiempo (A.1) en la solución de agujero negro en WAdS₃ (4.19)

$$ds^2 = L^2 dT^2 + \frac{L^2 dR^2}{(\nu^2 + 3)(R - r_+)(R - r_-)} + L^2(2\nu R - \sqrt{r_+ r_-}(\nu^2 + 3)) dT d\Theta + \frac{RL^2}{4} \left[3(\nu^2 - 1)R + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{r_+ r_-}(\nu^2 + 3) \right] d\Theta^2, \quad (\text{A.2})$$

con $R = -2r/L^2$ y realizando las siguientes identificaciones de parámetros

$$\nu = \omega L; \quad L^2 = \frac{3}{\omega^2 + 2\ell^{-2}}; \quad (\text{A.3a})$$

$$r_\pm = \frac{\ell^2}{L^2} \left[\frac{-(1 - \mu) \pm \sqrt{(1 - \mu)^2 - 2(\omega^2 \ell^2 + 1)j}}{(\omega^2 \ell^2 + 1)} \right]. \quad (\text{A.3b})$$

Las siguientes relaciones serán útiles

$$r_+ + r_- = \frac{2\ell^2(\mu - 1)}{L^2(1 + \ell^2\omega^2)}; \quad r_+ r_- = \frac{2j\ell^4}{L^4(1 + \ell^2\omega^2)}.$$

¹Notemos las dimensiones asignadas a los parámetros y las coordenadas: $[t] = l^1, [r] = l^2, [\phi] = l^0, [\ell] = l^1, [\omega] = l^{-1}, [\mu] = l^0, [j] = l^0$, donde l tiene dimensiones de longitud.

Los vectores de Killing de las geometrías WAdS tipo tiempo y tipo espacio están relacionadas del siguiente modo

$$\partial_t = \frac{i}{L} \partial_T, \quad \partial_\varphi = \frac{\ell}{L} \sqrt{j} \partial_T + i \partial_\Theta.$$

Este cambio de coordenadas dependiente de las cargas hace que la relación entre las cargas de los WAdS tipo tiempo y tipo espacio sean más complicada que una mera continuación analítica.

Realizando el siguiente cambio en (A.2) $LT \rightarrow t$, $R \rightarrow r$ y $L\Theta \rightarrow \varphi$, podemos asignar las dimensiones del siguiente modo $[t] = l^1, [r] = l^1, [\varphi] = l^0, [L] = l^1, [\nu] = l^0, [r_\pm] = l^1$ y la expresión de la masa de los agujeros negros WAdS se convierte en ²

$$\mathcal{M}_{\text{WBH}} = Q_{\partial_T} = \frac{\nu(\nu^2 + 3)}{GL(20\nu^2 - 3)} \left((r_- + r_+) \nu - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right),$$

mientras que la expresión para el momento angular es ³

$$\mathcal{J}_{\text{WBH}} = Q_{\partial_\Theta} = \frac{\nu(\nu^2 + 3)}{4GL(20\nu^2 - 3)} \left((5\nu^2 + 3)r_+ r_- - 2\nu \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} (r_+ + r_-) \right).$$

Utilizando las relaciones (A.3) entre los parámetros de los WAdS tipo tiempo y tipo espacio, uno observa que al ir de la métrica el tipo-tiempo al tipo-espacio se involucra un cambio de coordenadas dependiente de las cargas y no globalmente definido, más precisamente, la definición $\tau = t' - \ell \sqrt{j} \Theta$ de arriba. Esto implica que las cargas tipo-espacio y tipo-tiempo no coinciden. Solo en el caso $j = 0$ uno ve que las masas están relacionadas⁴ de acuerdo a $\partial_t \sim L^{-1} \partial_T$,

$$\mathcal{M}_{\text{WBH}}|_{j=0} = L^{-1} \mathcal{M}.$$

Es importante remarcar que, en el caso de los defectos rotantes en tWAdS₃ y, debido a la dependencia en j del cambio de coordenadas, las cargas conservadas no pueden ser obtenidas simplemente desde la masa y el momento angular de los agujeros negros en WAdS₃ tipo espacio.

²Esta expresión viene de la ecuación (D.4) de la referencia [NPY10], que coincide con la ecuación (27) de [GG13] sin el factor 1/2 que no debería estar presente. Notemos que esta expresión ha sido obtenida independientemente con el formalismo covariante [DFMG⁺15].

³Resulta de tomar la ecuación (30) de [GG13] que ha sido chequeado con [Cle09b]. Notemos que esta expresión también ha sido obtenida independientemente en el formalismo covariante [DFMG⁺15].

⁴A menos de un factor independiente de μ que no puede ser vista en la integración.

Apéndice B

Publicaciones relacionadas con la tesis

Los principales resultados de la presente tesis fueron publicados en revistas internacionales especializadas en el área. A continuación los enumeramos

- Chapter 4
 - A. Garbarz, G. Giribet, A. Goya and M. Leston, *Quasilocal energy for three-dimensional massive gravity solutions with chiral deformations of AdS_3 boundary conditions*, Gen.Rel.Grav. **46** (2014) 1735, [1307.4791](#)
 - G. Giribet and A. Goya, *The Brown-York mass of black holes in Warped Anti-de Sitter space*, JHEP **1303** (2013) 130, [1212.2100](#)
 - L. Donnay, J. Fernandez-Melgarejo, G. Giribet, A. Goya and E. Lavia, *Conserved charges in timelike warped AdS_3 spaces*, Phys.Rev. **D91** (2015), no. 12, 125006, [1504.05212](#)
- Capítulo 5
 - E. A. Bergshoeff, A. F. Goya, W. Merbis and J. Rosseel, *Logarithmic AdS Waves and Zwei-Dreibein Gravity*, JHEP **1404** (2014) 012, [1401.5386](#)
 - A. F. Goya, *Anisotropic Scale Invariant Spacetimes and Black Holes in Zwei-Dreibein Gravity*, JHEP **1409** (2014) 132, [1406.4771](#)

Los temas estudiados en el Capítulo 4 de esta tesis son continuación del artículo

- G. Giribet, A. Goya and M. Leston, *Boundary stress tensor and asymptotically AdS_3 non-Einstein spaces at the chiral point*, Phys.Rev. **D84** (2011) 066003, [1108.0400](#)

el cual resume algunos resultados de mi tesis de licenciatura y que, por ende, no entraron en esta tesis doctoral.

Bibliografía

- [A⁺16] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [AAN10] Hamid R. Afshar, Mohsen Alishahiha, and Ali Naseh. On three dimensional bigravity. *Phys. Rev.*, D81:044029, 2010.
- [AAN⁺16] A. Akhavan, M. Alishahiha, A. Naseh, A. Nemati, and A. Shirzad. New Bi-Gravity from New Massive Gravity. *JHEP*, 05:006, 2016.
- [ABGGH09] Eloy Ayon-Beato, Alan Garbarz, Gaston Giribet, and Mokhtar Hassaine. Lifshitz Black Hole in Three Dimensions. *Phys. Rev.*, D80:104029, 2009.
- [ABGGH10] Eloy Ayon-Beato, Alan Garbarz, Gaston Giribet, and Mokhtar Hassaine. Analytic Lifshitz black holes in higher dimensions. *JHEP*, 04:030, 2010.
- [ABGH09] Eloy Ayon-Beato, Gaston Giribet, and Mokhtar Hassaine. Bending AdS Waves with New Massive Gravity. *JHEP*, 05:029, 2009.
- [ABGH11] Eloy Ayon-Beato, Gaston Giribet, and Mokhtar Hassaine. Deeper discussion of Schrodinger invariant and Logarithmic sectors of higher-curvature gravity. *Phys. Rev.*, D83:104033, 2011.
- [ABH06] Eloy Ayon-Beato and Mokhtar Hassaine. Exploring AdS waves via nonminimal coupling. *Phys. Rev.*, D73:104001, 2006.
- [ABHJA14] Eloy Ayón-Beato, Mokhtar Hassaine, and María Montserrat Juárez-Aubry. Towards the uniqueness of Lifshitz black holes and solitons in New Massive Gravity. *Phys. Rev.*, D90(4):044026, 2014.
- [ABM14] Hamid R. Afshar, Eric A. Bergshoeff, and Wout Merbis. Extended massive gravity in three dimensions. *JHEP*, 08:115, 2014.
- [AD82] L. F. Abbott and Stanley Deser. Stability of Gravity with a Cosmological Constant. *Nucl. Phys.*, B195:76, 1982.
- [AD12] Gokhan Alkac and Deniz Olgu Devecioglu. Covariant Symplectic Structure and Conserved Charges of New Massive Gravity. *Phys. Rev.*, D85:064048, 2012.
- [AGM⁺00] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hiroshi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 323:183–386, 2000.

- [AKT16] Gökhan Alkaç, Ercan Kilicarslan, and Bayram Tekin. Asymptotically flat black holes in 2+1 dimensions. *Phys. Rev.*, D93(8):084003, 2016.
- [ALP⁺09] Dionysios Anninos, Wei Li, Megha Padi, Wei Song, and Andrew Strominger. Warped AdS(3) Black Holes. *JHEP*, 03:130, 2009.
- [Ann09] Dionysios Anninos. Hopfing and Puffing Warped Anti-de Sitter Space. *JHEP*, 09:075, 2009.
- [Apo16] Luis Apolo. The covariant action of higher spin black holes in three dimensions. *JHEP*, 05:097, 2016.
- [BBCG06] Maximo Banados, Glenn Barnich, Geoffrey Compere, and Andres Gomberoff. Three dimensional origin of Godel spacetimes and black holes. *Phys. Rev.*, D73:044006, 2006.
- [BC07] Adel Bouchareb and Gerard Clement. Black hole mass and angular momentum in topologically massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 24:5581–5594, 2007.
- [BC09a] M. Blagojevic and B. Cvetkovic. Asymptotic structure of topologically massive gravity in spacelike stretched AdS sector. *JHEP*, 09:006, 2009.
- [BC09b] M. Blagojevic and B. Cvetkovic. Canonical structure of topologically massive gravity with a cosmological constant. *JHEP*, 05:073, 2009.
- [BC16] Luca Basanisi and Shankhadeep Chakrabortty. Holographic Entanglement Entropy in NMG. 2016.
- [BCH73] James M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [BdBm02] Vijay Balasubramanian, Jan de Boer, and Djordje Minic. Mass, entropy and holography in asymptotically de Sitter spaces. *Phys. Rev.*, D65:123508, 2002.
- [BdHH⁺13] Eric A. Bergshoeff, Sjoerd de Haan, Olaf Hohm, Wout Merbis, and Paul K. Townsend. Zwei-Dreibein Gravity: A Two-Frame-Field Model of 3D Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 111(11):111102, 2013. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*111,no.25,259902(2013)].
- [BdHM⁺12] Eric A. Bergshoeff, Sjoerd de Haan, Wout Merbis, Jan Rosseel, and Thomas Zojer. On Three-Dimensional Tricritical Gravity. *Phys. Rev.*, D86:064037, 2012.
- [BDP13] Máximo Bañados, Cedric Deffayet, and Miguel Pino. The Boulware-Deser mode in 3D first-order massive gravity. *Phys. Rev.*, D88(12):124016, 2013.
- [Bek73] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, D7:2333–2346, 1973.
- [BGMR14] Eric A. Bergshoeff, Andrés F. Goya, Wout Merbis, and Jan Rosseel. Logarithmic AdS Waves and Zwei-Dreibein Gravity. *JHEP*, 1404:012, 2014.
- [BGVZ11] Mario Bertin, Daniel Grumiller, Dmitri Vassilevich, and Thomas Zojer. Generalised massive gravity one-loop partition function and AdS/(L)CFT. *JHEP*, 06:111, 2011.

- [BH86] J. David Brown and M. Henneaux. Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity. *Commun.Math.Phys.*, 104:207–226, 1986.
- [BHM⁺15] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, Wout Merbis, Alasdair J. Routh, and Paul K. Townsend. Chern-Simons-like Gravity Theories. *Lect. Notes Phys.*, 892:181–201, 2015.
- [BHRT11] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, Jan Rosseel, and Paul K. Townsend. Modes of Log Gravity. *Phys. Rev.*, D83:104038, 2011.
- [BHT09a] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K. Townsend. Massive Gravity in Three Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 102:201301, 2009.
- [BHT09b] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K. Townsend. More on Massive 3D Gravity. *Phys. Rev.*, D79:124042, 2009.
- [BK99] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity. *Commun. Math. Phys.*, 208:413–428, 1999.
- [BK08] Neil Barnaby and Niky Kamran. Dynamics with infinitely many derivatives: The Initial value problem. *JHEP*, 02:008, 2008.
- [BM08] Koushik Balasubramanian and John McGreevy. Gravity duals for non-relativistic CFTs. *Phys. Rev. Lett.*, 101:061601, 2008.
- [BM09] Koushik Balasubramanian and John McGreevy. An Analytic Lifshitz black hole. *Phys. Rev.*, D80:104039, 2009.
- [BS06] Ingemar Bengtsson and Patrik Sandin. Anti de Sitter space, squashed and stretched. *Class. Quant. Grav.*, 23:971–986, 2006.
- [BT09] Maximo Banados and Stefan Theisen. Three-dimensional massive gravity and the bigravity black hole. *JHEP*, 11:033, 2009.
- [BTZ92] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1849–1851, 1992.
- [BY93] J. David Brown and James W. York, Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev.*, D47:1407–1419, 1993.
- [Car01] Sean M. Carroll. Dark energy and the preposterous universe. 2001.
- [Car04] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison-Wesley, 2004.
- [CD09a] Geoffrey Compere and Stephane Detournay. Boundary conditions for spacelike and timelike warped AdS_3 spaces in topologically massive gravity. *JHEP*, 08:092, 2009.
- [CD09b] Geoffrey Compere and Stephane Detournay. Semi-classical central charge in topologically massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 26:012001, 2009. [Erratum: *Class. Quant. Grav.*26,139801(2009)].

- [CdBD10] Geoffrey Compere, Sophie de Buyl, and Stephane Detournay. Non-Einstein geometries in Chiral Gravity. *JHEP*, 10:042, 2010.
- [CHvD95] Oliver Coussaert, Marc Henneaux, and Peter van Driel. The Asymptotic dynamics of three-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant. *Class. Quant. Grav.*, 12:2961–2966, 1995.
- [Cle09a] Gerard Clement. Black holes with a null Killing vector in new massive gravity in three dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 26:165002, 2009.
- [Cle09b] Gerard Clement. Warped AdS(3) black holes in new massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 26:105015, 2009.
- [CMT12] Francisco Correa, Cristian Martinez, and Ricardo Troncoso. Hairy Black Hole Entropy and the Role of Solitons in Three Dimensions. *JHEP*, 02:136, 2012.
- [CSLM⁺11] Jorge Casalderrey-Solana, Hong Liu, David Mateos, Krishna Rajagopal, and Urs Achim Wiedemann. Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions. *P*, 2011.
- [CSS13] Geoffrey Compère, Wei Song, and Andrew Strominger. New Boundary Conditions for AdS₃. *JHEP*, 05:152, 2013.
- [Cun13] Colin Cunliff. Non-Fefferman-Graham asymptotics and holographic renormalization in New Massive Gravity. *JHEP*, 04:141, 2013.
- [DED20] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [DFMG⁺15] L. Donnay, J.J. Fernandez-Melgarejo, G. Giribet, A. Goya, and E. Lavia. Conserved charges in timelike warped AdS₃ spaces. *Phys.Rev.*, D91(12):125006, 2015.
- [DG15] Laura Donnay and Gaston Giribet. Holographic entropy of Warped-AdS₃ black holes. *JHEP*, 06:099, 2015.
- [DHH12] Stephane Detournay, Thomas Hartman, and Diego M. Hofman. Warped Conformal Field Theory. *Phys. Rev.*, D86:124018, 2012.
- [dHSS01] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, 217:595–622, 2001.
- [DJT82a] Stanley Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Three-Dimensional Massive Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 48:975–978, 1982.
- [DJT82b] Stanley Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically Massive Gauge Theories. *Annals Phys.*, 140:372–411, 1982. [Annals Phys.281,409(2000)].
- [DMZ13] C. Deffayet, J. Mourad, and G. Zahariade. Covariant constraints in ghost free massive gravity. *JCAP*, 1301:032, 2013.

- [DN84] Stanley Deser and Rafael I. Nepomechie. Gauge Invariance Versus Masslessness in De Sitter Space. *Annals Phys.*, 154:396, 1984.
- [DOPS05] Stephane Detournay, Domenico Orlando, P. Marios Petropoulos, and Philippe Spindel. Three-dimensional black holes from deformed anti-de Sitter. *JHEP*, 07:072, 2005.
- [dRGT11] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J. Tolley. Resummation of Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 106:231101, 2011.
- [DT02] Stanley Deser and Bayram Tekin. Gravitational energy in quadratic curvature gravities. *Phys. Rev. Lett.*, 89:101101, 2002.
- [DT03] Stanley Deser and Bayram Tekin. Energy in generic higher curvature gravity theories. *Phys. Rev.*, D67:084009, 2003.
- [DW01] Stanley Deser and A. Waldron. Gauge invariances and phases of massive higher spins in (A)dS. *Phys. Rev. Lett.*, 87:031601, 2001.
- [Ein16] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [FG85] Charles Fefferman and Robin Graham. Conformal invariants. *The Mathematical Heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984)*, *Astérisque*, 1985, Numero Hors Serie:95–116, 1985.
- [FP39] M. Fierz and W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A173:211–232, 1939.
- [Gab07] Matthias R. Gaberdiel. Constraints on extremal self-dual CFTs. *JHEP*, 11:087, 2007.
- [Gai08] Davide Gaiotto. Monster symmetry and Extremal CFTs. 2008.
- [GG13] Gaston Giribet and Andres Goya. The Brown-York mass of black holes in Warped Anti-de Sitter space. *JHEP*, 1303:130, 2013.
- [GGGL14] Alan Garbarz, Gaston Giribet, Andrés Goya, and Mauricio Leston. Quasilocal energy for three-dimensional massive gravity solutions with chiral deformations of AdS_3 boundary conditions. *Gen.Rel.Grav.*, 46:1735, 2014.
- [GGL11] Gaston Giribet, Andres Goya, and Mauricio Leston. Boundary stress tensor and asymptotically AdS_3 non-Einstein spaces at the chiral point. *Phys.Rev.*, D84:066003, 2011.
- [GGV09] Alan Garbarz, Gaston Giribet, and Yerko Vasquez. Asymptotically AdS_3 Solutions to Topologically Massive Gravity at Special Values of the Coupling Constants. *Phys. Rev.*, D79:044036, 2009.
- [GGV10] Matthias R. Gaberdiel, Daniel Grumiller, and Dmitri Vassilevich. Graviton 1-loop partition function for 3-dimensional massive gravity. *JHEP*, 11:094, 2010.

- [GH77] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D15:2752–2756, 1977.
- [GH10] Daniel Grumiller and Olaf Hohm. AdS(3)/LCFT(2): Correlators in New Massive Gravity. *Phys. Lett.*, B686:264–267, 2010.
- [GHSS09] Monica Guica, Thomas Hartman, Wei Song, and Andrew Strominger. The Kerr/CFT Correspondence. *Phys. Rev.*, D80:124008, 2009.
- [GJ08] Daniel Grumiller and Niklas Johansson. Instability in cosmological topologically massive gravity at the chiral point. *JHEP*, 07:134, 2008.
- [GJ09] Daniel Grumiller and Niklas Johansson. Consistent boundary conditions for cosmological topologically massive gravity at the chiral point. *Int. J. Mod. Phys.*, D17:2367–2372, 2009.
- [GJZ11] Daniel Grumiller, Niklas Johansson, and Thomas Zojer. Short-cut to new anomalies in gravity duals to logarithmic conformal field theories. *JHEP*, 01:090, 2011.
- [GK08] Matthias R. Gaberdiel and Christoph A. Keller. Modular differential equations and null vectors. *JHEP*, 09:079, 2008.
- [GKP98] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998.
- [GL10] Gaston Giribet and Mauricio Leston. Boundary stress tensor and counterterms for weakened AdS_3 asymptotic in New Massive Gravity. *JHEP*, 09:070, 2010.
- [GN16] Mahdis Ghodrati and Ali Naseh. Phase transitions in BHT Massive Gravity. 2016.
- [God49] Kurt Godel. An Example of a new type of cosmological solutions of Einstein’s field equations of gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, 21:447–450, 1949.
- [Goy14] Andrés F. Goya. Anisotropic Scale Invariant Spacetimes and Black Holes in Zwei-Dreibein Gravity. *JHEP*, 1409:132, 2014.
- [GPS08] G. W. Gibbons, C. N. Pope, and E. Sezgin. The General Supersymmetric Solution of Topologically Massive Supergravity. *Class. Quant. Grav.*, 25:205005, 2008.
- [GRRZ13] D. Grumiller, W. Riedler, J. Rosseel, and T. Zojer. Holographic applications of logarithmic conformal field theories. *J. Phys.*, A46:494002, 2013.
- [GS85] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti. QUANTUM GRAVITY AT TWO LOOPS. *Phys. Lett.*, B160:81–86, 1985.
- [GS86] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti. The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity. *Nucl. Phys.*, B266:709–736, 1986.
- [GS10] Daniel Grumiller and Ivo Sachs. AdS (3) / LCFT (2) — Correlators in Cosmological Topologically Massive Gravity. *JHEP*, 03:012, 2010.
- [GT15] Gaston Giribet and Minas Tsoukalas. Warped-AdS3 black holes with scalar halo. *Phys. Rev.*, D92(6):064027, 2015.

- [GTT11] Hernan A. Gonzalez, David Tempo, and Ricardo Troncoso. Field theories with anisotropic scaling in 2D, solitons and the microscopic entropy of asymptotically Lifshitz black holes. *JHEP*, 11:066, 2011.
- [Gur93] V. Gurarie. Logarithmic operators in conformal field theory. *Nucl. Phys.*, B410:535–549, 1993.
- [GZ16] Steven B. Giddings and Hao Zhang. Kaluza-Klein graviton phenomenology for warped compactifications, and the 750 GeV diphoton excess. *Phys. Rev.*, D93(11):115002, 2016.
- [Har09] Sean A. Hartnoll. Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Class. Quant. Grav.*, 26:224002, 2009.
- [HE11] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2011.
- [HHH08] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog, and Gary T. Horowitz. Building a Holographic Superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, 101:031601, 2008.
- [Hin12] Kurt Hinterbichler. Theoretical Aspects of Massive Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 84:671–710, 2012.
- [HKO15] Jelle Hartong, Elias Kiritsis, and Niels A. Obers. Schrödinger Invariance from Lifshitz Isometries in Holography and Field Theory. *Phys. Rev.*, D92:066003, 2015.
- [HMT09] Marc Henneaux, Cristian Martinez, and Ricardo Troncoso. Asymptotically anti-de Sitter spacetimes in topologically massive gravity. *Phys. Rev.*, D79:081502, 2009.
- [HMT11] Marc Henneaux, Cristian Martinez, and Ricardo Troncoso. Asymptotically warped anti-de Sitter spacetimes in topologically massive gravity. *Phys. Rev.*, D84:124016, 2011.
- [HR12] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen. Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity. *JHEP*, 02:126, 2012.
- [HR15] Diego M. Hofman and Blaise Rollier. Warped Conformal Field Theory as Lower Spin Gravity. *Nucl. Phys.*, B897:1–38, 2015.
- [HRTZ12] Olaf Hohm, Alasdair Routh, Paul K. Townsend, and Baocheng Zhang. On the Hamiltonian form of 3D massive gravity. *Phys. Rev.*, D86:084035, 2012.
- [HSMvS15] Sayed Fawad Hassan, Angnis Schmidt-May, and Mikael von Strauss. Higher Derivative Gravity and Conformal Gravity From Bimetric and Partially Massless Bimetric Theory. *Universe*, 1(2):92–122, 2015.
- [HT10] Olaf Hohm and Erik Tonni. A boundary stress tensor for higher-derivative gravity in AdS and Lifshitz backgrounds. *JHEP*, 04:093, 2010.

- [IKOP05] Dan Israel, Costas Kounnas, Domenico Orlando, and P. Marios Petropoulos. Electric/magnetic deformations of S^{*3} and $AdS(3)$, and geometric cosets. *Fortsch. Phys.*, 53:73–104, 2005.
- [Isr04] Dan Israel. Quantization of heterotic strings in a Godel / anti-de Sitter space-time and chronology protection. *JHEP*, 01:042, 2004.
- [ISS71] C. J. Isham, Abdus Salam, and J. A. Strathdee. F-dominance of gravity. *Phys. Rev.*, D3:867–873, 1971.
- [KLM08] Shamit Kachru, Xiao Liu, and Michael Mulligan. Gravity duals of Lifshitz-like fixed points. *Phys. Rev.*, D78:106005, 2008.
- [KO07] Georgios Kofinas and Rodrigo Olea. Universal regularization prescription for Lovelock AdS gravity. *JHEP*, 11:069, 2007.
- [KSS05] P. Kovtun, Dan T. Son, and Andrei O. Starinets. Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics. *Phys. Rev. Lett.*, 94:111601, 2005.
- [LS09a] Yan Liu and Ya-Wen Sun. Consistent Boundary Conditions for New Massive Gravity in AdS_3 . *JHEP*, 05:039, 2009.
- [LS09b] Yan Liu and Ya-Wen Sun. On the Generalized Massive Gravity in $AdS(3)$. *Phys. Rev.*, D79:126001, 2009.
- [LSS08] Wei Li, Wei Song, and Andrew Strominger. Chiral Gravity in Three Dimensions. *JHEP*, 04:082, 2008.
- [Mal99] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [MC96] Karim Ait Moussa and Gerard Clement. Topologically massive gravitoelectrodynamics: Exact solutions. *Class. Quant. Grav.*, 13:2319–2328, 1996.
- [MCL03] Karim Ait Moussa, Gerard Clement, and Cedric Leygnac. The Black holes of topologically massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 20:L277–L283, 2003.
- [Mer14] Wout Merbis. *Chern-Simons-like Theories of Gravity*. PhD thesis, Groningen U., 2014.
- [MSS10] Alexander Maloney, Wei Song, and Andrew Strominger. Chiral Gravity, Log Gravity and Extremal CFT. *Phys. Rev.*, D81:064007, 2010.
- [MW10] Alexander Maloney and Edward Witten. Quantum Gravity Partition Functions in Three Dimensions. *JHEP*, 02:029, 2010.
- [NPY10] Soonkeon Nam, Jong-Dae Park, and Sang-Heon Yi. Mass and Angular momentum of Black Holes in New Massive Gravity. *Phys. Rev.*, D82:124049, 2010.
- [NS07] Yusuke Nishida and Dam T. Son. Nonrelativistic conformal field theories. *Phys. Rev.*, D76:086004, 2007.

- [OTT09] Julio Oliva, David Tempo, and Ricardo Troncoso. Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity. *JHEP*, 07:011, 2009.
- [P⁺99] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.
- [Pau10] Miguel F. Paulos. New massive gravity extended with an arbitrary number of curvature corrections. *Phys. Rev.*, D82:084042, 2010.
- [R⁺98] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.
- [RS98] M. Rooman and P. Spindel. Godel metric as a squashed anti-de Sitter geometry. *Class. Quant. Grav.*, 15:3241–3249, 1998.
- [RT83] M. J. Reboucas and J. Tiomno. On the Homogeneity of Riemannian Space-Times of Godel Type. *Phys. Rev.*, D28:1251–1264, 1983.
- [Sin10] Aninda Sinha. On the new massive gravity and AdS/CFT. *JHEP*, 06:061, 2010.
- [Son08] D. T. Son. Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrodinger symmetry. *Phys. Rev.*, D78:046003, 2008.
- [Ste77] K. S. Stelle. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D16:953–969, 1977.
- [Ste78] K. S. Stelle. Classical Gravity with Higher Derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, 9:353–371, 1978.
- [Str08] Andrew Strominger. A Simple Proof of the Chiral Gravity Conjecture. 2008.
- [STvR09] Kostas Skenderis, Marika Taylor, and Balt C. van Rees. Topologically Massive Gravity and the AdS/CFT Correspondence. *JHEP*, 09:045, 2009.
- [Sus95] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995.
- [tH93] Gerard 't Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. In *Salamfest 1993:0284-296*, pages 0284–296, 1993.
- [Ton10] Erik Tonni. Warped black holes in 3D general massive gravity. *JHEP*, 08:070, 2010.
- [Vol15] Mikhail S. Volkov. Hairy black holes in theories with massive gravitons. *Lect. Notes Phys.*, 892:161–180, 2015.
- [Wal93] Robert M. Wald. Black hole entropy is the Noether charge. *Phys. Rev.*, D48:3427–3431, 1993.
- [Wei00] Steven Weinberg. The Cosmological constant problems. In *Sources and detection of dark matter and dark energy in the universe. Proceedings, 4th International Symposium, DM 2000, Marina del Rey, USA, February 23-25, 2000*, pages 18–26, 2000.

- [Wit98] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [Wit07] Edward Witten. Three-Dimensional Gravity Revisited. 2007.
- [Yor72] James W. York, Jr. Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, 28:1082–1085, 1972.
- [Zwi85] Barton Zwiebach. Curvature Squared Terms and String Theories. *Phys. Lett.*, B156:315–317, 1985.
- [Zwi06] B. Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2006.